



Boletim



SPE

Sociedade Portuguesa
de Estatística

Publicação semestral

primavera de 2026



BioEconomia no Crescimento Estocástico – Uma Contribuição Portuguesa

Crescimento Estocástico – um Grupo de Investigação nascido em Évora

Carlos A. Braumann 25

Modelos de crescimento populacional: tempos de extinção e impacto dos efeitos de Allee

Clara Carlos 42

Modelos de crescimento populacional em ambiente aleatório: políticas de pesca e otimização do lucro

Nuno M. Brites 49

Modelos estocásticos de crescimento individual e otimização do lucro

Patrícia A. Filipe e Gonçalo Jacinto 56

Modelos Mistos de Crescimento Individual e Problemas de Estimação

Gonçalo Jacinto, Patrícia A. Filipe e Nelson T. Jamba 63

| | |
|---|----|
| Editorial | 2 |
| Mensagem do Presidente | 4 |
| Notícias | 5 |
| <i>Enigmística</i> | 14 |
| Episódio na História da Estatística | 15 |
| BioEconomia no Crescimento Estocástico – Uma Contribuição Portuguesa | 25 |
| Ciência Estatística | 71 |
| Edições SPE - Minicursos | 72 |
| Boletim através do Tema Central | 73 |

Informação Editorial

Endereço: Sociedade Portuguesa de Estatística,
Campo Grande. Bloco C6. Piso 4.
1749-016 Lisboa. Portugal.

Telefone: +351.217500120

e-mail: spe@spestatistica.pt

URL: <https://www.spestatistica.pt>

ISSN: 1646-5903

Depósito Legal: 249102/06

Tiragem: Edição digital

Execução Gráfica e Impressão: Gráfica SobreireNSE

Editor: Fernando Rosado, fernando.rosado@fc.ul.pt

Sociedade Portuguesa de Estatística desde 1980

Editorial

... sobre o “trabalho futuro” e, a propósito de um Tema Central...

1. O *Boletim SPE* tem dedicado algumas edições para apresentar “grupos científicos” que especificamente pela área principal da sua produção se destacam nos mais diversos indicadores. Por exemplo, foi assim no *Boletim primavera 2007*, com a Escola de Extremos em Portugal e com a Escola Bayesiana, no *Boletim outono de 2023*.

Com os mesmos objetivos, de registos memoriais, o *Boletim SPE primavera de 2026*, está centrado numa “outra escola” – a primeira que está longe de Lisboa. Embora possamos sentir que as distâncias na atual era IA “são apenas virtuais”, todos sabemos que os (muito relativos, criticados e negativistas) *rankings*, constituem um dos fatores condicionantes do “afastamento real” talvez mesmo o “isolamento” vivido nas nossas Escolas Universitárias “mais afastadas” do centro científico – no caso vertente, na Universidade de Évora. A estes centros mais afastados, mais do que mostrar o seu valor também lhes é devido serem reconhecidos como raízes plantadas na descentralização num ambiente com menos estruturas tradicionais de apoio; como bibliotecas ou arquivos.

O Boletim, para cumprir um objetivo de “divulgação” a toda a comunidade e muito em especial aos estatísticos, desta vez, ressalta uma contribuição muito importante a vários níveis; porque é relevante do ponto de vista científico e talvez acima de tudo, porque o fundamental, o seu núcleo, está radicado numa universidade que teve de renascer após história atribulada.

De facto, a Universidade de Évora foi a segunda a ser fundada em Portugal. As referências do saber da época, após a criação da Universidade de Coimbra, indicaram Évora para local de “um serviço académico” para o sul do país. A adversidade de “o tempo e o modo” conduziu a um período muito atribulado que a História nos relata. Mas, como o germen era forte, no terceiro quartel do século XX, o recém-criado Instituto Universitário de Évora, que apenas viveu meia dúzia de anos, deu lugar à Universidade de Évora. No Alentejo profundo, a atual Universidade de Évora está, pois, a viver uma época jubilar de ouro. E, nesta renascida universidade, no interior do país, desde o seu início, laborou o Professor Carlos Braumann e à qual se tem dedicado com um projeto do mais elevado valor. O grupo nuclear do Tema Central da presente edição, tem as suas bases de partida sediadas na Universidade de Évora e, assim sendo, é também ele um elemento de prestígio para a própria universidade e onde se iniciaram investigadores já no caminho científico de outras academias. No conceito editorial de divulgação das “escolas científicas”, como já referido, é esse labor e, em especial, os seus frutos que o *Boletim SPE primavera de 2026* integra como Tema Central.

O título “BioEconomia no Crescimento Estocástico – Uma Contribuição Portuguesa” é muito feliz e, na opinião do editor, define muito bem “ao que vem esta edição”. Neste ponto deve salientar-se e reforçar a componente “Uma Contribuição Portuguesa”. E isto porque é a ela que estão ligados muitos dos autores do boletim primavera, ou que já colaboraram com o boletim e, na generalidade, a comunidade sabe “o quê” sobre a sua área de trabalho e o que tem feito e publicado. Um detalhe é a novel “BioEconomia” que ao ser incluído, também revela pioneirismo. É importante que o Boletim o registre.

Ao Professor Carlos Braumann, pela generosidade manifestada em mais esta colaboração em prol da Estatística, o *Boletim SPE* deve um sincero agradecimento; pelo empenho e a dedicação, desde sempre e por, na presente edição, ter desempenhado a função de coeditor – pela seleção de temas e pelos autores convidados. A “Escola de Évora” passa a constituir património editorial do *Boletim SPE*.

2. No próximo outono, a linha do tempo mostra 20 anos de Boletim.

O primeiro Tema Central, foi dedicado ao *Ensino e Aprendizagem da Estatística*. Ensino? O que mudou nestes vinte anos? Aprendizagem, no tempo em que o acrónimo IA apenas seria o pretérito imperfeito do verbo ir convertido em maiúsculas para algum realce comunicativo? Apesar da temática ser frequente nas páginas do Boletim, (e. g. edições de 2006, 2012, 2014 e 2023); a sua importância requer que se use, sempre, uma boa oportunidade para “atualizar”, “rejuvenescer” e “comparar” para, de algum modo ajudar a consolidar.

No *Boletim SPE outono 2026* aqueles temas vão ser revisitados e com valor acrescentado, num contexto do Episódio na História da Estatística que está incluído nesta edição (Cf. p. 15).

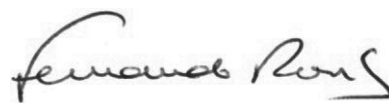
Este “tema central”, também torna possível prolongar o excelente debate sobre a problemática referida; iniciado no recente XXVII Congresso SPE e que pode ser continuado no *Boletim SPE outono2026*.

O tema central de cada Boletim é um desafio bianual que pretende contribuir para a definição de objetivos estatísticos individuais que, uma vez, reunidos permitem construir um “texto programático”; um horizonte para a SPE no seu todo. No seu quinquentenário, obviamente, (ainda mais) intensamente vividos e / ou assimilados pelos “estatísticos protagonistas do presente” e adaptando as emergentes diretrizes IA (que deve ser valorizada!) é de ouro a época para “dar mais um passo em frente”.

É presente, para futuro; que a continuidade de gerações reclama!

Divulgar Ciência Estatística e contribuir para uma mais alta literacia na sociedade é ponto forte dos estatutos da SPE e, portanto, também do Boletim SPE. Como muito bem nos aponta a Mensagem do Presidente da SPE, essa é tarefa generalista para a qual, em vários caminhos, também todos os leitores, sejam ou não especialistas, podem ser convocados pois ela é um motor da Ciência.

Sobre o “trabalho futuro” e a propósito do próximo Tema Central o Boletim, como sempre, está de portas abertas para receber e divulgar todas as contribuições. Fica o convite para que todos os interessados possam responder: Presente!



O Tema Central do próximo Boletim será, pois,

SPE 2030



Crescimento Estocástico – um Grupo de Investigação nascido em Évora

Carlos A. Braumann, braumann@uevora.pt

*Universidade de Évora, Escola de Ciências e Tecnologia, Departamento de Matemática
Universidade de Évora, Centro de Investigação em Matemática e Aplicações*

1. Introdução e apresentação do grupo da Bioeconomia do Crescimento Estocástico

A Universidade de Évora, no seu Departamento de Matemática e no seu Centro de Investigação em Matemática e Aplicações – CIMA, sempre deu grande importância às aplicações em Ciências da Vida, quer na área dos sistemas dinâmicos, quer das probabilidades e processos estocásticos, quer naturalmente da Estatística. No artigo de divulgação de Braumann e Alpizar-Jara 2009 no Boletim da SPE sobre o CIMA pode reconhecer-se a relevância destas aplicações, que se reforçou com a posterior reorganização do CIMA, as pontes com outros departamentos e centros de investigação, a forte ligação à comunidade envolvente, bem como com projetos de investigação e desenvolvimento e seu consequente impacto económico. Os mestrados na área da Matemática e da Estatística e o abrangente programa de doutoramento em Matemática têm permitido atrair estudantes para estas áreas. A interação dinâmica entre a teoria e as aplicações tem-se revelado um fator estruturante e impulsionador de avanços significativos em ambas as dimensões.

Hoje, correspondendo com muita gratidão ao convite do nosso Colega e Editor Professor Fernando Rosado, queria focar-me no Tema Central deste número do Boletim da SPE, dando uma ideia da contribuição de um grupo português, “nascido” na Universidade de Évora, para a Bioeconomia no Crescimento Estocástico usando modelos de equações diferenciais estocásticas – EDE. Estas equações nasceram com Uhlenbeck e Ornstein 1930 antes sequer de qualquer teoria subjacente e podem ser hoje estudadas em muitos livros como, só para citar alguns, Arnold 1974, Braumann 2005a (minicurso SPE) e 2019, Ito 1951, Karlin e Taylor 1981.

Cada artigo de divulgação que encontram neste número do Boletim SPE é da autoria de Colegas do grupo e procura dar a visão dos autores sobre os contributos do grupo num tópico em que têm dado contributos relevantes. Esses tópicos não dão, nem de longe, um retrato exaustivo do trabalho do grupo, procurando apenas proporcionar ao leitor interessado uma pequena amostra desse trabalho.

O grupo, que tem consistentemente trabalhado no Crescimento Estocástico de seres vivos e suas implicações económicas, começou comigo, que nisso trabalho há quase cinco décadas. Juntaram-se, já no século XXI, os Colegas Patrícia A. Filipe, Clara Carlos e Nuno M. Brites, cujas teses de doutoramento (e, no caso dos dois últimos, também dissertações de mestrado) orientei na Universidade de Évora com conclusão em 2011, 2013 e 2017, respetivamente. Hoje estão espalhados, respetivamente, pelo ISCTE, o Instituto Politécnico de Setúbal e o ISEG. Ao grupo juntou-se depois o Colega Gonçalo Jacinto, com um doutoramento de 2011 em processos estocásticos em telecomunicações orientado pelo Colega António Pacheco Pires; ele estava então na Universidade de Évora e está hoje na Universidade do Algarve. Que felicidade ter sido possível congregar esforços de tão notáveis Colegas! Esforços que se

reproduziram cientificamente, tendo-se depois juntado ao grupo um jovem doutorado na Universidade de Évora, Nelson T. Jamba, que foi orientado por Patrícia A. Filipe e Gonçalo Jacinto e está agora na Faculdade de Ciências Naturais da Universidade do Namibe em Angola. Todos estiveram ligados ao CIMA, ligação que quase todos ainda mantêm.

Como é natural, individualmente e em colaboração com colegas, tenho trabalhado e orientado pós-doutoramentos, doutoramentos e mestrados em áreas diversas de estatística e processos estocásticos, mas foi na área das EDE e suas aplicações (no crescimento estocástico e noutras aplicações) que desenvolvi a minha atividade principal. É uma área fascinante que envolve diversos ramos da Matemática, conjugando os sistemas dinâmicos, as probabilidades, os processos estocásticos e os métodos estatísticos, bem como um conhecimento razoável das áreas de aplicação. É por isso difícil em termos de atração de estudantes, dado o investimento inicial necessário, mas, vencido este, é altamente estimulante e compensadora.

Daí que, apesar da divulgação que procurei dar a estas matérias em diversos fóruns nacionais (exemplo: Braumann 2008 no Boletim SPE) e internacionais e que terá certamente contribuído para atrair o interesse por estas matérias, foi com a criação na Universidade de Évora de mestrados na área da Matemática em 1995/96 e principalmente com a criação do programa de doutoramento em Matemática em 2007/08 que tive a oportunidade de orientar dissertações de mestrado e teses de doutoramento em EDE e aplicações biológicas e bioeconómicas, ainda que tenha também tido orientações e coorientações em Matemática Financeira e noutras áreas.

A título de curiosidade, refiro que, entre as referidas aplicações biológicas e bioeconómicas não visadas neste número do Boletim SPE se incluem aplicações demográficas, tendo orientado ou coorientado na Universidade de Évora teses onde se estudou a influência das flutuações de natureza ambiental nas taxas de mortalidade por sexo/idade da população humana, influência geralmente ignorada mas com sérias implicações em seguros, pensões e planos de poupança-reforma. Para os interessados no tema sugerimos a leitura de: Bravo e Braumann 2007, Lagarto 2013, Lagarto e Braumann 2013, Lagarto, Gomes e Braumann 2013, dos Santos Baptista e Brites 2023 e dos Santos Baptista, Brites e Reis 2025.

2. Como tudo nasceu: o crescimento populacional em ambiente aleatório

Estava na State University of New York at Stony Brook a fazer, sob a orientação de Lev R. Ginzburg, o doutoramento com uma bolsa do então INIC quando “tropecei”, por mero acaso, nos artigos pioneiros que utilizaram equações diferenciais estocásticas (já muito antes utilizadas em Física e em Finanças) para modelar o crescimento populacional em ambiente aleatório. Refiro-me a primeiras abordagens usando variantes estocásticas de modelos determinísticos muito particulares (como o logístico), designadamente os artigos de Levins 1969 e de Capocelli e Ricciardi 1974, bem como, mais tarde e no caso de populações sujeitas a capturas (por pesca, caça ou florestação), o artigo de Beddington e May 1977. Nem sabia o que eram EDE mas tinha sido “caçado” e valeu-me, entre outras leituras, o livro do Arnold 1974. Estava escolhida a área da minha tese, Braumann 1979, e de grande parte do meu trabalho de investigação nos anos que se seguiram, procurando desenvolver novos caminhos a partir daqueles artigos inspiradores. Mais tarde, já em pleno século XXI, para além do crescimento populacional, vim a interessar-me pelas aplicações ao crescimento individual, do que falarei adiante.

O crescimento de populações de seres vivos era tradicionalmente modelado por *equações diferenciais ordinárias* – EDO (eventualmente por equações diferenciais parciais se a dispersão espacial da população fosse fator relevante). Para simplificar, vamos considerar apenas uma população de tamanho $X(t)$ no instante t . A sua taxa de crescimento *per capita*, abreviadamente taxa de crescimento (diferença entre taxa de natalidade e taxa de mortalidade), $\frac{1}{X(t)} \frac{dX(t)}{dt}$, seria constante num modelo malthusiano de abundância de recursos mas, mais geralmente, com recursos limitados (e supondo ausência de efeitos de Allee), será uma função f decrescente com o tamanho da população e negativa para tamanhos

suficientemente elevados. Temos um modelo geral $\frac{1}{X(t)} \frac{dX(t)}{dt} = f(X(t))$ e diversas funções particulares f têm sido propostas para descrever diferentes tipos de população, sendo muito popular o modelo logístico ou de Verhulst em que f é linear, ou seja $\frac{1}{X(t)} \frac{dX(t)}{dt} = r \left(1 - \frac{X(t)}{K}\right)$, sendo $r > 0$ a taxa intrínseca de crescimento e $K > 0$ um equilíbrio estável denominado capacidade de sustento do meio. Mas as condições ambientais que afetam as taxas de natalidade e mortalidade, sejam as de natureza interna à própria população, sejam as do meio físico e biológico envolvente, estão sujeitas a flutuações aleatórias de natureza imprevisível que, em muitos casos, não podem ser ignoradas refugiando-nos na ideia de que o comportamento determinístico resultante da EDO é uma boa aproximação. Nesses casos, temos mesmo de incluir o “acaso” (cá está ele de novo!) na equação, representando agora f uma “taxa média de crescimento”, mas desviando-se a taxa efetiva dessa média por um ruído. O ruído pode ser aproximado por um ruído branco padrão $\varepsilon(t, \omega)$ multiplicado por uma intensidade $\sigma > 0$, onde $\omega \in \Omega$ representa o estado do ambiente ao longo da vida da população “escolhido” pela natureza entre todos os possíveis estados Ω , onde introduzimos uma estrutura de espaço de probabilidade completo (Ω, \mathcal{F}, P) . Notando que a solução é agora um processo estocástico $X(t, \omega)$ que depende do estado ambiental ω , obtemos a EDE $\frac{1}{X(t, \omega)} \frac{dX(t, \omega)}{dt} = f(X(t, \omega)) + \sigma \varepsilon(t, \omega)$. Podemos escrevê-la na notação habitual $dX(t) = f(X(t))X(t) dt + \sigma X(t) dW(t)$, seguindo a regra comum de não explicitar a dependência do acaso ω e sendo $W(t) = W(t, \omega) = \int_0^t \varepsilon(s, \omega) ds$ o *processo de Wiener padrão* ou *movimento browniano*, um processo estocástico de trajetórias q.c. contínuas mas q.c. de variação ilimitada. A solução $X(t) = X(t, \omega)$ da EDE com condição inicial $X(0) = x > 0$ é a solução da equação integral estocástica $X(t) = x + \int_0^t f(X(s))X(s) ds + \int_0^t \sigma X(s) dW(s)$. Dada a irregularidade das trajetórias do processo de Wiener, o segundo integral pode ter diferentes definições, sendo as mais utilizadas o *integral de Itô* (Itô 1951), que tem boas propriedades probabilística mas não segue as regras usuais de cálculo (segue o cálculo de Itô), e o *integral de Stratonovich* (Stratonovich 1966), que segue as regras usuais. Para detalhes técnicos sobre as EDE e os cálculos estocásticos pode ver-se Braumann 2018 no Boletim SPE, sendo também interessante ler os outros trabalhos desse Boletim sobre variadas áreas de aplicação das EDE.

Uma grande preocupação foi a de obter propriedades qualitativas dos modelos em termos de extinção “matemática” da população ($X(t)$ a convergir para 0 quando $t \rightarrow +\infty$) ou de existência de um equilíbrio estocástico sem extinção “matemática” (ergodicidade com a distribuição de probabilidade de $X(t)$ a convergir para uma distribuição de probabilidade de equilíbrio quando $t \rightarrow +\infty$ e obtenção da f.d.p. estacionária a partir das equações de Kolmogorov). Havendo variados modelos propostos com diversas expressões particulares da função f e desconhecendo o modelo seguido pela natureza, preocupámo-nos em que as propriedades fossem de natureza biológica, ou seja robustas relativamente à escolha do modelo, pelo que demonstrámos os nossos resultados para funções f arbitrárias satisfazendo apenas propriedades ditadas pela Biologia e algumas muito moderadas condições de regularidade. Veja-se, para intensidades de ruído σ constantes, Braumann 1979, 1981a, 1999b, 2008b, 2019, 2021, e, para uma generalização a intensidades variáveis $\sigma(X)$ suficientemente regulares, Braumann 2001cd, 2007d, 2008a, 2021. Isso não impede que, especialmente em aplicações que envolvam estimação de parâmetros e previsão ou comparações e cálculos numéricos, trabalhemos com modelos particulares da função f , como o modelo logístico ou o de Gompertz.

Outra grande preocupação teve a ver com a definição do integral estocástico com respeito ao processo de Wiener, a de Itô geralmente utilizada e que trabalha com o cálculo de Itô ou, como era aconselhado por alguns autores, a de Stratonovich, que segue as regras usuais de cálculo. De facto, tinha-se gerado uma grande controvérsia na literatura sobre o cálculo mais adequado para descrever o crescimento de populações em ambiente aleatório, de que falo em Braumann 2018 e que o leitor interessado pode consultar, por exemplo, em Feldman e Roughgarden 1975, May e MacArthur 1972, May 1973ab e Turelli 1978. Sucedia que os resultados qualitativos do “mesmo” modelo diferiam entre os dois cálculos,

podendo até, para certos valores dos parâmetros, o uso do cálculo de Itô concluir pela extinção da população, enquanto o cálculo de Stratonovich concluía, pelo contrário, pela sua não-extinção e crescimento sem limites. Isto para não falar da teoria sobre limitações da semelhança dos nichos ecológicos em espécies competidoras, que aparentemente funcionava com o cálculo de Itô mas não com o de Stratonovich. Demonstrei que a controvérsia se devia a uma confusão meramente semântica sobre o significado da “taxa média de crescimento” f ; veja-se Braumann 1979, 1983ab, 2005a, 2007abc, 2008ab, 2018, 2019, 2021. Se formos ver o significado físico (neste caso biológico) da chamada “taxa média de crescimento” que aparece no termo de tendência da EDE, acima designada por f , ela significa de facto a *taxa média aritmética de crescimento* quando usamos o cálculo de Itô. Mas, se usarmos o cálculo de Stratonovich, provei que ela representa uma taxa média geralmente diferente que, no caso particular dos modelos de aleatoriedade ambiental, é a *taxa média geométrica de crescimento*. Em qualquer caso, provei que, considerando a diferença entre as médias nos dois cálculos, ambos os cálculos dão exatamente os mesmos resultados, quer qualitativos quer quantitativos. No seu texto neste Boletim sobre aleatoriedade ambiental, Clara Carlos preferiu usar o cálculo de Stratonovich e designou, para evitar tal confusão entre médias, a taxa média geométrica por g , que é dada por $g(X) = f(X) - \sigma^2/2$. A inútil controvérsia resultou de se ter falado sempre de “taxa média” sem qualificar o tipo de média, ignorando o seu diferente significado físico. Daí a importância de, nos nossos modelos, termos sempre o cuidado de não desligar a Matemática da realidade, isto é, de reconhecer em termos físicos/biológicos o significado real das variáveis que usamos.

3. O estudo consolidado do crescimento populacional em ambiente aleatório

Para além dos aspetos fundamentais tratados na Secção 2, o crescimento populacional em ambiente aleatório requeria o estudo de aspetos específicos extremamente importantes para uma efetiva utilização dos modelos desenvolvidos, estudo consolidado que o nosso grupo promoveu e desenvolveu ao longo dos anos.

As questões estatísticas de escolha do modelo, estimação de parâmetros e previsão foram tratadas em Braumann 1979, 1983b, 1985, 1986, 1987b, 1988, 1991, 1993bc, 1994a, 1996ab, 1997a, 1999cde, 2004a, 2019. As consequências de uma incorreta especificação do modelo foram estudadas em Carlos 2013, 2018 e Carlos e Braumann 2014.

Outra questão importante tem a ver com populações sujeitas a efeitos de Allee, descritos em Allee *et al.* 1949 e tratados em termos de modelos estocásticos muito particulares pela primeira vez por Dennis 1989 e 2002. Em certas populações, quando o seu tamanho é pequeno e se esperava portanto uma elevada taxa de crescimento *per capita* devido ao elevado volume de recursos disponíveis para a sobrevivência e reprodução de cada indivíduo, verifica-se uma depressão dessa taxa de crescimento relativamente ao esperado. O trabalho de Clara Carlos neste Boletim indica algumas das possíveis causas. Modelos estocásticos com efeitos de Allee, quer gerais quer particulares, como o modelo logístico estocástico com efeitos de Allee, foram estudados em Braumann e Carlos 2013, 2015 e Carlos e Braumann 2017.

Para os modelos estocásticos gerais de aleatoriedade ambiental, quer com quer sem efeitos de Allee, pudemos provar que a condição de a taxa média geométrica de crescimento *per capita* ser positiva para populações pequenas é suficiente para evitar a extinção “matemática” e garantir a existência de um equilíbrio estocástico com densidade estacionária. Mas, quer nestes modelos, quer nos modelos determinísticos de EDO, o facto de o tamanho da população não tender para zero quando $t \rightarrow +\infty$ não é exatamente sinónimo de não-extinção no sentido biológico. O que significaria termos a certa altura uma população de 0,4 indivíduos? O facto de nas EDO e nas EDE trabalharmos com um espaço de estados contínuo $[0, +\infty[$ permite a tratabilidade dos modelos mas, sendo geralmente uma boa aproximação, não o é quando a população é pequena. Mais ainda, ignora a aleatoriedade demográfica, que sendo geralmente secundária perante a aleatoriedade ambiental, se torna dominante para pequenas populações e é melhor tratada com processos de nascimento e morte, com espaço de estados discreto

$\{0, 1, 2, \dots\}$. Enquanto a aleatoriedade ambiental traduz o efeito das flutuações aleatórias do ambiente na taxa de crescimento, isto é, provoca flutuações aleatórias nas **probabilidades** de nascer e de morrer, a aleatoriedade demográfica refere-se às variações amostrais que afetam as **frequências observadas** de nascimentos e mortes, as quais ocorrem mesmo quando o ambiente e as probabilidades de nascer e morrer são perfeitamente determinísticos (Braumann 2010). Não entrando no extremamente complexo estudo combinado das duas aleatoriedades, estabelecemos antes um limiar de extinção “realista” $q > 0$, tipicamente bastante inferior à população inicial, abaixo do qual a aleatoriedade demográfica prevaleceria e conduziria quase inevitavelmente a uma extinção efetiva. Mostrámos que, mesmo quando a aleatoriedade ambiental conduzia a um equilíbrio estocástico sem extinção matemática, a extinção “realista” ocorria com probabilidade um, sendo a questão relevante se se tratava de uma extinção rápida ou lenta.

Para isso obtivemos expressões gerais para a média e a variância do tempo de extinção T_q (tempo de primeira passagem pelo limiar de extinção “realista”), que particularizámos para modelos estocásticos específicos como o logístico, o de Gompertz e o logístico com efeitos de Allee. Verificámos que esses momentos de T_q , exceto para populações iniciais muito próximas do limiar de extinção q , pouco dependiam do valor de q . Tínhamos assim uma boa medida do risco de extinção, verificando-se que, conforme os valores dos parâmetros, a extinção tanto podia levar poucas gerações como demorar mais do que o tempo de vida do Universo. Tínhamos assim também um outro meio de aferir o impacto dos efeitos de Allee. Naturalmente, também olhámos para os tempos de primeira passagem por limiares superiores à população inicial, com importância para a recuperação de populações em risco, a deterioração de alimentos por fungos ou bactérias, ou para o impacto de pragas agrícolas. Os resultados desse nosso trabalho podem ver-se em Braumann 1983b, 1984, 1987a, 1988, 1991, 1994b, 1995a, 2005a, 2019, Carlos 2013, 2018 e Carlos e Braumann 2006.

Naturalmente, vários outros autores vieram a trabalhar em modelos estocásticos de aleatoriedade ambiental com uma ou várias populações, particularmente versões estocásticas das múltiplas variantes de modelos determinísticos particulares já tratados, mas não vamos desviar-nos do foco do Tema Central deste Boletim.

Neste Boletim, o texto de Clara Carlos, que preferiu usar o cálculo de Stratonovich, trata, para modelos estocásticos de crescimento populacional com e sem efeitos de Allee, dos tempos de extinção da população e avalia o impacto dos efeitos de Allee no comportamento do modelo e nas probabilidades de extinção.

4. Modelos de crescimento populacional e capturas em ambiente aleatório

Quando a população está sujeita a capturas por pesca, caça ou exploração florestal, na senda do trabalho pioneiro de Beddington e May 1977 para modelos muito particulares, os modelos gerais anteriores carecem apenas de uma pequena modificação para neles introduzir a taxa de capturas por unidade de tempo (p.u.t.) $C(t) \geq 0$, passando a ter-se a EDE $dX(t) = f(X(t))X(t) dt - C(t) + \sigma X(t) dW(t)$. Tipicamente, no caso da pesca, a taxa de mortalidade adicional provocada pela pesca é considerada proporcional ao esforço de pesca $E(t) \geq 0$ (o número de embarcações de pesca usadas no instante t ou, havendo diversos tipos de embarcação, o número de unidades de pesca padronizadas), dependendo a constante de proporcionalidade, a chamada capturabilidade $q > 0$, da tecnologia de pesca, da espécie pescada e das condições de pescaria. A taxa de capturas p.u.t. será então dada por $C(t) = qE(t)X(t)$.

Começámos por estudar os modelos gerais autónomos em que a taxa de capturas dependia apenas do tamanho da população, $C(X(t))$, o mesmo sucedendo ao esforço $E(X(t))$. Para esses modelos gerais, mostrámos que, sob condições de regularidade muito moderadas, a condição de não-extinção e existência de um equilíbrio estocástico com densidade estacionária era termos uma taxa média geométrica de crescimento natural superior à taxa de mortalidade adicional causada pela pesca quando

a população é pequena. Isso era válido para modelos de crescimento com e sem efeitos de Allee e para intensidades de ruído constantes ou variáveis com o tamanho da população: Braumann 1981c, 1985, 1990, 1993a, 1997ab, 1999a, 2001d, 2002a, 2005b, 2007bd, 2019, 2021, Brites e Braumann 2020b, 2022. Mesmo em condições de alguma irregularidade como capturas constantes com ou sem truncatura e esforços constantes com truncatura, o resultado mantinha-se: Braumann 2001ab, 2002b.

Outros trabalhos trataram aspetos como o cálculo estocástico usado e a correta interpretação das médias (Braumann 2003b, 2007b), os problemas de estimação (Braumann 1985, 1996b, 1997a), a otimização das capturas sustentadas em políticas de esforço constante (Braumann 1985, 1997b, 2005b, 2019), os riscos e os tempos de extinção e de primeira passagem por limiares elevados (Braumann 1983b, 1984, 1985, Brites 2017, Brites e Braumann 2025).

Considerando um modelo razoável para o lucro por unidade de tempo (diferença entre as receitas de venda do peixe p.u.t. e os custos da atividade piscatória p.u.t.), Brites 2017 estudou o lucro p.u.t. em regime sustentado (equilíbrio estocástico) para os modelos estocásticos gerais com esforço de pesca constante, particularizando também para os modelos logístico e de Gompertz. Tal veio permitir a comparação com as políticas ótimas de esforço variável propostas por Suri 2008 (ver também Clark 2010 e, anteriormente mas ignorando os custos da atividade piscatória, Alvarez 2000 e Alvarez e Shepp 1998), baseadas na teoria do controlo ótimo e na utilização da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman, que otimizam o lucro acumulado descontando esperado ao longo de um horizonte temporal futuro. Embora esse lucro seja inferior na política de esforço constante, a diferença em relação ao lucro da política ótima de esforço variável é muito pequena, como foi verificado, usando dados reais de pescarias, em Brites 2017, Brites e Braumann 2017, 2018. E a política de esforço constante tem uma enorme vantagem: é muito fácil de aplicar e não tem problemas sociais, enquanto a política ótima de esforço variável é inaplicável em termos práticos por exigir esforços de pescas sempre a mudar e o conhecimento do tamanho da população em cada momento, além de ocasionar problemas sociais nos períodos de pesca reduzida ou nula.

Pôs-se então a questão: será que existem outras políticas de pesca intermédias que obviem parte ou a totalidade dos problemas da política ótima de esforço variável e que resultem num lucro superior ao da política de esforço constante? E se houver efeitos de Allee? Várias políticas foram propostas e estudadas, em termos de lucro e de prós e contras, em Brites e Braumann 2019ab, 2020ab, 2022, 2023. Reis e Brites 2025 estudaram o problema da otimização do lucro quando os preços de venda também são estocásticos.

O texto de Nuno M. Brites neste Boletim faz uma viagem guiada sobre as aplicações bioeconómicas das EDE a populações em ambiente aleatório sujeitas a capturas, designadamente por pesca, comparando políticas de pesca em termos sociais, de aplicabilidade e do lucro associado.

Recentemente, para políticas de esforço variável e de esforço constante, estudou-se, em Brites e Braumann 2026, os efeitos da incorreta estimação dos parâmetros sobre o cálculo dos esforços de pesca a aplicar, a previsão dos lucros futuros e a curiosamente (mas explicavelmente) bem menor perda efetiva que ocorre nos lucros futuros por se usarem valores incorretos dos parâmetros em lugar dos valores exatos.

5. Modelos estocásticos de crescimento individual

Se o crescimento do tamanho de populações está sujeito às flutuações aleatórias do ambiente, o mesmo sucede ao crescimento do tamanho $X(t)$ de um indivíduo (por exemplo, em termos do seu peso) com a idade t , considerando as flutuações aleatórias do seu ambiente interno e externo. Classicamente, para o crescimento de animais de pecuária, peixes, árvores, etc., usava-se uma curva de crescimento determinística e os desvios em relação à curva eram tratados usando um modelo de regressão, o que ignorava a dinâmica do crescimento e fazia previsões por vezes absurdas. Garcia 1983 reparou que as curvas de crescimento determinístico clássicas se podiam escrever como soluções da EDO

$dY(t) = \beta(\alpha - Y(t)) dt$, usando o tamanho modificado $Y(t) = h(X(t))$ por uma função estritamente monótona h de classe C^1 associada à curva de crescimento escolhida, sendo o tamanho modificado assintótico (i.e. na maturidade) $\alpha = h(A)$ (com A o tamanho na maturidade efetivo) e sendo $\beta > 0$ a taxa de aproximação ao mesmo. Por essa razão propôs $dY(t) = \beta(\alpha - Y(t)) dt + \sigma dW(t)$ como modelo estocástico geral de crescimento do indivíduo, modelo que adotamos, correspondendo os modelos particulares a escolhas concretas da função h . Começamos por utilizar, para o doutoramento da Colega Patrícia A. Filipe, dados de crescimento de vacas mertolengas obtidos pelo nosso Colega Carlos J. Roquete. Mais tarde, utilizamos as completíssimas bases de dados sobre machos e fêmeas de bovinos mertolengos e de raça alentejana das associações de produtores e beneficiamos durante alguns anos da integração no Grupo Operacional GOBov+ financiado pelo PDR 2020 (ver detalhes no texto de Patrícia A. Filipe e Gonçalo Jacinto neste Boletim).

Os problemas probabilísticos, de escolha do modelo (escolha da expressão da função h), de determinação exata da função de verosimilhança para observações discretas de vários animais em idades geralmente não-concordantes, de estimação de parâmetros por máxima verosimilhança (incluindo técnicas de *bootstrap*), e de previsão foram estudados em Braumann, Filipe, Carlos e Roquete 2009, 2012, Filipe 2011, 2018, Filipe e Braumann 2007, 2008, Filipe, Braumann, Brites e Roquete 2013, Filipe, Braumann e Roquete 2007, 2008. Métodos de estimação não-paramétrica para os coeficientes de tendência e difusão para um modelo mais geral de EDE foram estudados em Filipe, Braumann, Brites e Roquete 2010 e Filipe 2011, não se desviando muito dos modelos paramétricos por nós escolhidos. Em Jacinto, Filipe e Braumann 2022b estudamos métodos de estimação por máxima verosimilhança ponderada para compensar o déficit de observações em idades avançadas. Em Filipe 2011, Filipe, Braumann e Roquete 2009ab, 2012 estudaram-se os modelos bifásicos de crescimento, que consideravam dois regimes paramétricos de crescimento, um até ao desmame e outro na fase da recria. Em 2011, com base nos resultados obtidos e com o apoio de Nuno M. Brites, foi disponibilizado o software gSDE, de uso amigável e desenvolvido em Microsoft Visual Studio 2010 com algoritmos de cálculo em R, para estimação paramétrica e não-paramétrica e previsão nestes modelos.

Um dos nossos principais objetivos era o de maximizar o lucro esperado do produtor na fase da recria e determinar a correspondente idade ótima para venda no mercado da carne, tendo em conta os custos fixos e variáveis do produtor e os preços de mercado na venda, tendo-se obtido também o desvio-padrão para se aferir a variabilidade do lucro. Isso foi realizado em Filipe 2011, Braumann, Filipe, Carlos e Roquete 2012, Filipe, Braumann e Carlos 2015, Filipe, Braumann, Carlos e Roquete 2014. Com preços de venda reais estruturados por idade do animal e categorias do seu peso, o problema de otimização complicou-se e foi resolvido em Jacinto, Filipe e Braumann 2022b. Com os nossos resultados e o nosso apoio e das associações de produtores, a Ruralbit desenvolveu uma aplicação informática para apoiar o produtor nas melhores decisões de venda. Estudamos também uma alternativa à idade ótima de venda, mais vantajosa em termos de lucro esperado mas mais difícil de implementar, baseada no peso ótimo de venda, para a qual precisámos de determinar em Carlos, Braumann e Filipe 2013 a idade de primeira passagem pelo peso ótimo.

O texto de Patrícia A. Filipe e Gonçalo Jacinto neste número do Boletim falará sobre estes modelos estocásticos de crescimento individual e a otimização do lucro do produtor.

6. Modelos estocásticos mistos de crescimento individual

Os indivíduos, porém, não são necessariamente todos iguais e indivíduos diferentes, por razões genéticas, de regime alimentar ou outras, podem ter parâmetros de crescimento individual α e/ou β diferentes, com uma distribuição de probabilidade entre a população de animais que podemos supor normal (embora também tivéssemos considerado uma distribuição lognormal para β). Temos assim modelos mistos de EDE, que combinam as vantagens das EDE com as das *equações diferenciais aleatórias*, equações estas com que também trabalhei com colegas de outras nacionalidades e que são

simplesmente EDO com parâmetros aleatórios, mas sem flutuações ambientais. Mas fomos mais longe e trabalhamos com modelos mistos estruturados em que os parâmetros dependem dos valores genéticos do animal (tendo-se desenvolvido testes para determinar quais dos valores genéticos disponíveis tinham influência significativa), visando uma melhor otimização do lucro, mais adaptada ao animal concreto. O problema dos modelos mistos é que, em certos casos, a função de verosimilhança não tem uma expressão fechada e, para a maximizar, há que recorrer a aproximações, sendo os métodos habitualmente usados computacionalmente intensivos, além de geralmente presumirem a regularidade, temporal e entre animais, das observações. Para tal desenvolvemos métodos novos, inspirados no clássico método delta da Estatística, que não dependem da regularidade temporal e entre animais das observações e que, como comprovam os nossos estudos comparativos, proporcionam boas estimativas e são computacionalmente muito mais eficientes.

O estudo dos modelos mistos nos termos acima descritos pode ver-se em Jacinto, Filipe e Braumann 2026, Jamba, Filipe, Jacinto e Braumann 2024, Jamba, Jacinto, Filipe e Braumann 2022, 2024.

O trabalho neste número do Boletim de Gonçalo Jacinto, Patrícia A. Filipe e Nelson T. Jamba trata dos modelos mistos e dos métodos de estimação associados.

7. Conclusão

Uma das missões que considerámos essencial foi a da divulgação destas matérias e metodologias com o objetivo de sensibilizar os estudantes, a comunidade científica e a sociedade para a sua importância e benefícios e de atrair novos investigadores para estas áreas. Para isso utilizámos, geralmente a convite dos organizadores, mas também em iniciativas nossas, diversos meios, como minicursos, seminários, palestras e organização de sessões temáticas, adaptando a mensagem ao público. Fizemo-lo em Universidades, em reuniões científicas, em encontros promovidos por professores e pelos setores produtivos. Fiz minicursos numa vintena de instituições nacionais e estrangeiras espalhadas por vários continentes que seria fastidioso enumerar, pelo que destaco apenas o realizado no ISEG a convite do saudoso Professor Bento Murteira (tendo a semente aí lançada dado frutos num doutoramento na área da Matemática Financeira que coorientei, como viria mais tarde a coorientar outros nessa área) e o do Congresso SPE 2005. Mais fastidioso seria enumerar a longa lista de conferências convidadas e seminários que proferi, mas recorro ao primeiro, que fiz em Lisboa a convite do saudoso Professor Tiago de Oliveira. Utilizámos também artigos de divulgação em atas de reuniões científicas, variadas revistas científicas e profissionais, boletins de sociedades como o Boletim da SPE e outras publicações. Vejamos, a título de exemplo: Braumann 1981b, 1995b, 1998, 1999b, 2001e, 2004b, 2005c, 2008bc, 2018, 2021, Brites 2018, Carlos 2018, Filipe 2018. Fizemo-lo ainda em livros didático-científicos, como o livro do minicurso Braumann 2005a no Congresso SPE2005 e o meu livro Braumann 2019 na Wiley.

Naturalmente, eu, colegas do grupo e outras pessoas organizámos ou colaborámos na organização de muitas reuniões científicas nacionais e internacionais e aí procurámos também atrair sessões temáticas e comunicações na área da Biologia Matemática e dos modelos estocásticos. Os Colegas de Évora estiveram muito envolvidos no Congresso da SPE 2004 realizado na cidade e, como membro de Comissões Científicas e como Presidente da SPE durante alguns anos, colaborei com a organização de vários outros Congressos. Na área da Biologia Matemática, tenho participado na organização de múltiplas conferências das séries Dynamical Systems Applied to Biology and the Natural Sciences – DSABNS, Models in Population Dynamics, Ecology and Evolution – MPDEE e European Conference on Mathematical and Theoretical Biology – ECMTB, estas organizadas pela European Society for Mathematical and Theoretical Biology – ESMTB de que também fui Presidente durante alguns anos. Realço o ECMTB 2018, copresidido por M. Aguiar, C. A. Braumann e N. Stollenwerk, que decorreu na Universidade de Lisboa. Também nestes Congressos e Conferências houve a preocupação de não negligenciar os modelos estocásticos.

Estou convencido que esta atividade de divulgação terá despertado o interesse para as EDE e aplicações de alguns estudantes e de outros colegas portugueses e estrangeiros que trabalham hoje nessa área.

Procurámos evidenciar, nos trabalhos do grupo neste Boletim SPE, o papel das flutuações aleatórias das condições ambientais no crescimento de populações e no crescimento individual de seres vivos e, quando se trata de seres vivos utilizados na atividade produtiva, as implicações económicas que delas derivam.

Mas o acaso, ou, se preferirem, coincidências que espero tenham sido tão felizes como para mim foram, também interveio no percurso científico-pedagógico dos membros deste grupo que hoje vos acompanha numa viagem de revelação de um pouco do seu labor e trajetória. Espero que o leitor aprecie a viagem como nós apreciamos a sua companhia e que, se assim a sua disposição e o acaso o determinarem, possa olhar para estas matérias com um interesse acrescido.

Há muito terreno conhecido, e muito mais ainda desconhecido, por desbravar. Com os esforços deste grupo e de outros investigadores que se vêm interessando ou se venham a interessar por estes assuntos, o trabalho continua.

Permita-me, caro leitor, que, para rematar estes nossos relatos sobre o papel do acaso na vida, formule sinceros votos de que, na sua e na nossa vida, a sorte, outra face do acaso, nos seja sempre favorável.

Agradecimento:

O autor é membro do Centro de Investigação em Matemática e Aplicações, financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia, Projeto UID/04674/2025, <https://doi.org/10.544.99/UID/04674/2025>.

Referências:

- Allee, W. C.; Emerson, A. E.; Park, O.; Park, T.; Schmidt, K. P. (1949). *Principles of Animal Ecology*. Saunders, Philadelphia.
- Alvarez, L. H. R. (2000). On the option interpretation of rational harvesting planning. *Journal of Mathematical Biology* **40**: 383-405.
- Alvarez, L. H. R.; Shepp, L. A. (1998). Optimal harvesting in stochastically fluctuating populations. *Journal of Mathematical Biology* **37**: 155-177.
- Arnold, L. (1974). *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*. ISBN: 9780471033592. Wiley, New York.
- Beddington, J. R.; May, R. M. (1977). Harvesting natural populations in a randomly fluctuating environment. *Science* **197**: 463-465.
- Braumann, C. A. (1979). *Population Growth in Random Environments*. Tese de doutoramento, State University of New York at Stony Brook.
- Braumann, C. A. (1981a). Population adaptation to a 'noisy' environment: Stochastic analogs of some deterministic models. Em: *Quantitative Population Dynamics* (D. G. Chapman, V. F. Gallucci, eds.), International Cooperative Publishing House, Fairland, Maryland, p. 39-59.
- Braumann, C. A. (1981b). Aplicações de equações diferenciais estocásticas. Em: *Atas do II Colóquio de Estatística e Investigação Operacional*, Sociedade Portuguesa de Estatística e Investigação Operacional, p. 74-101.
- Braumann, C. A. (1981c). Pescar num mundo aleatório: Um modelo usando equações diferenciais estocásticas. Em: *Atas VIII Jornadas Luso-Espanholas de Matemática*, Universidade de Coimbra, Vol. III, p. 301-308.

- Braumann, C. A. (1983a). Population growth in random environments. *Bulletin of Mathematical Biology* **45**: 635-641.
- Braumann, C. A. (1983b). Population extinction probabilities and methods of estimation for population stochastic differential equation models. Em: *Nonlinear Stochastic Problems* (R. S. Bucy, J. M. F. Moura, eds.), D. Reidel Publ. Comp., Dordrecht/Boston/Lancaster, p. 553-559.
- Braumann, C. A. (1984). Tempo de primeira passagem para processos não-markovianos: Uma solução aproximada dum caso particular. Em: *Actas IX Jornadas Matemáticas Hispano-Lusas 1982*, Universidad de Salamanca, Vol. II, p. 563-566.
- Braumann, C. A. (1985). Stochastic differential equation models of fisheries in an uncertain world: Extinction probabilities, optimal fishing effort, and parameter estimation. Em: *Mathematics in Biology and Medicine* (V. Capasso, E. Grosso, S. L. Paveri-Fontana, eds.), Springer, Berlin, p. 201-206.
- Braumann, C. A. (1986). Equações diferenciais estocásticas: A importância da análise numérica vista através de um exemplo de aplicação. Em: *1º Ciclo de Conferências em Análise Numérica e Otimização*, Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, p. 284-298.
- Braumann, C. A. (1987a). Majoração da probabilidade de extinção de uma população com crescimento dependente da densidade em ambiente aleatório. Em: *Actas XI Jornadas Matemáticas Hispano-Lusas 1986*, Departamento de Matemáticas Universidad de Extremadura e Real Sociedad Matemática Española, Vol. 2, p. 368-374.
- Braumann, C. A. (1987b). Problemas de estimação em modelos de crescimento populacional usando equações diferenciais estocásticas. Em: *Atas XII Jornadas Luso-Espanholas de Matemática*, Universidade do Minho, Vol. III, p. 12-17.
- Braumann, C. A. (1988). Estimating parameters and extinction probabilities in population stochastic differential equation models. Em: *Biomathematics and Related Computational Problems* (L. M. Ricciardi, ed.), Kluwer Academic Publ., Dordrecht/Boston/London, p. 133-143.
- Braumann, C. A. (1990). General fishery models in a randomly fluctuating environment. Em: *Atas da 1ª Conferência em Estatística e Otimização* (M. A. Amaral Turkman, M. L. de Carvalho, eds.), CEA e DEIO, Universidade de Lisboa, p. 105-112.
- Braumann, C. A. (1991). Estimação de probabilidades de extinção de populações em ambiente aleatório. Em: *Atas das I^{as} Jornadas de Estatística e Aplicações*, Universidade do Minho, p. 393-404.
- Braumann, C. A. (1993a). General models of fishing with random growth parameters. Em: *Mathematics Applied to Biology and Medicine* (J. Demongeot, V. Capasso, eds.), Wuerz Publ. Ltd., Winnipeg, Canada, p. 155-161.
- Braumann, C. A. (1993b). Model fitting and prediction in stochastic differential equation population growth models in random environments. *Bulletin of the International Statistical Institute* **LV(I)**: 163-164.
- Braumann, C. A. (1993c). Estimação e previsão em modelos de crescimento populacional em ambiente aleatório. Em: *Estatística Robusta, Extremos e Mais Alguns Temas* (D. Pestana, ed.), Sociedade Portuguesa de Estatística e Edições Salamandra, p. 21-32.
- Braumann, C. A. (1994a). Escolha de modelos de crescimento populacional em ambiente aleatório e predição. Em: *A Estatística e o Futuro e o Futuro da Estatística* (D. Pestana, A. Turkman, J. Branco, L. Duarte, A. Pires, eds.), Sociedade Portuguesa de Estatística e Edições Salamandra, p. 39-46.

- Braumann, C. A. (1994b). Crescimento populacional em ambiente aleatório e probabilidades de cruzamento de limiares críticos. Em: Atas do II Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística, p. 91-105.
- Braumann, C. A. (1995a). Threshold crossing probabilities for population growth models in random environments. *Journal of Biological Systems* **3**: 505-517.
- Braumann, C. A. (1995b, divulgação). A Matemática e a luta pela vida (lição inaugural). Em: 1º de Novembro. Dia da Universidade. Abertura Solene das Aulas, Universidade de Évora, p. 17-35.
- Braumann, C. A. (1996a). Ajustamento de curvas e modelos estocásticos: Abusos do método dos mínimos quadrados. *Revista de Estatística* **3**: 7-22.
- Braumann, C. A. (1996b). Estimação de parâmetros em modelos de crescimento e pesca em ambiente aleatório. Em: Bom Senso e Sensibilidade. Traves Mestras da Estatística (J. Branco, P. Gomes e J. Prata, eds.), Sociedade Portuguesa de Estatística e Edições Salamandra, p. 103-117.
- Braumann, C. A. (1997a). Population estimation in population growth and fishing models in random environments. *Bulletin of the International Statistical Institute* **LVII**(1): 21-22.
- Braumann, C. A. (1997b). Pesca de esforço constante em ambiente aleatório. Em: A Estatística a Decifrar o Mundo (R. Vasconcelos, I. Fraga Alves, L. Canto e Castro, D. Pestana, eds.), Sociedade Portuguesa de Estatística e Edições Salamandra, p. 291-302.
- Braumann, C. A. (1998). O acaso, a bolsa e a vida. Em: Estatística: A Diversidade na Unidade (M. Souto de Miranda, I. Pereira, eds.), Sociedade Portuguesa de Estatística e Edições Salamandra, p. 29-55.
- Braumann, C. A. (1999a). Variable effort fishing models in random environments, *Mathematical Biosciences*. **156**: 1-19.
- Braumann, C. A. (1999b). Applications of stochastic differential equations to population growth. Em: Proc. Ninth International Colloquium on Differential Equations (D. Bainov, ed.), VSP, Utrecht, p.47-52.
- Braumann, C. A. (1999c). Comparison of geometric Brownian motions and applications to population growth and to Finance. *Bulletin of the International Statistical Institute* **LVIII**(1): 125-126.
- Braumann, C. A. (1999d). Population growth in a random environment: Some modeling and statistical issues. Em: Applied Stochastic Models and Data Analysis. Quantitative Methods in Business and Industry Society (H. Bacelar-Nicolau, F. Nicolau, J. Janssen, eds.), Instituto Nacional de Estatística, Lisboa, p.36-42.
- Braumann, C. A. (1999e). Estimação de parâmetros para uma ou várias trajetórias do movimento browniano geométrico. Em: Afirmar a Estatística. Um Desafio para o Século XXI (C. D. Paulino, A. Pacheco, A. Pires, Ferreira da Cunha, eds.), Edições SPE, Sociedade Portuguesa de Estatística, p. 149-156.
- Braumann, C. A. (2001a). Constant effort and constant quota fishing policies with cut-offs in a random environment. *Natural Resource Modeling* **14**: 199-232.
- Braumann, C. A. (2001b). Políticas de pesca de quota constante com truncatura em ambiente aleatório. Em: Um Olhar Sobre a Estatística (P. Oliveira, E. Athayde, eds.), Sociedade Portuguesa de Estatística, p. 431-446.

- Braumann, C. A. (2001c). Crescimento de populações em ambiente aleatório: Generalização a intensidades de ruído dependentes da densidade da população. Em: *A Estatística em Movimento* (M. M. Neves, J. Cadima, M. J. Martins, F. Rosado, eds.), Edições SPE, Sociedade Portuguesa de Estatística, p. 119-128.
- Braumann, C. A. (2001d). General stochastic differential equation models of population growth and fishing in a random environment. *Bulletin of the International Statistical Institute* **LIX**(3): 111-112.
- Braumann, C. A. (2001e, divulgação). A Matemática e a vida. *Educação & Matemática* **64**: 23-29.
- Braumann, C. A. (2002a). Variable effort harvesting models in random environments: Generalization to density-dependent noise intensities. *Mathematical Biosciences* **177 & 178**: 229-245.
- Braumann, C. A. (2002b). Políticas de pesca com truncatura em ambiente aleatório. Em: *Novos Rumos em Estatística* (L. Carvalho, F. Brilhante, F. Rosado, eds.), Edições SPE, Sociedade Portuguesa Estatística, p. 137-145.
- Braumann, C. A. (2003a). Modeling population growth in random environments: Ito or Stratonovich calculus? *Bulletin of the International Statistical Institute* **LX**(1): 119-120.
- Braumann, C. A. (2003b). O uso de diferentes cálculos estocásticos na modelação do crescimento populacional em ambiente aleatório. Em: *Literacia Estatística* (P. Brito, A. Figueiredo, F. Sousa, P. Teles, F. Rosado, eds.), Edições SPE, Sociedade Portuguesa de Estatística, p. 141-153.
- Braumann, C. A. (2004a). Inferência estatística para o movimento browniano geométrico com coeficiente de tendência sazonal de período múltiplo do período de observação. Em: *Estatística com Acaso e Necessidade* (P. M. M. Rodrigues, E. Luz Rebelo, F. Rosado, eds.), Edições SPE, Sociedade Portuguesa de Estatística, p. 101-111.
- Braumann, C. A. (2004b, divulgação). Introduction to stochastic differential equations. Em: *Stochastic Finance 2004, Autumn School* (P. E. Oliveira, ed.), Centro Internacional de Matemática, p. 5-41.
- Braumann, C. A. (2005a). *Introdução às Equações Diferenciais Estocásticas e Aplicações*. Edições SPE, ISBN: 972-8890-06-0, Sociedade Portuguesa de Estatística.
- Braumann, C. A. (2005b). Comparação de modelos determinísticos e estocásticos de capturas em ambiente aleatório. Em: *Estatística Jubilar* (C. A. Braumann, P. Infante, M. M. Oliveira, R. Alpízar-Jara, F. Rosado, eds.), Edições SPE, Sociedade Portuguesa de Estatística, p. 89-96.
- Braumann, C. A. (2005c, divulgação). O acaso e a vida. Em: *Memorial da Sociedade Portuguesa de Estatística* (F. Rosado, ed.), Sociedade Portuguesa de Estatística, p. 53-72.
- Braumann, C. A. (2007a). Itô versus Stratonovich calculus in random population growth. *Mathematical Biosciences* **206**: 81-107.
- Braumann, C. A. (2007b). Harvesting in a random environment: Itô or Stratonovich calculus. *Journal of Theoretical Biology* **244**: 424-432.
- Braumann, C. A. (2007c). Population growth in a random environment: Which stochastic calculus? *Bulletin of the International Statistical Institute* **LXII**: 5802-5805.
- Braumann, C. A. (2007d). Extinction and persistence of populations in a random environment: Generalization to density-dependent noise intensities. Em: *Proceedings of the International Conference Probability and Statistics in Science and Technology* (H. Rootzén, P. Milheiro-Oliveira, eds.), Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, p. 93-94.

- Braumann, C. A. (2008a). Growth and extinction of populations in randomly varying environments. *Computers and Mathematics with Applications* **56**: 631-644.
- Braumann, C. A. (2008b, divulgação). Equações diferenciais estocásticas e aplicações biológicas. *Boletim Sociedade Portuguesa de Estatística Outono 2008*: 61-69.
- Braumann, C. A. (2008c, divulgação). Biomatemática. Em: Atas da Escola de Verão Matemática 07. A Matemática na Escola e na Sociedade (N. Franco, S. Vinagre, ed.), Universidade de Évora e Sociedade Portuguesa de Matemática, p. 151-168.
- Braumann, C. A. (2010). Environmental versus demographic stochasticity in population growth. Em: Workshop on Branching Processes and Their Applications (M. González, M. Molina, I. M. del Puerto, M. Mota, R. Martínez, A. Ramos, eds.), Springer, Berlin/Heidelberg, p. 37-52.
- Braumann, C. A. (2018, divulgação). Breve introdução às equações diferenciais estocásticas. *Boletim Sociedade Portuguesa de Estatística Outono 2018*: 81-88.
- Braumann, C. A. (2019). *Introduction to Stochastic Differential Equations with Applications to Biology and Finance*. ISBN: 9781119166061, 9781119166078, 9781119166085, John Wiley & Sons Ltd., Hoboken N.J.
- Braumann, C. A. (2021). Growth and extinction in randomly varying environments: Modelling and optimization using stochastic differential equations. *Revista de Modelamiento Matemático de Sistemas Biológicos* **1**(1): 25-36.
- Braumann, C. A.; Alpízar-Jara, R. (2009, divulgação). CIMA – Universidade de Évora. *Boletim Sociedade Portuguesa de Estatística Primavera 2009*: 24-28.
- Braumann, C. A.; Carlos, C. (2013). Allee effects in randomly varying environments. Em: Proc. 2013 International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering (I. P. Hamilton, J. Vigo-Aguiar, eds.), CMMSE, Cabo de Gata, Almería, p. 304--307.
- Braumann, C. A.; Carlos, C. (2015). Weak Allee effects population growth models in a random environment. Em: *Proc. 60th ISI World Statistics Congress*: 2455-2460.
- Braumann, C. A.; Filipe, P. A.; Carlos, C.; Roquete, C. J. (2009). Growth of individuals in randomly fluctuating environments, Em: Proc. 2009 International Conference in Computational and Mathematical Methods in Science e Engineering Engineering (J. Vigo-Aguiar, ed.), CMMSE, Gijón, p. 201-212.
- Braumann, C. A.; Filipe, P. A.; Carlos, C.; Roquete, C. J. (2012). Stochastic differential equations general models of individual growth in uncertain environments and application to profit optimization in livestock production. *Bulletin of the ISI 58th World Statistics Congress of the International Statistical Institute 2011*: 4450-4455.
- Bravo, J. M.; Braumann, C. A. (2007). The value of a random life: modelling survival probabilities in a stochastic environment. *Bulletin of the International Statistical Institute* **LXII**: 5741-5744.
- Brites, N.M. (2017). *Stochastic Differential Equation Harvesting Models: Sustainable Policies and Profit Optimization*. Tese de doutoramento, Universidade de Évora.
- Brites, N. M.; Braumann, C. A. (2017). Fisheries management in random environments: Comparison of harvesting policies for the logistic model. *Fisheries Research* **195**: 238-246.
- Brites, N. M.; Braumann, C. A. (2018, divulgação). Políticas ótimas de pescas usando equações diferenciais estocásticas. *Boletim Sociedade Portuguesa de Estatística Outono 2018*: 40-48.

- Brites, N. M.; Braumann, C. A. (2019a). Fisheries management in randomly varying environments: Comparison of constant, variable and penalized efforts policies for the Gompertz model. *Fisheries Research* **216**: 196-203.
- Brites, N. M.; Braumann, C. A. (2019b). Harvesting in a random varying environment: Optimal, stepwise and sustainable policies for the Gompertz model. *Statistics Optimization and Information Computing* **7**: 533-544.
- Brites, N. M.; Braumann C. A. (2020a). Harvesting policies with stepwise effort and logistic growth in a random environment. Em: *Current Trends in Dynamical Systems in Biology and Natural Sciences* (M. Aguiar, C. A. Braumann, B. W. Kooi, A. Pugliese, N. Stollenwerk, E. Venturino, eds.), Springer, Cham., p. 95-110.
- Brites, N. M.; Braumann, C. A. (2020b). Stochastic differential equations harvesting policies: Allee effects, logistic-like growth and profit optimization. *Applied Stochastic Models in Business and Industry* **36**: 825-835.
- Brites, N. M.; Braumann, C. A. (2022). Profit optimization of stochastically fluctuating populations under harvesting: The effects of Allee effects. *Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research* **71**: 3277-3293.
- Brites, N. M.; Braumann, C. A. (2023). Harvesting optimization with stochastic differential equations models: Is the optimal enemy of the good? *Stochastic Models* **39**: 41-59.
- Brites, N. M.; Braumann, C. A. (2025). Moments and probability density of threshold crossing times for populations in random environments under sustainable harvesting policies. *Computational Statistics* **40**: 3191-3203.
- Brites, N. M.; Braumann, C. A. (2026, em impressão). Optimal harvesting in randomly varying environments: Sensitivity of profit and effort to population and economic parameters. Em: *Advances in Mathematical Modeling in Science, Engineering and Social Sciences* (M. Bezzeghoud, F. Carapau, F. Minhós, A. Vaidya, eds.). Springer, Heidelberg.
- Capocelli, R. M.; Ricciardi, L. M. (1974). A diffusion model for population growth in a random environment. *Theoretical Population Biology* **5**: 28-41.
- Carlos, C. (2013). *Modelos de Crescimento Populacional em Ambiente Aleatório: Efeito de Incorreta Especificação do Modelo, Efeitos de Allee e Tempos de Extinção*. Tese de doutoramento, Universidade de Évora.
- Carlos, C. (2018, divulgação). Modelos de crescimento populacional usando equações diferenciais estocásticas – tempos de extinção e influência da incorreta especificação do modelo. *Boletim Sociedade Portuguesa de Estatística Outono 2018*: 19-24.
- Carlos, C.; Braumann, C. A. (2005). Tempos de extinção para populações em ambiente aleatório. Em: *Estatística Jubilar* (C. A. Braumann, P. Infante, M. M. Oliveira, R. Alpizar-Jara, F. Rosado, eds.). Edições SPE, Lisboa, p. 133-142.
- Carlos, C.; Braumann, C. A. (2006). Tempos de extinção para populações em ambiente aleatório e cálculos de Itô e Stratonovich. Em: *Ciência Estatística* (L. Canto e Castro, E. Graça Martins, C. Rocha, M. F. Oliveira, M. Mendes Leal, F. Rosado, eds.), Edições SPE, Sociedade Portuguesa de Estatística, p. 229-238.
- Carlos, C.; Braumann, C. A. (2014). Consequences of an incorrect model specification on population growth. Em: *New Advances in Statistical Modeling and Applications* (A. Pacheco, R. Santos, M. R. Oliveira, C. D. Paulino, eds.), Springer, p. 105-113.

- Carlos, C., Braumann, C. A. (2017). General population growth models with Allee effects in a random environment. *Ecological Complexity* **30**: 26-33.
- Carlos, C.; Braumann, C.A.; Filipe, P.A. (2013). Models of individual growth in a random environment: Study and application of first passage times. Em: *Advances in Regression, Survival Analysis, Extreme Values, Markov Processes and Other Statistical Applications* (J. L. da Silva, F. Caeiro, I. Natário, C. A. Braumann, M. L. Esquível, J. Mexia, eds.), Springer, p. 103-111.
- Clark, C. W. (2010). *Mathematical Bioeconomics: The Optimal Management of Renewable Resources*, 3rd edition. ISBN: 9780470372999. Wiley, New York.
- Dennis, B. (1989). Allee effects: Population growth, critical density and the chance of extinction. *Natural Resource Modelling* **3**: 481-539.
- Dennis, B. (2002). Allee effects in stochastic populations. *Oikos* **96**: 389-401.
- dos Santos Baptista, D.; Brites, N. M. (2023). Modelling French and Portuguese mortality rates with stochastic differential equation models: A comparative study. *Mathematics* **11**: 4648.
- dos Santos Baptista, D.; Brites, N.M.; dos Reis, A.D.E. (2025). Stochastic differential equations death rates models: The Portuguese case. *Decisions in Economics and Finance* **48**: 1197–1217.
- Feldman, M. W.; Roughgarden, J. (1975). A population's stationary distribution and chance of extinction in a stochastic environment with remarks on the theory of species packing. *Theoretical Population Biology* **7**: 197-207.
- Filipe, P. A. (2011). *Equações Diferenciais Estocásticas na Modelação do Crescimento Individual em Ambiente Aleatório*. Tese de doutoramento, Universidade de Évora.
- Filipe, P. A. (2018, divulgação). Modelos de equações diferenciais estocásticas e modelos mistos em crescimento individual. *Boletim Sociedade Portuguesa de Estatística Outono 2018*: 76-80.
- Filipe, P. A.; Braumann, C. A. (2007). Animal growth in random environments: Estimation with several paths. *Bulletin of the International Statistical Institute* **LXII**: 5806-5809.
- Filipe, P. A.; Braumann, C. A. (2008). Modelling individual animal growth in random environments. Em: *Proc. 23d International Workshop on Statistical Modelling* (P. H. C. Eilers, ed.), p. 232-237.
- Filipe, P. A.; Braumann, C. A.; Brites, N. M.; Roquete, C. J. (2010). Modelling animal growth in random environments: An application using nonparametric estimation. *Biometrical Journal* **52**: 653-666.
- Filipe, P. A.; Braumann, C. A.; Brites, N. M.; Roquete, C. J. (2013). Prediction for individual growth in a random environment. Em: *Recent Developments in Modeling and Applications in Statistics* (P. E. Oliveira, M. Graça Temido, C. Henriques, M. Vichi, eds.), Springer, p. 193-201.
- Filipe, P. A.; Braumann, C. A.; Carlos, C. (2015). Profit optimization for cattle growing in a randomly fluctuating environment. *Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research* **64**: 1393-1407.
- Filipe, P. A.; Braumann, C. A.; Carlos, C.; Roquete, C. J. (2014). Individual growth in a random environment: An optimization problem. Em: *New Advances in Statistical Modeling and Applications* (A. Pacheco, R. Santos, M. R. Oliveira, C. D. Paulino, eds.), Springer, p. 115-123.

- Filipe, P. A.; Braumann, C. A.; Roquete, C. J. (2007). Modelos de crescimento de animais em ambiente aleatório. Em: Estatística Ciência Interdisciplinar (M. E. Ferrão, C. Nunes, C. A. Braumann, eds.), Edições SPE, Sociedade Portuguesa de Estatística, p. 401-410.
- Filipe, P. A.; Braumann, C. A.; Roquete, C. J. (2008). Crescimento individual em ambiente aleatório: Várias trajectórias. Em: Estatística da Teoria à Prática (M. M. Hill, M. A. Ferreira, J. G. Dias, M. F. Salgueiro, H. Carvalho, P. Vicente, C. A. Braumann, eds.), Edições SPE, Sociedade Portuguesa de Estatística, p. 259-268.
- Filipe, P. A.; Braumann, C. A.; Roquete, C. J. (2009a). Modelos multifásicos de crescimento de animais em ambiente aleatório. Em: Estatística: Arte de Explicar o Acaso (I. Oliveira, E. Correia, F. Ferreira, S. Dias, C. A. Braumann, eds.), Edições SPE, Sociedade Portuguesa de Estatística, p. 299-306.
- Filipe, P. A.; Braumann, C. A.; Roquete, C. J. (2009b). Multiphasic individual growth models in random environments. Em: The XIIIth International Conference Applied Stochastic Models and Data Analysis – Selected Papers (L. Sakalauskas, C. Skiadas, E. K. Szavadskas, eds.), Institute of Mathematics and Informatics, VGTU Press “Technika”, Vilnius Gediminas Techn. University, p. 422-426.
- Filipe, P. A.; Braumann, C. A.; Roquete, C. J. (2012). Multiphasic individual growth models in random environments. *Methodology and Computing in Applied Probability* **14**: 49--56.
- Garcia, O. (1983). A stochastic differential equation model for the height of forest stands. *Biometrics* **39**: 1059-1072.
- Ghiman, I. I.; Skorohod, A. V. (1991). *Stochastic Differential Equations*. ISBN: 9783540059462. Springer, Berlin.
- Itô, K. (1951). *On Stochastic Differential Equations*. ISBN: 9780821899830. Memoirs of the American Mathematical Society Nr. 4.
- Jacinto, G.; Filipe, P. A.; Braumann, C. A. (2022a). Profit optimization of cattle growth with variable prices. *Methodology and Computing in Applied Probability* **24**: 1917- 1952.
- Jacinto, G.; Filipe, P. A.; Braumann, C. A. (2022b). Weighted maximum likelihood estimation for individual growth models. *Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research* **71**: 3295—3311.
- Jacinto, G.; Filipe, P. A.; Braumann, C. A. (2026, em impressão). Delta method estimation for SDE mixed models: Sensitivity to random parameter distribution. Em: Advances in Mathematical Modeling in Science, Engineering and Social Sciences (M. Bezzeghoud, F. Carapau, F. Minhós, A. Vaidya, eds.), Springer, Heidelberg.
- Jamba, N. T.; Filipe, P. A.; Jacinto, G.; Braumann, C. A. (2024). Stochastic differential equations mixed model for individual growth with the inclusion of genetic characteristics. *Statistics, Optimization & Information Computing* **12**: 298-309.
- Jamba, N. T.; Jacinto, G.; Filipe, P. A.; Braumann, C. A. (2022). Likelihood function through the delta approximation in mixed SDE models. *Mathematics* **2022**, **10**, 385.
- Jamba, N. T.; Jacinto, G.; Filipe, P. A.; Braumann, C. A. (2024). Estimation for stochastic differential equations mixed models using approximation methods. *AIMS Mathematics* **9**: 7866-7894.
- Karlin, S.; Taylor, H. M. (1981). *A Second Course in Stochastic Processes*. ISBN: 9780123986504. Academic Press, NY.

- Lagarto, S. (2013). *Modelos Estocásticos de Taxas de Mortalidade e Aplicações*. Tese de doutoramento, Universidade de Évora.
- Lagarto, S.; Braumann, C. A. (2013). Modeling human population death rates: A bi-dimensional stochastic Gompertz model with correlated Wiener processes. Em: *New Advances in Statistical Modeling and Applications* (A. Pacheco, R. Santos, M. R. Oliveira, C. D. Paulino, eds.), Springer, p. 95-103.
- Lagarto, S.; Gomes, D.; Braumann, C. A. (2013). Uma comparação entre modelos bivariados de EDE e modelos VARMA na previsão de taxas de mortalidade. Em: *Estatística: Novos Desenvolvimentos e Inspirações* (M. Maia, P. Campos, P. Duarte Silva, eds.), Edições SPE, Sociedade Portuguesa de Estatística, p. 189-202.
- Levins, R. (1969). The effect of random variations of different types on population growth. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA* **62**: 1062-1065.
- May, R. M. (1973a). Stability in randomly fluctuating versus deterministic environments. *American Naturalist* **107**: 621-650.
- May, R. M. (1973b). *Stability and Complexity in Model Ecosystems, 2nd edition*. Princeton University Press, New Jersey.
- May, R. M., MacArthur, R. H. (1972). Niche overlap as a function of environmental variability. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA* **69**: 1109-1113.
- Reis, M.; Brites, N. M. (2025). Stochastic differential equations harvesting optimization with stochastic prices: Formulation and numerical solution. *Results in Applied Mathematics* **25**, 2025, 100533.
- Stratonovich, R. L. (1966). A new representation of stochastic integrals and equations. *SIAM Journal on Control* **4**: 362-371.
- Suri, R. (2008). *Optimal Harvesting Strategies for Fisheries: A Differential Equations Approach*. Tese de doutoramento, Massey University, Albany, New Zealand.
- Turelli, M. (1978). A reexamination of stability in randomly varying environments with comments on the stochastic theory of limiting similarity. *Theoretical Population Biology* **13**: 244-267.
- Uhlenbeck, G. E.; Ornstein, L. S. (1930). On the theory of Brownian motion. *Physical Review* **36**: 823-841.

