

Universidade de Évora - Escola de Ciências e Tecnologia

Mestrado em Matemática e Aplicações

Área de especialização | Matemática e Aplicações

Dissertação

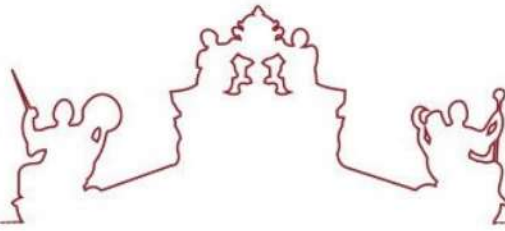
Modelos Unidimensionais para Fluidos Newtonianos e Newtonianos Generalizados

Anilzabel Costa dos Ramos

Orientador | Fernando Manuel Lucas Carapau

Évora 2021





Universidade de Évora - Escola de Ciências e Tecnologia

Mestrado em Matemática e Aplicações

Área de especialização | Matemática e Aplicações

Dissertação

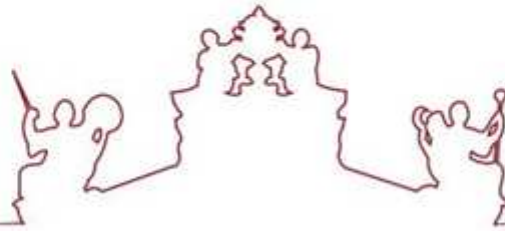
Modelos Unidimensionais para Fluidos Newtonianos e Newtonianos Generalizados

Anilzabel Costa dos Ramos

Orientador | Fernando Manuel Lucas Carapau

Évora 2021





A dissertação foi objeto de apreciação e discussão pública pelo seguinte júri nomeado pelo Director da Escola de Ciências e Tecnologia:

Presidente | Fátima Maria Filipe Pereira (Universidade de Évora)

Vogais | Fernando Manuel Lucas Carapau (Universidade de Évora) (Orientador)

Paulo Manuel de Barros Correia (Universidade de Évora) (Arguente)

Évora 2021



Agradecimentos

Por detrás das nossas realizações pessoais, além de um considerável esforço próprio, esconde-se normalmente um número muito grande de contribuições, apoios, sugestões, comentários ou críticas vindas de muitas pessoas. A sua importância assume no caso presente uma valia tão preciosa que, sem elas, com toda a certeza, teria sido muito difícil chegar a qualquer resultado digno de menção.

Mencionar aqui o nome dessas pessoas constitui um feito de justiça e de homenagem sentida por parte de autora deste trabalho.

Gostaria de agradecer a Deus por todas as alegrias pela saúde e pela força que me concedeu ao meu orientador, o Professor Doutor Fernando Carapau por todo o apoio e também por ter me ajudado durante todo o processo.

Não poderia me esquecer dos demais colegas de trabalho pela atenção e pela força dadas através do companheirismo, sempre que precisei.

Também gostaria de agradecer aos meus pais, António Filipe Teixeira dos Ramos e Ana Rosa Jesus Costa, a minha filha Letícia Nayr da Costa e os meus irmãos por tudo aquilo que me ensinaram e pelos muitos momentos de dificuldades que enfrentamos, mas que não impediram que me dessem todos os apoios necessários, financeiro e humano, desde o Ensino Pré-escolar.

Muito obrigado a todos,

Anilzabel Costa dos Ramos

Resumo

Este trabalho de dissertação tem como objectivo o desenvolvimento e estudo de modelos unidimensionais para o escoamento de um fluido com base na teoria de Cosserat, também conhecida pela teoria dos directores. A base desta teoria relativa à dinâmica dos fluidos é semelhante à que se usa no estudo de vigas em Mecânica dos Sólidos, ver por exemplo os trabalhos [4, 5]. Um modelo tridimensional associado ao escoamento de fluido Newtoniano, ou uma sua generalização onde a viscosidade depende da taxa de cisalhamento, tal dependência do tipo lei de potência, é um modelo complexo para estudar em termos de optimização computacional, o que em muitas situações relevantes torna-se inviável. Para simplificar o modelo tridimensional e como alternativa aos modelos clássicos unidimensionais, usaremos a teoria de Cosserat relacionada com a dinâmica dos fluidos para aproximar o campo de velocidades e assim obter um sistema unidimensional constituído por uma equação diferencial ordinária ou parcial, dependendo apenas do tempo e de uma única variável de espaço. A partir deste sistema de redução, obtemos uma equação para o gradiente de pressão média dependendo do caudal volumétrico, número de Womersley e do índice de fluxo no caso de um fluido Newtoniano generalizado, sobre uma secção finita da geometria do domínio em estudo. No nosso trabalho a geometria em estudo vai ser um tubo de secção circular com raio constante e não constante ao longo do escoamento simétrico relativo ao eixo de simetria. A atenção é focada em algumas simulações numéricas para gradiente de pressão média constante e não constante usando um método Runge-Kutta e na análise de fluxos perturbados. Em particular, para certos dados específicos, podemos obter informações sobre o caudal volumétrico e, conseqüentemente, podemos ilustrar o campo de velocidade tridimensional na secção transversal circular do tubo. Além disso, comparamos a solução exata tridimensional estacionária com a solução unidimensional correspondente obtida pela teoria de Cosserat. Este trabalho de dissertação tem por base os trabalhos [1, 2, 3].

Palavras-chave: Fluidos Newtonianos, Fluidos Newtonianos Generalizados, Teoria de Cosserat, Modelos Unidimensionais.

Abstract

One-dimensional Models for Newtonian and Generalized Newtonian Fluids

This dissertation work aims to develop and study one-dimensional models for the flow of a fluid based on the Cosserat theory, also known by the theory of directors. The basis of this theory on fluid dynamics is similar to that used in the study of beams in Solid Mechanics, see for example the works [4, 5]. A three-dimensional model associated with the flow of Newtonian fluid, or a generalization where viscosity depends on the shear rate, such dependence on the power law type, is a complex model to study in terms of computational optimization, which in many relevant situations becomes if not viable. To simplify the three-dimensional model and as an alternative to classic one-dimensional models, we will use the Cosserat theory related to fluid dynamics to approximate the velocity field and thus obtain a one-dimensional system consisting of an ordinary or partial differential equation, depending only on time and of a single space variable. From this reduction system, we obtain an equation for the average pressure gradient depending on the volumetric flow, Womersley number and the flow index in the case of a generalized Newtonian fluid, over a finite section of the geometry of the domain under study. In our work the geometry under study will be a tube of circular section with constant and non-constant radius along the symmetrical flow relative to the axis of symmetry. Attention is focused on some numerical simulations for constant and non-constant mean pressure gradient using a Runge-Kutta method and on the analysis of disturbed flows. In particular, for certain specific data, we can obtain information on the volumetric flow and, consequently, we can illustrate the three-dimensional velocity field in the circular cross section of the tube. In addition, we compared the exact stationary three-dimensional solution with the corresponding one-dimensional solution obtained by Cosserat's theory. This dissertation work is based on the works [1, 2, 3].

Keywords: Newtonian fluids, Generalized Newtonian fluid, Cosserat Theory, One-dimensional Models.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Mecânica dos Fluidos	5
2.1	Algumas noções de cinemática	5
2.2	Fluidos Newtonianos	10
2.3	Fluidos Newtonianos Generalizados	11
3	Teoria de Cosserat	15
3.1	Movimento axissimétrico de um fluido	16
4	Aplicações da Teoria Cosserat aos Fluidos	25
4.1	Fluido Newtoniano	25
4.1.1	A dimensionalização	28
4.1.2	Propriedades gerais para fluxo estacionário	29
4.1.3	Resultados para um fluido Newtoniano em um tubo rectilíneo uniforme	32
4.2	Fluido Newtoniano generalizado	33
4.2.1	Modelo de lei de potência	34
4.2.2	A dimensionalização	35
4.2.3	Resultados para um fluido Newtoniano generalizado em um tubo rectilíneo uniforme	36
4.2.4	Propriedades gerais para fluxo estacionário	42
5	Conclusões e Trabalho de Futuro	47

Lista de Figuras

2.1	Modelo de lei do potência: (a) viscosidade de desbaste de cisalhamento e (b) viscosidade de espessamento de cisalhamento. Ambos os casos com valor de $k = 0.42$ (ver por exemplo [16, 17]) com diferentes valores de índice de fluxo.	13
3.1	Domínio do fluido Ω com as componentes do vector de tração superficial τ_1, τ_2 e p_e . Γ_w representa o limite da parede lateral e Γ_1, Γ_2 são os limites transversais proximal e distal, respectivamente.	17
4.1	Fluxo volumétrico com $Q(0) = 0$ em um tubo rectilíneo uniforme: solução tridimensional exacta (4.49) (linha a pontos) e solução de Cosserat (4.50) (linha escura). . .	33
4.2	Fluxo não estacionário dado por (4.30) com $\hat{G} = 1$, $\hat{Q}(0) = 0$ e $\mathcal{W}_o = 0.8$ ao longo do tempo.	34
4.3	Campo de velocidade tridimensional (3.40) em que a taxa de fluxo de volume é obtida por (4.30) com gradiente de pressão média $\hat{G}(\hat{t}) = \hat{G} = 1$, $\hat{Q}(0) = 0$, $\mathcal{W}_o = 0.8$ com raio constante ao longo do escoamento. Parâmetros de tempo: $\hat{t} = 0.1, \hat{t} = 0.2$	34
4.4	Campo de velocidade tridimensional (3.40) em que a taxa de fluxo de volume é obtida por (4.30) com gradiente de pressão média $\hat{G}(\hat{t}) = \hat{G} = 1$, $\hat{Q}(0) = 0$, $\mathcal{W}_o = 0.8$ com raio constante ao longo do escoamento. Parâmetros de tempo: $\hat{t} = 0.3, \hat{t} = 0.6$	35
4.5	Gradiente de pressão média a depender do tempo.	36
4.6	Fluxo não estacionário dado por (4.30) com gradiente de pressão média (4.51), $\hat{Q}(0) = 0$ e $\mathcal{W}_o = 0.8$ ao longo do tempo.	37
4.7	Campo de velocidade tridimensional (3.40) em que a taxa de fluxo de volume é obtida por (4.30) com gradiente de pressão média (4.51), $\hat{Q}(0) = 0$, $\mathcal{W}_o = 0.8$ com raio constante ao longo do escoamento. Parâmetros de tempo: $\hat{t} = 0.2, \hat{t} = 0.5$	37
4.8	Campo de velocidade tridimensional (3.40) em que a taxa de fluxo de volume é obtida por (4.30) com gradiente de pressão média (4.51), $\hat{Q}(0) = 0$, $\mathcal{W}_o = 0.8$ com raio constante ao longo do escoamento. Parâmetros de tempo: $\hat{t} = 1.0, \hat{t} = 2.0$	38

4.9	Comparação entre a solução exacta (4.58) e a solução aproximada (4.57) para a taxa de fluxo constante em função do índice de fluxo com pequeno gradiente de pressão média $\hat{G} = 0.5$	38
4.10	Comparação entre a solução exacta (4.58) e a solução aproximada (4.57) para a taxa de fluxo constante em função do índice de fluxo com gradiente de pressão média $\hat{G} = 1.8$	39
4.11	Taxa de fluxo volumétrico não estacionário (4.56) com gradiente de pressão média constante $\hat{G}(\hat{t}) = \hat{G} = 1$ em que $\hat{Q}(0) = 0$, $\mathcal{W}_o = (0.2, 0.4, 0.6, 0.8)$ para fluido de diluição de cisalhamento.	40
4.12	Taxa de fluxo volumétrico instável (4.56) com gradiente de pressão média constante $\hat{G}(\hat{t}) = \hat{G} = 1$ em que $\hat{Q}(0) = 0$, $\mathcal{W}_o = (0.2, 0.4, 0.6, 0.8)$ para fluido espessante.	40
4.13	Campo de velocidade tridimensional (3.40) onde o fluxo de volume é obtido por (4.56) com gradiente de pressão média $\hat{G}(\hat{t}) = \hat{G} = 1$, $\hat{Q}(0) = 0$, $\mathcal{W}_o = 0.8$ e $n = 0.75$ (fluido de diluição de cisalhamento). Parâmetros de tempo: $\hat{t} = 0.1, \hat{t} = 0.2$	41
4.14	Campo de velocidade tridimensional (3.40) onde o fluxo de volume é obtido por (4.56) com gradiente de pressão média $\hat{G}(\hat{t}) = \hat{G} = 1$, $\hat{Q}(0) = 0$, $\mathcal{W}_o = 0.8$ e $n = 0.75$ (fluido de diluição de cisalhamento). Parâmetros de tempo: $\hat{t} = 0.3, \hat{t} = 0.6$	41
4.15	Campo de velocidade tridimensional (3.40) onde o fluxo de volume é obtido por (4.56) com gradiente de pressão média $\hat{G}(\hat{t}) = \hat{G} = 1$, $\hat{Q}(0) = 0$, $\mathcal{W}_o = 0.8$ e $n = 1.25$ (fluido de espessamento). Parâmetros de tempo: $\hat{t} = 0.1, \hat{t} = 0.2$	42
4.16	Campo de velocidade tridimensional (3.40) onde o fluxo de volume é obtido por (4.56) com gradiente de pressão média $\hat{G}(\hat{t}) = \hat{G} = 1$, $\hat{Q}(0) = 0$, $\mathcal{W}_o = 0.8$ e $n = 1.25$ (fluido de espessamento). Parâmetros de tempo: $\hat{t} = 0.3, \hat{t} = 0.6$	42
4.17	Fluxo não estacionário (4.56) com gradiente de pressão média não constante (4.51) onde $\hat{Q}(0) = 0$ e $\mathcal{W}_o = (0.2, 0.4, 0.6, 0.8)$ para fluido de desbaste.	43
4.18	Fluxo não estacionário (4.56) com gradiente de pressão média não constante (4.51) onde $\hat{Q}(0) = 0$ e $\mathcal{W}_o = (0.2, 0.4, 0.6, 0.8)$ para fluido de espessamento.	43
4.19	Campo de velocidade tridimensional (3.40) onde o fluxo de volume é obtido por (4.56) com gradiente de pressão média (4.51), $\hat{Q}(0) = 0$, $\mathcal{W}_o = 0.8$ e $n = 0.75$ (fluido de diluição de cisalhamento). Parâmetros de tempo: $\hat{t} = 0.2, \hat{t} = 0.5$	44

4.20	Campo de velocidade tridimensional (3.40) onde o fluxo de volume é obtido por (4.56) com gradiente de pressão média (4.51), $\hat{Q}(0) = 0$, $\mathcal{W}_o = 0.8$ e $n = 0.75$ (fluido de diluição de cisalhamento). Parâmetros de tempo: $\hat{t} = 1, \hat{t} = 2$	44
4.21	Campo de velocidade tridimensional (3.40) onde o fluxo de volume é obtido por (4.56) com gradiente de pressão média (4.51), $\hat{Q}(0) = 0$, $\mathcal{W}_o = 0.8$ e $n = 1.25$ (fluido de espessamento). Parâmetros de tempo: $\hat{t} = 0.2, \hat{t} = 0.5$	45
4.22	Campo de velocidade tridimensional (3.40) onde o fluxo de volume é obtido por (4.56) com gradiente de pressão média (4.51), $\hat{Q}(0) = 0$, $\mathcal{W}_o = 0.8$ e $n = 1.25$ (fluido de espessamento). Parâmetros de tempo: $\hat{t} = 1, \hat{t} = 2$	45
4.23	Perturbação multiplicativa do gradiente de pressão média (4.51), com magnitude $\varepsilon = 0.1$	46

Lista de Tabelas

3.1	Resumo das constantes $a_{\alpha\beta\gamma}, b_{\alpha\beta\gamma}, c_{\alpha\beta\gamma}$ e $d_{\alpha\beta\gamma}$	22
-----	---	----

Capítulo 1

Introdução

Em geral, os modelos clássicos unidimensionais podem ser obtidos, impondo hipóteses adicionais e por consequência simplificando a integração das equações da conservação de massa e do momento linear, sobre a secção transversal circular do tubo. Neste trabalho de dissertação, vamos fornecer uma abordagem alternativa para os modelos unidimensionais clássicos usando a teoria de Cosserat (também chamada teoria dos diretores) relativa à dinâmica dos fluidos. A base teórica desta abordagem é semelhante àquela usada para estudos das vigas em mecânica dos sólidos, ver [4, 5]. A relevância de usar esta teoria alternativa não está em considerar as equações unidimensionais como aproximações do modelo tridimensional, mas sim no seu uso como teorias independentes para prever algumas das principais propriedades dos modelos tridimensional. Algumas características importantes da teoria de Cosserat, são:

- (i) a teoria dos diretores incorpora todas as componentes vetoriais da equação do momento linear;
- (ii) é uma teoria hierárquica, tornando possível melhorar a precisão do modelo;
- (iii) o sistema de equações é fechado em cada ordem e, portanto, desnecessário fazer suposições sobre os termos não-lineares e viscosos;
- (iv) invariância sob um movimento rígido do corpo superposto é satisfeita em cada ordem;
- (v) a tensão de cisalhamento da parede entra diretamente como uma variável dependente na formulação;
- (vi) a teoria dos diretores tem-se mostrado útil para modelar o fluxo em tubos curvos, considerando muitos mais diretores do que no caso de um tubo rectilíneo.

De seguida, vamos considerar o sistema tridimensional das equações que governam o movimento de um fluido incompressível, dado por

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \end{cases} \quad em \Omega \times I, \quad (1.1)$$

com a condição inicial

$$\mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{v}_0(x) \quad em \Omega,$$

e a condição de fronteira

$$\mathbf{v}(x, t) = 0 \quad sobre \Gamma \times I,$$

onde $\Omega \times I$ é a região do espaço-tempo, Ω é o domínio tridimensional que é um tubo com secção transversal circular ocupada pelo fluido, I é o intervalo de tempo e Γ é a parede lateral do domínio. Aqui, \mathbf{v} é o campo tridimensional da velocidade do fluido, \mathbf{T} é o tensor da tensão de Cauchy, \mathbf{f} é a força do corpo externo agindo sobre o fluido e ρ é a densidade de massa constante. A equação (1.1)₁ representa o equilíbrio do momento linear e (1.1)₂ é a condição de incompressibilidade.

Aqui, consideramos o campo de velocidade dado pela teoria de Cosserat, ou seja,

$$\mathbf{v} = v(z, t) + \sum_{m=1}^k \lambda_m(x_1, x_2) \mathbf{w}_m(z, t),$$

onde v representa a velocidade ao longo do eixo de simetria z no tempo t , $\lambda_m(x_1, x_2)$ são as funções de base com ordem k , $\mathbf{w}_m(z, t)$ são as velocidades dos diretores e (x_1, x_2, z) são as coordenadas cartesianas do espaço \mathbb{R}^3 . Quando usamos a teoria dos diretores, o sistema tridimensional de equações que governam o escoamento do fluido é substituído por um sistema que depende apenas de uma única variável de espaço e de tempo. A partir deste novo sistema, obtemos para um modelo específico a relação entre gradiente de pressão médio (ou queda) e taxa de fluxo de volume sobre uma secção finita do domínio Ω . Através deste trabalho, aplicamos a teoria dos diretores a diferentes modelos e diferentes geometrias com um tensor de tensão de Cauchy específico \mathbf{T} para fluidos Newtonianos e, ainda, para Newtonianos generalizados (que é um fluido não-Newtoniano), com viscosidade de redução de cisalhamento.

O plano desta dissertação é o seguinte. O capítulo 2 contém uma revisão de conceitos importantes da mecânica dos fluidos, incluindo a teoria básica, bem como resultados e modelos necessário para formular nossos problemas físicos. O capítulo 3 é dedicado à teoria de Cosserat. Aqui, apresentamos de forma resumida da teoria Cosserat para fluxos de fluidos e aplicamos essa teoria ao fluxo axial simétrico de um fluido incompressível dentro de uma superfície de revolução com secção transversal circular. No

capítulo 4, apresentamos algumas aplicações da teoria de Cosserat para fluidos Newtonianos e Newtonianos generalizados. Finalmente, no capítulo 5, tiramos as conclusões e delineamos as questões que permanecem em aberto, dando novas direcções para o trabalho futuro neste assunto.

Capítulo 2

Mecânica dos Fluidos

Neste capítulo, apresentamos uma visão geral dos conceitos básicos em mecânica de fluidos. Estamos interessados tanto em fluidos homogêneos e incompressíveis newtonianos e não-newtonianos.

2.1 Algumas noções de cinemática

Esta secção é baseada em Marvern [6], Galdi [7], Astarita and Marrucci [8], e Coleman et al. [9]. O estudo do movimento e deformação dos corpos é o objetivo central da mecânica contínua. O corpo \mathcal{B} é um conjunto abstracto que consiste em pontos materiais \mathbf{p} , geralmente chamados de partículas. Nós assumimos que uma função suave para uma \mathcal{A} existe, mapeamento \mathcal{B} em uma região do espaço euclidiano tridimensional \mathcal{E} ,

$$\mathbf{X} = \mathcal{A}(\mathbf{p}), \quad (2.1)$$

onde \mathbf{X} denota o lugar em \mathcal{E} ocupado pela partícula \mathbf{p} . A função \mathcal{A} é chamada de configuração de referência. Em seguida, assumimos que existe uma transformação suave do espaço euclidiano \mathcal{E} para si, chamada deformação, de tal forma que

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}), \quad (2.2)$$

onde \mathbf{x} denota o lugar ocupado pela partícula \mathbf{p} identificado por sua posição \mathbf{X} na configuração de referência. O gradiente de deformação

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \nabla\chi(\mathbf{X}), \quad (2.3)$$

desempenha um papel fundamental na mecânica contínua.

O movimento de um corpo é uma família de deformações de um parâmetro

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t), \quad (2.4)$$

onde o parâmetro real t denota o tempo. A cada instante t a função $\boldsymbol{\chi}$ é invertível, ou seja

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x}, t), \quad (2.5)$$

de modo que duas partículas distintas não possam ocupar a mesma posição no espaço. Este requisito é o Princípio da Impenetrabilidade da Matéria. Agora, podemos distinguir duas descrições na mecânica contínua. Ou estudamos o movimento de cada partícula no espaço euclidiano durante o mesmo intervalo de tempo I (*descrição material* ou *descrição Lagrangiana*), ou fixamos um ponto no espaço euclidiano e estudamos a passagem de partículas através do ponto x (*descrição espacial* ou *descrição Euleriana*). Como de costume, na mecânica dos fluidos, preferimos a abordagem euleriana.

A velocidade euleriana é a derivada temporal da função $\boldsymbol{\chi}$, ou seja,

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \left. \frac{d}{dt} \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t) \right|_{\mathbf{X}=\boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x}, t)} \quad (2.6)$$

e a aceleração euleriana é a derivada do tempo material da velocidade, i.e.

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{d}{dt} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \quad (2.7)$$

O termo $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ é a aceleração local e fornece a taxa de tempo local de mudança da velocidade na vizinhança de uma posição fixa no espaço, enquanto $\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}$ é a aceleração convectiva, que prevê como a velocidade em uma vizinhança de uma partícula muda à medida que ela se move para um local tendo uma velocidade diferente no mesmo instante de tempo.

O gradiente de velocidade \mathbf{L} é o tensor

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \quad (2.8)$$

Frequentemente usaremos sua parte simétrica \mathbf{D} , chamada também de taxa de tensor de deformação, e a parte simétrica \mathbf{W} , chamada também de spin tensor,

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T), \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T), \quad (2.9)$$

onde \mathbf{L}^T a transposta de \mathbf{L} .

Em seguida, lembramos as equações fundamentais que devem ser satisfeitas durante o movimento de um corpo, que são representativas de muitos princípios físicos fundamentais como a conservação da massa e do momento linear. As declarações de balanço

para o momento linear presumem um referencial inercial, uma vez que são derivadas assumindo que a lei de Newton do movimento é válida. Se a lei de Newton se mantiver em um referencial, eles também se mantêm em qualquer outro referencial que esteja traduzindo com velocidade constante em relação a ele. Isso é chamado de *Princípio de Inércia* e todos esses quadros de referência são chamados *referenciais inerciais* ou *referenciais newtonianos*.

Vamos lembrar que

$$\nabla \cdot (\Phi \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \nabla \Phi + \Phi \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2.10)$$

onde $\Phi = \Phi(\mathbf{x}, t)$ é uma grandeza física euleriana.

Em seguida, apresentamos as formas integral e diferencial das leis de equilíbrio, sendo esta última obtida da primeira usando o *Teorema de Transporte de Reynolds*. Usando a condição (2.10) este teorema diz-nos que

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \Phi = \int_{V_t} \left(\frac{d}{dt} \Phi + \Phi \nabla \cdot \mathbf{v} \right) = \int_{V_t} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Phi + \nabla \cdot (\Phi \mathbf{v}) \right), \quad (2.11)$$

e pelo *Teorema da divergência*

$$\int_{V_t} \nabla \cdot \Phi = \int_{\partial V_t} \Phi \cdot \mathbf{n}, \quad (2.12)$$

a expressão prévia (2.11) fica

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \Phi = \int_{V_t} \frac{\partial}{\partial t} \Phi + \int_{\partial V_t} \Phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \quad (2.13)$$

onde V_t é um volume de material no momento t , \mathbf{n} é o vector unitário normal exterior em ∂V_t .

Vamos considerar $\rho = \rho(x, t)$ a densidade Euleriana do corpo \mathcal{B} . A massa $m(V_t)$ contida em um volume de material no momento t , é dada por

$$m(V_t) = \int_{V_t} \rho. \quad (2.14)$$

O princípio fundamental de conservação da massa afirma que, em qualquer movimento, a massa contida em um volume material arbitrário é independente do tempo. Em outras palavras, durante qualquer movimento de \mathcal{B} , não há ganho ou perda de matéria dentro de um volume material. Este postulado é equivalente à seguinte condição

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho = 0, \quad \forall V_t \text{ in } \mathcal{B}, \quad t \geq 0. \quad (2.15)$$

Usando as condições (2.11) e (2.15) obtemos

$$\int_{V_t} \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) = 0. \quad (2.16)$$

Ao assumir que os termos do integral são contínuos, a arbitrariedade do volume material permite-nos escrever a *equação de continuidade* na forma diferencial, i.e.,

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0, \quad (2.17)$$

ou equivalente

$$\frac{d}{dt}\rho + \rho\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.18)$$

usando (2.10) e a definição da derivada de tempo material.

O princípio da conservação do momento linear afirma que a taxa de tempo de variação do momento linear total associado às partículas dentro de um volume de material arbitrário V_t é igual à força resultante no volume. Este último consiste de duas contribuições, uma devido à força do corpo e a outra devido à força de contacto atuando na superfície ∂V_t . O princípio da conservação do momento linear é equivalente à seguinte condição

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho\mathbf{v} = \int_{V_t} \rho\mathbf{f} + \int_{\partial V_t} \mathbf{t}, \quad (2.19)$$

para todo o volume de material V_t e todos os tempos t . Na igualdade anterior (2.19), $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ é a força externa do corpo por unidade de massa atuando em \mathcal{B} , e o vetor de tensão $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t; \mathbf{n})$ é chamado de força do corpo de superfície por unidade de área, com \mathbf{n} a unidade externa normal no ponto \mathbf{x} na superfície ∂V_t . Agora, usando o *Teorema do Tensor de Tensão de Cauchy*, existe um campo tensorial simétrico continuamente diferenciável, independente de \mathbf{n} , chamado tensor de tensão de Cauchy, $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$, tal que

$$\mathbf{t} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}. \quad (2.20)$$

Usando (2.20), (2.19) e (2.12), obtemos

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho\mathbf{v} = \int_{V_t} (\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho\mathbf{f}). \quad (2.21)$$

Além disso, aplicando a condição (2.11), nós deduzimos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho\mathbf{v} &= \int_{V_t} \left(\frac{d}{dt}(\rho\mathbf{v}) + \rho\mathbf{v}\nabla \cdot \mathbf{v} \right) \\ &= \int_{V_t} \left(\frac{d\rho}{dt}\mathbf{v} + \frac{d\mathbf{v}}{dt}\rho + \rho\mathbf{v}\nabla \cdot \mathbf{v} \right). \end{aligned} \quad (2.22)$$

No entanto, de (2.18) temos

$$\frac{d\rho}{dt}\mathbf{v} + \rho\mathbf{v}\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.23)$$

e concluímos que

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \mathbf{v} = \int_{V_t} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (2.24)$$

Agora, usando (2.21) e (2.24), obtemos

$$\int_{V_t} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \int_{V_t} (\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{f}). \quad (2.25)$$

A arbitrariedade de V_t e a hipótese de que os termos sob as integrais são contínuos, obtemos a seguinte forma diferencial local da equação de equilíbrio de momento linear:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{f}. \quad (2.26)$$

Em um fluido homogêneo e incompressível, a densidade ρ é constante em todo lugar (espaço e tempo) e a equação (2.18) reduz-se a

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

e isso significa que todos os movimentos de um fluido incompressível são *isocóricos*. Vale a pena notar que um fluido pode executar movimentos *isocóricos* sem ser incompressível. De facto, de (2.17) (ou (2.18)), isocoricidade só implica

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0, \quad (2.27)$$

e ρ não é constante.

Levando em conta as afirmações anteriores, o sistema de equações que governam um movimento fluido homogêneo incompressível é dado por

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \end{cases} \quad \text{em } \Omega \times I, \quad (2.28)$$

onde $\Omega \times I$ é a região do espaço-tempo e Ω é um dado domínio espacial fixo suficientemente regular, subconjunto do espaço \mathbb{R}^n , ($n = 2, 3$). Além disso, podemos decompor o tensor de tensão de Cauchy em duas partes, veja por exemplo Truesdell [10],

$$\mathbf{T} = -\pi \mathbf{I} + \mathbf{T}_E, \quad (2.29)$$

onde a função escalar $\pi = \pi(x, t)$ é a pressão e \mathbf{T}_E é o tensor de tensão extra.

Além disso, precisamos fornecer as condições iniciais e de fronteira apropriadas para fechar o sistema (2.28). Quanto à condição inicial, precisamos prescrever o status inicial da velocidade do fluido, por exemplo

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \quad \text{em } \Omega. \quad (2.30)$$

Em seguida, apresentamos alguns modelos de fluidos que serão estudados ao longo do trabalho. Além disso, discutiremos as condições de fronteira.

2.2 Fluidos Newtonianos

Para um fluido Newtoniano linearmente viscoso, o tensor de tensão extra em (2.29) reduz-se a

$$\mathbf{T}_E = 2\mu\mathbf{D}, \quad (2.31)$$

onde \mathbf{D} é a parte simétrica do gradiente de velocidade (ver (2.9)) e μ é a viscosidade constante, o que significa que não depende do fluxo em si. Então, o tensor de tensão de Cauchy fica

$$\mathbf{T} = -\pi\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}. \quad (2.32)$$

De (2.32) e (2.28) obtemos as equações de Navier-Stokes incompressíveis

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{v} = \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \end{cases} \quad em \Omega \times I, \quad (2.33)$$

onde $\nu = \mu/\rho$ é a viscosidade cinemática e $p = \pi/\rho$ (onde π é a pressão hidrostática). Nós completamos o sistema (2.33) pela condição inicial (2.30) e por condições de fronteira apropriadas. Então, o problema de determinar os campos de velocidade e pressão das equações de movimento correspondentes (2.33) é fechado.

De seguida, discutiremos algumas propriedades de escala das equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis com o objectivo de introduzir o parâmetro adimensional de *Reynolds* que mede os efeitos relativos de inércia e viscosidade no fluxo. Para um dado problema, d é o *comprimento característico* e U é a *velocidade característica*. Então, podemos medir as quantidades \mathbf{v} , \mathbf{x} e t como frações dessas escalas, alterando variáveis e introduzindo as seguintes quantidades adimensionais

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v}}{U}, \quad \mathbf{x}' = \frac{\mathbf{x}}{d}, \quad t' = \frac{Ut}{d}. \quad (2.34)$$

Agora, de (2.33) e usando as condições (2.34), obtemos as equações de Navier-Stokes para um fluxo incompressível em variáveis adimensionais

$$\begin{cases} \mathcal{R}_e \left(\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'} + \mathbf{v}' \cdot \nabla \mathbf{v}' \right) + \nabla p' - \Delta \mathbf{v}' = \mathbf{f}', \\ \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0, \end{cases} \quad em \Omega \times I, \quad (2.35)$$

onde

$$p' = \frac{pd}{\nu U}, \quad \mathbf{f}' = \frac{d^2 \mathbf{f}}{\nu U}, \quad \mathcal{R}_e = \frac{dU}{\nu}.$$

O número adimensional \mathcal{R}_e é chamado de *o número de Reynolds*. Para $\mathcal{R}_e = 0$, o sistema de equações (2.35) tornar-se linear e recebe o nome de *sistema Stokes*¹, que é usado para descrever um movimento muito lento.

2.3 Fluidos Newtonianos Generalizados

Existem vários fluidos não-Newtonianos associados a específicos modelos físicos, mas estamos interessados apenas nos fluidos Newtonianos Generalizados, os quais se obtém modificando de forma empírica o termo viscoso que deixa de ser constante e passa a depender de algo com base em observações experimentais, por exemplo pode depender da pressão, da temperatura ou da taxa de cisalhamento.

Considerando o sistema (2.28) onde o tensor de tensão de Cauchy (2.32) é dado por

$$\mathbf{T} = -\pi\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}(\mathbf{v}).$$

Para muitos fluidos reais, a viscosidade do fluxo muda com a intensidade da taxa de deformação $|\mathbf{D}(\mathbf{v})|$, ver por exemplo [11], onde $|\mathbf{D}(\mathbf{v})|$ é dado por

$$|\mathbf{D}(\mathbf{v})| = \left(\sum_{\ell,m=1}^3 D_{\ell m}(\mathbf{v})D_{m\ell}(\mathbf{v}) \right)^{1/2}. \quad (2.36)$$

Essa mudança da viscosidade pode ser muito intensa em alguns fluidos e não pode ser ignorada. A maneira mais simples de modelar esse comportamento é introduzir (2.32) a viscosidade em função da taxa de cisalhamento

$$\mu(|\dot{\gamma}|) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+,$$

onde $\dot{\gamma}$ é a taxa de cisalhamento.

Portanto, o tensor de tensão de Cauchy (2.32) toma a forma

$$\mathbf{T} = -\pi\mathbf{I} + 2\mu(|\dot{\gamma}|)\mathbf{D}(\mathbf{v}), \quad (2.37)$$

A classe de fluidos não-newtonianos satisfazendo a condição (2.37) são chamados de *fluidos Newtonianos generalizados* (ou *quase-Newtonian*). Em geral, podemos dividir os *fluidos Newtonianos generalizados* em duas subclasses: por fluidos com a característica de *desbaste de cisalhamento* (ou pseudoplástico) onde a viscosidade diminui quando a

¹Quando nos referimos a um *fluxo de Stokes* queremos dizer a solução de um fluxo estacionário de um fluido Navier-Stokes em que o termo de inércia (não linear) foi ignorado. Em contraste, devemos nos referir ao fluxo estacionário de um fluido não-Newtoniano, no qual o termo de inércia é ignorado como um *Fluxo Rastejante*.

taxa de cisalhamento aumenta; e por fluidos com a característica de *espessamento de cisalhamento* (ou dilatante) para o qual a viscosidade aumenta com a taxa de cisalhamento crescente. O comportamento de *desbaste de cisalhamento* é comum ser observado em fluidos reais, por exemplo, suspensões, emulsões, sangue, fluidos poliméricos (ver por exemplo [12, 13, 14]). O comportamento de *espessamento de cisalhamento* é menos comum, embora possa ser observado em suspensões altamente densas, por exemplo, amido, gesso e alguns fluidos poliméricos incomuns (ver por exemplo [12, 13, 14]).

Em seguida, apresentaremos a *função viscosidade* para alguns modelos de *fluidos Newtonianos generalizados*.

Modelo de lei de potência

Quando a *função viscosidade* em (2.37) é dada por

$$\mu(|\dot{\gamma}|) = k|\dot{\gamma}|^{n-1}, \quad (2.38)$$

temos o que se chama um modelo de lei de potência (ver por exemplo [15]). Onde, os parâmetros k e n são chamados de consistência e índice de fluxo (constantes positivas), respectivamente.

Se $n = 1$ em (2.38), então o tensor de tensão de Cauchy (2.37) corresponde ao comportamento Newtoniano com $\mu = k$. Se $n < 1$, nós obtemos

$$\lim_{|\dot{\gamma}| \rightarrow \infty} \mu(|\dot{\gamma}|) = 0, \quad \lim_{|\dot{\gamma}| \rightarrow 0} \mu(|\dot{\gamma}|) = \infty,$$

e temos um fluido de *desbaste de cisalhamento* (viscosidade diminui com o aumento da taxa de cisalhamento), ver Figura 2.1. Além disso, se $n > 1$,

$$\lim_{|\dot{\gamma}| \rightarrow \infty} \mu(|\dot{\gamma}|) = \infty, \quad \lim_{|\dot{\gamma}| \rightarrow 0} \mu(|\dot{\gamma}|) = 0,$$

nós temos um fluido com o comportamento de *espessamento de cisalhamento* (viscosidade aumenta com a taxa de cisalhamento), ver Figura 2.1.

Este modelo é muito simples, mas tem algumas fortes limitações (ver e.g. [12, 13, 14]). Verificou-se que a aplicabilidade do modelo de lei de potência é limitada a um pequeno intervalo de taxas de cisalhamento e não converge para a viscosidade assintótica a baixas e altas taxas de cisalhamento. A baixa taxa de cisalhamento (μ_0) e a alta taxa de cisalhamento (μ_∞) são as viscosidades aparentes assintóticas como $|\dot{\gamma}| \rightarrow 0$ e $|\dot{\gamma}| \rightarrow \infty$, respectivamente. Por exemplo, para um fluido de desbaste, à medida que a taxa de cisalhamento se aproxima de zero, a viscosidade aparente prevista se aproxima do infinito. Este é um limite irrealista. Além disso, à medida que a taxa de cisalhamento aumenta, a viscosidade prevista diminui sem limite, o que também é um limite irrealista. Assim, seria de esperar que este modelo falhasse em qualquer fluido real com taxa de corte suficientemente baixa e/ou alta. Existem fluidos com viscosidades limitantes baixas e altas, por exemplo modelo de Cross, modelo de Carreau, entre outros, mas os quais não vão ser objecto de estudo neste trabalho.

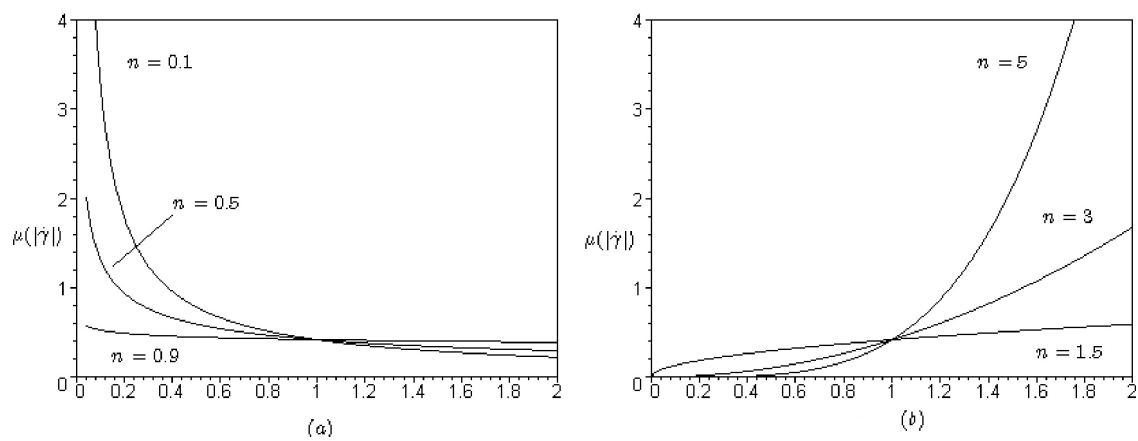


Figura 2.1: Modelo de lei do potência: (a) viscosidade de desbaste de cisalhamento e (b) viscosidade de espessamento de cisalhamento. Ambos os casos com valor de $k = 0.42$ (ver por exemplo [16, 17]) com diferentes valores de índice de fluxo.

Capítulo 3

Teoria de Cosserat

Considerando uma curva (ou uma superfície) incorporada em um espaço euclidiano tridimensional e supondo que um vetor, chamado de *diretor*, seja atribuído a cada ponto da curva (ou superfície), não necessariamente ao longo de sua normalidade. Tal curva (ou superfície) com diretores deformáveis será chamada de *curva de Cosserat (ou superfície)*. A curva de Cosserat é um modelo unidimensional e a superfície de Cosserat é um modelo bidimensional. A base teórica desta abordagem é similar àquela usada para o estudo de barras em mecânica de sólidos, em que o sistema de equações tridimensional é substituído por um sistema de equações diferenciais ordinárias ou parciais que, além da dependência do tempo, depende apenas de uma única variável de espaço, ver por exemplo Green et al. [18]. O presente capítulo trata do estudo das curvas de Cosserat para um movimento de fluxo de fluidos relativo a um tubo de seção circular.

A ideia de usar diretores em mecânica contínua vem de Duhem [19], que considerou um corpo como uma coleção de pontos junto com direções associadas aos pontos. Teorias baseadas em tal modelo de um meio orientado foram desenvolvidas pelos irmãos Cosserat [20, 21]. Seguindo esses autores, a ideia de usar diretores em mecânica contínua tem sido estudada por outros autores no contexto de barras, placas e cascas, veja por exemplo Ericksen e Truesdell [22], Truesdell e Toupin [24], Toupin [25], Ericksen [23], Green et al. [18, 26, 27, 28, 29] and Naghdi [30, 31, 32].

Em particular, Caulk, Green e Naghdi desenvolveram uma teoria hierárquica análoga para fluxos instáveis e estáveis. Eles usaram a teoria do contínuo dirigido para estudar fluidos viscosos instáveis em tubos rectos de seção transversal circular (Caulk e Naghdi [33]), e em canais (Green e Naghdi [34]). A mesma teoria foi aplicada ao fluxo de fluido viscoso não estacionário em tubos curvos de seção transversal circular e elíptica (Green et al. [35, 36]).

A relevância do uso de uma teoria de curvas direcionadas não está em considerá-la como uma aproximação a equações tridimensionais, mas em seu uso como teorias

independentes para prever algumas das principais propriedades de problemas tridimensionais. Várias características importantes de uma teoria do diretor são: (i) incorpora todos os componentes vetoriais da equação do momento linear; (ii) é uma teoria hierárquica, permitindo aumentar a precisão do modelo; (iii) o sistema de equações é fechado em cada ordem e, portanto, é desnecessário fazer suposições sobre a forma dos termos não-lineares e viscosos; (iv) invariância sob movimentos corporais rígidos sobrepostos é satisfeita em cada ordem e (v) a tensão de cisalhamento da parede entra diretamente como uma variável dependente na formulação.

A abordagem Lagrangiana e Euleriana da teoria de Cosserat é complexa e por conseguinte não a vamos abordar neste trabalho (ver por exemplo [35]), vamos sim seguir as ideias apresentadas por Caulk e Naghdi [33], pois as mesmas são a base desta tese de dissertação.

3.1 Movimento axissimétrico de um fluido

Vamos considerar um fluido homogêneo movendo-se dentro de um tubo rectilíneo com secção circular, o domínio Ω (ver Figura 3.1) subconjunto do espaço tridimensional \mathbb{R}^3 . Os limites de Ω é composto por diferentes partes, nomeadamente *proximal* de corte transversal Γ_1 , é a parte a montante do tubo; e *distal* de corte transversal Γ_2 , que delimita a região a jusante do tubo; a parte de $\partial\Omega$ correspondente à parede lateral do tubo que é denotado por Γ_w . Além disso, vamos considerar x_i ($i = 1, 2, 3$) as coordenadas cartesianas retangulares, \mathbf{e}_i os vectores base unitários associados e por conveniência $x_3 = z$.

Considere o movimento axissimétrico de um fluido incompressível, sem forças corporais, dentro de uma superfície de revolução sobre o eixo z onde $\phi = \phi(z, t)$ denota o raio instantâneo dessa superfície em z e tempo t . As equações tridimensionais que governam o movimento fluido são¹

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t} + v_i^* \mathbf{v}_{,i}^* \right) = \mathbf{t}_{i,i}, \\ v_{i,i}^* = 0, \\ \mathbf{t}_i = -p^* \mathbf{e}_i + \sigma_{ij} \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{t} = \vartheta_i^* \mathbf{t}_i, \end{array} \right. \quad em \Omega \times (0, T), \quad (3.1)$$

com a condição inicial

$$\mathbf{v}^*(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \quad em \Omega, \quad (3.2)$$

¹Aqui e na sequência vamos usamos frequentemente a notação, $v_{i,j}^* = \partial v_i^* / \partial x_j$ and $v_i^* \mathbf{v}_{,i}^* = v_i^* \partial \mathbf{v}^* / \partial x_i$ adotado em Naghdi et al. [33, 35, 36].

e condição de fronteira

$$\mathbf{v}^*(x, t) = 0 \text{ em } \Gamma_w \times (0, T), \quad (3.3)$$

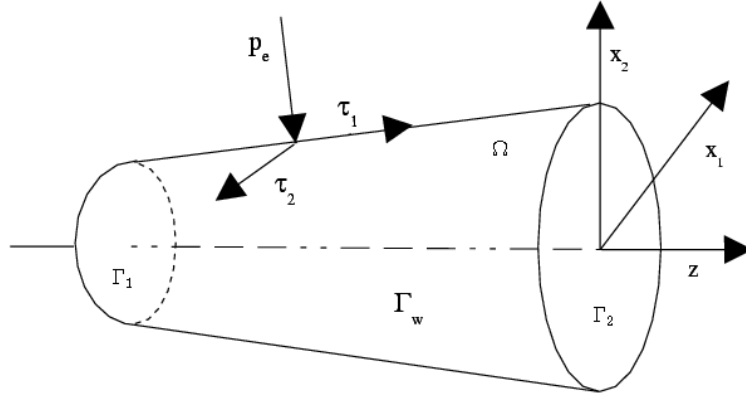


Figura 3.1: Domínio do fluido Ω com as componentes do vector de tração superficial τ_1, τ_2 e p_e . Γ_w representa o limite da parede lateral e Γ_1, Γ_2 são os limites transversais proximal e distal, respectivamente.

onde $\mathbf{v}^* = v_i^* \mathbf{e}_i$ é o campo de velocidade e ρ é a densidade constante do fluido. Equação (3.1)₁ representa o equilíbrio do momento linear e (3.1)₂ é a condição de incompressibilidade. Na equação (3.1)₃, p^* é a pressão, σ_{ij} são os componentes do tensor de tensão extra, \mathbf{t} denota o vetor de tensão na superfície cuja unidade externa é normal $\vartheta^* = \vartheta_i^* \mathbf{e}_i$, e t_i são as componentes de \mathbf{t} . O campo inicial de velocidade \mathbf{v}_0 é assumido como sendo conhecido.

Além disso, o limite Γ_w do domínio é definido por²

$$\phi^2 - x_\alpha x_\alpha = 0, \quad (3.4)$$

e os componentes da unidade externa normal a esta superfície são

$$\vartheta_\alpha^* = \frac{x_\alpha}{\phi(1 + \phi_z^2)^{1/2}}, \quad \vartheta_3^* = -\frac{\phi_z}{(1 + \phi_z^2)^{1/2}}, \quad (3.5)$$

onde uma variável subscrita denota diferenciação parcial. Como a equação (3.4) define uma superfície de material, o campo de velocidade deve satisfazer a condição

$$\frac{d}{dt}(\phi^2 - x_\alpha x_\alpha) = 0,$$

²Ao longo deste trabalho, os índices latinos obtêm os valores 1,2,3, os índices gregos 1,2 e a convenção usual de soma é empregada sobre um índice repetido.

i.e.,

$$\phi\phi_t + \phi\phi_z v_3^* - x_\alpha v_\alpha^* = 0 \quad (3.6)$$

na fronteira (3.4).

Nós assumimos que a velocidade do fluido no interior da superfície (3.4) é aproximada pela série finita

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v} + \sum_{n=1}^{\varpi} x_{\alpha_1} \dots x_{\alpha_n} \mathbf{w}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}, \quad (3.7)$$

com

$$\mathbf{v} = v_i(z, t) \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{w}_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = w_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^i(z, t) \mathbf{e}_i, \quad n = 1, 2, \dots, \varpi \quad (3.8)$$

onde \mathbf{v} representa a velocidade ao longo do eixo de simetria z , $\mathbf{w}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ são as velocidades diretoras completamente simétricas em relação aos seus índices e $x_{\alpha_1} \dots x_{\alpha_n}$ são as funções de ponderação polinomial. No nosso estudo, usaremos nove diretores, o que significa que a ordem da teoria hierárquica é $\varpi = 3$. As funções de ponderação polinomial consideradas (3.7) são:

$$\lambda_1 = x_1, \quad \lambda_2 = x_2, \quad \lambda_3 = x_1^2, \quad \lambda_4 = x_1 x_2,$$

$$\lambda_5 = x_2^2, \quad \lambda_6 = x_1^3, \quad \lambda_7 = x_1^2 x_2, \quad \lambda_8 = x_1 x_2^2, \quad \lambda_9 = x_2^3.$$

Como o movimento é simétrico em torno do eixo z , os componentes de velocidade não são todos independentes e devem se transformar de acordo com

$$v_\alpha^* \rightarrow Q_{\alpha\beta} v_\beta^*, \quad v_3^* \rightarrow v_3^*$$

sob a transformação de coordenadas

$$x_\alpha \rightarrow Q_{\alpha\beta} x_\beta, \quad x_3 \rightarrow x_3,$$

onde $Q_{\alpha\beta}$ é qualquer tensor bidimensional ortogonal. Segue-se que as várias funções componentes nas equações (3.7) deve satisfazer

$$\left. \begin{aligned} v_\alpha &= 0, \\ w_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^\gamma &= Q_{\gamma\lambda} Q_{\alpha_1\beta_1} \dots Q_{\alpha_n\beta_n} w_{\beta_1 \dots \beta_n}^\lambda \\ w_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^3 &= Q_{\alpha_1\beta_1} \dots Q_{\alpha_n\beta_n} w_{\beta_1 \dots \beta_n}^3 \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

para todos os tensores ortogonais $Q_{\alpha\beta}$. Consequentemente $w_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^\beta$ e $w_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^3$ devem ser componentes de tensores isotrópicos bidimensionais. Mas como as funções dos componentes também devem ser simétricas em relação aos índices $\alpha_1 \dots \alpha_n$, nós temos,

de acordo com Jeffreys [37], que as velocidades de diretores com $\varpi = 3$ tem a seguinte representação

$$\left. \begin{aligned} w_{\alpha}^{\beta} &= \delta_{\alpha}^{\beta} \xi + \mathbf{e}_{\alpha\beta} \omega, \quad w_{\alpha}^3 = 0, \\ w_{\alpha\beta}^{\gamma} &= 0, \quad w_{\alpha\beta}^3 = \delta_{\alpha}^{\beta} \gamma, \\ w_{\alpha\beta\gamma}^{\lambda} &= \mathbf{c}_{\alpha\beta\gamma\mu} (\delta_{\mu}^{\lambda} \sigma + \mathbf{e}_{\mu\lambda} \eta), \quad w_{\alpha\beta\gamma}^3 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

onde $\mathbf{e}_{\alpha\beta}$ é o símbolo de permutação definido por $\mathbf{e}_{11} = \mathbf{e}_{22} = 0$, $\mathbf{e}_{12} = -\mathbf{e}_{21} = 1$, e

$$\mathbf{c}_{\alpha\beta\gamma\mu} = \frac{1}{3} (\delta_{\alpha}^{\beta} \delta_{\gamma}^{\lambda} + \delta_{\alpha}^{\gamma} \delta_{\beta}^{\lambda} + \delta_{\alpha}^{\lambda} \delta_{\beta}^{\gamma}). \quad (3.11)$$

Os vários coeficientes ξ , ω , γ , σ , η são funções escalares de z e tempo t . Do ponto de vista físico, o γ está relacionado ao movimento de cisalhamento transversal, ω e η estão relacionados ao movimento de rotação (*também chamado de movimento rotacional*) sobre \mathbf{e}_3 , enquanto ξ e σ estão relacionados ao alongamento transversal.

Portanto, usando nove diretores e considerando as condições (3.9) – (3.11), o campo de velocidade dado por (3.7) (com $v = v_3$) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^* &= \left[x_1(\xi + \sigma(x_1^2 + x_2^2)) - x_2(\omega + \eta(x_1^2 + x_2^2)) \right] \mathbf{e}_1 \\ &+ \left[x_1(\omega + \eta(x_1^2 + x_2^2)) + x_2(\xi + \sigma(x_1^2 + x_2^2)) \right] \mathbf{e}_2 \\ &+ \left[v + \gamma(x_1^2 + x_2^2) \right] \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Agora, usando a condição de limite (3.3), o campo de velocidade (3.12) na superfície (3.4), é dado por

$$\xi + \phi^2 \sigma = 0, \quad \omega + \phi^2 \eta = 0, \quad v + \phi^2 \gamma = 0. \quad (3.13)$$

A condição de incompressibilidade (3.1)₂ aplicada ao campo de velocidade (3.12), pode ser escrita

$$(v_z + 2\xi) + x_{\alpha} x_{\alpha} (\gamma_z + 4\sigma) = 0. \quad (3.14)$$

Para a equação (3.14) se verificar em todos os pontos do fluido, as condições

$$v_z + 2\xi = 0, \quad \gamma_z + 4\sigma = 0, \quad (3.15)$$

devem ser satisfeitas.

Agora, com as equações (3.13)_{1,3}, estas condições separadas (3.15), reduzem-se para

$$v_z + 2\xi = 0, \quad (\phi^2 v)_z = 0. \quad (3.16)$$

Além disso, com o campo de velocidades (3.12), a condição (3.6) no limite (3.4), torna-se

$$\phi_t + (v + \phi^2\gamma)\phi_z - (\xi + \phi^2\sigma)\phi = 0. \quad (3.17)$$

Portanto, a condição de fronteira (3.6) e a condição de incompressibilidade (3.1)₂ são satisfeitas exatamente pelo campo de velocidade (3.12), desde que as condições (3.17) e (3.15) sejam impostas. Em vez de satisfazer a equação de momento (3.1)₁ ponto por ponto no fluido, impomos as seguintes condições integrais:

$$\int_S \left[t_{i,i} - \rho \left(\frac{\partial v^*}{\partial t} + v_i^* v_{,i}^* \right) \right] da = 0, \quad (3.18)$$

$$\int_S \left[t_{i,i} - \rho \left(\frac{\partial v^*}{\partial t} + v_i^* v_{,i}^* \right) \right] x_{\alpha_1} \dots x_{\alpha_n} da = 0, \quad n = 1, \dots, k, \quad (3.19)$$

onde S é uma seção transversal arbitrária do tubo definida pela constante z no tempo t e limitada pelo círculo (3.4).

Usando o teorema da divergência e a integração por partes, as equações (3.18) – (3.19) para nove diretores (i.e., $k = 3$) podem ser reduzidas para as quatro equações vectoriais:

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial z} + \mathbf{f} = \mathbf{a}, \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial \mathbf{m}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}}{\partial z} + \mathbf{l}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \mathbf{k}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} + \mathbf{b}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}, \quad n = 1, 2, 3 \quad (3.21)$$

onde \mathbf{n} , $\mathbf{k}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$, $\mathbf{m}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ são a força definidos por

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{n} &= \int_S t_3 da, \quad \mathbf{k}^\alpha = \int_S t_\alpha da, \quad \mathbf{k}^{\alpha\beta} = \int_S (t_\alpha x_\beta + t_\beta x_\alpha) da, \\ \mathbf{k}^{\alpha\beta\gamma} &= \int_S (t_\alpha x_\beta x_\gamma + t_\beta x_\alpha x_\gamma + t_\gamma x_\alpha x_\beta) da, \\ \mathbf{m}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} &= \int_S t_3 x_{\alpha_1} \dots x_{\alpha_n} da. \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

As quantidades \mathbf{a} e $\mathbf{b}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ são os termos de inércia definidos por

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a} &= \int_S \rho \left(\frac{\partial v^*}{\partial t} + v_i^* v_{,i}^* \right) da, \\ \mathbf{b}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} &= \int_S \rho \left(\frac{\partial v^*}{\partial t} + v_i^* v_{,i}^* \right) x_{\alpha_1} \dots x_{\alpha_n} da, \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

e \mathbf{f} , $\mathbf{l}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$, surgem devido à tração superficial no limite lateral (3.4) (definido por ∂S), são dados por

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{f} &= \int_{\partial S} \left(1 + \phi_z^2\right)^{1/2} \mathbf{t}_w ds, \\ \mathbf{l}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} &= \int_{\partial S} \left(1 + \phi_z^2\right)^{1/2} \mathbf{t}_w x_{\alpha_1} \dots x_{\alpha_n} ds. \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

Levando em consideração a condição (3.24) é conveniente escrever o vetor de tensão \mathbf{t} na superfície lateral (aqui denotada por \mathbf{t}_w) em termos de a unidade de saída normal e componentes tangenciais, ou seja,

$$\mathbf{t}_w = \tau_1 \boldsymbol{\lambda} - p_e \boldsymbol{\vartheta}^* + \tau_2 \mathbf{e}_\theta, \quad (3.25)$$

onde $\boldsymbol{\lambda}$, \mathbf{e}_θ são vetores tangentes unitários definidos por

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{x_\alpha}{\phi} \mathbf{e}_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\beta, \quad \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\vartheta}^* \times \mathbf{e}_\theta. \quad (3.26)$$

Agora, usando equações (3.5) e (3.26), a expressão do vector de stress (3.25) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_w &= \left[\frac{1}{\phi(1 + \phi_z^2)^{1/2}} \left(\tau_1 x_1 \phi_z - p_e x_1 - \tau_2 x_2 (1 + \phi_z^2)^{1/2} \right) \right] \mathbf{e}_1 \\ &+ \left[\frac{1}{\phi(1 + \phi_z^2)^{1/2}} \left(\tau_1 x_2 \phi_z - p_e x_2 + \tau_2 x_1 (1 + \phi_z^2)^{1/2} \right) \right] \mathbf{e}_2 \\ &+ \left[\frac{1}{(1 + \phi_z^2)^{1/2}} \left(\tau_1 + p_e \phi_z \right) \right] \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Usando as condições (3.27) na equação (3.24) e integrando, obtemos

$$\mathbf{f} = 2\pi\phi \left(p_e \phi_z + \tau_1 \right) \mathbf{e}_3, \quad (3.28)$$

$$\mathbf{l}^\alpha = \pi\phi^2 \left[\left(\tau_1 \phi_z - p_e \right) \delta_\alpha^\beta + \left(1 + \phi_z^2 \right)^{1/2} \tau_2 \mathbf{e}_{\alpha\beta} \right] \mathbf{e}_\beta, \quad (3.29)$$

$$\mathbf{l}^{\alpha\beta} = \pi\phi^3 \left(p_e \phi_z + \tau_1 \right) \delta_\alpha^\beta \mathbf{e}_3, \quad (3.30)$$

$$\mathbf{l}^{\alpha\beta\gamma} = \mathbf{e}_1 \left(H_1 a_{\alpha\beta\gamma} + H_2 b_{\alpha\beta\gamma} \right) + \mathbf{e}_2 \left(H_1 c_{\alpha\beta\gamma} + H_2 d_{\alpha\beta\gamma} \right), \quad (3.31)$$

onde

$$H_1 = \frac{3\pi\tau_1\phi^4\phi_z}{4} - \frac{3\pi p_e\phi^4}{4}, \quad H_2 = \frac{3\pi\tau_2\phi^4\sqrt{\phi_z^2+1}}{4},$$

e os valores das constantes $a_{\alpha\beta\gamma}$, $b_{\alpha\beta\gamma}$, $c_{\alpha\beta\gamma}$ e $d_{\alpha\beta\gamma}$ estão resumidos na Tabela 3.1

Além disso, usando o campo de velocidade (3.12) nas equações (3.23) e integrando, obtemos os termos de inércia \mathbf{a} , \mathbf{b}^α , $\mathbf{b}^{\alpha\beta}$, $\mathbf{b}^{\alpha\beta\gamma}$, dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = & \mathbf{e}_3 \left(\frac{\pi\phi^4\rho\gamma_t}{2} + \frac{\pi\phi^6\rho\gamma_z\gamma}{3} + \frac{\pi\phi^4\rho v\gamma_z}{2} + \pi\phi^4\rho\xi\gamma \right. \\ & \left. + \frac{\pi\phi^4\rho v_z\gamma}{2} + \frac{2\pi\phi^6\rho\sigma\gamma}{3} + \pi\phi^2\rho v_t + \pi\phi^2\rho v v_z \right), \end{aligned} \quad (3.32)$$

$\alpha + \beta + \gamma$	$a_{\alpha\beta\gamma}$	$b_{\alpha\beta\gamma}$	$c_{\alpha\beta\gamma}$	$d_{\alpha\beta\gamma}$
3	1	0	0	1
4	0	-1/3	1/3	0
5	1/3	0	0	1/3
6	0	-1	1	0

Tabela 3.1: Resumo das constantes $a_{\alpha\beta\gamma}$, $b_{\alpha\beta\gamma}$, $c_{\alpha\beta\gamma}$ e $d_{\alpha\beta\gamma}$.

$$\mathbf{b}^\alpha = \mathbf{e}_1 \left(H_3 \delta_\alpha^1 + H_4 \mathbf{e}_{\alpha 1} \right) + \mathbf{e}_2 \left(H_3 \delta_\alpha^2 + H_4 \mathbf{e}_{\alpha 2} \right), \quad (3.33)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^{\alpha\beta} = & \delta_\alpha^\beta \mathbf{e}_3 \left(\frac{\pi\phi^6\rho\gamma_t}{6} + \frac{\pi\phi^8\rho\gamma_z\gamma}{8} + \frac{\pi\phi^6\rho v\gamma_z}{6} + \frac{\pi\phi^6\rho\xi\gamma}{3} \right. \\ & \left. + \frac{\pi\phi^6\rho v_z\gamma}{6} + \frac{\pi\phi^8\rho\sigma\gamma}{4} + \frac{\pi\phi^4\rho v_t}{4} + \frac{\pi\phi^4\rho v v_z}{4} \right), \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\mathbf{b}^{\alpha\beta\gamma} = \mathbf{e}_1 \left(H_5 a_{\alpha\beta\gamma} + H_6 b_{\alpha\beta\gamma} \right) + \mathbf{e}_2 \left(H_5 c_{\alpha\beta\gamma} + H_6 d_{\alpha\beta\gamma} \right), \quad (3.35)$$

onde

$$\begin{aligned} H_3 = & \frac{\pi\phi^6\rho\gamma\xi_z}{6} + \frac{\pi\phi^8\rho\gamma\sigma_z}{8} + \frac{\pi\phi^4\rho\xi_t}{4} + \frac{\pi\phi^4\rho v\xi_z}{4} + \frac{\pi\phi^4\rho\xi^2}{4} + \frac{2\pi\phi^6\rho\sigma\xi}{3} \\ & + \frac{\pi\phi^6\rho v\sigma_z}{6} + \frac{\pi\phi^6\rho\sigma_t}{6} + \frac{3\pi\phi^8\rho\sigma^2}{8} - \frac{\pi\phi^8\rho\eta^2}{8} - \frac{\pi\phi^6\rho\eta\omega}{3} - \frac{\pi\phi^4\rho\omega^2}{4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_4 = & \frac{\pi\phi^8\rho\gamma\eta_z}{8} + \frac{\pi\phi^6\rho\gamma\omega_z}{6} + \frac{2\pi\phi^6\rho\xi\eta}{3} + \frac{\pi\phi^4\rho\omega\xi}{2} + \frac{\pi\phi^6\rho\eta_z v}{6} \\ & + \frac{\pi\phi^4\rho\omega_z v}{4} + \frac{\pi\phi^8\rho\sigma\eta}{2} + \frac{\pi\phi^6\rho\omega\sigma}{3} + \frac{\pi\phi^6\rho\eta_t}{6} + \frac{\pi\phi^4\rho\omega_t}{4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_5 &= \frac{3\pi\phi^8\rho\gamma\xi_z}{32} + \frac{3\pi\phi^{10}\rho\sigma_z\gamma}{40} + \frac{\pi\phi^6\rho\xi_t}{8} + \frac{\pi\phi^6\rho v\xi_z}{8} + \frac{\pi\phi^6\rho\xi^2}{8} + \frac{3\pi\phi^8\rho\sigma\xi}{8} \\
&+ \frac{3\pi\phi^8\rho\sigma_z v}{32} + \frac{3\pi\phi^8\rho\sigma_t}{32} + \frac{9\pi\phi^{10}\rho\sigma^2}{40} - \frac{3\pi\phi^{10}\rho\eta^2}{40} - \frac{3\pi\phi^8\rho\eta\omega}{16} - \frac{\pi\phi^6\rho\omega^2}{8}, \\
H_6 &= \frac{3\pi\phi^{10}\rho\gamma\eta_z}{40} + \frac{3\pi\phi^8\rho\gamma\omega_z}{32} + \frac{3\pi\phi^8\rho\xi\eta}{8} + \frac{\pi\phi^6\rho\omega\xi}{4} + \frac{3\pi\phi^8\rho v\eta_z}{32} + \frac{\pi\phi^6\rho\omega_z v}{8} \\
&+ \frac{3\pi\phi^{10}\rho\sigma\eta}{10} + \frac{3\pi\phi^8\rho\omega\sigma}{16} + \frac{3\pi\phi^8\rho\eta_t}{32} + \frac{\pi\phi^6\rho\omega_t}{8}.
\end{aligned}$$

As forças \mathbf{n} , $\mathbf{k}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$, e $\mathbf{m}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ dependem dos componentes do vector de stress \mathbf{t} . No próximo capítulo, calculamos essas grandezas de força para fluidos Newtonianos e Newtonianos generalizados do tipo lei de potência. Além disso, aplicamos essa teoria unidimensional com nove diretores para estudar a relação entre o gradiente de pressão médio e a taxa de fluxo volumétrica em uma secção finita do tubo. Antes disso, vamos considerar a taxa de fluxo de volume definida por

$$Q(z, t) = \int_S v_3^*(x_1, x_2, z, t) da, \quad (3.36)$$

e a *pressão média* \bar{p} definida por

$$\bar{p}(z, t) = \frac{1}{A(z, t)} \int_S p^*(x_1, x_2, z, t) da, \quad (3.37)$$

onde $A(z, t)$ é a área da secção transversal $S = S(z, t)$. Além disso, vamos considerar o fluxo em um tubo rígido, ou seja,

$$\phi = \phi(z), \quad (3.38)$$

sem movimento rotacional (i.e., $\omega = \eta = 0$).

Agora, com as condições (3.38) e (3.13), a condição cinemática (3.17) é satisfeita de forma idêntica. Segue das condições (3.36), (3.12), (3.13)₃ e (3.16)₂ que a taxa de fluxo de volume Q é apenas uma função do tempo t dada por

$$Q(t) = \frac{\pi}{2} \phi^2(z) v(z, t). \quad (3.39)$$

Então, para um fluxo em um tubo rígido sem rotação com taxa de fluxo volumétrica (3.39) e verificando as condições (3.13)_{1,3} e (3.16)₁, o campo de velocidade (3.12) fica

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}^* &= \left[x_1 \left(1 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{\phi^2} \right) \frac{2\phi_z Q}{\pi\phi^3} \right] \mathbf{e}_1 + \left[x_2 \left(1 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{\phi^2} \right) \frac{2\phi_z Q}{\pi\phi^3} \right] \mathbf{e}_2 \\
&+ \left[\frac{2Q}{\pi\phi^2} \left(1 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{\phi^2} \right) \right] \mathbf{e}_3,
\end{aligned} \quad (3.40)$$

Portanto, a condição inicial (3.2) é satisfeita quando consideramos $Q(0)$ como uma constante.

Capítulo 4

Aplicações da Teoria Cosserat aos Fluidos

Vamos considerar as equações tridimensionais (3.1), com as condições inicial e de fronteira (3.2) – (3.3) em um domínio com superfície definido por (3.4). Este capítulo é dedicado a aplicações da teoria Cosserat com nove diretores para o sistema (3.1) – (3.4), correspondente a fluidos Newtonianos e a fluidos Newtonianos generalizados com função viscosidade do tipo lei de potência.

4.1 Fluido Newtoniano

Esta seção contém, em particular, um resumo dos resultados apresentados em [33]. Vamos considerar um fluido newtoniano linearmente viscoso. Os componentes do tensor de tensão extra (\mathbf{T}_E em (2.31)) são especificados pela lei de Newton

$$\sigma_{ij} = \mu(v_{i,j}^* + v_{j,i}^*), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (4.1)$$

onde μ é a viscosidade constante do fluido.

Substituindo o campo de velocidade (3.12) nas equações (3.22) e integrando sobre a seção arbitrária S , podemos calcular explicitamente as forças \mathbf{n} , $\mathbf{k}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$, $\mathbf{m}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$, i.e.,

$$\mathbf{n} = -p\mathbf{e}_3 + 2\pi\mu\phi^2(v_z + \frac{1}{2}\phi^2\gamma_z)\mathbf{e}_3, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{k}^\alpha = -p\mathbf{e}_\alpha + 2\pi\mu\phi^2(\xi + \phi^2\sigma)\mathbf{e}_\alpha, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{k}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\pi\mu\phi^4(2\gamma + \xi_z + \frac{2}{3}\phi^2\sigma_z)\delta_\alpha^\beta\mathbf{e}_3, \quad (4.4)$$

$$\mathbf{k}^{\alpha\beta\gamma} = -3q\mathbf{c}_{\alpha\beta\gamma\mu}\mathbf{e}_\mu + \frac{1}{2}\pi\mu\phi^4[(3\xi + 5\phi^2\sigma)\delta_\mu^\lambda + \phi^2\eta\mathbf{e}_{\mu\lambda}]\mathbf{c}_{\alpha\beta\gamma\mu}\mathbf{e}_\lambda, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{m}^\alpha = \frac{1}{4}\pi\mu\phi^4[(2\gamma + \xi_z + \frac{2}{3}\phi^2\sigma_z)\delta_\alpha^\beta + (\omega_z + \frac{2}{3}\phi^2\eta_z)\mathbf{e}_{\alpha\beta}]\mathbf{e}_\beta, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{m}^{\alpha\beta} = -q\delta_\alpha^\beta\mathbf{e}_3 + \frac{1}{2}\pi\mu\phi^4(v_z + \frac{2}{3}\phi^2\gamma_z)\delta_\alpha^\beta\mathbf{e}_3, \quad (4.7)$$

$$\mathbf{m}^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{8}\pi\mu\phi^6[(2\gamma + \xi_z + \frac{3}{4}\phi^2\sigma_z)\delta_\mu^\lambda + (\omega_z + \frac{3}{4}\phi^2\eta_z)\mathbf{e}_{\mu\lambda}]\mathbf{c}_{\alpha\beta\gamma\mu}\mathbf{e}_\lambda, \quad (4.8)$$

onde p e q são resultantes de pressão definidos por

$$p = \int_S p^* da, \quad q\delta_\alpha^\beta = \int_S p^* x_\alpha x_\beta da. \quad (4.9)$$

Agora, usando as soluções (3.28) – (3.35) e ainda (4.2) – (4.8) nas equações (3.20) – (3.21) para um fluxo em um tubo axissimétrico rígido sem rotação com o campo de velocidade (3.40), obtemos as seguintes quatro equações escalares independentes¹:

$$0 = \rho\dot{Q} - \frac{8\phi_z Q^2 \rho}{3\pi\phi^3} - 2\pi p_e \phi \phi_z - 2\pi\tau_1 \phi + p_z, \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mu\phi\phi_{zzz}Q}{6} + \frac{\mu\phi_z\phi_{zz}Q}{2} - \frac{\phi\phi_z\dot{Q}\rho}{6} - \frac{\phi_{zz}Q^2\rho}{6\pi\phi} \\ &+ \frac{\phi_z^2 Q^2 \rho}{3\pi\phi^2} + \pi\tau_1\phi^2\phi_z - \pi p_e \phi^2 + p, \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mu\phi_z^2 Q}{3} + 2\mu Q + \frac{\mu\phi\phi_{zz}Q}{3} - \frac{\phi^2\dot{Q}\rho}{6} + \frac{\phi_z Q^2 \rho}{3\pi\phi} \\ &- q_z + \pi p_e \phi^3 \phi_z + \pi\tau_1\phi^3, \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mu\phi^3\phi_{zzz}Q}{16} + \frac{9\mu\phi^2\phi_z\phi_{zz}Q}{16} - \frac{\phi^3\phi_z\dot{Q}\rho}{16} + \frac{3\mu\phi\phi_z^3 Q}{8} \\ &- \frac{3\pi\phi^4 p_e}{4} + \frac{3\pi\phi^4\tau_1\phi_z}{4} + \mu\phi\phi_z Q + 3q + \frac{\phi_z^2 Q^2 \rho}{10\pi} - \frac{\phi\phi_{zz}Q^2 \rho}{20\pi}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Eliminando p_e , τ_1 e q ($\tau_2 = 0$) das equações (4.10) – (4.13) obtemos a relação entre a pressão média e o fluxo volumétrico em um tubo axissimétrico rígido sem fluxo de rotação, dado por

¹Aqui e na continuação usamos a notação $\dot{Q}(t)$ para diferenciação em tempo.

$$\bar{p}_z(z, t) = -\frac{8\mu}{\pi\phi^4}\bar{A}Q(t) - \frac{4\rho}{3\pi\phi^2}\bar{B}\dot{Q}(t) - \frac{4\rho}{\pi^2\phi^5}\bar{C}Q^2(t), \quad (4.14)$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \bar{A}(\phi, \phi_z, \phi_{zz}, \phi_{zzzz}) \\ &= 1 + \frac{1}{3}\phi_z^2 + \frac{1}{16}\phi_z^4 + \frac{1}{3}\phi\phi_{zz} + \frac{1}{4}\phi\phi_z^2\phi_{zz} + \frac{1}{32}\phi^2\phi_{zz}^2 - \frac{1}{96}\phi^3\phi_{zzzz} \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\bar{B} = \bar{B}(\phi, \phi_z, \phi_{zz}) = 1 + \frac{3}{16}\phi_z^2 + \frac{1}{16}\phi\phi_{zz} \quad (4.16)$$

$$\bar{C} = \bar{C}(\phi, \phi_z, \phi_{zz}, \phi_{zzz}) = -\phi_z - \frac{3}{40}\phi\phi_z\phi_{zz} + \frac{1}{40}\phi^2\phi_{zzz}. \quad (4.17)$$

As quantidades \bar{A} , \bar{B} e \bar{C} são funções dimensionais de z determinadas apenas pela geometria do tubo. O relacionamento (4.14) pode ser integrado em uma secção finita do tubo ($0 \leq z \leq L$) entre z_1 e a posição z_2 , para obter

$$G(t) = \left(\frac{8\mu A}{\pi\phi_0^4}\right)Q(t) + \left(\frac{4\rho B}{3\pi\phi_0^2}\right)\dot{Q}(t) + \left(\frac{4\rho C}{\pi^2\phi_0^5}\right)Q^2(t), \quad (4.18)$$

onde ϕ_0 é o raio característico do tubo, com

$$A = \frac{1}{L} \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{\phi_0}{\phi}\right)^4 \bar{A} dz, \quad B = \frac{1}{L} \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{\phi_0}{\phi}\right)^2 \bar{B} dz, \quad C = \frac{1}{L} \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{\phi_0}{\phi}\right)^5 \bar{C} dz, \quad (4.19)$$

$$G(t) = \frac{\bar{p}(z_1, t) - \bar{p}(z_2, t)}{L}, \quad L = z_2 - z_1. \quad (4.20)$$

A função $G(t)$ é o gradiente de pressão médio no intervalo $[z_1, z_2]$ no tempo t . As quantidades A , B e C são constantes dimensionais determinadas pela geometria do tubo no intervalo $[z_1, z_2]$. O primeiro termo do lado direito de (4.18) representa a contribuição dos efeitos viscosos, o segundo está relacionado com efeitos puramente instáveis e o terceiro termo surge da aceleração convectiva.

A separação de fluxo ocorre quando o componente axial da tração de cisalhamento superficial (veja a Figura 3.1) está na direcção do fluxo. A expressão para a tensão de cisalhamento da parede τ_1 pode ser obtida e é dada por

$$\tau_1 = -\frac{4\mu}{\pi\phi^3(1+\phi_z^2)}A'Q(t) - \frac{\rho}{6\pi\phi(1+\phi_z^2)}B'\dot{Q}(t) - \frac{2\rho}{3\pi^2\phi^4(1+\phi_z^2)}C'Q^2(t), \quad (4.21)$$

onde A' , B' e C' são funções de z , dadas por

$$\begin{aligned} A' &= A'(\phi, \phi_z, \phi_{zz}, \phi_{zzz}, \phi_{zzzz}) \\ &= 1 + \frac{1}{3}\phi_z^2 + \frac{1}{16}\phi_z^4 + \frac{1}{3}\phi\phi_{zz} + \frac{3}{8}\phi\phi_z^2\phi_{zz} \\ &\quad + \frac{1}{32}\phi^2\phi_{zz}^2 + \frac{1}{24}\phi^2\phi_z\phi_{zzz} - \frac{1}{96}\phi^3\phi_{zzzz} \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$B' = B'(\phi, \phi_z, \phi_{zz}) = 1 - \frac{1}{4}\phi_z^2 + \frac{1}{4}\phi\phi_{zz} \quad (4.23)$$

$$C' = C'(\phi, \phi_z, \phi_{zz}, \phi_{zzz}) = -\phi_z + \frac{1}{2}\phi_z^3 - \frac{19}{40}\phi\phi_z\phi_{zz} + \frac{3}{40}\phi^2\phi_{zzz}. \quad (4.24)$$

4.1.1 A dimensionalização

Consideremos as seguintes variáveis adimensionais²

$$\hat{z} = \frac{z}{\phi_0}, \quad \hat{\phi} = \frac{\phi}{\phi_0}, \quad \hat{t} = \omega_0 t, \quad \hat{Q} = \frac{2\rho}{\pi\phi_0\mu} Q, \quad \hat{p} = \frac{\phi_0^2\rho}{\mu^2} \bar{p}, \quad (4.25)$$

onde ϕ_0 é um raio característico do tubo e ω_0 é uma frequência característica para fluxo não estacionário. Agora, substituindo as novas variáveis (4.25) nas equações (4.14), obtemos

$$\hat{p}_{\hat{z}} = -4 \frac{\hat{A}}{\hat{\phi}^4} \hat{Q}(\hat{t}) - \frac{2}{3} \mathcal{W}_0^2 \frac{\hat{B}}{\hat{\phi}^2} \dot{\hat{Q}}(\hat{t}) - \frac{\hat{C}}{\hat{\phi}^5} \hat{Q}^2(\hat{t}), \quad (4.26)$$

onde $\mathcal{W}_0 = \phi_0 \sqrt{\rho\omega_0/\mu}$ é o *número de Womersley*. O *número de Womersley* é o parâmetro mais usado para refletir a pulsatilidade do fluxo, que é um fenômeno não estacionário. Além disso,

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \hat{A}(\hat{\phi}, \hat{\phi}_z, \hat{\phi}_{zz}, \hat{\phi}_{zzz}) \\ &= 1 + \frac{1}{3}\hat{\phi}_z^2 + \frac{1}{16}\hat{\phi}_z^4 + \frac{1}{3}\hat{\phi}\hat{\phi}_{zz} + \frac{1}{4}\hat{\phi}\hat{\phi}_z^2\hat{\phi}_{zz} + \frac{1}{32}\hat{\phi}^2\hat{\phi}_{zz}^2 - \frac{1}{96}\hat{\phi}^3\hat{\phi}_{zzz} \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\hat{B} = \hat{B}(\hat{\phi}, \hat{\phi}_z, \hat{\phi}_{zz}) = 1 + \frac{3}{16}\hat{\phi}_z^2 + \frac{1}{16}\hat{\phi}\hat{\phi}_{zz} \quad (4.28)$$

$$\hat{C} = \hat{C}(\hat{\phi}, \hat{\phi}_z, \hat{\phi}_{zz}, \hat{\phi}_{zzz}) = -\hat{\phi}_z - \frac{3}{40}\hat{\phi}\hat{\phi}_z\hat{\phi}_{zz} + \frac{1}{40}\hat{\phi}^2\hat{\phi}_{zzz}. \quad (4.29)$$

Agora, integrando a condição (4.26) sobre uma secção finita do tubo, obtemos a seguinte relação entre *gradiente de pressão média* e *fluxo de volume* para o modelo unidimensional

$$\hat{G}(\hat{t}) = 4\hat{A}_1\hat{Q}(\hat{t}) + \frac{2}{3}\mathcal{W}_0^2\hat{A}_2\dot{\hat{Q}}(\hat{t}) + \hat{A}_3\hat{Q}^2(\hat{t}), \quad (4.30)$$

onde

$$\hat{A}_1 = \frac{1}{\hat{L}} \int_{\hat{z}_1}^{\hat{z}_2} \left(\frac{\hat{A}}{\hat{\phi}^4} \right) d\hat{z}, \quad \hat{A}_2 = \frac{1}{\hat{L}} \int_{\hat{z}_1}^{\hat{z}_2} \left(\frac{\hat{B}}{\hat{\phi}^2} \right) d\hat{z}, \quad \hat{A}_3 = \frac{1}{\hat{L}} \int_{\hat{z}_1}^{\hat{z}_2} \left(\frac{\hat{C}}{\hat{\phi}^5} \right) d\hat{z}, \quad (4.31)$$

²Nos casos em que uma taxa de fluxo constante é especificada, a taxa de fluxo não-dimensional \hat{Q} é idêntica ao número clássico de Reynolds usado para fluxo em tubos, $\hat{Q} = (\rho U \phi_0)/\mu$ onde U é a média da secção transversal do componente axial da velocidade (ver Robertson e Sequeira [38]).

$$\hat{G}(\hat{t}) = \frac{\hat{p}(\hat{z}_1, \hat{t}) - \hat{p}(\hat{z}_2, \hat{t})}{\hat{L}}, \quad \hat{L} = L/\phi_0 = \hat{z}_2 - \hat{z}_1. \quad (4.32)$$

Além disso, substituindo as condições (4.25) na equação (4.21), obtemos

$$\hat{\tau}_1 = -2\hat{A}_7\hat{Q}(\hat{t}) - \mathcal{W}_0^2 \frac{1}{12}\hat{A}_8\dot{\hat{Q}}(\hat{t}) - \frac{1}{6}\hat{A}_9\hat{Q}^2(\hat{t}), \quad (4.33)$$

onde \hat{A}_7 , \hat{A}_8 e \hat{A}_9 são funções não dimensionais de \hat{z} , dadas por

$$\begin{aligned} \hat{A}_7 &= \hat{A}_7(\hat{\phi}, \hat{\phi}_z, \hat{\phi}_{zz}, \hat{\phi}_{zzz}, \hat{\phi}_{zzzz}) \\ &= \frac{1}{\hat{\phi}^3(1 + \hat{\phi}_z^2)} \left(1 + \frac{1}{3}\hat{\phi}_z^2 + \frac{1}{16}\hat{\phi}_z^4 + \frac{1}{3}\hat{\phi}\hat{\phi}_{zz} + \frac{3}{8}\hat{\phi}\hat{\phi}_z^2\hat{\phi}_{zz} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{32}\hat{\phi}^2\hat{\phi}_{zz}^2 + \frac{1}{24}\hat{\phi}^2\hat{\phi}_z\hat{\phi}_{zzz} - \frac{1}{96}\hat{\phi}^3\hat{\phi}_{zzzz} \right) \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\hat{A}_8 = \hat{A}_8(\hat{\phi}, \hat{\phi}_z, \hat{\phi}_{zz}) = \frac{1}{\hat{\phi}(1 + \hat{\phi}_z^2)} \left(1 - \frac{1}{4}\hat{\phi}_z^2 + \frac{1}{4}\hat{\phi}\hat{\phi}_{zz} \right) \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \hat{A}_9 &= \hat{A}_9(\hat{\phi}, \hat{\phi}_z, \hat{\phi}_{zz}, \hat{\phi}_{zzz}) \\ &= \frac{1}{\hat{\phi}^4(1 + \hat{\phi}_z^2)} \left(-\hat{\phi}_z + \frac{1}{2}\hat{\phi}_z^3 - \frac{19}{40}\hat{\phi}\hat{\phi}_z\hat{\phi}_{zz} + \frac{3}{40}\hat{\phi}^2\hat{\phi}_{zzz} \right) \end{aligned} \quad (4.36)$$

e

$$\hat{\tau}_1 = \frac{\phi_0^2 \rho}{\mu^2} \tau_1.$$

De seguida, resumimos algumas propriedades gerais da equação (4.30) no caso estacionário, obtidas por Robertson e Sequeira [38].

4.1.2 Propriedades gerais para fluxo estacionário

Vamos considerar a equação (4.30) no caso estacionário. A equação pode ser reescrita, respectivamente, como

$$\hat{G} = 4\hat{A}_1\hat{Q}_s + \hat{A}_3\hat{Q}_s^2, \quad (4.37)$$

onde \hat{G} é uma constante e \hat{Q}_s denota a taxa de fluxo constante.

Agora, podemos considerar a equação (4.37) da seguinte forma: (i) a taxa de fluxo de volume \hat{Q}_s é um dado ou (ii) o gradiente de pressão médio \hat{G} é um dado.

Primeiro, vamos considerar o caso (i). Se a taxa de fluxo de volume é dada na equação (4.37), a solução \hat{G} existe e é única independente do número de Reynolds e da geometria do tubo. No caso de (ii), se o gradiente de pressão médio é dado, a equação (4.37) torna-se não-linear. Portanto, a solução \hat{Q}_s pode existir ou não, e se existir,

pode ser única ou não. A seguir, consideramos o gradiente de pressão médio dado na equação (4.37).

Quando nós consideramos

$$\hat{A}_3 \neq 0, \quad (4.38)$$

a equação (4.37) é quadrática e pode ser resolvida de forma fechada para um fixo \hat{G} , dando duas raízes

$$\hat{Q}_{si} = \frac{-4\hat{A}_1 + (-1)^i \sqrt{16\hat{A}_1^2 + 4\hat{A}_3\hat{G}}}{2\hat{A}_3}, \quad i = 1, 2. \quad (4.39)$$

Existe uma solução real, se

$$16\hat{A}_1^2 + 4\hat{A}_3\hat{G} \geq 0. \quad (4.40)$$

Obviamente, se a condição (4.40) for estritamente positiva, a solução (4.39) não é única. Entretanto, se a condição (4.40) for identicamente igual a zero, a solução (4.39) é única.

Agora, vamos considerar

$$\hat{A}_3 = 0. \quad (4.41)$$

Isso corresponde ao caso de Stokes, ignorando os efeitos de inércia (segundo termo do lado direito de (4.37)). Esta é uma equação linear com a seguinte solução

$$\hat{Q}_s = \frac{\hat{G}}{4\hat{A}_1}, \quad (4.42)$$

que existe e é único se $\hat{A}_1 \neq 0$.

Agora, estudamos a estabilidade local da solução estacionária \hat{Q}_s . Vamos considerar o $\hat{q}(\hat{t})$ a perturbação para a solução constante \hat{Q}_s , a saber

$$\hat{Q}(\hat{t}) = \hat{Q}_s + \hat{q}(\hat{t}). \quad (4.43)$$

Depois de substituir (4.43) na equação (4.30) e fazer uso de (4.37), obtemos

$$0 = \left(4\hat{A}_1 + 2\hat{A}_3\hat{Q}_s\right)\hat{q}(\hat{t}) + \frac{2}{3}\mathcal{W}_0^2\hat{A}_2\dot{\hat{q}}(\hat{t}) + \hat{A}_3\hat{q}^2(\hat{t}). \quad (4.44)$$

A solução para a equação (4.44) é dada por

$$\hat{q}(\hat{t}) = \frac{\hat{q}(0)e^{-\beta_1\hat{t}}}{1 + \beta_2\hat{q}(0)(1 - e^{-\beta_1\hat{t}})}, \quad (4.45)$$

onde

$$\beta_1 = \frac{6\hat{A}_1 + 3\hat{A}_3\hat{Q}_s}{\mathcal{W}_0^2\hat{A}_2}, \quad \beta_2 = \frac{\hat{A}_3}{4\hat{A}_1 + 2\hat{A}_3\hat{Q}_s}, \quad (4.46)$$

e $\hat{q}(0)$ é o distúrbio inicial da solução estacionária \hat{Q}_s .

Vamos considerar β_1 positivo. Então, a magnitude da perturbação inicial pode ser escolhida pequena o suficiente para determinado valor de β_2 tal que o denominador em (4.45) será positivo para todos os tempos³. Portanto, a magnitude da perturbação decairá exponencialmente rápida para zero. Além disso, a solução \hat{Q}_s é localmente estável.

Agora, vamos considerar β_1 negativo. Neste caso, a solução \hat{Q}_s não é localmente estável e temos três situações: quando consideramos β_2 negativo, podemos escolher a perturbação inicial pequena o suficiente para que o denominador em (4.45) seja positivo para todos os tempos e no limite, como $\hat{t} \rightarrow \infty$, a solução (4.45) tende para $-1/\beta_2$. Para β_2 positivo, o denominador se tornará zero em um tempo finito. Ou seja, a perturbação inicial não pode ser escolhida pequena o suficiente para evitar a explosão⁴. Para $\beta_2 = 0$ a magnitude da perturbação tende para ∞ quando $\hat{t} \rightarrow \infty$.

Finalmente, quando consideramos $\beta_1 = 0$, a estabilidade local da solução \hat{Q}_s depende da magnitude da perturbação inicial.

Segue-se que a estabilidade local da solução estável \hat{Q}_s depende apenas do sinal de β_1 . Isto significa que depende do valor de \hat{Q}_s e também depende dos parâmetros geométricos $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3$.

Como um caso especial sobre a solução da perturbação (4.45), podemos considerar a estabilidade do estado restante, $\hat{Q}_s = 0$ (ver [38]). Neste caso, $\beta_1 = 6\hat{A}_1/(\mathcal{W}_0^2 \hat{A}_2)$ e o estado restante será estável para geometrias com \hat{A}_1 e \hat{A}_2 do mesmo sinal e instável para geometrias com \hat{A}_1 e \hat{A}_2 de sinal oposto.

Outro tipo de instabilidade é o caso de explodir em um tempo finito que ocorrerá quando o denominador em (4.45) se tornar zero em um tempo finito (ver [38]). Essa condição será atendida quando $\beta_1 \neq 0$ e

$$\hat{t} = -\frac{1}{\beta_1} \log\left(\frac{\beta_2 \hat{q}(0) + 1}{\beta_2 \hat{q}(0)}\right),$$

onde

$$\beta_2 \hat{q}(0) < -1 \vee \beta_2 \hat{q}(0) > 0. \quad (4.47)$$

Observa 4.1 *A possibilidade de que a solução \hat{q} possa explodir em um tempo finito, já que o denominador em (4.45) é zero, sugere que o modelo unidimensional deve ter restrições no fluxo não estacionário para qual condição (4.47) é válida (ver Robertson e Sequeira [38]).*

³Para $\beta_1 > 0$ a condição $0 \leq 1 - e^{-\beta_1 \hat{t}} < 1$ é válida para todos os tempos \hat{t} .

⁴Para $\beta_1 < 0$ a condição $1 - e^{-\beta_1 \hat{t}} \leq 0$ é válida para todos os tempos \hat{t} .

4.1.3 Resultados para um fluido Newtoniano em um tubo rectilíneo uniforme

O que segue tem por base o trabalho de Caulk e Naghdi [33] onde vamos comparar a solução exacta com a solução aproximada dada pela teoria de Cosserat, num tubo rectilíneo de raio constante ao longo do escoamento. Comparamos a solução aproximada dada por (4.18) com a solução exacta de Navier-Stokes para o fluxo de Poiseuille quando G é constante e o fluxo tem início no repouso (ou seja, $Q(0) = 0$). Vamos considerar um tubo uniforme de raio constante ϕ . A solução tridimensional exacta que relaciona o *gradiente de pressão média* com o *fluxo de volume* é dada por (ver Batchelor [39])

$$Q(t) = \frac{\pi G \phi^4}{8\mu} \left[1 - 32 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-4} e^{(-\lambda_n^2 \frac{\mu t}{\rho \phi^2})} \right], \quad (4.48)$$

onde $\lambda_n (n = 1, 2, \dots)$ são zeros da função de Bessel de ordem zero. Se a série infinita na equação (4.48) é aproximado pelo primeiro termo, a expressão para a taxa do fluxo de volume é dado por

$$Q(t) = \frac{\pi G \phi^4}{8\mu} \left[1 - 0.96 e^{(-5.78 \frac{\mu t}{\rho \phi^2})} \right]. \quad (4.49)$$

No caso especial de um tubo uniforme de raio constante, as constantes não-dimensionais (4.19) se reduzem a $A = B = 1$ and $C = 0$, e a solução de taxa de fluxo de volume da equação (4.18), é dada por

$$Q(t) = \frac{\pi G \phi^4}{8\mu} \left[1 - e^{(-6 \frac{\mu t}{\rho \phi^2})} \right], \quad (4.50)$$

que se aproxima da solução tridimensional exacta para o fluxo estacionário de Poiseuille quando $t \rightarrow \infty$, ver Figura 4.1. Podemos concluir que a teoria de Cosserat neste caso concreto é uma teoria alternativa a ter em conta para estudar modelos tridimensionais.

De seguida vamos apresentar o perfil da velocidade tridimensional (3.40) na secção circular do tubo rectilíneo com raio constante ao longo do escoamento com base na solução aproximada (4.30) para $\hat{G} = 1$ e $\hat{Q}(0) = 0$, para tal usamos um método de Runge-Kutta. A Figura 4.2, descreve o comportamento do fluxo ao longo do tempo, o qual tende para a solução estacionária. De seguida o perfil da velocidade (3.40) na secção circular do tubo para vários tempos, com base no fluxo dado por (4.30). Podemos confirmar que os resultados obtidos na Figura 4.13 e Figura 4.14 estão de acordo com o esperado via Figura 4.2, a intensidade da velocidade é mais notória na fase de transição antes do fluxo convergir para a solução estacionária. De seguida, vamos apresentar o gradiente de pressão média como uma função que depende do tempo. Consideramos gradiente de pressão média não constante, dado pela equação

$$\hat{G}(\hat{t}) = 1 + \frac{\sin^2(\hat{t})}{e^{\hat{t}}}, \quad (4.51)$$

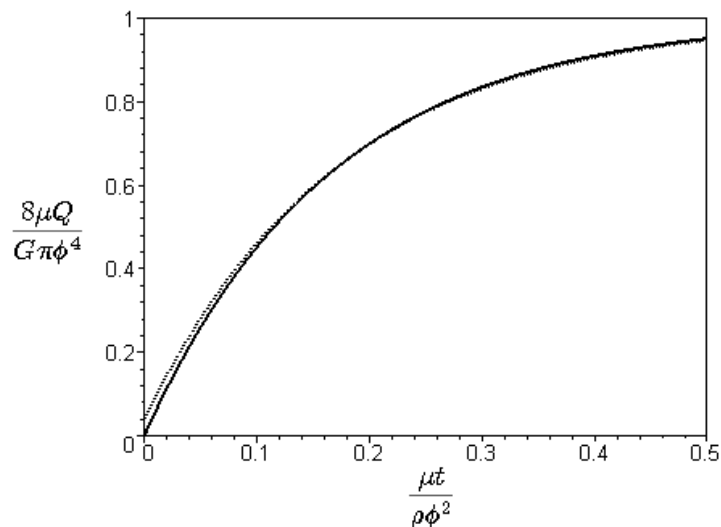


Figura 4.1: Fluxo volumétrico com $Q(0) = 0$ em um tubo rectilíneo uniforme: solução tridimensional exacta (4.49) (linha a pontos) e solução de Cosserat (4.50) (linha escura).

que mostra um comportamento interessante, ver Figura 4.5. Com base no gradiente de pressão média a depender do tempo (4.51), vamos ver o comportamento do fluxo não estacionário dado pela equação diferencial ordinária (4.30), ver Figura 4.6.

As Figuras 4.7 e 4.8, ilustram o comportamento do velocidade tridimensional na secção circular do tubo, com base na solução do fluxo com gradiente de pressão média dada por (4.51).

4.2 Fluido Newtoniano generalizado

Vamos considerar o tensor de tensão extra (i.e., \mathbf{T}_E em (2.31)) com componentes definidos por

$$\sigma_{ij} = \mu(|\dot{\gamma}|)A_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (4.52)$$

onde para cada $i, j = 1, 2, 3$, temos

$$A_{ij} = \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i},$$

e

$$\mu(|\dot{\gamma}|) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+,$$

é a *função viscosidade*.

Em seguida, consideraremos uma *função de viscosidade* específica em (4.52) para um fluxo rectilíneo.

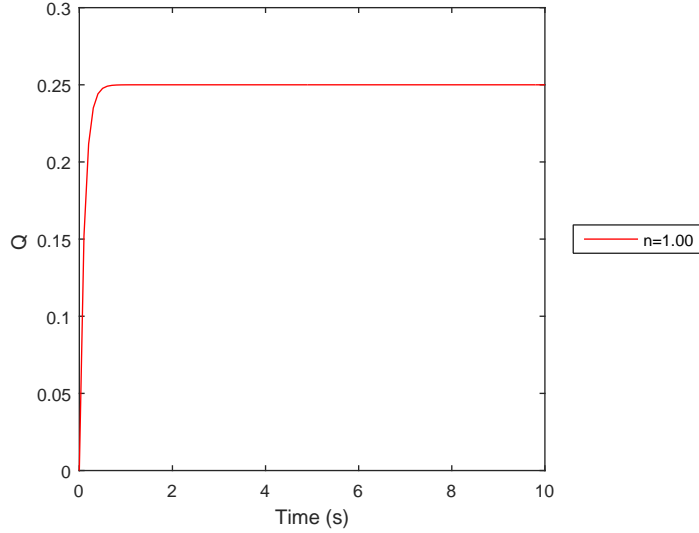


Figura 4.2: Fluxo não estacionário dado por (4.30) com $\hat{G} = 1$, $\hat{Q}(0) = 0$ e $\mathcal{W}_o = 0.8$ ao longo do tempo.

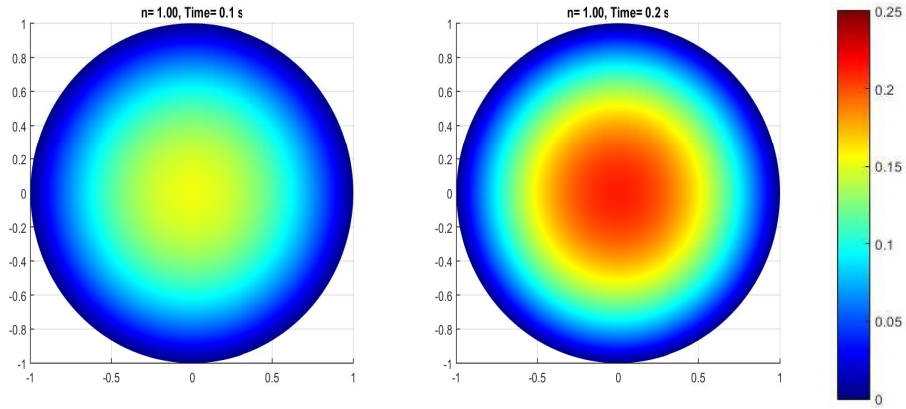


Figura 4.3: Campo de velocidade tridimensional (3.40) em que a taxa de fluxo de volume é obtida por (4.30) com gradiente de pressão média $\hat{G}(\hat{t}) = \hat{G} = 1$, $\hat{Q}(0) = 0$, $\mathcal{W}_o = 0.8$ com raio constante ao longo do escoamento. Parâmetros de tempo: $\hat{t} = 0.1, \hat{t} = 0.2$.

4.2.1 Modelo de lei de potência

Vamos considerar a equação (4.52), onde a função *viscosidade* é dada por (2.38), i.e.,

$$\mu(|\dot{\gamma}|) = k|\dot{\gamma}|^{n-1}$$

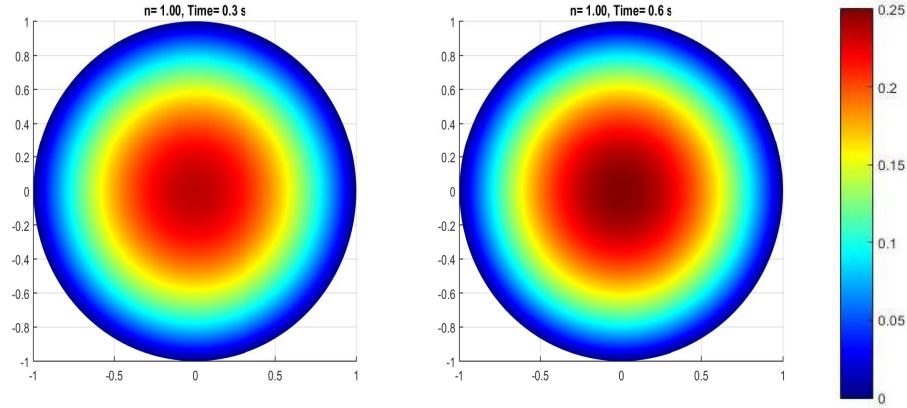


Figura 4.4: Campo de velocidade tridimensional (3.40) em que a taxa de fluxo de volume é obtida por (4.30) com gradiente de pressão média $\hat{G}(\hat{t}) = \hat{G} = 1$, $\hat{Q}(0) = 0$, $\mathcal{W}_o = 0.8$ com raio constante ao longo do escoamento. Parâmetros de tempo: $\hat{t} = 0.3$, $\hat{t} = 0.6$.

Como observado anteriormente, se $n < 1$ a viscosidade é de desbaste, e se $n > 1$ a viscosidade é de espessamento por cisalhamento; para $n = 1$ recuperamos o fluxo Newtoniano.

Usando os cálculos descritos para o caso Newtoniano, mas agora para a situação generalizada, temos que a equação não estacionária para pressão média é dada por

$$\bar{p}_z(z, t) = -\frac{4\rho Q_t(t)}{3\pi\phi^2} - \frac{4k(2^{\frac{5n+1}{2}})Q^n(t)}{(n+3)\pi^n\phi^{3n+1}}. \quad (4.53)$$

Integrando a equação (4.53) para a secção finita do tubo com $z_1 < z_2$, obtemos a equação diferencial ordinária relacionada com o gradiente de pressão média ao longo do intervalo $[z_1, z_2]$ no momento t , dado por

$$G(t) = \frac{\bar{p}(z_1, t) - \bar{p}(z_2, t)}{z_2 - z_1} = \frac{4\rho Q_t(t)}{3\pi\phi^2} + \frac{4k(2^{\frac{5n+1}{2}})Q^n(t)}{(n+3)\pi^n\phi^{3n+1}}. \quad (4.54)$$

4.2.2 A dimensionalização

Agora, vamos considerar as seguintes variáveis adimensionais

$$\hat{t} = \omega_0 t, \quad \hat{Q} = \frac{2\rho}{\pi\phi k} Q, \quad \hat{G} = \frac{\rho^n \phi^{2n+1}}{k^{n+1}} G, \quad (4.55)$$

onde ω_0 é a frequência característica para fluxos não estacionários. Nos casos em que o fluxo volumétrica constante é especificada, o fluxo \hat{Q} é idêntico ao clássico \mathcal{R}_e (número

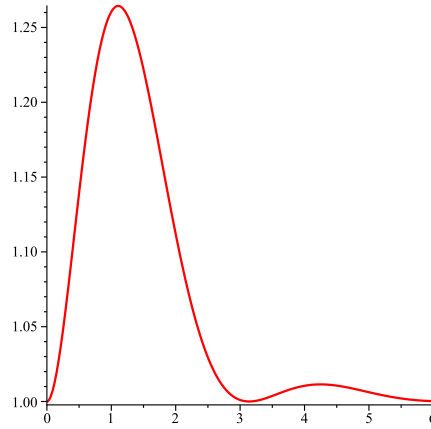


Figura 4.5: Gradiente de pressão média a depender do tempo.

de Reynolds) usado para o fluxo em tubos. Substituindo as novas variáveis (4.55) na equação (4.54), obtemos a equação diferencial ordinária relacionada com o gradiente de pressão média não-dimensional

$$\hat{G}(\hat{t}) = \frac{2}{3}\mathcal{W}_o^2\hat{Q}_{\hat{t}}(\hat{t}) + \frac{2^{\frac{3n+5}{2}}}{n+3}\hat{Q}^n(\hat{t}), \quad (4.56)$$

onde $\mathcal{W}_o = \phi^n \sqrt{\rho^n \omega_0 / k^n}$ é o número de Womersley. Da equação (4.56), a taxa de fluxo de volume no caso estacionário é dada por

$$\hat{Q} = \sqrt[n]{\frac{n+3}{2^{\frac{3n+5}{2}}}\hat{G}}. \quad (4.57)$$

A fim de avaliar as previsões de fluxo da teoria unidimensional desenvolvida aqui, em seguida, consideramos o fluxo de volume tridimensional exacto de um fluxo constante assimétrico através de um tubo rectilíneo com secção transversal circular constante, dada por (ver Bird et al. [12])

$$\tilde{Q} = \frac{n}{3n+1} \sqrt[n]{2^{n-1}\hat{G}}. \quad (4.58)$$

4.2.3 Resultados para um fluido Newtoniano generalizado em um tubo rectilíneo uniforme

No caso estacionário, vamos comparar a solução exacta de taxa de fluxo de volume (4.58) com a solução aproximada de taxa de fluxo de volume (4.57). Comparando a solução aproximada para a taxa de fluxo de volume com a solução exacta, podemos

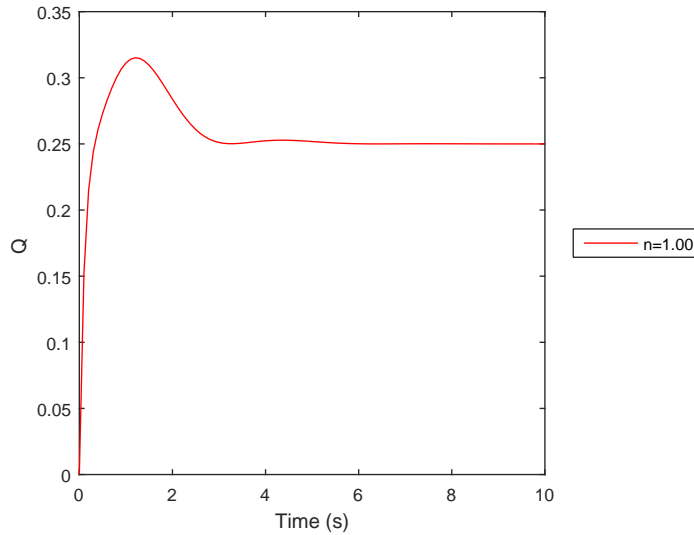


Figura 4.6: Fluxo não estacionário dado por (4.30) com gradiente de pressão média (4.51), $\hat{Q}(0) = 0$ e $\mathcal{W}_o = 0.8$ ao longo do tempo.

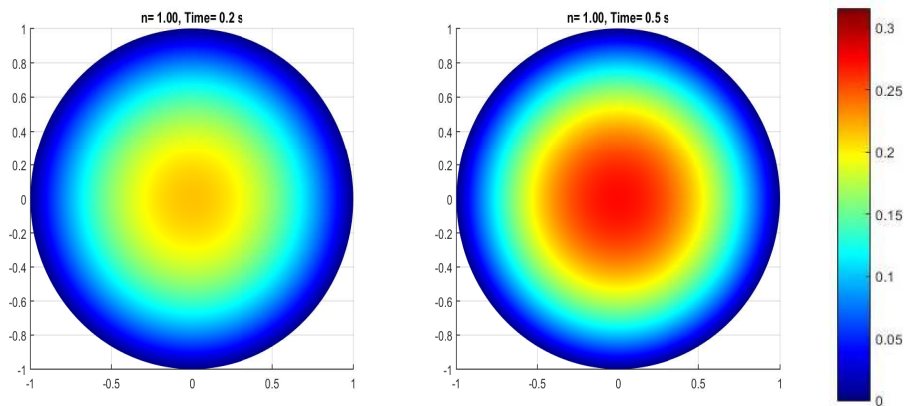


Figura 4.7: Campo de velocidade tridimensional (3.40) em que a taxa de fluxo de volume é obtida por (4.30) com gradiente de pressão média (4.51), $\hat{Q}(0) = 0$, $\mathcal{W}_o = 0.8$ com raio constante ao longo do escoamento. Parâmetros de tempo: $\hat{t} = 0.2, \hat{t} = 0.5$.

concluir que a aproximação é excelente para o caso do fluido de diluição de cisalhamento, que é o relevante neste trabalho, ver Figura 4.9. Considerando essa comparação, podemos afirmar que, neste caso, a teoria de Cosserat é válida para valores de índice de fluxo tais que $0 \ll n < 1$ com pequena faixa de gradiente de pressão média. A situação $n \rightarrow 0$ é negligenciada porque não tem significado físico neste trabalho. No caso de fluido de espessamento, a comparação é relevante à medida que o índice de

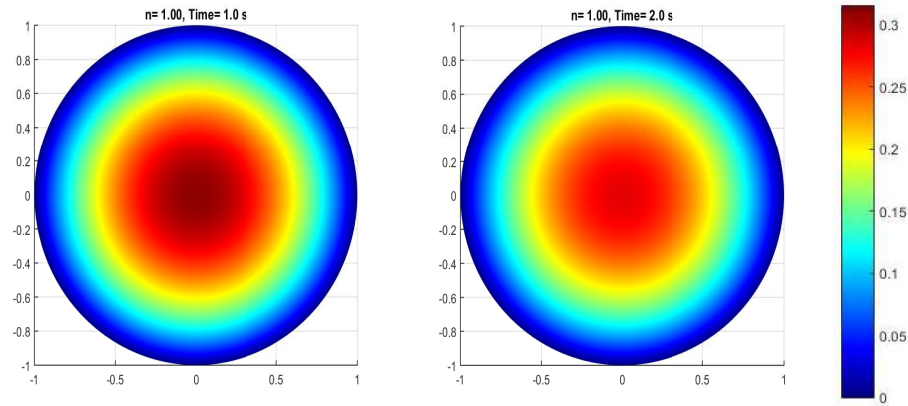


Figura 4.8: Campo de velocidade tridimensional (3.40) em que a taxa de fluxo de volume é obtida por (4.30) com gradiente de pressão média (4.51), $\hat{Q}(0) = 0$, $\mathcal{W}_o = 0.8$ com raio constante ao longo do escoamento. Parâmetros de tempo: $\hat{t} = 1.0, \hat{t} = 2.0$.

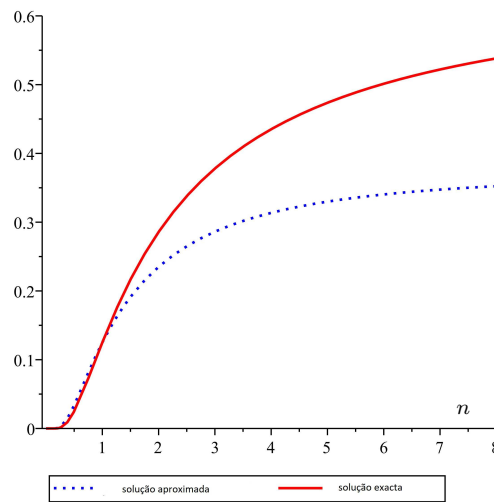


Figura 4.9: Comparação entre a solução exacta (4.58) e a solução aproximada (4.57) para a taxa de fluxo constante em função do índice de fluxo com pequeno gradiente de pressão média $\hat{G} = 0.5$.

fluxo aumenta, consulte Figura 4.9. Além disso, podemos concluir que a solução de aproximação (4.57) mantém genericamente o seu comportamento quando aumentamos o gradiente de pressão média, ver Figura 4.9 e Figura 4.10.

Na Figura 4.11, podemos observar o comportamento da solução de fluxo não estacionário dada por (4.56) obtida usando um método Runge-Kutta com gradiente de pressão média constante $\hat{G}(\hat{t}) = \hat{G} = 1$ no caso de fluido de afinamento quando au-

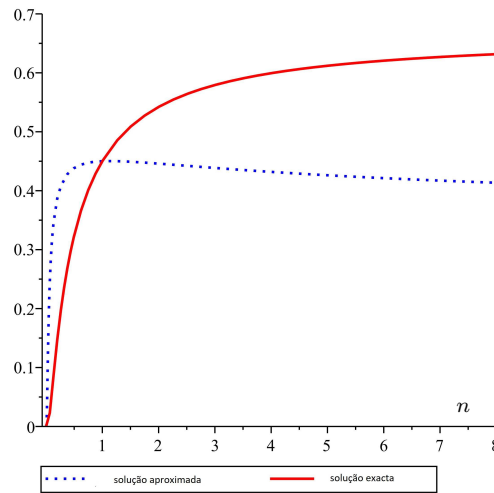


Figura 4.10: Comparação entre a solução exacta (4.58) e a solução aproximada (4.57) para a taxa de fluxo constante em função do índice de fluxo com gradiente de pressão média $\hat{G} = 1.8$.

mentamos o número de Womersley. Observamos que, à medida que o índice de fluxo n aumenta, a amplitude da solução na fase transitória inicial também aumenta e se torna menos pronunciada à medida que o número de Womersley aumenta. Neste caso particular de um gradiente de pressão média constante, o sistema (4.56) converge para uma solução de estado estacionário. Quando nos movemos de uma situação de fluido de diluição de cisalhamento para fluido de espessamento, o comportamento da solução de taxa de fluxo de volume é semelhante, ou seja, à medida que aumentamos o índice de fluxo aumenta a amplitude da solução na fase transitória inicial, ver Figura 4.12.

A Figura 4.13 e a Figura 4.14, ilustram o comportamento da velocidade tridimensional (3.40) na secção transversal circular do tubo na fase inicial de transição, e podemos ver o aumento da intensidade de velocidade à medida que aumentamos o índice de fluxo no caso de um fluido de diluição de cisalhamento. No caso do fluido de espessamento, ver Figura 4.15 e Figura 4.16, podemos verificar que o aumento do índice de fluxo do fluido de diluição de cisalhamento para o fluido de espessamento de cisalhamento aumenta a intensidade do campo de velocidade para a mesma fase de transição inicial com os mesmos regimes de fluxo.

Considerando o gradiente de pressão médio (4.51) na equação (4.56) e usando um método Runge-Kutta para regimes de fluxo específicos, podemos obter informações sobre o comportamento da taxa de vazão volumétrica. Na Figura 4.17, temos resultados para a taxa de fluxo de volume no caso de fluido de diluição de cisalhamento. Aqui podemos ver a amplitude do aumento do fluxo de volume com o índice de fluxo na fase de transição inicial, que tende a seguir o comportamento da função de gradiente

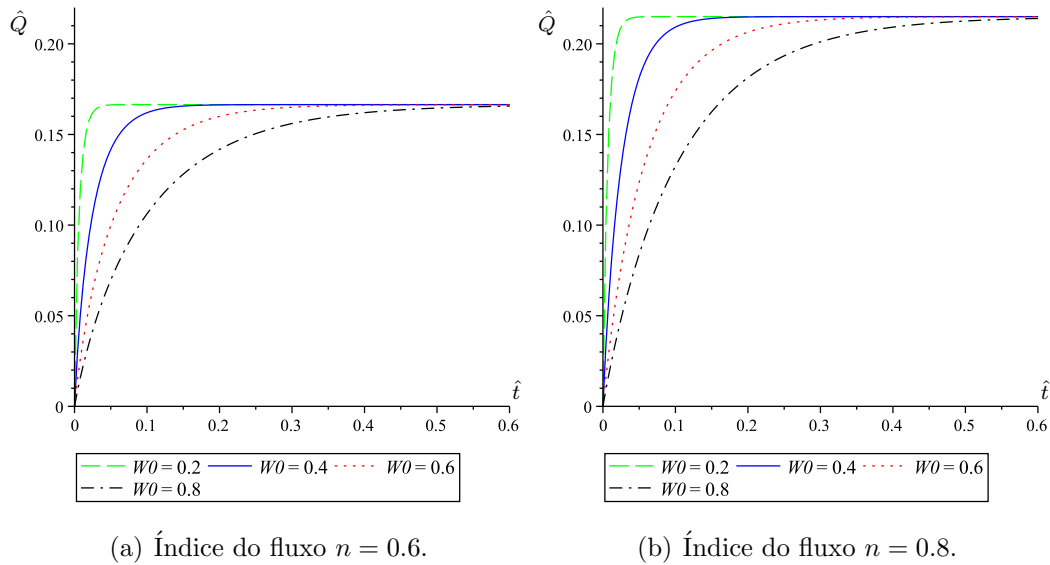


Figura 4.11: Taxa de fluxo volumétrico não estacionário (4.56) com gradiente de pressão média constante $\hat{G}(\hat{t}) = \hat{G} = 1$ em que $\hat{Q}(0) = 0$, $\mathcal{W}_o = (0.2, 0.4, 0.6, 0.8)$ para fluido de diluição de cisalhamento.

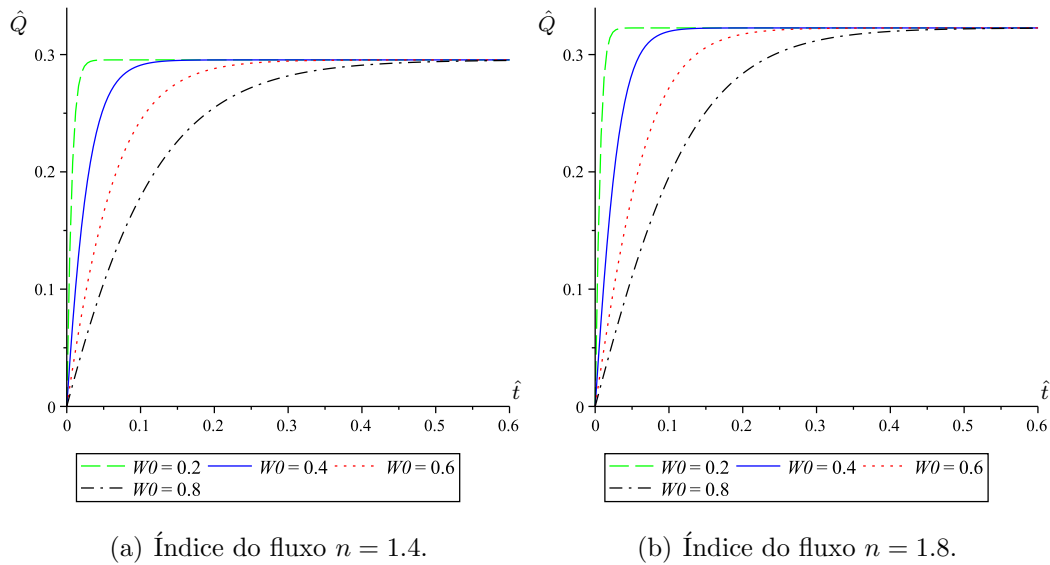


Figura 4.12: Taxa de fluxo volumétrico instável (4.56) com gradiente de pressão média constante $\hat{G}(\hat{t}) = \hat{G} = 1$ em que $\hat{Q}(0) = 0$, $\mathcal{W}_o = (0.2, 0.4, 0.6, 0.8)$ para fluido espessante.

de pressão média (4.51), as flutuações na solução diminuem em tempo.

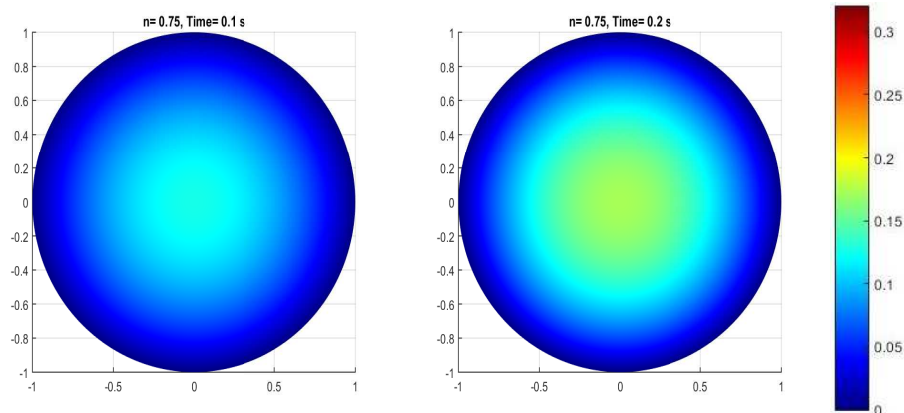


Figura 4.13: Campo de velocidade tridimensional (3.40) onde o fluxo de volume é obtido por (4.56) com gradiente de pressão média $\hat{G}(\hat{t}) = \hat{G} = 1$, $\hat{Q}(0) = 0$, $\mathcal{W}_o = 0.8$ e $n = 0.75$ (fluido de diluição de cisalhamento). Parâmetros de tempo: $\hat{t} = 0.1, \hat{t} = 0.2$.

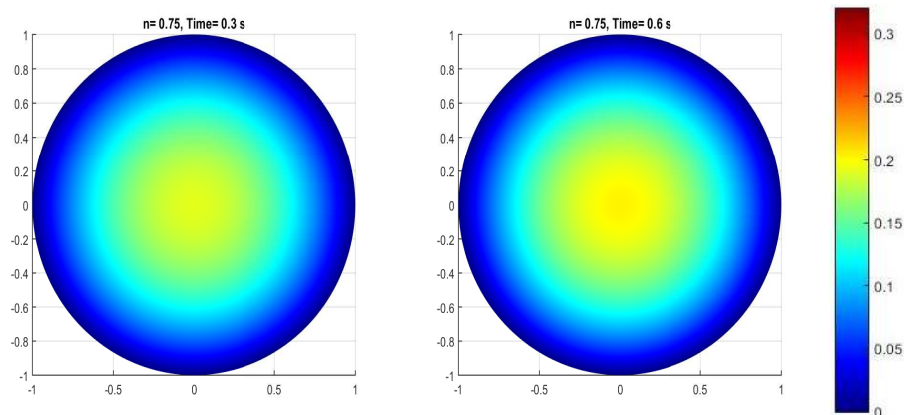


Figura 4.14: Campo de velocidade tridimensional (3.40) onde o fluxo de volume é obtido por (4.56) com gradiente de pressão média $\hat{G}(\hat{t}) = \hat{G} = 1$, $\hat{Q}(0) = 0$, $\mathcal{W}_o = 0.8$ e $n = 0.75$ (fluido de diluição de cisalhamento). Parâmetros de tempo: $\hat{t} = 0.3, \hat{t} = 0.6$.

A Figura 4.18 mostra-nos que na fase de transição inicial a amplitude da vazão volumétrica tende a aumentar com o aumento do índice de vazão. Portanto, a Figura 4.17 e a Figura 4.18 mostram-nos a evolução da taxa de fluxo de volume à medida que passamos de uma situação de fluido de diluição de cisalhamento para uma situação de fluido de espessamento de cisalhamento. Em seguida, veremos o comportamento do campo de velocidade tridimensional.

A Figura 4.19 e Figura 4.20, mostra-nos a intensidade do campo de velocidade tridimensional (3.40) para regimes de fluxo específicos no caso de um fluido de desbaste de cisalhamento durante a fase de transição inicial. Em comparação com o caso do

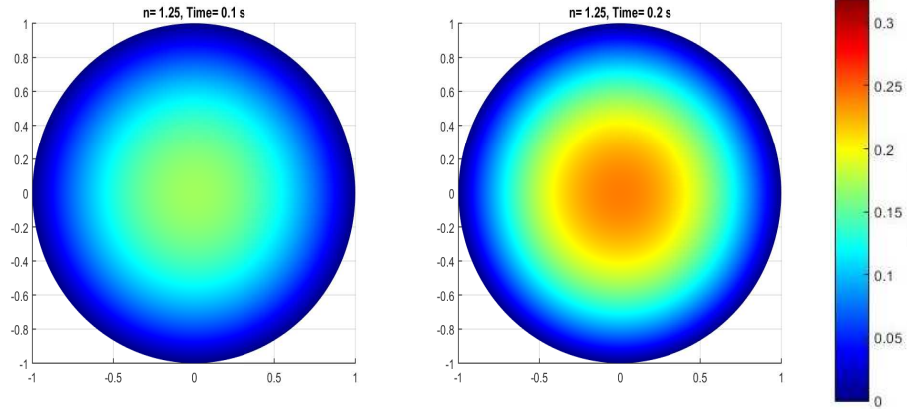


Figura 4.15: Campo de velocidade tridimensional (3.40) onde o fluxo de volume é obtido por (4.56) com gradiente de pressão média $\hat{G}(\hat{t}) = \hat{G} = 1$, $\hat{Q}(0) = 0$, $\mathcal{W}_o = 0.8$ e $n = 1.25$ (fluido de espessamento). Parâmetros de tempo: $\hat{t} = 0.1, \hat{t} = 0.2$.

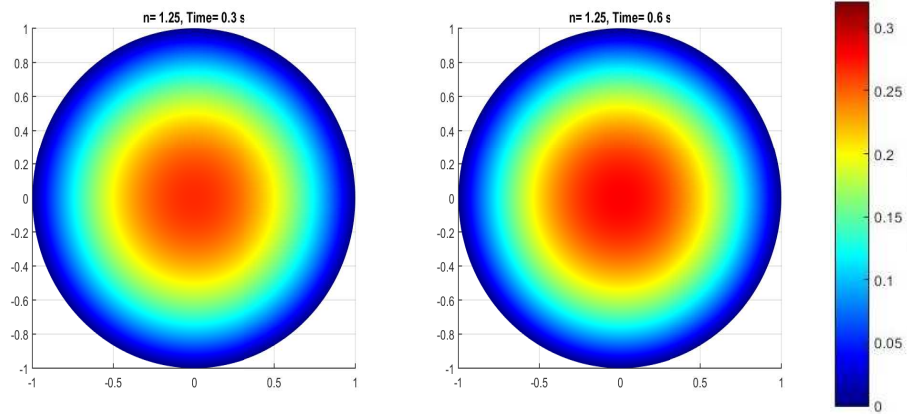


Figura 4.16: Campo de velocidade tridimensional (3.40) onde o fluxo de volume é obtido por (4.56) com gradiente de pressão média $\hat{G}(\hat{t}) = \hat{G} = 1$, $\hat{Q}(0) = 0$, $\mathcal{W}_o = 0.8$ e $n = 1.25$ (fluido de espessamento). Parâmetros de tempo: $\hat{t} = 0.3, \hat{t} = 0.6$.

gradiente de pressão média constante, podemos ver que, neste caso, onde o gradiente de pressão médio é não constante, a intensidade do campo de velocidade aumenta durante a fase de transição inicial. As mesmas conclusões para o caso do fluido de espessamento, ver Figura 4.21 e Figura 4.22.

4.2.4 Propriedades gerais para fluxo estacionário

Em muitas aplicações físicas envolvendo fluxos de fluidos em domínios específicos, é importante determinar as mudanças nas características de fluxo induzidas por per-

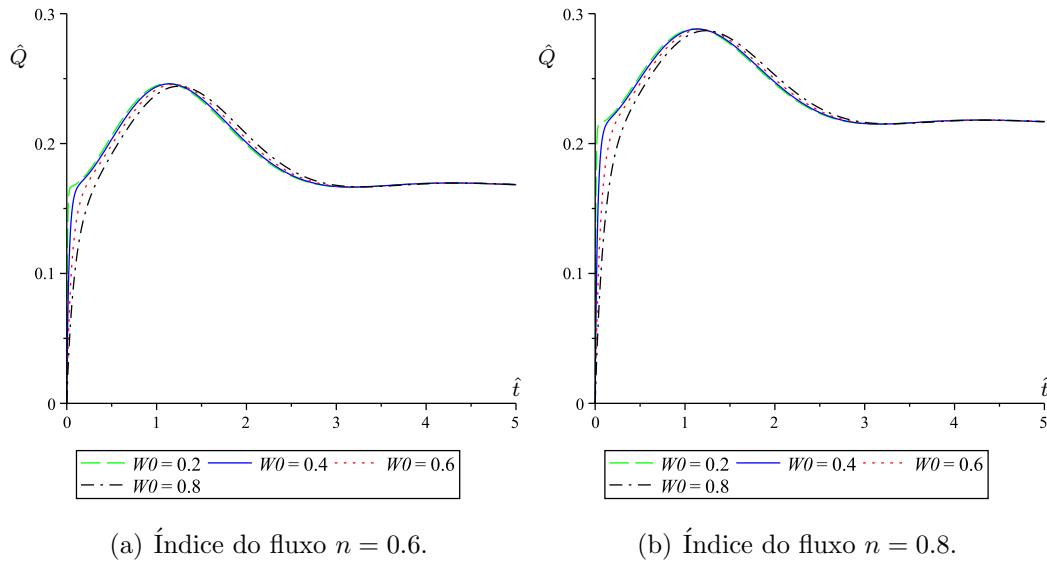


Figura 4.17: Fluxo não estacionário (4.56) com gradiente de pressão média não constante (4.51) onde $\hat{Q}(0) = 0$ e $\mathcal{W}_o = (0.2, 0.4, 0.6, 0.8)$ para fluido de desbaste.

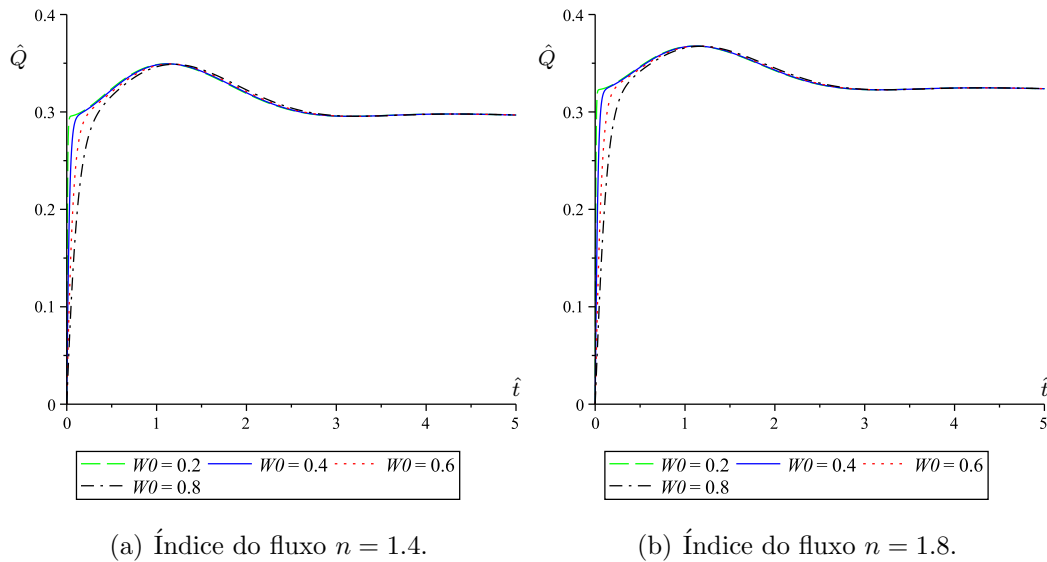


Figura 4.18: Fluxo não estacionário (4.56) com gradiente de pressão média não constante (4.51) onde $\hat{Q}(0) = 0$ e $\mathcal{W}_o = (0.2, 0.4, 0.6, 0.8)$ para fluido de espessamento.

turbações nos dados iniciais ou de fronteira, forças corporais ou queda de pressão. De facto, uma vez que é virtualmente impossível manter uma queda de pressão exatamente constante, deve-se ser capaz de prever quanto uma perturbação de magnitude

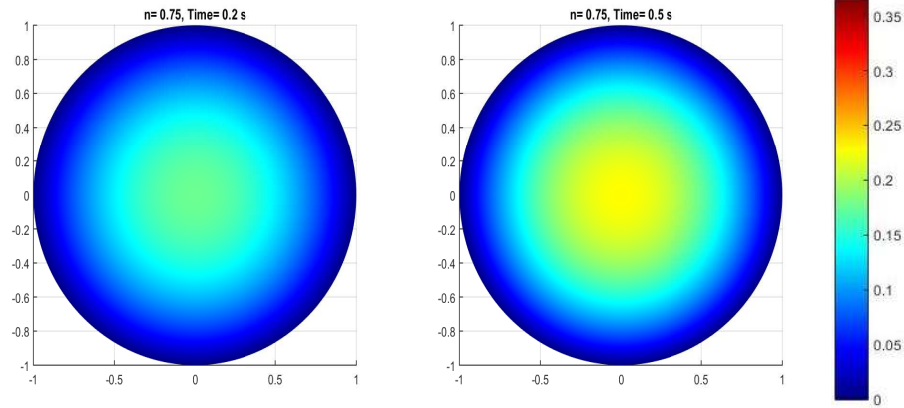


Figura 4.19: Campo de velocidade tridimensional (3.40) onde o fluxo de volume é obtido por (4.56) com gradiente de pressão média (4.51), $\hat{Q}(0) = 0$, $\mathcal{W}_o = 0.8$ e $n = 0.75$ (fluido de diluição de cisalhamento). Parâmetros de tempo: $\hat{t} = 0.2, \hat{t} = 0.5$.

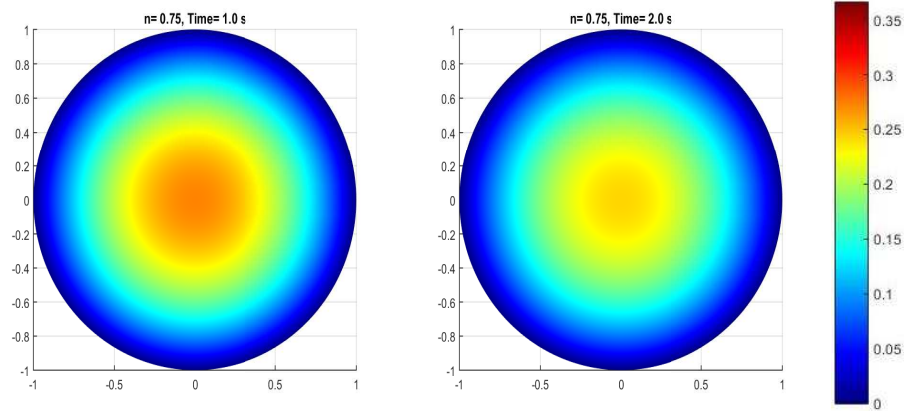


Figura 4.20: Campo de velocidade tridimensional (3.40) onde o fluxo de volume é obtido por (4.56) com gradiente de pressão média (4.51), $\hat{Q}(0) = 0$, $\mathcal{W}_o = 0.8$ e $n = 0.75$ (fluido de diluição de cisalhamento). Parâmetros de tempo: $\hat{t} = 1, \hat{t} = 2$.

dada na queda de pressão afetará a vazão volumétrica. Portanto, vamos considerar uma perturbação uniforme de magnitude ε na função (4.51) (ver Figura 4.23). Para cada $\varepsilon > 0$, definindo as quantidades,

$$\hat{G}_\varepsilon^+(\hat{t}) = (1 + \varepsilon)\hat{G}(\hat{t}), \quad \hat{G}_\varepsilon^-(\hat{t}) = (1 - \varepsilon)\hat{G}(\hat{t}), \quad (4.59)$$

nós denotamos por \hat{Q}_ε^+ e \hat{Q}_ε^- os caudais volumétricos perturbados correspondentes \hat{G}_ε^+ e \hat{G}_ε^- , respectivamente. Em seguida, consideraremos uma perturbação na solução aproximada (4.56) obtida pela teoria de Cosserat e verificaremos a estabilidade da solução unidimensional.

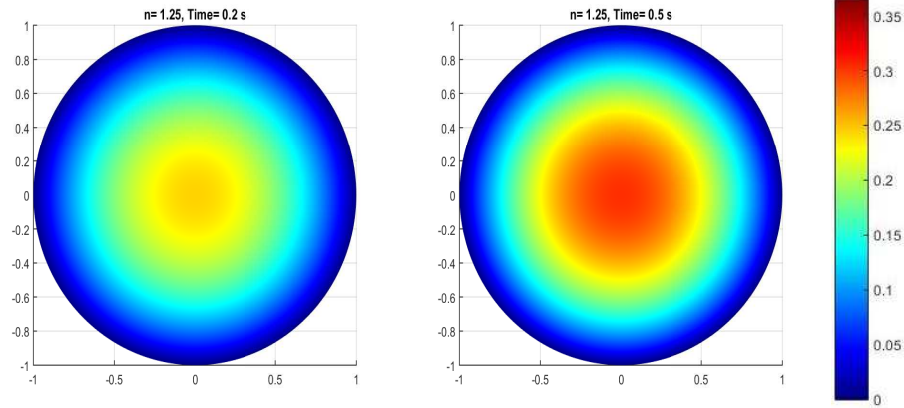


Figura 4.21: Campo de velocidade tridimensional (3.40) onde o fluxo de volume é obtido por (4.56) com gradiente de pressão média (4.51), $\hat{Q}(0) = 0$, $\mathcal{W}_o = 0.8$ e $n = 1.25$ (fluido de espessamento). Parâmetros de tempo: $\hat{t} = 0.2, \hat{t} = 0.5$.

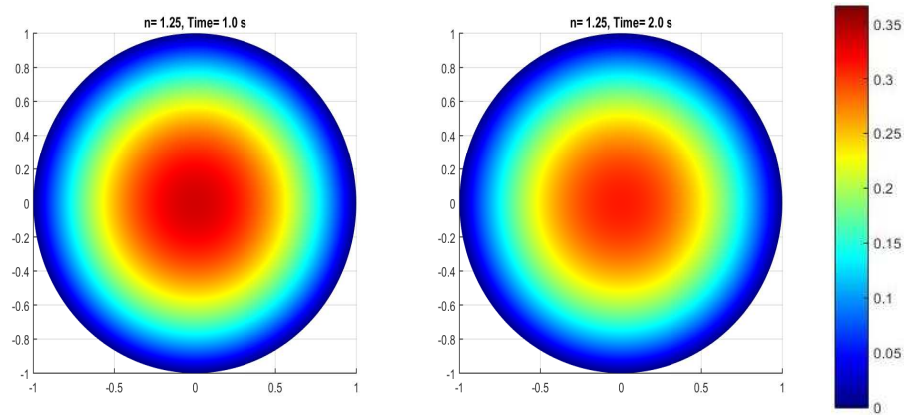


Figura 4.22: Campo de velocidade tridimensional (3.40) onde o fluxo de volume é obtido por (4.56) com gradiente de pressão média (4.51), $\hat{Q}(0) = 0$, $\mathcal{W}_o = 0.8$ e $n = 1.25$ (fluido de espessamento). Parâmetros de tempo: $\hat{t} = 1, \hat{t} = 2$.

Considerando a perturbação

$$\hat{G}_\varepsilon^\pm = (1 \pm \varepsilon)\hat{G},$$

onde \hat{G} é um gradiente de pressão média constante, para suficientemente grande \hat{t} , após a fase transitória inicial, podemos usar a caracterização da solução constante deduzida em (4.57), e calcular explicitamente a taxa de fluxo de volume perturbado, usando

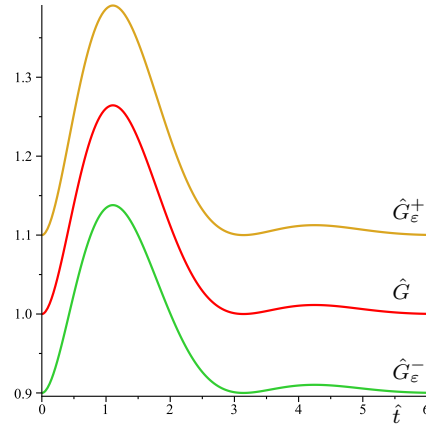


Figura 4.23: Perturbação multiplicativa do gradiente de pressão média (4.51), com magnitude $\varepsilon = 0.1$.

(4.59), da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \hat{Q}_\varepsilon^\pm &= \sqrt[n]{\frac{n+3}{2^{\frac{3n+5}{2}}}} \hat{G}_\varepsilon^\pm = \sqrt[n]{\frac{n+3}{2^{\frac{3n+5}{2}}}} (1 \pm \varepsilon) \hat{G} \\
 &= \sqrt[n]{\frac{n+3}{2^{\frac{3n+5}{2}}}} \hat{G} (1 \pm \varepsilon)^{1/n} \\
 &= \hat{Q} (1 \pm \varepsilon)^{1/n}.
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

Normalizando o caudal volumétrico acima perturbado \hat{Q}_ε^\pm pela taxa de fluxo volumétrico imperturbável \hat{Q} , obtemos

$$\frac{\hat{Q}_\varepsilon^\pm}{\hat{Q}} = (1 \pm \varepsilon)^{1/n}, \tag{4.61}$$

o que significa que no caso estável, esse tipo de perturbação multiplicativa age linearmente. Alterando o gradiente de pressão médio por um fator de $(1 \pm \varepsilon)$, alteramos a taxa de fluxo de volume não perturbado por um fator de $(1 \pm \varepsilon)^{1/n}$. Em particular, isto mostra que a solução de estado estacionário é linearmente estável. Perturbações serão insignificantes se $(1 \pm \varepsilon)^{1/n} \simeq 1$, que acontece quando $\varepsilon \rightarrow 0$ (ou seja, para pequenas mudanças no gradiente de pressão média) ou quando o fluxo índice relacionado à viscosidade vai para o infinito, ou seja, fluidos de cisalhamento com alto índice de fluxo. No caso do gradiente de pressão média não constante, as mesmas idéias se mantêm, além do facto de que não é mais possível deduzir expressões exactas para fluxos de volume perturbadas.

Capítulo 5

Conclusões e Trabalho de Futuro

Este trabalho de dissertação foi focado nas aplicações da teoria de Cosserat para fluidos Newtonianos e fluidos Newtonianos generalizados. No caso de um fluido Newtoniano, obtivemos via teoria de Cosserat uma equação diferencial ordinária não estacionária que envolve o gradiente de pressão média, o fluxo, a geometria do tubo e o número de Womersley. No caso particular de um tubo retilíneo com raio constante ao longo do escoamento concluímos que a teoria de Cosserat nos fornece uma boa aproximação em comparação com a solução exacta, apresentamos o comportamento do fluxo ao longo do tempo fixando alguns parâmetros e, ainda, a velocidade tridimensional na secção circular do tubo. Apresentámos condições de estabilidade para a solução estacionária. No caso de um fluido Newtoniano generalizado, estudamos o caso mais simples por imposição computacional, ou seja, o caso de um tubo retilíneo com raio constante ao longo do escoamento onde a função de viscosidade é do tipo lei de potência e, obtivemos a relação não estacionária entre o gradiente de pressão média, o fluxo, o número de Womersley e o índice do fluido. Foi apresentado o comportamento do fluxo e da velocidade tridimensional na secção circular do tubo para dados fixos, nos casos de um fluido de espessamento e um fluido de diluição de cisalhamento. A solução apresentada revelou-se interessante visto existir uma solução exacta para comparação, e no caso de um fluido de diluição de cisalhamento a teoria de Cosserat aparenta ser uma alternativa viável. Apresentámos condições de estabilidade para a solução estacionária. Os problemas em aberto na área da mecânica dos fluidos para estudar com esta teoria alternativa são, entre outros: tubos curvos e interacção fluido-estrutura.

Bibliografia

- [1] F. Carapau, Development of 1D fluid Models using the Cosserat Theory. Numerical Simulation and Applications to Haemodynamics, *Ph.D. thesis on Mathematics: IST-UTL*, Publicações Instituto Superior Técnico, Lisboa, 2005.
- [2] D.A. Caulk, and P.M. Naghdi, *Axisymmetric motion of a viscous fluid inside a slender surface of revolution*, Journal of Applied Mechanics, vol. 54, pp. 190-196, 1987.
- [3] F. Carapau, and A. Sequeira, *1D Models for Blood Flow in Small Vessels Using the Cosserat Theory*, WSEAS Transactions on Mathematics, vol. 5, no. 1, pp. 54-62, 2006.
- [4] A.E. Green, P.M. Naghdi, and M.L. Wenner, *On the theory of rods II. Developments by direct approach*, Proc. R. Soc. Lond. A, Vol.337, pp.485-507, 1974.
- [5] A.E. Green, N. Laws, and P.M. Naghdi, *Rods, plates and shells*, Proc. Camb. Phil. Soc., Vol.64, pp.895-913, 1968.
- [6] L.E. Marvern, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall, Inc, 1969.
- [7] G.P. Galdi, *Advanced Fluid Mechanics*, University of Pittsburgh, Classnotes, 2000.
- [8] G. Astarita, and G. Marrucci, *Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Mc-Graw-Hill, London, 1974.
- [9] B.D. Coleman, H. Markovitz, and WQ. Noll, *Viscometric Flows of Non-Newtonian Fluids*, Springer-Verlag, Berlin, 1966.
- [10] C.A. Truesdell, *A First Course in Rational Continuum Mechanics*, Academic Press, second edition, 1991.
- [11] S.L. Rosen, *Fundamental Principles of Polymeric Materials*, second edition, Wiley, 1993.

-
- [12] B.R. Bird, R.C Armstrong, and O. Hassager, *Dynamics of Polymeric Liquids*, second edition, John Wiley and Sons, Vol.1, 1987.
- [13] N.P. Cheremisinoff, *Rheology and Non-Newtonian Flows, Encyclopedia of Fluid Mechanics*, N.P. Cheremisinoff Editor, Vol.7, 1986.
- [14] E. Marušić-Paloka, *Steady Flow of a non-Newtonian Fluid in Unbounded Channels and Pipes*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Vol.10, N 9, pp.1425-1445, 2000.
- [15] R.E. Power, and H. Eyring, Mechanism for Relaxation Theory of Viscosity, *Nature*, Vol.154, pp.427-428, 1944.
- [16] Y.I. Cho, and K.R. Kensey, Effects of Non-Newtonian Viscosity of Blood on Flows in a Diseased Arterial Vessel, Part 1: Steady Flows, *Biorheology*, Vol.28, pp.41-262, 1991.
- [17] K.K. Yeleswarapu, *Evaluation of Continuum Models for Characterizing the Constitutive Behavior of Blood*, Phd thesis, University of Pittsburgh, 1996.
- [18] A.E. Green, P.M. Naghdi, and M.L. Wenner, On the theory of rods II. Developments by direct approach, *Proc. R. Soc. Lond. A*, Vol.337, pp.485-507, 1974.
- [19] P. Duhem *Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique*, Ann. École Norm, Vol.10, pp.187-230, 1893.
- [20] E. Cosserat, and F. Cosserat, Sur la théorie des corps minces, *Compt. Rend.*, Vol.146, pp.169-172, 1908.
- [21] E. Cosserat, and F. Cosserat, Théorie des corps déformables, *Chwolson's Traité de Physique*, 2nd ed. Paris, pp.953-1173, 1909.
- [22] J.L. Ericksen, and C. Truesdell, Exact theory of stress and strain in rods and shells, *Arch. Rational Mech. Anal.*, Vol.1, pp.295-323, 1958.
- [23] J.L Ericksen, Conservation laws for liquid crystals, *Trans. Soc. Rheol.*, Vol.5, pp.23-34, 1961.
- [24] C.A. Truesdell, and R. Toupin, *The Classical Field Theories*, Handbuch der Physik, Vol.III, pp.226-793, 1960.
- [25] R. Toupin, Theories of elasticity with couple-stress, *Arch. Rational Mech. Anal.*, Vol.17, pp.85-112, 1964.
- [26] A.E. Green, N. Laws, and P.M. Naghdi, Rods, plates and shells, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, Vol.64, pp.895-913, 1968.

- [27] A.E. Green, P.M. Naghdi, and W.L. Waiwright, A general theory of a Cosserat surface, *Arch. Rational Mech. Anal.*, Vol.20, pp.287-308, 1965.
- [28] A.E. Green, and P.M. Naghdi, A Directed fluid sheets, *Proc. R. Soc. Lond. A.*, Vol.347, pp.447-407, 1976.
- [29] A.E. Green, P.M. Naghdi, and R.S. Rivlin, Directors and multipolar displacements in continuum mechanics, *Int. J. Engng. Sci.*, Vol.2, pp.611-620, 1965.
- [30] P.M. Naghdi, Fluid Jets and Fluid Sheets: A Directed formulation, *Proc. 12th Symp. on Naval Hydrodynamics*, National Academy of Sciences Wash. D.C., pp.500-515, 1979.
- [31] P.M. Naghdi, Finite deformation of elastic rods and shells, *Proc. IUTAM Symp. on Finite Elasticity, Bethlehem, PA*, edited by D.E. Carlson and R.T. Shield, Martinus Nijhoff Publishers, Hague, Netherlands, pp.47-103, 1982.
- [32] P.M. Naghdi, *The theory of shells and plates*, Flügge's Handbuch der Physik, Vol. VIa/2, Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, pp.425-640, 1972.
- [33] D. Caulk, and P.M. Naghdi, Axisymmetric motion of viscous fluid flow inside a slender surface of revolution, *J. Appl. Mech.*, Vol.54, pp.190-196, 1987.
- [34] A.E. Green, and P.M. Naghdi, A direct theory of viscous fluid flow in channels, *Arch. Ration. Mech. Analysis*, Vol.86, pp.39-63, 1984.
- [35] A.E. Green, and P.M. Naghdi, A direct theory of viscous fluid flow in pipes I: Basic general developments, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, Vol.342, pp.525-542, 1993.
- [36] A.E. Green, P.M. Naghdi, and M.J. Stallard, A direct theory of viscous fluid flow in pipes II: Flow of incompressible viscous fluids in curved pipes, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, Vol.342, pp.543-572, 1993.
- [37] H. Jeffreys, *Cartesian Tensors*, Cambridge Press, 1931.
- [38] A.M. Robertson, and A. Sequeira, A director theory approach for modeling blood flow in the arterial system: an alternative to classical 1d models, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, Vol.15(6), pp.871-906, 2005.
- [39] G.K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Mechanics*, Cambridge Press, 1967.