Luís Miguel Zorro Bandeira

Sumário pormenorizado do seminário

(No âmbito das Provas de Agregação)

Problemas vetoriais no Cálculo das Variações e Sistemas Dinâmicos Discretos

Departamento de Matemática
Escola de Ciências e Tecnologia
Universidade de Évora

setembro de 2025

Évora, Portugal

Sumário pormenorizado

O sumário pormenorizado do seminário com o título *Problemas vetoriais no Cálculo das Variações e Sistemas Dinâmicos Discretos* é apresentada à Universidade de Évora no âmbito das Provas de Agregação em Matemática ao abrigo da alínea c) do Artigo 5.º do Decreto-Lei n.º 239/2007 de 19 de Junho, com atualização no Decreto-Lei n.º 64/2023 de 31 de Julho.

Évora, 1 de setembro de 2025

Assinado por: **Luís Miguel Zorro Bandeira**
Num. de Identificação: 10505515
Data: 2025.09.02 20:00:58+01'00'

Luís Miguel Zorro Bandeira

CHAVE MÓVEL

Conteúdo

1 Introdução

O sumário pormenorizado que se segue é relativo ao seminário com o título *Problemas vetoriais no Cálculo das Variações e Sistemas Dinâmicos Discretos*, que será apresentado em provas públicas de agregação. O seminário incidirá sobre parte da investigação em cálculo das variações e sistemas dinâmicos discretos desenvolvida após o doutoramento, embora sejam também referidos alguns dos trabalhos elaborados no âmbito da tese de doutoramento.

Não serão apresentados todos os trabalhos e resultados obtidos, sendo que alguns dos trabalhos apresentados serão agrupados por tema. Procurou-se introduzir cada trabalho de forma resumida, indicando-se em cada caso os principais resultados obtidos. Concluímos com o trabalho em curso bem como o trabalho a ser desenvolvido futuramente.

2 Sumário pormenorizado

A investigação desenvolvida tem seguido dois vetores fundamentais: problemas vetoriais no Cálculo das Variações e Sistemas Dinâmicos Discretos. A secção 2.1 é dedicada ao Cálculo das Variações, enquanto que a secção 2.2 é dedicada aos Sistemas Dinâmicos Discretos.

2.1 Problemas vetoriais no Cálculo das Variações

Um dos principais ingredientes do método direto do Cálculo das Variações para mostrar a existência de minimizantes para um funcional integral do tipo

$$I(u) = \int_\Omega \psi(\nabla u(x)\, dx$$

é a sua semicontinuidade inferior fraca. Supomos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio regular (Lipschitz) limitado e funções admissíveis $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ (pelo menos) Lipschitz, de modo que ∇u é uma matriz de dimensão $m \times N$, para cada $x \in \Omega$. A propriedade de semicontinuidade inferior fraca é, por sua vez, equivalente a uma propriedade de convexidade adequada do integrando (contínuo) $\psi : \mathbb{R}^{m\times N} \to \mathbb{R}$. Morrey [83] provou que esta propriedade de semicontinuidade inferior fraca (em $W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$) é equivalente à quasiconvexidade do integrando ψ, ou seja,

$$\psi(\xi) \leq \frac{1}{|D|} \int_D \psi(\xi + \nabla v(x))\, dx$$

para cada $\xi \in \mathbb{R}^{m\times N}$ e cada função teste v em D. Este conceito não depende do domínio D e pode, equivalentemente, ser formulado em termos de aplicações periódicas (Šverák [99]): ψ é quasiconvexa se

$$\psi(\xi) \leq \int_{[0,1]^N} \psi(\xi + \nabla v(y))\, dy$$

para cada $\xi \in \mathbb{R}^{m\times N}$ e cada $v : [0, 1]^N \to \mathbb{R}^m$ periódica. Infelizmente, este conceito de convexidade está longe de ser compreendido simplesmente sabendo isto, já que até mesmo Morrey compreendeu que não é fácil decidir quando uma dada densidade ψ possui tal propriedade. Para o caso escalar (quando pelo menos uma das duas dimensões N ou m é igual a um), a quasiconvexidade reduz-se à convexidade usual.

Mas para situações vetoriais genuínas ($N, m > 1$), não é assim. De facto, condições necessárias e suficientes para quasiconvexidade no caso vetorial ($N, m > 1$) foram imediatamente procuradas e novas condições de convexidade importantes foram então introduzidas:

- Convexidade de característica-1 (Morrey [83]). Um integrando contínuo $\psi : \mathbb{R}^{m\times N} \to \mathbb{R}$ diz-se convexo de característica-1 se

  $$\psi(t\xi_1 + (1-t)\xi_2) \leq t\psi(\xi_1) + (1-t)\psi(\xi_2),\ t \in [0,1]$$

  sempre que a diferença $\xi_1 - \xi_2$ for uma matriz com característica um.

- Policonvexidade (Ball [5]). Um tal integrando ψ diz-se policonvexo se puder ser reescrito na forma

  $$\psi(\xi) = g(M(\xi)),$$

  onde $M(\xi)$ é o vetor de todos os menores de ξ, e g é uma função convexa (no sentido usual) de todos os seus argumentos.

Mesmo estes dois tipos de convexidade, embora mais manejáveis, não são fáceis de verificar em exemplos explícitos (Dacorogna, Douchet, Gangbo & Rappaz [36], Gutiérrez [56]). O trabalho B. & Pedregal [16] contribuiu para dar uma resposta parcial a este problema, dando uma forma sistemática de determinar famílias de polinómios convexos de característica-1.
Rapidamente se descobriu que a quasiconvexidade implica a convexidade de característica-1 (usando uma classe especial de funções teste), e que a policonvexidade é uma condição suficiente para quasiconvexidade. A tarefa seguinte foi como tentar provar ou refutar a equivalência entre estes três diferentes tipos de convexidade. No caso escalar, os três conceitos coincidem com a convexidade usual, donde de facto estamos perante um fenómeno puramente vetorial. Acontece que estas três noções de convexidade são diferentes e contra-exemplos de vários tipos foram encontrados ao longo do anos, como podemos observar na referência fundamental de Dacorogna [35]. Se nos concentrarmos na equivalência entre a convexidade de característica-1 e a quasiconvexidade, Morrey [83] conjeturou que não são equivalentes, por isso o problema de não equivalência é usualmente chamado de conjetura de Morrey, embora mais tarde o mesmo tenha afirmado, em [84], que era de facto um problema em aberto. A questão permaneceu sem resposta até ao surpreendente contra-exemplo de Šverák [99]. O que é bastante notável é que este contra-exemplo só é válido quando $m \geq 3$, e tentativas posteriores de estendê-lo a $m = 2$ falharam (B. & Ornelas [15], Pedregal [90], Pedregal & Šverák [92]). Além deste contra-exemplo, apenas se

conhece o de Grabovsky [52], que novamente só é válido para $m > 2$. É também interessante notar que para integrandos quadráticos, convexidade de característica-1 e quasiconvexidade são equivalentes, independentemente das dimensões. Este facto é conhecido há muito tempo (Van Hove [100], Van Hove [101]) e não é difícil prová-lo usando a fórmula de Plancherel. Em B. & Pedregal [14] foi providenciada uma demonstração alternativa (baseada em ideias da programação matemática) que não utiliza a fórmula de Plancherel, explorando ainda algumas consequências para o caso dos polinómios homogéneos de quarto grau.
Outro campo onde a resolução deste problema de equivalência para aplicações de duas componentes teria um impacto importante é o da teoria das aplicações quasi-conformes no plano. Em particular, se a equivalência entre a convexidade de característica-1 e a quasiconvexidade para aplicações de duas componentes é verdadeira, então a norma da correspondente transformada de Beurling-Ahlfors é igual a $p^* - 1$ (Iwaniec [65]). Outra forma de interpretarmos este problema de equivalência é usando a formulação dual através da desigualdade de Jensen: medidas de Young gradiente e laminados são medidas de probabilidade que satisfazem a desigualdade de Jensen relativamente a todas as funções quasiconvexas e convexas de característica-1, respetivamente, conforme Kinderlherer & Pedregal [66] e Pedregal [91]. A conjetura de Morrey pode agora ser escrita na forma: toda a medida de Young gradiente é um laminado? Note-se que a questão em aberto é saber a resposta para $m = 2$. Em B. & Ornelas [15] são relatadas algumas tentativas de refutar esta questão, no caso das matrizes simétricas 2×2. Apesar de tal não ter sido possível, foi no entanto possível obter a caracterização de uma classe especial de laminados, apelidada de classe de "3-edge-laminates".

2.1.1 Polinómios não negativos e condições de convexidade vectorial

A situação das aplicações de duas componentes permaneceu, portanto, sem solução embora tenham existido algumas contribuições no sentido de esclarecer a situação, entre as quais Chaudhuri & Müller [30], Ghiba, Martin & Neff [49], Grabovsky & Truskinovsky [53], Krůzík [73], Martin, Ghiba & Neff [79], Müller [85], Müller [86], Parry [89], Voss, Martin, Ghiba & Neff [103]. A este respeito, na contribuição B. & Pedregal [11], a não negatividade de polinómios foi relacionada com a quasiconvexidade e com a convexidade de característica-1. De facto, utilizando a periodicidade das funções teste $u : [0,1]^N \to \mathbb{R}^m$, podemos escrever

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} \sin(2\pi n \cdot x)\, a_n, \quad a_n \in \mathbb{R}^m,$$
$$\nabla u(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} \cos(2\pi n \cdot x)\, a_n \otimes n,$$

e, consequentemente, a condição da quasiconvexidade poderá ser escrita como

$$\Phi(\xi, \{a_n\}) = \int_Q \left[\psi \left(\xi + \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} \cos(2\pi n \cdot x)\, a_n \otimes n \right) - \psi(\xi) \right] dx.$$

Se restringirmos ainda mais a natureza de ψ, para ser um polinómio de certo grau, então Φ será também um polinómio do mesmo grau, num certo número de variáveis (possivelmente infinito), que deve ser não-negativo. Portanto, vemos que a questão da não negatividade dos polinómios poderá ter alguma relevância para a quasiconvexidade. Relativamente à convexidade de característica-1, se ψ é suave, então essa condição pode ser formulada, equivalentemente, na forma da chamada condição de Legendre-Hadamard

$$\nabla^2 \psi(\xi) : (a \otimes n) \otimes (a \otimes n) \geq 0$$

para cada matriz $\xi \in \mathbb{R}^{m \times N}$, e vetores $a \in \mathbb{R}^m$, $n \in \mathbb{R}^N$.

O resultado principal deste trabalho diz respeito à utilização do célebre teorema de Hilbert [59], sobre a caracterização de polinómios não-negativos em termos de somas de quadrados, num teste para a convexidade de característica-1 para integrandos suaves definidos em matrizes reais 2×2. Relativamente à quasiconvexidade, conseguiu-se provar que mesmo no caso dos polinómios homogéneos de quarto grau, a quasiconvexidade não pode ser reduzida à não-negatividade de polinómios com um número finito fixo de variáveis.

Por fim, o foco foi colocado sobre a quasiconvexidade, avaliando até que ponto estas ideias poderiam levar a algum novo avanço.

2.1.2 Princípios $\mathcal{A}$-variacionais

A propriedade de semicontinuidade inferior fraca pode ser tratada num quadro muito mais geral, no qual um operador diferencial parcial linear de característica constante da forma

$$\mathcal{A}v = \sum_i A_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \tag{1}$$

está envolvido. O conceito de $\mathcal{A}$-quasiconvexidade foi então adequadamente introduzido por Dacorogna [37], e demonstrado como necessário e suficiente por Fonseca & Dacorogna [45], para a semicontinuidade inferior fraca de um funcional da forma

$$I(v) = \int_{\Omega} W(x, v(x))\, dx, \tag{2}$$

sob a restrição diferencial $\mathcal{A}v = 0$, além de (eventuais) condições de fronteira adequadas. A importância de tal extensão não pode ser subestimada, pois expande de forma inacreditável o quadro analítico. Para o caso particular $\mathcal{A} = \text{curl}$, voltamos ao caso gradiente clássico pois $v = \nabla u$. Esta nova teoria está agora muito bem compreendida, cobrindo os desenvolvimentos mais fundamentais: medidas de Young e medidas $\mathcal{A}$-nulas, relaxamento, homogeneização, regularidade, dinâmica, etc (ver Baía, Matias & Santos [3], Braides, Fonseca & Leoni [25], Conti & Gmeineder [34], Dacorogna & Fonseca [38], Davoli & Fonseca [41]; [42], Philippis & Rindler [43], Fonseca, Leoni & Müller [46], Guerra & Raiţă [55], Koumatos & Vikelis [71], Krämer, Krömer, Kružík & Pathó [72], Matias, Morandotti & Santos [80], Raiţă [95], entre outros); mas, no entanto, problemas variacionais explícitos sob restrições diferenciais mais gerais do tipo $\mathcal{A}v = 0$ não têm sido tratados de forma sistemática, provavelmente devido à falta de exemplos de certa relevância em Análise ou nas aplicações. Na mesma linha, o conceito natural e direto de $\mathcal{A}$-policonvexidade, tanto quanto podemos dizer, não tinha sido ainda tratado de forma explicita (exceto recentemente em Guerra & Raiţă [55] e, numa forma diferente, em Boussaid, Kreisbeck & Schlömerkemper [24]), novamente possivelmente devido à falta de exemplos onde tal conceito poderia ir além da convexidade simples, e ser usado de forma fundamental para mostrar a existência de soluções para tais problemas variacionais. No trabalho B. & Pedregal [9], a noção de $\mathcal{A}$-policonvexidade é apresentada e relacionada com a semicontinuidade inferior dos funcionais integrais (2). A importância deste trabalho vem essencialmente de dois aspetos fundamentais: por um lado, as funções integrandas policonvexas são aquelas que asseguram a semicontinuidade inferior fraca de problemas variacionais vetoriais, provenientes das aplicações, como provado por Ball [5]; por outro lado, a literatura disponível geralmente lida com o caso em que o operador $\mathcal{A}$ é o rotacional (curl), donde os campos $\mathcal{A}$-nulos nada mais são do que gradientes e a noção de $\mathcal{A}$-quasiconvexidade reduz-se à quasiconvexidade usual de Morrey. Foi então proposta uma tal família de problemas no caso $\text{div} - \text{curl}$, explorando a correspondente condição de $\mathcal{A}$-policonvexidade como principal hipótese estrutural para assegurar a semicontinuidade inferior fraca e os teoremas de existência de solução obtidos. Destacam-se também, além dos resultados teóricos conseguidos, os exemplos analíticos considerados, que envolvem operadores que tinham sido, até ao momento, pouco explorados na literatura. Em particular, quatro casos explícitos são discutidos, que ilustram os resultados obtidos, e nos quais as suas soluções explícitas são calculadas e se revelam esclarecedoras.

2.1.3 Aproximação numérica de problemas variacionais vetoriais

Outro tópico fortemente relacionado tem a ver com a simulação numérica de soluções ótimas para problemas variacionais vetoriais. Na realidade, devido às dificuldades intrínsecas em lidar com sistemas estacionários não-lineares de Equações Diferenciais Parciais, existem poucas referências na literatura que tratem estes temas. O estudo de problemas variacionais vetoriais é um dos capítulos mais complexos em Análise Aplicada. Este facto é bem conhecido tanto do lado da Matemática, bem como do lado das aplicações (por exemplo, à Mecânica). Estes problemas variacionais estão associados, através das suas condições de otimalidade de Euler-Lagrange, com sistemas estacionários não-lineares de Equações Diferenciais Parciais. De facto, das duas formas conhecidas para lidar com tais sistemas diferenciais, o mais poderoso provém diretamente dos problemas variacionais, conforme Ciarlet [32]. As condições que garantem a semicontinuidade inferior fraca, para a aplicação do método direto e assim provar a existência de minimizantes, nos problemas vetoriais envolve condições mais gerais do que apenas a simples convexidade (Ball [4]). Estes conceitos vetoriais de convexidade estão ainda longe de serem bem entendidos.

Uma das principais aplicações de tais problemas variacionais vetoriais provém da Mecânica não-linear, mais precisamente, da hiper-elasticidade na qual os corpos podem ser sujeitos a grandes tensões e grandes deformações. É um facto que a densidade da energia interna de tal comportamento material não pode ser convexa e, consequentemente, outros conceitos de convexidade (em particular a policonvexidade) precisam ser abordados.

As dificuldades apontadas têm um impacto tremendo nas aproximações numéricas. Em particular, a falta de convexidade significa usualmente a falta de unicidade de solução (minimizante), e não é garantido que os métodos computacionais standard (máximo declive, gradiente conjugado, Newton-Raphson, etc) convirjam para os desejados minimizantes globais. Mesmo assim, a aproximação de tais soluções é importante nas aplicações. Recentemente, a simulação de tais situações vetoriais na hiper-elasticidade foi bem sucedida, pelo menos de um ponto de vista prático, embora falte ainda alguma análise numérica: Bonet, Gil & Ortigosa [22], Horák, Gil, Ortigosa & Kružík [62], Ortigosa, Gil, Bonet & Hesch [88], entre outros. Recentemente, B. & Pedregal foram bem sucedidos no tratamento de tais problemas vetoriais em algumas situações selecionadas, nomeadamente em:

- Problemas de condutividade inversa em dimensão dois.

  O problema de Calderón [26] tem sido intensamente estudado nas últimas décadas. Tanto da perspetiva da Análise como das aplicações, oferece um problema desafiante e atrativo. Muitos resultados analíticos fundamentais foram descobertos ao longo dos anos, culminando em Astala & Päivärinta [1]. Ver também Barceló, Faraco & Ruiz [19]. A perspetiva de utilizar técnicas variacionais vetoriais em problemas inversos foi iniciada por Kohn & Vogelius [70] e, posteriormente, as suas consequências para a aproximação numérica exploradas por Kohn & McKenney [69]. Após este artigo seminal, diversas variantes variacionais foram examinadas em diferentes contextos e estruturas: Berenguer, Kunze, La Torre & Ruiz Galán [20], Bonet, Gil & Ortigosa [22], Borcea, Genetha & Yin [23], Kunze, La Torre, Levere & Ruiz Galán [74], Maestre & Pedregal [77]. Em muitos casos, os princípios variacionais envolvidos necessitam relaxação e, frequentemente, obtém-se diretamente através das (ou relacionado com) ferramentas da teoria da homogeneização. A proposta de Maestre & Pedregal [77] é um pouco diferente no sentido em que um sistema de equações diferenciais parciais não linear foi o ponto de partida para estudar um funcional não convexo (de facto, nem sequer é quasiconvexo). Embora a sua relaxação tenha sido calculada de forma bastante explícita, tal informação revelou-se irrelevante para o funcional original não convexo, cuja sucessão minimizante produziria soluções aproximadas para o problema de condutividade inversa. O contributo de B. & Pedregal [7] insere-se nesta linha de perspetivas variacionais em problemas inversos e visa ultrapassar algumas das dificuldades encontradas em Maestre & Pedregal [77] de um ponto de vista prático. Em particular, teve-se o objetivo de propor funcionais vetoriais que fossem policonvexos (a principal condição suficiente para garantir a existência de soluções para problemas vetoriais variacionais) de modo a que não necessitem de relaxação; ou funcionais simples que apesar de não serem quasiconvexos ou policonvexos, a sua simplicidade seja promissora para a aproximação numérica.

  A ideia básica de recuperar um coeficiente de condutividade desconhecido $\gamma(\mathbf{x})$ através de um problema vetorial de dimensão dois provém da equação vetorial (pontual)

  $$|\nabla u_2|\nabla u_1 + |\nabla u_1|\mathbf{Q}\nabla u_2 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

  Sempre que é possível determinar um par de gradientes $(\nabla u_1, \nabla u_2)$ satisfazendo a equação vetorial anterior, dizemos que representam um coeficiente de condutividade através do quociente

$$\gamma = \frac{|\nabla u_2|}{|\nabla u_1|}.$$

Note-se que, então

$$\operatorname{div}(\gamma \nabla u_1) = \operatorname{div}\left(\frac{1}{\gamma}\nabla u_2\right) = 0 \text{ em } \Omega.$$

As condições de fronteira devem também ser compatíveis com (3). Tendo em vista a determinação de soluções para (3), através de minimizantes de problemas de variacionais vetoriais genuínos, em B. & Pedregal [7] foram estudados diversos funcionais vetoriais:

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{u}) &= \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{|\nabla \mathbf{u}|^2}{\det \nabla u}\, d\mathbf{x}, \\ I_2(\mathbf{u}) &= \int_\Omega \frac{1}{2}\left(\nabla u_1 \cdot \nabla u_2\right)^2\, d\mathbf{x}, \\ I_3(\mathbf{u}) &= \int_\Omega (|\nabla u_1|\,|\nabla u_2| - \det \nabla \mathbf{u})\, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Além dos resultados analíticos mostrados, indicando prós e contras de cada funcional, foram comparados os três funcionais acima em problemas semelhantes com o objetivo de examinar o seu desempenho. Os funcionais que obtiveram melhor desempenho foram então colocados em situações mais exigentes, para testar sua capacidade de recuperar coeficientes de condutividade desconhecidos.

- Equações diferenciais de Pfaff em dimensão três.

  O campo das equações diferenciais de Pfaff, embora seja uma área bastante clássica, é, em boa medida, um pouco desconhecida nos dias de hoje, pelo menos em Análise. No entanto, é algo bem estabelecido em Geometria Diferencial ou em Álgebra. Embora formalmente formulado por Pfaff [94], o problema já era conhecido por Euler [44]. Tem sido abordado em textos clássicos de equações diferenciais (Goursat [51], Ince [64], Petrovskii [93], Sneddon [98]) a nível conceptual, sendo também conhecida a sua importância e relação com as equações diferenciais parciais. A relevância das equações de Pfaff em Geometria Diferencial e Álgebra parece, por outro lado, muito conhecida e solidamente estudada em diversas fontes: Awane & Goze [2], Cañadas-Pinedo & Ruiz [27], Cartan [28], Han [58]. Do ponto de vista da Análise, existem também alguns artigos interessantes e bastante clássicos, bem como alguns mais recentes: para além dos já referidos, Darboux [39], Gérard & Ramis [48], Honda [61], Morando & Sammarco [81]. Uma equação diferencial de Pfaff é uma expressão da forma

$$\omega \equiv \sum_{i=1}^{N} u_i(\mathbf{x})\, dx_i = 0, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N), \tag{4}$$

para N funções $u_i(\mathbf{x})$. Uma variedade C^1 de dimensão $k \geq 1$ $\mathcal{M}$ diz-se uma variedade integral de (4) se a 1-forma diferencial ω se anula identicamente em $\mathcal{M}$. A equação de Pfaff(4) é dita completamente integrável se existe uma única variedade integral de maior dimensão possível $N-1$ passando por cada ponto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^N$. De um ponto de vista mais prático, tal variedade, pelo menos localmente, é procurada através de uma parametrização desconhecida

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) : \mathbf{Q} \subset \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}^N, \quad \mathbf{0} \in \mathbf{Q}, \mathbf{x}(\mathbf{0}) = \mathbf{x}_0, \mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_{N-1}),$$

de tal forma que

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad \mathbf{x}(\mathbf{0}) = \mathbf{x}_0. \tag{5}$$

Nesta forma, (5) pode ser considerado como um sistema muito especial de equações diferenciais parciais de primeira ordem. No entanto, nesta forma há uma tremenda falta de unicidade de solução, pois uma dada variedade admite infinitas parametrizações.

Embora analiticamente, alguns factos fundamentais sejam já conhecidos para este tipo de problemas, tanto quanto sabemos não houve até hoje nenhuma tentativa conhecida de aproximar numericamente as múltiplas soluções de (4). Esta foi a nossa principal motivação em B. & Pedregal [6]. A nossa proposta tem uma natureza variacional, pois focámo-nos em minimizar um funcional de erro da forma

$$E(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{Q}} \frac{1}{2} \sum_i \left(\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t_i} \right)^2 d\mathbf{t} \tag{6}$$

sob a restrição $\mathbf{x}(\mathbf{0}) = \mathbf{x}_0$, para um dado $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^N$.

Entre outros, estudámos o caso de variedades bidimensionais em $\mathbb{R}^3$ que requer uma condição de integrabilidade fundamental

$$\mathbf{u} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{u}) = 0 \tag{7}$$

para garantir a existência de soluções locais em torno dos pontos $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ onde o campo vetorial $\mathbf{u}(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$ não se anula identicamente. Finalmente, trabalhou-se a aproximação numérica para alguns exemplos selecionados, nos quais se foi bem sucedido, tendo sido obtidos resultados interessantes.

Além da estrutura particular explorada nestas contribuições, o tratamento numérico prático de verdadeiros problemas variacionais vetoriais é, de forma geral, sempre interessante dada a falta de tais exemplos na literatura.

2.2 Sistemas Dinâmicos Discretos

Os métodos da Álgebra Linear têm sido utilizados desde há muito tempo em sistemas dinâmicos discretos, quer envolvidos na definição dos próprios sistemas – os subshifts de tipo finito são ótimos exemplos – quer como ferramentas para a resolução de problemas. É essa a ferramenta de base que utilizamos nos trabalhos relativos a esta parte.

2.2.1 Autómatos celulares

Desde os tempos de Ulam e von Neumann [87], que propuseram pela primeira vez o conceito de autómato celular, passando pelo famoso livro de Wolfram [107], a estrutura simples dos autómatos celulares atraiu investigadores de diversas áreas. A razão por detrás da popularidade dos autómatos celulares pode ser atribuída, em parte, à sua simplicidade. Por outro lado, estas estruturas simples, quando iteradas várias vezes, têm a capacidade de produzir padrões complexos que demonstram o potencial de simular diferentes fenómenos naturais complexos. Dois desenvolvimentos notáveis acerca dos autómatos celulares são devidos a Conway e a Wolfram. Na década de 1970, o matemático Conway propôs o seu hoje famoso jogo da vida [47], que suscitou um amplo interesse entre os investigadores. No início da década de oitenta, Wolfram estudou detalhadamente uma família de regras simples de autómatos celulares unidimensionais (hoje famosas regras de Wolfram [106], numeradas de 0 a 255) e mostrou que mesmo estas regras locais simples são capazes de emular comportamentos complexos globais (ver, por exemplo, Wolfram [105]).
As aplicações de intervalos e o comportamento das aplicações de intervalos sob iteração são também um assunto bem desenvolvido em sistemas dinâmicos e na teoria do caos, com diversas aplicações em muitos campos. Assuntos intimamente relacionados são os sistemas de funções iteradas e fractais. Em B. & Ramos [12] estudamos uma aplicação do intervalo totalmente descontínua definida no intervalo

$[0,1]$ que está associada a uma deformação da aplicação shift em dois símbolos $\{0,1\}$, que pode ser visto como um autómato celular codificado pela regra 226 de Wolfram. A correspondência entre o autómato celular e a aplicação de intervalo é obtida pela representação de um estado global como um número do intervalo $[0,1]$, expresso em binário, num procedimento conhecido que pode ser consultado, por exemplo, nos trabalhos anteriores B., Martinho & Ramos [17], [18], para a regra 184 de Wolfram. A aplicação do intervalo obtida tem um gráfico fractal e a sua estrutura recursiva é determinada diretamente da regra do autómato. Sendo a aplicação do intervalo totalmente descontínua, não poderá existir uma partição de Markov finita (logo não existirá também uma matriz de transição finita correspondente). Para contornar este problema, definimos uma sucessão de partições do intervalo (constituídas por intervalos, de igual comprimento, determinados pela expansão binária dos números reais do intervalo $[0,1]$) e foram deduzidas as respetivas matrizes de transição que correspondem à ação da aplicação do intervalo sobre a partição, obtidas através de uma fórmula de recorrência. Ao utilizar esta abordagem, foi possível determinar a respetiva sucessão de valores próprios e respetivos vetores próprios (associados) direitos e esquerdos. É também dado um procedimento que permite obter a função totalmente descontínua do intervalo como limite uniforme de uma certa sucessão de funções seccionalmente afins. Conseguiu-se também determinar a função zeta de Artin-Mazur para a aplicação do intervalo. Os procedimentos deduzidos poderão ser aplicados noutros casos, eventualmente a outras deformações do shift, induzidas por regras elementares de autómatos celulares unidimensionais.

2.2.2 Osciladores harmónicos lineares

Motivados pela participação no projeto BRO-CQ - Controlo de Qualidade de Blocos em Rochas Ornamentais e diretamente relacionado com a questão subjacente que levou ao nascimento do mesmo, estudámos um problema de base na extração das rochas ornamentais, que tem a ver com o facto de 89 a 91% de toda a matéria prima extraída não ser aproveitada. Este problema induz diversos outros problemas secundários, entre os quais o facto de os cerca de 10% de produto final ter de compensar monetariamente 100% da extração (encarecendo o produto) e, por outro lado, levando à acumulação de detritos em excesso nas pedreiras (devido a não haver até ao momento utilização rentável para os mesmos). O grande desequilíbrio no aproveitamento da matéria prima deve-se ao facto de não existir um método para mapear a qualidade e características dos blocos a extrair, sendo uma atividade altamente experimental, pois, por assim dizer, não é possível prever a estrutura interior do bloco, nomeadamente saber qual a melhor direção de corte para evitar possíveis fraturas e inomogeneidades da mesma. A nossa contribuição nesta área visa estudar possíveis modelos que possam simular essas mesmas faltas de homogeneidade/fraturas. Estudámos sistemas discretos de massa-mola compostos por cadeias de osciladores harmónicos unidimensionais. Este tipo de sistema pode ser utilizado para aproximar o comportamento dinâmico dos sistemas contínuos. Diversas aplicações podem ser observadas em Clough & Penzien [33] e Davini [40], em relação às vibrações nas estruturas e bandas elásticas, respetivamente, Kittel [68], Maradudin, Montroll & Weiss [78] ou Lepri [75] em relação à física do estado sólido ou à física estatística, e Huang, Sun & Huang [63], Yao, Zhou & Hu [104] ou Vo et al. [102], em relação aos metamateriais, entre outros; problemas inversos foram considerados em Chu & Golub [31], Gladwell [50], Gray & Wilson [54], Hald [57], Hochstadt [60] ou Rio & Kudryavtsev [97]. Assumimos que as partes elementares do sistema são cadeias de osciladores idênticos, que serão os blocos de construção para a criação de sistemas mais complexos. Cada cadeia é caracterizada pelas suas características físicas: massa total, massa das partículas, constante da mola, número de osciladores e comprimento. Em B. & Ramos [10], considerámos o problema de determinar os vetores e valores próprios para uma cadeia de osciladores harmónicos obtidos a partir do acoplamento de duas cadeias homogéneas, através de um processo de composição. Este processo de composição consiste na acoplamento das cadeias através de uma partícula com massa de ligação com uma determinada massa m, ou de uma mola de colagem com uma determinada constante elástica. Mostrámos como determinar, analiticamente, a solução do novo sistema não homogéneo em termos dos vetores e valores próprios das cadeias (homogéneas) que as compõem, que se supõe serem conhecidos ou facilmente determinados. Mais tarde, em B. & Ramos [8], estendemos os nossos resultados anteriores ao caso dos osciladores harmónicos lineares amortecidos, obtendo-se assim soluções explícitas para o sistema amortecido acoplado em termos das soluções das cadeias homogéneas originais que constituem o sistema. Assim sendo, podemos analisar como o sistema altera o seu comportamento dinâmico em termos do comportamento dinâmico das partes constituintes.

2.3 Trabalho futuro

De momento estão em curso os seguintes trabalhos:
-Com Luís Romão (que entregou recentemente a sua dissertação de mestrado) e C. Correia Ramos, está em fase final de preparação um artigo sobre autómatos celulares para a simulação do tráfego urbano (2025).

- L.B., C. C. Ramos, L. Romão, *Cellular automata traffic models with applicati-*

ons to the city of Évora. (em preparação, 2025)

-Com C. Pimentel (que recentemente iniciou o seu projeto de tese de doutoramento) e P. Pedregal, está em fase final de preparação um artigo sobre problemas de condutividade inversa em dimensão dois.

- L.B., P. Pedregal, C. Pimentel, *Further computational tests for inverse conductivity problems based on vector, variational principles in the 2D case.* (em preparação, 2025)

-Com P. Pedregal, estão em preparação dois artigos, um com o objetivo de ser submetido até ao final de 2026, sobre superfícies mínimas, e outro a ser submetido não antes de 2026, sobre semicontinuidade inferior fraca e relaxação de funcionais integrais.

- L.B., P. Pedregal, *Minimal surfaces.* (em preparação, 2026)

- L.B., P. Pedregal, *Weak lower semicontinuity and relaxation of integral functionals.* (em preparação, 2026+)

Referências

[1] K. Astala, L. Päivärinta, *Calderón's inverse conductivity problem in the plane.* Ann. of Math. (2) 163 (1) (2006) 265–299.

[2] A. Awane, M. Goze, *Pfaffian Systems, k-symplectic Systems.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[3] M. Baía, J. Matias, P.M. Santos, *Characterization of generalized Young measures in the A-quasiconvexity context.* Indiana Univ. Math. J. 62 (2013), no. 2, 487–521.

[4] J. M. Ball, *Some open problems in Elasticity*, Geometry, mechanics, and dynamics, 359, Springer, New York, 2002.

[5] J. M. Ball, *Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity.* Archive for Rational Mechanics and Analysis 63 (1977) 337–403.

[6] L. Bandeira, P. Pedregal, *Pfaffian equations: a variational perspective.* Differential and Integral Equations, Volume 38 (2025), Pages 643-668

[7] L. Bandeira, P. Pedregal, *Some computational tests for inverse conductivity problems based on vector, variational principles: The 2D case.* Mathematics and Computers in Simulation, Volume 218 (2024), Pages 704-721.

[8] L. Bandeira, C. Correia Ramos, *Coupling homogeneous chains of damped harmonic oscillators.* Meccanica 59, 19-32 (2024).

[9] L. Bandeira, P. Pedregal, *$\mathcal{A}$-Variational Principles.* Milan Journal of Mathematics 91, 293–314 (2023).

[10] L. Bandeira, C. C. Ramos, *Non-homogeneous chain of harmonic oscillators.* Mathematics in Computer Science 16 (2022), no. 1, Paper No. 3, 17 pp.

[11] L. Bandeira, P. Pedregal, *The role of non-negative polynomials for rank-one convexity and quasi convexity.* Journal of Elliptic and Parabolic Equations 2 (2016), no. 1-2, 27–36.

[12] L. Bandeira, C. C. Ramos, *Transition matrices characterizing a certain totally discontinuous map of the interval.* Journal of Mathematical Analysis and Applications 444 (2016), no. 2, 1274–1303.

[13] L. Bandeira, C. C. Ramos, *On the spectra of certain matrices and the iteration of quadratic maps.* SeMA Journal 67 (2015), 51–69.

[14] L. Bandeira, P. Pedregal, *Quasiconvexity: the quadratic case revisited, and some consequences for fourth-degree polynomials*. Advances in Calculus of Variations 4 (2011), no. 2, 127–151.

[15] L. Bandeira, A. Ornelas, *On the characterization of a class of laminates for 2×2 symmetric gradients*. Journal of Convex Analysis 18 (2011), no. 1, 37–58.

[16] L. Bandeira, P. Pedregal, *Finding new families of rank-one convex polynomials*. Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Analyse Non Linéaire 26 (2009), no. 5, 1621–1634.

[17] L. Bandeira, M. J. Martinho, C. C. Ramos, *Interval maps associated to the cellular automaton rule 184*. Chaos, Solitons and Fractals 41 (2009), no. 3, 1501–1509.

[18] L. Bandeira, M. J. Martinho, C. C. Ramos, *Interval maps and cellular automata*. Discrete dynamics and difference equations, 173–180, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2010.

[19] T. Barceló, D. Faraco, A. Ruiz, *Stability of Calderón inverse conductivity problem in the plane*. J. Math. Pures Appl. (9) 88 (6) (2007) 522–556.

[20] M. Berenguer, H. Kunze, D. La Torre, M. Ruiz Galán, *Galerkin method for constrained variational equations and a collage-based approach to related inverse problems*. J. Comput. Appl. Math. 292 (2016) 67–75.

[21] J. Bonet, A. J. Gil, R. Ortigosa, *A computational framework for polyconvex large strain elasticity*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 283 (2015), 1061-1094.

[22] J. Bonet, A. Gil, R. Ortigosa, *A computational framework for polyconvex large strain elasticity*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 283 (2015) 1061–1094.

[23] L. Borcea, A.G. Genetha, Z. Yin, *Inverse Problems* 19 (5) (2003) 1159–1184.

[24] O. Boussaid, C. Kreisbeck, A. Schlömerkemper, *Characterizations of Symmetric Polyconvexity*. Arch. Ration. Mech. Anal. 234(1), 1-26, 2019.

[25] A. Braides, I. Fonseca, G. Leoni, *$\mathcal{A}$-quasiconvexity: relaxation and homogenization*. ESAIM Control Optim. Calc. Var. 5 (2000), 539-577.

[26] A. P. Calderón, *On an inverse boundary value problem*. Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics, Soc. Brasileira de Matemática, Río de Janeiro, (1980), 65-73.

[27] M.A. Cañadas-Pinedo, C. Ruiz, *Equivalence of Pfaffian flag systems in dimension five.* (Spanish) Florentino García Santos: in memoriam, 43-50, Ed. Univ. Granada, Granada, 2011.

[28] E. Cartan,

[29] . Bull. Soc. Math. France, 59 (1931), 88–118.

[30] N. Chaudhuri, S. Müller, *Rank-one convexity implies quasi-convexity on certain hypersurfaces.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 133 (2003), 1263-1272.

[31] M. T. Chu, G. H. Golub (2005) *Inverse eigenvalue problems: theory, algorithms, and applications.* Numerical Mathematics and Scientific Computation. Oxford University Press, New York

[32] Ph. G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity. Vol. I. Three-dimensional elasticity.* Studies in Mathematics and its Applications, 20. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1988

[33] R. W. Clough, J. Penzien (1975) *Dynamics of Structures.* McGraw-Hill International Editions, Singapore

[34] S. Conti, F. Gmeineder, *$\mathcal{A}$-quasiconvexity and partial regularity.* Calc. Var. Partial Differential Equations 61 (2022), no. 6, Paper No. 215, 25 pp.

[35] B. Dacorogna, *Direct methods in the Calculus of Variations*, Springer, 2008.

[36] B. Dacorogna, J. Douchet, W. Gangbo, J. Rappaz, *Some examples of rank one convex functions in dimension two*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 114 (1–2) (1990) 135–150.

[37] B. Dacorogna, *Weak Continuity and Weak Lower Semicontinuity for Nonlinear Functionals*, Springer Lecture Notes in Mathematics 922, 1982

[38] B. Dacorogna, I. Fonseca, *A-B quasiconvexity and implicit partial differential equations.* Calc. Var. Partial Differential Equations 14 (2002), no. 2, 115-149.

[39] G. Darboux, *Sur le problème de Pfaff.* I and II, Bull. Sci. Math. Astron., 6 (1882), 14-36, 49-62 (translated by D. H. Delphenich).

[40] C. Davini (1996) *Note on a parameter lumping in the vibrations of elastic beams.* Rendiconti Istituto Matematico Universita‘ di Trieste 28 83-99

[41] E. Davoli, I. Fonseca, *Periodic homogenization of integral energies under space-dependent differential constraints*. Port. Math. 73 (2016), no. 4, 279-317

[42] E. Davoli, I. Fonseca, *Homogenization of integral energies under periodically oscillating differential constraints*. Calc. Var. Partial Differential Equations 55 (2016), no. 3, Art. 69, 60 pp

[43] G. De Philippis, F. Rindler, *On the structure of $\mathcal{A}$-free measures and applications*. Ann. of Math. (2) 184 (2016), no. 3, 1017-1039.

[44] L. Euler, *Institutiones Calculi Differentialis*. G. Kowalewski (ed.), Opera Omnia Ser. 1; opera mat., 10, Teubner (1980) pp. Chapt. IX ((in Latin)).

[45] I. Fonseca, S. Müller, *$\mathcal{A}$-quasiconvexity, lower semicontinuity, and Young measures*. SIAM J. Math. Anal. 30 (1999), no. 6, 1355–1390

[46] I. Fonseca, G. Leoni, S. Müller, *$\mathcal{A}$-quasiconvexity: weak-star convergence and the gap*. Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire 21 (2004), no. 2, 209-236.

[47] M. Gardner. *The Fantastic Combinations of John Conway's New Solitaire Game 'Life'*. Scientific American 223 (1970): 120-123.

[48] R. Gérard and J.-P. Ramis, *Equations différentielles et systemes de Pfaff dans le champ complexe*. II," (French) [Differential equations and Pfaffian systems in the complex field. II] Papers presented at the seminar held in Strasbourg, Lecture Notes in Mathematics, 1015, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[49] I.-D. Ghiba, R. J. Martin, P. Neff, *Rank-one convexity implies polyconvexity in isotropic planar incompressible elasticity*. J. Math. Pures Appl. (9) 116 (2018), 88-104.

[50] G. M. L. Gladwell (2004) *Inverse problems in vibration*. (Solid Mechanics and Its Applications vol 119) 2nd edn (Dordrecht: Kluwer)

[51] E. Goursat, *Leçons sur le Problème de Pfaff*. Librairie Scientifique J. Hermann, Paris, 1922.

[52] Y. Grabovsky, *From microstructure-independent formulas for composite materials to rank-one convex, nonquasiconvex functions*. Archive for Rational Mechanics and Analysis 227 (2018), no. 2, 607–636.

[53] Y. Grabovsky, L. Truskinovsky, *When rank-one convexity meets polyconvexity: an algebraic approach to elastic binodal*. J. Nonlinear Sci. 29 (2019), no. 1, 229–253.

[54] L. J. Gray, D. G. Wilson (1976) *Construction of a Jacobi matrix from spectral data*. H Linear Algeb Appl 14:131

[55] A. Guerra, B. Raiţă, *Quasiconvexity, null Lagrangians, and Hardy space integrability under constant rank constraints*. Arch. Ration. Mech. Anal. 245 (2022), no. 1, 279-320

[56] S. Gutiérrez, *A necessary condition for the quasiconvexity of polynomials of degree four*. J. Convex Anal. 13 (1) (2006) 51–60.

[57] O. Hald (1976) *Inverse eigenvalue problems for Jacobi matrices*. Linear Algeb Appl 14:63–85

[58] C.-K. Han, *Foliations associated with Pfaffian systems*. Bull. Korean Math. Soc., 46 (2009), 931-940.

[59] D. Hilbert, *Über die Darstellung Definiter Formen als Summe von Formenquadraten*. Mathematische Annalen, 32 (1888), 342–250

[60] H. Hochstadt (1967) *On some inverse problems in matrix theory. Point mass identification in rods and beams from minimal frequency measurements*. Arch. Math 18:201–7

[61] T. Honda, *On the normal forms for Pfaffian systems*. Hokkaido Math. J., 35 (2006), 815-845.

[62] M. Horák, A. J. Gil, R. Ortigosa, M. Kružík, *A polyconvex transverselyisotropic invariant-based formulation for electro-mechanics: stability, minimisers and computational implementation*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 403 (2023), part A, Paper No. 115695, 36 pp.

[63] H. H. Huang, C. T. Sun, G. L. Huang (2009) *On the negative effective mass density in acoustic metamaterials*. Int J Eng Sci 47:610–617

[64] E. L. Ince, *Ordinary Differential Equations*. Dover Publications, New York, 1944.

[65] T. Iwaniec, *Non-linear Cauchy-Riemann operators in* $\mathbb{R}^n$. Trans. AMS 354 (2002), 1961-1995

[66] D. Kinderlehrer, P. Pedregal, *Characterizations of Young measures generated by gradients*. Arch. Rational Mech. Anal. 115 (1991), no. 4, 329–365

[67] B. P. Kitchens *Symbolic dynamics. One-sided, two-sided and countable state markov shifts*. Universitext. Berlin: Springer-Verlag; 1998.

[68] C. Kittel (1996) *Introduction to solid state physics*. 7th Edition, Wiley

[69] R.V. Kohn, A. McKenney, *Numerical implementation of a variational method for electrical impedance tomography.* Inverse Problems 6 (1990) 389–414.

[70] R.V. Kohn, M. Vogelius, *Relaxation of a variational method for impedance computed tomography.* Comm. Pure Appl. Math. 40 (1987) 745–777.

[71] K. Koumatos, A. P. Vikelis, *$\mathcal{A}$-quasiconvexity, Gøarding inequalities, and applications in PDE constrained problems in dynamics and statics.* SIAM J. Math. Anal. 53 (2021), no. 4, 4178-4211.

[72] J. Krämer, S. Krömer, M. Kružík, G. Pathó, *$\mathcal{A}$-quasiconvexity at the boundary and weak lower semicontinuity of integral functionals.* Adv. Calc. Var. 10 (2017), no. 1, 49-67.

[73] M. Krŭzík, *On the composition of quasiconvex functions and the transposition.* J. Convex Anal. 6 (1999), no. 1, 207–213.

[74] H. Kunze, D. La Torre, K. Levere, M. Ruiz Galán, *Inverse problems via the generalized collage theorem for vector-valued Lax–Milgram-based variational problems.* Math. Probl. Eng. (2015) 764643, 8 pp.

[75] S. Lepri (editor), *Thermal transport in low dimensions.* (2016) From statistical physics to nanoscale heat transfer, (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York). Lecture Notes in Physics 921:239

[76] D. Lind, B. Marcus, *An introduction to symbolic dynamics and coding.* Cambridge: Cambridge University Press; 1995.

[77] F. Maestre, P. Pedregal, Some non-linear systems of PDEs related to inverse problems in conductivity, Calc. Var. Partial Differential Equations 60 (3) (2021) 26, Paper No. 110.

[78] A. A. Maradudin, E. W. Montroll, G. H. Weiss (1963) *Solid state physics, Supplement 3, Theory of Lattice Dynamics in the Harmonic Approximation.* New York: Academic Press

[79] R. J. Martin, I.-D. Ghiba, P. Neff, *Rank-one convexity implies polyconvexity for isotropic, objective and isochoric elastic energies in the two-dimensional case.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 147 (2017), no. 3, 571-597.

[80] J. Matias, M. Morandotti, P. M. Santos, *Homogenization of functionals with linear growth in the context of $\mathcal{A}$-quasiconvexity.* Appl. Math. Optim. 72 (2015), no. 3, 523-547.

[81] P. Morando, S. Sammarco,

[82] . Acta Appl. Math., 120 (2012), 255-274.

[83] C. B. Morrey, *Quasiconvexity and the lower semicontinuity of multiple integrals.* Pacific J. Math. 2 (1952), 25-53.

[84] C. B. Morrey, *Multiple Integrals in the Calculus of Variations.* Springer 1966.

[85] S. Müller, *Rank-one convexity implies quasiconvexity on diagonal matrices.* Internat. Math. Res. Notices 20 (1999), 1087-1095.

[86] S. Müller, *Quasiconvexity is not invariant under transposition.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 130 (2000), no. 2, 389-395.

[87] J. V. Neumann. *The Theory of Self-Reproducing Automata.* A. W. Burks (ed), Univ. of Illinois Press, Urbana and London, 1966.

[88] R. Ortigosa, A. J. Gil, J. Bonet, C. Hesch, *A computational framework for polyconvex large strain elasticity for geometrically exact beam theory.* Comput. Mech. 57 (2016), no. 2, 277-303

[89] G. P. Parry, *On the planar rank-one convexity condition.* Proc. Roy. Soc. Edinb. A 125 (1995), 247-264.

[90] P. Pedregal, 1996 *Some remarks on quasiconvexity and rank-one convexity.* Proc. Roy. Soc. Edinb., 126A, n5, 1055-65.

[91] P. Pedregal, *Laminates and microstructure.* European J. Appl. Math. 4 (1993), no. 2, 121–149

[92] P. Pedregal, and V. Šverák, *A note on quasiconvexity and rank-one convexity in the case of* 2×2 *matrices.* J. Convex Anal. 5 (1998), 107-117.

[93] I.G. Petrovskii, *Ordinary Differential Equations*. Prentice-Hall (1966) (Translated from Russian).

[94] J.F. Pfaff, Berl. Abh. (1814-1815) pp. 76-135

[95] B. Raiţă, *Potentials for $\mathcal{A}$-quasiconvexity*. Calc. Var. Partial Differential Equations 58 (2019), no. 3, Paper No. 105, 16 pp

[96] C. C. Ramos, L. Bandeira, *Harmonic oscillations on non-homogeneous media*. International Journal of Applied Mathematics and Statistics (2018), Vol. 57, Issue 5, 1-13.

[97] R. Rio, M. Kudryavtsev (2012) *Inverse problems for Jacobi operators: I. Interior mass-spring perturbations infinite systems*. Inver Prob 28

[98] I.N. Sneddon, *Elements of Partial Differential Equations*. McGraw-Hill Book Co., Inc., New York-Toronto-London, 1957.

[99] V. Šverák, *Rank-one convexity does not imply quasiconvexity*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. 120 A (1992), 293-300

[100] L. Van Hove, *Sur l'extension de la condition de Legendre du calcul des variations aux intégrales multiples à plusieurs fonctions inconnues*. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 50 (1947), 18–23.

[101] L. Van Hove, *Sur le signe de la variation seconde des intégrales multiples à plusieurs fonctions inconnues*. Acad. Roy. Belgique. Cl. Sci. Mém. Coll. 24 (1949), 68.

[102] N. H. Vo, T. M. Pham, H. Hao, K. Bi, W. Chen (2022) *A reinvestigation of the spring-mass model for metamaterial bandgap prediction*. Int J Mech Sci, 221

[103] J. Voss, R- J. Martin, I.-D. Ghiba, P. Neff, *Morrey's conjecture for the planar volumetric-isochoric split: least rank-one convex energy functions*. J. Nonlinear Sci. 32 (2022), no. 5, Paper No. 76, 49 pp.

[104] S. Yao, X. Zhou, G. Hu (2008) *Experimental study on negative effective mass in a 1D mass-spring system*. New J Phys 10(4):11

[105] S. Wolfram, *Cellular automata as models of complexity*. Nature 311, 419-424 (1984)

[106] S. Wolfram. *Theory and Applications of Cellular Automata*. World Scientific, Singapore, 1986.

[107] S. Wolfram. *A New Kind of Science*. Wolfram Media, Inc, 2002.