

Notas de Física Geral

**Departamento de Física
Universidade de Évora**

António Correia

(Versão 2021)

Índice

Capítulo I - Dimensões e Unidades em Física	3
Capítulo II - Mecânica - Cinemática	9
Capítulo III - Mecânica – Dinâmica	51
Capítulo IV - Conceito de momento linear, conservação do momento linear e colisões	66
Capítulo V - Conceitos de trabalho e energia	74
Capítulo VI - Conceito de momento linear, conservação do momento linear e colisões	97
Capítulo VII - Gravitação Universal	106
Capítulo VIII - Equilíbrio estático	120
Capítulo IX - Movimento linear e movimento rotacional: síntese	128
Capítulo X - Oscilações e ondas	138

Capítulo I

Dimensões e Unidades em Física

As leis da física são expressas em termos de quantidades básicas que requerem uma clara definição para efeitos de medições. Entre essas quantidades medidas estão o comprimento, o tempo, a massa, a temperatura, etc. A fim de descrever qualquer quantidade física, primeiro temos que definir uma unidade de medida (que estava entre as primeiras ferramentas inventadas por humanos), ou seja, uma medida que é definido como 1,0. Depois disso, definimos um padrão para esta quantidade, ou seja, uma referência para comparar todos os outros exemplos da mesma quantidade física.

O Sistema Internacional de Unidades

Sete grandezas físicas foram selecionadas como grandezas básicas na 14ª Conferência Geral sobre Pesos e Medidas, realizada na França em 1971. Essas quantidades formam a base do Sistema Internacional de Unidades, abreviado SI (do francês *Système International*). A Tabela 1.1 descreve essas quantidades, nomes da unidade e símbolos da unidade. Muitas unidades derivadas do SI são definidas em termos das três primeiras quantidades da Tabela 1.1. Por exemplo, a unidade SI para força, chamada newton (abreviado N), é definida em termos das unidades básicas de massa, comprimento e tempo. Assim, como veremos quando estudarmos a segunda lei de Newton, a unidade de força é dada por:

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg.m} / \text{s}^2 \quad (1.1)$$

Ao trabalhar em Física com números muito grandes ou muito pequenos usamos a chamada notação científica que emprega potências de 10, tais como:

$$3\,210\,000\,000 \text{ m} = 3,21 \times 10^9 \text{ m} \quad (1.2)$$

$$0,0000\,789 \text{ s} = 7,89 \times 10^{-7} \text{ s} \quad (1.3)$$

Table 1.1 – As sete unidades SI independentes.

Grandeza	Unidade	Símbolo
Comprimento	Metro	m
Tempo	Segundo	s
Massa	Quilograma	kg
Temperatura	Kelvin	K
Corrente eléctrica	Ampere	A
Quantidade de substância	Mole	mol
Intensidade luminosa	Candela	cd

Uma outra maneira muito conveniente para lidar com números muito grandes ou muito pequenos é usar os prefixos listados na Tabela 1.2. Cada um desses prefixos representa uma certa potência de 10.

Tabela 1.2 - Prefixos para unidades SI ^a.

Fator	Prefixo	Símbolo	Fator	Prefixo	Símbolo
10^{24}	yota	Y	10^{-24}	yocto	y
10^{21}	zeta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{18}	exa	E	10^{-18}	ato	a
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	f
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	p
10^9	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^6	mega	M	10^{-6}	micro	μ
10^3	kilo	k	10^{-3}	mili	m
10^2	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^1	deca	da	10^{-1}	deci	d

^a Os prefixos mais usados são mostrados em negrito.

Assim, podemos expressar a intensidade de uma dada força como

$$1,23 \times 10^6 \text{ N} = 1,23 \text{ mega newton} = 1,23 \text{ MN} \quad (1.4)$$

ou um dado intervalo de tempo como

$$1,23 \times 10^{-9} \text{ s} = 1,23 \text{ nano segundos} = 1,23 \text{ ns} \quad (1.5)$$

Padrões de comprimento, tempo e massa

As definições das unidades de comprimento, tempo e massa estão sob constante revisão e são alteradas regularmente de acordo com o avanço da ciência. Nos parágrafos seguintes apresentam-se as últimas definições dessas quantidades.

Dimensões e unidades

Comprimento (L)

Em 1983, o metro foi redefinido como a distância percorrida por uma onda luminosa no vácuo durante um intervalo de tempo especificado. A razão desta escolha tem a ver com o facto de a medição da velocidade da luz se ter tornado muito precisa; por isso fez sentido adotar a velocidade de luz como uma quantidade definida e usá-la para redefinir o padrão metro. De acordo com a 17ª Conferência Geral sobre Pesos e Medidas:

Um metro é a distância percorrida pela luz no vácuo durante o intervalo de tempo de 1/299 792 458 de um segundo.

Este intervalo de tempo foi escolhido de modo a que a velocidade da luz no vácuo, c , seja exatamente dado por:

$$c = 299\,792\,458 \text{ m / s} \quad (1.7)$$

Para fins práticos, normalmente, usa-se o valor $c = 3 \times 10^8$ m/s.

Tabela 1.3 - Alguns comprimentos aproximados.

Comprimento	Metros
Distância até a galáxia mais distante conhecida	4×10^{25}
Distância até a estrela mais próxima	4×10^{16}
Distância da Terra ao Sol	$1,5 \times 10^{11}$
Distância da Terra à Lua	4×10^8
Raio médio da Terra	6×10^6
Comprimento de onda de luz	5×10^{-7}
Raio do átomo de hidrogénio	5×10^{-11}
Raio do próton	1×10^{-15}

Tempo (T)

Recentemente, o padrão de tempo foi redefinido para aproveitar as vantagens da alta precisão que pode ser obtida usando um dispositivo conhecido como relógio atômico. O céσιο é o elemento mais comum que normalmente é usado na construção de relógios atômicos porque nos permite obter uma elevada precisão. Desde 1967, o Sistema Internacional de Medidas baseia a unidade do tempo, o segundo, nas propriedades do isótopo 133 de céσιο. Uma das transições entre dois níveis de energia do estado fundamental de céσιο tem uma frequência de oscilação de 9 192 631 770 Hz, que é usada para definir o segundo em unidades SI. A incerteza é de cerca de 5×10^{-16} s (em 2005). Isso significa um segundo em 64 milhões de anos.

Um segundo é o tempo necessário para o átomo de céσιο 133 realizar 9 192 631 770 oscilações para emitir radiação de um comprimento de onda específico.

A Tabela 1.4 mostra alguns intervalos de tempo aproximados.

Tabela 1.4 - Alguns aproximados intervalos de tempo.

Intervalos de tempo	Segundos
Vida útil do próton	1×10^{39}
Idade do universo	5×10^{17}
Idade da Terra	$1,3 \times 10^{17}$
Período de um ano	$3,2 \times 10^7$
Tempo entre batimentos cardíacos humanos	8×10^{-1}
Período de ondas sonoras audíveis	1×10^{-3}
Período de ondas de luz visível	2×10^{-15}
Tempo para luz percorrer o diâmetro do próton	$3,3 \times 10^{-24}$

Massa (M)

O Quilograma Padrão é constituída por um cilindro de 3,9 cm de diâmetro e 3,9 cm de altura feita de uma liga estável de platina e irídio que é mantido no “International Bureau of Weights and Measures”, perto de Paris, e ao qual se atribui o valor de 1 quilograma, por acordo internacional.

Um quilograma é definido como a massa de um cilindro de uma liga de platina e irídio mantido no Instituto Internacional de Pesos e Medidas em França.

Cópias precisas deste padrão de 1 quilograma foram enviadas para laboratórios de padronização noutros países. A Tabela 1.5 apresenta alguns valores da massa aproximada de vários objetos.

Tabela 1.5 - Massa de vários objetos (valores aproximados).

Objeto	Quilogramas
Universo conhecido	1×10^{53}
Nossa galáxia, a Via Láctea	2×10^{41}
Sol	2×10^{30}
Terra	6×10^{24}
Lua	7×10^{22}
Montanha pequena	1×10^{12}
Elefante	5×10^3
Pessoa	7×10^1
Mosquito	1×10^{-5}
Bactéria	1×10^{-15}
Átomo de urânio	4×10^{-25}
Protão	2×10^{-27}
Elétrão	9×10^{-31}

Capítulo II

Mecânica - Cinemática

A mecânica é o ramo da física que estuda o movimento dos objetos, ou a falta dele quando há forças aplicadas. É essencial para os outros ramos da física. O capítulo da mecânica que descreve o movimento de objetos, independentemente do que provoca esse movimento, é chamado de cinemática; quando estudamos esse movimento tendo em consideração as ações (forças) a que ele está sujeito estamos no campo da dinâmica; finalmente, quando estudamos a falta de movimento, mesmo havendo forças aplicadas, estamos no campo da estática. Assim, na cinemática estudamos a velocidade e a variação da velocidade dos objetos e o tempo em que essas variações ocorrem no espaço; contudo, em primeiro lugar, vamos estudar o movimento de um objeto ao longo de uma linha reta; os objetos serão tratados como partículas, i. e., como pontos materiais onde toda a sua massa esta concentrada.

Cinemática: conceitos de posição e deslocamento

Para localizar um objeto num espaço unidimensional, encontramos sua posição em relação a algum ponto de referência, chamado de origem de um eixo, como o eixo x da Fig. 1. A direção positiva (negativa) deste eixo é a direção de aumento (diminuição) dos valores numéricos. Uma mudança na posição do objeto (Δx) de uma posição inicial x_i para uma posição final x_f

$$\Delta x = x_f - x_i \quad (2.1)$$

tem o nome de deslocamento e é uma grandeza vetorial caracterizada por uma direção, um sentido e uma intensidade (ou magnitude). A intensidade é a distância entre as posições inicial e final e o sentido é representado na Fig. 1 por um sinal mais ou menos para movimentos para a direita ou para a esquerda, respetivamente.

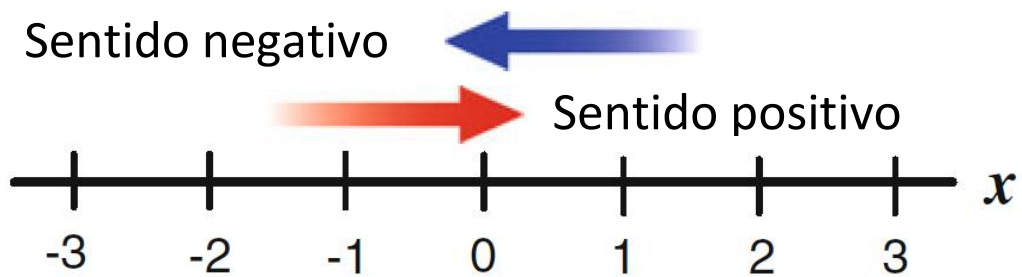


Figura 1

Conceito de velocidade média

Considere uma partícula que se move ao longo do eixo x ; o gráfico da posição em função do tempo é mostrado na Fig. 2. No ponto P a sua posição é x_i e o tempo é t_i ; no ponto Q a sua posição é x_f e o tempo é t_f (os índices i e f referem-se aos valores inicial e final para as variáveis x e t). Assim, durante o intervalo de tempo $\Delta t = t_f - t_i$, o deslocamento da partícula é $\Delta x = x_f - x_i$.

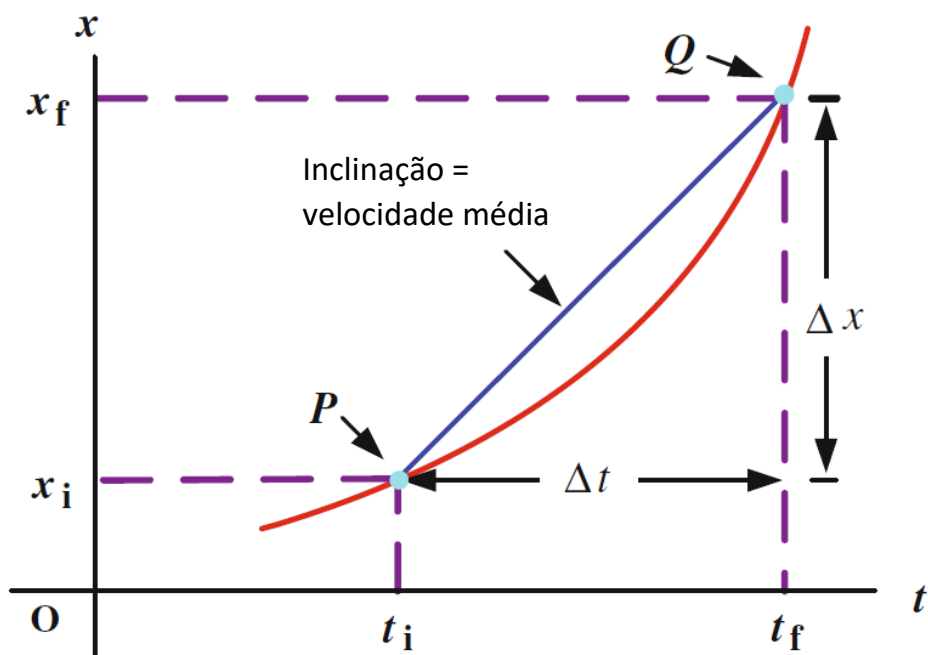


Figura 2

Por definição a velocidade média, \bar{v} , é o cociente entre o deslocamento e o tempo durante o qual se verifica esse deslocamento:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} \quad (2.2)$$

De acordo com esta definição, \bar{v} tem dimensões de comprimento dividido por tempo, ou seja m/s (ou ms^{-1}) em unidades SI. A velocidade média é, também, uma quantidade vetorial que tem direção, sentido e intensidade e é representada por um sinal mais ou menos se o movimento é para a direita ou para a esquerda, respetivamente (Fig. 1).

Velocidade instantânea e celeridade (ou rapidez)

De maneira geral, a velocidade varia de instante para instante; a pergunta é, então, qual é a velocidade de um dado objeto num dado instante, i.e., qual é a sua velocidade instantânea. A velocidade em qualquer instante é obtida a partir da velocidade média, fazendo com que o intervalo de tempo Δt tenda para zero. Considere o movimento de um objeto (por exemplo, um carro). Para simplificar este objeto pode ser visto como uma partícula. O movimento dessa partícula entre dois pontos P e Q num gráfico da posição em função do tempo é mostrado na parte direita da Fig. 3. À medida que o ponto Q se aproxima cada vez mais do ponto P (através dos pontos Q_1, Q_2, \dots), os intervalos de tempo ($\Delta t_1, \Delta t_2, \dots$) ficam cada vez menores. A velocidade média para cada intervalo de tempo é a inclinação (ou coeficiente angular) da linha a tracejado azul da Fig. 3. Conforme o ponto Q se aproxima de P, o intervalo de tempo aproxima-se de zero, enquanto a inclinação da linha a tracejado azul se aproxima da inclinação da tangente à curva no ponto P. Esta inclinação é definida como a velocidade instantânea v no instante t_i . Resumindo, a velocidade instantânea, v , de uma dada partícula é definida como o limite para que tende a razão $\Delta x/\Delta t$ quando Δt tende para 0. Matematicamente escreve-se:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

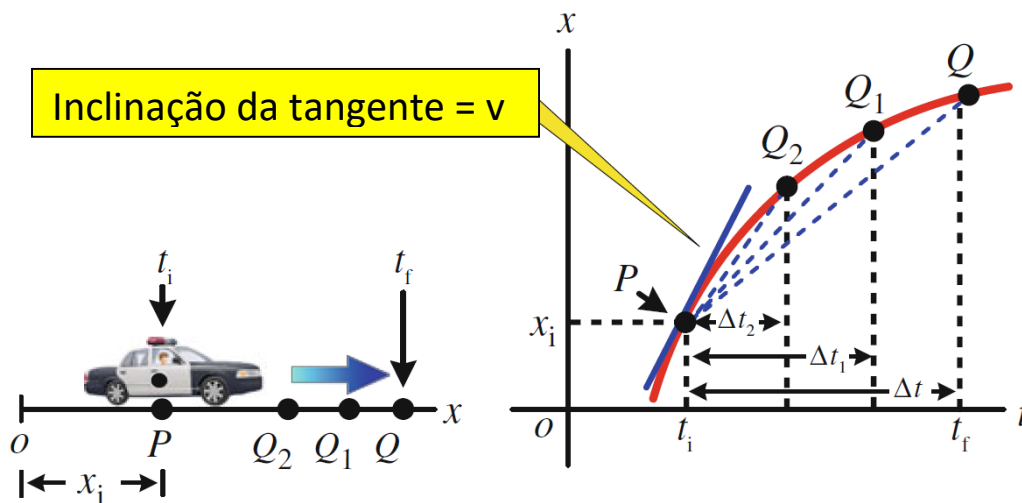


Figura 3

Em cálculo, o limite acima referido tem o nome de derivada de x em ordem a t e representa-se por dx/dt . Assim, podemos escrever:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

ou, de maneira equivalente,

$$x_f - x_i = \int_{t_i}^{t_f} v dt \equiv \text{área por baixo do gráfico } v = f(t).$$

A velocidade instantânea, v , pode ser positiva, negativa ou zero, dependendo da inclinação do gráfico da posição em função do tempo no instante que se queira na Fig. 4. Nesta figura, $v = 0$ representa o ponto de viragem e ocorre em qualquer máximo ou mínimo do gráfico da posição em função do tempo. A partir daqui, usamos a palavra velocidade para referir a velocidade instantânea. A celeridade ou rapidez (c) de uma partícula é definida como a intensidade de sua velocidade, i.e., é o cociente entre uma distância percorrida e o tempo de percurso.

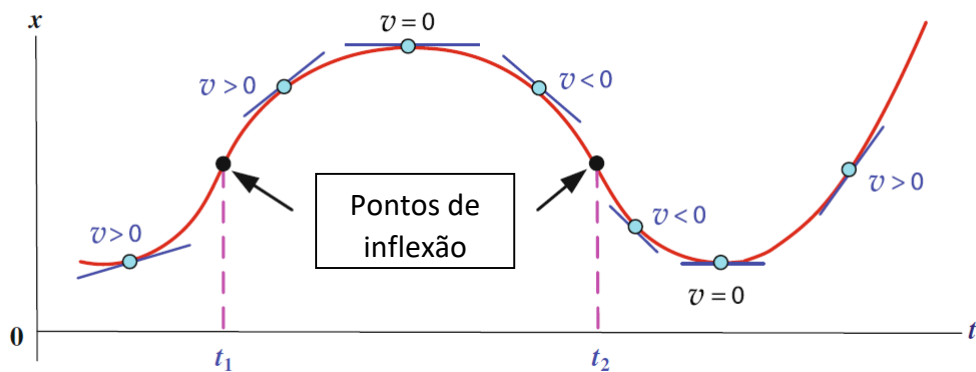
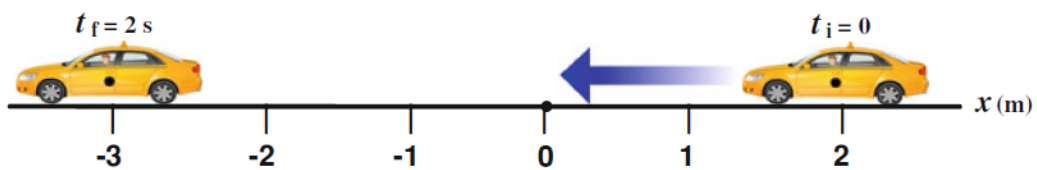


Figura 4

EXEMPLO 1

Um carro move-se ao longo do eixo x e inicia o movimento na posição $x_i = 2 \text{ m}$ quando $t_i = 0 \text{ s}$; para em $x_f = -3 \text{ m}$ quando $t_f = 2 \text{ s}$.

- Calcule o deslocamento, a velocidade média, e a rapidez durante este intervalo de tempo.
- Se o carro andar para trás e levar 3 s para chegar ao ponto inicial, repita os cálculos de a) para todo o intervalo.



Solução

a) $\Delta x = x_f - x_i$ e $\Delta t = t_f - t_i$, vindo $\Delta x = -3 - 2 = -5 \text{ m}$ e $\Delta t = 2 - 0 = 2 \text{ s}$

$$\bar{v} = \frac{-5}{2} = -2,5 \text{ m/s} ; \quad c = \frac{\text{distância}}{\text{tempo}} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ m/s} .$$

b) Neste caso a posição final é $x_f = 2 \text{ m}$ e o tempo total é de $t = 2 \text{ s} + 3 \text{ s} = 5 \text{ s}$. A distância percorrida é de 5 m para a esquerda e 5 m para a direita, o que dá 10 m . Assim,

$$\bar{v} = \frac{0}{2} = 0 \text{ m/s} ; \quad c = \frac{\text{distância}}{\text{tempo}} = \frac{10}{5} = 2,0 \text{ m/s}$$

EXEMPLO 2

Uma partícula move-se ao longo do eixo x e sua posição varia com o tempo de acordo com a equação $x = t^2 - 2t$, onde x é medido em metros e t em segundos.

a) Calcule o deslocamento e a velocidade média da partícula nos intervalos de tempo $0 \leq t \leq 1 \text{ s}$ e $1 \text{ s} \leq t \leq 3 \text{ s}$.

b) Calcule a velocidade da partícula em $t = 2 \text{ s}$.

Solução

a) $x_i(t=0\text{s}) = 0 \text{ m}$ e $x_f(t=1\text{s}) = -1 \text{ m}$; donde $\Delta x = -1 - 0 = -1 \text{ m}$.

Para $0 \leq t \leq 1 \text{ s}$, $\Delta t = 1 - 0 = 1 \text{ s}$ vindo $\bar{v} = \frac{-1}{1} = -1 \text{ m/s}$.

Para $1 \text{ s} \leq t \leq 3 \text{ s}$, $x_i(t=1\text{s}) = -1 \text{ m}$ e $x_f(t=3\text{s}) = 3 \text{ m}$ e $\Delta t = 3 - 1 = 2 \text{ s}$

Assim, $\Delta x = x_f - x_i = 3 - (-1) = 4 \text{ m}$ e $\bar{v} = \frac{4}{2} = 2 \text{ m/s}$.

b)

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2 - 2t) = 2t - 2 \quad (\text{ms}^{-1})$$

$$v(t = 2 \text{ s}) = 2 \cdot 2 - 2 = 2 \quad (\text{ms}^{-1})$$

Conceitos de aceleração média e aceleração instantânea

Quando a velocidade de uma partícula muda com o tempo, diz-se que a partícula tem um movimento acelerado. Consideremos o movimento de uma partícula ao longo do eixo x . Se a partícula tem uma velocidade v_i no instante t_i e uma velocidade v_f no instante t_f , como é mostrado no gráfico da velocidade em função do tempo da Fig. 5, então definimos a aceleração média como cociente entre a variação da velocidade pelo intervalo de tempo durante o qual se dá essa variação de velocidade:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$$

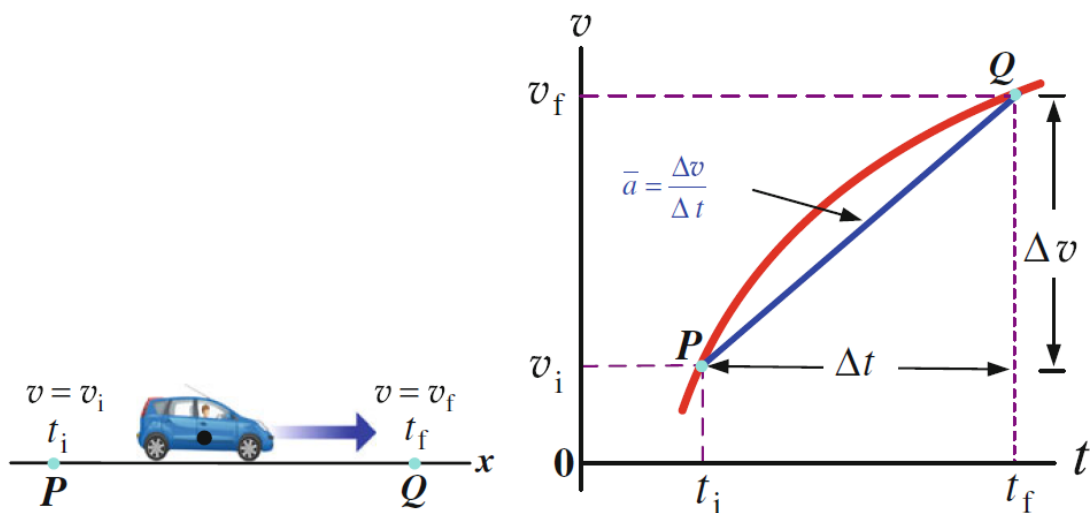


Figura 5

A aceleração é, também, uma quantidade vetorial com dimensões de comprimento dividido por tempo ao quadrado, ou seja, m/s^2 em unidades SI.

É conveniente definir a aceleração instantânea como o limite da aceleração média quando o intervalo de tempo se aproxima de zero (como fizemos para a velocidade média e a velocidade instantânea). Consideremos o movimento de uma partícula (por exemplo um carro que

se move como uma partícula) entre os dois pontos P e Q no gráfico mostrado à direita da Fig. 6. Conforme o ponto Q se aproxima do ponto P (através dos pontos Q_1, Q_2, \dots), os intervalos de tempo ($\Delta t_1, \Delta t_2, \dots$) ficam progressivamente menores. A aceleração média para cada intervalo de tempo é a inclinação (ou coeficiente angular) da linha azul a tracejado na Fig. 6. À medida que Q se aproxima de P, o intervalo de tempo aproxima-se de zero, enquanto a inclinação da linha a tracejado se aproxima da inclinação da tangente à curva no ponto P. A inclinação da linha tangente à curva em P é definida como a aceleração instantânea para o instante t_i . Ou seja, a aceleração instantânea, a , de uma dada partícula é definida como o limite para que tende a razão $\Delta v/\Delta t$ quando Δt tende para 0. Matematicamente escreve-se:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Em cálculo, (como para a velocidade) o limite acima tem o nome de derivada de v em ordem a t e representa-se por dv/dt . Assim, podemos escrever:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

ou, de maneira equivalente,

$$v_f - v_i = \int_{t_i}^{t_f} a \, dt \equiv \text{área por baixo do gráfico } a = f(t).$$

A aceleração instantânea, a , pode ser positiva, negativa ou nula, dependendo da inclinação do gráfico da velocidade em função do tempo no instante de interesse na Fig. 6. Quando $a=0$ a velocidade é constante.

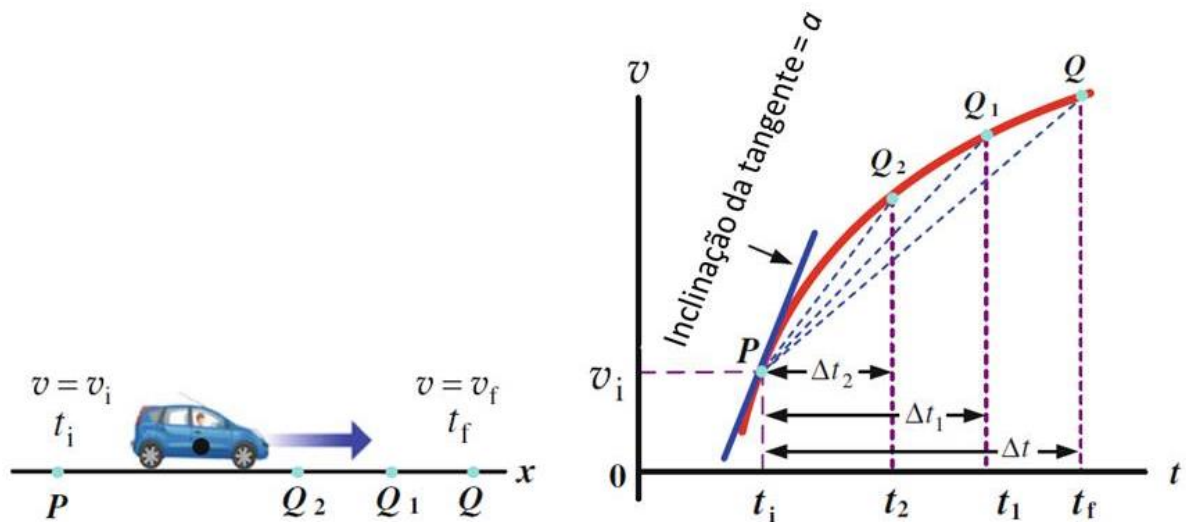


Figura 6

Neste momento temos as regras para determinar velocidades médias e instantâneas bem assim como acelerações médias e instantâneas desde que conheçamos como varia a posição de um dado objeto ou partícula à medida que o tempo avança: calculamos derivadas da posição (até agora ao longo de uma linha reta) em ordem ao tempo. Contudo, ainda não temos uma equação das posições ocupadas por uma partícula à medida que o tempo avança para podermos efetuar as derivações e, assim, calcular velocidades e acelerações. Vamos ver como obtemos essa equação para o caso muito comum de a aceleração ser constante ao longo do tempo. Se a aceleração é constante quer dizer que a aceleração média é igual à aceleração instantânea, i.e., $\bar{a} = a$. Vimos que a aceleração média era dado por:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}.$$

Se admitirmos que v_i (velocidade inicial) é a velocidade (v_0) para o instante em que começamos a contar o tempo ($t=0$ s), então a equação anterior terá o seguinte aspeto:

$$\bar{a} = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - 0}$$

ou

$$v = v_0 + a \cdot t. \quad (2.3)$$

onde v é a velocidade para qualquer instante t , a é a aceleração (que é constante, não varia no tempo) e v_0 é a velocidade que o objeto tem quando começamos a contar o tempo (quando iniciamos o cronómetro, i.e., para $t=0$ s).

Também vimos que a velocidade média pode é dada por:

$$\bar{v} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}.$$

Por outro lado, também sabemos (havemos de demonstrar numa aula teórico-prática) que a velocidade média pode ser dada por:

$$\bar{v} = \frac{v + v_0}{2}.$$

Igualando as duas expressões anteriores temos:

$$\frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{v + v_0}{2}.$$

Se nesta equação dissermos que x_i é a posição para o instante $t_i=0$ s (x_0), t_f é o tempo genérico (t) e x_f é a posição genérica x para o instante t , a equação tomará seguinte aspeto:

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad (2.4)$$

onde as variáveis x , t são a posição e o tempo, respectivamente, e x_0 , v_0 e a são a posição inicial (posição para $t=0$ s) a velocidade inicial (velocidade para $t=0$ s) e a é a aceleração (que é constante).

Eliminando o tempo entre as eqs. (2.3) e (2.4) obtemos:

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot (x - x_0) \quad (2.5)$$

Ao conjunto das eqs. (2.3), (2.4) e (2.5), com a aceleração constante, é hábito chamar equações do movimento retilíneo uniformemente acelerado. Se nessas equações fizermos a aceleração igual a 0 m/s^2 obtemos aquilo a que é hábito chamar as equações do movimento retilíneo uniforme.

Equações do movimento retilíneo uniformemente acelerado:

$$a = \text{constante}$$

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$v = v_0 + a \cdot t$$

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot (x - x_0)$$

Equações do movimento retilíneo uniforme

$$a = 0$$

$$x = x_0 + v_0 \cdot t$$

$$v = v_0$$

As unidades SI da posição (x), da velocidade (v) e da aceleração (a) são, respetivamente, m, m/s e m/s². Na Fig. 7 podem ver-se as representações gráficas do movimento uniformemente acelerado.

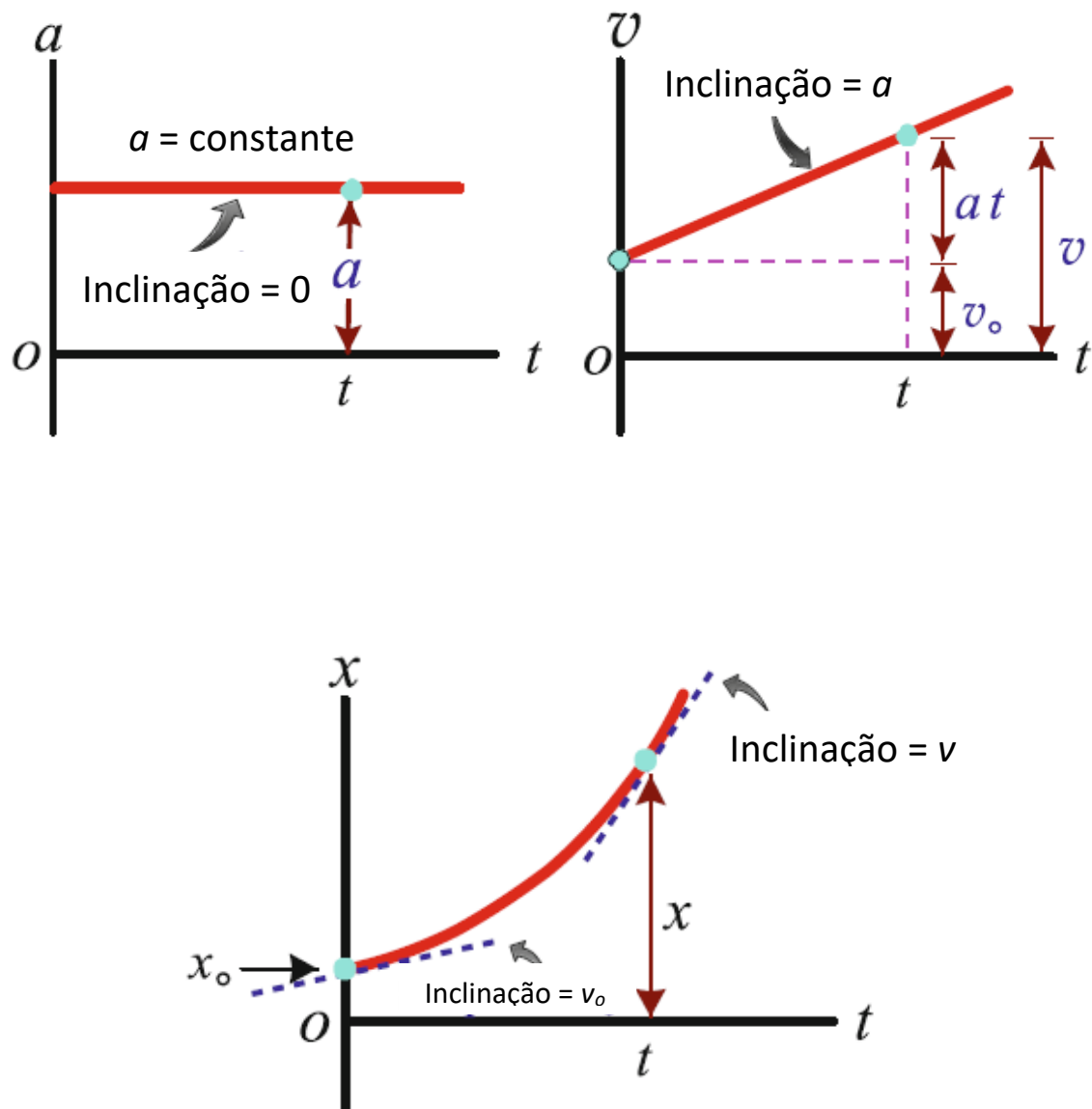


Figura 7

EXEMPLO 3

A posição de uma partícula que se move ao longo do eixo x varia com o tempo t de acordo com a equação $x = t^3 - 12t + 20$, onde x é dado em metros e t em segundos.

- Calcule a velocidade e a aceleração da partícula em função do tempo.
- Para que instante $v = 0$?
- Descreva o movimento da partícula para $t \geq 0$ s.

Solução

- a) Por derivação de $x(t)$ em ordem ao tempo obtém-se

$$v = 12 + 3 \cdot t^2.$$

- b) Por derivação de $v(t)$ em ordem ao tempo obtém-se $a=6t$.

- c) Para descrever o movimento da partícula para $t \geq 0$ s, examinemos as expressões $x = t^3 - 12t + 20$, $v = 3t^2 - 12$ e $a = 6t$.

Para $t = 0$ s, a partícula está em $x = 20$ m da origem e move-se para a esquerda com velocidade $v = -12$ m/s e com aceleração igual a zero acelerando desde $a = 0$ m/s² (veja a figura).

Para $0 < t < 2$ s, a partícula continua a mover-se para a esquerda (x diminui), mas com uma velocidade decrescente, porque agora está acelerando para a direita, $a > 0$ (verifique as expressões de x , v e a para $t = 1$ s; ver figura). Para $t = 2$ s, a partícula para momentaneamente ($v = 0$ m/s) e inverte o seu sentido de movimento. Neste momento, $x = 4$ m, ou seja, está o mais próximo possível da origem. Continuará a acelerar para a direita.

Para $t > 2$ s, a partícula continua a acelerar e a mover-se para a direita e a sua velocidade, que agora é para a direita, aumenta rapidamente.

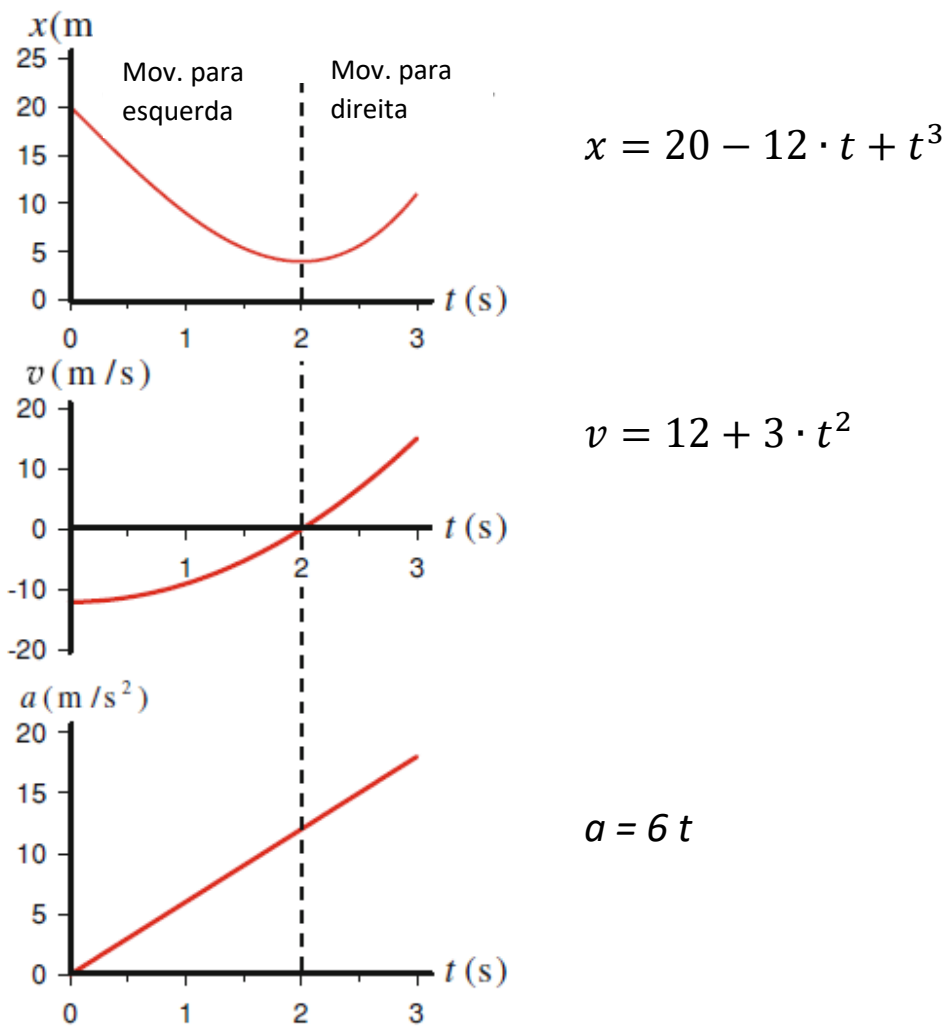


Figura do exemplo 3

A queda livre como exemplo de um movimento uniformemente acelerado

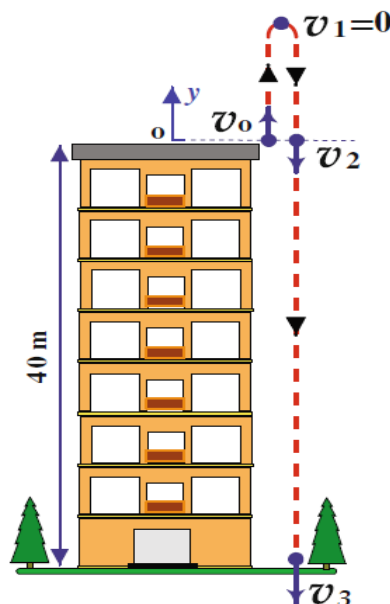
Devido à aceleração da gravidade todos os objetos que caem à superfície da Terra aceleram para baixo com uma aceleração quase constante (quando o efeito da resistência do ar é muito pequeno e pode ser desprezado); diz-se, então, que estão em queda livre. Também se usa o termo "queda livre" para movimentos em que os objetos são lançados para cima ou para baixo ao longo da vertical.

A aceleração da gravidade é normalmente representada pela letra g ; é um vetor que tem uma direção vertical, um sentido de cima para baixo e uma intensidade que tem um valor próximo de $9,8 \text{ m/s}^2$ perto da superfície da

Terra (o seu valor varia ligeiramente, contudo, com a latitude, a longitude e a altitude). Portanto, para a queda livre perto da superfície da Terra, as equações do movimento retilíneo uniformemente acelerado aplicam-se sendo a aceleração da gravidade, g , constante. Deve, porém, ter-se em atenção que ao longo da vertical existem dois sentidos possíveis: de cima para baixo e de baixo para cima. Por outro lado, a aceleração da gravidade é sempre de cima para baixo. Assim, é necessário referenciar os movimentos à direção vertical mas arbitrando um sentido positivo e, portanto, um sentido negativo para a aceleração, a posição e a velocidade. Resumindo, na queda livre: (1) O movimento ocorre ao longo do eixo y vertical; (2) A aceleração de queda livre é negativa se o sentido do eixo y for escolhido para cima e, portanto, substituímos a aceleração, a , nas equações do movimento retilíneo uniformemente acelerado por $-g$; (3) A aceleração de queda livre é positiva se o sentido do eixo y for escolhido para baixo e, portanto, substituímos a aceleração, a , nas equações do movimento retilíneo uniformemente acelerado por $+g$; (4) As velocidades podem ser positivas ou negativas conforme o seu sentido aponte no sentido positivo ou negativo do eixo y ; (5) As posições podem ser positivas ou negativas conforme for escolhida a origem do eixo y .

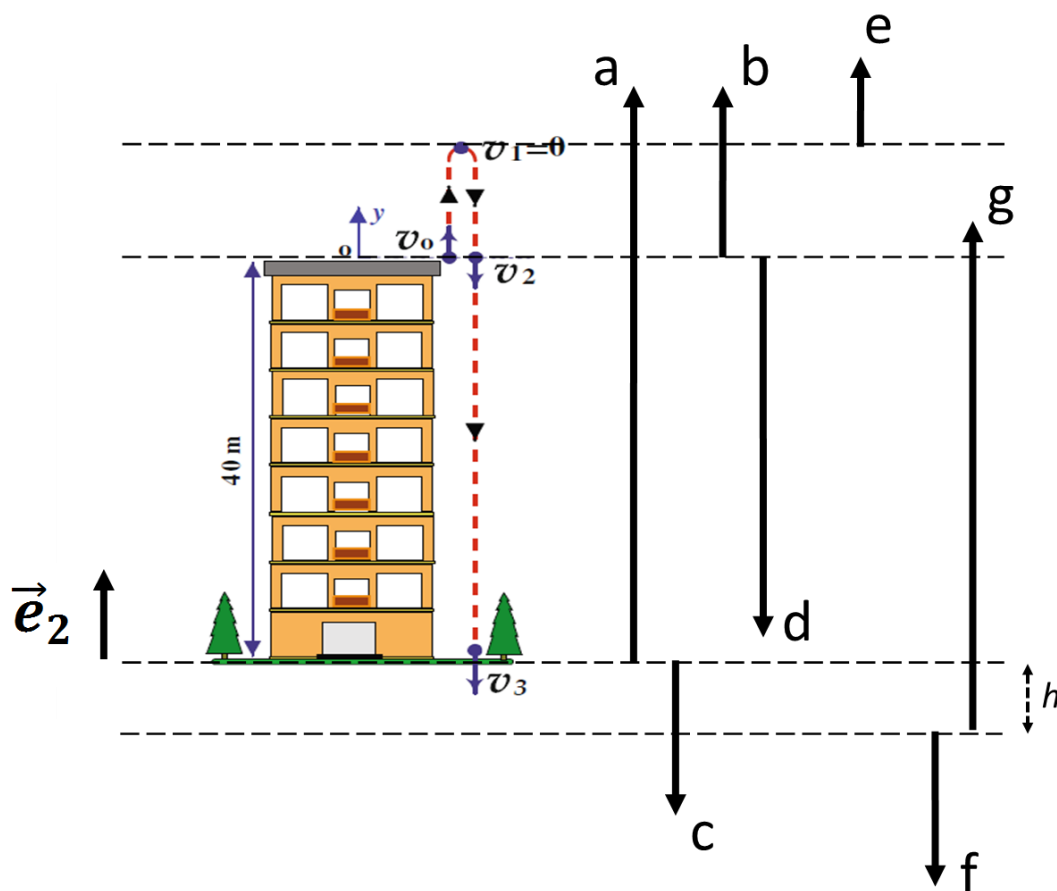
EXEMPLO 4

Uma bola é lançada verticalmente para cima a partir do topo de um edifício com uma velocidade inicial $v_0 = 20 \text{ m/s}$. O prédio tem 40 m de altura (ver figura).



Admitindo que $g = 10 \text{ m/s}^2$ e desprezando o efeito da resistência do ar calcule:

- O tempo para a bola atingir seu ponto mais alto;
- A altura máxima atingida pela bola;
- O tempo que a bola demora para voltar ao ponto inicial de lançamento;
- A velocidade da bola nesse instante;
- A velocidade da bola imediatamente antes de bater no solo;
- O tempo total de percurso até bater no solo.



a) Escolhendo o referencial **a**, as equações do movimento uniformemente acelerado (com aceleração da gravidade com sentido para baixo) na direção vertical serão:

$$x = 40 + 20 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (-10) \cdot t^2$$

$$v = v_0 + a \cdot t$$

$$a = \text{constante} = -10 \text{ m/s}^2$$

O tempo para a bola atingir seu ponto mais alto corresponde ao tempo que a bola leva até parar e inverter o seu sentido do movimento; assim podemos fazer:

$$0 = 20 + (-10) \cdot t$$

Que, resolvendo em ordem a t , dá 2 s.

b) A altura máxima atingida pela bola corresponde ao ponto onde a velocidade se anula, i.e., 2 s. Substituindo na equação das posições teremos:

$$x_{m\acute{a}x} = 40 + 20 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot (-10) \cdot 2^2$$

Resolvendo a equação dará 60 m (que de acordo com a escolha do referencial, quer dizer que a altura máxima está referida à base do prédio).

c) Não havendo resistência do ar o tempo de subida é igual ao tempo de descida; assim, a bola levaria 2 s a voltar ao ponto de partida, mas agora descendo ao longo da vertical. Claro que poderíamos utilizar, de novo, a equação dos espaços calculado o tempo para o qual a bola passa pelo ponto 40 m; ou seja:

$$40 = 40 + 20 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot (-10) \cdot t^2$$

que, resolvendo em ordem a t , dará $t = 0$ s e $t = 4$ s. É claro que $t = 0$ s corresponde ao instante de lançamento e $t = 4$ s corresponde ao instante de passagem no ponto de lançamento depois de ter sido lançada.

d) A velocidade da bola nesse instante calcula-se utilizando a equação as velocidades:

$$v = 20 + (-10) \cdot 4$$

o que dá $v = -20$ m/s. De notar que esta velocidade tem o mesmo valor da velocidade de lançamento mas de sinal contrário o que quer dizer que, se no lançamento o sentido da velocidade era para cima, para 4 s (quando a

bola já vai a descer) a velocidade tem um sentido para baixo. Repare-se, contudo, que, em módulo, os dois valores são iguais.

e) A velocidade da bola imediatamente antes de bater no solo pode ser calculada determinando o tempo que a bola leva a ir do ponto de lançamento, subir e descer até bater no solo (base do prédio). Isso pode ser feito utilizando, novamente, a equação dos espaços para $x = 0 \text{ m}$:

$$0 = 40 + 20 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (-10) \cdot t^2$$

Resolvendo em ordem a t teremos: $t = 5,5 \text{ s}$ e $t = -1,5 \text{ s}$. Como na mecânica não há tempos negativos a primeira solução é a escolhida. Outra maneira de resolver a alínea seria utilizar a equação

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot (x - x_0)$$

em que $x = 0 \text{ m}$. Assim, teríamos:

$$v^2 = 20^2 + 2 \cdot (-10) \cdot (0 - 40)$$

que, resolvendo em ordem a v , dá $v = +/- 34,64 \text{ m/s}$. Como o sentido da velocidade é para baixo o valor a escolher será $v = -34,64 \text{ m/s}$

f) O tempo total de percurso até bater no solo pode ser calculado novamente a partir da equação das velocidades

$$-34,64 = 20 + (-10) \cdot t$$

o que dará $t = 5,5 \text{ s}$.

Cinemática no plano ou a duas dimensões.

Conceitos de vetor posição e vetor deslocamento

A descrição da posição de uma partícula faz-se, no plano, através de um vetor posição que, normalmente, varia com o tempo e que na sua forma cartesiana tem o seguinte aspeto:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_1 + y(t)\vec{e}_2. \quad (2.6)$$

(caso a partícula se deslocasse no espaço – a três dimensões – o vetor posição teria o seguinte aspeto: $\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_1 + y(t)\vec{e}_2 + z(t)\vec{e}_3$). O vetor posição é um vetor que se estende desde a origem de um dado sistema de coordenadas, ou sistema de referência, até à posição onde a partícula se encontra na sua trajetória, com se mostra na Fig. 8.

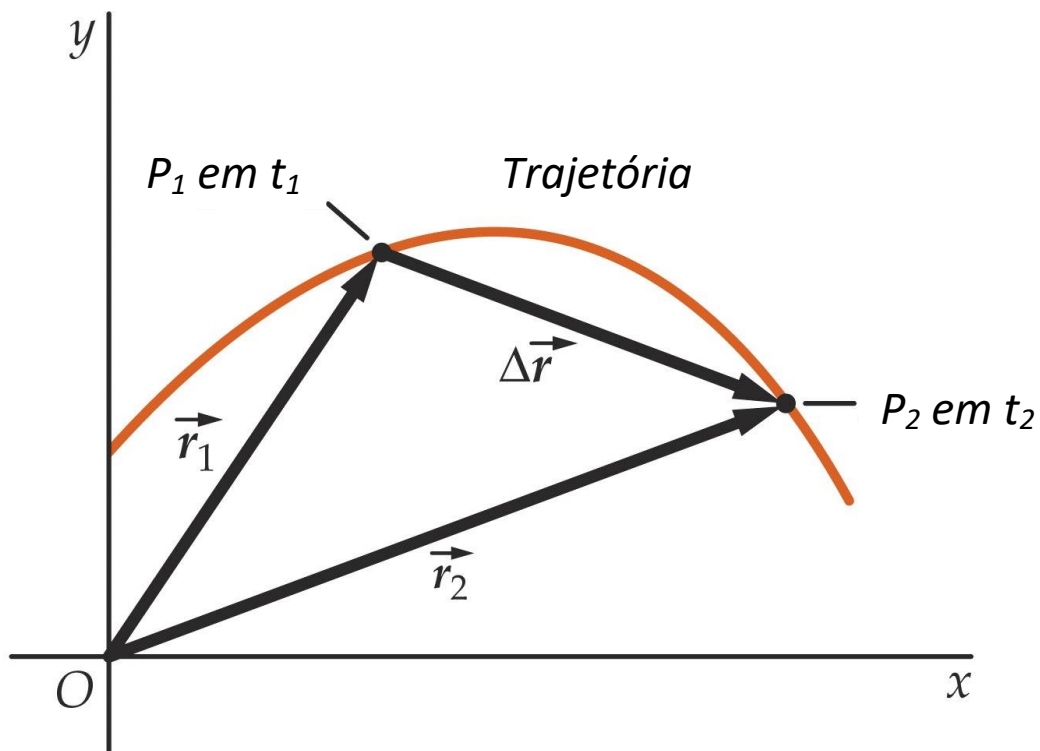


Figura 8

Na Fig. 8 o vetor \vec{r}_1 representa a posição da partícula no instante t_1 (ou, se quisermos, no instante inicial) ao longa da trajetória (linha de cor castanha); o vetor \vec{r}_2 representa a posição da partícula no instante t_2 (ou, se quisermos, no instante final) ao longa da trajetória. Claro que à medida que o tempo avança a partícula avança da posição P_1 para a posição P_2 ao longo da trajetória; ou seja, a partícula sofreu um deslocamento da posição P_1 até à posição P_2 . Sendo, por definição, o deslocamento uma variação de posição sofrida por uma partícula, isto é, uma diferença entre a posição final e a posição inicial e, se no caso de movimentos no plano essas posições são expressas por vetores posição, então, na Fig 8., o deslocamento da posição P_1 para a posição P_2 será representado pelo seguinte vetor deslocamento $\Delta\vec{r}$. Assim, no caso da Fig. 8, teremos:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

ou

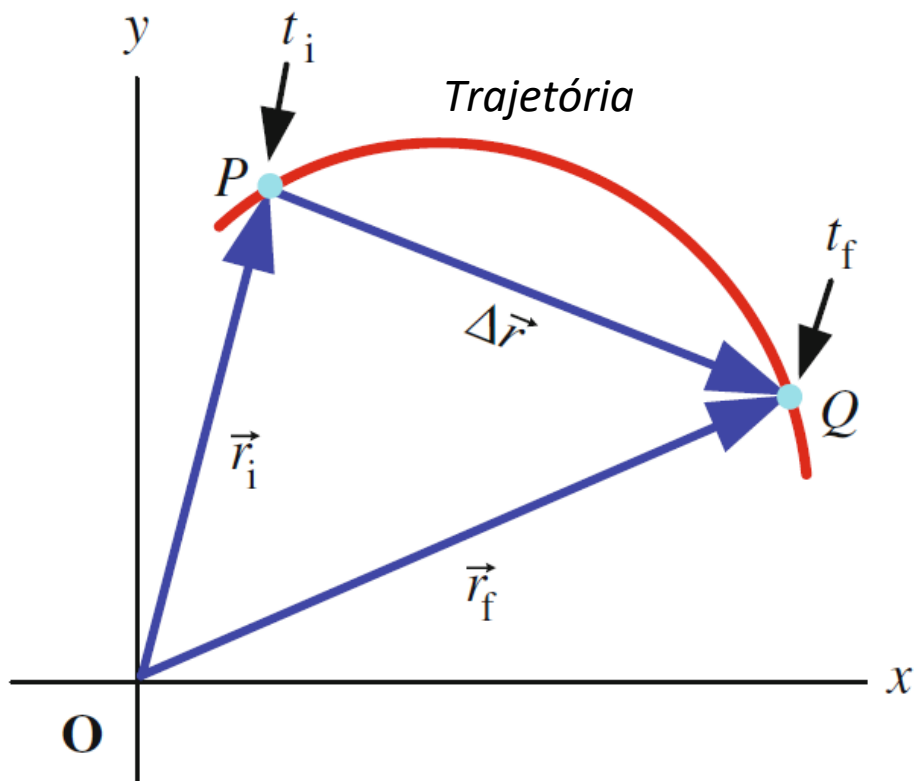


Figura 9

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$$

se identificarmos as posições P_1 e P_2 com as posições inicial e final, respectivamente (Fig. 9).

Vetor velocidade média e vetor velocidade instantânea

Agora, que conhecemos as definições de vetor posição e vetor deslocamento, podemos generalizar o que foi dito para o movimento retilíneo, isto é, podemos calcular o vetor velocidade média e o vetor velocidade instantânea, bem assim como o vetor aceleração média e o vetor aceleração instantânea. O vetor velocidade média será dado por:

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_f - \vec{r}_i}{t_f - t_i}$$

onde $\Delta t = t_f - t_i$ é o intervalo de tempo durante o qual se dá o deslocamento $\Delta\vec{r}$. Para calcular o vetor velocidade instantânea no plano procedemos como para o caso da velocidade ao longo de uma linha reta. Vejamos o que se passa em termos gráficos (Fig. 10).

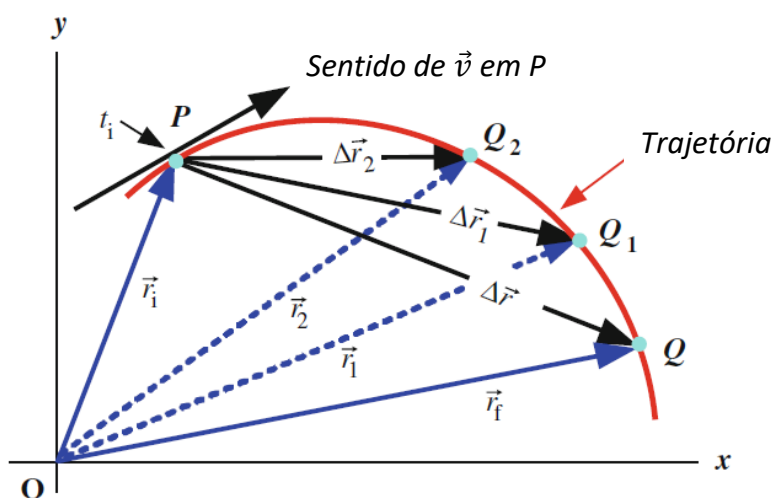


Figura 10

À medida que o ponto Q se aproxima do ponto P (posições Q_1, Q_2, \dots) o vetor \vec{r}_f vai-se aproximando do vetor \vec{r}_i (vetores posição $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots$) e os vetores $\Delta\vec{r}$ ($\Delta\vec{r}_1, \Delta\vec{r}_2, \dots$) vão passando de secantes à trajetória a tangente à trajetória no ponto P . No limite, quando Δt tender para 0, teremos

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\vec{r}_f - \vec{r}_i)}{(t_f - t_i)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Mas como $\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_1 + y(t)\vec{e}_2$, de acordo com as regras de derivação de vetores, podemos pôr:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} [x(t)\vec{e}_1 + y(t)\vec{e}_2] = \frac{dx(t)}{dt} \vec{e}_1 + \frac{dy(t)}{dt} \vec{e}_2.$$

Mas também podemos escrever

$$\vec{v} = v_x(t)\vec{e}_1 + v_y(t)\vec{e}_2$$

o quer dizer que as componentes do vetor velocidade instantânea (v_x e v_y) são as derivadas em ordem ao tempo das componentes do vetor posição e têm a mesma direção dos eixos coordenados, isto é, dos eixos x e y . Por outro lado, da Fig. 10, vemos que o vetor velocidade é sempre tangente à trajetória no ponto onde estamos a calcular a velocidade instantânea.

Resumindo: a velocidade instantânea ao longo do eixo x pode ser calculada através da derivada em ordem ao tempo da posição ao longo do eixo x ; a velocidade instantânea ao longo do eixo y pode ser calculada através da derivada em ordem ao tempo da posição ao longo do eixo y (se estivéssemos a trabalhar no espaço, isto é, a três dimensões, a velocidade instantânea ao longo do eixo z poderia ser calculada através da derivada em ordem ao tempo da posição ao longo do eixo z). Assim podemos pôr:

$$v_x = \frac{dx(t)}{dt}$$

e

$$v_y = \frac{dy(t)}{dt}$$

Em termos geométrico, para o instante t , temos o vetor velocidade tangente à trajetória, com componentes v_x e v_y nas direções dos eixos x e y , respetivamente (Fig. 11).

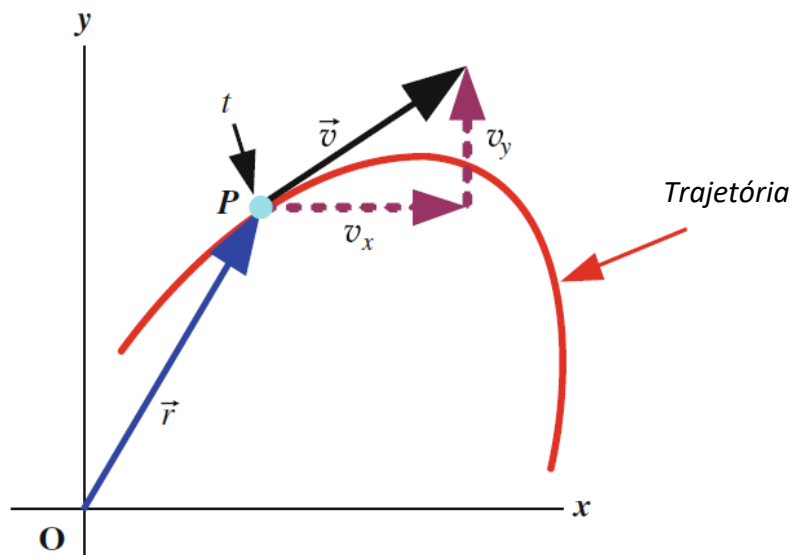


Figura 11

Vetor aceleração média e vetor aceleração instantânea

Recorrendo à Fig. 12, à medida que a partícula se move de P para Q ao longo da trajetória no plano xy , a sua velocidade muda de \vec{v}_i instante t_i para \vec{v}_f no instante t_f . Define-se aceleração média como o cociente

entre a variação de velocidade $\Delta\vec{v} = \vec{v}_f - \vec{v}_i$ e o intervalo de tempo durante o qual se dá essa variação de velocidade $\Delta t = t_f - t_i$, isto é:

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i}$$

Claro que o vetor aceleração média tem uma direção e sentido dados pelas direções e sentido do vetor $\Delta\vec{v} = \vec{v}_f - \vec{v}_i$ já que Δt é um escalar.

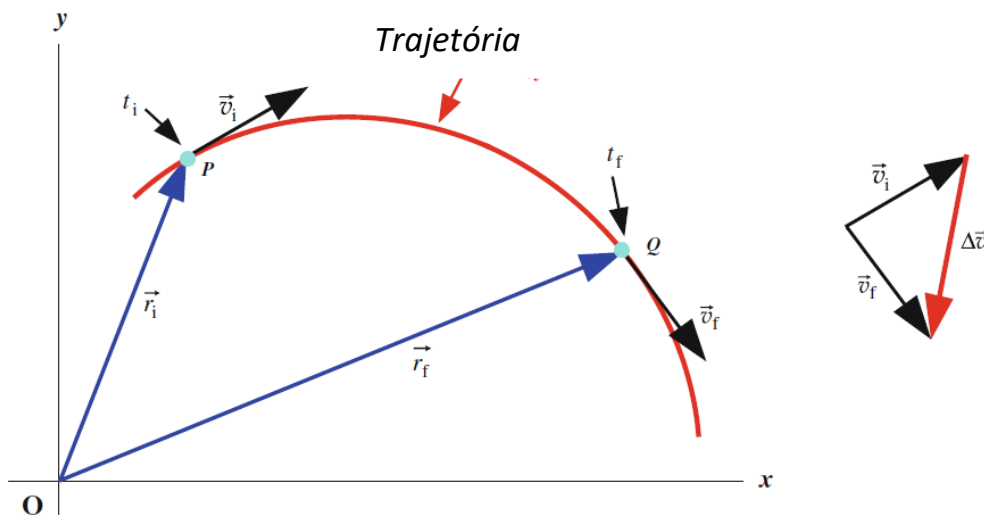


Figura 12

Da mesma maneira como fizemos para a velocidade instantânea, se fizermos tender o ponto Q para o ponto P, o vetor \vec{v}_f aproxima-se do vetor \vec{v}_i ao mesmo tempo que o vetor posição \vec{r}_f se aproxima do vetor posição \vec{r}_i . DE maneira formal podemos escrever que o vetor aceleração instantânea é dado por:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\vec{v}_f - \vec{v}_i)}{(t_f - t_i)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Como

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

podemos ainda escrever

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Mas como

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} [v_x(t)\vec{e}_1 + v_y(t)\vec{e}_2] = \frac{dv_x(t)}{dt}\vec{e}_1 + \frac{dv_y(t)}{dt}\vec{e}_2.$$

Então podemos ainda escrever (Fig. 13)

$$\vec{a} = a_x(t)\vec{e}_1 + a_y(t)\vec{e}_2$$

onde

$$a_x = \frac{dv_x(t)}{dt}$$

e

$$a_y = \frac{dv_y(t)}{dt}.$$

Resumindo: a aceleração instantânea ao longo do eixo x pode ser calculada através da derivada em ordem ao tempo da componente do vetor da velocidade instantânea ao longo do eixo x; a aceleração instantânea ao longo do eixo y pode ser calculada através da derivada em ordem ao tempo da componente do vetor velocidade ao longo do eixo y

(novamente, se estivéssemos a trabalhar no espaço, isto é, a três dimensões, a aceleração instantânea ao longo do eixo z poderia ser calculada através da derivada em ordem ao tempo da componente do vetor velocidade ao longo do eixo z).

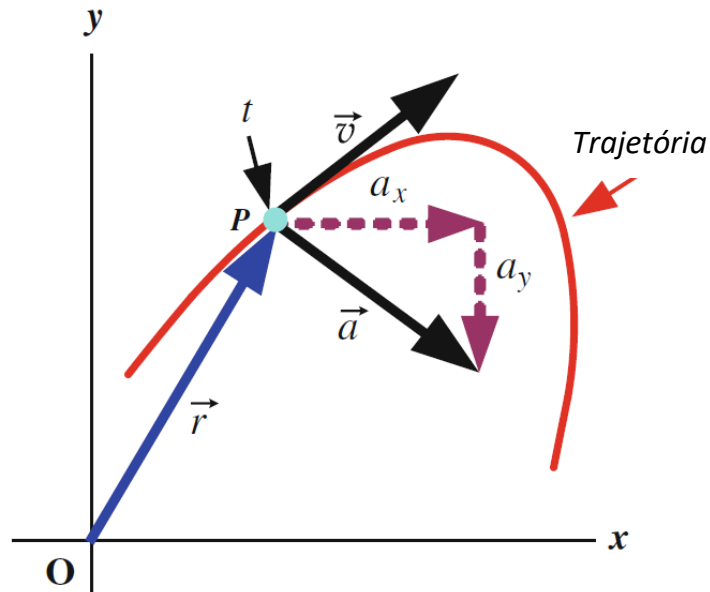


Figura 13

Recorrendo de novo à Fig. 12, podemos ver que o vetor aceleração pode ser obtido geometricamente como está mostrado na figura, isto é, $\Delta \vec{v} = \vec{v}_f - \vec{v}_i$; a conclusão é que o vetor aceleração (quer média quer instantânea) aponta para dentro da concavidade da curva que representa a trajetória.

EXEMPLO 5

Uma partícula move-se num plano xy ao longo de uma trajetória de tal modo que as componentes de sua posição em relação à origem do referencial, em função do tempo, são:

$$x = 5 + 12 \cdot t - t^2$$

$$y = 10 + 16 \cdot t - 2t^2$$

onde t é em segundos e x e y são em metros.

- a)** Calcule o vetor posição da partícula para qualquer instante t .
b) Calcule a intensidade, a direção e o sentido do vetor posição da partícula para $t = 6$ s.
c) Calcule o vetor velocidade da partícula em função do tempo, e a sua intensidade, direção e sentido para $t = 6$ s.
d) Calcule o vetor aceleração da partícula em função do tempo, bem assim como a sua intensidade, direção e sentido para $t = 6$ s.

Solução

a)
$$\vec{r}(t) = (5 + 12 \cdot t - t^2)\vec{e}_1 + (10 + 16 \cdot t - 2t^2)\vec{e}_2.$$

b)
$$\vec{r}(6) = (5 + 12 \cdot 6 - 6^2)\vec{e}_1 + (10 + 16 \cdot 6 - 2 \cdot 6^2)\vec{e}_2$$

$$\vec{r}(t) = 41 \vec{e}_1 + 34 \vec{e}_2$$

A intensidade do vetor é dada por:

$$|\vec{r}| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2} = \sqrt{|41|^2 + |34|^2} = 53,26 \text{ m}$$

A orientação do vetor em relação ao eixo x é.

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{34}{41} \right) = \tan^{-1}(0,83) = 39,7^\circ$$

c)

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} [(5 + 12 \cdot t - t^2) \vec{e}_1 + (10 + 16 \cdot t - 2t^2) \vec{e}_2]$$

$$= [(12 - 2t) \vec{e}_1 + (16 - 4t) \vec{e}_2]$$

Para $t = 6$ s, temos: $\vec{v} = [0 \vec{e}_1 + (-8) \vec{e}_2] = -8 \vec{e}_2$.

Ou seja: $v_x = 0$ m/s e $v_y = -8$ m/s.

Assim: $|\vec{v}| = \sqrt{|v_x|^2 + |v_y|^2} = \sqrt{0 + (-8)^2} = 8$ m/s.

e $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-8}{0}\right) = \tan^{-1}(-\infty) = 270^\circ$

d)

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x(t)}{dt} \vec{e}_1 + \frac{dv_y(t)}{dt} \vec{e}_2 \\ &= \frac{d}{dt} [(12 - 2t) \vec{e}_1 + (16 - 4t) \vec{e}_2] \\ &= a_x(t) \vec{e}_1 + a_y(t) \vec{e}_2\end{aligned}$$

Assim:

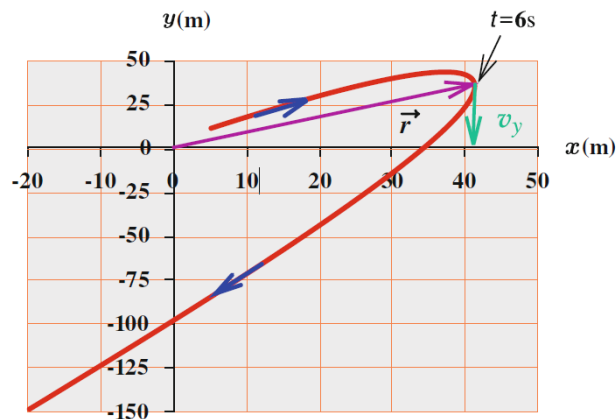
$$a_x = \frac{d(12 - 2t)}{dt} = -2 \text{ m/s}^2$$

e

$$a_y = \frac{d(16 - 4t)}{dt} = -4 \text{ m/s}^2.$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{|a_x|^2 + |a_y|^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = 4,47 \text{ m/s}^2$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a_y}{a_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-4}{-2}\right) = 180^\circ + \tan^{-1}(2) = 243,4^\circ.$$



Projétil: caracterização do seu movimento

Em Física, qualquer objeto lançado ao ar tem o nome de projétil. Perto da superfície da Terra a aceleração é para baixo, devido à gravidade, e vamos admitir que é constante e que o efeito da resistência do ar é insignificante. Com base nestas duas suposições, verificamos que: (1) o movimento horizontal e o movimento vertical são independentes um do outro e (2) a trajetória do projétil é sempre uma parábola. Se escolhermos os eixos ortogonais do plano xy de modo a que o eixo y tenha um sentido positivo para cima, então, por definição de projétil, a aceleração ao longo da vertical será igual à aceleração da gravidade ($-g$) e segundo a horizontal (eixo x) não há qualquer aceleração. Por outro lado, se assumirmos que no início da contagem dos tempos o projétil está na origem do referencial (para $t = 0$ s, $x_0 = 0$ m e $y_0 = 0$ m) e tem uma velocidade dado por \vec{v}_0 e faz um ângulo θ_0 com o eixo x , o vetor velocidade inicial pode ser escrito da seguinte maneira

$$\vec{v}_0 = v_{0x}(t) \vec{e}_1 + v_{0y}(t) \vec{e}_2.$$

As componentes v_{0x} e v_{0y} podem então ser calculadas em termos do módulo do vetor velocidade inicial e o ângulo de lançamento θ_0 .

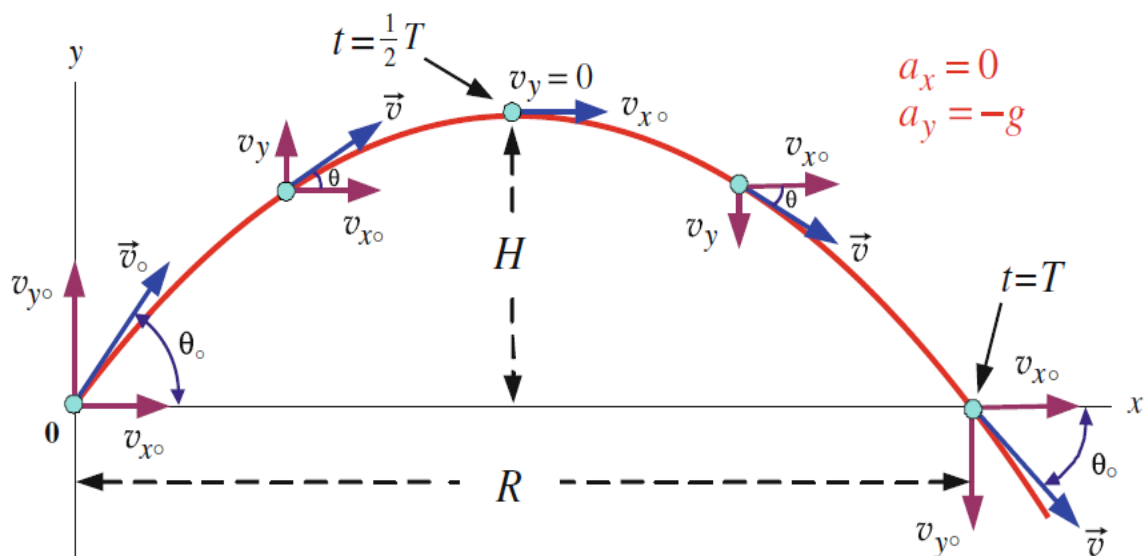


Figura 14

Da Fig. 14, podemos ver que:

$$v_{0x} = |\vec{v}_0| \cdot \cos \theta_0$$

$$v_{0y} = |\vec{v}_0| \cdot \sin \theta_0$$

Por outro lado, ao longo da trajetória vemos que o movimento é uma composição de dois movimentos que são simultâneos para cada instante: um movimento horizontal com aceleração igual a zero (por definição de projétil a aceleração a atuar a partícula é a aceleração da gravidade, que é vertical, de cima para baixo) e um movimento vertical com uma aceleração que é a aceleração da gravidade. Ou seja, nos dois casos podemos utilizar as equações o movimento retilíneo; contudo, na horizontal será do movimento retilíneo uniforme (não há aceleração), na vertical será um movimento uniformemente acelerado (com aceleração $-g$). Vejamos, então, como podemos calcular o alcance R , a altura máxima e o tempo em que o projétil está no ar (ver Fig. 14).

De acordo com o que foi dito anteriormente, o vetor velocidade é sempre tangente à trajetória de uma dada partícula. Assim, em cada ponto (ver Fig. 14) podemos considerar que o vetor velocidade pode ser decomposto segundo as direções do eixo x e do eixo y . Ou, dito de outra maneira, podemos descrever o movimento considerando o que acontece em termos de movimento segundo os eixos ortogonais x e y , simultaneamente. Mas, como segundo o eixo x não há aceleração e segundo o eixo y a aceleração é a aceleração da gravidade ($-g$, de acordo com o sentido positivo do eixo y do referencial). Assim, segundo x o movimento é uniforme; segundo o eixo y o movimento é uniformemente acelerado com aceleração $-g$.

As equações do movimento segundo x e y são, então, respetivamente:

$$a = 0$$

$$x = v_{0x} \cdot t$$

$$v_x = v_{0x}$$

$$a = -g$$

$$y = v_{0y} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (-g) \cdot t^2$$

$$v_y = v_{0y} + (-g) \cdot t$$

Com estas equações podemos resolver qualquer problema do projétil nas condições enunciadas no início deste parágrafo. Assim, o alcance R será calculado através do tempo de percurso ao longo do eixo x :

$$R = 0 + |\vec{v}_0| \cdot \cos \theta_0 \cdot T = |\vec{v}_0| \cdot \cos \theta_0 \cdot T$$

onde T é dado por

$$0 = 0 + |\vec{v}_0| \cdot \sin \theta_0 \cdot T + \frac{1}{2} \cdot (-g) \cdot T^2$$

que, resolvendo em ordem a T , dá

$$T = \frac{2 \cdot |\vec{v}_0| \cdot \sin \theta_0}{g}$$

Substituindo T na expressão de R obteremos o alcance R :

$$R = \frac{|\vec{v}_0|^2 \cdot \sin 2\theta_0}{g} \quad \text{para} \quad 0 \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}$$

O alcance máximo é obtido para $\sin 2\theta_0 = 1$, ou seja, para $\theta_0 = 45^\circ$.

A altura máxima, H , é obtida resolvendo a equação dos espaços segundo o eixo y para o tempo $t_H = T/2$:

$$t_1 = \frac{T}{2} = \frac{|\vec{v}_0| \cdot \text{sen } \theta_0}{g}$$

que substituindo dará

$$H = |\vec{v}_0| \cdot \text{sen } \theta_0 \cdot \frac{|\vec{v}_0| \cdot \text{sen } \theta_0}{g} + \frac{1}{2} \cdot (-g) \cdot \left(\frac{|\vec{v}_0| \cdot \text{sen } \theta_0}{g} \right)^2$$

ou

$$H = \frac{|\vec{v}_0|^2 \cdot \text{sen}^2 2\theta_0}{2g} \quad \text{para} \quad 0 \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}.$$

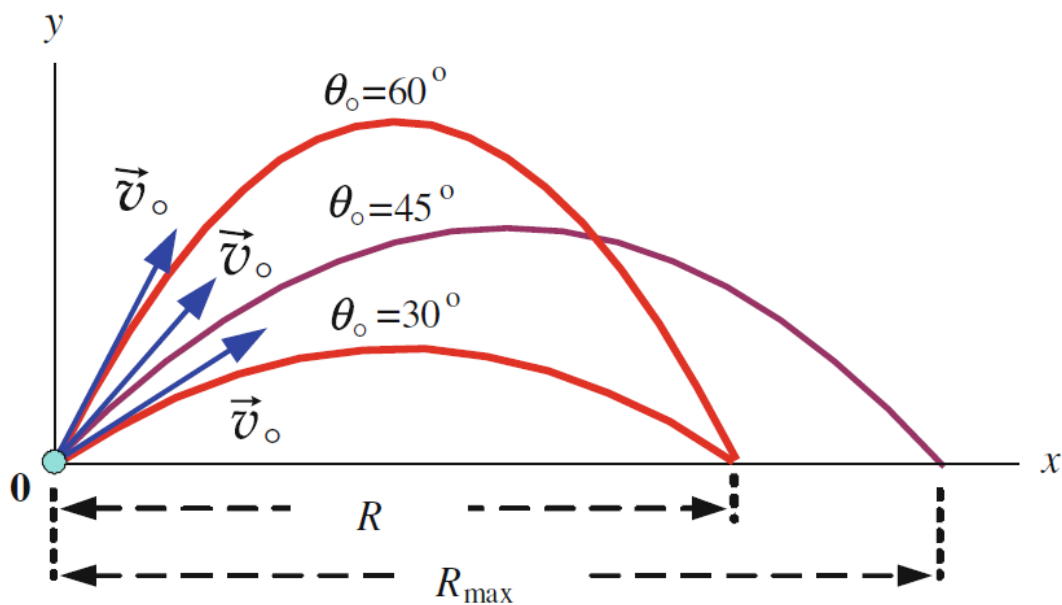


Figura 14 – Diferentes alcances e alturas máximas para a mesma velocidade $|\vec{v}_0|$ com diferentes ângulos de lançamento.

A equação da trajetória do projétil pode ser calculada eliminando o tempo entre as equações

$$x = v_{0x} \cdot t = |\vec{v}_0| \cdot \cos \theta_0 \cdot t$$

e

$$y = v_{0y} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (-g) \cdot t^2 = |\vec{v}_0| \cdot \text{sen } \theta_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (-g) \cdot t^2$$

o que dá

$$y = (tg \theta_0) \cdot x - \frac{g}{2 \cdot |\vec{v}_0|^2 \cdot \cos^2 \theta_0} \cdot x^2 .$$

Mas uma equação do tipo $y = a \cdot x - b \cdot x^2$ é a equação de uma parábola com $a = (tg \theta_0)$ e $b = g/2 \cdot |\vec{v}_0|^2 \cdot \cos^2 \theta_0$; portanto, a trajetória do projétil é uma parábola com os coeficientes a e b dados pelas expressões anteriores. Por outro lado, para cada ponto da trajetória o módulo do vetor velocidade é dado por

$$|\vec{v}| = \sqrt{|\vec{v}_{0x}|^2 + |\vec{v}_y|^2}$$

e a sua inclinação em relação ao eixo x é dada por

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{|\vec{v}_y|}{|\vec{v}_{0x}|} \right).$$

EXEMPLO 6

Uma pedra é lançada do topo de um edifício com 40 m de altura segundo um ângulo de 30° com a horizontal e com uma velocidade inicial de 20 m/s. Determine:

- O tempo durante o qual a pedra está no ar.
- O módulo da velocidade da pedra quando bate no solo.
- A distância a que a pedra bate no solo medida a partir do prédio

Solução:

O movimento é de um projétil e vai ser decomposto em dois movimentos que se processam simultaneamente: um segundo o eixo x (sem aceleração) e outro segundo o eixo y sujeito à aceleração da gravidade. Vamos supor que não há efeitos de resistência do ar e que a aceleração da gravidade não varia no espaço e no tempo.

Assim, temos um movimento uniformemente acelerado segundo o eixo y e um movimento uniforme segundo o eixo x. As equações do movimento serão, respetivamente:

$$a = -g$$

$$y = v_{0y} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (-g) \cdot t^2$$

$$v_y = v_{0y} + (-g) \cdot t$$

e

$$a = 0$$

$$x = v_{0x} \cdot t$$

$$v_x = v_{0x}$$

com

$$v_{0x} = |\vec{v}_0| \cdot \cos \theta_0$$

$$v_{0y} = |\vec{v}_0| \cdot \sin \theta_0$$

Substituindo os valores do problema teremos segundo y:

$$a = -10 \text{ m/s}^2$$

$$y = |\vec{v}_0| \cdot \sin \theta_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (-10) \cdot t^2 = 20 \cdot \sin 30 \cdot t + (-5) \cdot t^2$$

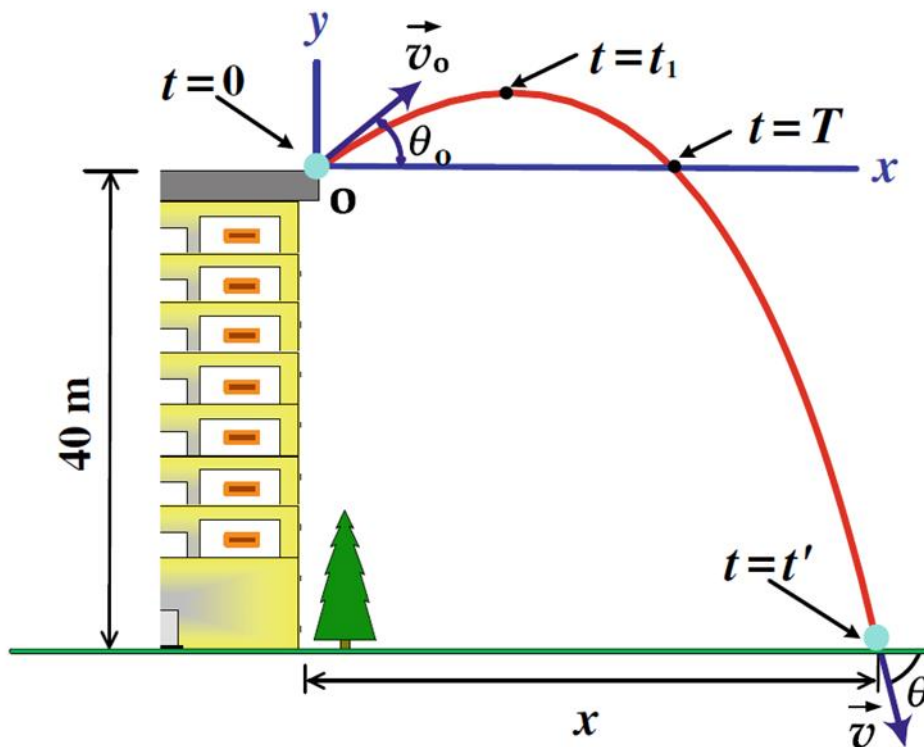
$$v_y = 20 \cdot \sin 30 + (-10) \cdot t$$

E segundo x:

$$a = 0 \text{ m/s}^2$$

$$x = |\vec{v}_0| \cdot \cos \theta_0 \cdot t = 20 \cdot \cos 30 \cdot t$$

$$v_x = |\vec{v}_0| \cdot \cos \theta_0 = 20 \cdot \cos 30 = 17,32 \text{ m/s}$$



a) O tempo durante o qual a pedra está no ar é dada por (ver figura)

$$-40 = 20 \cdot \text{sen } 30 \cdot t + (-5) \cdot t^2$$

que resolvendo em ordem a t dá $t=t'=4 \text{ s}$ e $t=t'=-2 \text{ s}$; claro que é o tempo $t=4 \text{ s}$ que é o correto.

b) O módulo da velocidade imediatamente antes do impacto no solo será dada por (ver figura)

$$|\vec{v}| = \sqrt{|\vec{v}_{0x}|^2 + |\vec{v}_y|^2}$$

onde v_{0x} tem sempre o mesmo valor e v_y é dada por

$$v_y = v_{0y} + (-g) \cdot t = v_y = 20 \cdot \text{sen } 30 + (-10) \cdot 4 = -30 \text{ m/s}$$

Assim, temos

$$|\vec{v}| = \sqrt{|17,32|^2 + |-30|^2} = 34,64 \text{ m/s}$$

c) A distância a que a pedra bate no solo medida a partir do prédio será dada por (ver figura)

$$x = |\vec{v}_0| \cdot \cos \theta_0 \cdot t = 20 \cdot \cos 30 \cdot t = 20 \cdot \cos 30 \cdot 4 = 69,28 \text{ m}$$

Movimento circular uniforme: caracterização do seu movimento

Uma partícula que se move num círculo com um vetor velocidade de módulo ou intensidade constante diz-se que tem um movimento circular uniforme. Neste caso, a aceleração surge apenas da mudança na direção do vetor velocidade e não de uma variação da sua intensidade.

Podemos usar a Fig. 15 para determinar a intensidade, a direção e o sentido dessa aceleração. Na figura apenas se mostra um arco de círculo do círculo completo.

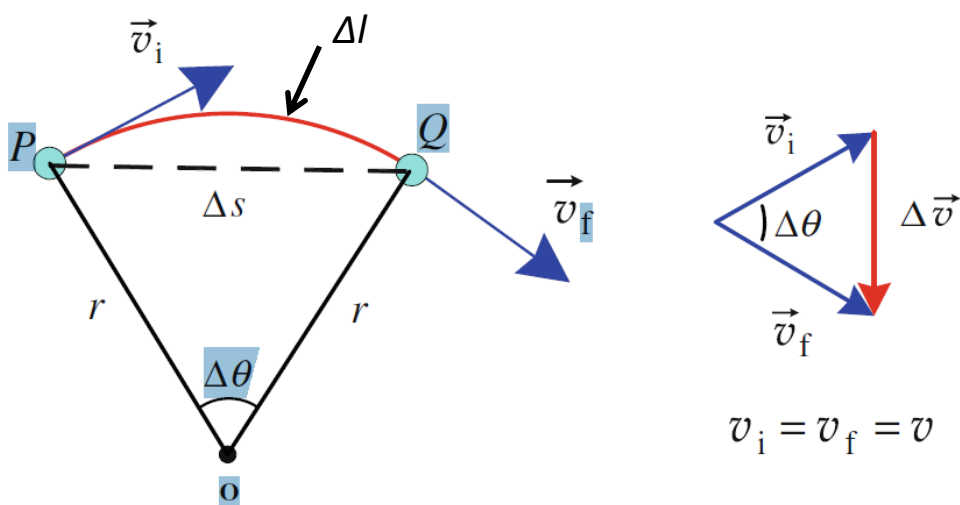


Figura 15

Na figura, a partícula está inicialmente no ponto P e tem uma velocidade \vec{v}_i no instante t_i ; no ponto Q tem uma velocidade \vec{v}_f no instante t_f . Como a intensidade dos vetores velocidade é a mesma (só variam na direção e no sentido) $|\vec{v}_i|$ e $|\vec{v}_f|$ são iguais. O vetor aceleração média será dado por

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i}.$$

Por outro lado, da Fig. 15 pode escrever-se (porque os dois triângulos são semelhantes)

$$\frac{\Delta s}{r} = \frac{|\Delta\vec{v}|}{|\vec{v}_f|} = \frac{|\Delta\vec{v}|}{|\vec{v}_i|} = \frac{|\Delta\vec{v}|}{v}$$

de onde podemos escrever

$$|\Delta\vec{v}| = \frac{v}{r} \cdot \Delta s$$

Dividindo por ambos os membros da equação por $\Delta t = t_f - t_i$ obtemos

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v}{r} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v}{r} \cdot v$$

Quando Δt tende para 0 o ponto Q aproxima-se do ponto P, o ângulo $\Delta\theta$ e Δs tornam-se muito pequenos, o primeiro termo da equação anterior é uma aceleração instantânea em módulo e no segundo termo $\Delta s/\Delta t$ tende para a velocidade. Por outro lado, $\Delta\vec{v}$ aponta para o centro da trajetória circular. Portanto podemos escrever

$$a_r = \vec{a} = \frac{v^2}{r}.$$

A aceleração a_r é o módulo de um vetor aceleração que tem uma direção radial e um sentido para o centro da trajetória circular e daí chamar-se aceleração centrípeta; o seu módulo é constante para o caso de o módulo

da velocidade ser também constante. O vetor velocidade, como já se viu é sempre tangente à trajetória (ver Fig. 16).

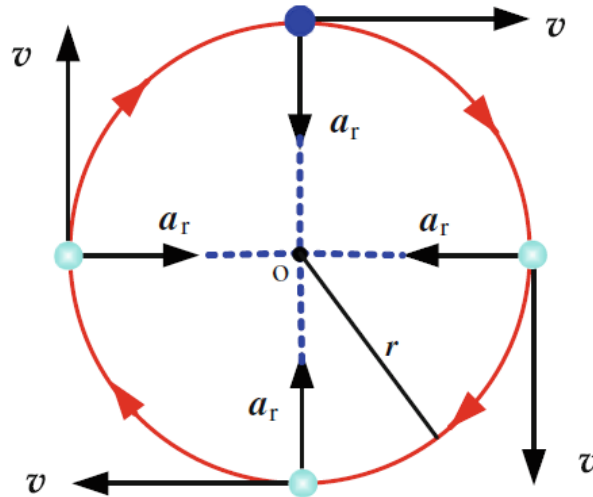


Figura 16

Durante o seu percurso ao longo de uma trajetória circular uma partícula leva o tempo T a realizar uma volta completa, que corresponde a varrer um ângulo de 360° ou 2π radianos. Portanto, a sua velocidade pode também ser dada por

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

onde $2\pi r$ é o perímetro do círculo e T é período da repetição do movimento.

Uma outra maneira de olhar para o problema do movimento circular uniforme é admitir que à medida que Δt tende para 0 o ponto Q aproxima-se do ponto P , o ângulo $\Delta\theta$, e Δs e Δl tornam-se muito pequenos. Por outro lado, sabemos que

$$\Delta l = r \cdot \Delta\theta .$$

Dividindo por Δt e achando o limite quando ele tende para 0, teremos

$$\frac{\Delta l}{\Delta t} = r \cdot \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

e

$$v_{inst} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{dl}{dt}$$

onde v_{inst} é a velocidade instantânea (em módulo) em cima da trajetória.

Assim, como $l = r \cdot \theta$ (com θ em radianos),

$$v_{inst} = \frac{dl}{dt} = \frac{d}{dt}(r \cdot \theta) = r \cdot \frac{d\theta}{dt} + \frac{dr}{dt} \cdot \theta = r \cdot \omega .$$

Como r é o módulo do raio da trajetória circular (que é constante) a derivada de r em ordem a t é zero. À derivada de θ em ordem a t dá-se o nome de velocidade angular e representa-se, habitualmente pela grega ω . A velocidade angular não é mais do que a taxa de varrimento do ângulo θ por unidade de tempo e tem por unidade radianos por segundo ou apenas s^{-1} . A velocidade angular também pode ser calculada dividindo o ângulo varrido pelo tempo de varrimento; como o ângulo 2π é o varrido no tempo T (período), temos

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f$$

onde f é a frequência (número de revoluções ou voltas por unidade de tempo) com unidade s^{-1} ou hertz (Hz).

Derivando v_{inst} em ordem ao tempo obtemos o módulo da aceleração instantânea que, como vimos, é, no caso do movimento circular uniforme, uma aceleração centrípeta.

$$\frac{dv_{inst}}{dt} = \frac{d}{dt}(r \cdot \omega) = r \cdot \frac{d\omega}{dt} + \frac{dr}{dt} \cdot \omega = r \cdot \frac{d\omega}{dt} = r \cdot \alpha$$

onde α é a chamada aceleração angular que não é mais do que a variação da velocidade angular por unidade de tempo.

Vimos anteriormente que $v_{inst} = r \cdot \omega$; ou seja, a velocidade no movimento circular uniforme é dada pelo raio da trajetória circular por uma velocidade angular. Mas a velocidade é uma grandeza vetorial e, portanto, a equação anterior deverá ser a equação escalar correspondente a uma equação vetorial. Na verdade, se admitirmos que o raio não é mais do que o módulo de um vetor posição que indica a posição da partícula que se move ao longo de um círculo (ver Fig. 17) e v for o módulo do vetor velocidade da partícula na sua trajetória então ω deverá ser também um vetor de tal modo que

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r},$$

ou seja, \vec{v} , $\vec{\omega}$ e \vec{r} são mutuamente ortogonais entre si. Na Fig. 17 vemos os vetores \vec{v} e \vec{r} . O vetor $\vec{\omega}$ é um vetor perpendicular ao plano definido por \vec{v} e \vec{r} e que, de acordo com a regra da mão direita, aponta para quem está a olhar a figura.

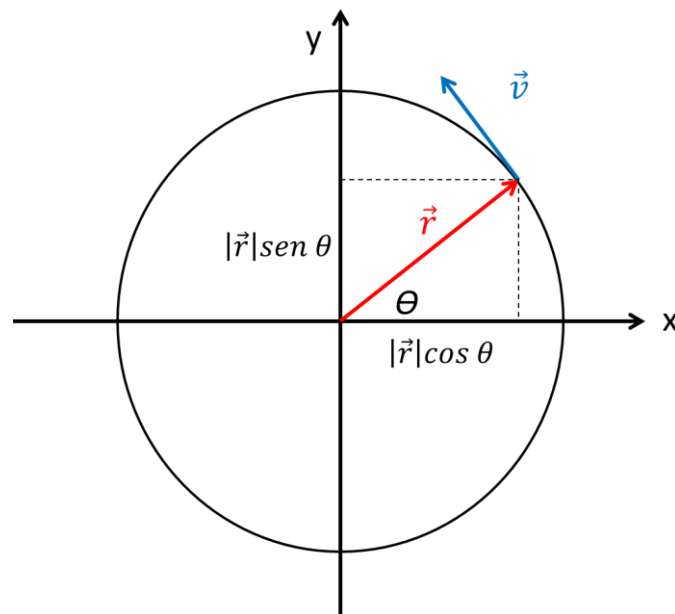


Figura 17

Dado que a aceleração é a derivada da velocidade podemos então calcular a aceleração:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}$$

No movimento circular uniforme o vetor velocidade angular é constante e o primeiro termo da equação anterior anula-se, vindo

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{v} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}).$$

O módulo do vetor aceleração é $|\vec{a}| = a = \omega^2 \cdot R$, onde R é o raio da trajetória circular. Como $v_{inst} = v = r \cdot \omega = R \cdot \omega$, então $a = v^2 / R$ como já tínhamos verificado anteriormente.

Uma maneira mais formal de olhar o problema do movimento circular uniforme é o de considerar o vetor posição \vec{r} da Fig. 17 em coordenadas polares (i. e., um ângulo e uma distância). Assim podemos escrever:

$$\vec{r} = R \cdot \cos \theta \vec{e}_1 + R \cdot \sin \theta \vec{e}_2$$

onde R é o módulo do vetor posição \vec{r} . Contudo, o ângulo θ varia à medida que o vetor posição avança. Se essa variação for constante (o que é verdade para o movimento circular uniforme) então podemos escrever $\theta = \omega \cdot t$, vindo

$$\vec{r} = R \cdot \cos(\omega t) \vec{e}_1 + R \cdot \sin(\omega t) \vec{e}_2.$$

Derivando em ordem ao tempo obtemos o vetor velocidade

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\omega \cdot R \cdot \sin(\omega t) \vec{e}_1 + \omega \cdot R \cdot \cos(\omega t) \vec{e}_2$$

e derivando novamente em ordem ao tempo obtemos o vetor aceleração

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = -\omega^2 \cdot R \cdot \cos(\omega t) \vec{e}_1 - \omega^2 \cdot R \cdot \sin(\omega t) \vec{e}_2 \\ &= -\omega^2 \cdot \vec{r}.\end{aligned}$$

Ou seja, o vetor aceleração tem a mesma direção do vetor posição mas sentido contrário. Calculando o módulo dos vetores posição, velocidade e aceleração obtém-se as expressões escalares já deduzidas anteriormente (ver Fig. 18).

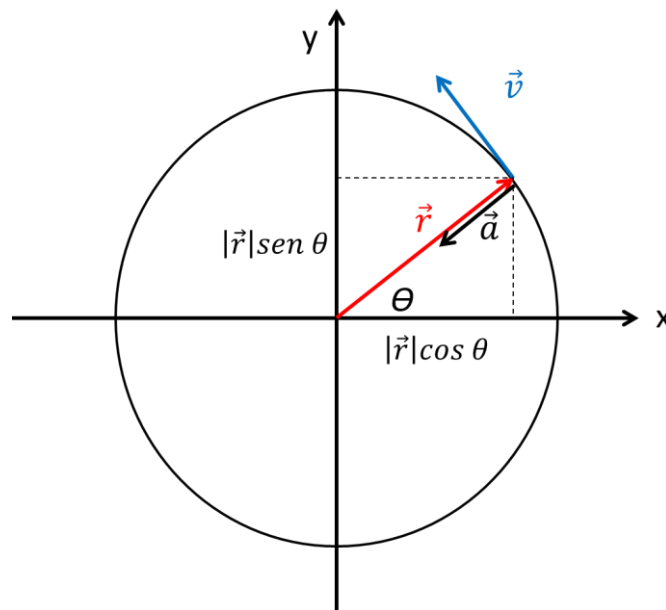


Figura 18

Capítulo III

Mecânica – Dinâmica

A interação que dá origem à aceleração de um objeto tem o nome de força. Nas páginas anteriores o movimento de um objeto em termos de posição, velocidade e aceleração foi descrito sem considerar as causas desse movimento. Na dinâmica vamos considerar o movimento e as suas causas. Os dois fatores principais que temos que considerar são as forças que atuam sobre um objeto e a massa desse objeto.

Todos nós temos uma ideia básica do que é uma força a partir da experiência cotidiana. Quando se empurra um objeto estamos a exercer uma força; a palavra força está, assim, associada a uma atividade muscular e a uma mudança no movimento (na velocidade) de um objeto. Contudo, muitas forças não dão origem a movimento; por exemplo, quando um livro está em cima de uma mesa a força peso está a ser exercida nele e, no entanto, ele não se move; ou, se empurrarmos uma parede, normalmente, ela também não se move. Contudo, na grande maioria das situações, forças aplicadas a um dado objeto dão origem à alteração do seu movimento.

Foi Newton quem afirmou, pela primeira vez, que as forças são a origem da alteração do estado de movimento de um objeto, isto é, da velocidade do objeto. Mas uma mudança na velocidade é uma aceleração, o que já estudamos na cinemática. Assim, na dinâmica estamos interessados na relação entre a uma força exercida sobre um dado objeto e a aceleração que esse objeto adquire.

Quando várias forças atuam simultaneamente num objeto ele acelera apenas se a força resultante que atua sobre ele for diferente de zero. Essa força resultante é definida como a soma vetorial de todas as forças que atuam sobre o objeto; se a força resultante exercida sobre um objeto é zero, a sua aceleração é também zero e sua velocidade permanece constante. Ou seja, se a força que atua sobre um dado objeto (ou a soma das forças que atuam sobre um dado objeto) for zero, o objeto permanece em repouso ou continua a mover-se com velocidade constante.

Quando a velocidade de um objeto é constante diz-se que o objeto está em equilíbrio dinâmico; no caso em que o objeto está em repouso diz-se que está em equilíbrio estático.

Quanto à maneira como as forças atuam elas podem ser classificadas como forças de contacto ou forças de campo. Nas primeiras há contacto físico entre os objetos que estão a interagir; por exemplo, uma mão a empurrar um livro numa mesa. Quanto às segundas não existe contacto físico entre os objetos que estão a interagir; em vez disso agem através do espaço. A força gravítica é um exemplo deste tipo de forças de campo bem assim como a força eletrostática entre duas cargas elétricas. Contudo, a distinção entre força de contacto e força de campo, por vezes, não é fácil.

Há quatro forças (conhecidas) fundamentais na Natureza: (1) forças gravitacionais entre objetos com massa, (2) forças eletromagnéticas entre cargas elétricas, (3) forças nucleares entre partículas subatómicas, e (4) forças nucleares fracas que surgem em certos processos de decaimento radioativo. Na física clássica, estamos preocupados apenas com forças gravitacionais e forças eletromagnéticas.

As forças medem-se com um dinamómetro que não é mais do que uma mola. Quanto maior for a sua deformação maior será a força que lhe está a ser aplicada (ver Fig. 19).

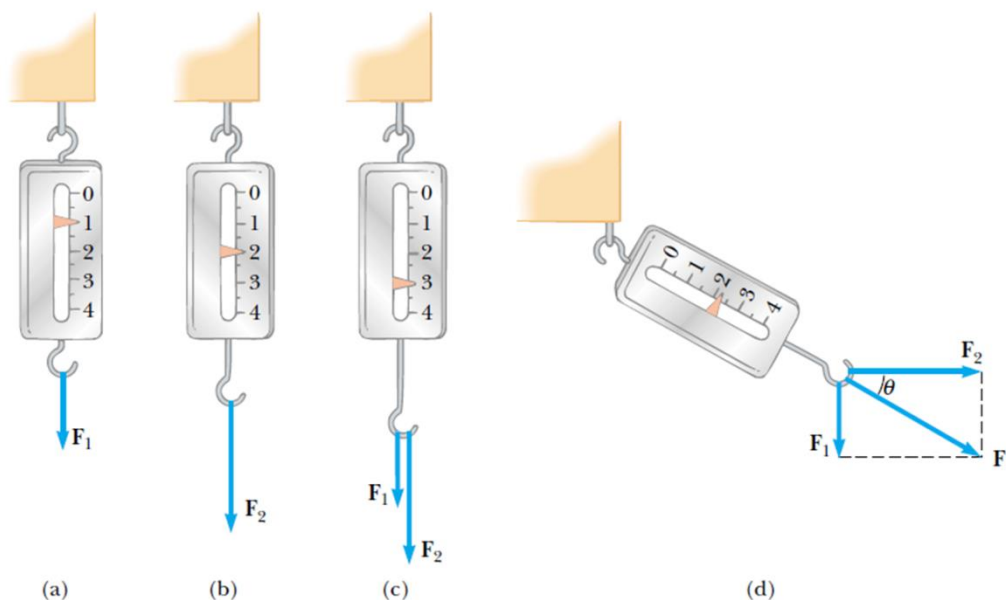


Figura 19

Leis de Newton

Imaginemos um disco que se desloca numa superfície sem qualquer tipo de atrito. Se nada acontecer o que diz a experiência (com alguma abstração à mistura) é que o disco continua o seu movimento em linha reta sempre com a mesma velocidade; da mesma maneira, se pousarmos esse mesmo disco num dado local da superfície sem atrito, o que a experiência nos diz é que ele permanecerá imóvel.

Imaginemos agora que essa superfície sem atrito está dentro de uma carruagem de um comboio que se desloca com velocidade constante e que fazemos as duas experiências anteriores. Que diferenças notaríamos? Essas diferenças resultariam do observador; na verdade há dois possíveis observadores: um dentro do comboio e outro na estação a observar o que se passa dentro do comboio. Assim, o observador dentro do comboio veria o disco parado ou a movimentar-se em linha reta; o observador na estação veria o disco a movimentar-se com uma velocidade que seria a soma da velocidade do disco (observada pelo observador dentro do comboio) mais a velocidade do comboio ou a velocidade do disco igual a velocidade do comboio (caso o disco estivesse parado para o observador dentro do comboio). Contudo, qualquer um dos observadores não deteta nenhuma aceleração no disco. Diz-se então que os dois observadores estão colocados em referenciais de inércia ou referenciais inerciais; nenhum deles deteta uma aceleração no disco e, por outro lado, nenhum deles está acelerado em relação ao outro. Assim, podemos enunciar a primeira lei de Newton (que, de facto, foi enunciada pela primeira vez por Galileu).

Primeira lei de Newton: Se sobre um dado objeto não atuarem forças ou se a soma das forças que estejam a ser atuadas for igual a zero, o objeto estará parado ou animado de movimento retilíneo uniforme (velocidade constante).

Um avião animado de movimento retilíneo com velocidade constante (velocidade de cruzeiro) constitui um sistema inercial: o carrinho da comida da hospedeira permanecerá parado se estiver parado ou movimentar-se-á com movimento retilíneo uniforme se alguém lhe der um empurrão momentâneo; contudo, quando aterrar o carrinho se estiver parado desloca-se para a frente do avião com uma dada aceleração idêntica à desaceleração do avião. Na primeira situação o avião pode ser visto como um referencial de inércia, no segundo não.

Imagine um gato e um elefante. Qual dos dois, movendo-se com a mesma velocidade, é mais difícil de parar? É claro que o elefante é mais difícil de fazer parar (nem vale a pena tentar!). Pois bem a resistência à alteração do movimento tem o nome de inércia e a massa não é mais do que uma medida da inércia de um dado objeto. Assim, podemos dizer que o elefante tem uma massa muito maior do que a do gato. E isto tanto vale para os parar como para os pôr em movimento através de um empurrão. Concluindo, a massa é a propriedade de um objeto que mede a resistência que ele exibe a mudanças na sua velocidade. Em SI a unidade da massa é o quilograma ou kg. Para uma mesma força aplicada, quanto maior for a massa de um objeto menor será a aceleração adquirida. Para determinar a massa quantitativamente, comparam-se experimentalmente as acelerações produzidas por uma mesma força em objetos diferentes. Por exemplo, suponhamos que uma força atua sobre um objeto de massa m_1 produzindo uma aceleração a_1 , e sobre um objeto de massa m_2 produzindo uma aceleração a_2 . A razão das duas massas é definida como a razão inversa das intensidades das acelerações produzidas pela força:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}$$

Assim, se um objeto tem uma massa conhecida, a massa do outro objeto pode ser obtida a partir dos valores das acelerações medidas.

Massa é uma propriedade inerente ao objeto e é independente do meio ambiente (tem o mesmo valor na Terra ou na Lua) e do método usado para medi-lo. É uma quantidade escalar.

A massa não deve ser confundida com o peso. Massa e peso são duas quantidades diferentes. O peso de um objeto é uma força (é a força com que a Terra atrai esse objeto para o seu centro) e é igual ao produto da aceleração da gravidade pela sua massa; portanto, varia de local para local na Terra. A massa não varia de local para local na Terra. As unidades SI da massa e do peso são, respetivamente, kg e N. Finalmente, a massa é uma grandeza escalar e o peso é uma grandeza vetorial.

Segunda lei de Newton

A segunda lei de Newton diz-nos o que acontece com um objeto onde está aplicada uma força (ou força resultante) diferente de zero. Imaginemos que empurramos um bloco de gelo sobre uma superfície horizontal sem atrito. A força no bloco fá-lo mover com uma aceleração a . Se se aplicar uma força duas vezes maior, a aceleração do bloco duplica. Se aumentar a força aplicada para o triplo, a aceleração triplica e assim sucessivamente. Ou seja, a aceleração de um dado objeto é diretamente proporcional à força que atua sobre ele. Mas, como vimos anteriormente, a aceleração de um objeto também depende de sua massa e é inversamente proporcional à sua massa. Estas duas conclusões estão contidas na segunda lei de Newton.

Segunda lei de Newton: num referencial inercial, a aceleração de um dado objeto é diretamente proporcional à força que a produz e inversamente proporcional à sua massa:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} .$$

A força resultante \vec{F} é a soma vetorial de todas as forças que atuam no objeto. Poder haver muitas forças aplicadas sobre um objeto, mas há apenas uma aceleração. A equação é uma equação vetorial e, portanto, é equivalente a três equações escalares segundo os três eixos ortogonais nas três direções do espaço:

$$\sum_{i=1}^n F_x = m \cdot a_x, \quad \sum_{i=1}^n F_y = m \cdot a_y, \quad \sum_{i=1}^n F_z = m \cdot a_z$$

De acordo com a segunda lei de Newton (também conhecida por lei fundamental da dinâmica) a unidade SI de força é o newton ou N, que é definido como a força que ao atuar sobre um objeto de massa 1 kg produz uma aceleração de 1 ms^{-2} . Pode também ser escrita, em termos das unidades fundamentais, como $1\text{N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Terceira lei de Newton

A terceira lei de Newton aplica-se a objetos que interagem entre si. Verifica-se que se dois objetos interagem, a força F_{21} exercida pelo objeto 1 no objeto 2 tem a mesma direção, a mesma intensidade e um sentido oposto à força F_{12} exercida pelo objeto 2 no objeto 1 (ver Fig. 20):

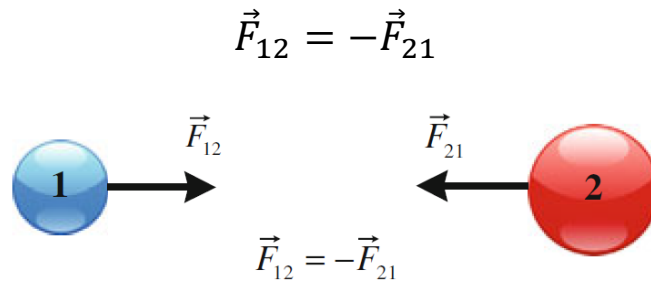


Figura 20

Terceira Lei de Newton: Para cada ação (força) deve haver uma reação (força) com a mesma direção, a mesma intensidade e sentidos opostos.

Método a seguir para resolver problemas de dinâmica:

- Desenhar um diagrama simples para ajudar a visualizar o problema.
- Se a aceleração for zero numa dada direção a força ou a soma das forças aplicadas é zero nessa direção. Caso contrário, a partícula tem aceleração e a força aplicada é diferente de zero nessa direção.
- Isolar o objeto cujo movimento está a ser analisado e desenhar todas as forças a que ele está sujeito.
- Estabelecer um sistema de eixos de coordenadas convenientes para o objeto e determinar as componentes das forças ao longo desses eixos.
- Aplicar a segunda lei de Newton.
- Resolver as equações das componentes em ordem às incógnitas.
- Certificar-se que os resultados são consistentes com o diagrama desenhado e verificar se eles são consistentes com o que seria de esperar. Verificar ainda se as unidades são as corretas.

Algumas forças particulares

Peso \vec{P}

O peso de um corpo \vec{P} é a força com que a Terra atrai esse corpo. Esta força tem uma direção vertical e um sentido de cima para baixo. É principalmente devido a uma atração (chamada de atração gravítica) entre o corpo e a Terra. Um corpo em queda livre experimenta uma aceleração \vec{g} ; assim, aplicando a segunda lei de Newton a um corpo de massa m , obtemos:

$$\vec{P} = m \cdot \vec{g}$$

A unidade SI de \vec{P} é newton ou N. Podemos pesar um corpo com uma mola escala (ver Fig. 19). O corpo estica a mola, movendo seu ponteiro ao longo de uma escala que é calibrada e marcada em unidades de massa ou peso.

Força normal \vec{N}

Quando um bloco, por exemplo, repousa sobre uma mesa, a mesa exerce uma força para cima \vec{N} chamada força normal ou reação normal; o nome vem do termo matemático normal que significa perpendicular. A força normal é a força que impede que o bloco fure a mesa e pode ter um valor máximo até a mesa partir.

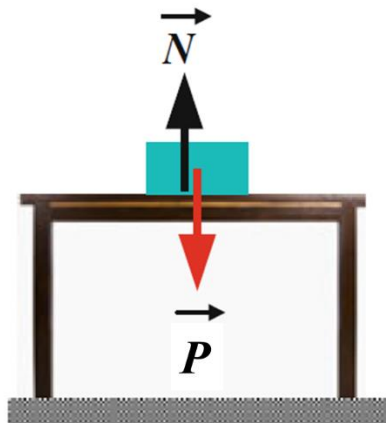


Figura 21

No caso da Fig. 21 as forças que atuam no bloco são apenas o peso \vec{P} e a reação normal \vec{N} . Como o bloco está parado (não tem aceleração) então

as duas forças em jogo cancelam-se e a força total aplicada ao bloco (ou a soma das forças aplicadas) é zero. Assim,

$$\vec{P} + \vec{N} = \vec{0}$$

ou seja

$$\vec{P} = -\vec{N}$$

ou, em termos escalares, $N = P = mg$. Portanto, neste caso força normal equilibra o peso do bloco.

Força de atrito \vec{f}

Quando tentamos deslizar um bloco sobre uma dada superfície há uma certa resistência ao movimento que resulta do contacto entre o bloco e a superfície. Representa-se essa resistência por uma força \vec{f} chamada força de atrito ou simplesmente atrito. Esta força tem uma direção ao longo da superfície de contacto e um sentido oposto ao do movimento. Por vezes, e por simplificação (como já vimos em exemplos anteriores), despreza-se o atrito entre a superfície e o bloco (ou objeto que se move).

Consideremos um bloco apoiado numa mesa horizontal (Fig. 22). O peso (aí representado pela letra W) é equilibrado pela reação normal e, portanto, não há movimento na vertical. Começemos, então, a aumentar, lentamente a força \vec{F} ; inicialmente o bloco não se mexe o que quer dizer que a força de atrito \vec{f} equilibra a força \vec{F} ou seja, a força de atrito e a força aplicada tem a mesma intensidade, a mesma direção mas sentidos opostos. Contudo, a partir de uma certa intensidade da força aplicada \vec{F} começa a haver movimento, o que quer dizer que a força aplicada é superior à força de atrito. Há movimento mas ainda há uma força de atrito que, no entanto, é inferior à força de atrito imediatamente antes de se iniciar o movimento do bloco. Portanto, inicialmente havia um atrito, dito estático (f_s), e quando se iniciou o movimento do bloco continuou a haver um atrito mas que tem um valor inferior ao do atrito estático e que é chamado de atrito cinético (f_k) (ver Fig. 22). O valor do atrito estático é máximo imediatamente antes de se iniciar o movimento.

Experimentalmente verifica-se que tanto f_s como f_k são proporcionais à intensidade da força normal \vec{N} , sendo a constante de proporcionalidade representada por μ . μ tem o nome de coeficiente de atrito estático, μ_s , ou cinético, μ_k , dependendo de não haver ou haver movimento, respetivamente, e é um número adimensional.

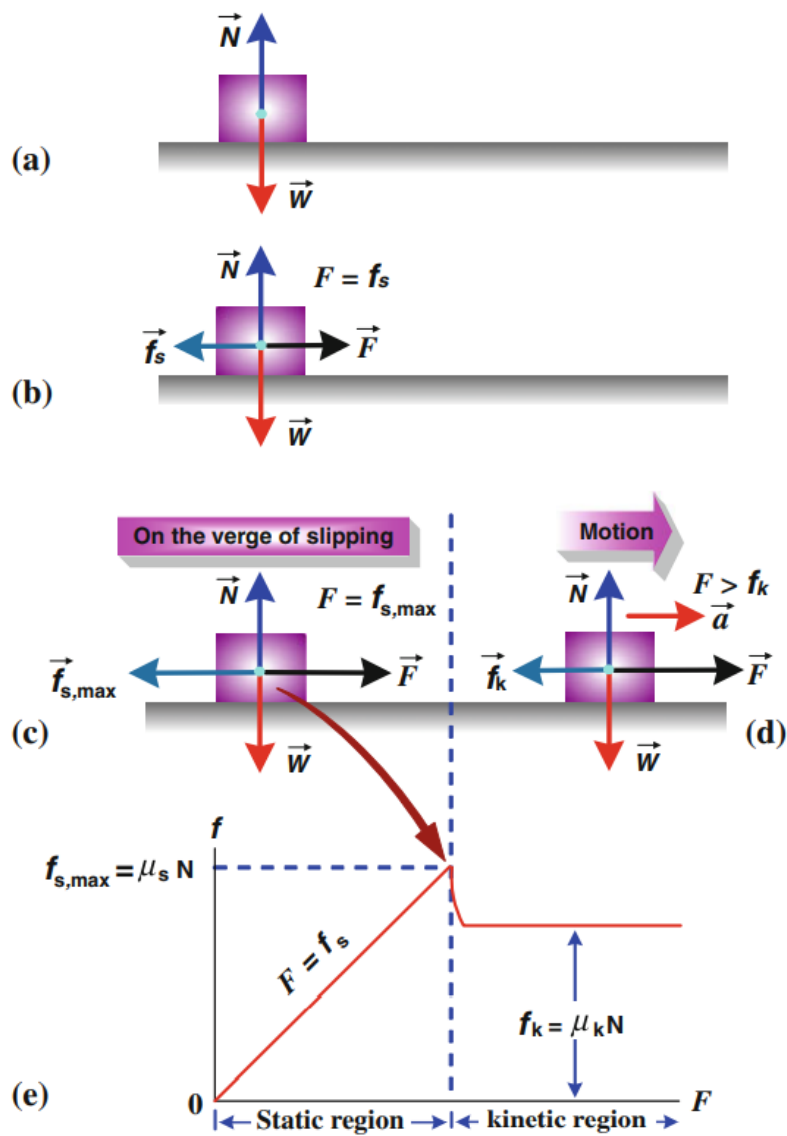


Figura 22

Algumas observações experimentais podem ser resumidas (ver Fig. 22):

1. Se o bloco não estiver em movimento a força de atrito estático é oposta à aplicada força aplicada e pode ter valores dados por

$$f_s \leq \mu_s \cdot |\vec{N}|.$$

2. Quando o bloco está prestes a iniciar o seu movimento, temos

$$f_{s,máx} = \mu_s \cdot |\vec{N}|.$$

3. Se o bloco começar a mover-se ao longo da superfície a intensidade da força de atrito diminui rapidamente para o valor f_k dado por

$$f_k \leq \mu_k \cdot |\vec{N}|.$$

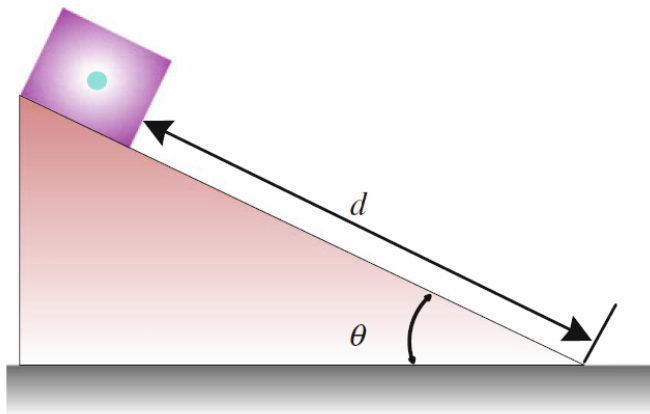
Verifica-se que $\mu_k < \mu_s$. Os coeficientes de atrito estático e cinético têm valores que variam entre 0,05 e 1,5.

EXEMPLO 7

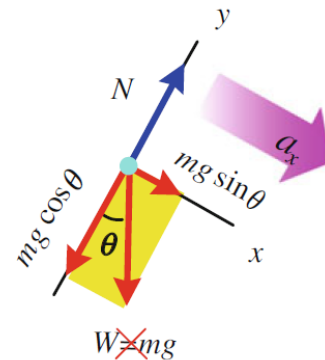
Um bloco de massa m é libertado do topo de um plano inclinado que faz um dado ângulo θ com a horizontal. O comprimento do plano inclinado é d . Admitindo que não há atrito, determine:

- A aceleração do bloco ao longo do plano inclinado.
- O tempo que o bloco demora para percorrer a distância d .
- A velocidade com que a massa atinge a base do plano inclinado.

Solução



(a)



(b)

a) Que forças estão a atuar o bloco? O peso ($P=mg$) e a reação normal N . O movimento realiza-se ao longo do plano inclinado. O melhor sistema de referência (x,y) será o que está desenhado em (b). O movimento é causado pelo peso ($P=m \cdot g$). Decompondo o peso segundo x e y , isto é, P_x e P_y teremos

$$P_x = P \cdot \text{sen } \theta = mg \cdot \text{sen } \theta$$

$$P_y = P \cdot \cos \theta = mg \cdot \cos \theta$$

Mas P_y é compensado pela reação normal e, portanto, a única força a atuar é a componente do peso segundo o eixo x ($mg \cdot \sin \theta$). Pela segunda lei de Newton $F=ma$. Mas a força que está a atuar é $P_x = mg \cdot \sin \theta$. Portanto, temos

$$m \cdot a_x = mg \cdot \sin \theta$$

o que dá $a_x = g \cdot \sin \theta$.

b) Pelas equações do movimento retilíneo uniformemente acelerado temos

$$a = \text{constante}$$

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$v = v_0 + a \cdot t$$

Colocando o início do movimento no ponto onde o objeto é libertado temos

$$d = 0 + 0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot \sin \theta \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \sin \theta \cdot t^2$$

que resolvendo em ordem a d dá

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot d}{g \cdot \sin \theta}}$$

c) Utilizando a equação das velocidades do movimento uniformemente acelerado obtemos

$$v = 0 + g \cdot \sin \theta \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot d}{g \cdot \sin \theta}} = \sqrt{2 \cdot d \cdot g \cdot \sin \theta}$$

E se houvesse atrito, como seria?

EXEMPLO 8

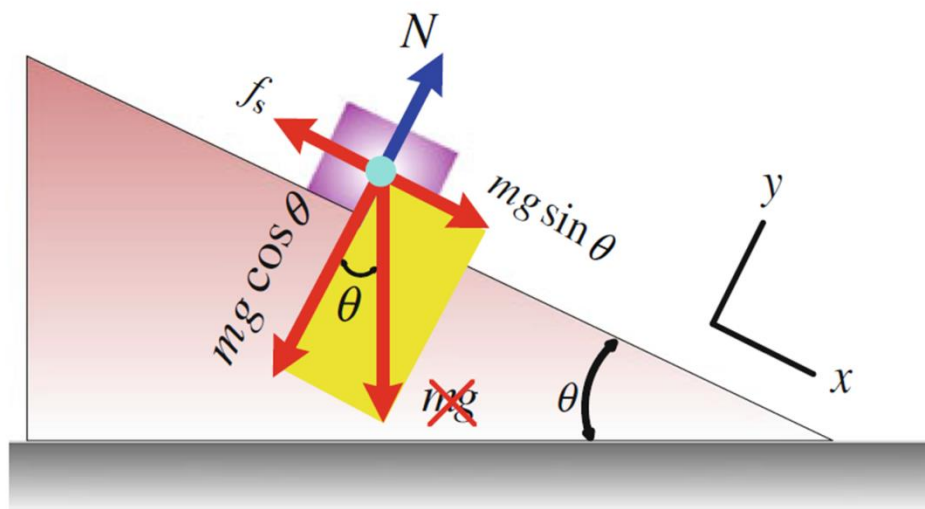
Um bloco está em repouso num plano inclinado que faz um ângulo θ com a horizontal como é mostrado na figura abaixo.

a) Determine a força de atrito estático f_s em termos da reação normal N e do ângulo θ .

b) Quando o bloco esteja prestes a escorregar $\theta = \theta_c = 38,7^\circ$. Calcule o valor do coeficiente de atrito estático μ_s .

c) Se aumentarmos ainda mais o ângulo θ (para permitir que o bloco acelere) e, em seguida, diminuirmos θ novamente para o valor $\theta = \theta' = 26,6^\circ$ para permitir que o bloco se mova com velocidade constante, determine o coeficiente de atrito de cinético μ_k .

Solução



a) Considerando o sistema de eixos ortogonais (x, y) e considerando as forças que estão aplicadas ao bloco segundo essas duas direções temos:

$$\sum F_x = mg \sin \theta - f_s = 0$$

$$\sum F_y = N - mg \cos \theta = 0$$

ou

$$mg\text{sen}\theta = f_s$$

$$N = mg\text{cos}\theta .$$

Resolvendo em ordem a f_s (dividindo a primeira equação pela segunda) temos

$$\frac{f_s}{N} = \frac{mg\text{sen}\theta}{mg\text{cos}\theta} = \frac{\text{sen}\theta}{\text{cos}\theta}$$

ou

$$f_s = N \cdot \frac{\text{sen}\theta}{\text{cos}\theta} = N \cdot \text{tg}\theta$$

b) Como $f_{s,máx} = \mu_s \cdot |\vec{N}| = \mu_s \cdot |\vec{N}| = N \cdot \text{tg}\theta$ vem que $\mu_s = \text{tg}\theta$.

Assim, $\mu_s = \text{tg } 38,7^\circ = 0,8$.

c) Quando o bloco se movimenta com velocidade constante quer dizer que a soma das forças aplicadas é igual a zero e $\mu_k = \text{tg}\theta$. Assim, quando $\theta = 26,6^\circ$ temos $\mu_k = \text{tg } 26,6^\circ = 0,5$.

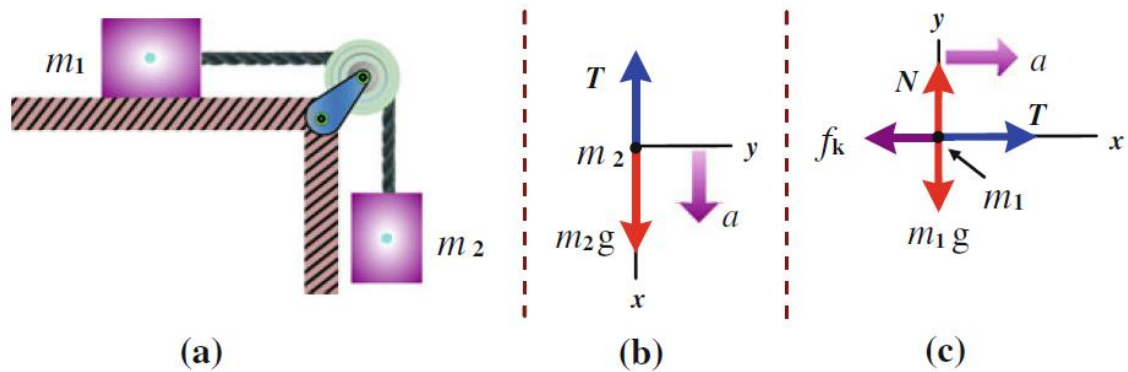
EXEMPLO 9

Um bloco de massa $m_1 = 4$ kg que se encontra sobre uma superfície horizontal áspera está ligado através de uma roldana sem atrito a um segundo bloco de massa $m_2 = 6$ kg por um cabo com massa desprezável e inextensível conforme é mostrado na figura. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície é $\mu_k = 0,5$.

a) Calcule a aceleração do sistema e a tensão no cabo.

b) Determine a relação entre m_1 e m_2 no caso em que o sistema está prestes a entrar em movimento.

Solução



a) Como o cabo é inextensível as duas massas têm a mesma aceleração \underline{a} mas em sentidos diferentes; por outro lado, como tem massa desprezável quer dizer que não há forças a ele aplicadas. Desenhando um diagrama de forças para cada uma das duas massas e associando um sistema de eixos vemos que na massa m_2 (parte (b) da figura anterior), temos

$$\sum F_x = m_2 g - T = m_2 \cdot a$$

$$\sum F_y = 0$$

Da primeira equação obtemos

$$T = m_2 g - m_2 \cdot a$$

Para a massa m_1 (parte (c) da figura anterior), temos

$$\sum F_x = T - f_k = m_1 \cdot a$$

$$\sum F_y = N - m_1 g = 0$$

Mas $f_k = \mu_k \cdot N$ e da equação anterior vem que $N = m_1 g$ o que dá $f_k = \mu_k \cdot N = \mu_k \cdot m_1 \cdot g$. Substituindo na primeira equação dará

$$T = \mu_k \cdot m_1 \cdot g + m_1 \cdot a.$$

Igualando as duas expressões de T temos

$$m_2 g - m_2 \cdot a = \mu_k \cdot m_1 \cdot g + m_1 \cdot a$$

ou

$$m_2(g - a) = \mu_k \cdot m_1 \cdot g + m_1 \cdot a$$

que resolvendo em ordem a a dá

$$a = \frac{m_2 - m_1 \cdot \mu_k}{m_1 + m_2} \cdot g$$

É de notar que para $m_2 > m_1 \cdot \mu_k$ o movimento do conjunto tem aceleração; para $m_2 = m_1 \cdot \mu_k$ a velocidade é constante já que a aceleração é nula.

Podemos determinar a tensão no cabo substituindo a aceleração a na expressão de T, o que dará

$$T = \frac{(\mu_k + 1) \cdot m_2 \cdot m_1}{m_1 + m_2} \cdot g$$

Utilizando os valores das massas, do coeficiente de atrito cinético e da aceleração de gravidade igual a $9,8 \text{ m/s}^2$ obtemos: $a = 3,92 \text{ m/s}^2$ e $T = 35,28 \text{ N}$.

b) Quando o sistema está prestes a entrar em movimento a tensão que atua na massa m_1 é igual à força de atrito máxima $f_{s,máx} = \mu_s \cdot N$, ou seja $T = \mu_s \cdot N = \mu_s \cdot m_1 \cdot g$. Mas a tensão do cabo na massa m_2 é de $T = m_2 \cdot g$. Igualando temos $m_2 \cdot g = \mu_s \cdot m_1 \cdot g$, ou seja, quando está prestes a entrar em movimento verifica-se que $m_2 = \mu_s \cdot m_1$. Assim, o coeficiente de atrito estático será

$$\mu_s = \frac{m_2}{m_1} = \frac{6 \text{ kg}}{4 \text{ kg}} = 1,5$$

Capítulo IV

Conceito de momento linear, conservação do momento linear e colisões

Por definição o momento linear ou quantidade de movimento é o produto da massa pela velocidade

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

É um vetor já que a velocidade é um vetor. Tem a mesma direção e sentido da velocidade. Como temos feito para os vetores, a equação vetorial de definição do momento linear pode ser escrita, de maneira equivalente, como três equações escalares segundo as três direções do espaço, isto é,

$$p_x = m \cdot v_x, \quad p_y = m \cdot v_y, \quad p_z = m \cdot v_z$$

O momento linear depende do tempo através da velocidade e, portanto, é razoável perguntar o que é a derivada do momento linear em ordem ao tempo. Derivemos em ordem ao tempo a expressão de definição do momento linear:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} (m \cdot \vec{v}) = \frac{dm}{dt} \cdot \vec{v} + m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a} = \vec{F}$$

Ou seja, a taxa de variação do momento linear de uma dada massa no tempo não é mais do que a força a que essa massa está sujeita. Podemos então escrever de uma maneira mais geral a lei fundamental da dinâmica como

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

A unidade SI do momento linear é $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Da expressão anterior podemos escrever a expressão, aproximada,

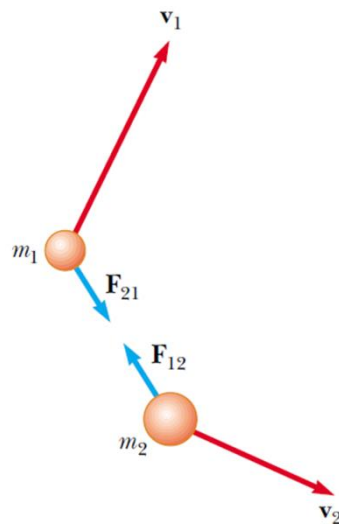
$$\Delta\vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t$$

onde \vec{F} é o vetor força média. Na verdade, a equação anterior quer dizer que a variação do momento linear durante um certo intervalo de tempo Δt é igual à força média a multiplicar pelo intervalo de tempo durante o qual a força média atua. A $\Delta\vec{p}$ dá-se o nome de impulsão da força \vec{F} e podemos escrever

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} = \vec{F} \cdot (t_f - t_i)$$

Esta equação é muito útil para estudar problemas em que objectos diferentes interagem durante intervalos de tempo curtos.

Consideremos, agora, duas partículas de massa m_1 e m_2 , com velocidades \vec{v}_1 e \vec{v}_2 que podem interagir através de forças de carácter gravítico, por exemplo. Cada uma das massas tem momentos lineares \vec{p}_1 e \vec{p}_2 .



A força \vec{F}_{12} e a força \vec{F}_{21} são as forças que a massa m_1 exerce sobre a massa m_2 e que a massa m_2 exerce sobre a massa m_1 , respectivamente. Mas pela terceira lei de Newton,

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

ou

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{0}.$$

Mas, por outro lado podemos escrever:

$$\vec{F}_{12} = \frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

e

$$\vec{F}_{21} = \frac{d\vec{p}_1}{dt}$$

donde vem

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \frac{d\vec{p}_2}{dt} + \frac{d\vec{p}_1}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{p}_2 + \vec{p}_1) = \vec{0}$$

A equação $\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \vec{0}$ indica que a taxa de variação de $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ não varia no tempo, ou seja, se \vec{p}_1 variar no tempo essa variação será compensada por uma variação em sentido contrário de \vec{p}_2 de modo a que a soma $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ se mantenha constante no tempo.

$$(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \vec{C}$$

onde \vec{C} é uma constante. Isto constitui o importante teorema da conservação do momento linear. É necessário não esquecer que a demonstração foi feita admitindo que não há forças externa a atuar nas duas massas; as únicas forças são forças internas ao sistema formado pelas duas massas; este resultado pode ser generalizado para um número de massas superior a 2. Assim podemos enunciar o princípio (ou teorema) da conservação do momento linear ou da quantidade de movimento da seguinte forma: num sistema de partículas onde só atuam forças interiores ao sistema (sistema isolado), o momento linear do conjunto das partículas permanece constante ao longo do tempo. Ou, de maneira sintética

$$\sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \dots + \vec{p}_n = \vec{C}$$

As interações entre partículas podem ser por contacto (colisão) ou por ação à distância (as partículas não chocam entre si). Durante os processos de interação há uma outra quantidade que pode ou não conservar-se, isto é, manter-se constante. Essa quantidade é a energia cinética que é definida por

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

e tem como unidade em SI joule ou J. É a energia cinética que vai caracterizar uma dada colisão entre partículas: se durante uma colisão a energia cinética das partículas do sistema isolado se mantiver constante antes e depois da colisão, essa colisão toma o nome de colisão elástica; se a energia cinética, antes e depois da colisão, diminuir a colisão diz-se inelástica. No caso de, depois da colisão, os objectos que colidem sigam o seu percurso juntos, a colisão toma o nome de colisão perfeitamente inelástica.

No caso de estarmos a trabalhar com n partículas que estão a interagir e formam um sistema isolado, podemos escrever:

$$\sum_{i=1}^n p_{ix} = p_{1x} + p_{2x} + p_{3x} + \dots + p_{nx} = C_1,$$

$$\sum_{i=1}^n p_{iy} = p_{1y} + p_{2y} + p_{3y} + \dots + p_{ny} = C_2,$$

$$\sum_{i=1}^n p_{iz} = p_{1z} + p_{2z} + p_{3z} + \dots + p_{nz} = C_3.$$

Para o caso de uma interação de duas partículas com colisão ao longo de um plano (por exemplo, plano (x,y)) teremos de maneira simplificada:

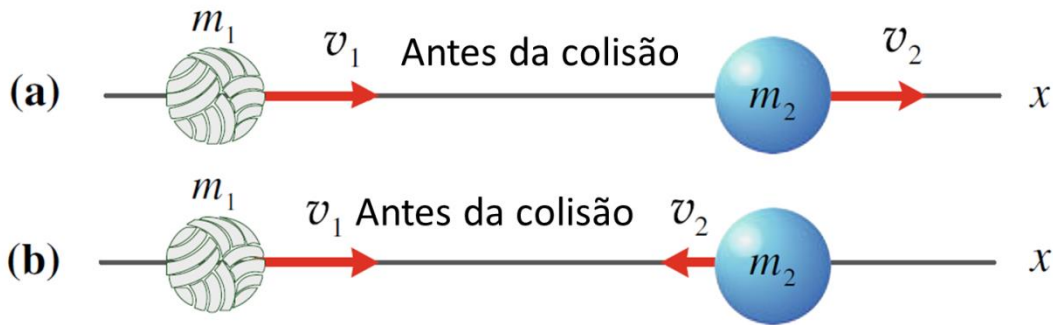
$$(p_{1x} + p_{2x})_{\text{antes da colisão}} = (p_{1x} + p_{2x})_{\text{depois da colisão}}$$

e

$$(p_{1y} + p_{2y})_{\text{antes da colisão}} = (p_{1y} + p_{2y})_{\text{depois da colisão}}.$$

EXEMPLO 10

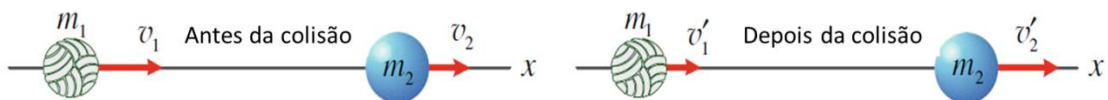
Uma bola de ténis de massa $m_1 = 0,04 \text{ kg}$, move-se com uma velocidade de 5 m/s e tem uma colisão elástico frontal com uma bola alvo de massa $m_2 = 0,06 \text{ kg}$ que se movia com uma velocidade de 3 m/s , como é mostrado na figura.



Qual é a velocidade de cada uma das bolas após a colisão na situação (a) e na situação (b)?

Solução

Para a situação (a), usando o princípio da conservação do momento linear, podemos escrever



$$\begin{aligned} m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 &= m_1 \cdot v'_1 + m_2 \cdot v'_2 \\ \text{ou} \\ m_1 \cdot (v_1 - v'_1) &= m_2 \cdot (v'_2 - v_2) \end{aligned} \quad (1)$$

Como a colisão é elástica há conservação da energia cinética

$$\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot (v_1)^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot (v_2)^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot (v'_1)^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot (v'_2)^2$$

ou

$$m_1 \cdot (v_1)^2 + m_2 \cdot (v_2)^2 = m_1 \cdot (v'_1)^2 + m_2 \cdot (v'_2)^2$$

ou

$$m_1 \cdot ((v_1)^2 - (v'_1)^2) = m_2 \cdot ((v'_2)^2 - (v_2)^2)$$

ou ainda

$$m_1 \cdot (v_1 - v'_1)(v_1 + v'_1) = m_2 \cdot (v'_2 - v_2)(v'_2 + v_2) \quad (2)$$

Dividindo a eq. (2) pela que. (1) obtemos

$$v_1 + v'_1 = v'_2 + v_2. \quad (3)$$

Conhecendo m_1 e m_2 , as eqs. (1) e (3) constituem um sistema de duas equações a duas incógnitas, isto é, v'_1 e v'_2 re resolvendo dá:

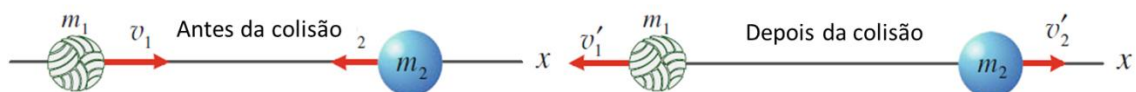
$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_2$$

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_2$$

Substituindo os valores temos

$$v'_1 = 2,6 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad v'_2 = 4,6 \text{ m/s}$$

Para a situação (b), usando as mesmas equações podemos chegar aos seguintes valores

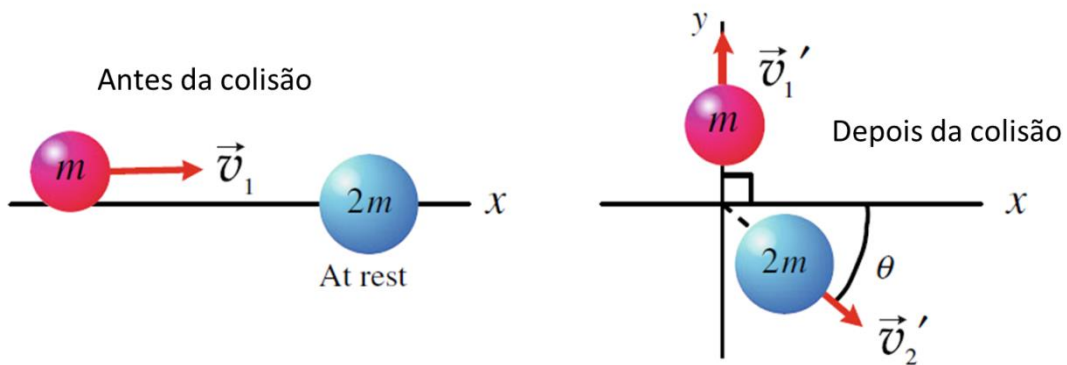


$$v'_1 = -4,6 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad v'_2 = 3,4 \text{ m/s}$$

EXEMPLO 11

Uma esfera de massa $m_1 = m$, movendo-se ao longo do eixo x com uma velocidade $v_1 = 10\sqrt{3} \text{ m/s}$ colide, elasticamente, com uma outra esfera estacionário de massa $m_2 = 2m$. Depois da colisão, a esfera m_1 é desviado em um ângulo de 90° conforme se mostra na figura.

- Qual a velocidade e o ângulo da esfera m_2 após a colisão?
- Qual é a velocidade final da esfera m_1 ?
- Qual a fração de energia cinética transferida para a esfera m_2 ?



Solução

a) De acordo com o teorema da conservação do momento linear a duas dimensões e da conservação de energia cinética, podemos escrever:

Momento linear ao longo do eixo x

$$(mv_1 + 0)_{\text{antes da colisão}} = (0 + 2mv'_2 \cdot \cos\theta)_{\text{depois da colisão}}$$

$$v_1 = 2v'_2 \cdot \cos\theta$$

Momento linear ao longo do eixo y :

$$(0 + 0)_{\text{antes da colisão}} = (mv'_1 - 2mv'_2 \cdot \sin\theta)_{\text{depois da colisão}}$$

$$v'_1 = 2v'_2 \cdot \sin\theta$$

Energia cinética antes e depois da colisão:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_1)^2 + 0 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v'_1)^2 + \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot (v'_2)^2$$

$$(v_1)^2 - (v'_1)^2 = 2 \cdot (v'_2)^2$$

Elevando ao quadrado as duas primeiras equações e somando obtém-se

$$(v_1)^2 + (v'_1)^2 = 4 \cdot (v'_2)^2$$

que, somando ao resultado da conservação da energia cinética, dá

$$2 \cdot (v_1)^2 = 6 \cdot (v'_2)^2$$

$$v'_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 10\sqrt{3} = 10 \text{ m/s}$$

Da expressão do momento linear segundo x ($v_1 = 2v'_2 \cdot \cos\theta$) podemos calcular o ângulo.

$$10\sqrt{3} = 2 \cdot 10 \cdot \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \theta = 30^\circ$$

b) Na equação do momento linear segundo y ($v'_1 = 2v'_2 \cdot \sin\theta$) podemos substituir os valores já conhecidos, obtendo:

$$v'_1 = 2 \cdot 10 \cdot \sin 30^\circ = 10 \text{ m/s}$$

c) A fração de energia cinética transferida para a esfera m_2 é dada por:

$$\frac{E'_c}{E_c} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2m \cdot (v'_2)^2}{\frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_1)^2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2m \cdot \frac{1}{3} \cdot (v_1)^2}{\frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_1)^2} = \frac{2}{3}$$

ou seja, 66,67 % da energia cinética da esfera de massa m é transferida para a esfera de massa $2m$.

Capítulo V

Conceitos de trabalho e energia

Apesar de, no dia a dia, ser comum falar-se trabalho e energia, em Física trabalho e energia tem significados e definições específicas. Como veremos ao longo destas linhas, trabalho e energia são equivalentes e a sua utilização em problemas de mecânica é equivalente ao tratamento que referimos na mecânica utilizando as leis de Newton; contudo, em muitos casos, a sua utilização é mais simples de aplicar a problemas complexos.

Olhemos para a Fig. 23 e imaginemos que estamos a exercer uma da força constante \vec{F} e que, por causa dela, o bloco sofre um deslocamento \vec{s} para a direita.

Por definição, o trabalho realizado, W , por uma força constante \vec{F} é o produto interno (ou escalar) do vetor força pelo vetor deslocamento; ou, dito de outra maneira atendendo à interpretação geométrica do produto interno, é o produto do componente da força na direção do deslocamento e a intensidade do deslocamento.

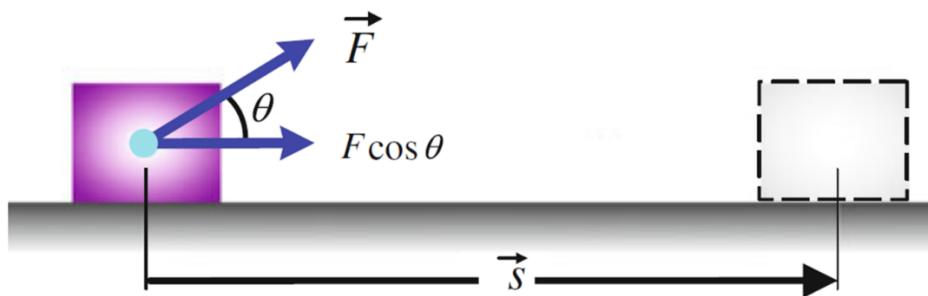


Figura 23

De maneira formal podemos escrever

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = (F \cdot \cos\theta) \cdot |\vec{s}| = (F \cdot \cos\theta) \cdot s$$

A unidade de trabalho em unidades SI é N.m ou joule ou ainda J; em unidades cgs é dine.cm ou erg. $1 \text{ erg} = 1 \text{ dine.cm}$. $1 \text{ J} = 10^7 \text{ erg}$.

De acordo com a definição de produto interno e de trabalho como um produto interno, podemos concluir que o trabalho pode ser positivo, negativo ou nulo, dependendo do valor do ângulo θ e de haver ou não deslocamento. Assim, o trabalho é nulo quando não há deslocamento do ponto de aplicação da força; por outro lado é positivo para $90^\circ < \theta \leq 0^\circ$, negativo para $180^\circ \geq \theta > 90^\circ$; é nulo quando $\theta = 90^\circ$, ou seja, quando o vetor deslocamento é perpendicular à força.

Uma interpretação geométrica do trabalho pode, também, ser considerada (ver Fig. 24). Se representarmos num gráfico a componente da força $F \cdot \cos\theta$ em função da posição e representarmos as posições inicial e final do objecto que está a ser atuado pela força constante, então, a área definida por esses limites (Fig. 23) é, numericamente, igual ao trabalho realizado pela força constante quando desloca o seu ponto aplicação da posição inicial x_i para a posição final x_f ; ou seja, aquela área é dada por $(F \cdot \cos\theta) \cdot s = (F \cdot \cos\theta) \cdot (x_f - x_i) \equiv \text{Área}$.

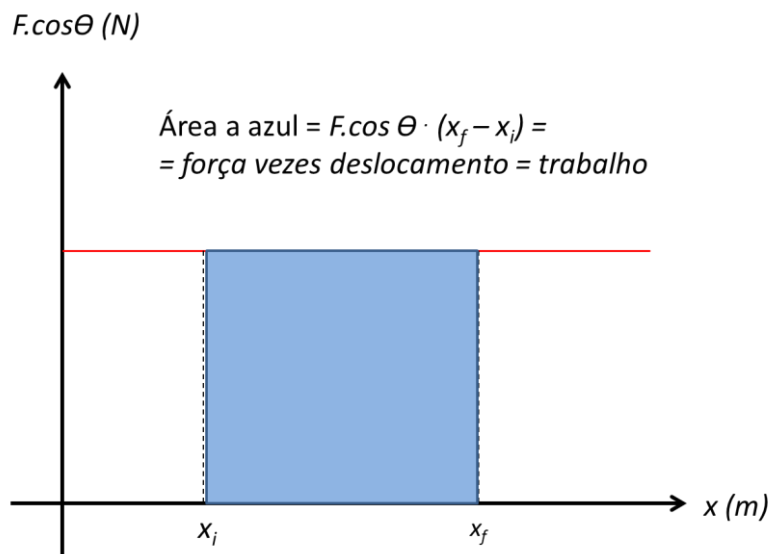


Figura 24

Quando a força não é constante mas depende da posição, i. e., depende, por exemplo, da coordenada x ($F(x)$) então o trabalho é dado pelo integral de linha (ver Fig. 25)

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x) \cdot dx$$

onde $F(x)$ é a projeção da força segundo a direção x e x_i e x_f são as posições inicial e final, respectivamente. Em termos geométricos, num gráfico de $F(x)$ em função de x , seria a área compreendida entre as linhas verticais passando pelas posições x_i e x_f e a linha correspondente à função $F(x)$ entre essas duas posições.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x_i}^{x_f} F(x) \Delta x = \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx$$

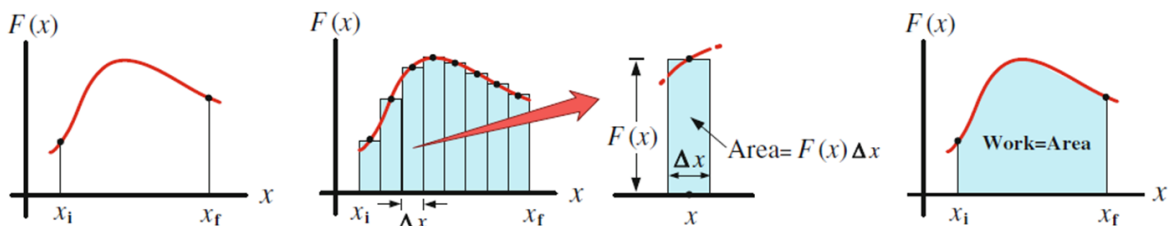


Figura 25

Imaginemos, finalmente, que temos uma força no espaço cujas componentes são função da posição

$$\vec{F} = F_x \vec{e}_1 + F_y \vec{e}_2 + F_z \vec{e}_3$$

e um vetor deslocamento elementar

$$d\vec{r} = dx \vec{e}_1 + dy \vec{e}_2 + dz \vec{e}_3$$

O trabalho realizado pela força \vec{F} será dado por

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = (F_x \vec{e}_1 + F_y \vec{e}_2 + F_z \vec{e}_3) \cdot (dx \vec{e}_1 + dy \vec{e}_2 + dz \vec{e}_3)$$

$$= F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

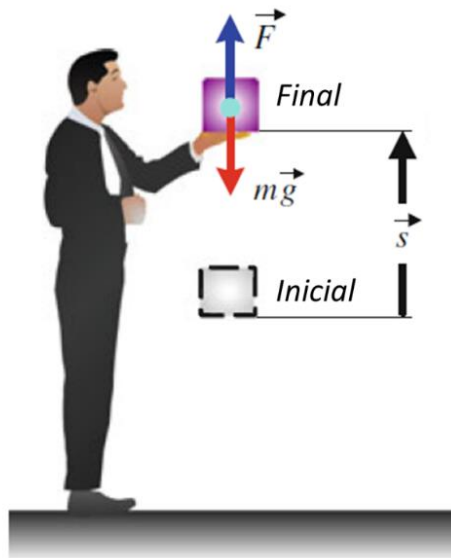
de onde vem

$$W = \int_{r_i}^{r_f} dW = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z dz$$

Quando a força tem apenas componente segundo x a equação anterior reduz-se à equação (já escrita anteriormente)

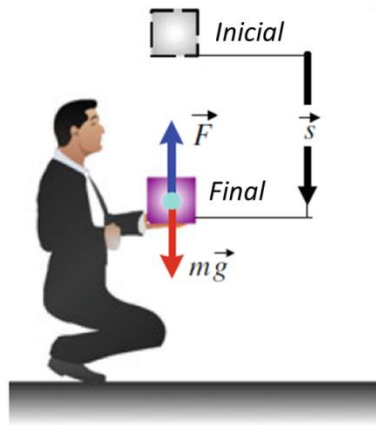
$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x) \cdot dx.$$

Trabalho realizado por uma força contrária ao peso



$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = (F \cdot \cos\theta) \cdot |\vec{s}| = (F \cdot \cos\theta) \cdot s$$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = (F \cdot \cos 0^\circ) \cdot |\vec{s}| = (mg \cdot 1) \cdot s = mgs$$



$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = (F \cdot \cos 180^\circ) \cdot |\vec{s}| = (mg \cdot (-1)) \cdot s = -mgs$$

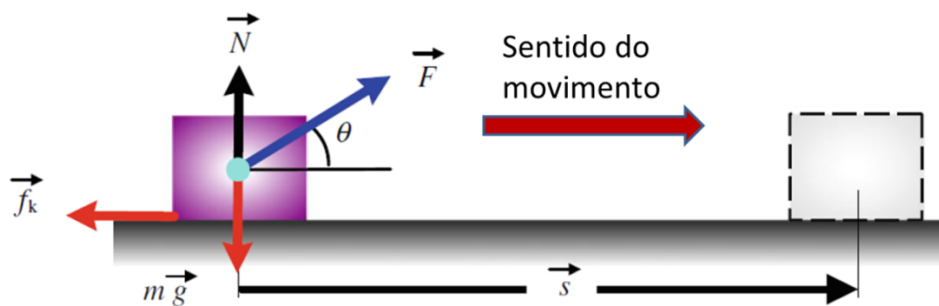
Trabalho realizado pelo peso para cima

$$W = \vec{P} \cdot \vec{s} = (P \cdot \cos 180^\circ) \cdot |\vec{s}| = -mgs$$

Trabalho realizado pelo peso para baixo

$$W = \vec{P} \cdot \vec{s} = (P \cdot \cos 0^\circ) \cdot |\vec{s}| = mgs$$

Trabalho realizado pela força de atrito

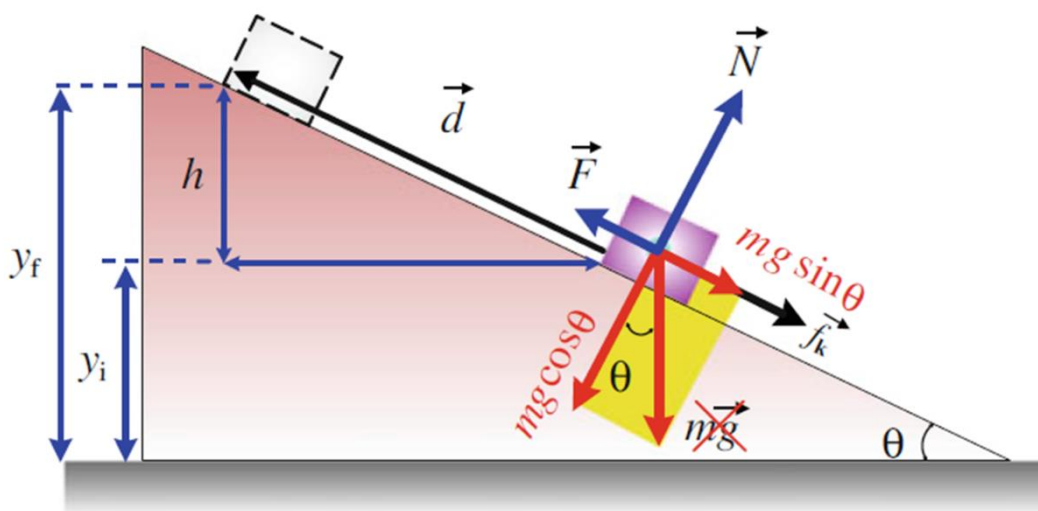


$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = (F \cdot \cos \theta) \cdot |\vec{s}| = (F \cdot \cos \theta) \cdot s$$

EXEMPLO 12

Um bloco de massa m é empurrado para cima por uma força F paralela ao plano inclinado conforme é mostrado na figura. O deslocamento do bloco é d para cima do plano inclinado.

- a) Determine o trabalho realizado pela força \vec{F} , pela força de atrito \vec{f}_a , pelo peso \vec{P} e pela reacção normal \vec{N} .
- b) Calcule os trabalhos da alínea anterior para $m = 2 \text{ kg}$, $\mu_k = 0,5$, $\theta = 30^\circ$, $F = 20 \text{ N}$ e $d = 5 \text{ m}$.



SOLUÇÃO

- a) A força tem a mesma direcção do deslocamento; logo

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = (F \cdot \cos 0^\circ) \cdot |\vec{d}| = F \cdot 1 \cdot d = Fd$$

O trabalho realizado pelo peso será

$$W = m\vec{g} \cdot \vec{d} = (mg \cdot \cos (90^\circ + \theta)) \cdot |\vec{d}| = -mg \cdot d \cdot \sin \theta = -mgh$$

O trabalho realizado pela força de atrito será

$$f_k = \mu_k \cdot N = \mu_k \cdot mg \cos \theta$$

$$W = \vec{f}_k \cdot \vec{d} = f_k \cdot |\vec{d}| \cdot \cos 180^\circ = -\mu_k \cdot mg \cos \theta \cdot d$$

O trabalho realizado pela reacção normal é

$$W = \vec{N} \cdot \vec{d} = N \cdot |\vec{d}| \cdot \cos 90^\circ = 0$$

b) $W_F = 20 \text{ N} \times 5 \text{ m} = 100 \text{ J}$; $W_{fa} = - 0,5 \times 2 \times 9,8 \times \cos 30^\circ \times 5 = - 42,4 \text{ J}$;

$W_p = -2 \times 9,8 \times 5 \times \sin 30^\circ = - 49 \text{ J}$.

Portanto o trabalho total será de $W_t = 100 + (- 42,4) + (- 49) + 0 = 8,6 \text{ J}$

Teorema trabalho-energia

Na cinemática vimos que

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot (x - x_0).$$

Naquela altura só sabíamos que a equação era válida para uma aceleração constante e não estávamos preocupados com o que produzia essa aceleração. Agora sabemos que essa aceleração é o resultado da aplicação de uma força constante e tem a forma $a=F/m$. Assim, se substituirmos a expressão da aceleração equação anterior e substituirmos v por v_1 (ou seja, a velocidade para a posição x_1) e v_0 por v_2 (ou seja a velocidade para a posição x_2) e fizermos $d = (x - x_0) \equiv (x_2 - x_1)$, obtemos

$$v_1^2 = v_2^2 + 2 \cdot \frac{F}{m} \cdot d$$

que, rearranjando, dará

$$W = F \cdot d = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 = \Delta E_c.$$

O segundo membro da equação é uma diferença de duas energias cinéticas; o primeiro membro é o produto de uma força constante por um deslocamento o que corresponde a um trabalho. A equação anterior traduz o importante teorema trabalho energia que pode ser enunciado da seguinte maneira: o trabalho realizado por uma força (ou a resultante de

várias forças aplicadas) sobre um dado objecto ao longo de um dado deslocamento é igual a variação da energia cinética entre as posições inicial e final do deslocamento sofrido pelo objecto.

Este teorema é verdadeiro para forças constantes como para forças que variam com a posição. Na verdade, (para simplificar vamos admitir que a força varia apenas ao longo do eixo x) podemos escrever

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x) \cdot dx = \int_{x_i}^{x_f} ma \cdot dx$$

Mas podemos escrever que

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot v$$

que substituindo na expressão do trabalho dá

$$\begin{aligned} W &= \int_{x_i}^{x_f} ma \cdot dx = \int_{x_i}^{x_f} m \cdot \frac{dv}{dx} \cdot v \cdot dx = \int_{v_i}^{v_f} m \cdot v \cdot dv = \\ &= \frac{m}{2} \cdot (v_f^2 - v_i^2) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_f^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_i^2 \end{aligned}$$

O trabalho pode ser realizado com maior ou menor rapidez à taxa de realização de trabalho por unidade de tempo dá-se o nome de potência e tem por unidade SI watt, joule/s ou W.

$$\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}.$$

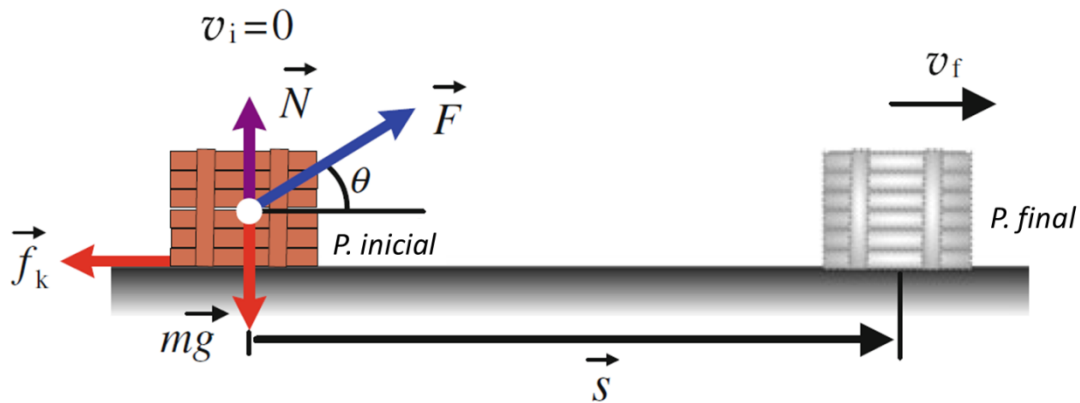
\bar{P} é a chamada potência média. Quando fazemos Δt tender para zero obtemos a chamada potência instantânea:

$$P = \frac{dW}{dt}.$$

EXEMPLO 13

Uma caixa de massa 10 kg está inicialmente em repouso numa superfície horizontal com atrito. O coeficiente de atrito cinético entre a caixa e a superfície é de 0,2. A caixa é puxada, horizontalmente, por uma força de 50 N que faz um ângulo de 60° com a horizontal (ver figura).

- a) Utilize o teorema trabalho-energia para calcular a velocidade final da caixa (v_f) depois de se mover 4m.
 b) Repita a alínea a) usando a lei fundamental da dinâmica.



SOLUÇÃO

- a) Pelo teorema trabalho-energia temos

$$W = F \cdot d = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 = \Delta E_c$$

O trabalho realizado pelo peso e pela reacção normal é igual a zero. Porquê?

O trabalho realizado pela força aplicada F é dado por

$$W_F = \vec{F} \cdot \vec{s} = (F \cdot \cos 60^\circ) \cdot |\vec{s}| = 50 \cdot \cos 60^\circ \cdot 4 = 100 \text{ J}$$

O trabalho realizado pela força de atrito é dado por

$$W = \vec{f}_k \cdot \vec{d} = f_k \cdot |\vec{s}| \cdot \cos 180^\circ \quad \text{com} \quad f_k = \mu_k \cdot N$$

Mas, neste caso, $N = mg - F \cdot \text{sen } \theta$ já que $\text{peso} = N + \text{comp.de } F_y$.
Vem, assim, que

$$f_k = \mu_k \cdot N = \mu_k \cdot (mg - F \cdot \text{sen } \theta)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} W_{fa} = \vec{f}_k \cdot \vec{d} &= -\mu_k \cdot (mg - F \cdot \text{sen } \theta) \cdot |\vec{s}| \\ &= -0,2 \cdot (10 \cdot 9,8 - 50 \cdot \text{sen } 60^\circ) \cdot 4 = -43,76 \text{ J} \end{aligned}$$

Assim, o trabalho total é

$$W_t = W_F + W_{fa} + W_N + W_P = 100 + (-43,76) + 0 + 0 = 56,24 \text{ J}$$

Mas pelo teorema trabalho-energia

$$56,74 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_f^2 - 0$$

Vindo, finalmente, $v_f = 3,35 \text{ m/s}$.

b) Como só há movimento ao longo da horizontal (eixo x) podemos escrever

$$\sum F_x = F \cdot \cos \theta - f_k = ma$$

com

$$f_k = \mu_k \cdot N = \mu_k \cdot (mg - F \cdot \text{sen } \theta)$$

Assim,

$$a = \frac{F \cdot \cos \theta - \mu_k \cdot (mg - F \cdot \text{sen } \theta)}{m}$$

$$a = \frac{50 \cdot \cos 60^\circ - 0,2 \cdot (10 \cdot 9,8 - 50 \cdot \text{sen } 60^\circ)}{10} = 1,406 \text{ m/s}^2$$

Mas

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot (x - x_0).$$

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot (x - x_0).$$

$$v^2 = 2 \cdot 1,406 \cdot (4 - 0)$$

$$v = \sqrt{2 \cdot 1,406 \cdot 4} = 3,35 \text{ m/s}$$

Claro que neste problema não se vê explicitamente as vantagens do teorema-trabalho energia porque as forças são constantes.

Energia potencial e princípio da conservação da energia mecânica

Façamos o seguinte exercício. Na Fig. 26, qual o trabalho realizado pelo peso quando desloca a esfera nas três situações representadas?

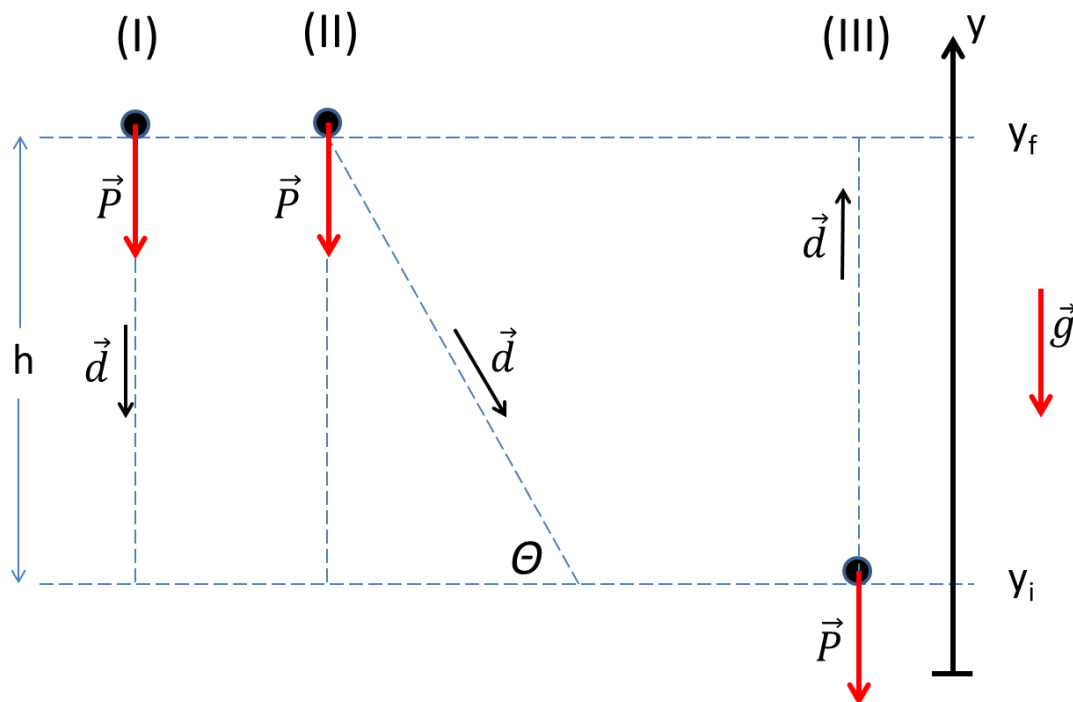


Figura 26

Situação I

$$W_{\vec{P}} = \vec{P} \cdot \vec{d} = m\vec{g} \cdot \vec{d} = mgd \cdot \cos 0^\circ = mgh$$

Situação II

$$W_{\vec{P}} = \vec{P} \cdot \vec{d} = m\vec{g} \cdot \vec{d} = mgd \cdot \cos (90^\circ - \theta) = mgh$$

Situação III

$$W_{\vec{P}} = \vec{P} \cdot \vec{d} = m\vec{g} \cdot \vec{d} = mgd \cdot \cos (180^\circ) = -mgh$$

Seria relativamente simples de mostrar que para qualquer outro deslocamento que começasse no nível y_i e terminasse no nível y_f o trabalho realizado pelo peso seria igual a mgh e que para qualquer outro deslocamento que começasse no nível y_f e terminasse no nível y_i o trabalho realizado pelo peso era igual a $(-mgh)$. À quantidade mgh é hábito chamar energia potencial (E_p) e depende da altura (posição) em relação a uma dada referência; no caso da Fig. 26 a referência é o zero do eixo Y.

Calculemos agora a variação dessa nova quantidade, a que chamámos de energia potencial, para cada um dos três casos da Fig. 26. A variação da energia potencial há-de ser dada por

$$\Delta E_p = E_{Pf} - E_{Pi} = mgy_f - mgy_i.$$

Situação I

$$\Delta E_p = E_{Pf} - E_{Pi} = mgy_i - mgy_f = mg(y_i - y_f) = -mgh$$

Situação II

$$\Delta E_p = E_{Pf} - E_{Pi} = mgy_i - mgy_f = mg(y_i - y_f) = -mgh$$

Situação III

$$\Delta E_p = E_{Pf} - E_{Pi} = mgy_f - mgy_i = mg(y_f - y_i) = mgh$$

Comparando o cálculo do trabalho para as três situações da Fig. 26 com o cálculo da variação da energia potencial para as mesmas situações podemos dizer que: quando o trabalho realizado pelo peso é positivo a variação da energia potencial correspondente é negativa; quando o trabalho realizado pelo peso é negativo a variação da energia potencial correspondente é positiva. Ou seja, de uma maneira formal podemos dizer que

$$W_{\vec{P}} = -\Delta E_P .$$

Podemos, também, afirmar, a partir dos cálculos realizados, que o trabalho realizado pelo peso quando desloca o seu ponto de aplicação entre dois níveis só depende da posição desses níveis e não de percurso seguido pelo ponto de aplicação do peso. Isto quer dizer que o peso deve ser uma força com um carácter especial já que é da experiência comum que quando aplicamos uma dada força o trabalho por ela realizado (excepto o peso e a força elástica) varia com o percurso. Na verdade, todas as forças que exibem esta característica têm o nome de forças conservativas. Um outro aspecto interessante ressalta da observação da Fig. 26; o trabalho realizado pelo peso quando a massa se desloca do nível h_f para o nível h_i (situação I) é dado por mgh ; por outro lado, o trabalho realizado pelo peso quando a massa se desloca do nível h_i para o nível h_f (situação III) é dado por $(-mgh)$. Ora se imaginarmos um percurso em que a massa se desloca do nível, por exemplo, h_f , vai até ao nível h_i e retorna ao nível h_f o trabalho total realizado pelo peso nesse percurso é igual a

$$W_t = W_{PI} + W_{PIII} = mgh + (-mgh) = 0 ,$$

ou seja, o trabalho realizado pelo peso ao longo de um circuito fechado (que é aquele em que a posição final coincide com a posição inicial) é igual a zero; isto constitui uma outra maneira de definir uma força conservativa. Na natureza podemos encontrar forças conservativas (como, por exemplo, o peso ou a força de uma mola) e forças não conservativas (como, por exemplo, a força de atrito).

Voltemos ao teorema trabalho–energia que se aplica ao trabalho realizado por qualquer força; na verdade, não foram impostas quaisquer restrições às forças às quais se pode aplicar esse teorema. Assim, este teorema é também válido para o peso, i.e.,

$$W = W_{\vec{p}} = \Delta E_c.$$

Por outro lado, relembremos a expressão que dá o trabalho como uma variação da energia potencial para o caso da força conservativa peso

$$W_{\vec{p}} = -\Delta E_p.$$

Igualando as duas equações anteriores podemos escrever obtemos para o caso do peso (ou para outra qualquer força conservativa)

$$\Delta E_c = -\Delta E_p.$$

Mas

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_f^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_i^2$$

e

$$\Delta E_p = E_{Pf} - E_{Pi} = mgy_f - mgy_i$$

que igualando dá

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_f^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_i^2 = -(mgy_f - mgy_i)$$

que rearranjando dá

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_f^2 + mgy_f = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_i^2 + mgy_i.$$

Esta equação traduz o princípio da conservação da energia mecânica que diz que para o caso da força conservativa peso (mas o mesmo poderia ser dito para outra força conservativa) a soma da energia cinética com a energia potencial de uma partícula de massa m mantem-se constante ao longo de qualquer trajetória entre dois níveis.

É hábito chamar à soma da energia potencial com a energia cinética energia mecânica; assim, ainda podemos enunciar o princípio da conservação da energia mecânica dizendo que, para forças conservativas, a energia mecânica permanece constante ao longo de qualquer trajetória.

i.e.,

$$E_{Mf} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_f^2 + mgy_f$$

e, portanto,

$$E_{Mf} = E_{Mi}$$

ao longo de qualquer trajetória.

O princípio da conservação da energia mecânica e o princípio da conservação do momento linear (já estudado) constituem dois dos três pilares fundamentais da Física; o terceiro pilar é o princípio da conservação do momento angular que estudaremos em breve.

Voltemos, novamente, ao teorema trabalho-energia,

$$W = \Delta E_c .$$

Como nada foi dito quanto o tipo de forças a que se aplicam ao teorema trabalho-energia e dado que o trabalho é uma grandeza aditiva, se, num dado objeto, estiverem a ser aplicadas forças conservativas (p.ex., o peso) e forças não conservativas (p.ex., a força de atrito) podemos escrever

$$W_t = W_{FC} + W_{FNC} = \Delta E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_f^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_i^2$$

onde W_t é o trabalho total realizado por todas as forças aplicadas, W_{FC} é o trabalho realizado pelas forças conservativas e W_{FNC} é o trabalho realizado pelas forças não conservativas. Mas o trabalho realizado pelas forças conservativas é dado por

$$W_{FC} = -\Delta E_P$$

que substituindo na equação anterior dá

$$-\Delta E_P + W_{FNC} = \Delta E_c$$

Que substituindo pelas respetivas expressões e rearranjando dá

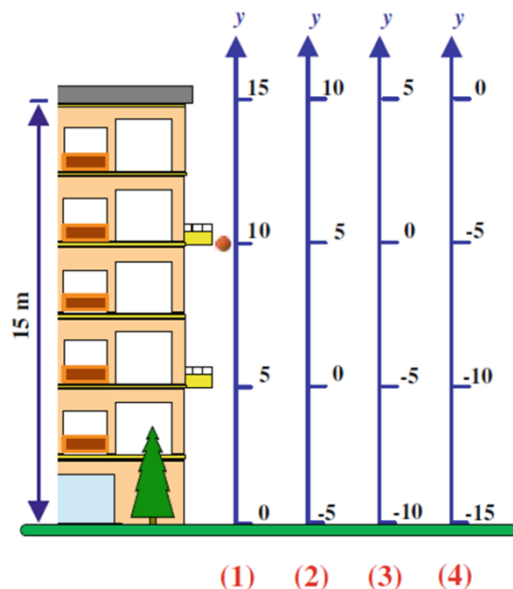
$$\begin{aligned}
 W_{FNC} &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_f^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_i^2 + \Delta E_P \\
 &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_f^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_i^2 + mgy_f - mgy_i \\
 &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_f^2 + mgy_f - \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_i^2 + mgy_i \right) \\
 &= E_{Mf} - E_{Mi} = \Delta E_M.
 \end{aligned}$$

Ou seja, o trabalho das forças não conservativas é igual à variação da energia mecânica sofrida pela partícula em estudo.

EXEMPLO 14

Uma bola de massa 0,2 kg está ao nível de uma segunda varanda que está 10 m acima do solo (ver figura).

- a)** Qual é a energia potencial gravítica da bola se tomarmos o ponto de referência $y = 0$ como sendo: (1) no solo, (2) na primeira varanda, (3) na segunda varanda e (4) no topo do prédio?
- b)** Se a bola cair para o solo, para cada um dos pontos de referência da parte (a), qual é a variação da energia potencial da bola como resultado da queda?



SOLUÇÃO

a) Usando a $E_p = mgh - 0 = mgy$ podemos calcular a energia potencial E_p da bola para cada escolha de $y = 0$ da seguinte forma:

Escolha do sist. referência (1): $E_p = mgy = (0,2 \text{ kg}) (9,8 \text{ m/s}^2) (10\text{m}) = 19,6 \text{ J}$

Escolha do sist. referência (2): $E_p = mgy = (0,2 \text{ kg}) (9,8 \text{ m/s}^2) (5\text{m}) = 9,8 \text{ J}$

Escolha do sist. referência (3): $E_p = mgy = (0,2 \text{ kg}) (9,8 \text{ m/s}^2) (0\text{m}) = 0 \text{ J}$

Escolha do sist. referência (4): $E_p = mgy = (0,2 \text{ kg}) (9,8 \text{ m/s}^2) (-5\text{m}) = -9,8 \text{ J}$

b) Para todas as escolhas de coordenadas, temos $\Delta h = \Delta y = -10 \text{ m}$. Então da equação $\Delta E_p = E_{pf} - E_{pi} = mgy_f - mgy_i = mg(y_f - y_i)$ o que dá origem a uma mesma variação da energia potencial.

$$\Delta E_p = (0,2 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2)(-10\text{m}) = -19,6 \text{ J}$$

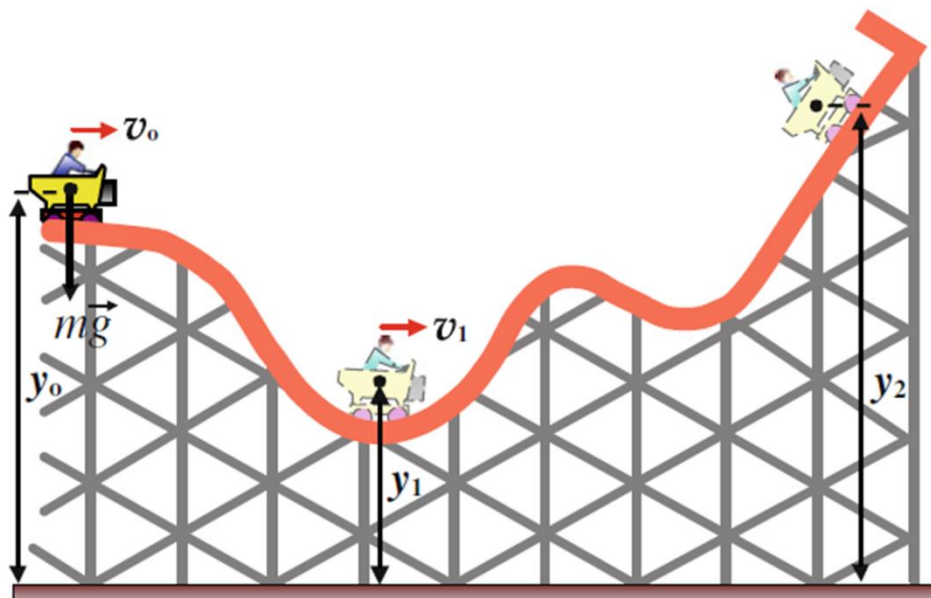
EXEMPLO 15

Um carrinho numa montanha-russa, sem atrito, tem uma velocidade inicial máxima possível $v_0 = 6 \text{ m/s}$ quando está na altura $y_0 = 6 \text{ m}$ acima do solo. Depois movimenta-se livremente de acordo com a figura junta.

Admitindo que a aceleração da gravidade é de 10 m/s^2 , calcule

a) A velocidade do carrinho quando atinge o ponto $y_1 = 4 \text{ m}$.

b) A altura máxima na posição y_2 .



SOLUÇÃO

a) A única força que está a ser aplicada é o peso. Portanto, podemos usar o princípio da conservação da energia mecânica. Inicialmente, a energia cinética é dada por

$$E_{co} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_o^2$$

e a energia potencial é dado por

$$E_{po} = mgy_o$$

Mas pelo princípio da conservação da energia mecânica sabemos

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 + mgy_1 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_o^2 + mgy_o$$

donde temos

$$v_1^2 + 2gy_1 = v_o^2 + 2gy_o$$

$$v_1^2 = v_o^2 + 2gy_o - 2gy_1$$

$$v_1^2 = v_o^2 + 2g(y_o - y_1)$$

Substituindo valores obtemos

$$v_1 = \sqrt{v_o^2 + 2g(y_o - y_1)} = \sqrt{6^2 + 2 \cdot 10 \cdot (6 - 4)} = 8,7 \text{ m/s}$$

b) Utilizando, novamente, o princípio da conservação da energia mecânica para a posição y_2 , temos

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 + mgy_2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_o^2 + mgy_o$$

vindo

$$v_2^2 = v_o^2 + 2g(y_o - y_2)$$

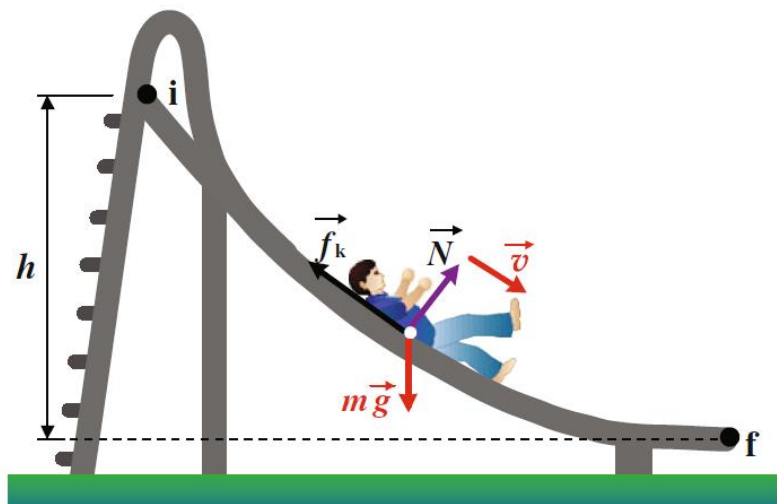
em que v_2 é igual a zero. Assim, resolvendo em ordem a y_2 , temos

$$y_2 = y_0 + \frac{v_0^2}{2g} = 6 + \frac{6^2}{2 \cdot 10} = 7,8 \text{ m}.$$

EXEMPLO 16

Uma criança de 30 kg de massa desliza por um escorrega curvilíneo de altura igual a 3 m (ver figura). A criança começa no ponto inicial i com uma velocidade $v_i = 0 \text{ m/s}$ e chega ao fim do escorrega, em f , com uma velocidade v_f .

- Se o escorrega não tiver atrito, calcule a velocidade da criança ao chegar ao ponto f , ou seja, v_f .
- Se o escorrega apresentar atrito e $v_f = 5 \text{ m/s}$, calcule o trabalho realizado pela força de atrito.



SOLUÇÃO

a) A força normal sobre a criança não realiza trabalho pois é sempre perpendicular a cada elemento de deslocamento ao longo do escorrega. A única força que está a ser aplicada é o peso que é uma força conservativa; logo podemos utilizar o princípio da conservação da energia mecânica

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_i^2 + mgy_i = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_f^2 + mgy_f$$

com v_i igual a zero e y_f igual a zero (estamos colocar a nossa referência para medir alturas no ponto f). Assim, teremos

$$0 + mgy_i = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_f^2 + 0$$

vindo

$$v_f^2 = 2 \cdot g \cdot y_i$$

ou

$$v_f = \sqrt{2 \cdot g \cdot y_i} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 3} = 7,67 \text{ m/s}.$$

b) Na presença de uma força de atrito, não conservativa, temos W_{FNC} não é zero. Então temos que utilizar a expressão

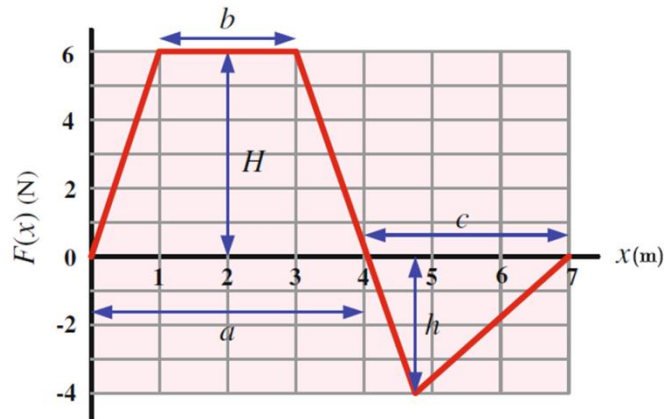
$$W_{FNC} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_f^2 + mgy_f - \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_i^2 + mgy_i \right).$$

que substituindo valores dá

$$\begin{aligned} W_{FNC} &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_f^2 + 0 - (0 + mgy_i) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 5^2 - 30 \cdot 9,8 \cdot 3 = -507 \text{ J} \end{aligned}$$

EXEMPLO 17

Uma força que atua num dado objeto varia com a posição x conforme se mostra na figura. Calcule o trabalho realizado pela força quando desloca o objeto da posição $x = 0 \text{ m}$ para $x = 7 \text{ m}$.



SOLUÇÃO

O trabalho realizado pela força é igual à área líquida entre a curva e o deslocamento entre $x = 0$ e $x = 7$ m. Ou seja, a área do trapézio mais a área do triângulo (com sinal negativo já que o sentido da componente da força na direção do deslocamento é contrário ao sentido do deslocamento). Assim podemos escrever:

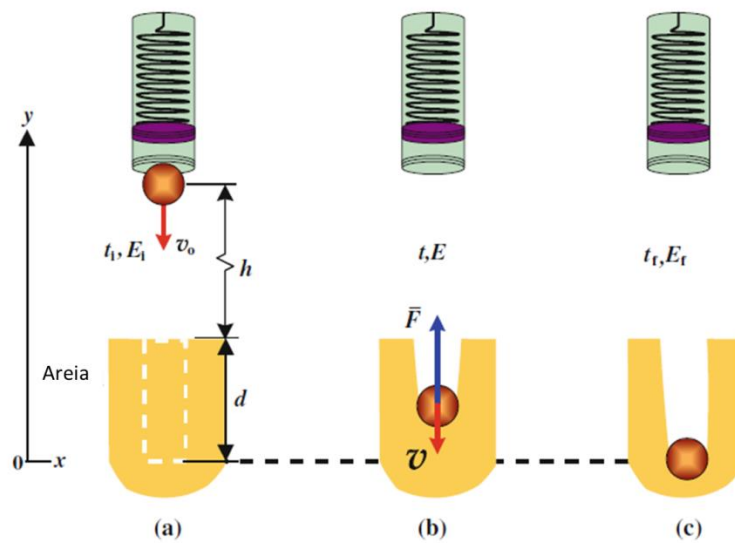
$$W = \text{trabalho} = \text{Área do trapézio} + (- \text{Área do triângulo})$$

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}(a + b)H + \left(- \frac{1}{2} \cdot c \cdot h\right) = \frac{1}{2}(4 + 2) \cdot 6 + \left(- \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4\right) \\ &= 18 J - 6 J = 12 J \end{aligned}$$

EXEMPLO 18

Uma esfera de aço de massa 5 g é projetada verticalmente para baixo de uma altura $h = 14,8$ m com uma velocidade inicial $v_0 = 10$ m/s (ver figura). A esfera penetra na areia até uma profundidade $d = 20$ cm. Admitindo que o ar não oferece resistência ao movimento da esfera e que $g = 10$ m/s², calcule:

- A variação da energia mecânica da esfera.
- A variação da energia interna do sistema esfera-areia.
- A intensidade da força média exercida pela areia na esfera até parar.



SOLUÇÃO

a) Vamos tomar como nível de referência ($y = 0$) o ponto onde a esfera pára completamente; nesse ponto, à profundidade d , a energia cinética e a energia potencial são zero. Assim, podemos escrever (em que K e U se referem à energia cinética e à energia potencial gravítica, respectivamente)

$$\begin{aligned} \Delta E_M &= E_{Mf} - E_{Mi} = \Delta K + \Delta U = (K_f - K_i) + (U_f - U_i) \\ &= \left(0 - \frac{1}{2}mv_0^2\right) + (0 - mg \cdot [h + d]) \\ &= -\left(\frac{1}{2}mv_0^2\right) - (mg \cdot [h + d]). \end{aligned}$$

Substituindo valores obtemos

$$\begin{aligned} \Delta E_M &= -\left(\frac{1}{2} \cdot 0,005 \cdot 10^2\right) - (0,005 \cdot 10 \cdot [0,148 + 0,20]) \\ &= -0,25 - 0,75 = -1 J \end{aligned}$$

b) Como sistema esfera-areia forma um sistema isolado

$$\Delta E + \Delta E_{int} = 0.$$

Isto quer dizer que toda a energia mecânica da esfera até parar é absorvida pela areia que a vai converter em energia térmica. Assim, temos

$$\Delta E_{int} = -\Delta E = -(-1 J) = 1 J$$

c) Sabemos que

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot (x - x_0) .$$

Portanto, a velocidade da esfera imediatamente antes de penetrar na areia é

$$v^2 = 10^2 + 2 \cdot (-10) \cdot (0 - 14,8)$$

$$v^2 = 396 \text{ m}^2/\text{s}^2 \quad \Rightarrow \quad v = -19,9 \text{ m/s}.$$

Depois de entrar na areia percorre 0,2 m até parar o que permite calcular a aceleração (desaceleração) do movimento

$$0 = 396 + 2 \cdot a \cdot (0 - 0,2)$$

donde

$$a = 990 \text{ m/s}^2 .$$

Como $F = m \cdot a$, vem, finalmente

$$F = 0,005 \cdot 990 = 4,95 \text{ N}$$

É de notar que a aceleração tem sinal positivo de acordo com o referencial escolhido; o que quer dizer que a força também tem sinal positivo.

Fisicamente, para retardar o movimento da esfera dentro da areia a força tem que ser contrária ao movimento (deslocamento) da esfera, portanto com um sentido de baixo para cima.

Capítulo VI

Dinâmica da rotação.

Momento de uma força em relação a um ponto

A dinâmica da rotação é o estudo do movimento rotacional e das causas da sua alteração. De uma perspectiva cinemática, o movimento linear é análogo ao movimento rotacional; contudo, essa analogia permanece de um ponto dinâmico. É da experiência de todos os dias que quando um objeto gira em torno de um eixo a taxa de rotação depende da intensidade, da direção e do sentido da força que é aplicada longe do eixo de rotação. Esta dependência é medida por uma quantidade vetorial a que é hábito chamar momento da força ou torque e que se representa, normalmente, pela letra grega “ τ ”. O momento de uma força é, por definição, dado por

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

ou seja, o momento de uma força em relação a um ponto O (ou eixo de rotação) $\vec{\tau}$ é o produto externo do vetor posição \vec{r} que define a posição do ponto de aplicação da força em relação ao ponto O (ponto P) pela força \vec{F} . Na Fig. 27 mostra-se uma possível relação geométrica entre os vetores variáveis da equação anterior.

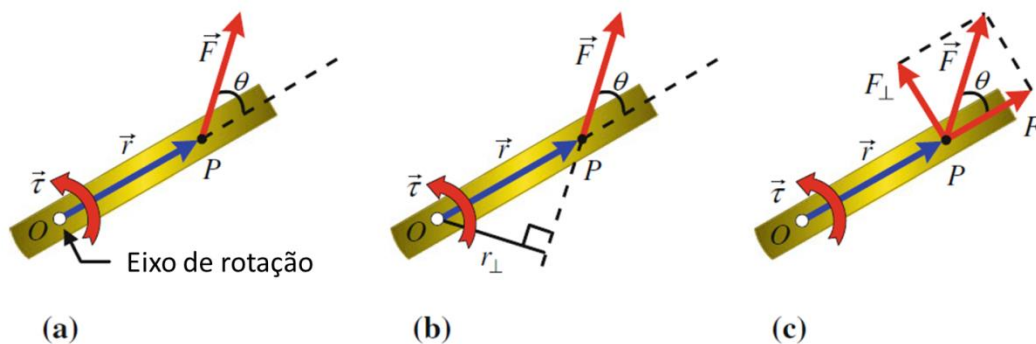


Figura 27

De acordo com a Fig. 27(c), se decomposermos a força segundo duas direções ortogonais (uma paralela ao vetor posição e outra perpendicular ao vetor posição, como se representa na Fig. 27) vemos que apenas a componente da força perpendicular ao vetor posição produz rotação; a componente paralela não gera qualquer efeito de rotação. Na verdade, lembrando o conceito de produto externo ou produto vetorial podemos dizer que o vetor momento de uma força \vec{F} é um vetor cuja direção é perpendicular ao plano definido pela força e pelo vetor posição, com um sentido dado pela regra da mão direita ou regra do saca-rolhas e cuja intensidade é dada pela expressão

$$|\vec{\tau}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \text{sen}(\vec{r}, \vec{F}).$$

Ainda de acordo com a definição de produto externo, o sentido do produto externo, no caso da Fig. 27, aponta para o leitor destas notas. Assim, tanto o vetor \vec{r} como o vetor \vec{F} são perpendiculares ao vetor $\vec{\tau}$. O momento de uma força tem como unidade SI N.m e mede a eficácia de uma força para produzir rotação. A $b = |\vec{r}| \cdot \text{sen}(\vec{r}, \vec{F})$ é hábito chamar braço da força \vec{F} , b , que na Fig. 27 é representado por r_{\perp} . Assim, ainda podemos escrever

$$|\vec{\tau}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = b \cdot |\vec{F}|,$$

o que quer dizer que quando o braço da força é igual a zero a força não provoca rotação, que é o mesmo que dizer que a força tem a mesma direção do vetor posição ou que a direção do vetor força passa pelo ponto O ou pelo eixo de rotação.

Como o momento de uma força é uma grandeza aditiva, se houver várias forças que geram momento a ser aplicadas a um dado objeto que pode rodar, o momento total é igual à soma dos momentos individuais gerados por cada uma das forças aplicadas.

Momento cinético ou momento angular

Introduzamos o conceito de momento angular ou momento cinético. Considerando a Fig. 28, imaginemos que uma partícula de massa m com uma certa velocidade \vec{v} que está referenciada à origem do sistema de

referência xyz através do vetor posição \vec{r} . Claro que dizer que a massa m tem velocidade \vec{v} é o mesmo que dizer que o seu momento linear é \vec{p} .

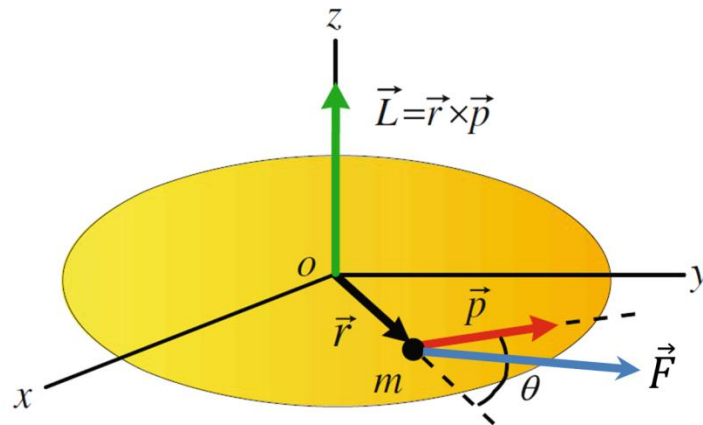


Figura 28

Pois bem, por definição, o momento angular ou momento cinético da partícula de massa m (que habitualmente se representa pela letra \vec{L}) é o produto externo do vetor \vec{r} pelo vetor \vec{p} . Ou seja,

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

No SI o momento angular tem a unidade $\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$. Claro que da definição resulta imediatamente que o momento angular é um vetor cuja direção é perpendicular ao plano definido por \vec{r} e por \vec{p} , um sentido que é dado pela regra da mão direita e uma intensidade que é dada por

$$|\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{p}| \cdot \text{sen}(\vec{r}, \vec{p}) = m|\vec{r}||\vec{v}| \cdot \text{sen}(\vec{r}, \vec{v}).$$

Claro que o momento angular pode variar no tempo (vetor \vec{r} e o vetor \vec{v} podem variar no tempo) e podemos perguntar o que é a derivada do momento angular em ordem ao tempo.

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \\ &= \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = m(\vec{v} \times \vec{v}) + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \\ &= \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}.\end{aligned}$$

Mas

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Vindo

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}.$$

Ou seja, a taxa de variação do momento angular de um dado objeto com o tempo (ou a derivada do momento angular em ordem ao tempo) é igual ao momento das forças aplicadas a esse objeto.

Repare-se no seguinte: quando aplicávamos uma força ela “servia” para variar o seu momento linear; acabámos de ver que ao aplicarmos uma força que gera momento estamos a variar o seu momento angular. Parece haver uma analogia entre força (no movimento linear) e momento de uma força (no movimento com rotação) e uma analogia entre momento linear (no movimento linear) e o momento angular (no movimento com rotação). Vamos explorar este facto mais tarde (se houver tempo!)

Teorema da conservação do momento angular

Voltemos à equação

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

Se não houver forças exteriores aplicadas que gerem um momento $\vec{\tau}$ a derivada do momento angular em ordem ao tempo é igual a zero, ou

seja, o momento angular permanece constante no tempo. Assim, se tivermos um dado sistema formado por várias partículas e se sobre essas partículas não houver forças exteriores a serem aplicadas que geram um momento $\vec{\tau}$, o momento angular do sistema permaneça constante ao longo do tempo. Claro que podem existir forças interiores ao sistema que gerem momento $\vec{\tau}$; contudo, a variação do momento angular de uma partícula implica a variação do momento angular de outra partícula em sentido contrário de tal modo que o momento total do sistema permaneça constante. Isto constitui o importante teorema da conservação do momento angular que pode ser enunciado da seguinte maneira: se sobre um dado sistema não estiverem a ser atuadas forças geradoras de momento, o momento angular do sistema permanece constante ao longo do tempo, i.e.,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{L}_1 = \vec{L}_2 = \vec{L}_3 = \overline{\text{constante}}$$

em que $\vec{L}_1, \vec{L}_2, \vec{L}_3$, etc. são os momentos angulares do sistema para os instantes $t=1, t=2, t=3$, etc.

Até agora considerámos que a trajetória seguida pela partícula é qualquer; o momento angular é calculado em relação a um ponto ou uma origem que é o local onde se encontra a origem do vetor posição. Imaginemos agora que a origem do vetor posição coincide com o centro de uma trajetória circular e que o movimento é circular e uniforme, i.e., o módulo da velocidade é constante. Consideremos a equação (já escrita)

$$|\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{p}| \cdot \text{sen}(\vec{r}, \vec{p}) = m|\vec{r}||\vec{v}| \cdot \text{sen}(\vec{r}, \vec{v}).$$

Como \vec{v} é perpendicular a \vec{r} podemos escrever

$$\begin{aligned} |\vec{L}| &= |\vec{r} \times \vec{p}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{p}| \cdot \text{sen}(90^\circ) \\ &= m|\vec{r}||\vec{v}| \cdot \text{sen}(90^\circ) = m|\vec{r}||\vec{v}| \end{aligned}$$

Mas sabemos que no movimento circular uniforme

$$|\vec{v}| = v = r \cdot \omega = R \cdot \omega$$

que substituindo na equação anterior dá e fazendo $|\vec{L}| = L$ e $|\vec{r}| = R$, em que R é o raio da trajectória circular,

$$L = m|\vec{r}||\vec{v}| = mR\omega = mR^2\omega = I\omega$$

onde $I = mR^2$ tem o nome de momento de inércia e é uma grandeza escalar com unidade SI $\text{kg}\cdot\text{m}^2$; o momento de inércia traduz a geometria da distribuição da massa das partículas num dado sistema. Assim, se tivermos um sistema, formado por várias partículas, que não está sujeito a forças exteriores que gerem momentos de forças (i.e., um sistema isolado) e que tem um movimento circular, se o momento angular de uma das partículas variar por motivo de aplicação de forças interiores, isso implicará uma alteração do momento angular numa outra partícula (ou outras partículas) de tal modo que o momento angular do sistema permaneça constante (Princípio da conservação do momento angular). Assim, podemos escrever o princípio da conservação do momento angular para a o movimento circular de como

$$L = \text{constante} = I_1\omega_1 = I_2\omega_2 = I_3\omega_3 = \dots$$

o que quer dizer que se, por forças interiores, o momento de inércia I_1 se alterar para I_2 então a velocidade angular ω_1 passará a ω_2 , de tal modo que o produto $I\omega$ se mantenha constante no tempo. Ou seja,

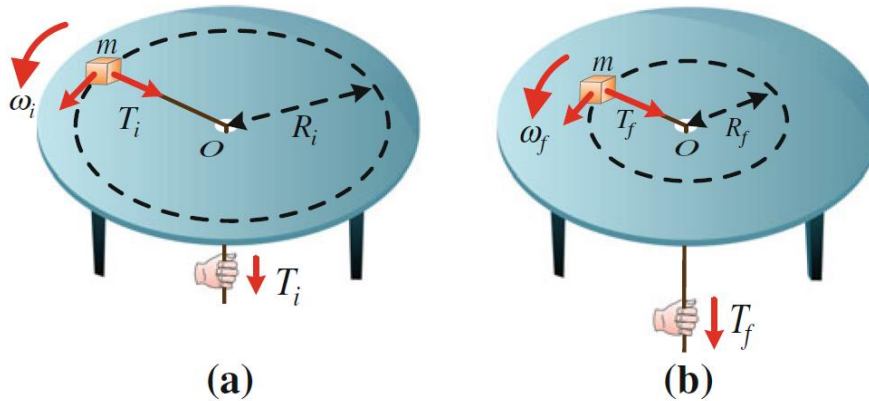
$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 = \text{constante} .$$

EXEMPLO 19

Uma massa m está ligada por um cabo sem massa e inextensível como se vê na figura. A massa, por causa da tensão no cabo, é obrigada a girar numa trajetória circular sobre uma mesa sem atrito. A outra extremidade do cabo passa por um orifício O na mesa. Para uma tensão inicial T_i e raio R_i , a velocidade angular inicial da massa é $\omega_i = 0,5 \text{ rad/s}$. A tensão no cabo é, em seguida, aumentada gradualmente para T_f puxando a corda até que o raio diminua para $R_f = R_i/3$.

a) Determine a velocidade angular final da massa.

b) Determine a razão das tensões T_f/T_i .



SOLUÇÃO

a) Como não há nenhuma força que gere momento na massa m (a tensão no cabo tem uma direção que coincide com o vetor posição que define a posição da massa - $|\vec{\tau}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \text{sen}(\vec{r}, \vec{F})$; por outro lado, o peso e a reação normal podem gerar momento; contudo os momentos compensam-se um ao outro e tudo se passa como se não houvesse momento algum a atuar a massa m) pode aplicar-se o princípio da conservação do momento angular

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f.$$

Considerando a massa m pontual podemos dizer que o seu momento de inércia é de $I_i = mR_i^2$ e $I_f = mR_f^2$ para R_i e R_f , respetivamente, vindo para a equação anterior

$$mR_i^2 \cdot \omega_i = mR_f^2 \cdot \omega_f$$

donde podemos escrever

$$\omega_f = \frac{mR_i^2}{mR_f^2} \cdot \omega_i = \frac{R_i^2}{R_f^2} \cdot \omega_i = \left(\frac{R_i}{R_i/3} \right)^2 \cdot \omega_i = 3^2 \cdot \omega_i.$$

Substituindo valores temos

$$\omega_f = 3^2 \cdot 0,5 = 4,5 \text{ rad/s.}$$

b) É a força centrípeta que é aplicada através do cabo que obriga a massa a ter uma trajetória circular. Mas $a_c = \omega v = \omega^2 R$. Portanto, $F = T = m a_c = m \omega^2 R$.

Assim a relação entre as duas tensões é

$$\frac{T_f}{T_i} = \frac{m \omega_f^2 R_f}{m \omega_i^2 R_i} = \left(\frac{R_f}{R_i} \right) \cdot \left(\frac{\omega_f}{\omega_i} \right)^2 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4,5}{0,5} \right)^2 = 27$$

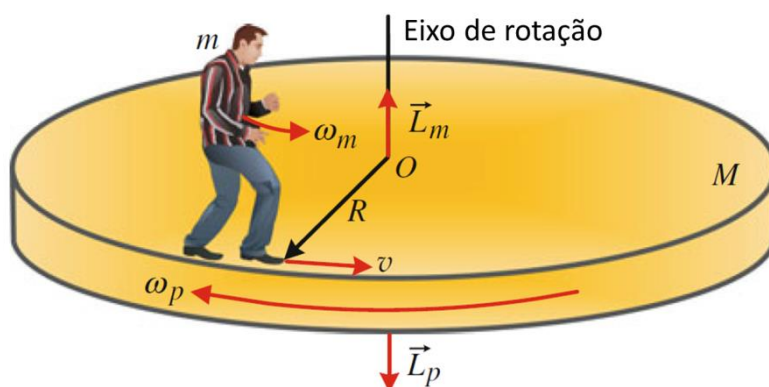
ou seja, a tensão T_f é 27 vezes maior do que a tensão T_i .

EXEMPLO 20

Um homem de massa $m = 60 \text{ kg}$ está na periferia de uma plataforma circular estacionária de massa $M = 400 \text{ kg}$ e raio $R = 3 \text{ m}$. A plataforma é montada em sobre rolamentos sem atrito. Quando o homem começa a correr a uma velocidade $v = 4 \text{ m/s}$ em torno da periferia da plataforma esta começa a girar no sentido oposto, conforme se mostra na figura. O momento de inércia da plataforma é $I = \frac{1}{2} M R^2$.

a) Qual é a velocidade angular da plataforma?

b) Qual o período da plataforma?



SOLUÇÃO

a) Inicialmente, o momento angular total é zero, ou seja, $\vec{L}_i = \vec{0}$ ou $L_i = 0$. Como não há forças exteriores que gerem momento quando o homem está a correr (pelas mesmas razões do exemplo anterior) o momento angular final será igual ao momento angular inicial pelo princípio da conservação do momento angular, ou seja, $\vec{L}_i = \vec{L}_f$. Mas quando se inicia o movimento do homem os momentos angulares gerados pelo homem e pela plataforma tem a mesma direção mas sentidos opostos. Ora o momento angular total do sistema homem-plataforma é

$$(\vec{L}_h + \vec{L}_p)_{antes} = \vec{0} = (\vec{L}'_h + \vec{L}'_p)_{depois}$$

o que quer dizer que $L_h = L_p$

Assumindo que o homem é uma partícula o seu momento de inércia será $I_h = mR^2$. Assim, pelo princípio da conservação do momento angular temos

$$I_h \omega_h = I_p \omega_p$$

com $\omega_h = \frac{v}{R}$. Assim, podemos pôr

$$\omega_p = \frac{I_h}{I_p} \cdot \omega_h = \frac{mR^2}{\frac{1}{2}MR^2} \cdot \omega_h = 2 \cdot \frac{m}{M} \cdot \frac{v}{R} = \frac{2 \cdot 60}{400} \cdot \frac{4}{3} = 0,4 \text{ rad/s.}$$

b) Por definição o período é o tempo de uma revolução completa. A velocidade angular é o ângulo varrido a dividir pelo tempo durante o qual se dá esse varrimento, ou seja, $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Assim,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{0,4} = 15,7 \text{ s.}$$

Capítulo VII

Gravitação Universal

Antes de 1687, apesar de já haver uma grande quantidade de dados e informação sobre os movimentos da Lua e dos planetas do sistema solar até aí conhecidos, não havia uma explicação para esses movimentos e para as possíveis forças envolvidas. Foi nesse ano que Newton deu uma explicação física e matemática para aqueles movimentos que ainda perdura. Newton sabia que, de acordo com a sua primeira lei, a Lua deveria estar sujeita a uma força; se assim não fosse a sua trajetória teria que ser uma linha reta, o que não se verificava: a sua órbita era circular (ou quase circular como mais tarde veio a ser mostrado). Newton concluiu que essa força era uma atração gravitacional exercido pela Terra na Lua e que não era uma força especial mas sim um caso particular de uma força atrativa geral que se verifica entre todos os objetos com massa. Assim, a mesma força que mantém a Lua numa órbita em torno da Terra é também a força que faz cair os objetos para a Terra.

Lei da gravitação universal de Newton

Em 1687 Newton publicou um livro intitulado “Princípios matemáticos de filosofia natural” no qual apresentou a sua lei da atração universal ou lei da gravitação universal. Essa lei pode ser enunciada da seguinte maneira: cada partícula do Universo atrai todas as outras partículas com uma força que é diretamente proporcional ao produto das suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas.

Matematicamente pode escrever-se:

$$F_g = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

onde F_g é a intensidade da força gravítica entre as massas m_1 e m_2 que se encontram à distância r . G é constante de gravitação universal que em SI é

$$G = 6,673 \cdot 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$$

Mas a força é uma grandeza vetorial e, portanto, a expressão da lei da atração universal, no caso mais geral, pode ainda escrever-se (ver Fig. 29) assumindo que existe um vetor unitário \hat{r}_{12} (que aponta da massa m_1 para a massa m_2) e que \vec{F}_{12} é força que a massa m_1 exerce sobre a massa m_2 :

$$\vec{F}_{12} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \hat{r}_{12}$$

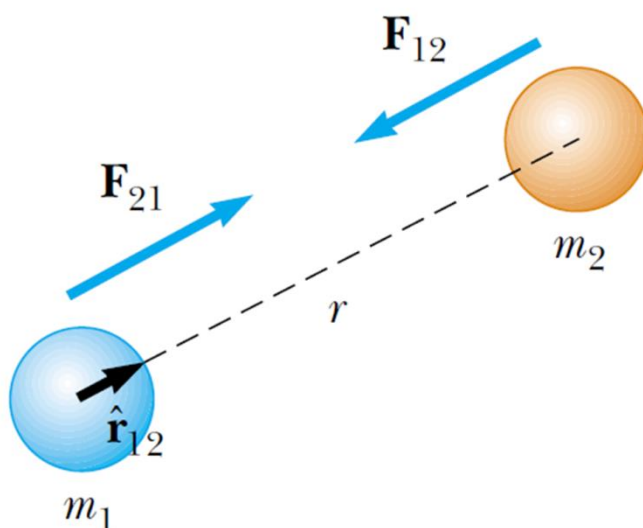


Figura 29

Pela terceira lei de Newton (lei da ação e reação) terá que haver uma outra força \vec{F}_{21} com a mesma intensidade, a mesma direção mas sentido oposto a \vec{F}_{12} .

Alguns aspetos associados à expressão da lei da atração universal devem ser mencionados. A força gravitacional é uma força de campo (atua à distância sem necessidade de um meio físico para se exercer) que existe, sempre, entre duas partículas, independentemente do meio que as separa. Como a força varia com o inverso do quadrado da distância entre as partículas, ela diminui rapidamente com o aumento da distância. Por outro lado, pode-se demonstrar, a partir da equação da atração universal, que a força gravítica ou gravitacional exercida por uma

distribuição de massa esfericamente simétrica, de tamanho finito, é igual à força gravítica que uma partícula colocada no centro dessa distribuição de massa (e com a mesma massa) exerceria; ou seja, tudo se passa como se toda a massa da esfera estivesse concentrada no seu centro. Por exemplo, a intensidade da força exercida pela Terra sobre uma partícula de massa m colocada à sua superfície da Terra é

$$F_g = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r_T^2}$$

onde M_T é a massa da Terra e r_T o seu raio. Esta força tem uma direção vertical e um sentido de cima para baixo (para o centro da Terra).

A constante de gravitacional universal G foi determinada por Henry Cavendish (1731-1810) em 1798. O aparelho utilizado por Cavendish (Fig. 30) consiste em duas pequenas esferas, cada uma de massa m , fixadas nas extremidades de uma haste horizontal leve suspensa por um fio de metal fino. Quando duas esferas grandes, cada uma com massa M , são colocadas perto das menores, a força atrativa entre as esferas menores e as esferas maiores fazem com que a haste gire e torça o fio de suspensão para um novo equilíbrio. O ângulo de rotação é medido pela deflexão de um feixe de luz refletido num espelho preso à suspensão vertical. A experiência é repetida com diferentes massas e várias separações. Esta experiência, para além de permitir calcular o valor de G mostra que a força gravítica é uma força atrativa, proporcional ao produto das massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância r .

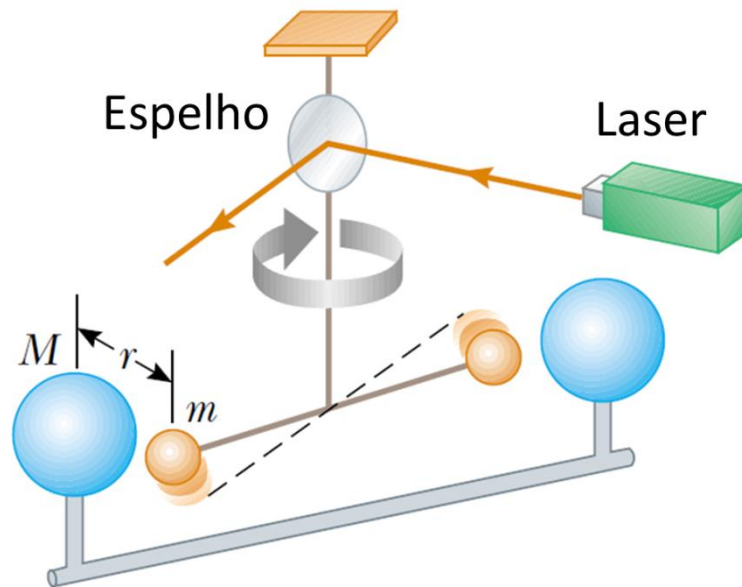


Figura 30

Aceleração da gravidade

Em secções anteriores definimos o produto mg como o peso de um objeto de massa m , em que g era a intensidade da aceleração da gravidade em queda livre. Agora estamos em condições para descrever a aceleração da gravidade de maneira mais formal. Assim, podemos pôr

$$\frac{1}{m} \cdot F_g = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r_T^2} \cdot \frac{1}{m}$$

vindo

$$g = \frac{F_g}{m} = G \cdot \frac{M_T}{r_T^2}$$

Consideremos, agora um objeto de massa m colocado a uma altura h acima da superfície da Terra ou a uma distância r do centro da Terra, onde $r = R_T + h$. A intensidade da força gravítica é

$$F_g = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{(R_T + h)^2}$$

ou

$$g = G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$

donde se conclui que g diminui com o aumento da altitude; e porque o peso de um objeto é mg , concluímos que à medida que h aumenta também o peso diminui.

EXEMPLO 21

A Estação Espacial Internacional (EEI) opera a uma altitude de 350 km. Quando a construção final for concluída, terá um peso (calculado à sua superfície da Terra) de $4,22 \times 10^6$ N. Qual é o seu peso em órbita? Massa da Terra: $5,98 \times 10^{24}$ kg ; raio da Terra: $6,37 \times 10^6$ m ;

SOLUÇÃO

A massa da EEI é

$$m = \frac{P}{g} = \frac{4,22 \cdot 10^6}{9,8} = 4,31 \cdot 10^5 \text{ kg} .$$

Sendo a massa fixa e utilizando a equação

$$g = G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$

podemos pôr

$$g = 6,673 \cdot 10^{11} \cdot \frac{5,98 \cdot 10^{24}}{(6,37 \cdot 10^6 + 0,350 \cdot 10^6)^2} = 8,83 \text{ m/s}^2$$

O peso à altitude da EEI será de

$$P = m \cdot g = 4,31 \cdot 10^5 \times 8,83 = 3,80 \cdot 10^6 \text{ N}$$

EXEMPLO 22

Sabendo que o raio da Terra é $6,37 \times 10^6$ m e que a aceleração da gravidade média à superfície da Terra é $9,80 \text{ m/s}^2$, estime a massa volúmica média da Terra.

SOLUÇÃO

Sabemos que

$$\rho = \frac{M_T}{V_t}$$

Mas

$$g = G \cdot \frac{M_T}{r_T^2}$$

e podemos determinar a massa da Terra

$$M_T = \frac{g \cdot r_T^2}{G}.$$

O volume da Terra é

$$V_T = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_T^3$$

vindo finalmente

$$\rho = \frac{\frac{g \cdot r_T^2}{G}}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_T^3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{g}{G \cdot \pi \cdot r_T}.$$

Substituindo valores obtemos

$$\rho = \frac{3}{4} \cdot \frac{9,80}{6,673 \times 10^{-11} \cdot 3,14 \cdot 6,37 \times 10^6} = 5,51 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

Leis de Kepler

Desde há milhares de anos que os movimentos dos planetas, estrelas e outros objetos celestes têm sido observados. No início a Terra era considerada o centro do universo e esta ideia constituía o chamado modelo geocêntrico que foi sugerido pelo astrónomo grego Cláudio Ptolomeu (c. 100 – c. 170) no segundo século d.C.; este modelo foi aceite até ao século XVI. Em 1543, o astrónomo polaco Nicolaus Copernicus (1473-1543) sugeriu que a Terra e os outros planetas giravam em órbitas circulares em torno do Sol dando origem ao chamado modelo heliocêntrico. Uns anos mais tarde o astrónomo dinamarquês Tycho Brahe (1546-1601) iniciou um programa de observação astronómica para determinar, com o máximo rigor possível à época, as posições das estrelas e dos planetas. É de notar que as observações desses planetas e de 777 estrelas visíveis a olho nu foram realizadas com apenas um grande sextante e uma bússola já que o telescópio ainda não havia sido inventado. Uns anos mais tarde o astrónomo alemão Johannes Kepler (1571-1630), que tinha sido assistente de Tycho Brahe durante algum tempo antes da morte de Brahe, passou 16 anos a tentar deduzir um modelo matemático para o movimento dos planetas. Depois de muitas horas de trabalho e muitos cálculos trabalhosos, Kepler descobriu que as observações e os dados obtidos por Tycho Brahe sobre a órbita de Marte à volta do Sol forneciam uma resposta adequada ao problema do movimento de Marte e, de maneira geral, dos movimentos dos planetas do sistema solar. Da sua análise resultaram três leis conhecidas por leis de Kepler:

1. Todos os planetas movem-se em órbitas elípticas ocupando o Sol um dos seus focos.
2. O raio vetor que vai do Sol até um dado planeta varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais.
3. O quadrado do período orbital de qualquer planeta é proporcional ao cubo do semi-eixo principal da órbita elíptica.

Analisemos estas três leis.

Primeira lei de Kepler

A excentricidade de uma elipse é definida como $\varepsilon=c/a$ e descreve a forma geral da elipse (ver Fig. 31 e Fig. 32).

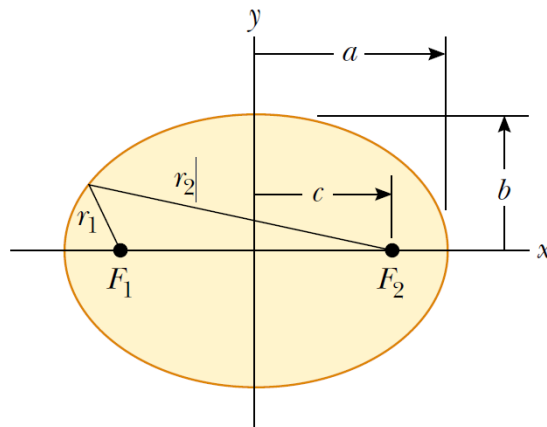


Figura 31

Para um círculo, $c=0$, e a excentricidade é, portanto, zero. Quanto menor for b em relação a a , mais achatada é a elipse ao longo da direção y em comparação com sua extensão na direção x. Por outro lado, à medida que b diminui, c aumenta e a excentricidade também.

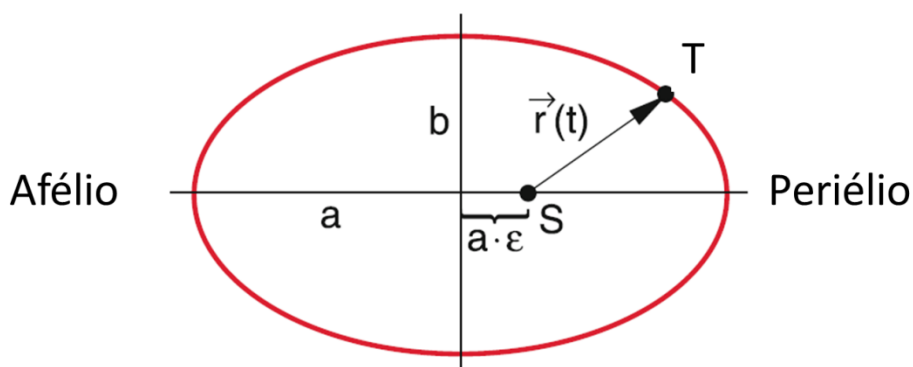


Figura 32

Segunda lei de Kepler

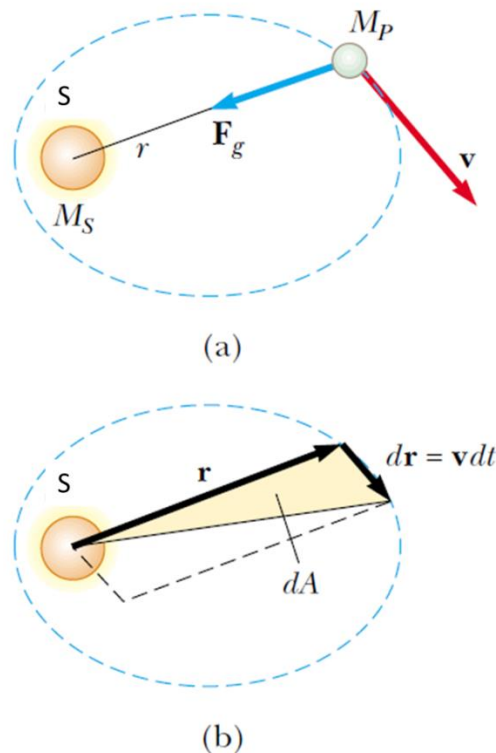


Figura 33

A segunda lei de Kepler é uma consequência do princípio da conservação do momento angular. Considere um planeta de massa M_p movendo-se em torno do Sol segundo uma órbita elíptica (Figs. 33 e 34). Vamos considerar que o Sol tem uma massa muito superior ao do planeta e não se move. A força gravítica exercida pelo Sol no planeta é uma força central, i.e., uma força ao longo do raio vetor que define a posição do planeta em relação ao Sol e que aponta no sentido deste. Isto quer dizer que o momento da força que o Sol exerce sobre o planeta é zero já que por definição

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

e

$$|\vec{\tau}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \text{sen}(\vec{r}, \vec{F}).$$

Mas

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

e como

$$\vec{\tau} = \vec{0}$$

vem que

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$$

ou seja, há conservação do momento angular

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = M_P \cdot \vec{r} \times \vec{v} = \vec{C}_t.$$

Olhando para a Fig. 33(b) vemos que a área dA é varrida pelo raio vetor \vec{r} no intervalo de tempo dt . E, portanto, podemos escrever (em termos geométricos e fazendo $|\vec{L}| = L$)

$$dA = \frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{r}| = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v} dt| = \frac{L}{2M_P} dt$$

donde vem que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2M_P} = C_t$$

onde L e M_P são constantes. Assim, podemos dizer que raio vetor \vec{r} , que indica a posição do planeta em relação ao Sol, varre áreas iguais em tempos iguais. É importante reconhecer que este resultado é uma consequência do fato de a força gravítica ser uma força central o que, por sua vez, implica que o momento angular do planeta é constante.

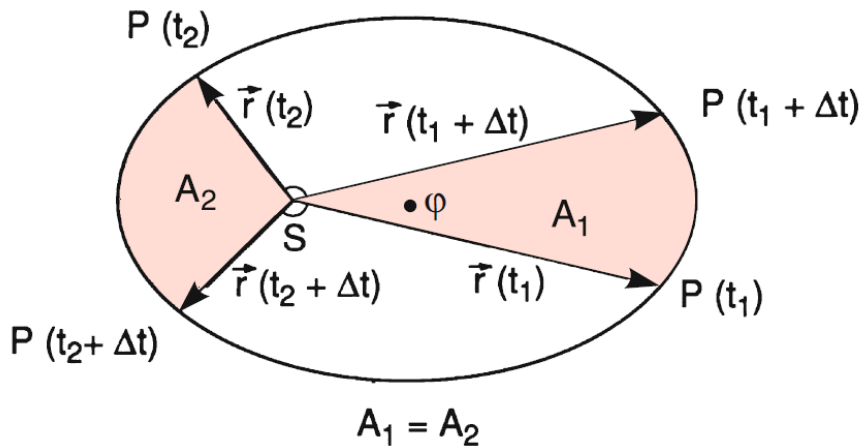


Figura 34

Olhando para a Fig. 34, e dado que as áreas varridas são iguais, imediatamente podemos concluir (mesmo visualmente) que o planeta tem uma velocidade maior quando está mais perto do Sol do que quando esta mais afastado dele.

Terceira lei de Kepler

É interessante verificar que a terceira lei de Kepler pode ser demonstrada a partir da lei da gravitação universal para órbitas circulares que é uma lei que varia com o inverso do quadrado da distância entre o Sol e os planetas. As órbitas de todos os planetas, exceto Mercúrio e Plutão, são muito aproximadamente circulares; portanto, esta suposição não introduz um erro muito grande na demonstração da terceira lei de Kepler.

Consideremos, então, um planeta de massa M_P que se move numa órbita circular em torno do Sol de massa M_S (ver Fig. 35). A força gravítica origina uma aceleração centrípeta quando o planeta orbita em torno do Sol e podemos escrever

$$F_g = G \cdot \frac{M_S \cdot M_P}{r^2} = \frac{M_P \cdot v^2}{r}.$$

Mas a velocidade orbital do planeta é $2\pi r/T$ onde T é o período do movimento circular. Portanto, podemos escrever a equação anterior da seguinte forma

$$G \cdot \frac{M_S \cdot M_P}{r^2} = \frac{M_P \cdot (2\pi r/T)^2}{r}$$

que podemos escrever como

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{G \cdot M_S} \right) \cdot r^3 = K_S \cdot r^3$$

onde

$$K_S = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_S} = 2,97 \cdot 10^{-19} \text{ s}^2/\text{m}^3$$

É de notar que a constante K_S é independente do planeta que orbita em torno do Sol. Para o caso da órbita da Lua em torno da Terra a constante K_S seria dada por

$$K_S = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_T}$$

onde M_T é a massa da Terra.

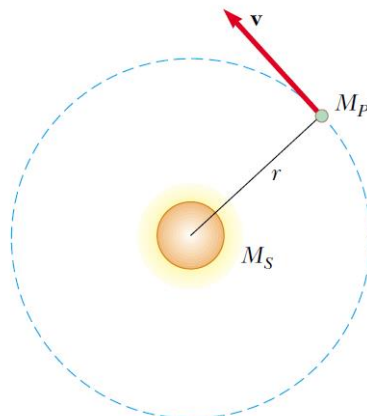


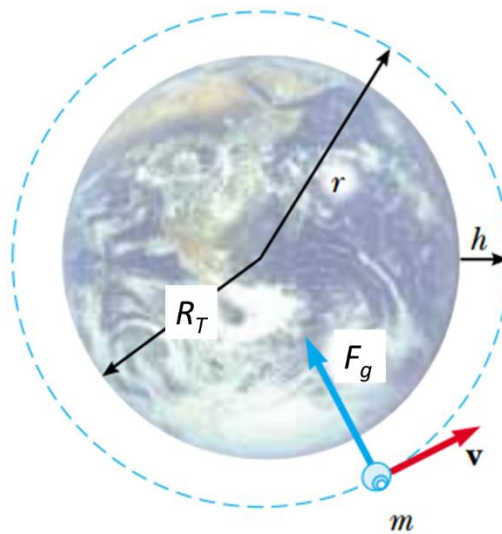
Figura 35

EXEMPLO 23

Considere um satélite de massa m movendo-se numa órbita circular em torno da Terra a uma velocidade constante v_s a uma altitude h acima da superfície da Terra.

a) Determine a velocidade do satélite em termos de G , h , R_T (raio da Terra) e M_T (massa da Terra).

b) Se o satélite for geoestacionário (ou seja, parecer fixo em relação a um dado ponto da Terra), qual a sua velocidade através do espaço?



SOLUÇÃO

a)

$$F_g = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{(R_T + h)^2}$$

mas

$$F_c = \frac{m \cdot v^2}{r} = \frac{m \cdot v^2}{R_T + h}$$

Igualando temos

$$G \cdot \frac{M_T \cdot m}{(R_T + h)^2} = \frac{m \cdot v^2}{R_T + h}$$

Resolvendo em ordem à velocidade obtemos

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T + h}}$$

a) De acordo com a terceira lei de Kepler temos

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{G \cdot M_T} \right) \cdot r^3$$

onde r é o raio da trajetória do satélite e M_T será a massa da Terra. Resolvendo em ordem a r obtemos

$$r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_T}{4\pi^2} \cdot T^2}$$

A velocidade será dada pela equação

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$$

Substituindo valores e tomando em consideração que $T = 24$ horas = 86400 s obtemos

$$r = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{4\pi^2} \cdot 86400^2} = 4,23 \cdot 10^7 \text{ m}$$

$$v = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{4,23 \cdot 10^7}} = 3,07 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

Capítulo VIII

Equilíbrio estático

Até agora, praticamente em todos os capítulos ligados à cinemática e à dinâmica, aproximámos os objetos a partículas; contudo, os objetos reais, de dimensão finita, podem sofrer translação e rotação. Na verdade, nas aulas anteriores ao falar sobre gravitação considerámos mais do que um corpo ainda que eles pudessem ser considerados como partículas. Por observação, verifica-se que quando uma força é aplicada a um dado objeto de dimensão finita (ou um sistema de partículas) de massa total M , o movimento de translação do objeto realiza-se como se a força fosse aplicado num único ponto no qual a massa do objeto foi concentrada. Este comportamento é independente de outros movimentos, como o movimento de rotação ou de vibração. Este ponto especial é chamado de centro de massa (abreviado por CM) do objeto. Como exemplo, considere o movimento do centro de massa do taco mostrado na Fig. 36. O CM segue uma trajectória parabólica mesmo quando o taco gira em torno do CM.

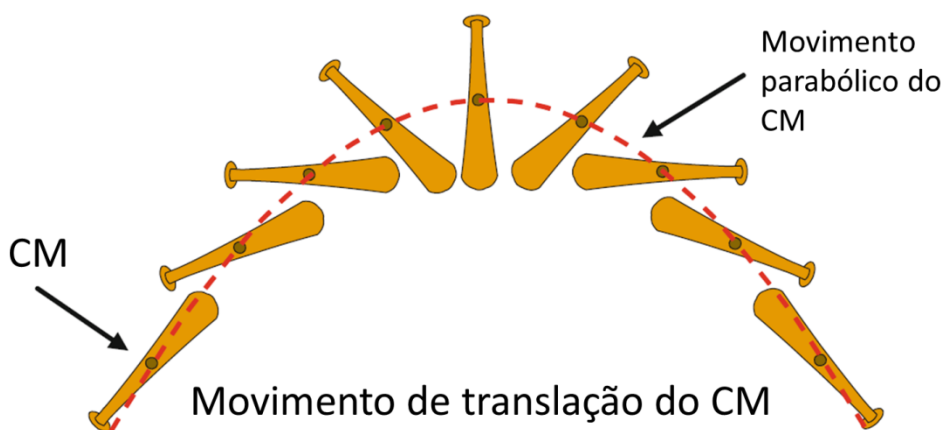


Figura 36

Considere a Fig. 37 onde está representado um sistema formado por duas partículas com massas m_1 e m_2 , localizadas ao longo do eixo x nas posições

x_1 e x_2 , respetivamente. A posição (coordenada) do centro de massa do conjunto das duas partículas ao longo do eixo x (x_{CM}) é dado por

$$x_{CM} = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2}{m_1 + m_2}.$$

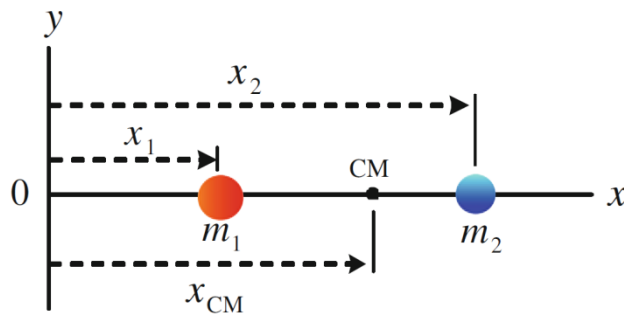


Figura 37

Para um sistema formado por N partículas, todas ao longo do eixo x , o centro de massa será dado por

$$x_{CM} = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + \dots + m_N \cdot x_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N}.$$

Para um sistema formado por N partículas, distribuídas por um plano (p. ex., o plano xy), as coordenadas x e y do centro de massa serão obtidos através das expressões (ver Fig. 38)

$$x_{CM} = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + \dots + m_N \cdot x_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N}$$

$$y_{CM} = \frac{m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 + \dots + m_N \cdot y_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N}.$$

A generalização para três dimensões é imediata. Claro que, da Fig. 38 (e generalizando para três dimensões) podemos escrever, em notação vetorial,

$$\vec{r}_{CM} = x_{CM} \vec{e}_1 + y_{CM} \vec{e}_2 + z_{CM} \vec{e}_3$$

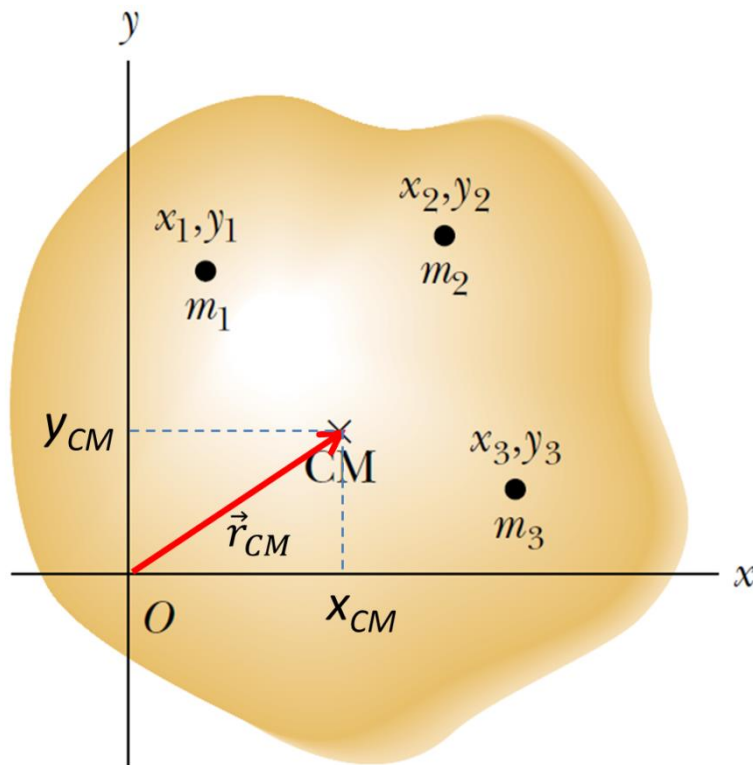


Figura 38

Quando, em vez de massas pontuais (partículas), temos uma distribuição contínua de massa as coordenadas do centro de massa da distribuição são dadas por

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \int x \, dm$$

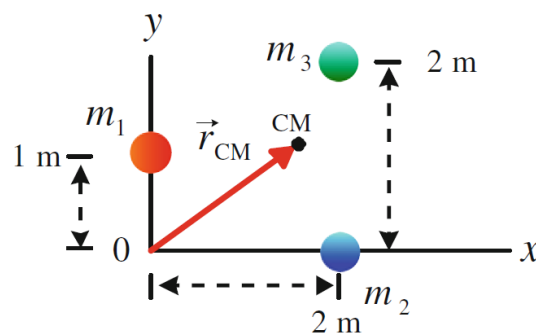
$$y_{CM} = \frac{1}{M} \int y \, dm$$

$$z_{CM} = \frac{1}{M} \int z \, dm$$

onde a massa total do objeto M é dado por $M = \int dm$.

EXEMPLO 24

Um sistema é formado por três partículas de massas $m_1 = 0,5$ kg, $m_2 = 1$ kg e $m_3 = 1,5$ kg. As três partículas estão espalhadas num plano como é mostrado na figura. Determine o centro de massa do sistema.



SOLUÇÃO

Só existem componentes do vetor posição segundo os eixos do x e y . Utilizando as expressões anteriores para distribuições de partículas podemos fazer

$$x_{CM} = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + m_3 \cdot x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{0,5 \cdot 0 + 1,0 \cdot 2 + 1,5 \cdot 2}{0,5 + 1,0 + 1,5} = 1,67 \text{ m}$$

$$y_{CM} = \frac{m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 + m_3 \cdot y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{0,5 \cdot 1 + 1,0 \cdot 0 + 1,5 \cdot 2}{0,5 + 1,0 + 1,5} = 1,17 \text{ m}$$

ou, em termos vetoriais,

$$\vec{r}_{CM} = 1,67 \vec{e}_1 + 1,17 \vec{e}_2 \text{ (m)}.$$

EXEMPLO 25

Uma vara horizontal tem uma massa M e um comprimento L . Determine a localização de seu centro de massa em relação à sua ponta mais à esquerda:

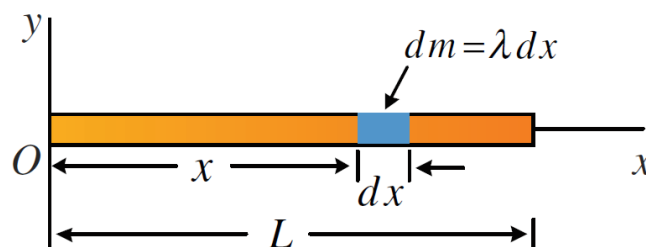
- a) se a vara tiver uma massa uniforme por unidade de comprimento λ ;
- b) se a vara tiver uma massa por unidade de comprimento λ que aumenta linearmente a partir de sua extremidade mais esquerda de acordo com a relação $\lambda = \alpha x$, onde α é uma constante.

SOLUÇÃO

a) Como temos uma distribuição contínua de massa ao longo do eixo x , temos que utilizar a expressão

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \int x \, dm$$

De acordo com a figura, para achar o CM da vara temos que somar todos os elementos dm ao longo do comprimento L da vara. Claro que o centro de massa ao longo dos eixos y e z é zero



A massa por unidade de comprimento (λ) é dada por $\lambda = M/L$. Portanto, $dm = \lambda dx$. Como

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \int x dm$$

podemos escrever

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \int_0^L x \lambda dx = \frac{\lambda}{M} \int_0^L x dx = \frac{1}{L} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^L = \frac{1}{L} \cdot \frac{L^2}{2} = \frac{L}{2}$$

ou seja, o centro de massa é no centro geométrico da vara, como seria de esperar.

b) Neste caso temos que $\lambda = \alpha x$, ou seja, λ varia de ponto para ponto, de maneira linear, ao longo da vara. Assim, temos

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \int_0^L x \alpha x dx = \frac{\alpha}{M} \int_0^L x^2 dx = \frac{\alpha}{M} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^L = \frac{\alpha \cdot L^3}{3M}.$$

Mas

$$M = \int dm = \int_0^L \lambda dx = \int_0^L \alpha x dx = \alpha \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^L = \alpha \cdot \frac{L^2}{2}$$

que, substituindo na expressão anterior, dá

$$x_{CM} = \frac{\alpha \cdot L^3}{3M} = \frac{\alpha \cdot L^3}{3 \alpha \cdot \frac{L^2}{2}} = \frac{2L}{3}.$$

Vejamos agora em que condições um dado objeto rígido está em equilíbrio estático, i.e., não tem movimento de translação nem de rotação.

Há duas condições necessárias para o equilíbrio de um objeto estar em equilíbrio: (1) a resultante das forças exteriores tem que ser igual a zero:

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

(2) a soma dos momentos de forças aplicadas tem que ser igual a zero:

$$\sum \vec{\tau} = \vec{0}$$

Contudo, estas condições não são suficientes; para um objeto estar em equilíbrio estático é ainda necessário que a sua velocidade linear seja igual a zero e que a sua velocidade angular também seja igual a zero.

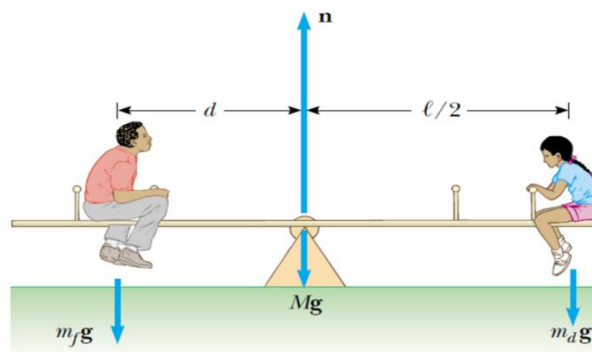
$$\vec{v} = \vec{0} \quad \text{e} \quad \vec{\omega} = \vec{0}$$

Portanto, no equilíbrio estático não há translação nem rotação.

EXEMPLO 26

Um balancé que consiste numa prancha uniforme de massa M e comprimento l apoia um pai e uma filha com massas de m_p e m_f , respetivamente, conforme se mostra na figura. O apoio (chamado fulcro) está sob o centro de gravidade (centro de massa) da prancha, estando o pai a uma distância d do centro e a filha a uma distância $l/2$ do centro.

- Determine a intensidade da força n exercida pelo fulcro na prancha.
- Determine onde o pai deveria sentar-se para equilibrar o sistema na posição horizontal.



SOLUÇÃO

a) Considerando as forças aplicadas ao sistema e considerando que ele está em equilíbrio estático não há qualquer tipo de movimento. Logo a soma das forças aplicadas tem que ser igual a zero. Considerando que o sentido positivo é para cima podemos escrever:

$$\sum F_y = n + (-m_f \cdot g) + (-m_d \cdot g) + (-M \cdot g) = 0$$

donde vem que

$$n = (m_f \cdot g) + (m_d \cdot g) + (M \cdot g)$$

b) Para resolver esta alínea vamos igualar os momentos das forças aplicadas a zero. O momento das forças aplicadas tem uma direção perpendicular ao plano da imagem e, dependendo do seu ponto de aplicação em relação ponto de rotação (o fulcro) assim terá um sentido para lá ou para cá do plano da imagem. Assim podemos escrever (considerando positivo o movimento contrário ao dos ponteiros do relógio e o fulcro como o ponto em relação ao qual estamos a calcular o momento das forças aplicadas)

$$\sum \tau = m_f \cdot g \cdot d - m_d \cdot g \cdot \frac{l}{2} + 0 + 0 = 0$$

vindo

$$d = \frac{m_d}{m_f} \cdot \frac{l}{2}$$

Capítulo IX

Movimento linear e movimento rotacional: síntese

Vimos que as equações do movimento uniformemente acelerado segundo uma dada direção podem ser escritas da seguinte maneira (neste caso segundo o do eixo x):

$$a_x = \text{constante}$$

$$x = x_0 + v_{0x} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$v_x = v_{0x} + a_x \cdot t$$

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2 \cdot a_x \cdot (x - x_0)$$

Vimos também que no movimento de rotação havia uma grandeza, a que chamamos velocidade angular, ω , que é um vetor perpendicular ao plano onde se dá a rotação do objeto que se está a considerar e que, formalmente é traduzida pela expressão

$$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_3$$

onde θ é o ângulo varrido pelo vetor posição que define a posição de uma partícula (ou objeto) que gira segundo uma trajetória circular no plano xy em torno de um ponto ou um eixo e \vec{e}_3 é o vetor unitário segundo o eixo z .

Da expressão anterior podemos deduzir que

$$\theta = \omega \cdot t + \gamma = \omega \cdot t + \theta_0$$

onde γ é uma constante que indica o ângulo inicial, i. e., θ_0 . Vimos ainda que havia uma relação entre a velocidade linear e a velocidade angular que era expressa através das relações

$$v = \omega \cdot R \quad e \quad a = \omega \cdot v$$

em v e a são a velocidade e a aceleração ao longo da trajetória circular, respectivamente, ω é a velocidade angular e R é o raio da trajetória circular. Claro que no caso mais geral pode haver variações da velocidade angular e, portanto, é legítimo perguntar o que é uma aceleração angular. Utilizando os mesmos conceitos que utilizamos para o movimento retilíneo podemos escrever que a aceleração angular média é dada por

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i}.$$

Achando o limite quando Δt tende para zero obteremos a aceleração angular instantânea

$$\alpha_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

o que indica que a aceleração angular instantânea é a derivada da velocidade angular em ordem ao tempo. Claro que a velocidade angular é um vetor e, portanto, do anterior resulta que a aceleração instantânea é também um vetor que tem a mesma direção do vetor velocidade angular. Para o caso da aceleração angular ser constante, por integração pode obter-se a expressão da variação da velocidade angular em função do tempo e a expressão da variação o ângulo θ em função do tempo:

$$\alpha = \text{constante}$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2 \cdot \alpha \cdot (\theta - \theta_0).$$

Comparando estas expressões com as do movimento retilíneo uniformemente acelerado vemos que há uma semelhança entre x e θ , v e ω e a e α . Tudo se passa como se, para obter as expressões do movimento circular com aceleração angular constante, bastasse substituir x por θ , v

por ω e α por α nas equações do movimento retilíneo uniformemente acelerado.

Exploremos um pouco mais esta analogia. A expressão da energia cinética de uma partícula com velocidade v é ao longo de uma trajetória circular é dada por

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Mas, como vimos,

$$v = \omega \cdot R$$

que substituindo na expressão anterior dá

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (\omega \cdot R)^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot R^2.$$

Mas $I = mR^2$ é o momento de inércia de uma partícula que roda numa trajetória circular de raio R . Portanto, podemos escrever

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2$$

o que, por comparação, indica que o momento de inércia na rotação é análogo à massa no movimento retilíneo.

Também definimos momento de uma força em relação a um ponto como

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

e

$$\tau = |\vec{\tau}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \text{sen}(\vec{r}, \vec{F}).$$

Para o caso de a força ser tangencial à trajetória circular podemos escrever

$$\tau = |\vec{\tau}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}_t| = R \cdot m \cdot a_t.$$

Mas já vimos anteriormente que

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega \cdot R) = \frac{d\omega}{dt} \cdot R + \omega \cdot \frac{dR}{dt} = \alpha \cdot R.$$

Portanto, podemos escrever

$$\tau = R \cdot m \cdot a_t = R \cdot m \cdot \alpha \cdot R = m \cdot R^2 \cdot \alpha = I \cdot \alpha.$$

Ou seja, o momento de uma força que atua tangencialmente a uma trajetória circular dá origem a uma aceleração angular. Mais ainda, comparando esta expressão com a expressão da lei fundamental da dinâmica ($F=ma$) vemos que o momento de uma força, τ , é análoga à força. Da mesma maneira o momento linear é análogo ao momento angular do movimento de rotação, já que, por analogia (como já vimos), a velocidade v é análoga à velocidade angular ω e a massa m é análoga ao momento de inércia I .

Claro que poderíamos continuar a analogia. Por exemplo, o teorema trabalho energia,

$$W = \Delta E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2$$

terá o seguinte aspecto para o caso do movimento circular utilizando as analogias anteriores

$$W = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_2^2 - \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_1^2.$$

Há um aspecto importante no movimento circular não uniforme, i.e., no movimento circular em que a velocidade angular varia no tempo (há uma aceleração angular). Já vimos que

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

e, portanto, temos que

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\alpha} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

Isto quer dizer que a aceleração ao longo da trajetória circular tem duas componentes vetoriais: $\vec{\alpha} \wedge \vec{r}$ e $\vec{\omega} \wedge \vec{v}$. A aceleração angular, $\vec{\alpha}$, tem a

mesma direcção de $\vec{\omega}$ e, portanto, perpendicular à trajectória circular; \vec{r} está no plano da trajectória circular; assim, o vetor produto externo $\vec{\alpha} \wedge \vec{r}$ é um vetor com a mesma direcção do vetor velocidade \vec{v} , i.e., tem uma direcção tangencial. Por outro lado, $\vec{\omega} \wedge \vec{v}$ tem a direcção do vetor posição (direcção do raio da trajectória circular) e aponta para o centro da trajectória, ou seja, é centrípeta. Podemos, então, dizer que no movimento circular não uniforme a aceleração tem um componente tangencial e uma componente centrípeta e podemos escrever

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \vec{v} = a_T \vec{e}_T + a_c \vec{e}_c$$

onde \vec{e}_T e \vec{e}_c são os vectores unitários tangente e perpendicular à trajectória no ponto onde a partícula se encontra no seu movimento (ver Fig. 39).

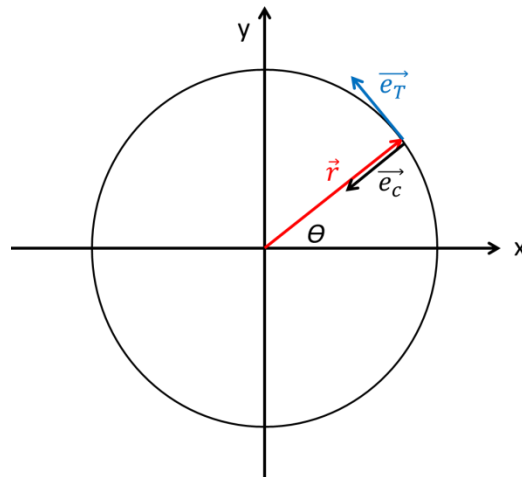


Figura 39

Já vimos que, por definição

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{r} \wedge \vec{a} = m \cdot \vec{r} \wedge (\vec{\alpha} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}) \\ &= m \cdot (\vec{r} \wedge (\vec{\alpha} \wedge \vec{r}) + \vec{r} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{v})) \\ &= m \cdot (\vec{r} \wedge (\vec{\alpha} \wedge \vec{r}) + \vec{0}) = m \cdot (\vec{r} \wedge (\vec{\alpha} \wedge \vec{r})) \end{aligned}$$

o que indica que $\vec{\tau}$ tem a mesma direcção de $\vec{\omega}$ e $\vec{\alpha}$. Ou seja

$$\begin{aligned} |\vec{\tau}| &= m \cdot |\vec{r}| \cdot |\vec{\alpha} \times \vec{r}| \cdot \text{sen } 90^\circ = m \cdot R \cdot |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{r}| \cdot \text{sen}(\vec{\alpha}, \vec{r}) \\ &= m \cdot R^2 \cdot \alpha = I \cdot \alpha. \end{aligned}$$

Na Figura 40 apresentam-se as expressões dos momentos de inércia de vários sólidos e figuras simples em relação a um eixo de rotação.

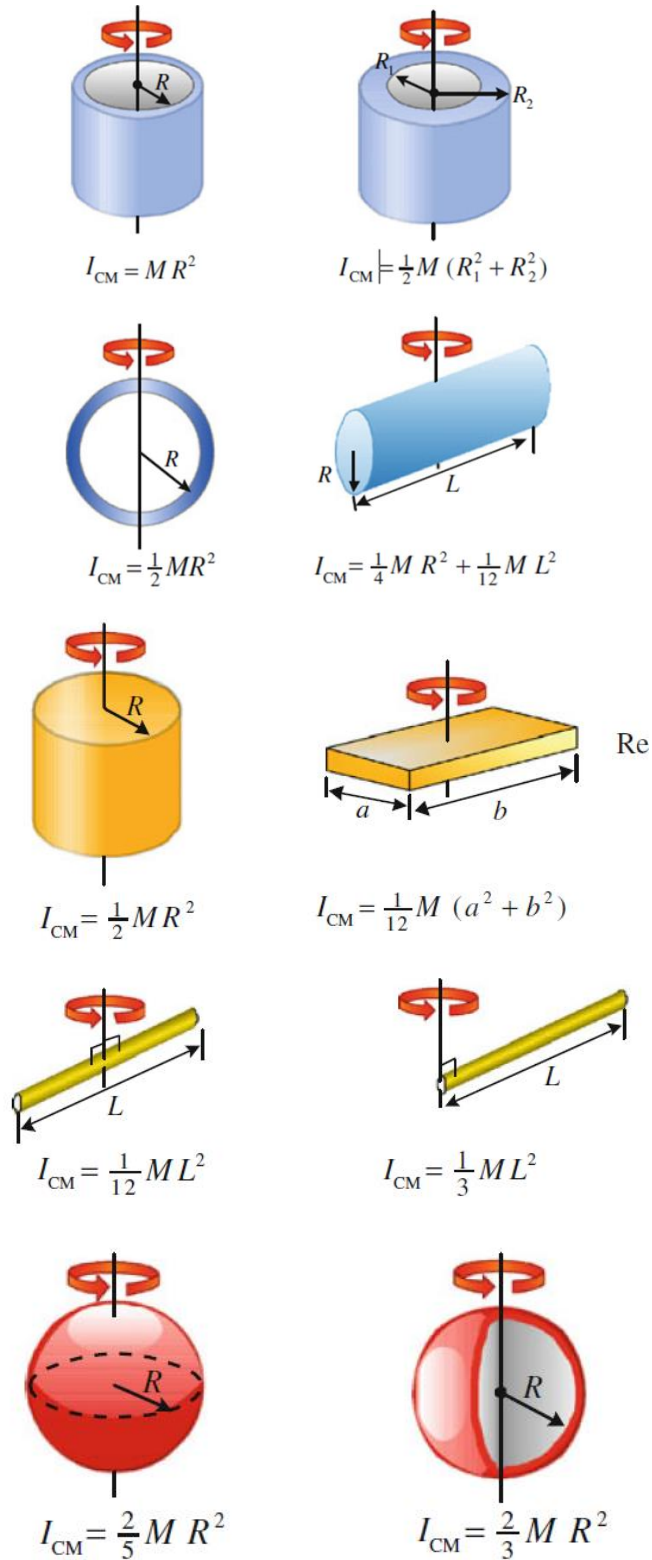


Figura 40

EXEMPLO 27

Um prato de um gira discos roda com uma velocidade angular de 33 rotações por minuto e demora 20 s a parar.

- Admitindo que a aceleração angular é uniforme, calcule-a.
- Quantas rotações faz o prato até parar?
- Se o raio do prato for de 14 cm calcule as intensidades das acelerações tangencial e centrípeta na periferia do prato para $t = 0$ s.
- Qual a velocidade linear inicial de um ponto na periferia do prato?

SOLUÇÃO

Escrevamos as equações do movimento de rotação para θ , ω e α

$$\begin{aligned}\alpha &= \text{constante} \\ \theta &= \theta_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \\ \omega &= \omega_0 + \alpha \cdot t \\ \omega^2 &= \omega_0^2 + 2 \cdot \alpha \cdot (\theta - \theta_0).\end{aligned}$$

- a) A velocidade angular inicial ω_0 é

$$\omega_0 = \frac{33 \cdot 2\pi}{60} = 3,45 \text{ s}^{-1}$$

Como $\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$ podemos escrever $0 = 3,45 + \alpha \cdot 20$ para determinar a aceleração angular α que dará

$$\alpha = -\frac{3,45}{20} = -0,17 \text{ s}^{-2}$$

- b) Sabemos que $\theta = \theta_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$.

Podemos escrever $\theta - \theta_0 = \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$ em que $\theta - \theta_0$ representa a soma dos ângulos varridos durante as várias rotações de θ_0 até θ .

$$\theta - \theta_0 = 3,45 \cdot 20 + \frac{1}{2} \cdot (-0,17) \cdot 20^2 = 34,6 \text{ rad.}$$

Mas uma revolução é $2\pi \text{ rad}$; logo, o nº de revoluções é $\frac{34,6 \text{ rad}}{2\pi \text{ rad}} = 5,51$.

c) Vimos que

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \vec{v} = a_T \vec{e}_T + a_c \vec{e}_c$$

$$a_T = |\vec{\alpha} \wedge \vec{r}| = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{r}| \cdot \text{sen}(\vec{\alpha}, \vec{r}) = \alpha \cdot R$$

$$a_c = |\vec{\omega} \wedge \vec{v}| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{v}| \cdot \text{sen}(\vec{\omega}, \vec{v}) = \omega \cdot v$$

com $\vec{\alpha}$ perpendicular a \vec{r} e $\vec{\omega}$ perpendicular a \vec{v} . Assim, para $t = 0 \text{ s}$, obtemos

$$a_T = \alpha \cdot R = -0,17 \cdot 0,14 = -2,42 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}^2$$

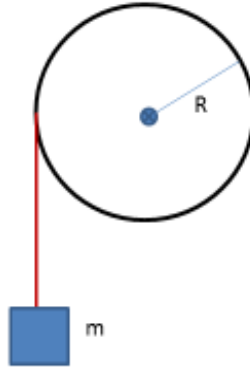
e

$$a_c = \omega_0 \cdot v = \omega_0 \cdot (\omega_0 \cdot R) = \omega_0^2 \cdot R = 3,45^2 \cdot 0,14 = 1,68 \text{ m/s}^2 \cdot$$

d) $v = \omega \cdot R = 3,45 \cdot 0,14 = 0,48 \text{ m/s}$

EXEMPLO 28

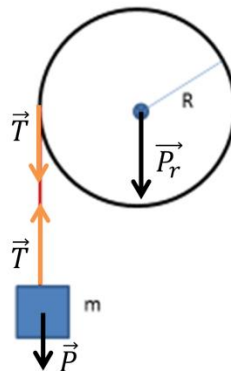
3. Uma roldana de massa M , raio R e momento de inércia I , está montada como é mostrado na figura.



Admitindo que não há atritos, quer na roldana quer na corda, e que a corda é inextensível e não tem massa, calcule:

- A aceleração da massa m .
- A aceleração angular da roldana.
- A tensão na corda.

SOLUÇÃO



a) O que vai gerar a rotação da roldana é o peso da massa m que é transmitido através do cabo, ou seja, é a tensão T que gera o momento que faz a roldana girar no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio. Mas sabemos que $\tau = R \cdot F = R \cdot T$. O peso da roldana não gera qualquer momento. Mas também demonstrámos que $\tau = I \cdot \alpha$, portanto

$$R \cdot T = I \cdot \alpha$$

e

$$\alpha = \frac{R \cdot T}{I}$$

As forças que dão origem à aceleração da massa m são a tensão no cabo e o peso da massa. Admitindo que o sentido do movimento da massa m é positivo para baixo, podemos escrever

$$-T + P = -T + mg = m \cdot a$$

donde

$$a = \frac{-T + mg}{m}.$$

Vimos também que o módulo da aceleração tangencial é dado $a = \alpha \cdot R$. Substituindo nesta expressão o α e o a pelas expressões respetivas obtemos

$$\frac{-T + mg}{m} = \frac{R \cdot T}{I} \cdot R = \frac{R^2 \cdot T}{I}.$$

Resolvendo em ordem à tensão no cabo obtemos

$$T = \frac{mg}{1 + \frac{mR^2}{I}}.$$

Introduzindo este valor da tensão na expressão da aceleração tangencial obtemos a aceleração

$$a = \frac{-T + mg}{m} = \frac{-\frac{mg}{1 + \frac{mR^2}{I}} + mg}{m} = \frac{g}{1 + \frac{I}{mR^2}}.$$

Substituindo a aceleração tangencial na expressão $a = \alpha \cdot R$ obtemos a aceleração angular α

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{\frac{g}{1 + \frac{I}{mR^2}}}{R} = \frac{g}{R + \frac{I}{mR}}$$

Capítulo X

Oscilações e ondas

As oscilações ou vibrações jogam um papel importante quer na explicação e interpretação de muitos fenómenos físicos quer na vida de todos os dias. Muitos relógios regem-se por movimentos oscilatórios, as moléculas e os átomos vibram no interior dos sólidos, líquidos e gases, o som são vibrações que se propagam pelo ar (ou noutros meios) e chegam aos nossos ouvidos, a energia que nos chega do Sol é também o resultado de vibrações eletromagnéticas; ou seja, vibrações e propagação de vibrações estão por todo o lado.

Do ponto de vista da Física as vibrações e a sua propagação (que tem o nome de ondas) não são fenómenos físicos completamente novos já que podem ser descritos através das leis de Newton.

Oscilações ou vibrações não são mais do que repetições de um dado movimento; são movimentos que se repetem com uma certa periodicidade e, por isso, são chamados de movimentos periódicos. Analisemos, então, o movimento harmónico simples (MHS) que é o movimento periódico mais simples que se conhece e estuda em Física. Consideremos a Fig. 41.

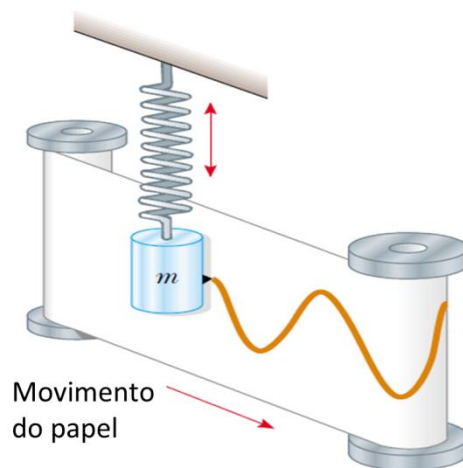


Figura 41

À medida que a massa (com um marcador) presa à mola vertical oscila e que o papel se vai desenrolando o marcador vai desenhando uma curva que sobe e desce em relação a um ponto médio. O desenho no papel

representa um movimento harmónico simples que pode ser modelado através de uma curva sinusoidal ou uma curva cosinusoidal. O mesmo tipo de fenómeno ou oscilação se observa numa mola que oscila horizontalmente sobre uma superfície sem atrito.

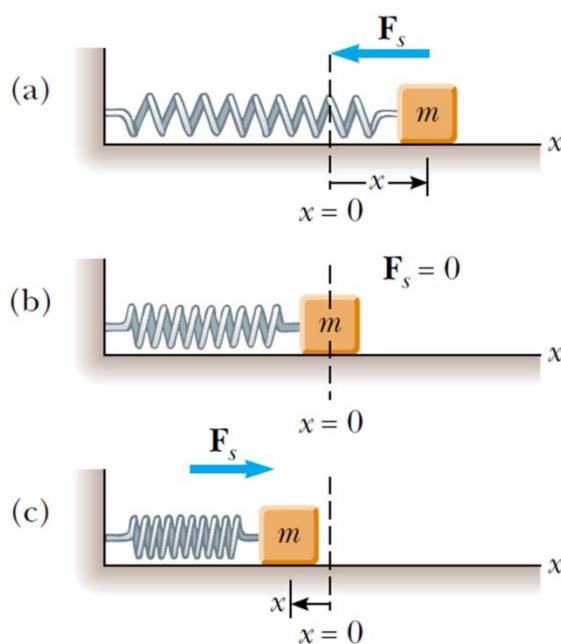


Figura 42

É da experiência comum que no caso da Fig. 42 se provocarmos um deslocamento Δx para a direita do ponto de equilíbrio da mola sentimos uma força que tende a levar a massa para a esquerda; na verdade, se a libertarmos ela movimenta-se para a esquerda; o mesmo se passa se comprimirmos a mola para a esquerda através de um deslocamento $-\Delta x$. Se, depois de qualquer um dos deslocamentos libertarmos a massa, dado que não há atrito, a massa oscilará da direita para a esquerda e da esquerda para a direita efetuando um movimento periódico com a mesma amplitude a que se dá o nome de movimento harmónico simples. Nas Figs. 41 e 42 o fenómeno é exatamente o mesmo dependendo o movimento apenas das características da mola e da massa. O que dá origem ao movimento oscilatório é a força que a mola exerce sobre a massa e que resultou do deslocamento sofrido pela massa. Na Fig. 42(a), para manter a massa parada vemos que é necessário exercer uma força que compensa a força F_s , que é a força que a mola exerce na massa, e que é igual à força que exercemos na massa para a manter naquela posição.

Assim, a intensidade da força que a mola exerce na massa na Fig. 42(a) (e a que é hábito chamar de força restauradora) é dada por

$$F_s = -k \cdot x$$

onde k é a chamada constante da mola e que tem por unidade Nm^{-1} . É de notar que a expressão da força restauradora tem o mesmo aspeto para valores do deslocamento negativos; na verdade, na Fig. 42(c) podemos ver que a força restauradora tem, agora, um sentido positivo. A expressão anterior tem o nome de lei de Hooke (em homenagem a Robert Hooke, contemporâneo de Newton). Deve notar-se que a lei de Hooke não é uma verdadeira lei no sentido de que se verifica sempre; a lei de Hooke é uma expressão que descreve de maneira muito aproximada o comportamento elástico dos materiais quando não são demasiado deformados por forças. De acordo com a lei fundamental da dinâmica ($F=ma$) podemos escrever

$$F_s = m \cdot a = -k \cdot x$$

ou ainda

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -k \cdot x$$

ou ainda

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m} \cdot x.$$

A equação anterior constitui a equação do movimento de uma mola, movimento esse que, como dissemos anteriormente, constitui um movimento harmónico simples. Portanto, o movimento de todas as partículas que estejam a realizar um movimento harmónico simples é descrito por uma equação idêntica à anterior que é uma equação diferencial ordinária do segundo grau cuja solução é bem conhecida. Atentemos na Fig. 43 que apresenta a posição da massa em função do tempo da oscilação desenhada pelo marcador na Fig. 41 e que serve para definir alguns parâmetros de oscilações; assim, a amplitude do movimento oscilatório ou apenas amplitude, A , é o deslocamento máximo sofrido pela massa no seu movimento; o período de repetição do movimento

oscilatório ou apenas período, T , é o tempo de repetição do movimento, i.e., o tempo que a massa leva para reocupar uma mesma posição.

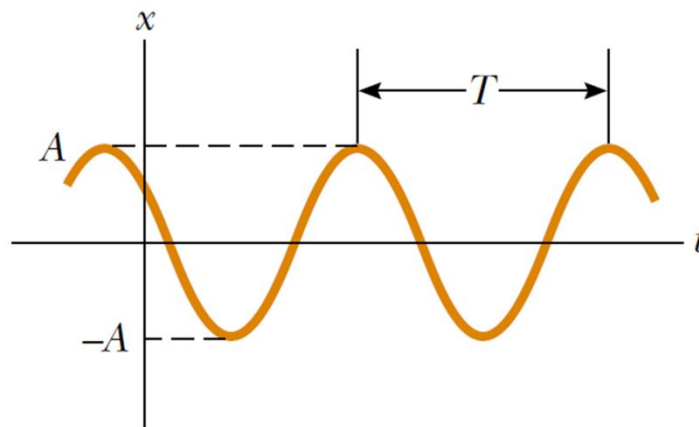


Figura 43

A curva da Fig. 43 não é mais do que uma senoide ou uma cossenoide cuja equação tem o seguinte aspeto

$$x(t) = A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

ou

$$x(t) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

dependendo de como se vê o início da curva. Para além do período de um movimento oscilatório existe também a frequência que é o número de repetições por unidade de tempo que tem como unidade Hz ou s^{-1} . O período é o inverso da frequência.

Agora que temos a descrição matemática de um movimento harmónico simples, façamos alguns cálculos. Vimos que se a posição de uma dada partícula varia no tempo então terá uma velocidade e, possivelmente, uma aceleração; calculemos a velocidade e a aceleração no MHS.

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left(A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right) = A \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(A \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \right) \\
 &= A \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \left(-\text{sen} \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \right) \\
 &= -\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot x
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot x$$

que comparando com

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m} \cdot x$$

dá

$$-\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot x = -\frac{k}{m} \cdot x$$

que resolvendo em ordem ao período T dá

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Anteriormente vimos que $2\pi/T=2\pi f$ é a chamada frequência angular ω e, portanto, podemos ainda escrever

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

e

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \cdot x$$

EXEMPLO 1

Uma partícula de massa 0,25 kg está ligada a uma mola que realiza um MHS com uma amplitude de 0,15 m e uma frequência de 100 Hz.

Determine:

- a) A frequência angular do movimento.
- b) A constante da mola.
- c) A velocidade máxima da partícula.
- d) A aceleração máxima da partícula.

SOLUÇÃO

Vimos que $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \cdot x$ onde $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

a) $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot 100 = 2 \cdot 3,14 \cdot 100 = 628 \text{ s}^{-1}$

b) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ donde $k = \omega^2 \cdot m$.

Portanto, $k = 628^2 \cdot 0,25 = 9,9 \cdot 10^4 \text{ N/m}$

c) $x(t) = A \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ e $v = A \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \text{cos}\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$

A velocidade é máxima quando $\text{cos}\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ é igual a 1, o que implica que $\frac{2\pi}{T} \cdot t = 0$ ou $t = 0 \text{ s}$. mas como o movimento é repetitivo (oscilatório)

a velocidade máxima é atingida, também, para $\pi, 2\pi$, etc. Assim podemos escrever $\frac{2\pi}{T} \cdot t = \pi$ donde $t = \frac{T}{2} = \frac{1}{2 \cdot 100} = 0,5 \cdot 10^{-2} \text{ s}$.

Substituindo na expressão da velocidade obtemos

$$v(t = 0) = A \cdot \omega \cdot \text{cos}\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) = 0,15 \cdot 628 \cdot 1 = 94 \text{ m/s}$$

e

$$v(t = 0,5 \cdot 10^{-2}) = A \cdot \omega \cdot \text{cos}\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) = 0,15 \cdot 628 \cdot (-1) = -94 \text{ m/s}$$

d) $\frac{d^2x}{dt^2} = A \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \left(-\text{sen}\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right) = -\omega^2 \cdot x$

A aceleração máxima atinge-se quando $\text{sen}\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) = 1$. Ou seja $\frac{2\pi}{T} \cdot t = \frac{\pi}{2}$. Portanto, $t = \frac{T}{4}$ ou $t = \frac{T}{4} + \pi$.

$$a_{\text{máx}} = -\omega^2 \cdot x = -628^2 \cdot 0,15 = -6,0 \cdot 10^4 \text{ m/s}^2.$$

Claro que esta aceleração será nos dois sentidos, como no caso da alínea anterior.

Energia do MHS

Vimos que no movimento harmónico simples a posição de uma partícula que oscila no tempo com um período T ou com uma frequência angular ω é dada por (onde φ é a chamada constante de fase e que indica qual é o ângulo correspondente à posição da partícula que oscila para $t = 0$ s)

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

que é uma solução da equação diferencial ordinária

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \cdot x.$$

Quando a partícula oscila tem energia cinética já que tem velocidade que varia no tempo e aceleração que também varia no tempo. Assim, a sua velocidade e aceleração são

$$v(t) = -A \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

A energia cinética do oscilador será

$$\begin{aligned} E_C &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (-A \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi))^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}^2(\omega \cdot t + \varphi) \end{aligned}$$

A energia potencial de uma mola é dada por (onde k é a constante da mola)

$$\begin{aligned} E_P &= \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi))^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t + \varphi) \end{aligned}$$

Admitindo que não há atrito há conservação da energia mecânica, ou seja, a soma da energia cinética e da energia potencial deve permanecer constante. Portanto a energia total (E_t) do sistema oscilante será

$$E_t = E_C + E_P = \frac{1}{2} mA^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi).$$

Mas para a mola sabemos que

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

que substituindo na expressão anterior dará

$$E_t = \frac{1}{2} mA^2 \frac{k}{m} \sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

que simplificando dá

$$E_t = \frac{1}{2} kA^2 (\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi)) = \frac{1}{2} kA^2.$$

Isto quer dizer que no movimento harmônico simples sem atrito a energia total do oscilador permanece constante com um valor igual a $E_t = \frac{1}{2} kA^2$ proporcional ao quadrado da amplitude da oscilação (ver Fig. 44).

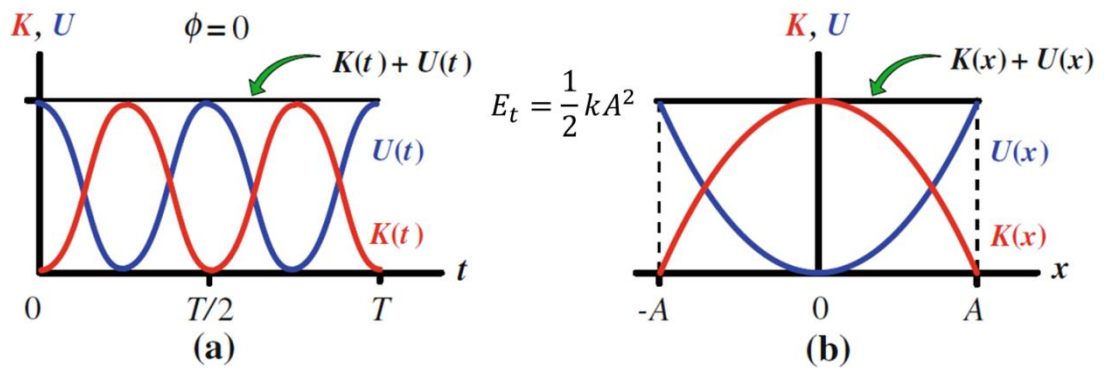


Figura 44

Se a energia total do oscilador harmónico simples é dada por

$$E_t = \frac{1}{2}kA^2$$

podemos escrever

$$E_t = E_C + E_P = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

ou

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

vindo, finalmente,

$$v^2 = \frac{k \cdot A^2 - k \cdot x^2}{m} = \frac{k}{m} \cdot (A^2 - x^2)$$

ou

$$v = \pm \sqrt{\frac{k}{m} \cdot (A^2 - x^2)} = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

o que mostra que a velocidade do oscilador é máxima para $x = 0$ (posição de equilíbrio do oscilador) e é mínimo (igual a zero) quando $x = \pm A$.

EXEMPLO 2

Uma partícula de massa 0,5 kg está ligada a uma mola ideal (sem massa) cuja constante é 20 N/m. Admitindo que a mola oscila na horizontal com uma amplitude de 3 cm e sem atrito calcule:

- A energia total do oscilador.
- A velocidade máxima da massa.
- A velocidade da massa para um deslocamento de 2 cm.
- A energia cinética e a energia potencial do oscilador para um deslocamento de 2 cm.
- O deslocamento do oscilador para uma velocidade de 0,10 m/s?

SOLUÇÃO

a) A energia total do oscilador é dada por

$$E_t = E_C + E_P = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 0,03^2 = 9,0 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

b) A velocidade é máxima quando $x = 0$. Portanto, quando $E_P = 0$.

$$E_t = E_C + E_P = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + 0 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = 9,0 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

vindo

$$v_{\text{máx}} = \pm \sqrt{\frac{2 \cdot 9,0 \cdot 10^{-3}}{m}} = \pm 0,190 \text{ m/s} .$$

c) A velocidade da massa para um deslocamento de 2 cm será dada por

$$v = \pm \sqrt{\frac{k}{m} \cdot (A^2 - x^2)} = \pm \sqrt{\frac{20}{0,5} \cdot (0,03^2 - 0,02^2)} = \pm 0,141 \text{ m/s} .$$

em que o sinal positivo representa uma velocidade para a direita e o sinal negativo indica uma velocidade para a esquerda.

d)

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 0,141^2 = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

$$E_P = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 0,02^2 = 4,0 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

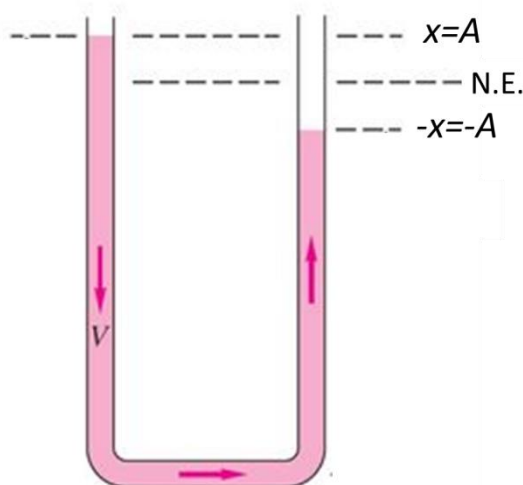
e) Para uma velocidade de 0,10 m/s teríamos

$$0,1 = \pm \sqrt{\frac{k}{m} \cdot (A^2 - x^2)} = \pm \sqrt{\frac{20}{0,5} \cdot (0,03^2 - x^2)}$$

donde $x = \pm 0,0255 \text{ m} = \pm 2,55 \text{ cm}$.

EXEMPLO 3

Um tubo em U contem um líquido de massa volúmica ρ . O comprimento total da coluna de líquido é L e a secção do tubo é uniforme e igual a A . Para $T=0$ s o nível do líquido no ramo esquerdo do tubo $x(0)$ acima do nível de equilíbrio (N.E.) e $-x(0)$ no lado direito, abaixo do nível de equilíbrio. Mostrar que a altura $x(t)$ executa um MHS.



SOLUÇÃO

Antes de se iniciar o movimento a força restauradora (atenção que tem sinal contrário ao deslocamento) é dada pelo peso da coluna de líquido acima de $-x$, i.e.,

$$F_r = -g \cdot 2x \cdot A \cdot \rho$$

ou seja, é uma força do tipo $F = -k \cdot x$ com $k = 2gA\rho$. Quando se inicia o movimento o líquido desce no ramo da esquerda para subir no ramo da direita. A força restauradora vai exercer-se em toda a massa de líquido; de acordo com a lei fundamental da dinâmica $F = ma$ e podemos pôr

$$F_r = m_t \cdot a$$

ou

$$-g \cdot 2x \cdot A \cdot \rho = m_t \cdot a$$

onde m_t é a massa total de líquido onde a força restauradora está a ser aplicada e que é igual a $L \cdot A \cdot \rho$. Assim, podemos escrever

$$-g \cdot 2x \cdot A \cdot \rho = L \cdot A \cdot \rho \cdot a = L \cdot A \cdot \rho \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

vindo

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g \cdot 2x \cdot A \cdot \rho}{L \cdot A \cdot \rho} = -\frac{2g}{L} \cdot x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{2g}{L} \cdot x$$

Comparando com (que traduz um MHS)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \cdot x$$

em que $\omega = \sqrt{k/m}$, podemos concluir que no caso do tubo em U

$$\omega = \sqrt{2g/L}.$$

Daqui poderíamos determinar o período da oscilação

$$\omega^2 = \frac{2g}{L} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

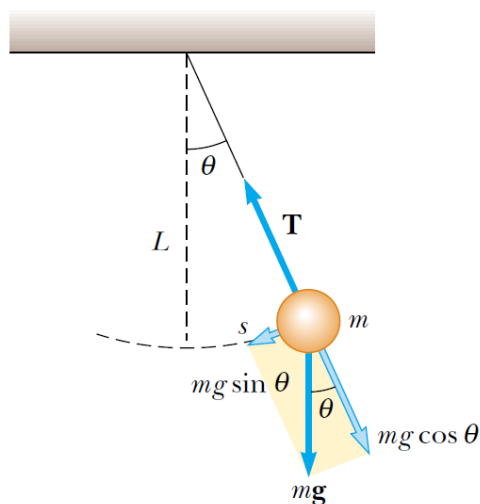
donde

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{2g}}$$

É interessante verificar que a frequência angular ω não depende nem de A nem da massa volúmica do líquido. Finalmente, podíamos escrever a equação da posição em função do tempo como

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t) = A \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{2g}{L}} \cdot t\right)$$

EXEMPLO 4 (pêndulo)



As forças que atuam no pêndulo são o peso e a tensão no cabo que o liga ao teto. Decompondo o peso podemos escrever

$$T = mg \cdot \cos\theta .$$

A força que causa o movimento (força restauradora) é dada por

$$F = - mg \cdot \text{sen}\theta$$

Neste caso o ângulo θ funciona como a posição e, portanto, a força tem um sentido contrário ao deslocamento do pêndulo. Podemos ainda escrever que o arco ao longo do qual o pêndulo se move é $s = L \cdot \theta$ e a aceleração ao longo da trajetória seguida pelo pêndulo será

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} .$$

Pela lei fundamental da dinâmica podemos escrever então

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{d^2s}{dt^2} = - mg \cdot \text{sen}\theta .$$

Como $s = L \cdot \theta$ podemos ainda escrever

$$\frac{d^2s}{dt^2} = L \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

que substituindo na expressão anterior dá

$$m \cdot L \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = - mg \cdot \text{sen}\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = - \frac{g}{L} \cdot \text{sen}\theta .$$

Para pequenos ângulos $\text{sen}\theta \approx \theta$ (ver tabela abaixo) e podemos escrever

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = - \frac{g}{L} \cdot \theta$$

cuja solução é, como já sabemos, do tipo

$$\theta(t) = \theta_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

onde θ_0 é a amplitude em termos de um ângulo. Como

$$\omega^2 = \frac{g}{L} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

então

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}.$$

θ	Graus	Radianos	$\text{sen } \theta$
0,0	0,0	0,0	0,0
2,5	0,043633	0,043633	0,043619
5,0	0,087266	0,087266	0,087155
7,5	0,130900	0,130900	0,130526
10,0	0,174533	0,174533	0,173648
15,0	0,261799	0,261799	0,258819

EXEMPLO 5

Do teto de uma dada torre oscila um pêndulo com um período de 12 s. Qual a altura L do teto da torre?

SOLUÇÃO

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$L = \frac{T^2 \cdot g}{4\pi^2} = \frac{12^2 \cdot 9,8}{4\pi^2} = 35,7 \text{ m.}$$

Até agora estudámos o MHS admitindo que não há perdas de energia e, portanto, o oscilador oscila sempre com a mesma amplitude ao longo do tempo. Na verdade, é da experiência comum que os pêndulos param ao fim de algum tempo. Isso corresponde a uma perda de energia do oscilador que faz com que a amplitude do movimento diminua até cessar completamente. Diz-se, então que o oscilador sofre um amortecimento o qual resulta da atuação de alguma forma de atrito (força) sobre ele. Vamos admitir que a força de atrito (R) que provoca o amortecimento é proporcional à velocidade e tem um sentido contrário ao movimento, i.e.

$$R = -b \cdot v = -b \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Assim podemos dizer que o oscilador oscila como resultado de um força restauradora do tipo $F = -kx$ e de uma força de atrito dada por $F_{atrito} = -b \cdot v$. Assim, de acordo com a lei fundamental da dinâmica, podemos escrever

$$\sum F.Apl. = m \cdot a = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -k \cdot x - b \cdot \frac{dx}{dt}$$

ou

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -b \cdot \frac{dx}{dt} - k \cdot x$$

onde m é a massa do oscilador, k é a constante da mola e b é um fator constante. A equação anterior é uma equação diferencial ordinária do segundo grau cuja solução é

$$x(t) = A \cdot e^{\left(-\frac{b}{2m}t\right)} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

ou

$$x(t) = A \cdot e^{(-\lambda \cdot t)} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

onde λ é o coeficiente de amortecimento e

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - (\lambda)^2}.$$

A equação da posição do oscilador em função do tempo mostra que a amplitude diminui com o tempo de maneira exponencial.

Relembremos a equação do deslocamento para o MHS

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi)$$

com

$$\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Comparando o MHS com o movimento amortecido podemos escrever

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - (\lambda)^2}.$$

Claro que quando não há amortecimento $\lambda = 0$ e caímos no MHS. Podemos considerar três casos na equação anterior: (1) $\omega_0 \gg \lambda$, (2) $\omega_0 \ll \lambda$ e (3) $\omega_0 = \lambda$.

Para o primeiro caso ($\omega_0 \gg \lambda$) o coeficiente de amortecimento é pequeno e a oscilação permanece com uma amplitude que vai diminuindo com o tempo (Fig. 45). Neste caso o movimento oscilatório diz-se sob amortecido.

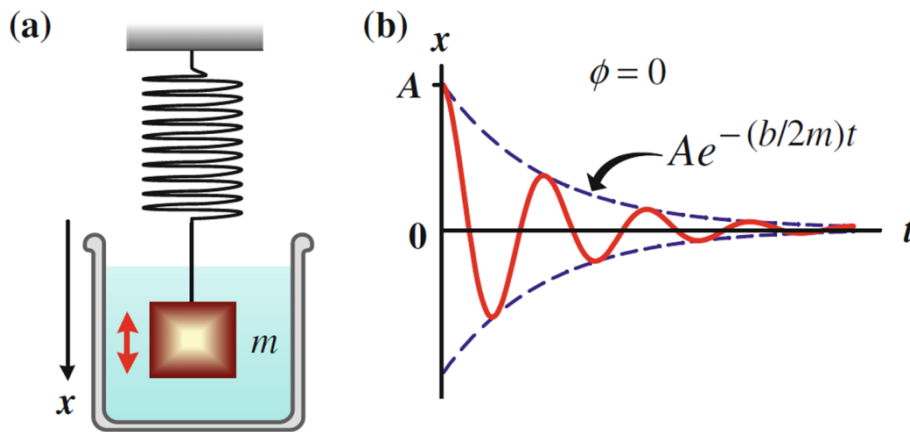


Figura 45

Para o segundo caso ($\omega_0 \ll \lambda$) o movimento oscilatório diz-se sobre amortecido e é caracterizado por o oscilador levar muito tempo a atingir a posição de equilíbrio, i.e., a atingir uma amplitude igual a zero (ver Fig. 46). Para o terceiro caso ($\omega_0 = \lambda$) o movimento oscilatório diz-se criticamente amortecido e é caracterizado por o oscilador atingir rapidamente a posição de equilíbrio, i.e., a atingir uma amplitude igual a zero (ver Fig. 46). Para visualizar as três situações podemos dizer que um pêndulo a oscilar no ar poderá ser visto como um oscilador sob amortecido; a oscilar em água será um oscilador criticamente amortecido; e a oscilar em mel será um oscilador sobre amortecido.

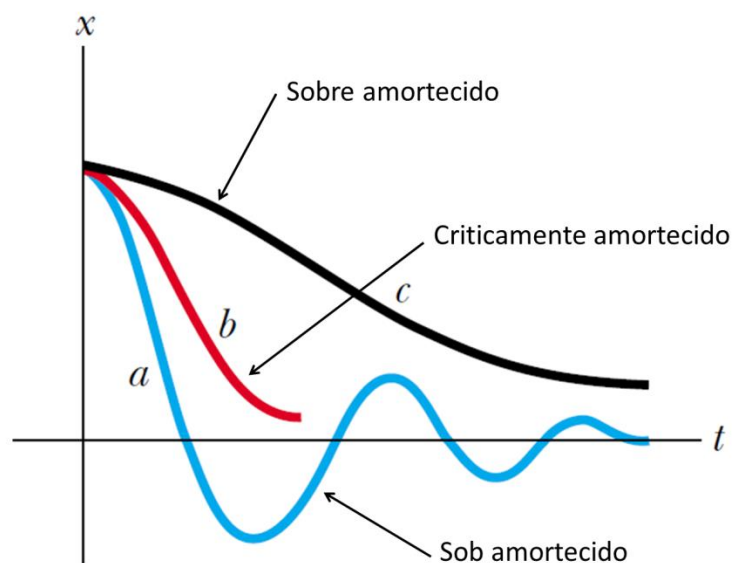


Figura 46

Em qualquer dos casos de amortecimento energia é transferida para o meio resistente sob a forma de energia térmica o que vai fazer aumentar a sua temperatura. Uma maneira de compensar essa perda de energia é fornecer energia ao oscilador a qual pode se realizada através de um forçamento periódico da forma

$$F = F_0 \cdot \cos \omega t$$

em que F_0 é uma constante. Para esta situação a equação do movimento do oscilador será

$$\sum F. Apl. = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = -b \cdot \frac{dx}{dt} - k \cdot x + F_0 \cdot \cos \omega t .$$

Portanto, esta equação indica que estamos a fornecer ao oscilador energia de maneira periódica para compensar as perdas de energia mecânica por amortecimento no meio resistente. É claro que não havendo amortecimento e deixando de atuar a força periódica ($b = 0$ e $F = 0$), ao fim de algum tempo, atingir-se-ia o regime estacionário e o oscilador passaria a oscilar com a mesma amplitude de acordo com a equação do MHS. Porém, havendo amortecimento e deixando atuar a força periódica também ao fim de algum tempo se atinge o regime estacionário e a solução da equação anterior é

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

com

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}$$

onde ω_0 é a frequência angular sem amortecimento ($b = 0$) ou a frequência natural do oscilador ($\omega_0 = \sqrt{k/m}$). Se representarmos num gráfico a amplitude em função da frequência angular obtemos a o gráfico apresentado na Fig. 47. Do gráfico da Fig. 47 (e da equação) podemos ver que, quando há algum tipo de amortecimento (grande ou pequeno), quando a frequência angular se aproxima de ω_0 a amplitude do movimento oscilatório aumenta, aumento esse que é tanto maior quanto menor for o amortecimento; no limite (quando não há qualquer tipo de

amortecimento) a amplitude do oscilador tende para infinito; este fenómeno tem o nome de ressonância e $\omega = \omega_0$ é a frequência de ressonância. Assim, se um dado oscilador, com pouco ou nenhum amortecimento, for atuado por uma força periódica com $\omega \approx \omega_0$ o oscilador pode entrar em ressonância (i.e., a sua amplitude de vibração ser muito grande) e, eventualmente, destruir o oscilador. Ou, dito de outra maneira, ao introduzirmos energia no oscilador sem que haja dissipação de parte dessa energia ele aumenta a sua energia o que se traduz num aumento da sua amplitude de oscilação ou vibração (ver Fig. 47).

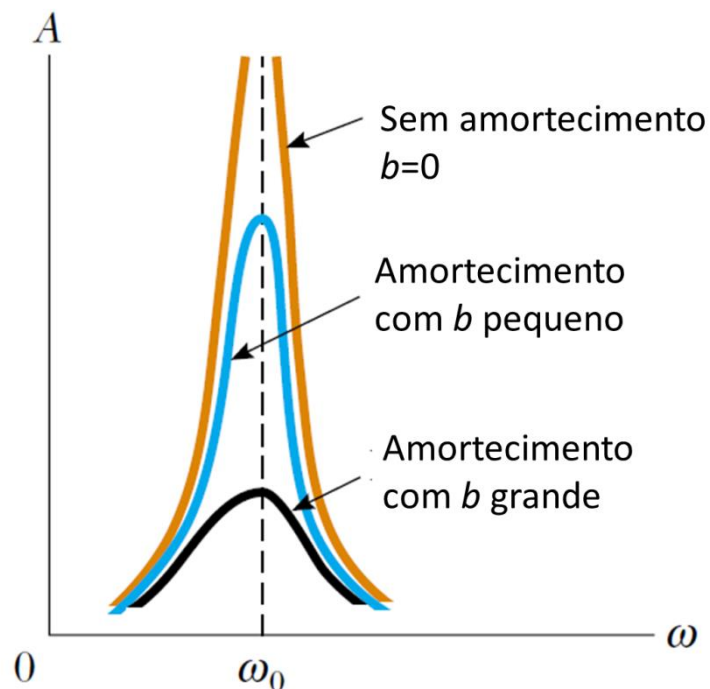


Figura 47

EXEMPLO 6

Mostre que a constante d amortecimento b tem como unidade kg/s.

SOLUÇÃO

$$F = -b \cdot v$$

vindo $[F] = [b] \cdot [v] \rightarrow kg \cdot m/s^2 = [b] \cdot m/s$

$$[b] = \frac{kg \cdot m/s^2}{m/s} = kg/s$$

EXEMPLO 7

Mostre que a taxa de variação da energia mecânica $\frac{dE}{dt}$ de um oscilador amortecido é sempre negativo e igual a $-b \cdot v^2$.

SOLUÇÃO

A energia de um oscilador harmónico é dada por

$$E = E_C + E_P = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2.$$

Por outro lado, no oscilador amortecido é dado por

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -k \cdot x - b \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Derivando em ordem ao tempo a energia obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 \right) = \frac{1}{2} m \cdot 2v \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{1}{2} k \cdot 2x \cdot \frac{dx}{dt} \\ &= m \cdot v \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + k \cdot x \cdot v \\ &= v \cdot \left(-k \cdot x - b \cdot \frac{dx}{dt} \right) + k \cdot x \cdot v \\ &= -v \cdot k \cdot x - bv^2 + k \cdot x \cdot v = -bv^2 < 0 \end{aligned}$$

ou seja, o oscilador amortecido está sempre a perder energia.

EXEMPLO 8

Um pêndulo com um comprimento de 1 m é libertado de uma posição correspondente a um ângulo de 15° . Depois de oscilar durante 1000 s a amplitude do movimento passou a ser de $5,5^\circ$. Qual o valor do coeficiente de amortecimento $\lambda = \frac{b}{2m}$?

SOLUÇÃO

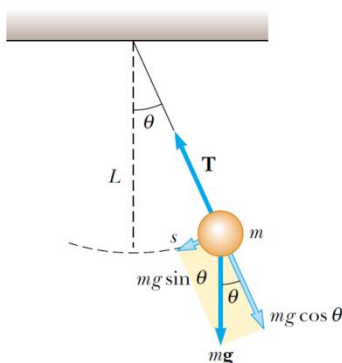
Quando há amortecimento a equação que descreve a posição em função do tempo é

$$x(t) = A \cdot e^{\left(-\frac{b}{2m}t\right)} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

ou

$$x(t) = A \cdot e^{(-\lambda \cdot t)} \cdot \cos(\omega t + \varphi).$$

Como existe proporcionalidade entre o ângulo de oscilação (θ) e a distância percorrida pelo pêndulo (s na figura)



Podemos escrever

$$\theta(t) = \theta_0 \cdot e^{(-\lambda \cdot t)} \cdot \cos(\omega t + \varphi).$$

Para pequenas oscilações ω depende apenas de comprimento do pêndulo e da aceleração da gravidade; portanto, podemos analisar apenas o factor que multiplica a parte oscilante da equação, i.e., $\theta_0 \cdot e^{(-\lambda \cdot t)}$. Assim, para $t = 0$ s obtemos e $t = 1000$ s

$$\theta(t = 0s) = \theta_0 \cdot e^{(0)} = \theta_0$$

$$\theta(t = 1000s) = \theta_0 \cdot e^{(-\lambda \cdot 1000)}.$$

Dividindo a primeira equação pela segunda obtemos

$$\frac{\theta(0)}{\theta(1000)} = \frac{15}{5,5} = 2,73 = \frac{\theta_0}{\theta_0 \cdot e^{(-\lambda \cdot 1000)}} = e^{(\lambda \cdot 1000)}.$$

Aplicando logaritmos a ambos os membros da equação obtemos

$$2,73 = e^{\lambda \cdot 1000}$$

ou

$$\ln 2,73 = \ln(e^{(\lambda \cdot 1000)})$$

o que dá

$$1 = \lambda \cdot 1000$$

e

$$\lambda = \frac{b}{2m} = \frac{1}{1000} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}.$$

NOTA: vimos que $[b] = \text{kg/s}$. Logo $[\lambda] = \frac{\text{kg}}{\text{s}} = \text{s}^{-1}$.

EXEMPLO 9

Uma massa de 2 kg está ligada a uma mola cuja constante é de 20 N/m. Supondo que a massa está a ser atuada por uma força periódica dada por $F = F_0 \cdot \cos \omega t = 3 \cdot \cos 2\pi \cdot t$ (para além da força restauradora), determine:

- O período do movimento.
- A amplitude do movimento.

SOLUÇÃO

a) Por comparação obtemos que $F_0 = 3 \text{ N}$ e $\omega = 2\pi$. Mas $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ donde $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \text{ s}$.

b) Sabemos que $A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\frac{b\omega}{m})^2}}$. Como nada é dito quanto à existência de amortecimento podemos admitir que $b = 0 \text{ s}^{-1}$; por outro lado, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{20}{2}} = \sqrt{10} \approx 3,16 \text{ s}^{-1}$ e $\omega = 2\pi$. Assim podemos escrever

$$A = \frac{3/2}{\sqrt{(4\pi^2 - 3,16^2)^2 + (\frac{0 \cdot \omega}{m})^2}} = \frac{3/2}{\sqrt{(4\pi^2 - 3,16^2)^2}} \approx 0,0509 \text{ m}$$

$$= 5,09 \text{ cm}$$

Todos nós já atirámos uma pedra em um lago. No ponto onde a pedra atinge a superfície da água são criadas ondas que se movem a partir do ponto onde a pedra caiu em círculos. Se houver um objeto que flutue podemos verificar que ao passar essas ondas provocam um movimento vertical e horizontal do objeto flutuante em relação à sua posição original (i.e., antes de qualquer onda passar por esse local); contudo, não há qualquer deslocamento líquido para longe ou na direção do ponto onde a pedra atingiu a água. Ou seja, apesar de haver movimento da água quando a onda passa não há transporte dessa água em qualquer direção que se considere.

Podemos observar e detetar ondas todos os dias. Os dois tipos principais de ondas são as ondas mecânicas e as ondas eletromagnéticas. No caso de ondas mecânicas tem que haver um meio físico que permita a propagação dessas ondas; as ondas sonoras ou as ondas numa corda são exemplos de ondas mecânicas. No caso das ondas eletromagnéticas as ondas não requerem um meio para se propagar; alguns exemplos de ondas

eletromagnéticas são a luz visível, as ondas de rádio e os sinais de televisão, os raios x.

O conceito de onda é um conceito abstrato que traduz a propagação de uma perturbação através do espaço ou de um dado meio físico; a propagação e um dado movimento vibratório, quer ele seja o resultado de uma vibração mecânica quer seja o resultado de uma vibração eletromagnética constitui uma onda. Deve ser claro agora que, sendo uma onda uma propagação de um movimento vibratório, ela transporta energia; ou seja, uma onda, qualquer que ela seja, transporta energia ou, dito de outra maneira, uma onda é um veículo de transporte de energia através e um meio ou do espaço.

Nesta disciplina apenas estudaremos ondas mecânicas. Estas ondas podem ser ondas volumétricas ou ondas superficiais. As primeiras propagam-se dentro dos meios físicos; as ondas sonoras ou as ondas sísmicas que se propagam dentro da Terra são exemplos de ondas volumétricas. As segundas propagam-se nas superfícies de separação de diferentes meios físicos; as ondas à superfície do mar (superfície de separação entre as águas do mar e o ar da atmosfera) são exemplo de ondas superficiais. Dentro das ondas volumétricas ainda podemos considerar as ondas longitudinais e as ondas transversais; uma onda longitudinal é caracterizada por, ao propagar-se, produzir uma vibração das partículas por onde passa numa direção paralela à direção de propagação (ver Fig. 48); uma onda transversal é caracterizada por, ao propagar-se, produzir uma vibração das partículas por onde passa numa direção perpendicular à direção de propagação (ver Fig. 49).

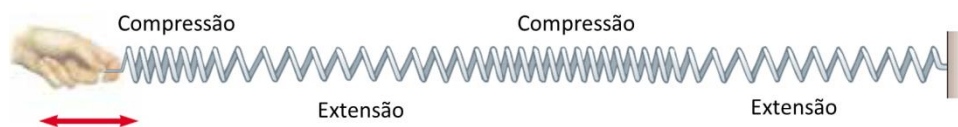


Figura 48

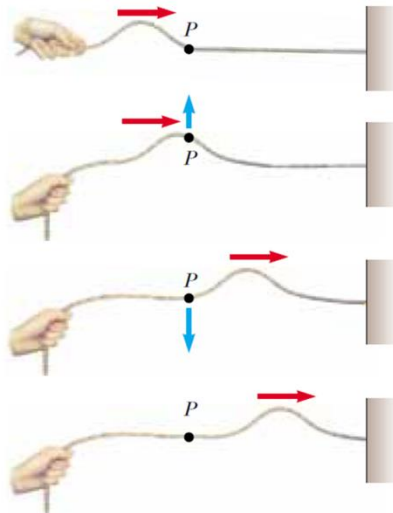


Figura 49

Atentemos agora na Fig. 50. A figura mostra dois instantâneos de uma onda sinusoidal para os instantes t_1 e t_2 .

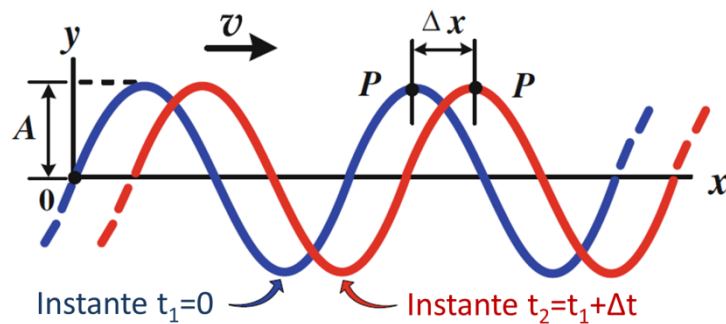


Figura 50

Como se pode ver, a forma da onda não se altera mas o deslocamento y em função da posição x alterou-se durante o intervalo de tempo Δt . Isto quer dizer que o deslocamento de uma partícula por onde uma onda está a passar depende da posição x e do tempo t . Uma onda sinusoidal ou,

também chamada, onda harmónica que se desloca para a direita pode escrever-se como

$$y(x, t) = A \cdot \text{sen} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot (x - v \cdot t) \right)$$

onde y representa o deslocamento da partícula por onde a onda está a passar, A é amplitude da onda, λ é o comprimento de onda, x é a posição da partícula, v é a velocidade da onda e t o tempo. Se a onda estiver a propagar-se para a esquerda a sua forma será

$$y(x, t) = A \cdot \text{sen} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot (x + v \cdot t) \right).$$

À representação de uma onda através da equação anterior também é hábito chamar função de onda. Na Fig. 51 podemos ver o comprimento de onda (c.d.o.) e o período de uma onda harmónica como resultado da representação da onda em função do espaço ($y=f(x)$) e em função do tempo ($y=g(t)$). Ao deslocamento $y(x, t) = A$ chamamos crista da onda e ao deslocamento $y(x, t) = -A$ chamamos vale da onda.

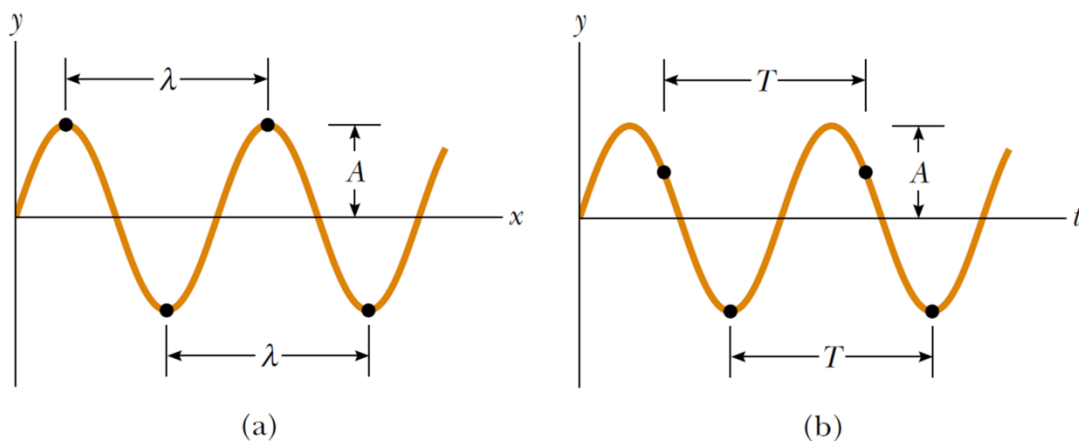


Figura 51

Da Fig. 51 pode concluir-se que a velocidade de propagação de uma onda será dada por

$$v = \frac{\lambda}{T}$$

Como

$$T = \frac{1}{f}$$

podemos escrever que

$$v = \lambda \cdot f \quad \text{ou} \quad \lambda = v \cdot T.$$

Assim a equação de uma onda que se propaga da esquerda para a direita pode escrever-se como

$$\begin{aligned} y(x, t) &= A \cdot \text{sen} \left(2\pi \cdot \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{v \cdot t}{\lambda} \right) \right) \\ &= A \cdot \text{sen} \left(2\pi \cdot \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right). \end{aligned}$$

Vemos que a função $y(t)$ (para um dado instante t) é periódica para $x, x+\lambda, x+2\lambda$, etc.; por outro lado, para uma dada posição x constante, é periódica $t, t+T, t+2T$, etc.

Ao cociente $k=2\pi/\lambda$ dá-se o nome de número de ondas e $\omega = 2\pi f$. Com estas definições a equação de onda pode tomar o seguinte aspecto

$$y(x, t) = A \cdot \text{sen}(k \cdot x - \omega \cdot t).$$

Esta equação mostra que para $x=0$ e $t=0$, $y(t)=0$; claro que isto não é o caso mais geral e pode acontecer que para $x=0$ e $t=0$ $y(t) \neq 0$. Nesse caso a equação de onda tomará o seguinte aspeto mais geral

$$y(x, t) = A \cdot \text{sen}(k \cdot x - \omega \cdot t - \varphi)$$

onde φ é a constante de fase. Sem demonstrar pode dizer-se que toda a função do tipo

$$y(x, t) = f(x \pm v \cdot t)$$

traduz uma onda que se propaga para a direita (quando o sinal de $(x \pm v \cdot t)$ é negativo) e para a esquerda (quando o sinal de $(x \pm v \cdot t)$ é positivo).

EXEMPLO 10

Um impulso que se propaga para a direita ao longo do eixo x pode ser representado pela seguinte função de onda

$$y(x, t) = \frac{2}{(x - 3t)^2 + 1}$$

onde x e y são em cm e t em segundos. Represente a forma da onda para os instantes t = 0, 1 e 2 s.

SOLUÇÃO

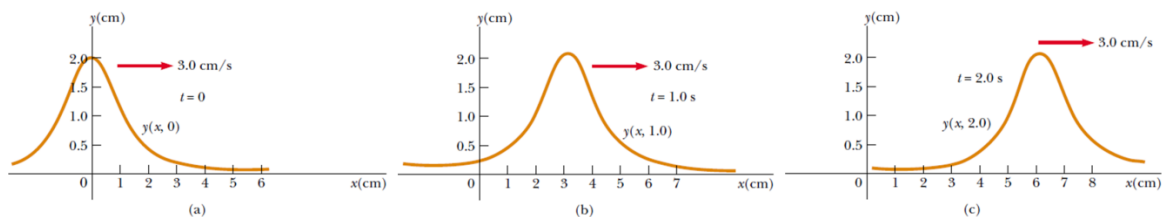
A função é do tipo $y(x, t) = f(x - vt) = f(x - 3t)$ em que a velocidade é 3 (neste caso 3 cm/s) para a direita.

Para t=0 s temos $y(x, 0) = \frac{2}{(x-0)^2+1} = \frac{2}{x^2+1}$

Para t=1 s temos $y(x, 1) = \frac{2}{(x-3)^2+1}$

Para t=2 s temos $y(x, 2) = \frac{2}{(x-6)^2+1}$

Representando y em função de x para cada um dos três instantes obtemos:



EXEMPLO 11

Uma onda sinusoidal (onda harmónica) propagando-se no sentido positivo do eixo x tem uma amplitude de 15 cm, um c.d.o. de 40 cm e uma frequência de 8Hz. O deslocamento da onda para $t=0$ s e $x=0$ cm é também 15 cm. Determine:

- O número de ondas, o período, a frequência angular e a velocidade (ou velocidade de fase) da onda.
- A constante de fase.
- Escreva a expressão da função de onda.

SOLUÇÃO

$$a) \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2 \cdot 3,14}{0,4} = 15,7 \text{ m}^{-1}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{8} = 0,125 \text{ s}$$

$$\omega = 2\pi \cdot 8 = 50,3 \text{ s}^{-1}$$

$$v = \lambda \cdot f = 0,4 \cdot 8 = 3,2 \text{ m/s}$$

b)

$$y(x, t) = A \cdot \text{sen}(k \cdot x - \omega \cdot t - \varphi)$$

Sabemos que para $x=0$ e $t=0$ $y=0,15$ m. Por substituição temos

$$0,15 = 0,15 \cdot \text{sen}(15,7 \cdot 0 - 50,3 \cdot 0 - \varphi)$$

ou seja

$$0,15 = 0,15 \cdot \text{sen}(-\varphi) \quad \Rightarrow \quad \text{sen}(-\varphi) = 1$$

Mas

$$\text{sen}(-\varphi) = -\text{sen}(\varphi)$$

vindo

$$-\text{sen}(\varphi) = 1 \quad \Rightarrow \quad -\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}.$$

Portanto, a equação de onda terá a forma

$$y(x, t) = A \cdot \text{sen}(k \cdot x - \omega \cdot t - \varphi)$$

$$= 0,15 \cdot \text{sen}\left(15,7 \cdot x - 50,3 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Dado que

$$\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \text{cos } x$$

ainda poderíamos escrever

$$y(x, t) = 0,15 \cdot \text{cos}(15,7 \cdot x - 50,3 \cdot t)$$

EXEMPLO 12

Uma onda sinusoidal é criada através de uma perturbação numa extremidade de uma corda com uma frequência de 5 Hz. Sabendo que a amplitude do movimento é de 12 cm e que a velocidade de propagação da onda é de 20 m/s, determine a frequência angular, o número de ondas e escreva a a função de onda.

SOLUÇÃO

$$\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot 5 = 31,4 \text{ s}^{-1}$$

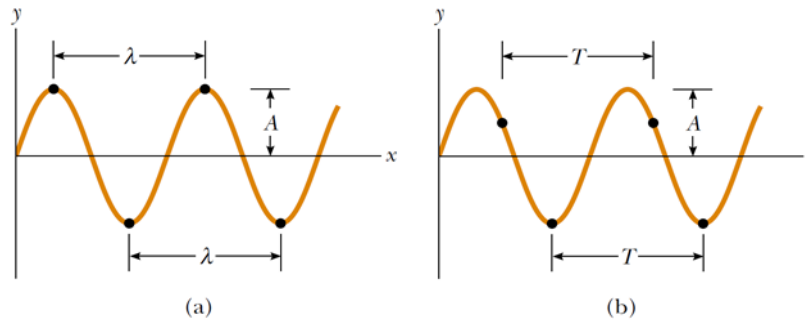
$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{v/f} = \frac{2\pi \cdot f}{v} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 5}{20} 1,57 \text{ m}^{-1}$$

Portanto,

$$y(x, t) = A \cdot \text{sen}(k \cdot x - \omega \cdot t - \varphi)$$

$$y(x, t) = 0,12 \cdot \text{sen}(1,57 \cdot x - 31,4 \cdot t)$$

Porque é que na equação anterior $\varphi = 0$?



Energia de uma onda

Sendo uma onda a propagação de uma vibração e sabendo que a uma dada vibração está associada uma certa quantidade de energia então é natural pensar que uma onda também transporta energia. Aliás, como vimos, a energia associada a uma partícula ligada a uma mola vibra com uma energia dada por

$$E_t = \frac{1}{2}kA^2.$$

Consideremos a Fig. 52. A onda sinusoidal tem um c.d.o. λ . Consideremos, também, o elemento de massa Δm que vai oscilar para baixo e para cima à medida que a onda passa.

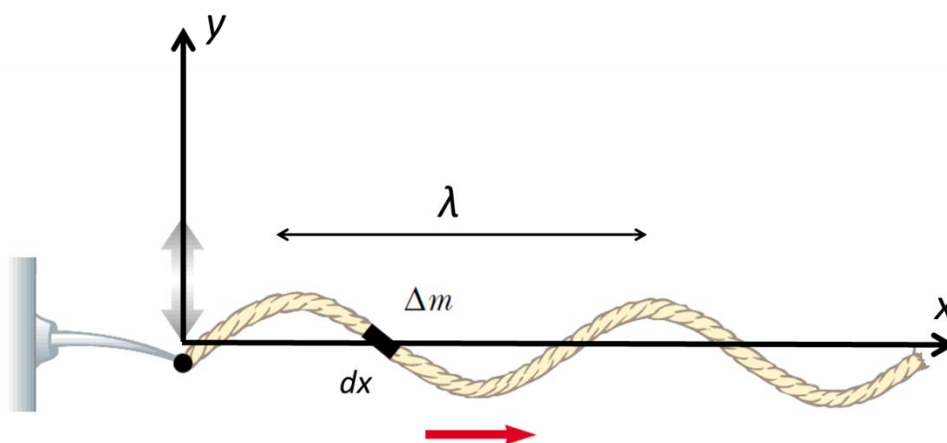


Figura 52

Podemos escrever que a energia elementar associada à massa elementar Δm

$$dE = \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot dm \cdot A^2$$

onde utilizamos $\omega^2 = k/m$ para substituir k . Fazendo $dm = \rho \cdot dx$ obtemos

$$dE = \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot \rho \cdot dx \cdot A^2$$

que integrando para um c.d.o. dá

$$E = \int_0^\lambda dE = \int_0^\lambda \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot \rho \cdot dx \cdot A^2 = \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot \rho \cdot \lambda \cdot A^2 .$$

A potência P associada ao transporte de energia por intermédio da onda será dada por

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot \rho \cdot dx \cdot A^2 \right) = \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot \rho \cdot v \cdot A^2 .$$