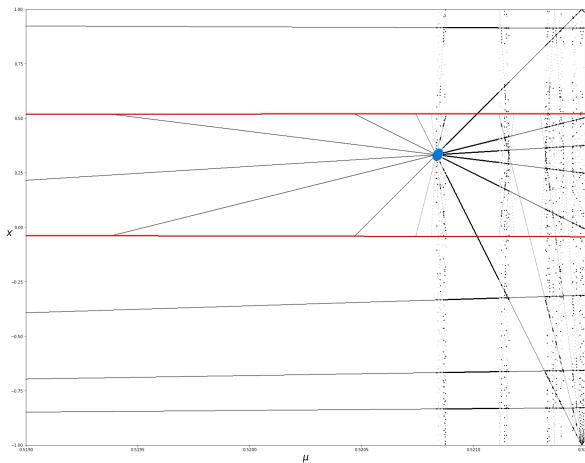


# Estudo de atratores em sistemas dinâmicos não autónomos gerados pela iteração sequencial de funções tendo com um segmento constante



Sumário pormenorizado da lição de síntese no âmbito das Provas de Agregação em Matemática

Luís Manuel Ferreira da Silva

Setembro 2023

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Iteração sequencial de funções tenda com um segmento constante</b>	<b>7</b>
2.1	Iteração sequencial . . . . .	7
2.2	Dinâmica simbólica . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Atratores não autónomos em iterações segundo um padrão</b>	<b>11</b>
3.1	Caso maximal . . . . .	13
3.2	Caso não maximal . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Invariante de amassamento, incrementos de período e atratores de Milnor em iterações segundo um padrão</b>	<b>25</b>
4.1	Invariante de amassamento . . . . .	25
4.2	Atratores de Milnor e incrementos de período . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Atratores não autónomos locais, para sequências genéricas <math>\lambda \in [-1, 1]^{\mathbb{N}_0}</math></b>	<b>41</b>
<b>6</b>	<b>Discussão e conclusões</b>	<b>49</b>



# Capítulo 1

## Introdução

Nos últimos anos, o estudo da iteração de funções seccionalmente diferenciáveis tem atraído a atenção de vários autores (ver [2] e referências lá contidas). Isto deve-se em parte ao facto de muitos processos reais, caracterizados por mudanças bruscas entre os estados, serem naturalmente representados por este tipo de funções. Uma classe particular de funções seccionalmente diferenciáveis são as funções com secções constantes, as quais se obtêm através da inserção de uma secção constante numa função unidimensional. Este procedimento, conhecido como controlo com limitadores simples, origina frequentemente a criação de uma órbita periódica super estável e tem sido usado no controlo do caos em sistemas dinâmicos unidimensionais, [4, 16, 27, 28, 29], com aplicações em áreas tão distintas como dinâmica cardíaca, [10, 11], telecomunicações e conversores elétricos, [29, 12], dinâmica de populações, [8], ou dinâmica de mercados [7].

Frequentemente deparamo-nos com situações de modelação em que as equações de evolução incluem parâmetros explicitamente dependentes do tempo. Este é o caso, por exemplo, quando pretendemos modelar populações com forçamentos dependentes do tempo, provenientes de estratégias de regulação ou controlo de populações. Nestas situações entramos no campo dos sistemas dinâmicos não autónomos. Com base nesta premissa, alguns trabalhos recentes abordam até que ponto é possível estender a teoria já existente no caso autónomo, à iteração alternada de duas funções reais, [18, 25, 26] ou complexas [5, 6].

Nesta lição vamos estudar sistemas não autónomos discretos provenientes de equações às diferenças não autónomas do tipo

$$x_{k+1} = f_{\lambda_k}(x_k)$$

em que  $f_\lambda$  é uma família de funções reais de variável real, dependentes do parâmetro

real  $\lambda$  e  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  uma sequência de parâmetros. Este tipo de sistemas é altamente relevante para as aplicações, por exemplo para modelar estratégias de regulação ou de controlo através da sequência  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ . Se a sequência  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  for periódica, então dizemos que o sistema não autónomo correspondente é periódico.

Nesta lição, vamos considerar famílias de funções tenda com um segmento constante,

$$f_u(x) = \min\{u, T(x)\}$$

em que

$$T(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ -2x + 1 & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

é a função tenda no intervalo  $[-1, 1]$  e  $u \in [-1, 1]$  é o limitador. Se  $u = 1$  então  $f_\lambda = T$ .

Tanto quanto é do conhecimento deste autor, o primeiro trabalho sobre a iteração de funções deste tipo remonta aos anos 70 do século passado com o famoso trabalho de Metropolis, Stein e Stein, [13]. Mais recentemente, em [18], estas funções foram usadas para demonstrar uma conjectura de Milnor, sobre a conectividade dos conjuntos isentrópicos num espaço de polinómios de grau quatro simétricos.

Em [25] estudámos o esqueleto de bifurcação no caso em que  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  é uma sequência 2-periódica, descrevendo a estrutura de bifurcação local ao longo e na vizinhança dos ossos.

Em [26], novamente considerando  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  2-periódica, introduzimos o conceito de renormalização no contexto não autónomo periódico, interpretámo-lo ao nível da dinâmica simbólica, através de uma versão apropriada de produto estrela e calculámos as taxas de convergência de sequências de parâmetros correspondentes a consecutivos produtos estrela. Definimos também sequências de parâmetros correspondentes a sequências inarmónicas de duplicações de período e calculámos as taxas de convergência correspondentes. Em ambos os casos demonstrámos que as taxas de convergência são independentes do ponto inicial, observando assim propriedades de universalidade do tipo observado por Feigenbaum em sistemas autónomos, ver [9].

Em [19] foi introduzida a ideia de padrão de iteração. Os autores consideraram o esquema de iteração  $x_{n+1} = f_{c_n}(x_n)$ , para a família logística complexa  $f_c(z) = z^2 + c$ ,  $z \in \mathbb{C}$ ,  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in \{a, b\}^{\mathbb{N}_0}$ ,  $a, b \in \mathbb{C}$ . Como a sequência de parâmetros só pode conter dois elementos,  $a$  ou  $b$ , então pode ser identificada com uma sequência binária  $s$ , o padrão de iteração. Então os autores estudaram a forma como o padrão

de iteração  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$  afeta a topologia dos conjuntos de Julia e de Mandelbrot.

Em [22], considerámos sequências de parâmetros  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in \{u, 1\}^{\mathbb{N}_0}$ . Do ponto de vista dos limitadores, isto significa introduzir o limitador  $u$  apenas nos instantes  $i$  tais que  $s_i = 0$ , sendo  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$  o padrão de iteração. Considerando apenas padrões de iteração periódicos, estudámos os diagramas de bifurcação obtidos através da variação de  $u$  e a forma como o padrão  $s$  os altera. Estudámos ainda a existência de estruturas de auto semelhança originadas pelo produto estrela e de adição de período, que também descrevemos usando dinâmica simbólica.

Esta lição é baseada em [21], [23] e [24]. Em [23] e [24] considerámos a introdução de um limitador  $u$  segundo um padrão de iteração  $s$ . Em [23] estudámos a existência e coexistência de atratores locais e de Milnor não autónomos em função do par  $(u, s)$ . Em [24] estudámos os invariantes de amassamento  $K(u, s)$  para os pares  $(u, s)$  e descrevemos os limitadores correspondentes aos atratores de Milnor como limites de sequências de limitadores correspondentes a estruturas de incremento de período. Em [21], estudámos as perturbações sobre os limitadores que preservam os atratores locais e respetiva estrutura combinatória.

Depois de, no Capítulo 2, introduzirmos as funções tenda com um segmento constante, os sistemas dinâmicos não autónomos por elas gerados e respetiva dinâmica simbólica, no Capítulo 3, correspondente a [23], considerámos sequências de parâmetros  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in \{u, 1\}^{\mathbb{N}_0}$ . Definimos atratores locais não autónomos e atratores de Milnor não autónomos e estudámos a existência e coexistência destes atratores em função do limitador  $u$  e do padrão de iteração  $s$ . Os atratores de Milnor aqui estudados surgem quando a órbita do segmento constante fica presa numa órbita periódica repulsiva da função tenda. No Capítulo 4, obtido de [24], estudámos o surgimento dos parâmetros  $u$  correspondentes a estes atratores, como limite de sequências de parâmetros correspondentes a atratores locais associados a sequências de incrementos de período. Este tipo de estrutura, e correspondentes atratores de Milnor, foi observada no contexto autónomo em [1], na família de funções tenda com segmento constante, descontínuas. Neste Capítulo introduzímos ainda os invariantes de amassamento não autónomos e, para cada padrão de iteração  $s$ , estudámos as sequências simbólicas que podem ser invariantes de amassamento fixando  $s$ .

No Capítulo 5 estudámos perturbações sobre os limitadores. Definimos atratores não autónomos locais cíclicos dependentes de uma sequência simbólica  $X$  e estudámos as sequências genéricas  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  de parâmetros que preservam estes atratores.

Finalmente, terminamos com um Capítulo onde resumimos as principais conclusões deste trabalho e discutimos possíveis aplicações e generalizações.

Esta lição pode ser proferida, por exemplo, no contexto da unidade curricular "Seminário de Modelação Matemática" do terceiro semestre do Mestrado em Matemática Aplicada para a Indústria do ISEL. Sendo este, um mestrado com foco na Matemática Aplicada, seria adequado desafiar os alunos para explorar a aplicação das ideias aqui apresentadas em modelos como os introduzidos em [7] e [8].

Optámos por, no documento escrito, apresentar todas as demonstrações efetuadas nos trabalhos [21], [23] e [24], sobre os quais incide a lição e referir as restantes para a respetiva fonte.

# Capítulo 2

## Iteração sequencial de funções tenda com um segmento constante

Neste capítulo vamos introduzir as definições gerais de iteração sequencial e iteração segundo um padrão, bem como introduzir as ferramentas de dinâmica simbólica, unificando as definições e notações introduzidas em [21, 23, 24].

### 2.1 Iteração sequencial

Consideremos a função tenda  $T : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ , definida por

$$T(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ -2x + 1, & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}.$$

Para  $u \in [-1, 1]$  definimos a função tenda com um segmento constante,  $f_u(x) = \min\{u, T(x)\}$ , ou, de forma equivalente,

$$f_u(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{se } -1 \leq x < (u-1)/2 \\ u, & \text{se } (u-1)/2 \leq x \leq (1-u)/2 \\ -2x + 1, & \text{se } (1-u)/2 < x \leq 1 \end{cases}.$$

Se  $u = 1$ , então  $f_u(x) = T(x)$  para todos os  $x \in [-1, 1]$ .

**Definição 1.** Para uma sequência  $\lambda \in [-1, 1]^{\mathbb{N}_0}$  definimos a  $n$ -ésima iteração sequencial segundo  $\lambda$ , com valor inicial  $x \in [-1, 1]$  e instante inicial  $k$ , como

$$F_\lambda^n(x, k) = (f_{\lambda_{k+n-1}} \circ \dots \circ f_{\lambda_k})(x), \text{ se } n \geq 1$$

e

$$F_\lambda^0(x, k) = x \text{ para todos os } k.$$

Nos próximos dois capítulos vamos apenas considerar sequências  $\lambda$  tais que  $\lambda_i \in \{u, 1\}$  para todos os  $i \in \mathbb{N}_0$ , então a sequência de iteração  $\lambda$  fica totalmente identificada pelo par  $(u, s)$  em que  $s \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$  é tal que  $\lambda_i = u$  se e só se  $s_i = 0$ . Chamamos à sequência binária  $s$ , o *padrão de iteração*.

**Definição 2.** Para  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(u, s) \in [-1, 1] \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$  e  $(x, k) \in [-1, 1] \times \mathbb{N}_0$ , definimos a  $n$ -ésima iteração, segundo o padrão  $s$ , em  $x$  com instante inicial  $k$ , como

$$F_{(u,s)}^n(x, k) = (f_{\lambda_{k+n-1}} \circ \dots \circ f_{\lambda_k})(x), \text{ se } n \geq 1$$

e

$$F_{(u,s)}^0(x, k) = x,$$

em que

$$\lambda_i = \begin{cases} u & \text{se } s_i = 0 \\ 1 & \text{se } s_i = 1 \end{cases}.$$

Se  $s_i = 0$  (resp.  $s_i = 1$ ) para todos os  $i \in \mathbb{N}_0$  então a iteração segundo  $s$  corresponde à iteração de  $f_u$  (resp. de  $T$ ).

Temos então o espaço de fases estendido

$$[-1, 1] \times \mathbb{N}_0,$$

o espaço de parâmetros estendido

$$[-1, 1] \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$$

e a órbita segundo o parâmetro  $(u, s)$  de um ponto  $x \in [-1, 1]$  com instante inicial  $k \in \mathbb{N}_0$ ,

$$o_{(u,s)}(x, k) = (F_{(u,s)}^i(x, k))_{i \in \mathbb{N}_0}.$$

Na linguagem dos limitadores simples, este esquema de iteração corresponde, para cada par  $(u, s) \in [-1, 1] \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$ , a introduzir, na função tenda, o limitador  $u$  nos instantes  $i$  tais que  $s_i = 0$ .

## 2.2 Dinâmica simbólica

Sendo uma função tenda com um segmento constante, definida em três secções, vamos em seguida associar um símbolo a cada uma delas.

**Definição 3.** Dados  $u \in [-1, 1]$  e  $x \in [-1, 1]$ , o endereço de  $x$  relativamente ao parâmetro  $u$ , é dado por

$$ad_u(x) = \begin{cases} L, & \text{se } -1 \leq x < (u-1)/2 \\ C, & \text{se } (u-1)/2 \leq x \leq (1-u)/2 \\ R, & \text{se } (1-u)/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

Podemos agora associar a cada órbita uma sequência simbólica.

**Definição 4.** Para  $(u, s) \in [-1, 1] \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$  e  $(x, k) \in [-1, 1] \times \mathbb{N}_0$  definimos o itinerário de  $x$  com instante inicial  $k$  como sendo a sequência

$$I_{(u,s)}(x, k) = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0} : X_i = \begin{cases} ad_u(F_{(u,s)}^i(x, k)) & \text{se } s_{k+i} = 0, \\ ad_1(F_{(u,s)}^i(x, k)) & \text{se } s_{k+i} = 1 \end{cases}, \forall i \in \mathbb{N}_0.$$

Os itinerários das iterações segundo um padrão pertencem ao conjunto  $\Sigma$  das sequências infinitas  $X_0 X_1 \dots$  tais que  $X_j \in \{L, C, R\}$  para todos os  $j \in \mathbb{N}_0$ .

A notação  $(X_0 \dots X_{p-1})^n$ ,  $0 < n \leq +\infty$  representa a concatenação de  $n$  cópias da sequência finita  $X_0 \dots X_{p-1}$ . Se  $n = +\infty$  então  $(X_0 \dots X_{p-1})^\infty$  representa uma sequência  $p$ -periódica infinita.

Considerando a ordem natural  $L < C < R$  vamos em seguida introduzir uma relação de ordem em  $\Sigma$ :

Definimos

$$-L = R, \quad -C = C \quad e \quad -R = L.$$

Para  $X \in \Sigma$  e  $k \in \mathbb{N}_0$ , definimos o sinal

$$\epsilon_k(X) = \begin{cases} + & \text{se } \#\{X_j : 0 \leq j \leq k \text{ e } X_j = R\} \text{ for par} \\ - & \text{se } \#\{X_j : 0 \leq j \leq k \text{ e } X_j = R\} \text{ for ímpar.} \end{cases}.$$

Agora, para  $X, Y \in \Sigma$ ,  $X < Y$  se e só se  $X_0 < Y_0$  ou existe  $r \in \mathbb{N}$ , tal que  $X_j = Y_j$  para todos os  $j < r$  e  $\epsilon_{r-1}(X)X_r < \epsilon_{r-1}(Y)Y_r$ .

Para  $x \in [-1, 1]$ , denotamos por  $I_T(x)$  o itinerário de  $x$  através da função tenda,

$$I_T(x) = ad_1(x)ad_1(T(x))ad_1(T^2(x))\dots$$

Se  $T^i(x) \neq 0$  para todos os  $i = 0, \dots, k - 1$  então  $\epsilon_{k-1}(I_T(x)) = +$  se e só se  $T^k$  for estritamente crescente em  $x$  e  $\epsilon_{k-1}(I_T(x)) = -$  se e só se  $T^k$  for estritamente decrescente em  $x$ .

Se estivermos interessados apenas nos itinerários da função tenda  $T$ , então como  $T(0) = 1$ ,  $T^i(0) = -1$  para todos os  $i > 1$  e 0 é o único ponto com esta propriedade, os itinerários de  $T$  estão contidos no conjunto  $\Sigma' \subset \Sigma$  das sequências infinitas  $X_0X_1\dots$  tais que  $X_{i+1}X_{i+2}\dots = RL^\infty$  para algum  $i$ , se e só se  $X_i = C$ .

Seja  $\sigma : \Sigma' \rightarrow \Sigma'$ ,  $\sigma(X_0X_1\dots) = X_1X_2\dots$  a função avanço.

**Definição 5.** Uma sequência  $X \in \Sigma'$  diz-se maximal se  $\sigma^i(X) \leq X$  para todos os  $i \in \mathbb{N}$ .

O lema seguinte apresenta um resultado clássico de dinâmica simbólica, cuja demonstração pode ser consultada, por exemplo em [3].

**Lema 6.** Para quaisquer  $x, y \in [-1, 1]$ ,  $I_T(x) < I_T(y)$  se e só se  $x < y$ .

Consideremos agora a função  $\Phi : \Sigma' \rightarrow I$ , tal que  $\Phi(CRL^\infty) = 0$  e, para todos os  $X \in \Sigma' \setminus \{CRL^\infty\}$ ,

$$\Phi(X) = - \sum_{i=0}^{n-1} \epsilon_i(X) \frac{1}{2^{i+1}}, \quad (2.1)$$

onde  $n$  é tal que  $X_n = C$  e  $n = +\infty$  se  $X_i \neq C$  para todos os  $i \in \mathbb{N}$ .

As duas primeiras proposições do seguinte teorema foram demonstradas em [21] e a terceira em [24].

**Teorema 7.** Sejam  $T$  a função tenda,  $\sigma$  a função avanço e  $\Phi$  definida em 2.1, então, para todos os  $X \in \Sigma'$ , temos que:

1.  $X = I_T(\Phi(X))$ ;
2.  $\Phi(\sigma(X)) = T(\Phi(X))$ ;
3. Se  $X_n = C$  então  $T^n(\Phi(X)) = 0$ .

*Demonstração.* Os items (1) e (2) foram demonstrados em [21]. Para demonstrar (3), observamos que, se  $X = LCRL^\infty$  então  $\Phi(X) = -\frac{1}{2}$  e, se  $X = RCRL^\infty$  então  $\Phi(X) = \frac{1}{2}$  e em ambos os casos  $T(\Phi(X)) = 0$ . Por outro lado, se aplicarmos (2) indutivamente obtemos, para todos os  $i < n$ , que  $\Phi(\sigma^i(X)) = T^i(\Phi(X))$ , logo, como  $X_n = C$  implica que  $\sigma^{n-1}(X) \in \{LCRL^\infty, RCRL^\infty\}$  obtemos

$$T^n(\Phi(X)) = T(T^{n-1}(\Phi(X))) = T(\Phi(\sigma^{n-1}(X))) = 0.$$

□

# Capítulo 3

## Atratores não autónomos em iterações segundo um padrão

Os resultados deste capítulo foram publicados em [23].

No contexto não autónomo, os atratores e os repulsores vivem naturalmente no espaço de fases estendido. Para lidar com isto, em [17], Potzsche discutiu estes conceitos com base na ideia de conjunto não autónomo.

**Definição 8.** *Um conjunto não autónomo é um subconjunto  $\mathcal{A}$  do espaço de fases estendido  $[-1, 1] \times \mathbb{N}_0$ .*

Em [23], inspirados em [17] e em [20], introduzimos as seguintes definições de atrator.

**Definição 9.** *Seja  $\mathcal{A}$  um conjunto não autónomo. Diz-se que:*

- *A  $k$ -fibra de  $\mathcal{A}$  é*

$$\mathcal{A}(k) = \{x \in [-1, 1] : (x, k) \in \mathcal{A}\}.$$

- *A projeção de fibra de  $\mathcal{A}$  é*

$$P(\mathcal{A}) = \cup_{k \in \mathbb{N}_0} \mathcal{A}(k).$$

- *$\mathcal{A}$  tem projeção fechada se  $P(\mathcal{A})$  for fechado.*
- *$\mathcal{A}$  é  $p$ -cíclico se existir  $k$  tal que, para todos os  $k' > k$ ,  $\mathcal{A}(k' + p) = \mathcal{A}(k')$ .*

**Definição 10.** Sejam  $\mathcal{A}$  um conjunto não autônomo,  $(u, s) \in [-1, 1] \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$  e  $F_{(u,s)}^n$  a iteração sequencial da Definição 2. Dizemos que:

- $\mathcal{A}$  é  $(u, s)$ -invariante se existir  $k$  tal que, para todos os  $k' > k$ ,  $F_{(u,s)}(A(k'), k') \subset A(k' + 1)$ .
- $\mathcal{A}$  é  $(u, s)$ -localmente atrativo se for  $(u, s)$ -invariante e existir  $l$  tal que, para cada  $l' > l$ , existir uma vizinhança  $A'(l')$  de  $A(l')$  em  $[-1, 1]$  tal que  $F_{(u,s)}^n(A'(l'), l') \subset A(l' + n)$  para algum  $n$ .

**Definição 11** (Atrator local). Sejam  $\mathcal{A}$  um conjunto não autônomo e  $(u, s) \in [-1, 1] \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$ . Dizemos que  $\mathcal{A}$  é um  $(u, s)$ -atrator local se tiver projeção fechada, for  $(u, s)$ -localmente atrativo e não existir nenhum conjunto não autônomo  $\mathcal{A}'$  com  $P(\mathcal{A}') \subsetneq P(\mathcal{A})$  que verifique estas propriedades.

Dado o intervalo

$$I_u = \left[ \frac{u-1}{2}, \frac{1-u}{2} \right],$$

se existir  $p$  tal que  $T^{p-1}(u) \in I_u$  e  $s \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$  for tal que  $s_{k+pn} = 0$  para qualquer  $n \in \mathbb{N}_0$  então, frequentemente, o conjunto  $\{u, T(u), \dots, T^{p-1}(u)\}$  é a projeção de um  $(u, s)$ -atrator local  $p$ -cíclico. Contudo os  $(u, s)$ -atratores locais não constituem o único tipo de atratores. De facto, se  $u$  for transformado, após algumas iteradas, num ponto de uma órbita periódica instável, então esta órbita vai atrair um conjunto com medida de Lebesgue positiva, mas possivelmente não vai atrair nenhuma vizinhança de si própria. Estas órbitas foram batizadas em [1] como Atratores de Milnor.

Em [14], no contexto autônomo, Milnor discutiu a ideia de atrator num sentido mais fraco, nomeadamente como um conjunto invariante fechado  $A$  cujo conjunto estável  $W^s(A)$  tem medida positiva e não existe nenhum subconjunto  $A' \subsetneq A$  tal que  $W^s(A')$  coincide com  $W^s(A)$  a menos de um conjunto com medida nula, ver [1].

Vamos em seguida adaptar este conceito ao contexto não autônomo.

Sejam  $\mu$  a medida de Lebesgue em  $[-1, 1]$  e, para cada  $x \in [-1, 1]$  e  $A \subset [-1, 1]$ ,  $d(x, A) = \inf_{a \in A} |x - a|$ .

**Definição 12.** Sejam  $(u, s) \in [-1, 1] \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$  e  $\mathcal{A}$  um conjunto não autônomo. Definimos o  $(u, s)$ -conjunto estável de  $\mathcal{A}$  com instante inicial  $k$ , como

$$W^s(\mathcal{A}, k) = \{x \in [-1, 1] : \lim_{n \rightarrow +\infty} d(F_{(u,s)}^n(x, k), \mathcal{A}(k+n)) = 0\}.$$

Vamos em seguida definir um atrator de Milnor não autónomo, como sendo um conjunto não autónomo, invariante, com projeção fechada e minimal, cujos conjuntos estáveis tenham sempre medida positiva, a partir de um dado instante  $k$ .

**Definição 13** (Atrator de Milnor). *Para  $(u, s) \in [-1, 1] \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$ , um  $(u, s)$ -atrator de Milnor é um conjunto não autónomo, com projeção fechada e  $(u, s)$ -invariante,  $\mathcal{A}$ , para o qual existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que, para todos os  $k' > k$ ,  $\mu(W^s(\mathcal{A}, k')) > 0$  e não existe nenhum outro conjunto não autónomo  $\mathcal{A}'$  com  $P(\mathcal{A}') \subsetneq P(\mathcal{A})$ , que verifica as mesmas propriedades.*

**Nota 14.** Vamos referir-nos à caracterização "não existe nenhum outro conjunto não autónomo  $\mathcal{A}'$  com  $P(\mathcal{A}') \subsetneq P(\mathcal{A})$ , que verifica as mesmas propriedades" nas Definições 11 e 13, como  $\mathcal{A}$  tendo projeção minimal.

**Nota 15.** Um  $(u, s)$ -atrator local é um  $(u, s)$ -atrator de Milnor, mas o recíproco não é necessariamente verdade.

De agora em diante, consideramos  $u \in [-1, 1[$ , garantindo assim que  $\mu(I_u) > 0$ .

### 3.1 Caso maximal

Em primeiro lugar, vamos estudar o caso em que  $U = I_T(u)$  é uma sequência maximal. Pelo Lema 6 isto implica que  $u > T^i(u)$  para qualquer  $i$  tal que  $T^i(u) \neq u$ . Então, para qualquer  $i$ ,  $T^i(u) \notin I_u$  e  $f_u(T^i(u)) = T(T^i(u)) = T^{i+1}(u)$ , isto significa que, se  $U = I_T(u)$  é maximal então no conjunto correspondente à órbita  $o_T(u) = \{T^i(u) : i \in \mathbb{N}_0\}$  não faz diferença aplicar  $f_u$  ou  $T$ .

Para um padrão de iteração  $s \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$ , denotamos o conjunto dos instantes em que utilizamos  $f_u$  na iteração, como

$$Z_s = \{i : s_i = 0\}.$$

Sejam  $X \in \Sigma'$  uma sequência  $p$ -periódica,

$$O(X) = \{\Phi(\sigma^i(X)), i = 0, \dots, p - 1\}$$

a projeção da órbita  $o_T(\Phi(X))$ , de  $\Phi(X)$  por  $T$  e  $\mathcal{O}(X)$  o conjunto não autónomo tal que  $\mathcal{O}(X)(i) = O(X)$  para todos os  $i \in \mathbb{N}_0$  ( $\sigma^0(X) = X$ ). Temos então o seguinte resultado.

**Teorema 16** (Atrator de Milnor). *Sejam  $X \in \Sigma'$  uma sequência  $p$ -periódica e  $(u, s) \in [-1, 1] \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$  tais que:*

1.  $\exists_{k>0} : T^k(u) \in \mathcal{O}(X)$ .
2.  $I_T(u)$  é maximal.
3.  $\#(Z_s) = +\infty$ .

*Então  $\mathcal{O}(X)$  é um  $(u, s)$ -atrator de Milnor.*

*Demonstração.* Como  $X$  é periódica então  $\mathcal{O}(X)$  tem projeção fechada.

Da Condição 1.  $\mathcal{O}(X) \subset o_T(u)$ , logo da Condição 2. e do Teorema 7, para todos os  $i, j \in \mathbb{N}_0$ ,

$$F_{(u,s)}(\Phi(\sigma^i(X)), j) = T(\Phi(\sigma^i(X))) = \Phi(\sigma^{i+1}(X))$$

e  $\mathcal{O}(X)$  é  $(u, s)$ -invariante. Pela sua definição, nenhum outro conjunto não autônomo  $\mathcal{A}$  tal que  $P(\mathcal{A}) \subsetneq P(\mathcal{O}(X))$  poderia ser  $(u, s)$ -invariante, logo  $\mathcal{O}(X)$  tem projeção minimal.

Para qualquer  $m \in \mathbb{N}$ , seja  $t_m = \min\{i \in \mathbb{N} : m + i \in Z_s\}$ ,  $t_m$  existe devido à Condição 3.. Então, da Condição 2., para qualquer  $x \in T^{-t_m}(I_u)$

$$F_{(u,s)}^{t_m+k+1}(x, m) = T^k(u) \in \mathcal{O}(X),$$

logo  $T^{-t_m}(I_u) \subset W^s(\mathcal{O}(X), m)$  e, como  $u < 1$  então  $T^{-t_m}(I_u)$  tem medida positiva.  $\square$

O próximo resultado estabelece as condições para que, no caso em que  $u$  seja periódico em relação a  $T$  e  $I_T(u)$  seja maximal, a órbita  $o_T(u)$  seja a projeção de um atrator local.

**Teorema 17** (Atrator local). *Seja  $(u, s) \in [-1, 1] \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$  tal que:*

1. Existe  $p$ , mínimo, tal que  $T^p(u) = u$ .
2.  $U = I_T(u)$  é maximal.
3. Existe  $j$  tal que  $s_{j+np} = 0$  para qualquer  $n \in \mathbb{N}_0$ .

*Então o conjunto não autônomo  $\mathcal{A}$  tal que  $\mathcal{A}(i) = \emptyset$  se  $i \leq j$  e  $\mathcal{A}(j+i+1) = \{T^i(u)\}$  para todos os  $i \in \mathbb{N}_0$  é um  $(u, s)$ -atrator local se e só se o sinal  $\epsilon_{p-1}(U) = -$ . Nesse caso, este  $(u, s)$ -atrator local é  $p$ -cíclico.*

*Demonstração.* Como  $T^p(u) = u$ ,  $\mathcal{A}$  tem projeção fechada. Como  $U$  é maximal, então  $F_{(u,s)}(T^i(u), k) = T^{i+1}(u)$  para todos os  $i, k$ , logo  $\mathcal{A}$  é  $(u, s)$ -invariante e isto implica também que tem projeção minimal.

Vamos agora demonstrar que  $\mathcal{A}$  é  $(u, s)$ -localmente atrativo se e só se o sinal  $\epsilon_{p-1}(U) = -$ .

$U$  maximal e  $p$ -periódico implica que  $T^{p-1}(u)$  é uma pré-imagem de  $u$  através de  $T$ , logo  $T^{p-1}(u) \in \left\{ \frac{u-1}{2}, \frac{1-u}{2} \right\}$ .

Vamos fazer a demonstração apenas considerando  $T^{p-1}(u) = \frac{u-1}{2}$ , uma vez que o caso  $T^{p-1}(u) = \frac{1-u}{2}$  segue de forma análoga. Vamos também supor sem perda de generalidade que  $j = 0$  e consequentemente  $s_{np} = 0$  para todos os  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Suponhamos primeiro que  $\epsilon_{p-1}(U) = -$ . Se  $x \in I_u = \left] \frac{u-1}{2}, \frac{1-u}{2} \right[$  então  $F_{(u,s)}(x, np) = u$  para todos os  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Como  $T^{p-1}(u) = \frac{u-1}{2}$  então  $U_{p-1} = L$ , logo  $\epsilon_{p-2}(U) = \epsilon_{p-1}(U) = -$  e  $T^{p-1}$  é decrescente e sobrejetiva numa vizinhança de  $u$ , daí, nesta vizinhança existe  $a < u$  tal que  $T^{p-1}(a) = \frac{1-u}{2}$ . De forma análoga, nesta vizinhança existe  $b > u$  tal que  $T^p(b) = a$ .

Consideremos agora a vizinhança de  $\mathcal{A}(i+1+np)$ ,  $\mathcal{A}'(i+1+np) = T^i([a, b])$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$  e  $i = 0, \dots, p-1$ .

Por um lado, como  $U$  é maximal, então

$$F_{(u,s)}^{p-1}([a, u], 1) = T^{p-1}([a, u]) = [T^{p-1}(u), T^{p-1}(a)] = \left[ \frac{u-1}{2}, \frac{1-u}{2} \right]$$

e, como  $s_p = 0$ ,

$$F_{(u,s)}^p([a, u], 1) = f_u \left( F_{(u,s)}^{p-1}([a, u], 1) \right) = \{u\}.$$

Por outro lado,

$$T^{p-1}(b) < T^{p-1}(u) = \frac{u-1}{2},$$

logo

$$F_{(u,s)}^p([u, b[, 1) = ]a, u]$$

e

$$F^{2p}([u, b[, 1) = \{u\}.$$

Concluimos que  $\mathcal{A}$  é  $(u, s)$ -localmente atrativo. A ciclicidade de  $\mathcal{A}$  resulta imediatamente da sua definição.

Se  $\epsilon_{p-1}(U) = +$ , então como  $\epsilon_{p-2}(U) = \epsilon_{p-1}(U) = +$ ,  $T^{p-1}$  é crescente numa vizinhança de  $u$ , logo para qualquer  $n$ , se  $x < u$  estiver suficientemente próximo de  $u$ , então  $T^{np-1}(x) < \frac{u-1}{2}$  e  $F_{(u,s)}^{np}(x, 1) = T^{np}(x) < u$ .

□

**Nota 18.** Em qualquer dos casos,  $\epsilon_p(U) = \pm$ , do teorema anterior concluimos que o conjunto não autônomo  $\mathcal{A}$  tal que  $\mathcal{A}(i) = \{u, T(u), \dots, T^{p-1}(u)\}$  para todos os  $i$ , é um atrator de Milnor.

Concluímos das definições 11 e 13 que, na iteração segundo um padrão de funções tenda com segmento constante, qualquer  $(u, s)$ -atrator local ou  $(u, s)$ -atrator de Milnor  $\mathcal{A}$  atraí  $I_u$  e consequentemente  $u$ . Se  $U$  for maximal as iteradas  $F_{(u,s)}^i(u, k) = T^i(u)$  não dependem do instante inicial  $k$ , o que nos permite concluir o seguinte.

**Teorema 19** (Não coexistência). *Se  $U = I_T(u)$  for maximal, então para qualquer  $(u, s) \in [0, 1] \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$ , não podem existir simultaneamente dois  $(u, s)$ -atratores  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ , local e/ou Milnor, com projeções de fibra diferentes  $P(\mathcal{A}) \neq P(\mathcal{B})$ .*

## 3.2 Caso não maximal

Vamos em seguida estudar o que acontece quando  $U = I_T(u)$  não é maximal. Neste contexto precisamos considerar  $Z'_s \subset Z_s$  definido da seguinte forma:

Sejam  $l_1 < \dots < l_n < \dots$  tais que  $\sigma^{l_i}(U) > U$ , então

$$Z'_s(U) = \{j : s_j = 0 \text{ e } s_{j+l_i} = 1 \forall i\}.$$

Como  $T^i(u) \in I_u$  se e só se  $T^{i+1}(u) > u$ , então  $Z'_s(U)$  é o conjunto dos índices  $j$  tais que  $s_j = 0$  e  $F_{(u,s)}^n(u, j+1) = T^n(u)$  para todos os  $n \in \mathbb{N}_0$ .

**Teorema 20.** [Atrator de Milnor] Sejam  $X \in \Sigma'$  uma sequência  $p$ -periódica e  $(u, s) \in [-1, 1] \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$  tais que  $U = I_T(u)$  não é maximal e se verificam as seguintes propriedades:

1. Para qualquer  $i = 0, \dots, p-1$ ,  $U > \sigma^i(X)$ .
2.  $\exists_k : T^k(u) \in O(X)$ .
3.  $\#(Z'_s(U)) = +\infty$ .

Então  $O(X)$  é um  $(u, s)$ -atrator de Milnor.

*Demonstração.* A Condição 1. permite-nos usar os mesmos argumentos que no Teorema 16 para concluir que  $\mathcal{O}(X)$  é  $(u, s)$ -invariante e tem projeção minimal.

Para cada  $m \in \mathbb{N}$ , seja  $t'_m = \min\{i : m + i \in Z'_s(U)\}$ ,  $t'_m$  existe devido à Condição 3.. Consideremos agora  $T_L(x) = 2x + 1$  o ramo esquerdo da função tenda,

$$a_1 = T_L^{-1} \left( \frac{u - 1}{2} \right)$$

e

$$b_1 = T_L^{-1}(\min\{u, 0\}).$$

Para  $I_1 = ]a_1, b_1[$  temos que  $I_1 \cap I_u = \emptyset$  e  $F_{(u,s)}(I_1, j) = T(I_1) \subset I_u$  para todos os  $j$ . Para além disso, para  $I_n = T_L^{-n+1}(I_1)$ , temos que, para todos os  $j$ ,  $F_{(u,s)}^n(I_n, j) = T^n(I_n) \subset I_u$ , logo para todos os  $x \in I_{t'_m}$ ,  $F_{(u,s)}^{t'_m}(x, m) \in I_u$  e, como  $m + t'_m \in Z'_s(U)$  então

$$F_{(u,s)}^{t'_m+1+k}(x, m) = F_{(u,s)}^k(u, m + t'_m + 1) = T^k(u) \in O(X),$$

logo  $I_{t'_m} \subset W^s(O(X), m)$  e  $\mu(W^s(O(X), m)) > 0$ .

□

**Nota 21.** As condições 1. e 2. no Teorema anterior implicam que  $l_i < k$  para todos os  $i$ .

**Nota 22.** Note-se que os atratores de Milnor, por um lado não são robustos em relação ao parâmetro  $u$ , no sentido em que o atrator não persiste sob pequenas perturbações de  $u$ , mas por outro lado apresentam uma certa robustez em relação ao padrão de iteração  $s$ . Pelo Teorema 16, se  $U = I_T(u)$  for maximal então o atrator persiste para todos os padrões  $s$  tais que  $\#(Z_s) = +\infty$  e, pelo Teorema 20, se  $U = I_T(u)$  não for maximal então o atrator persiste para todos os padrões  $s$  tais que  $\#(Z'_s(U)) = +\infty$ .

**Exemplo 23.** Consideremos agora  $u = \Phi(RLRLLR^\infty)$ . Temos que  $U = I_T(u) = RLRLLR^\infty$  não é maximal porque  $\sigma^2(U) > U$ , logo  $T^2(u) > u$  implica que  $T(u) \in I_u$  e que existem  $0 < a < u < b$  tais que  $T(b) = \frac{u-1}{2}$  e  $T(a) = \frac{1-u}{2}$ . Considerando uma sequência  $s$  tal que  $s_0 = s_2 = 0$ , para todos os  $x \in ]a, b[$ , temos  $F_{(u,s)}^2(x, 1) = F_{(u,s)}(0, 0) = u$ , então, se  $s$  for tal que  $s_{2n} = 0$  para todos os  $n \in \mathbb{N}_0$ , o conjunto não autônomo  $\mathcal{A}$  tal que  $\mathcal{A}(2n) = \{T(u)\}$  e  $\mathcal{A}(2n+1) = \{u\}$  para todos os  $n \in \mathbb{N}_0$  é um  $(u, s)$ -atrator local. Assim a introdução da condição  $s_{2n} = 0$  para todos os  $n$  criou um  $(u, s)$ -atrator local 2-cíclico, ver a Figura 3.1.

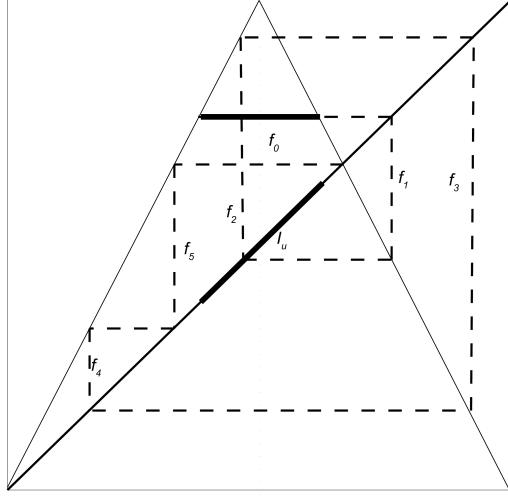


Figura 3.1: Iteração com  $u = \Phi(RLRLLR^\infty)$ . Se  $s_0 = 0$  então  $F^2(x, 0) = F^2(u, 1) = T(u) \in I_u$  para todos os  $x \in I_u$  e 2 é a única iterada de ordem menor ou igual a 6 com esta propriedade, logo a órbita só pode ser alterada pelos termos pares de  $s_i$ .

Mais geralmente, se  $U$  for tal que  $\sigma^k(U) > U$  para algum  $k$ , seja

$$B_k(U) = \{0 < i < k : \sigma^i(U) > U\},$$

temos então o seguinte teorema.

**Teorema 24.** [Atractor local] Seja  $(u, s) \in [-1, 1] \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$  tal que:

1.  $U = I_T(u)$  não é maximal, i.e., existe  $k$  tal que  $\sigma^k(U) > U$ .
2. Existe  $p \in \mathbb{N}_0$  tal que, para todos os  $n \in \mathbb{N}_0$  e  $i \in B_k(U)$ ,  $s_{p+nk} = 0$  e  $s_{p+nk+i} = 1$ .

Então o conjunto não autônomo  $\mathcal{A}$  tal que  $\mathcal{A}(i) = \emptyset$  para todos os  $i \leq p$  e, para todos os  $n \in \mathbb{N}_0$ , e  $j = 1, \dots, k$ ,  $\mathcal{A}(p+nk+j) = \{T^{j-1}(u)\}$ , é um  $(u, s)$ -atrator local  $k$ -cíclico.

*Demonstração.* Vamos considerar  $p = 0$ . Se  $\sigma^k(U) > U$ , então, pelo Lema 6  $T^{k-1}(u) \in I_u$ . Por outro lado  $s_i = 1$  para todos os  $i \in B_k(U)$  implica que

$F_{(u,s)}^{k-1}(u, 1) = T^{k-1}(u) \in I_u$  e então  $F_{(u,s)}^k(u, 1) = u$ . Para além disso, para todos os  $j = 1, \dots, k-1$ ,

$$F_{(u,s)}(\mathcal{A}(nk + j), nk + j) = T(\{T^{j-1}\})(u) = \mathcal{A}(j+1)$$

e

$$F_{(u,s)}(\mathcal{A}(nk + k), nk + k) = f_u(\{T^{k-1}(u)\}) = \{u\},$$

então  $\mathcal{A}$  é  $(u, s)$ -invariante e  $k$ -cíclico e consequentemente tem projeção minimal. Por outro lado, como para todos os  $n$ ,  $T^n$  é sobrejetivo em cada um dos seus intervalos, existem  $a < u < b$  tais que  $T^{k-1}|_{[a,b]}$  é monótono e  $T^{k-1}(\{a, b\}) = \left\{\frac{u-1}{2}, \frac{1-u}{2}\right\}$ . Para cada  $j = 1, \dots, k$  e cada  $n \in \mathbb{N}_0$  consideramos as vizinhanças de  $\mathcal{A}(nk + j)$ ,  $\mathcal{A}'(nk + j) = T^{j-1}(]a, b[)$ . Para simplificar a notação vamos considerar  $p = n = 0$ .

Se não existir  $i < k - j$  tal que  $s_{i+j} = 0$  e  $\mathcal{A}'(i+j) \cap I_u \neq \emptyset$  então

$$F_{(u,s)}^{k-j+1}(\mathcal{A}'(j), j) = F_{(u,s)}(I_u, k) = f_u(I_u) = \{u\} = \mathcal{A}(k+1).$$

Por outro lado, se existir  $i < k - j$  tal que  $s_{j+i} = 0$  e  $\mathcal{A}'(i+j) \cap I_u \neq \emptyset$ , então a Condição 2. e a monotonia de  $T^{k-1}|_{[a,b]}$  implicam que

$$T^{j+i-1}(a') < T^{j+i-1}(u) < \frac{u-1}{2} < T^{j+i-1}(b') \leq 0$$

ou

$$0 \leq T^{j+i-1}(a') < \frac{1-u}{2} < T^{j+i-1}(u) < T^{j+i-1}(b')$$

para alguns  $a', b' \in \{a, b\}$ .

Sem perda de generalidade, vamos considerar apenas a primeira situação.

Então

$$T^{k-(j+i)-1}(u) = T^{k-(j+i)}\left(\frac{u-1}{2}\right) \in T^{k-(j+i)}([T^{j+i-1}(a'), T^{j+i-1}(b')]) = I_u.$$

Suponhamos que  $i$  é único, então

$$\begin{aligned} F_{(u,s)}^{k-j+1}(\mathcal{A}'(j), j) &= F_{(u,s)}^{k-(j+i)+1}(\mathcal{A}'(j+i), j+i) \\ &= F_{(u,s)}^{k-(j+i)}(f_u(\mathcal{A}'(j+i)), j+i+1) \\ &= F_{(u,s)}^{k-(j+i)}([T^{j+i-1}(a'), u], j+i+1) \\ &= F_{(u,s)}([T^{k-1}(a'), T^{k-(j+i)-1}(u)], k) \\ &= f_u(I_u) = \{u\} = \mathcal{A}(k+1). \end{aligned}$$

Se  $i$  não for único, i.e., se existirem

$$i_1 < \dots < i_n < k - j$$

tais que, para todos os  $l = 1, \dots, n$ ,  $s_{j+i_l} = 0$  e  $\mathcal{A}'(j + i_l) \cap I_u \neq \emptyset$ , então, como atrás, podemos tomar  $a', b' \in \{a, b\}$  tais que

$$T^{j+i_1-1}(a') < T^{j+i_1-1}(u) < \frac{u-1}{2} < T^{j+i_1-1}(b') \leq 0,$$

então

$$\begin{aligned} F_{(u,s)}^{i_1+1}(\mathcal{A}'(j), j) &= f_u([T^{j+i_1-1}(a'), T^{j+i_1-1}(b')]) \\ &= T([T^{j+i_1-1}(a'), \frac{u-1}{2}]) \\ &\subset ]T^{j+i_1}(a'), T^{j+i_1}(b')[ \\ &= \mathcal{A}'(j + i_1 + 1). \end{aligned}$$

Se continuarmos este procedimento, então

$$\begin{aligned} F_{(u,s)}^{i_2+1}(\mathcal{A}'(j), j) &= F_{(u,s)}^{i_2-i_1}(F_{(u,s)}^{i_1+1}(\mathcal{A}'(j), j), j + i_1 + 1) \\ &\subset F_{(u,s)}^{i_2-i_1}(\mathcal{A}'(j + i_1 + 1), j + i_1 + 1). \end{aligned}$$

Tal como para  $i_1$  podemos considerar  $a'', b'' \in \{a, b\}$  tais que

$$T^{j+i_2-1}(a'') < T^{j+i_2-1}(u) < \frac{u-1}{2} < T^{j+i_2-1}(b'') \leq 0,$$

e

$$\begin{aligned} F_{(u,s)}^{i_2-i_1}(\mathcal{A}'(j + i_1 + 1), j + i_1 + 1) &= F_{(u,s)}^{i_2-i_1}([T^{j+i_1}(a''), T^{j+i_1}(b'')], j + i_1 + 1) \\ &= f_u([T^{j+i_2-1}(a''), T^{j+i_2-1}(b'')]) \\ &\subset \mathcal{A}'(j + i_2 + 1). \end{aligned}$$

Concluimos então que

$$F_{(u,s)}^{i_2-i_1}(\mathcal{A}'(j + i_1 + 1), j + i_1 + 1) \subset \mathcal{A}'(j + i_2 + 1)$$

e, recursivamente, que

$$F_{(u,s)}^{i_n+1}(\mathcal{A}'(j), j) \subset \mathcal{A}'(j + i_n + 1).$$

Finalmente temos

$$\begin{aligned} F_{(u,s)}^{k-j+1}(\mathcal{A}'(j), j) &= F_{(u,s)}^{k-j-i_n}(F_{(u,s)}^{i_n+1}(\mathcal{A}'(j), j), j + i_n + 1) \\ &\subset F_{(u,s)}^{k-j-i_n}(\mathcal{A}'(j + i_n + 1), j + i_n + 1) \\ &= f_u(T^{k-j-i_n-1}([T^{j+i_n}(a), T^{j+i_n}(b)])) \\ &= f_u([T^{k-1}(a), T^{k-1}(b)]) \\ &= f_u(I_u) = \{u\}. \end{aligned}$$

□

**Exemplo 25.** Consideremos o padrão de iteração  $s = (001010)^\infty$ ,  $u_1 = 0,519$  e  $u_2 = 0,5215$ . Temos que  $I_T(u_1) = RLRLLRRLRLR\dots$  e  $I_T(u_2) = RLRLLLRRR\dots$ , então, pelo Lema 6, para qualquer parâmetro  $u \in [u_1, u_2]$ ,  $I_T(u) = U = RLRLL\dots$  e, como  $\sigma^2(U) > U$ ,  $B_2(U) = \emptyset$  e  $s_{2n+1} = 0$  para todos os  $n \in \mathbb{N}_0$ , pelo Teorema 24 o sistema tem um  $(u, s)$ -atrator local 2-cíclico. Isto pode ser observado na Figura 3.2, onde o atrator está assinalado a vermelho.

Olhando agora para o ponto assinalado a azul na Figura 3.2, este tem coordenadas  $(u, y) = (0.5208(3), \frac{1}{3})$  e

$$u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} \left( -1 + \frac{1}{3} \right) = \Phi(RLRLLR^\infty).$$

Numericamente  $T^5(u) = \frac{1}{3}$  é um ponto fixo repulsivo de  $T$ .

Tendo em atenção o Teorema 20, para  $U = RLRLLR^\infty$ ,  $\sigma^i(U) > U \Rightarrow i = 2$ , logo  $l_1 = 2$ . Por outro lado, para todos os  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $s_{6n} = 0$  e  $s_{6n+2} = 1$ , logo  $Z'_s(U) = \{6n : n \in \mathbb{N}_0\}$ . Então, considerando  $X = R^\infty$ ,  $O(X) = \{\frac{1}{3}\}$  e  $\mathcal{O}(X)$  é um  $(u, s)$ -atrator de Milnor. Concluimos que, para  $u = 0.5208(3)$  e  $s = (001010)^\infty$  um  $(u, s)$ -atrator local e um  $(u, s)$ -atrator de Milnor coexistem. Note-se que isto apenas é possível porque  $U = I_T(u)$  não é maximal.

Podemos fundir os Teoremas 20 e 24 para obter o seguinte.

**Teorema 26** (Coexistência). Sejam  $X \in \Sigma'$  uma sequência  $p$ -periódica e  $(u, s) \in [-1, 1] \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$  tais que:

1. Para todos os  $i = 0, \dots, p-1$ ,  $U > \sigma^i(X)$ .
2.  $\exists_k$  tal que  $T^k(u) \in O(X)$ .
3. Para  $U = I_T(u)$  existe  $l$  tal que  $\sigma^l(U) > U$ .
4.  $\#(Z'_s(U)) = +\infty$ .
5. Existe uma ordem  $p \in \mathbb{N}_0$  tal que, para todos os  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $s_{p+nl} = 0$  e  $s_{j+nl+i} = 1$  para todos os  $i \in B_l(U)$ .

Então o conjunto não autônomo  $\mathcal{A}$  tal que  $\mathcal{A}(i) = \emptyset$  para todos os  $i \leq p$  e  $\mathcal{A}(ln + j) = \{T^{i-1}(u)\}$ ,  $i = 1, \dots, l$  é um  $(u, s)$ -atrator local e  $\mathcal{O}(X)$  é um  $(u, s)$ -atrator de Milnor.

Vamos ver no próximo exemplo que, no caso não maximal, dois  $(u, s)$ -atratores locais também podem coexistir.

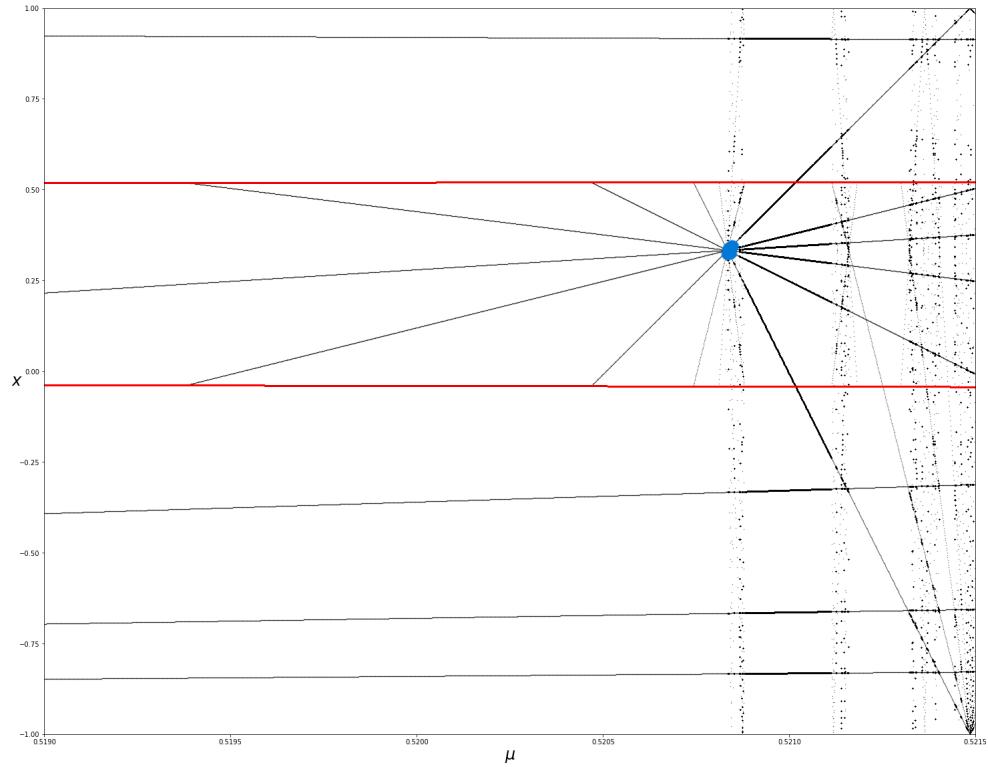


Figura 3.2: Diagrama de bifurcação com  $s = (001010)^\infty$  e  $u \in [0.519, 0.5215]$ . Iterámos 1500 vezes com valor inicial 0 e instante inicial 0. O atrator local 2-cíclico está marcado a vermelho e o atrator de Milnor é o ponto azul. As linhas pretas no lado esquerdo do atrator de Milnor correspondem a regimes de transição antes de as órbitas ficarem presas no atrator local. No lado direito do atrator de Milnor as linhas pretas podem corresponder a outros atratores locais que coexistem com o atrator local 2-cíclico.

**Exemplo 27.** Consideremos de novo,  $s = (001010)^\infty$  e, agora,  $u = 0,521$ . Temos que

$$U = I_T(u) = RLRLLLRRRRRLRLLLL\ldots.$$

É fácil verificar que  $j = 2$  e  $j = 12$  são os únicos  $j \leq 12$  tais que  $\sigma^j(U) > U$ , então, tendo em atenção o Teorema 24,  $B_{12}(U) = \{2\}$ . Como  $s$  é 6-periódico,  $s_0 = 0$  e  $s_2 = 1$ , então  $s_{12n} = 0$  e  $s_{12n+2} = 1$  para todos os  $n \in \mathbb{N}_0$ , então, pelo Teorema 24, o conjunto não autónomo  $\mathcal{A}$  tal que  $\mathcal{A}(12n + j) = \{T^{j-1}(u)\}$  para todos os  $j = 1, \dots, 12$  e todos os  $n \in \mathbb{N}_0$  é um  $(u, s)$ -atrator local 12-cíclico. Como  $u = 0.521 \in [0.519, 0.5215]$ , este  $(u, s)$ -atrator local 12-cíclico coexiste com o atrator local 2-cíclico estudado no Exemplo 25. Observando a Figura 3.2, observamos que esta situação persiste numa vizinhança em torno de  $u = 0.521$ .

Outra diferença notável entre os casos maximal e não maximal é a seguinte: no caso maximal todos os  $(u, s)$ -atratores locais são cílicos. Para ilustrar o caso não maximal consideremos  $U = RLRLRLRLR^\infty$  e  $u = \Phi(U)$ . Obviamente  $U$  é não maximal porque  $\sigma^2(U) > U$  e  $\sigma^5(U) > U$ . Agora, adaptando os argumentos da demonstração do Teorema 24, para qualquer padrão de iteração  $s = 01^{a_1}01^{a_2}01^{a_3}\dots$ , onde  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{1, 4\}^{\mathbb{N}}$ , o conjunto não autónomo  $\mathcal{A}$  tal que  $\mathcal{A}(0) = \emptyset$  e  $\mathcal{A}(j) = \{F_{(u,s)}^{j-1}(u, 0)\}$  para todos os  $j \geq 1$  é um  $(u, s)$ -atrator local, mas apesar de  $P(\mathcal{A}) \subset \{u, T(u), T^2(u), T^3(u), T^4(u), T^5(u)\}$ , ao contrário do caso maximal, este pode não ser cíclico. Este é o caso quando a sequência  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  não é periódica nem eventualmente periódica.

Neste caso continuamos a poder ter coexistência de um  $(u, s)$ -atrator local com um  $(u, s)$ -atrator de Milnor. Consideremos por exemplo o padrão

$$s = (01)^{a_1}00(01111)^{b_1}(01)^{a_2}00(01111)^{b_2}\dots$$

tal que, para todos os  $i$ ,  $a_i \in \mathbb{N}_0$  e  $b_i \in \mathbb{N}$ .

Por um lado temos uma subsequência  $(s_{i_n})_{n \in \mathbb{N}_0}$  tal que, para todos os  $j$ ,  $i_j \in Z_s$  e  $i_{j+1} - i_j \in \{2, 5\}$  e isto gera o  $(u, s)$ -atrator local. Por outro lado temos uma subsequência infinita  $s_{l_j}$  tal que, para todos os  $j$ ,  $l_j \in Z_s$  e  $s_{l_j+2} = s_{l_j+5} = 1$  e isto gera o  $(u, s)$ -atrator de Milnor.

**Nota 28.** Uma formulação mais geral de uma condição suficiente para a existência de um  $(u, s)$ -atrator local é a existência de  $i_1, \dots, i_k$  tais que  $\sigma^{i_j}(U) > U$  para todos os  $j = 1, \dots, k$  e uma sequência  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tais que, para todos os  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n \in Z_s$  e existe  $j(n) \in \{1, \dots, k\}$  tal que  $a_{n+1} - a_n = i_{j(n)}$  e  $s_{a_n+l} = 1$  para todos os  $l \in B_{i_{j(n)}}(U)$ .

A partir dos resultados deste capítulo, concluímos não ser necessário introduzir limitadores em todos os passos de iteração para criar atratores locais ou de Milnor. Concluímos também que, por um lado, vários padrões de iteração podem criar o mesmo atrator e que, por outro lado, o mesmo limitador pode criar diferentes atratores, conforme o padrão de iteração. Para além disso, no contexto não autónomo, ao contrário do que acontece no contexto unimodal autónomo, podem coexistir vários atratores, do mesmo tipo ou de tipos diferentes.

# Capítulo 4

## Invariante de amassamento, incrementos de período e atratores de Milnor em iterações segundo um padrão

Neste capítulo, começamos por introduzir os invariantes de amassamento  $K(u, s)$  para iterações segundo um padrão,  $F_{(u,s)}^n$ , de funções tenda com um segmento constante. Em seguida introduzimos uma estrutura de incrementos de período nos invariantes de amassamento e concluimos com a descrição dos parâmetros correspondentes aos atratores de Milnor, como limites de sequências de parâmetros correspondentes a sequências de atratores locais, organizados segundo esta estrutura de incrementos de período.

Os resultados deste capítulo encontram-se em [24].

### 4.1 Invariante de amassamento

Uma forma bastante eficaz de identificar e descrever as estruturas combinatórias presentes nas famílias de sistemas dinâmicos unidimensionais, é através dos chamados invariantes de amassamento, que foram introduzidos por Milnor e Thurston, no contexto autônomo, em [15].

Vamos em seguida adaptar esta definição ao nosso contexto e depois estabelecer condições suficientes para que uma sequência simbólica  $X \in \Sigma$  seja o invariante de amassamento  $K(u, s)$  para algum par  $(u, s) \in [-1, 1] \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$ .

**Definição 29.** Para  $(u, s) \in [-1, 1] \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$ , definimos o invariante de amassamento

$$K(u, s) = I_{(u, s)}(0, 0).$$

Para  $X \in \Sigma$ , sejam

$$\mathcal{C}(X) = \{i \in \mathbb{N}_0 : X_i = C\}$$

e, para cada  $i \in \mathbb{N}_0$ ,

$$l_i = \min\{r : i + r \in \mathcal{C}(X)\}.$$

Por simplicidade de exposição, consideramos apenas padrões de iteração  $s$  tais que  $s_0 = 0$  e sequências  $X$  tais que  $X_0 = 0$  e o maior bloco entre dois  $C$ 's consecutivos se situe no início da sequência. Isto é expresso nas condições 1. e 2. da próxima definição.

**Definição 30.** Seja  $s \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$  com  $s_0 = 0$ , então dizemos que uma sequência simbólica  $X \in \Sigma$  é estritamente  $s$ -admissível se se verificam as condições seguintes:

1.  $0 \in \mathcal{C}(X)$ , e se  $i \in \mathcal{C}(X)$  então  $i \in Z_s$  ou  $\sigma^i(X) = CRL^\infty$ .
2.  $l_0 = \max\{l_i : i \in \mathcal{C}(X)\}$ .
3. Para todos os  $i \in \mathcal{C}(X) \cap Z_s$ :
  - (a)  $X_{i+1} \dots X_{i+l_i-1} = X_1 \dots X_{l_i-1}$ ;
  - (b) se  $l_i < l_0$ , então  $X_1 \dots X_{l_0-l_i-1} < X_{l_i+1} \dots X_{l_0-1}$ .
4. Se  $i, j$  forem tais que  $i < j < i + l_i$ ,  $i \in \mathcal{C}(X)$  e  $j \in Z_s \setminus \mathcal{C}(X)$  então

$$X_{j+1} \dots X_{i+l_i-1} < X_1 \dots X_{l_i-j-1}.$$

Representamos o conjunto de sequências estritamente  $s$ -admissíveis por  $\Sigma^s$ .

Vamos ver no próximo teorema, que a  $s$ -admissibilidade estrita de uma sequência  $X \in \Sigma$  é suficiente, para que  $X = K(u, s)$  para algum  $u \in [-1, 1]$ . A designação "estrita" prende-se com as desigualdades das condições 3.(b) e 4., as quais podem ser enfraquecidas, permitindo igualdade numa série de situações específicas cuja descrição iria prejudicar fortemente a clareza da exposição.

**Teorema 31.** Sejam  $s \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$  e  $X \in \Sigma$ . Se  $X \in \Sigma^s$  então existe  $u \in [-1, 1[$  tal que  $X = K(u, s)$ .

*Demonstração.* A Condição 1. é consequência imediata das condições sobre  $s$  e da definição de invariante de amassamento.

Para  $X = X_0X_1\dots \in \Sigma^s$  definimos  $\phi_s : \Sigma^s \rightarrow \Sigma'$  como

$$\phi_s(X) = X_1\dots X_{l_0-1}CRL^\infty,$$

A construção assegura que  $\sigma^{l_0+1}(\phi_s(X)) > \phi_s(X)$ .

Vamos demonstrar que, para  $u = \Phi(\phi_s(X))$ ,  $X = K(u, s)$ .

Seja  $Y = K(u, s) = I_{(u,s)}(0, 0)$ .

Se  $0 < j < l_0$  e  $j \in Z_s$  então, da Condição 2.,  $j \notin \mathcal{C}(X)$ , logo pela Condição 4.  $T^{j-1}(u) \notin I_u$  e

$$Y_0\dots Y_{l_0-1}Y_{l_0} = Cad_1(u)\dots ad_1(T^{l_0-2}(u))C = X_0\dots X_{l_0}.$$

Pelo Teorema 7,  $T^{l_0-1}(u) = 0$ , logo  $Y_{l_0} = C$  e  $F_{(u,s)}^{l_0+1}(0, 0) = u$ , então para todos os  $1 \leq j \leq l_0$ ,  $F_{(u,s)}^{l_0+j}(0, 0) = T^{j-1}(u)$  e, pela Condição 4., se  $1 \leq j < l_0$  então  $Y_{l_0+j} = ad_1(T^{j-1}(u)) = X_j$  e, pela Condição 3.(a)  $X_j = X_{l_0+j}$ . Por outro lado, se  $l_0 < l_0$  então, pela Condição 3.(b)  $F_{(u,s)}^{l_0+l_0}(0, 0) = T^{l_0-1}(u) \in I_u$ , logo  $Y_{l_0+l_0} = ad_u(T^{l_0-1}(u)) = C$ .

Podemos agora repetir estes argumentos para qualquer  $i \in \mathcal{C}(X)$  para concluir que  $X = K(u, s)$ .

□

## 4.2 Atratores de Milnor e incrementos de período

Vamos em seguida demonstrar que, para cada sequência periódica  $Y \in \Sigma'$ , os parâmetros correspondentes aos atratores de Milnor  $\mathcal{O}(Y)$  são limites de sequências de parâmetros correspondentes a sequências de atratores locais, organizados segundo uma estrutura de incrementos de período com incremento  $|Y|$ . A descrição dos parâmetros correspondentes aos atratores de Milnor, como limites de sequências de parâmetros correspondentes a incrementos de período, foi apresentada em [1], no contexto autônomo, para a família das funções tenda com um segmento constante descontínuas.

Seja  $\bar{\Sigma} \subset \Sigma$  o conjunto das sequências da forma  $(CX_1\dots X_{n-1})^\infty$  tais que  $X_i \neq C$ , para todos os  $i = 1, \dots, n-1$ . Dizemos que  $X$  tem comprimento  $n$  e denotamos por  $|X| = n$ . Denotamos ainda brevemente  $\epsilon_{|X|-1}(X)$  por  $\epsilon(X)$ . Recordemos que  $-L = R$  e  $-R = L$ . Para sequências  $X = (CX_1\dots X_{|X|-1})^\infty$ ,  $Y = (CY_1\dots Y_{|Y|-1})^\infty$  pertencentes a  $\bar{\Sigma}$ , sejam

$$f_L(X, Y) = (CX_1 \dots X_{|X|-1}(\epsilon(X)L)Y_1 \dots Y_{|Y|-1})^\infty$$

e

$$f_R(X, Y) = (CX_1 \dots X_{|X|-1}(\epsilon(X)R)Y_1 \dots Y_{|Y|-1})^\infty$$

**Nota 32.** Notemos que  $\epsilon(f_L(X, Y)) = \epsilon(Y)$  e  $\epsilon(f_R(X, Y)) = -\epsilon(Y)$ .

**Definição 33.** Para  $p \in \mathbb{N}$ , uma sequência binária  $s \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$  é uma  $p$ -sequência se  $s_{np} = 0$  para todos os  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Para uma  $p$ -sequência  $s$ , seja  $\bar{\Sigma}^s$  o conjunto de todas as sequências  $(CX_1 \dots X_{np-1})^\infty \in \Sigma^s \cap \bar{\Sigma}$  tais que  $X_i \neq C$  para todos os  $i = 1, \dots, np - 1$ . Note-se que, se  $X \in \bar{\Sigma}^s$  então  $p||X|$ .

**Definição 34.** Seja  $s$  uma  $p$ -sequência. O par  $(X, Y) \in \bar{\Sigma}^s \times \bar{\Sigma}$  é  $s$ -compatível se:

1.  $p||Y|$ .
2. Não existirem  $m \in \mathbb{N}_0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < j < |X|$  tais que  $m(|X| + n|Y|) + j \in Z_s$  e  $X_{j+1} \dots X_{|X|-1} \geq X_1 \dots X_{|X|-1-j}$ .
3. Não existirem  $m \in \mathbb{N}_0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|X| \leq j < |X| + n|Y|$  tais que  $m(|X| + n|Y|) + j \in Z_s$  e  $Y_{j-|X|+1} \dots Y_{|Y|-1} \geq X_1 \dots X_{2|X|-1-j}$ .

**Lema 35.** Sejam  $s$  uma  $p$ -sequência e  $(X, Y) \in \bar{\Sigma}^s \times \bar{\Sigma}$  um par  $s$ -compatível, então  $(f_L(X, Y), Y)$  e  $(f_R(X, Y), Y)$  são ambos  $s$ -compatíveis.

*Demonstração.* Seja  $W = f_L(X, Y)$ , em primeiro lugar vamos demonstrar que  $W \in \Sigma^s$ . Como  $|W| = |X| + |Y|$  então  $p||W|$ . As condições 1., 2. e 3. da Definição 30 são verificadas automaticamente pela definição de  $f_L(X, Y)$ , uma vez que  $\mathcal{C}(W) = \{n(|X| + |Y|) : n \in \mathbb{N}_0\}$ .

A condição 4. da Definição 30 é consequência imediata das condições 2. e 3. da Definição 34.

Verifiquemos agora a  $s$ -compatibilidade do par  $(W, Y)$ :

A condição 2. da Definição 34 em relação a  $(W, Y)$  sai da condição 2. em relação a  $(X, Y)$  se  $j < |X|$  e da condição 3. se  $j \geq |X|$ . A condição 3. em relação a  $(W, Y)$  sai da condição 3. em relação a  $(X, Y)$ , uma vez que  $m(|W| + n|Y|) + j = m(|X| + (n+1)|Y|) + j$  e  $|W| \leq j < |W| + n|Y| \Rightarrow |X| \leq j < |X| + (n+1)|Y|$ .

Todos os critérios usados são igualmente válidos se  $W = f_R(X, Y)$ .

□

Sejam  $s$  uma  $p$ -sequência e  $(X, Y) \in \overline{\Sigma}^s \times \overline{\Sigma}$  um par  $s$ -compatível. Sejam  $f_L^0(X, Y) = f_R^0(X, Y) = f_{LR}^0(X, Y) = f_{RL}^0(X, Y) = X$ . Vamos agora considerar as seguintes quatro sucessões de sequências simbólicas, para todos os  $k \in \mathbb{N}$ :

- $f_L^k(X, Y) = f_L(f_L^{k-1}(X, Y), Y)$ .
- $f_R^k(X, Y) = f_R(f_R^{k-1}(X, Y), Y)$ .
- $$f_{LR}^k(X, Y) = \begin{cases} f_L(f_{LR}^{k-1}(X, Y), Y) & \text{se } k \text{ ímpar} \\ f_R(f_{LR}^{k-1}(X, Y), Y) & \text{se } k \text{ par} \end{cases}.$$
- $$f_{RL}^k(X, Y) = \begin{cases} f_R(f_{RL}^{k-1}(X, Y), Y) & \text{se } k \text{ ímpar} \\ f_L(f_{RL}^{k-1}(X, Y), Y) & \text{se } k \text{ par} \end{cases}.$$

**Exemplo 36.** Por exemplo, se considerarmos  $X = (CRR)^\infty$  e  $Y = (CLR)^\infty$ , temos

$$\begin{aligned} f_L(X, Y) &= (CRRLLR)^\infty, & f_L^2(X, Y) &= (CRRLRRLR)^\infty, & f_L^3(X, Y) &= (CRRL(LRR)^2LR)^\infty, \\ f_R(X, Y) &= (CRRRLR)^\infty, & f_R^2(X, Y) &= (CRRRLRRLR)^\infty, & f_R^3(X, Y) &= (CRRR(LRR)^2LR)^\infty, \\ f_{LR}(X, Y) &= (CRRLLR)^\infty, & f_{LR}^2(X, Y) &= (CRRLRLLR)^\infty, & f_{LR}^3(X, Y) &= (CRRL(LRL)^2LR)^\infty, \\ f_{RL}(X, Y) &= (CRRRLR)^\infty, & f_{RL}^2(X, Y) &= (CRRRLRLLR)^\infty, & f_{RL}^3(X, Y) &= (CRRR(LRL)^2LR)^\infty. \end{aligned}$$

Cada uma das sequências simbólicas  $f_L^k(X, Y)$ ,  $f_R^k(X, Y)$ ,  $f_{LR}^k(X, Y)$  e  $f_{RL}^k(X, Y)$  é periódica com período  $|X| + k|Y|$ , correspondendo assim a um incremento de  $|Y|$  no período, em cada avanço do índice  $k$ . Vamos em seguida demonstrar que estas quatro sucessões convergem em  $\Sigma$ .

**Teorema 37.** Sejam  $s$  uma  $p$ -sequência e  $(X, Y)$  um par  $s$ -compatível, então para todos os  $k$ ,  $f_L^k(X, Y)$ ,  $f_R^k(X, Y)$ ,  $f_{LR}^k(X, Y)$ ,  $f_{RL}^k(X, Y)$  pertencem a  $\overline{\Sigma}^s$  e:

1.  $f_L^k(X, Y)$  é estritamente decrescente e converge para  $CX_1 \dots X_{|X|-1}(\epsilon(X)L)(Y_1 \dots Y_{|Y|-1}(\epsilon(Y)L))^\infty$ .
2.  $f_R^k(X, Y)$  é estritamente crescente e converge para  $CX_1 \dots X_{|X|-1}(\epsilon(X)R)(Y_1 \dots Y_{|Y|-1}(\epsilon(Y)L))^\infty$ .
3.  $f_{LR}^k(X, Y)$  é estritamente crescente para  $k$  ímpar, estritamente decrescente para  $k$  par e converge para  $CX_1 \dots X_{|X|-1}(\epsilon(X)L)(Y_1 \dots Y_{|Y|-1}(\epsilon(Y)R))^\infty$ .

4.  $f_{RL}^k(X, Y)$  é estritamente crescente para  $k$  par, estritamente decrescente para  $k$  ímpar e converge para  $CX_1 \dots X_{|X|-1}(\epsilon(X)R)(Y_1 \dots Y_{|Y|-1}(\epsilon(Y)R))^\infty$ .

*Demonstração.* Segue indutivamente do Lema anterior que, para todos os  $k$ ,  $f_L^k(X, Y)$ ,  $f_R^k(X, Y)$ ,  $f_{LR}^k(X, Y)$ ,  $f_{RL}^k(X, Y)$  pertencem a  $\bar{\Sigma}^s$ .

As propriedades de monotonia concluem-se indutivamente do facto que as seguintes desigualdades ocorrem para todos os  $X, Y \in \bar{\Sigma}$ :

$$f_L(X, Y) < f_{LR}^2(X, Y) < X < f_{RL}^2(X, Y) < f_R(X, Y).$$

Pela Nota 32, é imediato demonstrar por indução que, para todos os  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} f_L^k(X, Y) &= (CX_1 \dots X_{|X|-1}(\epsilon(X)L)(Y_1 \dots Y_{|Y|-1}(\epsilon(Y)L)))^{k-1}Y_1 \dots Y_{|Y|-1})^\infty, \\ f_R^k(X, Y) &= (CX_1 \dots X_{|X|-1}(\epsilon(X)R)(Y_1 \dots Y_{|Y|-1}(\epsilon(Y)L)))^{k-1}Y_1 \dots Y_{|Y|-1})^\infty, \\ f_{LR}^k(X, Y) &= (CX_1 \dots X_{|X|-1}(\epsilon(X)L)(Y_1 \dots Y_{|Y|-1}(\epsilon(Y)R)))^{k-1}Y_1 \dots Y_{|Y|-1})^\infty, \\ f_{RL}^k(X, Y) &= (CX_1 \dots X_{|X|-1}(\epsilon(X)R)(Y_1 \dots Y_{|Y|-1}(\epsilon(Y)R)))^{k-1}Y_1 \dots Y_{|Y|-1})^\infty. \end{aligned}$$

As propriedades de convergência são imediatas, usando em  $\Sigma$  a topologia induzida pela distância

$$d(X, Y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} (X_n - Y_n),$$

em que

$$X_i - Y_i = \begin{cases} 0, & \text{se } X_i = Y_i, \\ 1, & \text{se } X_i \neq Y_i \end{cases}$$

□

Para  $W = (CW_1 \dots W_{|W|-1})^\infty \in \bar{\Sigma}$ , seja  $t(W) = W_1 \dots W_{|W|-1}CRL^\infty \in \Sigma'$ .

Consideremos as sequências

$$u_k = \Phi(t(f_L^k(X, Y))), \quad v_k = \Phi(t(f_R^k(X, Y))) \quad (4.1)$$

e

$$l_k = \Phi(t(f_{LR}^k(X, Y))), \quad w_k = \Phi(t(f_{RL}^k(X, Y))) \quad (4.2)$$

O próximo resultado estabelece que as sequências de parâmetros  $u_k, v_k, l_k$  e  $w_k$  correspondem à existência de sequências de atratores locais  $p_k$ -cíclicos,  $p_k = |X| + k|Y|$ , com um incremento  $|Y|$  no período, para cada  $k$ .

**Teorema 38.** Sejam  $s$  uma  $p$ -sequência e  $(X, Y)$  um par  $s$ -compatível. Então, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , existem:

1.  $u'_k < u_k < u''_k$  tais que, para todos os  $u \in ]u'_k, u''_k[$ , o conjunto não autônomo  $\mathcal{A}$  tal que  $\mathcal{A}(n(|X| + k|Y|) + j) = T^{j-1}(u)$  para todos os  $n \in \mathbb{N}_0$  e  $j = 1, \dots, |X| + k|Y|$  é um  $(u, s)$ -atrator local  $p_k$ -cíclico com  $p_k = |X| + k|Y|$ .
2.  $v'_k < v_k < v''_k$  tais que, para todos os  $v \in ]v'_k, v''_k[$ , o conjunto não autônomo  $\mathcal{A}$  tal que  $\mathcal{A}(n(|X| + k|Y|) + j) = T^{j-1}(v)$  para todos os  $n \in \mathbb{N}_0$  e  $j = 1, \dots, |X| + k|Y|$  é um  $(v, s)$  atrator local  $p_k$ -cíclico.
3.  $l'_k < l_k < l''_k$  tais que, para todos os  $l \in ]l'_k, l''_k[$ , o conjunto não autônomo  $\mathcal{A}$  tal que  $\mathcal{A}(n(|X| + k|Y|) + j) = T^{j-1}(l)$  para todos os  $n \in \mathbb{N}_0$  e  $j = 1, \dots, |X| + k|Y|$  é um  $(l, s)$  atrator local  $p_k$ -cíclico.
4.  $w'_k < w_k < w''_k$  tais que, para todos os  $w \in ]w'_k, w''_k[$ , o conjunto não autônomo  $\mathcal{A}$  tal que  $\mathcal{A}(n(|X| + k|Y|) + j) = T^{j-1}(w)$  para todos os  $n \in \mathbb{N}_0$  e  $j = 1, \dots, |X| + k|Y|$  é um  $(w, s)$  atrator local  $p_k$ -cíclico..

*Demonstração.* Vamos apenas demonstrar a Condição 1., visto que as outras têm demonstrações análogas.

Seja

$$W^k = f_L^k(X, Y).$$

Temos que  $|W_k| = |X| + k|Y| = p_k$ .

Sejam agora

$$\begin{aligned} W^k(R) &= (W_1^k \dots W_{p_k-1}^k(\epsilon(W^k)R))^{\infty}, \\ W^k(L) &= W_1^k \dots W_{p_k-1}^k(\epsilon(W^k)L)W^k(R), \end{aligned}$$

$u'_k = \Phi(W^k(L))$  e  $u''_k = \Phi(W^k(R))$ , ver a Figura 4.1.

Pelo Lema 6, concluímos imediatamente que  $u'_k < u_k < u''_k$  e, pelo Teorema 7,  $T^{p_k}(u'_k) = T^{p_k}(u''_k) = u''_k$ .

Por outro lado,

$$T^{p_k-1}(u'_k) = \Phi((\epsilon(W^k)L)W^k(R))$$

e

$$T^{p_k-1}(u''_k) = \Phi((\epsilon(W^k)R)W^k(R)),$$

logo, se  $u \in ]u'_k, u''_k[$  então

$$T^{p_k-1}(u) \in [\Phi((\epsilon(W^k)L)W^k(R)), \Phi((\epsilon(W^k)R)W^k(R))]$$

(os extremos deste intervalo podem não estar na ordem correta) e

$$T^{p_k}(u) = T(T^{p_k-1})(u) > u''_k > u.$$

Temos então, sendo  $U = I_T(u)$ , que  $\sigma^{p_k}(U) > U$ . Como  $s$  é uma  $p$ -sequência e  $p|p_k$  então  $s_{np_k} = 0$  para todos os  $n \in \mathbb{N}_0$ , além disso, pelas condições 2. e 3. da Definição 34 não podem existir  $n \in \mathbb{N}_0$  e  $i \in B_{p_k}(U)$  tais que  $np_k + i \in Z_s$ . Logo, pelo Teorema 24, o conjunto não autônomo  $\mathcal{A}$  tal que  $\mathcal{A}(np_k + i) = \{T^{i-1}(u)\}$  para todos os  $n \in \mathbb{N}_0$  e  $i = 1, \dots, p_k$  é um  $(u, s)$ -atrator local.  $\square$

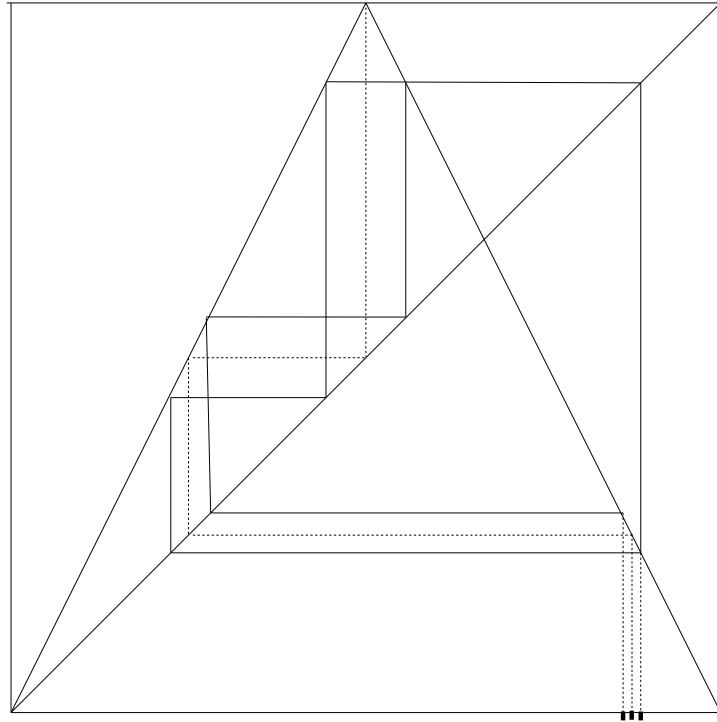


Figura 4.1: Considerando  $X = (CRL)^\infty$ ,  $X(R) = (RLL)^\infty$  e  $X(L) = RLR(RLL)^\infty$ , os três pontos assinalados no eixo das abscissas são, da esquerda para a direita,  $u' = \Phi(X(L))$ ,  $u = \Phi(t(X))$  e  $u'' = \Phi(X(R))$ .

O corolário seguinte estabelece que as sequências de parâmetros  $u_k, v_k, l_k$  e  $w_k$  convergem para parâmetros com atratores de Milnor  $\mathcal{O}(Y)$  em que  $Y$  corresponde

às sequências periódicas

$$(Y_1 \dots Y_{|Y|-1}(\epsilon(Y)L))^\infty,$$

nos casos de  $u_k$  e  $v_k$ , e

$$(Y_1 \dots Y_{|Y|-1}(\epsilon(Y)R))^\infty,$$

nos casos de  $l_k$  e  $w_k$ . Ver a Figura 4.2.

**Corolário 39.** *Sejam  $s$  uma  $p$ -sequência e  $(X, Y)$  um par  $s$ -compatível tais que  $Y_j \dots Y_{|Y|-1} < X_1 \dots X_{|X|-1}$  para todos os  $j = 1, \dots, |Y| - 1$ , então:*

1. *As sequências  $u_k$  e  $v_k$  são convergentes, respetivamente, para parâmetros  $u < v$  e  $\mathcal{O}((Y_1 \dots Y_{|Y|-1}(\epsilon(Y)L))^\infty)$  é um  $(u, s)$  e um  $(v, s)$ -atrator de Milnor.*
2. *As sequências  $l_k$  e  $w_k$  são convergentes, respetivamente, para parâmetros  $l < w$  e  $\mathcal{O}((Y_1 \dots Y_{|Y|-1}(\epsilon(Y)R))^\infty)$  é um  $(l, s)$  e um  $(w, s)$ -atrator de Milnor.*

*Demonstração.* Sejam

$$U = X_1 \dots X_{|X|-1}(\epsilon(X)L)Y_1 \dots Y_{|Y|-1}(\epsilon(Y)L))^\infty$$

e  $u = \Phi(U)$ , então

$$|u - u_k| \leq \sum_{i=p_k}^{+\infty} \frac{1}{2^{i+1}} = \frac{1}{2^{p_k}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

Se  $U$  não for maximal, a Condição 1. do Teorema 20 é satisfeita devido à condição sobre os  $Y_j \dots Y_{|Y|-1}$ , a Condição 2. é satisfeita para  $k = |X|$  e a Condição 3., vem do facto que, pelas Condições 2. e 3. da Definição 34, para quaisquer  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m(|X| + n|Y|) \in Z'_s(U)$ . Então, pelo Teorema 20  $\mathcal{O}((Y_1 \dots Y_{|Y|-1}(\epsilon(Y)L))^\infty)$  é um  $(u, s)$ -atrator de Milnor. Se  $U$  for maximal, a demonstração é análoga, usando o Teorema 16.

As restantes afirmações têm demonstrações análogas considerando, respetivamente,

$$v = \Phi(X_1 \dots X_{|X|-1}(\epsilon(X)R)Y_1 \dots Y_{|Y|-1}(\epsilon(Y)L))^\infty,$$

$$l = \Phi(X_1 \dots X_{|X|-1}(\epsilon(X)L)Y_1 \dots Y_{|Y|-1}(\epsilon(Y)R))^\infty,$$

$$w = \Phi(X_1 \dots X_{|X|-1}(\epsilon(X)R)Y_1 \dots Y_{|Y|-1}(\epsilon(Y)R))^\infty.$$

□

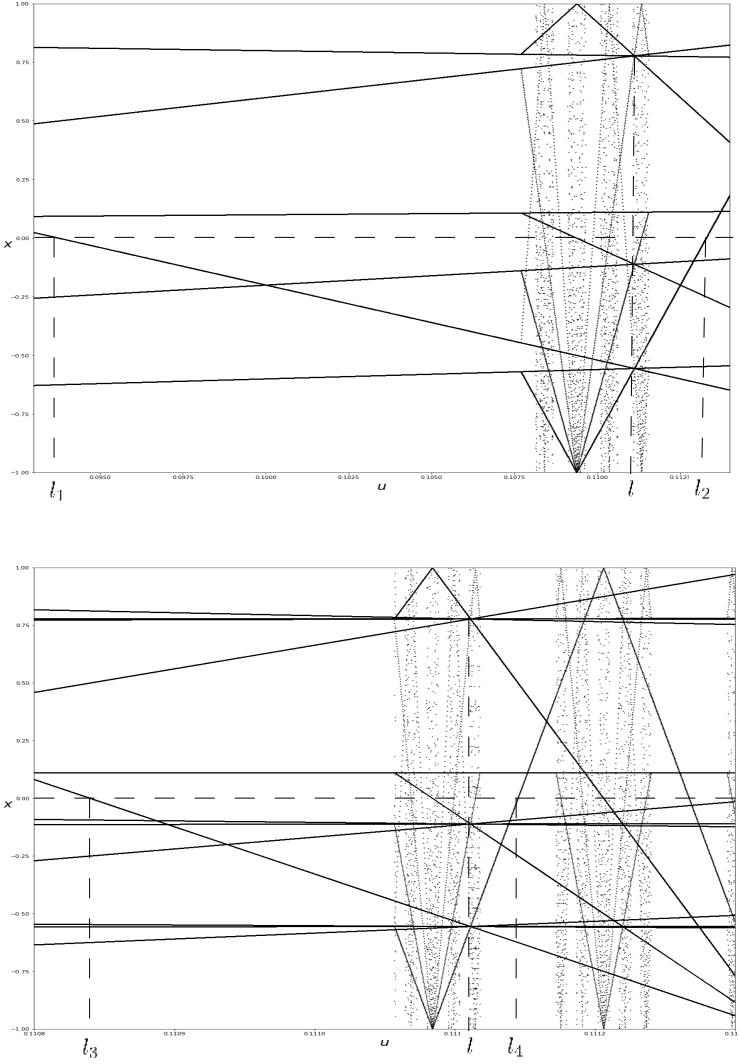


Figura 4.2: Incremento de período com  $s = (011)^\infty$ ,  $X = (CRR)^\infty$  e  $Y = (CLR)^\infty$ . Imprimimos as iteradas  $F_{(u,s)}^i(0,0)$  com  $500 \leq i \leq 1000$ . Na figura de cima considerámos  $u \in [0.093, 0.114]$  e os parâmetros assinalados são  $l_1 = \Phi(t(f_{RL}(X, Y)))$ ,  $l_2 = \Phi(t(f_{RL}^2(X, Y)))$  e  $l = \Phi(RRL(LRL)^\infty)$ . Na figura de baixo, ampliamos o intervalo em torno de  $l$ , considerando  $u \in [0.1108, 0.1113]$ . Os parâmetros assinalados são  $l_3 = \Phi(t(f_{LR}^3(X, Y)))$ ,  $l_4 = \Phi(t(f_{LR}^4(X, Y)))$  e  $l = \Phi(RRL(LRL)^\infty)$

Vamos em seguida considerar o caso em que  $Y = (CL^{p-1})^\infty$ .

Para  $X \in \bar{\Sigma}^s \setminus \{(CL^{np-1})^\infty, (CRL^{np-2})^\infty : n \in \mathbb{N}\}$ , , sejam

$$\begin{aligned}s^-(X) &= X_1 \dots X_{l-2} CRL^\infty, \text{ onde } l = \max\{j > 1 : (X_1 \dots X_{|X|-1}(\epsilon(X)L))_j = R\} \\ s^+(X) &= X_1 \dots X_{l-2} CRL^\infty, \text{ onde } l = \max\{j > 1 : (X_1 \dots X_{|X|-1}(\epsilon(X)R))_j = R\}.\end{aligned}$$

Se  $X = (CL^{np-1})^\infty$  então, como  $\epsilon(X)L = L$  apenas podemos calcular  $s^+(X) = L^{np-2}CRL^\infty$ . Se  $X = (CRL^{np-2})^\infty$  então, como  $\epsilon(X)R = L$  apenas podemos calcular  $s^-(X) = RL^{np-3}CRL^\infty$ .

**Exemplo 40.** Consideremos  $p = 3$  e  $s = (011)^\infty$ . Se nos focarmos apenas nas sequências  $X \in \bar{\Sigma}^s$  com  $|X| = 3$ , temos  $X = (CLL)^\infty$ ,  $Y = (CLR)^\infty$ ,  $Z = (CRR)^\infty$  e  $W = (CRL)^\infty$ , então:

$$\begin{array}{lll} X = (CLL)^\infty & s^+(X) = LCRL^\infty \\ Y = (CLR)^\infty & s^-(Y) = LCRL^\infty & s^+(Y) = CRL^\infty \\ Z = (CRR)^\infty & s^-(Z) = CRL^\infty & s^+(Z) = RCRL^\infty \\ W = (CRL)^\infty & s^-(W) = RCRL^\infty \end{array}$$

Se  $s$  for uma  $p$ -sequência e  $X \in \bar{\Sigma}^s$ , as condições dos resultados anteriores são satisfeitas. Além disso,

$$f_L^k(X, Y) = (CX_1 \dots X_{|X|-1}(\epsilon(X)L)(L)^{pk-1})^\infty,$$

$$f_R^k(X, Y) = (CX_1 \dots X_{|X|-1}(\epsilon(X)R)(L)^{pk-1})^\infty$$

e as sequências  $u_k$  e  $v_k$  definidas em (4.1) convergem, respectivamente, para  $u = \Phi(s^-(X))$  e  $v = \Phi(s^+(X))$ . Podemos então enunciar a seguinte proposição.

**Proposição 41.** Sejam  $s$  uma  $p$ -sequência,  $X \in \bar{\Sigma}^s$  e  $Y = (CL^{p-1})^\infty$ , então as sequências

$$u_k = \Phi(t(f_L^k(X, Y)))$$

e

$$v_k = \Phi(t(f_R^k(X, Y)))$$

convergem, respectivamente, para  $u = \Phi(s^-(X))$  e  $v = \Phi(s^+(X))$ . Além disso, o conjunto não autônomo  $\mathcal{A}$  tal que  $\mathcal{A}(i) = \{-1\}$  para todos os  $i$  é um  $(u, s)$  e um  $(v, s)$ -atrator de Milnor.

*Demonstração.* Vamos apenas demonstrar que  $u_k$  converge para  $u$ .

Como, para cada  $k$ ,  $u_k = \Phi(X_1 \dots X_{l-1} RL^{pk-1+|X|-l} CRL^\infty)$ , então

$$|u_k - u| = \frac{1}{2^l} |\Phi(X_{l-1} RL^{pk+|X|+l-1})| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{2^l} |\Phi(X_{l-1} RL^\infty)|.$$

Se  $X_{l-1} = R$ , então

$$\Phi(X_{l-1} RL^\infty) = - \left( -\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{i+1}} \right) = 0.$$

Como, se  $X_{l-1} = L$ , obtemos de forma análoga que  $\Phi(X_{l-1} RL^\infty) = 0$ , concluímos que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = u.$$

□

Como podemos observar no diagrama de bifurcação da Figura 4.3, os parâmetros  $u$  e  $v$ , de certa forma correspondem a parâmetros de separação. Isto é expresso no seguinte resultado.

**Proposição 42.** *Sejam  $s$  uma  $p$ -sequência e  $X \in \bar{\Sigma}^s$  tal que  $p||X|$ . Então*

$$]Cs^-(X), X[\cap \bar{\Sigma}^s = \{Y \in \bar{\Sigma}^s \text{ tal que } Y = CX_1 \dots X_{|X|-1}(\epsilon(X)L) \dots\}$$

e

$$]X, Cs^+(X)[\cap \bar{\Sigma}^s = \{Y \in \bar{\Sigma}^s \text{ tal que } Y = CX_1 \dots X_{|X|-1}(\epsilon(X)R) \dots\}.$$

*Demonstração.* Vamos apenas demonstrar a primeira igualdade, uma vez que a segunda se demonstra de forma análoga.

Seja  $Y \in \bar{\Sigma}^s$  tal que  $s^-(X) < \sigma(Y) < \sigma(X)$ , ou seja,

$$X_1 \dots X_{l-2} CRL^\infty < Y_1 \dots Y_{l-2} \dots < X_1 \dots X_{l-2} X_{l-1} \dots X_{|X|-1} C \dots$$

Temos imediatamente que

$$X_1 \dots X_{l-2} = Y_1 \dots Y_{l-2}.$$

Além disso,  $s^-(X) < \sigma(X)$  e  $Y \in \bar{\Sigma}^s$  implica que  $Y_{l-2} = X_{l-2} = \epsilon_{l-2}(X)R$ . Então,

$$\sigma(X) = X_1 \dots X_{l-2}(\epsilon_{l-2}(X)R)RL^{|X|-l-1}C$$

e  $\epsilon_{l-1}(X) = -$ , logo

$$\sigma(Y) < \sigma(X) \Rightarrow \sigma(Y) = X_1 \dots X_{|X|-1}(\epsilon(X)L).$$

□

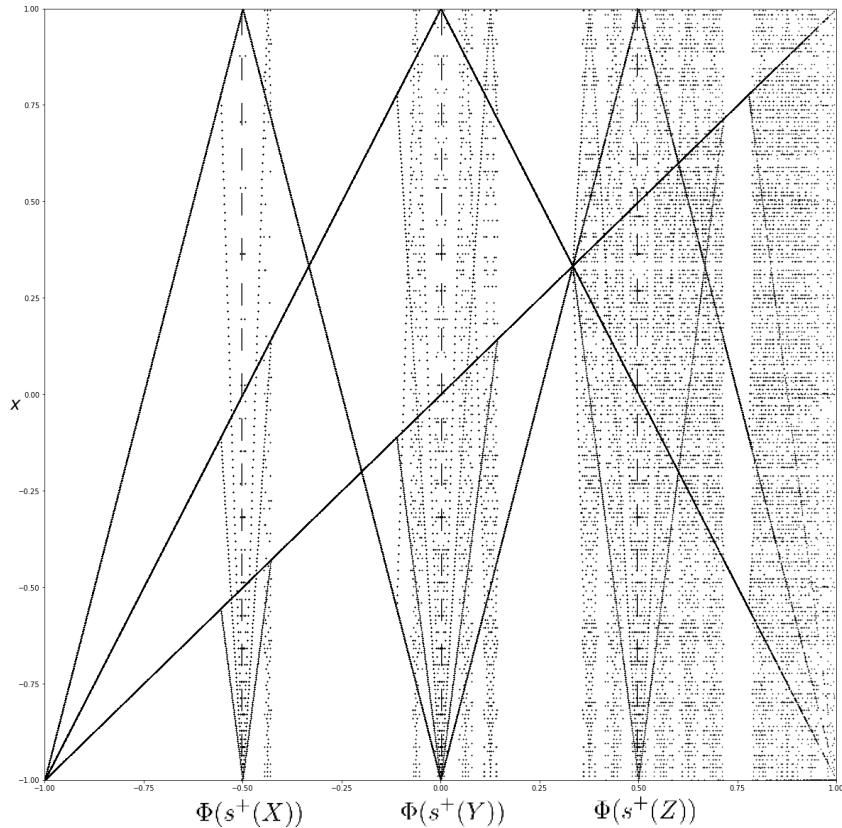


Figura 4.3: Diagrama de bifurcação com  $s = (011)^\infty$  ( $p = 3$ ),  $u \in [-1, 1]$ ,  $X = (CLL)^\infty$ ,  $Y = (CLR)^\infty$ ,  $Z = (CRR)^\infty$ . Se  $u \in ] -1, \Phi(s^+(X)]$  então  $I_T(u) = LL\dots$ , se  $u \in ]\Phi(s^+(X)), \Phi(s^+(Y)[$  então  $I_T(u) = LR\dots$ , se  $u \in ]\Phi(s^+(Y)), \Phi(s^+(Z)[$  então  $I_T(u) = RR\dots$ , se  $u \in ]\Phi(s^+(Z)), 1[$  então  $I_T(u) = RL\dots$ .

**Nota 43.** A redação dos resultados anteriores pode transmitir a ideia de que, se  $s$  for uma  $p$  sequência, então as sequências de incrementos de período com a sequência  $s$  só podem gerar atratores de Milnor correspondentes a órbitas periódicas repulsivas com período múltiplo de  $p$ .

Esta ideia é errada, pois se  $Y = Y_1 \dots Y_q$  e  $p \nmid q$  então podemos tomar  $Y' = (C(Y_1 \dots Y_q)^{n-1} Y_1 \dots Y_{q-1})^\infty$ , onde  $nq = \text{mmc}(p, q)$ .

Por exemplo, se  $p = 3$ , obtemos  $\text{CRL}(LR)^\infty$  e o correspondente atrator de Milnor cuja projeção é uma órbita 2-periódica repulsiva de  $T$ , como limite de  $f_{LR}^k((\text{CRL})^\infty, Y')$  com  $Y' = (\text{CLRRLRL})^\infty$ .

Também com  $p = 3$ , obtemos  $\text{CRL}(R)^\infty$  e o correspondente atrator de Milnor cuja projeção é um ponto fixo repulsivo de  $T$ , como limite de  $f_{RL}^k((\text{CRL})^\infty, Y')$  com  $Y' = (\text{CRR})^\infty$ , ver a Figura 4.4.

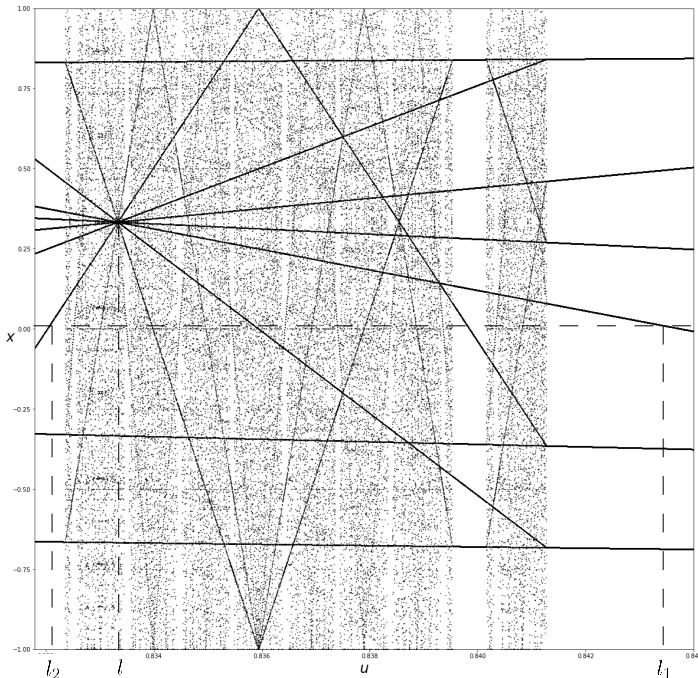


Figura 4.4: Incremento de período convergindo para um ponto fixo repulsivo, com  $s = (011)^\infty$ ,  $X = (\text{CRL})^\infty$  e  $Y' = (\text{CRR})^\infty$ . Considerámos  $u \in [0.8318, 0.844]$  e imprimimos as iteradas  $F_{(u,s)}^i(0,0)$  com  $500 \leq i \leq 1000$ . Os parâmetros assinalados são  $l_1 = \Phi(t(f_{LR}(X, Y')))$ ,  $l_2 = \Phi(t(f_{LR}^2(X, Y')))$  e  $l = \Phi(\text{RLL}(R)^\infty)$ .

**Exemplo 44.** A alteração do padrão de iteração  $s$  pode provocar alterações dramáticas nos cenários de bifurcação.

Consideremos, por exemplo,  $p = 3$  e a sequência de incrementos de período

$$f_{LR}^k((\text{CRR})^\infty, (\text{CLR})^\infty),$$

convergente para a sequência

$$CRRL(LRL)^\infty$$

e originando o correspondente atrator de Milnor.

Para  $s = (011)^\infty$  podemos observar na Figura 4.2 os  $(u, s)$ -atratores locais correspondentes aos incrementos de período e o  $(u, s)$ -atrator de Milnor correspondente.

Contudo, se  $s = (010\ 001)^\infty$  então para qualquer  $U = RRLLRL\dots$  temos que  $\sigma^4(U) > U$  e  $s_{4n} = 0$  para todos os  $n$ , logo qualquer parâmetro  $u$  tal que  $U = I_T(u)$  tenha prefixo  $RRLRL$  gera um  $(u, s)$ -atrator local 4-cíclico que elimina todas as sequências de incremento de período e os atratores correspondentes, ver a Figura 4.5

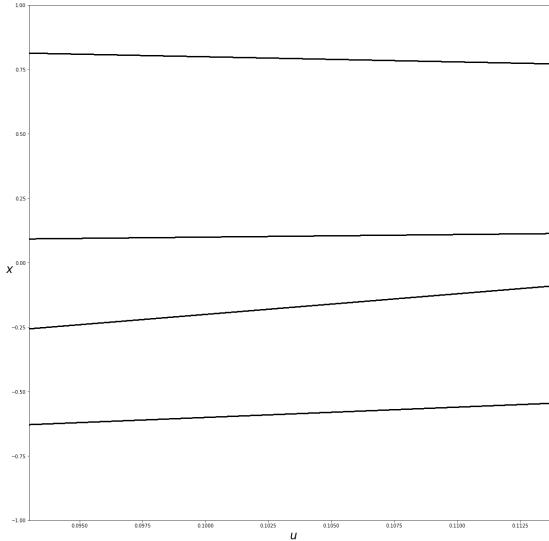


Figura 4.5:  $u \in [0.093, 0.114]$ ,  $s = (010\ 001)^\infty$ . A estrutura de incrementos de período e respetivo atrator de Milnor foram eliminados pelo padrão de iteração.

Neste Capítulo estabelecemos condições suficientes para a admissibilidade das sequências simbólicas como invariantes de amassamento, em função do padrão de iteração. Estas condições permitiram-nos descrever os limitadores correspondentes aos atratores de Milnor como limites de sequências de limitadores, correspondentes a atratores locais cíclicos, organizadas segundo uma estrutura de incrementos de período, cuja existência é fortemente dependente do padrão de iteração considerado.



# Capítulo 5

## Atratores não autónomos locais, para sequências genéricas $\lambda \in [-1, 1]^{\mathbb{N}_0}$

Neste Capítulo, baseado em [21], vamos estudar perturbações sobre os limitadores. Para isso vamos abandonar o foco no padrão de iteração  $s$  e considerar sequências genéricas  $\lambda \in [-1, 1]^{\mathbb{N}_0}$ .

Tal como antes, consideramos a iteração sequencial de funções tenda com um segmento constante,  $f_u : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ ,  $u \in [-1, 1]$  e, para uma sequência  $\lambda \in [-1, 1]^{\mathbb{N}_0}$  definimos a  $n$ -ésima iteração segundo  $\lambda$ , com valor inicial  $x \in [-1, 1]$  e instante inicial  $k$ , como

$$F_\lambda^n(x, k) = (f_{\lambda_{k+n-1}} \circ \dots \circ f_{\lambda_k})(x), \text{ se } n \geq 1$$

e

$$F_\lambda^0(x, k) = x \text{ para todos os } k.$$

Para  $X = (CX_1 \dots X_{|X|-1})^\infty \in \bar{\Sigma}$ , sejam

$$X(R) = (X_1 \dots X_{|X|-1}(\epsilon(X)R))^\infty$$

e

$$X(L) = X_1 \dots X_{|X|-1}(\epsilon(X)L)X(R).$$

Pelo Teorema 7 temos imediatamente que

$$T^{|X|}(\Phi(X(L))) = T^{|X|}(\Phi(X(R))) = \Phi(X(R)).$$

**Definição 45.** Seja  $X \in \bar{\Sigma}$  com  $|X| = p < +\infty$ . Uma sequência  $\lambda \in [-1, 1]^{\mathbb{N}_0}$  é uma  $X$ -sequência se, para todos os  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $\Phi(X(L)) < \lambda_{np} < \Phi(X(R))$  e, para todos os  $0 < j < p$ ,  $\lambda_{np+j} > \max\{\Phi(\sigma^j(X(L))), \Phi(\sigma^j(X(R)))\}$ .

Uma  $X$ -sequência  $\lambda$  é uma  $X$ -sequência estrita se  $\lambda_{np} = \lambda_0$  para todos os  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Os sistemas dinâmicos não autónomos obtidos através de iteração sequencial do tipo  $F_\lambda^n(x, k)$  em que  $\lambda = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  é uma sequência de parâmetros, dizem-se periódicos se  $\lambda$  for uma sequência periódica. Os sistemas não autónomos associados a uma  $X$ -sequência podem ser periódicos ou não, mesmo no caso estrito. Contudo podem ser encarados como perturbações dependentes do tempo, de sistemas periódicos com período  $|X|$ , sendo que a diferença entre os casos estrito e não estrito é que, no caso estrito não são permitidas perturbações nos instantes  $n|X|$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Vamos agora adaptar a Definição 10 ao presente contexto.

**Definição 46.** Sejam  $\mathcal{A} \subset [-1, 1] \times \mathbb{N}_0$  um conjunto não autónomo e  $\lambda \in [-1, 1]^{\mathbb{N}_0}$ .

- $\mathcal{A}$  é  $\lambda$ -invariante, se existir  $k$  tal que  $f_{\lambda_{k'}}(\mathcal{A}(k')) \subset \mathcal{A}(k' + 1)$  para todos os  $k' > k$ .
- $\mathcal{A}$  é  $\lambda$ -localmente atrativo se for  $\lambda$ -invariante e existir  $k$  tal que, para cada  $k' > k$  existe uma vizinhança  $\mathcal{A}'(k')$  de  $\mathcal{A}(k')$  em  $[-1, 1]$  tal que, para algum  $n$ ,  $F_\lambda^n(\mathcal{A}'(k')) \subset \mathcal{A}(k' + n)$ .

**Definição 47.** Seja  $\lambda \in [-1, 1]^{\mathbb{N}_0}$ , então um  $\lambda$ -atrator local não autónomo p-cíclico é um subconjunto não autónomo próprio,  $\mathcal{A} \subsetneq [-1, 1] \times \mathbb{N}_0$  com projeção fechada,  $\lambda$ -localmente atrativo e p-cíclico.

**Nota 48.** Notemos que, nesta definição de atrator local não autónomo deixámos caír a condição do conjunto ter projeção minimal. Isto deve-se ao facto de, neste caso, o objetivo principal ser o de controlar as perturbações de modo a preservar um conjunto não autónomo cíclico que atrai a generalidade das órbitas. Apesar de no caso estrito a minimalidade da projeção ser automaticamente garantida, no caso geral tal não seria possível sem impor mais condições sobre a sequência  $\lambda$ , ver a Figura 5.1.

Sejam  $X \in \bar{\Sigma}$  uma sequência simbólica com  $|X| = p < +\infty$ ,  $\lambda$  uma  $X$ -sequência, e

$$J_i = \left[ \frac{\lambda_i - 1}{2}, \frac{1 - \lambda_i}{2} \right]$$

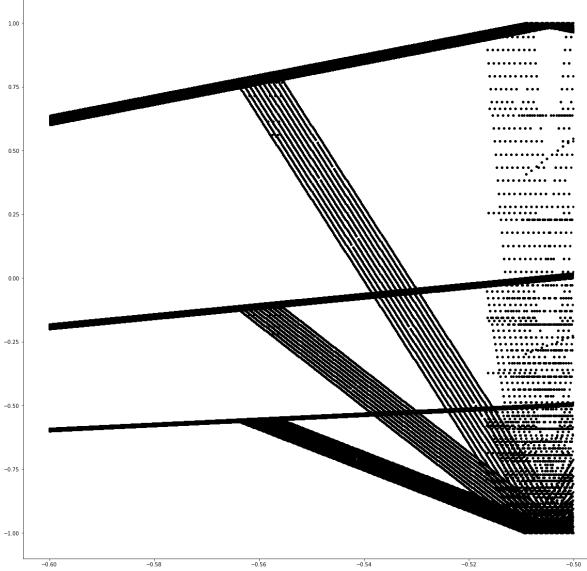


Figura 5.1: Um diagrama de bifurcação com uma sequência de  $\lambda$ -atratores locais não autónomos  $p$ -periódicos com períodos consecutivamente duplicados  $p = 3, 6, \dots$ , para sequências  $\lambda$ , tais que  $\lambda_0$  varia entre  $-0.6$  e  $-0.5$ ,  $\lambda_{3n+1} = \lambda_{3n+2} = 1$  e  $\lambda_{3n} = \lambda_0 + 0.001r_n$ , onde os  $r_n$  são inteiros aleatórios entre  $0$  e  $9$ .

os segmentos constantes de  $f_{\lambda_i}$  para cada  $i$ . Consideremos então os segmentos constantes generalizados

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(f_{\lambda_{(n+1)p-1}} \circ \dots \circ f_{\lambda_{np}}) &= J_{np} \cup f_{\lambda_{np}}^{-1}(J_{np+1}) \cup \dots \\ &\quad \cup (f_{\lambda_{(n+1)p-2}} \circ \dots \circ f_{\lambda_{np}})^{-1}(J_{(n+1)p-1}) \\ &\quad \vdots \\ \mathcal{P}(f_{\lambda_{(n+2)p-2}} \circ \dots \circ f_{\lambda_{(n+1)p-1}}) &= J_{(n+1)p-1} \cup f_{\lambda_{(n+1)p-1}}^{-1}(J_{(n+1)p}) \cup \dots \\ &\quad \cup (f_{\lambda_{(n+2)p-3}} \circ \dots \circ f_{\lambda_{(n+1)p-1}})^{-1}(J_{(n+2)p-2}). \end{aligned}$$

Consideremos também os intervalos  $A_i = T^{i-1}([\Phi(X(L)), \Phi(X(R))])$ ,  $i = 1, \dots, p$  ( $T^0 \equiv id$ ), ver a Figura 5.2.

**Lema 49.** Sejam  $X \in \bar{\Sigma}$  uma sequência simbólica com  $|X| = p < +\infty$ , e

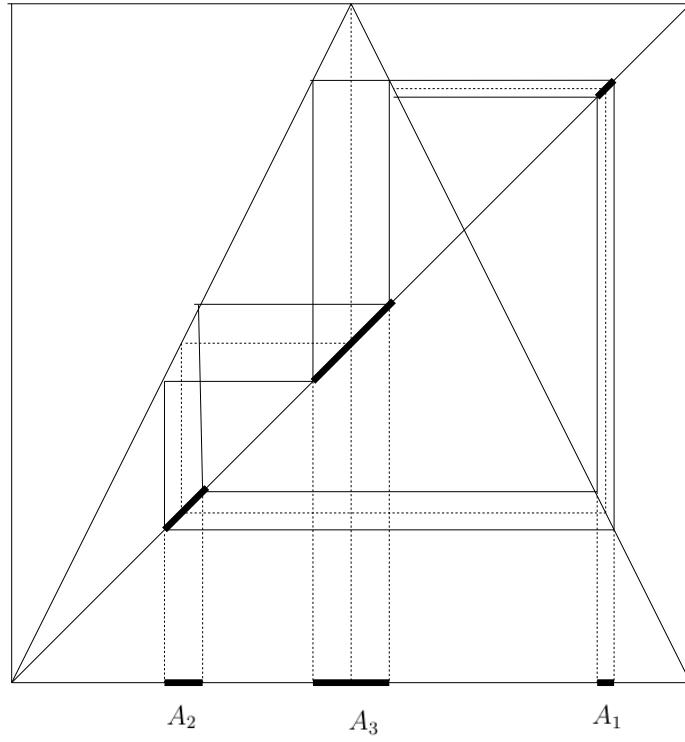


Figura 5.2: Construção dos conjuntos  $A_i$  para  $X = (CRL)^\infty$ ,  $X(R) = (RLL)^\infty$  e  $X(L) = RLR(RLL)^\infty$ .

$\lambda \in [-1, 1]^{\mathbb{N}_0}$  uma  $X$ -sequência. Então, para todos os  $n \in \mathbb{N}_0$ ,

$$\begin{aligned}
 A_p &\subset \mathcal{P}(f_{\lambda_{(n+1)p-1}} \circ \dots \circ f_{\lambda_{np}}), \\
 A_1 &\subset \mathcal{P}(f_{\lambda_{(n+1)p}} \circ \dots \circ f_{\lambda_{np+1}}), \\
 &\vdots \\
 A_{p-1} &\subset \mathcal{P}(f_{\lambda_{(n+2)p-2}} \circ \dots \circ f_{\lambda_{(n+1)p-1}})
 \end{aligned}$$

*Demonstração.* Notemos que, ao longo desta demonstração, os extremos dos intervalos podem não estar na ordem correta, ou seja, podemos escrever  $]a, b[$  com  $b < a$ .

Agora, como  $\epsilon_i(X(L)) = \epsilon_i(X(R))$  para todos os  $i = 0, \dots, p-1$ , pelo

**Teorema 7**

$$\begin{aligned} A_p &= T^{p-1}([\Phi(X(L)), \Phi(X(R))]) \\ &= [\Phi(\sigma^{p-1}(X(L))), \Phi(\sigma^{p-1}(X(R)))] \\ &= [\Phi((\epsilon(X)L)X(R)), \Phi((\epsilon(X)R)X(R))] \end{aligned}$$

então, como  $\lambda_{np} < \Phi(X(R))$ ,

$$[\Phi((\epsilon(X)L)X(R)), \Phi((\epsilon(X)R)X(R))] \subset J_{np} \subset \mathcal{P}(f_{\lambda_{(n+1)p-1}} \circ \dots \circ f_{\lambda_{np}}).$$

Para  $i = 1, \dots, p-1$  e  $j < p-i$ , como  $\lambda$  é uma  $X$ -sequência,

$$\begin{aligned} f_{\lambda_{np+i+j-1}} \circ \dots \circ f_{\lambda_{np+i}}(A_i) &= T^j(A_i) \\ &= T^{i+j-1}([\Phi(X(L)), \Phi(X(R))]) \\ &= [\Phi(\sigma^{i+j-1}(X(L))), \Phi(\sigma^{i+j-1}(X(R)))] \end{aligned}$$

então, para  $j = p-i-1$ ,

$$f_{\lambda_{np+p-1}} \circ \dots \circ f_{\lambda_{np+i}}(A_i) = T^{p-1}(A_1) \subset J_{(n+1)p},$$

e então

$$A_i \subset (f_{\lambda_{np+p-1}} \circ \dots \circ f_{\lambda_{np+i}})^{-1}(J_{(n+1)p}) \subset \mathcal{P}(f_{\lambda_{np+i+p-1}} \circ \dots \circ f_{\lambda_{np+i}}).$$

□

**Lema 50.** Sob as condições do lema anterior, se  $x \in A_i$  então, para todos os  $j \leq p-i$  e todos os  $n \in \mathbb{N}_0$

$$(f_{\lambda_{np+i+j-1}} \circ \dots \circ f_{\lambda_{np+i}})(x) = T^j(x).$$

*Demonstração.* Se  $x \in A_i$  então  $T(x) \in [T^i(\Phi(X(L))), T^i(\Phi(X(R)))]$ , logo, como

$\lambda_{np+i} > \max\{\Phi(\sigma^i(X(L))), \Phi(\sigma^i(X(R)))\}$ , então  $T(x) = f_{\lambda_{np+i}}(x)$ . Uma vez que  $T(x) \in A_{i+1}$  a demonstração segue indutivamente. □

É imediato deduzir o seguinte corolário.

**Corolário 51.** Sejam  $X \in \bar{\Sigma}$  com  $|X| = p < +\infty$  e  $\lambda \in [-1, 1]^{\mathbb{N}_0}$  uma  $X$ -sequência, então, para todos os  $n \in \mathbb{N}_0$  e  $j = 0, \dots, p-1$ ,

$$(f_{\lambda_{np+j}} \circ \dots \circ f_{\lambda_{np}})(0) = T^j(\lambda_{np}),$$

e

$$(f_{\lambda_{(n+1)p}} \circ \dots \circ f_{\lambda_{np+1}})(\lambda_{np}) = \lambda_{(n+1)p}.$$

**Teorema 52.** Sejam  $X \in \bar{\Sigma}$  com  $|X| = p < +\infty$  e  $\lambda \in [-1, 1]^{\mathbb{N}_0}$  uma  $X$ -sequência, então o conjunto não autônomo  $\mathcal{A}_\lambda$ , em que

$$\mathcal{A}_\lambda(0) = A_p \text{ e } \mathcal{A}_\lambda(np + j) = A_j \text{ para todos os } n \in \mathbb{N}_0 \text{ e } j = 1, \dots, p,$$

é um  $\lambda$ -atrator local não autônomo  $p$ -cíclico.

*Demonstração.*  $\mathcal{A}_\lambda$  é  $p$ -periódico pela definição e é  $\lambda$ -invariante pelo Lema 50.

Finalmente vamos ver que  $\mathcal{A}_\lambda$  é  $\lambda$ -localmente atrativo.

Vamos demonstrar que, para todos os  $n \in \mathbb{N}_0$  e todos os  $0 \leq j < p - 1$ , existe uma vizinhança  $V_{n,j}$  de  $A_j$  tal que

$$F_\lambda^p(V_{n,j}, np + j) \subset \mathcal{A}_\lambda((n+1)p + j)$$

e então o resultado segue da  $p$ -periodicidade e da  $\lambda$ -invariância de  $\mathcal{A}_\lambda$ .

Em primeiro lugar consideramos  $j = 0$ . Como  $\Phi(X^L) < \lambda_{np} < \Phi(X^R)$ ,  $J_{np}$  é uma vizinhança de  $A_{np} = A_0$  e, pelo Lema 50,

$$\begin{aligned} F_\lambda^p(J_{np}, np) &= F_\lambda^p(A_0, np) \\ &= T^{p-1}(\lambda_{np}) \subset A_0 = \mathcal{A}_\lambda((n+1)p) . \end{aligned}$$

Consideramos agora  $j > 0$ . Da demonstração do Lema 49, para todos os  $n \in \mathbb{N}_0$  e  $0 \leq j < p$  podemos tomar  $V_{n,j}$ , a componente conexa de  $(f_{\lambda_{np+p-1}} \circ \dots \circ f_{\lambda_{np+j}})^{-1}(J_{(n+1)p})$  que contém  $A_j$ . Para além disso, como  $\lambda_{(n+1)p} < \Phi(X^R)$ ,  $V_{n,j}$  é uma vizinhança de  $A_j$  e

$$\begin{aligned} (f_{\lambda_{(n+1)p+j-1}} \circ \dots \circ f_{\lambda_{(n+1)p}} \circ \dots \circ f_{\lambda_{np+j}})(V_{n,j}) &= \\ (f_{\lambda_{(n+1)p+j-1}} \circ \dots \circ f_{\lambda_{(n+1)p}} \circ \dots \circ f_{\lambda_{np+j}})(A_j) &= . \\ \{T^{j-1}(\lambda_{(n+1)p})\} \subset A_j \end{aligned}$$

□

**Teorema 53.** Sejam  $X \in \bar{\Sigma}$  com  $|X| = p < +\infty$  e  $\lambda \in [-1, 1]^{\mathbb{N}_0}$  uma  $X$ -sequência estrita, então o conjunto não autônomo  $\mathcal{B}_\lambda$  tal que

$$\mathcal{B}_\lambda(0) = \mathcal{B}_\lambda(p) \text{ e } \mathcal{B}_\lambda(j + np) = \{F_\lambda^j(0, 0)\} \text{ para todos os } n \in \mathbb{N}_0 \text{ e } j = 1, \dots, p,$$

é um  $\lambda$ -atrator local não autônomo  $p$ -cíclico.

*Demonstração.*  $\mathcal{B}_\lambda$  é  $p$ -cíclico pela definição e, pelo Lema 50, é também  $\lambda$ -invariante.

Pelo Corolário 51, como  $\lambda$  é estrito então para todos os  $n \in \mathbb{N}_0$  e  $j = 0, \dots, p-1$

$$(f_{\lambda_{np+j}} \circ \dots \circ f_{\lambda_{np}})(0) = T^j(\lambda_{np}) = T^j(\lambda_0),$$

logo, Pelo Lema 49, para todos os  $n$

$$\mathcal{B}_\lambda(j+np) = T^j(\lambda_0) = T^j(\lambda_{np}) \subset \mathcal{P}(f_{\lambda_{(n+1)p+j}} \circ \dots \circ f_{\lambda_{np+j+1}}).$$

Consequentemente, se  $C_j$  é a componente conexa de  $\mathcal{P}(f_{\lambda_{(n+1)p+j}} \circ \dots \circ f_{\lambda_{np+j+1}})$  que contém  $\mathcal{B}_\lambda(j+np)$ , então, para todos os  $n' \geq p$

$$\begin{aligned} F_\lambda^{n'}(C_j, j+np) &= F_\lambda^{n'}(\mathcal{B}_\lambda(j+np), j+np) \\ &= (\mathcal{B}_\lambda(j+np+n'), j+np+n'). \end{aligned}$$

□

Concluímos dos resultados deste capítulo, que a estrutura dos atratores locais é robusta em relação a perturbações sobre os limitadores.



# Capítulo 6

## Discussão e conclusões

Já se sabia que a introdução de limitadores simples em sistemas dinâmicos discretos unidimensionais pode criar órbitas periódicas super estáveis e também atratores de Milnor. A partir do exposto no Capítulo 3 concluímos não ser necessário introduzir os limitadores em todos os passos de iteração para criar estes atratores. Para além disso, os sistemas não autónomos estudados exibem uma riqueza de diferentes comportamentos que não são possíveis no caso unimodal autónomo. Ao contrário do caso autónomo, em que cada limitador  $u$  pode levar à criação de, no máximo um atrator, e os atratores locais são cílicos, no caso não autónomo, dependendo do padrão de iteração escolhido, cada limitador  $u$  pode criar vários atratores diferentes, os atratores locais podem não ser cílicos e podem coexistir vários atratores, do mesmo tipo ou de tipos diferentes.

No Capítulo 4, exploramos a riqueza combinatória das iterações segundo padrões, ao procurar estabelecer as condições para a admissibilidade das sequências simbólicas como invariantes de amassamento, em função do padrão de iteração. Estas condições permitiram-nos descrever os limitadores correspondentes aos atratores de Milnor como limites de sequências de limitadores, correspondentes a atratores locais cílicos, organizadas segundo uma estrutura de incrementos de período.

A descrição dos atratores de Milnor como limites de sequências de incrementos de período, juntamente com a generalização do produto  $*$  de [22] a padrões de iteração que são  $p$ -sequências, permitir-nos-á uma descrição completa da estrutura dos diagramas de bifurcação neste contexto, os quais, como se observa no final do Capítulo, são altamente dependentes do padrão de iteração.

Por fim, os resultados do Capítulo 5 mostram que a estrutura dos atratores locais é robusta em relação a perturbações dos limitadores. Seria interessante

considerar perturbações nos limitadores da família de funções tendas abertas introduzida em [27], uma vez que, nesta família de funções, as perturbações nos limitadores induzem perturbações nos ramos não constantes da respetiva função tenda.

Em [8] afirma-se que, em termos biológicos, a aplicação de um limitador simples à função unidimensional corresponde a medidas de controlo, tais como abate, caça ou captura de uma população. Contudo, também se observa que a aplicação de um limitador de controlo a uma variável de estado pode alterar significativamente o valor médio, tornando esta medida contra-eficaz em muitas situações.

De forma semelhante, em [7] observa-se que a introdução de limitadores inferiores nos preços pode baixar o preço médio e a introdução de limitadores superiores pode aumentá-lo. Também se observa que as políticas de limitação de preços podem ter custos substanciais para as autoridades centrais. Por exemplo, para evitar que o preço caia abaixo (acima) do preço mínimo (máximo), a autoridade central tem que comprar (vender) permanentemente uma fração da mercadoria fornecida (armazenada). É então razoável esperar que a redução do número de vezes em que são introduzidos os limitadores possa reduzir os custos de implementação. Seria então interessante tentar aplicar os nossos métodos aos modelos de [8] e de [7] para tentar controlar os valores médios e reduzir os custos de implementação.

No contexto do Capítulo 3 o parâmetro  $u$  define o limitador e o padrão de iteração  $s$  define a estratégia de implementação do limitador. Por exemplo, considerando a introdução do limitador  $u = 0.521$  obtemos o mesmo  $(u, s)$ -atrator local 2-cíclico  $\mathcal{A}$  com  $P(\mathcal{A}) = \{-0.042, 0.521\}$  quer o limitador seja aplicado de forma permanente ( $s = 0^\infty$ ) ou alternadamente ( $s = (01)^\infty$ ), potencialmente reduzindo custos. Por outro lado, para  $s = (01^{11})^\infty$  obtemos um atrator local 12-cíclico com um valor médio das órbitas diferente e um custo de implementação ainda mais baixo.

Apesar de termos apenas considerado funções tenda com segmentos constantes, os resultados apresentados podem ser estendidos a outras famílias de funções unimodais com segmentos constantes, como por exemplo a família de quadráticas

$$f_u(x) = \min\{u, 1 - 2x^2\}, \quad u \in [-1, 1].$$

O abandono da restrição  $\lambda_i = 1$  se  $s_i = 1$ , nas iterações segundo um padrão binário, considerando duas funções tenda com segmento constante  $f_{u_0}$  se  $s_i = 0$  e  $f_{u_1}$  se  $s_i = 1$  com  $-1 \leq u_0, u_1 \leq 1$  vai trazer ainda mais complexidade, tal como a coexistência de atratores relacionados com ambos os limitadores, bifurcações

com codimensão dois, como as estudadas em [25], dinâmica simbólica complicada, etc.. Por outro lado é expectável que esta generalização tenha bastantes semelhanças com a generalização a funções seccionalmente lineares  $l$ -modais com  $l - 1$  patamares.



# Bibliografia

- [1] V. Avrutin, B. Futter, L. Gardini and M. Schanz *Unstable orbits and Milnor attractors in the discontinuous flat top tent map*, ESAIM: PROCEEDINGS, **Vol. 36** (2012), 126–158.
- [2] V. Avrutin, L. Gardini, I. Sushko and F. Tramontana, *Continuous and Discontinuous Piecewise-Smooth One-Dimensional Maps: Invariant Sets and Bifurcation Structures*, World Scientific Series on Nonlinear Science, **Series A Vol. 95** (2019).
- [3] P. Collet and J-P Eckmann, *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems*, Birkhäuser, Boston (2009).
- [4] N.J. Corron, S.D. Pethel, and B.A. Hopper, *Controlling Chaos with Simple Limiters*, Phys. Rev. Lett, **84(17)** (2000), 3835–3838.
- [5] M.-F. Danca, P. Bourke and M. Romera, *Graphical exploration of the connectivity sets of alternated julia sets*, Nonlinear Dynamics, **73**(1-2), (2013), 1155–1163.
- [6] M.-F. Danca, M. Romera and G. Pastor *Alternated julia sets and connectivity properties*, International Journal of Bifurcation and Chaos, **19**(06), (2009), 2123–2129.
- [7] X.-Z. He and F. H. Westerhoff, *Bifurcations in flat-topped maps and the control of cardiac chaos*, J. Econ. Dyn. Control, **29** (2005), 1577–1596.
- [8] F. M. Hilker and F. H. Westerhoff, *Paradox of simple limiter control*, Phys. Rev. E, **73** (2006), 052901.
- [9] M. J. Feigenbaum, *Quantitative universality for a class of nonlinear transformations*, Journal of Statistical Physics, **19** (1978), 25–52.

- [10] A. Garfinkel, M. Spano, W. Ditto, and J. Weiss, *Controlling cardiac chaos*, Science, **257** (1992), 1230–1235.
- [11] L. Glass and W. Zeng, *Bifurcations in flat-topped maps and the control of cardiac chaos*, International Journal of Bifurcation and Chaos, **Vol. 4** (1994), 1061–1067.
- [12] Y. Matsuoka and T. Saito *Rotation Map with a Controlling Segment and Its Application to A/D Converters*, IEICI Trans. Fundamentals, **E91-A(7)** (2008), 1725–1732.
- [13] N. Metropolis, M. L. Stein, and P. R. Stein *On Finite Limit Sets for Transformations on the Unit Interval*, J. Comb. Theory., **A15** (1973), 25–44.
- [14] J. Milnor *On the Concept of Attractor*, Commun. Math. Phys., **Vol. 99** (1985), 177–195.
- [15] J. Milnor and W. Thurston *On iterated maps of the interval*, In Dynamical systems (College Park, MD, 1986–87), volume 1342 of Lecture Notes in Math., 465–563. Springer, Berlin, 1988.
- [16] K. Myneni, T. A. Barr, N. J. Corron, and S. D. Pethel *New method for the control of fast chaotic oscillations.*, Phys. Rev. Lett., **83** (1999), 2175–2178.
- [17] C. Pötzsche, *Bifurcations in Nonautonomous Dynamical Systems: Results and tools in discrete time*, in Proceedings of the International Workshop Future Directions in Difference Equations (eds. E. Liz and V. Mañosa ), Universidade de Vigo, Vigo, (2011), 163–212.
- [18] A. Rădulescu, *The connected Isentropes conjecture in a space of quartic polynomials*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, **19(1)** (2007), 139–175.
- [19] A. Rădulescu and A. Pignatelli, *Symbolic template iterations of complex quadratic maps*, Nonlinear Dynamics, **84** (2016), 2025–2042.
- [20] M. Rasmussen, *Attractivity and Bifurcation for Nonautonomous Dynamical Systems*, Lect. Notes in Mathematics, **Vol 1907**, Springer (2007).
- [21] L. Silva, *Periodic attractors of nonautonomous flat-topped tent systems*, Discrete and Continuous Dynamical Systems - B, **Vol. 24** (2018), 1867–1874.

- [22] L. Silva, *Bifurcation scenarios under symbolic template iterations of flat top tent maps*, in Progress on Difference Equations and Discrete Dynamical Systems, Proceedings of ICDEA 2019 (eds. Baigent, Steve, Bohner, Martin, Elaydi, Saber ), Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, (2020), 423–433.
- [23] L. Silva, *Attractors in pattern iterations of flat top tent maps*, Mathematics 2023, 11(12), 2677.
- [24] L. Silva, *Period incrementing and attractors on nonautonomous flat top tent maps*, em fase final de preparação.
- [25] L. Silva, J. L. Rocha and M. T. Silva, *Bifurcations of 2-periodic nonautonomous stunted tent systems*, Int. J. Bifurcation Chaos, **Vol. 27** (2017), 1730020 [17 pages].
- [26] M. T. Silva, L. Silva, and S. Fernandes, *Convergence rates for sequences of bifurcation parameters of nonautonomous dynamical systems generated by flat top tent maps*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, **Vol. 81** (2020), 105007.
- [27] R. Stoop and C. Wagner, *Scaling Properties of Simple Limiter Control*, Phys. Rev. Lett., **90** (2003), 154101–154104.
- [28] C. Wagner and R. Stoop, *Optimized chaos control with simple limiters*, Phys. Rev. E, **63** (2000), 17201–17203.
- [29] C. Wagner and R. Stoop, *Renormalization Approach to Optimal Limiter Control in 1-D Chaotic Systems*, Journal of Statistical Physics, **Vol. 106** (2002), 97–106.