



Luís Miguel Zorro Bandeira

## Otimização Dinâmica

(Relatório da Unidade Curricular no âmbito das Provas de Agregação)

Departamento de Matemática  
Escola de Ciências e Tecnologia  
**Universidade de Évora**

setembro de 2025

Évora, Portugal

### ***Relatório da Unidade Curricular***

Este relatório relativo à unidade curricular Otimização Dinâmica é apresentado à Universidade de Évora no âmbito das Provas de Agregação em Matemática ao abrigo da alínea b) do artigo 5.º do Decreto-Lei n.º 239/2007 de 19 de Junho, com actualização no Decreto-Lei n.º 64/2023 de 31 de Julho.

Universidade de Évora, 1 de setembro de 2025

Luís Miguel Zorro Bandeira

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Preâmbulo</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Objetivos e competências a adquirir</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Programa e conteúdos</b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>Metodologia de ensino</b>	<b>7</b>
5.1	Aulas teórico-práticas . . . . .	8
5.2	Atendimento . . . . .	8
<b>6</b>	<b>Método de avaliação</b>	<b>9</b>
<b>7</b>	<b>Calendarização e planificação das aulas</b>	<b>11</b>
7.1	Calendarização das aulas . . . . .	11
7.2	Planificação das aulas . . . . .	11
	<b>Referências</b>	<b>14</b>

## Lista de Tabelas

1	Repartição de trabalho em horas. . . . .	7
2	Matéria relativa aos diferentes regimes de avaliação. . . . .	10
3	Calendarização dos diferentes tópicos. . . . .	11

# 1 Preâmbulo

No âmbito das provas de Agregação em Matemática ao abrigo da alínea b) do artigo 5.º do Decreto-Lei n.º 239/2007 de 19 de Junho, apresenta-se um relatório para a unidade curricular MAT13506L Otimização Dinâmica. Esta unidade curricular é optativa para a licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão e para a licenciatura em Matemática.

A licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão forma parte da oferta formativa da Universidade de Évora desde o ano letivo de 2014/2015, tendo sido reavaliada com sucesso pela Agência de Avaliação e Acreditação do Ensino Superior, obtendo a sua acreditação por mais 6 anos com publicação a 22/10/2021, processo ACEF/1920/1300836. A duração do curso é de 3 anos (6 semestres) com um total de 180 ECTS, sendo 150 ECTS obrigatórios e 30 ECTS opcionais. Destes 180 ECTS, 84 são na área científica de Matemática.

A licenciatura em Matemática consta na oferta formativa da Universidade de Évora desde o ano letivo de 2022/2023, tendo sido acreditada por 6 anos com publicação a 21/03/2022, processo NCE/21/2100066. A duração do curso é de 3 anos (6 semestres) com 180 ECTS, sendo 144 ECTS obrigatórios e 36 ECTS opcionais.

Ambas as licenciaturas são da responsabilidade do Departamento de Matemática, embora a licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão seja uma formação que envolve diretamente três Departamentos de duas Escolas da Universidade de Évora: Departamento de Matemática, sediado na Escola de Ciências e Tecnologia; Departamento de Economia e Departamento de Gestão, sediados na Escola de Ciências Sociais.

A Otimização Dinâmica é uma unidade curricular da área disciplinar de Matemática (subárea de Análise Matemática, Sistemas Dinâmicos, Métodos Computacionais e Geometria Diferencial), sob a responsabilidade científica, pedagógica e letiva do Departamento de Matemática. Esta unidade curricular é lecionada, na estrutura curricular da licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão e da licenciatura em Matemática, no terceiro ano (quinto semestre). A unidade curricular confere um número de créditos de 6 ECTS, o que corresponde a 156 horas de trabalho.

Foi introduzida, no ano letivo 2020/2021, uma componente de programação em Python, que não está formalmente indicada na ficha de disciplina. Esta componente não é avaliada, servindo como ferramenta didática, de aprendizagem voluntária, e

valorização do conhecimento dos alunos interessados.

Os alunos da licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão e da licenciatura em Matemática possuem conhecimentos prévios de programação em Python, adquiridos nas unidades curriculares INF11968L Introdução à Programação, lecionada pelo Departamento de Informática, e MAT10689L Laboratório de Matemática e Estatística, lecionada pelo Departamento de Matemática, sendo ambas unidades curriculares semestrais de 6 ECTS, do semestre par do primeiro ano de ambas as licenciaturas.

Embora não sejam formalmente exigidos pré-requisitos, é necessário que os alunos dominem conceitos das seguintes unidades curriculares (que fazem parte de ambas as licenciaturas): Análise Matemática I, Análise Matemática II, Análise Matemática III, Análise Matemática IV, Álgebra Linear e Geometria Analítica I e Programação Matemática.

## 2 Introdução

O cálculo das variações é um dos ramos mais antigos da matemática. Foi Euler quem, ao observar o trabalho de Lagrange, deu o nome a este campo da matemática. Mas, de facto, o tema é anterior. Teve o seu início com um dos mais antigos problemas em matemática: a desigualdade isoperimétrica. Uma variante deste problema é conhecida como o problema de Dido. Outros problemas importantes foram considerados ao longo do século dezassete na Europa, entre os quais o problema da braquistócrona, formulado por Galileu em 1638. Este problema foi levado ao conhecimento do mundo científico por John Bernoulli, que publicou uma nota na *Acta Eruditorum* (a primeira revista científica, em 1682) com o título: "Um novo problema que os matemáticos são convidados a resolver". Este problema teve uma influência muito grande no desenvolvimento do cálculo das variações. Foi resolvido por John Bernoulli em 1696 e, quase em seguida, também pelo seu irmão James Bernoulli, por Leibniz e por Newton. Foi dado um passo decisivo com o trabalho de Euler e Lagrange, que encontraram uma forma sistemática de lidar com tais problemas variacionais, introduzindo o que é hoje conhecido como a equação de Euler-Lagrange. Já no século dezanove, surgiu provavelmente o problema mais célebre do cálculo das variações: o estudo do integral de Dirichlet, um problema de integrais múltiplos. A importância deste problema foi motivada pela sua relação com a equação de Laplace. Foi Hilbert quem, já no final do século dezanove, resolveu o problema, tendo sido imediatamente imitado por Lebesgue e, depois, por Tonelli. Os seus métodos para resolver o problema eram, essencialmente, aquilo que hoje conhecemos como métodos diretos do cálculo das variações.

Na década de 1950, o cálculo das variações clássico passou por uma grande transformação com a chegada de dois grandes avanços:

Em meados desta década, Pontryagin iniciou um seminário sobre teoria do controlo. Neste seminário, vários especialistas (Feldbaum, Lerner, Rozonoer, entre outros) foram convidados a apresentar problemas concretos que ocorriam na prática. Como resultado, Pontryagin e os seus alunos definiram uma classe de problemas, os problemas de controlo ótimo, classe esta contendo todos os problemas variacionais e também a maioria dos casos especiais considerados no seminário. Esta nova teoria, que generalizou o cálculo das variações, desenvolvida por Pontryagin e pelos seus colaboradores nesta década, foi publicada em tradução inglesa em 1962. Foram obtidas as condições necessárias para este problema, e estas condições passaram a ser designadas por princípio do máximo de Pontryagin.

Na mesma época, Bellman interessou-se pela teoria dos processos de decisão multi-estágios. Ela foi projetada principalmente para lidar com problemas de otimização

em tempo discreto, mas o famoso princípio de otimalidade de Bellman:

*“O controlo ótimo tem a propriedade que, independentemente do estado inicial e das decisões já tomadas, as restantes decisões constituem a estratégia ótima em relação ao estado resultante das decisões anteriormente tomadas.”*

também se aplica a problemas em tempo contínuo, onde a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman desempenha um papel crucial. As condições do princípio do máximo de Pontryagin (na sua versão mais simples) podem ser obtidas, pelo menos heurísticamente, a partir da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman. No entanto, uma demonstração rigorosa do princípio do máximo adota, geralmente, uma abordagem diferente. Como referiu Pontryagin: “O método de programação dinâmica foi desenvolvido para as necessidades de processos de controlo ótimo, que são de carácter muito mais geral do que aqueles descritíveis por sistemas de equações diferenciais. Portanto, o método de programação dinâmica possui um carácter mais universal do que o princípio do máximo. No entanto, em contraste com este último, este método não possui a base lógica rigorosa em todos os casos em que pode ser utilizado com sucesso como uma ferramenta heurística valiosa.” Em consonância com estas observações, a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman é frequentemente utilizada em cenários mais complexos, por exemplo no caso de problemas de controlo ótimo de sistemas estocásticos.



### 3 Objetivos e competências a adquirir

A unidade curricular tem como objetivo a formação básica em teoria da otimização dos sistemas dinâmicos, com vista ao desenvolvimento futuro, quer dos conhecimentos nesta área, quer da utilização noutras áreas da Matemática ou da Economia e Gestão. Os objetivos e as competências a serem adquiridos são:

- Formular os modelos de controlo ótimo e programação dinâmica em vários contextos nas áreas de Matemática, Física, Economia, Gestão, Engenharia, Biologia, entre outros.
- Saber os métodos principais de resolução destes problemas.
- Desenvolver o pensamento abstrato dos alunos para compreender e resolver, de forma mais simples e com maior generalidade, problemas concretos.
- Desenvolver a capacidade de abstração, intuição criativa, construção de modelos e espírito crítico.

## 4 Programa e conteúdos

O nome da unidade curricular, otimização dinâmica, é suficientemente esclarecedor: é feita uma abordagem ao cálculo das variações, ao controlo ótimo e à programação dinâmica, introduzindo assim os alunos no domínio da otimização em dimensão infinita.

Assumiremos sempre que as funções são suficientemente suaves para que os problemas, resultados e argumentos usados estejam bem formulados. Iremos também supor sempre a existência de solução nos problemas que iremos abordar.

Os conteúdos programáticos previstos na ficha da unidade curricular dividem-se nos seguintes tópicos principais:

- Otimização dos sistemas e processos dinâmicos, problemas de controlo. Introdução histórica.
- Cálculo das variações. Exemplos particulares importantes: geodésicas, problema da braquistócrona, superfícies de revolução de área mínima. Equação de Euler-Lagrange. Condição de transversalidade.
- Teoria de controlo. Controlabilidade. Problemas de controlo ótimo. Exemplos na área de Economia e Gestão. Princípio do máximo de Pontryagin. Modelo de crescimento económico ótimo.
- Programação dinâmica. Processos de decisão multietapas. Princípio de otimalidade de Bellman. Problemas típicos de programação dinâmica.

## 5 Metodologia de ensino

A metodologia de ensino e de aprendizagem da unidade curricular, articulada com o modelo pedagógico adotado, assenta na exposição estruturada a par de exemplos com ênfase nas aplicações e resolução de exercícios. Pretende-se desta forma estimular a iniciativa dos alunos, de modo a que o decorrer das aulas seja centrado essencialmente na sua atividade, incentivando a apresentação de dúvidas e/ou sugestões de aplicação e/ou exposição dos conteúdos, a resolução de exercícios, a participação em discussões, demonstrações, etc.

A metodologia de ensino para o programa da Otimização Dinâmica tem por base aulas teórico-práticas e atendimento semanal aos alunos. O atendimento aos alunos funciona durante todo o semestre, e não apenas nas 15 semanas letivas, conforme se encontra consagrado no artigo 109º do Regulamento Académico da Universidade de Évora.

A Otimização Dinâmica, como referido anteriormente, confere um número de créditos de 6 ECTS, que corresponde a 156 horas de trabalho total. Estas horas estão divididas em 60 horas de contacto teórico-práticas (distribuídas por 2 aulas por semana de 2 horas cada, equivalentes a 4 horas de carga horária letiva semanal) e 96 horas de trabalho autónomo dos alunos. A esta carga horária letiva acrescem as 2 horas de atendimento aos alunos por semana.

A distribuição semanal e semestral de horas, consta na Tabela 1.

<b>Tipo de sessão</b>	<b>Horas semanais</b>	<b>Horas semestrais</b>
Aulas teórico-práticas	4	60
Trabalho autónomo	6.4	96
Trabalho total (6 ECTS)	10.4	156

Tabela 1: Repartição de trabalho em horas.

Os recursos pedagógicos utilizados no processo ensino-aprendizagem são o quadro tradicional, o giz, os meios audiovisuais e informáticos (computadores, projetores, ligação à Internet). Acrescentamos, ainda, como recurso pedagógico a plataforma Moodle. A plataforma Moodle é um complemento importante para a interação regular entre docente e alunos, onde são disponibilizados conteúdos e informações

utilizados no funcionamento da unidade curricular.

## **5.1 Aulas teórico-práticas**

A modalidade de aulas teórico-práticas, sendo uma abordagem pedagógica que combina em simultâneo a teoria e a prática, tem a grande vantagem de serem aulas naturalmente mais interativas, incentivando o desenvolvimento de espírito crítico e potenciando a resolução de problemas que, ao aplicar conceitos teóricos em situações práticas (sempre que possível), aumenta a motivação e melhora a compreensão, facilitando uma melhor retenção da matéria. Tem ainda a vantagem de desenvolver as habilidades de comunicação nos alunos.

Complementarmente às aulas, com o objetivo de promover o estudo autónomo, os alunos são incentivados a estudar as matérias abordadas, com o apoio da bibliografia recomendada, e são indicados exercícios a resolver das listas de exercícios disponibilizadas no Moodle. Alguns destes exercícios são resolvidos durante o decorrer das aulas.

A utilização do Python permite não só que os alunos tenham um modo alternativo (e autónomo) de verificarem as soluções dos exercícios, bem como tem a vantagem de permitir a resolução de exercícios que de outra forma seriam difíceis de resolver, como por exemplo implementação de algoritmos numéricos, resolução de equações diferenciais não-lineares, etc.

## **5.2 Atendimento**

O atendimento é uma ferramenta indispensável no apoio aos alunos no seu trabalho autónomo. O atendimento presencial é marcado de acordo com a disponibilidade de horário por parte dos alunos e do docente, sendo essa informação disponibilizada nas plataformas Moodle e SIIUE (Sistema de Informação Integrado da Universidade de Évora). Complementarmente, os alunos poderão utilizar o email do docente para esclarecimento de dúvidas pontuais urgentes.

## 6 Método de avaliação

A avaliação de conhecimentos, expressa numa escala numérica de 0 a 20 valores, compreende duas vertentes em alternativa: avaliação contínua ou avaliação por exame. A avaliação contínua é composta por duas frequências, sendo que a nota final é a média aritmética das duas frequências (cada uma com nota mínima de 8 valores), realizadas durante o período de aulas<sup>1</sup>. A avaliação por exame é constituída pela realização de um exame global, o qual será realizado na época normal e/ou na época de recurso. Existe ainda uma época especial (para os alunos com algum dos estatutos especiais reconhecido no regulamento académico da Universidade de Évora: trabalhador-estudante; estudante finalista; estudante dirigente associativo; estudante elemento dos coros, tunas e outros grupos de natureza idêntica; estudante praticante de desporto de alto rendimento; estudante atleta do ensino superior; estudante bombeiro; estudante voluntário) e uma época extraordinária (alunos aos quais falte apenas uma unidade curricular para terminarem o curso).

A Tabela 2, contém informação relativa aos conteúdos programáticos avaliados em cada um dos regimes de avaliação.

A marcação das datas de avaliação na Universidade de Évora, das unidades curriculares de licenciatura transversais a três ou mais cursos e número de alunos maior ou igual a 100 é feita centralmente pela direção da respetiva Escola (no caso da Otimização Dinâmica, a Escola de Ciências e Tecnologia). No caso das unidades curriculares que não cumprem estas condições, o responsável da unidade curricular propõe as datas às respetivas comissões de curso às quais a unidade curricular é lecionada (no caso da Otimização Dinâmica, as comissões de curso da licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão e da licenciatura em Matemática) que elaboram um mapa de todas as avaliações das unidades curriculares desse curso, garantindo desse modo que não existe mais do que uma avaliação no mesmo dia do mesmo ano do curso, por um lado, e por outro que existe um espaçamento razoável entre todas as datas de avaliação. Tais mapas são depois enviados aos respetivos Conselhos Pedagógicos das Escolas, que fiscalizam o cumprimento das obrigações relativas às datas de avaliação plasmadas no Regulamento Académico da Universidade de Évora.

A primeira frequência ocorre tipicamente na nona semana de aulas e a segunda frequência na última semana de aulas ou em simultâneo com o exame de época

---

<sup>1</sup>a segunda frequência poderá eventualmente ter lugar na época de exames, em simultâneo com o exame de época normal (dependendo do calendário acordado com as comissões de curso)

normal (dependendo do calendário acordado com as comissões de curso).

<b>Avaliação</b>	<b>Tópicos para avaliação</b>	<b>Ponderação</b>
1. <sup>a</sup> Freq.	Programação Dinâmica Discreta	50%
	Cálculo das Variações	
2. <sup>a</sup> Freq.	Controlo Ótimo	50%
	Programação Dinâmica Contínua	
Exame	Todos os Tópicos	100%

Tabela 2: Matéria relativa aos diferentes regimes de avaliação.

## 7 Calendarização e planificação das aulas

Apresentamos em seguida a calendarização e respetiva planificação dos conteúdos a lecionar, distribuídos pelas 15 semanas de aulas do semestre letivo.

### 7.1 Calendarização das aulas

Como referido anteriormente, a lecionação da unidade curricular Otimização Dinâmica está prevista para 15 semanas de aulas, com uma distribuição semanal de 4 horas letivas teórico-práticas, divididas em 2 aulas de 2 horas cada. A Tabela 3 mostra-nos o número de semanas de aulas para a lecionação de cada um dos tópicos.

<b>Tópicos</b>	<b>Semanas de aulas</b>
Otimização em espaços de dimensão finita	2
Cálculo das Variações	6
Controlo Ótimo	5
Programação Dinâmica Contínua	2

Tabela 3: Calendarização dos diferentes tópicos.

### 7.2 Planificação das aulas

A tabela 3 contém os temas principais a abordar nas 15 semanas de aulas que constituem o semestre ímpar: Otimização em espaços de dimensão finita, Cálculo das Variações, Controlo Ótimo e Programação Dinâmica Contínua. A página Moodle da unidade curricular contém toda a informação necessária: programa; regimes de avaliação; datas das avaliações; horário de atendimento; bibliografia recomendada; textos de apoio e listas de exercícios sobre a matéria. Os sumários das aulas estão disponíveis para consulta dos alunos no Sistema de Informação Integrado da Universidade de Évora.

Na parte inicial da primeira aula é feita uma apresentação geral do programa e das metodologias de ensino, sendo também combinado com os alunos o horário de atendimento semanal. Os alunos são convidados a fazer uma breve apresentação referindo, nomeadamente, se têm eventualmente em atraso alguma das unidades curriculares fundamentais (Análise Matemática I, Análise Matemática II, Análise

Matemática III, Análise Matemática IV, Álgebra Linear e Geometria Analítica I e Programação Matemática) ou se, por outro lado, frequentaram ou estão a frequentar alguma outra unidade curricular relevante da área da Análise Matemática (como por exemplo, Equações Diferenciais Ordinárias ou Equações Diferenciais Parciais). Na primeira semana são recordados, de forma breve, os conceitos básicos fundamentais de otimização de funções em  $\mathbb{R}^n$  (com e sem restrições).

Os conceitos abordados ao longo das 15 semanas são:

### **Semanas 1 e 2:** *Otimização em espaços de dimensão finita*

- Extremos livres. Condições necessárias e condições suficientes.
- Extremos condicionados: restrições de igualdade. Multiplicadores de Lagrange.
- Extremos condicionados: restrições de desigualdade. Condições de Karush-Kuhn-Tucker.
- Introdução à Programação Dinâmica discreta. O princípio de otimalidade de Bellman.
- Problemas típicos de programação dinâmica discreta: problema do caminho simples, problema da substituição de equipamento, problema do caixeiro viajante, entre outros.

### **Semanas 3, 4, 5, 6, 7 e 8:** *Cálculo das Variações*

- Introdução histórica. Problemas clássicos. Exemplos e interpretações: princípio de Fermat, problema de Newton, Braquistócrona, superfícies mínimas de revolução, entre outros.
- Equação de Euler-Lagrange. Condições de transversalidade e condições de fronteira.
- Casos especiais da equação de Euler-Lagrange: lagrangeano dependente apenas de algumas das variáveis.
- A Equação de Euler-Lagrange no caso vetorial.



- Casos particulares da equação de Euler-Lagrange: problema de Bolza, problema com derivadas de ordem superior, problema isoperimétrico.
- Condições necessárias de segunda ordem. Condição de Legendre.
- Paradoxo de Perron. A importância de garantir a existência de solução.
- Métodos indiretos clássicos. Condição suficiente de Jacobi.
- O Método Direto.

#### Semanas 9, 10, 11, 12 e 13: *Controlo Ótimo*

- Introdução. Conceitos básicos. Formulação do problema de controlo.
- Controlabilidade. Sistemas lineares autónomos. Sistemas não-lineares autónomos.
- Formulação do problema de controlo ótimo e relação com o problema do Cálculo das Variações.
- Abordagem Hamiltoniana. A condição necessária de Hestenes.
- Uma condição suficiente. Princípio do máximo de Pontryagin.
- O exemplo da carruagem a jato. Problema de Newton da Resistência mínima.

#### Semanas 14 e 15: *Programação Dinâmica contínua*

- Função valor ótimo. Princípio de otimalidade de Bellman.
- Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman.
- Problema do consumo ótimo com taxa de desconto.

## Referências

- [1] Bandeira, L., Coelho, F., Franco, N. (2016). Introdução à Matemática - Álgebra, Análise e Otimização, 344pp, LIDEL.
- [2] Bellman, R.E. (1957). Dynamic Programming, Princeton University Press, Princeton, NJ.
- [3] Bertsekas, D. (2020). Dynamic Programming and Optimal Control, Athena Scientific.
- [4] Bertsekas, D. (2016). Nonlinear Programming: 3<sup>rd</sup> Edition, Athena Scientific, Belmont, Massachusetts.
- [5] Brinkhuis, J., Tikhomirov, V. (2005). Optimization: Insights and applications. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- [6] Castillo, E., Conejo, A., Pedregal, P., Garcíá, R., Alguacil, N. (2002) Building and solving mathematical programming models in engineering and science. Chichester: Wiley.
- [7] Dacorogna, B. (2015). Introduction to the Calculus of Variations. 3<sup>rd</sup> edition, Imperial College Press.
- [8] Kamien, M., Schwartz, N. (1991). Dynamic optimization. The calculus of variations and optimal control in economics and management, Elsevier Science.
- [9] Dias Agudo, F. R. (1992). Análise Real Volume III, Escolar Editora.
- [10] Intriligator, M. (2002). Mathematical Optimization and Economic Theory, SIAM.
- [11] Leitão, A., Baumeister, J. (2008). Introduction to Control Theory and Dynamical Programming, Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA).
- [12] Léonard, D., van Long, N. (1998). Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics, Cambridge University Press.
- [13] Macki, J., Strauss, A. (1992) Introduction to optimal control theory, Springer.
- [14] Pedregal, P. (2004). Introduction to Optimization. New York: Springer.

- [15] Pedregal, P. (2017). Optimization and Approximation. UNITEXT, vol 108. Springer, Cham.
- [16] Pontryagin, L.S., Boltyanskii, V.G., Gamkrelidze, R.V., Mishchenko, E.F. (1962). The Mathematical Theory of Optimal Processes, International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics, Wiley Interscience, New York.
- [17] Smirnov, G., Bushenkov, V. (2004). Curso de Optimiza  o: Programac  o Matem  tica, C  culo de Varia  es, Controlo   ptimo, Escolar Editora.
- [18] Torres, D., (2005). Introduc  o    Optimiza  o Din  mica, Universidade de Aveiro.
- [19] Weber, T. (2014). Optimal control theory with applications in economics, MIT Press.