

**Universidade de Évora - Escola de Ciências e Tecnologia**

**Mestrado em Modelação Estatística e Análise de Dados**

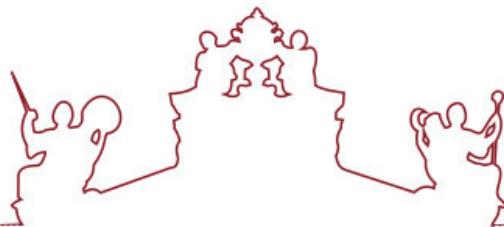
Dissertação

**Modelos Matemáticos de Crescimento Individual: Aplicação  
ao Crescimento de Bovinos**

Belna Quefade Bequinsa

Orientador(es) | Gonçalo João Jacinto

Évora 2025



---

**Universidade de Évora - Escola de Ciências e Tecnologia**

Mestrado em Modelação Estatística e Análise de Dados

Dissertação

**Modelos Matemáticos de Crescimento Individual: Aplicação  
ao Crescimento de Bovinos**

Belna Quefade Bequinsa

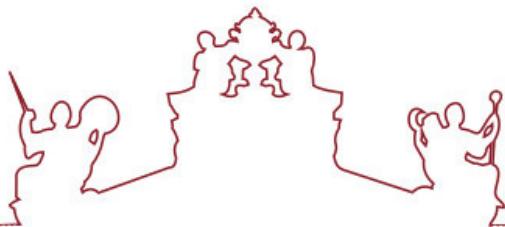
Orientador(es) | Gonçalo João Jacinto

Évora 2025

---

---

---



A dissertação foi objeto de apreciação e discussão pública pelo seguinte júri nomeado pelo Diretor da Escola de Ciências e Tecnologia:

Presidente | Anabela Afonso (Universidade de Évora)

Vogais | Gonçalo João Costa Jacinto (Universidade do Algarve)  
Patrícia Andreia da Silva Filipe (ISCTE - Instituto Universitário de Lisboa)  
(Arguente)

Évora 2025

# Índice

Lista de Figuras	i
Lista de Tabelas	ii
Lista de Acrónimos	iii
Resumo	iv
Abstract	v
Agradecimentos	vi
1. Introdução .....	1
1.1. Objetivos .....	2
1.2. Associação de Criadores de Bovinos da Raça Mertolenga (ACBM).....	3
1.3. Modelos de Crescimentos individual .....	5
2. Equação Diferencial Estocástica e Integral Estocástica.....	7
2.1. Processo Estocástico .....	7
2.2. Processo de Wiener .....	9
2.3. Integral Estocástica de Itô .....	10
2.4. Integral de Stratonovich .....	14
2.5. Cálculo de Itô e de Stratonovich .....	15
2.6. Equação Diferencial Estocástica .....	16
2.7. Teorema de Existência, Unicidade e Propriedades da Solução de uma Equação Diferencial Estocástica de Itô .....	18
3. Modelos Matemáticos de Crescimento Individual .....	21
3.1. Modelos Matemáticos Determinísticos .....	21
3.1.1  Modelo de Verhulst .....	21
3.1.2  Modelo de Gompertz .....	24
3.1.3  Modelo de Bertalanffy-Richards .....	26
3.2. Modelos Estocásticos de Crescimento Individual .....	28
4. Método de Estimação .....	30
4.1. Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) .....	30
4.2. Método da Máxima Verossimilhança (MMV) .....	32
5. Resultados .....	35
5.1. Estimação dos Parâmetros .....	35
5.2. Previsão .....	40
6. Conclusões .....	45
Anexo .....	48
Referências Bibliográficas .....	64

# **Lista de Figuras**

**Figura 1:** Bovino da Raça Mertolenga.

**Figura 2:** Pierre François Verhulst.

**Figura 3:** Benjamin Gompertz.

**Figura 4:** Ajustamento dos modelos estocásticos de Gompertz (MEG) e de Bertalanffy-Richards (MEBR) aos dados observados.

**Figura 5:** Ajustamento dos modelos determinísticos de Gompertz (MDG), de Bertalanffy-Richards (MDBR) e de Verhulst (MDV) aos dados observados.

**Figura 6:** Representação gráfica das estimativas dos 5 modelos para as últimas 15 observações, para estimativas a longo prazo.

**Figura 7:** Representação gráfica das estimativas dos 5 modelos para as últimas 15 observações, para estimativas a curto prazo (passo a passo).

## Lista de Tabelas

**Tabela 1:** Estimativas dos parâmetros obtidas pelo método da máxima verossimilhança para os modelos estocásticos de Gompertz e de Bertalanffy-Richards, e os respetivos valores das log-verossimilhanças.

**Tabela 2:** Estimativas dos parâmetros obtidas pelo método dos mínimos quadrados para o modelo determinístico de Gompertz (MDG), o modelo determinístico de Bertalanffy-Richards (MDBR) e o modelo determinístico de Verhulst (MDV).

**Tabela 3:** Comparaçāo da qualidade de ajustamento dos diferentes modelos determinísticos e estocásticos.

**Tabela 4:** Valores da REQM e do EMA para as estimativas a longo prazo das últimas 15 observações para os diferentes modelos determinísticos e estocásticos.

**Tabela 5:** Valores da REQM e do EMA para as estimativas a curto prazo (passo a passo) das últimas 15 observações para os diferentes modelos determinísticos e estocásticos.

## **Lista de Acrónimos**

ACBM	Associação de Criadores de Bovinos da Raça Mertolenga
CTR	Centro de Testagem e Recria
DOP	Denominação de Origem Protegida
EDE	Equação Diferencial Estocástica
EMA	Erro Médio Absoluto
f.d.p	função densidade de probabilidade
i.i.d	independentes e identicamente distribuídos
MEBR	Modelo Estocástico de Bertalanffy-Richards
MEG	Modelo Estocástico de Gompertz
MDBR	Modelo Determinístico de Bertalanffy-Richards
MDG	Modelo Determinístico de Gompertz
MDV	Modelo Determinístico de Verhulst
MMV	Método da Máxima Verossimilhança
MMQ	Método dos Mínimos Quadrados
q.c	quase certamente
REQM	Raiz do Erro Quadrático Médio

## Resumo

### **Modelos Matemáticos de Crescimento Individual: Aplicação ao Crescimento de Bovinos**

O presente trabalho tem como objetivo avaliar diferentes modelos de crescimento individual, tanto determinísticos como estocásticos, aplicados ao crescimento de bovinos da raça Mertolenga. Para tal, é analisado o desempenho dos modelos determinísticos de Gompertz, Verhulst e Bertalanffy-Richards, bem como os modelos estocásticos de Gompertz e de Bertalanffy-Richards. A estimação dos parâmetros foi realizada através dos métodos dos mínimos quadrados e da máxima verossimilhança, utilizando dados reais fornecidos pela Associação de Criadores de Bovinos da Raça Mertolenga (ACBM). Foram avaliados indicadores como a Raiz do Erro Quadrático Médio (REQM) e o Erro Médio Absoluto (EMA) para aferir a qualidade dos ajustes e previsões. As previsões dos modelos foram comparadas para identificar qual descreve melhor o crescimento de bovino, proporcionando maior precisão na modelação das curvas de crescimento.

Os resultados contribuirão para uma melhor compreensão da importância de usar os modelos estocásticos na previsão do crescimento desta raça e melhorando produtividade da criação desta raça.

**Palavras-chave:** Bovinos Mertolengos; EDE; Modelos de Crescimento Determinístico e Estocástico; Previsão.

# Abstract

## **Mathematical Models for Individual Growth: An Application to Cattle Growth**

The present study aims to evaluate different models of individual growth, both deterministic and stochastic, applied to the growth of Mertolenga breed cattle. For this purpose, the performance of deterministic models such as Gompertz, Verhulst, and Bertalanffy-Richards was analyzed, as well as stochastic models of Gompertz and Bertalanffy-Richards.

Parameter estimation was carried out using the least squares and maximum likelihood methods, employing real data provided by the Mertolenga Cattle Breeders Association (ACBM). Indicators such as the Root Mean Square Error (RMSE) and the Mean Absolute Error (MAE) were assessed to evaluate the quality of the fits and predictions. The model predictions were compared to identify which one best describes cattle growth, allowing for more accurate modeling of growth curves.

The results will contribute to a better understanding of the importance of using stochastic models in the forecast the growth of this breed and improving the productivity of raising this breed.

**Keywords:** Mertolengo Cattle; EDE; Deterministic and Stochastic Growth Models; Forecasting.

## **Agradecimentos**

Este mestrado representa uma etapa extremamente importante no meu percurso académico, pois permitiu-me concretizar conteúdos abstratos dessa área. No entanto, não foi uma etapa fácil de realizar sem apoios diretos e indiretos de várias pessoas. Por isso, aproveito esta ocasião para expressar os meus agradecimentos especiais:

Em primeiro lugar, agradeço a Deus pela força, coragem e motivação diárias, essenciais para conciliar o trabalho de segurança privada e os estudos em Portugal, particularmente em Évora.

Agradeço à minha mãe pelo apoio incondicional e pelo amor sempre presente, mesmo à distância.

Um agradecimento muito especial ao meu filho Patrick Pansau Bequinsa, cuja ausência desde dezembro de 2021 tem sido um desafio constante. A sua presença no meu coração foi uma fonte de inspiração e determinação ao longo desta etapa académica.

Manifesto a minha profunda gratidão aos meus professores deste mestrado, que, com dedicação e conhecimento, me guiaram ao longo deste percurso académico. Em particular, agradeço ao meu orientador, Professor Doutor Gonçalo João Costa Jacinto, pelo acompanhamento atento, pela paciência e, sobretudo, por me desafiar a descobrir e compreender os conteúdos desta dissertação, contribuindo de forma significativa para o meu crescimento académico e pessoal.

A todos os que de alguma forma, contribuíram para a concretização deste trabalho, o meu sincero obrigado.

# 1. Introdução

O estudo dos modelos de crescimento individual é um tema fundamental em diversas áreas do conhecimento, incluindo a estatística, a biologia e a economia. Os modelos matemáticos desempenham um papel determinante na descrição e previsão da dinâmica individual, permitindo compreender os fatores que influenciam o crescimento e auxiliando na tomada de decisões em contextos como a gestão da produção, alimentação, criação, recria, abate, preservação e comercialização da carne dos bovinos da raça Mertolenga.

Neste trabalho, são explorados diferentes modelos de crescimento individual, tanto determinístico como estocásticos. Os modelos determinísticos assumem que o crescimento individual do bovino segue uma trajetória fixa definida por equações diferenciais, enquanto os modelos estocásticos incorporam variações aleatórias para capturar incertezas nos dados que afetam o crescimento. Especificamente, abordamos os modelos determinísticos de Gompertz, de Verhulst e de Bertalanffy-Richards, e os modelos estocásticos de Gompertz e de Bertalanffy-Richards. No primeiro caso, os parâmetros dos modelos serão estimados pelo método dos mínimos quadrados e, no caso estocástico, pelo método da máxima verossimilhança. Iremos usar um conjunto de dados reais referentes ao peso ao longo do tempo do bovino da raça Mertolenga. O desempenho dos modelos será avaliado comparando a precisão das previsões, com o objetivo de identificar qual modelo melhor representa os dados e pode ser mais adequado para descrever e prever o crescimento deste animal.

## 1.1 Objetivos

Esta dissertação tem como principais objetivos estudar os diferentes modelos de crescimento individual, tanto nas suas versões determinísticas como estocásticas. Especificamente, serão abordados os modelos de Verhulst, de Gompertz e de Bertalanffy-Richards, explorando as suas características e aplicabilidades em diferentes contextos de crescimento individual. Os parâmetros desses modelos serão estimados com recurso a diferentes metodologias, utilizando os dados dos pesos do animal da raça Mertolenga, disponibilizados pela Associação de Criadores de Bovinos da Raça Mertolenga (ACBM). Por fim, será realizada uma análise de desempenho dos modelos, avaliando a precisão e a fiabilidade das previsões dos diferentes modelos.

## **1.2 Associação de Criadores de Bovinos da Raça Mertolenga (ACBM)**

A Associação de Criadores de Bovinos da Raça Mertolenga (ACBM) é uma organização que defende os interesses dos seus associados no que diz respeito à preservação, ao melhoramento genético, à criação e à comercialização dos bovinos da raça Mertolenga, além de representar os seus associados perante o Estado e outros organismos, tanto a nível nacional como internacional (Januario, 2021).

Por outro lado, possibilita aos criadores realizarem recria e acabamento dos seus vitelos, alcançando um valor económico superior ao normalmente obtido com as vendas no desmame, mesmo quando as condições técnicas e económicas não são favoráveis.

A sua sede está localizada na região do Alentejo, concretamente na cidade de Évora, uma vez que esta região é a maior produtora de carne de bovino em Portugal e concentra o maior número desta espécie no país (Januario, 2021).

A principal missão da associação é preservar as características que os bovinos da raça Mertolenga possuem atualmente, uma vez que esta raça é constituída por vacas bem-adaptadas ao meio ambiente em que vivem.

A ACBM tem produzido dois tipos de vitelões da raça Mertolenga:

- ❖ Vitelão Mertolengo DOP (Denominação de Origem Protegida), abatido entre os 10 e 15 meses de idade, com peso mínimo da carcaça de 120 kg;
- ❖ Vitelão convencional, abatido entre os 8 e 12 meses de idade, com peso da carcaça entre 120 kg e 250 kg.

Denominação de Origem Protegida (DOP) é um selo que utiliza o nome de uma localidade ou região para indicar que um produto é originário dessa área.

A carne Mertolenga possui este selo e apresenta características organolépticas próprias, com algumas infiltrações de gordura intramuscular, que resultam num marmoreado de dispersão médio.

Segundo a Direção Geral de Agricultura e Desenvolvimento Rural (2020), esta carne distingue-se ainda pela sua cor escura e pela gordura que pode variar entre amarela e branca, dependendo do tipo de vitelo em questão.

Estes bovinos da raça Mertolenga são bem-adaptados à região do Alentejo, são enérgicos e pertencem a uma raça pequena. Estes animais são desmamados por volta de 6 a 8 meses de idade, e a ACBM assume as fases de recria e acabamento dos jovens machos provenientes dos seus associados. Estas atividades são realizadas no Centro de Testagem dos Currais e Simalhas (CTR).



**Figura 1:** Bovino da Raça Mertolenga

**Fonte:** Fotografia disponível no site da ACBM

Segundo Carolino (2016), neste centro também são realizados testes em machos mertolengos para reprodução, sendo a sua seleção baseada nos valores genéticos, com especial atenção aos indicadores relacionados com o período entre partos e a capacidade maternal.

A recria dos machos Mertolengos é realizada de forma intensiva ou semi-intensiva e o sistema de alimentação baseia-se em concentrado e palha ou feno. Já no CTR, a alimentação é feita a base de silagem de milho, de consociação de gramíneas ou leguminosas, feno, feno-silagem e farinado para completar o perfil nutricional desejado.

A base de dados fornecida por essa associação, para o estudo dos modelos matemáticos de crescimento individual, contém a idade, expressa em anos, e respetivos pesos, em quilograma (kg). Além disso, são disponibilizados dados sobre diversas componentes genéticas dos animais, embora os mesmos não sejam utilizados nesta dissertação.

### **1.3 Modelos de Crescimento Individual**

Um modelo de crescimento individual é uma formulação matemática, utilizada em diversas áreas para analisar e prever a forma como um determinado indivíduo evolui ao longo do tempo. Estes modelos permitem compreender os fatores que influenciam o crescimento, facilitando a análise e a formulação de previsões sobre o comportamento futuro da variável em estudo.

Iremos estudar dois tipos principais de modelos de crescimento individual: modelos determinísticos e modelos estocásticos.

Os modelos determinísticos (não possuem uma componente estocástica) assumem que todos os parâmetros que afetam o crescimento individual são constantes e previsíveis, ou

seja, as mudanças no indivíduo ocorrem de forma previsível e contínua, uma vez que não incorporam o efeito de perturbações aleatórias no crescimento.

Os modelos com componente estocástica são modelos que incorporam algum elemento de aleatoriedade ou incerteza que afeta o crescimento do indivíduo. Estes modelos conseguem lidar com a incerteza inerente ao crescimento, podendo capturar eventos imprevisíveis e flutuações aleatórias dos fatores ambientais e demográficos. Estes modelos utilizam frequentemente equações diferenciais estocásticas ou simulações computacionais para levar em conta a variação aleatória do ambiente.

## 2. Equação Diferencial Estocástica e Integral Estocástica

Neste estudo, utilizaremos modelos com componente estocástica, nomeadamente os modelos de Gompertz e de Bertalanffy-Richards, para avaliar as diferenças na estimação das curvas de crescimento e analisar como os diferentes modelos conseguem prever a evolução do crescimento individual do animal em estudo. Para descrevermos estes modelos, é necessário explicar o que é um processo estocástico, definir o integral estocástico e uma equação diferencial estocástica.

### 2.1 Processo Estocástico

Um processo estocástico, conforme definido por Braumann (2005), é uma coleção indexada de variáveis aleatórias  $\{X_t = X_t(\omega): t \in T, \omega \in \Omega\}$ , definido no espaço de probabilidade  $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ , onde  $X_t$  é a variável aleatória,  $t$  é o tempo,  $X_t(\omega)$  é o estado do processo no instante  $t$  e do acaso  $\omega$ ,  $T$  é o conjunto de índices.

Como cada variável aleatória,  $X_t = X_t(\omega)$ , é uma função do acaso,  $\omega \in \Omega$ , isso implica que um processo estocástico pode ser considerado como uma função de duas variáveis, do tempo,  $t$ , e do acaso,  $\omega$ , apesar de quando se usa a notação  $X_t$  a dependência do acaso não aparecer explicitamente representado, é essencial reconhecer que o processo estocástico depende dele (Braumann, 2005).

Para cada  $t$  fixo, obtemos uma função mensurável de  $\omega$ , chamada de variável aleatória. Se fixarmos o acaso,  $\omega$ , obtemos uma função do tempo,  $t$ , chamado de trajetória do processo estocástico, as trajetórias representam realizações do processo estocástico.

O espaço de estado ( $S$ ) é o contradomínio da função  $X_t(\omega)$ , em outras palavras, o espaço de estado é o conjunto de todos os valores possíveis que a variável aleatória pode assumir

para todo os  $t$ . O processo estocástico pode ser classificado de acordo com o conjunto de índices  $T$  (Braumann, 2005):

- ❖ Se  $T$  é um conjunto dos inteiros ou conjuntos dos inteiros não-negativos, estamos perante um processo estocástico em tempo discreto;
- ❖ Se  $T$  é um intervalo de tempo escrito na forma  $[0, +\infty[$ ,  $-\infty, +\infty[$  ou  $[a, b]$ , estamos perante um processo estocástico em tempo contínuo;
- ❖ Se  $T$  é um intervalo de  $\mathbb{R}^d$ , estamos perante um processo espacial.

Um processo estocástico estacionário pode ser intuitivamente definido como um processo em que, mesmo havendo flutuações aleatórias ao longo do tempo, as propriedades estatísticas fundamentais, como média, variância e covariância, permanecem constantes e não se alteram com o passar do tempo. Matematicamente, essa estacionariedade é formalizada de duas maneiras (Braumann, 2005):

- ❖ Primeiro, um processo estocástico é considerado **estritamente estacionário** se todas as distribuições de dimensão finito são iguais sob translações no tempo, ou seja,

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau}(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

onde  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ,  $t_1, t_2, \dots, t_n \in I$  e  $\tau \in \mathbb{R}$  tal que  $t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau \in I$

- ❖ Segundo, um processo estocástico é dito **estacionário em sentido lato ou de segunda ordem** se e somente se:

- $E[X_t] = \mu(t) = \mu$ , para todo  $t \in T$ , onde  $\mu$  é uma constante;
- $E[X_t^2] < \infty$ , para todo  $t \in T$ , isso garante que o segundo momento (variância) de  $X_t$  seja finito em todos os pontos no tempo;
- $cov[X_s, X_t] = C(t - s)$ , onde  $C$  é uma função de auto-covariância.

## 2.2 Processo de Wiener

Um processo de Wiener, também conhecido como movimento browniano e representado por  $W_t$  é um tipo de processo estocástico contínuo que descreve o movimento aleatório de partículas ou variáveis ao longo do tempo. Ele traduz o efeito acumulado de perturbações aleatórias que afetam a dinâmica do fenômeno em estudo, sendo a integral do ruído perturbador, geralmente assumido como ruído branco em tempo contínuo (Braumann, 2005).

Este processo foi estudado por Norbert Wiener e Lévy na década de 1920, mas já havia sido utilizado por Louis Bachelier em 1900 para modelar a variação do preço de ações na bolsa e por Albert Einstein para descrever o movimento browniano de partículas suspensas em fluido.

O processo de Wiener tem diversas aplicações em áreas como probabilidade e estatística, matemática financeira, biologia, física, entre outras, desempenhando um papel fundamental na formulação das equações diferenciais estocásticas, permitindo a resolução de equações diferenciais que envolvem elementos aleatórios. Matematicamente, pode ser definido por (Braumann, 2005):

**Definição:** Dado um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , um processo estocástico  $\{W_t\}_{t \in [0, +\infty[}$  definido neste espaço é chamado de **processo de Wiener padrão** se satisfaz as seguintes propriedades (Braumann, 2005):

- ❖  $W(0) = 0$  q. c. (quase certamente);
- ❖ Os incrementos  $W(t) - W(s)$ , com  $t > s$ , têm distribuição normal com média zero (0) e variância  $t - s$ ;
- ❖ Os incrementos  $W(t_i) - W(s_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) em intervalos de tempo não sobrepostos  $(s_i, t_i)$  são variáveis aleatórias independentes (chamado de incrementos independentes).

Além destas propriedades principais, o processo de Wiener apresenta outras propriedades interessantes:

1. A covariância entre  $W(s)$  e  $W(t)$  é:

$$COV[W(s), W(t)] = E[W(s), W(t)] = \min(s, t), \quad (2.2.1)$$

onde  $\min(s, t)$  é o mínimo entre  $s$  e  $t$ .

2. O processo de Wiener  $W_t$  é um processo gaussiano para  $0 < t_1 < \dots < t_n$ , a f. d.

p conjunta  $f_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$  de  $W(t_1), \dots, W(t_n)$  é dada por:

$$f_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} \exp\left(-\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})}\right), \quad (2.2.2)$$

onde se pôs  $t_0 = 0$  e  $x_0 = 0$ .

3. O processo de Wiener  $W_t$  é um processo de Markov homogêneo com densidade de transição.

$$p(\tau, y | x) = (2\pi\tau)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{(y - x)^2}{2\tau}\right); \tau > 0. \quad (2.2.3)$$

Isto é, uma distribuição condicional de  $W(s + \tau)$  dado que  $W(s) = x$  é normal de média  $x$  e variância  $\tau$ :

$$W(s + \tau) | (W(s) = x) \sim N(x, \tau). \quad (2.2.4)$$

4. O processo de Wiener  $W_t$  é uma martingala, pois em relação a filtração natural  $\{M_s\}_{s \geq 0}$ , onde  $M_s = \sigma(w(u) : 0 < u < s)$ , significa que, para  $s \leq t$ , a esperança condicional do processo de Wiener  $W_t$  dado  $M_s$  é igual a  $W(s)$ . Isto é:

$$E[W(t) | M_s] = W(s). \quad (2.2.5)$$

## 2.3 Integral Estocástica de Itô

A integral de Itô, batizada em homenagem ao matemático japonês Kiyoshi Itô, representa uma extensão do cálculo para processos estocásticos. Tem aplicações significativas nas

equações diferenciais estocásticas e em matemática financeira. Enquanto a integral de Riemann-Stieltjes resulta num número real, a integral de Itô é um processo estocástico. Seja um processo de Wiener padrão  $W(t) = W(t, \omega)$  e  $(t \geq 0)$  definido no espaço de probabilidades  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Seja  $M_s = \sigma(W(u), 0 \leq u \leq s)$  ( $s \geq 0$ ) a sua filtração natural e  $\{\mathcal{A}_s\}_{s \in [0,t]}$  é uma filtração não-antecipativa se, para  $0 \leq s \leq t$ ,  $\{\mathcal{A}_s\} \supset M_s$  e  $\mathcal{A}_s$  for independente dos incrementos futuros  $W(u) - W(s)$  e  $(u \geq s)$  do processo de Wiener (Braumann, 2005). Esta filtração diz-se não-antecipativa em relação ao processo de Wiener, pois em um dado momento no tempo  $s$ , a informação disponível sobre o processo de Wiener até esse ponto não fornece qualquer informação sobre o comportamento futuro do processo de Wiener após o tempo  $s$ . Assim a  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A}_s$  representa os eventos até o instante  $s$ .

Com as condições descritas a integral de Itô pode ser definido por:

$$I(G) = \int_0^t G(s) dW(s) \quad (2.3.1)$$

Aqui,  $I(G)$  representa integral de Itô da função  $G(s)$ .  $G(s)$  é uma função do tempo  $s$  e é um processo estocástico, enquanto  $dW(s)$  representa a mudança infinitesimal do processo estocástico  $W(s)$ , geralmente um processo de Wiener (ou movimento Browniano).

Essa expressão (2.3.1) representa a soma do produto entre os valores da função  $G(s)$  em intervalos discretos, multiplicados pelas mudanças correspondentes do processo estocástico entre esses intervalos. Quando o número de intervalos  $n$  aumenta, essa soma converge para a integral de Itô.

A integral de Itô possui algumas propriedades interessantes:

**1) Valor esperado da integral de Itô:**

- ❖ O valor esperado da integral de Itô de uma função estocástica  $G(s)$  num intervalo  $[t_0, t]$  é zero:

$$E \left[ \int_{t_0}^t G(s) dW(s) \right] = 0 \quad (2.3.2)$$

## 2) Linearidade:

- ❖ A integral de Itô é uma operação linear, ou seja, para uma constante  $\alpha$  e uma função estocástica  $G(s)$ , temos:

$$\int_{t_0}^t \alpha G(s) dW(s) = \alpha \int_{t_0}^t G(s) dW(s) \quad (2.3.3)$$

## 3) Equivalência de linearidade

- ❖ A propriedade de linearidade da integral de Itô é equivalente à propriedade de linearidade para combinações lineares de funções estocásticas. Para constantes  $\alpha$  e  $\mu$  e para funções estocásticas  $G(s)$  e  $H(s)$ , temos:

$$\int_{t_0}^t [\alpha G(s) + \mu H(s)] dW(s) = \alpha \int_{t_0}^t G(s) dW(s) + \mu \int_{t_0}^t H(s) dW(s) \quad (2.3.4)$$

## 4) Isometria de Itô

- ❖ A propriedade de isometria de Itô estabelece que o quadrado da integral de Itô tem uma esperança igual à integral do quadrado da função estocástica  $G(s)$ , ou seja:

$$E \left[ \left( \int_{t_0}^t G(s) dW(s) \right)^2 \right] = E \left[ \int_{t_0}^t G(s)^2 dW(s) \right] \quad (2.3.5)$$

Quando consideramos o integral estocástico (2.3.1), verificamos que a integral de Riemann-Stieljes não existe, uma vez que diferentes escolhas dos pontos intermédios da função integranda origina limites diferentes. Isto acontece porque o processo de Wiener tem uma variação ilimitada, quase certamente.

Se considerarmos um caso particular da integral (2.3.1), nomeadamente o caso em que  $G(s) = W(s)$ , resulta na integral  $\int_0^t W(s) dW(s)$ . Usando as regras usuais do cálculo teríamos como solução  $\frac{1}{2}W^2(t)$ . No entanto se considerarmos as decomposições

$[t_{n,k-1}, t_{n,k}]$  de  $[0, t]$ , tal que o máximo de  $[t_{n,k-1}, t_{n,k}]$  convirja para 0 quando o  $n$  tende para infinito,  $0 = t_{n,0} \leq t_{n,1} \leq t_{n,2} \leq \dots \leq t_{n,n} = t$ , então a integral de Itô é obtida quando a escolha do ponto  $\tau_{n,k}$ , situado no intervalo  $[t_{n,k-1}, t_{n,k}]$ , é uma escolha não-atencipativa, ou seja, é igual ao ponto inicial do intervalo  $\tau_{n,k} = t_{n,k-1}$ . Neste caso as somas de Riemann-Stieljes darão origem à integral de Itô:

$$I(G) = \int_0^t W(s) dW(s) = \lim_{n \rightarrow \infty, m.q.} \sum_{k=1}^n W(t_{n,k-1}) * (W(t_{n,k}) - W(t_{n,k-1})) \quad (2.3.6)$$

A integral de Itô corresponde a uma escolha em que o comportamento atual do processo em estudo não depende das flutuações aleatórias que irão ocorrer no futuro. Além disso, note-se que esta integral não segue as regras usuais do cálculo, uma vez que seguindo as regras usuais de cálculo a integral  $\int_0^t W(s) dW(s)$  deveria ter como solução

$$I(G) = \int_0^t W(s) dW(s) = \frac{1}{2} (W^2(t) - t). \quad (2.3.7)$$

O caso de por exemplo a escolha do ponto intermédio  $\tau_{n,k}$ , das somas de Riemann-Stieljes for, por exemplo, o limite superior  $\tau_{n,k} = t_{n,k}$ , obtemos o limite em média quadrática de

$$\lim_{n \rightarrow \infty, m.q.} \sum_{k=1}^n W(t_{n,k}) * (W(t_{n,k}) - W(t_{n,k-1}))$$

resultando na solução  $\frac{1}{2} (W^2(t) + t)$ .

Para mostrar este resultado, basta mostrar que:

$$E \left[ \left( \sum_{k=1}^n W(t_{n,k}) * (W(t_{n,k}) - W(t_{n,k-1})) - \frac{1}{2} (W^2(t) + t) \right)^2 \right] \rightarrow 0 \quad (2.3.8)$$

Como  $W^2(t) = \sum_{k=1}^n (W^2(t_{n,k}) - W^2(t_{n,k-1}))$ , portanto

$$\sum_{k=1}^n W(t_{n,k}) * (W(t_{n,k}) - W(t_{n,k-1})) - \frac{1}{2} (W^2(t) + t)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (W(t_{n,k}) - W(t_{n,k-1}))^2 - t \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (W(t_{n,k}) - W(t_{n,k-1}))^2 - (t_{n,k} - t_{n,k-1}) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n h_{n,k}
\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

Como  $E[h_{n,k}] = 0$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
E \left[ \left( \sum_{k=1}^n W(t_{n,k}) * (W(t_{n,k}) - W(t_{n,k-1})) - \frac{1}{2} (W^2(t) + t) \right)^2 \right] = \\
\frac{1}{4} E \left[ \left( \sum_{k=1}^n h_{n,k} \right)^2 \right] = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n Var[h_{n,k}] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (t_{n,k} - t_{n,k-1})^2 \leq 2t \max_k \{t_{n,k} - t_{n,k-1}\} \rightarrow 0
\end{aligned} \tag{2.3.10}$$

## 2.4 Integral de Stratonovich

A integral Stratonovich, desenvolvida pelo russo Ruslan Stratonovich, é uma integral estocástico utilizada na teoria dos processos estocásticos, especialmente na física, estatística e na teoria do controle estocástico. Esta é uma alternativa à integral de Itô. No entanto, a integral de Itô é mais comum na matemática aplicada, enquanto a integral de Stratonovich é frequentemente empregada na física.

A principal característica da integral de Stratonovich é que ela considera a simetria temporal das flutuações, ao contrário da integral de Itô. Embora seja uma integral antecipativa e não possua as mesmas propriedades probabilísticas convenientes da integral de Itô, ela tem a vantagem de obedecer às regras usuais do cálculo diferencial.

Algebricamente essa integral é definida da seguinte forma (Braumann, 2005):

**Definição:** Dada a partição do intervalo de tempo  $[0, t]$ :  $0 = t_{n,0} \leq t_{n,1} \leq t_{n,2} \leq \dots \leq t_{n,n} = t$ , a integral de Stratonovich é definido como o limite da soma:

$$\begin{aligned}
(S) \int_0^t W(s) dW(s) = \int_0^t W(s) \circ dW(s) = \\
\lim_{n \rightarrow \infty, m.q.} \sum_{k=1}^n \left( \frac{W(t_{n,k-1}) + W(t_{n,k})}{2} \right) (W(t_{n,k}) - W(t_{n,k-1}))
\end{aligned} \tag{2.4.1}$$

Como segue as regras usuais do cálculo, a solução deste integral estocástico é  $\frac{1}{2}W^2(t)$ .

## 2.5 Cálculo de Itô e de Stratonovich

Antes de abordarmos o cálculo de Itô e de Stratonovich, começamos por enunciar o teorema de Itô, essencial para a compreensão deste método de cálculo estocástico.

### Teorema de Itô (Braumann, 2005)

Seja  $X(t) = X(t, \omega)$  um processo de Itô definido no intervalo  $t \in [0, d]$ , dado por:

$$X(t, \omega) = X_0(\omega) + \int_0^t F(s, \omega)ds + \int_0^t G(s, \omega)dW(s, \omega) \quad (2.5.1)$$

Onde:

- ❖  $X_0$  é uma variável aleatória mensurável- $\mathcal{A}_0$ , podendo também ser uma constante determinista. Além disso,  $X_0$  é independente do processo de Wiener;
- ❖  $F(s, \omega)$  é uma função conjuntamente mensurável adaptada à filtração  $\mathcal{A}_s$ , e tal que  $\int_0^d |F(s)|ds < +\infty$  quase certamente;
- ❖  $G(s, \omega) \in M^2[0, d]$ .

A equação integral estocástica pode ser escrita na forma compacta como:

$$dX(t) = F(t)dt + G(t)dW(t) \quad (2.5.2)$$

Seja  $Y(t) = h(t, X(t))$ , onde  $h(t, x)$  é uma função contínua com derivadas parciais continuas em relação a  $t$  e segunda derivada parcial contínua em relação a  $x$ .

Neste caso,  $Y(t) = Y(t, \omega)$  também é um processo de Itô, com condição inicial  $Y_0 = h(0, X_0)$  e a sua evolução é dada pela fórmula de Itô, expressa na forma diferencial como:

$$dY(t) = \left( \frac{\partial h(t, X(t))}{\partial t} + \frac{\partial h(t, X(t))}{\partial x} F(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h(t, X(t))}{\partial x^2} G^2(t) \right) dt + \frac{\partial h(t, X(t))}{\partial x} G(t) dW(t) \quad (2.5.3)$$

A sua forma integral é:

$$Y(t) = Y_0 + \int_0^t \left( \frac{\partial h(s, X(s))}{\partial s} + \frac{\partial h(s, X(s))}{\partial x} F(s) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h(s, X(s))}{\partial x^2} G^2(s) \right) d(s) + \int_0^t \frac{\partial h(s, X(s))}{\partial x} G(s) dW(s) \quad (2.5.4)$$

Esta integral resulta da expansão de Taylor até à primeira ordem em  $t$  e até à segunda ordem em  $x$ :

$$dY(t) = \frac{\partial h(t, X(t))}{\partial t} dt + \frac{\partial h(t, X(t))}{\partial x} dX(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h(t, X(t))}{\partial x^2} (dX(t))^2 \quad (2.5.5)$$

Substituindo  $dX(t)$  pela sua expressão diferencial  $dX(t) = F(t)dt + G(t)dW(t)$ , e utilizando as regras de multiplicação estocástica específicas para o cálculo de Itô, dados na seguinte tabela

<b>x</b>	<b>dW</b>	<b>dt</b>
<b>dW</b>	$dt$	0
<b>dt</b>	0	0

A aplicação das regras desta tabela resulta que, por exemplo,  $(dX(t))^2 = G^2(t)dt$ .

Assim, a equação (2.5.5) poderá escrever-se como:

$$dY(t) = \frac{\partial h(t, X(t))}{\partial t} dt + \frac{\partial h(t, X(t))}{\partial x} (F(t)dt + G(t)dW(t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h(t, X(t))}{\partial x^2} G^2(t)dt \\ = \left( \frac{\partial h(t, X(t))}{\partial t} + \frac{\partial h(t, X(t))}{\partial x} F(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h(t, X(t))}{\partial x^2} G^2(t) \right) dt + \frac{\partial h(t, X(t))}{\partial x} G(t) dW(t) \quad (2.5.6)$$

## 2.6 Equação Diferencial Estocástica

A primeira equação diferencial estocástica conhecida foi o modelo de Leonard Salomon Ornstein e George Eugene Uhlenbeck, denominado Ornstein-Uhlenbeck. Introduzido na

década de 1930 para descrever o movimento browniano. Versões desse modelo são amplamente utilizadas em diversos campos, como no campo financeiro, para estudar taxas de juros, taxas de câmbios e outros fenômenos onde a variação ao longo do tempo é influenciada por um fator estocástico. Além disso, no campo biológico, o modelo é empregado no estudo do crescimento animal, e tem aplicações significativas em muitos outros domínios.

A sua equação diferencial estocástica geral é escrita da seguinte maneira:

$$dy(t) = -B(y(t) - A)dt + \sigma dW(t) \quad (2.6.1)$$

Onde  $y(t)$  representa o valor do processo no tempo,  $A$  é o valor médio de longo prazo para o qual o processo tende (valor assintótico médio),  $B$  ( $B > 0$ ) é um coeficiente que controla a velocidade com que o processo regressa a  $A$ ,  $\sigma$  é a magnitude da volatilidade ou força do meio ambiente,  $dt$  representa uma variação infinitesimal no tempo e  $dW(t)$  é a variação do movimento browniano.

Formas desta equação diferencial estocástica foram utilizadas por diversos fins:

- ❖ Oldrich Vasicek (modelo Vasicek), para descrever a dinâmica das taxas de juros e de câmbios ao longo do tempo, onde  $y(t)$  representa taxas de juros/câmbios e  $A$  a taxa de referência;
- ❖ Benjamin Gompertz (Modelo de Gompertz para o crescimento populacional), para descrever a dinâmica do crescimento de uma população ao longo do tempo, onde  $X(t)$  representa o tamanho da população e  $Y(t) = \ln X(t)$  é o tamanho transformado da população.

O modelo de Bertalanffy-Richards surge quando a transformação utilizada é  $Y(t) = X(t)^c$ , onde  $c$  é um número real maior que zero ( $c > 0$ ). Esta transformação permite ajustar a equação para diferentes valores de  $c$ , proporcionando uma flexibilidade na formulação do modelo que pode capturar diferentes padrões de crescimento

observados em organismos. Dependendo do valor de  $c$ , a função potência pode alterar a forma da curva de crescimento, tornando o modelo mais adaptável a diferentes cenários biológicos.

Segundo Braumann (2005), uma equação diferencial estocástica é uma equação em que a taxa de variação em relação ao tempo é igual à soma de uma função determinística e de um componente estocástico, expressa por:

$$\frac{dX(t)}{dt} = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t) \quad (2.6.2)$$

Onde  $\frac{dX(t)}{dt}$  é a taxa de variação de  $X(t)$  em relação ao tempo,  $f(t, X(t))$  é a função determinística que descreve o comportamento dinâmico médio e  $g(t, X(t))dW(t)$  é o componente estocástico, em que  $g(t, X(t))$  é uma função que multiplica pela variação das flutuações aleatórias, descritas pelo processo de Wiener.

A integral estocástica correspondente a essa equação diferencial estocástica, pode ser expressa usando a notação de integral estocástica da seguinte forma:

$$X(t) = X_0 + \int_0^t f(s, X(s))ds + \int_0^t g(s, X(s))dW(s) \quad (2.6.3)$$

Onde  $X(t)$  é a solução da equação diferencial estocástica no tempo  $t$ ,  $X_0$  é o valor inicial de  $X$ ,  $f(s, X(s))$  é a função determinística,  $g(t, X(t))$  é o componente estocástico e  $dW(s)$  é o diferencial do processo  $W(s)$ .

## 2.7 Teorema de Existência, Unicidade e Propriedades da Solução de uma Equação Diferencial Estocástica de Itô

Segundo Braumann (2005), seja  $X_0$  uma variável aleatória com variância finita, ou seja,  $(X_0 \in L^2)$ , sendo também mensurável em relação a  $\mathcal{A}_0$  e, consequentemente, independente do processo de Wiener. Seja  $\varepsilon$  o conjunto das funções reais,  $h(t, x)$ , mesuráveis em

$]0, d[ \times \mathbb{R}$ , satisfazendo uma condição de Lipschitz ( $h(t, x) - h(t, y) \leq K|x - y|$ ) e uma restrição ao crescimento ( $|h(t, x)| \leq K(1 + |x|^2)^{1/2}$ ).

Consideremos, agora uma equação diferencial estocástica de Itô no intervalo de tempo  $[0, d]$ , com  $d > 0$  dada por:

$$dX_t = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t), X(0) = X_0 \quad (2.7.1)$$

A solução dessa equação pode ser expressa na forma integral estocástica como:

$$X(t) = X_0 + \int_0^t f(s, X(s))ds + \int_0^t g(s, X(s))dW(s) \quad (2.7.2)$$

Onde o segundo integral é interpretado como uma integral de Itô.

Suponha-se que  $f$  e  $g$  pertencem a  $\varepsilon$ . Então, a solução satisfaz as seguintes propriedades:

- a) Existe um processo estocástico  $X(t) = X(t, w)$  com  $t \in [0, d]$  que é quase certamente contínuo e satisfaz a equação diferencial estocástica:

$$dX_t = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t), X(0) = X_0, \quad (2.7.3)$$

ou equivalentemente, com probabilidade 1, a equação integral:

$$X(t) = X_0 + \int_0^t f(s, X(s))ds + \int_0^t g(s, X(s))dW(s), \forall t \in [0, d] \quad (2.7.4)$$

- b) A solução é quase certamente única, no sentido de que, dadas duas soluções quase certamente contínuas  $X(t)$  e  $X^*(t)$ , tem-se:

$$\sup |X(t) - X^*(t)| = 0 ; 0 \leq t \leq d ; \quad (2.7.5)$$

Com probabilidade 1.

- c) As seguintes desigualdades são válidas para a solução:

$$E[(X(t))^2] \leq (1 + E[(X_0)^2]) \exp(K(K + 2)t) - 1 \quad (2.7.6)$$

$$E[(X(t) - X_0)^2] \leq 2K^2(d + 1)(1 + E[(X_0)^2])t \exp(K(K + 2)t) \quad (2.7.7)$$

- d) A solução  $X(t)$  pertence ao espaço  $H^2[0, d]$  e é contínua em média quadrática.  
e) A solução  $X(t)$  é um processo de Markov com distribuição inicial igual à distribuição de  $X_0$  e com probabilidades de transição dadas por:

$$P(t, B | s, x) = P[X_{s,x}(t) \in B], (s \leq t) \quad (2.7.8)$$

Denotamos por  $X_{s,x}(t)$  a solução única e contínua da EDE:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t), \quad X(s) = x, \quad (2.7.9)$$

ou, de forma integral:

$$X(t) = x + \int_s^t f(u, X(u))du + \int_s^t g(u, X(u))dW(u) \quad (2.7.10)$$

- f) Se  $f$  e  $g$  forem contínuas em  $t$ , então a solução  $X(t)$  é um processo de difusão com coeficiente de tendência:

$$a(s, x) = f(s, x) \quad (2.7.11)$$

e coeficiente de difusão:

$$b(s, x) = |g(s, x)|^2. \quad (2.7.12)$$

### Observação:

Se forem assumidas condições de regularidade para  $f$  e  $g$ , e considerarmos uma EDE de Stratonovich:

$$(S) \quad dX_t = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t), \quad (2.7.13)$$

que é equivalente à equação de Itô:

$$dX_t = \left( f(t, X(t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial g(t, X(t))}{\partial x} g(t, X(t)) \right) dt + g(t, X(t))dW(t), \quad (2.7.14)$$

então a sua solução será um processo de difusão com coeficiente de tendência:

$$a(s, x) = f(s, x) + \frac{1}{2} \frac{\partial g(s, x)}{\partial x} g(s, x) = f(s, x) + \frac{1}{4} \frac{\partial b(s, x)}{\partial x}, \quad (2.7.15)$$

e coeficiente de difusão:

$$b(s, x) = |g(s, x)|^2. \quad (2.7.16)$$

### 3. Modelos Matemáticos de Crescimento Individual

Os modelos matemáticos de crescimento individual são representações matemáticas que descrevem como o peso de um indivíduo varia ao longo do tempo. Estes modelos utilizam equações diferenciais para explicar a dinâmica de crescimento do indivíduo e podem ser aplicados em diversas áreas, como biologia e demografia.

#### 3.1 Modelos Matemáticos Determinísticos

Nos modelos matemáticos determinísticos, as equações diferenciais são fundamentais, pois permitem formular as relações entre as variáveis que influenciam o crescimento, como a taxa de crescimento, o tamanho máximo e os fatores que afetam o desenvolvimento do indivíduo. Os modelos de Verhulst, de Gompertz e de Bertalanffy-Richards descrevem o crescimento individual sem considerar a aleatoriedade dos eventos ambientais e demográficos.

##### 3.1.1 Modelo de Verhulst

Em 1838, o matemático e estatístico belga Pierre François Verhulst (1804-1849) propôs, no seu artigo *Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement*, um modelo alternativo ao de Malthus (Pinheiro, 2021). Nesse modelo, Verhulst introduziu a ideia de que o crescimento é limitado pela capacidade de suporte do ambiente, conduzindo à estabilização ao longo do tempo. Embora originalmente formulado para populações, o modelo logístico pode ser aplicado ao crescimento individual de animais, como o bovino, permitindo descrever o aumento do peso ou tamanho do indivíduo, considerando que o crescimento desacelera à medida que o animal se aproxima do tamanho máximo.



**Figura 2:** Pierre François Verhulst

**Fonte:** Wikipédia, a encyclopédia livre

O modelo de Verhulst é uma equação diferencial que descreve como a taxa de crescimento de um indivíduo (bovino) varia ao longo do tempo, tendo em conta a capacidade de suporte do ambiente. Neste modelo, a taxa de crescimento diminui à medida que o tamanho do indivíduo se aproxima do limite máximo permitido pelo ambiente.

Denotando por  $P(t)$  o peso (ou tamanho) do indivíduo no instante  $t$ , a equação é expressa da seguinte forma (Pinheiro, 2021):

$$\frac{dP(t)}{dt} = rP(t) \left( 1 - \frac{P(t)}{K} \right) \quad (3.1.1.1)$$

Onde:

- ❖  $\frac{dP(t)}{dt}$  representa a taxa de variação do peso (ou tamanho) do indivíduo em relação ao tempo;
- ❖  $r (r > 0)$  é a taxa intrínseca de crescimento do indivíduo;
- ❖  $K$  é o peso máximo que o indivíduo pode atingir (peso assintótico ou capacidade do suporte do ambiente).

De acordo com este modelo, observa-se:

- ❖ Se  $P > K$ , então  $\frac{dP(t)}{dt} < 0$ , o peso diminui;
- ❖ Se  $P = K$ , então  $\frac{dP(t)}{dt} = 0$ , o peso permanece estável;
- ❖ Se  $P < K$ , então  $\frac{dP(t)}{dt} > 0$ , o peso aumenta.

Para determinar a solução geral da equação diferencial (3.1.1.1), consideramos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) \\ P(0) = P_0 \end{cases} \quad (3.1.1.2)$$

Separando as variáveis e integrando ambos os membros:

$$\int \frac{1}{P(1 - \frac{P}{K})} dP = \int r dt \quad (3.1.1.3)$$

Resolvendo a integral do primeiro membro, utilizando o método de frações parciais:

$$\frac{K}{P(K-P)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{K-P} \quad (3.1.1.4)$$

Multiplicando ambos os membros por  $P(K - P)$  e igualando os coeficientes correspondentes, obtemos:

$$\begin{cases} A = 1 \\ B - A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases} \quad (3.1.1.5)$$

Substituindo o valor de A e B na equação (3.1.1.4), obtemos:

$$\int \left( \frac{1}{P} + \frac{1}{K-P} \right) dP = \int r dt \quad (3.1.1.6)$$

Integrando ambos os membros e aplicando a condição inicial  $P(0) = P_0$ , obtemos:

$$\ln \left| \frac{P_0}{K-P_0} \right| = c \quad (3.1.1.7)$$

Substituindo (3.1.1.7) em (3.1.1.6), obtemos:

$$\ln \left( \frac{P}{K-P} \right) = rt + \ln \left( \frac{P_0}{K-P_0} \right) \quad (3.1.1.8)$$

Resultando na solução geral do modelo de Verhulst:

$$P(t) = \frac{P_0 K}{(K-P_0)e^{-rt} + P_0} \quad (3.1.1.9)$$

Onde:  $P(t)$  é o peso (ou tamanho) do indivíduo no instante  $t$  e  $P_0$  é o peso inicial do indivíduo no instante  $t = 0$ .

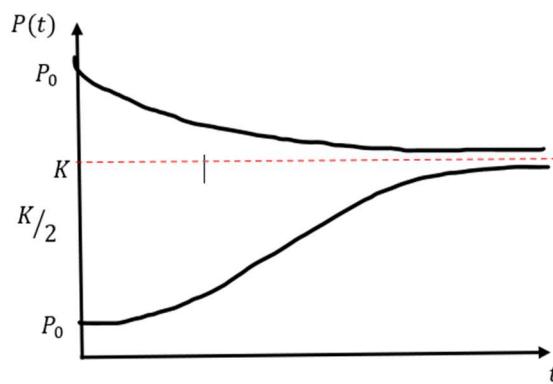
Este modelo apresenta as seguintes propriedades:

- ❖ Quando  $t \rightarrow +\infty$ ,  $P(t) \rightarrow K$ , independentemente de  $P_0$ ;
- ❖ Se  $P_0 > K$ , o peso decresce até atingir  $K$ ;

- ❖ Se  $0 < P_0 < K$ , o peso cresce até atingir  $K$ .

Nesta última condição, o gráfico da função  $P(t)$  assume a forma de uma curva logística, que apresenta um ponto de inflexão onde a taxa de crescimento individual é máxima. Este ponto ocorre em  $P = K/2$ , o valor no qual o crescimento atinge a sua velocidade máxima.

Graficamente temos:



**Fonte:** Autoria própria, 2024.

### 3.1.2 Modelo de Gompertz

Benjamin Gompertz (1779-1865) foi um matemático, estatístico e atuário britânico, conhecido principalmente por propor a *Lei de Gompertz*, que descreve o crescimento exponencial da taxa de mortalidade humana com a idade. Em 1825, apresentou um modelo matemático alternativo aos existentes na época, no qual a taxa de crescimento é elevada no início e diminui rapidamente, conduzindo a um crescimento mais lento à medida que o tempo avança. Este modelo, conhecido como **modelo de Gompertz**, tem sido amplamente utilizado na descrição do crescimento de populações biológicas, como células, plantas, bactérias e tumores, bem como em áreas como a demografia, a biologia e as ciências da saúde. A sua flexibilidade e capacidade de modelar comportamentos assimétricos de crescimento tornam-no particularmente útil em contextos onde há limitação ambiental ou restrições de recursos.



**Figura 3:** Benjamin Gompertz

**Fonte:** Wikipédia, a encyclopédia livre

O modelo de Gompertz descreve um crescimento individual de um animal, caracterizado por uma taxa de crescimento elevada no início, que diminui gradualmente à medida que o indivíduo se aproxima do peso máximo. É representado matematicamente pela seguinte equação diferencial (Pinheiro, 2021):

$$\frac{dP(t)}{dt} = r P(t) \ln \left( \frac{K}{P(t)} \right) \quad (3.1.2.1)$$

Onde:

- ❖  $\frac{dP(t)}{dt}$  representa a taxa de variação de peso do indivíduo em relação ao tempo;
- ❖  $P(t)$  é o peso do indivíduo no instante  $t$ ;
- ❖  $t$  é o tempo;
- ❖  $r$  é a taxa intrínseca de crescimento do indivíduo;
- ❖  $K$  é o peso máximo que o indivíduo pode atingir (peso assintótico ou capacidade do suporte do ambiente);

Para determinar a solução geral da equação diferencial (3.1.2.1), consideramos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = r P \ln \left( \frac{K}{P} \right) \\ P(0) = P_0 \end{cases} \quad (3.1.2.2)$$

Aplicando as mesmas técnicas utilizadas no modelo de Verhulst, obtemos:

$$-\ln \left( \ln \left( \frac{K}{P} \right) \right) + c = rt, \text{ onde } c \text{ é a constante de integração.} \quad (3.1.2.3)$$

Aplicando a condição inicial  $P(0) = P_0$  na equação (3.1.2.3), obtemos:

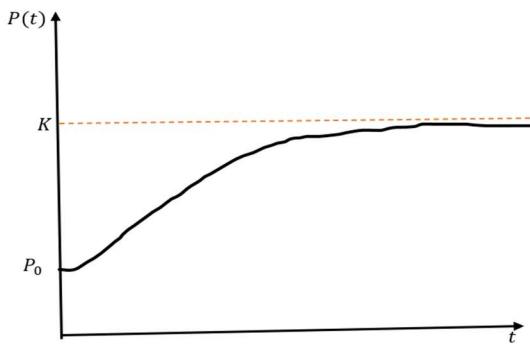
$$-\ln \left( \ln \left( \frac{K}{P_0} \right) \right) + c = r * 0 \Leftrightarrow c = \ln \left( \ln \left( \frac{K}{P_0} \right) \right) \quad (3.1.2.4)$$

Substituindo este valor de  $c$  na equação (3.1.2.3) e realizando as manipulações algébricas necessárias, obtemos a solução do modelo de Gompertz:

$$P(t) = K \exp \left( -\ln \left( \frac{K}{P_0} \right) e^{-rt} \right) \quad (3.1.2.5)$$

Onde:  $P(t)$  é o peso do indivíduo no instante  $t$  e  $P_0$  é o peso inicial para  $t = 0$ .

Graficamente temos:



**Fonte:** Autoria própria, 2024.

### 3.1.3 Modelo de Bertalanffy-Richards

O modelo de crescimento de Bertalanffy-Richards proposto por Bertalanffy (1938, 1957, 1968) e posteriormente estudado por Richards (1959) é um modelo bioenergético que descreve o crescimento de um organismo com base nos processos de anabolismo e catabolismo. Embora originalmente desenvolvido para organismos em geral, este modelo pode ser usado para descrever o crescimento individual de um bovino. O anabolismo está relacionado com a síntese e é considerado proporcional à respiração, que, por sua vez, é proporcional à superfície do organismo. O catabolismo, associado à degradação, é

proporcional ao volume ou peso do organismo. Este modelo procura equilibrar esses dois processos para descrever o crescimento do indivíduo ao longo do tempo.

A equação diferencial que representa este modelo é dada por (Filipe, 2011):

$$\frac{dP(t)}{dt} = \eta P(t)^c - kP(t)^n \quad (3.1.3.1)$$

Onde:

- ❖  $\frac{dP(t)}{dt}$  representa a taxa de variação de peso do indivíduo em relação ao tempo;
- ❖  $P(t)$  é o peso do indivíduo no instante  $t$ ;
- ❖  $\eta$  é a constante de anabolismo;
- ❖  $k$  é a constante de catabolismo;
- ❖  $c$  e  $n$  são constantes que representam a relação alométrica com o tamanho do organismo.

A solução geral desta equação, no caso particular em que  $n = 1$ , é dada por:

$$P(t) = K \left[ 1 - \left( 1 - \left( \frac{P(t_0)}{K} \right)^m \right) e^{-rm(t-t_0)} \right]^{-\frac{1}{m}} \quad (3.1.3.2)$$

Onde:

- ❖  $m = 1 - c$ ;
- ❖  $K^c = \frac{\eta}{\kappa}$ ;
- ❖  $r = \kappa$ .

## 3.2 Modelos Estocásticos de Crescimento Individual

Os modelos de equações diferenciais estocásticas incorporam um componente de aleatoriedade para descrever como as flutuações ambientais afetam a taxa de crescimento de um animal.

Neste contexto, se um animal cresce num ambiente sujeito a variações imprevisíveis, o seu crescimento pode ser descrito por uma equação diferencial estocástica. Para descrever o crescimento (mais concretamente o peso, em Kg)  $X_t$  de um animal, é possível escrever os vários modelos de uma forma geral, através do seu peso transformado  $Y_t = h(X_t)$ , sendo  $h$  uma função contínua, estritamente crescente e diferenciável. Usando o peso transformado, podemos escrever a equação diferencial da seguinte forma:

$$dY_t = \beta(\alpha - Y_t)dt + \sigma dW_t ; Y(t_0) = y_0, \sigma > 0 \text{ e } \beta > 0 \quad (3.2.1)$$

Onde:

- ❖  $Y_t$  é o peso transformado do animal no instante  $t$ ;
- ❖  $t$  é o tempo (Idade), e  $t_0$  é o tempo inicial (Idade inicial);
- ❖  $\beta$  é o coeficiente de crescimento;
- ❖  $W_t$  é o processo de Wiener;
- ❖  $\alpha$  é o peso médio esperado que o animal atinge na maturidade;
- ❖  $\sigma$  representa a intensidade das flutuações ambientais.

A solução desta equação diferencial é dada por:

$$Y_t = \alpha + e^{-\beta(t-t_0)}(y_0 - \alpha) + \sigma e^{-\beta} \int_{t_0}^t e^{\beta s} dW_s \quad (3.2.2)$$

Note-se que condicionado a  $Y_s = y$ , a distribuição condicional do processo estocástico,  $Y_t | Y_s = y$ , com  $t > s$ , segue uma distribuição normal com valor esperado dada por

$$\alpha + (y - \alpha)e^{-\beta(t-s)} \quad (3.2.3)$$

e variância

$$\frac{\sigma^2}{2\beta} (1 - e^{-2\beta(t-s)}). \quad (3.2.4)$$

A escolha da função  $h$ , permite obter diversos modelos. Com base em estudos anteriores (Filipe, 2011), iremos apenas estudar os modelos que melhor se aplicam a estes dados:

- ❖ Modelo estocástico de Gompertz, obtido quando  $\mathbf{Y}_t = \mathbf{h}(\mathbf{X}_t) = \ln(\mathbf{X}_t)$ ;
- ❖ Modelo estocástico de Bertalanffy-Richards, obtido quando  $\mathbf{Y}_t = (\mathbf{X}_t)^c$ , e que após diferente estudo se concluiu que o valor de  $c$  que melhor se ajusta a estes dados é o valor de  $c = \frac{1}{3}$ .

## 4. Métodos de Estimação

Para estimarmos os parâmetros dos modelos determinísticos e estocásticos, iremos recorrer a dois métodos de estimação pontual: o método dos mínimos quadrados no caso dos modelos determinísticos e o método da máxima verossimilhança nos modelos estocásticos.

O método da máxima verosimilhança, permite obter a matriz Hessiana através da função de log-verosimilhança. Com base nela podemos obter a matriz de informação de Fisher (através do valor esperado do seu simétrico), e obtendo a matriz inversa conseguimos derivar a matriz de covariâncias empíricas, cujos elementos das diagonais nos permite obter uma estimativa das variâncias das estimativas dos parâmetros. Desta forma, também nos será possível obter estimativas intervalares para os parâmetros dos modelos estocásticos.

Para os modelos determinísticos, obteremos os resíduos do modelo e, com base neles, estimaremos a sua variância. Esta estimativa permitirá também construir intervalos de confiança para os parâmetros dos modelos determinísticos.

### 4.1 Método dos Mínimos Quadrados (MMQ)

O método dos mínimos quadrados é um procedimento estatístico utilizado para ajustar um modelo a um conjunto de dados observados, minimizando a soma dos quadrados das diferenças entre os valores observados e os valores previstos pelo modelo.

Consideremos um conjunto de dados  $(x_i, y_i)$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ . No nosso problema serão os dados da idade ( $x_i$ ) e do peso do animal  $y_i$ .

Para cada ponto de dados, o resíduo ou erro é a diferença entre o valor observado  $y_i$  e o valor previsto  $\hat{y}_i$  pelo modelo determinístico, denotado por:

$$e_i = y_i - \hat{y}_i \quad (4.1.1)$$

A soma dos quadrados dos resíduos é expressa por:

$$S = \sum_{i=1}^n e^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (4.1.2)$$

A função S é uma função dos parâmetros do modelo, e através de derivadas parciais em relação a cada um dos parâmetros, consegue-se obter os valores das estimativas dos parâmetros que minimizam o erro  $e_i$ .

Este método é amplamente utilizado devido à sua simplicidade e eficácia em fornecer uma boa aproximação para um determinado conjunto de dados, constituindo a base para muitos métodos de regressão em estatística (Fonseca, 1994).

No entanto, nesta dissertação optou-se por usar modelos determinístico, mais complexos, não sendo possível transformar a solução da equação diferencial numa equação linear (tal como seria possível no modelo de Malthus, por exemplo). Desta forma, para a estimação dos parâmetros do modelo não linear, foi utilizada a função nlsLM do pacote minpack.lm em R. Este método consiste numa versão modificada do método dos mínimos quadrados não lineares, recorrendo ao algoritmo de Levenberg-Marquardt (este algoritmo combina os métodos de Gauss-Newton e de gradiente). A estimativa da variância dos parâmetros ajustados é obtida a partir da inversa da matriz de informação de Fisher empírica, dada por  $(J^T J)^{-1}$ , onde J é a matriz Jacobiana dos resíduos em relação aos parâmetros. Usando esta matriz e dividindo pela variância residual estimada  $\hat{\sigma} = \frac{\sum e_i^2}{n-p}$ , com  $p$  o número de parâmetros e  $n$  o número de observações, é possível estimar a variância empírica dos parâmetros.

## 4.2 Método da Máxima Verossimilhança (MMV)

O método da máxima verossimilhança é uma técnica estatística amplamente utilizada para estimar os parâmetros desconhecidos de um modelo, podendo ser utilizada se as densidades de transição do processo  $X_t$  forem conhecidas.

De acordo com Filipe (2011), para os diferentes modelos de crescimento estocásticos, Gompertz e Bertalanffy-Richards, o vetor dos parâmetros que pretendemos estimar é  $P = (\alpha, \beta, \sigma)$ . Já foi referido que a distribuição condicional do processo estocástico do animal  $j$  no instante  $k$ ,  $t_{j,k}$ , condicional ao valor conhecido de  $Y$  para o mesmo animal  $j$  no instante anterior  $t_{j,k-1}$ , segue uma distribuição normal. A sua função densidade de probabilidade é então dada por:

$$f_{Y_{j,k}|Y_{j,k-1}=y_{j,k-1}}(y_{j,k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{\sigma^2}{2\beta}(1-E_{j,k}^{2\beta})}} \exp\left(-\frac{(y_{j,k}-\alpha-(y_{j,k-1}-\alpha)E_{j,k}^{\beta})^2}{2\frac{\sigma^2}{2\beta}(1-E_{j,k}^{2\beta})}\right) \quad (4.2.1)$$

Onde:  $E_{j,k}$  é a função exponencial da diferença de tempos ( $E_{j,k} = e^{-(t_{j,k} - t_{j,k-1})}$ ).

Como a distribuição condicional do estado atual ( $Y_{j,k}$ ) depende apenas do estado anterior ( $Y_{j,k-1}$ ), isso significa que estamos perante um processo de Markov. A função densidade probabilidade (f. d. p) conjunta de  $Y_{j,1}, \dots, Y_{j,n_j}$ , dado  $Y_{j,0} = y_{j,0}$  é o produto destas funções densidade probabilidade (f. d. p).

A função de log-verossimilhança para o animal número  $j$  é dada da seguinte maneira:

$$L_{Y_j}(P|Y_j) = \ln \left( \prod_{k=1}^{n_j} f_{Y_{j,k}|Y_{j,k-1}=y_{j,k-1}}(y_{j,k}) \right) = \sum_{k=1}^{n_j} \ln f_{Y_{j,k}|Y_{j,k-1}=y_{j,k-1}}(y_{j,k}) \quad (4.2.2)$$

Substituindo a expressão (4.2.1) em (4.2.2), teremos:

$$\begin{aligned}
L_{Y_j}(P|Y_j) &= \sum_{k=1}^{n_j} \ln f_{Y_{j,k}|Y_{j,k-1}=y_{j,k-1}}(y_{j,k}) \\
&= \sum_{k=1}^{n_j} \ln \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\sigma^2}{2\beta}(1-E_{j,k}^{2\beta})}} \exp \left( -\frac{(y_{j,k} - \alpha - (y_{j,k-1} - \alpha)E_{j,k}^{\beta})^2}{2\frac{\sigma^2}{2\beta}(1-E_{j,k}^{2\beta})} \right) \right) \tag{4.2.3}
\end{aligned}$$

Aplicando as propriedades logarítmica em (4.2.3), obtemos:

$$\begin{aligned}
L_{Y_j}(P|Y_j) &= \sum_{k=1}^{n_j} \left( \ln 1 - \ln \left( 2\pi \frac{\sigma^2}{2\beta} (1 - E_{j,k}^{2\beta}) \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\
&\quad \left. + \ln \left( \exp \left( -\frac{(y_{j,k} - \alpha - (y_{j,k-1} - \alpha)E_{j,k}^{\beta})^2}{2\frac{\sigma^2}{2\beta}(1-E_{j,k}^{2\beta})} \right) \right) \right) \Leftrightarrow \\
L_{Y_j}(P|Y_j) &= \sum_{k=1}^{n_j} \left( -\frac{1}{2} \left( \ln \left( 2\pi \frac{\sigma^2}{2\beta} \right) + \ln (1 - E_{j,k}^{2\beta}) \right) - \frac{(y_{j,k} - \alpha - (y_{j,k-1} - \alpha)E_{j,k}^{\beta})^2}{2\frac{\sigma^2}{2\beta}(1-E_{j,k}^{2\beta})} \right) \tag{4.2.4}
\end{aligned}$$

Aplicando as propriedades do somatório em (4.2.4), obtemos:

$$\begin{aligned}
L_{Y_j}(P|Y_j) &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_j} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_j} \ln \left( \frac{\sigma^2}{2\beta} \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_j} \ln(1 - E_{j,k}^{2\beta}) \\
&\quad - \sum_{k=1}^{n_j} \frac{\beta}{\sigma^2} \frac{(y_{j,k} - \alpha - (y_{j,k-1} - \alpha)E_{j,k}^{\beta})^2}{(1 - E_{j,k}^{2\beta})} \Leftrightarrow \\
L_{Y_j}(P|Y_j) &= -\frac{n_j}{2} \ln(2\pi) - \frac{n_j}{2} \ln \left( \frac{\sigma^2}{2\beta} \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_j} \ln(1 - E_{j,k}^{2\beta}) - \\
&\quad \frac{\beta}{\sigma^2} \sum_{k=1}^{n_j} \frac{(y_{j,k} - \alpha - (y_{j,k-1} - \alpha)E_{j,k}^{\beta})^2}{(1 - E_{j,k}^{2\beta})} \tag{4.2.5}
\end{aligned}$$

A função log-verossimilhança global para os  $m$  animais é a soma das log-verossimilhanças individuais para todos os animais, assumindo independência entre eles. Algebricamente escreve-se:

$$L_Y = L_{Y_1, \dots, Y_m}(P|Y_1, \dots, Y_m) = \sum_{j=1}^m L_{Y_j}(P|Y_j) \quad (4.2.6)$$

De referir que  $Y_j$  é o tamanho transformado de  $X_j$ .

Segundo Filipe (2011), o intervalo de confiança de  $(1 - \alpha)100\%$  para um determinado parâmetro  $\theta$  é:

$$\left[ \hat{\theta}_l - z_{(1-\alpha/2)} \sqrt{\widehat{Var}(\hat{\theta}_l)} ; \hat{\theta}_l + z_{(1-\alpha/2)} \sqrt{\widehat{Var}(\hat{\theta}_l)} \right] \quad (4.2.7)$$

Sendo que a variância do estimador  $\hat{\theta}_l$  pode ser obtida a partir da matriz de informação de Fisher empírica, cuja inversa fornece uma estimativa da matriz de variâncias-covariâncias dos estimadores. Assim:

$$\widehat{Var}(\hat{\theta}_l) = \left[ F(\hat{\theta}_l)^{-1} \right]_{i,i} \quad (4.2.8)$$

A matriz de informação de Fisher é definida por:

$$F(\theta) = -E \left[ \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta^2} \right] \quad (4.2.9)$$

## 5. Resultados

Neste estudo, ajustámos diferentes modelos de crescimento individual, tanto determinísticos como estocásticos, aos dados do animal da raça Mertolenga. Em particular, utilizámos os modelos determinísticos de Gompertz, de Verhulst e de Bertalanffy-Richards, bem como os modelos estocásticos de Gompertz e de Bertalanffy-Richards, com o objetivo de estimar os parâmetros que melhor descrevem a dinâmica do crescimento deste animal.

### 5.1 Estimação dos Parâmetros

Os resultados incluem a estimativa dos parâmetros dos modelos determinístico e estocástico pelos métodos dos mínimos quadrados e da máxima verossimilhança, respetivamente.

Consideramos, em primeiro lugar, a estimativa dos parâmetros dos vários modelos para um determinado animal existente na base de dados fornecida pela ACBM. Selecionou-se um animal que tivesse muitas medições do seu peso, e que estas medições se prolongassem com a idade do animal. Este animal tem medições desde a nascença até aos 13 anos de idade, com um total de 62 medições de peso.

Considerando o modelo estocástico de Gompertz (MEG), ou seja,  $Y_t = h(X_t) = \ln(X_t)$ , e o modelo estocástico de Bertalanffy-Richards (MEBR) com  $Y_t = h(X_t) = X_t^{\frac{1}{3}}$ , na Tabela 1 são apresentadas as estimativas dos parâmetros dos modelos estocásticos de Gompertz e de Bertalanffy-Richards, respetivamente. O valor da log-verosimilhança de cada modelo, relativamente às 62 medições de peso (para efeitos de comparação) são apresentadas. Note-se que as estimativas dos parâmetros dos dois modelos não são comparáveis, com exceção da estimativa do peso médio assimptótico, que é dado por

$\hat{A} = h^{-1}(\hat{\alpha})$ . Para além das estimativas dos parâmetros dos modelos, são também apresentados na Tabela 1 as margens de erro dos intervalos de confiança a 95%. Para construir estes intervalos de confiança assimptóticos, usamos (4.2.7), sendo que a estimativa da variância será obtida pela inversa da matriz de informação de Fisher (4.2.8).

Este método será usado para estimar a margem de erro dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\sigma$ .

No entanto como para o parâmetro  $A$ , e de forma a poder comparar na mesma escala, teremos que usar o método delta para obter o intervalo de confiança. Ou seja, a estimativa pontual será dada por  $e^{\hat{\alpha}}$  no caso do modelo MEG, e será dada por  $\hat{\alpha}^3$  no caso do modelo MEBR. Já a estimativa da margem de erro, usando o método delta, será dada por  $e^{\hat{\alpha}}\sqrt{Var(\alpha)}$  no caso do modelo MEG e dada por  $3\hat{\alpha}^2\sqrt{Var(\alpha)}$  no caso do modelo MEBR.

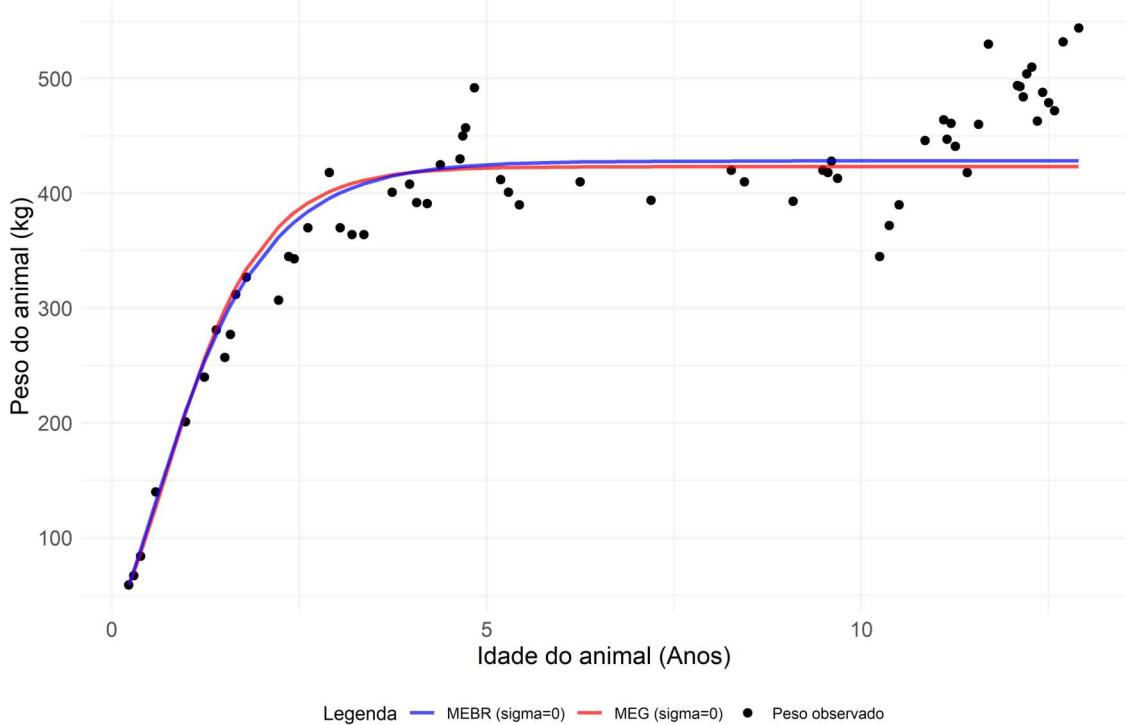
**Tabela 1:** Estimativas dos parâmetros obtidas pelo método da máxima verossimilhança para os modelos estocásticos de Gompertz e de Bertalanffy-Richards, e os respetivos valores das log-verossimilhanças.

	MEG	MEBR		
	Estimativa	Margem de erro	Estimativa	Margem de erro
$\hat{A}$ (kg)	423,22	36,31	428,14	43,34
$\hat{\alpha}$ (kg)	6,048	0,086	7,537	0,254
$\hat{\beta}$ (/ano)	1,351	0,329	1,092	0,373
$\hat{\sigma}$ (/ano)	0,037	0,013	0,206	0,074
$L_x$	-279,5		-280,8	

Para estes dois modelos, na Figura 4, são representadas as curvas de crescimento real e as curvas estimadas pelos modelos MEG e MEBR. Note-se que a curva ajustada nestas situações de modelos estocásticos não é mais que a curva dos valores esperados do peso do animal (peso transformado  $Y_t$ ), isto é, a curva determinística resultante do tamanho inicial  $Y_{t_0}$ , com os parâmetros estimados por máxima verossimilhança, e no caso de não

existirem flutuações aleatórias do ambiente, isto é, fixando o parâmetro da variabilidade ambiental em  $\sigma = 0$ . A estimativa desta curva esperada seria então dada por:

$$\hat{Y}_t = \hat{\alpha} + (Y_{t_0} - \hat{\alpha}) \exp(-\hat{\beta}(t - t_0)) \quad (5.1.1)$$



**Figura 4:** Ajustamento dos modelos estocásticos de Gompertz (MEG) e de Bertalanffy-Richards (MEBR) aos dados observados.

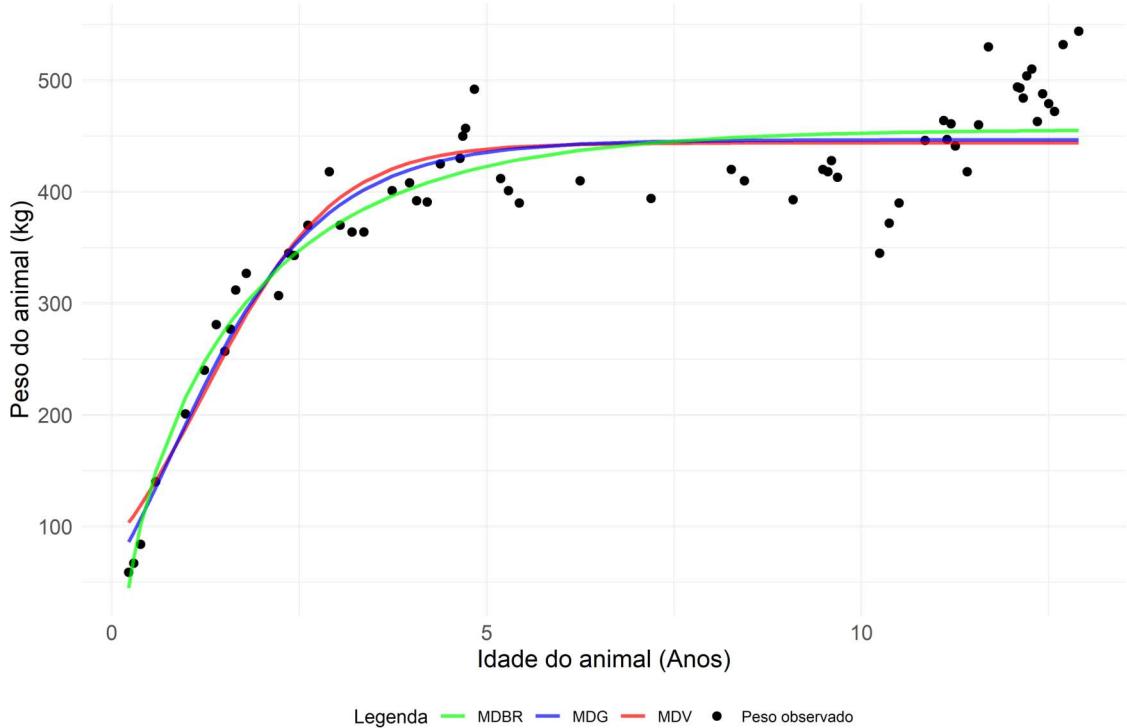
No caso dos modelos determinísticos, iremos considerar os dados do mesmo animal e iremos estimar os parâmetros do modelo respetivo. Como a estimação irá recorrer ao método dos mínimos quadrados não lineares, recorrendo ao algoritmo de Levenberg-Marquardt (pacote minpack.lm do R), as estimativas das variâncias dos parâmetros serão fornecidas diretamente pelo método numérico. Na Tabela 2 apresentamos as estimativas dos parâmetros e respetivas margens de erro para os diferentes modelos.

**Tabela 2:** Estimativas dos parâmetros obtidas pelo método dos mínimos quadrados para o modelo determinístico de Gompertz (MDG), o modelo determinístico de Bertalanffy-Richards (MDBR) e o modelo determinístico de Verhulst (MDV).

	MDV		MDG		MDBR	
	Estimativa	Margem de erro	Estimativa	Margem de erro	Estimativa	Margem de erro
$P_0$	103,49	32,74	86,06	34,55	44,78	62,88
$r$	1,161	0,295	0,875	0,198	0,292	0,305
$K$	443,88	13,27	446,56	13,18	455,83	16,15
$m$					1,560	0,918

De notar que no modelo determinístico de Bertalanffy-Richards a estimativa do peso à nascença ( $P_0$ ) e a estimativa da taxa de crescimento  $r$ , não foram significativamente diferentes de 0.

Para estes três modelos, na Figura 5, são representadas as curvas de crescimento real e as curvas estimadas pelos modelos MDV, MDG e MDBR. As curvas dos modelos de Verhulst e de Gompertz são muito semelhantes. A curva do modelo de Bertalanffy-Richards apresenta um crescimento inicial mais acentuado, todavia culmina com um peso assimptótico superior ao das outras curvas.



**Figura 5:** Ajustamento dos modelos determinísticos de Gompertz (MDG), de Bertalanffy-Richards (MDBR) e de Verhulst (MDV) aos dados observados.

Se representamos graficamente as curvas estocásticas e determinísticas (não apresentado), verificamos que as curvas estocásticas apresentam um peso estimado assimptótico mais pequeno que as curvas determinísticas, embora a taxa de crescimento inicial seja superior, inclusivamente superior à observada no modelo de Bertalanffy-Richards.

Na Tabela 3 apresentamos a comparação entre os diferentes modelos com base na raiz do erro quadrático médio (REQM) e do erro médio absoluto (EMA). Podemos observar que os modelos determinísticos superaram os modelos estocásticos em termos de ajustamento aos dados na métrica REQM. De facto, tal já seria de esperar uma vez que o método dos mínimos quadrados minimiza a soma dos quadrados dos erros. No entanto esta diferença é muito reduzida. Analisando os resultados da Tabela 3, observa-se que o modelo determinístico de Bertalanffy–Richards (MDBR) apresenta o menor valor de EQM, pois possui o menor valor de REQM (37,2). Na métrica do EMA o modelo estocástico de

Gompertz apresenta o pior valor. E o modelo MDBR volta a presentar o melhor desempenho.

**Tabela 3:** Comparação da qualidade de ajustamento dos diferentes modelos determinísticos e estocásticos.

<b>Modelos</b>	<b>MEG</b>	<b>MEBR</b>	<b>MDV</b>	<b>MDG</b>	<b>MDBR</b>
<b>REQM</b>	44,3	42,5	40,6	39,0	37,2
<b>EMA</b>	34,4	32,8	33,4	31,3	28,8

## 5.2 Previsão

Iremos comparar a qualidade do ajuste e previsão entre os modelos determinísticos, e os modelos estocásticos.

Para avaliar a qualidade da previsão de cada modelo, iremos usar a REQM e o EMA.

Iremos realizar em primeiro lugar uma previsão a longo prazo e depois uma previsão a curto prazo (passo a passo). Na previsão a longo prazo iremos deixar algumas observações de fora da estimação (as últimas 15) e posteriormente avaliamos a qualidade das previsões. Ou seja, neste caso, para estimação da curva serão utilizadas as 62 observações exceto as últimas 15 observações. Iremos usar os parâmetros estimados pelos modelos para de seguida prever o peso do animal nas últimas 15 observações e comparar as estimativas com os valores reais.

Já na estimação a curto prazo (passo a passo), em cada instante a estimar, todas as observações até esse instante são utilizadas para estimar os parâmetros da curva de crescimento, e com base nesses parâmetros o próximo peso do animal é estimado.

Faremos esse processo de forma recursiva, ou passo a passo, para estimarmos as últimas 15 observações.

O que esperamos observar é que os modelos estocásticos ofereçam uma abordagem mais realista e adequada, uma vez que no crescimento dos bovinos da raça Mertolenga, existem fatores aleatórios que afetam o processo, tais como variações individuais, condições ambientais e genéticas.

No caso dos modelos estocásticos, para prever o valor futuro de  $Y_t$ , dado o histórico até ao instante  $t_k$ , usaremos a solução da equação diferencial estocástica do tipo:

$$Y_t = \alpha + (Y_{t_k} - \alpha)e^{-\beta(t-t_k)} + \sigma e^{-\beta t} \int_{t_k}^t e^{\beta s} dW(s) \quad (5.2.1)$$

Sabendo que os tamanhos observados até  $t_k$  são dados exatos, a previsão dos valores futuros depende apenas do último valor  $Y_{t_k}$ , uma vez que  $Y_t$  constitui um processo de Markov. Assim, a média condicional é:

$$\mathbb{E}[Y_t | Y_{t_k}] = \alpha + (Y_{t_k} - \alpha) \exp(-\beta(t - t_k)) \quad (5.2.2)$$

E a variância condicional é dada por:

$$\text{Var}[Y_t | Y_{t_k}] = \frac{\sigma^2}{2\beta} (1 - \exp(-2\beta(t - t_k))) \quad (5.2.3)$$

Desta forma, a previsão estocástica do tamanho futuro dos animais é obtida através da média condicional estimada:

$$\hat{Y}_t = \hat{\alpha} + (Y_{t_k} - \hat{\alpha}) \exp(-\hat{\beta}(t - t_k)) \quad (5.2.4)$$

Na Tabela 4 são apresentados os valores da REQM e do EMA para as estimativas a longo prazo das últimas 15 observações para os diferentes modelos determinísticos e estocásticos. Os valores das métricas de desempenho dos modelos estocásticos nem todos são inferiores aos dos modelos determinísticos, devido à existência de uma observação que praticamente coincide com as curvas planas, fazendo diminuir as medidas de erro.

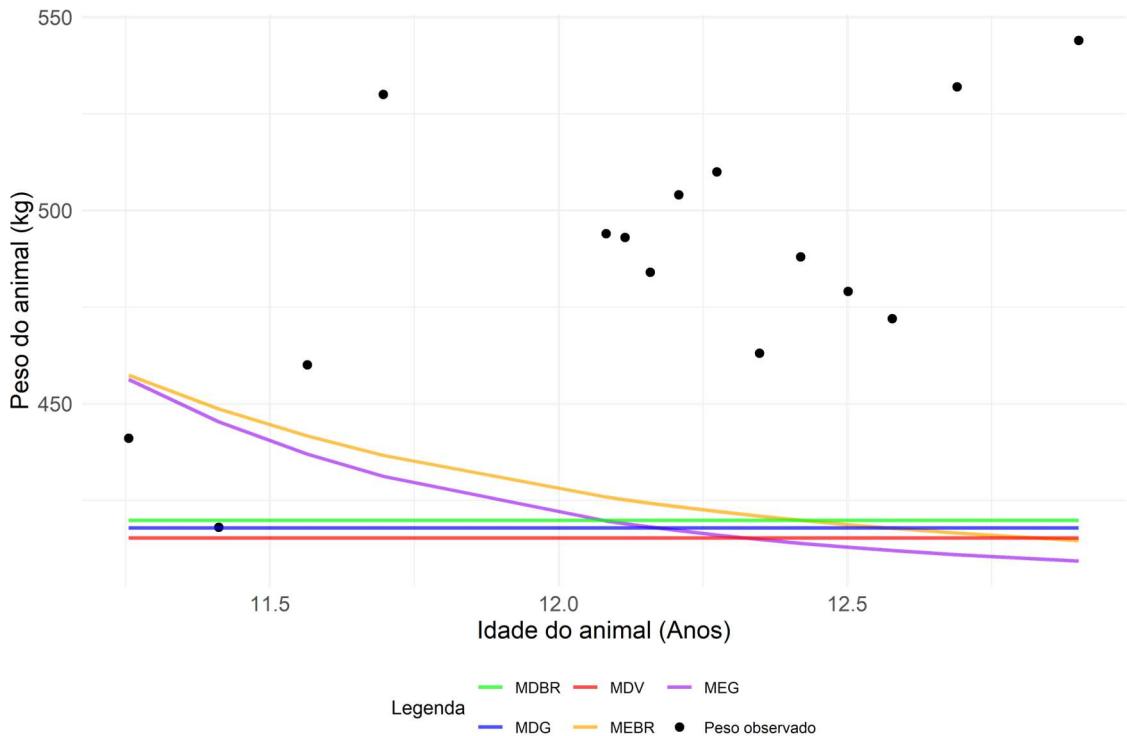
Mesmo assim, o modelo estocástico de Bertalanffy-Richards (MEBR) apresentou o melhor desempenho entre os 5 modelos.

No gráfico da Figura 6 apresentamos as 15 observações reais e as estimativas por cada um dos 5 modelos. Observamos que os modelos determinísticos apresentam estimativas de peso praticamente inalteradas ao longo das 15 observações, o que significa que com o avanço da idade o peso permanece constante em cada um dos modelos determinísticos.

Já as estimativas dos modelos estocásticos tentam acompanhar o comportamento da evolução dos pesos de uma forma decrescente com o avanço da idade em cada um dos modelos estocásticos.

**Tabela 4:** Valores da REQM e do EMA para as estimativas a longo prazo das últimas 15 observações para os diferentes modelos determinísticos e estocásticos.

Modelos	REQM	EMA
MEG	78,2	71,0
MEBR	73,2	66,2
MDV	79,5	72,3
MDG	77,2	69,7
MDBR	75,4	67,9



**Figura 6:** Representação gráfica das estimativas dos 5 modelos para as últimas 15 observações, para estimativas a longo prazo.

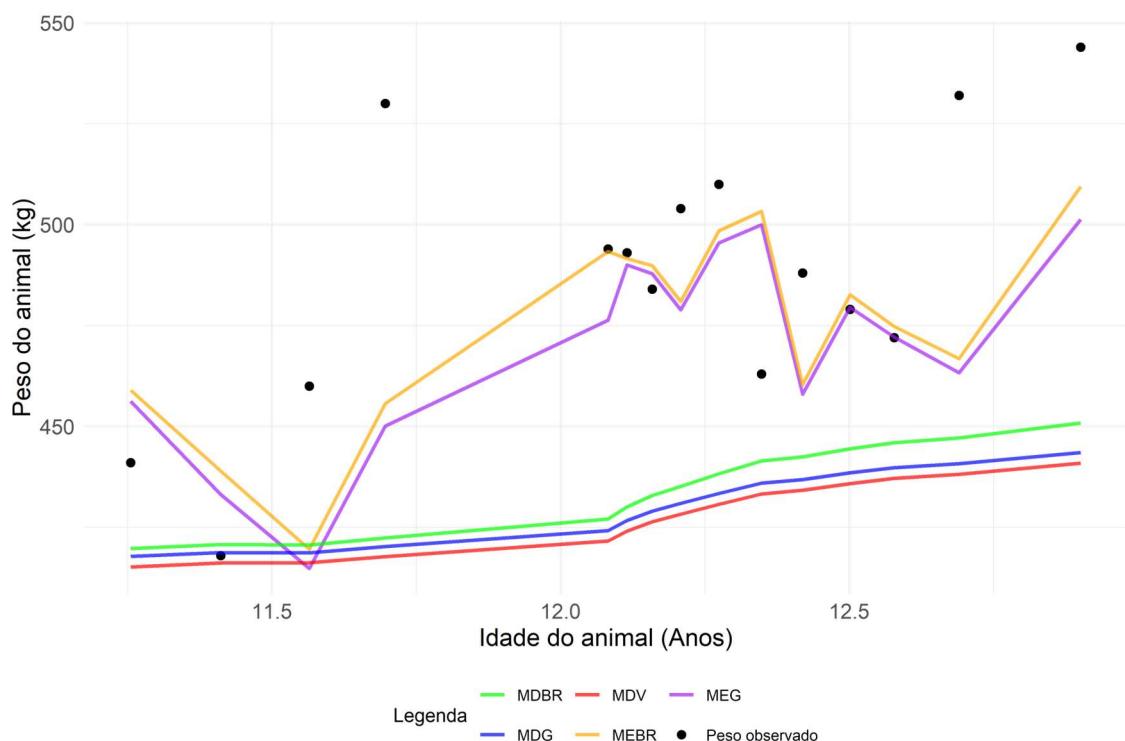
Na Tabela 5 são apresentados os valores da REQM e do EMA para as estimativas a curto prazo (passo a passo) das últimas 15 observações para os diferentes modelos determinísticos e estocásticos. Os valores das métricas de desempenho dos modelos estocásticos neste caso são bastante inferiores aos dos modelos determinísticos, evidenciando a superioridade dos modelos estocásticos para prever a evolução futura do peso do animal e o modelo estocástico Bertalanffy-Richards apresenta melhor desempenho entre os 5 modelos.

No gráfico da Figura 7 apresentamos as 15 observações reais e as estimativas por cada um dos 5 modelos para as estimativas a curto prazo (passo a passo). Observamos que os modelos determinísticos apresentam uma tendência crescente e regular, prevendo um aumento contínuo do peso ao longo das 15 observações. Já as estimativas dos modelos

estocásticos acompanham de uma forma bastante regular o comportamento do peso futuro do animal.

**Tabela 5:** Valores da REQM e do EMA para as estimativas a curto prazo (passo a passo) das últimas 15 observações para os diferentes modelos determinísticos e estocásticos.

Modelos	REQM	EMA
MEG	35,5	26,6
MEBR	33,2	24,7
MDV	66,7	59,8
MDG	64,4	57,2
MDBR	60,5	53,2



**Figura 7:** Representação gráfica das estimativas dos 5 modelos para as últimas 15 observações, para estimativas a curto prazo (passo a passo).

## 6. Conclusões

Nesta dissertação, estudámos diferentes modelos de crescimento individual, tanto na sua versão determinística como estocástica, conforme referido anteriormente. Procedemos à estimação dos parâmetros dos modelos determinísticos e estocásticos, bem como ao ajustamento dos mesmos, recorrendo ao método dos mínimos quadrados para os modelos determinísticos e ao método da máxima verossimilhança para os modelos estocásticos.

Além disso, os modelos determinísticos e estocásticos foram representados graficamente.

Realizámos previsões a longo prazo e a curto prazo (passo a passo), bem como a respetiva representação gráfica. Para tal, utilizámos dados reais de um animal existente na base de dados fornecida pela ACBM. Este animal tem medições desde o nascimento até aos 13 anos de idade, com um total de 62 medições de peso, com o objetivo de identificar qual dos modelos apresenta melhor desempenho, com base na raiz do erro quadrático médio (REQM) e no erro médio absoluto (EMA).

Ao analisarmos os resultados obtidos na modelação, concluímos que a estimativa do parâmetro do peso médio assimptótico ( $\hat{A}$ , em kg) do modelo estocástico Bertalanffy-Richards é superior à do modelo estocástico de Gompertz. Esta diferença é confirmada pela representação gráfica, onde se observa que a curva do modelo estocástico Bertalanffy-Richards se ajusta ligeiramente melhor aos dados observados, especialmente na fase de estabilização do crescimento.

Na estimativa do parâmetro K nos modelos determinísticos, observa-se que o valor obtido pelo modelo Bertalanffy-Richards é superior aos dos modelos de Gompertz e de Verhulst. Esta diferença é confirmada pela representação gráfica, onde se verifica que a curva do modelo de Bertalanffy-Richards apresenta um ajustamento ligeiramente melhor aos dados observados.

No que diz respeito à comparação da qualidade de ajustamento dos diferentes modelos determinísticos e estocásticos, observa-se que os modelos determinísticos apresentam melhor desempenho do que os modelos estocásticos na métrica REQM. Relativamente à métrica EMA, o modelo estocástico de Gompertz apresenta o pior desempenho, enquanto o modelo determinístico de Bertalanffy-Richards apresenta o melhor desempenho. Importa ainda salientar que o modelo determinístico de Bertalanffy-Richards apresenta os melhores resultados nas duas métricas, registando os menores valores quer na REQM quer no EMA.

Relativamente às estimativas a longo prazo para as últimas 15 observações dos diferentes modelos determinísticos e estocásticos, observa-se que o modelo estocástico de Bertalanffy-Richards (MEBR) apresenta o melhor desempenho em ambas as métricas (REQM e EMA), em comparação com os restantes modelos. Esta superioridade é também confirmada pela representação gráfica.

Por outro lado, verifica-se que, com o avanço da idade, o peso previsto permanece praticamente constante nos modelos determinísticos, enquanto os modelos estocásticos procuram acompanhar a evolução dos pesos observados de forma decrescente.

Em relação às estimativas de curto prazo (passo a passo) para as últimas 15 observações, obtidas a partir de diferentes modelos determinísticos e estocásticos, verifica-se que os modelos estocásticos apresentam um desempenho superior aos modelos determinísticos em ambas as métricas de avaliação consideradas (REQM e EMA). Entre os modelos estocásticos analisados, o modelo estocástico de Bertalanffy-Richards destaca-se como aquele que melhor antecipa a evolução futura do peso do animal. Esta superioridade é igualmente corroborada pela análise gráfica, que evidencia uma maior proximidade entre os valores observados e os valores estimados por este modelo.

Por outro lado, observa-se que os modelos determinísticos tendem a apresentar uma trajetória de crescimento monotónica, prevendo um aumento contínuo do peso ao longo das 15 observações. Em contraste, as estimativas dos modelos estocásticos reproduzem de forma mais fiel a dinâmica real do peso do animal, captando flutuações e variações de curto prazo.

Este melhor desempenho dos modelos estocásticos pode ser explicado pelo facto de incorporarem explicitamente a dependência temporal entre observações sucessivas de peso, enquanto os modelos determinísticos assumem implicitamente que as observações são independentes. Assim ao considerar a estrutura de dependência inerente aos dados, os modelos estocásticos conseguem fornecer previsões mais realistas e precisas do comportamento futuro do peso do animal.

## Anexo

A modelação dos dados foi realizada com recurso ao software R studio, utilizando-se os registos de um animal da raça Mertolenga, disponibilizados pela ACBM. Este animal tem 62 medições de peso desde a nascença até aos 13 anos de idade.

### Leitura e Organização dos Dados

```
setwd("C:/Users/huilb/OneDrive/Ambiente de Trabalho/Animal") # Definir a diretória de trabalho.  
#Livraárias utilizadas  
library(minpack.lm)  
library(ggplot2)  
EstcGompeAnimal <- read.csv2("Animal3.csv") # Ler base de dados do 3º animal.  
str(EstcGompeAnimal) # Mostrar a estrutura da base de dados.  
View(EstcGompeAnimal) # Visualizar os dados.  
# Verificar se a base de dados tem NA (valores ausentes)  
any(is.na (EstcGompeAnimal))  
#Matriz de peso por coluna por animal (transposta)  
P<-((EstcGompeAnimal$Peso)) # Extrair a coluna de Peso da base de dados e armazenar na variável " P ".  
#Matriz de idade por coluna por animal (transposta)  
I<-((EstcGompeAnimal$Idade)) # Extrair a coluna de Idade da base de dados e armazenar na variável " I ".  
#Representação gráfica das variáveis I e P.  
plot(I, P)  
m<-length(P) # Calcular o número de elementos da variável P e armazenar em "m".  
n<-length(I) # Calcular o número de elementos da variável P e armazenar em "n".
```

### Modelação dos Modelos Determinísticos

#### ○ Modelo Determinístico de Bertalanffy-Richards

```
# Atribuição do primeiro valor à variável t0  
t0<-I [1]  
  
# Definição da função do modelo determinístico de Bertalanffy-Richards  
BR_solution <- function(t, K, r, m, P0, t0) {t0<-I[1]  
K * (1 - (1 - (P0/K) ^m) * exp(- r * m * (t-t0))) ^ (1 / m)}  
  
# Estimação dos parâmetros do modelo  
start_vals <- list(K = 500, r = 0.1, m = 0.5, P0 = 40)  
dat<-EstcGompeAnimal  
fit_BR <- nlsLM(Peso ~ BR_solution(I, K, r, m, P0, t0), data = dat, start = start_vals)  
summary(fit_BR)  
  
# Cálculo das margens do erro dos parâmetros do modelo  
coef(summary(fit_BR)) [, "Std. Error"] *1.96  
  
# Cálculo dos valores ajustados pelo modelo  
predicted_BR_est<-BR_solution  
(EstcGompeAnimal$Idade[1:length(EstcGompeAnimal$Idade)],coef(fit_BR)["K"],  
coef(fit_BR) ["r"], coef(fit_BR) ["m"],coef(fit_BR) ["P0"], t0)  
predicted_BR<-c(predicted_BR_est)
```

```

# Cálculo da REQM e do EMA(MAE) do modelo
MSE_BR <- mean((P - predicted_BR)^2)
MAE <- mean(abs(P - predicted_BR))
sqrt(MSE_BR)
MAE
#####
Previsões de Longo Prazo do #####
Modelo Determinístico de Bertalanffy-Richards #####
# Função do modelo determinístico de Bertalanffy-Richards
bertalanffy_richards <- function(t, K, r, m, P0, t0) {K * (1 - (1 - (P0/K)^m) * exp(- r * m * (t-t0)))^(1 / m)}

# Definir o número de observações a serem excluídas da previsão
np <- 15
Nc <- nrow(EstcGompeAnimal)
Dados_Ajuste <- EstcGompeAnimal[1:(Nc - np),]
Dados_Prev <- EstcGompeAnimal[(Nc - np + 1):Nc, ]

t0<-Dados_Ajuste$Idade[1]
# Ajuste do modelo com os dados de treino
start_vals <- list(K = 400, r = 0.8, m = 0.3, P0=40)
fit_BR_LP <- nlsLM(Peso ~ bertalanffy_richards(Idade, K, r, m, P0, t0), data = Dados_Ajuste,
start = start_vals)

# Previsões dos valores futuros
Idade_Futura <- Dados_Prev$Idade
Pred_BR<-bertalanffy_richards(Idade_Futura,coef(fit_BR_LP)[ "K"],      coef(fit_BR_LP)[ "r"],
coef(fit_BR_LP)[ "m"],coef(fit_BR_LP)[ "P0"], t0)

# Cálculo da REQM e do EMA do modelo para a previsão de longo prazo
MSE_GD <- mean((Dados_Prev$Peso - Pred_BR)^2)
MAE <- mean(abs(Dados_Prev$Peso - Pred_BR))
sqrt(MSE_GD)
MAE
#####
Previsão de Curto Prazo (Passo a Passo) #####
do Modelo Determinístico de Bertalanffy-Richards #####
# Definir o número de observações a serem excluídas da previsão
np <- 15
Nc <- nrow(EstcGompeAnimal)

# Definir corretamente Yobs e leY
Yobs <- EstcGompeAnimal$Peso[(Nc - np + 1):Nc]
leY <- length(Yobs)

# Índice de início de previsão
k <- Nc - leY
# Inicializar vetor de previsões
Pred_BR_PP <- numeric(np)

# Realização de previsão de curto prazo
for (i in 1:np) {
  IobsPP <- EstcGompeAnimal$Idade[1:(Nc - np + i-1)]
  PobsPP <- EstcGompeAnimal$Peso[1:(Nc - np + i-1)]
  dataPP <- data.frame(Idade = IobsPP, Peso = PobsPP)
  t0<-IobsPP[1]
  start_vals <- list(K = 400, r = 0.8, m = 0.3,P0=40)
}

```

```

fit_BR_PP <- nlsLM(Peso ~ bertalanffy_richards(Idade, K, r, m, P0, t0), data = dataPP, start =
start_vals)
Pred_BR_PP[i] <- bertalanffy_richards(EstcGompeAnimal$Idade[Nc - np + i],
                                         coef(fit_BR_PP)["K"],
                                         coef(fit_BR_PP)["r"],
                                         coef(fit_BR_PP)["m"],
                                         coef(fit_BR_PP)["P0"],
                                         t0) }

# Cálculo da REQM e do EMA para a previsão de curto prazo
Iobs <- EstcGompeAnimal$Idade[(Nc - np + 1):Nc]
Yobs <- EstcGompeAnimal$Peso[(Nc - np + 1):Nc]
MSE_GD <- mean((Yobs - Pred_BR_PP)^2)
MAE <- mean(abs(Yobs - Pred_BR_PP))
sqrt(MSE_GD)
MAE

    ○ Modelo Determinístico de Gompertz

# Definição da função do modelo determinístico de Gompertz
gompertz_solution <- function(t, K, r, P0, t0) {K * exp(-log (K / P0) * exp(-r * (t-t0)))}
# Atribuição do primeiro valor à variável t0
t0<-I [1]

# Estimação dos parâmetros do modelo
start_vals <- list(K = 549, r = 0.8, P0 = 40)
fit_G <- nlsLM(Peso ~ gompertz_solution(Idade, K, r, P0, t0), data = EstcGompeAnimal, start =
start_vals)
summary(fit_G)

# Cálculo das margens do erro dos parâmetros do modelo
coef(summary(fit_G) [, "Std. Error"] *1.96

# Cálculo dos valores ajustados pelo modelo
predicted_GD_est <- gompertz_solution(EstcGompeAnimal$Idade,      coef(fit_G)["K"],
                                         coef(fit_G)["r"],coef(fit_G) ["P0"], t0)

# Cálculo da REQM e do EMA (MAE) do modelo
MSE_GD <- mean((P - predicted_GD_est)^2)
MAE <- mean(abs(P - predicted_GD_est))
sqrt(MSE_GD)
MAE
#####
# Definir o número de observações a serem excluídas da previsão
np <- 15

# Separação dos dados para ajuste e previsão
Nc <- nrow(EstcGompeAnimal)
Dados_Ajuste <- EstcGompeAnimal[1:(Nc - np), ] # Dados para ajustar o modelo
Dados_Prev <- EstcGompeAnimal[(Nc - np + 1):Nc, ] # Dados para previsão

# Estimação dos parâmetros com os dados de ajuste
start_vals <- list(K = 549, r = 0.8, P0=40)
t0<-Dados_Ajuste$Idade[1]

```

```

fit_G_LP <- nlsLM(Peso ~ gompertz_solution(Idade, K, r, P0, t0), data = Dados_Ajuste, start =
start_vals)
summary(fit_G_LP)

# Previsões dos valores futuros
Idade_Futura <- Dados_Prev$Idade
predict(fit_G_LP, Dados_Prev)
Pred_GD <- gompertz_solution(Idade_Futura, coef(fit_G_LP)["K"],
coef(fit_G_LP)["r"],coef(fit_G_LP)["P0"],t0)

# Cálculo da REQM e do EMA para a previsão de longo prazo
MSE_GD <- mean((Dados_Prev$Peso - Pred_GD)^2)
MAE <- mean(abs(Dados_Prev$Peso - Pred_GD))
sqrt(MSE_GD)
MAE
#####
# Previsão de Curto Prazo (Passo a Passo)
# do Modelo Determinístico de Gompertz #####
# Definir o número de observações a serem excluídas da previsão
np <- 15
Nc <- nrow(EstcGompeAnimal)

# Definir corretamente Yobs e leY
Yobs <- EstcGompeAnimal$Peso[(Nc - np + 1):Nc]
leY <- length(Yobs)

# Índice de início da previsão
k <- Nc - leY

# Inicializar vetor de previsões
PredGompPP <- numeric(leY)

# Realização de previsão de curto prazo
start_vals <- list (K = 518, r = 1.05, P0=40)
for (i in 1: leY) {
  IobsPP <- EstcGompeAnimal$Idade[1:(k + i-1)]
  PobsPP <- EstcGompeAnimal$Peso[1:(k + i-1)]
  dataPP <- data.frame(Idade = IobsPP, Peso = PobsPP)
  t0<-IobsPP[1]
  fit_GPP <- nlsLM(Peso ~ gompertz_solution(Idade, K, r, P0, t0),
  data = dataPP, start = start_vals)
  PredGompPP[i] <- gompertz_solution(EstcGompeAnimal$Idade[k + i],
  coef(fit_GPP)["K"],
  coef(fit_GPP)["r"],
  coef(fit_GPP)["P0"],
  t0)}
# Definir os vetores de observações
Iobs <- EstcGompeAnimal$Idade[(Nc - np + 1):Nc]
Yobs <- EstcGompeAnimal$Peso[(Nc - np + 1): Nc]

# Cálculo da REQM e do EMA para a previsões de curto prazo
EQM_PP <- mean((Yobs - PredGompPP)^2)
MAE_PP <- mean (abs(Yobs - PredGompPP)) # Média das diferenças absolutas
REQM_PP<-sqrt (EQM_PP)
REQM_PP
MAE_PP

```

- **Modelo Determinístico de Verhulst**

```

# Definição da função do modelo determinístico de Verhulst
verhulst_solution <- function(t, r, K, P0, t0) {
  K * P0 / ((K - P0) * exp(-r * (t-t0)) + P0)}

# Atribuição do primeiro valor à variável t0
t0<-I [1]

# Estimação dos parâmetros do modelo
start_vals <- list(K = 550, r = 0.5, P0 = 40)
fit_V <- nlsLM(Peso ~ verhulst_solution(Idade, r, K, P0, t0), data = EstcGompeAnimal, start =
  start_vals)
summary(fit_V)

# Cálculo das margens do erro dos parâmetros do modelo
coef(summary(fit_V)) [, "Std. Error"] *1.96

# Cálculo dos valores ajustados pelo modelo
predicted_VD_est <- verhulst_solution(EstcGompeAnimal$Idade,   coef(fit_V)  ["r"],
  coef(fit_V)["K"], coef(fit_V) ["P0"], t0)
predicted_VD<-c(predicted_VD_est)

# Cálculo da REQM e do EMA (MAE) do modelo
MSE_VD <- mean((EstcGompeAnimal$Peso - predicted_VD)^2)
MAE_VD <- mean(abs(EstcGompeAnimal$Peso - predicted_VD))
RMSE_VD <- sqrt(MSE_VD) #Raiz do erro quadrático médio
RMSE_VD
MAE_VD
#####
# Previsões de Longo Prazo do
# Modelo Determinístico de Verhulst
#####
# Definir o número de observações a serem excluídas da previsão
np <- 15

# Separação dos dados para ajuste e previsão
Nc <- nrow(EstcGompeAnimal)
Dados_Ajuste <- EstcGompeAnimal[1:(Nc - np),] # Dados para ajustar o modelo
Dados_Prev <- EstcGompeAnimal[(Nc - np + 1): Nc,] # Dados para previsão

# Estimação dos parâmetros com os dados de ajuste
start_vals <- list(K = 550, r = 0.5, P0 = 40)
t0<-Dados_Ajuste$Idade[1]
fit_V_LP <- nlsLM(Peso ~ verhulst_solution(Idade, r, K, P0, t0), data = Dados_Ajuste, start =
  start_vals)
summary(fit_V_LP)

# Previsão dos valores futuros
Idade_Futura <- Dados_Prev$Idade
Pred_VD <- verhulst_solution(Idade_Futura,   coef(fit_V_LP) ["r"],   coef(fit_V_LP) ["K"],
  coef(fit_V_LP) ["P0"], t0)

# Cálculo da REQM e do EMA do modelo para a previsão de longo prazo
Yobs_LP <- Dados_Prev$Peso
EQM_LP <- mean((Yobs_LP - Pred_VD) ^2)
MAE <- mean(abs(Yobs_LP - Pred_VD))
sqrt(EQM_LP)

```

```

MAE
#####
Previsão de Curto Prazo (Passo a Passo)
do Modelo Determinístico de Verhulst
#####
# Definir o número de observações a serem excluídas da previsão
np <- 15
Nc <- nrow(EstcGompeAnimal)

# Definir corretamente Yobs e leY
Yobs <- EstcGompeAnimal$Peso[(Nc - np + 1):Nc]
leY <- length(Yobs)

# Índice de início da previsão
k <- Nc - leY

# Inicializar vetor de previsões
PredVerhulstPP <- numeric(leY)

# Parâmetros iniciais para estimar
start_vals <- list(K = 550, r = 0.5, P0=40)

# Previsão de curto prazo
for (i in 1: leY) {
  IobsPP <- EstcGompeAnimal$Idade[1:(k + i-1)]
  PobsPP <- EstcGompeAnimal$Peso[1:(k + i-1)]
  dataPP <- data.frame(Idade = IobsPP, Peso = PobsPP)
  t0<-IobsPP[1]
  fit_VPP <- nlsLM(Peso ~ verhulst_solution(Idade, r, K, P0,t0),
                     data = dataPP, start = start_vals)
  PredVerhulstPP[i] <- verhulst_solution(EstcGompeAnimal$Idade[k + i],
                                           coef(fit_VPP)[ "r" ],
                                           coef(fit_VPP)[ "K" ],
                                           coef(fit_VPP)[ "P0" ],
                                           t0)}
}

# Definição dos vetores de observações
Iobs <- EstcGompeAnimal$Idade[(Nc - np + 1):Nc]
Yobs <- EstcGompeAnimal$Peso[(Nc - np + 1): Nc]

# Cálculo da REQM e do EMA do modelo para a previsão de curto prazo
EQM_PP <- mean((Yobs - PredVerhulstPP) ^2)
MAE_PP <- mean(abs(Yobs - PredVerhulstPP)) # Média das diferenças absolutas
REQM_PP<-sqrt(EQM_PP)
REQM_PP
MAE_PP

```

### Modelação dos Modelos Estocásticos

- **Modelo Estocástico de Bertalanffy-Richards**
- ```

# Modelo EBR Com parâmetro c=1/3
# Y=X^(1/3) =h(X) -> X=Y^3

```

```

#-Função de log-verosimilhança para uma trajetória do modelo
L<-function(I1, I2, P1, P2N, x) {(N*log(2*pi) /2) + ((N/2)*log((x[3])/(2*x[2])))+  

  (sum(log(1-exp(-2*x[2]*(I2-I1))))/2)+(x[2]/(x[3]))*(sum(((P2-x[1])-(P1-x[1]))*exp(-x[2]*(I2-  

  I1)))^2)/(1-exp(-2*x[2]*(I2-I1))))}

```

```

# Definição da função de log-verosimilhança global do modelo
LTG_BR<-function(x){LTG_BR<-L(I[1:(m-1)],I[2:m],(P[1:(m-1)])^(1/3),(P[2:m])^(1/3),
m,c(x[1],x[2],x[3])) return(LTG_BR)}

#Minimizar a função de log-verosimilhança global do modelo
minLTBR<-nlm(LTG_BR,c(6.5,0.000005,0.1), hessian=TRUE)
minLTBR

#Estimativas de MV dos parâmetros do modelo
aBR<-minLTBR$estimate[1]
aBR<-aBR^3 ## A=h(aBR) -> ABR=aBR^3
bBR<-minLTBR$estimate[2]
sBR<-minLTBR$estimate[3]
aBR;ABR; bBR;sBR # Apresentar os resultados dos parâmetros aBR; ABR; bBR; sBR.

# Cálculo do valor de log-verosimilhança do modelo
LYBR<-minLTBR$minimum
LYBR
LXBR<-LYBR+sum (log ((1/3) *((P [-1])^(-2/3))), na.rm = TRUE)
-LXBR

# Cálculo das variâncias dos estimadores do modelo
VarBR<-solve(minLTBR$hessian)
VarBR

# Cálculo das Margens de erro dos ICs assintóticos dos parâmetros do modelo
MEa<-1.96*sqrt(VarBR[1,1])
MEA<-1.96*sqrt(VarBR[1,1]) *3*aBR^2
MEb<-1.96*sqrt(VarBR[2,2])
MEs<-1.96*sqrt(VarBR[3,3])
MEa
MEA
MEb
MEs

# Curva estimada e previsão do modelo
SDE_BR <- aBR + ((P [1])^(1/3) - aBR) * exp(-bBR * (I[2:m] - I[1]))
SDE_BR
Previsao_BR <- c(P[1], (SDE_BR)^3)
Previsao_BR

# Cálculo da REQM (MSE) e do EMA (MAE) do modelo
Dif_EQM_BR <- Previsao_BR[2:m] - P[2:m]
EQM_BR <- sqrt(sum (Dif_EQM_BR^2) / length(Dif_EQM_BR))
Erro_Absoluto_BR <- abs(P[2:m] - Previsao_BR[2:m])
MAE_BR <- mean(Erro_Absoluto_BR)
EQM_BR
MAE_BR
#####
# Definir o número de observações a serem excluídas da previsão
Testim<-15
Tempo<-(m-Testim)
#####
```

### Previsão de Longo Prazo

### do Modelo Estocástico de Bertalanffy- Richards

#####

#####

```

# Definição da função de log-verosimilhança global do modelo
LTG_BR<-function(x){LTG_BR<-L(I[1:(Tempo-1)],I[2:Tempo],(P[1:(Tempo-1)])^(1/3),(P[2:Tempo])^(1/3), Tempo,c(x[1],x[2],x[3]))
return(LTG_BR)}

#Minimizar a função de log-verosimilhança global do modelo
minLTBR<-nlm(LTG_BR,c(6.5,0.000000005,0.1),hessian=TRUE)
minLTBR

#Estimativas de MV dos parâmetros do modelo
aBR<-minLTBR$estimate[1]
aBR<-aBR^3 ## A=h(aBR) -> ABR=aBR^3
bBR<-minLTBR$estimate[2]
sBR<-minLTBR$estimate[3]
aBR;ABR; bBR;sBR

# Cálculo do valor de log-verosimilhança do modelo
LYBR<-minLTBR$minimum
LYBR
LXBR<-LYBR+sum(log((1/3)*((P[-1])^(-2/3))), na.rm = TRUE)
-LXBR

# Curva estimada e previsão do modelo
SDE_BR_PrevLP <- aBR + ((P[Tempo])^(1/3) - aBR) * exp(-bBR * (I[(Tempo+1):m] - I[Tempo]))
SDE_BR_PrevLP
Previsao_BR_LP <- c(SDE_BR_PrevLP^3)
Previsao_BR_LP

# Cálculo da REQM e do EMA (MAE) do modelo para a previsão de longo prazo
Yobs_LP<-P[(Tempo + 1):m]
EQM_LP <- mean((Yobs_LP - Previsao_BR_LP) ^2)
REQM_LP <- sqrt(EQM_LP)
REQM_LP
MAE <- mean(abs(Yobs_LP - Previsao_BR_LP))
MAE
#####
Previsão de Curto Prazo (Passo a Passo)
do Modelo Estocástico de Bertalanffy - Richards
#####

# Definir o número de observações a serem excluídas da previsão
nr <- 15
PrevPP_BR<-vector(length= nr)

for (k in 1:(nr)) {
  Tempo<-(length(P)-(nr-k+1))
  P_prev<-P[1: Tempo]
  I_Prev<-I[1: Tempo]

# Definição da função de log-verosimilhança global do modelo
LTG_BR<-function(x) {
  LTG_BR<-L(I[1:(m-1)],I[2:m],(P[1:(m-1)])^(1/3),(P[2:m])^(1/3),m,c(x[1],x[2],x[3]))
  return(LTG_BR)}

#Minimizar a função de log-verosimilhança global do modelo
minLTBR<-nlm(LTG_BR,c(6.5,0.000005,0.1),hessian=TRUE)
minLTBR

```

```

#Estimativas de MV dos parâmetros do modelo
aBR<-minLTBR$estimate[1]
ABR<-aBR^3 ## A=h(aBR) -> ABR=aBR^3
bBR<-minLTBR$estimate[2]
sBR<-minLTBR$estimate[3]
aBR;ABR; bBR;sBR

#Cálculo do valor de log-verosimilhança do modelo
LYBR<-minLTBR$minimum
LYBR
LXBR<-LYBR+sum(log((1/3)*((P[-1])^(-2/3))), na.rm = TRUE)
-LXBR

# Curva estimada e previsão do modelo
SDE_BRX_PrevCP<-aBR+((P[Tempo])^(1/3)-aBR)*exp(-bBR*(I[(Tempo+1)]-I[Tempo]))    #
porque I[1]=0
PrevPP_BR[k]<-SDE_BRX_PrevCP}
Previsao_BR_PP<-c((PrevPP_BR)^3)

# Cálculo da REQM e do EMA (MAE) do modelo para a previsão de curto prazo
Yobs_PP <- P[(length(P) - nr + 1):length(P)]
EQM_PP <- mean((Yobs_PP - Previsao_BR_PP)^2)
REQM_PP <- sqrt(EQM_PP)
REQM_PP
MAE_BR <- mean(abs(Yobs_PP - Previsao_BR_PP))
MAE_BR

    ○ Modelo Estocástico de Gompertz
# Modelo Estocástico de Gompertz
# Y = ln(X)=h(X) -> X= exp(Y)

#-Função de log-verosimilhança para uma trajectória do modelo
L<-function(I1, I2, P1, P2, N, x){(N*log(2*pi) / 2)+((N/2)*log((x[3])/(2*x[2])))+  

(sum(log(1-exp(-2*x[2]*(I2-I1))))/2)+(x[2]/(x[3]))*(sum(((P2-x[1])-(P1-x[1])*exp(-x[2]*(I2-I1)))^2)/(1-exp(-2*x[2]*(I2-I1))))} # Calcular a função log-verossimilhança de uma trajectória e  

armazenar na variável "L"

# Definição da função de log-verosimilhança global do modelo
LTG<-function(x){LTG<-L(I[1:(m-1)],I[2:m],log(P[1:(m-1)]),log(P[2:m]), m,c(x[1],x[2], x[3]))  

return(LTG)}

#Minimizar a função de log-verosimilhança global do modelo
minLTG<-nlm(LTG,c(7.0,0.000005,0.05),hessian=TRUE) # Minimizar a função LTG usando a  

função nlm com valores iniciais e calcular a matriz Hessiana.
minLTG

# Cálculo do valor de log-verosimilhança do modelo
mLTG<-minLTG$minimum
mLTG
mLTG_X<-mLTG+sum(log(P[-1]), na.rm = TRUE)
-mLTG_X
#Estimativas de MV dos parâmetros do modelo
aG<-minLTG$estimate[1] # Extrair a estimativa do 1º parâmetro e armazenar em aG.
bG<-minLTG$estimate[2] # Extrair a estimativa do 2º parâmetro e armazenar em bG.
sG<-minLTG$estimate[3] # Extrair a estimativa do 3º parâmetro e armazenar em sG.

```

```

aG;bG;sG # Apresentar os resultados dos parâmetros aG;bG;sG.

# Estimativa de peso na idade da maturidade
# Se aG=h(A) -> AG=exp(aG) - peso na maturidade estimado deste animal.
AG<-exp(aG) # Calcular exponencial de aG.
AG

# Cálculo das variâncias dos estimadores do modelo
VarG<-solve(minLTG$hessian)
VarG

# Cálculo das margens de erro dos ICs assimptóticos dos parâmetros do modelo
MEa<-1.96*sqrt(VarG[1,1])
MEA<-1.96*sqrt(VarG[1,1])*AG
MEb<-1.96*sqrt(VarG[2,2])
MEs<-1.96*sqrt(VarG[3,3])
MEa
MEA
MEb
MEs

# Curva estimada e previsão do modelo
SDE_GompX<-aG+(log(P[1])-aG)*exp(-bG*(I[2:m]-I[1])) # I[1] corresponde ao primeiro
instante (pode ser I[1]=0) e P[1] o 1º peso medido (em)
SDE_GompX
Previsao_GEDE<-c(P[1], exp(SDE_GompX))

# Cálculo da REQM (MSE) e do EMA (MAE) do modelo
REQM_ajustamento <- sqrt(mean((P - Previsao_GEDE)^2, na.rm = TRUE))
Erro_Absoluto <- abs(P[2:m] - Previsao_GEDE[2:m])
MAE_Gomp <- mean(Erro_Absoluto)
REQM_ajustamento
MAE_Gomp
#####
# Definir o número de observações a serem excluídas da previsão
Testim <- 15
Tempo <- (length(P) - Testim)

# Definição da função de log-verosimilhança do modelo
LTG <- function(x) {
  LTG <- L(I[1:(Tempo - 1)], I[2:Tempo], log(P[1:(Tempo - 1)]), log(P[2:Tempo]), Tempo, c(x[1],
  x[2], x[3]))
  return(LTG)}
# Minimizar a função de log-verosimilhança global do modelo.
minLTG <- nlm(LTG, c(7.0,0.0000005,0.05), hessian = TRUE)
minLTG

# Estimativas de MV dos parâmetros do modelo
aG <- minLTG$estimate[1] # Extrair a estimativa do 1º parâmetro e armazenar em aG.
bG <- minLTG$estimate[2] # Extrair a estimativa do 2º parâmetro e armazenar em bG.
sG <- minLTG$estimate[3] # Extrair a estimativa do 3º parâmetro e armazenar em sG.
aG; bG; sG # Apresentar os resultados dos parâmetros aG; bG; sG.

```

```

# Estimativa de peso na idade da maturidade
# Se aG=h(A) -> AG=exp(aG) - peso na maturidade estimado deste animal.
AG <- exp(aG) # Calcular exponencial de aG.
AG
# Curva estimada e previsão do modelo
SDE_GompX_PrevLP <- aG + (log(P[Tempo]) - aG) * exp(-bG * (I[(Tempo + 1):m] - I[Tempo]))
# porque I[1] = 0
Previsao_GEDE_LP <- c(exp(SDE_GompX_PrevLP))

# Cálculo da REQM e do EMA (MAE) do modelo
Yobs_LP <- P[(Tempo+1):m]
EQM_LP <- mean((Yobs_LP - Previsao_GEDE_LP)^2)
REQM_LP <- sqrt(EQM_LP)
REQM_LP
MAE_Gomp <- mean(abs(Yobs_LP - Previsao_GEDE_LP))
MAE_Gomp
#####
Previsão de Curto Prazo (Passo a Passo)
do Modelo Estocástico de Gompertz
#####
# Definir o número de observações a serem excluídas da previsão
nr <- 15
PrevPP <- vector(length = nr)

for (k in 1:(nr)) {
  Tempo <- (length(P) - (nr - k + 1))

  # -Função de log-verosimilhança para uma trajetória do modelo
  L <- function(I1, I2, P1, P2, N, x) {
    (N * log(2 * pi) / 2) + ((N / 2) * log((x[3]) / (2 * x[2]))) +
    (sum(log(1 - exp(-2 * x[2] * (I2 - I1)))) / 2) + (x[2] / (x[3])) * (sum(((P2 - x[1]) - (P1 - x[1]) * exp(-x[2] * (I2 - I1)))^2) / (1 - exp(-2 * x[2] * (I2 - I1)))))

    # Definição da função de log-verosimilhança do modelo
    LTG <- function(x) {
      LTG <- L(I[1:(Tempo - 1)], I[2:Tempo], log(P[1:(Tempo - 1)]), log(P[2:Tempo]), Tempo, c(x[1], x[2], x[3]))
      return(LTG)
    }
  }

  # Minimizar a função de log-verosimilhança global do modelo
  minLTG <- nlm(LTG, c(6.98, 0.0000052, 0.0455), hessian = TRUE)
  minLTG

  # Estimativas de MV dos parâmetros do modelo
  aG <- minLTG$estimate[1] # Extrair a estimativa do 1º parâmetro e armazenar em aG.
  bG <- minLTG$estimate[2] # Extrair a estimativa do 2º parâmetro e armazenar em bG.
  sG <- minLTG$estimate[3] # Extrair a estimativa do 3º parâmetro e armazenar em sG.
  aG; bG; sG # Apresentar os resultados dos parâmetros aG; bG; sG.

  # Estimativa de peso na idade da maturidade
  # Se aG=h(A) -> AG=exp(aG) - peso na maturidade estimado deste animal
  AG <- exp(aG)
  AG
  # Curva estimada e previsão do modelo
  SDE_GompX_PrevCP <- aG + (log(P[Tempo]) - aG) * exp(-bG * (I[(Tempo + 1)] - I[Tempo]))
  # porque I[1]=0
  PrevPP[k] <- SDE_GompX_PrevCP}
  Previsao_GEDE_PP <- c(exp(PrevPP))

```

```

# Cálculo da REQM e do EMA (MAE) do modelo
Yobs_PP <- P[(length(P) - nr + 1):length(P)]
EQM_PP <- mean((Yobs_PP - exp(PrevPP))^2)
REQM_PP <- sqrt(EQM_PP)
REQM_PP
MAE_Gomp <- mean(abs(Yobs_PP - exp(PrevPP)))
MAE_Gomp

    ○ Gráfico das Curvas Estimadas pelos Modelos Estocásticos e dos Pesos Observados
# Gráfico do Modelo Estocástico de Gompertz + BR
dados_plot <- data.frame(
  Idade = I,
  Peso_Observado = P,
  Peso_AjustadoG = Previsao_GEDE, # Gompertz
  Peso_AjustadoBR = Previsao_BR # Gompertz)
grafico <- ggplot(data = dados_plot, aes(x = Idade)) +
  geom_point(aes(y = Peso_Observado, color = "Peso observado"), size = 2, size = 0.7) + # Pontos
  geom_line(aes(y = Peso_AjustadoG, color = "MEG (sigma=0)"), size = 1, alpha = 0.7) + # Curva
  geom_line(aes(y = Peso_AjustadoBR, color = "MEBR (sigma=0)"), size = 1, alpha = 0.7) + # Curva
  scale_color_manual(
    values = c("Peso observado" = "black", "MEG (sigma=0)" = "red", "MEBR (sigma=0)" = "blue"),
    # Define as cores
    name = "Legenda" # Título da legenda
  ) +
  labs(
    # title = "Modelo Estocástico de Gompertz",
    x = "Idade do animal (Anos)",
    y = "Peso do animal (kg)",
    # subtitle = "Ajuste do Modelo Estocástico de Gompertz + BR aos Dados Observados"
  ) +
  theme_minimal() +
  theme(
    plot.title = element_text(hjust = 0.5, size = 16, face = "bold"),
    plot.subtitle = element_text(hjust = 0.5, size = 12),
    axis.title = element_text(size = 14),
    axis.text = element_text(size = 12),
    legend.position = "bottom" # Define a posição da legenda
  )

# Apresentar o gráfico
print(grafico)
ggsave("CurvaEstimada_Estocatico.png", grafico, width = 9, height = 6, dpi = 500)

```

```

    ○ Gráfico das Curvas Estimadas pelos Modelos Determinísticos e dos Pesos
    Observados
# Gráfico do Modelo Determinístico
dados_plot <- data.frame(Idade = I, Peso_Observado = P,
  Peso_AjustadoV = predicted_VD, # Verhulst Det
  Peso_AjustadoG = predicted_GD, # Gompertz Det
  Peso_AjustadoBR = predicted_BR # BR Det)
grafico <- ggplot(data = dados_plot, aes(x = Idade)) +
  geom_point(aes(y = Peso_Observado, color = "Peso observado"), size = 2, size = 0.7) + # Pontos
  geom_line(aes(y = Peso_AjustadoV, color = "Peso ajustado Verhulst"), size = 1, alpha = 0.7) + # Curva
  geom_line(aes(y = Peso_AjustadoG, color = "Peso ajustado Gompertz"), size = 1, alpha = 0.7) + # Curva
  geom_line(aes(y = Peso_AjustadoBR, color = "Peso ajustado BR"), size = 1, alpha = 0.7) + # Curva
  scale_color_manual(
    values = c("Peso observado" = "black", "Peso ajustado Verhulst" = "red", "Peso ajustado Gompertz" = "blue", "Peso ajustado BR" = "green"),
    # Define as cores
    name = "Legenda" # Título da legenda
  ) +
  labs(
    # title = "Modelo Determinístico",
    x = "Idade do animal (Anos)",
    y = "Peso do animal (kg)",
    # subtitle = "Ajuste do Modelo Determinístico aos Dados Observados"
  ) +
  theme_minimal() +
  theme(
    plot.title = element_text(hjust = 0.5, size = 16, face = "bold"),
    plot.subtitle = element_text(hjust = 0.5, size = 12),
    axis.title = element_text(size = 14),
    axis.text = element_text(size = 12),
    legend.position = "bottom" # Define a posição da legenda
  )

```

```

geom_line(aes(y = Peso_AjustadoV, color = "MDV"), size = 1, alpha = 0.7) + # Curva ajustada
M det verhulst
geom_line(aes(y = Peso_AjustadoG, color = "MDG"), size = 1, alpha = 0.7) + # Curva ajustada
M det Gompertz
geom_line(aes(y = Peso_AjustadoBR, color = "MDBR"), size = 1, alpha = 0.7) + # Curva ajustada
M det BR
scale_color_manual(
values = c("Peso observado" = "black", "MDV" = "red", "MDG" = "blue", "MDBR" = "green"),
# Define as cores
name = "Legenda" # Título da legenda
) + labs( # title = "Modelos Determinístico",
x = "Idade do animal (Anos)",
y = "Peso do animal (kg)",
# subtitle = "Ajuste dos Modelos Determinístico aos Dados Observados") +
theme_minimal() + theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size = 16, face = "bold"),
plot.subtitle = element_text(hjust = 0.5, size = 12), axis.title = element_text(size = 14),
axis.text = element_text(size = 12), legend.position = "bottom" # Define a posição da legenda)
grafico
ggsave("CurvaEstimada_Deterministico.png", grafico, width = 9, height = 6, dpi = 500)

```

- **Gráfico de Previsão de Longo Prazo do Modelo Determinístico e Estocástico**

```

# Preparar dados de previsão para gráfico de longo prazo
Testim <- 15
Tempo <- (length(P) - Testim)
Dados_LP <- data.frame( Idade = I[(Tempo+1):m], Peso_Observado = P[(Tempo+1):m],
Peso_MGE_LP = c(Previsao_GEDE_LP), Peso_MBRE_LP = c(Previsao_BR_LP))
#Gráfico de modelo estocástico
grafico <- ggplot(data = Dados_LP, aes(x = Idade)) + geom_point(aes(y = Peso_Observado, color =
"Peso observado"), size = 2, size = 0.7) + # Pontos observados
geom_line(aes(y = Peso_MGE_LP, color = "MEG"), size = 1, alpha = 0.7) + # Curva ajustada
MEG
geom_line(aes(y = Peso_MBRE_LP, color = "MEBR"), size = 1, alpha = 0.7) + # Curva ajustada
MEBR
scale_color_manual(
values = c("Peso observado" = "black", "MEG" = "red", "MEBR" = "blue"), # Define as cores
name = "Legenda" # Título da legenda) + labs(
# title = "Modelo Estocástico",
x = "Idade do animal (Anos)",
y = "Peso do animal (kg)",
) + theme_minimal() + theme( plot.title = element_text(hjust = 0.5, size = 16, face = "bold"),
plot.subtitle = element_text(hjust = 0.5, size = 12), axis.title = element_text(size = 14), axis.text =
element_text(size = 12), legend.position = "bottom" # Define a posição da legenda)

# Apresentar o gráfico
print(grafico)
ggsave("CurvaLongoPrazo_Estocatico.png", grafico, width = 9, height = 6, dpi = 500)

# Preparar dados para o gráfico determinístico
Dados_LP <- data.frame(Idade = I[(Tempo+1): m], Peso_Observado = P[(Tempo+1):m],
Peso_MVD_LP = c(Pred_VD), Peso_MGD_LP = c(Pred_GD), Peso_MBRD_LP = c(Pred_BR))

#Gráfico de modelo determinístico
grafico <- ggplot(data = Dados_LP, aes(x = Idade)) +

```

```

geom_point(aes(y = Peso_Observado, color = "Peso observado"), size = 2, size = 0.7) + # Pontos
observados
geom_line(aes(y = Peso_MVD_LP, color = "MDV"), size = 1, alpha = 0.7) + # Curva
ajustada M det verhulst
geom_line(aes(y = Peso_MGD_LP, color = "MDG"), size = 1, alpha = 0.7) + # Curva ajustada M
det Gompertz
geom_line(aes(y = Peso_MBRD_LP, color = "MDBR"), size = 1, alpha = 0.7) + # Curva ajustada
M det BR
scale_color_manual(values = c("Peso observado" = "black", "MDV" = "red", "MDG" = "blue",
"MDBR" = "green"), # Define as cores
name = "Legenda" # Título da legenda) + labs(# title = "Modelo Determinísticos",
x = "Idade do animal (Anos)",
y = "Peso do animal (kg)",
) + theme_minimal() + theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size = 16, face =
"bold"), plot.subtitle = element_text(hjust = 0.5, size = 12), axis.title = element_text(size =
14), axis.text = element_text(size = 12), legend.position = "bottom" # Define a posição da legenda)

# Apresentar o gráfico
print(grafico)
ggsave("CurvaLongoPrazo_Deterministico.png", grafico, width = 9, height = 6, dpi = 500)

# Preparar dados para o gráfico das curvas determinística e estocástica
Dados_LP <- data.frame(Idade = I[(Tempo+1):m], Peso_Observado = P[(Tempo+1):m],
Peso_MVD_LP = c(Pred_VD), Peso_MGD_LP = c(Pred_GD), Peso_MBRD_LP = c(Pred_BR),
Peso_MGE_LP = c(Previsao_GEDE_LP), Peso_MBRE_LP = c(Previsao_BR_LP))

# Gráfico com curvas dos modelos determinísticos e estocásticos
grafico <- ggplot(data = Dados_LP, aes(x = Idade)) +
geom_point(aes(y = Peso_Observado, color = "Peso observado"), size = 2, size = 0.7) + # Pontos
observados
geom_line(aes(y = Peso_MGE_LP, color = "MEG"), size = 1, alpha = 0.7) + # Curva ajustada
MEG
geom_line(aes(y = Peso_MBRE_LP, color = "MEBR"), size = 1, alpha = 0.7) + # Curva ajustada
MEBR
geom_line(aes(y = Peso_MVD_LP, color = "MDV"), size = 1, alpha = 0.7) + # Curva ajustada M
det verhulst
geom_line(aes(y = Peso_MGD_LP, color = "MDG"), size = 1, alpha = 0.7) + # Curva ajustada M
det Gompertz
geom_line(aes(y = Peso_MBRD_LP, color = "MDBR"), size = 1, alpha = 0.7) + # Curva ajustada
M det BR
scale_color_manual(values = c("Peso observado" = "black", "MEG" = "purple", "MEBR" =
"orange", "MDV" = "red", "MDG" = "blue", "MDBR" = "green"), # Define as cores
name = "Legenda" # Título da legenda) + labs(
# title = "Todos os modelos",
x = "Idade do animal (Anos)",
y = "Peso do animal (kg)", )
+ theme_minimal() + theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size = 16, face = "bold"),
plot.subtitle = element_text(hjust = 0.5, size = 12), axis.title = element_text(size = 14),
axis.text = element_text(size = 12), legend.position = "bottom" # Define a posição da legenda)

# Apresentar o gráfico
print(grafico)
ggsave("CurvaLongoPrazo_All.png", grafico, width = 9, height = 6, dpi = 500)

```

- **Gráfico de Previsão de Curto Prazo (Passo a Passo) do Modelo Determinístico e Estocástico**

```

# Preparar dados de previsão para gráfico de longo prazo
Testim <- 15
Tempo <- (length(P) - Testim)
Dados_PP <- data.frame( Idade = I[(Tempo+1 ):m],Peso_Observado = P[(Tempo+1 ):m],
Peso_MGE_PP = c(Previsao_GEDE_PP),Peso_MBRE_PP = c(Previsao_BR_PP))

# Gráfico de modelo estocástico
grafico <- ggplot(data = Dados_PP, aes(x = Idade)) +
  geom_point(aes(y = Peso_Observado, color = "Peso observado"), size = 2, size = 0.7) + # Pontos
  geom_line(aes(y = Peso_MGE_PP, color = "MEG"), size = 1, alpha = 0.7) + # Curva ajustada
  MEG
  geom_line(aes(y = Peso_MBRE_PP, color = "MEBR"), size = 1, alpha = 0.7) + # Curva ajustada
  MEBR
  scale_color_manual(
  values = c("Peso observado" = "black", "MEG" = "red", "MEBR" = "blue"), # Define as cores
  name = "Legenda" # Título da legenda
  ) +labs(
  # title = "Modelo Estocástico",
  x = "Idade do animal (Anos)",
  y = "Peso do animal (kg)",
  ) +theme_minimal() +theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size = 16, face =
  "bold"),plot.subtitle = element_text(hjust = 0.5, size = 12),axis.title = element_text(size =
  14),axis.text = element_text(size = 12),legend.position = "bottom" # Define a posição da legenda)

# Apresentar o gráfico
print(grafico)
ggsave("CurvaPasso_Estocatico.png", grafico, width = 9, height = 6, dpi = 500)

# Preparar dados para o gráfico determinístico
Dados_LP <- data.frame(Idade = I[(Tempo+1 ):m],Peso_Observado = P[(Tempo+1 ):m],
Peso_MVD_PP=c(PredVerhulstPP),Peso_MGD_PP=c(PredGompPP), Peso_MBRD_PP =
c(Pred_BR_PP))

# Gráfico de modelo determinístico
grafico <- ggplot(data = Dados_LP, aes(x = Idade)) +
  geom_point(aes(y = Peso_Observado, color = "Peso observado"), size = 2, size = 0.7) + # Pontos
  geom_line(aes(y = Peso_MVD_PP, color = "MDV"), size = 1, alpha = 0.7) + # Curva ajustada M
  det verhulst
  geom_line(aes(y = Peso_MGD_PP, color = "MDG"), size = 1, alpha = 0.7) + # Curva ajustada M
  det Gompertz
  geom_line(aes(y = Peso_MBRD_PP, color = "MDBR"), size = 1, alpha = 0.7) + # Curva
  ajustada M det BR
  scale_color_manual(values = c("Peso observado" = "black", "MDV" = "red", "MDG" "blue",
  "MDBR" = "green"), # Define as cores
  name = "Legenda" # Título da legenda) +labs(
  # title = "Modelo determinístico",
  x = "Idade do animal (Anos)",
  y = "Peso do animal (kg)",
  ) +theme_minimal()

```

```

theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size = 16, face = "bold"), plot.subtitle = element_text(hjust = 0.5, size = 12), axis.title = element_text(size = 14), axis.text = element_text(size = 12), legend.position = "bottom" # Define a posição da legenda)
# Apresentar o gráfico
print(grafico)
ggsave("CurvaPasso_Deterministico.png", grafico, width = 9, height = 6, dpi = 500)

# Preparar dados para o gráfico das curvas determinística e estocástica
Dados_LP <- data.frame(Idade = I[(Tempo+1):m], Peso_Observado = P[(Tempo+1):m],
Peso_MGE_PP = c(Previsao_GEDE_PP), Peso_MBRE_PP = c(Previsao_BR_PP),
Peso_MVD_PP = c(PredVerhulstPP), Peso_MGD_PP = c(PredGompPP),
Peso_MBRD_PP = c(Pred_BR_PP))

# Gráfico com curvas dos modelos determinísticos e estocásticos
grafico <- ggplot(data = Dados_LP, aes(x = Idade)) +
geom_point(aes(y = Peso_Observado, color = "Peso observado"), size = 2, size = 0.7) + # Pontos observados
geom_line(aes(y = Peso_MGE_PP, color = "MEG"), size = 1, alpha = 0.7) + # Curva ajustada MEG
geom_line(aes(y = Peso_MBRE_PP, color = "MEBR"), size = 1, alpha = 0.7) + # Curva ajustada MEBR
geom_line(aes(y = Peso_MVD_PP, color = "MDV"), size = 1, alpha = 0.7) + # Curva ajustada M det verhulst
geom_line(aes(y = Peso_MGD_PP, color = "MDG"), size = 1, alpha = 0.7) + # Curva ajustada M det Gompertz
geom_line(aes(y = Peso_MBRD_PP, color = "MDBR"), size = 1, alpha = 0.7) + # Curva ajustada M det BR
scale_color_manual(values = c("Peso observado" = "black", "MEG" = "purple", "MEBR" = "orange", "MDV" = "red", "MDG" = "blue", "MDBR" = "green"), # Define as cores
name = "Legenda" # Título da legenda) + labs(
# title = "Todos os modelos",
x = "Idade do animal (Anos)",
y = "Peso do animal (kg)") +
theme_minimal() + theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size = 16, face = "bold"),
plot.subtitle = element_text(hjust = 0.5, size = 12), axis.title = element_text(size = 14),
axis.text = element_text(size = 12),
legend.position = "bottom" # Define a posição da legenda)

# Apresentar o gráfico
print(grafico)
ggsave("CurvaPasso_All.png", grafico, width = 9, height = 6, dpi = 500)

```

## Referências Bibliográficas

Braumann, C. A. (2005). *Introdução às equações diferenciais Estocásticas e Aplicações*. Sociedade Portuguesa de Estatística, Ericeira, Portugal, 190.

Carolino, N.; Pais, J.; Henriques, N. & Rodrigues, S. (2016). Catálogo de touros 2016: Avaliação genética da raça bovina mertolenga. Consultado em 01 set. 2020. Disponível em [http://www.mertolenga.com/Catalogo\\_2016.pdf](http://www.mertolenga.com/Catalogo_2016.pdf)

Direção Geral de Agricultura e Desenvolvimento Rural: Produtos tradicionais portugueses Carne Mertolenga DOP. Consultado em 08 ago. 2020. Disponível em <https://tradicional.dgadr.gov.pt/pt/cat/carne/carne-de-bovino/233-carne-mertolenga-dop>

Filipe, P. A. (2011). *Equações diferenciais estocásticas na modelação do crescimento individual em ambiente aleatório*.

Fonseca, J. R. (1994). *Introdução à estatística matemática: aplicações*.

Januario, A. P. F. (2021). *Análise estatística da produção de vitelão Mertolengo* (Master's thesis, Universidade de Évora).

Pinheiro, A. D. N. C. F. (2021). *Modelos de crescimento populacional—teoria e aplicação a dados demográficos de São Tomé e Príncipe* (Master's thesis, Universidade de Lisboa (Portugal)).