



## **Astrofísica**



David Berry  
*Departamento de Física - Universidade de Évora*

2024

## **Programa**

### **1. Introdução**

Lentes. Telescópios óticos. Comparando telescópios. Telescópios não óticos. Problemas.

### **2. O sistema solar**

A mecânica celeste. As características dos planetas. Problemas.

### **3. O Sol**

Estrutura. Atividade Solar. Problemas.

### **4. As estrelas**

Distâncias astronómicas. As magnitudes das estrelas. Massas estelares. O diagrama Hertzsprung-Russell. Evolução das estrelas. O diagrama Hertzsprung-Russell. Evolução das estrelas. Problemas.

### **6. Galáxias**

A Via Láctea. As galáxias para além da Via Láctea. Problemas.

### **7. O Universo**

Expansão do Universo e a Lei de Hubble. Problemas.

## **Bibliografia**

Carroll, B.W. & Ostlie, D.A. (2017). An Introduction to Modern Astrophysics. Cambridge University Press.

Gregory, S. / Zeilik, M. (1997). Introductory Astronomy and Astrophysics. Saunders Golden Sunburst Series.

Sá, N. (2005). Astronomia. Geral. Escolar Editora.

Sharma, M.K. & Chandra, S. (2019). A Textbook of Astronomy and Astrophysics. Wiley.

## **Avaliação**

A aprovação nesta UC implica uma Nota Final (NF) igual ou superior a 10 valores. A NF resulta de uma média ponderada entre as notas das componentes teórica (NT) e prática (NP):

$$NF = (2/3) \times NT + (1/3) \times NP$$

A avaliação teórica (NT) tem uma classificação mínima de 10 valores. Pode ser obtida de duas formas alternativas, à escolha do estudante: realização de duas frequências, ou realização de exame final. Todos os estudantes podem comparecer à primeira frequência (a qual não é obrigatória), que será realizada a meio do semestre. A segunda frequência é realizada na data do exame de época normal, podendo o estudante nessa data escolher qual das provas quer realizar - normalmente opta por fazer o exame caso a nota da primeira frequência não lhe seja favorável. No caso da opção por frequências a nota mínima exigida em cada frequência é de 8 valores. A nota NT será a média das duas frequências e terá de ser superior a 10 valores. Todos os estudantes podem ir a exame de recurso: tanto os que quiserem fazer uma melhoria de nota NT, como os que anteriormente não obtiveram NT positiva.

A avaliação prática (NP) tem uma classificação mínima de 10 valores e baseia-se na avaliação dos relatórios dos trabalhos práticos e participação nas aulas laboratoriais.

Aviso importante: Os alunos não devem faltar às aulas laboratoriais, porque tal prejudica a avaliação prática. Os trabalhadores-estudantes que não puderem comparecer às aulas práticas regularmente devem falar com o docente, no início do semestre, sobre a possibilidade de comparecerem noutro horário, para realizarem as experiências.

## **Outras informações**

Os alunos devem consultar regularmente a plataforma moodle. Aí podem encontrar material de estudo adicional bem como informação sobre as datas e resultados das frequências e exames. Esta plataforma é ainda utilizada para enviar emails aos estudantes com informações relevantes.

De acordo com o artigo 97º do Regulamento Académico, “A frequência de aulas é um direito e um dever do estudante. O estudante deve frequentar pelo menos 75% da totalidade das aulas práticas e teórico-práticas sem prejuízo do disposto no presente regulamento sobre regimes especiais de frequência.”

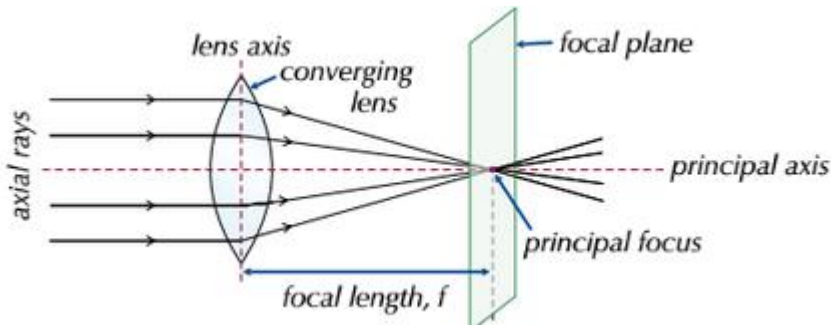
Regras para as provas de avaliação: Os estudantes devem obrigatoriamente desligar os telemóveis em todas as provas de avaliação. Em nenhuma destas provas é permitido o uso de formulários.

Chama-se ainda a atenção: “A utilização nas aulas de telemóveis, computadores pessoais e outros dispositivos eletrónicos só é permitida se contribuir positivamente para o processo de ensino e aprendizagem e deve ser explicitamente autorizada pelo docente.”

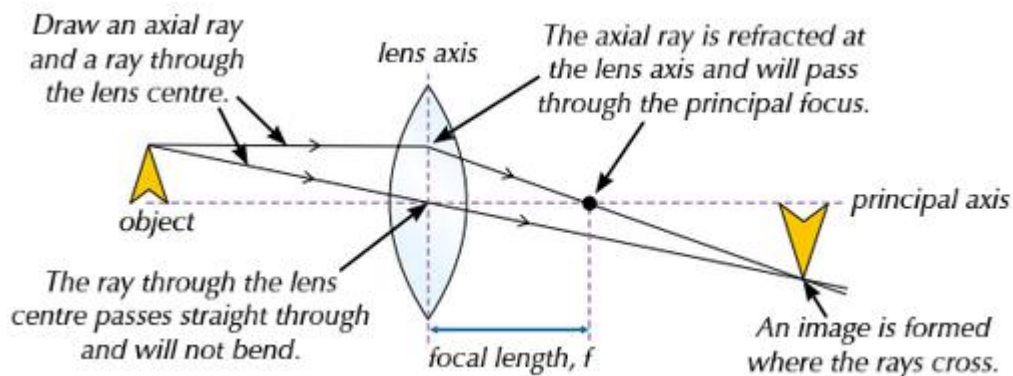
## 1. Introdução

Inferimos as propriedades físicas dos objetos astronómicos analisando a luz que eles emitem. Aqui discutimos como os astrónomos coletam e detetam luz – a base da astronomia observacional. Uma maneira de fazer isso é usar telescópios ópticos – que usam lentes.

### 1.1 Lentes

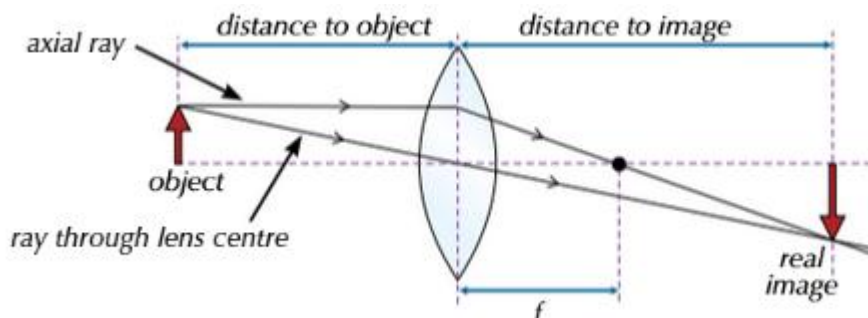


Quando os raios de luz de um objeto passam através de uma lente, forma-se uma imagem no ponto onde os raios se encontram. Para descobrir onde aparecerá uma imagem, podemos desenhar um diagrama de raios.

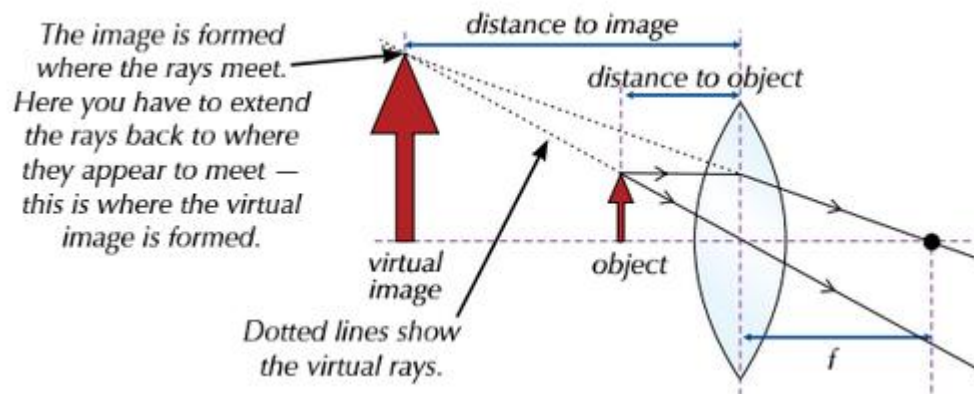


A imagem pode ser real ou virtual:

- Uma imagem real é formada quando raios de luz de um ponto de um objeto passam por outro ponto no espaço.



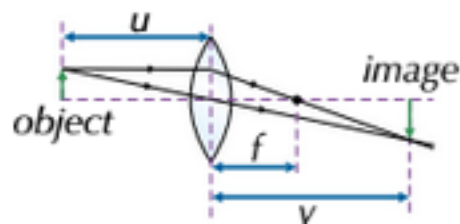
- Uma imagem virtual é formada quando os raios de luz de um ponto de um objeto parecem ter vindo de outro ponto do espaço:



A relação entre o objecto e a imagem é dada pela equação das lentes delgadas

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}$$

onde



*Exemplo:*

Um objecto encontra-se 4 cm à frente de uma lente de 6 cm de distancia focal.

- Localize a posição da imagem.
- Que tipo de imagem é obtida?
- Qual é o aumento da imagem?

*Solução:*

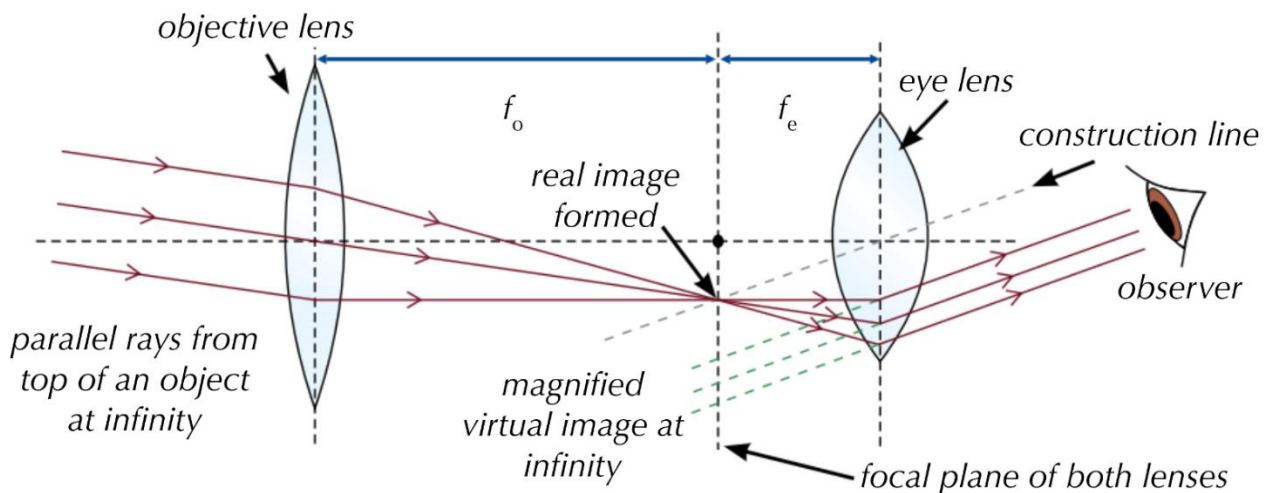
- 12 cm
- Virtual
- 3 cm

## 1.2 Telescópios óticos

Existem dois tipos de telescópios óticos:

- Telescópios refratores e
- Telescópios refletores

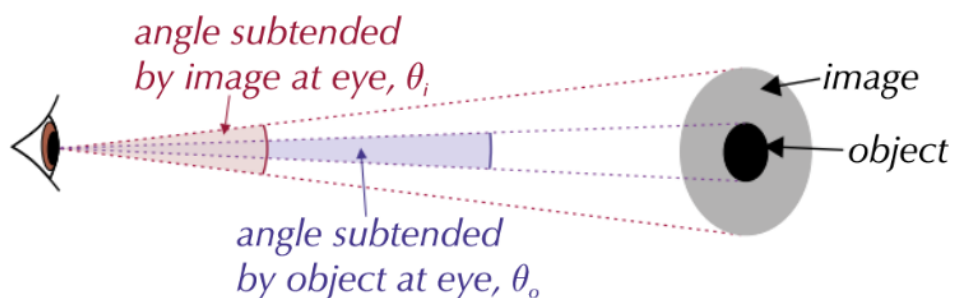
*Telescópios refratores:*



A ampliação,  $M$ , do telescópio pode ser calculada em termos de ângulos ou distâncias focais.

$$M = \frac{\text{Ângulo subtendido pela imagem no olho}}{\text{Ângulo subtendido pelo objeto a olho nu}} = \frac{\theta_i}{\theta_o}$$

onde



*Exemplo:*

Uma galáxia subtende um ângulo de  $9.5 \times 10^{-3}$  rad no olho quando vista da Terra. A imagem vista através de um telescópio refrator subtende um ângulo de 0,71 rad no olho. Qual é a ampliação angular do telescópio?

*Solução:*

74.73

A ampliação pode ser calculada por

$$M = \frac{f_o}{f_e}$$

*Exemplo:*

Calcule a distância focal da lente objetiva num telescópio refrator com  $M = 45$  e comprimento total de 0.8 m.

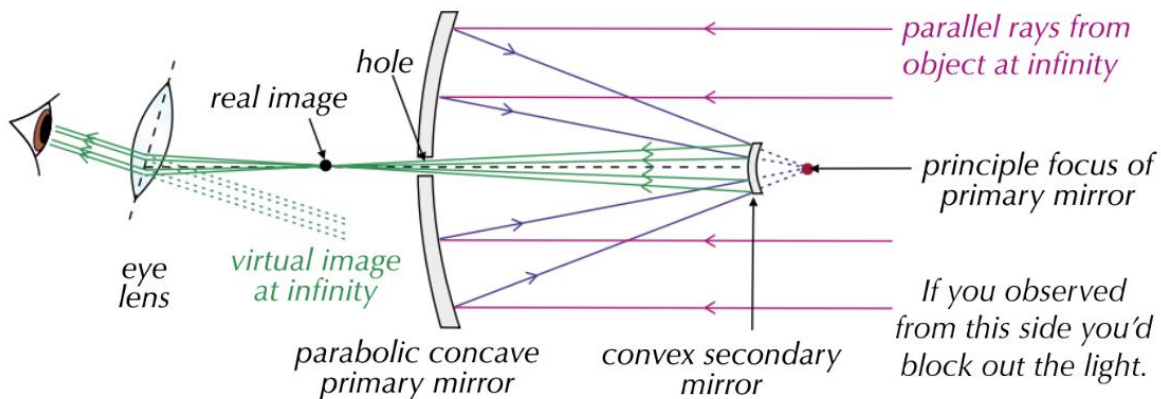
*Solução:*

0.783 m

... então  $f_e = 0.017$  m!

*Telescópios refletores:*

Estes usam um espelho primário côncavo parabólico para formar uma imagem real:



Aqui, o arranjo concebido onde o observador não bloqueia a luz que entra é chamado de arranjo Cassegrain, que usa um espelho secundário convexo.

Os astrónomos usam dispositivos acoplados a carga (CCDs) para capturar imagens digitalmente. São chips de silício dividido numa grade de milhões de pixels. Quando os fótons atingem o silício num pixel, isso cria eletrões livres que ficam confinados ao pixel, fazendo com que uma carga se acumule nele – o que pode ser medido. O sinal descreve a posição e a intensidade da luz.

Comparação com o olho humano:

#### 1. Eficiência quântica

CCDs: 80 %  
Olho: 1 %

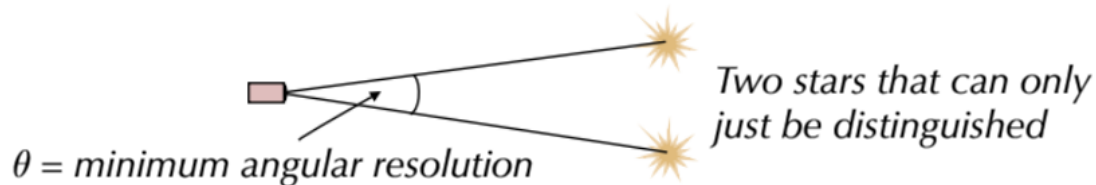
#### 2. Faixa de frequências detetada

CCDs: IV, Visível, UV  
Olho: Visível

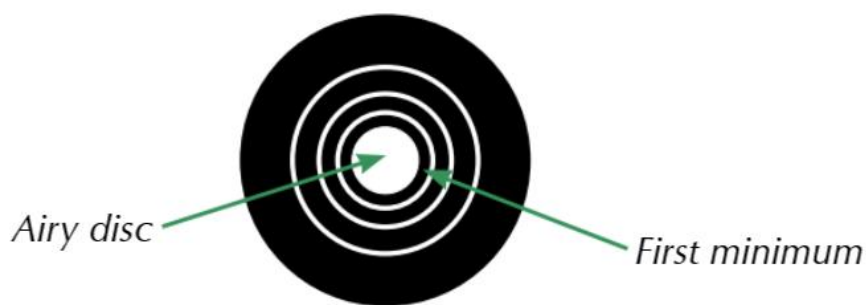
### 1.3 Comparando telescópios

O **poder de resolução** de um telescópio é uma medida do detalhe que pode ser observado.

Depende da resolução angular mínima, que é a menor separação angular na qual o instrumento pode distinguir dois pontos.



A resolução é limitada pela difração. Se um feixe de luz passar através de uma abertura circular, então um padrão de difração de máximos brilhantes e mínimos escuros é formado. O círculo central é chamado de disco de Airy:



Duas fontes de luz só podem ser distinguidas se o centro do disco Airy de uma fonte estiver pelo menos tão distante quanto o primeiro mínimo da outra fonte.

Isto levou ao critério de Rayleigh:

$$\theta = \frac{\lambda}{D}$$

onde  $\theta$  é a resolução angular mínima em radianos,  $\lambda$  é o comprimento de onda e  $D$  é o diâmetro da abertura - a lente objetiva ou espelho.

*Exemplo:*

Qual é o diâmetro da lente necessário para resolver a radiação com um comprimento de onda de 910 nm de dois objetos que estão separados por  $1.7 \times 10^{-6}$  rad no céu?

*Solução:*

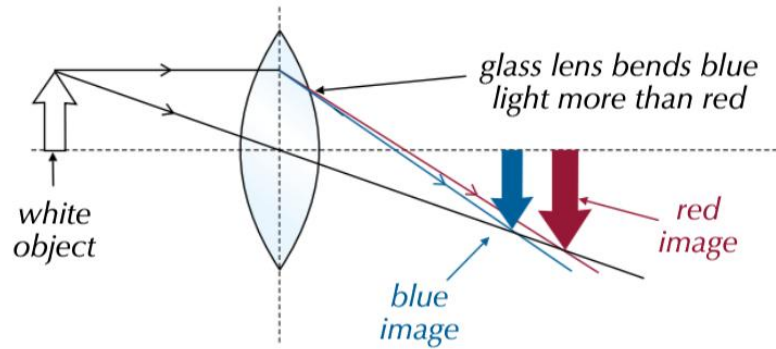
0.535 m



Existem desvantagens e dificuldades na utilização de telescópios refratores e refletores:

*Telescópios refratores:*

- A aberração cromática pode causar desfocagem:

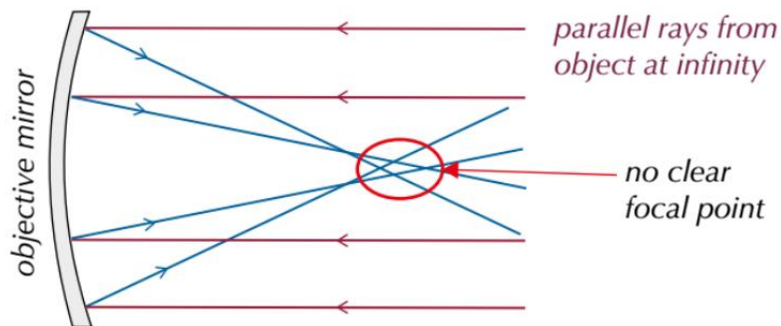


- As impurezas no vidro podem absorver e espalhar a luz.

- As lentes grandes são pesadas.

*Telescópios refletores:*

- Os espelhos sofrem de aberração esférica:

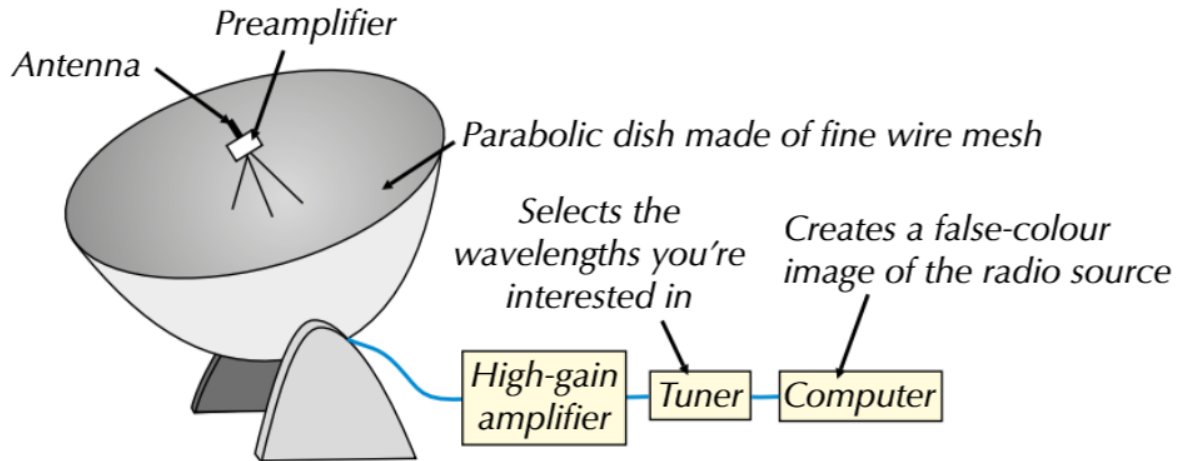


levando a uma diminuição da nitidez da imagem.

## 1.4 Telescópios não óticos

Existem vários tipos de telescópios não óticos:

### - Radiotelescópios



O comprimento de onda das ondas de rádio é cerca de um milhão de vezes maior do que a luz visível. Portanto, para que um radiotelescópio tivesse o mesmo poder de resolução que um telescópio ótico, a sua antena teria de ser um milhão de vezes maior. Os astrónomos contornam este problema ligando vários telescópios (ver o VLA).

Benefícios dos radiotelescópios:

- Como a antena do telescópio é feita de rede de arame, a sua construção é mais fácil e barata do que a dos telescópios óticos.
- O longo comprimento de onda das ondas de rádio significa que são menos afetadas pelas imperfeições na forma do disco.

### - Telescópios IR e UV

Os telescópios IR e UV são muito semelhantes aos telescópios refletorres óticos. Utilizam o mesmo espelho parabólico para focar a radiação num detetor. O maior comprimento de onda da radiação IR significa que não é afetada por imperfeições no espelho.

Mas ...

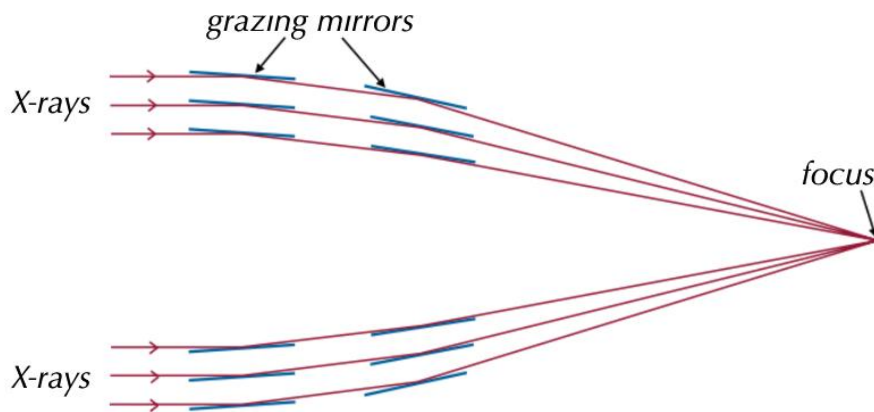
como a radiação UV tem um comprimento de onda mais curto, os espelhos dos telescópios da Europa têm de ser feitos com ainda mais precisão.

Os telescópios IR têm o problema adicional de produzirem a sua própria radiação IR devido à sua temperatura e necessitam de ser arrefecidos a baixas temperaturas utilizando hélio.

### - Telescópios raios-X

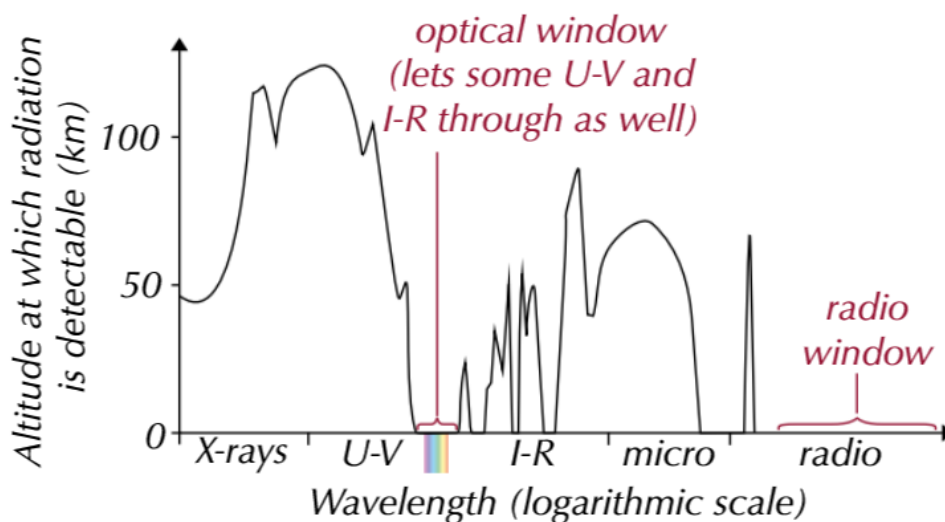
Os telescópios de raios-X têm uma estrutura diferente dos outros telescópios.

Os raios-X não refletem nas superfícies da mesma forma que a maioria das outras radiações EM. No entanto, os raios-X refletem se apenas roçarem na superfície de um espelho:



Os raios-X podem ser detetados utilizando um contador Geiger modificado.

A atmosfera só permite a passagem de determinados comprimentos de onda e é opaca para todos os outros:



Finalmente, o poder de recolha (LGP – Light Gathering Power) de um telescópio é proporcional à sua área de recolha. Para um telescópio rádio, ótico, UV e IV, esta é a área do espelho objetivo. Para um telescópio de raios-X, esta é a abertura através da qual os raios-X podem entrar no telescópio. Assim

$$LGP \propto D^2$$

## Problemas

1. Um objeto é colocado a 3,0 m de uma lente convergente com uma distância focal de 1.2 m. A que distância da lente será produzida uma imagem? A imagem será real ou virtual?
2. Duas lentes convergentes, cada uma com a distância focal de 10 cm, estão separadas 35 cm. Um objeto está 20 cm à esquerda da primeira lente.
  - (a) Determine a imagem final por meio de procedimento gráfico e também mediante a equação das lentes convergentes.
  - (b) A imagem é real ou virtual? Direita ou invertida?
  - (c) Qual é a ampliação da imagem final?
3. Um telescópio possui uma lente objetiva com uma distância focal de 0.52 m e uma lente ocular com uma distância focal de 0.001 m.
  - (a) Qual é a ampliação do telescópio?
  - (b) A imagem formada por uma galáxia observada pelo telescópio subtende um ângulo de 0.331 rad no olho. Qual é o ângulo subtendido pela galáxia a olho nu?
4. O telescópio A tem um diâmetro de 3 m e o telescópio B tem um diâmetro de 2.5 m. Qual terá melhor poder de resolução para um determinado comprimento de onda de radiação?
5. Um telescópio refletor com um diâmetro de espelho de 3.2 m é utilizado para detetar luz com um comprimento de onda de 650 nm.
  - (a) Qual é a resolução angular mínima do telescópio neste comprimento de onda?
  - (b) A luz detetada é emitida por duas fontes, espaçadas de um ângulo de  $1.99 \times 10^{-7}$  rad. Qual é o comprimento de onda máximo de luz que estas fontes necessitariam de emitir para serem distinguidas como duas fontes pelo telescópio?
6. O VISTA (Visible and Infrared Survey Telescope for Astronomy) está posicionado a uma altitude de 2500 m no deserto do Atacama, no Chile. O telescópio tem um diâmetro de espelho de 4.1 m.
  - (a) Quantas vezes é maior o poder de recolha do VISTA do que o do maior telescópio refrator com uma lente objetiva de 1.02 m de diâmetro?
  - (b) O poder de resolução deste telescópio é melhor na região da luz visível do que na região do infravermelho. Porquê?
  - (c) O deserto do Atacama é um dos locais mais secos da Terra e o telescópio encontra-se a uma altitude de 2500 m. Porque é que este é um bom local?
  - (d) Dê um exemplo de como o poder de resolução do telescópio para um determinado comprimento de onda de luz poderia ser aumentado sem alterar o tamanho do espelho.

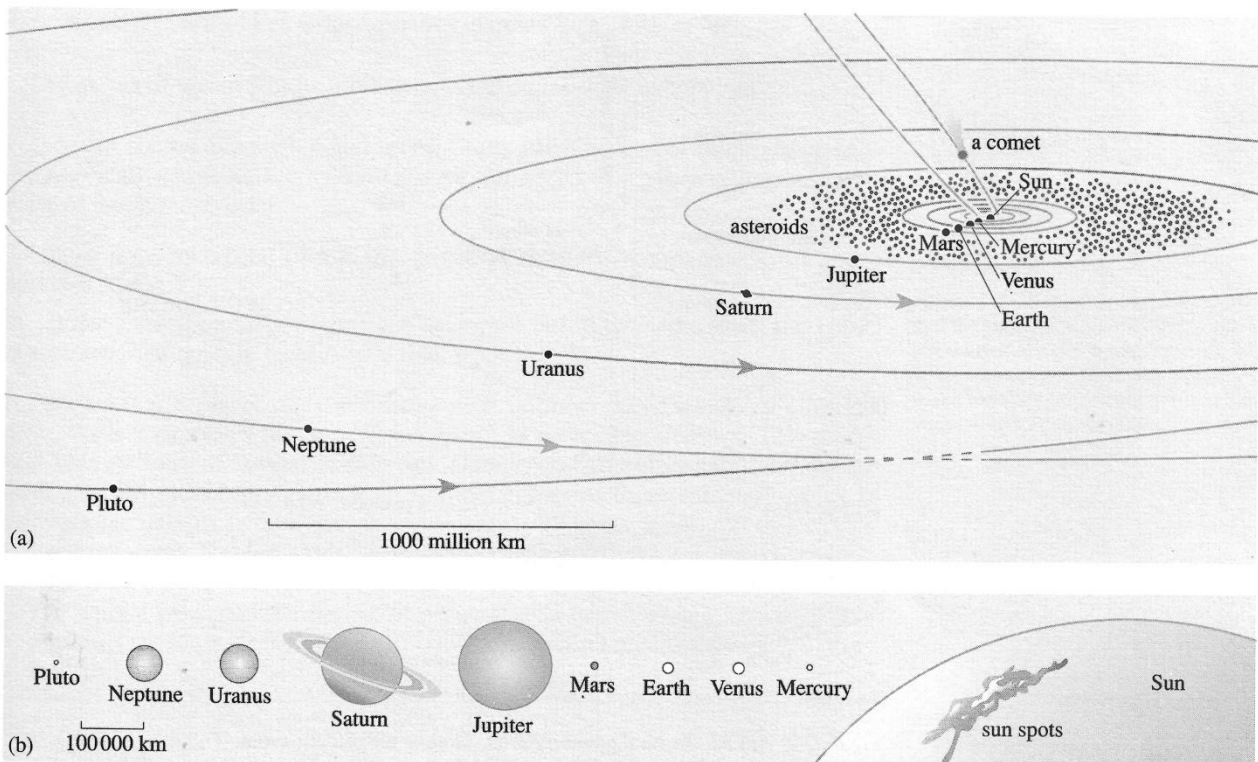
## 2. O Sistema Solar

O Sistema Solar é o conjunto dos corpos que se encontram na zona de ação gravítica do Sol, isto é, no espaço em torno do Sol onde a ação da sua gravidade é superior à das estrelas vizinhas. Ele é constituído pelo próprio Sol, pelos planetas e respetivos satélites, pelos asteroides, meteoritos, cometas e gases e poeiras interplanetárias.

### 2.1 A mecânica celeste

#### 2.1.1 As orbitas dos planetas

No total e incluindo a Terra, há nove planetas no Sistema Solar:



Os dois primeiros, por se situarem entre a Terra e o Sol, são designadas

- Planetas inferiores

e os seis últimos por

- Planetas superiores

Os planetas dividem-se em dois grupos:

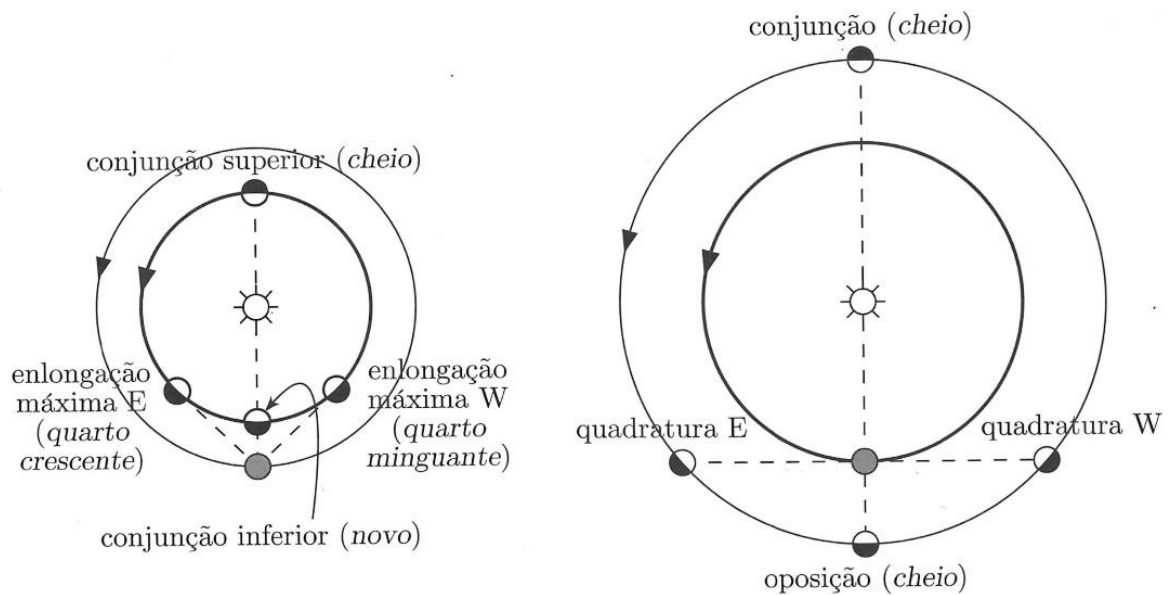
Planetas telúricos: Mercúrio, Vénus, Terra e Marte

Planetas jovianos: Júpiter, Saturno, Úrano e Neptuno.

Plutão é um planeta muito pequeno que não se enquadra em nenhum dos dois grupos.

A posição dos planetas relativamente ao Sol varia com o tempo porque os seus períodos orbitais são distintos do da Terra.

Chama-se *elongação* ao ângulo feito entre um planeta e o Sol:



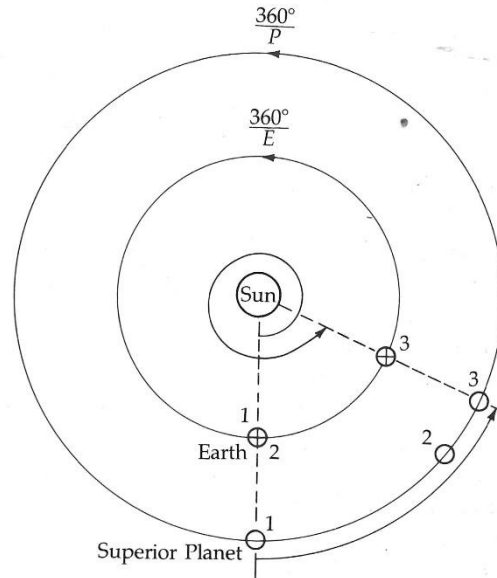
Outras designações dos planetas incluem: conjunção, quadratura e oposição.

A parte iluminada dos planetas não está sempre virada para a Terra, pelo que os planetas apresentam fases, tal como a Lua.

Copérnico derivou uma relação entre os períodos sinódico e sideral de um planeta, e

- o período sinódico  $S$  é o tempo que o planeta leva para retornar à mesma posição no céu em relação ao Sol, visto da Terra,

- o período sideral  $P$  é o tempo que o planeta leva para completar uma órbita do Sol em relação às estrelas:



O período sideral da Terra,  $E$ , é 365.26 dias, e move-se a uma taxa angular  $360^\circ/E$ , enquanto, para um planeta, a taxa angular é  $360^\circ/P$ .

Para um planeta superior,

$$(S - E)(360^\circ/E) = S(360^\circ/P)$$

ou

$$1/S = 1/E - 1/P$$

Para um planeta inferior,

$$1/S = 1/P - 1/E$$

Como exemplo, o planeta Vénus tem um período sinódico,  $S = 583.92$  dias. Então

$$1/583.92 = 1/P - 1/365.26$$

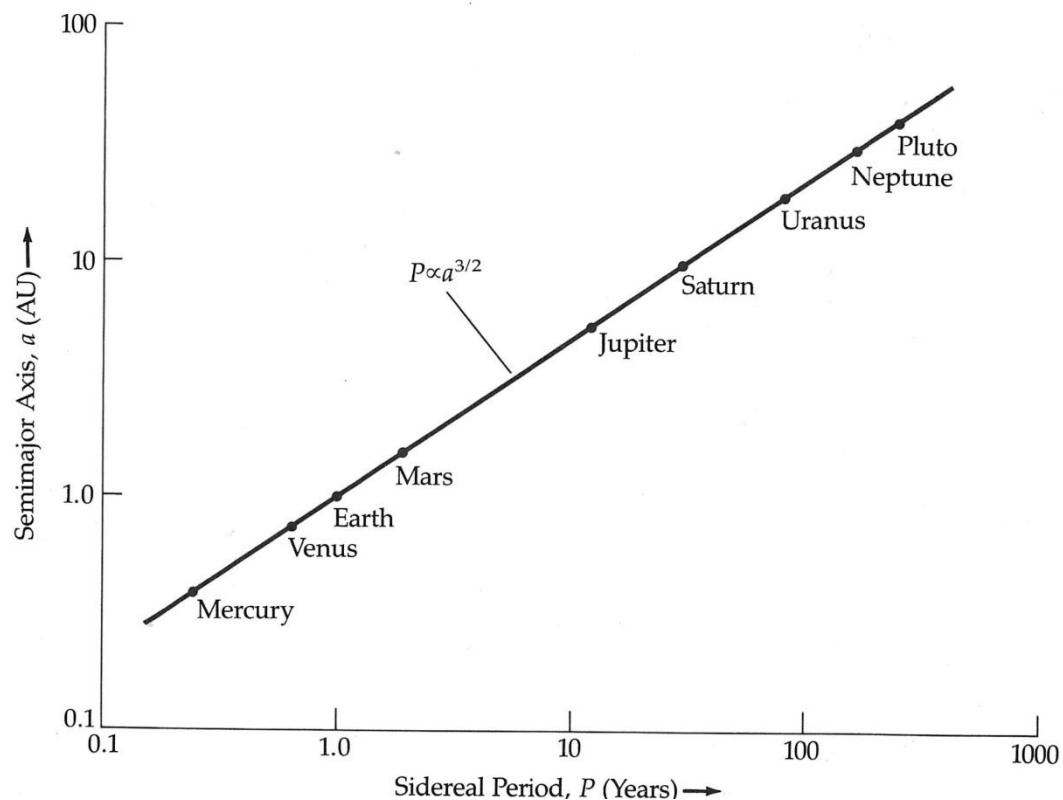
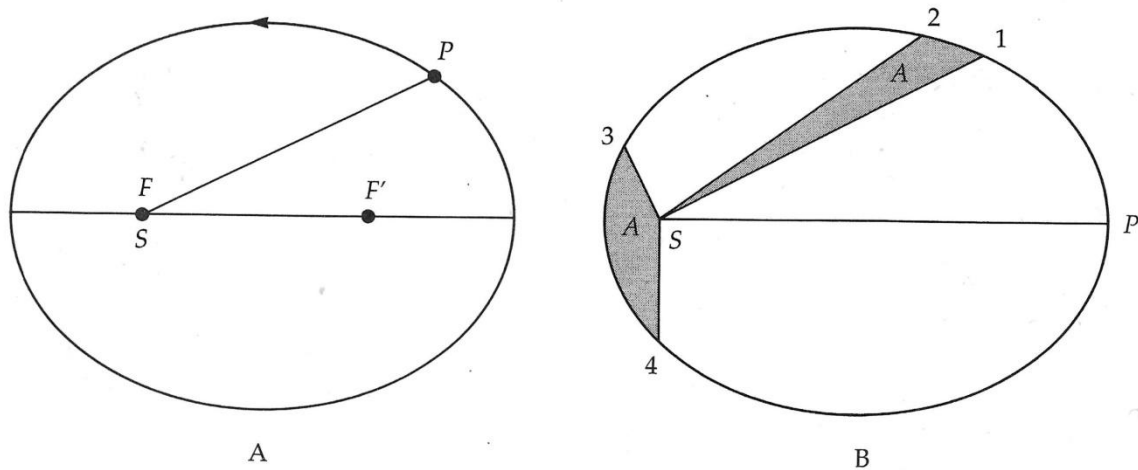
e

$$P = 224.7 \text{ dias.}$$

### 2.1.2 O modelo de Kepler

Baseado no modelo de Copérnico e nas observações de Marte por Tycho Brahe, Kepler formulou três leis para descrever as orbitas dos planetas:

1. A orbita de um planeta é uma elipse com o Sol num dos focos.
2. A velocidade de varrimento pelo raio vetor que liga um planeta ao Sol é constante.
3.  $p^2 = ka^3$  onde  $k$  é uma constante e  $a$  é o semieixo maior.





## 2.2 As características dos planetas

### 2.2.1 Os movimentos

Os planetas obedecem as leis de Kepler e Newton e movem-se em orbitas elípticas à volta do Sol:

Planet	Distance
Mercury	0.39
Venus	0.72
Earth	1.00
Mars	1.52
Jupiter	5.20
Saturn	9.54
Uranus	19.2
Neptune	30.1
Pluto	39.5

A distância média da Terra ao Sol serve de referência para a definição de uma nova unidade de comprimento, a unidade astronómica, UA (ou AU, astronomical unit)

$$1 \text{ UA} = 1.496 \times 10^{11} \text{ m}$$

As distâncias médias dos planetas ao Sol apresentam uma certa regularidade (a lei de Titus-Bode):

$$a_n = \frac{4 + 3 \times 2^n}{10}$$

onde  $n = 0, \dots, 7$  :

0.7   1.0   1.6   2.8   5,2   10   19.6   38.8   UA

Funciona bem

- exceto pela omissão de Mercúrio e de Neptuno
- previsão da existência de um planeta a 2.8 UA - asteroides

A lei não resulta de nenhuma propriedade intrínseca.

Considere as tabelas:

TABLE A3-1 Planetary Orbits

Planet	Symbol	Synodic Period (Days)	Sidereal Period		Semimajor Axis		Eccentricity	Inclination to Ecliptic
			Tropical Years	Days	Au	10 <sup>6</sup> km		
Mercury	☿	115.9	0.241	87.96	0.387	57.9	0.206	7.00°
Venus	♀	583.9	0.615	224.70	0.723	108.2	0.007	3.39
Earth	♁	—	1.000	365.26	1.000	149.6	0.017	0.00
Mars	♂	779.9	1.881	686.98	1.524	228.0	0.093	1.85
Jupiter	♃	398.9	11.86	4333	5.203	778.3	0.048	1.31
Saturn	♄	378.1	29.46	10,759	9.54	1427	0.056	2.49
Uranus	♅	369.7	84.01	30,685	19.18	2871	0.047	0.77
Neptune	♆	367.5	164.8	60,188	30.06	4497	0.009	1.77
Pluto	♇	366.7	248.6	90,700	39.44	5913	0.249	17.15

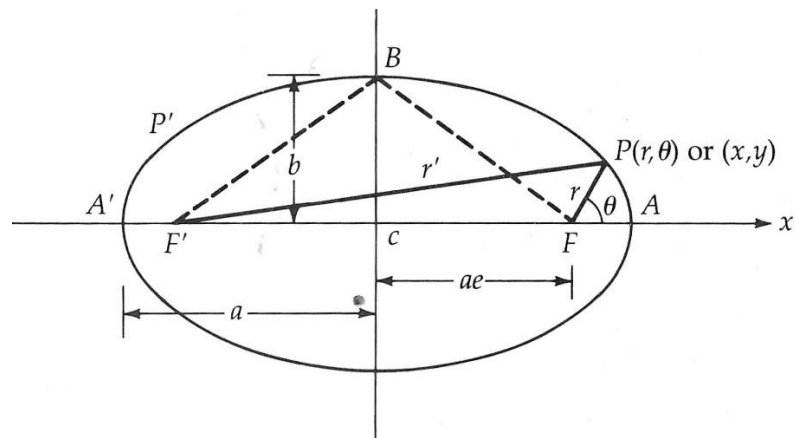
TABLE A3-2 Planetary Rotation

Planet	Sidereal Rotation Period	Oblateness	Obliquity*
Mercury	58.65 days	0	0.0°
Venus	243 days	0	177.4
Earth	23 <sup>h</sup> 56 <sup>m</sup> 4.1 <sup>s</sup>	0.0034	23.5
(Moon)	27.3 days	0.0006	6.7
Mars	24 <sup>h</sup> 37 <sup>m</sup> 22.6 <sup>s</sup>	0.0052	25.2
Jupiter	9 <sup>h</sup> 50.5 <sup>m</sup>	0.062	3.1
Saturn	10 <sup>h</sup> 14 <sup>m</sup>	0.096	26.7
Uranus	17 <sup>h</sup> 14 <sup>m</sup>	0.06	98
Neptune	16 <sup>h</sup> 3 <sup>m</sup>	0.02	29
Pluto	6.439 days	?	65

\*Obliquity is defined as the inclination of the equator to the orbital plane. Obliquities greater than 90° imply retrograde rotation.

As orbitas têm três características específicas:

1. Todos os planetas movem-se à volta do Sol em sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.
2. Os planos orbitais ficam muito perto do plano da órbita da Terra.
3. As excentricidades dos planetas:



$$e = \frac{Fc}{a}$$

são  $< 0.1$  exceto Mercúrio (0.206) e plutão (0.249).

Para Plutão,

$$r_p = 29.68 \text{ UA}$$

$$r_p = 49.36 \text{ UA}$$

- passa mais perto do Sol do que Neptuno.

Os equadores dos planetas estão inclinados em relação aos seus planos orbitais em quantidades variáveis:

Mercúrio

A Lua

Júpiter

- têm pequenas inclinações

Terra

Marte

Saturno

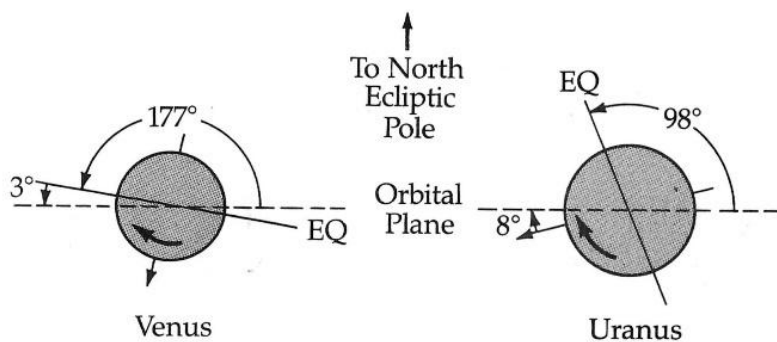
Neptuno

- têm inclinações:  $90^\circ$

Vénus

Urânio

- têm movimentos retrógrados:



Para Urânio,  $i = 98^\circ$  - o eixo de rotação fica essencialmente no plano orbital.

O achatamento “oblateness” de um planeta é

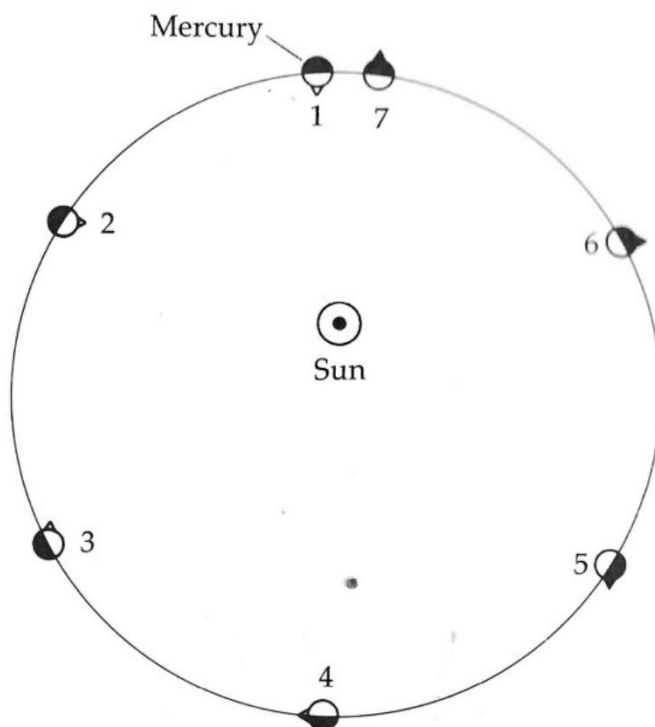
$$\epsilon = \frac{(r_e - r_p)}{r_e}$$

- para uma esfera,  $\epsilon = 0$  e  $\epsilon$  depende da sua taxa de rotação.

Finalmente, o período rotacional sideral de Mercúrio é 58.65 dias

- que é 2/3 do período orbital sideral (87.96 dias)

Então:



### 2.2.2 Os interiores dos planetas

O Sol fica no centro do sistema dos nove planetas e os planetas dividem-se em dois grupos:

- os planetas terrestres: Mercúrio, Vénus e Terra com massas  $M_{\oplus}$
- os planetas gigantes: Júpiter, Saturno, Urano, e Neptuno  $15M_{\oplus} \rightarrow 318M_{\oplus}$ .

Há três tipos de materiais que constituem os planetas

1. Materiais rochosos: contêm metais (Fe, Si) e os seus compostos
- os planetas terrestres
2. Materiais gelados: contêm compostos simples de H, C, N e O por exemplo  $H_2O$ ,  $NH_3$ ,  $CH_4$
- os planetas gigantes
3. Materiais muito voláteis
- os planetas gigantes.

Os outros corpos no sistema solar podem ser divididos em

1. Corpos rochosos: contêm materiais rochosos
- os asteroides, a Lua e alguns dos satélites.
2. Corpos gelados-rochosos: contêm uma combinação de materiais gelados e materiais rochosos.
- Plutão, outros satélites, e os cometas.

As massas planetárias são determinadas a partir de

1. aplicação da 3ª lei de Kepler às órbitas dos seus satélites.
2. observações de perturbações gravitacionais das órbitas dos outros planetas, asteroides, cometas etc.

Os raios podem ser determinados a partir de

1. medição do tamanho aparente do disco planetário.
2. Medição do tempo de ocultação.
3. Medição do tempo de pulsos de radar refletidos de partes da superfície do planeta.

Dividindo a massa  $M$  de um planeta pelo seu volume podemos calcular a densidade média do planeta.

Para os planetas terrestres

$$\bar{\rho} = 3400 \rightarrow 5500 \text{ kg m}^3$$

- mostra que são compostos de elementos pesados não voláteis.

Para os planetas jovianos

$$\bar{\rho} = 500 \rightarrow 2500 \text{ kg m}^3$$

- mostra que a composição é semelhante à do Sol (H e He).

### 2.2.3 As superfícies dos planetas

As características das superfícies são

1. A cor de um planeta - está relacionada com a composição da superfície e a atmosfera do planeta.
2. O albedo,  $A$

A fração da luz do Sol incidente refletida por um corpo é dada por

$$A = \frac{\text{Quantidade de luz refletida}}{\text{Quantidade de luz incidente}}$$

Para os planetas sem atmosfera:  $A$  - baixa

- Mercúrio - 0.6, Lua - 0.7, Marte - 0.16

Para os planetas com superfícies geladas:  $A$  - moderado

- Satélites de Saturno

Para os planetas com atmosferas:  $A$  - alto

Devido à alta refletividade das nuvens.

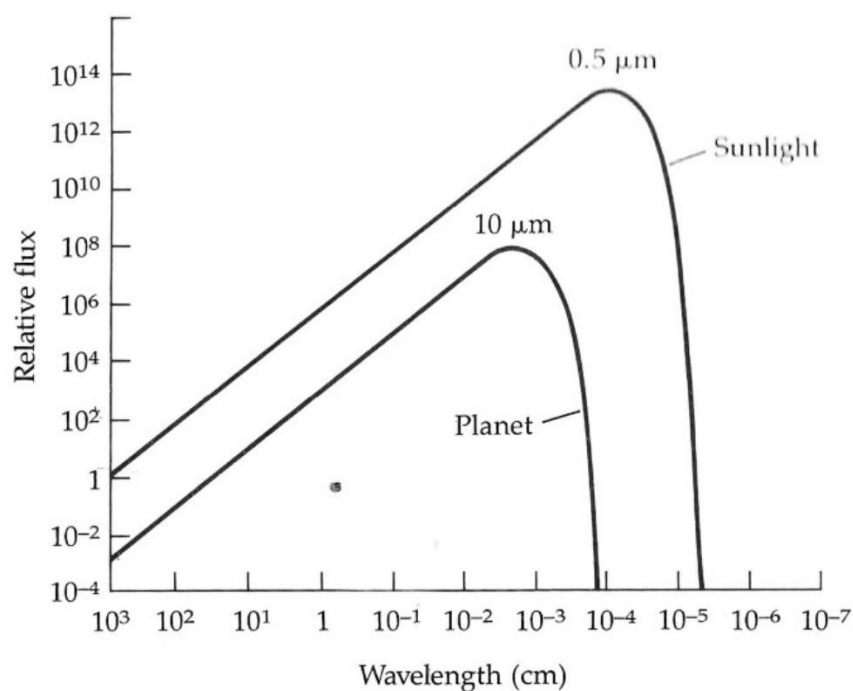
- Júpiter - 0.51, Saturno - 0.5, Vénus 0.76

O albedo da Terra é variável porque depende das estações - nuvens e neve. Tem valor médio de 0.35.

3. A temperatura da superfície

Podemos usar a teoria de radiação de corpos negros para relacionar a temperatura de um planeta com a radiação que emite.

Quando um corpo negro aquece, o espectro de luz emitido tem uma forma característica:



e

$$\lambda_{max} = \frac{0.002898}{T}$$

- a lei de Wien.

Assim, podemos determinar a temperatura da superfície de um planeta pela observação do máximo da sua emissão.

Um planeta que radia mais energia por segundo que recebe do Sol deve ter uma fonte de calor interna, por exemplo

- Terra, Lua, Júpiter, Saturno e Neptuno.

A temperatura do corpo negro de um planeta pode ser calculada usando a lei de Stefan-Boltzmann

$$E = \sigma T^4 \text{ W m}^{-2}$$

onde  $E$  é o fluxo de energia, e  $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$

Para o Sol,

$$\begin{aligned} L_{\odot} &= 4\pi R_{\odot}^2 E_{\odot} \\ &= 4\pi R_{\odot}^2 \sigma T^4 \\ &= 3.86 \times 10^{26} \text{ W} \end{aligned}$$

Esta mesma quantidade de energia escapa pela superfície de uma esfera de área  $4\pi r_p^2$  onde  $r_p$  é a distância entre o Sol e um planeta.

Então, o fluxo de energia na posição do planeta é

$$E_p \frac{4\pi R_\odot^2 E_\odot}{4\pi r_p^2} = \left(\frac{R_\odot}{r_p}\right)^2 E_\odot$$

Se  $1 \text{ m}^2$  de material de corpo negro interceptar essa energia do Sol, ela será elevada à temperatura sub estelar:

$$T_{ss} = \left(\frac{R_\odot}{r_p}\right)^{1/2} T_\odot = 394 r_p^{-1/2}$$

( $r_p$  em UA).

Esta teoria aplica-se às superfícies de planetas de rotações lentas (Mercúrio, Lua, Plutão) ao meio dia. Esta teoria não é apropriada para planetas de rotações alta. Para estes planetas, a área efetiva de absorção é  $\pi R_p^2$  onde  $R_p$  é o raio do planeta e a área efetiva de radiação é  $4\pi R_p^2$ .

A energia absorvida pelo planeta por segundo é

$$(1 - A)\pi R_p^2 E_p = (1 - A)\pi R_p^2 \left(\frac{R_\odot}{r_p}\right)^{1/2} \sigma T_\odot^4$$

e a energia que o planeta radia por segundo é

$$4\pi R_p^2 \sigma T_p^4$$

No equilíbrio,

$$T_p = (1 - A)^{1/4} \left(\frac{R_\odot}{2r_p}\right)^{1/2} T_\odot \approx 279(1 - A)^{1/4} r_p^{-1/2}$$

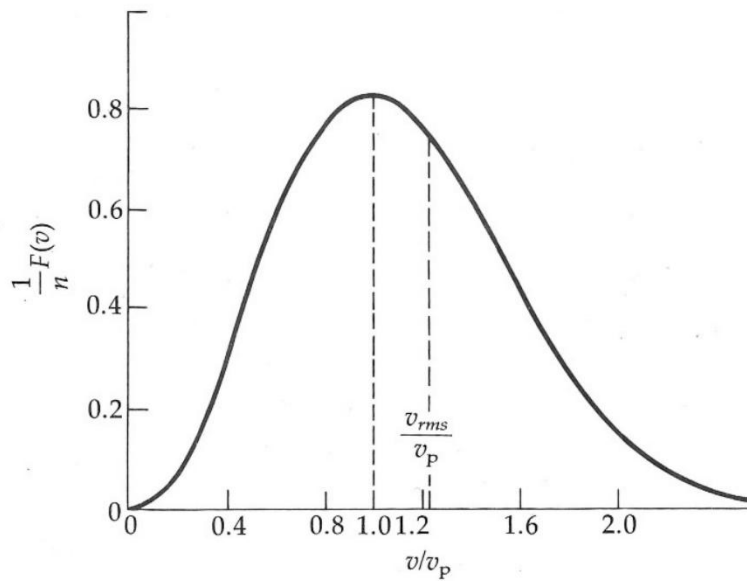


### 2.2.4 As atmosferas dos planetas

Para compreender as atmosferas planetárias, consideremos um modelo simples para explicar a sua retenção.

Na atmosfera, para uma temperatura  $T$ , as moléculas têm uma distribuição de velocidades dada pela distribuição de Maxwell:

$$F(v)dv \propto \exp\left(-\frac{1}{2}mv^2/kT\right)v^2dv$$



O pico desta distribuição define uma velocidade mais provável:

$$v_p = \left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2}$$

onde  $m$  é a massa de uma partícula de gás. A energia cinética média por partícula é

$$E_c = \frac{3kT}{2}$$

e a partir desta equação, a velocidade média é

$$v_{\text{média}} = \left(\frac{3kT}{m}\right)^{1/2}$$

Uma partícula que se move para fora com velocidade de escape  $v_e$  tem grande chance de deixar a atmosfera com  $v_e$  sendo

$$v_e = \left(\frac{2GM}{R}\right)^{1/2}$$

onde  $M$  é a massa e  $R$  é o raio do planeta.

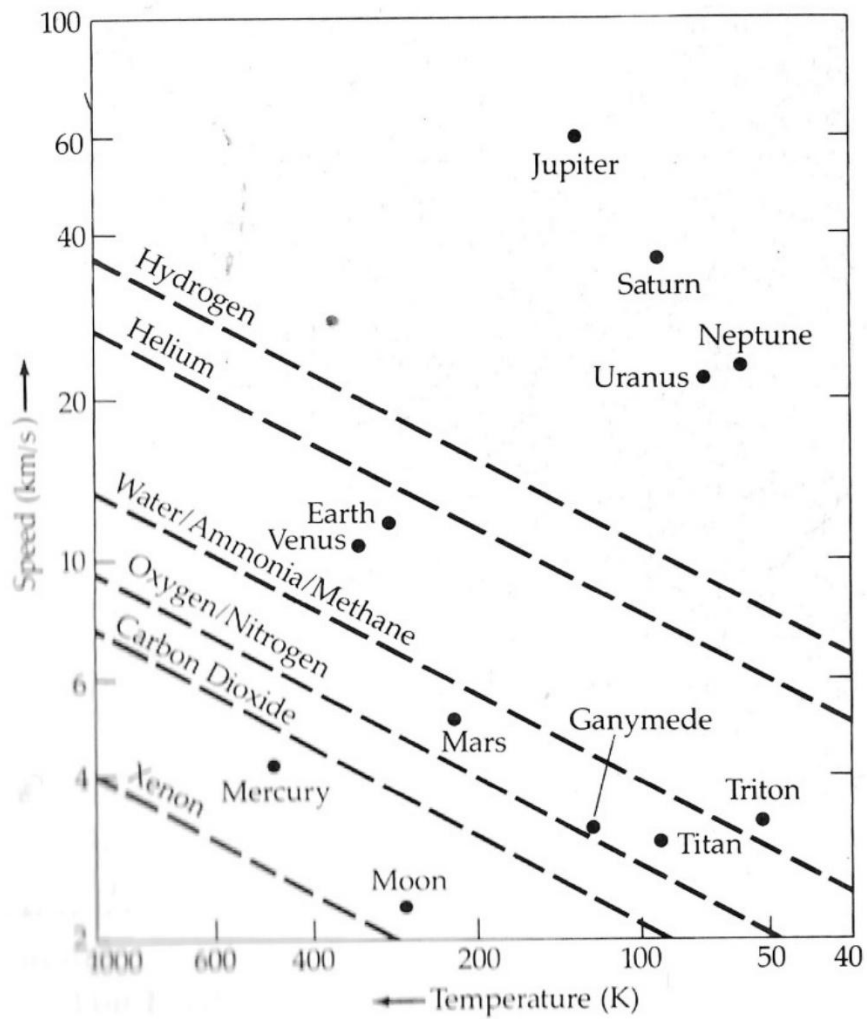
Se  $v_{\text{média}} = v_e$  esse gás deixará a atmosfera. Para reter uma atmosfera durante bilhões de anos, o planeta deve ter

$$v_e \geq 10v_{\text{média}}$$

Portanto,

$$T \leq \frac{GMm}{150kR}$$

Assim

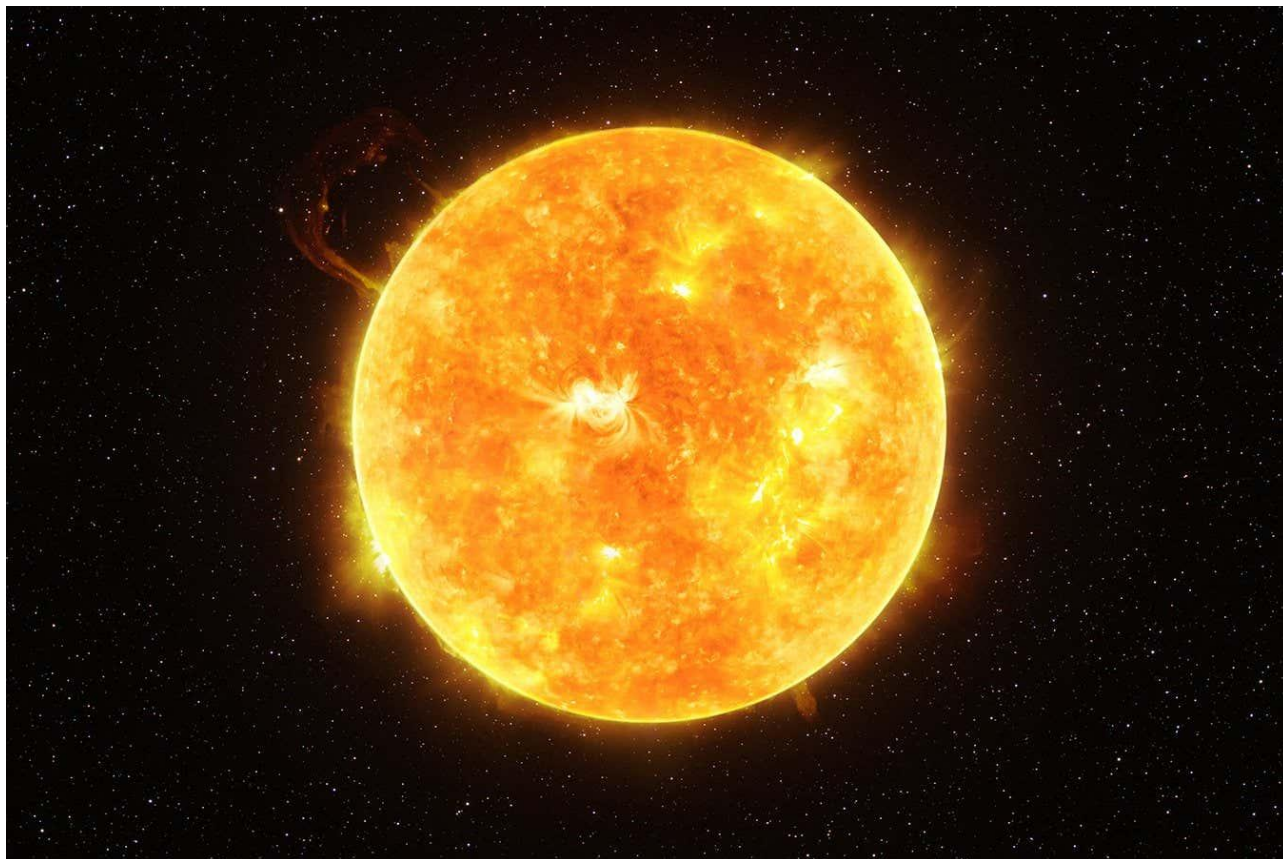


## Problemas

1. Considere a rotação dos planetas à volta do sol.
  - (a) Determine relações entre os períodos sinódicos e siderais de um planeta (i) superior e (ii) inferior.
  - (b) Imagine que está a observar a Terra de Júpiter. Qual seria o período orbital sinódico da Terra observado a partir da Júpiter? Qual seria o período orbital sinódico da Terra observado a partir de Vênus?
2. Considere as órbitas elípticas dos planetas à volta do Sol.
  - (a) Deduza uma expressão para a distância de um planeta ao Sol.
  - (b) Usando o resultado de parte (a), quais são as distâncias no periélio e no apélio?
  - (c) Calcule a distância da Terra ao Sol quando esta está no apélio e no periélio. (Excentricidade da Terra é 0.0167)
3. Um satélite de televisão está em órbita circular ao redor da Terra, com período sideral de exatamente 24 horas. Qual é a distância da superfície da Terra para o satélite? Se o satélite parece estacionário para um observador, qual é a orientação do plano orbital?
4. Usando dados orbitais de Titã, determine a massa de Saturno.
5. O albedo de Vênus é de cerca de 0,77 devido à atmosfera nublada. Qual seria a temperatura ao meio-dia? (A temperatura medida é 750 K).
6. (a) Ao meio-dia, a temperatura da superfície de Mercúrio é de aproximadamente 700 K; à meia-noite é 125 K. Calcule o comprimento de onda do pico da temperatura ao meio-dia e à meia-noite.
  - (b) Calcule a produção de energia por metro quadrado da superfície à meia-noite e ao meio-dia.

### 3. O Sol

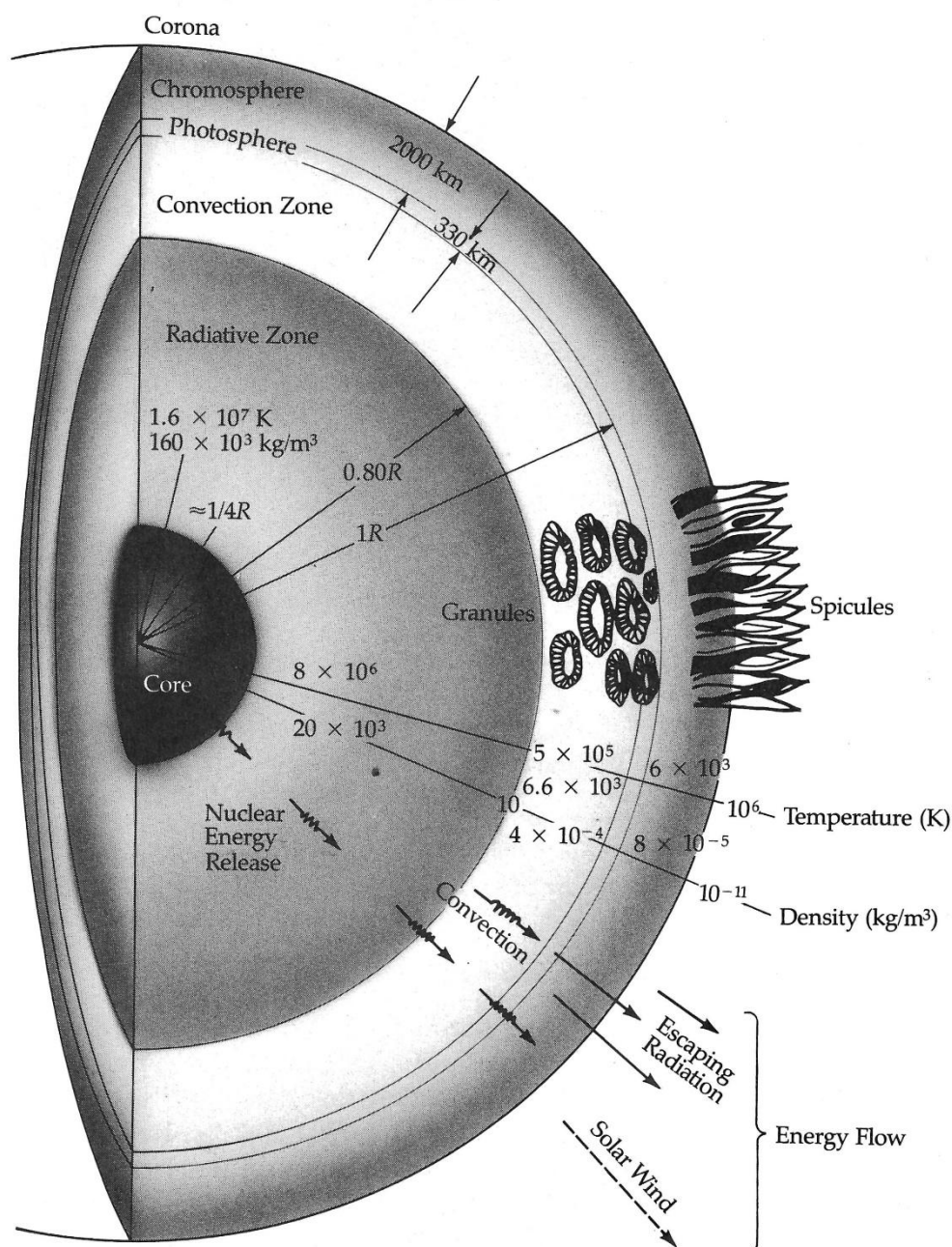
O Sol é a estrela mais próxima e a partir do seu estudo, podemos deduzir as características das outras estrelas no universo.



O Sol tem as seguintes propriedades:

Property	Value
Mass	$1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$
Radius	$6.96 \times 10^8 \text{ m}$
Mean density	$1410 \text{ kg/m}^3$
Surface gravity	$2.74 \times 10^2 \text{ m/s}^2$
Escape speed	$6.18 \times 10^5 \text{ m/s}$
Effective Temperature	5770 K
Luminosity	$3.86 \times 10^{26} \text{ W}$
Magnetic fields:	
Sunspots	0.3 T
Global	0.0001 T
Network	0.002 T
Plages	0.02 T

### 3.1 A estrutura



O Sol é composto de H e He muito quente na forma de um plasma.

Temperatura, pressão e densidade aumentam da superfície para o centro do Sol onde a energia é libertada por reações nucleares (a conversão de  $\text{H} \rightarrow \text{He}$ ) na forma de fótons e movimentos térmicos.

A superfície visível do Sol é a fotosfera que é a base da atmosfera solar. Depois da fotosfera é a cromosfera e para além dela a coroa.

### (a) A fotosfera

A fotosfera é a camada externa de uma estrela da qual a luz é irradiada. Estende-se pela superfície de uma estrela até que o plasma se torne opaco, equivalente a uma profundidade ótica (o logaritmo natural da razão entre a potência da luz incidente e a potência da luz transmitida através de um material) de

$\sim 2/3$

ou

uma profundidade da qual 50% da luz escapará sem ser espalhada.

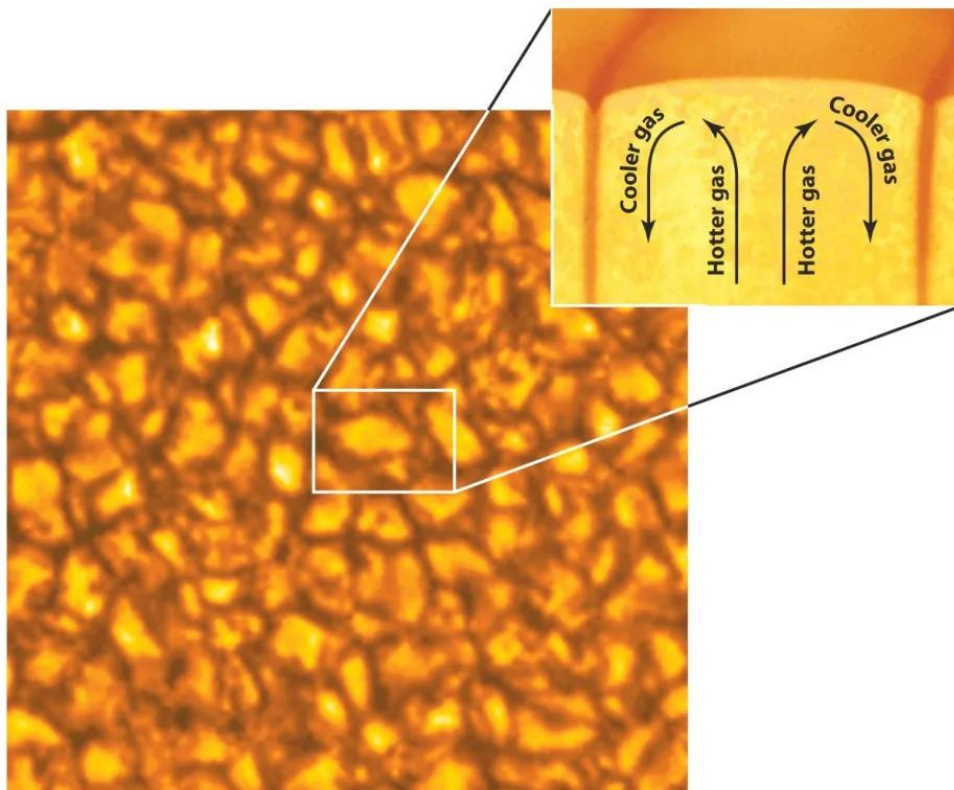
Na fotosfera do Sol, o fenómeno mais omnipresente são

os grânulos

- células de convecção de plasma, cada uma com aproximadamente 1000 km (620 mi) de diâmetro, com plasma quente ascendente no centro e plasma mais frio a cair nos espaços entre eles, fluindo a velocidades de 7 km/h.

Cada grânulo tem uma vida útil de apenas cerca de vinte minutos, resultando num padrão de "ebulição" em constante mudança.

A agrupar os grânulos típicos estão os supergrânulos até 30.000 km (19.000 mi) de diâmetro, com uma vida útil até 24 horas e velocidades de fluxo de cerca de 500 m/s, transportando feixes de campo magnético para as bordos das células.





A granulação solar marca a camada superior da zona convectiva do Sol, uma camada gasosa com cerca de

$$0.2 \rightarrow 0.3 R_{\odot}$$

de espessura localizada abaixo da base da fotosfera.

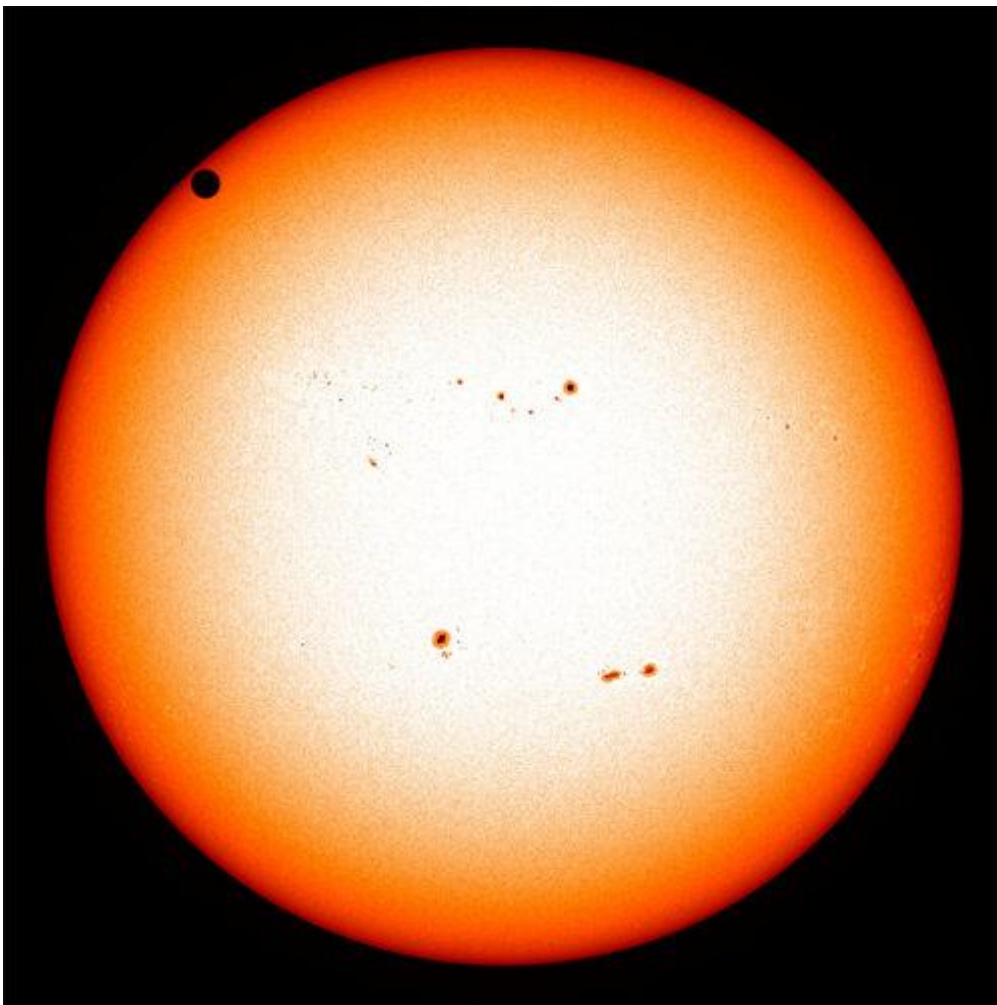
O espectro contínuo do disco solar define uma temperatura efetiva de

$$5770 \text{ K}$$

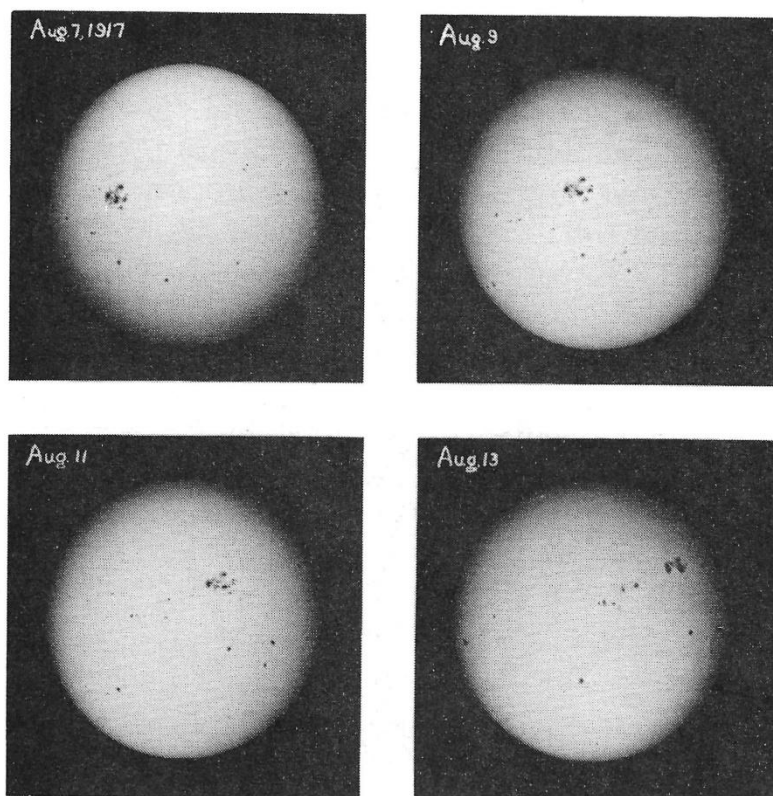
para a fotosfera (usando a lei de Stefan-Boltzmann).

Contudo há uma variação da temperatura dentro da fotosfera - observa-se o chamado efeito de escurecimento ou

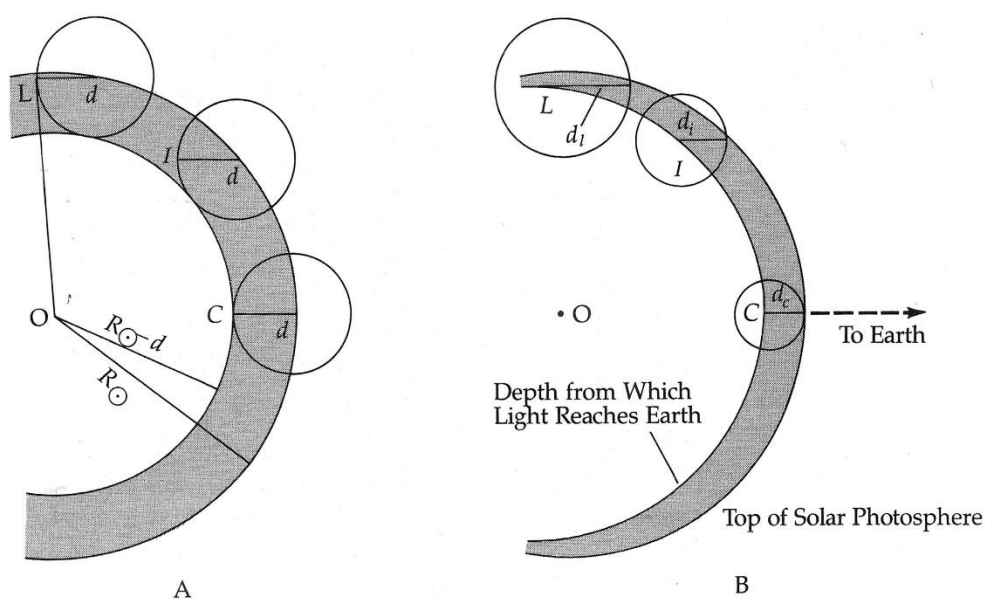
*limb-darkening*:



As fotografias mostram o escurecimento (limb darkening) nas bordas do disco e também a rotação do Sol durante um período de sete dias.



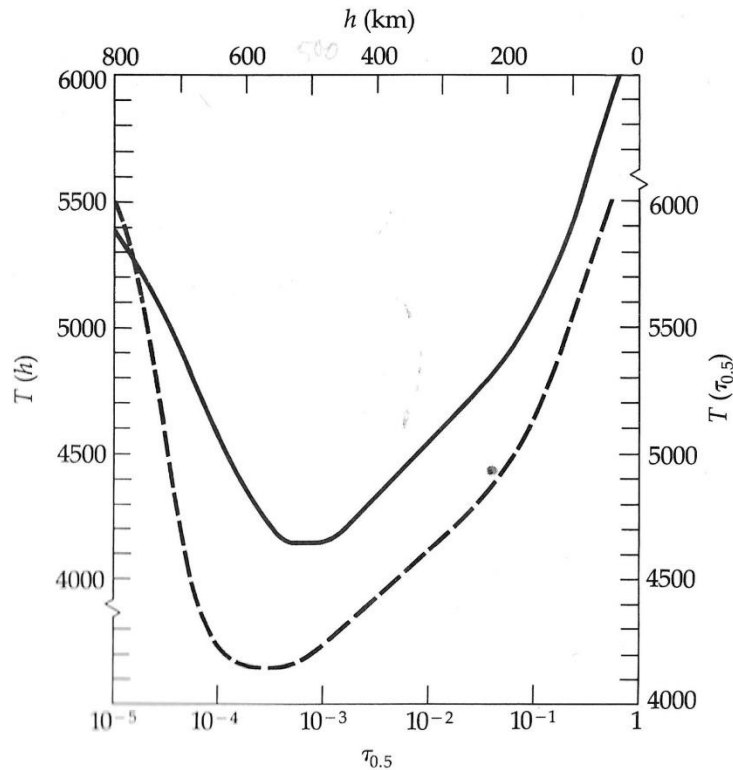
O escurecimento surge porque vemos camadas de gás mais profundas e quentes quando olhamos diretamente para o centro do disco e camadas mais altas e mais frias quando olhamos perto da borda.





Consideramos uma altura de 0 km no topo da fotosfera ou na parte inferior da cromosfera.

Para fora, através da fotosfera, a temperatura cai rapidamente e depois começa a subir novamente a 500 km na cromosfera:



- há um paradoxo: como pode haver escurecimento quando a temperatura sobe na cromosfera?

Resposta: a cromosfera é quase opticamente transparente em relação à fotosfera.

A nossa linha de visão penetra na atmosfera solar apenas até à profundidade da qual a radiação pode escapar sem impedimentos.

Consideremos o que acontece quando a radiação do fluxo  $F_\lambda$  atinge uma placa de gás de espessura  $dx$ . o fluxo absorvido é dado por

$$dF_\lambda = -k_\lambda \rho F_\lambda dx$$

e

$$F_\lambda(x) = F_\lambda(0)e^{-k_\lambda \rho x}$$

ou

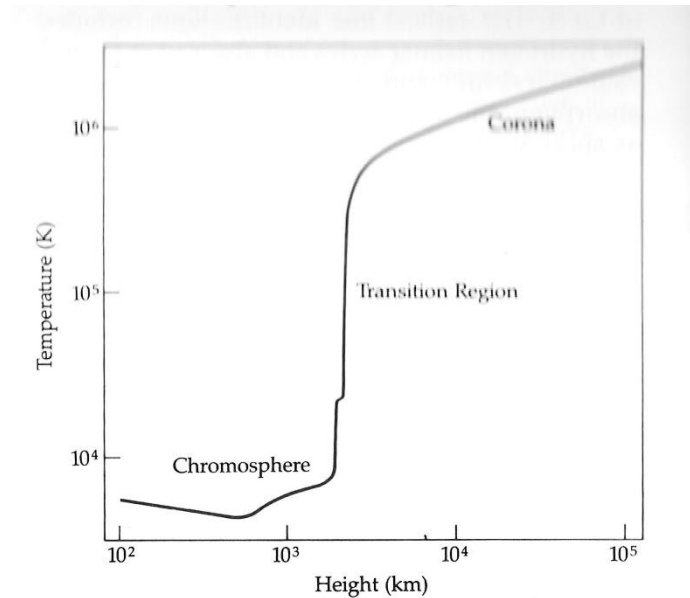
$$F_\lambda(\tau_\lambda) = F_\lambda(0)e^{-\tau_\lambda}$$

Quando  $k_\lambda < 1$  o fluxo é constante e o gas é opticamente fino ou transparente

## (b) A Cromosfera

Aparece como uma banda fina vermelhada à volta do Sol como o resultado da risca de emissão de Balmer.

A temperatura aumenta em direção ao exterior atingindo valores de 30 000 K a 2000 km a cima da fotosfera:

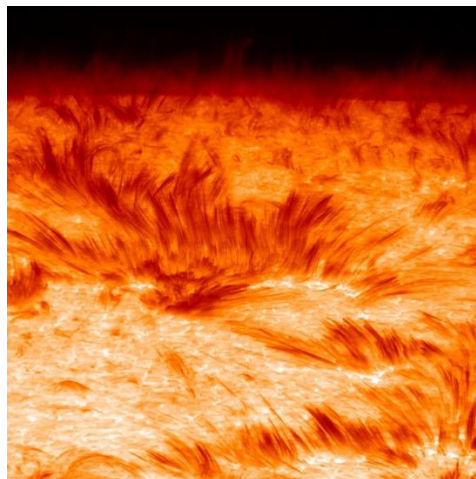


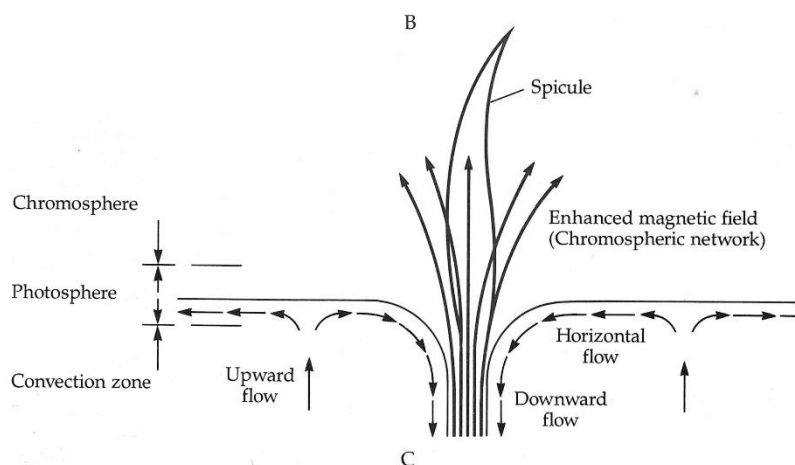
Tem uma espessura de 2500 km.

Fotografias a comprimentos de ondas específicos mostram filamentos na cromosfera associados a atividade solar.

Também há a presença de espículos - jatos de gás com

- diâmetros de 500 - 1500 km
- alturas de 10 000 km
- velocidades de 20 - 25  $\text{km s}^{-1}$
- tempos de vida  $\sim 15$  mins





### (c) A zona de transição

Ao longo da zona de transição - que é estreita e altamente irregular - a temperatura cresce muito abruptamente de

$500\,000\text{ K} \rightarrow 10^6\text{ K}$  na coroa.

### (d) A coroa

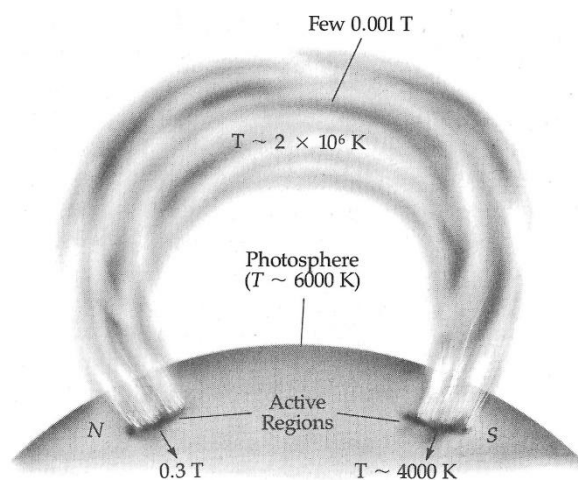
É uma região irregular e brilhante com uma extensão enorme:



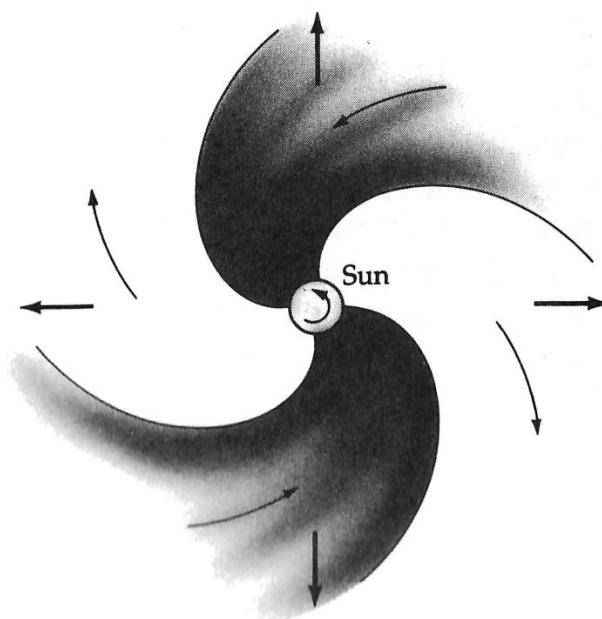
A sua temperatura é  $\sim 2 \times 10^6$  K.

Tal como luz também escapam partículas - o vento solar que atinge a Terra a  $400 \text{ ms}^{-1}$ .

Como o gás coronal é muito quente, emite raios X de baixa energia. Fotografias de raios X mostram que o gás coronal tem uma distribuição irregular e grandes estruturas em loop indicam onde o gás ionizado flui ao longo das linhas do campo magnético:



Buracos coronais - onde os campos magnéticos continuam para o espaço - dão origem ao vento solar:



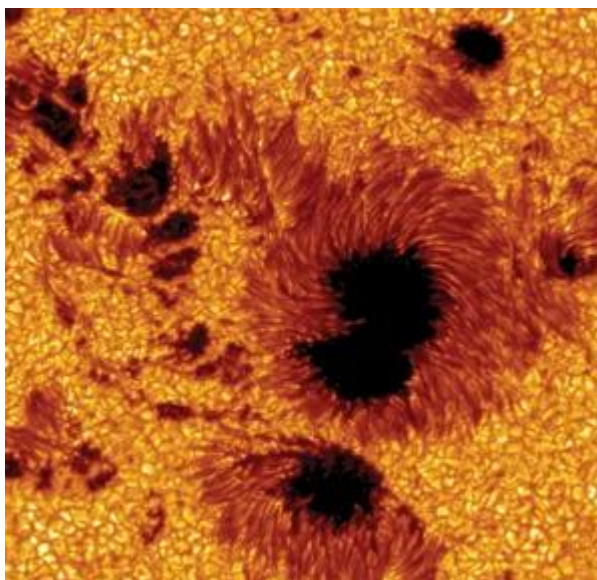
O gás que flui é um plasma com velocidades de  $\sim 400 \text{ km/h}$  na Terra com uma densidade de  $\sim 10^6$  partículas por  $\text{m}^3$ .

### 3.2 Atividade Solar

Atividade solar refere-se às modificações que ocorrem na atmosfera solar.

- Incluem loops, proeminências, manchas solares e flares.

Vamos considerar as manchas solares:



São áreas grandes e escuras na fotosfera e as primeiras observadas datam de 1610 pelo Galileo Galilei.

São mais escuras do que a fotosfera envolvente pois são mais frias  $\sim 3800$  K.

Pequenas manchas solares desenvolvem-se a partir de poros, áreas escuras maiores que o normal entre grânulos brilhantes.

A parte central mais escura é chamada

- a Umbra, com diâmetros  $\sim 30\,000$  km.

e a parte envolvente

- a Penumbra

Têm as seguintes características:

#### 1. Campo magnético

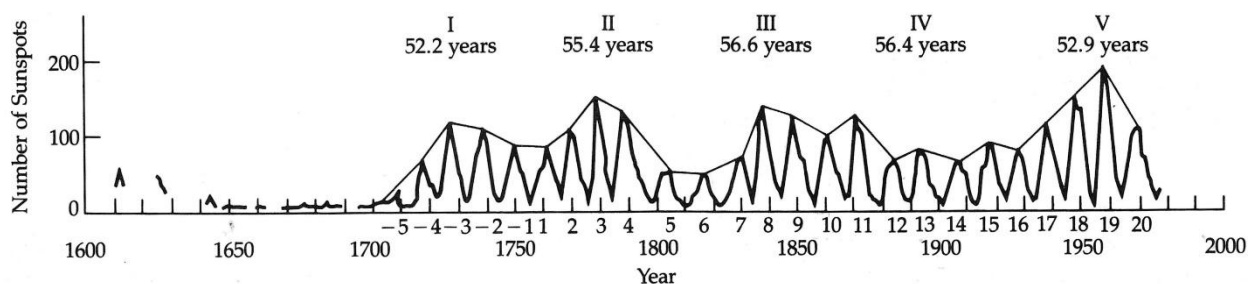
As manchas solares estão associadas a campos magnéticos grandes  $\sim 0.4$  T em comparação com  $2 \times 10^{-4}$  T sobre o resto da superfície.

Estes campos magnéticos grandes inibem a convecção - a razão por que a superfície das manchas solares é mais fria do que o resto da superfície.

Uma mancha solar tem uma polaridade magnética associada - então duas manchas solares de polaridades complementares encontram-se juntas num grupo bipolar.

## 2. Número

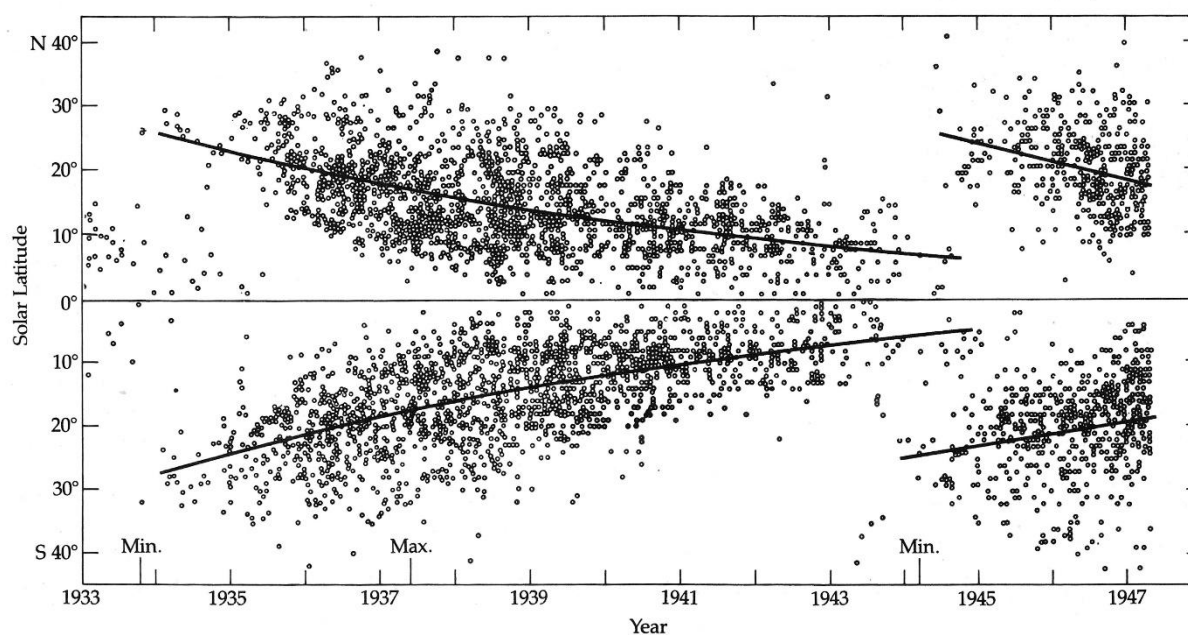
O número varia com período de 11 anos



## 3. Variação em latitude

A distribuição de manchas solares varia em latitude solar durante o ciclo de

- 11 anos:



Agora

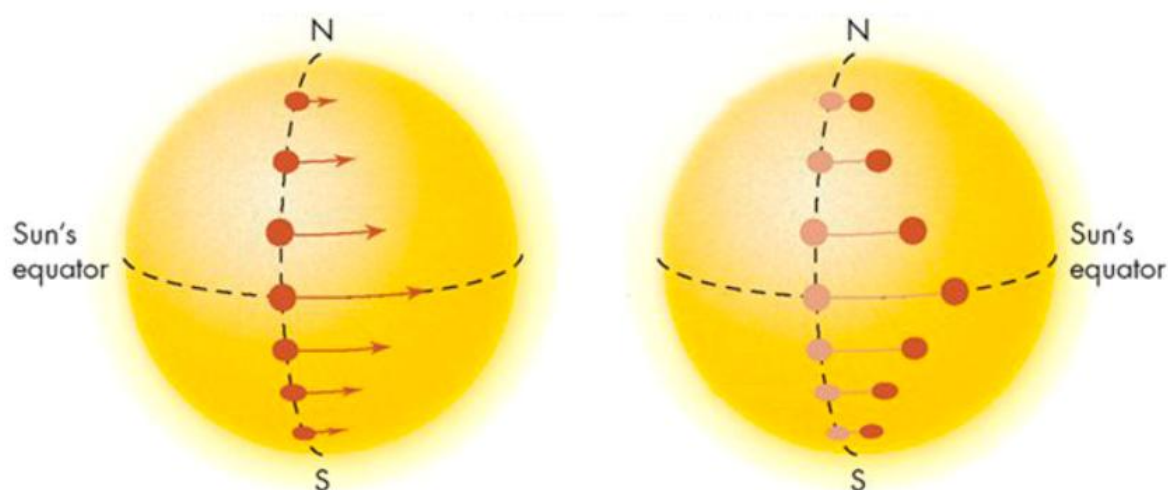
- (a) No início do ciclo, as manchas solares tem latitudes  $\pm 35^\circ$ .
- (b) No máximo do número de manchas solares a maioria têm latitudes  $\pm 15^\circ$ .
- (c) No fim do ciclo, as manchas solares tem latitudes  $\pm 8^\circ$ .

### 3. Rotação solar

Podemos deduzir o período sideral de uma mancha solar a partir do seu período sinódico:

$$1/P = 1/S + 1/E$$

A partir dos movimentos, sabemos que o Sol roda diferencialmente:



e em média,  $P = 25.4$  dias.

Finalmente, associados com as manchas solares estão os “flares”. São explosões de radiação que duram  $0.5 \rightarrow 1$  hora.

### Problemas

1. Determine a taxa média de perda de massa do Sol devida a:
  - (a) vento solar (assumir na órbita da Terra a densidade de protões é  $n = 5 \times 10^6 \text{ m}^{-3}$  com uma velocidade de  $v = 4 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$ ,  $m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ).
  - (b) geração de energia.
2. Determine o tamanho angular de um grânulo e um super - grânulo visto a partir da Terra.
3. Usando a lei de deslocamento de Wien, determine o comprimento de onda da intensidade máxima da luz da fotosfera e da coroa do Sol.
4. Usando a lei de Stefan-Boltzmann, determine a taxa de produção de energia da fotosfera e da coroa.
5. Considere as manchas solares na superfície do Sol.
  - (a) Deduza uma relação entre o período sinódico e sidereal de uma mancha solar.
  - (b) A tabela mostra a longitude de uma mancha solar durante um período de 10 dias a uma latitude de  $22^\circ\text{S}$ .

Dia	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Lon (deg)	-80	-67	-56	-41	-27	-14	-1	12	25	36

Determine:

- (i) O período sinódico do Sol.
- (ii) O período sidereal do Sol assumindo que o período sidereal da Terra é 365.25d.



#### 4. As Estrelas

As estrelas parecem formar um desenho fixo no céu formando as constelações. Os mapas do céu localizam as estrelas na superfície de uma esfera com centro na Terra

- a esfera celeste

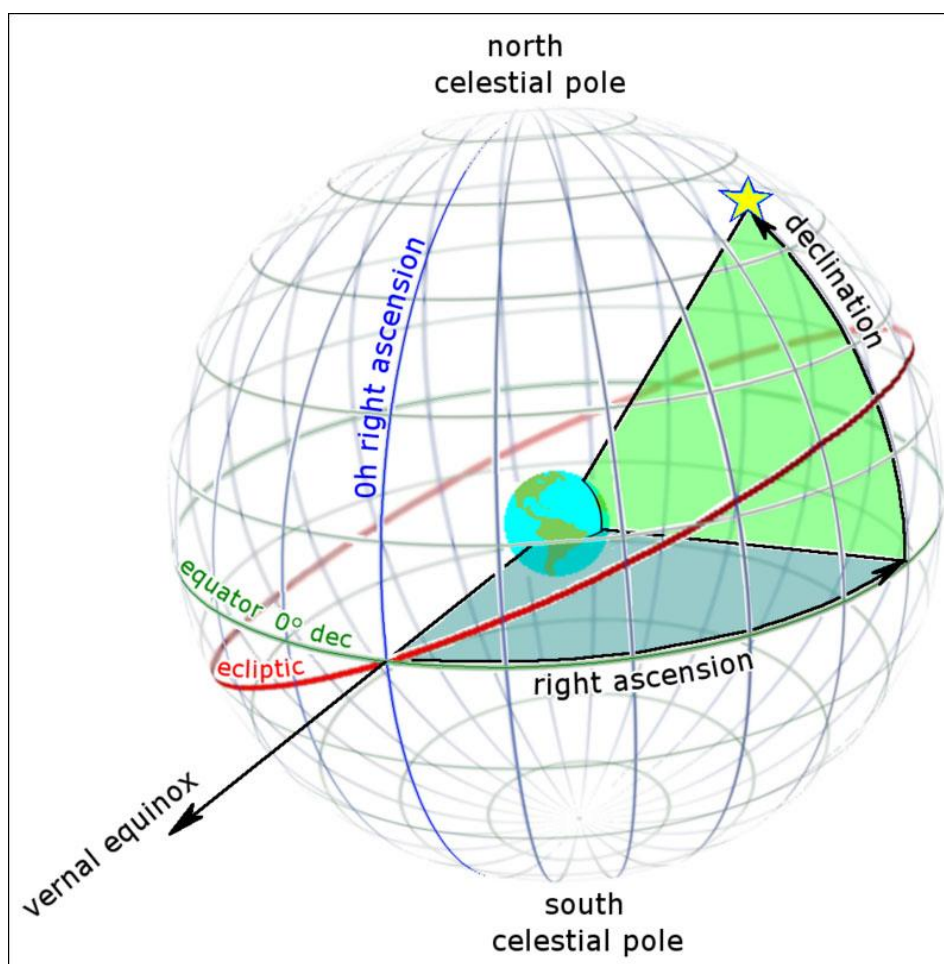
e

- declinação ( $\equiv$  latitude)

por exemplo

equador celeste	$0^\circ$ declinação
Norte	$0^\circ \rightarrow 90^\circ$
Sul	$0^\circ \rightarrow -90^\circ$

- ascensão direita ( $\equiv$  longitude) medido em horas ( $0 \rightarrow 24$  Horas)



O equinócio vernal é a posição do Sol em 21 de março (primeiro ponto de Aries)

Há 88 constelações no céu e podemos dizer que, por exemplo

- Sirius fica em Canis Majoris

e tem a designação  $\alpha$  CMa

e usando o catálogo de Henry Draper: HD 48915

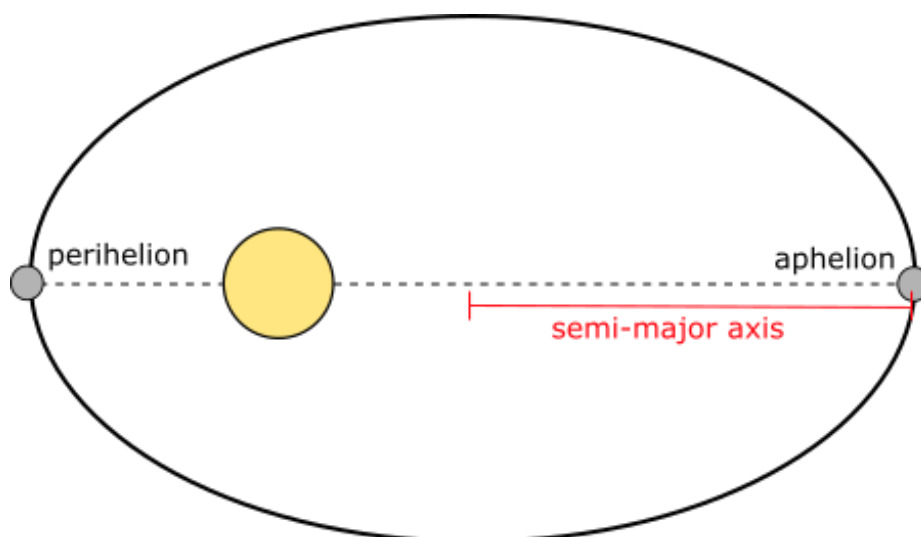
com

Ascensão direita 06h 45m 08.917s[2]

Declinação  $-16^\circ 42' 58.02''$

#### 4.1 Distâncias astronómicas

**A unidade astronómica:**



1 AU (ou UA) = o semieixo maior,  $a$  e então

$$1 \text{ AU} = 1.496 \times 10^{11} \text{ m}$$

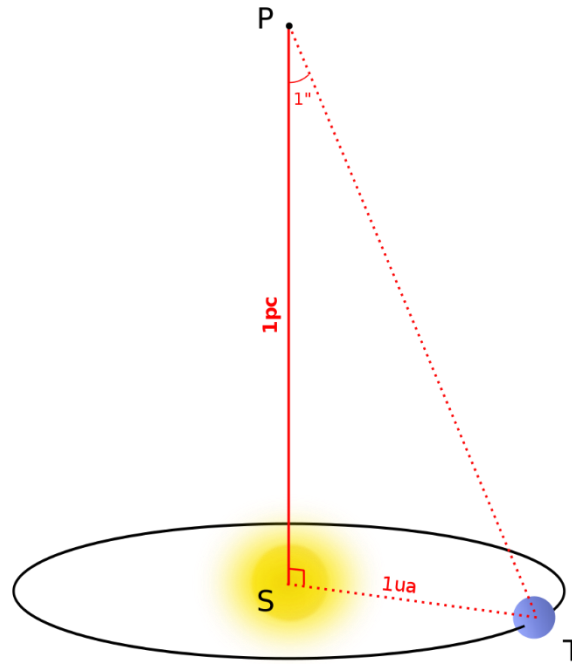
**O ano-luz:**

$$c = 2.998 \times 10^8 \text{ m/s} \text{ e } 1 \text{ ano} = 3.156 \times 10^7 \text{ s}$$

e então

$$1 \text{ ly} = (2.998 \times 10^8) \times (3.156 \times 10^7) = 9.46 \times 10^{15} \text{ m}$$















## O parsec:



- o parsec é definido como a distância de uma estrela que tem um paralaxe,  $\phi = 1 \text{ arcsec}$  e para qualquer outra estrela

$$d(\text{pc}) = \frac{1}{\phi} \text{ arcsec}$$

Distância entre alguns objetos:

DISTANCES		LIGHT YEAR / PARSEC	
Earth / Moon			1.3 light seconds
Sun / Earth			8 light minutes
Sun / Neptune			4 light hours
Sun / Proxima Centuri (Nearest Star)			4.2 light years
Sun / Polaris			433 light-years
Sun / Centre of Milky Way			100,000 light years
Milky Way / Andromeda Galaxy			2.537 million light years

**Speed of Light** = 300,000,000 metres per second

**Light Year** = 9460 billion km  
(Distance that light travels in a year)

**Parsec** = 3.26 Light Years

space fm

Se o nosso Sol fosse do tamanho de um grão de sal... a estrela mais próxima, Próxima Centauri, estaria a 10 quilómetros de distância

## VIDEO

## 4.2 As magnitudes das estrelas

Magnitudes estelares foram introduzidas pelo astrónomo grego Hipparchos em 200 AC

- A estrela de magnitude aparente 1 é 100 vezes mais brilhante do que uma estrela de magnitude aparente 6.

Então

+25	6	→	1	-26.74
HST				Sol

Então, uma diferença de 1 magnitude corresponde a um fator de  $100^{1/5} = 2.512$ .

- a resposta do olho não é linear, **mas** logarítmico.

Agora, considere duas estrelas de

magnitudes  $m$  e  $n$

ou

fluxos  $l_m$  e  $l_n$

Podemos escrever

$$\frac{l_n}{l_m} = 100^{(m-n)/5}$$

e então

$$\log_{10} \left( \frac{l_n}{l_m} \right) = [(m - n)/5] \log_{10}(100) = 0.4(m - n)$$

ou

$$m - n = 2.5 \log \left( \frac{l_n}{l_m} \right)$$

- esta equação define a **magnitude aparente**

Considere dois exemplos:

1. A estrela RR Lyrae tem magnitude aparente que varia entre 7.1 e 7.8.

O aumento do brilho relativo é

$$\log_{10} \left( \frac{l_n}{l_m} \right) = 0.4(7.8 - 7.1) = 0.28$$

ou

$$\frac{l_n}{l_m} = 10^{0.28} = 1.91$$

- 2 vezes mais brilhante.

2. Um sistema binário consiste em duas estrelas  $a$  (magnitude  $m$  e fluxo  $l_m$ ) e  $b$  (magnitude  $n$  e fluxo  $l_n$ ) com uma razão de fluxo de 2. Contudo, só vimos as duas estrelas como um ponto de magnitude  $m' = 5$ . Qual é a magnitude de cada estrela?

Agora,

$$m - n = 2.5 \log_{10} \left( \frac{l_n}{l_m} \right) = 2.5 \log_{10} 2 = 0.75$$

Também

$$m - m' = 2.5 \log_{10} \left( \frac{l_n + l_m}{l_m} \right)$$

Então

$$\begin{aligned} m &= m' + 2.5 \log_{10} (1 + l_n/l_m) \\ &= 5 + 2.5 \log_{10} (1 + 2) = 6.19 \end{aligned}$$

e

$$n = 6.19 - 0.75 = 5.44$$

Vamos considerar a **magnitude absoluta**,  $M$ , de uma estrela que é

- a magnitude observada se a estrela (a uma distância de  $d$  pc do Sol) for colocada a uma distância de 10 pc do Sol.

Com  $n = M$

$$m - M = 2.5 \log_{10} \left( \frac{l_{10}}{l} \right) = 2.5 \log_{10} \left( \frac{d^2}{10^2} \right)$$

ou,

$$m - M = 5 \log_{10} d - 5$$

$m - M$  é definido como o módulo de distância.

Podemos também escrever

$$M = m + 5 - 5 \log_{10} d$$

( $d$  em pc)

ou

$$M = m + 5 + 5 \log_{10} \phi$$

( $\phi$  em arcsecs)

Finalmente, uma medida quantitativa da cor de uma estrela é dada pelo seu **índice de cor (CI)**.

É uma medida usada em astronomia para descrever a cor de uma estrela, que está intimamente relacionada com a sua temperatura. É uma expressão numérica que quantifica a diferença no brilho de uma estrela observada em dois filtros de comprimento de onda diferentes, geralmente no espectro visível ou quase visível.

## 1. Definição

O índice de cor é a diferença de magnitude de uma estrela quando observada em dois filtros diferentes. Normalmente, os astrónomos usam os filtros B (azul) e V (visual ou verde-amarelo), resultando na expressão

$$CI = m_B - m_V$$

$m_B$  é a magnitude da estrela no filtro B (azul) (centrado no cdo 440 nm).

$m_V$  é a magnitude da estrela no filtro V (visual) (centrado no cdo 550 nm).

## 2. Interpretação

Um índice de cor positivo (B-V) significa que a estrela é mais fria e emite mais luz no vermelho ou em comprimentos de onda mais longos. A estrela parece mais vermelha.

Um índice de cor negativo (B-V) indica uma estrela mais quente, que emite mais luz no azul ou em comprimentos de onda mais curtos, de modo que a estrela parece mais azul.

Especificamente:

Estrelas quentes (por exemplo, estrelas do tipo O) com temperaturas de superfície acima de  $\sim 10\,000$  K têm valores de índice de cor negativos ou baixos, como  $-0.3$  ou  $0$ .

Estrelas mais frias (por exemplo, estrelas do tipo M) com temperaturas em torno de  $\sim 3\,000$  K têm valores de índice de cor positivos, como  $+1.5$  ou superior.

## 3. Relação com a temperatura

O índice de cor está diretamente relacionado com a temperatura da superfície da estrela porque estrelas mais quentes emitem mais luz em comprimentos de onda mais curtos (mais azuis), enquanto estrelas mais frias emitem mais luz em comprimentos de onda mais longos (mais vermelhos). Essa relação é consequência da radiação do corpo negro.

Estrelas azuis: Valores baixos (BV)  $\rightarrow$  Alta temperatura.

Estrelas vermelhas: Valores altos (BV)  $\rightarrow$  Baixa temperatura.

## 4. Exemplos

Rigel (uma estrela azul quente):  $B-V \approx -0,03$

O Sol (uma estrela amarela):  $B-V \approx +0,65$

Betelgeuse (uma estrela vermelha):  $B-V \approx +1,85$

## 5. Outros índices de cores

Além do BV, outras combinações de filtros podem ser usadas para criar diferentes índices de cores.

Por exemplo:

U-B (ultravioleta menos azul), onde U é o filtro ultravioleta (centrado no cdo 365 nm).

VR (visual menos vermelho), que usa um filtro vermelho (centrado no cdo 700 nm).

## 6. Uso da classificação estelar

O índice de cores é uma ferramenta fundamental na classificação de estrelas porque oferece aos astrónomos uma maneira rápida e relativamente simples de estimar a temperatura e o tipo espectral de uma estrela. É usado no diagrama Hertzsprung-Russell (H-R), que relaciona a luminosidade estelar à cor (ou temperatura).

### 4.3 Massas estelares

A maioria das estrelas na vizinhança do nosso Sol (~80%) pertencem a sistemas múltiplos ou sistemas binários - onde as estrelas estão fisicamente relacionadas, orbitando umas às outras - o que nos permite inferir as propriedades físicas de muitas delas, tais como as suas massas e raios.

#### 4.3.1 Classificação de sistemas binários

Podemos classificar sistemas binários em

- Binários visuais:

Estes são sistemas ligados que podem ser resolvidos em duas estrelas no telescópio. Observa-se que os movimentos orbitais mútuos dessas estrelas têm períodos que variam de cerca de um ano a milhares de anos.

- Binários espectrais:

Estes são sistemas não resolvidos cuja duplicidade é revelada por oscilações periódicas das linhas do seu espectro. Em alguns casos, dois conjuntos de características espectrais são vistos (um para cada estrela) oscilando com fases opostas; em outros casos, uma das estrelas é muito fraca para ser vista, de modo que apenas um conjunto de linhas espectrais oscilantes é registado. Os períodos orbitais típicos variam de horas a alguns meses.

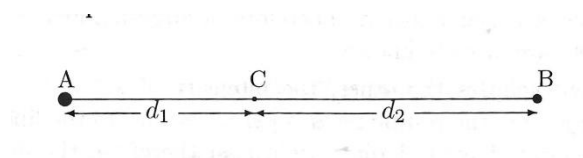
- Binários de eclipse

Estas são duas estrelas que se eclipsam periodicamente, levando a mudanças periódicas no brilho aparente dos sistemas. Tais sistemas podem ser visuais ou espectroscópicos.

Finalmente, a proporção observada de sistemas simples: duplos: triplos: quádruplos é 45: 46: 8: 1.

#### 4.3.2 Determinação das massas estelares

Considere um sistema binário com duas estrelas A e B de massas  $m_1$  e  $m_2$ :



onde C é o centro de massa.

De acordo com a 3ª lei de Kepler

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

onde  $T$  é o período de revolução de cada estrela,  $M = (m_1 + m_2)$  é a massa total do sistema e  $r = (d_1 + d_2)$ .



Temos

$$m_1 d_1 = m_2 d_2$$

ou

$$m_1 = \frac{m_2 d_2}{d_1}$$

Combinando

$$\frac{m_2 d_2}{d_1} + m_2 = \frac{4\pi^2 (d_1 + d_2)^3}{GT^2}$$

ou

$$m_2 = \frac{4\pi^2 d_1 (d_1 + d_2)^2}{GT^2}$$

e também

$$m_1 = \frac{4\pi^2 d_2 (d_1 + d_2)^2}{GT^2}$$

Assim, sabendo  $d_1$ ,  $d_2$  e  $T$ , podemos determinar  $m_1$  e  $m_2$ .

**Contudo**, assumimos que as órbitas das estrelas são circulares, mas geralmente são elípticas.

### *Exemplo*

O sistema  $\alpha$ -Centauri está a 1.338 pc de distância com um período de 79.92 anos. As duas estrelas têm uma separação média de 23.7 UA. Se  $\alpha$ -Centauri A tem uma distância média de 11.2 AU do centro de massa do sistema, assumindo que as órbitas são circulares, calcule as massas das estrelas.

### *Solução*

Temos

$$d_1 + d_2 = 23.7 \text{ AU} = 23.7 \times (1.5 \times 10^{11}) = 3.555 \times 10^{12} \text{ m}$$

e

$$d_1 = 11.2 \text{ AU} = 11.2 \times (1.5 \times 10^{11}) = 1.68 \times 10^{12} \text{ m}$$

Portanto

$$d_2 = 3.555 \times 10^{12} - 1.68 \times 10^{12} = 1.875 \times 10^{12} \text{ m}$$

O período é

$$T = 79.92 \times 365.25 \times 24 \times 60 \times 60 = 2.522 \times 10^9$$

As massas das estrelas são

$$m_1 = \frac{4\pi^2 d_2 (d_1 + d_2)^3}{GT^2} = \frac{4 \times 3.14^2 \times (1.875 \times 10^{12}) \times (3.555 \times 10^{12})^2}{6.67 \times 10^{-11} \times (2.522 \times 10^9)^2}$$

$$= 2.197 \times 10^{30} \text{ kg}$$

e

$$m_2 = \frac{4\pi^2 d_1 (d_1 + d_2)^3}{GT^2} = \frac{4 \times 3.14^2 \times (1.68 \times 10^{12}) \times (3.555 \times 10^{12})^2}{6.67 \times 10^{-11} \times (2.522 \times 10^9)^2}$$

$$= 1.969 \times 10^{30} \text{ kg}$$

Agora, comparando as massas estelares determinadas em sistemas binários com as suas luminosidades verifica-se em geral que

- quanto mais luminosa é a estrela, maior é a sua massa

Em particular, para as estrelas da **sequência principal** verifica-se aproximadamente que

$$L/L_{\odot} = (M/M_{\odot})^{\alpha}$$

- a **relação massa-luminosidade**, onde

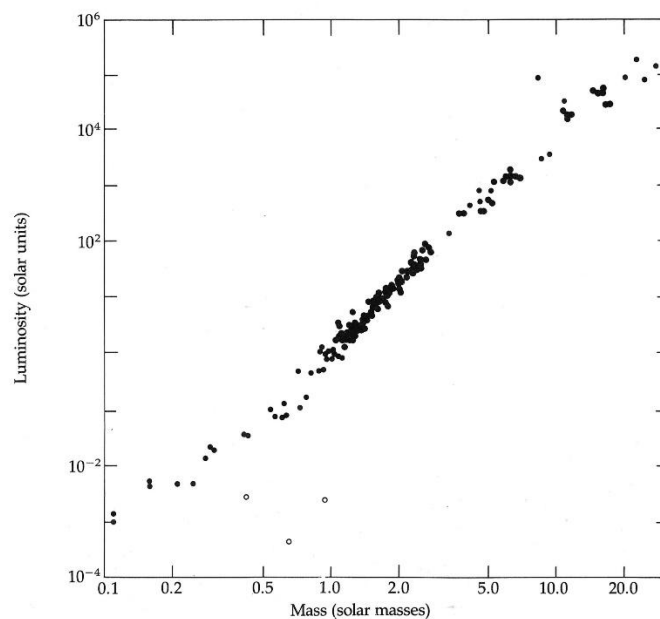
$$L/L_{\odot} = (M/M_{\odot})^{4.0}$$

- estrelas com  $M > 0.43 M_{\odot}$

$$L/L_{\odot} = 0.23(M/M_{\odot})^{2.3}$$

- estrelas com  $M < 0.43 M_{\odot}$

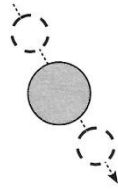
Graficamente:



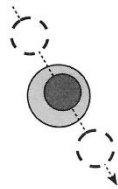
Vamos agora considerar os binários de eclipse. Podemos analisar as características físicas destes binários para determinar os raios de cada estrela no sistema.

Um eclipse ocorre sempre que um astro passa em frente de outro na linha de observação da Terra. O eclipse diz-se um eclipse central quando

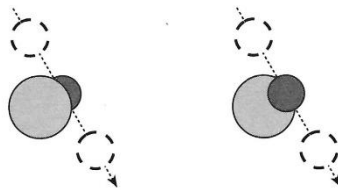
- um dos astros fica totalmente coberto pelo outro (eclipse total) ou



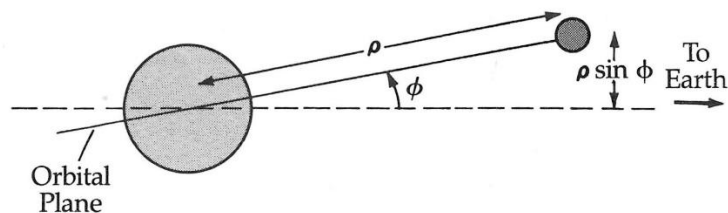
- quando um dos astros fica completamente contido no outro (eclipse anular).



O eclipse diz-se um eclipse parcial quando um dos astros fica parcialmente coberto pelo outro.



Vamos considerar as duas estrelas:



Quando a inclinação de uma órbita binária é próxima de  $90^\circ$ , temos um binário eclipse do qual existem vários milhares.

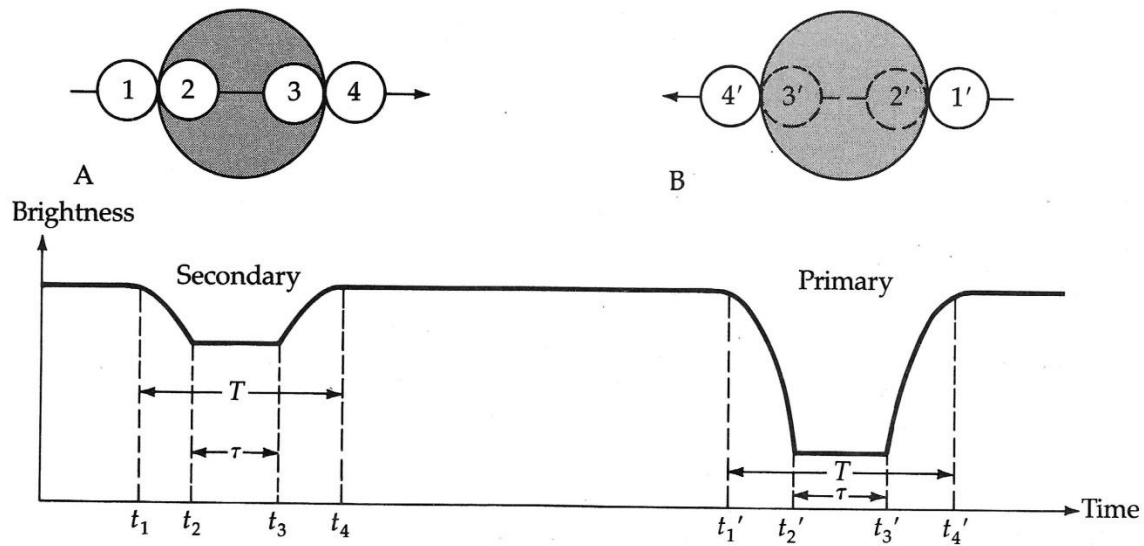
Para uma órbita relativa de raio  $\rho$ , inclinada num ângulo  $\phi$  em relação à linha de visão, um eclipse pode ocorrer apenas quando

$$\rho \sin \phi < R_1 + R_2$$

onde  $R_1$  (a maior) e  $R_2$  (a menor) são os raios estelares. Podemos determinar estes raios usando a geometria do sistema.

Assumimos agora que  $i = 90^\circ$ .

Chama-se **curva de luminosidade** de um astro ao gráfico do fluxo da sua radiação versus tempo:



A geometria implica

$$2R_2 = v(t_2 - t_1) = v(t_4 - t_3)$$

$$2(R_1 + R_2) = v(t_4 - t_1)$$

onde  $v$  é a velocidade orbital relativa

Contudo, o raio  $\rho$  da órbita é

$$\rho = vP/2\pi$$

onde  $P$  é o período orbital. Assim,

$$R_2 = \pi a(t_2 - t_1)/P$$

$$R_1 = \pi a(t_4 - t_2)/P$$

*Exemplo:*

Um binário de eclipse tem período orbital de 2 dias 22 horas, a duração de cada eclipse é 18 horas e totalidade demora 4 horas (assuma orbitas circulares).

- (a) Determine os raios estelares em termos do raio da orbita.
- (b) Se dados espectrais indicarem uma velocidade relativa orbital de  $200 \text{ km s}^{-1}$ , quais são os raios das estrelas?

*Solução:*

- (a) O raio da primeira estrela é:

$$t_4 = 18 \text{ h}$$

$$t_2 = (18 - 4)/2 = 7 \text{ h}$$

$$\frac{R_1}{a} = \frac{\pi(t_4 - t_2)}{P} = \frac{3.14(18 - 7)}{70} = 0.49$$

e da segunda estrela

$$\frac{R_2}{a} = \frac{\pi(t_2 - t_1)}{P} = \frac{3.14(7 - 0)}{70} = 0.31$$

- (b) Com as orbitas circulares

$$P = 252000 \text{ s}$$

$$a = vP/2\pi = 200000 \times 252000/2 \times 3.14 = 7.91 \times 10^{10} \text{ m}$$

e

$$R_1 = 0.49 \times 7.91 \times 10^{10} = 3.87 \times 10^{10} \text{ m}$$

$$R_2 = 0.31 \times 7.91 \times 10^{10} = 2.45 \times 10^{10} \text{ m}$$

## 4.4 O diagrama Hertzsprung-Russell

### 4.4.1 As atmosferas estelares

A única fonte de informação que possuímos acerca das estrelas é a luz que nos chega delas.

A localização da estrela na esfera celeste e o seu brilho permitem-nos apenas inferir

- a posição da estrela relativamente ao Sistema Solar.

Todo o restante conhecimento que possuímos acerca da constituição física das estrelas provém da análise dos seus

- espectros

isto é

- da função intensidade da radiação **versus** comprimento de onda.

O espectro de uma estrela pode ser determinado fazendo passar a luz por um prisma ou usando redes de difração e medindo a intensidade da radiação para diferentes comprimentos de onda.

O espectro da radiação estelar compõe-se de um

- fundo contínuo semelhante à radiação de um corpo negro produzido na base da fotosfera

e de um

- conjunto discreto de riscas espectrais de emissão e de absorção definidas na atmosfera estelar.

Agora, a estrela comporta-se como um corpo negro, emitindo um espectro contínuo de radiação cuja forma depende da temperatura à superfície da estrela.

Mas

Como a atmosfera estelar é muito menos densa do que o interior da estrela, é transparente para quase todos os comprimentos de onda, exceto para aqueles responsáveis pelas transições eletrónicas características dos elementos que a constituem e das temperaturas a que estão.

Consoante as diferentes camadas da atmosfera estejam

- mais frias ou mais quentes

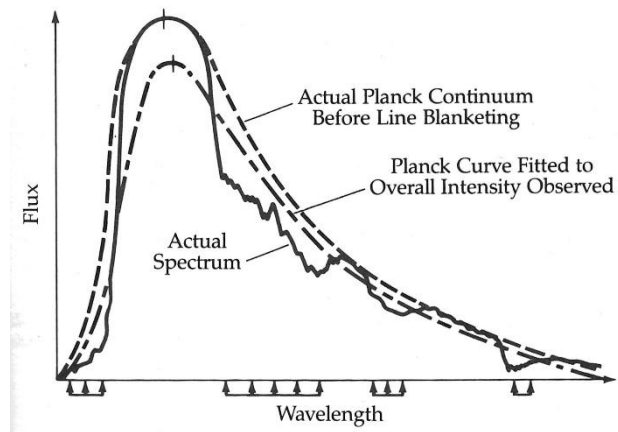
do que a superfície da estrela, irão produzir

- riscas de absorção

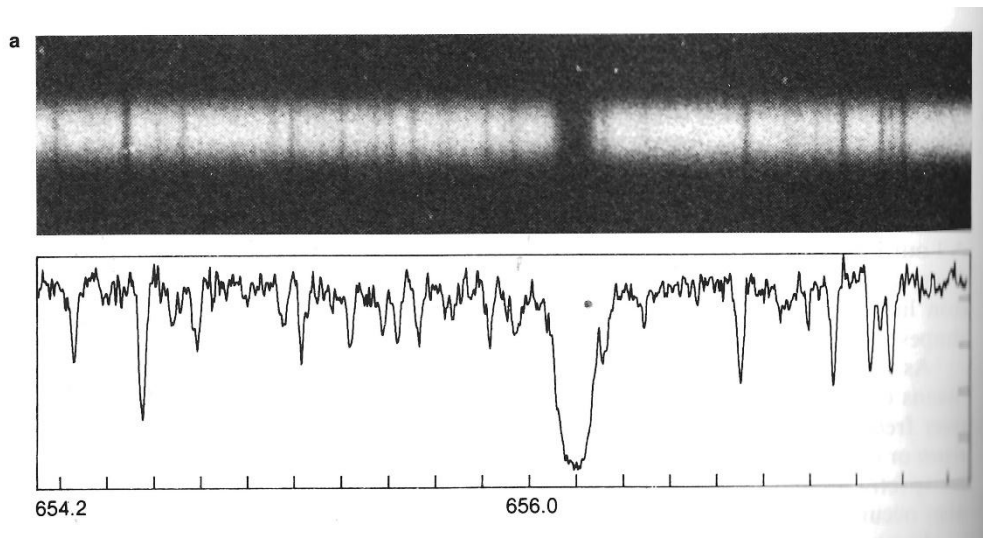
ou

- riscas de emissão

sobrepostas ao contínuo emitido pela superfície estelar.



ou



(a) Caraterísticas físicas

Podemos assumir que o gás da atmosfera obedece à lei universal dos gases:

$$P = nkT$$

onde  $T$  é a temperatura,  $k$  é a constante de Boltzmann e  $n$  é o número de partículas por unidade de volume que está relacionado com a densidade,  $\rho$  e a massa molecular,  $\mu$ :

$$1/\mu = m_H n / \rho$$

onde  $m_H = 1.67 \times 10^{-27}$  kg.

Para uma estrela de hidrogénio atómico,  $\mu = 1$ .

Se o hidrogénio estiver completamente ionizado,  $\mu = 1/2$ .

Em geral,

$$1/\mu = 2X + (3/4)Y + (1/2)Z = 1.6$$

onde  $X$  é fração de massa de hidrogénio,  $Y$  é fração de massa de hélio, e  $Z$  é fração de massa dos elementos mais pesados.

Assumimos uma atmosfera de estado estacionário com equilíbrio hidrostático e

$$dP/dr = -(GM/R^2)\rho$$

Definimos uma altura

$$H = kT/gm$$

e

$$P(h) = P(h_0)e^{-h/H}$$

onde  $h$  é a altura acima de um nível de referência  $h_0$ .

Podemos observar que a pressão diminui continuamente à medida que se avança para o exterior através da atmosfera da estrela.

#### (b) Temperaturas

Para uma determinada estrela, o espectro define uma temperatura ajustando a curva de Planck apropriada e definimos a temperatura a partir da lei de deslocamento de Wien,

$$\lambda_{max} = 2.898 \times 10^{-3} \text{ m.K}$$

Usando a lei de Stefan-Boltzmann

$$F = \sigma T^4$$

Então, a luminosidade é dada por

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4$$

onde  $T_{\text{eff}}$  define a temperatura efetiva da fotosfera.



#### 4.4.2 Classificação

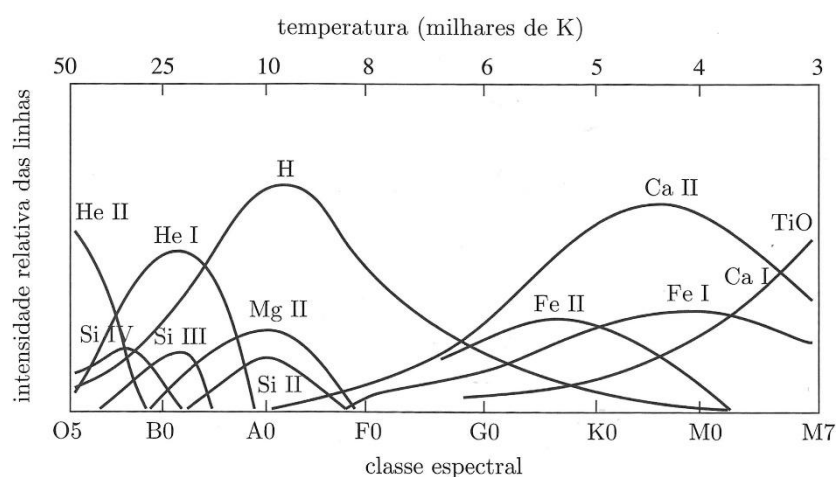
Baseada na intensidade relativa espectral estabelecida-se a classificação Henry Draper dos espectros estelares em

- sete classes espectrais:

	Cor e temperatura	Espectro
<b>O</b>	Estrelas azuis $T \in (25\,000, 40\,000)$ , $BV \sim -0,3$ Exemplo: Mintaca	Riscas intensas de He II. Riscas de elementos muito ionizados: C III, N III, O III, Si IV. Algumas riscas fracas de He I e H.
<b>B</b>	Estrelas azul-claras $T \in (10\,000, 25\,000)$ , $BV \sim -0,2$ Exemplos: Espiga, Rigel	Riscas intensas de He I. Riscas de H fortes em B9. Riscas de elementos menos ionizados: C II, O II, Si III, Mg II.
<b>A</b>	Estrelas brancas $T \in (7\,500, 10\,000)$ , $BV \sim 0,0$ Exemplos: Sírio, Vega	Riscas de H intensas em A0. Riscas de metais ionizados: Fe II, Si II, Mg II. Riscas fracas de metais neutros e de Ca II.
<b>F</b>	Estrelas amarelo-claras $T \in (6\,000, 7\,500)$ , $BV \sim 0,4$ Exemplos: Canopo, Prócion	Riscas de Ca II, Fe II, CR II, Ti II e de metais neutros: Fe I, Cr I. Riscas fracas de H.
<b>G</b>	Estrelas amarelas $T \in (5\,000, 6\,000)$ , $BV \sim 0,6$ Exemplos: Sol, Capela	Riscas de Ca II atingem o máximo. Riscas de metais neutros: Fe I, Mn I, Ca I. Riscas fracas de H e metais ionizados.
<b>K</b>	Estrelas alaranjadas $T \in (3\,500, 5\,000)$ , $BV \sim 1,0$ Exemplos: Arcturo, Aldebarã	Riscas de metais neutros dominantes. Riscas fortes de Ca II. Riscas moleculares fracas.
<b>M</b>	Estrelas vermelhas $T \in (2\,500, 3\,500)$ , $BV \sim 1,5$ Exemplos: Betelgeuse, Antares	Riscas de metais neutros fortes. Riscas moleculares: TiO.

A intensidade das riscas espectrais depende fortemente da temperatura, em particular a intensidade relativa das riscas espectrais do mesmo elemento.

Portanto, diferentes classes espectrais correspondem a diferentes temperaturas:



Como a variação do espectro com a temperatura é contínua, introduziu-se a subdivisão de cada classe espectral em 10 tipos espectrais, numerados de 0 a 9 por ordem decrescente de temperaturas.

Por exemplo,

ao tipo espectral G7 seguem-se, por ordem decrescente de temperaturas, os tipos

G8, G9, G10, K0, K1, etc.

#### 4.4.3 O diagrama Hertzsprung-Russell

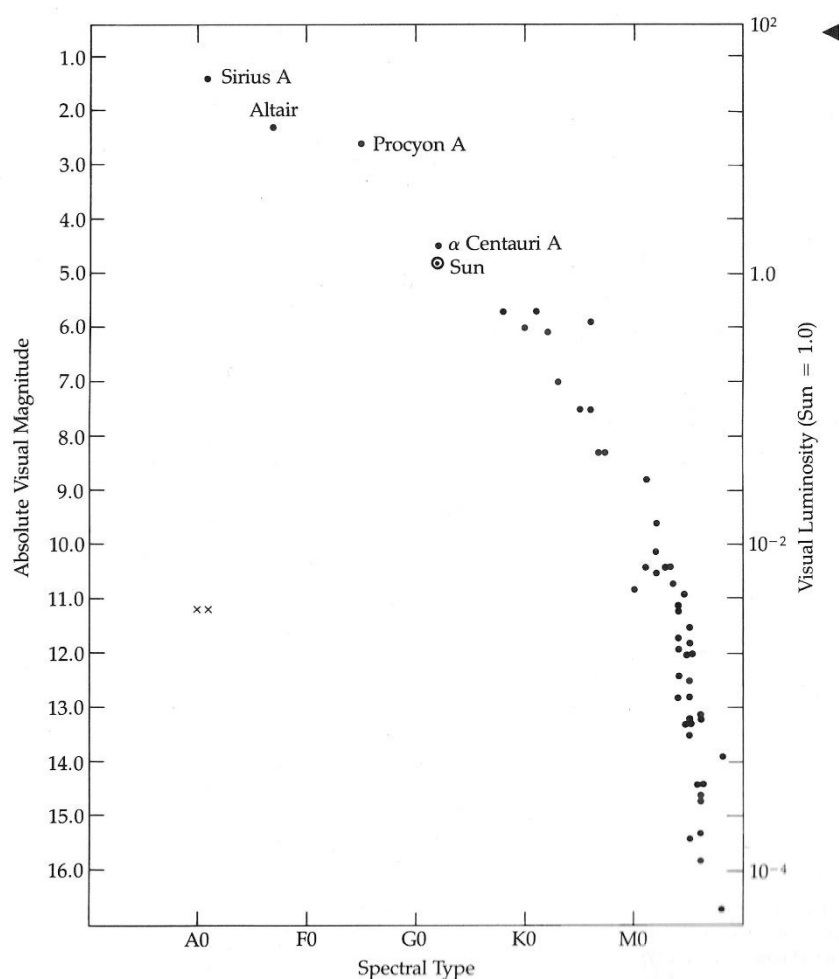
Em 1911 Ejnar Hertzsprung e em 1913 Henry Norris Russell descobriram uma ligação entre

- Magnitude Visual Absoluta

e

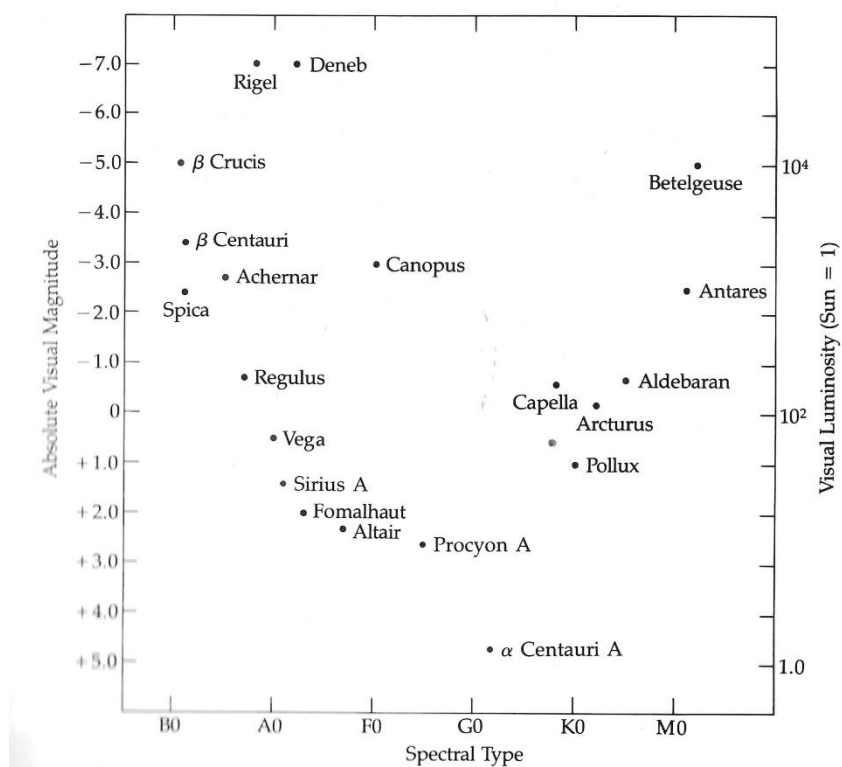
- Índice de Cor (ou Tipo Espectral)

Para estrelas dentro de 5 pc do Sol:

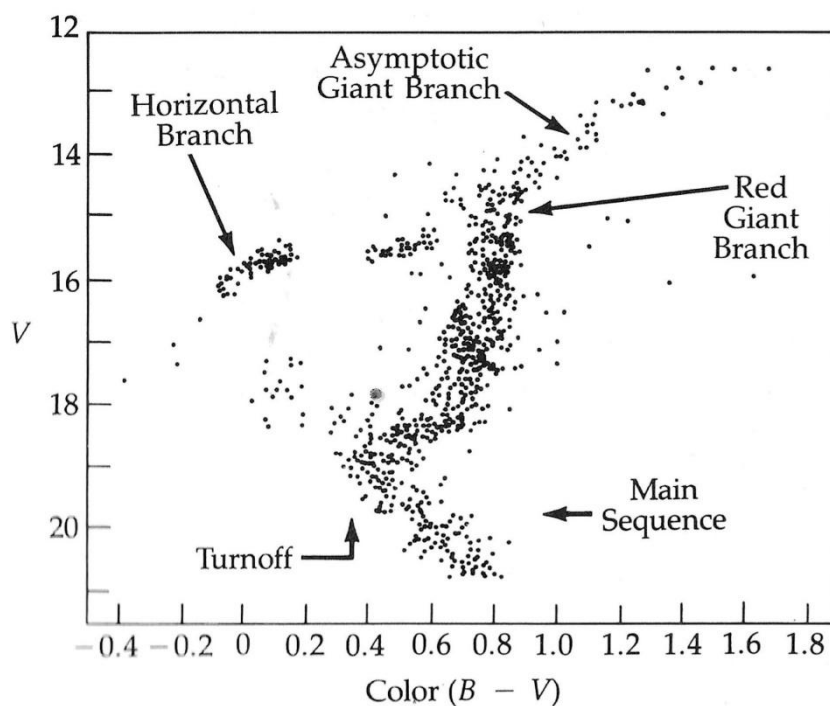


Observe que a sequência principal bem definida com números cada vez maiores de estrelas em direção aos tipos espectrais posteriores e uma ausência de classes espectrais anteriores a A1.

Para as estrelas mais brilhantes:



Como as cores estelares e os tipos espectrais estão aproximadamente correlacionados, podemos construir um gráfico de magnitude absoluta V versus cor:



Este é um diagrama HR para um aglomerado globular. Mostra características específicas:

1. As estrelas não estão distribuídas aleatoriamente;
2. A maior parte delas ficam perto de uma das duas bandas do diagrama

- a sequência principal

e

- o braço de gigantes.

Finalmente, o sistema de classificação de luminosidade Morgan-Keenan (MK), define 6 classes de luminosidade de estrelas. Atribui algarismos romanos para indicar a luminosidade de uma estrela, que se correlaciona estreitamente com o tamanho da estrela e o estágio evolutivo. Aqui estão as principais classes de luminosidade:

Classe I (Supergigantes) – São estrelas extremamente luminosas e massivas, geralmente com raios muito grandes. Estão perto do fim de seus ciclos de vida.

Ia – Muito luminosas (por exemplo, Rigel)

Ib – Menos luminosas (por exemplo, Betelgeuse)

Classe II (gigantes brilhantes) – Estrelas que são mais brilhantes que as gigantes, mas menos luminosas que as supergigantes. Os exemplos incluem estrelas em transição entre fases gigantes e supergigantes.

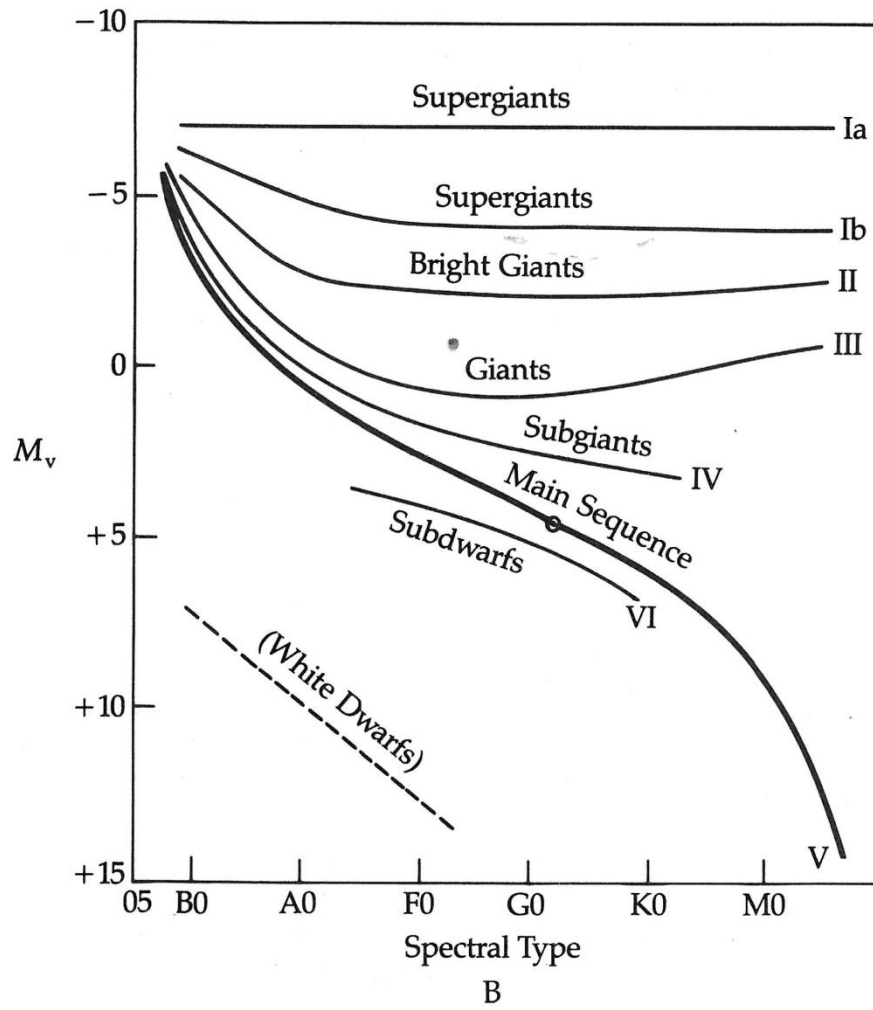
Classe III (Gigantes) – Estrelas que esgotaram o hidrogénio dos seus núcleos e se expandiram para tamanhos grandes. Estas estrelas estão frequentemente nos estágios posteriores da sua evolução (por exemplo, Aldebaran).

Classe IV (Subgigantes) – Estrelas que são ligeiramente mais luminosas que as estrelas da sequência principal, mas estão a caminho de se tornarem gigantes. Estão frequentemente num estágio intermediário de evolução (por exemplo, Beta Hydri).

Classe V (estrelas da sequência principal ou anãs) – Estas estrelas, incluindo o nosso Sol (G2V), fundem hidrogénio nos seus núcleos. São o tipo mais comum de estrela e variam em cor do azul ao vermelho, com base na temperatura.

Classe VI (Sub anãs) – Estrelas que são menos luminosas do que estrelas da sequência principal do mesmo tipo espectral, muitas vezes devido à baixa metalicidade (como em estrelas mais antigas da População II).

Classe VII (anãs brancas) – São os restos de estrelas que esgotaram o seu combustível nuclear e colapsaram num objeto denso do tamanho da Terra. As anãs brancas não estão mais em fusão.



## 4.5 Evolução das estrelas

Vamos considerar o modo como as estrelas no diagrama Hertzsprung-Russell evoluem de um ponto para outro no diagrama. Este caminho chama-se

- a trajetória evolucionária das estrelas

e tem três fases:

- o nascimento
- a vida
- a morte.

Primeiro, temos de considerar a criação do universo...

O Big-Bang é a origem da qual toda a matéria e toda a energia derivam e ocorreu há

- $1.5 \times 10^{10}$  anos.

No instante seguinte

- as temperaturas eram muito elevadas
- a matéria encontrou-se na forma de **neutrões, prótons, elétrons** e neutrinos

e colisões muito fortes não permitiam a formação de átomos e moléculas.

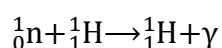
Depois de 10 s, o universo sofria expansão, e por causa disto

- a temperatura baixou com a formação de núcleos
- a densidade diminuía e as colisões tornaram-se menos frequente. Tornou-se então difícil as partículas nucleares encontrarem-se e formarem nucleas.

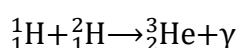
As partículas que participaram nos processos iniciais foram

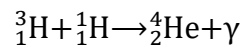
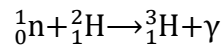
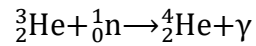
- neutrões
- prótons e
- raios- $\gamma$

A primeira reação foi



e depois



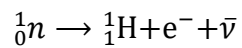


A partir daqui, ainda mais núcleos complicados se podiam formar.

Mas,

esta formação depende da densidade – que baixou com a temperatura.

Também, os neutrões podem decair:



Portanto, o único composto nuclear que se formou foi:

Núcleo	Fração por massa
${}^1_1\text{H}$	0.76
${}^4_2\text{He}$	0.24
${}^3_2\text{He}$	$2 \times 10^{-5}$
${}^2_1\text{H}$	$2 \times 10^{-5}$
${}^7_3\text{Li}$	$10^{-9}$

Estes números representam as abundâncias relativas de massa para o meio interestelar primordial.

Com mais arrefecimento, formaram os átomos.

Depois, o gás separou-se formando as

- **Galáxias,**

e no interior, condensações localizadas deram origem às

- **Estrelas**

### 4.5.1 Nascimento

Vamos agora considerar a fase inicial na evolução das estrelas.

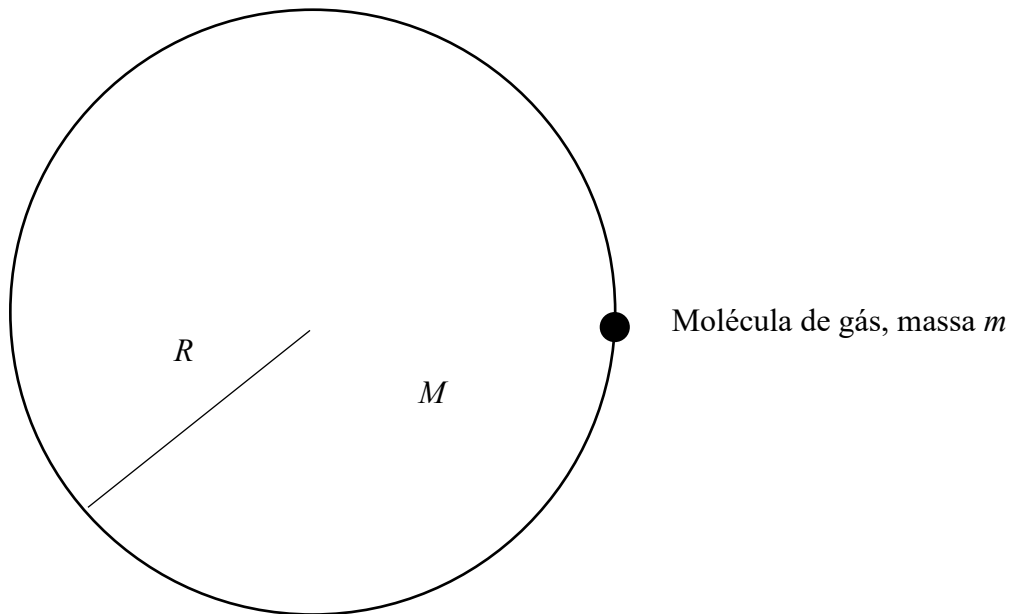
**Qual será o valor mínimo de massa de gás para garantir contração gravitacional?**

Considere uma massa esférica de gás isolada, de densidade uniforme. As características que governam as forças de atração são

- a massa total do gás,  $M$
- o raio da esfera,  $R$

A característica que se opõe a esta tendência para contração é

- o movimento aleatório,  $T$



Para que a molécula não escape da esfera do gás

$$\frac{GMm}{R} > \frac{1}{2}mv^2$$

ou

$$\frac{2GM}{R} > v^2$$

onde  $v$  é a velocidade da molécula.



Mas

$$\overline{\frac{1}{2}mv^2} = \frac{3}{2}kT$$

ou

$$\overline{v^2} = \frac{3k}{m}T$$

Substituindo

$$\frac{2GM}{R} > \frac{3k}{m}T$$

ou

$$\frac{2GMm}{3kT} > R$$

ou

$$\left(\frac{2GMm}{3kT}\right) > R^3$$

Para densidade uniforme,  $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$  ou  $R^3 = \frac{3M}{4\pi\rho}$

e substituindo

$$\left(\frac{2GMm}{3kT}\right) > \frac{3M}{4\pi\rho}$$

e simplificando, temos a massa de Jeans

$$M_J = \frac{9}{4(2\pi\rho)^{1/2}} \left(\frac{kT}{Gm}\right)^{3/2}$$

e o raio de Jeans

$$R_J = \left(\frac{9}{8\pi} \frac{kT}{Gm\rho}\right)^{1/2}$$

Neste modelo, foi assumido

1. Densidade uniforme *haverá algumas zonas não uniformes*
2. O gás apresenta uma forma esférica *nuvens interestelares têm tendência de ser irregulares*
3. O movimento angular foi desprezado *movimento de rotação se-opõe ao colapso*
4. O gás está isolado *haverá interação com outras nuvens*
5. As forças magnéticas foram desprezadas

*Exemplo:*

Um volume esférico de gás igual a massa de Jeans começa a sofrer colapso. Depois do raio ter sido reduzido a um quarto do seu valor inicial, a nuvem fragmenta-se. Qual é o número máximo de estrelas que pode ser produzido neste enxame, assumindo que não há mais fragmentação e não há variação de temperatura até ao início da fragmentação?

*Solução:*

Agora

$$M_J = \frac{9}{4(2\pi\rho)^{1/2}} \left( \frac{kT}{Gm} \right)^{3/2}$$

Com uma redução de 1/4 do raio, há um aumento da densidade por 64. Então

$$M'_J = \frac{9}{4(2\pi 64\rho)^{1/2}} \left( \frac{kT}{Gm} \right)^{3/2}$$

e

$$\frac{M_J}{M'_J} = 8$$

Considere uma massa de gás  $M > M_J$ :

1. À medida que o gás sofre contração, a temperatura aumenta – o gás que se desloca para o centro aumenta a sua energia cinética a qual posteriormente se transforma em energia térmica.
2. O gás que se desloca para o centro perde energia na forma de radiação – a radiação escapa e o aquecimento para e, portanto, a pressão interna não aumenta para evitar o colapso.
3. Com o aumento da densidade  $M_J$  vai diminuir e tornar-se menor do que a massa total do gás. Portanto,

- há fragmentação

A matéria agrupa-se em vários centros no interior da nuvem formando **enxames de estrelas**.

Vamos agora considerar só um fragmento de gás. [A]

1. Perto do centro de contração, a densidade aumenta. O gás torna-se opaco – os fótons não podem escapar e a temperatura aumenta.
2. À medida que a temperatura atinge **1800 K**, as moléculas de hidrogénio sofrem rutura, seguida pelos átomos de hidrogénio e finalmente pelos átomos de hélio. Temos um

- **plasma**

O aumento de temperatura e densidade conduz a um aumento de pressão e a deslocação de gás para o centro diminui.

4. Desenvolve-se um grande gradiente de temperatura [B] e ocorre convecção e a luminosidade aumenta. Há equilíbrio [C] e formação de uma

- **protoestrela**.

Vamos considerar a fase final da formação da estrela de sequência principal.

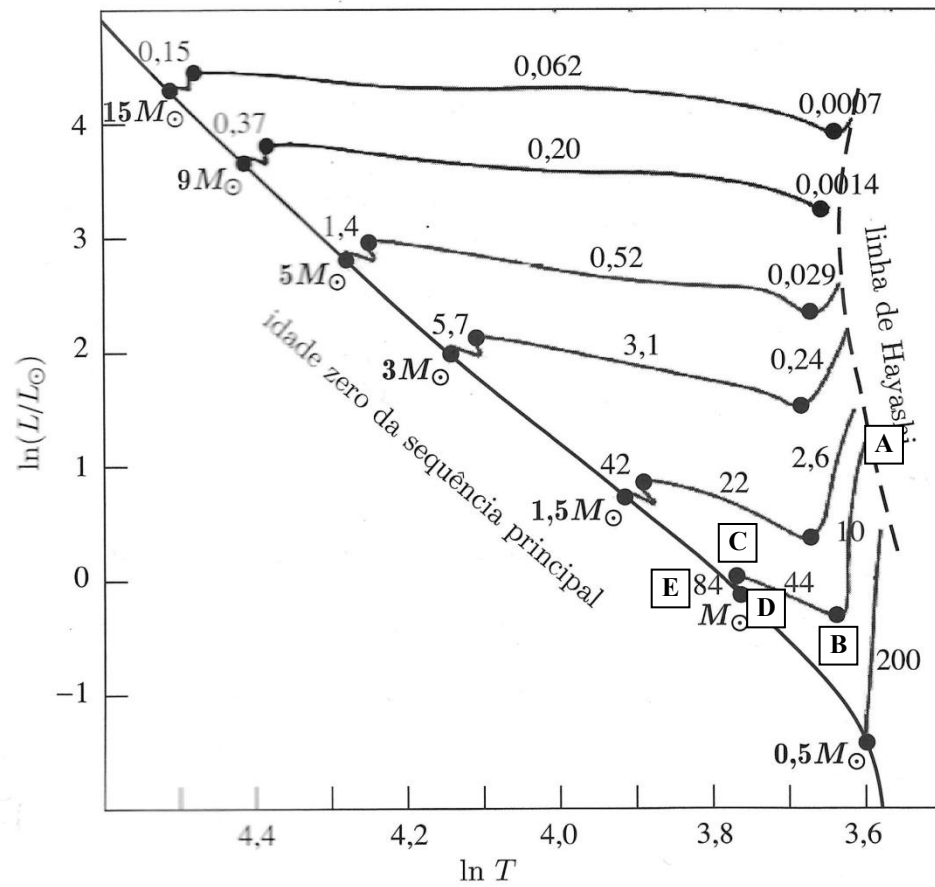
1. A massa da protoestrela continua a aumentar e também há contração para manter a pressão interna com um aumento na temperatura. A contração dá-se com uma diminuição da luminosidade [C].
2. Com um aumento contínuo de temperatura, o centro torna-se menos opaco provocando uma diminuição no gradiente de temperatura. Há expansão e um aumento da luminosidade [D].
3. Finalmente, a temperatura crucial de vários milhões de graus kelvin é então alcançada quando

-  **fusão nuclear**

se inicia, e a protoestrela torna-se uma

- **ESTRELA DA SEQUÊNCIA PRINCIPAL**

Este processo demora  $\sim 10\,000\,000$  de anos para uma estrela de  $1\,M_{\odot}$ .



- os números ao longo dos percursos indicam o tempo (em milhões de anos) despendidos em cada segmento de percurso.

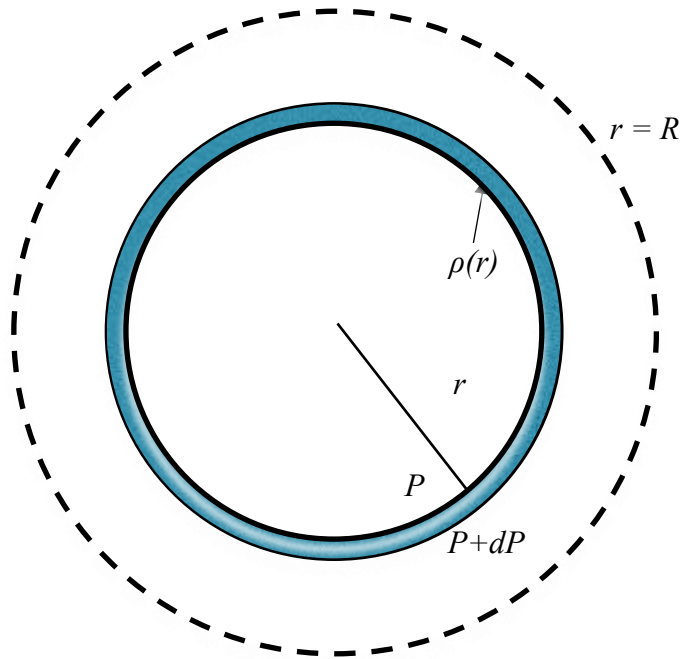
### 4.5.2 A vida das estrelas na sequência principal

#### (a) Estrutura estelar

Vamos considerar a estrutura de estrelas e a relação com a evolução.

##### i. Equilíbrio hidrostático

Considere uma massa de gás isolada no espaço:



Em equilíbrio

Força gravitacional = Força de pressão

$$\frac{-Gm(r)4\pi r^2\rho(r)dr}{r^2} = 4\pi r^2 dp$$

ou

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}$$

Agora, a massa  $m(r)$  é dada por

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2\rho(r)$$

e para uma estrela de raio  $R$ , a massa total é

$$M = \int_0^R dm(r)$$

$$= 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 dr$$

### Exemplo

Estime a pressão no centro do Sol, assumindo que  $M_{\odot} = 1.989 \times 10^{30}$  kg,  $R_{\odot} = 6.96 \times 10^8$  m, e que a pressão na superfície é zero. Assuma que  $\rho_{\odot} = M_{\odot}/V_{\odot}$

### Solução

$$P_c = \frac{GM_{\odot}(M_{\odot}/V_{\odot})}{R_{\odot}} = 2.7 \times 10^{14} \text{ Pa}$$

### ii. Equação de estado

A matéria de uma estrela na sequência principal é um gás perfeito e

$$P(r) = n(r)kT(r)$$

onde  $n(r)$  é o número densidade.

Agora

$$n(r) = \frac{\rho(r)}{\mu(r) \cdot m_{\text{H}}}$$

onde  $\mu$  é a massa molecular média dada por

$$\mu = \left[ 2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z \right]^{-1} \approx 1/2$$

e

$X$  é a fração de massa de H

$Y$  é a fração de massa de He

$Z$  é a fração de massa de elementos pesados

Então

$$P(r) = \frac{\rho(r)}{\mu(r) \cdot m_{\text{H}}} kT(r)$$

*Exemplo:*

Usando os valores do exemplo anterior, estime a temperatura no centro do Sol.

*Solução:*

$$T_c = \frac{P_c \mu m_H}{\rho_\odot} = 1.2 \times 10^6 \text{ K}$$

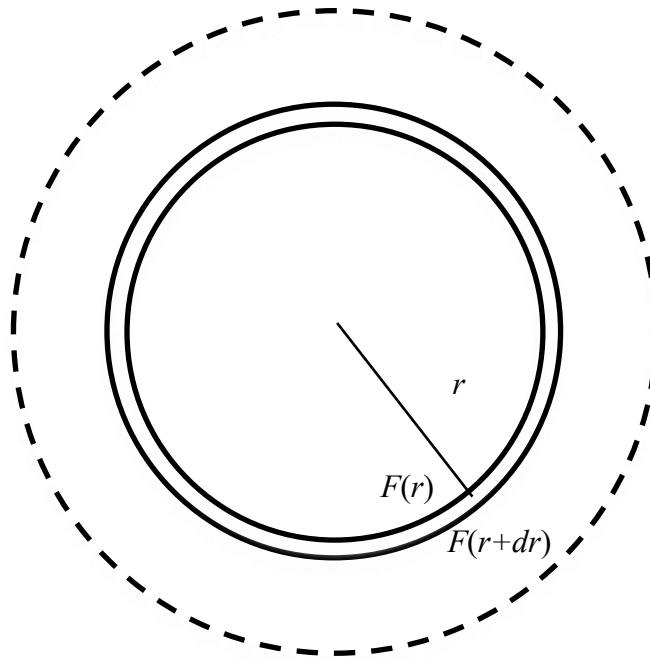
### iii. Transferência de energia

Precisamos considerar como a energia é transportada do interior até à superfície da estrela onde é radiada fora no espaço.

O modo principal de transferir a energia é

- transferência radiativa.

Considere a camada fina dentro da estrela:



Na base da camada, o fluxo radiativo é

$$F(r) = \sigma T(r)^4$$

e na superfície da camada

$$F(r + dr) = \sigma T(r + dr)^4 \approx \sigma(T^4 + 4T^3 dT) = F + dF$$

$dT$  é negativo, então há absorção de fluxo dentro da camada e este fluxo é

$$dF = 4\sigma T^3(r) dT$$

Esta absorção é da **opacidade**  $\kappa(r)$  da camada e

$$dF = \kappa(r)\rho(r) F(r) dr$$

Portanto, a luminosidade – a energia total que escoa pela camada fina por segundo – é dada por

$$L = 4\pi r^2 F(r) = \left[ \frac{16\pi\sigma r^2 T(r)^3}{\kappa(r)\rho(r)} \right] \frac{dT}{dr}$$

#### iv. Equilíbrio térmico

A taxa de geração de energia é denominada por  $\epsilon(r)$  com unidades J/S·kg.

Agora, nas regiões onde há geração de energia, o aumento de luminosidade é

$$dL = 4\pi\rho(r) \epsilon(r) dr$$

*Exemplo:*

Estime o valor médio pelo Sol.

*Solução:*

$$\epsilon_{\odot} \approx L_{\odot}/M_{\odot} = 3.9 \times 10^{26} / 1.99 \times 10^{30} = 0.0002 \text{ J/S} \cdot \text{kg}$$

Exceto em núcleos estelares e em certas camadas esféricas localizadas,  $\epsilon = 0$ .



Podemos combinar estas equações para determinar a relação massa-luminosidade da estrela.

Usando a equação de equilíbrio hidrostático com

$$dp \rightarrow \Delta P$$

e

$$dr \rightarrow \Delta r$$

então

$$\Delta P = P_S - P_C = 0 - P_C$$

onde  $P_S$  = pressão na superfície,  $P_C$  = pressão no centro, e  $\Delta r = R$ , que dá

$$P_C \propto \frac{M\rho}{R},$$

Para um gás perfeito

$$P \propto \rho T$$

e assim

$$\rho T_C \propto \frac{M\rho}{R}$$

Também, para a equação de transferência

$$L \propto R^2 \left( \frac{T_C^3}{\kappa \rho} \right) \left( \frac{T_C}{R} \right) \propto \frac{R T_C^4}{\kappa \rho}.$$

Agora  $\rho \propto M/R^3$ , e assim

$$L \propto \frac{R^4 T_C^4}{\kappa M}$$

e finalmente,

$$L \propto \frac{R^4 (M/R)^4}{\kappa M} \propto \frac{M^3}{\kappa}$$

- ver p. 51.

O valor do expoente depende da faixa de massa coberta e do tipo de estrela.

Um valor geral é 3.3.

Quando uma estrela chega à sequência principal, permanece aí durante um período

$$t \propto \frac{M}{L}$$

e para o Sol,

$$t_{\odot} \propto \frac{M_{\odot}}{L_{\odot}}$$

Então,

$$\frac{t}{t_{\odot}} = \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right) / \left( \frac{L}{L_{\odot}} \right)$$

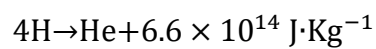
e como  $L \propto M^3$

$$\frac{t}{t_{\odot}} = \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-2}$$

Portanto

$M/M_{\odot}$	$t/t_{\odot}$
0.1	100
1	1
10	0.01
100	0.0001

Há pouca alteração na posição de uma estrela no diagrama H-R até 20 % do H original ter sido transformado em He no núcleo da estrela:

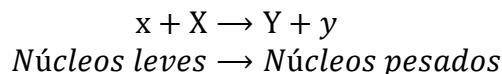


Então

$$t = \frac{0.2M \times 6.6 \times 10^{14}}{L} = 2 \times 10^{10} \text{ anos}$$

## (b) As fontes de energia estelar

Em 1938 Hans Bethe verificou que a fonte de energia para as estrelas deve ser reações nucleares



com temperaturas altas e densidades altas.

Estas reações só podem ocorrer no núcleo central de uma estrela com uma massa de  $0.1M_*$

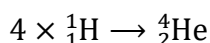
- só 10 % da massa da estrela está disponível para as reações.

A energia libertada na reação nuclear é dada por

$$E = [m_x + M_X - M_Y - m_y]c^2$$

onde  $m_x$  e  $M_X$  são as massas dos reagentes e  $m_y$  e  $M_Y$  são as massas dos produtos.

Podemos determinar a energia total do Sol se assumirmos que só tem hidrogénio e todo este hidrogénio forma hélio:



e a energia desta reação é

$$E = (4 \times 1.0078 - 4.0026) \cdot 1.67 \times 10^{-27} \cdot (2.99 \times 10^8)^2$$

$$= 4.3 \times 10^{-12} \text{ J}$$

A energia disponível na estrela é

$$E_{Tot} = E \times \left( \frac{0.1M_*}{m(4 \times {}^1_1\text{H})} \right)$$

Para o Sol

$$E_{Tot} = 4.3 \times 10^{-12} \times \left( \frac{0.1 \times 1.99 \times 10^{30}}{4 \cdot 1.0078 \cdot 1.67 \times 10^{-27}} \right)$$

$$= 1.27 \times 10^{44} \text{ J}$$

Com uma luminosidade do Sol de  $3.9 \times 10^{26} \text{ J/s}$ , o “combustível” (H) vai durar

$$T = E_{Tot,\odot} / L_{\odot}$$

$$= 1.27 \times 10^{44} / 3.9 \times 10^{26}$$

$$= 3.344 \times 10^{17} \text{ s}$$

$$= 10,000,000,000 \text{ a}$$

Agora, são necessários quatro núcleos de hidrogénio para produzir um núcleo de hélio. Contudo, a colisão simultânea de quatro partículas independentes é muito improvável. Portanto, precisa-se de uma

- Cadeia de reações.

Há dois tipos de cadeias para a conversão de hidrogénio em hélio:

1. Cadeia próton – próton                      temperaturas  $< 2 \times 10^7$  K
2. Ciclo de carbono (CNO)                      temperaturas  $> 2 \times 10^7$  K

Na cadeia pp, dominante em estrelas como o Sol, os núcleos de hidrogênio (prótons) fundem-se diretamente por meio de uma série de etapas, liberando energia e

- Neutrinos.

O ciclo CNO, proeminente em estrelas mais quentes e massivas, utiliza carbono, nitrogênio e oxigênio como catalisadores para facilitar a fusão do hidrogênio.

Ambos os processos libertam grandes quantidades de energia que neutralizam o colapso gravitacional e sustentam a luminosidade da estrela.

Agora, R. Davis, do Brookhaven National Laboratory (desde 1965) usou um tanque enorme de tetracloreto de etano,  $\text{C}_2\text{Cl}_4$  na mina de Homestake, Colorado, para detetar os neutrinos gerados na cadeia pp.

Um neutrino pode converter um átomo de Cl para Ar radioativo. O Ar pode ser separado e o número de átomos é medido a partir do seu decaimento  $\beta$ .



Os resultados:

Teoria:	1.8 átomos / dia
Experiência:	0.5 átomos / dia ( $\sim 1/3$ do fluxo previsto)

- o problema do neutrino solar.

- O problema dos neutrinos solares era uma discrepância entre o número previsto e observado de neutrinos produzidos no núcleo do Sol por meio da fusão nuclear (principalmente a cadeia pp).

O problema foi resolvido quando se descobriu que os neutrinos têm massa e podem oscilar entre três “flavours”: eletrão, múon e tau) enquanto viajam para a Terra.

Os primeiros detetores eram sensíveis apenas aos neutrinos do eletrão, subestimando a contagem total de neutrinos.

Esta descoberta confirmou os modelos solares e a teoria da oscilação dos neutrinos.

### (c) A morte das estrelas

O que acontece às estrelas depois da sequência principal depende das suas massas:

#### (i) Massas $0.5M_{\odot} \rightarrow 8M_{\odot}$

Enquanto a estrela se encontra na sequência principal, o hidrogénio consome-se e forma-se um núcleo central de hélio e reações nucleares acabam nesta região.

*Para as gigantes vermelhas:*

A estrela agora desloca-se rapidamente para a direita (a região gigante vermelha) – o núcleo inerte contrai-se e aquece. Também reações nucleares ainda continuam na região imediatamente à volta do núcleo.

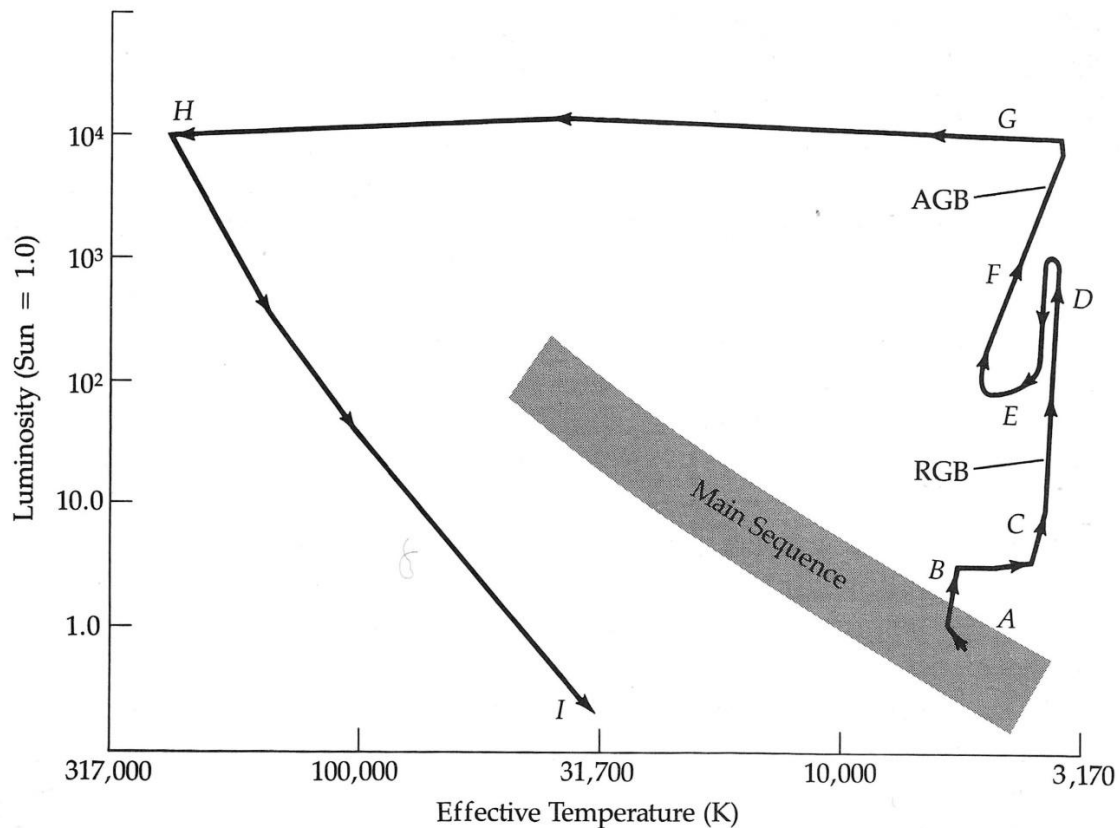
Depois, a camada exterior expande-se e arrefece evoluindo-se pelo estado sub-gigante para gigante vermelho.

O núcleo não se contrai indefinidamente e um efeito chamado

- pressão degenerativa do eletrão

leva ao equilíbrio do núcleo.

Este processo demora  $\sim 10^9$  anos para massas  $\sim 5M_{\odot}$ .



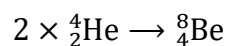
*O flash de hélio:*

Depois de atingir o estado de gigante vermelho, a estrela move-se pelo ramo horizontal. Embora o núcleo de hélio seja inerte, continua a ser aquecido pelo colapso gravitacional bem como pelas reações nucleares à volta dele.

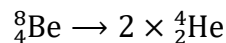
O núcleo aquece de

$$20 \times 10^6 \text{ K} \rightarrow 100 \times 10^6 \text{ K}$$

Agora, com estas temperaturas, a seguinte reação ocorre:



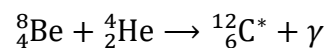
Contudo,  ${}^8_4\text{Be}$  é instável e



em  $10^{-16}$  s. Mas

- o tempo médio entre colisões no núcleo pode ser menor do que  $10^{-16}$  s

e assim, a seguinte reação pode ocorrer:



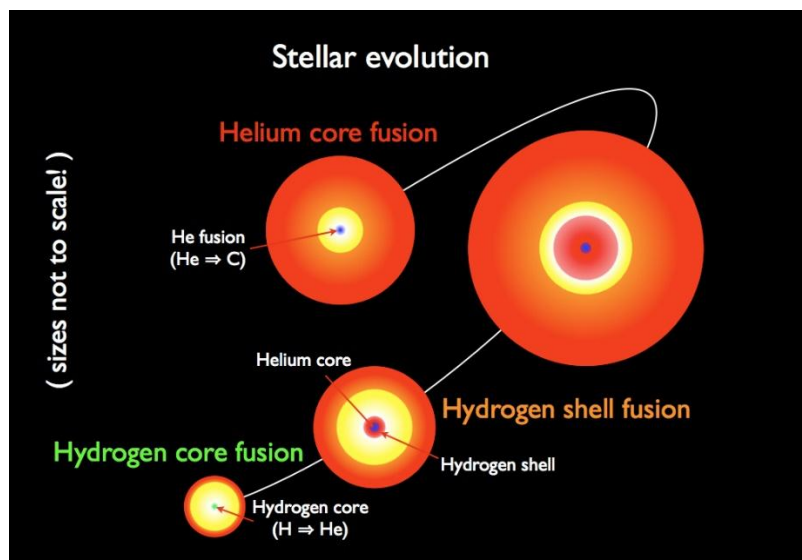
O processo libera uma enorme quantidade de energia, desencadeando o *flash de hélio*, um evento de fusão rápido e descontrolado no núcleo degenerado da estrela.

A temperatura então atinge  $2 \times 10^8$  K e o efeito de pressão degenerativa já não atua mais.

O núcleo expande-se e arrefece e atinge equilíbrio.

Subsequentemente, a estrela contrai-se e aquece – a estrela move-se pelo ramo horizontal.

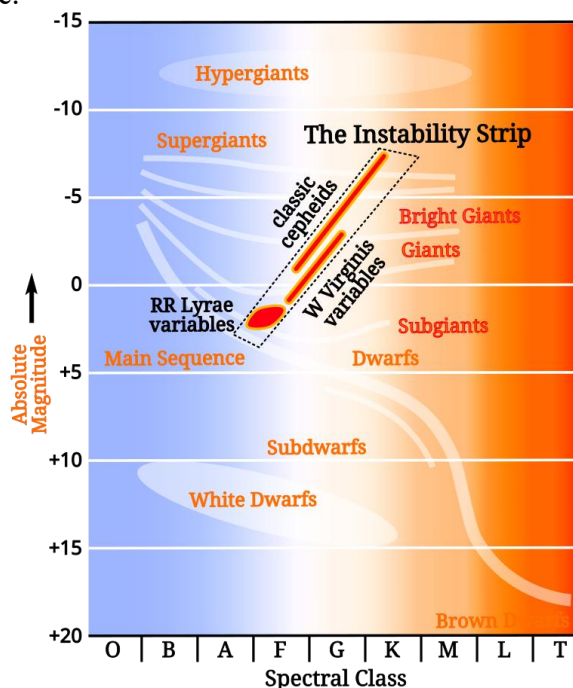
O hélio esgota-se e um núcleo de carbono forma-se.



### *As estrelas variáveis*

A medida que a estrela caminha ao longo do ramo horizontal, a camada mais exterior começa a pulsar radialmente o que é acompanhado por uma mudança no brilho da estela. Este efeito ocorre quando as estrelas passam pelo

- feixe de instabilidade.



### *Nebulas planetárias e anãs brancas*

Nesta altura, as camadas mais exteriores tornam-se instáveis e libertam uma quantidade de matéria na forma de uma

nébulua planetária.

S. Chandrasekar mostrou que a pressão degenerativa do eletrão não se pode opor às forças gravitacionais exercidas por massas  $1.2M_{\odot} \rightarrow 1.4M_{\odot}$

Para massas  $1.4M_{\odot} \rightarrow 8M_{\odot}$  as estrelas contornam este problema perdendo massa na forma da nebulosa com a formação de uma

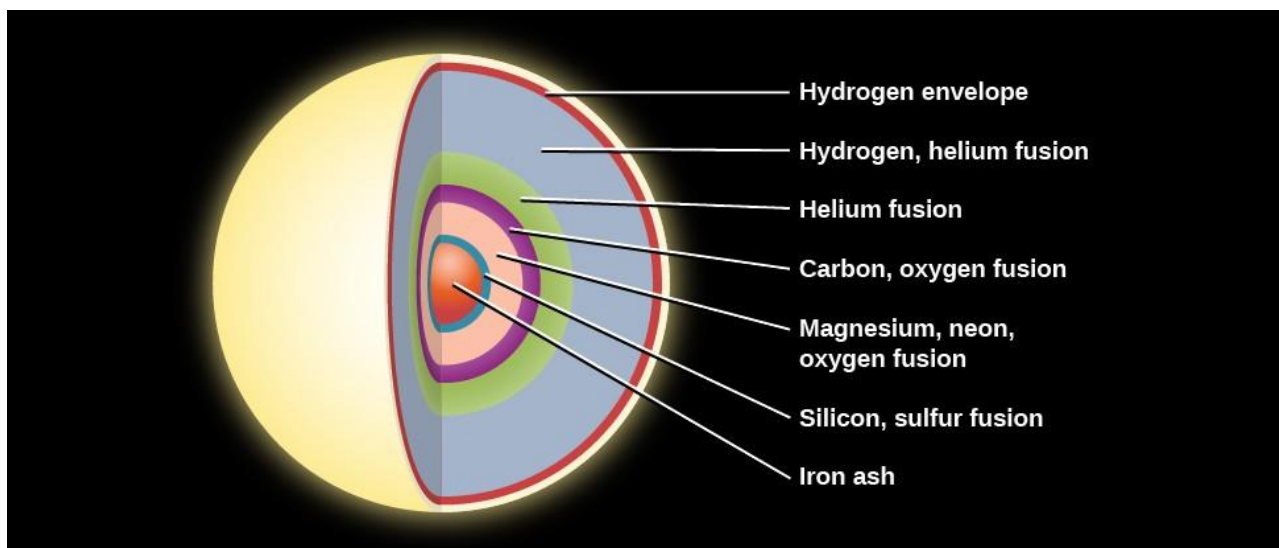
- anã branca.

A anã branca apresenta uma luminosidade muito reduzida e é muito pequena  $(1/100)R_{\odot}$ .

#### **(ii) Massas $> 8M_{\odot}$**

Para as estrelas de massas  $> 8M_{\odot}$  o caminho evolutivo não é o mesmo do que o seguido pelas estrelas de massa menor.

Aqui, as estrelas desenvolvem um núcleo e camadas exteriores que apresentam uma estrutura do tipo de cebola, com ferro no centro e hidrogénio e hélio no exterior.



Depois disto, a estrela não pode dar origem a elementos mais pesados – posterior fusão do ferro não fornece energia – a reação é endotérmica.

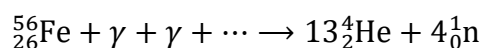
Posteriormente, o núcleo de ferro continua a contrair-se e a temperatura atinge  $3 \times 10^9$  K. A esta temperatura os núcleos de ferro emitem

raios- $\gamma$

de altas energias.



Estes raios provocam a cisão do ferro com a formação de partículas  $\alpha$  e neutrões



resultando na remoção de energia do núcleo.

Num segundo passo, o núcleo sofre colapso originando um núcleo de hélio.

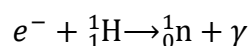
- Para massas deste núcleo  $< 1.4M_{\odot}$

A pressão degenerativa do eletrão evita posterior colapso.

- Para massas deste núcleo  $> 1.4M_{\odot}$

- A pressão degenerativa do eletrão é insuficiente para evitar colapso.

Uma nova reação endotérmica tem início: os eletrões combinam-se com os prótons nos núcleos de hélio:



Então há formação de um núcleo de neutrões: a pressão degenerativa dos neutrões impede um posterior colapso.

Dá-se o colapso das camadas exteriores dando origem a uma explosão supernova do tipo II resultando uma

- estrela de neutrões.

- Para massas deste núcleo  $> 2.5M_{\odot}$

A pressão degenerativa dos neutrões não é suficiente para se opor a atração gravitacional formando-se então um

- buraco negro.

### 4.5.3 As estrelas mortas

Vamos considerar os estados finais de estrelas. Estas estrelas incluem as anãs brancas, as estrelas de neutrões e buracos negros.

#### (a) As anãs brancas

Depois da emissão das camadas mais exteriores na forma de uma nebulosa planetária, uma estrela variável transforma-se numa

- anã branca.

A razão pela qual uma anã branca não sofre mais colapso devido à sua gravidade tem a ver com a pressão de degenerescência do eletrão.

Determinação da relação massa-raio de anãs brancas:

A pressão degenerativa é dada por

$$P = K\rho^{5/3}$$

onde  $K$  é constante.

A partir do equilíbrio hidrostático

$$P \propto \frac{M^2}{R^4}$$

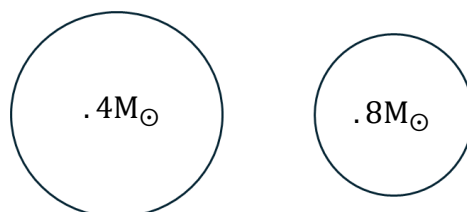
Então

$$\frac{M^2}{R^4} \propto \rho^{5/3} = \frac{M^{5/3}}{R^5}$$

ou

$$R \propto M^{-1/3}$$

Então



Mas, as anãs brancas têm um limite de massa – a massa de Chandrasekar.

Uma das primeiras anãs brancas descoberta foi Sirius B.

Anãs brancas têm massas

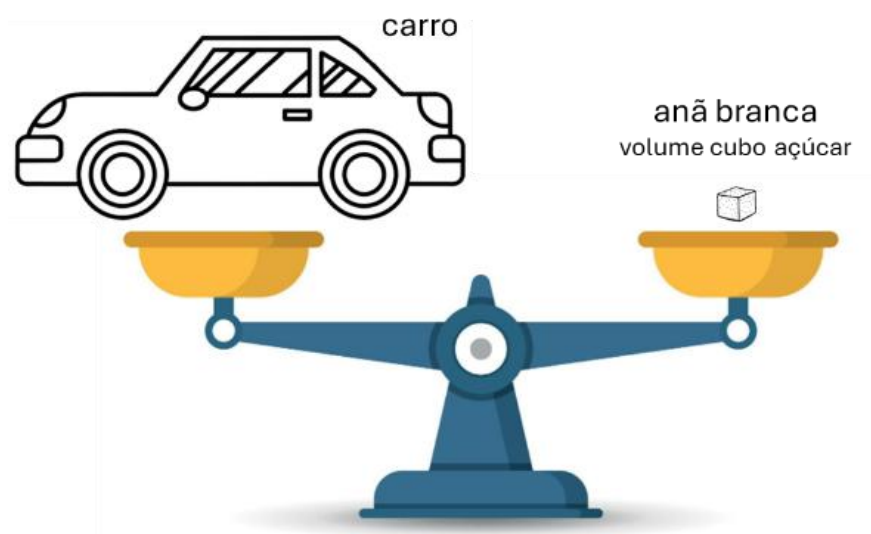
$$\sim 1M_{\odot}$$

e tamanho

$$\sim R_{\oplus}$$

então tem uma densidade

$$\rho = 10^9 \text{ kg m}^{-3}$$



*Exemplo:*

Uma anã branca tem magnitude aparente de 8.5, paralaxe de 0.2" e temperatura efetiva de 28000 K. Qual é o raio da estrela e compare-o com o raio da Terra.

*Solução:*

Agora, a distância até a estrela é

$$d = \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{0.2} = 5 \text{ pc}$$

a magnitude absoluta da estrela é

$$M = m + 5 - 5\log_{10}d = 8.5 + 5 - 5\log_{10}(5) = 10.0$$

e então a luminosidade usando está relacionada com a magnitude absoluta por

$$L = L_{\odot} \times 10^{(M_{\odot} - M)/2.5}$$

onde  $L_{\odot} = 3.83 \times 10^{26} \text{ W}$  e  $M_{\odot} = 4.83$

e então

$$L = L_{\odot} \times 10^{(M_{\odot}-M)/2.5} = 3.83 \times 10^{26} \cdot 10^{(4.83-10)/2.5} = 3.27 \times 10^{24} \text{ W}$$

Portanto, a partir da lei de Stefan-Boltzmann, podemos calcular o raio da estrela:

$$R = \sqrt{L/(4\pi\sigma T^4)} = \sqrt{3.27 \times 10^{24}/(4\pi \cdot (5.67 \times 10^{-8}) \cdot 28000^4)} = 2.73 \times 10^6 \text{ m}$$

Comparando com o raio da Terra onde  $R_{\oplus} = 6.73 \times 10^6 \text{ m}$

$$R = 0.41R_{\oplus}$$

- o raio da anã branca é aproximadamente 0.43 vezes o raio da Terra, o que significa que o raio da estrela é 43% do da Terra.

### (b) As estrelas de neutrões

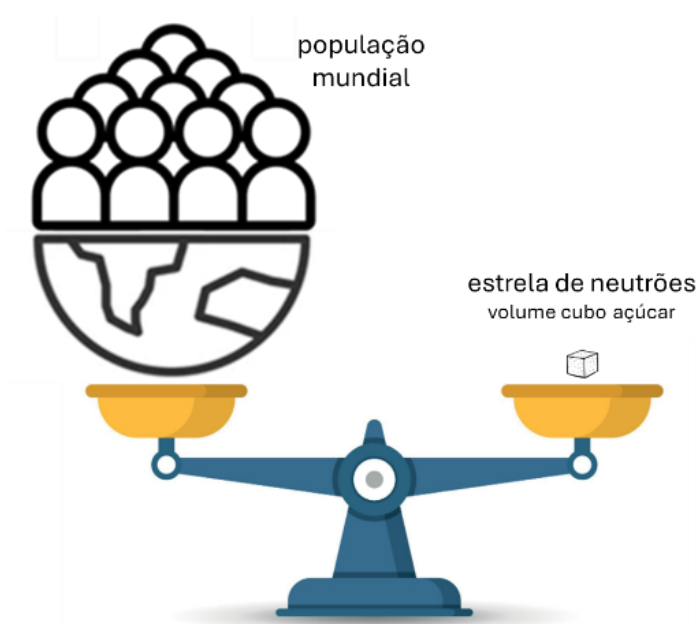
Com massas superiores a  $1.4M_{\odot}$  a pressão de degenerescência de eletrões não consegue opor-se à contração gravítica e há a formação de uma estrela de neutrões.

Para evitar ainda mais colapso a pressão degenerescência do neutrão torna-se relevante.

Pode deduzir-se uma relação massa-raio e ser mostrado que estrelas de neutrões com massas grandes têm raios pequenos.

Estrelas de neutrões têm massas típicas  $1.4M_{\odot}$  e raios típicos  $10^4 \text{ m}$  e então

$$\rho = 10^{17} \text{ kg m}^{-3}$$



Em 1967, Jocelyn Bell e Antony Hewish descobriram os

**pulsares.**

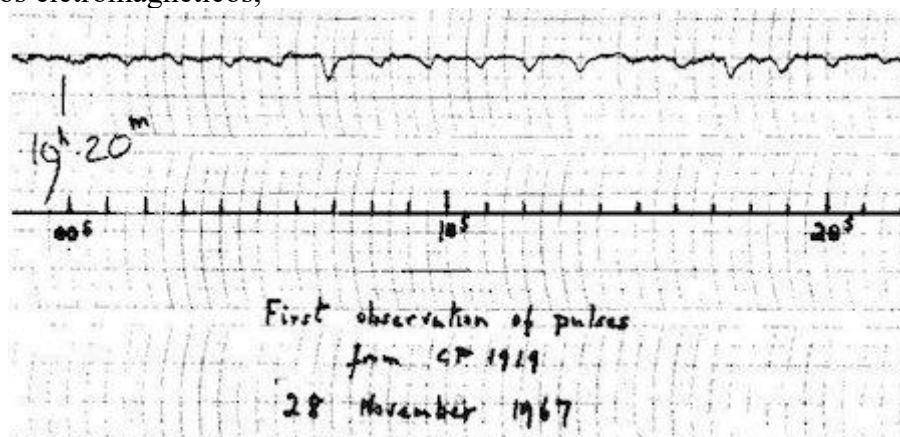
Seções do telescópio usado por Bell e Hewish para detectar pulsares ainda existem no Observatório de Radioastronomia Mullard, nos arredores de Cambridge:



Deduziram que estes são estrelas de neutrões em rotação e magnetizados.

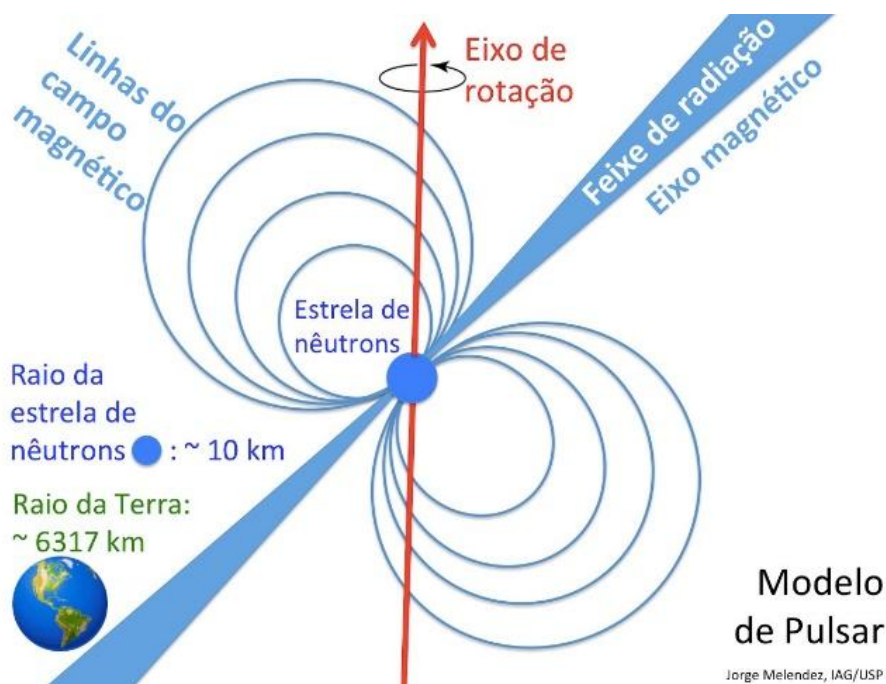
Irradiam

- impulsos eletromagnéticos,



e fenomenologia envolve geometrodinâmica clássica, quântica, estatística, estocástica e caótica, longe de ser completamente compreendida.

Pulsares emitem principalmente em radiofrequência, em torno de 400 MHz



Este tipo de estrelas pode dar origem a um feixe de radiação em rotação o qual produz uma série de pulsos a espaços regulares.

Períodos dos impulsos:

$$1.6 P = 1.6 \times 10^{-3} \text{ s} \rightarrow 4 \text{ s} \pm 10^{-8} \text{ s}$$

Finalmente é possível mostrar uma relação entre o período e a densidade de um pulsar (e mostrar que pulsares têm densidades de estrelas de neutrões) é o seguinte:

Uma esfera pode rodar só a uma velocidade dada por

$$\frac{v^2}{R} = \frac{GM}{R^2}$$

ou

$$v = \frac{GM^{1/2}}{R}$$

onde  $v$  é a velocidade da esfera no equador.

O período é

$$P = \frac{2\pi R}{v}$$

e substituindo dá

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{2\pi R^{3/2}}{(GM)^{1/2}} \\
 &= [G(4/3)\pi\rho R^3]^{1/2} \\
 &= 3.8 \times 10^5 / \rho^{1/2} \text{ s}
 \end{aligned}$$

Rearranjando

$$\rho = (3.8 \times 10^5 / P)^2$$

Agora, para um período de 2 ms a densidade  $\rho = 3.61 \times 10^{16} \text{ kg/m}^3$  - que é aproximadamente a densidade de um neutrão.

*Exemplo:*

Normalmente podemos observar um abrandamento no período dos impulsos de pulsares. Significa uma perda de energia do pulsar dá origem à luz emitida pela nebulosa associada. Por exemplo, há um pulsar no centro da Nebulosa do Caranguejo que tem uma luminosidade de  $L = 5 \times 10^{31} \text{ W}$ . Mostra que esta energia é devida ao abrandamento do pulsar dando que  $M = 1M_{\odot}$ ,  $R = 10 \text{ km}$ ,  $P = 0.03 \text{ s}$  e  $dP/dt = -4 \times 10^{-13} \text{ s/s}$ .

*Solução:*

A energia de rotação do pulsar é

$$E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

onde  $\omega = 2\pi/P$ , e  $I = (2/5)MR^2$ . Substituindo

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \frac{2}{5} MR^2 \left( \frac{2\pi}{P} \right)^2$$

Supondo que um processo transforma toda a energia de rotação em radiação então

$$\frac{dE_{rad}}{dt} = -\frac{dE_{rot}}{dt} = -\left(\frac{8}{5}\right) \pi^2 \frac{MR^2}{P^3} \frac{dP}{dt}$$

e portanto

$$L = -\left(\frac{8}{5}\right) \pi^2 \frac{MR^2}{P^3} \frac{dP}{dt}$$

Substituindo,

$$\begin{aligned}
 L &= -\left(\frac{8}{5}\right) \pi^2 \frac{(1.99 \times 10^{30}) \cdot 10000^2}{0.03^3} (-4 \times 10^{-13}) \\
 &= 4.66 \times 10^{31} \text{ W}
 \end{aligned}$$

que é aproximadamente o valor medido.

### (c) Os buracos negros

Um buraco negro é uma região do espaço tempo em que a gravidade é tão forte que nada, nem mesmo luz, pode escapar.

É formado a partir de uma

- supernova

onde a estrela resultante tem uma massa  $> 2.4M_{\odot}$ .

Com esta massa a estrela sofre colapso devido à força gravitacional até que chega a zero e a densidade atinge um valor infinito.

Podemos deduzir um “raio” de um buraco negro de massa  $M$  considerando a velocidade de escape de uma partícula de massa  $m$ .

Agora

$$\frac{1}{2}mv_{esc}^2 - \frac{GmM}{R} = 0$$

Portanto

$$v_{esc} = \left( \frac{2GM}{R} \right)^{1/2}$$

Nenhum objeto pode viajar mais rápido do que a velocidade da luz, então

$$v_{esc} = c$$

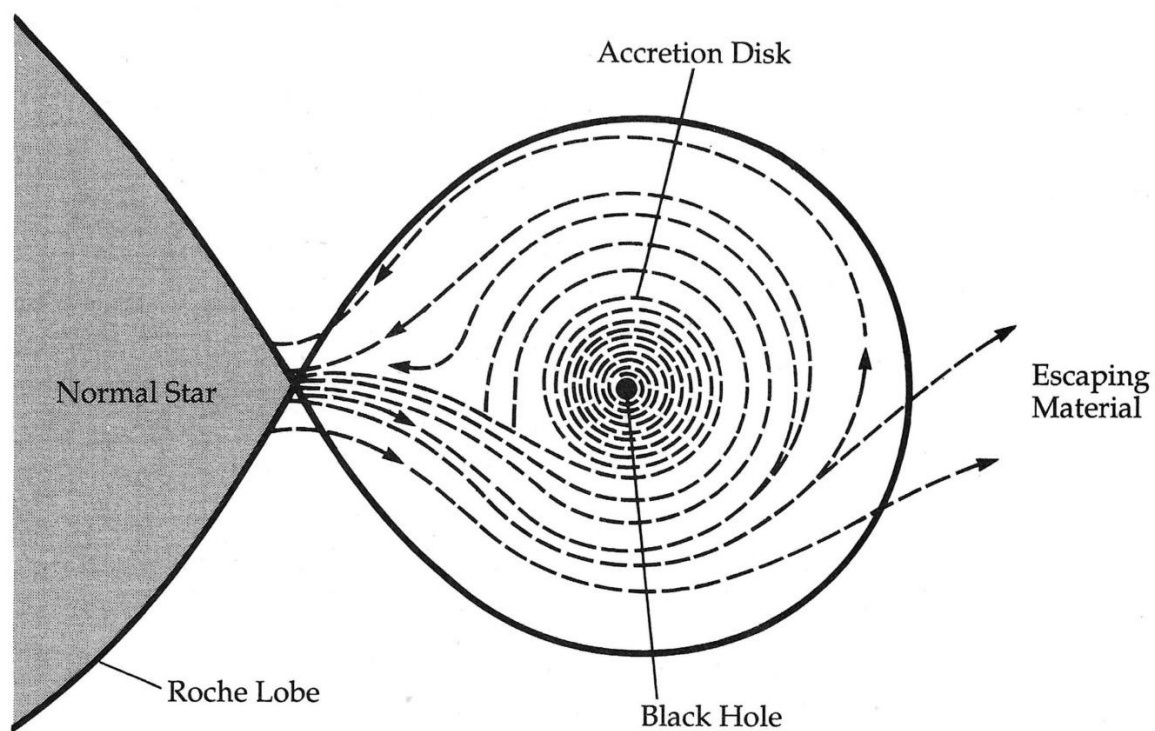
e então

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

Este raio chama-se o raio de **Schwarzschild**.

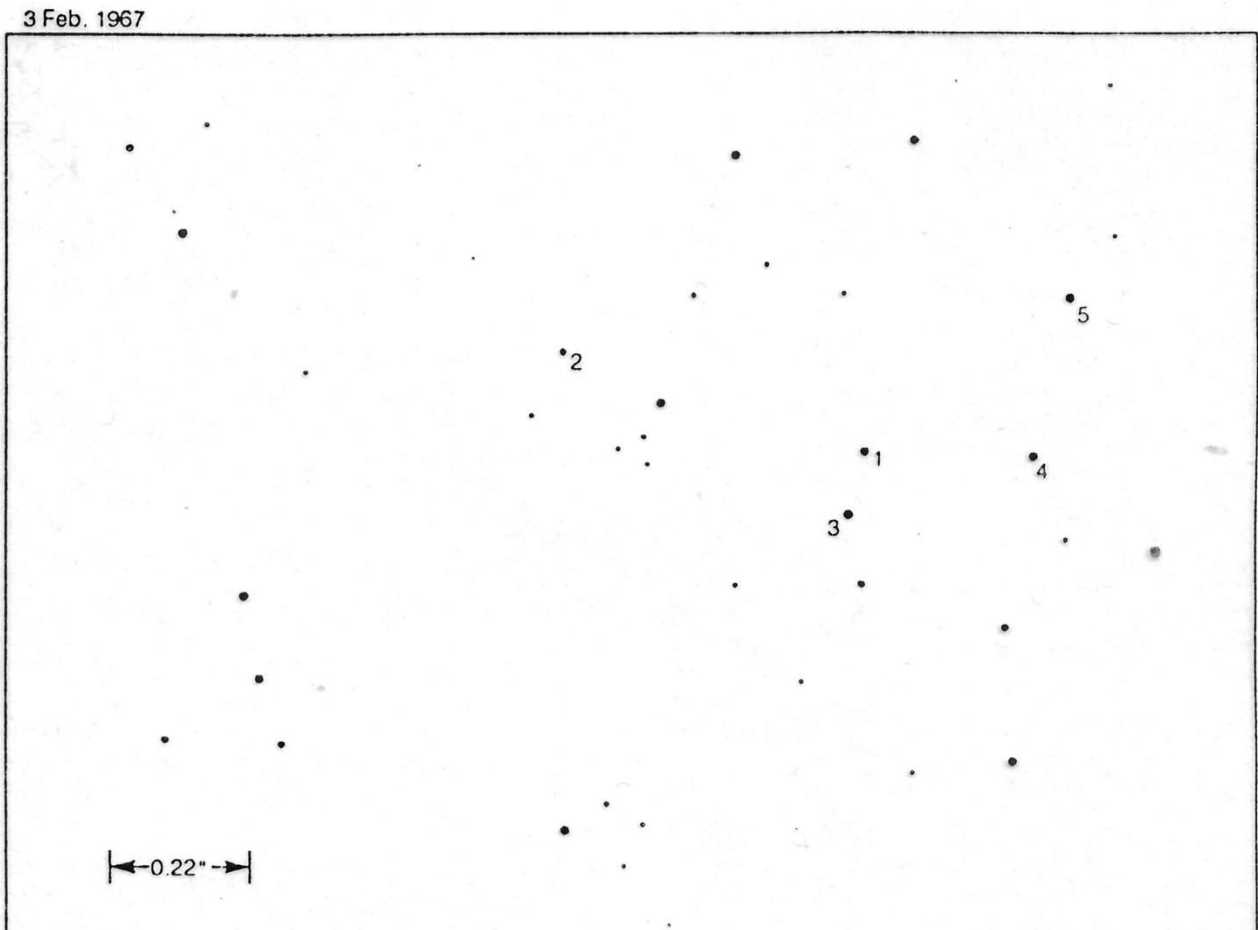


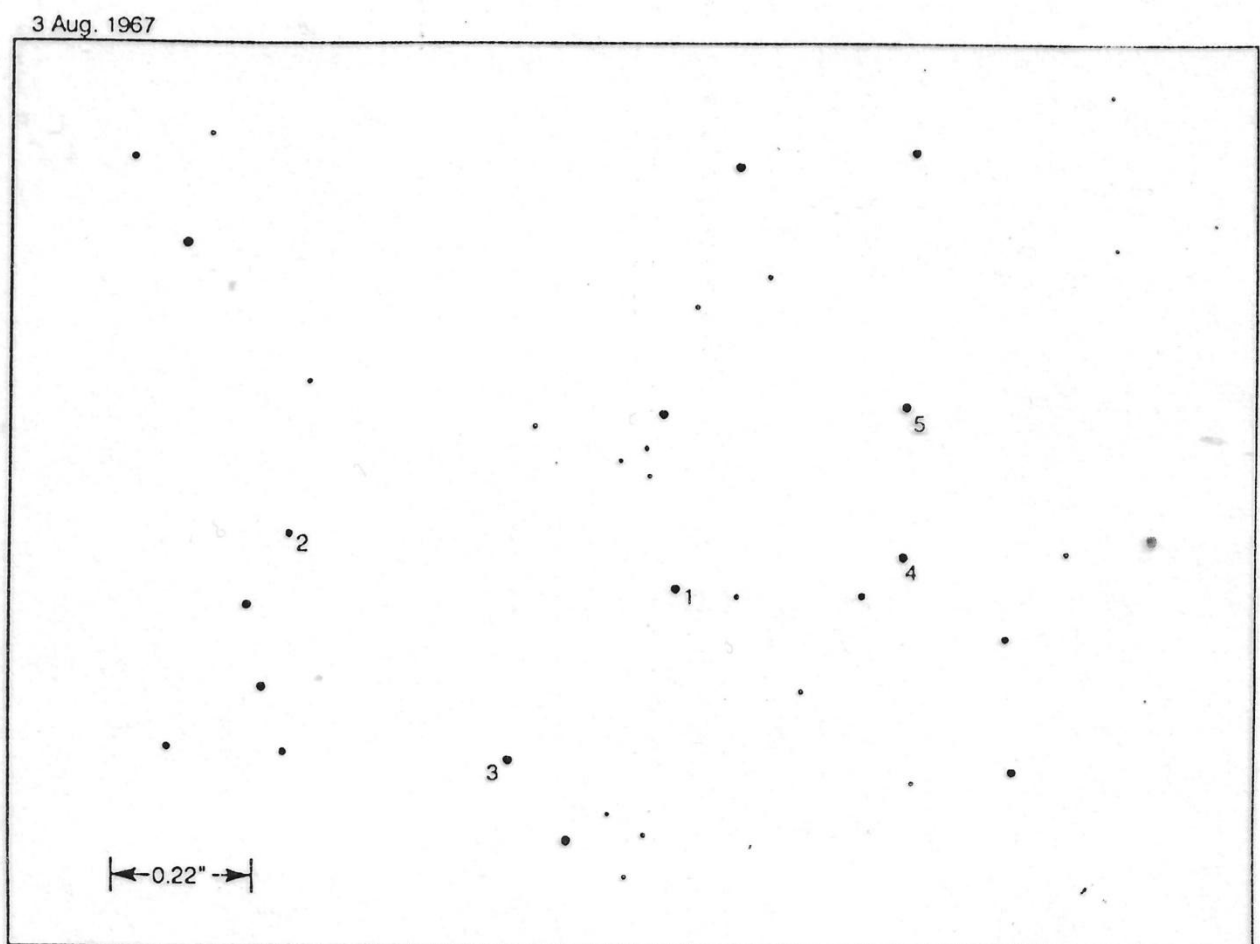
Os buracos negros são invisíveis e atraem matéria de uma estrela próxima. A matéria arrancada rodopia à volta do buraco negro aquecendo muito e libertando raios X antes de desaparecer para sempre.



### Problemas

1. As figuras (i) e (ii) mostram fotografias de uma parte do céu tiradas nos dias 3 de fevereiro de 1967 e 3 de agosto de 1967. Utilize estes diagramas para determinar as distâncias do Sol, em m, AU, ly e pc, das estrelas (1) e (2).





2. Astrofísicos vivendo em Marte definiriam a sua unidade astronómica em termos da órbita de Marte. Se eles definirem parsec da mesma maneira que nós,
  - (a) quantos unidades astronómicas de Marte englobaria esse parsec?
  - (b) quantos unidades astronómicas terrestres igualariam um parsec de Marte?
  - (c) Quantos parsecs terrestres correspondem a um parsec de Marte?
3. Uma estrela variável altera o seu brilho por um factor de 4. Qual é a sua mudança em magnitude?
4. Qual é a magnitude aparente total de um sistema binário de duas estrelas de magnitudes aparentes 3.0 e 4.0?
5. Se uma estrela tem magnitude aparente de -0.4 e paralaxe de 0.3", qual é
  - (a) o módulo de distância?
  - (b) a magnitude absoluta?
6. Qual é a distância em parsecs de uma estrela cuja magnitude absoluta é +6.0 e cuja magnitude aparente é +16?
7. O Sol tem uma magnitude visual aparente de -26,74.
  - (a) Calcule sua magnitude visual absoluta.
  - (b) Calcule sua magnitude à distância de Alfa Centauri (1,3 pc).
  - (c) O Palomar Sky Survey pesquisou estrelas como fintas em +19. A que distância (em parsecs) uma estrela idêntica ao Sol teria que estar para ser brilhante o suficiente para ser visível nas fotografias do Sky Survey?
8. Observa-se que as magnitudes V de duas estrelas são 7.5, mas suas magnitudes azuis são  $B_1=7.2$  e  $B_2=8.7$ .
  - (a) Qual é o índice de cor de cada estrela?
  - (b) Qual estrela é mais azul e por que fator ela é mais brilhante em comprimentos de onda azuis do que a outra estrela?
9. Qual é o índice de cor de uma estrela a uma distância de 150 pc com  $m_V = 7.55$  e  $m_B = 2.00$ ?
10. As duas estrelas de um sistema binário, fazendo um ângulo de  $90^\circ$  com a nossa linha de visão apresentam uma velocidade máxima relativa ao centro de massa de  $75 \text{ km s}^{-1}$  e  $100 \text{ km s}^{-1}$  e um período  $P = 11$  dias.
  - (a) Calcule a separação entre as duas estrelas.
  - (b) O tempo de completa ocultação é de 45 minutos e o tempo de transição é de 4 horas. Calcule os raios das duas estrelas.
11. Considere a relação entre a massa e a luminosidade de uma estrela.
  - (a) Use a relação para calcular a faixa de luminosidade das estrelas na faixa de massa observada de  $0.085 M_\odot$  a  $100 M_\odot$ .
  - (b) Qual é a massa de uma estrela que tem 0.1 a luminosidade do Sol? Qual é a massa de uma estrela que é 1000 vezes a luminosidade do Sol?
12. Os espectros de absorção de quatro estrelas mostram as seguintes características. Quais são os seus tipos espectrais?
  - (a) As características mais importantes são as riscas de TiO.
  - (b) As características mais importantes são as riscas de HeII.

- (c) As riscas de Balmer de H são muito fortes e algumas riscas de metais ionizadas estão presentes.
- (d) Há riscas de hidrogénio e riscas de metais neutros e ionizados, mas as riscas de CaII, H e K são as mais fortes do espectro.
13. Quais são os tipos espectrais das seguintes estrelas, se os espectros contínuos são de intensidade máxima nos comprimentos de onda:
- 50 nm
  - 300 nm
  - 600 nm
  - 900 nm
  - 1.2  $\mu\text{m}$
  - 1.5  $\mu\text{m}$
14. Se a paralaxe de uma estrela da sequência principal apresentar um erro de 25%, até que ponto e em que direção essa estrela será deslocada da sequência principal num diagrama H-R?
15. Determine a distância a uma estrela M1b de magnitude aparente +1.0.
16. Usando o diagrama H-R e a relação entre temperatura e tipo espectral (em baixo) determine quantas vezes maior é Betelgeuse do que Antares.
17. Uma nuvem molecular é observada com uma temperatura de  $T = 20 \text{ K}$  e uma densidade de partículas de  $n = 10^5 \text{ partículas/cm}^3$ . Determine a massa Jeans da nuvem.
18. Uma nuvem molecular tem as seguintes propriedades:
- Massa total,  $M = 2.0 \times 10^{32} \text{ kg}$   
 Raio:  $R = 5 \text{ pc}$ ,  
 Temperatura:  $T = 25 \text{ K}$ ,
- Qual é a massa Jeans da nuvem em massas solares? A nuvem tem massa suficiente para entrar em colapso gravitacional?
19. Uma nuvem molecular é observada com as seguintes propriedades:
- Temperatura:  $T = 30 \text{ K}$ ,  
 Densidade:  $\rho = 5 \times 10^{-18} \text{ kg/m}^3$ .
- Calcule o volume de Jeans para a nuvem e determine a massa de material dentro do volume de Jeans. Expresse a massa em massas solares.
20. Considere a luminosidade de uma estrela.
- Se uma estrela é caracterizada por  $M = 2 \times 10^{32} \text{ kg}$  e  $L = 4 \times 10^{32} \text{ W}$ , durante quanto tempo pode brilhar a essa luminosidade se for 100% de hidrogénio e converter todo o hidrogénio em hélio?
  - Faça um cálculo semelhante para uma estrela de massa  $10^{30} \text{ kg}$  e luminosidade  $4 \times 10^{25} \text{ W}$ .
21. Verifique que no Sol aproximadamente  $6 \times 10^{11} \text{ kg}$  de hidrogénio é convertido em hélio em cada segundo.

22. Considere as estrelas mortas.
- (a) Uma anã branca tem magnitude aparente 10.2, paralaxe 0.15'' e  $T_{\text{eff}} = 22000\text{K}$ . Calcule o raio da estrela. Compare o valor com o raio da Terra.
  - (b) Uma estrela de neutrões tem  $T_{\text{eff}} = 500000\text{ K}$  e um raio de 10 km. Qual é a sua luminosidade?
  - (c) Uma nuvem de protoestrelas começa com  $T_{\text{eff}} = 15\text{ K}$  e raio  $40000R_{\odot}$ . Determine  $L/L_{\odot}$  e o comprimento de onda do máximo da função de Planck.
23. Uma estrela de raio inicial 800 000 km contrai-se para um raio de 80 km para formar uma estrela de neutrões. A sua massa é conservada e a estrela mantém uma forma esférica. O momento angular também é conservado.
- (a) Calcule o período de rotação depois da contração considerando que o seu valor era de 100 dias antes de contração.
  - (b) Calcule a sua densidade média.
24. Calcule o raio de Schwarzschild para
- (a) a Terra,
  - (b) o Sol,
  - (c) um enxame globular e
  - (d) a Galáxia.
- Que tendência percebe?

## 5. As Galáxias

### 5.1 A Via Láctea

#### 5.1.1 Forma e a distribuição das estrelas

A Via Láctea é uma faixa de 100 mil anos-luz de largura que envolve a esfera celeste. A parte mais brilhante está localizada na constelação de Sagitário, enquanto na constelação de Auriga situa-se o anti-centro.

No século XVII Galileu descobriu que a Via Láctea contém estrelas individuais.

Em 1781 Messier publicou um catálogo com  $\sim 100$  objetos:

- nuvens de gás na Via Láctea
- enxames abertos e globulares
- nebulosas                      - que são galáxias
- objetos extra galácticas

Para localizar os objetos na Via Láctea, usamos o sistema de coordenadas galácticas:

Neste sistema, o grande círculo fundamental é o equador galáctico, que é a intersecção do plano galáctico com a esfera celeste, com pólos galácticos correspondentes.

Definimos o Pólo Norte Galáctico como aquele pólo no mesmo hemisfério que o Pólo Norte Celestial.

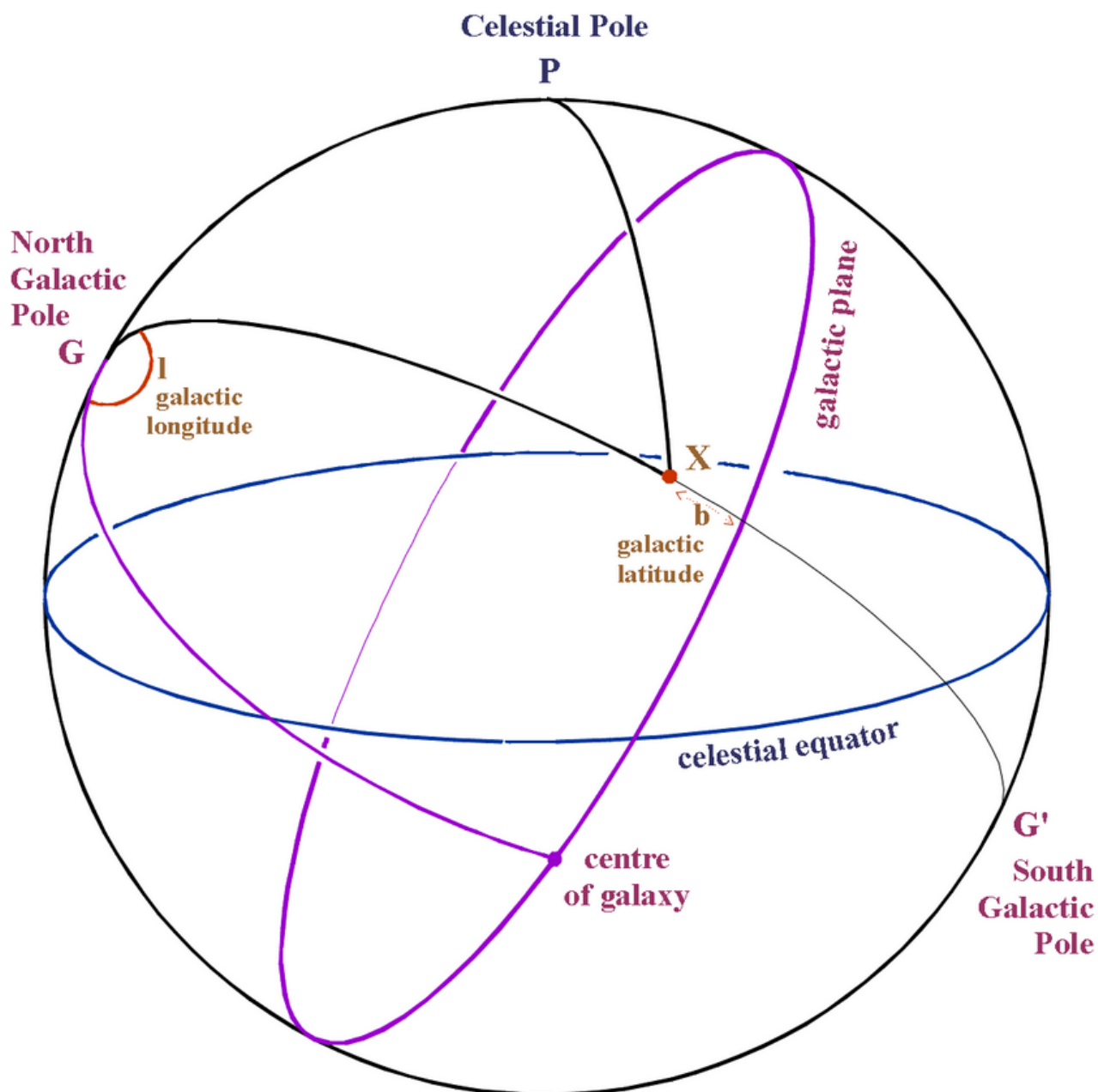
Para fixar as coordenadas galácticas do objeto X, desenhe um grande círculo entre os dois pólos galácticos, passando por X.

A latitude galáctica ( $b$ ) do objeto X é a distância angular neste círculo do equador galáctico a X, de  $-90^\circ$  no Pólo Galáctico Sul a  $+90^\circ$  no Pólo Galáctico Norte.

O ponto zero da longitude é o centro da galáxia.

A longitude galáctica ( $l$ ) do objeto X é a distância angular ao redor do equador galáctico, do centro da galáxia até o grande círculo que passa por X, medido para leste  $0-360^\circ$ .

Para converter entre coordenadas galácticas e equatoriais, desenhe o triângulo esférico com pontos em P (Pólo Norte Celestial), G (Pólo Norte Galáctico) e X; e aplique as regras do seno e do cosseno.



*Exemplo:*

O Pólo Norte Galáctico está em Ascensão Reta 12h49m, declinação  $+27^{\circ}24'$ . Qual é a inclinação do plano galáctico em relação ao equador celestial?

*Solução:*

A distância do Pólo Norte Celestial P ao Pólo Norte Galáctico G é apenas  $(90^{\circ} - \text{declinação de G}) = 62,6^{\circ}$ .



### 5.1.2 Populações estelares

As estrelas podem ser agrupadas em dois grupos:

- População I – estrelas novas
- População II – estrelas velhas

Water Baade, em 1944, propôs esta separação com base nos seus estudos na galáxia de Andromeda.

As observações foram feitas durante a Segunda Guerra Mundial, quando a ausência de poluição luminosa permitiu uma clareza sem precedentes.

#### **Estrelas da População I:**

- Características: Essas estrelas são mais jovens, ricas em metais e encontradas no disco da galáxia, incluindo os braços espirais. Exemplos: O Sol é uma estrela da População I.
- Principais conclusões: Estas estrelas têm uma metalicidade mais elevada porque se formaram a partir de gás que foi enriquecido por gerações anteriores de estrelas através de supernovas e outros processos.

#### **Estrelas da População II:**

- Características: Essas estrelas são mais antigas, pobres em metais e estão localizadas no halo ou bojo da galáxia e em aglomerados globulares.
- Principais conclusões: Elas representam algumas das primeiras gerações de estrelas, formadas a partir de material primordial com um mínimo de elementos pesados.

#### **Base Observacional:**

As observações de Baade revelaram diferenças na emissão de luz das estrelas em diferentes regiões das galáxias:

- Nos braços espirais de Andrômeda, observou estrelas da População I, que eram mais brilhantes e azuis.
- No halo e nos aglomerados globulares, identificou estrelas da População II, que eram mais escuras e mais vermelhas.

### 5.1.3 Formação das populações de estrelas

A matéria a partir da qual a Via Láctea se formou era constituída por:

- Hidrogénio      76%
- Hélio            23%

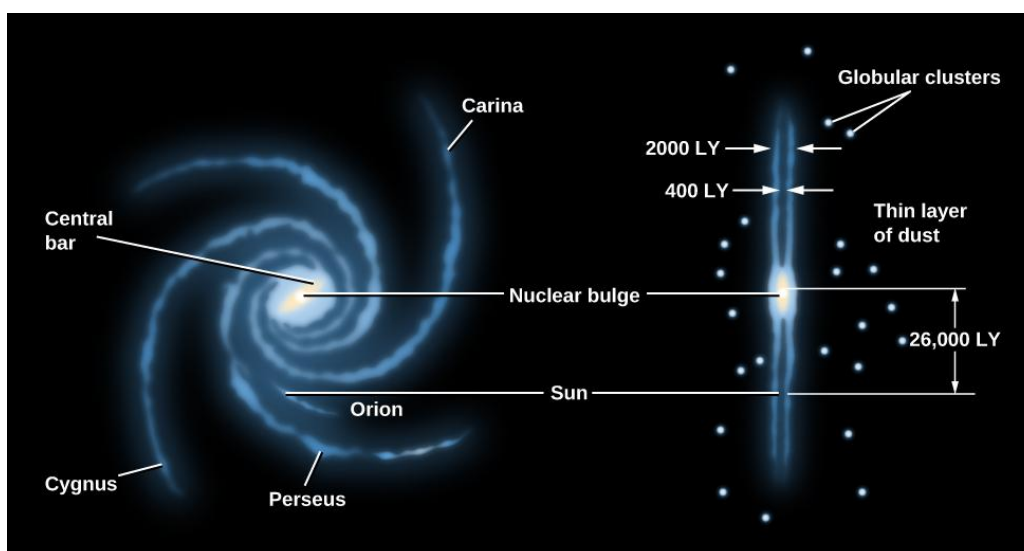
Na sua fase inicial a Via Láctea era esférica e as primeiras estrelas que se formaram estavam distribuídas esfericamente à volta do centro galáctico.

Estas estrelas são, portanto, as estrelas

- mais velhas e
- têm muito poucos elementos pesados – População II.

Mais tarde, formou-se o disco galáctico e as estrelas formadas são, portanto, as estrelas

- mais novas, formadas à partir da matéria do disco (gás e poeira), e
- têm maior quantidade de elementos pesados – População I.



Agora, enquanto uma estrela brilha

- Há fusão nuclear e  $H \rightarrow He \rightarrow$  elementos mais pesados.

Logo a abundância relativa de elementos pesados aumenta na composição da estrela.

Se, mais tarde, a estrela emite alguma desta matéria no espaço interestelar, esta contém grandes quantidades de He e elementos mais pesados.

Posteriormente

as estrelas que são formadas a partir da matéria interestelar vão ter uma quantidade significativa de elementos pesados.

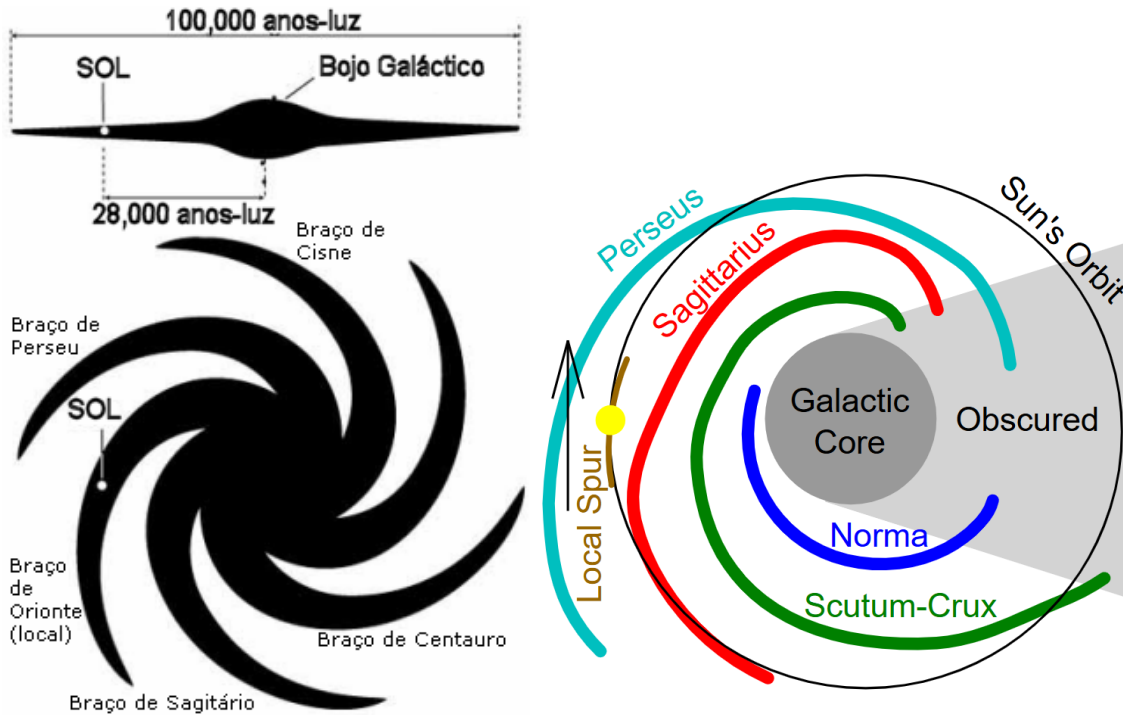
Então, as estrelas com abundâncias mais altas de elementos pesados vão ser mais novas

As características principais das populações estelares:

<b>Característica</b>	<b>População I</b>	<b>População II</b>
<b>Elementos pesados</b>	Rica em metais (alta metalicidade) 2-3 %	Pobre em metais (baixa metalicidade) < 1%
<b>Tipos de estrelas</b>	Estrelas jovens, geralmente azuis e de alta massa (ex.: O e B)	Estrelas mais velhas, geralmente vermelhas e de baixa massa
<b>Estrelas variáveis</b>	Cefeidas clássicas	RR Lyrae, variáveis de período longo, nebulas planetárias, novae
<b>Localização</b>	Disco galáctico (braços espirais)	Halo galáctico e bojo central
<b>Distância do centro</b>	Menor, órbitas regulares < 200 pc	Maior, órbitas elípticas e excêntricas > 400 pc
<b>Velocidade</b>	Baixa velocidade relativa ao disco $10 \text{ Km s}^{-1}$	Alta velocidade relativa ao disco $> 20 \text{ Km s}^{-1}$
<b>Idade</b>	Jovem (milhões a poucos bilhões de anos) $< 1.5 \times 10^9 \text{ a}$	Velha (mais de 10 bilhões de anos) $> 1.5 \times 10^9 \text{ a}$

### 5.1.4 A rotação da Via Láctea

A forma da Galáxia sugere que está em rotação à volta do núcleo Galáctico:



As características principais da Via Láctea são

Propriedade	Disco fino	Disco grosso	Halo estelar (exclui matéria escura)
Massa estelar	$4 \times 10^{10} M_{\text{Sun}}$	Alguns por cento da massa fina do disco	$10^{10} M_{\text{Sun}}$
Luminosidade	$3 \times 10^{10} L_{\text{Sun}}$	Alguns por cento da luminosidade do disco fino	$8 \times 10^8 L_{\text{Sun}}$
Idade típica das estrelas	De 1 milhão a 10 bilhões de anos	11 bilhões de anos	13 bilhões de anos
Abundância de elementos mais pesados	Alto	Intermediário	Muito baixo
Rotação	Alto	Intermediário	Muito baixo

A Via Láctea consiste num

- disco fino contendo poeira, gás e estrelas jovens e velhas;
- um halo esférico contendo populações de estrelas muito antigas, incluindo estrelas variáveis RR Lyrae e aglomerados estelares globulares;
- um disco espesso e mais difuso com estrelas que têm propriedades intermediárias entre as da fina disco e o halo;
- uma protuberância nuclear em forma de amendoim de estrelas principalmente antigas ao redor do centro; e um buraco negro supermassivo bem no centro.

O Sol está localizado aproximadamente a dois terços do raio da galáxia ao seu centro, no Braço de Órion, a cerca de 26 000 ly do centro.

O Braço de Órion ou Braço Local é um braço espiral menor da Via Láctea.

O Sistema Solar, assim como quase todas as estrelas vistas a olho nu, estão dentro do Braço de Órion. Está localizado entre o Braço de Sagitário e o Braço de Perseus, dois dos quatro maiores braços espirais da Via Láctea.

Podemos medir a velocidade orbital do Sol à volta do centro Galáctico:

$$- v_{\odot} = 220 \text{ Km / s}$$

e o período é

$$- p_{\odot} = 240 \times 10^6 \text{ anos}$$

Como a Terra tem, pelo menos,  $5 \times 10^9$  a,

$$N_{\text{órbitas}} = \frac{5 \times 10^9}{240 \times 10^6} \approx 20 \text{ voltas}$$

Assumindo que a massa  $M_G$  da Galáxia atua como uma massa pontual situada no centro da Galáxia, podemos escrever

$$\frac{v_{\odot}^2}{R_{\odot}} = \frac{GM_G}{R_{\odot}^2}$$

ou

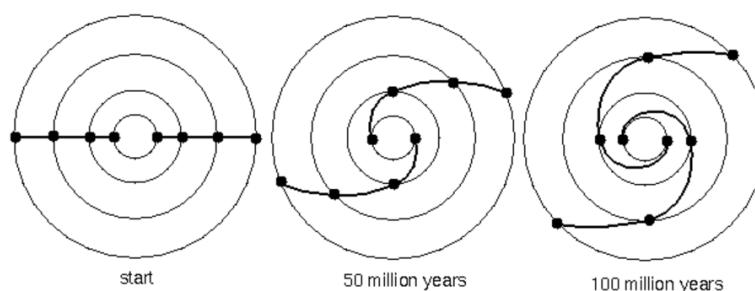
$$M_G = \frac{v_{\odot}^2 R_{\odot}}{G} = \frac{(2.2 \times 10^5)^2 \cdot (2.6 \times 10^{20})}{6.7 \times 10^{-11}} = 1.9 \times 10^{41} \text{ kg} = 10^{11} M_{\odot}$$

Portanto, assumindo que, em média, a massa de uma estrela é  $\sim M_{\odot}$ , a Galáxia tem  $\sim 10^{11}$  estrelas.

Agora, os braços espirais da Via Láctea são produzidos por efeitos dinâmicos

- são manifestações de uma onda de densidade em rotação no disco:

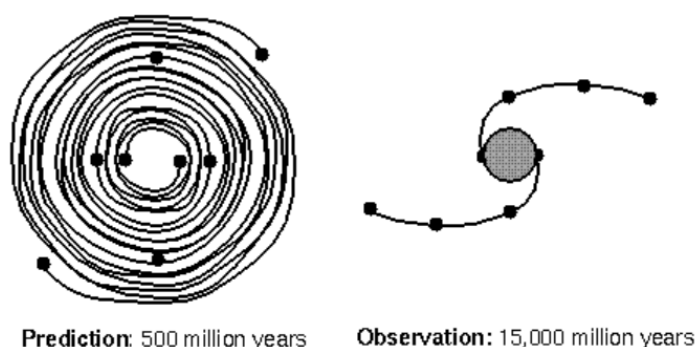
Vamos considerar 8 estrelas na Via Láctea



A rotação diferencial fornece uma maneira fácil de produzir um padrão espiral no disco.

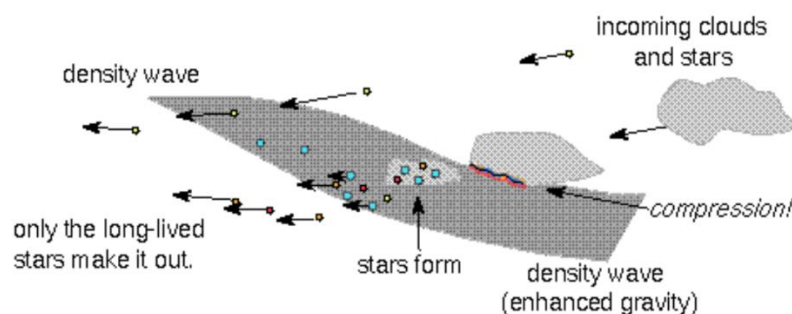
A rotação diferencial é a diferença nas velocidades angulares de diferentes partes do disco galáctico, de modo que as estrelas mais próximas do centro completam uma fração maior de sua órbita em um determinado momento.

Mas a rotação diferencial é muito eficiente na formação dos braços espirais. Depois de apenas 500 milhões de anos, os braços deveriam estar tão enrolados que a estrutura desapareceria:



As observações de outras galáxias contradizem isto: os braços espirais nas galáxias espirais raramente têm mais de duas voltas. As galáxias têm bilhões de anos, então o padrão espiral deve ser uma característica duradoura.

É, de facto, uma onda de densidade:



A região espiral gira cerca de metade da velocidade das estrelas e o gás que entra na onda espiral é comprimido que dá origem à formação de estrelas.

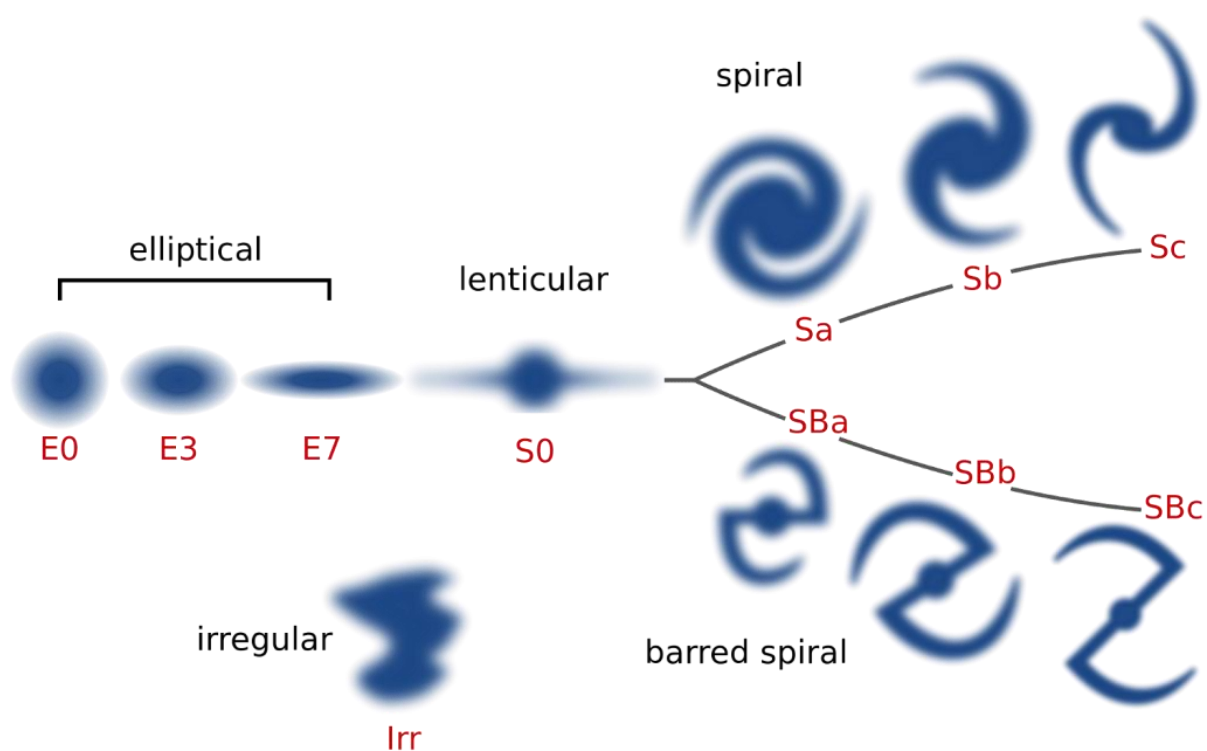
## 5.2 As galáxias para além da Via Látea

Edwin Hubble (1899 – 1953) descobriu que as galáxias não fazem parte da Via Látea, mas são antes, entidades próprias.

Há

- Galáxias regulares - 95% de todas as galáxias
- Galáxias elípticas - 25%
- Galáxias espirais - 70%
- Galáxias irregulares - 5%

Classificou as galáxias assim:



Exemplos:

1. Galáxia elíptica



NGC 2865

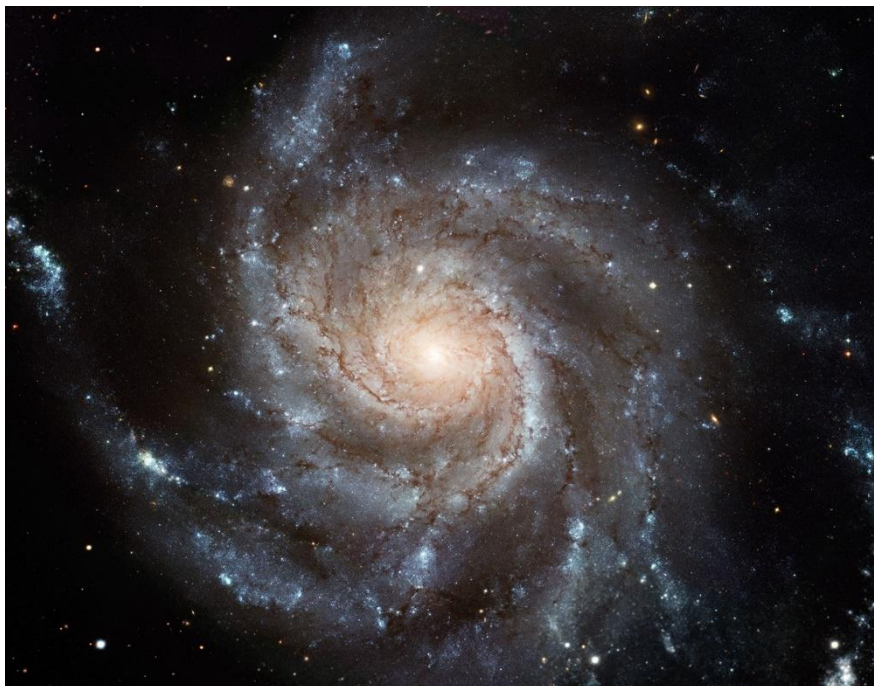
2. Galáxia lenticular



NGC 4886



### 3. Galáxia espiral



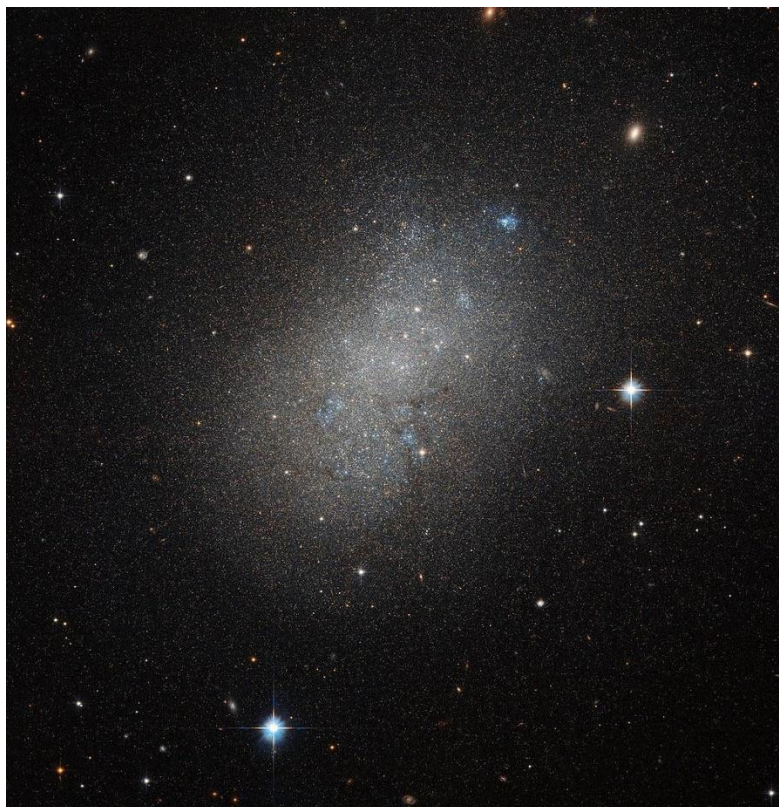
Spiral galaxy M101, also known as the Pinwheel galaxy

### 4. Galáxia espiral barrada



NGC 1530

## 5. Galáxia irregular



NGC 5264

### Problemas

1. Considere a rotação da Galáxia.
  - (a) Deduza uma expressão para a velocidade de rotação em termos do raio do centro galáctico.
  - (b) Represente graficamente a velocidade de rotação em km/s versus raio em kpc.
  - (c) Calcule o período de rotação a  $R = 5, 8.5$  e  $20$  kpc;
  - (d) Qual é a velocidade de escape a  $R = 8.5$  kpc?
 (Assuma que a massa da Galáxia é  $10^{12} M_{\odot}$ )
  
2. A nossa Galáxia e a galáxia de Andromeda (M31) são os maiores membros do Grupo Local. Se estas duas galáxias formarem um sistema binário e se moverem uma à volta da outra em orbitas circulares, calcule
  - (a) a distância ao centro de massa do sistema da nossa Galáxia
  - (b) o período orbital.
 ( $M_{M31} = 3 \times 10^{11} M_{\odot}$ ,  $M_{VL} = 4 \times 10^{11} M_{\odot}$ ,  $D_{VL-M31} = 690$  kpc)

Faça os mesmos cálculos para a orbita do par de galáxias M32 e M31.  
 ( $M_{M31} = 3 \times 10^{11} M_{\odot}$ ,  $M_{M32} = 2 \times 10^9 M_{\odot}$ ,  $D_{M32-M31} = 30$  kpc)

## 6. O Universo

### 6.1 Expansão do Universo e a Lei de Hubble

Em 1912, Vesto M. Slipher descobriu que a maioria das galáxias está a afastar-se da nossa galáxia.

Edwin Hubble foi o primeiro a reconhecer que a velocidade de recessão é proporcional à distância (a Lei de Hubble).

Considere uma galáxia a uma distância  $r$ .

Se esta galáxia emitir uma linha espectral com comprimento de onda  $\lambda_0$  e detetarmos esta linha a  $\lambda$ , então o desvio para o vermelho é

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$$

Se esta mudança for interpretada como um desvio de Doppler então

$$v = \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}\right) c = Zc$$

Hubble reconheceu que

$$v = Hr$$

onde  $H$  é a constante de Hubble,  $v$  é a velocidade (Km/s),  $r$  é a distância (Mpc). A unidade da constante de Hubble é Km/s · Mpc.

Uma estimativa da constante de Hubble é: 50 Km/s · Mpc

Se todas as galáxias se estão a afastar de nós de acordo com a lei de Hubble, então, visto de qualquer outra galáxia é possível observar exatamente o mesmo efeito de afastamento. Isto significa que o universo se encontra em expansão.

Podemos determinar a distância a uma galáxia a partir do seu desvio para o vermelho usando

$$r = \frac{zc}{H}$$

Por exemplo, se  $z = 0.1$

$$r = \frac{0.1 \cdot 3 \times 10^5}{50} = 600 \text{ Mpc}$$

Se uma galáxia sempre apresentou a mesma velocidade

$$r = vt$$

Comparando com

$$\frac{1}{H} = \frac{r}{v}$$

então

$$t = \frac{1}{H}$$

- o tempo de Hubble

e

$$t = 2 \times 10^{10} \text{ a} \quad \text{com } H = 50 \text{ Km/s} \cdot \text{Mpc}$$

$$t = 1 \times 10^{10} \text{ a} \quad \text{com } H = 100 \text{ Km/s} \cdot \text{Mpc}$$

Uma forma simples de determinar o tamanho do universo é assumir que a galáxia mais longínqua tem uma velocidade  $v = c$ . Assim

$$r_H = \frac{c}{H} = \frac{3 \times 10^5}{50} = 600 \text{ Mpc} = 2 \times 10^{26} \text{ m}.$$

Vamos considerar agora um modelo simples do universo.

Considere o movimento de uma galáxia visto por um observador a uma distância  $r$ . O movimento é unicamente afetado pela força de atração gravitacional de todas as galáxias que se encontram no interior de uma esfera.

A energia total desta galáxia é

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \text{constante}$$

Agora, considere a energia crítica  $E = 0$ , então

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}(Hr)^2 - G\rho \frac{4\pi}{3}r^2$$

e assim

$$\rho = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

Agora se

$$\rho > \frac{3H^2}{8\pi G}$$

- o Universo não se expande sem limite

mas se

$$\rho < \frac{3H^2}{8\pi G}$$

- o Universo expande-se sem limite

Agora

$$\rho = \frac{3H^2}{8\pi G} = 5 \times 10^{-27} \text{ kg m}^{-3}$$

este valor compara-se a

$$\rho = 3 \times 10^{-28} \text{ kg m}^{-3}$$

que significa que o nosso universo não tem limite!

### Problemas

1. A linha de absorção estelar Ca II K tem um comprimento de onda de 393,3 nm. Numa galáxia particular, a linha Ca II K é observada a um comprimento de onda de 410,0 nm. Qual é a distância da galáxia, assumindo
  - (a)  $H = 50 \text{ Km/s} \cdot \text{Mpc}$
  - (b)  $H = 100 \text{ Km/s} \cdot \text{Mpc}$
2. Se a constante de Hubble for  $H = 50 \pm 5 \text{ Km/s} \cdot \text{Mpc}$ , quais são os intervalos permitidos para o tempo de Hubble, o tamanho do Universo e a densidade de massa crítica?