Elementos de Estatística e Probabilidades II

Variáveis e Vetores Aleatórios discretos

Inês Dias

2013

O principal objetivo da deste documento é fornecer conhecimentos básicos de variáveis aleatórias discretas e pares aleatórios discretos, um dos capítulos lecionados na disciplina de Elementos de Estatística e Probabilidades II do curso de Educação Básica.

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Definição 1

Dado um espaço amostra Ω, chama-se variável aleatória, v.a (unidimensional) e costuma representar-se por X a uma função que a cada acontecimento ω do espaço amostra, faz corresponder $x = X(\omega)$, ou seja,

$$X: \quad \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$
$$\omega \rightarrow x = X(\omega)$$

É usual utilizar letras maiúsculas tais como X, Y, Z, M, N,..., para representar variáveis aleatórias.

A cada um dos valores de uma variável aleatória X podemos fazer corresponder uma probabilidade $P[X = x]$, definida como sendo a probabilidade do acontecimento que tem como imagem x por meio da aplicação X.

Exemplo 1: Consideremos a experiência aleatória que consiste no lançamento de uma moeda equilibrada três vezes consecutivas. Sendo F = "sair cara" e C = "sair coroa" o conjunto de todos os resultados possíveis é dado por

$$\Omega = \{(F,F,F), (F,F,C), (F,C,F), (C,F,F), (F,C,C), (C,F,C), (C,C,F), (C,C,C)\}$$

Neste espaço amostra, podemos definir uma variável aleatória

X = número de vezes que saiu caras.

Esta variável pode tomar valores 0, 1, 2 ou 3. Podemos calcular a probabilidade da v.a. tomar cada um destes valores. Por exemplo, probabilidade de sair uma vez cara é dada por,

$$P[X = 1] = P[(F,C,C) \text{ ou } (C,F,C) \text{ ou } (C,C,F)] = \frac{3}{8}.$$

As variáveis aleatórias podem ser **discretas**, se assumem um conjunto finito ou infinito numerável de valores, ou **contínuas**, se são susceptíveis de tomar qualquer valor real pertencente a um intervalo dado.

Para uma dada experiência aleatória podemos estar interessados no estudo de uma única característica - **variável aleatória unidimensional** - ou no estudo de um conjunto de k características - **variável aleatória multidimensional** ou **vector aleatório**.

Uma variável aleatória diz-se **bidimensional** se for uma função que a cada elemento de Ω faz corresponder um elemento de $\mathbb{R}^2$. Generalizando, é uma variável n-dimensional se o conjunto de chegada for $\mathbb{R}^n$.

VARIÁVEL ALEATÓRIA UNIDIMENSIONAL

Variáveis aleatórias discretas:

- **Função de probabilidade de uma variável discreta X:**

Se X é uma v.a. discreta, que assume valores distintos x_1, x_2,..., x_n,..., então a função de probabilidade (f.p.) de X é definida como

$$f(x) = p(x) = \begin{cases} P[X = x] & \text{se } x = x_i \\ 0 & \text{se } x \neq x_i \end{cases} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$$

e deve satisfazer as seguintes condições:

1. $0 \leq f(x) \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
2. Se n finito, $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$.

   Caso n infinito, $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)$ terá de ser uma série convergente de soma 1.

Ao conjunto de pares ordenados (x_i, $f(x_i)$), i =1,2,...,n,..., designa-se por **distribuição de probabilidades da variável aleatória**.

Exemplo 2. Considerando a v.a. do exemplo anterior,

X = número de vezes que saiu cara em três lançamentos de uma moeda,

P[X = 0] = *P*[(C ∩ C ∩ C)]= $\frac{1}{8}$

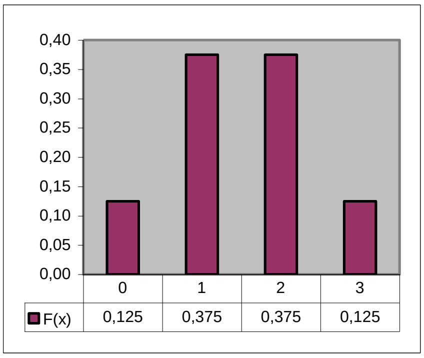
P[X = 1] = *P*[(F ∩ C ∩ C) U (C ∩ F ∩ C) U (C ∩ C ∩ F)] = $\frac{3}{8}$

P[X = 2] = *P*[(F ∩ F ∩ C) U (F ∩ C ∩ F) U (C ∩ F ∩ F)]= $\frac{3}{8}$

P[X = 3] = *P*[(F ∩ F ∩ F)]= $\frac{1}{8}$

x	0	1	2	3
f (x)	1/8	3/8	3/8	1/8

Graficamente,



- **Função de distribuição de uma variável aleatória discreta X:**

Define-se função de distribuição (f.d.) de uma variável aleatória X como

$$F(x)=P[X \leq x].$$

Esta função tem domínio $\mathbb{R}$, conjunto de chegada [0,1] e verifica as seguintes propriedades:

1. $0 \leq F(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$;
2. $F(x_1) \leq F(x_2)$, $\forall x_1, x_2: x_1 < x_2$ (é uma função monótona não decrescente);
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$;
4. $P[x_1 < X \leq x_2] = F(x_2) - F(x_1)$, $\forall x_1, x_2: x_1 < x_2$.

Exemplo 3. Retomando novamente o exemplo do lançamento de uma moeda três vezes consecutivas, em que consideraámos a v.a. número de caras obtido. A função distribuição da variável X é dada por

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 4/8 & 1\leq x\leq 2 \\ 1/8 & 0\leq x\leq 1 \\ 7/8 & 2\leq x\leq 3 \\ 1 & x\geq 3 \end{cases}$$

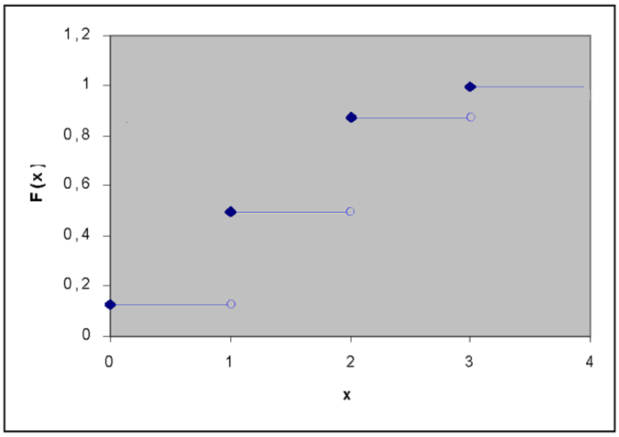
$F(0) = P[X \leq 0] = \sum_{x\leq 0} f(x)=\frac{1}{8}$;

$F(1) = P[X \leq 1] = \sum_{x\leq 1} f(x)=\frac{4}{8}$

$F(2) = P[X \leq 2] = \sum_{x\leq 2} f(x)=\frac{7}{8}$

$F(3) = P[X \leq 3] = \sum_{x\leq 3} f(x)=1$

A representação gráfica da função distribuição de uma variável aleatória é "em escada"



VECTORES ALEATÓRIOS

Por vezes, numa mesma experiência, pretendemos observar simultaneamente mais do que um fenómeno aleatório. O respectivo modelo probabilístico envolve então o estudo em conjunto de mais do que uma variável aleatória.

Exemplo 4. Considere o lançamento de dois dados equilibrados. Seja X o maior nº de pintas das faces viradas para cima e Y a soma das pintas das faces viradas para cima. (X,Y) é um par aleatório.

Exemplo 5. É seleccionado aleatoriamente um aluno de uma escola primária. Seja U a altura do aluno (em cm), V o seu peso (em Kg) e W a sua idade (em meses). (U,V,W) é um vector aleatório.

Definição 2

Seja $(X) = (X_1, \ldots, X_n)$ um vector aleatório. Dá-se o nome de **função de distribuição** de (X) e representa-se por

$$F_{(X)}(x_1, \ldots, x_n) = F_{(X1, \ldots, Xn)}(x_1, \ldots, x_n) = P[X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n], \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Vamos estudar apenas o caso de um vector aleatório com duas variáveis (X,Y).A generalização a mais variáveis é imediata.

PAR ALEATÓRIO

A um vector aleatório de dimensão 2 chamamos um **par aleatório ou variável aleatória bidimensional**.

Par aleatório discreto:

Um par aleatório diz-se discreto quando ambas as componentes são v.a.'s discretas. Assim (X,Y) é um par aleatório discreto quando os domínios de existência das v.a.'s X e Y são conjuntos finitos ou infinitos numeráveis.

- **função de probabilidade conjunta:**

A função de probabilidade conjunta do par aleatório (X,Y) é uma função f(x,y) que associa a cada elemento de $\mathbb{R}^2$ uma probabilidade,

$$f(x,y) = p_{ij} = P[X = x, Y = y].$$

Verifica as seguintes propriedades:

1. $0 \leq f(x,y) \leq 1, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$;
2. $\sum_i \sum_j f(x_i, y_j) = 1$.

Exemplo 6. Uma moeda equilibrada tem o algarismo 1 desenhado numa das faces e o algarismo 2 desenhado na outra face. A moeda é lançada ao ar duas vezes. Seja a v.a. X – soma dos dois números observados nos lançamentos e a v.a. Y – diferença dos mesmos números (o primeiro menos o segundo).

$$\begin{array}{rcccc} \Omega = \{ & (1,1), & (1,2), & (2,1), & (2,2)\} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (X,Y) = & (2,0) & (3,-1) & (3,1) & (4,0) \end{array}$$

Assim temos :

$P[X = 2, Y = 0] = 1/4$; $\qquad P[X = 3, Y = -1] = 1/4$;

$P[X = 3, Y = 1] = 1/4$; $\qquad P[X = 4, Y = 0] = 1/4$.

A função de probabilidade conjunta, por vezes é representada através de um quadro.
Para o exemplo 7 a função de probabilidade conjunta de (X,Y) vem:

X \ Y	-1	0	1
2	0	1/4	0
3	1/4	0	1/4
4	0	1/4	0

- **Função de distribuição conjunta:**

Dada uma v.a. bidimensional (par aleatório) (X,Y), discreta, a função de distribuição conjunta de (X,Y) é definida da seguinte forma:

$$F(x,y) = P[X \leq x, Y \leq y] = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} f(x_i, y_j),$$

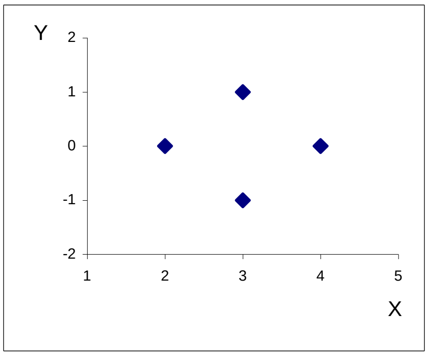
e satisfaz as seguintes condições:

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x,y) = 0$, com y fixo;
2. $\lim\limits_{y \to -\infty} F(x,y) = 0$, com x fixo;
3. $\lim\limits_{x,y \to -\infty} F(x,y) = 0$;
4. $\lim\limits_{x,y \to +\infty} F(x,y) = 1$;
5. $0 \leq F(x,y) \leq 1, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$;
6. $F(x_1,y_1) \leq F(x_2,y_2), \ \forall \ x_1 < x_2, \ \ y_1 < y_2$

Exemplo 7 (continuação)

A função de distribuição de (X,Y)

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & y < -1 & \\ 0 & -1 \leq y \leq 0 & x > 3 \\ 0 & y \geq 0 & x < 2 \\ 1/4 & -1 \leq y < 0 & x \geq 3 \\ 1/4 & y \geq 0 & 2 \leq x < 3 \\ 1/2 & 0 \leq y < 1 & 3 \leq x < 4 \\ 3/4 & 0 \leq y < 1 & x \geq 4 \\ 3/4 & y \geq 1 & 3 \leq x < 4 \\ 1 & y \geq 1 & x \geq 4 \end{cases}$$



- **Funções de probabilidade marginais:**

Apesar de no par aleatório se proceder ao estudo em conjunto de duas variáveis aleatórias, isso não impede que se possa estudar probabilisticamente cada variável componente em separado. De facto é possível obter as funções de probabilidade das variáveis X eY, individualmente, e a que damos o nome de funções de probabilidade marginais:

Função de probabilidade marginal de X,

$$f_X(x) = P[X = x, -\infty < Y < +\infty] = \sum_y f(x,y)$$

Função de probabilidade marginal de Y

$$f_Y(y) = P[-\infty < X < +\infty, Y = y] = \sum_x f(x,y)$$

Exemplo 7 (continuação)

Podemos calcular as probabilidades marginais, isto é, calcular a função de probabilidade de X eY usando a função de probabilidade conjunta.

Assim,

$P[X = 2] = P[(\{X = 2\} \cap \{Y = -1\}) \cup (\{X = 2\} \cap \{Y = 0\}) \cup (\{X = 2\} \cap \{Y = 1\})] =$

$= P[X = 2, Y = -1] + P[X = 2, Y = 0] + P[X = 2, Y = 1] = 1/4,$

$P[X = 3] = P[(\{X = 3\} \cap \{Y = -1\}) \cup (\{X = 3\} \cap \{Y = 0\}) \cup (\{X = 3\} \cap \{Y = 1\})] =$

$= P[X = 3, Y = -1] + P[X = 3, Y = 0] + P[X = 3, Y = 1] = 1/2,$

$P[X = 4] = P[(\{X = 4\} \cap \{Y = -1\}) \cup (\{X = 4\} \cap \{Y = 0\}) \cup (\{X = 4\} \cap \{Y = 1\})] =$

$= P[X = 4, Y = -1] + P[X = 4, Y = 0] + P[X = 4, Y = 1] = 1/4,$

Pelo que, a função de probabilidade marginal de X é,

$$X = \begin{cases} 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{cases}$$

Da mesma forma obtemos,

$P[Y = -1] = 1/4,$ $P[Y = 0] = 1/2$ e $P[Y = 1] = 1/4,$

A função de probabilidade marginal de Y será,

$$Y = \begin{cases} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{cases}$$

O quadro da distribuição de probabilidade conjunta de (X,Y) pode agora ser completado com mais uma linha e uma coluna para as probabilidades marginais das v.a.'s X e Y.

X \ Y	-1	0	1	
2	0	1/4	0	1/4
3	1/4	0	1/4	1/2
4	0	1/4	0	1/4
	1/4	1/2	1/4	1

função de probabilidade marginal de X
(soma de linha)

função de probabilidade marginal de Y
(soma de coluna)

INDEPENDÊNCIA ENTRE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Dada uma v.a. bidimensional (X,Y), as v.a. unidimensionais que a integram, X e Y, dizem-se independentes se

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y), \ \forall (x,y).$$

PARÂMETROS DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA

E DE UM PAR ALEATÓRIO

Valor esperado:

Seja X uma variável aleatória. O **valor esperado**, **média** ou **esperança matemática** de X, que denotamos por E[X] (também representado por μ_X ou μ), quando existe, define-se por

$$E[X] = \sum_i x_i f(x_i)$$ se X é uma variável aleatória discreta,

Propriedades do valor esperado:

Dadas X e Y duas variáveis aleatórias, e seja k uma constante real,

- E[k] = k ;
- E[kX] = k E[X];
- E[X±Y] = E[X] ± E[Y];
- E[XY] = E[X] . E[Y] + Cov[X,Y]

Se X e Y forem independentes então E[XY] = E[X] . E[Y]

Variância:

Seja X uma variável aleatória. A variância de X, que denotamos por Var[X] (também representada por σ_X^2 ou simplesmente σ^2), é definida por:

$$Var[X] = E[(X - \mu_X)^2],$$

ou seja,

$$Var[X] = \sum_i (x_i - \mu_X)^2 \cdot f(x_i) \quad \text{se X é uma v.a. discreta,}$$

Propriedades da variância:

Dadas X e Y duas variáveis aleatórias, e seja k uma constante real,

- $Var[k] = 0$;
- $Var[kX] = k^2\, Var[X]$;
- $Var[X \pm Y] = Var[X] + Var[Y] \pm 2Cov[X,Y]$;

  Se X e Y forem independentes então $Var[X \pm Y] = Var[X] + Var[Y]$
- $Var[X] = E[X^2] - E^2[X]$

  Onde,

  $$E[X^2] = \sum_i x_i^2 f(x_i) \quad \text{se X é uma variável aleatória discreta,}$$

Designa-se por **desvio-padrão** a raíz quadrada positiva da variância:

$$\sigma_X = \sigma = +\sqrt{Var(X)}.$$

Covariância:

A **covariância** entre X e Y, representa-se por Cov(X,Y) ou simplesmente $\sigma_{X,Y}$, e define-se como

$$Cov[X, Y] = \sigma_{X,Y} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)],$$

ou seja,

$$Cov[X,Y] = \sum_i \sum_j (x_i - \mu_X)(x_j - \mu_Y) \cdot f(x_i, y_j) \quad \text{se (X,Y) é uma v.a. discreta,}$$

Uma outra fórmula para calcular a covariância é

$$Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]\, E[Y].$$

onde

$$E[XY] = \sum_i \sum_j x_i y_j f(x_i, y_j) \qquad \text{se (X,Y) é uma v.a. discreta,}$$

Propriedades da Covariância:

Sejam X eY duas variáveis aleatórias e a, b, c e d constantes reais,

- X eY são variáveis independentes ⇒Cov(X,Y) =0

  (Nota: O recíproca pode não ser verdadeiro. O facto de Cov(X,Y) =0 não implica a indepndência entre X eY, pode existir uma ligação não linear entre as variáveis.);
- Cov(X,X) = Var[X];
- Cov(aX+b, cY+d) = acCov(X,Y).

A covariância depende das unidades em que se exprimem as variáveis aleatórias X eY. Sendo assim, é importante a introdução de um parâmetro para caracterizar a intensidade da ligação entre X eY, mas que não dependa das unidades, como é o caso do coeficiente de correlação.

- **Coeficiente de correlação:**

O **coeficiente de correlação** é definido como:

$$\rho = \rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Propriedades do coeficiente de correlação:

Sejam X eY duas variáveis aleatórias e a, b, c e d constantes reais,

- $-1 < \rho_{X,Y} < 1$;
- Se X e Y são variáveis aleatórias independentes, então $\rho_{X,Y} = 0$;
- O coeficiente de correlação não se altera quando as variáveis sofrem uma transformação linear positiva, ou seja,

$$\rho_{aX+b,cY+d} = \rho_{X,Y} \qquad \text{se } ac > 0.$$

MOMENTOS DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

- **Momento de ordem k relativamente a um ponto C:**

$$\mu_{kC} = E\,[(X-C)^k].$$

- **Momento ordinário de ordem k (caso em que C = 0):**

$$\mu'_k = E\,[X^k].$$

Se X for uma v.a. discreta,

$$\mu'_k = \sum_i x_i^k f(x_i)$$

Casos particulares de momentos ordinários:

$\mu'_0 = 1;$

$\mu'_1 = E\,[X] = \mu_X;$

$\mu'_2 = E\,[X^2].$

- **Momento centrado de ordem k (caso em que C=μ):**

$$\mu_k = E\,[(X - \mu)^k].$$

Se X for uma v.a. discreta,

$$\mu_k = \sum_i (x_i - \mu)^k f(x_i)$$

Casos particulares de momentos centrados:

$\mu_0 = 1;$

$\mu_1 = 0;$

$\mu_2 = E\,[(X - \mu)^2] = Var\,[X].$

Bibliografia:

Afonso, A., Nunes, C., (2010) *Estatística e Probabilidades - Aplicações e Soluções em SPSS*. Escolar Editora

Silva, M. C. M. (1993) *Estatística Aplicada à Psicologia e Ciências Sociais*, Lisboa McGraw-Hill.

Pestana D., Velosa S. (2002). *Introdução à probabilidade e estatística*. Volume 1. Fundação Calouste Gulbenkian.