



Universidade de Évora - Escola de Ciências e Tecnologia

Mestrado em Matemática e Aplicações

Área de especialização | Matemática e Aplicações

Dissertação

Sistemas Iterativos - Aplicações à sala de aula de S. Tomé

Edumila da Trindade Fernandes

Orientador(es) | Fernando Manuel Lucas Carapau

Sara Luísa Dimas Fernandes

Évora 2019





Universidade de Évora - Escola de Ciências e Tecnologia

Mestrado em Matemática e Aplicações

Área de especialização | Matemática e Aplicações

Dissertação

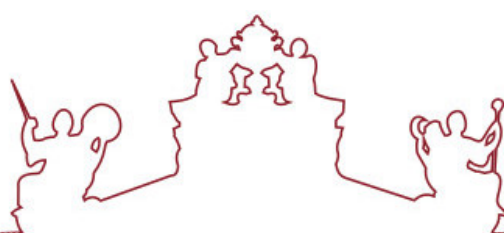
Sistemas Iterativos - Aplicações à sala de aula de S. Tomé

Edumila da Trindade Fernandes

Orientador(es) | Fernando Manuel Lucas Carapau
Sara Luísa Dimas Fernandes

Évora 2019





A dissertação foi objeto de apreciação e discussão pública pelo seguinte júri nomeado pelo Diretor da Escola de Ciências e Tecnologia:

- Presidente | Sara Maria de Azevedo e Sousa Marques Pereira (Universidade de Évora)
- Vogal | Carlos Correia Ramos (Universidade de Évora)
- Vogal | Fátima Maria Filipe Pereira (Universidade de Évora)
- Vogal-orientador | Fernando Manuel Lucas Carapau (Universidade de Évora)

Dedicatória

A Deus, porque sem ele nada seria possível;
A Salustina Pedro Rodrigues da Trindade, minha saudosa mãe. Tudo o que hoje sou,
devo-o a esta grande mulher;
Ao meu marido que está sempre do meu lado;
À minha família;
e claro;
aos meus amigos.

Agradecimentos

Agradeço a todos que direta ou indiretamente participaram da elaboração deste trabalho.

Aos meus parentes mais próximos, minha avó, minha mãe, meu marido, meus filhos, aos meus irmãos pela paciência nas horas mais difíceis.

À Prof. Dra. Sara Fernandes, ao Prof Dr. Fernando Carapau, a Prof. Dra. Dulce Gomes e a Prof. Dra. Maríilha Pires pelos conhecimentos, colaboração e empenho em tornar este trabalho uma realidade.

À Universidade de Évora pela oportunidade de realizar essa formação.

Aos colegas do mestrado, pela ajuda durante este período.

Peço desculpas se nesta hora esqueço de alguém, mas saiba que você também foi muito importante.

Resumo

Com este trabalho pretendemos abordar o assunto sobre os sistemas iterativos numa perspectiva de os apresentar em sala de aula nas aulas de matemática para o ensino secundário em S. Tomé de forma a que os alunos tenham o devido conhecimento e compreensão sobre um tema que ocupa um lugar de destaque na matemática em geral.

Iniciamente vamos fazer uma introdução aos conceitos fundamentais dos sistemas dinâmicos para depois podermos compreender conceitos elementares da dinâmica associada aos sistemas iterativos de funções, tais como, o conceito de ponto fixo, ponto periódico, órbitas, entre outros conceitos. Conhecer alguns aspetos da dinâmica de funções afins, quadráticas e cúbicas através de exemplos concretos.

Para entender este conceito que está presente no dia a dia dos alunos, é necessário que se eles dêem conta disso para identificarem-no de modo a incorporarem esse conhecimento como ponto fundamental na cultura científica que terão pela vida inteira. Há vários elementos da vida quotidiana dos alunos que são descritos por sistemas não lineares, sem que os mesmos tenham conhecimento dessa realidade. Com esse fim, é feita uma abordagem teórica dos conteúdos de forma a tornar os exemplos sólidos em termos conteúdo científico. A introdução dos conceitos é feita de modo a possibilitar a sua leitura por um público mais geral, onde se incluem os alunos mais interessados e curiosos pelo tema dos sistemas dinâmicos.

Ao longo do trabalho a exposição dos assuntos em estudo é acompanhado, sempre que possível, de exemplos e ilustrações gráficas. Para tal, foi utilizado o software XMaxima (software livre) e outras aplicações interactivas disponíveis na Internet.

Palavras-chave: Sistemas Iterativos, Fractais, Ensino da Matemática.

Abstract

Iterative Systems - Application to the Classroom in São Tomé

The objective of this work is the study of the topic Iterative Systems - Application to the Classroom in São Tomé, with the fundamental purpose of its implementation in the classroom or other environment of Secondary Education. In this work we will introduce the fundamental concepts of dynamic systems. To understand elementary concepts of the dynamics associated with iterative systems of functions, such as the concept of fixed point, periodic point, orbits and so on. To learn some aspects of the dynamic of the first-degree polynomial function, quadratic and cubic.

To fully understand such a concept - which is present in the students' everyday life - the students need to be able to identify it, and then incorporate it so that scientific culture may become a daily aspect of their future lives. There are several elements of students' everyday life that are described by non-linear systems. Thus, a theoretical approach to content is made. The concepts are introduced in a way that enables them to be understood by a more general audience, namely which includes the most interested and curious students in the subject. The study is accompanied, whenever possible, by examples and graphic illustrations. For that, Maxima software (free software) and other interactive applications available on the Internet were used.

Keywords: Iterative Systems, Fractals, Teaching Mathematics

Conteúdo

Resumo	6
Abstract	7
1 Introdução	9
1.1 Organização	9
1.2 Motivação	10
1.3 Nota introdutória	10
2 Elementos de iteração	15
2.1 Retratos de fase	15
2.2 Pontos fixos ou periódicos, Órbitas e Órbita Periódica	17
2.3 Pontos pré-fixos e pontos pré-periódicos	22
2.4 Conjunto estável de um ponto e conjunto estável do infinito	22
3 Teoria do caos	24
3.1 A diferenciabilidade nos sistemas dinâmicos	24
3.2 Sensibilidade às condições iniciais	26
3.3 Expoente de Lyapunov	27
3.3.1 Análise da propagação do erro	28
3.3.2 Expoente de Lyapunov	31
3.4 Transitividade topológica	33
3.5 Densidade dos pontos periódicos	35
3.6 Teorema de Sharkovsky	36
4 Aplicações	41
4.1 Aplicações na sala de aula	41

4.2	Aplicação da iteração em sala de aula através do desenho	45
5	Considerações Finais	47
5.1	Conclusões	47

Capítulo 1

Introdução

1.1 Organização

De seguida vamos apresentar a forma como o trabalho será estruturado. De referir que todo o trabalho teve como referência a bibliografia apresentada, em particular teve por base o trabalho de Helena P. Salustiano, ver [7].

Capítulo 1: vamos abordar o conceito de sistemas dinâmicos discretos, o estudo de funções, suas iteradas e suas modelações que nos permitem estudar por exemplo, modelos de previsão de crescimento.

Capítulo 2: vamos abordar os retratos de fase e ilustrar com gráficos, dinâmicas de um sistema e um movimento gerado por um ponto inicial, quando sujeito a sucessivas iterações de uma função. Também iremos abordar o tema de pontos fixos ou periódicos, órbitas periódicas e, ainda, demonstrações da existência de pontos fixos, pontos pré-fixos e pré-periódicos. Em sequência, vamos abordar o conceito de conjunto estável de um ponto e conjunto estável do infinito.

Capítulo 3: vamos apresentar a definição de Caos segundo Robert Devaney, a diferenciabilidade nos sistemas dinâmicos de uma função diferenciável. Posteriormente, vamos demonstrar a existência de caos para a função logística. Também falaremos de ponto fixo atrativo e ponto fixo repulsivo e sensibilidade às condições iniciais. Por fim, não poderíamos deixar de falar do expoente de Lyapunov, que dá muita importância ao estudo de erro inicial e da sua análise, do sistema caótico, do ponto de acumulação, conjunto fechado e conjunto aberto.

Capítulo 4: vamos apresentar aplicações específicas para abordar na sala de aula relativos aos sistemas iterativos, relacionando com funções específicas, onde mostraremos alguns exemplos que poderão ser aplicados numa sala de aula em S. Tomé, mesmo sabendo das limitações disponíveis.

Capítulo 5: apresentaremos as considerações finais e conclusão do trabalho.

Capítulo 6: todo o trabalho apresentado foi desenvolvido com base na Bibliografia.

Algumas aplicações matemáticas foram feitas através do *software XMaxima*, versão 16.04.2 <https://wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/>.

1.2 Motivação

Com este trabalho pretendemos abordar o assunto relativo aos Sistemas Iterativos em termos científicos e pedagógicos, recorrendo para tal a exemplos concretos com o objectivo da implementação do tema no ensino secundário em S. Tomé. Esperamos contribuir desta forma para o despertar do interesse dos alunos para o estudo e conhecimento dos sistemas dinâmicos. O objetivo deste trabalho é o da elaboração de um plano estruturado para a introdução deste assunto nos programas oficiais de matemática em S. Tomé e Príncipe e não só, pretendemos, ainda, aprofundar a parte científico com o estudo do caos determinístico, explorando conceitos específicos como pontos periódicos, pontos fixos, as características atrativas ou repulsivas dos mesmos. Estudar, ainda, as noções de sensibilidade às condições iniciais e transitividade topológica ou mixing, compreender a noção do expoente de Lyapunov o seu cálculo e, ainda, o fenómeno da duplicação do período.

Na vertente pedagógica serão elaboradas actividades para a sala de aula de Matemática, ou outro contexto ao nível do ensino secundário, estudando a sua integração nos conteúdos programáticos da disciplina.

Dado que a implementação/divulgação do tema Sistemas Iterativos no ensino secundário ser um objectivo inerente e intrínseco a este trabalho, tentaremos, ao longo mesmo, ilustrar sempre que possível os conceitos em estudo.

Para tal e sempre que possível, serão produzidas imagens com recurso ao software livre XMaxima, que contém um conjunto específico de comandos para o estudo dos sistemas dinâmicos. O uso deste tipo de software é importante e relevante face ao crescente progresso da tecnologia informática.

1.3 Nota introdutória

A origem o estudo do Caos se deve a Henri Poincaré matemático francês do século XIX. Dando origem desta forma a uma das áreas de estudo mais recentes da Matemática. Na sequência do seu trabalho sobre equações diferenciais não lineares, Poincaré sugeriu que não seria necessário conhecer a forma das soluções das equações em estudo para se poder concluir sobre as características do sistema em estudo, características qualitativas tais como a periodicidade das órbitas ou a estabilidade do sistema. Surgiu assim, a teoria qualitativa ou geométrica das equações diferenciais, base da investigação dos Sistemas Dinâmicos.

Contudo, foi apenas em 1961, com Edward Lorenz, que se retomou a ideia da existência do Caos matemático, onde não poderíamos deixar de referir a propriedade que caracteriza os sistemas dinâmicos caóticos, conhecida por sensibilidade às condições iniciais ou dependência sensível das condições iniciais, e para quem é leigo em matemática é possível caracterizar esse fenómeno por *diferenças mínimas na entrada podem tornar-se facilmente diferenças enormes na saída*.

Surpreendentemente, a presença de comportamentos caóticos é observável em sistemas dinâmicos definidos por equações tão simples como, por exemplo, a equação do tipo $y = rx(1 - x)$, chamada de função logística. Esta equação é objecto de estudo no ensino secundário, mas não tem sido explorada do ponto de vista do caos determinístico.

Um sistema dinâmico discreto de forma clássica, pode ser caracterizado por uma função composta consigo própria as vezes que forem necessárias. Por exemplo, consideremos a função $f(x) = -x^3$. Se compusermos f consigo mesma, vamos obter:

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = -(-x^3)^3 = x^9.$$

Continuando a iterar de forma sucessiva, vem:

$$f^3(x) = (f \circ f \circ f)(x) = (f \circ f^2)(x) = -(x^9)^3 = -x^{27}$$

$$f^4(x) = (f \circ f \circ f \circ f)(x) = (f \circ f^3)(x) = -(x^{27})^3 = x^{81}$$

\vdots

$$f^n(x) = (f \circ f^{n-1})(x) = (-1)^n x^{3^n}, \text{ sendo } n \text{ um número natural.}$$

Por consequência podemos colocar a seguinte questão: Seja um número real x , qual é o $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x)$? ou, de um modo mais geral, perguntamos: Que propriedades tem a sucessão $x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots, f^n(x)$

Para não induzir em erro com conceitos matemáticos, a notação f^n representa a função f composta consigo mesma $n-1$ vezes e não a n -ésima potência de f ou a n -ésima derivada de f . Por conseguinte, chamamos dinâmica da função ao comportamento dos pontos sob iteração da função.

Visualizemos estas questões de outro modo. Suponhamos que cada um de nós vive em algum lugar na reta real e que a nossa morada é dada pelo número real em que a nossa casa se encontra. Por exemplo, a minha casa cujo endereço é dado pelo simétrico do cubo do meu endereço atual. Isto é, eu aplico a função $f(x) = -x^3$ ao meu endereço atual para obter o novo endereço. Assim, como presentemente moro no 2, no próximo ano estarei no $f(2) = -2^3 = -8$. No ano a seguir irei mudar-me para $f(-8) = -(-8)^3 = 512$.

Ainda que viva muitos anos é óbvio que nunca morarei no mesmo sítio duas vezes. De facto, em cada ano o valor absoluto do meu endereço será cada vez maior e mudar-me-ei de um lado para o outro do zero.

Assim, se iniciarmos no ponto 2, então $f^n(2)$ cresce sem limitação em valor absoluto e oscila de um lado do 0 para outro. O que acontece se começarmos noutra sítio?

Suponhamos que partimos do ponto $1/2$. Então, no próximo ano estaremos em $f(1/2) = -1/8$.

No ano seguinte estaremos no $f(-1/8) = f^2(1/2) = 1/512$ e n anos depois estaremos no $f^n(1/2) = (-1)^n \times (1/2)^{3^n}$. Assim, cada ano mudamo-nos de um lado para o outro de 0, mas estaremos cada vez mais próximo dele.

De um modo geral, se o nosso endereço inicial for x_0 , o novo endereço após n anos será dado por $f^n(x_0) = (-1)^n \times x_0^{3^n}$.

Se $|x_0| > 1$, temos $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f^n(x_0)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |x_0|^{3^n} = \infty$. Em valor absoluto $f^n(x_0)$ cresce sem limitação e o factor $(-1)^n$ faz com que $f^n(x_0)$ oscile de um lado do 0 para outro.

Se $0 < |x_0| < 1$, então $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = 0$. Portanto, enquanto $f^n(x_0)$ muda de um lado do 0 para o outro, o seu valor aproxima-se tanto mais de zero á medida que n é cada vez maior.

Em termos de escolha da casa, aquele que tiver como endereço um número menor do que 1 em valor absoluto será preferível a um que tenha como endereço um valor maior do que 1, pois com o decorrer do tempo não termos que nos mudar para muito longe em cada ano.

Vejam os que acontece para os endereços -1, 0 e 1. Note-se que $f(-1) = 1$ e $f(1) = -1$, ou seja, -1 e 1 formam um ciclo periódico. Deste modo, se morássemos no 1 poderíamos fazer um acordo com a pessoa que está no -1 e deixarmos alguns dos nossos pertences em cada um dos endereços, uma vez que voltaríamos sempre no ano seguinte.

É claro que se vivêssemos no número 0, não teríamos que nos mudar já que 0 é fixo por f (uma existência estável, mas quiçá maçadora).

Por conseguinte, um sistema dinâmico discreto consiste, basicamente, numa função e suas iteradas. Dado um sistema dinâmico, pretendemos saber como evolui cada ponto sob a iteração da função, onde uns se afastam sem limitação, outros que se aproximam mais e mais de 0 e dos que oscilam periodicamente entre si e um ponto que se mantém sempre x_0 .

Com o prosseguimento do estudo, veremos que outras possibilidades ainda podem surgir.

Usámos a função $f(x) = -x^3$ para determinar a localização da nossa próxima casa, iterando a função estamos em condições de saber onde estaremos num qualquer outro ano. Ou seja, funções e as suas iteradas podem ser usadas para modelar problemas práticos. De seguida alguns exemplos a ter em conta e relevantes sobre os assuntos abordados.

Exemplo 1.3.1. *Suponhamos que se pretende criar um modelo matemático que descreva a dimensão de uma população de coelhos, que vive algures em campo aberto. Este é um problema clássico. Por observação estima-se que uma pequena população inicial de coelhos cresce aproximadamente 10% cada ano. Assuma-se que começamos com x_0 coelhos e que queremos determinar o número de coelhos da população no n -ésimo ano. Representaremos este número por x_n .*

Temos, então: $x_1 = x_0 + 0.1x_0 = 1.1x_0$

$$x_2 = x_1 + 0.1x_1 = 1.1x_1$$

\vdots

$$x_{k+1} = x_k + 0.1x_k = 1.1x_k$$

Portanto, $x_{k+1} = p(x_k)$ com $p(x) = 1.1x$.

Assim,

$$x_1 = p(x_0)$$

$$x_2 = p(x_1) = (p \circ p)(x_0) = p^2(x_0)$$

$$x_3 = p(x_2) = (p \circ p^2)(x_0) = p^3(x_0)$$

⋮

$$x_n = p^n(x_0)$$

Por conseguinte, para determinarmos a dimensão da população de coelhos após n anos, aplicamos n vezes a função $p(x) = 1.1x$ a x_0 . É fácil concluir que $p^n(x_0) = (1.1)^n \times x_0$. Assim, se começarmos com mais do que um coelho, a população dos animais estará sempre a aumentar. Por exemplo, se o número inicial de coelhos for 8, ao fim de 10 anos a população terá cerca de 21 animais. De acordo com este modelo, os mesmos 8 coelhos iniciais darão origem a uma população com 54 coelhos, aproximadamente, em 20 anos, 939 em 50 anos e 110245 em 100 anos. Dadas as dimensões axíguas do terreno, esta última estimativa é manifestamente enorme. Apesar de a dinâmica deste modelo ser fácil de perceber, cada iteração cresce 10% sobre a iterada anterior. A capacidade/fidelidade de previsão deste modelo a longo prazo é limitada, pois a população continua a aumentar sem limitação.

Em geral, modelos que iteram funções do tipo $p(x) = rx$ são denominadas modelos exponenciais. Tal como exemplificado anteriormente, a capacidade de previsão destes modelos em populações é limitada, uma vez que, com o decorrer do tempo a dimensão da população prevista será tão grande que deixa de ser realística. Um modelo mais adequado á previsão do crescimento de uma população, por ter em conta as limitações desse crescimento, é do tipo $h(x) = rx(1 - x)$.

Os modelos que se baseiam nesta função, função logística, assumem que há um limite para a dimensão da população e consideram a atual dimensão da mesma é uma fracção desse valor limite. Assim, a dimensão de qualquer população é representada por um número do intervalo $[0, 1]$. Por exemplo 0.25 indica que a população é 25% do seu valor limite. Se x_0 é a população no primeiro período, então a população no segundo período será $h(x_0) = rx_0(1 - x_0)$. É o factor $(1 - x)$ que distingue os modelos logísticos dos modelos exponenciais. á medida que x se aproxima de 1, $(1 - x)$ aproxima-se de 0.

Portanto, á medida que x aumenta, a população cresce a um ritmo mais lento, quando x for suficientemente grande, a população começa a diminuir. Apliquemos este modelo á população de coelhos anterior.

Exemplo 1.3.2. *Recordemos a população de coelhos que vive no campo. Suponhamos que o limite populacional é 1000, ou seja quando houver 1000 coelhos, a população é tão numerosa e o ecossistema tão sobrecarregado com aquele número que não há capacidade de os manter e a população começa a morrer. Consideremos, por exemplo, a equação $h(x) = 1.112x(1 - x)$. Lembramos que, neste modelo, uma população de 100 é representada por $100/1000$ ou 0.1 e a população de 1000 é representada por $1000/1000$ ou 1. obviamente $h(1) = 0$ o que significa que o modelo prevê que se a população chega aos 1000 coelhos, então morerá. Note-se, também, que $h(0.9) = 0.1$ ou seja, num ano, de acordo com o modelo, uma população inicial grande de 900 coelhos diminui drasticamente para 100. Tal como fizemos anteriormente, suponhamos que aquela colónia de coelhos tem inicialmente apenas 8 elementos ($x_0 = 0.008$).*

Aplicando sucessivamente $h(x)$ temos:

$x(1) = h(0.008) = 0.009$, ao fim de um ano há, aproximadamente, 9 coelhos;

$x(2) = h^2(0.008) = 0.01$, ao fim de dois anos há cerca de 10 coelhos;

$x(3) = h^3(0.008) = 0.011$

$x(4) = h^4(0.008) = 0.012$

á medida que o número de iterados aumenta, vem

$x_{10} = h^{10}(0.008) = 0.02$, ao fim de 10 anos há cerca de 20 coelhos,

$x_{20} = h^{20}(0.008) = 0.043$; em 20 anos a população tem por volta de 43 coelhos,

$x_{100} = h^{100}(0.008) = 0.101$

Assim, a população continua a crescer a uma taxa de 10% aproximadamente em cada ano, para um número pequeno da população inicial, mas a taxa do crescimento abrandará á medida que a população vai sendo cada vez em maior número.

Capítulo 2

Elementos de iteração

2.1 Retratos de fase

Os retratos de fase permitem-nos obter uma interpretação concreta da dinâmica de um sistema, do movimento gerado por um ponto inicial quando sujeito a sucessivas iterações de uma função. Por conseguinte, um retrato de fase é considerado um diagrama que representa possíveis posições iniciais com setas que nos indicam o movimento dessas posições com base nas iteração da função. Estes assuntos são clássicos, ver bibliografia. De seguida alguns exemplos elucidativos:

Exemplo 2.1.1. *Seja $f(x) = x^2$. Na figura seguinte encontra-se uma representação gráfica da função f e da função identidade (Fig. 2.1), o domínio da função é o conjunto dos números reais que representamos pela recta real. Sabemos que:*

- $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$, significa que 0 e 1 são pontos fixos e representamo-los por dois pontos na recta real em 0 e em 1 (Fig. 2.2);
- $f(-1) = 1$, implica que $f^n(-1) = 1$, para todo o $n \geq 1$, visualizamos esta situação com uma seta de -1 para 1;

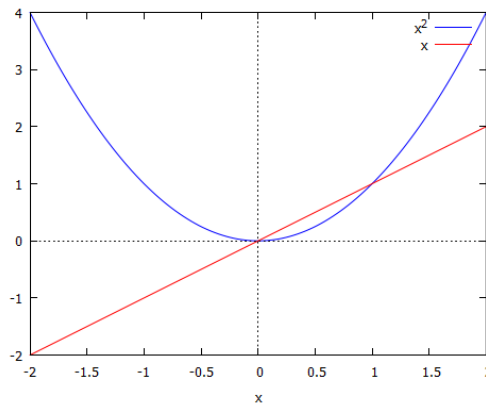


Figura 2.1: Função $f(x) = x^2$.

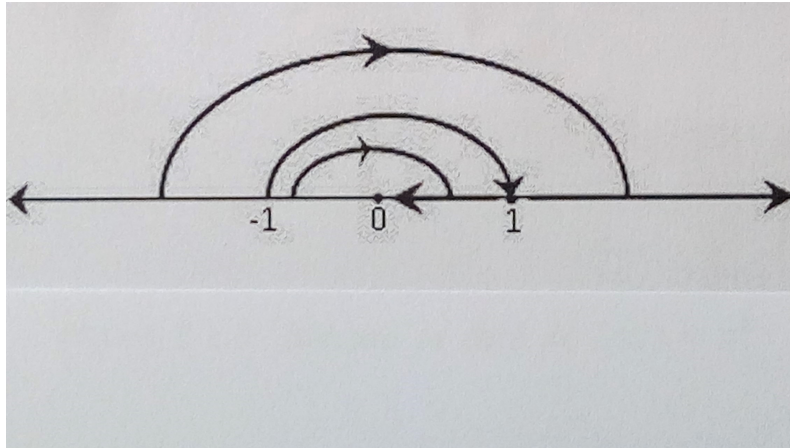


Figura 2.2: Retrato de fase da função $g(x) = x^2$ (ver referência [7]).

- Se $0 < x < 1$, então $f^n(x)$ tende para 0 á medida que n aumenta-desenhamos uma seta de 1 para 0;
- Se $x > 1$, $f^n(x)$ tende para $+\infty$ com n cada vez maior, desenhamos uma seta de 1 para $+\infty$, na recta real;
- Se $-1 < x < 0$, então $0 < f^n(x) < 1$ e tende para zero á medida que n tende para $+\infty$, representamos por uma seta que liga o intervalo inicial de números negativos ao respetivo intervalo de números positivos;
- Se $x < -1$, tem-se $f^n(x) > 1$ e, portanto, a tender para $+\infty$, ligamos por uma seta o intervalo de números menores do que (-1) , para o respetivo intervalo de números maiores do que 1 que, sob iteração da função, tende para $+\infty$.

O retrato da fase para a função $f(x) = x^2$ é o diagrama da Figura 2.2 que, de uma maneira simples mas clara, nos leva a ter uma ideia do fluxo do movimento resultante das iterações sucessivas da função.

Exemplo 2.1.2. Agora vamos analisar o retrato de fase da função definida por $g(x) = -x^3$. De domínio \mathbb{R} , podemos visualizar uma representação gráfica da função f e o retrato de fase.

O que sabemos sobre a função g :

- $g(0) = 0$, o que significa que 0 é ponto fixo de g ;
- $g(-1) = 1$ e $f(1) = -1$, isto é, -1 transforma-se em 1 e volta;
- transformar-se em -1 na segunda iteração, assumindo alternadamente estes dois valores nas secessivas iterações da função;
- $|x| > 1$, então as secessivas iteradas de x oscilam entre negativos e positivos, assumindo valores cada vez maiores em valor absoluto;

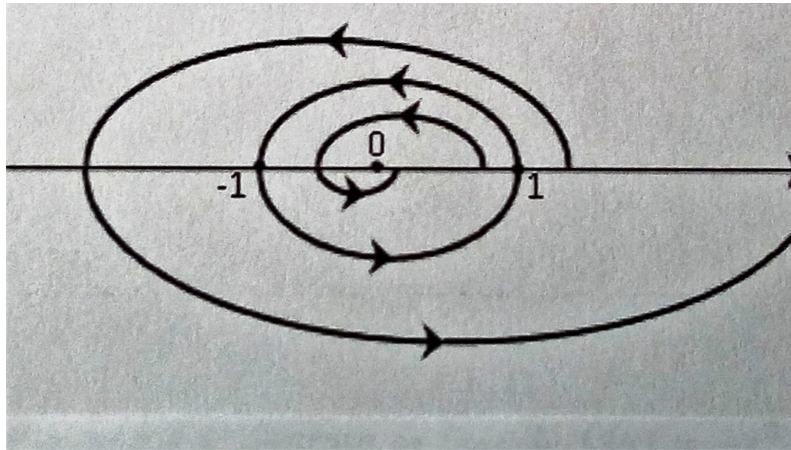


Figura 2.3: Retrato de fase da função $f(x) = -x^3$ (ver referência [7]).

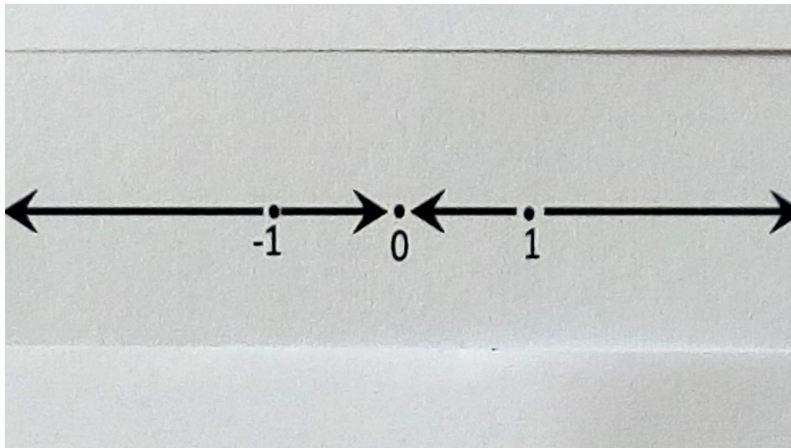


Figura 2.4: Retrato de fase da função $j(x) = x^3$ (ver referência [7]).

- $|x| < 1$, então os valores sucessivamente obtidos por g oscilam à esquerda e à direita de 0, aproximando-se cada vez mais de zero.

Outros exemplos relevantes (com base na bibliografia):

2.2 Pontos fixos ou periódicos, Órbitas e Órbita Periódica

De forma clássica apresentamos a seguinte definição:

Definição 2.2.1. *Seja f uma função real de variável real e $c \in Df$ (Df é o domínio de f). Diz-se que c é um ponto fixo de f se e só se $f(c) = c$.*

Por conseguinte, geometricamente os pontos fixos de uma função real de variável real são as abscissas dos pontos de interseção do gráfico da função f com a bissectriz dos quadrantes ímpares. De seguida alguns exemplos a ilustrar o conceito:

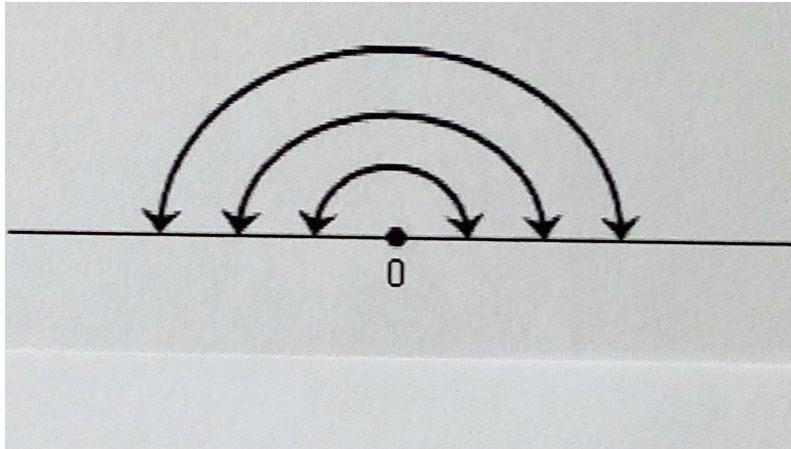


Figura 2.5: Função $f(x) = -x$ (ver referência [7]).

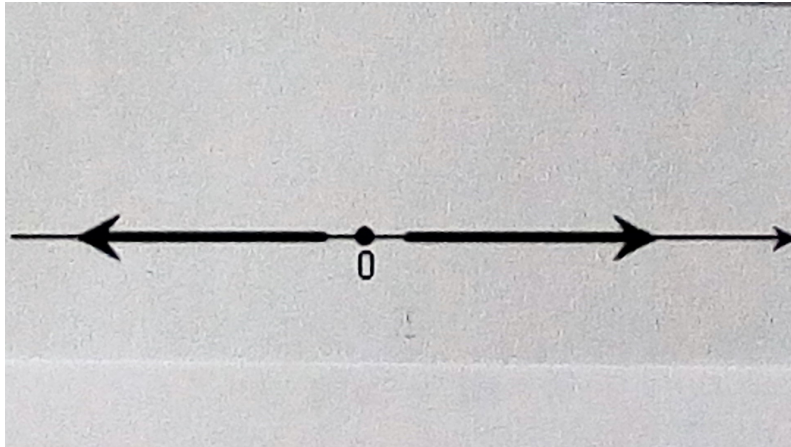


Figura 2.6: Função $g(x) = 2x$ (ver referência [7]).

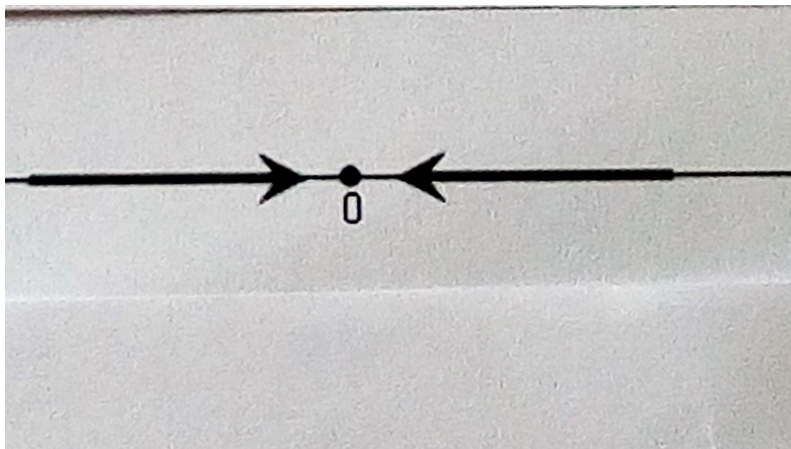


Figura 2.7: Retrato de fase da função $h(x) = \frac{x}{3}$ (ver referência [7]).

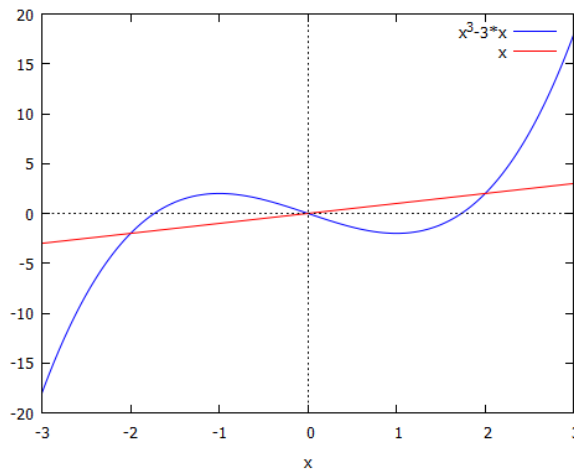


Figura 2.8: Função $f(x) = x^3 - 3x$.

Exemplo 2.2.1. *Seja f uma função definida em \mathbb{R} por $f(x) = x^3 - 3x$. Com base em cálculo simples, esta função tem três pontos fixos, a saber: -2 , 0 e 2 .*

Exemplo 2.2.2. *Consideremos, agora, a função definida por $g(x) = e^x$. Dado que a equação $g(x) = x$ é impossível em \mathbb{R} , esta função não tem pontos fixos. Por conseguinte, em termos gráficos não existe intersecção do gráfico da função g com a recta de equação $y = x$. De seguida um teorema importante a considerar:*

Teorema 2.2.1. *Seja I um intervalo fechado e $f : I \rightarrow I$ uma função contínua. Então: f tem pelo menos um ponto fixo em I .*

Demonstração. A demonstração é clássica, mas importante para a apresentar, ver bibliografia. Seja $I = [a, b]$. Se $f(a) = a$ ou $f(b) = b$ o teorema fica demonstrado. Suponhamos que $f(a) \neq a$ e que $f(b) \neq b$ e consideremos a função g definida por $g(x) = f(x) - x$. Esta função é contínua em $[a, b]$ por ser a diferença de funções contínuas (a função f e a função identidade); por outro lado, $g(a) > 0$ e $g(b) < 0$. Com efeito, $g(a) = f(a) - a$ e como $f(a)$ pertence $[a, b]$, então $g(a) > 0$, também $g(b) = f(b) - b$ e como $f(b)$ pertence $[a, b]$ vem $g(b) < 0$. Satisfeitas as condições do teorema dos valores intermédios ou teorema de Bolzano, sabemos que existe um c em $[a, b]$ tal que $g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) - c = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$ o que define c como ponto fixo de f .

□

De seguida vamos considerar f uma função real de variável real. Diz-se que b e c são pontos periódicos de período a de f se $f(b) = c$ e $f(c) = b$. Consideremos, a título exemplificativo, a função definida em \mathbb{R} por $y = -3/2x^2 + 7/2x$. O ponto 2 é transformado em 1 e 1 é transformado em 2, que volta a ter novamente imagem 1 e assim sucessivamente, por conseguinte: 1 e 2 são pontos periódicos de período 2. O conjunto 1, 2 denomina-se uma órbita periódica da função. Por outro lado, como, $y(1) = 2$ e $y(2) = 1$, vem que $y(y(1)) = 1$ e $y(y(2)) = 2$, o que significa que 1 e 2 são pontos fixos de y^2 , como se pode ver, uma vez

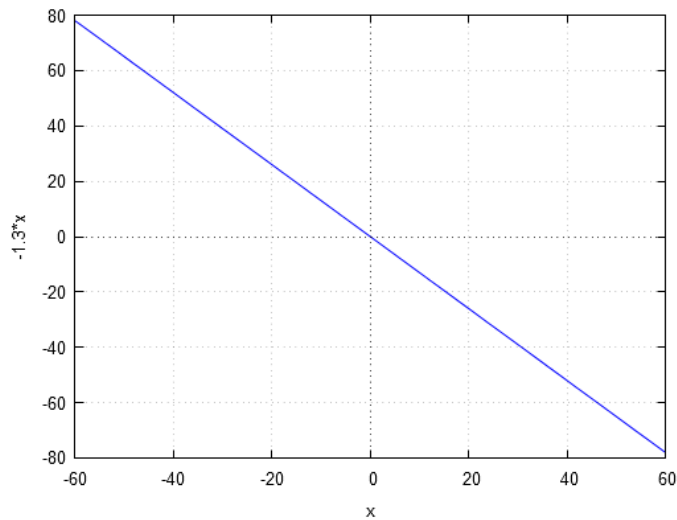


Figura 2.9: Função $f(x) = -1.3x$.

que $y^2(1) = 1$ e $y^2(2) = 2$. Se $f(a) = b$, e $f(b) = c$ e $f(c) = a$, diremos que a , b e c são pontos periódicos de período 3 de f . Por conseguinte,

$$f(f(f(a))) = f^3(a) = a, \text{ isto é, } a \text{ é ponto fixo de } f^3$$

$$f(f(f(b))) = f^3(b) = b, \text{ isto é, } b \text{ é ponto fixo de } f^3$$

$$f(f(f(c))) = f^3(c) = c, \text{ o que significa que } c \text{ é ponto fixo de } f^3.$$

E, assim, o conjunto a, b, c denomina-se uma órbita periódica da função f . Por exemplo, consideremos a função definida por $y = -1.5x^2 + 5.5x - 2$.

Dado que $f(1) = 2$, $f(2) = 3$ e $f(3) = 1$ dizemos que 1, 2 e 3 são **pontos periódicos** de período 3 de f e que o conjunto 1, 2, 3 é uma **órbita periódica** ou ciclo de período 3 de f . Por outro lado, $f^3(1) = 1$, $f^3(2) = 2$ e $f^3(3) = 3$ ou seja 1, 2 e 3 são pontos fixos de f^3 . De seguida vamos apresentar o conceito de ponto periódico, um conceito relevante no nosso trabalho:

Definição 2.2.2. Dizemos que c é **ponto periódico** de período n de f se e só se $f^n(c) = c$ ou, equivalente, c é um ponto periódico de período n de f se c é um ponto fixo de f^n . Dizemos que n é o período primitivo do ponto periódico c se $f^n(c) = c$, mas $f^k(c) \neq c$ com $0 < k < n$, ou o que é o mesmo, n é o período primitivo de c se n é a menor ordem da iterada de f em que c é o ponto fixo. O conjunto formado por c ($c \in Df$) e por todas as iteradas de c denomina-se **órbita** de c . Assim, $\{c, f(c), f^2(c), f^3(c), \dots\}$ é a órbita de c . Se, em particular, c é um ponto periódico de período n de f , então aquele conjunto é finito e diz-se uma **órbita periódica** de c .

Tem-se:

Se c é um ponto periódico de período 2, então $c, f(c)$, é órbita periódica de c ;

Se c é um ponto periódico de período 3, então $c, f(c), f^2(c)$ é órbita periódica de período 3;

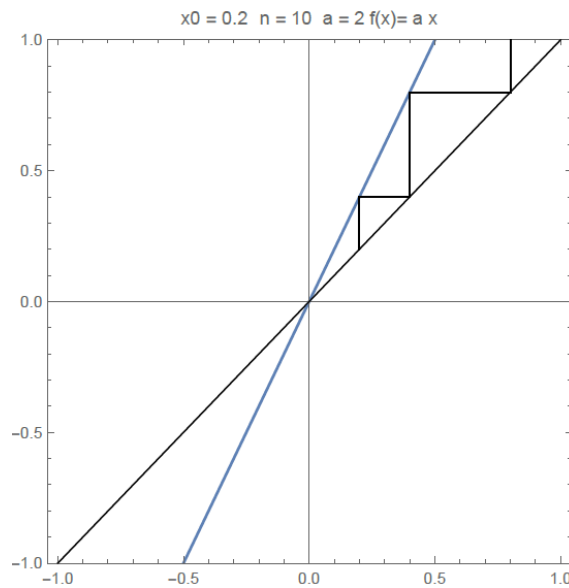


Figura 2.10: Órbita de $x_0 = 0.2$, para $n = 10$ iteração da função $f(x) = ax$, $a = 2$.

De uma forma geral, se c é um ponto periódico de período primitivo n , então $\{c, f(c), f^2(c), \dots, f^{n-1}(c)\}$ é órbita periódica de período n de c .

Iteração gráfica

Graficamente, a visualização da órbita gerada por um dado valor inicial permite-nos ter uma ideia da dinâmica do sistema em estudo.

Sob iteração de uma função f , o procedimento gráfico para obter os sucessivos valores da órbita $x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \dots$ consiste em:

- Considerar, num mesmo referencial, uma representação gráfica da função f (conhecido por iterador) e a bissectriz dos quadrantes ímpares, recta de equação $y = x$;
- A partir de x_0 traçar um segmento vertical até intersectar o gráfico de f . Por conseguinte, este ponto tem coordenadas $(x_0, f(x_0))$;
- A partir do último ponto, traçar um segmento horizontal até intersectar a bissectriz, transformando, assim, a imagem em objecto. Este ponto tem coordenadas, $(f(x_0), f(x_0))$;
- Repetir o processo a partir deste último ponto, traçando segmentos verticais até intersectar o gráfico e segmentos horizontais até a bissectriz, e assim sucessivamente.

Na figura 2.10 podemos verificar o comportamento da órbita gerada por x_0 svia iteração de um sistema linear do tipo $f(x) = ax$, onde $a > 0$.

2.3 Pontos pré-fixos e pontos pré-periódicos

De seguida vamos apresentar algumas definições relativas ao assunto, acompanhadas com exemplos específicos:

Definição 2.3.1. *Seja f uma função e $c \in Df$. Diz-se que c é um **ponto pré-fixo** de f quando existe um M tal que $f^{n+1}(c) = f^n(c)$, para todo $n \geq M$.*

Exemplo 2.3.1. *Considerando a função $f(x) = 4x(1 - x)$, tem-se $1/2 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$, ou seja, $1/2$ é um ponto pré-fixo pois ao fim de duas iterações de f fixa-se no ponto 0. Com efeito, para todo o $n \geq 2$, temos $f^{n+1}(1/2) = f^n(1/2) = 0$.*

De seguida a definição sobre ponto pré-periódico, um conceito importante e relevante nos assuntos em estudo.

Definição 2.3.2. *Diz-se que c é um **ponto pré-periódico** com período k se existe M tal que, para todo $n \geq M$ se tem $f^{n+k}(c) = f^n(c)$.*

Um exemplo ilustrativo:

Exemplo 2.3.2. *Para a função $g(x) = |x - 1|$ tem-se a sequência $-3 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow \dots$, o que significa que, após quatro iterações, (-3) cai numa órbita de período 2. Com efeito, para todo o $n \geq 4$, temos $g^{n+2}(-3) = g^n(-3)$.*

Definição 2.3.3. *Diz-se que c é um ponto periódico com período k se existe M tal que, para todo $n \geq M$ se tem $f^{n+k}(c) = f^n(c)$.*

Exemplo 2.3.3. *Considerando a função $g(x) = |x - 1|$ tem-se a sequência $-3 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow \dots$, o que significa que, após quatro iterações, (-3) cai numa órbita de período 2. Com efeito, para todo o $n \geq 4$, temos: $g^{n+2}(-3) = g^n(-3)$. Pode ver-se que $0 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$, o que significa que 0 e 1 são pontos periódicos de período 2 da função g . Considerando as primeiras iteradas para o valor inicial $x_0 = -3$ e a sua convergência para a órbita $\{0, 1\}$ podemos concluir que -3 é um **ponto pré-periódico** de g com período 2. Considerando a iterada de $g^4(g(x_0))$ fica claro a pré-periodicidade de $x_0 = -3$, visto que $g^4(-3) = 1$ e que 1 é ponto periódico de g . De notar que se $x \in [0, 1]$; então $g^4(x) = x$, ou seja, todos os pontos do intervalo $[0, 1]$ são **pontos fixos** de g^4 .*

2.4 Conjunto estável de um ponto e conjunto estável do infinito

Vamos considerar uma função f real de variável real e c um ponto periódico de f com período k . Caso a sucessão $f^k(x), f^{2k}(x), f^{3k}(x), \dots, f^{nk}(x), \dots$ convergir para c , então dizemos que a trajectória de x ($x \in Df$) tende assintoticamente para c . De seguida uma definição relevante:

Definição 2.4.1. *Seja c um ponto periódico de período k de uma função f . O conjunto de todos os pontos cuja trajectória se aproxima assintoticamente de c denomina-se conjunto estável de c e designa-se por $W^s(c)$. Simbolicamente*

$$W^s(c) = \{x \in Df : \lim_{n \rightarrow \infty} f^{nk}(x) = c(k \in \mathbb{N})\}$$

Se a sucessão $|x|, |f(x)|, |f^2(x)|, |f^3(x)|, \dots$, tende para $+\infty$, então a trajectória de x segue assintoticamente para infinito e o conjunto de todos estes pontos diz-se conjunto estável do infinito, e se representa por $W^s(\infty)$. De seguida um exemplo para ilustrar este conceito:

Exemplo 2.4.1. *Considerando uma função $f(x) = -x^3$ que tem dois pontos periódicos de período $2(-1 \vee 1)$ e um ponto fixo igual a 0. Então os conjuntos estáveis determinados por estes pontos são:*

$$W^s(0) =] - 1, 1[; W^s(-1) = -1; W^s(1) = 1 \text{ e, ainda,}$$

$$W^s(\infty) =] - \infty, -1[\cup] 1, +\infty[.$$

No exemplo assumimos que se um ponto pertence ao conjunto estável de um ponto periódico, então não pertence ao conjunto estável de outro ponto periódico. Esta constatação é evidenciada no seguinte teorema, o qual é relevante:

Teorema 2.4.1. *Os conjuntos estáveis de dois pontos periódicos distintos não se intersectam.*

Demonstração. De seguida vamos apresentar uma demonstração por redução ao absurdo. Considerando por hipótese dois pontos periódicos e distintos de uma função f , de períodos k_1 e k_2 , pretendemos mostrar que (a nossa tese) $W^s(c_1) \cap W^s(c_2) = \emptyset$. Por conseguinte, ao negar a tese assumimos que $W^s(c_1) \cap W^s(c_2) \neq \emptyset$, ou seja

$$x \in W^s(c_1) \cap W^s(c_2), \text{ isto é, } x \in W^s(c_1) \text{ e } x \in W^s(c_2).$$

Então, para cada $\epsilon > 0$ existem M_1 e M_2 tais que para

$n \geq M_1$ se tem $|f^{nk_1}(x) - c_1| \leq \frac{\epsilon}{2}$ e para $n \geq M_2$ se tem $|f^{nk_2}(x) - c_2| \leq \frac{\epsilon}{2}$, escolhendo agora $M = \max\{M_1, M_2\}$ verifica-se simultaneamente, para $n \geq M$, que $|f^{nk_1}(x) - c_1| \leq \frac{\epsilon}{2}$ e $|f^{nk_2}(x) - c_2| \leq \frac{\epsilon}{2}$.

Via desigualdade triangular, $|c_1 - c_2| = |c_1 - f^{nk_1 k_2} + f^{nk_1 k_2} - c_2| \leq |c_1 - f^{nk_1 k_2}| + |f^{nk_1 k_2} - c_2| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$.

Mas, sendo verdade que para cada $\epsilon > 0$ se tem $|c_1 - c_2| < \epsilon$, então $c_1 = c_2$, o que é impossível, por hipótese, obtendo assim uma contradição. Por consequência, temos: $W^s(c_1) \cap W^s(c_2) = \emptyset$. \square

Capítulo 3

Teoria do caos

De seguida vamos introduzir a definição clássica de caos que se deve a Robert L. Devaney, para mais detalhe ver a bibliografia.

Definição 3.0.1. *Considerando função $f:D \rightarrow D$ é caótica se verificarem simultaneamente as seguintes condições:*

- a) os pontos periódicos de f são densos em D ;*
- b) f é topologicamente transitiva;*
- c) f apresenta sensibilidade às condições iniciais.*

Para demonstrar a existência de caos para a função logística, vamos ter em conta funções por troços e a conjugação topológica. Estudaremos, ainda, conceitos relativos associados com a definição introduzida, a qual se deve a Robert L. Devaney.

3.1 A diferenciabilidade nos sistemas dinâmicos

De seguida um teorema relevante que aborda a existência de unicidade de um ponto fixo.

Teorema 3.1.1 (Unicidade de um ponto fixo). *Seja f uma função diferenciável em $[a, b]$ e $f([a, b]) \subset [a, b]$ e $|f'(x)| < 1$, para todo o valor de $x \in [a, b]$. Então, por consequência, temos:*

- a) f tem um único ponto fixo em $[a, b]$;*
- b) $x \neq y \Rightarrow |f(x) - f(y)| < |x - y|, \forall x, y \in [a, b]$.*

Demonstração. De seguida vamos estruturar a forma como vamos apresentar a demonstração:

Hipótese: f é uma função diferenciável no intervalo $[a, b]$ com $|f'(x)| < 1$ para $\forall x \in [a, b]$, considerando $x, y \in [a, b]$ com $x \neq y$, sem perda de generalidade, vamos considerar $x < y$.

Tese: $|f(x) - f(y)| < |x - y|$.

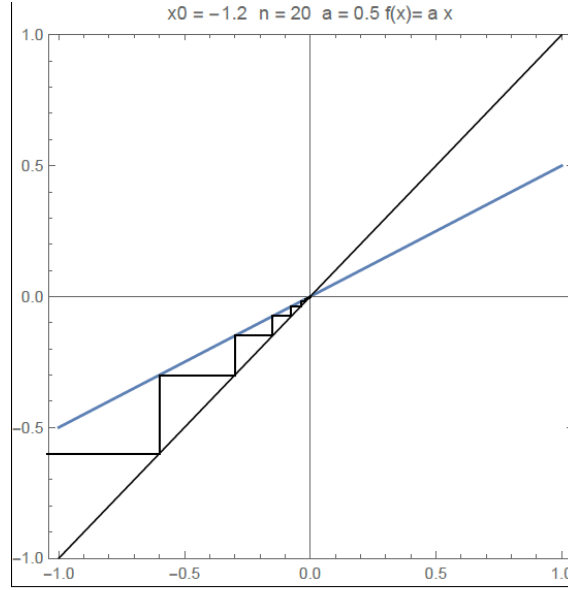


Figura 3.1: Função $f(x) = 0.5x$ com $x_0 = -1.2$ para $n = 20$; 0 é um ponto fixo atrativo ou atrator.

Pelo facto de f ser diferenciável em $[a, b]$, então f é diferenciável em $[x, y]$ (com $[x, y]$ contido em $[a, b]$). Pelo teorema do valor médio de Lagrange (ver [15]) fica garantida a existência de, pelo menos, um ponto $c \in [x, y]$ tal que $f'(c) = (f(y) - f(x))/(y - x)$. Por hipótese temos $|f'(c)| < 1$, então vem

$|(f(y) - f(x))/(y - x)| < 1 \Leftrightarrow |f(y) - f(x)| < |y - x| \Leftrightarrow |x - f(y)| < |x - y|$, como pretendíamos demonstrar. Continuando na demonstração, temos que provar a seguinte tese: f tem um único ponto fixo. Vamos recorrer ao absurdo. Sabemos que uma função contínua em $[a, b]$ (de reforçar que $f([a, b])$ está contido em $[a, b]$) tem, pelo menos, um ponto fixo nesse intervalo. Então, como a função dada está nestas condições, seja p esse ponto fixo. Basta agora provar que esse ponto p é único. Se houvesse outro ponto fixo, q , ter-se-ia $|p - q| = (\text{definição de ponto fixo})$,

$|f(p) - f(q)| < (\text{demonstração anterior}) < |p - q|$, o que é impossível. Assim, a função tem, um único ponto fixo no intervalo $[a, b]$. \square

Por consequência, temos o teorema:

Teorema 3.1.2. *Seja f uma função diferenciável e tal que a sua derivada, f' , é uma função contínua. Seja p um ponto fixo de f .*

Se $|f'(p)| < 1$, então existe uma vizinhança de p contida no conjunto estável de p ($W^s(p)$);

Se $|f'(p)| > 1$, então existe uma vizinhança de p na qual todos os pontos distintos de p deixam de pertencer aquela vizinhança, sob iteração de f .

De seguida uma definição a ter em conta relativa a um ponto fixo.

Definição 3.1.1. *Seja c um ponto fixo de f . Se $|f'(c)| \neq 1$, então c diz-se um ponto fixo hiperbólico de f . Se $|f'(c)| < 1$, c diz-se um ponto fixo atrativo ou atrator; se $|f'(c)| > 1$,*

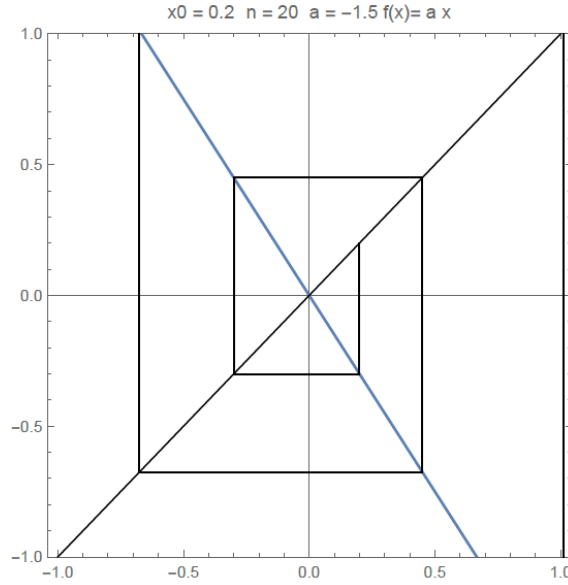


Figura 3.2: Função $f(x) = -1.5x$ com $x_0 = 0.2$ para $n = 20$; 0 é um ponto fixo repulsivo ou repulsor.

c diz-se um ponto fixo repulsivo ou repulsor. Se $|f'(c)| = 1$, então c diz-se um ponto fixo não hiperbólico ou um ponto fixo neutro de f .

De seguida um exemplo ilustrativo.

Exemplo 3.1.1. Considerando $f(x) = 0,7x$, temos $|f'(0)| < 1$ e 0 é um ponto fixo atractivo e é visível a convergência para 0 de uma órbita gerada, como por exemplo, $x_0 = -4,3$, ver figura 3.1. Para o caso $f(x) = -1,3x$, temos $|f'(0)| > 1$ e 0 é um ponto repulsivo, ver figura 3.2.

Para terminar esta secção, apresentamos:

Definição 3.1.2. Seja f uma função diferenciável e c um ponto periódico de f com período primitivo n . Se $|(f^n)'(c)| \neq 1$, então c diz-se um ponto periódico hiperbólico de f . No caso de se ter $|(f^n)'(c)| < 1$, c é um ponto periódico atractivo ou atractor de f ; se $|(f^n)'(c)| > 1$, c é um ponto periódico repulsivo ou repulsor de f . Se $|(f^n)'(c)| = 1$, c é um ponto periódico não hiperbólico ou neutro de f .

3.2 Sensibilidade às condições iniciais

Esta secção, é relevante pois vamos estudar condições associadas com as condições iniciais relativas a um sistema dinâmico. Por conseguinte:

Definição 3.2.1. Dizemos que uma função $f : D \rightarrow D$ é sensível às condições iniciais se existe pelo menos um valor $\delta > 0$ tal que, para cada $x(x \in D)$ e cada $\epsilon > 0$ existe um $y(y \in D)$ e um número natural n tal que $|x - y| < \epsilon$ e $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$.

Em termos concretos, a sensibilidade às condições iniciais implica que, se estivermos a usar uma função iterada sucessivamente para modelar um comportamento a longo prazo e a função for sensível às condições iniciais, então um pequeno erro numa medição inicial pode resultar em grandes diferenças de erro, ou seja, entre o comportamento/resultado esperado. Este aspecto é muito importante dado que, em termos físicos, qualquer medida comporta erros e a possibilidade da existência de sensibilidade/dependência do modelo às condições iniciais porá em causa a utilidade do próprio modelo.

Pode visualizar-se a iteração gráfica da função definida por $y = 1.5x$, sobre um valor inicial (esquerda) e sobre um intervalo de valores iniciais (direita); um pequeno desvio é ampliado durante o processo iterativo pelo factor 1.5, mas o erro acumulado é previsível e controlado. Apesar da ampliação de pequenos desvios iniciais, o sistema não é caótico. Observa-se o fenómeno da sensibilidade as condições iniciais de uma forma inequívoca, visível a considerável ampliação de um pequeno intervalo inicial, após algumas iterações da função. Continuando o processo iterativo aquele intervalo inicial expandir-se-ia por todo o intervalo unitário, foi considerado um intervalo inicial de menor amplitude, sendo já observável a sua ampliação ao fim de algumas iteradas. Sensibilidade as condições iniciais há pequeno desvio que é ampliado substancialmente no decorrer da iteração, outra há iteração de um intervalo de valores iniciais ainda mais pequeno. Pelos exemplos apresentados percebemos que uma função sensível as condições iniciais amplia por iteração qualquer intervalo arbitrariamente pequeno de valores iniciais, o que reforça a ideia da importância/utilidade de um determinado modelo matemático, pela sua fiabilidade. A sensibilidade as condições iniciais só por si não implica imediatamente a presença de caos. Com efeito, no primeiro exemplo qualquer desvio é ampliado no decorrer das sucessivas iterações, mas é o de forma previsível e controlada; o sistema apresentado é sensível as condições iniciais, mas não é, de todo, caótico. No segundo caso o modelo apresenta sensibilidade as condições iniciais e sugere um sistema caótico.

De seguida vamos estudar cada uma das situações expostas do ponto de vista numérico.

3.3 Expoente de Lyapunov

Podemos apresentar a seguinte pergunta: Qual a influência das sucessivas iterações de uma função sobre um erro inicial? Como medir esse desvio/erro?

De seguida, apresentamos alguns exemplos para sistemas dinâmicos lineares e logísticos.

Seja o sistema dinâmico linear definido por $y = kx$ (considerando $k > 1$) e x_0 um ponto inicial. Ao fim de n iterações temos $x_n = k^n x_0$. Se considerarmos a existência de um erro inicial $\epsilon = E_0$, o nosso primeiro elemento a transformar será:

$$v_0 = x_0 + \epsilon \text{ e temos}$$

$$v_1 = y(x_0 + \epsilon) = k(x_0 + \epsilon) \text{ e o erro obtido no final da primeira iteração é de}$$

$$E_1 = v_1 - x_1 = k(x_0 + \epsilon) - kx_0 = k\epsilon$$

$$v_2 = y(v_1) = k^2(x_0 + \epsilon); \text{ o erro obtido no final da segunda iteração é de}$$

$$E_2 = v_2 - x_2 = k^2(x_0 + \epsilon) - k^2x_0 = k^2\epsilon$$

$e_n \equiv \text{Erro inicial} = 0.001$			
$(x_{n+1}) = f(x_n)$	$f(x_n + e_n) - f(x_n)$	iterada	$\frac{1}{n \ln(e_n/e_0)}$
0,1	0,002	1	0,693147181
0,2	0,004	2	0,693147181
0,4	0,008	3	0,693147181
0,8	0,016	4	0,693147181
1,6	0,032	5	0,693147181
3,2	0,064	6	0,693147181
6,4	0,128	7	0,693147181
12,8	0,256	8	0,693147181

Tabela 3.1: $f(x) = 2x$, $x_0 = 0.1$, $\epsilon = E_0 = 0.001$

\vdots

$v_n = y(v_{n-1}) = k^n(x_0 + \epsilon)$; é simples constatar que o erro é agora $E_n = k^n \epsilon$

Como $k > 1$ é fácil perceber que, ao fim de n iteradas, o desvio inicial ϵ é ampliado k^n vezes, e assim temos um erro considerável que não podemos ignorar. Na tabela 3.1 encontram-se os valores relativos as iteradas sucessivas de um modelo linear com $k = 2$ ($y = 2x$), $x_0 = 0.1$ e $\epsilon = E_0 = 0.001$. Concretamente, na 8ª iterada o erro obtido é igual a $2^8 \times 0.001 = 0.256$.

Por conseguinte ao fim de 12 iteradas o erro seria igual a $4.096 = 2^{12} \times 0.001$. Assim, num sistema dinâmico linear o desvio pode ser tão grande quanto se queira, o que é preocupante. Mas, podemos verificar que este um erro pode ser controlado. Em cada iterada sabemos perfeitamente qual o desvio relativamente ao valor esperado. Consideremos, o modelo logístico $y = ax(1 - x)$ com $a = 4$ e um valor inicial $x_0 = 0.202$. Vejamos o que se passa ao introduzir um pequeno desvio aquele valor inicial. Tomemos um erro igual a $0.000001 = \epsilon$ e acompanhemos a evolução do valor absoluto do desvio ($E_n = |v_n - x_n|$) em cada etapa da iteração (ver tabela 3.2). De referir que para as primeiras iteradas de $v_0 = x_0 + \epsilon = 0.202001$ o erro mantém-se é pequeno, próximo de zero, apesar de, em valor absoluto, aumentar. A partir de uma certa ordem, aquele valor absoluto do desvio passa a assumir valores muito maiores e desordenados, apresentando erráticos. Esta situação é característica dos sistemas caóticos.

3.3.1 Análise da propagação do erro

A característica da sensibilidade de um sistema as condições iniciais é uma qualidade que caracteriza os sistemas caóticos. Como quantificar essa maior ou menor sensibilidade do sistema? Ou seja, perante uma pequeníssima alteração as condições iniciais de um sistema num determinado ponto, como medir a propagação do erro cometido?

Uma das técnicas para medir a propagação/evolução do erro é comparar, em cada etapa, os valores reais da função e os do erro. Por exemplo, no caso do iterador linear

$e_n \equiv \text{Erro inicial} = 0.000001$			
$(x_{n+1}) = f(x_n)$	$ f(x_n + e_n) - f(x_n) $	iterada	$\frac{1}{n \ln(e_n/e_0)}$
0,202	2,384E-06	1	0,868778071
0,644784	2,76134E-06	2	0,507857772
0,916150373	9,19303E-06	3	0,739481719
0,307275467	1,41734E-05	4	0,662842362
0,851429017	3,98485E-05	5	0,737016725
0,505990583	1,90337E-06	6	0,107271187
0,999856452	7,61132E-06	7	0,289948035
0,000574111	3,04105E-05	8	0,426848668
0,002295125	0,000121088	9	0,532945938
0,00915943	0,000475536	10	0,616444241
0,03630214	0,001764944	11	0,679624953
0,139937178	0,005096387	12	0,711357263
0,481419057	0,000861458	13	0,519894336
0,998618994	0,003433346	14	0,581520763
0,005516394	0,013534717	15	0,634200884
0,021943855	0,051030081	16	0,67751066
0,085849287	0,158656879	17	0,704382303
0,313916749	0,135499082	18	0,656484452
0,861492095	0,46529478	19	0,686864548
0,477293862	0,950517308	20	0,688238082
0,997937725	0,172454799	21	0,574185259
0,008232087	0,55949926	22	0,601581704
0,03265728	0,839665558	23	0,593076476
0,12636313	0,31031291	24	0,526889019
0,441581958	0,53019939	25	0,527240337
0,986349329	0,938451369	26	0,528922551
0,05385732	0,173298215	27	0,446769229
0,203826835	0,530739333	28	0,470786653

Tabela 3.2: $x_0 = 0.202$; $\epsilon = 0.000001$. A linha 17 realça a primeira iterada em que o erro acumulado é maior, em valor absoluto, do que 0.1.

$y = 2x$, com $x_0 = 0.1$ e $\epsilon = 0.001$, temos

$$\frac{E_n}{x_n} = \frac{2^n \epsilon}{2^n x_0} = \frac{\epsilon}{x_0} = \frac{0.001}{0.1} = 0.01 \text{ (constante).}$$

De uma forma geral, nos iteradores lineares $y = kx$ temos

$$\frac{E_n}{x_n} = \frac{k^n \epsilon}{k^n x_0} = \frac{\epsilon}{x_0} \text{ (constante).}$$

Ao valor assim calculado chamamos erro relativo. Por outro lado, avaliemos a propagação/evolução do erro relativamente ao inicialmente cometido. Analisando, novamente, os sistemas lineares ($y = kx, k > 1$), podemos verificar que, neste caso,

$$\left| \frac{E_n}{E_0} \right| = \left| \frac{k^n \times E_0}{E_0} \right| = k^n.$$

Considerando o iterador quadrático ($y = 4x(1 - x)$), lembramos que nas primeiras iterações o erro não apresentou grandes variações mas, a partir de uma certa altura, os valores absolutos dos desvios relativamente aos valores esperados variavam de forma irregular, tão depressa assumindo valores infinitesimais ora assumindo valores perto da unidade... Para estabelecermos alguma possível relação no que pretendemos estudar, façamos algumas experimentações com determinados valores iniciais (x_0) e erros cada vez mais pequenos. Repetindo a experiência descrita em Peitgen (ver bibliografia), tomámos para valores iniciais 0.202, 0.347 e 0.869 e considerando, para cada um destes valores, os erros 10^{-3} , 10^{-4} , 10^{-5} e 10^{-6} , registámos (ver tabela 3.3) a ordem da primeira iterada em que o erro acumulado, em valor absoluto, ultrapassou o valor de 0.1.

Verificamos que para um valor inicial igual a 0.202 e para um erro inicial igual a 0.001, foi na nona iterada que o erro acumulado ultrapassou o limite estabelecido de 0.1. Já para um erro inicial de 0.000001 (para o mesmo valor inicial) aquele limiar foi ultrapassado apenas na décima sétima iterada (ver tabela 3.2). Por conseguinte, verificamos que, num sistema linear, $\left| \frac{E_n}{E_0} \right| = k^n$, acontece pelo facto de, em cada iterada, o erro ser multiplicado por um factor k .

Supondo que esta relação se verifica para outros sistemas, ou seja, que o factor de ampliação do erro, em n passos, é k^n . Em consequência, se soubermos quanto é $\left| \frac{E_n}{E_0} \right|$ podemos afirmar que, em média, o erro cometido em cada passo foi ampliado pelo factor

$$k, \text{ com } k = \sqrt[n]{\left| \frac{E_n}{E_0} \right|} = \left| \frac{E_n}{E_0} \right|^{\frac{1}{n}}.$$

Assim, podemos obter uma expressão para determinação de k , aplicando logaritmos naturais a igualdade $\left| \frac{E_n}{E_0} \right| = k^n$. Surge, assim, a relação matemática $\ln \left(\left| \frac{E_n}{E_0} \right| \right) = \ln k^n$ que é equivalente a $\ln \left(\left| \frac{E_n}{E_0} \right| \right) = n \ln k$. Dividindo por n podemos escrever $\frac{1}{n} \ln \left(\left| \frac{E_n}{E_0} \right| \right) = \ln k$

de onde concluímos que $k = e^{\frac{1}{n} \ln \left(\left| \frac{E_n}{E_0} \right| \right)}$.

Os valores obtidos por $\frac{1}{n} \ln \left| \frac{E_n}{E_0} \right|$ podem observar-se na tabela 3.3 construída (coluna

x_0	Erro E_0	iterada - n	Erro E_n	$\frac{1}{n} \ln \left \frac{E_n}{E_0} \right $
0.202	0.001	9	0.25622	0.61623
0.202	0.0001	11	-0.12355	0.64720
0.202	0.00001	15	0.25730	0.67703
0.202	0.000001	17	0.15866	0.70438
0.347	0.001	7	-0.12331	0.68781
0.347	0.0001	11	-0.18555	0.68417
0.347	0.00001	15	0.31390	0.69028
0.347	0.000001	18	0.19490	0.67668
0.869	0.001	8	-0.25072	0.69054
0.869	0.0001	10	0.14068	0.72491
0.869	0.00001	13	0.11428	0.71876
0.869	0.000001	18	0.32095	0.70439

Tabela 3.3: Erros e iteradas.

da direita) e reparamos que são quantidades aproximadas de 0.7. Adoptando este valor obtemos $0.7 \approx \ln k \Leftrightarrow k \approx e^{0.7} \approx 2$. Assim, podemos assumir que pequenos erros duplicam, aproximadamente, em cada iteração do iterador quadrático definido por $y = 4x(1 - x)$.

Nota 3.3.1. *Reforcemos que esta duplicação aproximada ocorre apenas em média e quando os erros são suficientemente pequenos. Mais ainda, para alguns valores iniciais de x os pequenos erros iniciais não são ampliados, para outros valores iniciais aqueles erros quadruplicam. Por exemplo, para valores iniciais próximos de $x = 0.5$, o erro acumulado nas sucessivas iteradas é comprimido; para valores próximos dos extremos do intervalo unitário o erro é ampliado por factores até 4.*

De seguida vamos apresentar o expoente de Lyapunov, relevante para quantificar o crescimento do erro.

3.3.2 Expoente de Lyapunov

O resultado anterior está relacionado com o conceito de Expoente de Lyapunov $\lambda(x_0)$. Este valor indica-nos o crescimento médio do erro relativamente ao valor inicial x_0 . O método experimental dá-nos uma perspectiva sobre a propagação do erro por iterada, mas não é prático nem rigoroso e de complexa implementação em termos computacionais. Considerando outro processo. Assumindo que podemos trabalhar com erros iniciais E_0 , arbitrariamente pequenos. O factor de ampliação do erro total $\left| \frac{E_n}{E_0} \right|$ pode ser escrito pelo

$$\text{produto} \left| \frac{E_n}{E_{n-1}} \right| \times \left| \frac{E_{n-1}}{E_{n-2}} \right| \times \left| \frac{E_{n-2}}{E_{n-3}} \right| \times \dots \times \left| \frac{E_1}{E_0} \right|.$$

Por conseguinte, vem:

$$\frac{1}{n} \ln \left| \frac{E_n}{E_0} \right| = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{E_n}{E_{n-1}} \right| \times \left| \frac{E_{n-1}}{E_{n-2}} \right| \times \left| \frac{E_{n-2}}{E_{n-3}} \right| \times \dots \times \left| \frac{E_1}{E_0} \right|$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\ln \left| \frac{E_i}{E_{i-1}} \right| \right)$$

Questão pertinente: como estimar a ampliação do erro para cada iteração?

A quantidade $\left(\left| \frac{E_i}{E_{i-1}} \right| \right)$ traduz o factor do erro E_i em x_i , a i -ésima iterada, é aumentado (ou reduzido) na iteração seguinte. Este factor de ampliação do erro é independente da grandeza desse erro E_i . Considerarmos $\frac{E_i}{2}$ um erro em x_i , o erro em x_{i+1} seja $\frac{E_{i+1}}{2}$. Assim, será indiferente utilizar o valor exacto E_i ou outro qualquer valor para um erro pequeno. Esclareçamos este assunto via função logística definida por $f(x) = 4x(1-x)$, em que consideraremos $E_i = \epsilon$ o erro em x_i , o erro E_{i+1} em x_{i+1} é dado por

$$\begin{aligned} E_{i+1} &= f(x_i + \epsilon) - f(x_i) = \\ &= 4(x_i + \epsilon)(1 - (x_i + \epsilon)) - 4x_i(1 - x_i) = \\ &= 4\epsilon(1 - 2x_i) - 4\epsilon^2 \end{aligned}$$

Por consequência,

$$\begin{aligned} &= \frac{E_{i+1}}{E_i} = \frac{E_{i+1}}{\epsilon} = 4(1 - 2x_i) - 4\epsilon. \text{ Como } \epsilon \text{ é arbitrariamente pequeno,} \\ &= \frac{E_{i+1}}{E_i} \approx 4(1 - 2x_i), \end{aligned}$$

o que significa que o factor de ampliação do erro é independente do erro $E_i = \epsilon$, tal como seria de esperar. Desta forma, fixando um valor arbitrariamente pequeno para um erro ϵ , estimamos o factor de ampliação do erro dado por $\left| \frac{E_i}{E_{i-1}} \right|$, para erros iniciais E_0 muito pequenos através de $\left| \frac{E_{i+1}}{\epsilon} \right|$, em que $E_{i+1} = f(x_i + \epsilon) - f(x_i)$ sendo $f(x) = 4x(1-x)$.

Sendo assim, a expressão

$$\frac{1}{n} \ln \left| \frac{E_n}{E_0} \right| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\ln \left| \frac{E_i}{E_{i-1}} \right| \right)$$

dá lugar a

$$\frac{1}{n} \ln \left| \frac{E_n}{E_0} \right| \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\ln \left| \frac{E_i}{\epsilon} \right| \right)$$

que nos permite calcular o expoente de Lyapunov de uma forma correcta, mas aproximada, pela média dos factores de ampliação do erro sobre um largo número de iterações. Na tabela 3.4 estão registados os valores numéricos do expoente de Lyapunov, obtidos desta forma, para os valores iniciais anteriores $x_0 = 0.202$, $x_0 = 0.347$ e $x_0 = 0.869$; o erro considerado em cada iteração foi de 10^{-3} .

O expoente de Lyapunov $\lambda(x_0)$ é importante e relevante pois permite-nos identificar, num sistema dinâmico, um comportamento instável ou caótico de um outro estável e previsível e, ainda, medir essas propriedades. Para um valor grande de $\lambda(x_0)$, com $\lambda(x_0) \geq 0$, verifica-se também uma grande sensibilidade do sistema a pequenas modificações nas condições iniciais.

iteração, n	Intervalo	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}
0	[0.1000, 0.2000]		*								
1	[0.3600, 0.6400]				*	*	*	*			
2	[0.9216, 1.0000]										*
3	[0.0000, 0.2890]	*	*	*							
4	[0.0000, 0.8219]	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
5	[0.0000, 1.0000]	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*

Tabela 3.4: Registos das sucessivas iteradas.

3.4 Transitividade topológica

Nesta secção vamos abordar a noção de transitividade topológica, relevante para o estudo proposto. Vamos para tal recorrer a algumas definições e exemplos demonstrativos do assunto, para mais detalhe e estudo aprofundado ver bibliografia.

Definição 3.4.1. *A função $f:D \rightarrow D$ é topologicamente transitiva se, para quaisquer conjuntos abertos $U, V \subset D$, existe um valor $k(k > 0)$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Equivalentemente, f é topologicamente transitiva em D se para quaisquer dois pontos x e y de D e qualquer $\epsilon > 0$, existe um $z(z \in D)$ tal que $|z - x| < \epsilon$ e $|f^n(z) - y| < \epsilon$ para algum n .*

Uma função topologicamente transitiva tem por característica (relevante) o facto de ser possível, a partir de uma qualquer vizinhança e sob iteração da função, alcançar qualquer outra vizinhança do domínio. Vamos ilustrar com o seguinte exemplo.

Exemplo 3.4.1. *Consideremos a função definida por $f(x) = 4x(1 - x)$ e dividamos o intervalo unitário em 10 subintervalos iguais, $I_k = [\frac{k-1}{10}, \frac{k}{10}]$, $k = 1, 2, \dots, 10$. Consideremos o subintervalo $I_2 = [0.1, 0.2]$ e os registos obtidos das sucessivas iterações por f , na tabela 3.4 :*

Na primeira iteração foram atingidos os subintervalos I_4, I_5, I_6 e I_7 , com a segunda iteração foi alcançado, apenas o subintervalo I_{10} , mas com as terceira e quarta iterações foram abrangidos os restantes subintervalos I_1, I_3, I_8 e I_9 . Por conseguinte, foram necessárias apenas quatro iterações de f no intervalo $[0.1, 0.2]$, para que todo o intervalo unitário fosse percorrido. Para outros subintervalos obteríamos um resultado análogo: os pontos do subintervalo inicial teriam passado, ao fim de algumas iterações, por todos os outros subintervalos, percorrendo todo o intervalo unitário.

Na figura 3.3 podemos ver dois intervalos I e J e podemos seguir a iteração de um ponto inicial em I cuja 11.^a iterada é um ponto de J . Ao medir a transitividade topológica escolhendo alguns pontos iniciais de um pequeno intervalo I e seguindo as suas órbitas podemos verificar se atingem o intervalo alvo J . Algumas órbitas alcançarão J mais rapidamente do que outras assim como haverá órbitas iniciadas noutros pontos de I que nunca chegarão a J .

Usando por exemplo, 10000 pontos iniciais (Peitgen, ver bibliografia), igualmente espaçados no intervalo I e sigamos as suas órbitas até atingirem o intervalo J sendo,

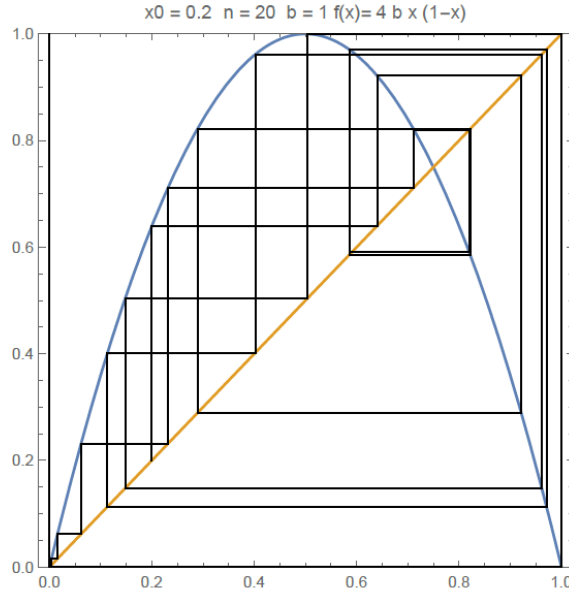


Figura 3.3: Função $y = 4x(1 - x)$ com $x_0 = 0.2$ e $n = 20$. Transitividade topológica: a iteração sobre um valor inicial do intervalo I percorre todo o intervalo unitário. Para cada intervalo J existe um ponto em I cuja órbita percorre. No exemplo 11 iterações foram suficientes.

então, rejeitadas. As órbitas que permanecem depois de um certo número de iterações são as órbitas sobreviventes. Quantas órbitas sobreviventes haverá após, por exemplo, 100 iterações? E após 1000? Qual a relação existente entre o número de iterações e o número de órbitas sobreviventes?

A escolha dos intervalos é, importante para encontrarmos alguma relação. Com efeito, poderíamos escolher dois intervalos I e J de tal modo que todas as órbitas atingiriam o intervalo J logo na primeira iteração, o que não tem qualquer interesse. Por conseguinte, consideremos I ; um intervalo suficientemente pequeno, e J de tal modo que haja pelo menos algumas dezenas de iterações antes de alguma das órbitas permanecer em J . Por exemplo, seja $I = [0.2, 0.2 + 10^{-11}]$ e $J = [0.68, 0.69]$.

Por conseguinte observou-se que

- durante as primeiras 36 iterações nenhuma das 10000 órbitas iniciais atingiu J ;
- na 37.^a iteração houve 63 órbitas a alcançar J ;
- depois, mais 63 órbitas, 62, 63 e assim por diante.

Quando o número de órbitas sobreviventes reduziu para cerca de metade do número inicial (10000) esperava-se que o número de órbitas sobreviventes por iteração decaísse também para cerca de metade. Com efeito, após 133 iterações o número de órbitas sobreviventes passou de 5037 para 5006 (decréscimo de 31 órbitas). Este resultado sugere que haja um decréscimo geométrico/exponencial do número de órbitas sobreviventes ($S(n)$) relativamente ao número de iterações n . Essa relação é dada por

$S(n) = S_0 \times e^{\frac{-n}{\tau}}$ em que S_0 é o número inicial de órbitas e o valor de τ pode representar uma estimativa do número de iterações necessárias para reduzir o número de órbitas

sobreviventes por um factor de $\frac{1}{e} \approx 0.368$, ao valor representado por τ damos também o nome de tempo médio de vida das órbitas. Neste caso, depois de um período inicial transitório de 36 iterações, o decrescimento linear dos valores de $\ln S(n)$ em função de n e os dados

$$S(100) = 6346 \text{ e } S(600) = 171;$$

permitem obter

$$\ln S(n) \approx -0.00723n + 9.478363 \Leftrightarrow S(n) \approx e^{-0.00723n}.$$

O valor de $\tau \approx 138(\tau 1/0.00723)$ significa que por cada 138 iteradas o número de órbitas sobreviventes decresce á razão de $1/e$. Esta razão depende da escolha do intervalo J .

Consequências desta experimentação: a informação inicial contida no intervalo I mantém-se para um certo número de iterações, depois o sistema esquece totalmente a informação relativa aos dados iniciais (por exemplo, a proximidade inicial das órbitas) e verifica-se uma queda exponencial do número de órbitas. A transitividade topológica tem uma presença indiscutivelmente forte no iterador quadrático definido por $y = 4x(1 - x)$. Como vimos anteriormente, $f^5([0.1, 0.2]) = [0, 1]$, ou seja, bastaram 5 iterações do intervalo $[0.1, 0.2]$ para cobrir todo o intervalo unitário. Mais ainda, cada ponto do intervalo unitário tem um original/objecto em $[0.1, 0.2]$. Partindo de outro intervalo inicial, por exemplo, $[0.15, 0.20]$, intervalo com metade da amplitude do anterior, também verificamos a sua expansão sobre o intervalo unitário após algumas iterações. De uma forma mais geral, qualquer subconjunto arbitrariamente pequeno tem, nos sucessivos passos do processo iterativo, a sua expansão sobre o intervalo $[0, 1]$ ao fim de algumas iterações. A pergunta a fazer é: qual a relação entre o número de iterações necessárias para cobrir todo o intervalo unitário e o intervalo inicial?

Averiguemos quantas iterações são, em média, necessárias para que um conjunto de subintervalos se expanda sobre o intervalo unitário. Obtiveram-se os registos que se seguem, em que N representa o número de subintervalos de $[0, 1]$ e k o número médio de iterações de $y = 4x(1 - x)$; necessárias para aquela expansão.

Ao duplicarmos o número de subintervalos, o número médio de iterações aumenta. Este resultado vem reforçar os resultados do valor numérico do expoente de Lyapunov para este iterador: $\lambda(x_0) = \ln 2$ pequenos erros são ampliados por um factor igual a 2. Agora, ao duplicarmos o número de subintervalos, estamos a reduzir as suas amplitudes para metade, o que obriga a mais uma iterada, para obter a amplitude anterior.

3.5 Densidade dos pontos periódicos

De seguida vamos considerar várias definições, as quais são relevantes (ver bibliografia).

Definição 3.5.1. *Seja A um subconjunto de R um ponto $x(x \in R)$ é um **ponto de acumulação** de A (ou ponto limite) se existir uma sucessão de pontos distintos x_n , de A , convergente para x ou, de outro modo, se toda a vizinhança de x contém um elemento de A distinto de x . O conjunto A diz-se um **conjunto fechado** se contém todos os seus pontos de acumulação.*

Definição 3.5.2. *Um subconjunto A de R é um **conjunto aberto** se, para cada valor x*

Número de subintervalos	Número médio de iterações
2	1.00
4	2.50
8	4.00
16	5.12
32	6.19
64	7.25
128	8.25
256	9.27
512	10.27
1024	11.28
2048	12.28
4096	13.28
8192	14.28
16384	12.28
32768	16.28
65536	17.28

Tabela 3.5: Número de iterações.

de A , existe um $\epsilon > 0$ de tal modo que a vizinhança de centro x e raio ϵ está totalmente contida em A .

Definição 3.5.3. Dado um conjunto A subconjunto de \mathbb{R} , denomina-se **fecho de A** e nota-se por \bar{A} , ao conjunto reunião de A com o conjunto de todos os seus pontos de acumulação. Torna-se evidente que se A é um conjunto fechado, então $\bar{A} = A$.

Definição 3.5.4. Seja A um subconjunto de B . Diz-se que A é denso em B se $\bar{A} = B$, isto é, se todos os pontos de B são pontos de acumulação de A ou um ponto de A .

Outro modo de definir conjunto denso é afirmar que A é denso em B se qualquer vizinhança de centro num ponto de B contém um ponto de A , por mais pequeno que seja o raio dessa vizinhança.

3.6 Teorema de Sharkovsky

De seguida vamos considerar o Teorema de Sharkovsky. Este teorema é importante para o estudo e compreensão dos sistemas dinâmicos. Teoremas prévios.

Teorema 3.6.1. *Seja I um intervalo fechado e $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(I) \supset I$, então f tem pelo menos um ponto fixo em I .*

Demonstração. Esta demonstração é clássica. Seja $I = [a, b]$, como $f(I)$ está contido em I , existem um c e um d em I tal que $f(c) = a$ e $f(d) = b$. Se $c = a$ ou $d = b$, fica demonstrado. Se não for o caso, então $a < c < b$ e $a < d < b$. Façamos $h(x) = f(x) - x$.

Verificamos com facilidade que $h(c) = f(c) - c = a - c < 0$ e $h(d) = f(d) - d = b - d > 0$. Dado que h é contínua em I (diferença de funções contínuas) e $h(c) \times h(d) < 0$, então, pelo teorema dos valores intermédios (Teorema de Bolzano), está garantida a existência de um valor $e (e \in]c, d[\Rightarrow e \in I)$ tal que $h(e) = 0$, ou seja, $f(e) = e$ o que significa que e é um ponto fixo de f . \square

Teorema 3.6.2. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a) = c$, $f(b) = d$ e $c < d$, então $f([a, b]) \supset [c, d]$.*

Demonstração. Seja $r \in [c, d]$. Queremos mostrar que $r \in f([a, b])$. Se $r \in [c, d]$, então $r \in [f(a), f(b)]$. Pelo teorema de Bolzano, como f é contínua em $[a, b]$ e $f(a) < r < f(b)$, existe pelo menos um valor $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = r$, ou seja, r é um elemento do contradomínio de f ($r \in f([a, b])$). Concluimos, assim, que $f([a, b]) \supset [c, d]$. \square

Seja a função real de variável dada por $f(x) = 1.5x^2 + 2.5x + 1$ em que $f(0) = 1$, $f(1) = 2$ e $f(2) = 0$, ou seja, $\{0, 1, 2\}$ é uma órbita periódica com período 3. Que outros pontos periódicos poderá ter esta função? E qual o período primitivo de cada um desses pontos, se existirem?

Teorema 3.6.3. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, contínua. Se f tem um ponto periódico de período três, então f tem pontos periódicos de todos os outros períodos.*

Demonstração. Seja $\{a, b, c\}$ uma órbita periódica de período três de uma função f , contínua em \mathbb{R} . Sem perda de generalidade da demonstração, consideremos $a < b < c$.

Duas situações podem ocorrer: ou $f(a) = b$ ou $f(a) = c$. Suponhamos $f(a) = b$ (a demonstração será análoga para o caso de termos $f(a) = c$), o que implica $f(b) = c$ e $f(c) = a$.

Consideremos $I_0 = [a, b]$ e $I_1 = [b, c]$. Então, pela proposição anterior

$$f(I_0) \supset I_1, f(I_1) \supset I_1 \text{ e } f(I_1) \supset I_0.$$

Com efeito temos

$f(I_0) = f([a, b]) \supset [b, c] = I_1$ e $f(I_1) = f([b, c]) \supset [a, c] \supset [b, c] = I_1$; desta última relação podemos ainda concluir que $f(I_1) = f([b, c]) \supset [a, c] \supset [a, b] = I_0$. Como $f(I_1) \supset I_1$, pelo teorema anterior sabemos que f tem pelo menos um ponto fixo em I_1 , o que significa que f tem um ponto periódico de período 1. \square

Seja n um número natural maior do que 1. Pretendemos demonstrar que f tem um ponto periódico com período primitivo n . Dado que a é um ponto periódico com período primitivo 3 (bem como b e c), o caso para $n = 3$ fica resolvido. Assumamos, então, que $n \neq 3$. Construíamos uma cadeia de intervalos fechados $A_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ tais que $I_1 = A_0 \supset A_1 \supset A_2 \dots A_n$ e verifiquem as seguintes propriedades:

$$(P_1) A_0 = I_1$$

$$(P_2) f(A_k) = A_{k-1} \text{ para } k = 1, 2, \dots, n-2$$

$$(P_3) f^k(A_k) = I_1 \text{ para } k = 1, 2, \dots, n-2$$

$$(P_4)f^{n-1}(A_{n-1}) = I_0$$

$$(P_5)f^n(A_n) = I_1$$

Em primeiro lugar provaremos que, nestas condições, há um ponto periódico em A_n com período primitivo n , (D1).

Depois, provaremos que aquela cadeia de conjuntos existe, (D2).

(D1) pelo facto de que $I_1 \supset A_n$ e por (P_5) , temos $f^n(A_n) \supset A_n$. Pelo Teorema 3.6.1, temos a existência de um ponto fixo de f^n em A_n ou, o que é o mesmo, f tem um ponto periódico de período n em A_n . Designemos esse ponto periódico de período n por p e provemos, assim, que n é o seu período primitivo ($p \in A_n$), ou seja, $f^n(p) = p$ e, para $k < n$, $f^k(p) \neq p$.

Pelo facto de $A_n \subset I_1$, então $p \in I_1 \Leftrightarrow p \in [b, c]$.

A condição (P_3) implica que os pontos $f(p)$, $f^2(p)$, $f^3(p)$, ..., $f^{n-2}(p)$ pertençam a $I_1 = [b, c]$.

A condição (P_4) implica que $f^{n-1}(p) \in I_0 = [a, b]$.

Mostremos que $p \neq b$ e que $p \neq c$.

Suponhamos que $p = c$. Então, $f(p) = f(c) = a$, que não pertence a I_1 . Dado que $f^{n-1}(p)$ é a única das n primeiras iteradas de p que não está em I_1 (P4), então é porque $n = 2$, o que é uma contradição pelo facto de c ser ponto periódico com período primitivo 3. Então, $p \neq c$.

Suponhamos, agora, que $p = b$. Então, $f^2(p) = f(f(b)) = f(c) = a$, que não está em I_1 . Pela mesma razão anterior, dado que $f^{n-1}(p)$ é a única das n primeiras iteradas de p que não está em I_1 , então $n = 3$. Uma vez que partimos do princípio que $n \neq 3$, então concluímos que $p \neq b$.

Assim, pelo facto de $p \in I_1$ e $p \neq b$ e $p \neq c$, p tem de ser um elemento de $]b, c[$.

Como $f^{n-1}(p)$ está em $I_0 = [a, b]$ e este conjunto não tem elementos comuns com $]b, c[$, resulta que $f^{n-1}(p) \neq p$, logo $n - 1$ não pode ser o período primitivo de p . Se este fosse inferior a $n - 1$, então a órbita de p estaria totalmente contida em $]b, c[$ (por (P_3) e por p não ser b nem c), o que contradiz a propriedade (P_4) !

Portanto, n é o período primitivo de p .

(D2) Para provarmos que aquela cadeia de intervalos fechados existe para cada número natural maior do que 1, temos que considerar a seguinte proposição.

Proposição: Sejam J e I intervalos fechados e f uma função contínua tal que $f(J) \supset I$. Então, existe um intervalo J_0 tal que $J_0 \subset J$ e $f(J_0) = I$.

Seguindo com a demonstração de D2. Continuamos a considerar n um número natural maior do que 1 e criemos a sequência desejada. Fazemos, primeiro, $A_0 = I_1$ e (P_1) fica concluído. Dado que $f(I_1) \supset I_1$, temos $f(A_0) \supset A_0$ e então, pela proposição enunciada, existe um intervalo A_1 tal que $A_1 \subset A_0$ e $f(A_1) = A_0$. Daqui resulta que $f(A_1) \supset A_1$. Pela mesma proposição está garantida a existência de um intervalo A_2 tal que $A_2 \subset A_1$ e $f(A_2) = A_1$. Resulta que $f(A_2) \supset A_2$ e, novamente, garantimos a existência de um intervalo A_3 tal que $A_3 \subset A_2$ e $f(A_3) = A_2$. Deste modo consecutivo podemos definir A_k

com $k = 1, 2, \dots, n-2$, verificando-se sempre $A_k \subset A_{k-1}$ e $f(A_k) = A_{k-1}$ cumprindo a propriedade (P_2) .

Com base em

$$f^2(A_k) = f(f(A_k)) = f(A_{k-1}) = A_{k-2}(P_2)$$

$$f^3(A_k) = f(f^2(A_k)) = f(A_{k-2}) = A_{k-3}(P_2)$$

\vdots

$$f^{k-1}(A_k) = f(f^{k-2}(A_k)) = f(A_{k-(k-2)}) = f(A_2) = A_1(P_2)$$

$f^k(A_k) = f(f^{k-1}(A_k)) = f(A_1) = A_0 = I_1(P_2)$, para cada valor de $k = 1, 2, \dots, n-2$ o que garante o cumprimento da terceira propriedade (P_3) .

Para definir A_{n-1} de modo que se verifique a propriedade (P_4) , reparamos que $f^{n-1}(A_n - 2) = f(f^{n-2}(A_{n-2})) = f(I_1)(P_3)$.

Como $f(I_1) \supset I_0$, então $f^{n-1}(A_{n-2}) \supset I_0$ e, pela proposição anterior, existe um conjunto A_{n-1} tal que $A_{n-1} \subset A_{n-2}$ e $f^{n-1}(A_{n-1}) = I_0$. Concluimos, então, a existência de um intervalo A_{n-1} que satisfaz (P_4) .

Finalmente, $f^n(A_{n-1}) = f(f^{n-1}(A_{n-1})) = f(I_0)$. Pelo facto de $f(I_0) \supset I_1$, vem $f^n(A_{n-1}) \supset I_1$ e, novamente pela proposição enunciada, existe um intervalo A_n tal que $A_n \subset A_{n-1}$ e $f^n(A_n) = I_1$, verificando-se, assim, a propriedade (P_5) .

Fica provada a existência daquela cadeia de intervalos fechados e concluimos a demonstração do teorema. Para mais detalhe sobre o assunto, ver bibliografia.

Definição 3.6.1. *Ordenação, de Sharkovsky, dos números naturais, Sharkovsky estabelece a seguinte relação nos números naturais:*

$$\begin{aligned} & 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow \dots \rightarrow (2n+1) \cdot 2^0 \rightarrow \dots \\ & \rightarrow 2 \cdot 3 \rightarrow 2 \cdot 5 \rightarrow 2 \cdot 7 \rightarrow \dots \rightarrow (2n+1) \cdot 2^1 \rightarrow \dots \\ & \rightarrow 2^2 \cdot 3 \rightarrow 2^2 \cdot 5 \rightarrow 2^2 \cdot 7 \rightarrow \dots \rightarrow (2n+1) \cdot 2^2 \rightarrow \dots \\ & \rightarrow 2^3 \cdot 3 \rightarrow 2^3 \cdot 5 \rightarrow 2^3 \cdot 7 \rightarrow \dots \rightarrow (2n+1) \cdot 2^3 \rightarrow \dots \\ & \dots \\ & \rightarrow 2^n \cdot 3 \rightarrow 2^n \cdot 5 \rightarrow 2^n \cdot 7 \rightarrow \dots \rightarrow (2n+1) \cdot 2^n \rightarrow \dots \\ & \dots \rightarrow 2^n \rightarrow \dots \rightarrow 2^3 \rightarrow 2^2 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \end{aligned}$$

Nesta ordenação, a relação $a \rightarrow b$ lê-se "a segue b".

Primeiro consideram-se todos os números ímpares, excepto o 1, ordenados por ordem crescente, depois ordenam-se os produtos de 2 por todos os ímpares anteriores; de seguida consideram-se os produtos por 2^2 daqueles ímpares e assim sucessivamente, multiplicando os ímpares pelas potências de 2. Esta listagem esgota todos os números naturais com excepção das potências naturais de 2 que são listadas no final, por ordem decrescente.

De seguida apresentaremos o teorema de Sharkovsky o qual como vimos é relevante.

Teorema 3.6.4. *Teorema de Sharkovsky (Sarkovskii) Seja f uma função real de variável real, contínua, que tem um ponto periódico com período primitivo k . Se $k \rightarrow m$, na*

ordenação de Sharkovsky, então f também tem um ponto periódico de período primitivo m .

Demonstração. A demonstração é clássica. Se a função f tem um ponto periódico cujo período não é uma potência de 2, então tem uma infinidade de pontos periódicos, pela lei da conversão, se f tem um número finito de pontos periódicos, então os seus períodos são potências de 2. O período 3 é o primeiro na ordenação de Sharkovsky, o que implica a existência de todos os outros períodos (provado anteriormente). O recíproco do teorema de Sharkovsky também se verifica, isto é, uma função pode ter pontos periódicos com período p e não ter períodos maiores, de acordo com a ordenação de Sharkovsky. \square

Capítulo 4

Aplicações

A ideia deste trabalho foi o de abordar o tema dos Sistemas Iterativos aos alunos do ensino secundário, para que os mesmos possam ter uma apreendizagem de conteúdos novos que lhes possam ser úteis para a sua formação académica. Este trabalho é uma tentativa de alteração de programas do ensino da matemática de forma a que estes assuntos façam parte de forma regular dos programas matemáticos para o ensino secundário nas escolas de S. Tomé. Para reforçar a importância do assunto, foram realizadas actividades específicas nas salas de aula.

4.1 Aplicações na sala de aula

A área disciplinar dos Sistemas Iterativos não fazem parte dos conteúdos programáticos da disciplina de Matemática, no Ensino Secundário em S. Tomé. Faz-se uma referência ao estudo de algumas propriedades dos sistemas iterativos, aquando do estudo das sucessões no programa de matemática do 11º ano, no estudo de funções lineares, quadráticas e cúbicas no 10º ano e nas funções exponenciais e logarítmicas no 12º.

Existe a dificuldade de introdução deste tema nos programas curriculares, pela extensão dos mesmos, pelo processo de avaliação dos alunos deste nível de ensino. Mas talvez possamos trabalhar conceitos matemáticos previstos nos conteúdos programáticos da disciplina, através de actividades que envolvam sistemas iterativos. Este tema é, naturalmente, motivador para quem o explora e os alunos poderão sentir-se motivados nas suas aprendizagens.

Algumas relações com as matérias curriculares

Analisando o programa de disciplina de Matemática de São Tomé e Príncipe, podemos verificar que existem inúmeras ligações entre o Sistema Iterativo e os conteúdos programados, que não prescindem do papel e lápis e quanto muito uma calculadora científica que é muito usada nas salas de aulas do País.

O tema Sistemas Iterativos pode ser aplicado nomeadamente em estudo de:

- funções lineares,

- funções quadráticas / logísticas,
- composição de funções,

Nas funções lineares que se leciona na 10^a classe, no estudo da função afim, levamos os alunos a compreenderem a aplicação, principalmente com o valor de m que significa o declive da reta. Nesta aula, realçamos a presença dos pontos fixos de uma função real de variável real, com a interseção do gráfico da função com a bissectriz dos quadrantes ímpares.

Ainda na 10^a classe trabalhamos função quadrática, nomeadamente o estudo de funções. Numa aula de representação da função quadrática gráficamente, levamos os alunos a compreender o que acontece quando representamos duas funções no mesmo referencial, função quadrática e a função identidade.

Nesta representação podemos observar o ponto de interseção entre as mesmas, daí aproveitamos para falar do conceito ponto fixo.

Para além deste conceito também abordamos com os alunos o conceito do expoente do Lyapunov para resolver problemas da vida real.

Na 11^a classe, nas aulas de sucessões e progressões, levamos os alunos a trabalhar problemas ligados a taxa de juro. Aproveitamos o famoso problemas de Leonardo Fibonacci de coelhos, onde os alunos fizeram trabalhos brilhantes com a iteração. Foi um momento muito interessante.

Na 12^a classe falamos de derivada de funções quadráticas, onde propusemos conceito sobre pontos fixos, estudando os seus comportamentos. E estes comportamentos estão ligados com o declive da reta tangente ao gráfico da função num ponto.

Ainda na 11^a classe, temos a composição de funções de aplicamos os conceitos básicos nos conteúdos nomeadamente em limites e derivadas de funções.

Todos estes exemplos foram resolvidos durante as aulas, não causando nenhum atraso no cumprimento do programa da disciplina.

Iteração

Falando um pouco sobre o processo iterativo nas funções lineares e quadráticas. As actividades focam o processo iterativo nas funções lineares e nas quadráticas, sobretudo do tipo $y = rx(1 - x)$ ou $y = x^2 + c$ e definidas no intervalo unitário.

Iteração como composição de funções, uma primeira função (máquina) aceita determinado material ou input (domínio) e produz um produto que entra noutra máquina (função), esta segunda máquina aceita o material produzido pela primeira e produz um novo produto a sair (output).

Iteração como processo recursivo - composição de uma função sobre ela mesma, em que o transformado (output) numa determinada etapa passa a ser o objecto (input) na etapa seguinte do mesmo processo, e assim sucessivamente, como exemplo explore-se numa calculadora o cálculo sucessivo da raiz quadrada de um número positivo. As progressões aritméticas e geométricas são geradas por processos iterativos - adicionando uma mesma constante ao valor anterior, ou multiplicando-o por uma constante não nula.

Iteração gráfica - permite perceber o comportamento/dinâmica de uma determinada função sob iteração, pela visualização gráfica.

Pontos fixos de uma função podem ser identificados pela intersecção do gráfico com a diagonal (bissetriz dos quadrantes ímpares). Podem ser de natureza repulsiva ou atractiva ou, também, neutro. Alguns caminhos em escada ou espiral indicam-nos pontos fixos atractivos; outros caminhos em escada ou espiral indicam pontos fixos repulsivos. Estes comportamentos estão relacionados com o declive (m) da recta tangente ao gráfico da função no ponto x_0 (derivada da função no ponto):

- $m < 1$, então o ponto fixo é repulsivo e espiral divergente,
- $-1 < m < 0$, então o ponto x_0 é atractivo e espiral convergente,
- $0 < m < 1$ - ponto atractivo e escada convergente,
- $m > 1$ - ponto repulsivo e escada divergente,

A diagonal actua como mecanismo de recurso - reflecte a imagem (*output*) de um passo do processo de volta para o sistema como objecto (input) para o passo seguinte do processo. Esta propriedade de transformação da iteração gráfica é simples, poderosa e intuitiva.

Expansão e contracção - a iteração sucessiva expande pequenos erros em grandes desvios ou faz convergir pequenos erros para zero (contracção). Mais uma vez é o declive da recta tangente ao gráfico da função no(s) ponto(s) que caracteriza cada situação.

- $|m| > 1$, então há expansão do intervalo,
- $0 \leq m < 1$, há contracção.

Função quadrática $y = rx(1 - x)$

Exploração da dinâmica deste sistema para vários valores de r .

- Atractores - estudo de $y = rx(1 - x)$ para $r = 2.8$
- Pontos periódicos - estudo de $y = rx(1 - x)$ para $r = 3.2$
- Previsibilidade - estudo da sensibilidade do sistema às condições iniciais, para $r = 2.8$ ou $r = 3.2$, $y = rx(1 - x)$ tem um comportamento estável e previsível, para $r = 4$, a função é errática e imprevisível.

Segue alguns exemplos que podem ser explorados na sala de aula:

1. No modelo de crescimento exponencial $x \rightarrow kx$, para que valores reais do parâmetro k a população se extingue?
2. Para que valores de k a população crescerá sem limitação?

3. O modelo de crescimento exponencial anterior é demasiado simples para ser usado na previsão da população, pois há um grande número de situações que não são tidas em conta. Quais são algumas das coisas em falta neste modelo que poderá torná-lo mais realista?
4. Determina os pontos fixos para a regra iterativa $x \rightarrow kx(1 - x)$, com $k > 0$ e em que o valor de x_0 ($0 < x < 1$) representa a população inicial (assim, pontos fixos negativos não têm qualquer significado no contexto).
5. Supõe que depositas 10000 dobras numa conta poupança que paga 5% de taxa de juro anual. Considera que B_n representa o teu capital no final do ano n . Assim, $B_0 = 10000$.
 - a) Calcula os seguintes valores B_1 ; B_2 ; B_3
 - b) Escreve B_4 em função de B_3 .
 - c) Se souberes o valor de B_{20} como podes calcular o valor de B_{21} ?
 - d) E se souberes o de B_n como calculas o de B_{n+1} ?
 - e) Calcula os valores de B_n para $n = 4$ até $n = 10$.
 - f) Mantendo-se a taxa de juro, quanto tempo demorará a duplicar o capital inicial?
 - g) Supõe que depositas o dinheiro noutro banco que paga apenas 4% de taxa de juro. Qual o modelo matemático que permite obter B_{n+1} sabendo B_n ?
 - h) Supõe que fazes um depósito inicial de 1000 dobras numa conta poupança que paga 12% de taxa de juro por ano. Qual a regra iterativa que permite saber os saldos da conta usando aquela taxa de juro?

Quantos anos leva até que o saldo de conta seja maior do que o dobro do capital inicialmente depositado?
 - i) E quanto tempo mais é necessário para duplicar novamente aquele valor, isto é, quantos anos levará até teres mais de 4000 dobras no banco?
6. Quantos casais de coelhos se tem ao fim de cada mês se se iniciar com um casal recém-nascido, sabendo que os casais de coelhos se tornam adultos com um mês de idade, que com dois meses de idade são pais de um novo casal de coelhos e que, a partir daí, ao fim de cada mês, nasce um novo casal? (Admite-se que não há mortes de coelhos neste processo)
7. Um mentiroso conta uma mentira a três amigos. Ao fim de 10 minutos cada um deles conta-a a outros três, por sua vez, a contam em 10 minutos a outros três (cada um). Quantas pessoas, incluindo o mentiroso, conhecem a mentira ao fim de uma hora.
8. Duas amigas foram passar férias aos Estados Unidos e resolveram trabalhar para ganharem algum dinheiro extra. Teriam que trabalhar no mínimo 20 horas e só ao fim desse tempo receberiam o dinheiro correspondente ao trabalho. Tinham três hipóteses para escolherem a forma de pagamento:

Primeira hipótese: 50 dólares por hora.

Segunda hipótese: a primeira hora 8 dólares e cada hora seguinte teria um aumento de 5 dólares relativamente á hora anterior.

Terceira hipótese: a primeira hora seria 0,005 do dólar e cada hora seguinte seria o dobro da anterior.

Qual a melhor hipótese? E a pior?

Todos estes exemplos foram explorados na sala de aula com alunos.

4.2 Aplicação da iteração em sala de aula através do desenho

Sobre o tema da iteração geométrica de aplicações do intervalo e teoria do caos podem ser estudadas através de construções de régua e compasso de modo a ganhar sensibilidade para o assunto e também de modo a ultrapassar dificuldades como a falta de computadores ou calculadoras. Nada mais natural e simples do que desenhar. Podem começar-se com funções lineares e seccionalmente lineares passando para funções mais complexas como a parábola. O desenho geométrico de uma parábola é um problema interessante por si só. Podem também adaptar-se troços de elipses para iteração não linear. O desenho de uma elipse através do lápis é muito interessante e motivador para os alunos, ver figura 4.1.

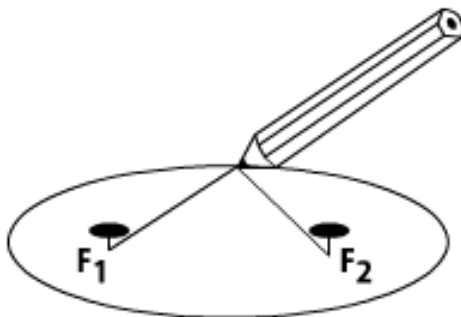


Figura 4.1: Motivação ao desenho para apresentar a teoria do caos.

No catálogo da exposição realizada na Universidade de Évora (ver [8]) foram produzidos muitos exemplos interessantes. Nesse trabalho são estudadas as aplicações do tipo $f(x) = ax \pmod{1}$, sendo a um número natural, ver por exemplo as figuras 4.2 e 4.3. A iteração de aplicações deste tipo permite observar comportamentos muito complexos em sistemas simples. O sistema é simples: os estados são os pontos do intervalo $[0, 1]$, a evolução temporal é dada pela iteração da aplicação f . Geometricamente a iteração é realizada desenhando rectas perpendiculares aos eixos em pontos previamente definidos. Mas, o comportamento é complexo, pois existe uma grande variedade de órbitas periódicas e acima de tudo uma enorme variedade de órbitas que não fecham, mas que são muito difíceis de desenhar e caracterizar. A execução técnica da iteração geométrica é muito exigente de modo a ser claro visualmente que a complexidade das trajectórias depende da geometria do gráfico da função e não de pequenos erros que as trajectórias possam ir acumulando.

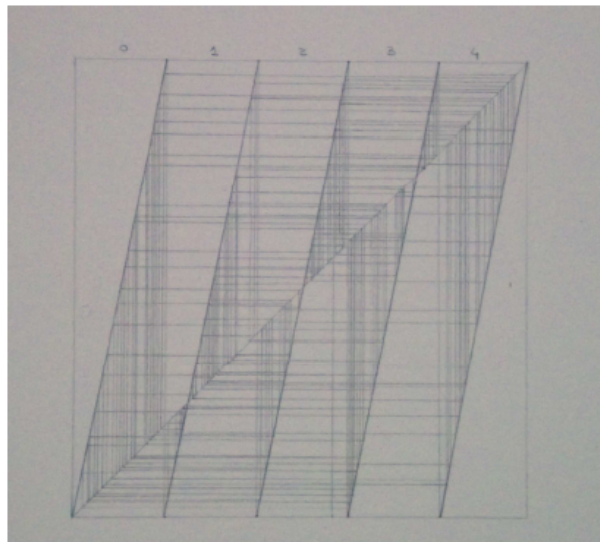


Figura 4.2: Movimento Browniano com iteração geométrica de aplicações do intervalo.

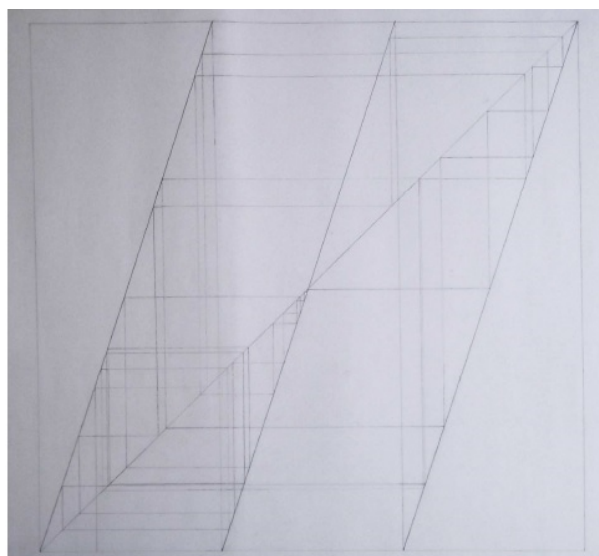


Figura 4.3: Iteradas geométricas da aplicação.

Capítulo 5

Considerações Finais

Com este trabalho esperamos que num futuro próximo possa ser possível as devidas alterações nos programas da matemática no ensino secundário em S. Tomé de forma a que o assunto relevante que é os sistemas dinâmicos possam ser uma realidade na sala de aula como mais uma ferramenta base no processo de aprendizagem dos alunos para o estudo da matemática.

5.1 Conclusões

Há que explorar mais o tema das iteradas de aplicações e teoria do Caos na sala de aula, pois é um tema muito interessante, motivador para os alunos, para os docentes envolvidos, que complementa as simulações numéricas, usando calculadora ou o computador, sempre que possível. As considerações teóricas, a intuição geométrica e o fazer com as próprias mãos por parte do aluno, é um dos aspectos principais da aprendizagem e este tópico tem todas estas características. Por conseguinte foi gratificante introduzir estes conceitos sobre sistemas dinâmicos e sua implementação à sala de aula dos alunos do ensino secundário de S. Tomé. Os alunos em geral reagiram bem aos novos conceitos e ficaram com o desejo de saber mais sobre a teoria do caos e suas aplicações ao mundo real. Com este trabalho espero ter mostrado a importância de melhorar os conteúdos programáticos do ensino da matemática no país de forma a que a área dos sistemas dinâmicos seja parte integrante do ensino secundário.

Durante este processo houve a dificuldade de implementação computacional por falta de meios de hardware e de software, este último pôde ser resolvido pelo uso do software livre XMáxima, sem dúvida uma ferramenta a ter em conta na aprendizagem de certos conceitos matemáticos na sala de aula.

Com este trabalho adquirei mais conhecimento científico que considero importante e útil para o ensino da matemática em geral no ensino secundário em S. Tomé.

Referências

- [1] ABRAHAM, R., GARDINI, L., MIRA, C., Chaos in Dynamical Systems, Springer - Verlag, 1997.
- [2] BANKS, J., BROOKS, J., CAIRNS, G., DAVIS, G., STACEY, P., On Devaney's Definition of Chaos, The American Mathematical Monthly, Vol. 99, N.o 4 (Apr., 1992), 332-334.
- [3] BURGER, E. B., STARBIRD, M., O Matemático Disfarçado, Academia do Livro, 2009.
- [4] DEVANEY, R., CHOATE, J., Chaos - A Tool Kit of Dynamics Activities, Key Curriculum Press, 2000.
- [5] DEVANEY, R., CHOATE, J., FOSTER, Iteration - A Tool Kit of Dynamics Activities, Key Curriculum Press, 1999.
- [6] ROBINSON, C., Dynamical Systems - Stability, Symbolic Dynamics and Chaos, CRC. Press, 1999.
- [7] SALUSTIANO, HELENA PAULA, Caos e fractais na sala de aula.
- [8] Catálogo da Exposição Estudos de Geometria, UE, 11-13 de Junho de 2012.