

Lição de síntese
Carlos Correia Ramos

Dinâmica simbólica e aplicações

Sumário a que se refere a alínea 2c) do artigo 8^o do DL 239/2007 publicado no Diário da República, 1a Série, n 116 de 19 de Junho de 2007

Universidade de Évora, novembro de 2024

Agregação

Matemática

para a Margarida

Dinâmica simbólica e aplicações

Introdução

Apresenta-se um sumário da lição de síntese que será apresentada em provas públicas de agregação. A lição incidirá sobre alguma da investigação em dinâmica simbólica e aplicações, desenvolvida após a realização do doutoramento.

Não serão apresentados todos os trabalhos e resultados obtidos, mas uma sistematização daquilo que está publicado e se tornou de algum modo mais relevante ou consequente. É também, e acima de tudo, uma oportunidade para rever o trabalho desenvolvido sintetizando-o, e organizar o trabalho futuro.

Em relação ao contexto científico-tecnológico atual é comum falar-se de *era da informação*. Sistemas simbólicos, combinatória, complexidade são palavras chaves decisivas mas representam também temas ainda subexplorados. Os sistemas simbólicos estão de modo implícito e explícito na ordem do dia. De modo implícito porque a essência do estudo da informação é a representação simbólica de objetos e o estudo do processamento da informação passa por estudar as transformações nas representações simbólicas dos objetos. De um modo explícito porque muitas áreas da matemática ou da ciência em geral a eles recorrem, ou com eles se relacionam cada vez mais frequentemente - em desenvolvimentos teóricos da área dos sistemas dinâmicos, em outras áreas da matemática e nas aplicações. Mas o potencial está ainda por cumprir. Em particular, na relação entre computação e fenómenos naturais, onde a dinâmica simbólica deve ser um tema incontornável. Na criptografia, na inteligência artificial e na automação. Ainda na compreensão do que é a vida. Todos estes tópicos e áreas têm muito que beneficiar dos métodos combinatórios e simbólicos. Existe pouco trabalho desenvolvido comparativamente ao que é ainda o empenho e esforço da comunidade científica na abordagem dos problemas científicos atuais, com as ferramentas e conceitos matemáticos já clássicos.

O que se apresentará na sessão pública são contributos para o desenvolvimento da dinâmica simbólica tanto de um ponto de vista conceptual, como desenvolvimentos em áreas da matemática como sistemas dinâmicos discretos de dimensão um, certas estrutura algébricas, autómatos celulares e aplicações aos sistemas complexos.

A estrutura da apresentação é a seguinte:

1. Dinâmica do intervalo
 - 1.1 Aplicações do intervalo e cadeias de Markov topológicas
 - 1.2 Aplicações do intervalo com escape
 - 1.3 Subsistemas de Markov invariantes
2. Álgebra e dinâmica
 - 2.1 Representações de álgebras de Cuntz-Krieger
 - 2.2 Semigrupos numéricos e órbitas periódicas
3. Autômatos celulares
 - 3.1 Iteradas de aplicações do intervalo e autômatos celulares
 - 3.2 Dinâmica evolucionária
 - 3.3 Autômatos celulares probabilísticos
4. Aplicações - movimento complexo
5. Trabalho futuro

No que segue apresenta-se a descrição detalhada de cada parte indicada.

Nota: no resumo, as referências próprias serão indicadas tendo em conta a representação que consta no cv, com a data de publicação adicionada, na forma [número no cv](ano). As referências de outros autores serão indicadas entre parêntesis com nomes abreviados e ano, na forma [nome-ano].

1 Dinâmica do intervalo

A dinâmica do intervalo é um tópico estrutural na área dos sistemas dinâmicos fornecendo conceitos, resultados de base e linhas de investigação. O seu interesse, para além do assunto em si, decorre da simplicidade no enunciar alguns dos problemas e da variedade de resultados não triviais. As aplicações são diversificadas e as relações com outras áreas da matemática e da ciência são relevantes: equações diferenciais, equações às diferenças, análise funcional, geometria, topologia, probabilidade e estatística, álgebra.

Como exemplo representativo desta interação destaca-se o trabalho de Poincaré, ele próprio fundador dos sistemas dinâmicos modernos e precursor da dinâmica simbólica, a par de Hadamard, sobre ações de grupos discretos de isometrias do plano hiperbólico. Este tópico relaciona de modo não trivial conceitos chave da geometria e da álgebra com conceitos fundacionais dos sistemas dinâmicos discretos. Nomeadamente, a aplicação fronteira, que age no conjunto limite do grupo (pode ser vista como uma aplicação do círculo no círculo ou como uma aplicação do intervalo identificando os bordos), está relacionada com o fluxo geodésico de superfícies de curvatura negativa e com as simetrias ou pavimentações do plano hiperbólico, [B-S1979], [A-F1991], [1]*(2003).

Por outro lado, a busca de invariantes para classificar os sistemas dinâmicos discretos, em particular classificar as aplicações do intervalo, tornou-se um tema de estudo intenso, com diferentes abordagens e técnicas. Os invariantes podem ter natureza diversa: invariantes algébricos, combinatórios ou numéricos, como são exemplo o grupo de Bowen-Franks, o grupo dimensão, as sequências de amassamento, a entropia topológica, entre outros. Destaca-se o trabalho de Milnor e de Thurston, que introduziram a teoria do amassamento [M-T1988] e técnicas que influenciaram de forma decisiva o estudo da dinâmica do intervalo. Destaca-se ainda o trabalho de Sousa Ramos e dos seus colegas que ao longo dos anos 80, 90 e na primeira década de 2000 desenvolveram técnicas específicas usando dinâmica simbólica, estruturas em árvores, cadeias de Markov topológicas, métodos homológicos e a teoria de amassamento para estudar e classificar diversos sistemas dinâmicos discretos. Nesse contexto foi desenvolvido algum trabalho [19](2013), [11](2010), [8](2009), [3](2006) e [3A](2007), que não será tratado na apresentação.

O trabalho descrito na presente seção está baseado nos desenvolvimentos em torno de uma classe de aplicações $\mathcal{M}(I)$, onde I é um intervalo. São essencialmente aplicações do intervalo, expansivas, com partição de Markov e uma condição adicional que assegura o sistema ser topologicamente *mixing*. Esta classe, apesar de algo restrita, permitiu desenvolver o tema livremente, sem demasiadas tecnicidades e obter resultados de modo natural. Generalizações estão a ser desenvolvidas, enfraquecendo uma ou outra das propriedades exigidas e levando a caminhos promissores como será referido na seção 5. Classes de aplicações semelhantes são naturalmente utilizadas em muitas referências já clássicas, com pequenas nuances, como por exemplo [B-G1997], [P-V2023], entre muitas outras.

Parte do trabalho desenvolvido neste âmbito foca-se na perturbação ou transformação de partições de Markov de uma aplicação ou família de aplicações do intervalo analisando quais as alterações que ocorrem no sistema em função das alterações da partição. É uma abordagem usada por outros autores, veja-se por exemplo o trabalho [B-S-L-Z2001] ou [T-K2010], que estudam perturbações de partições de Markov e o efeito nas dinâmicas. No trabalho apresentado usam-se sistematicamente refinamentos de partições de Markov que são também partições de Markov para uma aplicação dada e a perturbação passa pela alteração de algum dos ramos da função num dos elementos da partição refinada. Esta abordagem está a revelar-se importante tanto para o desenvolvimento da teoria como para as possíveis aplicações da dinâmica simbólica a fenómenos reais.

- [B-S1979] R. Bowen, C. Series, *Markov maps associated with Fuchsian groups*. Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. 50 (1979), 153–170.
- [A-F1991] R. Adler, L. Flatto, *Geodesic flows, interval maps, and symbolic dynamics*, Bull. Amer. Math. Soc. 25 (1991), no. 2, 229–334.
- [M-T1988] J. Milnor, W. Thurston, *On iterated maps of the interval*, Dynamical systems, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1342, Berlin: Springer, (1988) pp. 465–563.
- [B-G1997] A. Boyarsky, P. Gora, *Laws of Chaos: Invariant Measures and Dynamical Systems in One Dimension*, Birkhäuser; 1997th edition.
- [P-V2023] M. Pollicott, P. Vytnova, *Accurate Bounds on Lyapunov Exponents for Expanding Maps of the Interval*. Commun. Math. Phys. 397, (2023), 485–502.
- [B-S-L-Z2001] E. M. Bollt, T. Stanford, Y. -C. Lai, and K. Zyczkovski, *What symbolic dynamics do we get with a misplaced partition?*, Physica D 154, (2001), 259–286.
- [T-K2010] H. Teramoto and T. Komatsuzaki, *How does a choice of Markov partition affect the resultant symbolic dynamics?*, Chaos 20, 037113 (2010), 1–7.

1.1 Aplicações do intervalo e cadeias de Markov topológicas

Nesta subseção é resumido o trabalho desenvolvido em diversos artigos sobre aplicações iteradas do intervalo. Alguns outros artigos sobre o mesmo tema ficam de fora do resumo de modo a tornar a descrição mais concisa. Entre os que ficam de fora estão aplicações da dinâmica simbólica às equações diferenciais ordinárias ou parciais, por exemplo [16](2012), [21](2013), [26](2016), [30](2018), [42](2023), [43](2024), ações de grupos discretos do plano hiperbólico [1]*(2003), entre outros.

Esta seção foca-se no trabalho iniciado em [7](2008) e com sequência constituída pelos artigos [12](2011), [17](2012), [20](2013), [23]*(2014), [28](2017), e [33](2019), muitos deles relacionando aspetos da dinâmica topológica com a classificação de certas álgebras de operadores e das sua representações.

Consideramos a classe de aplicações do intervalo cujo domínio está contido num intervalo I .

Definição 1 *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Uma aplicação f está na classe $\mathcal{M}(I)$ se satisfaz as propriedades (P1), (P2), (P3'), (P4), apresentadas abaixo, e está na classe $\mathcal{PL}(I)$ se satisfaz as propriedades (P1), (P2), (P3), (P4):*

- (P1) *[Existência de uma partição finita do domínio de f] Existe uma partição $C = \{I_1, \dots, I_n\}$ de intervalos fechados com $\#(I_i \cap I_j) \leq 1$ para $i \neq j$, $\text{dom}(f) = \bigcup_{j=1}^n I_j \subset I$ e $\text{im}(f) = I$.*
- (P2) *[Propriedade de Markov] Para todo $i = 1, \dots, n$ o conjunto $f(I_i) \cap \left(\bigcup_{j=1}^n I_j\right)$ é uma união não vazia de intervalos de C .*
- (P3) *[Aplicação seccionalmente linear e expansiva] $f|_{I_j} \in \mathcal{C}^1(I_j)$ e $|f'_{|I_j}(x)| = d_j > 1$, para todo $x \in I_j$, $j = 1, \dots, n$.*
- (P3') *[Aplicação expansiva] $f|_{I_j} \in \mathcal{C}^1(I_j)$ e $|f'_{|I_j}(x)| > b > 1$, para todo $x \in I_j$, $j = 1, \dots, n$, e algum b .*
- (P4) *[Aperiodicidade] Para todo intervalo I_j com $j = 1, \dots, n$ existe um número natural q tal que $\text{dom}(f) \subset f^q(I_j)$.*

Naturalmente $\mathcal{PL}(I) \subset \mathcal{M}(I)$. A partição minimal C que satisfaz a Definição 1 é denotada por C_f . A propriedade de Markov (P2) permite a codificação das transições entre intervalos de C na chamada matriz de transição, de Markov, $n \times n$, $A_f = (a_{ij})$, definida do seguinte modo:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } f(\overset{\circ}{I}_i) \supset \overset{\circ}{I}_j, \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

onde $\overset{\circ}{J}$ representa o interior de um conjunto J .

Os pontos fronteiros de uma partição $C = \{I_1, \dots, I_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, originada de uma aplicação $f \in \mathcal{M}(I)$, como em (P1), constituem naturalmente um conjunto ordenado, $\Gamma = \partial C$,

$$\Gamma = \{c_0, c_1^-, c_1^+, \dots, c_{n-1}^-, c_{n-1}^+, c_n\},$$

de números reais, tais que

$$c_0 < c_1^- \leq c_1^+ < c_2^- \leq \dots < c_{n-1}^- \leq c_{n-1}^+ < c_n,$$

e

$$I_1 = [c_0, c_1^-], \dots, I_j = [c_{j-1}^+, c_j^-], \dots, I_n = [c_{n-1}^+, c_n].$$

Consideramos a coleção de intervalos abertos $\{E_1, \dots, E_{n-1}\}$, dados por

$$E_1 =]c_1^-, c_1^+[, \dots, E_{n-1} =]c_{n-1}^-, c_{n-1}^+[,$$

de modo que

$$I := [c_0, c_n] = (\cup_{j=1}^n I_j) \bigcup (\cup_{j=1}^{n-1} E_j).$$

Neste caso, os elementos de Γ são chamados de *pontos singulares* de f e, devido à propriedade de Markov, Γ satisfaz a propriedade $f(\Gamma) \subset \Gamma$. Denota-se $\Gamma_f = \partial C_f$.

Uma aplicação $f \in \mathcal{M}(I)$ determina unicamente, com a partição minimal $C_f = \{I_1, \dots, I_n\}$, os seguintes objectos:

(i) O conjunto f -invariante

$$\Omega_f := \{x \in I : f^k(x) \in \text{dom}(f) \text{ para todo } k = 0, 1, \dots\}.$$

(ii) A coleção de conjuntos abertos $\{E_1, \dots, E_{n-1}\}$, tais que

$$I - \bigcup_{j=1}^n I_j = \bigcup_{j=1}^{n-1} E_j.$$

(iii) A matriz de transição $A_f = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$.

Os intervalos $I_1, \dots, I_n$ são chamados de *intervalos de Markov* de f e $E_1, \dots, E_{n-1}$ são chamados de *intervalos de escape* (eventualmente vazios) de f .

O conjunto Ω_f , de Cantor, é o conjunto de pontos que permanece no domínio $\text{dom}(f)$ por iteração de f e o conjunto aberto

$$E_f := I - \Omega_f = \bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k} \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} E_j \right)$$

é chamado de *conjunto de escape* de f . Todo o ponto em E_f eventualmente atinge o interior de um intervalo de escape, E_j , por iteração de f e a iteração pára. Um ponto x está no conjunto de escape E_f de f se e só se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x) \notin \text{dom}(f)$.

Se $c_j^- = c_j^+$, para algum j , então $E_j = \emptyset$ e c_j é um ponto singular, ponto crítico ou de descontinuidade de f . Notemos que se $c_j^- = c_j^+$, a notação c_j^- , c_j^+ representa os limites laterais do ponto c_j , isto é,

$$c_j^\pm = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^\pm} c_j \pm \varepsilon.$$

No entanto, se $c_j^- < c_j^+$, isto é, se $E_j \neq \emptyset$, usamos a notação $c_j^{-,-}$, $c_j^{-,+}$, $c_j^{+,-}$, $c_j^{+,+}$ para representar os limites laterais correspondentes, ou seja,

$$c_j^{\pm,\pm} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^\pm} c_j^\pm \pm \varepsilon.$$

A *órbita* de um ponto $x \in \Omega_f$ é o conjunto $\text{orb}_f(x) := \{f^k(x) : k \in \mathbb{N}\}$. Consideramos a relação de equivalência R_f , em Ω_f , definida por

$$R_f := \{(x, y) : f^n(x) = f^m(y) \text{ for some } n, m \in \mathbb{N}_0\}.$$

A relação R_f é uma relação de equivalência contável no sentido em que cada classe de equivalência de $x \in I$, $R_f(x)$, é um conjunto contável. Denotamos $x \sim y$ sempre que $(x, y) \in R_f$, e $R_f(x)$ é chamada de *órbita generalizada* de $x \in I$.

Esta é a definição e os conceitos que servem de base para grande parte do trabalho apresentado no resumo.

É de destacar o trabalho [23]*(2014) onde num dos resultados apresentados se mostra como uma matriz com entradas em $\{0, 1\}$, sem linhas nem colunas de zeros, pode ser realizada como matriz de Markov de uma aplicação do intervalo. Na verdade, de uma família de aplicações do intervalo topologicamente conjugadas. Este resultado já tinha sido obtido, em [12](2011), para certo tipo de matrizes chamadas de *tipo intervalo*. Para que este processo seja possível em geral, é necessário usar uma técnica, chamada *state splitting*, que permite torneir o problema das matrizes que não são de tipo intervalo. Deste modo, dada uma matriz A , primitiva, é possível obter famílias de aplicações de Markov expansivas que realizam A como matriz de Markov A_f para certa família de aplicações $f \in \mathcal{M}$, como indicado acima. Este resultado é estruturante e teve como consequências os resultados dos artigos [27](2016), [29](2017) referidos em seções que se seguem, assim como aplicações à geometria [19](2013) onde se estudaram invariantes topológicos, para as aplicações do intervalo, mas de natureza geométrica - *sístolas*, entre outros. Estes resultados estão também na base de desenvolvimentos futuros que serão descritos na seção 5.

1.2 Aplicações do intervalo com escape

Nesta subsecção resume-se o trabalho desenvolvido em [35]*(2019), onde se estuda a classificação topológica das aplicações do intervalo expansivas que possuem partição de Markov. Esta família de aplicações, como referido anteriormente, foi estudada e sistematizada desde [7](2008). Em [35]*(2019) desenvolveu-se o formalismo para incluir os casos em que existem estados de escape, o que, por um lado, permite o estudo de sistemas abertos, por outro, trata o caso mais geral, relativamente à classe $\mathcal{M}$.

Em concreto, é introduzida uma matriz de transição, a matriz de escape, como um invariante completo, a menos de conjugação por uma matriz de permutação. Os estados de escape são associados a colunas nulas na matriz de escape. A dinâmica simbólica é implementada recorrendo a uma representação simbólica adequada para os estados de escape que estão relacionados com a topologia do intervalo. As

sequências simbólicas admissíveis que representam órbitas do sistema passam a ser distinguidas de regulares ou de escape. As sequências de escape são neste caso finitas devido à existência de um instante de tempo, ou iterada, em que a órbita entra num intervalo de escape.

Por outro lado, em [35]*(2019), é também dado um resultado de realização, isto é, são estabelecidas condições para que uma certa matriz de entradas em $\{0, 1\}$, seja uma matriz de escape para uma aplicação de Markov. Este problema tinha sido já resolvido para matrizes de transição sem linhas ou colunas nulas, em [12](2011) e [23]*(2014), como referido acima. Deste modo, ficou aberto o caminho para estudar de modo sistemático e completo as subdinâmicas de um dado sistema de Markov, que são também Markov. Esse trabalho ficou concluído e está publicado [37](2021), sendo o tópico a abordar na secção seguinte.

1.3 Subsistemas de Markov invariantes

Apresenta-se o problema de decidir quando uma restrição de uma aplicação $f \in \mathcal{M}$ está também na classe $\mathcal{M}$. Este problema foi abordado e resolvido em [37](2021). Considera-se $f \in \mathcal{M}(I)$ para um intervalo I , e um subconjunto $J = \cup_{i=1}^m J_i \subset I$, sendo J_i , $i = 1, \dots, m$ uma certa coleção de intervalos fechados. Seja $[J]$ o intervalo minimal que satisfaz $J \subset [J]$. Um dos objectivos do trabalho foi determinar as condições sob as quais a aplicação $g := f|_J$ pertence a $\mathcal{M}([J])$. Este problema está relacionado com o estudo dos conjuntos de Cantor invariantes por $f \in \mathcal{M}(I)$ e a classificação dos subsistemas dinâmicos discretos (Ω_g, g) de (Ω_f, f) , com $\Omega_g \subset \Omega_f$, $g := f|_J$. De facto se $J \subset I$ satisfaz certas condições de modo a $g := f|_J$ pertencer a $\mathcal{M}([J])$ então o conjunto invariante maximal para g , Ω_g , é um conjunto de Cantor invariante por f , isto é, $\Omega_g \subset \Omega_f$ e $f(\Omega_g) = \Omega_g$.

O método utilizado para abordar esta questão foi transformar refinamentos da partição de Markov para a aplicação f , removendo intervalos apropriados, e utilizar a coleção de intervalos obtida como partição de suporte - domínio, para uma nova aplicação g , no contexto do formalismo desenvolvido em [35]*(2019). A remoção de intervalos de partições de Markov refinadas de uma aplicação f produz aplicações com um conjunto de escape não trivial - pelo menos o intervalo removido está contido no conjunto de escape da nova aplicação. Quando esta remoção não afeta a propriedade de Markov, nem a primitividade da nova matriz de transição, as aplicações obtidas pertencem à classe $\mathcal{M}$. Um dos problemas centrais é decidir quando a matriz A_g obtida é primitiva nesta estrutura. Este problema é resolvido com o conceito de estados removíveis, que são na verdade identificados por certas palavras admissíveis no alfabeto simbólico associado a f . Em [37](2021) foi dada uma caracterização destes estados removíveis.

2 Álgebra e dinâmica

A relação entre os sistemas dinâmicos e as álgebras de operadores é profunda e desenvolveu-se desde a origem da teoria dos operadores. Em particular, dos trabalhos de Von Neumann e Birkhoff, que desempenharam um papel fundamental nesses dois contextos. Diversos tipos de álgebras de operadores foram surgindo de acordo com especificidades e propriedades adicionais que as álgebras possam verificar, como por exemplo o fecho para diferentes topologias, entre outras características. Uma álgebra fundamental é a álgebra de operadores limitados definidos num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, e denotada $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. As álgebras de von Neumann e as álgebras C^* são dois dos tipos mais estudados, ambas podem ser definidas como subálgebras de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Uma álgebra de von Neumann, M é uma subálgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, auto-adjunta, com identidade e fechada para a topologia fraca, ou que coincide com o seu bicomutante, *i.e.*, $M = M''$. Esta particularidade torna as álgebras de von Neumann particularmente apelativas, uma vez que existe uma condição puramente algébrica (bicomutante) equivalente a uma propriedade analítica (fecho). Foram estudadas álgebras de von Neumann relacionadas com sistemas dinâmicos em [2A](2006), [6](2007), mas o tema não será abordado neste resumo. Uma álgebra C^* é uma subálgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, auto-adjunta, fechada para a topologia da norma. Na relação com os sistemas dinâmicos discretos, em particular com a dinâmica simbólica, as álgebras C^* têm um papel destacado. Nomeadamente, os trabalhos de Cuntz e de Krieger, [C1977], [C-K1980], sobre álgebras C^* geradas por isometrias parciais, tornaram a relação entre cadeias de Markov topológicas e as álgebras C^* muito frutuosa. Uma álgebra de Cuntz-Krieger é definida à custa de uma matriz A , com entradas em $\{0, 1\}$, quadrada, sem linhas nem colunas de zeros, denotando-se $\mathcal{O}_A$. A estrutura algébrica de uma álgebra de Cuntz-Krieger $\mathcal{O}_A$, está relacionada com as propriedades dinâmicas da cadeia de Markov topológica associada a A . Por exemplo, o grupo de Bowen-Franks que mede a equivalência fluxo para os sistemas dinâmicos em particular para a cadeia de Markov topológica referida, [M2001], corresponde ao grupo K_0 de K-Teoria que classifica as álgebras de Cuntz-Krieger. As álgebras de Cuntz-Krieger pertencem ao grupo de álgebras C^* que são classificadas a menos de *-isomorfismo pelos grupos de K-teoria, um resultado de Kirchberg e Philips, [P2000].

No trabalho de Spielberg, [Sp1993], recupera-se ainda o trabalho de Poincaré referido acima, relacionando muitos conceitos decisivos nas áreas de sistemas dinâmicos discretos, álgebras C^* e geometria: Por um lado a ação de um grupo discreto, G , de isometrias do plano hiperbólico $\mathbb{H}$ é *orbit equivalent* à aplicação fronteira f_G que age na fronteira do plano hiperbólico, no conjunto limite do grupo Λ_G (Bowen e Series [B-S1979]). Por outro lado, existe uma representação do mesmo grupo por unitários. O produto cruzado da álgebra C^* das funções contínuas no conjunto limite do grupo, $C(\Lambda_G)$, pela ação da representação do grupo é uma álgebra C^* que é *-isomorfa a uma álgebra de Cuntz-Krieger $\mathcal{O}_A$ associada à aplicação fronteira f_G . Uma vez que f_G é Markov tem-se $A = A_{f_G}$. Nesta linha foi produzido trabalho, [1A](2004). Destacam-se aqui estas relações para explicitar o modo como os assuntos sistemas dinâmicos discretos, álgebras C^* e geometria estão ligados entre si de modo profundo e como a dinâmica simbólica é estruturante.

Matsumoto [K-M-W1998], com diversos colaboradores, e em muitos outros trabalhos desde então, desenvolveu a relação entre as cadeias topológicas, não necessariamente de Markov, e certas aplicações do intervalo relacionadas com expansões simbólicas de números. Nomeadamente a expansão β , oriunda da teoria dos números e que define uma expansão numérica em base não inteira. Nessa linha de trabalho, Sousa Ramos, Paulo Almeida, Ricardo Severino, Nuno Martins, [Al-S-SR1996], [M-S-SR2003], [M-SR2002] entre outros, desenvolveram este tópico relacionando aplicações do intervalo, cadeias topológicas e um formalismo baseado na teoria de amassamento de Milnor-Thurston. Nesta linha foi também produzido trabalho, [3](2006).

Por outro lado, Ostrovsky e Samoilenko [O-S1999], noutra abordagem mais próxima dos espaços de operadores e das representações, produziram trabalho fundamental na relação entre sistemas dinâmicos

discretos e álgebras de operadores. Consideram a álgebra C^* gerada por um operador limitado X (e pelo seu adjunto X^*) num certo espaço de Hilbert. Neste caso, uma deformação do comutador, $XX^* = f(X^*X)$, sendo f um polinómio restrito a um intervalo I , age como a evolução no tempo, e as órbitas do sistemas dinâmico (I, f) aparecem no espectro do operador X . Representações irredutíveis deste tipo de álgebras aparecem precisamente associadas a órbitas de (I, f) . Nesta linha foram produzidos alguns trabalhos, nomeadamente [4A](2007), [5](2007).

Além das álgebras C^* , e do grupo de Bowen-Franks já referido, existem fortes relações de outras estruturas algébricas com dinâmica discreta, como por exemplo as seguintes: grupo dimensão, grupo crítico de um grafo, iteração em álgebras de matrizes com entradas reais, complexas ou algébricas, semigrupos comutativos, entre outras. Trabalhos sobre estes temas foram desenvolvidos em [1A](2004), [3A](2007), [11A](2010), [13](2011), [18](2012).

Nesta seção será descrito o trabalho relacionado com as representações de álgebras Cuntz-Krieger associadas a órbitas de sistemas dinâmicos discretos. Será também descrito trabalho sobre semigrupos numéricos que aparecem relacionados com dinâmica discreta, como uma estrutura algébrica associada ao conjunto de períodos de órbitas de uma aplicação do intervalo. Foi introduzida uma classe de aplicações $\mathcal{N}$, sub classe de $\mathcal{M}$, para a qual o conjunto de períodos é um semigrupo numérico. Este trabalho foi consequência dos resultados obtidos em [23]*(2014) e descritos na seção 1.

[C1977] J. Cuntz, *Simple C^* -algebras generated by isometries*. Communications in Mathematical Physics. 57 (2) (1977) 173–185

[C-K1980] J.Cuntz, W.Krieger, *A class of C^* -algebras and topological Markov chains*, Invent.Math.56 (1980) 251–268

[P2000] N.C.Phillips, *A Classification Theorem for Nuclear Purely Infinite Simple C^* -Algebras*, Docu. Math. (2000), no. 5, 49–114.

[Sp1993] J. Spielberg, *Cuntz-Krieger algebras associated with Fuchsian groups*. Erg. Th. Dynam. Systems 13 (1993), no. 3, 581-595.

[B-S1979] R. Bowen, C. Series, *Markov maps associated with Fuchsian groups*. Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. 50 (1979), 153–170.

[K-M-W1998] Y. Katayama, K. Matsumoto, Y. Watatani, *Simple C^* -algebras arising from β -expansion of real numbers*, Ergod. Th. Dyn. Syst. 18, (1998) 937–962.

[A-S-SR1996] P. Almeida, R. Severino, J. Sousa Ramos, *Symbolic dynamical systems and K-theory*. European Conference on Iteration Theory (Batschuns, 1992), WorldSci Publ. Co, (1996).

[M-SR2002] N. Martins, J. Sousa Ramos, *Cuntz-Krieger algebras arising from linear mod one transformations*, Differential Equations and Dynamical Systems, Lisbon, 2000, in: Fields Inst. Commun., vol. 31, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2002), pp. 265–273.

[M-S-SR2003] N. Martins, R. Severino, J. Sousa Ramos, *K-theory for Cuntz-Krieger algebras arising from real quadratic maps*, Int. J. Math. Math. Sci. 34 (2003) 2139–2146.

[M2001] K. Matsumoto, *Bowen-Franks groups as an invariant for flow equivalence of subshifts*, Ergod. Th. Dyn. Syst. 21, (2001) 1831–1842.

[O-S1999] V. Ostrovsky, Y. Samoilenko, *Introduction to the Theory of Representation of Finitely Presented $*$ -Algebras*, Representations by bounded operators. The Gordon and Breach Publ. Group, London (1999).

2.1 Representações de álgebras de Cuntz-Krieger

Apresenta-se o trabalho desenvolvido desde 2008 sobre certas representações de álgebras de Cuntz-Krieger associadas ou parametrizadas por órbitas de aplicações do intervalo. Este trabalho ficou publicado nos artigos [7](2008), [12](2011), [17](2012), [20](2013), [22](2014) e [23]*(2014). As álgebras de Cuntz-Krieger, foram introduzidas como generalização das álgebras de Cuntz, uma classe de álgebras C^* , geradas por isometrias, estando relacionadas com as cadeias de Markov topológicas. São álgebras relevantes para a análise harmônica, para a análise de sinal com recurso a onduletas, para o estudo de semigrupos, representação de grupos, entre outras áreas. Nesta série de trabalhos associam-se representações, em $l_2(\mathbb{N})$, de álgebras de Cuntz-Krieger, a órbitas de sistemas dinâmicos discretos de Markov. Neste caso, a órbitas de aplicações do intervalo. A ligação entre os objetos é estabelecida através de uma matriz A com entradas em $\{0, 1\}$, sem linhas nem colunas nulas, e primitiva. Esta matriz no sistema dinâmico corresponde à matriz de Markov que caracteriza as transições possíveis dos estados, em particular a matriz A_f associada a uma aplicação $f \in \mathcal{M}$ e na álgebra codifica as relações entre as isometrias parciais geradoras da álgebra de Cuntz-Krieger que se denota $\mathcal{O}_A$. Mostra-se como dada uma matriz de $\{0, 1\}$, sem linhas nem colunas de zeros, pode ser realizada como uma matriz de Markov de uma aplicação do intervalo. Este resultado, como referido na seção 1, foi obtido para certo tipo de matrizes chamadas de tipo intervalo, em [12](2011) e generalizado em [23]*(2014). Para que este processo seja válido em geral, foi necessário usar a técnica de *state splitting*, que permite torneir o problema das matrizes que não são de tipo intervalo. Deste modo dada uma matriz (primitiva) é possível obter famílias de aplicações de Markov expansivas que a realizam como matriz de Markov, e através destas aplicações obtêm-se representações das álgebras de Cuntz-Krieger associadas, parametrizadas pelas órbitas. Duas condições iniciais distintas produzem representações unitariamente equivalentes se e só se pertencem à mesma órbita.

Em trabalho subsequente foram estudadas representações do mesmo tipo mas de álgebras de Matsumoto [20](2013), no caso em que as órbitas dos pontos críticos são infinitas, ou seja a aplicação não é Markov, de álgebras de Toeplitz [28](2017), de álgebras de grafos [33](2019), nestes casos usando os resultados de aplicações com escape [35]*(2019), e recentemente de *Branching systems* [40](2023).

2.2 Semigrupos numéricos e órbitas periódicas

Os semigrupos numéricos são um tópico da álgebra de desenvolvimento recente. Muito próximo da teoria dos números, e de modo semelhante tem resultados simples e diretos de enunciar, sem recorrer necessariamente a técnicas matemáticas demasiado sofisticadas, mas por vezes de difícil demonstração. Conjecturas importantes estão enunciadas na literatura, como a conjectura de Wilf (1978), ou a determinação do número de Frobenius dada um certa família de semigrupos numéricos, em função de algum parâmetro, como por exemplo número de geradores. Recentemente o assunto explodiu e os semigrupos numéricos aparecem em diversas áreas. É normal que assim seja. O conjunto dos naturais, com a adição (e a multiplicação) são quase omnipresentes em matemática e nas suas subáreas. Os semigrupos numéricos - subconjuntos de naturais fechados para a adição - são num certo sentido uma generalização simples, mas muito rica. Deste modo, toda uma variedade de noções, conceitos, resultados, na interseção da álgebra (comutativa, semigrupos comutativos), teoria dos números e algoritmos tem crescido e se tem desenvolvido.

Algum trabalho formal e informal, [6A](2009), [8C](2007), desenvolveu-se sobre este tema, mas o principal, [29](2017), foi a identificação de que o conjunto dos períodos de aplicações do intervalo de certa classe $\mathcal{N}$, subclasse de $\mathcal{M}$, é um semigrupo numérico. Nesse trabalho é caracterizada esta classe de aplicações do intervalo e são estudados as aplicações cujo conjunto de períodos é um semigrupo numérico

de dois geradores. A classe $\mathcal{N}$ está relacionada com a existência de um certo tipo de estados, para a aplicação do intervalo, chamados estados centrais, os quais são visitados por qualquer órbita periódica existente. Os trabalhos desenvolvidos em [12](2011) e [23]*(2014), referidos na seção 1, permitiram determinar as aplicações do intervalo associadas aos semigrupos numéricos.

Neste contexto, surgem naturalmente dois tipos de questões:

(1) Dada uma família de aplicações do intervalo pertencentes à classe $\mathcal{N}(I)$, para um certo intervalo I , determinar a família correspondente de semigrupos numéricos e relacionar os parâmetros.

(2) Dada uma família de semigrupos numéricos $\mathcal{S}$, determinar uma família de aplicações pertencentes à classe $\mathcal{N}(I)$, para um certo intervalo I , que realizam $\mathcal{S}$ como o conjunto de períodos, e relacionar os parâmetros.

No trabalho referido é tratado principalmente a questão (2), embora, na perspectiva da questão (1), são dados vários exemplos de aplicações do intervalo e são obtidos os semigrupos associados. Existe trabalho futuro a realizar sobre semigrupos numéricos que será descrito na seção 5.

3 Autômatos celulares

Os autômatos celulares são sistemas dinâmicos discretos para os quais o espaço, o tempo, assim como os parâmetros, são discretos, tipicamente finitos. Os autômatos celulares foram introduzidos por von Neumann nos anos 60 [VN-B1966] e tiveram grande desenvolvimento nos anos 80 com o aparecimento do computador, [W2002]. São num certo sentido uma generalização das cadeias de Markov topológicas: o estado do sistema não é representado por um símbolo, mas por uma sequência de símbolos. Neste caso, passa a existir a distinção de estado local e de estado global, para cada instante de tempo. A evolução temporal passa a depender de um conjunto prescrito de estados locais de instantes anteriores. Por outro lado, um autômato celular a uma dimensão pode ser visto formalmente como uma aplicação contínua que comuta com a aplicação *shift* de uma cadeia de Markov topológica para si própria [K1998].

Nesta seção apresenta-se um conjunto de trabalhos sobre autômatos celulares e algumas aplicações. Desenvolveram-se técnicas relacionadas com a dinâmica evolucionária em autômatos celulares e introduziu-se e desenvolveu-se o conceito de ontogénese e de filogénese no contexto dos autômatos celulares [7A]*(2009). Foram desenvolvidos trabalhos relacionados com simulação de fenómenos reais, como o tráfego urbano, e as fracturas que ocorrem em blocos rochosos.

[VN-B1966] J. Von Neumann, A. W. Burks. *Theory of self-reproducing automata*. Urbana, University of Illinois Press (1966).

[W2002] S. Wolfram, *A new kind of science*, Wolfram media inc (2002).

[K1998] B. Kitchens, *Symbolic Dynamics, One-sided, Two-sided and Countable State Markov Shifts*, Springer Verlag (1998).

3.1 Iteradas de aplicações do intervalo e autômatos celulares

Resume-se o trabalho apresentado em [27](2016). Nesse trabalho é estudada uma aplicação do intervalo totalmente descontínua definida em $[0, 1]$ que está associada a uma deformação da aplicação *shift* em dois símbolos $\{0, 1\}$. Na verdade, o sistema simbólico pode ser visto como um autômato celular codificado pela regra Wolfram 226. A correspondência entre o autômato celular e a aplicação de intervalo é obtida pela representação de um estado global como um número do intervalo unitário, expresso em binário, num procedimento bem conhecido que pode ser visto, por exemplo, num trabalho anterior, [10](2009), para a regra de Wolfram 184. A aplicação do intervalo obtida tem um gráfico fractal e a sua estrutura recursiva é determinada diretamente da regra do autômato.

Sendo a aplicação do intervalo totalmente descontínua, a existir uma partição de Markov esta deve ser infinita assim como a matriz de transição correspondente. Para lidar com esta questão, define-se uma família de partições do intervalo $[0, 1]$ obtidas por refinamentos associados aos intervalos cilindro da expansão binária de números reais. Estes refinamentos são na verdade *state-splittings*. Define-se uma sequência de matrizes de transição que representam o efeito da aplicação sobre a família de partições do intervalo $[0, 1]$ referida. São deduzidos algoritmos recursivos que constroem a sequência de matrizes, e também a sequência dos vectores próprios esquerdo e direito correspondentes. Além disso, é calculada a função zeta de Artin para a aplicação do intervalo.

Este trabalho pode ser aplicado a qualquer autômato celular de dimensão um, usando a representação dos números do intervalo unitário em base n , onde n corresponde ao número de estados do autômato.

3.2 Dinâmica evolucionária

Nesta subsecção é descrito o trabalho desenvolvido em dinâmica evolucionária aplicada a autómatos celulares. O artigo [7A]*(2009), foi seminal para a introdução dos conceitos de ontogénese e filogénese de sistemas dinâmicos discretos, desenvolvidos nos trabalhos apresentados em: [2E](2011), [3E](2016), [5E](2023), [6E](2024), [12F](2013), [15F](2015), [18F](2016), [21F](2017), [28F](2024), [30F](2024). Estes conceitos foram explorados no contexto de autómatos celulares em dimensão um, onde a regra do autómato, parâmetro do sistema, é vista como o análogo ao código genético dos organismos vivos. Também foram considerados no contexto das aplicações do intervalo, onde a analogia ao código genético é dada através da sequência de amassamento. O paralelismo é completo, desenvolvendo os conceitos de mutação, transformação no espaço de parâmetros, que realiza a partilha de material codificador e recombinação entre dois sistemas. Deste modo estudamos os processos de desenvolvimento de sistemas dinâmicos discretos e estudamos a evolução de populações de sistemas dinâmicos discretos, que interagem entre si através de recombinações, mutações e outras transformações. Apresentam-se exemplos de árvores filogenéticas de autómatos celulares. Com este trabalho abrem-se interessantes relações entre a aprendizagem automática e os sistemas dinâmicos discretos, a explorar no futuro próximo. Serão também apresentados os resultados publicados em [39](2022) onde se desenvolve com detalhe o conceito de *assembly*, técnica que permite construir autómatos celulares com grande número de estados, com base em autómatos celulares dados, e que herdaram propriedades dos autómatos base. Neste caso o autómato obtido por *assembly* mantém os autómatos de base como subautómatos invariantes.

3.3 Autómatos celulares probabilísticos

Nesta subsecção é descrito o trabalho [41](2023), iniciado no âmbito de um projecto, BROQ(2016-2019), e que teve como objectivo desenvolver métodos de análise e apoio à decisão para o corte de blocos de rochas ornamentais.

Consideram-se autómatos celulares determinísticos e probabilísticos para estudar e descrever certos tipos de padrões em blocos - rochas idealizadas. Devido ao projecto referido houve particular interesse em padrões semelhantes a fraturas. A estrutura interna destes blocos é assumida como desconhecida e são utilizados autómatos celulares probabilísticos para obter distribuições para a referida estrutura interna.

Considera-se o caso unidimensional. Certas regras determinísticas são identificadas como regras elementares de fratura e as regras probabilísticas são introduzidas como interpolação probabilística dessas regras elementares. As condições iniciais são obtidas a partir das arestas visíveis (bloco 2D). Deste modo, cada bordo visível fornece informações adicionais de modo a simular um padrão probabilístico do tipo de fratura. São discutidos diferentes métodos para combinar estes padrões num padrão final. Além disso, introduziram-se técnicas de refinamento das regras dos autómatos celulares para melhorar as distribuições de probabilidades. Este processo de refinamento pode ter em conta comportamento prescrito ou dados empíricos e, por isso, o comportamento das regras da CA torna-se ajustável. Os métodos de refinamento utilizados aproximam-se dos descritos em [27](2016), onde foi abordada uma relação entre os autómatos celulares e as cadeias de Markov topológicas, mas são essencialmente consequência de [7A]*(2009).

4 Aplicações - Movimento complexo

Nesta subseção descreve-se os trabalhos publicados em [34]*(2019), [36](2020) e os desenvolvimentos apresentados em [7E](2022), [26F](2019) e [29F](2024). Tratam-se de métodos de dinâmica simbólica para o estudo do movimento complexo.

O estudo das trajetórias de animais ou de organismos em geral é de grande importância para as áreas aplicadas. Os mesmos métodos podem ser aplicados ao estudo do movimento complexo ou irregular de qualquer agente, desde uma molécula ou partícula em suspensão, passando pelo movimento de pessoas ou veículos, até ao movimento de grandes animais. Nestes trabalhos foi introduzido um modelo determinístico muito simples para caracterizar movimentos complexos. O modelo é implementado por um sistema dinâmico discreto, baseado numa aplicação do intervalo bimodal simétrica, que produz as coordenadas das trajetórias, dependendo de um parâmetro que governa a complexidade do sistema. Este parâmetro está relacionado com a entropia topológica do sistema. A caracterização das trajetórias utiliza as ferramentas de classificação da dinâmica simbólica – sequências de amassamento e entropia topológica. Existe uma família de palavras num certo alfabeto que obedecem a certas regras gramaticais e que condicionam os tipos de movimentos possíveis. É considerado com detalhe o caso em que o organismo está isolado e considera-se o tipo de trajetórias – naturalmente dependendo do metabolismo ou de estratégias internas – produzidas em tal situação extrema.

Na generalização, para situações com interação externa, introduziu-se um parâmetro adicional que governa essa interação com o exterior e produz uma tendência no deslocamento médio no movimento do animal. Esta grandeza é também um invariante topológico para o sistema dinâmico discreto, extensamente estudado por Sousa Ramos e os seus colegas, ver por exemplo [L-SR1997], [M-SR2003], [L-S.SR2005]. Em [36](2020), essa generalização foi obtida considerando uma família de aplicações do intervalo bimodais, dependentes de dois parâmetros. Foram consideradas também as trajetórias isentrópicas, trajetórias com entropia topológica constante.

Por outro lado, introduzem-se os conceitos de trajetórias bimodais puras e mistas que deram mais flexibilidade ao modelo, mantendo-o simples. Discutem-se vários procedimentos que podem permitir a utilização do modelo para caracterizar dados empíricos.

Tornou-se possível construir ou obter um dicionário com correspondências entre tipos de trajetórias, a sua complexidade medida pelos invariantes topológicos e as sequências de amassamento, caracterizando as palavras admissíveis que determinam as probabilidades de ocorrência de padrões geométricos. Estes resultados têm agora importância para o desenvolvimento de algoritmos para movimento autónomo, ligando-os a resultados anteriores em dinâmica evolucionária [7A]*(2009). Novos resultados estão a ser obtidos, em particular, alguns apresentados em [29F](2024).

[L-SR1997] J.P. Lampreia, J. Sousa Ramos, *Symbolic dynamics of bimodal maps*. Port. Math (1997), 54, 1–18.

[M-SR2003] N. Martins, R. Severino, J. Sousa Ramos, *Isentropic real cubic maps*. Int. J. Bifurc. Chaos (2003), 13, 1701–1709

[L-S.SR2005] J.P. Lampreia, R. Severino, J. Sousa Ramos, *Irreducible complexity of iterated symmetrical bimodal maps*. Discret. Dyn. Nat. Soc. (2005), 1, 69–85.

5 Trabalho futuro

Estão a ser desenvolvidos métodos criptográficos utilizando sistemas dinâmicos discretos. Os métodos apresentados estão fortemente baseados nos trabalhos das aplicações do intervalo [12](2011) como o de [23]*(2014), onde se mostrou como matrizes de transição podem ser representadas por aplicações do intervalo, na classe $\mathcal{M}$ e da relação entre aplicações do intervalo e autómatos celulares de dimensão um. Além de propostas de métodos de encriptação será realizada também a sua criptoanálise. Existe uma longa literatura do potencial uso de sistemas caóticos para encriptação, mas como a revisão crítica [A-A-A-L2011] mostra, a maior parte dos métodos propostos não são utilizáveis na prática por variados motivos. Os métodos que estão a ser desenvolvidos têm em conta estas considerações, assim como o trabalho de René Lozi sobre este tema, por exemplo [G-L-L2017]. Serão submetidos dois artigos no decorrer da licença sabática 2024-2025.

Dos projectos de mestrado terminados em 2023 e outros em curso planeia-se terminar pelo menos um artigo de cada tese. Um artigo sobre geradores de números aleatórios e autómatos celulares, com Diogo Gomes[UE], Irene Rodrigues[UE], um artigo sobre recombinação de autómatos celulares e estudo de filogenia de autómatos celulares, com João Cardoso[UE], Lígia Ferreira[UE], Irene Rodrigues[UE]. Um artigo sobre *block-chain*, *smart-contracts*, com João Cardoso[UE] e Salvador Abreu[UE]. Com Luís Romão[UE], que iniciou o seu projeto de tese de mestrado e Luís Bandeira[UE], será publicado um artigo sobre autómatos celulares para a simulação do tráfego urbano, com aplicações à cidade de Évora (2024).

Sobre métodos de inteligência artificial para problemas de álgebra e combinatória, em colaboração com João Dias[UE], Irene Rodrigues[UE], Manuel Branco[UE], um artigo está em preparação usando algoritmos genéticos para caracterizar e enumerar estruturas algébricas finitas. Outro utilizando autómatos celulares está em preparação, que introduz certo tipo de estruturas algébricas, não associativas que codificam estruturas de recombinação.

Trabalho sobre automação e controlo robótico utilizando sistemas dinâmicos discretos e dinâmica simbólica está a ser desenvolvido em colaboração com Mariana Riera[IST], usando os resultados de [34]*(2019), [36](2020). Neste momento está a ser terminado um artigo sobre movimento em três dimensões e outro sobre comportamento, trabalhos que foram comunicados em [29F](2024). Espera-se a submissão de pelo menos dois artigos neste tópico ainda em 2025.

Continuação do estudo de álgebras de operadores e sistemas dinâmicos discretos. Em particular, o formalismo termodinâmico para subálgebras de Cuntz-Krieger, na sequência de resultados recentes com Paulo Pinto[IST], Nuno Martins[IST], e a generalização para álgebras de grafos e *branching systems* com Daniel Gonçalves[USC-Brasil].

No âmbito do estudo das aplicações do intervalo serão estudadas ajustes à classe $\mathcal{M}$ de modo a incluir sistemas não topologicamente *mixing*, considerando matrizes de transição redutíveis. Por outro lado, será enfraquecida a exigência da expansividade, e serão analisadas as consequências e os ajustes aos resultados já obtidos.

Relativamente aos semigrupos numéricos, está a ser estudado como relacionar este tipo de semigrupos como invariantes directamente às álgebras C^* , em particular as de Cuntz-Krieger, à semelhança do realizado através do grupo dimensão, diagrama de Bratelli e outras estruturas combinatórias/algébricas. Este é um trabalho pendente que em breve poderá ver o seu reinício. Por outro lado, está por resolver o problema de determinar uma aplicação do intervalo em $\mathcal{N}$ que realize um semigrupo numérico dado

através dos geradores, como conjunto de períodos. Este problema foi resolvido para dois geradores do tipo $\langle m, m + 1 \rangle$, com $m > 1$.

[A-A-A-L2011] G. Alvarez, J. M. Amigo, D. Arroyo, S. Li, *Lessons learnt from the cryptanalysis of chaos-based ciphers*, Chaos-Based Cryptography: Theory, Algorithms and Applications, edited by Ljupco Kocarev and Shiguo Lian, Studies in Computational Intelligence, vol. 354, Springer-Verlag GmbH, (2011), 257-295.

[G-L-L2017] Oleg Garasym, Jean-Pierre Lozi, René Lozi *How useful randomness for cryptography can emerge from multicore-implemented complex networks of chaotic maps*, Journal of Difference Equations and Applications, 23:5, (2017), 821-859.

Referências

De acordo com o exposto no curriculum vitae:

- [42] Luís Bandeira; C. Correia Ramos, Coupling homogeneous chains of damped harmonic oscillators. *Meccanica* (2023).
- [41] C. Correia Ramos, Nada EL Bouziani, Mouhaydine Tlemçani, Sara Fernandes, Simulation of ideal material blocks using cellular automata, *Nonlinear Dynamics*, Volume 111, (2023) 22381–22397.
- [40] C. Correia Ramos, D. Gonçalves, Nuno Martins, Paulo R. Pinto, Unifying interval maps and branching systems with applications to relative graph C^* -algebras. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Volume 519, Issue 1, (2023), 126757.
- [39] C. Ramos., F. Carapau, P. Correia, Cellular Automata Describing Non-equilibrium Fluids with Non-mixing Substances. In: Carapau, F., Vaidya, A. (eds) *Recent Advances in Mechanics and Fluid-Structure Interaction with Applications*. *Advances in Mathematical Fluid Mechanics*. Birkhäuser, Cham. (2022)
- [38] Luís Bandeira, C. Correia Ramos Non-homogeneous chain of harmonic oscillators. *Math. Comput. Sci.* 16 (2022), no. 1, Paper No. 3, 17 pp. 34A30
- 37 C. Correia Ramos, N. Martins, P. R. Pinto, Markov invariant dynamics. *Linear Algebra Appl.* 620 (2021), 268–296.
- [36] Carlos Ramos, *Kinematics in Biology: Symbolic Dynamics Approach*, *Mathematics*, MDPI, (2020), 8(339):1–33.
- [35]* C. Correia Ramos, N. Martins, Paulo R. Pinto, Escape dynamics for interval maps, *Discrete and Continuous Dynamical Systems A*, 39 (11) (2019), 6241–6260.
- [34]* Carlos Ramos, Animal movement: symbolic dynamics and topological classification, *Mathematical Biosciences and Engineering*, MBE, (2019), 16(5): 5464–5489.
- [33] C. Correia Ramos, N. Martins, Paulo R. Pinto, On graph algebras from interval maps. *Ann. Funct. Anal.* 10(2), (2019), 203–217.
- [32] C. Correia Ramos, L. Bandeira, Harmonic oscillations on non-homogeneous media, *Int. J. Appl. Math. Stat.*, vol. 57, no. 5, (2018), 1–13.
- [31] Sara Fernandes, Carlos Ramos, Gyan Thapa, Luís Lopes, Clara Grácio. Discrete Dynamical Systems: A Brief Survey. *Journal of the Institute of Engineering*, 14(1), (2018), 35–51.
- [30] Jorge Duarte, Cristina Januário, Nuno Martins, C. Correia Ramos, Carla Rodrigues, Josep Sardanyés. Optimal homotopy analysis of a chaotic HIV-1 model incorporating AIDS-related cancer cells. *Numer. Algor.*, (2018), Volume 77, Issue 1, 261–288.
- [29] M. B. Branco, C. Correia Ramos, S. Fernandes, S. Santos, Numerical semigroups and periodic orbits for Markov interval maps, *Journal of Difference Equations and Applications*, 23:9, (2017), 1597–1609.
- [28] C. Correia Ramos, N. Martins, Paulo R. Pinto, Toeplitz algebras arising from escape points of interval maps. *Banach J. Math. Anal.* 11(3), (2017), 536–553.
- [27] Luis Bandeira, C. Correia Ramos, Transition matrices characterizing a certain totally discontinuous map of the interval, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Volume 444, Issue 2, (2016), 1274–1303.
- [26] C. C. Ramos, A. I. Santos and S. Vinagre, Symbolic dynamics generated by a hybrid chaotic system, *British Journal of Mathematics & Computer Science* 18(2) (2016), 1–12.
- [25] C. C. Ramos, A. I. Santos and S. Vinagre, A symbolic approach to nonlinearly perturbed heat equation, *Int. J. of Pure and Applied Math.*, 107, (2016), n.º 4, 821–843.
- [24] Luis Bandeira, C. Correia Ramos, On the spectra of certain matrices and the iteration of quadratic maps, *SEMA Journal*, 67 – Issue 1 - Springer Verlag, (2015), 51–69.

- [23]* C. Correia Ramos, N. Martins, Paulo R. Pinto, Orbit representations from matrices. *Linear Algebra Appl.* 453, (2014), 44–58.
- [22] C. Correia Ramos, N. Martins, Paulo R. Pinto, Baumslag-solitar group C^* -algebras from interval maps, *Banach J. Math. Anal.*, 8, (2014), no.1, 138-147.
- [21] Maria F. Correia, Carlos C. Ramos, S. M. Vinagre, Invariants for the topological characterization of the iteration of differentiable functions – the bimodal case, *Eur Phys. J. Special Topics*, 222, (2013), 285-301.
- [20] C. Correia Ramos, N. Martins, Paulo R. Pinto, On C^* -Algebras from Interval Maps. *Complex Analysis and Operator Theory*, 1, (2013), 221-235.
- [19] Sara Fernandes, Clara Grácio, C. Correia Ramos, Systoles in discrete dynamical systems, *Journal of Geometry and Physics*, Volume 63, (2013), 129–139.
- [18] A. Nascimento Baptista, C. Correia Ramos, Nuno Martins, Iteration of quadratic maps on matrix algebras, *International Journal of Bifurcation and Chaos* Volume 22, Issue 06, (2012).
- [17] C. Correia Ramos, N. Martins, Paulo R. Pinto, Orbit representations from linear mod 1 transformations. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.* 8 (2012), Paper 029, 9 pp.
- [16] Maria F. Correia, Carlos C. Ramos, Sandra Vinagre, The evolution and distribution of the periodic critical values of iterated differentiable functions, *Nonlinear Analysis* 75 (2012), 6343–6359.
- [15] M.F. Correia, C. Correia Ramos, S. Vinagre, Iteration of Differentiable Functions under m-Modal Maps with Aperiodic Kneading Sequences, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, Volume 2012, Article ID 796180, 17 pages.
- [14] M. F. Correia, C. Correia Ramos, S. Vinagre, Iteration of Differentiable functions under m-modal maps, *Int. J. Pure Appl. Math.*, 70 (2) (2011), 151-166.
- [13] C. Correia Ramos, N. Martins, A. Nascimento Baptista, Dynamics on certain sets of stochastic matrices, *Nonlinear Dynamics*, Volume 65, Number 3, (2011), 301-310.
- [12] C. Correia Ramos, N. Martins, Paulo P. Pinto, Interval maps from Cuntz-Krieger algebras, *J. Math. Anal. Appl.* 374, No. 2, (2011), 347-354.
- [11] S. Fernandes, C. Grácio, C. Correia Ramos, Conductance in discrete dynamical systems. *Nonlinear Dynam.* 61 (2010), no. 3, 435–442.
- [10] L. Bandeira, M. J. Martinho, C. Correia Ramos, Interval maps associated to the cellular automaton rule 184. *Chaos Solitons Fractals* 41, no. 3, (2009), 1501-1509.
- [9] A. Caneco, S. Fernandes, C. Grácio, J. L. Rocha, C. Correia Ramos, Synchronizability and Graph Invariants, *ISAST Transactions on Computers and Intelligent Systems*, no 2, Vol 1, (2009), 47-53.
- [8] C. Correia Ramos, N. Martins, J. Sousa Ramos, R. Severino, Discrete potential theory for iterated maps of the interval, *Advanced Studies in Pure Mathematics* 53, (2009), 153-160.
- [7] C. Correia Ramos, N. Martins, Paulo R. Pinto, J. Sousa Ramos, Cuntz-Krieger algebras representations from orbits of interval maps. *J. Math. Anal. Appl.* 341, No. 2, (2008), 825-833.
- [6] C. Correia Ramos, N. Martins, Paulo R. Pinto, J. Sousa Ramos, Orbit equivalence and von Neumann algebras for expansive interval maps. *Chaos Solitons Fractals*, 33, no. 1, (2007) 109-117.
- [5] C. Correia Ramos, N. Martins, J. Sousa Ramos, Finite dimensional representations of $*$ -algebras arising from a quadratic map. *Chaos Solitons Fractals* 34, No. 4, (2007), 1202-1212.
- [4] C. Correia Ramos, N. Martins, J. Sousa Ramos, Conductance and noncommutative dynamical systems, *Nonlinear Dynamics* (2006) 44: 127-134.
- [3] C. Correia Ramos, N. Martins, R. Severino, J. Sousa Ramos, Noncommutative topological dynamics. *Chaos, Solitons Fractals* 27, no. 1 (2006), 15 - 23.
- [2] M. Mercês Ramos, C. Correia Ramos, R. Severino, J. Sousa Ramos, Topological invariants of a chaotic pendulum, *Int. J. Pure Appl. Math.*, 10 (2) (2004), 209 - 226.
- [1]* C. Correia Ramos, J. Sousa Ramos, Kleinian groups and holomorphic dynamics, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 13, 7 (2003), 1959 - 1967.