



Luís Miguel Lindinho da Cunha Mendes Grilo

Introdução à Probabilidade e Estatística

(Relatório da Unidade Curricular no âmbito das Provas de Agregação)

Universidade de Évora
Escola de Ciências e Tecnologia
Departamento de Matemática

Novembro de 2025

♦ Évora, Portugal ♦

Relatório da Unidade Curricular

Este relatório da unidade curricular de “Introdução à Probabilidade e Estatística” é apresentado à Universidade de Évora no âmbito das Provas de Agregação em Matemática ao abrigo da alínea b) do Artigo 5.º do Decreto-Lei n.º 239/2007 de 19 de junho, com atualização no Decreto-Lei n.º 64/2023 de 31 de julho. O relatório foi organizado com base nas seguintes vertentes: Introdução; Objetivos e Competências a Adquirir; Programa e Conteúdos; Metodologia de Ensino; Avaliação de Conhecimentos; Calendarização e Planificação das Aulas; Bibliografia Recomendada.

Évora, 10 de novembro de 2025.



(Luís Miguel Grilo)

Preâmbulo

A unidade curricular de “Introdução à Probabilidade e Estatística” ocupa um papel fundamental na formação de engenheiros, independentemente da área de atuação — seja informática, mecatrónica ou outra. Num mundo cada vez mais orientado por dados, compreender os princípios estatísticos e probabilísticos permite ao engenheiro, em cenários de incerteza, tomar decisões mais seguras, fundamentadas e eficientes.

No contexto da engenharia, os problemas raramente são determinísticos. Existem incertezas em praticamente todos os processos: variações em materiais, falhas em sistemas, erros de medição, entre outros. A estatística fornece as ferramentas para analisar essas incertezas, identificar padrões e interpretar dados experimentais com rigor. Enquanto a probabilidade ajuda a modelar fenómenos aleatórios e a prever comportamentos futuros com base em dados passados. Além disso, a aplicação de técnicas estatísticas é essencial no controlo de qualidade, na otimização de processos, no delineamento experimental e na análise de riscos. Técnicas como a regressão, os testes de hipóteses e o controlo estatístico de processos (CEP) são amplamente utilizadas em ambientes industriais e laboratoriais.

Com o avanço da designada Indústria 4.0 e da engenharia baseada em dados, as competências estatísticas tornaram-se ainda mais valiosas. Ferramentas de análise preditiva, *machine learning* e simulações estocásticas dependem fortemente dos fundamentos abordados nesta unidade curricular. As Probabilidades e a Estatística não devem ser entendidas exclusivamente como matérias teóricas, mas também como competências práticas que capacitam os futuros engenheiros a enfrentar problemas complexos, a tomar decisões fundamentadas em dados e a inovar com maior segurança. Desenvolver este conhecimento é essencial para a prática da engenharia moderna e para a formação de profissionais críticos, com capacidades analíticas e preparados para os desafios reais da profissão.

Conteúdo

1 Introdução	9
2 Objetivos e Competências a Adquirir	10
3 Programa e Conteúdos Programáticos	10
4 Metodologia de Ensino	12
4.1 Aulas Teóricas.....	13
4.2 Aulas Práticas-Laboratoriais	14
4.3 Orientação Tutorial	14
4.4 Atendimento Pedagógico	14
5 Avaliação de Conhecimentos	14
5.1 Avaliação Contínua	15
5.2 Avaliação Final	16
6 Calendarização e Planificação das Aulas	16
6.1 Calendarização das Aulas	16
6.2 Planificação das aulas	16
6.2.1 Semanas 1 e 2.....	17
6.2.2 Semanas 3 e 4.....	18
6.2.3 Semanas 5 e 6.....	18
6.2.4 Semana 7	19
6.2.5 Semana 8	19
6.2.6 Semana 9.....	20
6.2.7 Semanas 10 e 11.....	20
6.2.8 Semana 12.....	21
6.2.9 Semana 13.....	21
6.2.10 Semana 14.....	22
7 Bibliografia Recomendada.....	23

1 Introdução

No âmbito das provas de Agregação em Matemática ao abrigo da alínea b) do Artigo 5.º do Decreto-Lei n.º 239/2007 de 19 de Junho, apresenta-se um relatório para a unidade curricular de “Introdução à Probabilidade e Estatística (IPE)”. Na Escola de Ciências e Tecnologia (ECT) da Universidade de Évora (UE), esta unidade curricular é obrigatória na estrutura curricular das 5 Licenciaturas: Engenharia de Energias Renováveis (EER), Engenharia e Gestão Industrial (EGI), Engenharia Informática (EI), Engenharia Mecatrónica (EM) e, também, Engenharia Aeroespacial (EA).

A unidade curricular de “Introdução à Probabilidade e Estatística” pertence à área científica da Matemática e está sob a responsabilidade científica, pedagógica e letiva do Departamento de Matemática (DMat), Escola de Ciências e Tecnologia da Universidade de Évora. Esta unidade curricular possui um regime de frequência às aulas presencial, no 2.º semestre do 1.º ano, na estrutura curricular das 5 Licenciaturas de engenharia mencionadas.

A duração destes cursos de engenharia é de 3 anos (6 semestres) com um total de 180 ECTS (Escala Europeia de Transferência de Créditos). A unidade curricular de “Introdução à Probabilidade e Estatística” confere um número de créditos de 6 ECTS que corresponde a 156 horas de trabalho, com 62 horas de contacto distribuídas por 30 horas letivas teóricas (T), 30 horas letivas práticas-laboratoriais (PL) e 2 horas de orientação tutorial (OT). O que corresponde a 2hT+2hPL por turma e semana, considerando 15 semanas de aulas.

De salientar, no entanto, que, parece existir uma tendência para as aulas teóricas e aulas práticas-laboratoriais se transformarem apenas em aulas teórico-práticas e, também, para as horas tutoriais deixarem de existir. Se esta situação vier a ser recomendada pela A3ES (Agência de Avaliação e Acreditação do Ensino Superior) – entidade que garante que os cursos oferecidos pelas instituições de ensino superior português cumprem os padrões de qualidade estabelecidos a nível europeu – será facilmente acomodada e não terá grande impacto na organização da unidade curricular de “Introdução à Probabilidade e Estatística”.

Experiência Letiva

A opção pela unidade curricular de “Introdução à Probabilidade e Estatística” resulta da experiência científico-pedagógica adquirida ao longo de anos de lecionação de conteúdos programáticos que integram o programa desta unidade curricular, nomeadamente no Departamento de Matemática da Escola de Ciências e Tecnologia da Universidade de Évora, desde o 2.º semestre do ano letivo 2022/2023 e, também, de alguma investigação científica que utiliza conteúdos da mesma. Acresce, ainda, o reconhecimento da importância dos conteúdos programáticos desta unidade curricular para a prática da engenharia moderna e, obviamente, para o estudo e compreensão de matérias de outras unidades curriculares, quer ao nível da Licenciatura, quer ao nível de Mestrado e de Doutoramento.

Importância Científico-Pedagógica

No processo de lecionação dos conteúdos programáticos, que decorre do trabalho pedagógico a desenvolver nas aulas teóricas, nas aulas práticas-laboratoriais, na orientação tutorial e nos atendimentos pedagógicos (AP), pretende-se que os estudantes adquiram competências básicas para entenderem e implementarem técnicas estatísticas necessárias à sua atividade profissional. Considera-se, também, fundamental que nesta unidade curricular de “Introdução à Probabilidade e Estatística” os estudantes fortaleçam conhecimentos fundamentais para desenvolver capacidades de cálculo com e sem recurso a *software* estatístico, aplicando técnicas estatísticas estudadas nos capítulos de Estatística Descritiva e de Inferência Estatística, e que aprendam a interpretar corretamente os *outputs* obtidos na análise de dados.

O sucesso da aprendizagem dos conteúdos programáticos desta unidade curricular requer alguns conhecimentos básicos de Análise Matemática e de Álgebra Linear, abordados previamente nas unidades curriculares de Análise Matemática I e de Álgebra Linear e Geometria Analítica I, no 1.º semestre do 1.º ano letivo das licenciaturas de engenharia.

2 Objetivos e Competências a Adquirir

Os conhecimentos e as competências a adquirir na unidade curricular de “Introdução à Probabilidade e Estatística” visam proporcionar aos estudantes uma base sólida em Probabilidades e Estatística, com especial enfoque na sua aplicação prática em contextos reais e na resolução de problemas, com o objetivo geral de que estes sejam úteis no seu percurso académico e profissional em áreas no domínio da engenharia. Assim, podem considerar-se como principais objetivos e competências de aprendizagem:

- Conhecer e compreender os conceitos fundamentais de estatística descritiva e utilizá-los na análise de dados;
- Conhecer e compreender os elementos básicos da teoria e do cálculo das probabilidades;
- Descrever as principais distribuições probabilísticas de variáveis discretas e contínuas e aplicá-las na descrição de fenómenos aleatórios;
- Inferir sobre parâmetros populacionais com base em distribuições amostrais (através da construção de intervalos de confiança e aplicação de testes de hipóteses);
- Construir modelos estatísticos que permitam estabelecer uma relação funcional entre variáveis;
- Utilizar um *software* estatístico para tratamento e análise de dados (por exemplo, o IBM-SPSS, Jamovi ou R).

3 Programa e Conteúdos Programáticos

Apresentam-se nesta secção o programa e os conteúdos programáticos da unidade curricular de “Introdução à Probabilidade e Estatística” organizados em 10 capítulos, que, no processo de ensino, são lecionados em aulas teóricas, aulas práticas-laboratoriais e orientação tutorial.

1. Estatística Descritiva

Noções básicas de estatística; distinção entre população e amostra; amostragem (probabilística e não-probabilística); unidade estatística e dados estatísticos; classificação dos dados segundo a sua natureza.

Formas de representação tabular e gráfica: tabela de frequências e representação gráfica de dados univariados; tabelas de contingência e representação gráfica de dados bivariados.

Medidas descritivas: medidas de localização; medidas de dispersão; momentos; medidas de assimetria e medidas de achatamento. Covariância e correlação amostral.

2. Introdução às Probabilidades

Experiência aleatória; espaço de resultados; acontecimentos; álgebra de acontecimentos. Definição de probabilidade (clássica, frequencista e subjetiva); axiomática das probabilidades e consequências; probabilidade condicional.

Teorema da probabilidade total e teorema de Bayes.

3. Variáveis Aleatórias Discretas e Contínuas

Variáveis aleatórias unidimensionais: discretas e contínuas. Função massa de probabilidade e função densidade de probabilidade; função de distribuição cumulativa. Parâmetros de variáveis aleatórias: valor esperado; variância e desvio padrão. Momentos; covariância e propriedades; coeficiente de correlação linear e propriedades.

4. Vetores Aleatórios Discretos

Variáveis aleatórias bidimensionais discretas; função massa de probabilidade conjunta e marginal; função de distribuição cumulativa conjunta; função massa de probabilidade condicionada; valor esperado condicional; independência de variáveis aleatórias.

5. Principais Distribuições de Probabilidade

Distribuições discretas: uniforme, Bernoulli e binomial e Poisson.

Distribuições contínuas: uniforme, normal, exponencial e gama.

6. Distribuições por Amostragem

Conceitos estatísticos elementares: população, amostra aleatória e amostra observada, amostragem aleatória simples. Teorema do limite central; distribuição da média amostral (quando a variância é conhecida; quando a variância é desconhecida); distribuição da diferença de médias amostrais (quando as variâncias são conhecidas; quando as variâncias são desconhecidas, mas iguais; quando as variâncias são desconhecidas, mas diferentes).

Distribuição da proporção amostral; distribuição da diferença de proporções amostrais; distribuição da variância amostral; distribuição do quociente de variâncias amostrais.

7. Estimação Pontual e Intervalar

Estimadores e estimativas; propriedades dos estimadores; métodos de estimação (momentos e verossimilhança).

Estimação pontual e estimação intervalar. Método da variável fulcral: intervalos de confiança para a média e para a diferença de médias; intervalos de confiança para a proporção e para a diferença de proporções; intervalos de confiança para a variância e para a razão de variâncias. Intervalo de confiança para amostras emparelhadas.

8. Testes de Hipóteses Paramétricos

Metodologia dos testes de hipóteses; erros de decisão (erros tipo I e II); potência do teste, valor-p. Teste de hipótese para a média: variância conhecida e variância desconhecida; teste de hipótese para a diferença de duas médias: quando as variâncias são conhecidas; quando as variâncias são desconhecidas e iguais; quando as variâncias são desconhecidas e diferentes. Teste de hipótese para a proporção; teste de hipótese para a diferença de proporções. Teste de hipótese para a variância; teste de hipótese para o quociente de variâncias. Teste de hipótese para amostras emparelhadas.

9. Testes de Hipóteses Não-Paramétricos

Testes de ajustamento: qui-quadrado; Kolmogorov-Smirnov e Shapiro-Wilk (validação de pressupostos); teste de associação: teste de independência do qui-quadrado (tabelas de contingência).

10. Análise de Regressão Linear Simples

Reta de regressão ajustada; pressupostos do modelo; estimadores dos mínimos quadrados e propriedades; teorema de Gauss-Markov; decomposição da variação total; coeficiente de determinação; tabela da ANOVA.

Inferência estatística: estimação da variância do erro; intervalos de confiança para os parâmetros e testes de hipóteses. Previsão com base no modelo estimado.

4 Metodologia de Ensino

O programa da unidade curricular de “Introdução à Probabilidade e Estatística” cumpre-se considerando aulas teóricas, aulas práticas-laboratoriais, orientação tutorial e atendimento pedagógico semanal aos estudantes. Este atendimento pedagógico está consagrado, como uma obrigatoriedade, no Artigo 109.º do Regulamento Académico da Universidade de Évora (RAUÉ), Despacho n.º 7370/2022 publicado em Diário da República, 2.ª série no n.º 111 parte E, com data de 8 de Julho de 2022.

- Aulas teóricas: Exposição de conteúdos com apoio de *slides* e apresentação de exemplos aplicados à engenharia;
- Aulas práticas: Aplicação dos conceitos teóricos na resolução de problemas concretos, bem como a utilização de *software*.

O tempo de trabalho total para uma unidade curricular contempla dois momentos diferentes:

- horas de contacto dos estudantes com o docente, com base na tipologia das aulas;
- horas de trabalho autónomo a cargo dos estudantes.

Para a unidade curricular de “Introdução à Probabilidade e Estatística” foi conferido um número de créditos de 6 ECTS e 156 horas de trabalho total, considerando que um ECTS corresponde a 26 horas de trabalho, incluindo atividades dentro e fora da sala de aula. Assim, para 15 semanas por semestre, com duas horas letivas teóricas e duas horas letivas práticas-laboratoriais (ambas por semana e por turma), obtém-se 60 horas por semestre e somando mais duas horas de orientação tutorial chega-se ao número total de 62 horas/semestre dedicadas às atividades de contacto (presenciais). Deste modo, o trabalho autónomo a cargo dos estudantes é de 94 horas (156 horas - 62 horas) por semestre. Acrescente-se, ainda, às 4 horas de carga horária letiva semanal da unidade curricular de “Introdução à Probabilidade e Estatística”, por turma, 2 horas (50%) de atendimento pedagógico (Tabela 1).

Tabela 1: Distribuição de tempo (horas) semanal e semestral, para 15 semanas.

	Horas/semana	Horas/semestrais
Aulas letivas teóricas	2	30
Aulas letivas práticas-laboratoriais	2	30
Orientação tutorial	0,13	2
Trabalho autónomo	6,27	94
Trabalho total	10,4	156
Atendimento pedagógico	2	30

Os recursos pedagógicos utilizados para o processo de ensino-aprendizagem são o quadro (tradicional com giz ou quadro branco com marcadores) e/ou meios audiovisuais e informáticos (projektor e computador).

Para um regular funcionamento da unidade curricular de “Introdução à Probabilidade e Estatística” a plataforma de e-Learning Moodle (Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment) é considerada um complemento importante, onde são disponibilizados materiais de apoio (apontamentos, *slides*, fichas de exercícios e ficheiros de dados) e muitas outras informações relevantes que permitem a interação docentes-estudantes.

A referência [1] da bibliografia está disponível na *Internet*, mas é também disponibilizada aos estudantes na plataforma Moodle. Este livro digital (*e-book*) para além de conter os conteúdos programáticos da unidade curricular disponibiliza, ainda, uma panóplia de exercícios propostos e resolvidos, alguns com recurso ao SPSS (Statistical Package for the Social Sciences), que é um *software* estatístico comercial disponível na Universidade de Évora. Todavia, nas aulas teóricas e, principalmente, nas aulas práticas-laboratoriais têm vindo a ser utilizados o Jamovi (interface gráfica gratuita do R) e o RStudio, porque se considera que numa unidade curricular de “Introdução à Probabilidade e Estatística” o mais importante é a compreensão dos conteúdos programáticos estudados e a sua correta aplicação, independentemente do programa de computador utilizado. Este é, no entanto, muito importante no processo de aprendizagem, pois permite estabelecer uma ponte direta entre a teoria e a prática computacional.

4.1 Aulas Teóricas

As aulas teóricas têm um carácter expositivo, onde são apresentados os conteúdos teóricos relativos aos capítulos do programa da unidade curricular de “Introdução à Probabilidade e Estatística”, utilizando recursos pedagógicos, como *slides* e/ou o livro recomendado na bibliografia [1], e, algumas vezes, escrevendo no quadro os conceitos fundamentais que se pretende enfatizar. As matérias teóricas são, sempre que possível, acompanhadas com exemplos práticos que promovam a aprendizagem e ilustrem a importância das mesmas, no âmbito das aplicações à engenharia. Com frequência é, também, utilizado um *software* estatístico que mostre a sua grande importância na resolução de exercícios de Estatística Descritiva e de Estatística Inferencial. Pontualmente são apresentados vídeos sobre certas matérias, nomeadamente em probabilidades, pois parece ajudar a mitigar as habituais dificuldades sentidas ao nível da formalização matemática.

Para promover o processo de ensino-aprendizagem sobre as matérias abordadas, os estudantes são estimulados a interagir com o docente, nos últimos minutos das aulas teóricas, através da metodologia pergunta-resposta. Por fim, os estudantes são incentivados e orientados a estudar individualmente as matérias abordadas nas aulas teóricas, recorrendo à bibliografia recomendada, e que está disponível na biblioteca da Universidade, mas também pesquisando criteriosamente na *Internet* e/ou na inteligência artificial.

4.2 Aulas Práticas-Laboratoriais

As aulas práticas-laboratoriais têm como objetivo principal a aplicação dos conhecimentos teóricos na resolução manual de exercícios, bem como na sua resolução computacional e, posterior, interpretação dos *outputs* produzidos. Esta tipologia de aulas funciona em articulação e complementaridade com as aulas teóricas, promovendo uma interação constante entre os docentes e os estudantes, o que permite fortalecer o processo ensino-aprendizagem. Nestas aulas pretende-se que os estudantes consolidem conteúdos programáticos adquiridos nas aulas teóricas, mas que aprofundem, também, conteúdos que por falta de tempo foram apenas abordados nas aulas teóricas (nomeadamente, resolvendo exercícios sobre intervalos de confiança e de testes de hipóteses para duas populações, recorrendo, eventualmente, a um *software* estatístico).

No Moodle encontra-se uma lista de exercícios sobre as matérias lecionadas, por capítulo, e que vão sendo resolvidos em sala de aula ou remetidos para trabalho autónomo a cargo dos estudantes.

4.3 Orientação Tutorial

As sessões tutoriais tem como principal objetivo apoiar pontualmente os estudantes no seu trabalho autónomo de estudo das matérias e/ou no desenvolvimento de algum trabalho, que exija um conhecimento mais aprofundado de alguma matéria específica, ou, ainda, na utilização de um *software* estatístico.

4.4 Atendimento Pedagógico

O atendimento pedagógico destina-se a apoiar semanalmente os estudantes no seu trabalho autónomo relacionado com o processo ensino-aprendizagem, esclarecendo dúvidas sobre matérias relativas à componente teórica ou na resolução de alguns exercícios. Este atendimento pedagógico presencial é marcado pelo docente no início do semestre, considerando a disponibilidade horária semanal dos estudantes. Este horário encontra-se afixado em papel junto ao gabinete do docente e também é disponibilizado na plataforma Moodle. Como complemento, os estudantes poderão ainda, em situações especiais, apresentar as suas dúvidas por e-mail.

5 Avaliação de Conhecimentos

A avaliação de conhecimentos é parte integrante do processo de ensino-aprendizagem, sendo utilizada para aferir os conhecimentos, aptidões e competências adquiridas pelos estudantes, em concordância com os objetivos definidos no programa da unidade curricular de “Introdução à Probabilidade e Estatística”.

A Universidade de Évora disponibiliza, antes do início do ano letivo, o calendário escolar onde se encontram as épocas de avaliação. No Artigo 110.º do RAUÉ constam os regimes de avaliação para uma determinada unidade curricular: avaliação contínua e avaliação final, e no Artigo 111.º do RAUÉ estão definidas as épocas de avaliação, em cada ano letivo: época normal; época de recurso; época especial e época extraordinária.

Na época normal os estudantes podem optar por um dos regimes de avaliação: contínua ou final. Nas restantes épocas de avaliação (recurso, especial ou extraordinária), os estudantes são avaliados pelo regime de avaliação final.

Na época de recurso podem submeter-se a avaliação os estudantes inscritos em época normal, mas que não tenham obtido aprovação (na avaliação contínua ou final ou tenham faltado ou desistido). Os estudantes que, tendo obtido aprovação na época normal, pretendam melhorar a sua classificação, podem submeter-se a nova avaliação, no exame de recurso, prevalecendo no final a melhor das classificações obtidas.

Na época especial e extraordinária, os estudantes podem realizar a avaliação final, mas com condicionantes específicas que estão previstas em regulamento.

Os elementos de avaliação são classificados utilizando o intervalo [0, 20]. Os estudantes são aprovados se obtiverem uma classificação final superior ou igual a 10 valores.

É disponibilizado aos estudantes no início do semestre um mapa de avaliações com as datas para a avaliação contínua e final. Como se encontram inscritos na unidade curricular de “Introdução à Probabilidade e Estatística” centenas de estudantes de diferentes cursos, a elaboração e aprovação do mapa de avaliações é da responsabilidade do Conselho Pedagógico da ECT, ouvidas as diferentes comissões de curso.

As especificações próprias a serem consideradas em cada um dos regimes de avaliação são apresentadas nas duas subseções seguintes.

5.1 Avaliação Contínua

O regime de avaliação contínua consiste na realização de duas frequências (F1 e F2), cada uma sujeita a uma classificação mínima de 7 valores, com igual ponderação, a realizar presencialmente. A classificação final obtém-se calculando a média ponderada das classificações das duas frequências:

$$\text{Classificação Final} = 0,5 \times F1 + 0,5 \times F2.$$

Os estudantes obtêm aprovação na unidade curricular quando totalizam uma classificação final superior ou igual a 10 valores, sendo a classificação mínima em cada frequência de 7 valores. Assim, uma classificação inferior a 7 valores (em F1), a falta, ou a desistência, numa das frequências (F1 ou F2) implica a não aprovação no regime de avaliação contínua e a consequente admissão ao regime de avaliação final.

Na tabela 2 encontram-se os capítulos a ser avaliados em cada uma das duas frequências (F1 e F2) e a correspondente ponderação.

Tabela 2: Capítulos avaliados em cada frequência e respetiva ponderação (regime de avaliação contínua).

Avaliação	Capítulos para Avaliação	Ponderação
F1	1. Estatística Descritiva	50%
	2. Introdução às Probabilidades	
	3. Variáveis Aleatórias Discretas e Contínuas	
	4. Vetores Aleatórios Discretos	
	5. Principais Distribuições de Probabilidade	
F2	6. Distribuições por Amostragem	50%
	7. Estimação Pontual e Intervalar	
	8. Testes de Hipóteses Paramétricos	
	9. Testes de Hipóteses Não-Paramétricos	
	10. Análise de Regressão Linear Simples	

5.2 Avaliação Final

No regime de avaliação final (exame normal, de recurso, especial ou extraordinária) são avaliados todos os capítulos que constituem o programa da unidade curricular de “Introdução à Probabilidade e Estatística”. Os estudantes terão aprovação à unidade curricular se obtiverem uma classificação superior ou igual a 10 valores.

6 Calendarização e Planificação das Aulas

Considerando 14 semanas de aulas efetivas num semestre letivo, apresenta-se nesta secção a calendarização dos capítulos da unidade curricular de “Introdução à Probabilidade e Estatística” e a planificação dos conteúdos programáticos a lecionar semanalmente nas aulas teóricas e nas práticas-laboratoriais, durante o semestre.

6.1 Calendarização das Aulas

Da tabela 3 consta a calendarização dos capítulos, que constituem o programa da unidade curricular de “Introdução à Probabilidade e Estatística”, pelas 14 semanas consideradas no calendário escolar. O número de horas letivas, por turma, é de $2hT + 2hPL = 4h$ semanais.

Tabela 3: Calendarização dos capítulos do programa, considerando 14 semanas letivas.

Capítulo	Semanas de aulas
1. Estatística Descritiva	2
2. Introdução às Probabilidades	2
3. Variáveis Aleatórias Discretas e Contínuas	2
4. Vetores Aleatórios Discretos	1
5. Principais Distribuições de Probabilidade	1
6. Distribuições por Amostragem	1
7. Estimação Pontual e Intervalar	2
8. Testes de Hipóteses Paramétricos	1
9. Testes de Hipóteses Não-Paramétricos	1
10. Análise de Regressão Linear Simples	1

6.2 Planificação das aulas

O programa de uma unidade curricular é um documento relativamente dinâmico que pode ser alterado ou ajustado, bem como a planificação das aulas (teóricas e práticas-laboratoriais) a lecionar. Com base no programa e conteúdos programáticos da unidade curricular de “Introdução à Probabilidade e Estatística”, que se encontram na secção 3, apresenta-se então uma planificação das aulas para 14 semanas que constituem o semestre.

Como referido anteriormente, os estudantes encontram na plataforma Moodle toda a informação considerada relevante ao regular funcionamento da unidade curricular, bem como algum material de apoio, nomeadamente: programa, que inclui os conteúdos programáticos, e a bibliografia recomendada; regimes e mapa de avaliações; horários de atendimento; textos de apoio com lista de exercícios e, ainda, regulamento académico. Os sumários de cada aula são disponibilizados no Sistema de Informação Integrado da Universidade de Évora (SIUE), após cada aula efetiva, acessíveis a consulta pelos estudantes. Importa referir que, para a planificação apresentada, haverá o incentivo e o apoio do docente em cada aula, para:

- trabalho individual ou em grupo dos estudantes, em sala de aula, para a resolução de exercícios sobre os temas em estudo e, em particular, no campo das aplicações à engenharia;
- trabalho autónomo dos estudantes, existindo exercícios disponíveis sobre a matéria em estudo no Moodle, bem como bases de dados para serem usadas com *software* estatístico;
- consulta da bibliografia recomendada, com o objetivo de fortalecer o conhecimento dos conteúdos programáticos em estudo, nas aulas teóricas e práticas-laboratoriais, e também para promover o importante contacto com os termos técnicos e o rigor da literatura científica;
- consulta livre de webgrafia com o intuito de promover a curiosidade em descobrir e pesquisar, por iniciativa própria, um tópico científico sobre a matéria em estudo.

Na subseção seguinte descreve-se como são planeados e articulados os conteúdos programáticos do programa da unidade curricular de “Introdução à Probabilidade e Estatística” ao longo do semestre.

6.2.1 Semanas 1 e 2

1. Estatística Descritiva

O capítulo de estatística descritiva é planeado de forma a construir progressivamente as bases do raciocínio estatístico, a partir de conceitos fundamentais até à análise e interpretação de dados. O percurso inicia-se com as noções básicas de estatística, destacando a distinção entre população e amostra, e a importância da amostragem, com a apresentação das principais técnicas probabilísticas e não-probabilísticas. Introduzem-se depois os conceitos de unidade estatística e dados estatísticos, abordando a classificação dos dados segundo a sua natureza (qualitativos nominais e ordinais; quantitativos discretos e contínuos). Esta base conceptual permite ao estudante compreender a adequação das técnicas descritivas aos diferentes tipos de dados.

A representação dos dados é então trabalhada através de tabelas e gráficos, começando pelas tabelas de frequências e gráficos univariados (como diagramas de barras e histogramas), evoluindo para tabelas de contingência e representações gráficas bivariadas (como os diagramas de dispersão), essenciais para analisar relações entre variáveis. Seguem-se as medidas descritivas, começando pelas medidas de localização (média, mediana, moda), seguidas das medidas de dispersão (amplitude, variância, desvio padrão, coeficiente de variação), e depois os momentos estatísticos, que conduzem naturalmente às medidas de assimetria e achatamento, úteis para descrever a forma da distribuição dos dados. Por fim, introduz-se a covariância e a correlação amostral, como medidas que permitem avaliar a relação linear entre duas variáveis quantitativas, preparando o terreno para análises estatísticas mais avançadas.

A articulação entre os conteúdos é sempre apoiada em exemplos práticos e conjuntos de dados reais ou simulados, incentivando o uso de *software* estatístico sempre que possível, para reforçar a ligação entre teoria e prática e promover uma compreensão crítica da informação estatística.

6.2.2 Semanas 3 e 4

2. Introdução às Probabilidades

A introdução às probabilidades é estruturada de modo a conduzir o estudante desde o conceito intuitivo de acaso até à formalização axiomática e aplicações práticas. O planeamento privilegia a construção progressiva do raciocínio probabilístico, articulando teoria e exemplos concretos. A abordagem inicia-se com a definição e caracterização de experiências aleatórias, destacando a diferença entre fenómenos determinísticos e aleatórios. A seguir introduz-se o espaço de resultados (ou espaço amostral) e os acontecimentos (ou eventos), enfatizando a importância da álgebra de acontecimentos que permite sejam introduzidas as operações de união, interseção e complementar.

Após esta base conceptual, apresenta-se a definição de probabilidade sob as três perspetivas — clássica, frequentista e subjetiva —, permitindo compreender o alcance e as limitações de cada uma conforme o contexto de aplicação. Essa discussão conduz naturalmente à axiomática de Kolmogorov, que fornece o enquadramento matemático rigoroso da teoria, e às suas principais consequências (como a aditividade e o cálculo da probabilidade do complementar).

Finalmente, introduz-se a probabilidade condicional e o conceito de independência de acontecimentos, estabelecendo a conexão entre a teoria e os problemas de inferência e previsão. A partir daí, apresentam-se os teoremas da probabilidade total e de Bayes, fundamentais para a tomada de decisões em contextos de incerteza.

Ao longo de todo o processo, procura-se articular a teoria com exemplos práticos, incentivando a interpretação intuitiva dos resultados. Assim, os estudantes desenvolvem não só a compreensão formal dos conceitos, mas também a capacidade de aplicar o raciocínio probabilístico em situações reais e em contextos multidisciplinares.

6.2.3 Semanas 5 e 6

3. Variáveis Aleatórias Discretas e Contínuas

A introdução às variáveis aleatórias é planeada de modo a consolidar a relação entre a teoria das probabilidades e a análise quantitativa de fenómenos aleatórios. O percurso pedagógico começa com a distinção entre variáveis aleatórias discretas e contínuas, dando relevância a exemplos reais e a representações gráficas que permitem aos estudantes visualizar e interpretar o comportamento destas variáveis.

Segue-se a apresentação das funções que descrevem essas variáveis: a função massa de probabilidade (f.m.p.), no caso discreto, e a função densidade de probabilidade (f.d.p.), no caso contínuo, com destaque para as suas propriedades essenciais (como a não negatividade). A função de distribuição cumulativa (f.d.c.) é abordada de forma unificada para ambos os tipos de variáveis, promovendo uma visão integrada e facilitando a transição entre os contextos discreto e contínuo.

Depois de definidas as variáveis e as suas distribuições, introduzem-se os parâmetros descritivos, começando pelo valor esperado, seguido da variância e do desvio padrão, como medidas de tendência central e de dispersão. Posteriormente, abordam-se os momentos de variáveis aleatórias, com ênfase nos momentos de primeira e segunda ordem, preparando os estudantes para a análise conjunta de variáveis. Introduce-se então a covariância e o coeficiente de correlação linear, discutindo as suas interpretações, propriedades e limitações na análise da dependência entre variáveis. A articulação entre os conteúdos procura equilibrar a formalização matemática com exemplos concretos e aplicações, permitindo aos estudantes compreender tanto a teoria quanto a sua utilidade prática na modelação e análise de fenómenos em diversas áreas.

6.2.4 Semana 7

4. Vetores Aleatórios Discretos

O estudo de vetores aleatórios discretos representa um avanço natural após a consolidação dos conceitos de variáveis aleatórias unidimensionais. Este tópico é planeado privilegiando uma abordagem progressiva e intuitiva, que ajuda os estudantes a compreender as interações entre duas variáveis aleatórias discretas. Assim, começa-se por introduzir a definição de variáveis aleatórias bidimensionais discretas, utilizando exemplos simples para ilustrar situações reais onde duas variáveis aleatórias surgem em conjunto. De seguida apresenta-se a f.m.p. conjunta, com destaque para a sua interpretação, propriedades e representação em tabelas ou matrizes. A partir da f.m.p. conjunta, introduz-se a f.m.p. marginal, explicando o seu cálculo, e o passo seguinte é a f.d.c. conjunta, cuja compreensão ajuda a reforçar a ideia de probabilidade acumulada em múltiplas dimensões. Avança-se depois para a probabilidade condicional no contexto bidimensional, através da f.m.p. condicionada. Este conceito permite introduzir o valor esperado condicional, fundamental para compreender dependência e modelar relações entre variáveis. A articulação culmina com o estudo da independência de variáveis aleatórias, discutida tanto do ponto de vista da f.m.p. conjunta como da definição de independência estatística. São usados exemplos contrastivos (variáveis independentes *versus* dependentes) considerados importantes para consolidar o conceito.

Ao longo do desenvolvimento destes conteúdos, vão sendo apresentados exercícios práticos e realizadas interpretações probabilísticas com o intuito de associar os conceitos teóricos à resolução de problemas reais.

6.2.5 Semana 8

5. Principais Distribuições de Probabilidade

O estudo das principais distribuições de probabilidade é planeado para fornecer aos estudantes ferramentas consideradas fundamentais para a modelação de fenómenos aleatórios em diversos contextos. É utilizada uma abordagem progressiva, partindo de distribuições discretas simples e evoluindo para distribuições contínuas mais complexas, sempre com apoio em exemplos práticos e interpretação gráfica.

O estudo inicia-se pelas distribuições discretas, começando pela distribuição uniforme discreta, útil para modelar situações de equiprobabilidade. Em seguida, introduzem-se as distribuições de Bernoulli e binomial, explorando o conceito de ensaios repetidos com dois resultados possíveis (sucesso/insucesso). Por fim, apresenta-se a distribuição de Poisson, associada à contagem de ocorrências raras num intervalo de tempo ou espaço fixos, destacando a sua ligação com a distribuição binomial em situações limite. A transição para as distribuições contínuas é efetuada reforçando a diferença fundamental entre variáveis discretas e contínuas. O estudo começa então pela distribuição uniforme contínua, estabelecendo uma analogia direta com a distribuição uniforme discreta. Segue-se a introdução da distribuição normal, pela sua centralidade teórica e prática, destacando as propriedades de simetria e o papel no Teorema do Limite Central, que será estudado no capítulo seguinte. Explora-se depois a distribuição exponencial, frequentemente usada para modelar tempos entre eventos, e a distribuição gama, como generalização da distribuição exponencial, com aplicações em fiabilidade e tempos de espera.

Para cada uma das distribuições apresentam-se: f.m.p. ou f.d.p.; representação gráfica; parâmetros característicos (média, variância) e exemplos práticos de aplicação. A articulação entre os conteúdos destacará as ligações entre distribuições (por exemplo, distribuição Bernoulli como caso particular da binomial; distribuição exponencial como caso particular da distribuição gama) e a sua utilidade em contextos reais.

6.2.6 Semana 9

6. Distribuições por Amostragem

As distribuições por amostragem são essenciais para estabelecer a ponte entre a estatística descritiva e a inferência estatística. O objetivo principal consiste em desenvolver nos estudantes a compreensão de como as estatísticas amostrais (média, proporção, variância) se comportam quando extraídas de amostras aleatórias e como esse comportamento permite inferir propriedades da população. O planeamento inicia-se com a consolidação de conceitos estatísticos elementares, como população, amostra aleatória, amostra observada e o processo de amostragem aleatória simples. Estes conceitos são fundamentais para estabelecer o contexto da variabilidade amostral e da incerteza associada às estimativas.

Vem depois a introdução ao Teorema do Limite Central (TLC), com destaque para a sua importância teórica e prática: o TLC justifica o uso da distribuição normal como aproximação para a distribuição da média amostral, mesmo quando a população não é normal, desde que a dimensão da amostra seja suficientemente grande. Com base neste resultado, introduzem-se as distribuições da média amostral: quando a variância populacional é conhecida, utiliza-se a distribuição normal; quando a variância é desconhecida, aplica-se a distribuição t de Student, para amostras pequenas. Abordam-se depois, a distribuição da diferença de médias amostrais, explorando três cenários: variâncias conhecidas (uso da distribuição normal); variâncias desconhecidas, mas iguais (uso da t de Student com variância combinada) e variâncias desconhecidas e diferentes (uso da t de Welch, com graus de liberdade ajustados). Segue-se a distribuição da proporção amostral e é, também, abordada a distribuição da diferença de proporções amostrais, fundamentais em contextos binários. Depois é apresentada a distribuição da variância amostral (associada à distribuição qui-quadrado) e, por fim, é abordada a distribuição do quociente de variâncias amostrais, que segue uma distribuição F de Fisher.

A articulação destes conteúdos é desenvolve-se com o apoio de exemplos práticos e se possível com a exploração visual das distribuições.

6.2.7 Semanas 10 e 11

7. Estimação Pontual e Intervalar

O estudo da estimação pontual e intervalar marca a transição entre a teoria das distribuições amostrais e a inferência estatística propriamente dita. O planeamento destes conteúdos é orientado para a compreensão do processo de inferir sobre parâmetros populacionais a partir de dados amostrais, destacando o papel da incerteza e da variabilidade inerentes à amostragem.

A abordagem inicia-se com a distinção entre estimadores (funções estatísticas aplicadas à amostra) e estimativas (valores numéricos obtidos a partir dos dados da amostra). Seguem-se depois as principais propriedades dos estimadores — enviesamento, consistência e eficiência — como critérios fundamentais para avaliar a qualidade das estimativas. Prossegue-se com a introdução dos métodos de estimação, nomeadamente: método dos momentos, baseado na igualdade entre momentos teóricos e amostrais; método da verossimilhança, que consiste em maximizar a função de verossimilhança para encontrar o estimador mais plausível.

A transição para a estimação intervalar permite formalizar a incerteza associada à estimação pontual. Apresenta-se o conceito de intervalo de confiança e a interpretação correta da sua significância (nível de confiança). o método da

variável fulcral é então introduzido como instrumento central para a construção de intervalos de confiança, permitindo derivar: intervalos de confiança para a média (com variância conhecida e desconhecida); para a proporção e para a variância (usando a distribuição qui-quadrado).

Abordam-se, também, os intervalos de confiança para a diferença de médias (em vários cenários: variâncias conhecidas, desconhecidas mas iguais, ou diferentes); para a diferença de proporções; para a razão de variâncias (usando a distribuição F de Fisher); e, ainda, para a diferença de médias em amostras emparelhadas, frequentemente usada em estudos antes-depois.

A articulação dos conteúdos realizada-se com recurso a problemas reais, simulações computacionais e visualizações gráficas, para promover a intuição sobre o impacto da dimensão amostral, variabilidade e nível de confiança nos intervalos obtidos. O uso de *software* estatístico é fortemente recomendado para explorar exemplos mais complexos e reforçar a ligação entre teoria e prática.

6.2.8 Semana 12

8. Testes de Hipóteses Paramétricos

O capítulo relativo aos testes de hipóteses paramétricos é estruturado de forma a consolidar os fundamentos da inferência estatística, preparando os estudantes para a tomada de decisões com base em dados. O planeamento inicia-se com a metodologia geral dos testes de hipóteses, explicando-se o processo de formulação das hipóteses nula e alternativa, o papel da estatística de teste e a definição de regiões de rejeição.

Posteriormente, introduzem-se os conceitos de erros de decisão: erro do tipo I (falso positivo) e erro do tipo II (falso negativo); a potência do teste, como probabilidade de rejeitar corretamente a hipótese nula; o valor-p, como medida da evidência contra a hipótese nula, facilitando a interpretação prática do resultado.

Com esta base, avança-se então para os testes de hipótese sobre parâmetros populacionais, começando pela média de uma população: com variância conhecida (teste z); com variância desconhecida (teste t). De seguida, abordam-se os testes para a diferença entre duas médias: com variâncias conhecidas (teste z para duas amostras independentes); com variâncias desconhecidas e iguais (teste t); com variâncias desconhecidas e diferentes (teste t de Welch). Segue-se o teste para proporção de uma população (teste z) e aborda-se, também, o teste da diferença de proporções entre duas populações (teste z para duas proporções). Trata-se depois do teste para a variância de uma população (teste qui-quadrado) e aborda-se o teste da razão de variâncias de duas populações (teste F de Fisher). Por fim, apresenta-se o teste às médias de amostras emparelhadas, em contextos como estudos antes-depois (teste t para diferenças emparelhadas).

A articulação dos conteúdos desenvolve-se com recurso a exemplos reais, interpretação de resultados (especialmente do valor-p) e visualizações gráficas das regiões de rejeição. O uso de *software* estatístico é incentivado para a realização de testes mais complexos, reforçando a ligação entre a teoria estatística e a prática de análise de dados.

6.2.9 Semana 13

9. Testes de Hipóteses Não-Paramétricos

O estudo dos testes de hipóteses não paramétricos é planeado como um complemento natural aos testes paramétricos, enfatizando a sua importância quando os pressupostos clássicos — como normalidade ou

homogeneidade de variâncias — não são satisfeitos. O objetivo é proporcionar aos estudantes instrumentos robustos para analisar dados de natureza ordinal ou com distribuições não normais.

A abordagem inicia-se com uma introdução aos testes não paramétricos, destacando as diferenças em relação aos testes paramétricos e os contextos em que devem ser aplicados. Esta parte inicial é essencial para promover uma compreensão crítica da escolha do teste estatístico mais adequado ao tipo de dados disponível.

Abordam-se de seguida os testes de ajustamento, começando pelo teste do qui-quadrado de ajustamento, utilizado para verificar se a distribuição observada de uma variável segue uma distribuição teórica específica. Posteriormente, apresentam-se os testes de Kolmogorov-Smirnov e Shapiro-Wilk, que permitem avaliar o pressuposto de normalidade dos dados.

A continuação natural é o teste de independência do qui-quadrado, aplicado a tabelas de contingência, que permite avaliar a associação entre variáveis categóricas. Este tema oferece uma oportunidade para discutir a análise de dados qualitativos e a interpretação prática dos resultados em diferentes contextos, como nas ciências sociais, na saúde e na educação.

Ao longo da sequência apresentada valoriza-se a interpretação dos resultados, recorrendo a exemplos aplicados e a *software* estatístico para facilitar a compreensão dos procedimentos e das condições de validade de cada teste. Na articulação dos conteúdos enfatiza-se a ligação entre pressupostos, escolha do teste e interpretação, promovendo uma visão integrada e aplicada da análise estatística.

6.2.10 Semana 14

10. Análise de Regressão Linear Simples

Este último capítulo sobre Análise de Regressão Linear Simples é planeado como uma aplicação prática da inferência estatística à modelação de relações entre variáveis, considerando que o objetivo principal é desenvolver a capacidade de compreender, estimar e interpretar modelos lineares, articulando fundamentos teóricos com aplicações empíricas.

A sequência inicia-se com a formulação do modelo de regressão linear simples e pela interpretação dos seus componentes — variável explicativa, variável resposta e reta de regressão ajustada. A partir dessa introdução, apresentam-se os pressupostos do modelo clássico (linearidade, independência, homocedasticidade e normalidade dos erros), reforçando a importância de os verificar antes de tirar conclusões inferenciais.

De seguida introduz-se o método dos mínimos quadrados (MMQ) para a estimação dos parâmetros do modelo, destacando as suas propriedades estatísticas e o Teorema de Gauss-Markov, que estabelece a eficiência dos estimadores lineares centrados (BLUE – Best Linear Unbiased Estimators).

Posteriormente, aborda-se a decomposição da variação total (em variação explicada e variação residual) e o coeficiente de determinação, que mede a qualidade do ajustamento do modelo. A tabela da ANOVA é então apresentada como instrumento que resume esta decomposição e permite testar a significância global da regressão.

Na vertente inferencial, exploram-se: a estimação da variância do erro e o seu papel na construção de intervalos e testes; os intervalos de confiança para os parâmetros do modelo; os testes de hipóteses associados (por exemplo, testar se o parâmetro associado à variável explicativa é significativamente diferente de zero). Por fim, introduz-se a previsão com base no modelo estimado, enfatizando a distinção entre previsão pontual e intervalar, e a importância de considerar a incerteza associada às estimativas.

Na articulação dos conteúdos privilegia-se a integração entre teoria e prática, com uso de dados reais, se possível, e claro com representações gráficas e utilização de *software* estatístico, para que o estudante desenvolva tanto a compreensão conceptual como a competência analítica na aplicação de modelos de regressão.

7 Bibliografia Recomendada

Para a bibliografia da unidade curricular de “Introdução à Probabilidade e Estatística” recomendam-se edições de livros relativamente recentes, alguns de acesso livre na *Internet* e, também, disponíveis na Biblioteca da Universidade de Évora.

1. Afonso, A. e Nunes, C., *Estatística e Probabilidades – Aplicações e Soluções em SPSS*, Escolar Editora, 2019.
2. Dalgaard, P., *Introductory Statistics with R*, 2ª edição, Springer, 2008.
3. Guimarães, R. C. e Cabral, J. A. S., *Estatística*, McGraw-Hill, 2007.
4. Martins, M. E. G., *Introdução à Probabilidade e à Estatística. Com complementos de Excel*, SPE, 2005.
5. Montgomery, D. C. e Runger, G. C., *Applied Statistics and Probability for Engineers*, 7ª edição, Wiley, 2018.
6. Morais, M. C., *Probabilidades e Estatística. Teoria, Exemplos & Exercícios*, Coleção Ensino da Ciência e da Tecnologia, 2ª edição, IST Press, 2023.
7. Murteira, B., Ribeiro, C. Silva, J. e Pimenta, C., *Introdução à Estatística*, 2ª edição, McGraw-Hill, 2008.
8. Paulino, C. D. e Branco, J. A., *Exercícios de Probabilidade e Estatística*, Escolar Editora, 2005.
9. Pedrosa, A. C. e Gama, S. M. A., *Introdução Computacional à Probabilidade e Estatística*, Porto Editora, 2004.
10. Pestana, D. D. e Velosa, S. F., *Introdução à Probabilidade e à Estatística*, 4ª edição, Fundação Calouste Gulbenkian, 2008.
11. Ross, S. M., *Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists*, 5ª edição, Elsevier, 2014.