Universidade de Évora

Mestrado em Matemática para o Ensino

Maria de Fátima Castilho Dias

Uma abordagem para análise, classificação e resolução de problemas que envolvem Trigonometria.

Exemplos de Aplicação.

Orientadores: Professor Doutor Manuel Baptista Branco

Doutora Natasha Samko

Évora

2010

Nome

Maria de Fátima Castilho Dias

Departamento

Matemática

Orientadores

Doutora Natasha Samko, Bolseira da Fundação para a Ciência e a Tecnologia na Universidade do Algarve. Investigadora do grupo do Algarve do Centro de Análise Funcional do Instituto Superior Técnico de Lisboa.

http://natashasamko.digiways.com/

Professor Doutor Manuel Baptista Branco, Docente do Departamento de Matemática da Universidade de Évora.

Título da Dissertação

"Uma abordagem para análise, classificação e resolução de problemas que envolvem Trigonometria. Exemplos de Aplicação."

Agradecimentos

Tenho a agradecer de um modo especial à Professora Doutora Natasha Samko pela sua constante disponibilidade, pelo seu entusiasmo e pelo seu optimismo face ao trabalho; pela sua orientação de características invulgares de *"não dar"* mas de ajudar *"a criar, a reflectir e a estimular"* a produção de novas ideias; pela sua vasta experiência profissional e riqueza de cultura matemática de outros países que tanto contribuíram para engrandecer a minha formação profissional e pessoal.

Tenho a agradecer ao Professor Doutor Manuel Branco pelas suas "observações pertinentes e valiosas" de grande contributo durante o processo de realização do trabalho e pela sua prática pedagógica e experiência científica que se revelaram de extrema importância para melhorar substancialmente este trabalho.

Gostaria ainda de aproveitar esta oportunidade para agradecer a algumas pessoas que têm um grande significado para mim.

Ao Sérgio Fantasia

Meu amigo, meu companheiro e meu namorado.

Aos meus pais, Manuel Diogo e Maria Antónia

Que estiveram sempre presentes quando precisei deles.

Aos meus filhos David e Rafael

Espero que sejam Felizes e os seus desejos se tornem realidade.

Tenho ainda a agradecer ao júri da minha dissertação, que se dispôs a ler e a corrigir o meu trabalho contribuindo para o melhorar fundamentalmente.

Resumo

Como professora de matemática, com experiência no Ensino Secundário, tenho constatado que os alunos revelam bastantes dificuldades de compreensão, aquisição e aplicação dos conteúdos trigonométricos. Também os conteúdos de trigonometria dos actuais manuais escolares do ensino secundário não são suficientes para aqueles alunos que pretendem seguir estudos superiores nas áreas da Física, da Matemática, da Engenharia,... Este trabalho destina-se essencialmente a esse grupo de alunos, mas também pode servir de material de apoio a professores do Ensino Básico/Secundário que queiram enriquecer e aprofundar os seus conhecimentos nesta área.

Ao longo deste trabalho, propomos uma forma alternativa de apresentação deste tema, pensamos que deste modo os alunos possam compreender "*como, donde e porquê*" aparecem as relações trigonométricas.

Classificamos e analisamos em profundidade equações trigonométricas, com a finalidade de propor abordagens diferentes de resolução, umas típicas outras originais. Analisamos desigualdades trigonométricas e sistemas de equações trigonométricas utilizando métodos de resolução distintos. Apresentamos versões distintas de demonstrações para as mesmas afirmações, e apresentamos problemas de Geometria, de Topografia e de Física, mostrando desta forma a aplicação prática da Trigonometria. Finalizamos este trabalho com a apresentação de algumas relações trigonométricas na teoria dos Números Complexos.

Palavras-chave: equações trigonométricas homogéneas, equações trigonométricas simétricas, desigualdades trigonométricas, funções trigonométricas inversas, método de extremo, números complexos.

Essay Title: An approach to analyse, classify and solve problems which involve trigonometry. Examples of its practical use.

Abstract: *As a mathematics teacher, who has been working with Secondary School students, I have noticed that students have many difficulties in understanding trigonometric contents.* The contents related to trigonometry that are presented, in modern textbooks adopted by Secondary Schools are not enough for those students who intend to take a degree in areas in field of physics, mathematics and engineering. This study is essentially intended for the above-mentioned students, but it can also be used as a support material for a secondary school teachers who want to enrich and increase their scientific knowledge in the field of trigonometry.

This project suggests an alternative way to introduce the topic so that student can understand *"how, from, where and why"* trigonometric relationships appear.

Trigonometric equations are classified and examined deeply in order to suggest different approaches for their solution, typical ones and original others. Trigonometric inequalities and systems of trigonometric equations of special types are also analysed using different solution methods. Different versions of demonstrations for the same statements are presented as well as problems of Geometry, Topography and Physics, with the purpose of showing the practical use of trigonometry. This project ends with the presentation of some trigonometric relationships in the theory of Complex Numbers.

Key-Words: homogeneous trigonometric equations, symmetric trigonometric equations, trigonometric inequalities, inverse trigonometric functions, method of extreme, complex numbers.

Índice

Introdução

A escolha do Tema

Como professora de matemática, com experiência no ensino secundário, tenho vindo a analisar ao longo dos anos, o aproveitamento dos alunos do décimo primeiro ano, e tenho constatado que a percentagem de insucesso neste ano de escolaridade é maior no primeiro período do que nos períodos seguintes, precisamente porque no primeiro período se lecciona o tema: "Trigonometria". Os alunos revelam bastantes dificuldades de compreensão e aquisição dos conteúdos trigonométricos.

Penso que, este "insucesso" na trigonometria é um problema que se generaliza a muitos estudantes. Será "culpa" dos alunos, que não estudam? Será dos manuais adoptados pela escola, que não estimulam ao raciocínio? Será que os professores também têm parte dessa "culpa"?!... Não sei... Apenas sei que a Trigonometria ainda é um "bicho de sete cabeças" para muitos estudantes.

Penso que os conteúdos de trigonometria dos actuais manuais escolares do ensino secundário do nosso País não são suficientes para os alunos que pretendem seguir estudos superiores nas áreas das Matemáticas, Engenharias, Físicas, entre outras, onde algumas das disciplinas pressupõem que os alunos conhecem e sabem aplicar as fórmulas trigonométricas e ainda que conhecem a natureza e a essência destes conceitos matemáticos.

Nas fontes disponíveis, não encontrámos nenhuma *"Sebenta"* de Trigonometria, construída com uma *sequência de capítulos* que apresentasse **versões diferentes de demonstrações para as mesmas afirmações**; e mostrasse **abordagens alternativas para a resolução do mesmo problema** de modo a promover o aprofundamento de uma cultura científica e técnica de forma a constituir um suporte cognitivo e metodológico.

É que são precisamente demonstrações e não afirmações de teoremas que educam para a cultura matemática e dão uma "chave" ao saber resolver problemas por raciocínios.

Por tudo isto, justifica-se a escolha do tema e os "*moldes*" de apresentação do trabalho.

Por um lado, um dos objectivos deste trabalho, é propor uma forma alternativa de apresentação do tema e mostrar uma variedade de questões que incluam os conceitos trigonométricos, tentando deste modo que os alunos compreendam *"como, donde e porquê"* aparecem as relações trigonométricas; e mostrar também que as fórmulas *"não caem do céu"* e sintam a perfeição e o fascínio do tema e se deixem *"apaixonar pela trigonometria"*.

Neste trabalho propomos uma abordagem ao estudo profundo e detalhado de algumas questões principais desta área da matemática. Esta abordagem "à trigonometria" é baseada numa análise cuidadosa e metódica dos conteúdos considerados, assim como à fase da procura da solução e depois à aplicação dos resultados obtidos. Mostramos também exemplos de aplicação utilizando abordagens diferentes, tais como, método de indução matemática, aplicação da teoria de extremos de uma função de duas (ou uma) variáveis, entre outras na resolução de problemas geométricos.

Neste trabalho, são demonstradas através de abordagens diferentes as fórmulas trigonométricas principais, apresentando-se em seguida, exemplos diversificados de aplicação dessas fórmulas na resolução de problemas.

Por outro lado, outro dos objectivos deste trabalho, é mostrar a importância de analisar em profundidade problemas aparentemente complicados, ensinar o aluno a "conceder tempo a si próprio para poder pensar"; desenvolver neste o rigor, o espírito crítico e a criatividade e ensiná-lo a procurar e a descobrir ideias, concepções e métodos de resolução para cada problema que lhe é apresentado.

Para além disto, tentar estimular no aluno; o desenvolvimento a raciocínios específicos; ensinar-lhe a fundamentar adequadamente todos os passos, para que estes possam desenvolver demonstrações distintas e atraentes; e contribuir para que possa ter uma atitude positiva face ao tema.

Deste modo, pretendemos inspirar nos *"leitores"* o gosto e o prazer pela trigonometria. O trabalho é composto por 8 capítulos.

Nos priliminares do trabalho incluímos um pequeno apontamento histórico e apresentamos também de forma muito resumida, algumas definições básicas, pois os manuais escolares utilizados pelos alunos no ensino básico/secundário já demonstram com rigor essas noções.

***Capítulo 1* - Demonstrações das propriedades**

Este capítulo está dedicado às demonstrações das fórmulas da soma e diferença de dois ângulos; às fórmulas da bissecção e da duplicação do ângulo; às fórmulas de adição e subtracção de senos e co-senos e às fórmulas do produto de senos e co-senos.

Apresentamos uma versão diferente para a demonstração geométrica da fórmula do co-seno da diferença de ângulos que pretende ser original relativamente à bibliografia consultada.

Capítulo 2 – **Aplicação das propriedades**

A melhor forma de os alunos interiorizarem os conceitos tratados no capítulo anterior, é fazerem exercícios, se possível bastante distintos uns dos outros.

Neste capítulo aplicamos as referidas propriedades em igualdades trigonométricas e na simplificação de expressões. Mostramos ainda que estas fórmulas não se aplicam só na Matemática Elementar mas também se aplicam na Matemática Superior. Apresentamos exemplos de algumas formas de integrais envolvendo funções trigonométricas cuja sugestão de resolução é usar as fórmulas demonstradas no capítulo anterior.

Capítulo 3 - **Equações trigonométricas**

No início deste capítulo apresentamos uma pequena abordagem às *funções circulares inversas*.

Definimos as funções trigonométricas inversas do seno, co-seno, tangente e co-tangente no intervalo onde são válidas e complementamos depois estas definições com a apresentação dos respectivos gráficos.

Em seguida, com recurso aos gráficos das funções trigonométricas apresentamos a definição de equações trigonométricas elementares. Estes gráficos são construídos no programa "Autograph-3".

Estudamos vários tipos de equações trigonométricas não elementares, classificando-as, nomeadamente em;

- equações formalmente redutíveis a equações do 2° grau;
- equações lineares em $sen\,x$ e $\cos x$;
- equações homogéneas;
- equações simétricas;
- resolução de equações por análise;
- outras equações trigonométricas;

apresentamos abordagens diferentes, umas conhecidas outras originais, de propostas de resolução baseadas numa análise profunda da equação a considerar.

Depois de resolvermos uma destas equações por dois métodos distintos formulamos o valor máximo de $sen\,x + \cos x$.

Algumas das equações propostas apresentam um nível de dificuldade bastante elevado. Finalizamos o capítulo com a apresentação de uma aula prática.

Capítulo 4 - **Desigualdades trigonométricas**

Este capítulo é dedicado à resolução de desigualdades trigonométricas, na maioria das vezes, utilizaremos as propriedades das funções trigonométricas tais como a periodicidade e a monotonia das funções nos respectivos intervalos.

Na resolução das desigualdades trigonométricas elementares propostas neste capítulo, recorremos à utilização dos gráficos das funções trigonométricas pois este "*caminho*" praticamente garante evitar erros, permitindo visualizar os domínios dos intervalos em que a inequação tem significado. Utilizamos também com o mesmo sucesso o círculo trigonométrico.

Propomos ainda duas abordagens diferentes para resolução de desigualdades trigonométricas, uma baseada no método de indução matemática e outra na teoria de extremos de uma função com duas variáveis.

Capítulo 5 - **Sistemas de equações trigonométricas**

Para um aluno resolver correctamente sistemas de equações trigonométricas, é necessário conhecer as propriedades existentes, demonstradas no capítulo 1, saber aplicá-las correctamente, trabalho realizado no capítulo 2 e claro, ter um bom domínio tanto em equações trigonométricas (capítulo 3) como em equações algébricas.

Neste capítulo propomos 6 exemplos de aplicação de sistemas de equações onde vamos apresentar propostas de resolução originais.

Alguns dos exemplos propostos apresentam um grau de dificuldade elevado.

Capítulo 6 - **Problemas geométricos**

Pensamos que são justamente demonstrações e não afirmações de teoremas que educam a cultura matemática, por isso neste capítulo mostramos abordagens diferentes e bastantes interessantes para demonstrar o teorema dos senos e o teorema dos co-senos.

Propomos três problemas geométricos cujo método de resolução será inevitavelmente com recurso ao teorema dos senos e ao teorema dos co-senos.

A resolução de um destes problemas geométricos conduziu-nos a uma propriedade dos triângulos arbitrários que apresentamos como teorema sobre a disposição da bissectriz, da altura e da mediana relativas ao mesmo vértice num triângulo arbitrário qualquer.

Os gráficos apresentados neste capítulo são construídos no programa "Geometer's Sketchpad 4.05".

Capítulo 7 - **Aplicações a problemas de Topografia e Física**

Este capítulo acaba por ser uma continuação do capítulo 6, uma vez que é a aplicação prática do teorema dos senos e do teorema dos co-senos, só que aplicados a problemas envolvendo situações reais.

Propomos dois problemas de Topografia e um problema de Física, os quais estão ao "alcance" dos alunos do ensino secundário.

Capítulo 8 - **Relações trigonométricas na teoria de Números Complexos**

Para finalizar este trabalho, apresentamos também algumas questões de um tema relacionado com a Trigonometria – *"Números Complexos."*

Mostramos, através de alguns exemplos de aplicação, que algumas das fórmulas trigonométricas estudadas no capítulo 1, *(fórmulas da adição e subtracção, fórmulas do arco duplo, fórmulas da bissecção e fórmulas de transformação logarítmica)* são utilizadas aquando da resolução de problemas envolvendo números complexos.

Apresentamos as fórmulas de Euler, a forma exponencial dos números complexos e a fórmula de Moivre cujas demonstrações, é claro, são construídas com recurso às relações trigonométricas mencionadas.

Preliminares

§ Apontamento histórico

Nos triângulos podem considerar-se seis elementos principais: três lados e três ângulos. Se três desses elementos forem conhecidos, um deles necessariamente um comprimento, então o triângulo fica definido, o estudo dos triângulos nesta perspectiva conduziu ao que hoje se denomina por **Trigonometria**, que, do ponto de vista etimológico, significa "medida dos triângulos".

Da estreita relação entre Astronomia e Trigonometria, resultou que se desenvolvesse inicialmente a chamada Trigonometria Esférica - os lados dos triângulos eram curvas desenhadas sobre uma superfície esférica - e só depois surgiu a Trigonometria Plana. Com o passar do tempo a trigonometria libertou-se da astronomia e viu o seu campo de acção cada vez mais alargado.

Os primeiros indícios de rudimentos da trigonometria surgiram tanto no Egipto como na Babilónia, a partir do cálculo das razões entre números e entre lados de triângulos semelhantes. Consta que **Thales de Mileto** (624-548 a.C) terá medido a altura de uma das pirâmides do Egipto. Mas a trigonometira aparece no século V a.C., com **Hipócratas de Quios**, que estudou relações entre arcos de circunferência e respectivas cordas.

No século III a.C., Arquimedes de Siracusa, na sequência do trabalho desenvolvido para calcular o perímetro de um círculo, dado o raio, calculou o comprimento de grande número de cordas e estabeleceu algumas fórmulas trigonométricas. Ainda neste século, o astrónomo grego **Eratóstenes de Cirene**, um dos directores da Biblioteca de Alexandria, foi o primeiro homem a tentar medir a circunferência de um planeta, conseguiu demostrar de forma experimental que a Terra é redonda.

No século II a. C. é atribuída a **Hiparco de Niceia** (190-120 a. C) a autoria das primeiras tábuas trigonométricas, introduziu também na Grécia a divisão do círculo em 360° de cada grau em 60 minutos e de cada minuto em 60 segundos, sistema já antes inventado pelos Babilónios.

Mas foi **Ptolomeu** (85-165) astrónomo grego do século II d.C., quem influenciou de forma marcante o desenvolvimento da Trigonometria, durante muitos séculos. A sua obra *Almagesto* contém, por exemplo, uma tabela de cordas correspondentes a diversos ângulos, por ordem crescente e em função da metade do ângulo, que é equivalente a uma tabela de senos, bem como várias proposições usadas na Trigonometria actual. Naquela obra compilou os conhecimentos existentes na época sobre Astronomia e Trigonometria e que os matemáticos Árabes retomaram e trouxeram para e Europa através de Espanha. Durante 6 séculos, *Almagesto* representou a mais importante fonte de consulta para os astrónomos de todo o mundo.

As primeiras referências e utilizações do seno de um ângulo registaram-se em trabalho de matemáticos hindus. **Arybhata**, por volta do ano 500, elaborou tabelas envolvendo metades de cordas que não são mais que tabelas de senos e usou jiva para designar o Seno. Esta mesma tabela foi reproduzida, em 628, no trabalho do matemático e astrónomo indiano **Brahmagupta** (598-670).

Entre 850 e 929, o matemático árabe **al-Battani** adoptou a Trigonometria hindu, introduzindo uma preciosa inovação – o círculo de raio unitário.

Os matemáticos árabes trabalharam com senos e co-senos. **Abu'l-wafa** (940-998), cientista árabe que viveu na região que hoje corresponde aos países Irão e Iraque, elaborou, seguindo um método próprio, novas tábuas de senos, chegando às 8 casas decimais, enquanto Ptolomeu apenas apresentara 3 e escreveu também uma versão simplificada do *Almagesto*.

Foi o contributo de **Regiomontanus** (1436-1476) que, ao apresentar em 1464 no seu livro *De triangulis Omnidomis,* resultados tanto ao nível da Trigonometria esférica como plana, permitiu o desenvolvimento desta última; enunciou vários teoremas, sendo um deles, o actual teorema dos senos.

Na Astronomia, a teoria Heliocêntrica de **Copérnico** (1473-1543) segundo a qual a Terra daria uma volta completa em torno do seu eixo e uma volta anual em torno do sol desencadeou uma revolução na Ciência, na Filosofia e na Religião. Publicou *De lateribus et angulis triangulorum* (1542), a base da demonstração da sua teoria revolucionária que se tornou um dos marcos na construção da ciência moderna.

Deve-se a **Rhaeticus** (1514-1576) a introdução das secantes na trigonometria Europeia e os cálculos do $sen(n\theta)$ em termos de $sen\theta$, que foram retomados e aperfeiçoados por **Jacques Bernoulli**, em 1702.

Com os Descobrimentos, surgiram várias situações problemáticas que exigiram resolução rápida, **Pedro Nunes** (1505-1578), grande vulto da História da ciência portuguesa desenvolveu conhecimentos técnicos necessários à navegação, actividade de crucial importância para o nosso país, naquela época. Notabilizou-se pelos seus trabalhos em Geometria e Trigonometria Esférica tendo publicado o importante *Tratado de Esfera.*

No século XVI, a aplicação da Trigonometria na resolução de problemas algébricos é feita pelo matemático francês **Viète** (1540-1603), que fez recurso sistemático ao círculo trigonométrico e à aplicação da Trigonometria na resolução de problemas algébricos.

Sir Isaac Newton (1642-1727) também deu a sua contribuição à trigonometria pois, paralelamente aos seus estudos de cálculo infinitesimal apoiados fortemente na geometria do movimento, trabalhou com séries infinitas, tendo expandido $arc\,sen\,x$ em séries e, por devolução, deduzido a série para $sen\,x$. Além disso, comunicou a **Leibniz** a fórmula geral para $senx$ e o $\cos x$ surgirem como números e não como grandezas.

No entanto, foi só com o matemático suiço **Leonhard Euler** (1707-1783) que se introduziram as notações apropriadas para o desenvolvimento da Trigonometria, na sua obra denominada *Introductio* faz o estudo analítico das funções trigonométricas que veio a ser fundamental ao estudo de fenómenos periódicos, como, por exemplo, vibrações, movimentos ondulatórios e planetários.

A ligação efectiva da Trigonometria à Análise só viria a ser feita pelo matemático francês **Fourier** (1768-1830), pode-se afirmar que a importância da trigonometria aumentou no início do século XIX com o aparecimento das séries de Fourier, o que permitiu utilizar a trigonometria para estudar as vibrações e os movimentos periódicos.

Actualmente a trigonometria tornou-se um ramo da matemática cujas aplicações ultrapassam o cálculo de comprimentos e de amplitudes de ângulos. As funções trigonométricas intervêm no estudo de movimentos oscilatórios, de propagação de ondas, variação de intensidade de movimentos da corrente eléctrica... São inúmeras as áreas onde a trigonometria tem aplicação, por exemplo na medicina, as ecografias funcionam através de ondas cuja propagação se define através de funções trigonométricas. Também o som, a luz, a electricidade, o electromagnetismo, as ondas hertzianas (do rádio e da televisão) são fenómenos ondulatórios estudados com recurso à trigonometria.

§ Noções Básicas

Definição de funções circulares

Vamos considerar o referencial cartesiano ortogonal xoy e o ângulo orientado de lado origem Ox e lado extremidade $\overline{OR}$, α. (*figura 1*).

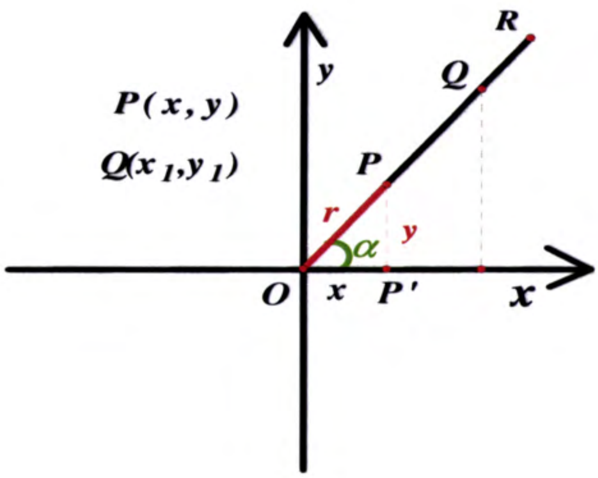


figura 1

Sobre o lado extremidade $\overline{OR}$ do ângulo α consideramos um ponto $P(x, y)$, e designemos por r, a distância da origem O ao ponto P.

Entre estes três números, x, y *e* r estabelecemos as seguintes razões:

$$\frac{y}{r}\ ,\ \frac{x}{r}\ ,\ \frac{y}{x}\ ,\ \frac{r}{y}\ ,\ \frac{r}{x}\ \ e\ \ \frac{x}{y}$$

as três últimas são, respectivamente, recíprocas das três primeiras.

A estas razões dão-se os nomes de *seno*, *co-seno*, *tangente, co-secante, secante* e *co-tangente* do ângulo α respectivamente. Simbolicamente escrevemos:

$$sen\,\alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad tg\,\alpha = \frac{y}{x}$$

$$\cos ec\ \alpha = \frac{r}{y} \qquad \sec\alpha = \frac{r}{x} \qquad \cot g\ \alpha = \frac{x}{y}$$

Para qualquer valor possível do ângulo α corresponde um e um só valor para cada uma das seis razões consideradas, as quais, por este facto, são *funções unívocas do ângulo* α. A estas funções chamamos **funções trigonométricas** ou **funções circulares.**

Sinais das funções circulares

Como vimos na definição das funções circulares intervêm, as coordenadas x e y dum ponto P, e também o raio vector r, isto é, a distância da origem ao ponto P.

Como por convenção, a distância r é independente de sinal, temos que os valores das funções circulares tem sinais positivo ou negativo em função dos sinais das coordenadas x e y.

Apresentamos no quadro seguinteos sinais das funções circulares:

Quadrantes	*seno*	*co-seno*	*tangente*	*co-secante*	*secante*	*co-tangente*
I	+	+	+	+	+	+
II	+	–	–	+	–	–
III	–	–	+	–	–	+
IV	–	+	–	–	+	–

Periodicidade das funções circulares

Diz-se que uma função f é periódica, de período $\boldsymbol{p}$, se existir um número real $\boldsymbol{p}$ tal que $f(x+p)=f(x)$ para qualquer que seja x pertencente ao domínio de $f(x)$.

Ao menor valor positivo de $\boldsymbol{p}$ que verifica a condição $f(x+p)=f(x)$, chamamos período positivo mínimo.

Consideremos um ângulo $\angle\, x$, em posição normal conforme nos mostra a figura 2.

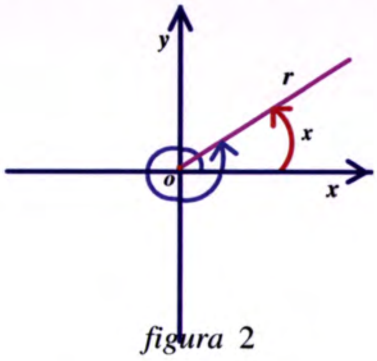


figura 2

Se adicionarmos a este ângulo vários ângulos giros, obteremos novos ângulos contidos na expressão geral $x + 360^o.\,k$, estes tem o mesmo lado extremidade que o ângulo $\angle\, x$. Assim resulta que as funções circulares destes ângulos têm os mesmos valores que as do ângulo x.

Portanto podemos dizer que:

$$sen\,(x + 2k\pi) = sen\,x \qquad \cos(x + 2k\pi) = \cos x \qquad tg(x + 2k\pi) = tg\,x$$

$$\cos ec(x + 2k\pi) = \cos ec\,x \qquad \sec(x + 2k\pi) = \sec x \qquad \cot g\,(x + 2k\pi) = \cot g\,x$$

Então concluimos que *todas* as funções circulares são periódicas e admitem como período 360º ou 2π radianos. As funções **tangente** e **co-tangente** tem período positivo mínimo de 180º ou π radianos.

Funções circulares dos ângulos $0^o,\ 90^o, 180^o\ e\ 270^o$

Vamos escolher um ponto P *(figura 3)* de modo que $\overline{OP} = 1$, se não existir qualquer rotação do ponto P, o lado origem e o lado extremidade do ângulo de 0º são sobrepostos.

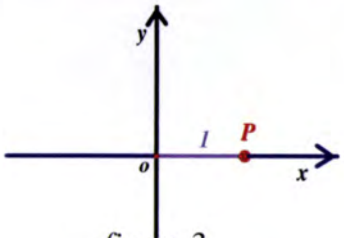


figura 3

Assim temos que: $x = 1$; $y = 0$ e $r = 1$ donde concluímos que:

$$sen\ 0^{\circ} = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \cos 0^{\circ} = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1 \qquad tg\ 0^{\circ} = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cos ec\ 0^{\circ} = \frac{r}{y} = \frac{1}{0} \ \text{não definida} \qquad \sec 0^{\circ} = \frac{r}{x} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \cot g\ 0^{\circ} = \frac{x}{y} = \frac{1}{0} \ n.d.$$

Vamos proceder de modo análogo para os ângulos de 90°, 180° e 270°, escolhendo sobre os seus lados extremidade, respectivamente, os pontos P_1, P_2 e P_3 tais que $\overline{OP_1} = \overline{OP_2} = \overline{OP_3} = 1$ *(figura 4)*.

Então as coordenadas dos referidos pontos são $P_1(0,1)$; $P_2(-1,0)$ e $P_3(0,-1)$.

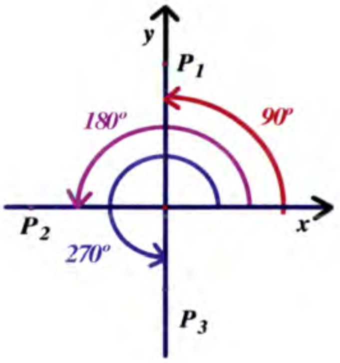


figura 4

Resume-se no quadro seguinte as funções circulares dos ângulos 0º, 90º, 180º e 270º:

Ângulos	***seno***	***co-seno***	***tangente***	***co-secante***	***secante***	***co-tangente***
0°	0	1	0	*não definida*	1	*não é definida*
90°	1	0	*n.d.*	1	*n.d.*	0
180°	0	-1	0	*n.d*	-1	*n.d*
270°	-1	0	*n.d.*	-1	*n.d.*	0

Redução ao primeiro quadrante

Dois ângulos dizem-se associados se as suas funções circulares são iguais em valor absoluto. Consideremos um círculo trigonométrico e α um ângulo orientado em posição normal do *1º quadrante* .

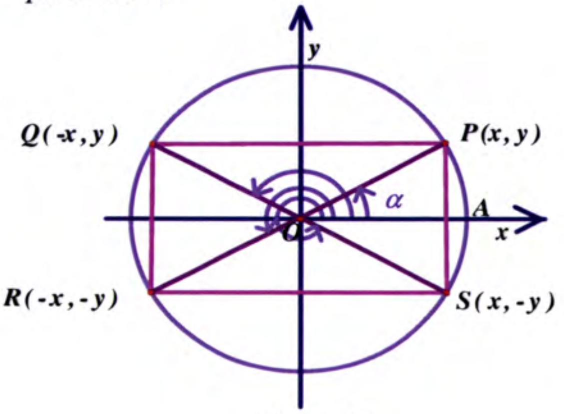


figura 5

Temos que os pontos *Q*, *R*, e *S* *(vértices do rectângulo inscrito, de lados respectivamente paralelos aos eixos coordenados)* têm coordenadas, em valor absoluto, iguais às do ponto P. A estes pontos correspondem três ângulos em posição normal, tendo por lados extremidades respectivamente $\overline{OQ}$, $\overline{OR}$ e $\overline{OS}$.

Como os ângulos $\angle AOP$ e $\angle AOQ$ são suplementares temos que os ângulos $\angle AOP$ e $\angle AOR$ diferem de π *radianos* e os ângulos $\angle AOP$ e $\angle AOS$ tem por soma 2π *radianos.*

Vamos concluir que cada um dos pares de ângulos considerados anteriormente são associados e também deduzir as relações de sinal entre os valores das suas funções circulares.

Funções de ângulos suplementares

Sejam α e $\pi - \alpha$ ângulos suplementares em posição normal *(figura 6).*

A partir da igualdade dos triângulos rectângulos $\Delta OP'M'$ e ΔOPM e da definição das funções circulares temos que:

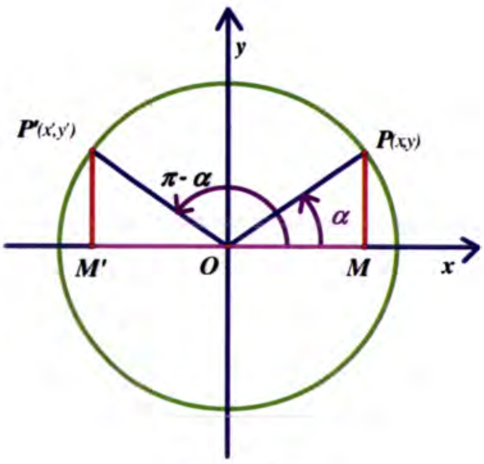


figura 6

$$\begin{cases} sen\,(\pi-\alpha)=\dfrac{y'}{r}=\dfrac{y}{r}=sen\alpha \\ \cos(\pi-\alpha)=\dfrac{x'}{r}=\dfrac{-x}{r}=-\dfrac{x}{r}=-\cos\alpha \\ tg\,(\pi-\alpha)=\dfrac{y'}{x'}=\dfrac{y}{-x}=-\dfrac{y}{x}=-tg\,\alpha \\ cosec(\pi-\alpha)=\dfrac{r}{y'}=\dfrac{r}{y}=cosec\,\alpha \\ \sec(\pi-\alpha)=\dfrac{r}{x'}=\dfrac{r}{-x}=-\dfrac{r}{x}=-\sec\alpha \\ \cot g\,(\pi-\alpha)=\dfrac{x'}{y'}=\dfrac{-x}{y}=-\dfrac{x}{y}=-\cot g\,\alpha \end{cases}$$

Funções que diferem de π *radianos*

Sejam α e $\pi+\alpha$ ângulos, que diferem de π radianos, em posição normal em relação a um sistema de eixos cartesianos ortogonais (figura 7). A partir da definição de funções circulares e da igualdade dos triângulos rectângulos $\Delta OP'M'$ e ΔOPM temos que:

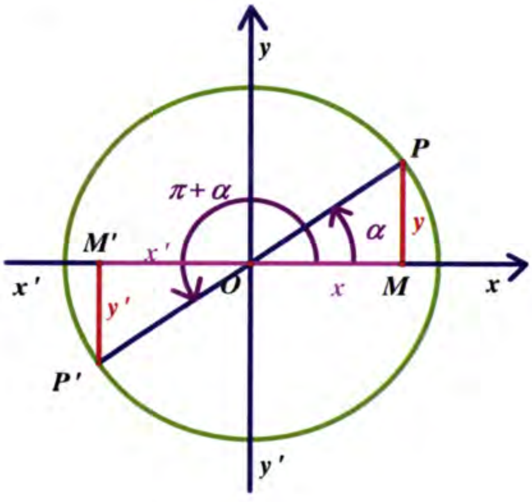


figura 7

$$\begin{cases} sen\,(\pi+\alpha)=\dfrac{y'}{r}=\dfrac{-y}{r}=-\dfrac{y}{r}=-\,sen\alpha \\ \cos(\pi+\alpha)=\dfrac{x'}{r}=\dfrac{-x}{r}=-\dfrac{x}{r}=-\cos\alpha \\ tg\,(\pi+\alpha)=\dfrac{y'}{x'}=\dfrac{-y}{-x}=tg\,\alpha \\ cosec(\pi+\alpha)=\dfrac{r}{y'}=\dfrac{r}{-y}=-\dfrac{r}{y}=-\,cosec\,\alpha \\ \sec(\pi+\alpha)=\dfrac{r}{x'}=\dfrac{r}{-x}=-\dfrac{r}{x}=-\sec\alpha \\ \cot g\,(\pi+\alpha)=\dfrac{x'}{y'}=\dfrac{-x}{-y}=\dfrac{x}{y}=\cot g\,\alpha \end{cases}$$

Funções de ângulos cuja soma é 2π *radianos*

Sejam α e $2\pi-\alpha$, ângulos cuja soma é 2π radianos, em posição normal em relação a um sistema de eixos cartesianos *(figura 8).*

Se considerarmos os triângulos rectângulos $\Delta OP'M'$ e ΔOPM e a definição das funções circulares permitem temos que:

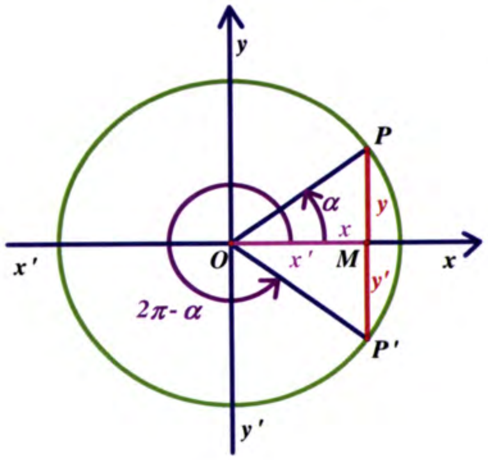


figura 8

$$\begin{cases} sen\,(2\pi-\alpha)=\dfrac{y'}{r}=\dfrac{-y}{r}=-\dfrac{y}{r}=-\,sen\alpha \\ \cos(2\pi-\alpha)=\dfrac{x'}{r}=\dfrac{x}{r}=\cos\alpha \\ tg\,(2\pi-\alpha)=\dfrac{y'}{x'}=\dfrac{-y}{x}=-\dfrac{y}{x}=-\,tg\,\alpha \\ \operatorname{cosec}(2\pi-\alpha)=\dfrac{r}{y'}=\dfrac{r}{-y}=-\dfrac{r}{y}=-\operatorname{cosec}\alpha \\ \sec(2\pi-\alpha)=\dfrac{r}{x'}=\dfrac{r}{x}=\sec\alpha \\ \cot g\,(2\pi-\alpha)=\dfrac{x'}{y'}=\dfrac{x}{-y}=-\dfrac{x}{y}=-\cot g\,\alpha \end{cases}$$

Funções de ângulos simétricos

Sejam α e $-\alpha$ ângulos simétricos. A partir da periodicidade das funções circulares, temos que os ângulos $2\pi-\alpha$ e $-\alpha$ têm funções circulares iguais. Então as relações entre os valores das funções α e $-\alpha$ são as mesmas que as funções dos ângulos α e $2\pi-\alpha$.

Funções de ângulos complementares

Vamos consideremos dois ângulos complementares α *e* $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ em posição normal em relação a um sistema de eixos cartesianos ortogonais *(figura 9).*

Os triângulos rectângulos $\Delta OP'M'$ e ΔOPM são iguais donde $x' = y \;\; e \;\; y' = x$ (lados homólogos).

Portanto, por definição, temos que:

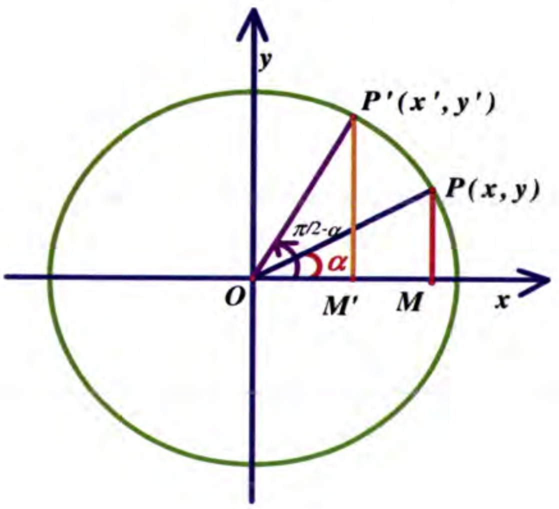


figura 9

$$\begin{cases} sen\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\dfrac{y'}{r}=\dfrac{x}{r}=\cos\alpha \\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\dfrac{x'}{r}=\dfrac{y}{r}=sen\alpha \\ tg\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\dfrac{y'}{x'}=\dfrac{x}{y}=\cot g\,\alpha \\ \operatorname{cosec}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\dfrac{r}{y'}=\dfrac{r}{x}=\sec\alpha \\ \sec\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\dfrac{r}{x'}=\dfrac{r}{y}=\operatorname{cosec}\alpha \\ \cot g\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\dfrac{x'}{y'}=\dfrac{x}{y}=\dfrac{x}{y}=tg\,\alpha \end{cases}$$

Relações entre as funções circulares do mesmo ângulo.

Vejamos em seguida 5 relações fundamentais que é possível estabelecer a partir das funções circulares de um ângulo α. Seja α um ângulo qualquer em relação a um sistema de eixos cartesianos e $P(x, y)$ um ponto qualquer do seu lado extremidade *(figura 10).*

Portanto,

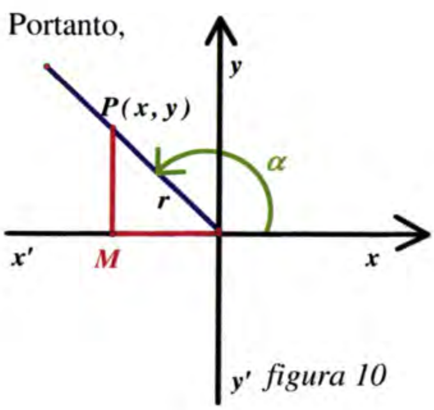


figura 10

$$sen\,\alpha = \frac{y}{r} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{r}{y} \quad (y \neq 0)$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad \sec\alpha = \frac{r}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$tg\;\alpha = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0) \qquad \cot g\;\alpha = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

Então concluímos que:

$$\operatorname{cos}ec\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha} \quad com\ \ sen\ \alpha \neq 0 \tag{1}$$

$$\sec\ \alpha = \frac{1}{\cos\ \alpha}\ \ com\ \cos\ \alpha \neq 0 \tag{2}$$

Visto que $tg\ \alpha = \frac{y}{x}$ temos que, $tg\ \alpha = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}$, mas como,

$$sen\ \alpha = \frac{y}{r} \qquad \text{e} \qquad \cos\ \alpha = \frac{x}{r}$$

Obtemos que,

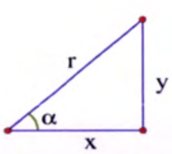
$$tg\ \alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} \qquad (com\ \ \cos\alpha \neq 0) \tag{3}$$

$$\cot g\ \alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} \qquad (com\ \ sen\alpha \neq 0) \tag{4}$$

Além disso o teorema de Pitágoras relativamente ao triângulo rectângulo ΔOPM diz-nos que $y^2 + x^2 = r^2$.

Dividindo por r^2 obteremos,

$$\left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = 1$$



portanto,

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \tag{5}$$

A partir da relação fundamental (5) é possível estabelecer outras relações importantes. Se dividirmos $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ por $\cos^2\alpha$, com $\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, obteremos que,

$$\frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

ou seja,

$$tg^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha .$$

Facilmente se mostra também que $1+\cot g^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha$ com $\alpha \neq k\pi$.

Funções circulares dos ângulos de 30°, 45° e 60°

Seja $\widehat{AB}$ um arco da circunferência de centro O. Consideremos um sistema de eixos cartesianos ortogonais de origem no centro O tal que o eixo das abcissas seja perpendicular à corda *(figura 11)*.

Então temos que,

$$sen\frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{MA}}{r} \quad \text{donde} \quad sen\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{\overline{AB}}{2}}{r}$$

e portanto $\quad sen\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\overline{AB}}{2r} \Leftrightarrow \overline{AB} = 2r.sen\dfrac{\alpha}{2}$.

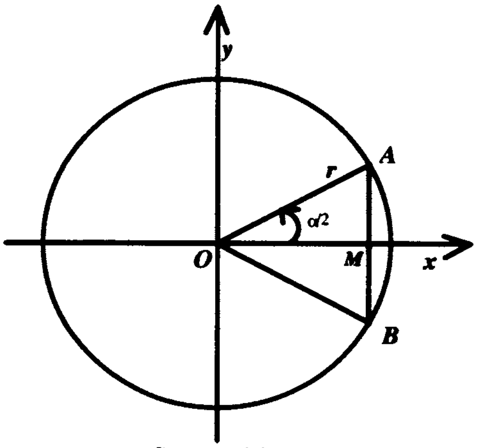


figura 11

$\overline{AB}$ é o lado do hexágono regular inscrito.

Neste caso $\alpha = 60°$ e assim $\dfrac{\alpha}{2} = 30°$ portanto $\overline{AB} = 2r.\,sen30°$.

Visto que, o lado $\overline{AB}$ do hexágono é igual ao raio, obtemos que

$$r = 2r.sen30° \Leftrightarrow sen30° = \frac{1}{2}.$$

A partir do $sen30°$, facilmente se calculam,

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad e \quad tg\,30° = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$\overline{AB}$ é o lado do quadrado inscrito

Neste caso $\alpha = 90^\circ$ assim $\dfrac{\alpha}{2} = 45^\circ$ portanto $\overline{AB} = 2r.sen 45^\circ$.

Visto que o lado $\overline{AB}$ do quadrado é igual a $r\sqrt{2}$, obtemos

$$r\sqrt{2} = 2r\ sen 45^\circ \Leftrightarrow sen\ 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

A partir do $sen\ 45^\circ$, facilmente se determinam, $\cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $tg\ 45^\circ = 1$.

$\overline{AB}$ é o lado do triângulo equilátero inscrito

Neste caso $\alpha = 120^\circ$ e assim $\dfrac{\alpha}{2} = 60^\circ$ portanto $\overline{AB} = 2r.sen 60^\circ$.

Visto que o lado do triângulo é igual a $r\sqrt{3}$, obtemos que

$$r\sqrt{3} = 2r.sen 60^\circ \Leftrightarrow sen\ 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A partir daqui obtemos, $\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$ *e* $tg\ 60^\circ = \sqrt{3}$.

Resumindo:

	seno	*co-seno*	*tangente*
30º	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	*1*
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Os valores das funções, co-secante, secante e co-tangente, são os inversos dos valores do *seno, co-seno* e *tangente*, respectivamente.

Capítulo 1

Demonstrações das propriedades

Este capítulo é dedicado às demonstrações das fórmulas da soma e diferença de dois ângulos; às fórmulas da bissecção e da duplicação do ângulo; às fórmulas de adição e subtracção de senos e co-senos e às fórmulas do produto de senos e co-senos.

Apresentamos também uma versão diferente para a demonstração geométrica da fórmula do co-seno da diferença de ângulos que pretende ser original relativamente à bibliografia consultada.

§ 1.1 Fórmulas da soma e da diferença de dois ângulos

Os problemas que em seguida nos vamos ocupar consistem em determinar as funções circulares da *soma* e da *diferença* de dois ângulos, expressas em funções circulares de cada um.

Todas as fórmulas podem ser obtidas a partir de outras, portanto vamos demonstrar rigorosamente $sen(\alpha + \beta)$ e $\cos(\alpha - \beta)$.

Seno: Soma de ângulos

Considere-se um círculo com raio igual à unidade e α e β ângulos positivos com vértice no centro O do círculo tal que $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$. Então,

$$sen(\alpha + \beta) = sen\,\alpha \,.\, \cos\beta + sen\,\beta \,.\, \cos\alpha \,.$$

Demonstração:

Seja $\overline{AB}$ o segmento de recta perpendicular a *um raio do círculo trigonométrico,* $\overline{OM}$;

Seja $\overline{BC}$ o segmento de recta perpendicular ao segmento $\overline{OC}$ - *contido no semi-eixo positivo* Ox *;*

Seja $\overline{BD}$ o segmento de recta paralelo ao eixo das abcissas e perpendicular ao segmento de recta $\overline{AK}$ - *paralelo ao eixo das ordenadas.*

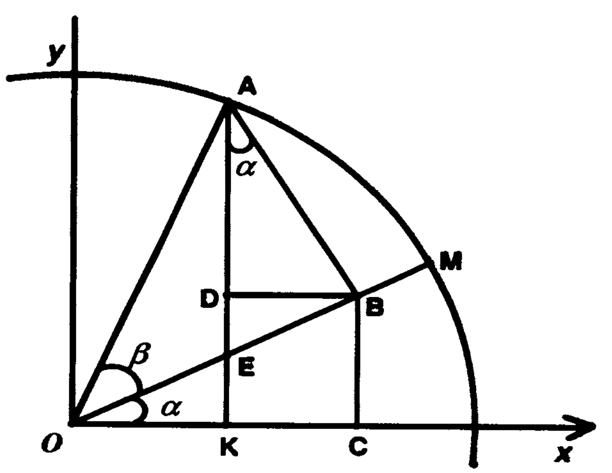


figura 1.1

Seja o triângulo ΔOBA rectângulo em B, designamos por $\angle AOB = \beta$, então podemos dizer que $\overline{OB} = \cos\beta$ e $\overline{AB} = sen\,\beta$.

O triângulo ΔOKE rectângulo em K é semelhante ao triângulo ΔAEB rectângulo em B.

Seja $\angle EOK = \alpha$, então $\angle OEK = 90^\circ - \alpha$ e como ângulos verticalmente opostos são iguais, também o ângulo $\angle AEB = 90^\circ - \alpha$.

Pode-se ainda dizer que $\overline{AK} = \overline{AD} + \overline{BC}$. Como se trata dum círculo de raio unidade, as definições de *seno* e *co-seno* dum ângulo permitem estabelecer que:

$$sen(\alpha + \beta) = \overline{AD} + \overline{BC}$$

Pelo triângulo ΔDBA temos que:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AD}}{sen\,\beta} \Leftrightarrow \overline{AD} = \cos\alpha.sen\,\beta.$$

Pelo triângulo ΔOCB: $sen\,\alpha = \dfrac{\overline{BC}}{\cos\beta} \Leftrightarrow \overline{BC} = sen\,\alpha.\cos\beta$, donde se deduz facilmente que

$$sen(\alpha + \beta) = sen\,\alpha\,.\cos\beta + sen\,\beta\,.\cos\alpha \qquad (1.1)$$

Co-seno: Soma de ângulos

Sejam três pontos A, B e C pertencentes à circunferência de raio 1, cujas coordenadas são $A(\cos\alpha, sen\,\alpha)$; $B(\cos(\alpha+\beta), sen(\alpha+\beta))$ e $C(\cos\beta, -sen\,\beta)$ em que α, $-\beta$ e $\alpha+\beta$ são as amplitudes dos arcos PA, PC e PB respectivamente.

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - sen\,\alpha.sen\,\beta$$

Demonstração:

Considere-se a figura 1.2, os arcos PB e CA têm medidas iguais, logo as cordas $\overline{PB}$ e $\overline{CA}$ também tem a mesma medida.

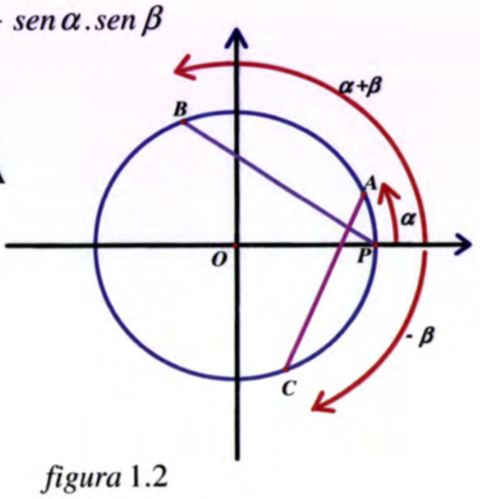


figura 1.2

Dados dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, a distância entre eles, é dada pela fórmula:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

Seja $P(1,0)$, aplicando a fórmula da distância entre dois pontos, temos:

$$\overline{PB}^2 = [\cos(\alpha + \beta) - 1]^2 + sen^2(\alpha + \beta) =$$

$$= \cos^2(\alpha + \beta) - 2.\cos(\alpha + \beta) + 1 + sen^2(\alpha + \beta) = 2 - 2.\cos(\alpha + \beta)$$

$$\overline{CA}^2 = (\cos\beta - \cos\alpha)^2 + (-sen\beta - sen\alpha)^2 =$$

$$= \cos^2\beta - 2\cos\beta\cos\alpha + \cos^2\alpha + sen^2\beta + 2sen\beta\, sen\alpha + sen^2\alpha =$$

$$= 2 - 2\cos\alpha.\cos\beta + 2\,sen\,\alpha.sen\,\beta$$

Ao igualarmos as duas expressões, temos $\overline{PB}^2 = \overline{CA}^2$, logo

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha.\cos\beta - sen\,\alpha.sen\,\beta \qquad (1.2)$$

Tangente: Soma de ângulos

Para todo o ângulo $\alpha + \beta$ que cumpra a condição $\cos(\alpha + \beta) \neq 0$, temos

$$tg\,(\alpha + \beta) = \frac{sen(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$$

atendendo às fórmulas deduzidas anteriormente (1.1) e (1.2) podemos escrever

$$tg\,(\alpha + \beta) = \frac{sen\,\alpha.\cos\beta + sen\,\beta.\cos\alpha}{\cos\alpha.\cos\beta - sen\,\alpha.sen\,\beta}.$$

Dividindo ambos os termos da fracção anterior por $\cos\alpha.\cos\beta$, com $\cos\alpha \neq 0$ e $\cos\beta \neq 0$, obtemos

$$tg\,(\alpha + \beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\,.\,tg\,\beta}. \qquad (1.3)$$

Generalização da adição (Co-seno e Seno da soma de dois ângulos)

- Se $\alpha+\beta<\dfrac{\pi}{2}$ (demonstrado anteriormente).

- Se $\alpha+\beta>\dfrac{\pi}{2}$ então $\alpha'=\dfrac{\pi}{2}-\alpha \wedge \beta'=\dfrac{\pi}{2}-\beta$

Ângulos complementares de α e β. Donde $\alpha'+\beta'=\pi-(\alpha+\beta)$.

Assim $\alpha+\beta>\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow -(\alpha+\beta)<-\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \pi-(\alpha+\beta)<\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha'+\beta'<\dfrac{\pi}{2}$.

Portanto temos que

$$sen(\alpha'+\beta') = sen\alpha'\cos\beta' + sen\beta'\cos\alpha'$$

$$\cos(\alpha'+\beta') = \cos\alpha'\cos\beta' - sen\alpha' sen\beta'$$

mas, $\quad sen\alpha' = \cos\alpha \qquad sen\beta' = \cos\beta$

$\quad \cos\alpha' = sen\alpha \qquad \cos\beta' = sen\beta$

e, $\quad sen(\alpha+\beta) = sen(\alpha'+\beta')$

$$\cos(\alpha+\beta) = -\cos(\alpha'+\beta')$$

Donde por substituição,

$$sen(\alpha+\beta) = sen(\alpha'+\beta') = sen\alpha\cos\beta + sen\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta) = -(\cos\alpha'+\beta') = -(\cos\alpha'\cos\beta' - sen\alpha' sen\beta') = -\cos\alpha'\cos\beta' + sen\alpha' sen\beta' =$$

$$= -(sen\alpha sen\beta) + \cos\beta\cos\alpha = \cos\beta\cos\alpha - sen\alpha sen\beta.$$

Diferença de ângulos

Como a fórmula da adição de ângulos é independente da natureza dos ângulos α e β, se aplicarmos a fórmula deduzida anteriormente aos ângulos α e $-\beta$, obteremos

$$sen[\alpha + (-\beta)] = sen\,\alpha.\cos(-\beta) + sen(-\beta).\cos\alpha.$$

Sendo o co-seno uma função par, donde $\cos(-\beta) = \cos\beta$ e o seno uma função ímpar, donde $sen(-\beta) = -sen\,\beta$, obtemos,

$$sen(\alpha - \beta) = sen\,\alpha.\cos\beta - sen\,\beta.\cos\alpha \tag{1.4}$$

Procedendo de modo análogo para a diferença de co-senos, temos

$$\cos[\alpha + (-\beta)] = \cos\alpha.\cos(-\beta) - sen\,\alpha.sen(-\beta)$$

$$\cos[\alpha + (-\beta)] = \cos\alpha.\cos\beta - (-sen\,\alpha.sen\,\beta),$$

Assim,

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha.\cos\beta + sen\,\alpha.sen\,\beta \tag{1.5}$$

Para a diferença da tangente, vamos também proceder de modo análogo

$$tg[\alpha + (-\beta)] = \frac{tg\,\alpha + tg(-\beta)}{1 - tg\,\alpha\,.\,tg(-\beta)}$$

Sendo a tangente uma função ímpar, donde $tg(-\beta) = -tg\beta$, então

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha\,.\,tg\,\beta}. \tag{1.6}$$

Outras abordagens para o Co-seno: Diferença de ângulos

Sejam os ângulos α e β ângulos, respectivamente $\angle AOQ$ e $\angle MOQ$ conforme a figura 1.3. Os pontos A e M resultam da intersecção dos segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{OM}$, respectivamente, com a circunferência. Os pontos P, T e R pertencem ao segmento $\overline{OM}$. Então, temos

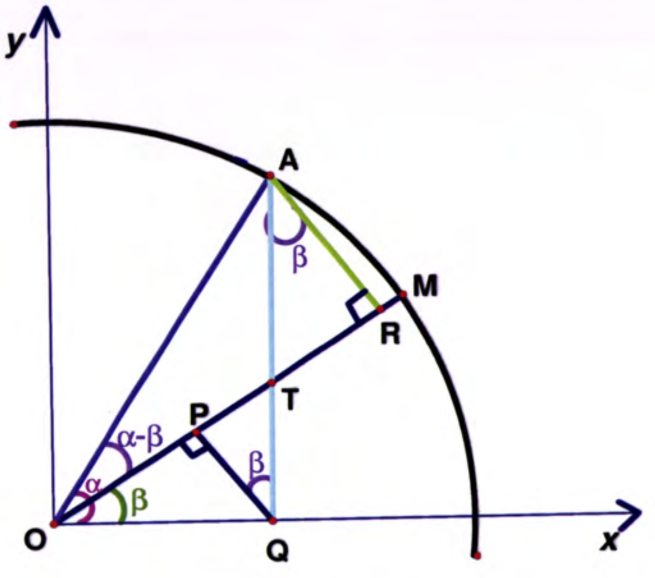


figura 1.3

Demonstração:

Do ponto A conduza-se o segmento de recta $\overline{AQ}$ perpendicular a $\overline{OQ}$ ($\overline{OQ}$ pertence ao semi-eixo positivo Ox) e o segmento de recta $\overline{AR}$ perpendicular a $\overline{OM}$.

Do ponto Q conduza-se um segmento de recta $\overline{QP}$ perpendicular a $\overline{OM}$.

O triângulo ΔOQT recto em Q é semelhante ao triângulo ΔART recto em R, assim $\angle TOQ = \angle TAR = \beta$.

O triângulo ΔTPQ recto em P, é semelhante ao triângulo ΔOQT, então $\angle PQT = \beta$.

Seja $\angle AOQ = \alpha$, assim $\angle AOM = \alpha - \beta$.

$$\cos(\alpha - \beta) = \overline{OP} + (\overline{PT} + \overline{TR}) = \overline{OP} + \overline{PR}.$$

Pelo triângulo ΔOAQ: $\overline{OQ} = \cos\alpha$.

Pelo triângulo ΔOPQ: $\overline{OP} = \cos\alpha.\cos\beta \iff \cos\beta = \dfrac{\overline{OP}}{\cos\alpha}$.

Pelo triângulo ΔPQT: $\overline{PT} = \overline{TQ}.sen\,\beta \quad \Leftrightarrow \quad sen\,\beta = \dfrac{\overline{PT}}{\overline{TQ}}$

sabemos,

$$\overline{AT} = \overline{AQ} - \overline{TQ} = sen\,\alpha - \overline{TQ}$$

Pelo triângulo ΔTAR:

$$sen\,\beta = \frac{\overline{TR}}{\overline{AT}} \Leftrightarrow \quad sen\,\beta = \frac{\overline{TR}}{sen\,\alpha - \overline{TQ}} \Leftrightarrow \overline{TR} = sen\,\beta.sen\,\alpha - sen\,\beta.\overline{TQ}.$$

Obtendo-se o comprimento $\overline{PR}$,

$$\overline{PR} = \overline{PT} + \overline{TR} = \overline{TQ}.sen\,\beta + sen\,\beta.sen\,\alpha - sen\,\beta.\overline{TQ} = sen\,\beta.sen\,\alpha.$$

Logo,

$$\overline{OP} + \overline{PR} = \cos\alpha.\cos\beta + sen\,\alpha.sen\,\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha.\cos\beta + sen\,\alpha.sen\,\beta \tag{1.5}$$

Este resultado também se pode demonstrar recorrendo ao produto escalar de dois vectores, esta abordagem é seguida em alguns dos manuais escolares actuais do ensino secundário.

Demonstração:

Consideremos para isso, num círculo trigonométrico, dois vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, aplicados na origem, sendo α e β, respectivamente, as amplitudes dos ângulos que eles fazem com o semi-eixo positivo Ox.

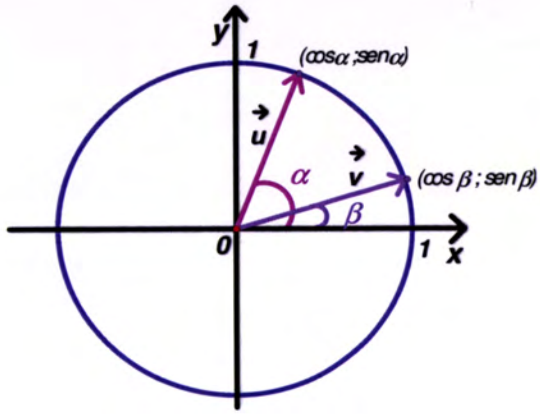


figura 1.4

As coordenadas de $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$, vectores não nulos, são:

$$\vec{u} = (\cos\alpha, sen\,\alpha) \quad \text{e} \quad \vec{v} = (\cos\beta, sen\,\beta)$$

designemos por $(\vec{u} \wedge \vec{v})$, o ângulo dos dois vectores, assim $(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \alpha - \beta$.

Por definição de ângulo de dois vectores, temos que:

$$\cos(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\|}.$$

Logo,

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{(\cos\alpha\ ,\ sen\,\alpha)\,.\,(\cos\beta\ ,\ sen\,\beta)}{\left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\|}.$$

Caso se conheça as coordenadas dos vectores, por exemplo, $\vec{u} = (a,b)$ *e* $\vec{v} = (c,d)$, então o produto escalar de dois vectores pode-se expressar como

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = ac + bd$$

assim,

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{\cos\alpha\,\cos\beta + sen\,\alpha\ sen\,\beta}{1 \times 1}.$$

Logo,

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha.\cos\beta + sen\,\alpha.sen\,\beta \qquad (1.5)$$

§ 1.2 Fórmulas da Duplicação e Bissecção do ângulo

- Duplicação do ângulo – problema de determinar as funções circulares do ângulo duplo expressas nas funções circulares do ângulo simples.

- Bissecção do ângulo - problema de determinar as funções dum ângulo expressas nas funções circulares do ângulo duplo.

Duplicação do ângulo

Se na fórmula $sen(\alpha + \beta) = sen\,\alpha \,.\, \cos\beta + sen\,\beta \,.\, \cos\alpha$ considerarmos $\alpha = \beta$, obtemos por exemplo $sen\,2\alpha = sen\,\alpha.\cos\alpha + \cos\alpha.sen\,\alpha$ donde

$$sen\,2\alpha = 2.sen\,\alpha.\cos\alpha\,. \tag{1.7}$$

Também na fórmula $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - sen\,\alpha.sen\,\beta$ podemos supor $\alpha = \beta$, obtendo por exemplo $\cos(\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha = \cos\alpha.\cos\alpha - sen\,\alpha.sen\,\alpha$ ou seja

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha\,. \tag{1.8}$$

O co-seno do ângulo duplo pode também exprimir-se em função do seno e do co-seno do ângulo simples. Pela fórmula fundamental da trigonometria podemos escrever

$$\cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha \quad \text{e} \quad sen^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

substituindo $\cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha$ em (1.8) temos $\cos 2\alpha = 1 - sen^2\alpha - sen^2\alpha$.

Simplificando,

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\,sen^2\alpha\,. \tag{1.9}$$

Substituindo agora $sen^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ em (1.8) obtemos

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1\,. \tag{1.10}$$

Vamos supor $\alpha = \beta$, também para a fórmula (1.3) ou seja $tg\,(\alpha + \beta) = \dfrac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha . tg\,\beta}$, então temos, $tg\,2a = \dfrac{tg\,\alpha + tg\,\alpha}{1 - tg\,\alpha . tg\,\alpha}$ donde

$$tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha}. \tag{1.11}$$

Vamos demonstrar agora o seguinte resultado que é de aplicação frequente na resolução de equações trigonométricas:

§ 1.2.1 Teorema

Todas as funções circulares do ângulo duplo exprimem-se em função da tangente do ângulo simples.

Já vimos por (1.11) que

$$tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha}.$$

i) se dividirmos o segundo membro da igualdade (1.7), $sen\,2\alpha = 2.sen\,\alpha.\cos\alpha$, por $\cos^2\alpha + sen^2\alpha$, obtemos

$$sen\,2\alpha = \frac{2\,sen\,\alpha\,.\,\cos\alpha}{\cos^2\alpha + sen^2\alpha}.$$

Dividindo agora ambos os termos da fracção anterior por $\cos^2\alpha$ (com $\cos^2\alpha \neq 0$), temos

$$sen\,2\alpha = \frac{\dfrac{2\,sen\,\alpha\,.\,\cos\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{\cos^2\alpha + sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}}$$

fazendo as simplificações, temos portanto que

$$sen\ 2\alpha = \frac{2tg\,\alpha}{1 + tg^2\alpha}. \qquad (1.12)$$

(1.12) é válida para todo o ângulo α que cumpra a condição $\cos^2 a \neq 0$ ou

$\cos\alpha \neq 0$ e portanto $\alpha \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}\ rad$.

ii) analogamente, fazemos o mesmo para $\cos 2\alpha$,

$$\cos 2\alpha = \frac{\cos^2\alpha - sen^2\alpha}{\cos^2\alpha + sen^2\alpha} \Leftrightarrow \cos 2\alpha = \frac{\dfrac{\cos^2\alpha - sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{\cos^2\alpha + sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}} \qquad (\text{com } \cos^2\alpha \neq 0),$$

donde,

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}. \qquad (1.13)$$

Bissecção do ângulo

Comecemos por determinar $\cos\frac{a}{2}$:

Considerando $2\alpha = a$, podemos converter a fórmula do ângulo duplo (1.8) $\cos^2\alpha - sen^2\alpha = \cos 2\alpha$ em

$$\cos^2\frac{a}{2} - sen^2\frac{a}{2} = \cos a. \qquad (1.14)$$

É verdade que

$$\cos^2\frac{a}{2} + sen^2\frac{a}{2} = 1 \qquad (1.15)$$

adicionando membro a membro as igualdade (1.14) e (1.15) obteremos $2\cos^2\frac{a}{2} = 1 + \cos a$, donde

$$\cos\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}\,. \tag{1.16}$$

Calculemos agora $sen\dfrac{a}{2}$:

Considerando também $2\alpha = a$, e se subtrairmos ordenadamente as igualdades (1.15) e (1.14), obtemos $2sen^2\dfrac{a}{2}=1-\cos a$ donde,

$$sen\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}\,. \tag{1.17}$$

Determinemos agora $tg\dfrac{a}{2}$:

Se dividirmos ordenadamente as igualdades (1.16) e (1.17) obtemos

$$tg\frac{a}{2}=\frac{sen\dfrac{a}{2}}{\cos\dfrac{a}{2}}=\frac{\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos a}{2}}}{\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos a}{2}}}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}} \quad \text{com} \quad \cos a\neq -1$$

$$tg\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}\,. \tag{1.18}$$

As fórmulas anteriores apresentam um duplo sinal, que desaparece uma vez que se conheça $\cos a$ e o ângulo a ficando deste modo conhecido o ângulo $\dfrac{a}{2}$.

Já tínhamos verificado anteriormente que,

$$2\cos^2\frac{a}{2}=1+\cos a \tag{1.19}$$

$$2sen^2\frac{a}{2}=1-\cos a\,. \tag{1.20}$$

Conhecemos também $sen\,2\alpha = 2\,sen\,\alpha.\cos\alpha$ portanto considerando $2\alpha = a$ temos que

$$2sen\frac{a}{2}.\cos\frac{a}{2}=sen\,a \tag{1.21}$$

se dividirmos ordenadamente as igualdades (1.21) e (1.19), obtemos

$$tg\frac{a}{2} = \frac{sen\,a}{1+\cos a}\,. \tag{1.22}$$

E se dividirmos também ordenadamente as igualdades (1.20) e (1.21), obtemos

$$tg\frac{a}{2} = \frac{1-\cos a}{sen\,a}\,. \tag{1.23}$$

§ 1.3 Fórmulas de adição e subtracção de senos e co-senos

O objectivo deste ponto 1.3 é, precisamente, *transformar* certas expressões trigonométricas noutras equivalentes, mas que sejam *logarítmicas*, daí que estas fórmulas também sejam conhecidas como *fórmulas de transformação logarítmica.*

Soma e Diferença de Senos

Vamos considerar as fórmulas do seno da soma e da diferença de dois ângulos:

$$sen(\alpha+\beta) = sen\,\alpha.\cos\beta + sen\,\beta.\cos\alpha$$

$$sen(\alpha-\beta) = sen\,\alpha.\cos\beta - sen\,\beta.\cos\alpha.$$

Designemos $\alpha+\beta=p$ e $\alpha-\beta=q$, então pela adição e subtracção ordenada destas duas igualdades podemos obter

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{p+q}{2} \\ \beta = \dfrac{p-q}{2} \end{cases}$$

Agora, substituindo estes valores de α e β nas fórmulas do seno, obtemos:

$$sen\,p = sen\frac{p+q}{2}.\cos\frac{p-q}{2} + sen\frac{p-q}{2}.\cos\frac{p+q}{2}$$

$$sen\,q = sen\frac{p+q}{2}.\cos\frac{p-q}{2} - sen\frac{p-q}{2}.\cos\frac{p+q}{2}$$

se adicionarmos e subtraírmos ordenadamente as igualdades anteriores, vamos obter

$$sen\, p + sen\, q = 2\, sen\frac{p+q}{2}.\cos\frac{p-q}{2}\ . \tag{1.24}$$

$$sen\, p - sen\, q = 2\, sen\frac{p-q}{2}.\cos\frac{p+q}{2}. \tag{1.25}$$

Soma e Diferença de Co-senos

Consideremos as expressões

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha.\cos\beta - sen\,\alpha.sen\,\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha.\cos\beta + sen\,\alpha.sen\,\beta.$$

À semelhança do que foi feito para a soma e diferença de senos, consideremos também $\alpha+\beta=p$ e $\alpha-\beta=q$ que somadas e subtraídas ordenadamente fazem resultar

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{p+q}{2} \\ \beta = \dfrac{p-q}{2} \end{cases}$$

Portanto, fazendo as devidas substituições, as expressões do co-seno da soma e do co-seno da diferença podem escrever-se da seguinte forma:

$$\cos p = \cos\frac{p+q}{2}\,.\cos\frac{p-q}{2} - sen\,\frac{p+q}{2}\,.\,sen\,\frac{p-q}{2}$$

$$\cos q = \cos\frac{p+q}{2}\,.\cos\frac{p-q}{2} + sen\frac{p+q}{2}\,.sen\frac{p-q}{2}$$

Se adicionarmos e subtrairmos ordenadamente as igualdades anteriores, obtemos as fórmulas da soma e diferença de co-seno,

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\,.\cos\frac{p-q}{2}. \tag{1.26}$$

$$\cos p - \cos q = -2\, sen\frac{p+q}{2}.sen\frac{p-q}{2}. \tag{1.27}$$

§ 1.4 Fórmulas do produto de senos e co-senos

Produto dos co-senos

$$\cos\alpha \,.\, \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$$

Observando o segundo membro da igualdade verificamos que temos a soma e a diferença de ângulos para o co-seno, fórmulas (1.2) e (1.5) respectivamente.

Assim considerando o segundo membro, temos

$$\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\alpha\,\cos\beta - sen\,\alpha\, sen\,\beta + \cos\alpha\cos\beta + sen\,\alpha\; sen\,\beta\,\right] =$$

$$\frac{1}{2}.2\cos\alpha.\cos\beta = \;\cos\alpha \,.\, \cos\,\beta$$

Logo,

$$\cos\alpha \,.\, \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]. \tag{1.28}$$

As duas fórmulas que a seguir se apresentam são obtidas de modo análogo à anterior.

Produto do seno pelo co-seno

$$sen\,\alpha \,.\, \cos\beta = \frac{1}{2}\left[sen(\alpha+\beta) + sen(\alpha-\beta)\right] \tag{1.29}$$

Produto dos senos

$$sen\,\alpha \,.\, sen\,\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right] \tag{1.30}$$

Capítulo 2
Aplicação das Propriedades

Neste capítulo vamos aplicar as propriedades tratadas no capítulo anterior em igualdades trigonométricas e na simplificação de algumas expressões. Mostramos também que na demonstração das derivadas das funções trigonométricas necessitamos de recorrer às fórmulas trigonométricas.

Para terminar o capítulo mostramos ainda que estas fórmulas não se aplicam só na Matemática Elementar mas também na Matemática Superior, apresentaremos exemplos de algumas formas de integrais envolvendo funções trigonométricas cuja sugestão de resolução é feita com recurso às fórmulas demonstradas no capítulo anterior.

§ 2.1 Nas Igualdades Trigonométricas

Uma igualdade trigonométrica é uma equação que envolve funções trigonométricas e é verdadeira para todos os valores das variáveis envolvidas. Podemos dividi-las em duas classes:

Na primeira classe as Igualdades Trigonométricas do tipo $A = B$ em que os domínios das expressões A e B são iguais e por isso quando se faz uma redução equivalente, o domínio não é alterado.

Na segunda classe as *Igualdades Trigonométricas* do tipo $A = B$, mas em que os domínios das expressões $A\ e\ B$ são distintos. São exemplo para esta segunda classe:

$$tg\,x = \frac{1}{\cot g\,x}, \qquad tg\,(x \pm y) = \frac{tg\,x \pm tg\,y}{1 \mp tg\,x.tg\,y}, \qquad sen\,2x = \frac{2tg\,x}{1 + tg^2 x},$$

$$\cos 2x = \frac{1 - tg^2 x}{1 + tg^2 x} \quad \text{e} \quad tg\,2x = \frac{2tg\,x}{1 - tg^2 x}.$$

A seguir apresentamos exemplos de aplicação de algumas igualdades trigonométricas de modo a proporcionar um bom domínio na aplicação das fórmulas trigonométricas demonstradas no capítulo anterior.

§ Exemplo de aplicação 1

Mostre a igualdade $(sen\,x)^{-1} + (tg\,x)^{-1} = \cot g \frac{x}{2}$.

Resolução:

Sabemos que $(tg\,\alpha)^{-1} = \frac{\cos\alpha}{sen\,\alpha}$. Além disso temos,

$$(sen\,x)^{-1} + (tg\,x)^{-1} = \frac{1 + \cos x}{sen\,x}.$$

Ao numerador aplicamos a fórmula do co-seno da bissecção do ângulo (1.16)

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$$

que é equivalente a $2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha$ por (1.19) e no denominador aplicamos a fórmula do seno para a duplicação do ângulo (1.7), $sen\,2\alpha = 2.sen\,\alpha.\cos\alpha$.

$$(sen\,x)^{-1} + (tg\,x)^{-1} = \frac{1+\cos x}{sen\,x} = \frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{2sen\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \cot g\,\frac{x}{2}.$$

§ Exemplo de aplicação 2

Mostre a igualdade $\dfrac{sen\left(\dfrac{\pi}{2}+3\alpha\right)}{1-sen(3\alpha-\pi)} = \cot g\left(\dfrac{5}{4}\pi+\dfrac{3}{2}\alpha\right)$.

Resolução:

Suponhamos $A = \dfrac{sen\left(\dfrac{\pi}{2}+3\alpha\right)}{1-sen(3\alpha-\pi)}$ e $B = \cot g\left(\dfrac{5}{4}\pi+\dfrac{3}{2}\alpha\right)$.

Sabemos que $\cot g\,(x+k\pi) = \cot g\,x$, o que equivale a afirmar que o período da função $y = \cot g\,x$ é igual a π *radianos*.

$$B = \cot g\left(\pi+\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}\alpha\right) = \cot g\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}\alpha\right).$$

Considerando agora $A = \dfrac{sen\left(\dfrac{\pi}{2}+3\alpha\right)}{1-sen(3\alpha-\pi)}$ e tendo em conta que a função na expressão dada deve ter como argumento $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{3}{2}\alpha$. Com facilidade verificamos que o argumento do numerador $\dfrac{\pi}{2}+3\alpha = 2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{3}{2}\alpha\right)$ onde de seguida aplicamos a fórmula do seno para a duplicação do ângulo (1.7).

Quanto ao denominador, sabemos que as funções seno e co-seno são complementares,

$$sen(3\alpha-\pi) = -sen(\pi-3\alpha) = -sen\left(\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}-3\alpha\right)\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}-3\alpha\right).$$

Então, conhecemos: $1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$ pela fórmula (1.19), assim,

$$A=\frac{sen\,2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}\alpha\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-3\alpha\right)}=\frac{2sen\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}\alpha\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}\alpha\right)}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3}{2}\alpha\right)}.$$

Reparamos que, $\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3}{2}\alpha\right)+\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}\alpha\right)=\frac{\pi}{2}$ de onde $\frac{\pi}{4}-\frac{3}{2}\alpha=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}\alpha\right)$,então pelas funções complementares obtemos,

$$A=\frac{2sen\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}\alpha\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}\alpha\right)}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}\alpha\right)\right)}=\frac{2\,sen\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}\alpha\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}\alpha\right)}{2sen^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}\alpha\right)}=\cot g\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\alpha}{2}\right).$$

§ Exemplo de aplicação 3

Mostre a igualdade $sen\,2\alpha.(1+tg\,2\alpha.tg\,\alpha)+\frac{1+sen\,\alpha}{1-sen\,\alpha}=tg\,2\alpha+tg^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right).$

Resolução:

Vamos simplificar um dos termos da equação recorrendo às funções complementares e aplicando as fórmulas (1.20) e (1.19) respectivamente no numerador e denominador,

$$\frac{1+sen\,\alpha}{1-sen\,\alpha}=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{2sen^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}=tg^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right).$$

Substituindo na equação inicial obtemos

$sen\,2\alpha.(1+tg\,2\alpha.tg\,\alpha)+tg^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)=tg\,2\alpha+tg^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$, isto é equivalente a

$$sen\,2\alpha.(1 + tg\,2\alpha.tg\,\alpha) - tg\,2\alpha = 0.$$

Assim, $sen\,2\alpha.(1 + tg\,2\alpha.tg\,\alpha) - tg\,2\alpha = sen\,2\alpha + tg\,2\alpha.(sen\,2\alpha.tg\,\alpha - 1)$,

aplicando a fórmula de duplicação do seno do ângulo (1.7),

$$sen\,2\alpha + tg\,2\alpha\left(\frac{2\,sen\,\alpha.\cos\alpha.sen\,\alpha}{\cos\alpha} - 1\right) = sen\,2\alpha + tg\,2\alpha.(2\,sen^2\alpha - 1) =$$

$$= sen\,2\alpha + tg\,2\alpha\left(2\,sen^2\alpha - sen^2\alpha - \cos^2\alpha\right) = sen\,2\alpha + tg\,2\alpha(sen^2\alpha - \cos^2\alpha) =$$

por (1.8) temos $sen\,2\alpha - tg\,2\alpha.\cos 2\alpha = sen\,2\alpha - sen\,2\alpha = 0.$

§ Exemplo de aplicação 4

Mostre que $sen\,x = \dfrac{tg\,x}{\sqrt{1 + tg^2 x}}$ sendo $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$.

.

Resolução:

Processo Analítico:

Sabemos, pela fórmula fundamental da trigonometria que se $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Dividindo ambos os membros da igualdade por $\cos^2\alpha$, temos,

$$1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \sqrt{1 + tg^2 x} = \frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 x}} = \cos x.$$

Multiplicando ambos os membros por $tg\,x$, obtemos,

$$\frac{tg\,x}{\sqrt{1 + tg^2 x}} = \cos x.\frac{sen\,x}{\cos x} \Leftrightarrow \quad sen\,x = \frac{tg\,x}{\sqrt{1 + tg^2 x}}.$$

Processo geométrico:

Consideremos o círculo trigonométrico de raio 1 e centro O, seja t a recta tangente ao círculo no ponto de tangencia $A(1,0)$ e P o ponto de intersecção do lado extremidade do ângulo α com a recta tangente, conforme a figura 2.1.

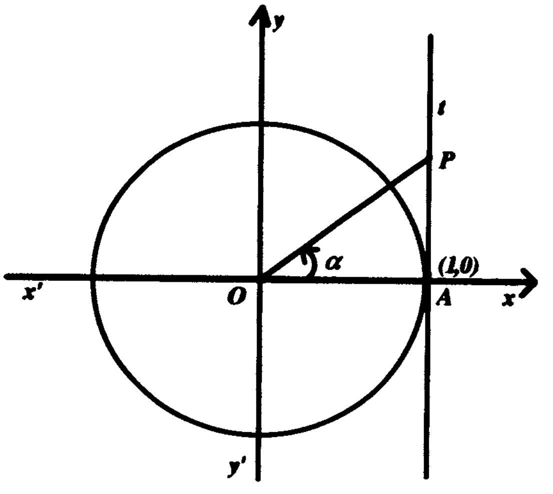


figura 2.1

Por definição de tangente de um ângulo, temos $tg\ \alpha = \overline{AP}$ e por definição definição de seno de um ângulo estabelece-se que

$$sen\,\alpha = \frac{tg\,\alpha}{\overline{OP}}.$$

Pelo teorema de Pitágoras, tem-se

$$\overline{OP}^2 = 1 + tg^2\alpha \quad \Rightarrow \quad \overline{OP} = \sqrt{1 + tg^2\alpha}\,.$$

Procedendo à substituição, $sen\,\alpha = \dfrac{tg\,\alpha}{\overline{OP}} \quad \Leftrightarrow \quad sen\,\alpha = \dfrac{tg\,\alpha}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}}$.

§ Exemplo de aplicação 5

Mostre que a igualdade não é válida qualquer que seja o ângulo β.

$$sen\beta.\,sen2\beta.sen3\beta = 1$$

Demonstração:

Aplicando as propriedades comutativa e associativa da multiplicação, temos

$$sen\,\beta.sen2\beta.sen3\beta = sen2\beta.(sen\ \beta.sen3\beta).$$

Pela fórmula do produto dos senos (1.30) tem-se que,

$$sen\ \beta.sen3\beta = \frac{1}{2}[\cos(\beta - 3\beta) - \cos(3\beta + \beta)].$$

Então,

$$sen\,\beta.sen2\beta.sen3\beta = sen2\beta.(sen\ \beta.sen3\beta) = \frac{1}{2}\,sen2\beta.(\cos 2\beta - \cos 4\beta) =$$

$$= \frac{1}{2}\,sen2\beta.\cos 2\beta - \frac{1}{2}\,sen2\beta.\cos 4\beta$$

recorrendo à formula do produto do seno pelo co-seno (1.29) obtemos,

$$\frac{1}{4}\,sen4\beta - \frac{1}{4}(sen6\beta - sen2\beta) = \frac{1}{4}(sen4\beta - sen6\beta + sen2\beta).$$

Sabemos que,

$$\frac{1}{4}|\,sen4\beta - sen6\beta + sen2\beta\,| \leq \frac{1}{4}(|\,sen4\beta\,| + |\,sen6\beta\,| + |\,sen2\beta\,|).$$

Mas $|\,sen\,x\,| \leq 1$, implica que $\frac{1}{4}(|\,sen4\beta\,| + |\,sen6\beta\,| + |\,sen2\beta\,|) \leq \frac{3}{4}$.

Assim mostrámos que

$$sen\beta.\,sen2\beta.sen3\beta \neq 1 \quad \forall\ \beta \in \mathbb{R}.$$

§ 2.2 Na Simplificação de expressões

O nosso objectivo seguinte é reduzir e simplificar expressões "complicadas" em expressões ditas elementares, aplicando as funções trigonométricas.

§ Exemplo de aplicação

Simplifique a expressão $A = \dfrac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2(1 + \cos 4\alpha)}}}$, $\quad 0 \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Resolução:

Primeiro libertamo-nos do radical inferior com recurso à fórmula (1.19)

$$1+\cos 4x = 2\cos^2\left(\frac{4x}{2}\right).$$

Notar que $\sqrt{\cos^2 2\alpha} = |\cos 2\alpha|$. Assim,

$$A = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2(1+\cos 4\alpha)}}} = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{4\cos^2 2\alpha}}} = \frac{2}{\sqrt{2+2|\cos 2\alpha|}}.$$

Como $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ temos que $0 \le 2\alpha \le \pi$, o que implica que

$$|\cos 2\alpha| = \begin{cases} \cos 2\alpha, & 0 \le 2\alpha \le \frac{\pi}{2}, \\ -\cos 2\alpha, & \frac{\pi}{2} < 2\alpha \le \pi. \end{cases}$$

Portanto, quando $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{4}$ e por (1.19) tem-se

$$A = \frac{2}{\sqrt{2+2\cos 2\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{2(1+\cos 2\alpha)}} = \frac{2}{\sqrt{4\cos^2 \alpha}} = \frac{2}{2|\cos\alpha|} = \frac{1}{\cos\alpha}.$$

Por outro lado quando $\frac{\pi}{4} < \alpha \le \frac{\pi}{2}$ e por (1.20) temos

$$A = \frac{2}{\sqrt{2-2\cos 2\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{2\,(1-\cos 2\alpha)}} = \frac{2}{\sqrt{4\,sen^2\,\alpha}} = \frac{2}{2|sen\,\alpha|} = \frac{1}{sen\,\alpha}.$$

Logo a expressão simplificada é: $A = \begin{cases} \dfrac{1}{\cos\alpha}, & se\ \ 0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{4}, \\ \dfrac{1}{sen\,\alpha}, & se\ \ \dfrac{\pi}{4} < \alpha \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

§ 2.3 No limite de $\frac{sen\,x}{x}$ quando $x \to 0$

A função $f(x) = \dfrac{sen\,x}{x}$ não é definida para $x = 0$, visto que para este valor obtemos $\dfrac{0}{0}$. Frequentemente verificamos que os alunos cometem erros na aplicação deste limite. Com o objectivo de minimizar estes erros, propomos uma abordagem diferente das utilizadas nos manuais escolares para demonstrar este mesmo limite.

Recorrendo a processos geométricos *(figura 2.2)* mostramos que se num ponto, o limite do quociente de duas grandezas infinitamente pequenas for igual a 1, significa que neste ponto estas grandezas são equivalentes, isto é, $sen\ x \underset{x\to 0}{\approx} x$

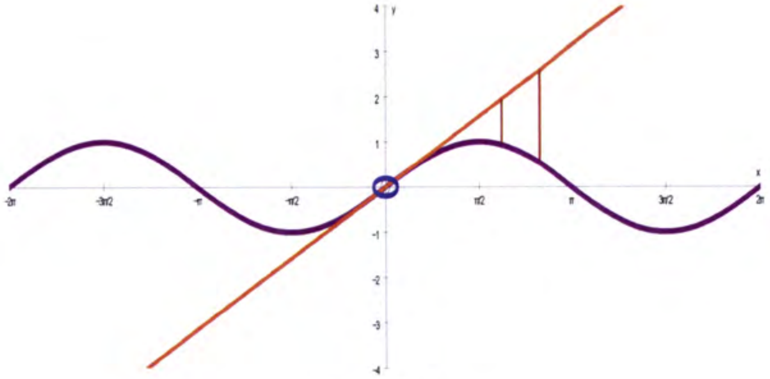


figura 2.2

assim na vizinhança do ponto 0, com um raio que tende para 0, os gráficos coincidem, logo,

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen\,x}{x} = 1. \qquad (2.1)$$

Vejamos agora a figura 2.3, também o $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{sen(x-a)}{x-a}$ na vizinhança do ponto a, se verifica que os gráficos $sen\ (x-a)$ e $(x-a)$ coincidem.

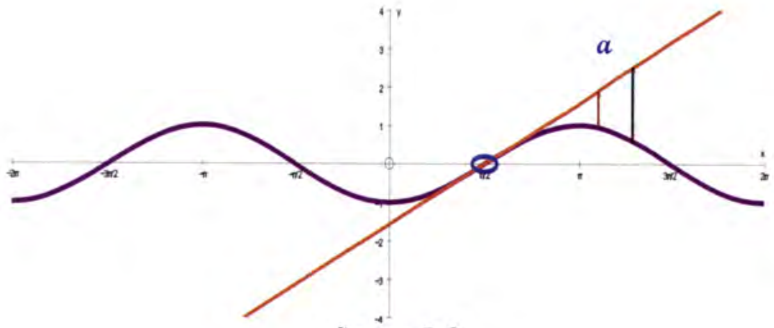


figura 2.3

Assim,

$$\lim_{x \to a} \frac{sen(x-a)}{x-a} = 1.$$

§ 2.4 Na derivada da função $y = sen\, x$

Consideremos a função $y = sen\, x$ que é definida e contínua para todo o x real. Vamos em seguida mostrar uma abordagem para a derivada da função seno, adaptada dos actuais manuais escolares do Ensino Secundário.

Recorrendo à definição de derivada de uma função e aplicando a fórmula (1.1) do desenvolvimento do seno da soma, tem-se:

$$\frac{d\,(sen\, x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{sen(x+h) - sen\, x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{sen\, x.\cos h + sen\, h.\cos x - sen\, x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{sen\, x(\cos h - 1) + sen\, h.\cos x}{h}$$

conhecendo as fórmulas (1.20) e (1.7) sabemos que,

$$1 - \cos\alpha = 2\,sen^2 \frac{\alpha}{2} \quad \text{e} \quad sen\, 2\alpha = 2\,sen\,\alpha.\cos\alpha\,.$$

Assim,

$$\frac{d\,(sen\, x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{sen\, x\left(-2\,sen^2 \frac{h}{2}\right) + 2\,sen \frac{h}{2}.\cos \frac{h}{2}.\cos x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{sen\frac{h}{2}\left(\cos\frac{h}{2}.\cos x - sen\,x.\,sen\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} =$$

por (2.1) $$= \lim_{\frac{h}{2}\to 0} \frac{sen\,\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \times \lim_{h\to 0}\left(\cos\frac{h}{2}.\cos x - sen\,x.sen\frac{h}{2}\right) =$$

$$= 1 \times \lim_{h\to 0}\cos\frac{h}{2}.\cos x - \lim_{h\to 0} sen\,x.sen\,\frac{h}{2} = \cos x.\cos 0 - sen\,x.sen 0 = \cos x.$$

Logo,

$$\frac{d\,(sen\,x)}{dx} = \cos x.$$

Como as derivadas das funções circulares (co-seno, tangente e cotangente) vão ser deduzidas a partir da derivada da função $y = sen\,x$, não fazemos as suas demonstrações.

§ 2.5 No cálculo de Integrais

As fórmulas trigonométricas tem um vasto campo de aplicação quer nas Matemáticas elementares quer nas superiores.

Para simplificar o cálculo do integral das seguintes expressões:

$$\int \cos mx.\cos nx\,dx;\quad \int sen\,mx.sen\,nx\,dx \quad \textbf{e} \quad \int sen\,mx.\cos nx\,dx.$$

Podemos aplicar as fórmulas do produto dos co-senos, do seno pelo coseno e dos senos, (1.28), (1.29) e (1.30) respectivamente:

$$\int \cos mx.\cos nx\,dx = \frac{1}{2}\int [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]dx;$$

$$\int sen\, mx.\cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int [sen(m+n)x + sen(m-n)x]dx;$$

$$\int sen\, mx.sen\, nx\, dx = \frac{1}{2}\int [-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]dx;$$

Exemplos:

i) $\int \cos 4x.\cos 7x \; dx$ *ii)* $\int sen\, x.sen\, 3x \; dx$ *iii)* $\int sen\, 3x.\cos 2x \; dx$

Vejamos a resolução do exemplo ***iii)***

§ Exemplo de aplicação 1

Determine $\int \cos 2x \,.\, sen\, 3x \, dx$.

Resolução:

Neste caso tentamos reduzir o integral do produto para um integral de soma de integrais imediatos.

Aplicando a fórmula do produto do seno pelo co-seno (1.29),

$$sen\,\alpha.\cos\beta = \frac{1}{2}[sen(\alpha+\beta) + sen(\alpha-\beta)] \text{ e}$$

sabemos também que o integral da soma é igual à soma dos integrais, então,

$$\int sen\, 3x.\cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\int (sen\, 5x + sen\, x)dx = \frac{1}{2}\int sen\, 5x\; dx + \frac{1}{2}\int sen\, x\; dx.$$

Sabemos da análise que $\int sen\, u.\, du = -\cos u + C$ e $d(\lambda x) = \lambda dx$, assim tem-se que,

$$\frac{1}{2}\int sen\, 5x\; dx + \frac{1}{2}\int sen\, x\; dx =$$
$$= \frac{1}{10}\int sen\, 5x\; d5x + \frac{1}{2}\int sen\, x\; dx = -\left(\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x\right) + C.$$

Para simplificar o cálculo do integral que apresente a forma $\int sen^n x.\cos^m x\, dx$ onde as potências de $sen\, x$ e $\cos x$ são números naturais e pares normalmente, usa-se

$$sen^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \text{ e/ou } \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

Exemplos:

i) $\int sen^4 x\, dx$; *ii)* $\int sen^4 x.\cos^2 x\, dx$; *iii)* $\int \cos^4 x\, dx$.

Vejamos a resolução do exemplo ***iii)***

§ Exemplo de aplicação 2

Resolva o integral $\int \cos^4 x\, dx$,

Resolução:

Quando queremos reduzir o grau de uma função podemos usar as fórmulas

$$1-\cos 2\alpha = 2sen^2\alpha \text{ e } 1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha .$$

Então,

$$\int \cos^4 x\, dx = \int (\cos^2 x)^2\, dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2} \right)^2 dx \text{ donde obtemos,}$$

$$\int \left(\frac{1}{4} + \cos 2x + \frac{\cos^2 2x}{4} \right) dx = \int \frac{1}{4}\, dx + \int \cos 2x dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x\, dx .$$

Voltando a aplicar a fórmula $1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$, então a expressão é igual a

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\, sen 2x + \frac{1}{4} \int \frac{1+\cos 4x}{2}\, dx = \frac{x}{4} + \frac{sen 2x}{2} + \frac{x}{8} + \frac{1}{32} sen 4x + C =$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{sen 2x}{2} + \frac{sen\, 4x}{32} + C .$$

§ 2.6 No Estudo de uma Função

Com o objectivo de estudar a função

$$f(\varphi) = \sqrt{\cos^2\varphi + a.sen^2\varphi} + \sqrt{sen^2\varphi + a.\cos^2\varphi} \text{ em que } a > 0$$

necessitamos do seguinte resultado.

§ 2.6.1 Lema:

Seja $x + y$ *a soma de duas variáveis. Se* $x + y = c$ *,isto é, se a soma de duas variáveis é uma grandeza constante então o produto destas* $(x.y)$ *tem o seu valor máximo em* $x = y$.

Demonstração:

Como $x + y = c$ *é equivalente a* $y = c - x$ *também é verdade que* $x y = x c - x^2$. Queremos o máximo de $(x.y)$ ou seja queremos o valor máximo de

$$f(x) = x c - x^2.$$

A derivada de $f(x)$ é $f'(x) = -2x + c$, assim $f'(x) = 0$ quando $x = \frac{c}{2} \Rightarrow y = \frac{c}{2}$.

Mostrámos que $x.y$ tem o seu valor máximo quando $x = y$.

Voltando novamente vamos encontrar o valor máximo da função

$$f(\varphi) = \sqrt{\cos^2\varphi + a.sen^2\varphi} + \sqrt{sen^2\varphi + a.\cos^2\varphi} \quad \text{em que } a > 0$$

Vamos em seguida fazer o estudo da função $f(\varphi)$.

Resolução:

Como f é sempre positiva, vamos encontrar o valor máximo do quadrado da nossa função.

$$f^2(\varphi) = \cos^2\varphi + a.sen^2\varphi + sen^2\varphi + a.\cos^2\varphi + 2.\sqrt{(\cos^2\varphi + a\,sen^2\varphi).\,(sen^2\varphi + a\cos^2\varphi)}$$

$$= 1 + a + 2\sqrt{(\cos^2\varphi + a\,sen^2\varphi).(sen^2\varphi + a\cos^2\varphi)}$$

Ora, $1 + a$ é constante, então esta expressão tem o valor máximo quando

$$\sqrt{(\cos^2\varphi + a\,sen^2\varphi).(sen^2\varphi + a\cos^2\varphi)} \qquad (2.2)$$

tem também o valor máximo.

Analisando (2.2) verificamos que temos o produto de dois factores cuja sua soma é $1 + a$ *(constante).*

Queremos o valor máximo do produto, cuja soma dos seus termos é constante.

*S*eja $x = \cos^2\varphi + a\,sen^2\varphi$ e $y = sen^2\varphi + a\cos^2\varphi$, temos o valor máximo quando

$$\cos^2\varphi + a\,sen^2\varphi = sen^2\varphi + a\cos^2\varphi \Leftrightarrow \cos^2\varphi - sen^2\varphi = a(\cos^2\varphi - sen^2\varphi).$$

Pela fórmula (1.8) sabemos que $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha$, assim,

$$\cos 2\varphi - a\cos 2\varphi = 0 \;\Leftrightarrow\; \cos 2\varphi.(1 - a) = 0 \;\Leftrightarrow\; \cos 2\varphi = 0 \;\vee\; a = 1.$$

À primeira vista, as soluções são $\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ *em que* $k \in Z$ ou então $a = 1$.

Se $a = 1$ então $f(\varphi) = 1 + 1 = 2$, obtemos uma função constante, nesta determinação o seu máximo não faz sentido.

Se $\cos 2\varphi = 0$, então $\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ *em que* $k \in Z$, como a função é periódica, basta encontrar o máximo para um único valor de φ. Então

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\cos^2\frac{\pi}{4} + a\,sen^2\frac{\pi}{4}} + \sqrt{sen^2\frac{\pi}{4} + a\cos^2\frac{\pi}{4}},$$

visto que, $sen\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, concluímos que,

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\cos^2\frac{\pi}{4} + a\,sen^2\frac{\pi}{4}} + \sqrt{sen^2\frac{\pi}{4} + a\cos^2\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{\frac{1+a}{2}} = \sqrt{2(a+1)}.$$

Logo, a função tem um máximo para $y = \sqrt{2(a+1)}$.

Capítulo 3

Equações trigonométricas

Neste capítulo, vamos definir primeiro, as funções trigonométricas inversas do seno, co-seno, tangente e co-tangente no intervalo onde são válidas, complementamos depois estas definições com a apresentação dos gráficos destas funções.

As funções trigonométricas são funções angulares importantes no estudo dos triângulos e na modelação de fenómenos períodicos.

Os gráficos das funções trigonométricas foram construídos com recurso so programa "Autograph3". A partir dos seus gráficos vamos determinar algumas equações trigonométricas elementares.

Vamos estudar vários tipos de equações trigonométricas não elementares, classificando-as, nomeadamente em: - equações formalmente redutíveis, estas são formalmente redutíveis a equações do 2º grau; - equações lineares em $sen\,x$ e $\cos x$; - equações homogéneas; - equações simétricas; - resolução de equações por "análise", estas são estudadas numa observação mais cuidada.

Depois de resolvermos uma destas equações por dois métodos distintos determinamos $sen\,x + \cos x$.

Finalizamos o capítulo, com a apresentação de uma aula prática, cujo finalidade é resolver equações trigonométricas recorrendo a métodos de resolução distintos.

As funções circulares estudadas não são injectivas. Por isso para construirmos a sua inversa, vamos fazer algumas restrições ao seu domínio.

As ***funções trigonométricas inversas*** são inversas das funções trigonométricas, algumas vezes são chamadas de ***função de arco***, pois retornam o arco correspondente a certa função trigonométrica.

§ 3.1 Funções Trigonométricas Inversas

Inversa da função seno

Para a função $f(x) = sen\, x$ temos que $D_f = \mathbb{R}$ e $D'_f = [-1,1]$.

Vamos estudar o comportamento da função $y = sen\, x$ no intervalo $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

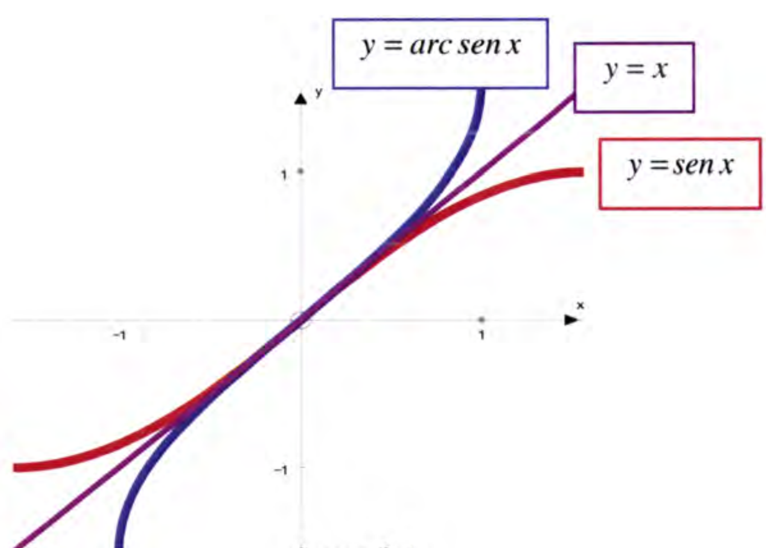


figura 3.1

Ao observar o gráfico desta função, verificamos que quando o valor de x cresce no intervalo de $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$, a função $y = sen\, x$ é monótona crescente, e todas as suas imagens pertencem de -1 a 1. Neste caso temos que a cada objecto de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ corresponde uma imagem de $[-1,1]$.

Esta correspondência unívoca permite determinar a sua inversa $x = arc\,sen\,y$ e lê-se "*arco seno de* y " e são verdadeiras as seguintes igualdades:

$$sen(arc\,sen\,y) = y \ , \ y \in [-1, 1] \ ; \quad arc\,sen(sen\,x) = x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right].$$

O gráfico da função $y = arc\,sen\,x$, que na *figura 3.1* se encontra a azul, é simétrico ao da função $y = sen\,x$, relativamente à recta $y = x$ *(bissectriz dos quadrantes impares).*

Inversa da função tangente

Para a função $f(x) = tg(x)$, esta não existe para $\cos x = 0$. Donde o D_f são todos os valores reais excepto os valores para os quais $\cos x = 0$, e $D'_f = \mathbb{R}$.

Observemos o comportamento da função tangente no intervalo $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

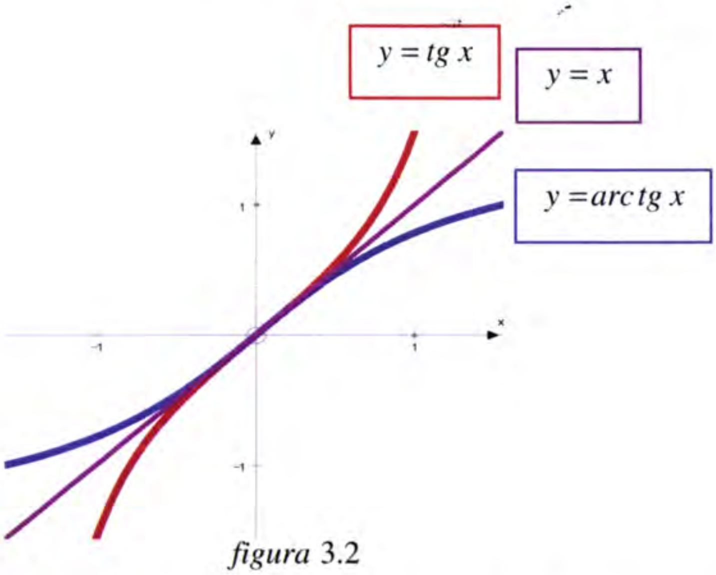


figura 3.2

Analisando o gráfico desta função verificamos que quando x cresce de $-\frac{\pi}{2}$ *até* $\frac{\pi}{2}$ a função é monótona crescente e todas as suas imagens pertencem a

R. Neste caso obtemos uma correspondência unívoca do intervalo $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ em todo R.

Então, existe uma função inversa de $f(x) = tg(x)$, definida em R *(domínio* R*)* e cujo contradomínio é $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Essa função é definida por $x = arctg\, y$ e lê-se "*arco tangente de* y ".

Assim por definição de função inversa são verdadeiras as seguintes igualdades:

$$tg\,(arctg\, y) = y,\ y \in \Re \quad \text{e} \quad arctg\,(tg\, x) = x\,,\ x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[.$$

Inversa da função do co-seno

Para a função $f(x) = \cos x$ temos que D_f = R e $D'_f = [-1,1]$.

Vejamos o comportamento da função $y = \cos x$ quando $x \in [0, \pi]$ e da sua inversa, *(figuras 3.3 e 3.4)* respectivamente.

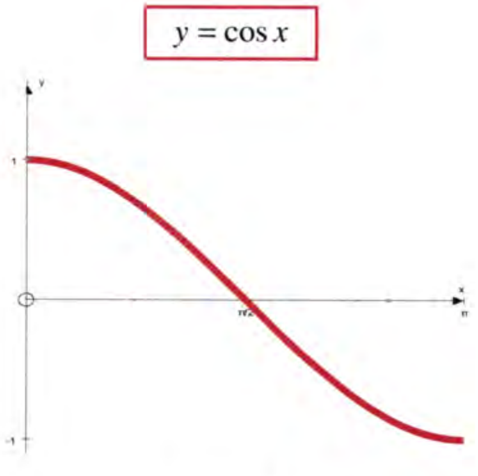


figura 3.3

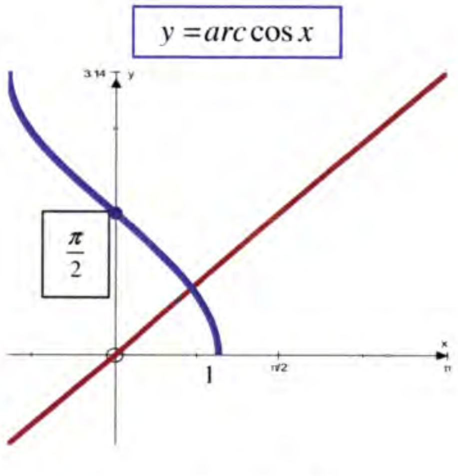


figura 3.4

Ao observar o gráfico função co-seno, verificamos que quando o valor de x cresce no intervalo de 0 *a* π, a função $y = \cos x$ é monótona decrescente, e todas as suas imagens pertencem de -1 a 1. Neste caso temos que a cada objecto de $[0, \pi]$ corresponde uma imagem de $[-1,1]$. Esta correspondência unívoca corresponde à função $x = arc\cos y$ e lê-se "*arco co-seno de* y ".

Pela definição de função inversa de $y = \cos x$ são verdadeiras as seguintes igualdades:

$$\cos(arc\cos y) = y, \quad y\in[-1,1] \quad \text{e} \quad arc\cos(\cos x) = x, \quad x\in[0,\pi].$$

O gráfico da função $y = arc\cos x$ (figura *3.4)* é simétrico ao gráfico da função $y = \cos x$ em relação ao eixo de simetria $y = x$.

Inversa da função co-tangente

Para a função $f(x) = \cot g(x)$, esta não existe para $senx = 0$. Donde o D_f são todos os valores reais excepto os valores para os quais $senx = 0$, e $D'_f = \mathbb{R}$.

Observemos agora o comportamento da função $\cot g\, x$ no intervalo $]0, \pi[$, e da sua inversa *(figuras 3.5 e 3.6)* respectivamente.

$\boxed{y = \cot g\, x}$

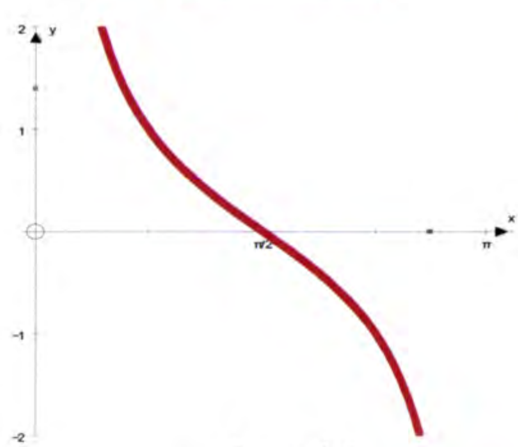


figura 3.5

$\boxed{y = arc\cot g\, x}$

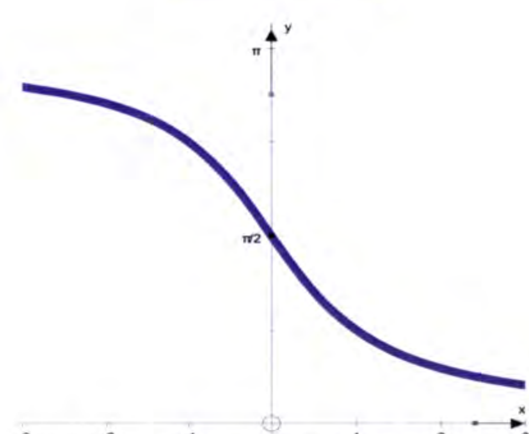


figura 3.6

Portanto da definição de função inversa são verdadeiras as seguintes igualdades:

$\cot g\,(arc\cot g\; y) = y, \quad y \in \mathbb{R}$ e $\quad arc\cot g\,(\cot g\, x) = x, \quad x \in \left]0, \pi\right[.$

Deste modo, existe uma função inversa de $y = \cot g(x)$, definida em todo $\mathbb{R}$ e cujo contradomínio é $\left]0, \pi\right[$. Essa função é definida por $x = arc\cot g\; y$ e lê-se "*arco co-tangente de* y ".

Um leitor atento repara, por exemplo, que a escolha dos domínios das funções $y = sen\,x$ e $y = tg\,x$, que garantem correspondência unívoca e mantêm o contradomínio, tem o número infinito de possibilidades, por exemplo $\forall\; k$ *inteiro*,

Se $y = sen\,x$ temos que $x \in \left[\dfrac{(2k-1)\pi}{2}, \dfrac{(2k+1)\pi}{2}\right]$

Se $y = tg\,x$ temos $x \in \left]\dfrac{(2k-1)\pi}{2}, \dfrac{(2k+1)\pi}{2}\right[$.

Vejamos a seguir um exemplo aplicando as funções trigonométricas inversas.

§ Exemplo de aplicação

Simplifique a expressão, sem recorrer a tabelas:

$$A = \cos\left[arc\cos\left(sen\frac{\pi}{10}\right) + arc\cos\left(\cos\frac{7\pi}{5}\right) + arc\,sen\left(\frac{1}{5}\right)\right].$$

Resolução:

Designemos por B e C as seguintes expressões,

$$B = arc\cos\left(sen\frac{\pi}{10}\right) \quad \text{e} \quad C = arc\cos\left(\cos\frac{7\pi}{5}\right).$$

Com a ajuda das fórmulas das funções complementares podemos simplificá-las,

$$sen\frac{\pi}{10} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}\right) = \cos\frac{4\pi}{10}$$

e assim, $\quad B = arc\cos\left(\cos\dfrac{4\pi}{10}\right) = \dfrac{4\pi}{10}, \quad$ porque $\dfrac{4\pi}{10} \in [0, \pi]$.

Antes de começar a simplificar a expressão C, notamos que $\frac{7\pi}{5} > \pi$ donde,

$$arc\cos\left(\cos\frac{7\pi}{5}\right) \neq \frac{7\pi}{5} \text{ pois } \frac{7\pi}{5} \notin [0,\pi].$$

Vamos procurar primeiro uma solução para x no intervalo $[0\,,\pi]$, tal que

$$\cos x = \cos\frac{7\pi}{5}.$$

Como $\cos\frac{7\pi}{5} = \cos\left(2\pi - \frac{3\pi}{5}\right) = \cos\left(-\frac{3\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ então $x = \frac{3\pi}{5}$.

então,

$$C = arc\cos\left(\cos\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{3\pi}{5}, \text{ porque } \frac{3\pi}{5} \in [0\,,\pi].$$

Donde ,

$$B + C = \frac{4\pi}{10} + \frac{3\pi}{5} = \frac{10\pi}{10} = \pi.$$

Voltando à expressão inicial, temos que,

$$A = \cos\left[B + C + arc\,sen\left(\frac{1}{5}\right)\right] = \cos\left[\pi + arc\,sen\left(\frac{1}{5}\right)\right] = -\cos\left[arc\,sen\left(\frac{1}{5}\right)\right].$$

Usando $\cos x = \pm\sqrt{1 - sen^2 x}$ e como $x = arc\,sen\left(\frac{1}{5}\right)$ pertence ao primeiro quadrante, o sinal do co-seno na fórmula dada é "+", assim: $\cos x = \sqrt{1 - sen^2 x}$.

Logo,

$$A = -\sqrt{1 - \left[sen\left(arc\,sen\frac{1}{5}\right)\right]^2} = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = -\sqrt{\frac{24}{25}} = -\frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

§ 3.2 Equações Trigonométricas

A ideia principal da resolução de equações trigonométricas baseia-se numa simplificação sucessiva destas, de modo a serem reduzidas a uma ou várias equações trigonométricas elementares. Começamos por estudar as equações trigonométricas elementares a partir dos seus gráficos.

§ 3.2.1 Equações Trigonométricas Elementares

Chamam-se **equações elementares** a todas as equações que são de uma das formas

$$sen\ x = a\ , \ \cos x = a\ , \quad tg\ x = a \ \text{ ou } \ \cot g\ x = a$$

ou a elas se reduzem facilmente.

Os gráficos das funções circulares traduzem com clareza as propriedades fundamentais das funções trigonométricas, nomeadamente, os *máximos e mínimos*, os *zeros* e ainda o *crescimento* daquelas funções nos quatro quadrantes do intervalo $[0\ ,2\pi]$.

Às curvas que a seguir se apresentam nas *figuras 3.7 e 3.8* chamamos, respectivamente, **sinusóide** e **co-sinusóide.**

O estudo que fizemos sobre funções inversas permite resolver facilmente estas equações.

§ $sen\ x = a$ e $0 \le a \le 1$

Sabemos que a função $y = sen\ x$ é periódica e se $sen\ x = a$ também $sen(x + 2k\pi) = a$ então, a resolução de $sen\ x = a$ não é única. Temos que encontrar todas as soluções da equação.

O valor principal do ângulo cujo *seno* é a é $arcsen\, a$ e este encontra-se no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$. Observemos a *(figura 3.7)* e vamos expressar todas as soluções através deste valor principal.

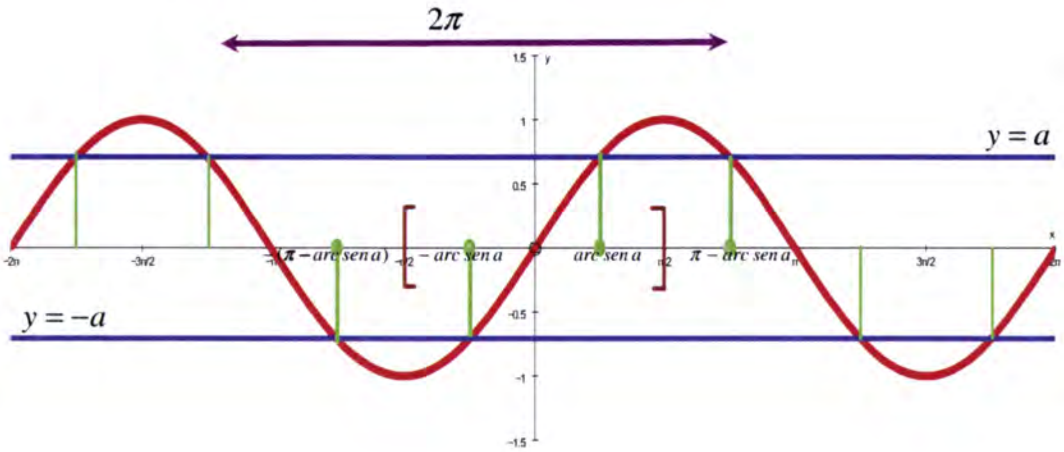


figura 3.7 : ***Sinusóide***

Assim todas as soluções podem ser obtidas da seguinte forma:

$$x_I = arcsen\ a \quad \text{e} \quad x_{II} = \pi - arcsen\ a$$

Então, $x_{I\,k} = x_I + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad x_{I\,k} = arcsen\ a + 2k\pi$

$$x_{II\,k} = x_{II} + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad x_{II\,k} = \pi - arcsen\ a + 2k\pi, \qquad \text{onde } k \in Z$$

$x_n = arcsen\ a + n\pi,$ se n for par e $x_n = -arcsen\ a + n\pi,$ se n for ímpar

Reduzindo estas duas soluções a uma só, obtemos

$$x_n = (-1)^n\, arcsen\ a + n\pi \quad \text{em que } \; n \text{ é um inteiro qualquer.} \tag{3.1}$$

§ $sen\ x = -a, \quad 0 \le a \le 1$

$$x_{I\,k} = -arcsen\ a + 2k\pi \quad \text{e} \quad x_{II\,k} = -(\pi - arcsen\ a) + 2k\pi = arcsen\ a\ + (2k-1)\pi$$

$$x_n = -arcsen\ a + \pi n, \text{ se } n \text{ é par} \quad \text{e} \quad x_n = arcsen\ a + \pi n, \text{ se } n \text{ é ímpar}$$

Assim, temos,

$$x_n = (-1)^{n+1}\, arcsen\ a + \pi n \quad n \text{ é um inteiro qualquer.} \tag{3.2}$$

§ $\cos x = a$ e $0 \le a \le 1$

O valor principal do ângulo cujo *co-seno* é a é $arc\cos a$ e está no intervalo $[0, \pi]$. Temos que expressar todas as soluções através deste valor principal.

Observemos a *figura 3.8*

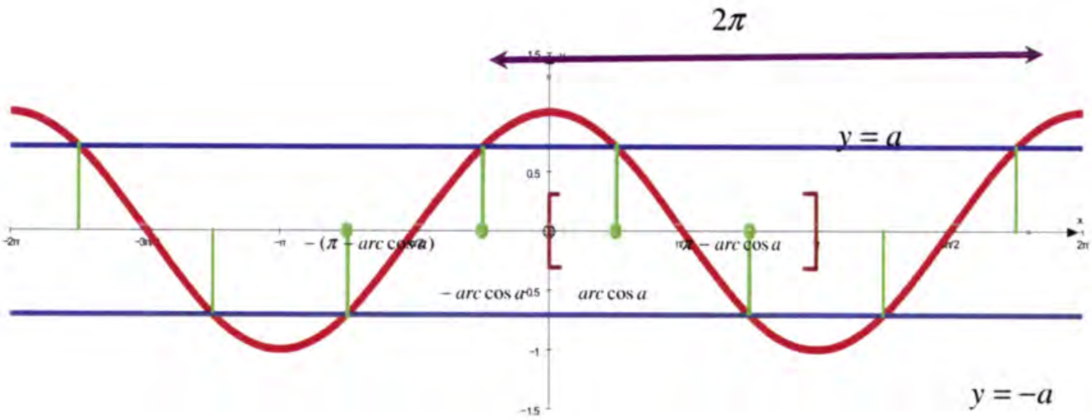


figura 3.8: ***Co- sinusóide***

Assim temos,

$$\left.\begin{array}{l} x_{I\,k} = arc\cos a + 2k\pi \\ x_{II\,k} = -\arccos a + 2k\pi \end{array}\right\} \quad \textit{então } x_n = \pm arc\cos a + 2n\pi \quad \textit{onde} \quad n \in Z \qquad (3.3)$$

§ $\cos x = -a$ e $0 \le a \le 1$

$$\cos x = -a \Leftrightarrow x_n = \pm(\pi - \arccos a) + 2\pi n, n \in Z \qquad (3.4)$$

O máximo e o mínimo destas duas funções são, respectivamente 1, e -1, ou seja o conjunto de todos os números reais y que cumprem a condição, $-1 \le y \le 1$.

Atendendo à periodicidade das funções $y = sen\,x$ e $y = \cos x$ verificamos que estas funções admitem uma infinidade de zeros. Temos que $x = a$ é zero da função $f(x) = y$ se $f(a) = 0$. Então temos $x = 0$; $x = \pi$ e $x = 2\pi$ no caso do seno e temos $x = \frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ no caso do co-seno.

Assim, a expressão geral dos zeros para o seno é $x = k\pi$ *radianos* e para o co-seno é

$$x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}\ radianos.$$

O valor máximo das funções é quando $f(x) = 1$. Então temos $x = \frac{\pi}{2}$ para o seno e temos $x = 0$ e $x = 2\pi$ para o co-seno, atendendo à periodicidade destas funções temos,

$x = (4k + 1)\frac{\pi}{2}$ *radianos* para o seno e $x = 2k\pi$ *radianos* para o co-seno.

O valor mínimo das funções é quando $f(x) = -1$. Então temos $x = \frac{3\pi}{2}$ para o seno e temos $x = \pi$ para o co-seno.

Logo, $x = (4k + 3)\frac{\pi}{2}$ *radianos* para o seno e $x = (2k + 1)\pi$ para o co-seno.

Oservando o comportamento das ordenadas dos pontos da *sinusóide* e da *co-sinusóide* podemos ainda afirmar que a função seno *cresce* no 1º e 4º quadrantes e *decresce* no 2º e 3º. Quanto à função co-seno, é visível que no 1º e 2º é *decrescente* e que nos quadrantes 3º e 4º é crescente.

§ $tg\ x = a$, $a \in \mathbb{R}$

§ $tg\ x = -a$, $a \in \mathbb{R}$

Veja-se o gráfico da figura 3.9, correspondente à função tangente,

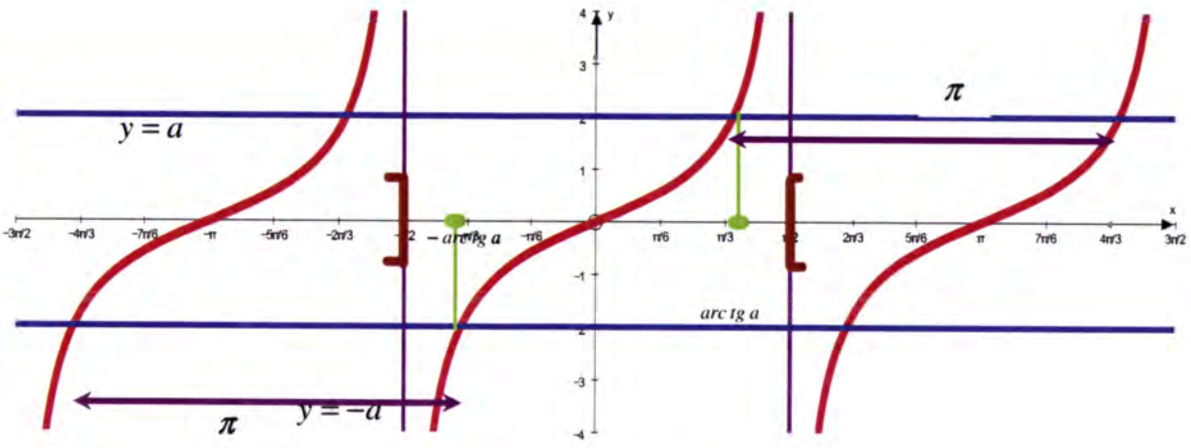


figura 3.9 : ***Tangentóide***

A função tangente é periódica, se $tg\ x = a$ também $tg\,(x + k\pi) = a$.

Assim,

$$tg\ x = a \Leftrightarrow x = arc\ tg\ a + n\pi\ ,\ a \in R\ ,\ n \in Z \tag{3.5}$$

$$tg\ x = -a \Leftrightarrow x = -arc\ tg\ a + n\pi\ ,\ a \in R \tag{3.6}$$

Vamos analisar o gráfico da função co-tangente *(figura 3.10)*

§ $\cot g\ x = a\ \ ,\ a \in \mathbb{R}$

§ $\cot g\ x = -a\ ,\ a \in \mathbb{R}$

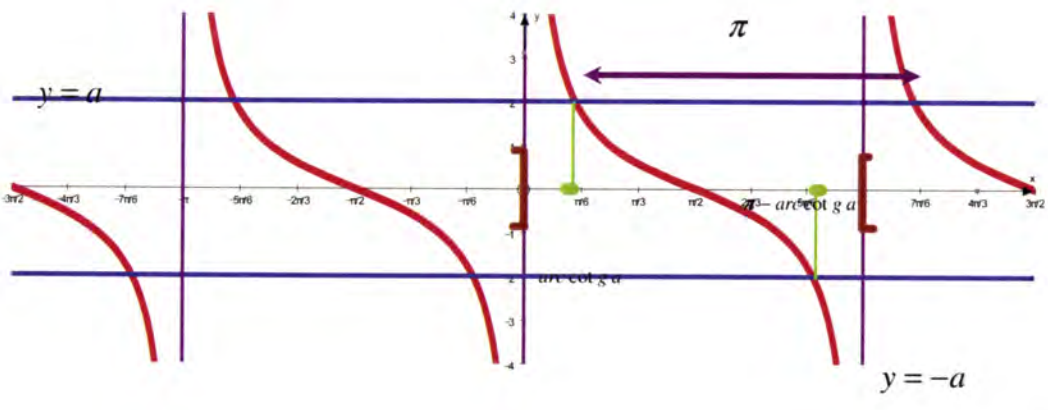


figura 3.10 : ***Co-tangentóide***

A função co-tangente é periódica, se $\cot g\, x = a$ também $\cot g\,(x + k\pi) = a$.

Assim,

$$\cot g\ x = a \iff x = arc\cot g\ a + n\pi\,,\ a \in R\,,\ n \in Z \qquad (3.7)$$

$$\cot g\ x = -a \iff x = \pi - arc\cot g\ a + n\pi \qquad (3.8)$$

Os zeros destas duas funções são as abcissas dos pontos de encontro da *tangentóide e da* co- *tangentóide* com o eixo das abcissas e atendendo à sua periodicidade, estas funções admitem uma infinidade de zeros. Temos que $x = a$ é zero da função $f(x) = y$ se $f(a) = 0$.

Temos $x = 0$; $x = \pi$ e $x = 2\pi$ no caso da tangente e $x = \frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ no caso da co-tangente. Então a expressão geral dos zeros é:

$x = k\pi$ para a *tangente* e $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ para a co- *tangente.*

Como em cada um dos quadrantes as funções $y = tg\, x$ e $y = \cot g\, x$ *crescem* e *decrescem,* respectivamente, concluimos que estas não admitem nem máximos nem mínimos.

Observamos que as funções $y = tg\, x$ e $y = \cot g\, x$ são funções *contínuas* em todo o seu domínio de existência, isto é, para todo o x real que verifique, respectivamente, as condições:

$$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad x \neq k\pi.$$

Observamos também que a função $y = tg\, x$ é a única função trigonométrica que é *crescente* em todo o seu domínio e a função $y = \cot g\, x$ é a única que é de*crescente* em todo o seu domínio.

§ 3.2.2 Equações Trigonométricas não Elementares

Neste ponto, vamos considerar vários tipos de equações trigonométricas não elementares e mostrar abordagens diferentes para as resolver.

§ Equações formalmente redutíveis a equações do 2º grau

A resolução de algumas equações trigonométricas pode fazer-se depender da resolução de equações do 2º grau, desde que se exprimam numa só função todas as funções trigonométricas que nela figuram.

Vamos considerar que a função auxiliar é, por exemplo, $sen(x)$, então a equação reveste a forma

$$a\,z^2 + b\,z + c = 0 \qquad \left[com \quad z = sen(x)\right].$$

E desta forma, ficamos dependentes da resolução das *equações elementares*:

$$sen(x) = z_1 \qquad e \qquad sen(x) = z_2.$$

Em que z_1 e z_2 são as raízes da equação $a\,z^2 + b\,z + c = 0$

§ Exemplo de aplicação

Resolva a equação $sen^2 x.tg\,x + \cos^2 x.\cot g\,x + sen\,x.\cos x = \dfrac{13}{4\sqrt{3}}$.

Resolução:

Como $tg\,x = \dfrac{sen\,x}{\cos x}$ e $\cot g\,x = \dfrac{\cos x}{sen\,x}$, a equação anterior é equivalente a

$$\frac{sen^3 x}{\cos x} + \frac{\cos^3 x}{sen\,x} + sen\,x.\cos x = \frac{13}{4\sqrt{3}}.$$

Reduzindo a expressão ao mesmo denominador temos,

$$(sen^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 + sen^2 x.\cos^2 x = \frac{13}{4\sqrt{3}}\, sen\, x.\cos x$$

transformando o primeiro membro da igualdade num caso notável,

$$(sen^2 x + \cos^2 x)^2 = \frac{13}{4\sqrt{3}}\, sen\, x.\cos x + sen^2 x.\cos^2 x \iff$$

$$\iff \quad sen^2 x.\cos^2 x + \frac{13}{4\sqrt{3}} sen\, x.\cos x = 1 \qquad \text{fazendo} \qquad t = sen\, x.\cos x = \frac{sen(2x)}{2}$$

Assim,

$$\begin{cases} t^2 + \dfrac{13}{4\sqrt{3}} t - 1 = 0 \\ |t| \leq \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtemos as raízes:

$$t_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \vee \quad t_2 = -\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Como $|t| \leq \frac{1}{2}$, só uma das soluções é admissível, assim a equação proposta

pode-se substituir se pela equação elementar

$$\frac{sen(2x)}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \iff sen(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

por (3.1) a solução é $x = \frac{1}{2}(-1)^n.arc\,sen\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{n\pi}{2}, \quad n \in Z \iff$

$$\iff \quad x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{2}.$$

§ Equações Lineares em $sen(x)$ e $\cos(x)$

Uma equação diz-se linear se nesta figuram apenas somas e produtos de constantes e variáveis do 1º grau. Como consequência se estas variáveis são $sen(x)$ e $\cos(x)$, então ela será linear $sen(x)$ e $\cos(x)$.

Seja então a equação linear: $a\ sen\ x + b\cos x = c \quad onde\ a, b\ e\ c \in \mathbb{R}$

(i) **Quando** $c=0$ **e** $a, b \neq 0$

Se $\cos(x) = 0$ então $a\ sen\ x + b\cos x = c$ reduz-se a $sen(x) = 0$ ou seja,

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \wedge \quad x = k\pi$$

o que é impossível, daqui deduzimos que $\cos(x) \neq 0$ assim, podemos dividir ambos os termos da igualdade por $\cos(x)$, e tem-se,

$$a\,\frac{sen\,x}{\cos x} + b\,\frac{\cos x}{\cos x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a\ tg\,x + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad tg\,x = -\frac{b}{a}$$

$$\Leftrightarrow x = arc\ tg\left(-\frac{b}{a}\right) + n\pi \qquad n\ \acute{e}\ um\ inteiro\ qualquer.$$

(ii) Quando $c \neq 0$ e $a, b \neq 0$ vamos aplicar o **método do ângulo auxiliar.**

1º Passo: Apresentamos $a\ sen(\lambda x) + b\cos(\lambda x) = c$ e dividimos por $\mu \neq 0$

$$\frac{a}{\mu}\ sen\ (\lambda x) + \frac{b}{\mu}\cos\ (\lambda x) = \frac{c}{\mu}$$

Tentamos expressar $\frac{a}{\mu}$ e $\frac{b}{\mu}$ como *seno* e *co-seno (não tem que ser por esta ordem),* de um ângulo auxiliar de modo a obter uma das fórmulas das somas dos senos e dos co-senos, isto é,

$$sen\,(\varphi \pm \lambda x) \text{ ou } \cos\,(\varphi \pm \lambda x).$$

Consideremos: $\dfrac{a}{\mu} = sen\,\varphi$ e $\dfrac{b}{\mu} = \cos\,\varphi$ ou então

$\dfrac{b}{\mu} = sen\,\varphi$ e $\dfrac{a}{\mu} = \cos\varphi$ assim φ pode expressar-se de um dos

seguintes modos: $\varphi = arc\ sen\,\dfrac{a}{\mu} = arc\ \cos\,\dfrac{b}{\mu}$

ou $\varphi = arc\ \cos\,\dfrac{a}{\mu} = arc\ sen\,\dfrac{b}{\mu}$

Como explicitar a variável μ ?

Pela fórmula fundamental da trigonometria sabemos que é válida a igualdade $sen^2\,\varphi + \cos^2\varphi = 1$ então também é válida $\left(\dfrac{a}{\mu}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{\mu}\right)^2 = 1$, claro que $\mu \neq 0$.

Resolvendo a equação em ordem a μ, obtém-se: $a^2 + b^2 = \mu^2$

$$\mu = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$$

é suficiente escolher μ positivo pois trata-se de uma igualdade assim a equação

$$\frac{a}{\mu}\,sen\,(\lambda x) + \frac{b}{\mu}\cos\,(\lambda x) = \frac{c}{\mu}$$

reduz-se a

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,sen\,(\lambda x) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\,(\lambda x) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Como $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} < 1$ e $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} < 1$ e a soma dos quadrados destes é 1, então estes dois termos são *seno* e *co-seno* de um mesmo argumento φ pelas fórmulas (1.1) ou (1.4).

Assim a equação $a\,sen(\lambda x) + b\cos(\lambda x) = c$ reduz-se a

$$sen\,(\varphi + \lambda x) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{ou} \quad \cos\,(\varphi - \lambda x) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

2º Passo: Analisemos o segundo membro das equações anteriores.

Por definição de função *seno* e de função *co-seno* tem-se que, $\left|\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 1$,

* se $|c| > \sqrt{a^2+b^2}$ então a **equação não tem solução.**

* se $|c| < \sqrt{a^2+b^2}$ pode-se continuar a resolver a equação obtendo-se desta forma, uma **equação elementar.**

Assim,

$$sen\,(\varphi + \lambda x) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (\textit{podia-se ter escolhido } \cos(\varphi - \lambda x) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}})$$

por (3.1) $\quad \varphi + \lambda x = (-1)^n \, arc \; sen \left(\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) + n\pi \quad , n \in Z$

$$\Leftrightarrow x = \frac{(-1)^n}{\lambda} \, arc \; sen \left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) - \frac{\varphi}{\lambda} + \frac{n\pi}{\lambda} \quad , n \in Z \, ,$$

de acordo com, $\varphi = arc \;\cos \dfrac{a}{\mu} = arc \; sen \dfrac{b}{\mu}$ tem-se que,

$$\varphi = arc \;\cos \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \right).$$

Nota: Claro que podíamos expressar seno em função de co-seno ou vice-versa, de acordo com a fórmula fundamental da trigonometria, mas neste caso chega-se sempre a uma equação irracional ($sen\, x = \sqrt{1-\cos^2 x}$), que tem as suas dificuldades especiais.

Também é sempre possível utilizar uma substituição universal

$$\cos x = \frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} \quad \text{ou } sen\, x = \frac{2 tg \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}}$$

onde se obtém-se uma função $f\left(tg \frac{x}{2} \right)$ que é bastante trabalhosa.

Assim, para este tipo de equações, a abordagem proposta foi a mais aconselhável.

§ *Exemplo de aplicação*

Resolva a seguinte equação $2\cos(3x) + sen(3x) + 2 = 0$.

Resolução:

Vamos utilizar o **método do ângulo auxiliar:**

$\mu = \sqrt{a^2 + b^2}$, neste caso $\mu = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$, assim a equação reduz-se para

$$\frac{2}{\sqrt{5}} \cos(3x) + \frac{1}{\sqrt{5}} sen(3x) = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Considerando $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{5}}$ e $sen\varphi = \frac{b}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$ e $sen\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Repare-se que $\left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2 = 1$. Fazendo as respectivas substituições tem-se:

$$\cos\varphi \cos(3x) + sen\varphi\, sen(3x) = -\frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \cos(\varphi - 3x) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

chegamos a uma equação elementar e por (3.4)

$$\varphi - 3x = \pm \left[\pi - arc \cos\left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right) \right] + 2k\pi,\ k \in Z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\varphi}{3} \mp \frac{1}{3} \left[\pi - arc \cos\left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right) \right] + \frac{2k\pi}{3},\ k \in Z.$$

Logo a solução da equação é

$$x = \frac{\arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}{3} \mp \frac{1}{3}\left[\ \pi - arc\ \cos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + 2k\pi\right],\ k \in Z\,.$$

Vejamos mais um exemplo de aplicação deste método, sabemos que $|sen\,x| < 1$ e $|\cos x| < 1$, frequentemente acontece haver a necessidade de encontrar o valor máximo da função $sen\,x + \cos x$. Claramente, tem-se $|sen\,x + \cos x| < 2$ pois $sen\,x$ e $\cos x$ não podem para o mesmo argumento alcançar o seu valor máximo, isto é:

se $sen\,x = 1$ então $\cos x = 0$ e se $\cos x = 1$ então $sen\,x = 0$.

§ O valor máximo da função $sen\,x + \cos x$*?*

Vamos em seguida encontrar o valor máximo de $sen\,x + \cos x$.

Denotemos por $u = sen\,x + \cos x$ e vamos utilizar dois processos distintos para encontrar o valor máximo desta expressão.

Primeiro Processo:

Comecemos por aplicar o método do ângulo auxiliar e a seguir a fórmula (1.4).

Então,

$$|u| = |\cos x + sen\,x| = \sqrt{2}\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}sen\,x\right| = \sqrt{2}\left|\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right| \leq \sqrt{2}$$

Assim concluímos que

$$|\cos x + sen\,x| \leq \sqrt{2}\,.$$

Pelas propriedades da função módulo tem-se

$$-\sqrt{2} \leq \cos x + sen\,x \leq \sqrt{2}\,.$$

O valor máximo de $sen\,x + \cos x$ é $\sqrt{2}$ quando $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ porque

$$\cos\frac{\pi}{4} + sen\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}.$$

Segundo Processo:

Agora recorrendo ao método de Análise Infinitesimal. Denotemos por $f(x) = sen\,x + \cos x$ e encontramos os extremos da função, fazendo a derivada de $f(x)$, encontramos os pontos críticos,

$$f'(x) = -sen\,x + \cos x \text{, assim, } f'(x) = 0.$$

tem-se $sen\,x = \cos x \Leftrightarrow tg\,x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in Z$

o valor máximo será $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ com $k = par$.

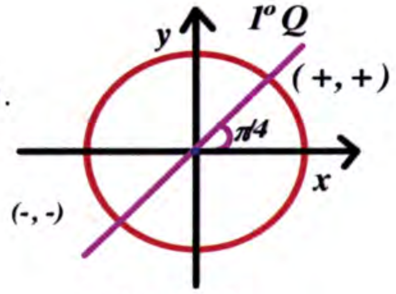


figura 3.11

De facto para $k = impar$ tem-se $-sen\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} = -\sqrt{2}$.

Assim,

$$f_{máx}\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi m\right) = \sqrt{2}.$$

A partir dos resultados anteriores enunciamos o seguinte lema.

§ 3.2.2.1 Lema

Para qualquer $x \in \Re$, *o valor máximo de* $sen\,x + \cos x$ é $\sqrt{2}$.

§ Equações Homogéneas

Nas equações homogéneas todos os termos do polinómio têm o mesmo grau. Por exemplo

$$A\cos^m(x) + B\,sen^m(x) + C\cos^k(x).sen^{m-k}(x) = 0 \quad \text{onde } m, k \in N \text{ e } k < m.$$

Para resolver uma equação deste tipo, dividem-se todos os termos da equação por

$$\cos^m(x) \text{ ou } sen^m(x).$$

Temos que se $\cos(x)=0$ é impossível que $sen(x)=0$.

Assim, para $\cos(x)\neq 0$ podemos dividir os dois membros da equação por $\cos^m(x)$. Então,

$$A + Btg^m(x) + C\frac{\cos^k(x).sen^{m-k}(x)}{\cos^m(x)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A + Btg^m(x) + C\,\frac{sen^{m-k}(x)}{\cos^{m-k}(x)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A + Btg^m(x) + C\,tg^{m-k}(x) = 0.$$

Fazendo a substituição $tg(x) = t$ obtém-se

$$A + B\,t^m + C\,t^{m-k} = 0 \Leftrightarrow B\,t^m + C\,t^{m-k} + A = 0.$$

As raízes deste polinómio são as equações trigonométricas elementares do tipo $tg(x) = t_k$ onde t_k é raiz da equação $A + B\,t^m + C\,t^{m-k} = 0$.

§ Exemplo de aplicação

Resolva, em $\Re$, a seguinte equação $\dfrac{6\cos^3(2x) + 2sen^3(2x)}{3\cos(2x) - sen(2x)} = \cos(4x)$.

Resolução:

Pela fórmula (1.8) o segundo membro da equação fica

$$\frac{6\cos^3(2x) + 2sen^3(2x)}{3\cos(2x) - sen(2x)} = \cos^2(2x) - sen^2(2x).$$

Como o denominador nunca se anula tem-se portanto que

$$6\cos^3(2x) + 2\,sen^3(2x) = \left(\cos^2(2x) - sen^2(x)\right).\left(3\cos(2x) - sen(2x)\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6 + 2\,tg^3(2x) = \frac{3\cos^3(2x) - \cos^2(2x).sen(2x) - 3\,sen^2(2x).\cos(2x) + sen^3(2x)}{\cos^3(2x)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 6 + 2tg^3(2x) = 3 - \frac{\cos^2(2x).sen(2x)}{\cos^3(2x)} - \frac{3sen^2(2x).\cos(2x)}{\cos^3(2x)} + tg^3(2x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 6 = 3 - tg(2x) - 3tg^2(2x) - tg^3(2x) \Leftrightarrow \quad tg(2x) + 3tg^2(2x) + tg^3(2x) + 3 = 0 .$$

Fazendo a substituição $y = tg(2x)$ obtém-se

$$y^3 + 3y^2 + y + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y(y^2+1) + 3(y^2+1) = 0 \qquad \Leftrightarrow \quad (y^2+1).(y+3) = 0 .$$

Como o termo (y^2+1) é sempre positivo então tem-se que $y + 3 = 0$ ou seja $y = -3$.

Chegámos então a uma equação trigonométrica elementar e por (3.6)

$$tg(2x) = -3 \Leftrightarrow 2x = -arc\ tg(3) + k\pi \ , \quad k \in Z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2} arc\ tg(3) + \frac{k\pi}{2} \ , \quad k \in Z .$$

§ Equações Simétricas

Nesta secção chamamos equações simétricas em *seno* e *co-seno* às equações do seguinte tipo:

$$f(\cos x + sen x \, ; \cos x \, . \, sen x) = c$$

§ Exemplo de aplicação

Resolva, em $\Re$, a seguinte equação $sen(x).(1-\cos(x))^2 + \cos(x).(1 - sen(x))^2 = 2$.

Resolução:

Com alguma facilidade se verifica que esta equação é simétrica em relação ao *seno* e ao *co-seno*. Assim,

$$sen(x).(1 - 2\cos(x) + \cos^2(x)) + \cos(x).(1 - 2sen(x) + sen^2(x)) = 2$$

$$\Leftrightarrow sen(x) - 2\cos(x)sen(x) + sen(x).\cos^2(x) + \cos(x) - 2sen(x)\cos(x) + \cos(x)sen^2(x) = 2$$

$$\Leftrightarrow sen(x) + \cos(x) - 4sen(x).\cos(x) + (sen(x).\cos(x)).(\cos(x) + sen(x)) = 2.$$

Uma abordagem para resolver este tipo de problema é designar por

$$u = \cos(x) + sen(x).$$

Donde se pode obter, $u^2 = 1 + 2\cos(x).sen(x) \Leftrightarrow \cos(x).sen(x) = \frac{u^2-1}{2}$.

Assim, substituindo na equação anterior temos,

$$u - 4\frac{u^2-1}{2} + \frac{u^2-1}{2}u = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u - 2u^2 + 2 + \frac{u^3-u}{2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2u - 4u^2 + 4 + u^3 - u = 4$$

$$\Leftrightarrow u^3 - 4u^2 + u = 0 \Leftrightarrow u(u^2 - 4u + 1) = 0 \Leftrightarrow u_1 = 0 \quad \vee \quad u^2 - 4u + 1 = 0.$$

Resolvendo esta equação $u^2 - 4u + 1 = 0$ obtemos

$$\mu_2 = 2 - \sqrt{3} \quad \text{e} \quad \mu_3 = 2 + \sqrt{3}.$$

Analisemos agora cada uma das três soluções da equação.

1º Caso: Se $\mu=0$

$$\cos(x) + sen(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + tg(x) = 0 \Leftrightarrow tg(x) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z$$

2º Caso: Se $\mu = 2 + \sqrt{3}$ e de acordo com o *lema (3.2.2.1)* temos que $|\mu| \leq \sqrt{2}$ e deste modo concluímos que $\mu_3 = 2 + \sqrt{3}$ é impossível.

3º Caso: Se $\mu = 2 - \sqrt{3}$

$$\cos(x) + sen(x) = 2 - \sqrt{3}$$

temos agora uma equação já nossa conhecida estudada no ponto **Equações Lineares em** $sen(x)$ **e** $\cos(x)$, sendo assim

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x)+\frac{\sqrt{2}}{2}sen(x)=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}$$

por (3.3) $$\frac{\pi}{4}-x=\pm\, arc\,\cos\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)+2k\pi,\quad k\in Z.$$

Logo as *soluções* da equação $sen(x).(1-\cos(x))^2+\cos(x).(1-sen(x))^2=2$ são:

$$S=\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi;\ \frac{\pi}{4}\pm\, arc\,\cos\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)+2k\pi,\quad k\in Z\right\}.$$

Equações por "análise"

Este método consiste em observar atentamente a equação em causa e com base na *observação* chegar a todas as soluções possíveis, vejamos um exemplo,

§ Exemplo de aplicação

Resolva, em $\Re$, a equação $\cos^{2n+1}(x)+sen^{2m+1}(x)=-1$, $\forall\, n, m\in N$.

Resolução:

1ª análise:

Se $\cos(x)=-1\ \Rightarrow\ \cos^{2n+1}(x)=-1$ o que implica que $sen^{2m+1}(x)=0$.

Assim,

$\cos^{2n+1}(x)+sen^{2m+1}(x)=-1$ reduz-se a $\cos^{2n+1}(x)=-1\ \Leftrightarrow\ x=\pi+2k\pi,\ k\in Z$.

Se $sen(x)=-1\ \Rightarrow\ sen^{2m+1}(x)=-1$ o que implica também $\cos^{2n+1}(x)=0$.

Assim,

$\cos^{2n+1}(x) + sen^{2m+1}(x) = -1$ reduz-se a $sen^{2m+1}(x) = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z$.

Então, nesta primeira análise temos que a equação $\cos^{2n+1}(x) + sen^{2m+1}(x) = -1$, é uma equação possível sendo as suas soluções,

$$x \in \left\{ \pi + 2k\pi\ ,\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \ k \in Z \right\}$$

2ª análise:

Vamos mostrar que não existem outras soluções:

Se $\cos(x) = 1 \Rightarrow \cos^{2n+1}(x) = 1$ ou se $sen(x) = 1 \Rightarrow sen^{2m+1}(x) = 1$

o que implica respectivamente,

$$sen^{2m+1}(x) = -2 \qquad \text{ou} \qquad \cos^{2n+1}(x) = -2$$

o que evidentemente torna a equação $\cos^{2n+1}(x) + sen^{2m+1}(x) = -1$ impossível.

3ª análise:

Se $\cos(x) = 0$ ou se $sen(x) = 0$ implica respectivamente

$$sen^{2m+1}(x) = -1 \qquad \text{ou} \qquad \cos^{2n+1}(x) = -1\,.$$

Estas soluções foram consideradas na primeira análise.

4ª análise:

Só falta analisar quando, $|sen\,x| < 1$ ou $|\cos x| < 1$ aqui excluímos $sen(x) = 0$ ou $\cos(x) = 0$, visto que foi analisado anteriormente.

Seja $\quad |\cos x| < 1 \Rightarrow |\cos x|^{2n+1} < 1 \Rightarrow |\cos^{2n+1}(x)| < 1$.

Podemos considerar $|\cos^{2n+1}(x)|$ como uma função $f(n) = a^n$ *(exponencial)* onde, $a = \cos x_{fixo} < 1$ ou seja onde a base $a < 1$.

Neste caso, $a^n < a^2$ se $n > 2$ assim,

$$\left|\cos^{2n+1}(x)\right| < \cos^2(x), \quad n \in N.$$

Analogamente se tem também,

$$\left|sen^{2m+1}(x)\right| < sen^2(x).$$

Agora sabemos que $\left|\cos^{2n+1}(x)\right| < \cos^2(x)$ e que $\left|sen^{2m+1}(x)\right| < sen^2(x)$

assim,

$$\cos^{2n+1}(x) + sen^{2m+1}(x) = -1 \Rightarrow |-1| = \left|\cos^{2n+1}(x) + sen^{2m+1(x)}\right|$$

$$1 = \left|\cos^{2n+1}(x) + sen^{2m+1}(x)\right| \leq \left|\cos^{2n+1}(x)\right| + \left|sen^{2m+1}(x)\right|$$
$$< \cos^2(x) + sen^2(x) = 1$$

obtemos que $1 < 1$ o que é um absurdo.

Considerámos todos os valores possíveis para $sen^{2m+1}(x)$ e $\cos^{2n+1}(x)$ e as soluções são apenas,

$$x = \pi + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Ora, acabámos de demonstrar que

$\cos^{2n+1}(x) + sen^{2m+1}(x) = -1$ é equivalente a $\cos(x) = -1 \vee sen(x) = -1$.

Vamos verificar também que,

$$\cos(x) + sen(x) = -1 \Leftrightarrow \cos(x) = -1 \vee sen(x) = -1,$$

ora, $\cos(x) + sen(x) = -1 \Leftrightarrow \cos(x) + 1 + sen(x) = 0$ por (1.19) e (1.7) tem-se,

$$2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2sen\left(\frac{x}{2}\right).\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{x}{2}\right).\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right) + sen\left(\frac{x}{2}\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{x}{2}\right)=0 \quad \vee \quad \cos\left(\frac{x}{2}\right)+sen\left(\frac{x}{2}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad \vee \quad 1+tg\left(\frac{x}{2}\right)=0 \Leftrightarrow x=\pi+2k\pi \quad \vee \quad tg\left(\frac{x}{2}\right)=-1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x=\pi+2k\pi \quad \vee \quad \frac{x}{2}=-\frac{\pi}{4}+k\pi \quad \Leftrightarrow \quad x=\pi+2k\pi \quad \vee \quad x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z.$$

Então podemos dizer que

$$\cos^{2n+1}(x)+sen^{2m+1}=-1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x)+sen(x)=-1$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(x)=-1 \quad \vee \quad sen\,(x)=-1.$$

Analogamente, se mostra que

$$\cos^{2n}(x)+sen^{2m}(x)=1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x)+sen(x)=\pm 1.$$

Então vamos supor que:

se $\cos x=1 \quad \Rightarrow \quad sen\,x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=2k\pi$ ou

se $\cos x=-1 \quad \Rightarrow \quad sen\,x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\pi+2k\pi,\ k\in Z$.

Assim, se

$$|\cos x|=1 \Rightarrow sen^{2m}(x)=0 \Rightarrow \cos^{2n}(x)=1 \Leftrightarrow \cos(x)=\pm 1 \Leftrightarrow x=k\pi,\ k\in Z.$$

Se $sen\,x=1 \quad \Rightarrow \quad \cos x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ou

Se $sen\,x=-1 \quad \Rightarrow \quad \cos x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$

Assim, se

$$|sen\,x|=1 \Rightarrow \cos^{2n}(x)=0 \Rightarrow sen^{2m}(x)=1 \Leftrightarrow sen(x)=\pm 1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z.$$

Agora só nos falta analisar quando,

$$|sen\,x|<1 \Rightarrow |sen\,x|^{2m}<1 \quad \text{ou} \quad |\cos x|<1 \Rightarrow |\cos x|^{2n}<1$$

assim,

$\left|\cos^{2n} x\right| < \cos^2 x$, $n \in N$ e analogamente para $\left|sen^{2m}(x)\right| < sen^2(x)$, $m \in N$.

Portanto, $\cos^{2n}(x) + sen^{2m}(x) = 1$

$$1 = \left|\cos^{2n}(x) + sen^{2m}(x)\right| \leq \left|\cos^{2n}(x)\right| + \left|sen^{2m}(x)\right| < \cos^2(x) + sen^2(x) = 1$$

obtemos que $1 < 1$ o que é um absurdo.

Assim a resposta é a solução de:

$$\left|\cos(x)\right| = 1 \ \vee \ \left|sen(x)\right| = 1 \quad \text{ou seja} \quad x = k\pi \ \vee \ x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in Z.$$

§ Outras equações trigonométricas

Houve necessidade de criarmos um último ponto cujo nome chamamos de *outras equações trigonométricas,* pois o processo de resolução das mesmas não engloba os métodos anteriores, vejamos três exemplos aplicação.

§ Exemplo de aplicação 1

Resolva, em $\Re$, a equação $2\cos^2 x + \dfrac{|\cos x|}{sen\, x} = 0.$

Resolução:

1º Caso:

Quando $\cos x < 0$, temos $2\cos^2 x - \dfrac{\cos x}{sen\, x} = 0$ multiplicando ambos os termos por $\dfrac{sen\, x}{\cos x}$ obtemos uma equação elementar,

$$2\, sen\, x . \cos x = 1 \ \Leftrightarrow \ sen\, 2x = 1$$

cuja solução é $2x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \ \Leftrightarrow \ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in Z.$

mas como $\cos x < 0$, só podemos ter valores pertencentes ao 3º quadrante.

Quer dizer que k só pode ser número impar ou seja, $k = 2n + 1$.

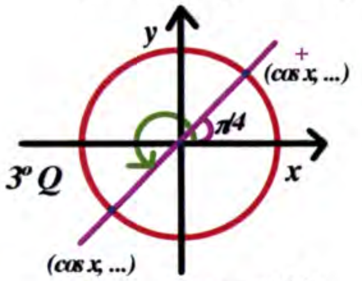


figura 3.12

Assim a solução, neste caso é:

$$x_n = \frac{\pi}{4} + (2n+1)\pi \text{ onde } n \in Z.$$

2º Caso:

Quando $\cos x = 0$ temos $0 = 0$.

E para $\cos x = 0$ a solução é $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$.

3º Caso:

Quando $\cos x > 0$, temos $2\cos^2 x + \dfrac{\cos x}{sen\,x} = 0$, multiplicando ambos os termos

por $\dfrac{sen\,x}{\cos x}$ obtemos uma equação elementar,

$$2\,sen\,x.\cos x = -1 \iff sen\,2x = -1$$

cuja solução é

$$2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \iff x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, \quad k \in Z,$$

mas $\begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ \cos x > 0 \end{cases}$ só podemos ter valores pertencentes ao 4º quadrante.

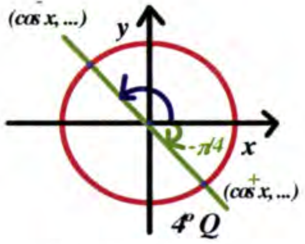


figura 3.13

Quer dizer que k só pode ser número par.

Assim a solução, neste caso é:

$$x_n = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi \text{ onde } n \in Z.$$

§ Exemplo de aplicação 2

Resolva, em $\Re$, a equação $tg\,3x + tg\,x = 4\,sen\,4x$.

Resolução:

Para determinar o domínio desta equação resolvemos as condições

$$3x \neq \frac{(2n+1)\pi}{2} \quad \text{e} \quad x \neq \frac{(2n+1)\pi}{2}\,, \; n \in Z\,,$$

a segunda condição é sequência da primeira condição por isso

$$x \in D \;\Leftrightarrow\; x \neq \frac{(2n+1)\pi}{6}\,, \quad n \in Z.$$

Temos que a equação $tg\,3x + tg\,x = 4\,sen\,4x$ é equivalente a

$$\frac{sen\,3x}{\cos 3x} + \frac{sen\,x}{\cos x} - 4\,sen\,4x = 0\,,$$

multiplicando ambas as partes pelo produto $\cos 3x \,.\, \cos x$, obtemos

$$sen\,3x \,.\, \cos x + \cos 3x \,.\, sen\,x - 4\,sen\,4x.\cos 3x.\cos x = 0.$$

Aplicando a fórmula (1.1) da soma do seno de dois ângulos, somos conduzidos à equação seguinte:

$$sen\,4x - 4\;sen\,4x.\cos 3x.\cos x = 0 \;\text{ ou }\, sen\,4x.(1 - 4\cos 3x.\cos x) = 0\,.$$

Pela lei do anulamento do produto, temos,

$$sen\;4x = 0 \qquad \text{ou} \qquad 1 - 4\cos 3x.\cos x = 0$$

a solução da equação $sen\;(4x) = 0$ é

$$x_k = \frac{k\pi}{4}\,,\; k \in Z\,.$$

Temos que excluir os valores de x_k que não pertencem ao domínio.

As soluções da equação $sen\;4x = 0$ são aquelas que pertencem ao domínio da equação inicial $tg\,3x + tg\,x = 4\,sen\,4x$, ou seja os valores de x_k, tem que ser tais que

$$x \neq \frac{(2n+1)\pi}{6}, \; n \in Z,$$

excluímos as raízes "extras".

Para tal $\frac{k\pi}{4} \neq \frac{(2n+1)\pi}{6}$ com $k, n \in Z$,então $3k \neq 4n+2$.

O número $4n+2$ só se divide por três quando $n = 3m+1$, $m \in Z$, portanto as raízes "*extras*" definem-se pela condição $3k = 12m+6 \Leftrightarrow k = 4m+2$, $m \in Z$.

$$x_k = \frac{k\pi}{4}, \; k \in Z, \qquad k \neq 4m+2, \quad m \in Z.$$

Voltando à outra equação, ou seja $1 - 4\cos 3x.\cos x = 0$. Podemos deduzir $\cos(3x)$ com o auxílio das fórmulas (1.2), (1.8) e (1.7), isto é,

$\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x.\cos x - sen2x.senx = \cos^3 x \; - 3sen^2 x.\cos x$.

Portanto transformamos a equação $1 - 4\cos 3x.\cos x = 0$ do seguinte modo:

$$4\cos^4 x - 12sen^2 x.\cos^2 x = 1.$$

Agora a nossa equação tem a forma de uma equação quadrática em relação a $\cos 2x$.

$$4\cos^2 2x + 2\cos 2x - 3 = 0$$

depois de substituir $t = \cos 2x$ obtemos $4t^2 + 2t - 3 = 0$ cujas raízes são,

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{4}.$$

A equação $\cos 2x = \frac{-1-\sqrt{13}}{4}$ não tem soluções porque $\left|\frac{-1-\sqrt{13}}{4}\right| > 1$ já a equação $\cos 2x = \frac{\sqrt{13}-1}{4}$ tem solução e é a seguinte:

$$x_k = \pm \frac{1}{2} arc\cos\frac{\sqrt{13}-1}{4} + k\pi, \; k \in Z.$$

Mostrámos que todas as raízes pertencem ao domínio da equação

$$tg\,3x + tg\,x = 4\,sen\,4x\,.$$

Realmente, se isso não é verdade, então

$$\pm\frac{1}{2}arc\cos\frac{\sqrt{13}-1}{4} + k\pi = \frac{(2n+1)\pi}{6} \quad n,k \in Z \Leftrightarrow arc\cos\frac{\sqrt{13}-1}{4} = \pm\frac{(2n-6k+1)\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{13}-1}{4} = \cos\frac{(2n-6k+1)\pi}{3}$$

mas esta igualdade não é possível para $k,\, n \in Z$, porque

$$\cos\frac{(2n-6k+1)\pi}{3} = \pm\frac{1}{2} \;\vee\; \cos\frac{(2n-6k+1)\pi}{3} = \pm 1\,.$$

Assim, a solução da equação anterior será

$$x_n = \pm\frac{1}{2}\,arc\cos\frac{\sqrt{13}-1}{4} + n\pi,\; n \in Z \text{ ou } x_k = \frac{k\pi}{4},\quad k \in Z,\quad k \neq 4m+2,\; m \in Z.$$

Ao resolver uma equação, temos que ter muita atenção de modo a evitar expressões muito volumosas e complicadas, devemos "conduzir " o nosso raciocínio para uma resolução simples, curta e se possível, apresentar uma resolução "*bonita*" e interessante.

Vejamos agora um último exemplo de uma resolução "pouco típica" para uma equação trigonométrica.

Na resolução das equações trigonométricas, como na resolução das equações em geral, por vezes, vale a pena não recorrer às "transformações padrão", e resolver as equações utilizando outros processos.

Vamos utilizar um método original para estudar e resolver a seguinte equação:

§ Exemplo de aplicação 3

Resolva, em $\Re$, a equação $sen^2\frac{2x}{3} + 2sen\,2x.sen\frac{2x}{3} + 5\cos^2 x = 0\,.$

Resolução:

Com alguma facilidade se nota que podemos considerar esta equação como uma equação do segundo grau em relação a $sen\frac{2x}{3}$ com coeficientes b e c também dependentes de funções trigonométricas.

Fazendo

$$t = sen\frac{2x}{3}\text{, temos}\quad t^2 + 2sen2x.t + 5\cos^2 x = 0 \quad \text{e} \quad |t| < 1$$

$$t = \frac{-2sen2x \pm \sqrt{4sen^2 2x - 20\cos^2 x}}{2} \quad \text{ou seja} \quad sen\frac{2x}{3} = -sen2x \pm \sqrt{sen^2 2x - 5\cos^2 x}$$

por (1.7) $$sen\frac{2x}{3} = -sen2x \pm \sqrt{4sen^2 x\cos^2 x - 5\cos^2 x}$$

O segundo membro da equação só tem significado quando $\cos^2 x.(4sen^2 x - 5) \geq 0$.

Notamos que, $4sen^2 x - 5$ é sempre negativo $\forall\ x \in \mathbb{R}$ e ainda que $\cos^2 x \geq 0$ $\forall\ x \in \mathbb{R}$, portanto a igualdade só tem significado quando $\cos x = 0$.

Logo, se $\cos x = 0$ então $sen2x = 2\cos x\, sen x$ também é zero por isso a equação $sen\frac{2x}{3} = -sen2x \pm \sqrt{4sen^2 x\cos^2 x - 5\cos^2 x}$ reduz-se à seguinte forma:

$$sen\ \frac{2x}{3} = 0.$$

Assim temos a equação $sen^2\frac{2x}{3} + 2sen2x.sen\frac{2x}{3} + 5\cos^2 x = 0$ equivalente a um sistema de duas equações simples

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ sen\frac{2x}{3} = 0 \end{cases}$$

A solução deste sistema de equações é a intersecção dos conjuntos das soluções

$$\left\{ x_k = \frac{(2k+1)\pi}{2} \ , \ k \in Z \right\} \quad \text{e} \quad \left\{ x_n = \frac{3n\pi}{2} \ , \ n \in Z \right\}.$$

Vejamos pela intersecção dos dois conjuntos, os valores de x_n que também são valores de x_k:

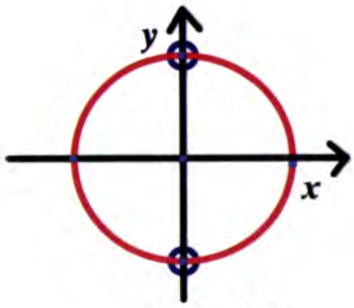


figura 3.14

$n = 0$ (não é possível)

$n = 1$ (possível)

$n = 2$ (não é possível)

$n = 3$ (possível)

...

Assim, a solução é,

$$x_m = \frac{3(2m+1)\pi}{2} \ , \ m \in Z \ .$$

§ 3.3 Aula Prática sobre métodos de resolução de equações trigonométricas

Apresentamos agora uma aula de 90 minutos, na qual se fez uma revisão do tema "Métodos de resolução de equações trigonométricas", cujo objectivo é:

- sistematização de métodos de resolução de equações trigonométricas;
- desenvolvimento das capacidades de resolução de equações trigonométricas;

Os alunos foram informados de que seriam avaliados pela sua participação, empenho e interesse nos problemas propostos, e fariam um Teste de Escolha Múltipla com a duração de 15 minutos.

Começamos a aula por relembrar as fórmulas de resolução de equações trigonométricas elementares/básicas na resolução oral dos seguintes exercícios.

Diga se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

a) $Cos\,x = \dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + 2k\pi,\ k \in Z$

b) $Cos\,x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + 2k\pi,\ k \in Z$

c) $Cos\,x = \pi \Leftrightarrow x = -1 \pm 2k\pi,\ k \in Z$

d) $Sen\ x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in Z$

e) $Cotg\,x = \dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = 1 + k\pi,\ k \in Z$

f) $Sen\,x = \pi \Leftrightarrow x = 0 + k\pi,\ k \in Z$

g) $Cos\,x = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = \pm arc\cos\dfrac{2\sqrt{3}}{3} + 2k\pi,\ k \in Z$

h) $Sen\ 3x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}(-1)^n\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$.

Decorridos 15 minutos da aula, passou-se ao ponto seguinte da ordem do plano da aula, apresentação do trabalho realizado em casa. Na aula anterior foi proposto para trabalho de casa, a resolução da equação $tg\,x - \dfrac{1}{\cos x} = 1$, aparentemente na opinião dos alunos, a equação parecia trivial, mas o nosso objectivo consistia na aplicação do maior número de métodos possíveis para a resolver.

Assim, constituíram-se três equipas, devendo cada uma resolvê-la por dois métodos distintos estudados nas aulas anteriores. Na aula anterior, a equação foi analisada minuciosamente por todos os alunos que primeiramente a reduziram a uma forma mais canónica, isto é $sen\,x - \cos x = 1$, claro que, com domínio $\cos(x) \neq 0$ ou seja $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. Ficou também decidido os diferentes métodos a utilizar por cada equipa.

As equipas fizeram a apresentação do trabalho de casa no quadro, mostramos a seguir as diferentes resoluções.

§ Iº Método: Elevar ao quadrado ambos os membros

Resolva, em $\Re$, a equação $sen\,x - \cos x = 1$.

Resolução:

$$sen^2 x - 2sen\,x\cos x + \cos^2 x = sen^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow 2sen\,x\cos x = 0 \Leftrightarrow sen(2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = \pi n,\ n \in Z \ \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}n,\ n \in Z.$$

Atenção! Este método pode levar a encontrar valores para x que não satisfaçam a equação, assim a verificação das raízes é obrigatória.

para $n = 0 \Rightarrow x = 0$ ora, se $x = 0$ tem-se $sen\,x - \cos x = -1 \neq 1$.

Logo n não pode ter valor zero.

para $n = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ ora, se $x = \frac{\pi}{2}$ tem-se $sen\,x - \cos x = 1$, o que é verdade,

para $n = 2 \Rightarrow x = \pi$ ora, se $x = \pi$ tem-se $sen\,x - \cos x = 1$, verdade,

para $n = 3 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$ ora, se $x = \frac{3\pi}{2}$ tem-se $sen\,x - \cos x = -1 \neq 1$, o que é falso,

para $n = 4 \Rightarrow x = 2\pi$, tem-se $sen\,2\pi - \cos 2\pi = -1 \neq 1$, logo $n \neq 4$.

Verificamos que a partir de $n = 4$ o ciclo repete-se, assim temos:

quando $n = 1,5,9,...$ *isto é* $n = 4k + 1,\ k \in Z \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z$;

quando $n = 2,6,10,...$ *isto é* $n = 4k + 2,\ k \in Z \Rightarrow x = \pi + 2k\pi,\ k \in Z$.

Solução: $x = \pi + 2k\pi,\ k \in Z$.

Pois $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$ não faz parte do domínio.

§ IIº Método: Unicidade Trigonométrica

Resolva, em $\Re$, a equação $sen\,x - \cos x = 1$.

Resolu*ção:*

Substituindo na equação $\cos x = \pm\sqrt{1 - sen^2 x}$, obtemos

$$sen\,x \pm \sqrt{1 - sen^2 x} = 1 \Leftrightarrow sen\,x - 1 = \pm\sqrt{1 - sen^2 x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow sen^2 x - 2sen\,x + 1 = 1 - sen^2 x$$

$$\Leftrightarrow 2sen^2 x - 2\,sen\,x = 0 \Leftrightarrow 2sen\,x(sen\,x - 1) = 0 \Leftrightarrow sen\,x = 0 \lor sen\,x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \pi n,\ n \in Z \lor x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Atenção! Foi efectuada uma elevação ao quadrado nos dois membros da equação logo a verificação das raízes é obrigatória.

i) Analisar a solução: $x = \pi n$

para $n = 0 \Rightarrow x = 0$ ora, se $x = 0$ tem-se $sen\,x - \cos x = -1 \neq 1$, o que é falso,

para $n = 1 \Rightarrow x = \pi$ ora, se $x = \pi$ tem-se $sen\,x - \cos x = 1$, o que é verdade,

para $n = 2 \Rightarrow x = 2\pi$, tem-se $sen\,2\pi - \cos 2\pi = -1 \neq 1$, logo $n \neq 2$,

para $n = 3 \Rightarrow x = 3\pi = \pi + 2\pi$, tem-se $sen\,x - \cos x = 1$,é verdade.

Assim, para $n = 2k+1,\ k \in Z$, a solução $x = \pi n = \pi + 2k\pi,\ k \in Z$.

ii) A solução $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$, não pertence ao domínio.

Solução: $x = \pi + 2k\pi,\ k \in Z$.

§ IIIº Método: Método do ângulo auxiliar

Resolva, em $\Re$, a equação $sen\,x - \cos x = 1$.

Resolução:

Dividindo ambos os membros da equação por $\sqrt{2}$, obtemos:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} sen\, x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad sen\, x.\cos\frac{\pi}{4} - sen\,\frac{\pi}{4}.\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x - \frac{\pi}{4} = (-1)^n \, arc\, sen\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi n,\ n \in Z \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z\,.$$

Para $n = 0$ tem-se $x_0 = \frac{\pi}{4}$; para $n = 1$ tem-se $x_1 = \pi$; para $n = 2$ tem-se $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi$; para $n = 3$ tem-se $x_3 = 3\pi$ e assim sucessivamente. Portanto, quando $n = 2k,\ k \in Z$, a solução seria $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$, já vimos que não pode ser e quando $n = 2k + 1,\ k \in Z$, a solução é $x = \pi + 2k\pi,\ k \in Z.$

§ IVº Método: Método de decomposição em factores

Resolva, em $\Re$, a equação $sen\, x - \cos x = 1$.

Resolução:

Visto que $\cos x = sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ então $sen\, x - \cos x = 1 \Leftrightarrow sen\, x - sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$.

Por outro lado por (1.25) tem-se que $sen\, p - sen\, q = 2\, sen\frac{p-q}{2}.\cos\frac{p+q}{2}$.

Assim temos que

$$2\, sen\frac{2x - \frac{\pi}{2}}{2}.\cos\frac{\frac{\pi}{2}}{2} = 1 \Leftrightarrow 2\, sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right).\cos\frac{\pi}{4} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\, sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = (-1)^n \, arc\, sen\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi n,\ n \in Z \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\ x=\frac{\pi}{4}+(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$, a partir daqui a resolução é semelhante ao método III.

Assim a solução é:

$$x=\pi+2k\pi,\ k\in Z.$$

§ V° Método: Redução a equação homógenea

Resolva, em $\Re$, a equação $sen\,x-\cos x=1$.

Resolu*ção:*

Pelas fórmulas (1.14) e (1.21) sabemos que $\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-sen^2\frac{x}{2}$ e $sen\,x=2\,sen\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$. Então,

$$sen\,x-\cos x=1\Leftrightarrow 2sen\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}+sen^2\frac{x}{2}=sen^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2sen\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}=0\ \Leftrightarrow\ 2\cos\frac{x}{2}\left(sen\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)=0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \cos\frac{x}{2}=0\ \vee\ sen\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}=0\ \Leftrightarrow\ \frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi\ \vee\ tg\frac{x}{2}=1\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ x=\pi+2k\pi\ \vee\ \frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z\ \Leftrightarrow\ x=\pi+2k\pi\ \vee\ x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z.$$

Como $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ então a solução é $x=\pi+2k\pi,\ k\in Z.$

§ VI° Método: Substituição trigonométrica universal

Resolva, em $\Re$, a equação $sen\,x-\cos x=1$.

Resolu*ção:*

Pelas fórmulas (1.12) e (1.13) sabemos que $sen\,x = \dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$ e que

$\cos x = \dfrac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$. Observamos que o domínio da $tg\frac{x}{2}$ é igual a

$$D_{tg} = \{x: \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z\ \}.$$

Seja então, $x \neq \pi + 2k\pi,\ k \in Z$ e resolvemos a equação,

$$sen\,x - \cos x = 1 \Leftrightarrow \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} - \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = 1 \Leftrightarrow 2tg\frac{x}{2} - 1 + tg^2\frac{x}{2} = 1 + tg^2\frac{x}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow tg\frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z,$$

mas esta solução não pertence ao domínio.

Se $x = \pi + 2k\pi,\ k \in Z$ vamos verificar ainda se $sen\,x - \cos x = 1$, assim

$sen(\pi + 2k\pi) - \cos(\pi + 2k\pi) = 0 + 1 = 1$, então também $x = \pi + 2k\pi,\ k \in Z$ é uma solução da equação.

$$x = \pi + 2k\pi,\ k \in Z.$$

Terminadas todas as apresentações passou-se ao terceiro ponto do plano da aula, realização de um Mini-Teste. O objectivo deste momento de avaliação, era não só o registo por parte do professor dos progressos e das dificuldades sentidas pelos alunos mas também que os próprios tomassem consciência dos seus avanços e/ou dos seus erros.

Assim, depois de analisados e discutidos os erros cometidos pelos alunos a resolução correcta foi feita no quadro pelos próprios. A seguir apresentamos o Mini-Teste efectuado com as respectivas respostas correctas.

Mini-Teste - Itens de Escolha Múltipla

1. Calcular $Arc\cos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

(A) $-\frac{\pi}{3}$ **(B)** $\frac{\pi}{6}$ **(C)** $-\frac{2\pi}{3}$ **(D)** $\frac{2\pi}{3}$

2. Calcular $Arc\,tg\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(A) $\frac{\pi}{3}$ **(B)** $\frac{2\pi}{3}$ **(C)** $\frac{\pi}{6}$ **(D)** $-\frac{\pi}{6}$

3. Resolver a equação $Cos\,\pi x = \pi$.

(A) -1 **(B)** 0 **(C)** ± 1 **(D)** $\varnothing$

4. Resolver a equação $Tg^2 x = 3$ e $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

(A) $\frac{\pi}{3}$ **(B)** $-\frac{\pi}{3}$ **(C)** $\frac{2\pi}{3}$ **(D)** $-\frac{2\pi}{3}$

5. Resolver a equação $Tg^2 x = 3$ e $x \in [0, \pi]$.

(A) $\frac{\pi}{3}$ **(B)** $-\frac{\pi}{3}$ **(C)** $\frac{2\pi}{3}$ **(D)** $-\frac{2\pi}{3}$

Respostas correctas:

Questão	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Solução	**(D)**	**(C)**	**(D)**	**(A) e (B)**	**(A) e (C)**

Ainda restavam 10 minutos para o fim da aula, o tempo suficiente para distribuir a seguinte ficha de trabalho para casa e fazer uma breve análise oral sobre cada exercício.

Ficha de Trabalho para Casa

Resolva as seguintes equações:

1. $Cos\frac{x}{3}=a$ **2.** $Sen\ x = 1 + \left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2$ **3.** $13sen\,x^2+8\cos\sqrt{x}=25$

4. $sen^2x + \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)sen\,x - \frac{\sqrt{2}}{2}=0$.

À semelhança do trabalho de casa da aula anterior também o objectivo desta ficha de trabalho era abordar outros métodos de resolução de equações trigonométricas.

Assim, oralmente, discutiu-se cada uma das equações. Passamos a descrever a análise feita pelos alunos e pelo professor acerca de cada um dos exercícios propostos.

Exercício 1: $Cos\frac{x}{3}=a$

- Se $a\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$ a equação não tem raízes, isto é $x\in\varnothing$;

-Se $a\in\left[-1,0\right[$ então $\frac{x}{3}=\pm(\pi-arc\cos a)+2\pi n,\ n\in Z$ e $x=...$

- Se $a\in\left]0,1\right]$então $\frac{x}{3}=(arc\cos a)+2\pi n,\ n\in Z$ e $x=...$

- Se $a=0$ temos $\cos\frac{x}{3}=0$ ... uma equação trivial.

Exercício 2: $Sen\ x = 1 + \left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2$

- Como resolver esta equação? – talvez graficamente...

- Para $sen(x)$ temos uma sinusóide e para $1 + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$ temos uma parábola com a concavidade voltada para cima e vértice no ponto $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$. Fazendo a representação gráfica de cada uma das funções verificamos que existe um único ponto de intersecção e que é $P\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$, assim $x = \frac{\pi}{2}$.

- ...ou então... o máximo da função $sen(x)$ é 1, logo para a equação ser possível tem-se que $x - \frac{\pi}{2} = 0$ ou seja $x = \frac{\pi}{2}$.

Exercício 3: $13\,sen\,x^2 + 8\cos\sqrt{x} = 25$

- Sugestões para a resolução desta equação? – Que propriedade das funções trigonométricas podemos utilizar? – O contradomínio das funções...

Assim sabemos que: $-13 \le 13\,sen\,x^2 \le 13$ e que $-8 \le 8\cos\sqrt{x} \le 8$, o valor máximo de $13\,sen\,x^2 + 8\cos\sqrt{x}$ é igual a 21... - logo a equação não tem raízes.

Exercício 4: $sen^2 x + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) sen\,x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

-Aceitam-se sugestões!... - Parece complicada mas se for feita a substituição $sen\,x = y$ a equação apresenta-se da seguinte forma: $y^2 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) y - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$.

- e agora?... ainda não está fácil! ... É possível aplicar as fórmulas de Viette

cujas soluções são: $\begin{cases} y_1 + y_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + (-1) \\ y_1 \cdot y_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ então $y_1 = -1$ e $y_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- Não perceberam?! .... Vamos recordar o Teorema de Viette. Seja $x^2 + px + q = 0$ a equação do segundo grau, então tem-se x_1 e x_2 como soluções desta equação se $\exists\ x_1, x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 . x_2 = q. \end{cases}$

Portanto $sen\, x = -1$ ou $sen\, x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ... - duas equações trigonométricas elementares...

- É trivial.

Bem... tal com na aula anterior pediu-se aos alunos que formassem quatro equipas, ficando cada uma responsável pela resolução detalhada da equação que lhes foi atribuída assim como a sua apresentação no quadro, no início da aula seguinte.

Capítulo 4

Desigualdades Trigonométricas

Neste capítulo, apresentamos outras abordagens, tais como, o método de indução matemática, aplicação da teoria de extremos de uma função, para resolver desigualdades trigonométricas. Antes de passarmos à aplicação desses métodos apresentamos previamente algumas noções básicas.

Chamamos ***Desigualdades Trigonométricas***, a desigualdades que contém as funções trigonométricas. Na resolução das desigualdades trigonométricas, na maioria das vezes, utiliza-se as propriedades das funções trigonométricas tais como a periodicidade e a monotonia das funções nos respectivos intervalos.

Para resolver desigualdades trigonométricas elementares um dos métodos é utilizar os gráficos das funções trigonométricas. Esta metodologia garante evitar erros, permitindo visualizar os domínios dos intervalos em que a inequação tem significado.

Além disso, também podemos usar com o mesmo sucesso o círculo trigonométrico.

Uma nota importante: Se $f(x)$ é uma função periódica, então para resolver a inequação $f(x) > a$ basta encontrar a solução num intervalo cujo comprimento seja igual ao período da função $f(x)$.

Podemos utilizar as seguintes regras:

Na resolução da desigualdade $sen\, x > a$ ou $sen\, x \geq a$, será analisado o intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Na resolução da desigualdade $sen\,x < a$ ou $sen\,x \leq a$, será observado o intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$.

Na resolução da desigualdade $\cos x > a$ ou $\cos x \geq a$, é mais cómodo encontrar as soluções no intervalo de $[-\pi, \pi]$.

Na resolução da desigualdade $\cos x < a$ ou $\cos x \leq a$, o mais indicado é resolver no intervalo $[0, 2\pi]$.

§ Exemplo de aplicação 1

Resolva, em $\Re$, a desigualdade $sen\,x > -\frac{1}{2}$

Resolução:

Construímos os gráficos das funções $y_1 = sen\,x$ e $y_2 = -\frac{1}{2}$ *(figura 4.1).*

Os valores de x que satisfazem a desigualdade dada estão situados acima da recta $y_2 = -\frac{1}{2}$.

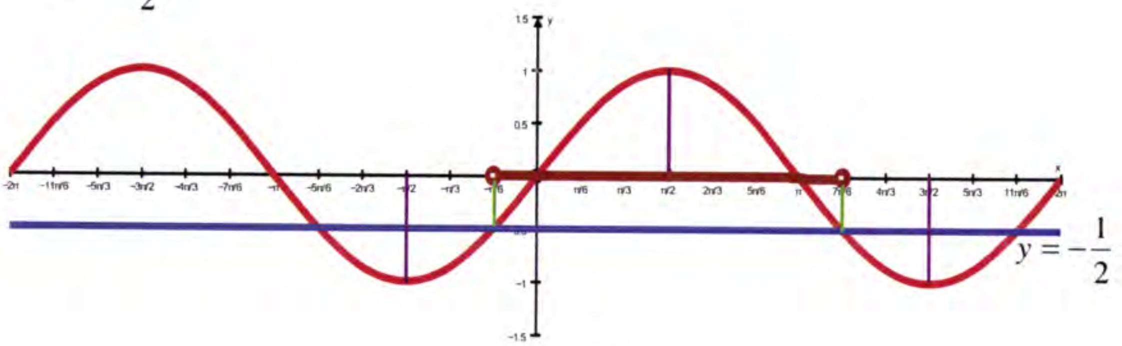


figura 4.1

Como sabemos, o período da função $sen\,x$ é igual a 2π, então basta resolver esta desigualdade em qualquer intervalo de comprimento 2π.

Neste caso, é mais conveniente escolhermos o intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ (pois aqui o gráfico da função $sen\, x$ apresenta a forma de "*montanha*").

Do gráfico temos que, $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{7\pi}{6}$ e a nossa solução é:

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, \text{ em que } n \in Z.$$

A solução da desigualdade $sen\, x > -\frac{1}{2}$ é a reunião de todos os intervalos de

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, \quad \forall\, n \in Z.$$

§ Exemplo de aplicação 2

Resolva a desigualdade $sen\ x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Resolução:

Construímos os gráficos das funções $y_1 = sen\, x$ e $y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *(figura 4.2).*

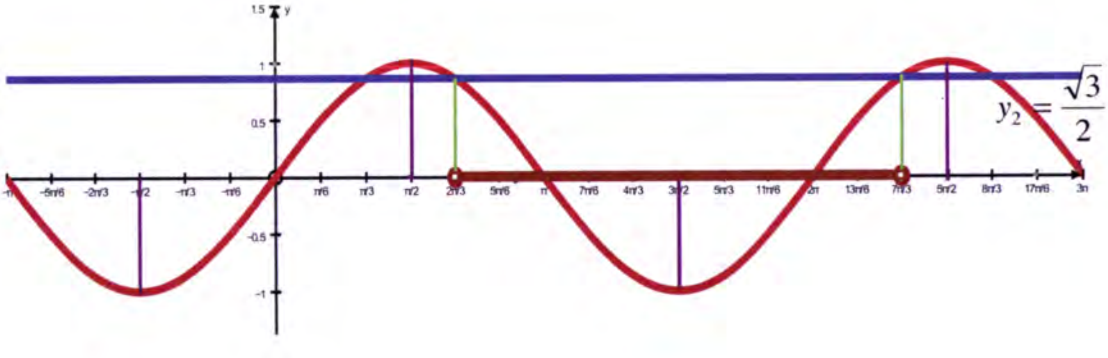


figura 4.2

Os valores de x que satisfazem a desigualdade dada estão situados abaixo da recta $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Para resolver a desigualdade apresentada tanto podemos escolher com o mesmo sucesso, o intervalo $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, como o intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$.

Escolhendo o segundo intervalo, por observação do gráfico, a solução pode apresentar-se

$$\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{7\pi}{3}.$$

Logo, a solução da desigualdade $sen\ x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ é $\forall\ n \in Z$, é:

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \leq x \leq \frac{7\pi}{3} + 2\pi n.$$

§ Exemplo de aplicação 3

Resolva a desigualdade $\cos x \geq -\frac{1}{2}$.

Resolução:

Construímos os gráficos das funções $y_1 = \cos x$ e $y_2 = -\frac{1}{2}$ *(figura 4.3)*.

O período da função $\cos x$ também é 2π, mas no gráfico vemos que:

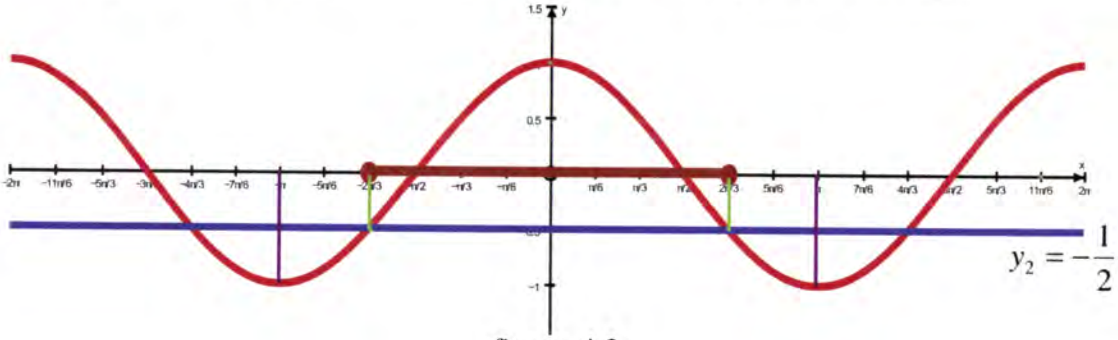


figura 4.3

Se escolhermos o intervalo de 0 até 2π, a solução é-nos apresentada por "*partes*", ou seja, como reunião de duas "partes", o que não é aconselhável.

É portanto, mais cómodo procurar a solução desta desigualdade no intervalo de $-\pi$ *a* π. Assim, por observação do gráfico, a solução a apresentar é:

$$-\frac{2\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}.$$

E a resposta à questão é: $$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \le x \le \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

§ Exemplo de aplicação 4

Resolva a desigualdade $\cos x \le \frac{1}{2}$.

Resolução:

Apresentamos a resolução desta desigualdade recorrendo ao círculo trigonométrico *(figura 4.4)*. Nele construímos um ângulo α cujo co-seno é $\frac{1}{2}$. Para tal, no eixo ox marcamos um ponto com abcissa igual a $\frac{1}{2}$, neste ponto, traçamos uma recta paralela ao eixo oy.

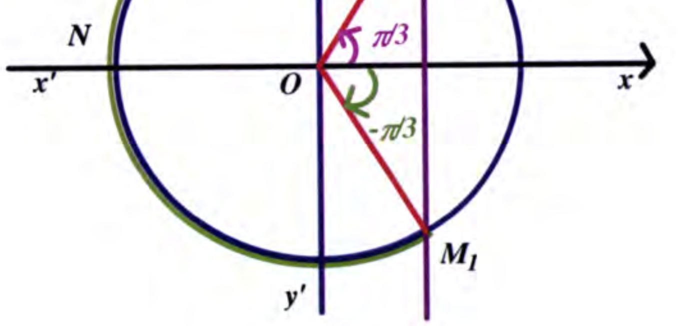


figura 4.4

Esta recta intersecta o circulo trigonométrico em M_1 *e* M_2. Se $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$

então $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$. Assim $M_2 = \dfrac{\pi}{3}$ e $M_1 = 2\pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{3}$. Além disso que cada ponto do

arco $M_1 N M_2$ do circulo trigonométrico tem abcissa menor ou igual a $\dfrac{1}{2}$.

Assim no intervalo $[0, 2\pi]$ todas as soluções da desigualdade estão entre

$\dfrac{\pi}{3} \le x \le \dfrac{5\pi}{3}$.

A solução é:

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n \le x \le \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

Vamos fazer estudos similares para as desigualdades trigonométricas elementares que contém as funções tangente e co-tangente.

Nas desigualdades do tipo $tg\,x > a$, $tg\,x \ge a$, $tg\,x < a$, $tg\,x \le a$, vamos recorrer ao intervalo $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, enquanto que nas desigualdades do tipo $\cot g\,x > a$, $\cot g\,x \ge a$, $\cot g\,x < a$ e $\cot g\,x \le a$, vamos escolher o intervalo de $]0, \pi[$.

As funções tangente e co-tangente tem período π, portanto vamos acrescentar às soluções encontradas nestes intervalos, os valores do tipo $\pi n, n \in Z$, e desta forma obtemos todas as soluções das desigualdades acima referidas. Apresentamos em seguida dois exemplos de aplicação com estas duas funções.

§ Exemplo de aplicação 5

Resolva a desigualdade $tg\,x > \sqrt{3}$.

Resolução:

Construímos os gráficos das funções $y_1 = tg\,x$ e $y_2 = \sqrt{3}$ *(figura 4.5).*

No intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de comprimento π, a função $tg\,x$ é monótona crescente e a equação $tg\,x = \sqrt{3}$ tem uma só solução que é $x = \frac{\pi}{3}$.

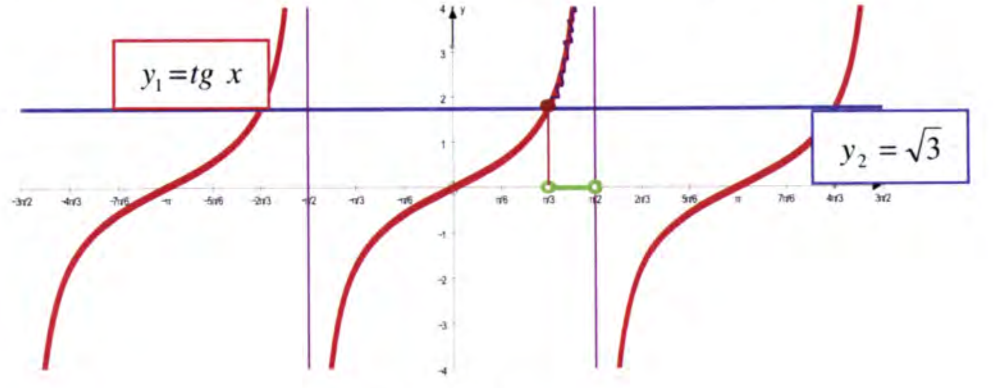


figura 4.5

Observando o gráfico (figura 4.5) obtemos que $tg\,x > \sqrt{3}$ no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ para os valores de x no intervalo $\left]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Como a função tangente é periódica de período igual a π, então todas as soluções da desigualdade $tg\,x > \sqrt{3}$ são os valores de x do intervalo $\left]\frac{\pi}{3} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right[$; $n \in Z$.

§ Exemplo de aplicação 6

Resolva a desigualdade $\cot g\, x \leq 1$.

Resolução:

Construímos os gráficos das funções $y_1 = \cot g\, x$ e $y_2 = 1$ *(figura 4.6).*

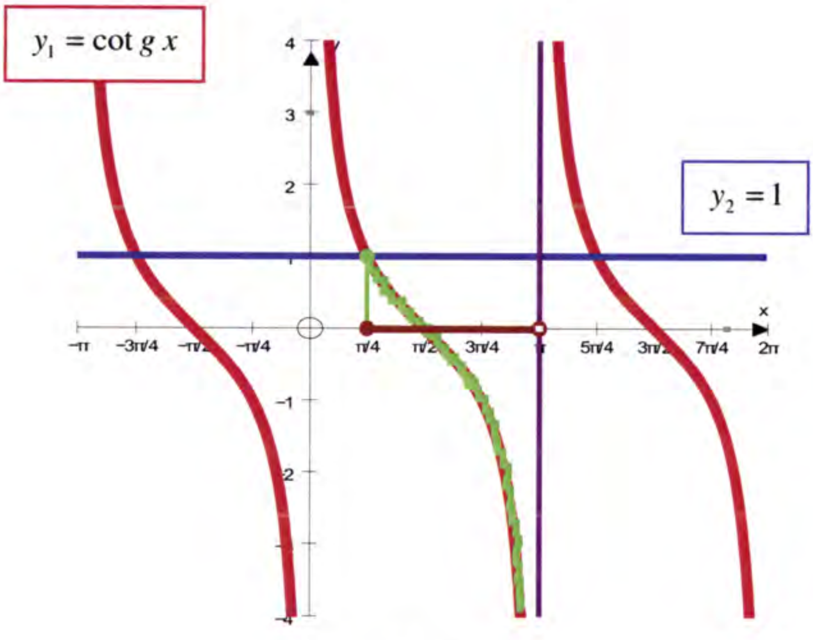


figura 4.6

No intervalo $]0\,,\pi[$ de comprimento π, a função $\cot g\, x$ é monótona decrescente e a equação $\cot g\, x = 1$ tem uma e uma só solução em $x = \dfrac{\pi}{4}$.

A partir do gráfico da função obtemos que as soluções da desigualdade $\cot g\, x \leq 1$ no intervalo $]0\,,\pi[$ são os valores de x no intervalo $\left[\dfrac{\pi}{4}\,,\pi\right[$.

Como a função $\cot g\, x$ é periódica de período igual a π, então todas as soluções da desigualdade $\cot g\, x \leq 1$ são todos os valores de x tais que:

$$x \in \left[\frac{\pi}{4} + \pi n\,, \pi + \pi n\right[\text{ e } n \in Z.$$

§ Exemplo de aplicação 7

Resolva a desigualdade $sen^2 x < \frac{1}{4}$.

Resolução:

Esta desigualdade pode ser apresentada como $|sen\,x| < \frac{1}{2}$.

Construímos o gráfico da função $y = |sen\,x|$ *(figura 4.7)*. Desenhamos primeiro o gráfico da função $y = sen\,x$, em seguida mantemos fixa a parte positiva do gráfico da função, e à parte negativa fazemos uma simetria relativamente ao eixo ox.

No mesmo desenho, também construímos a recta $y = \frac{1}{2}$.

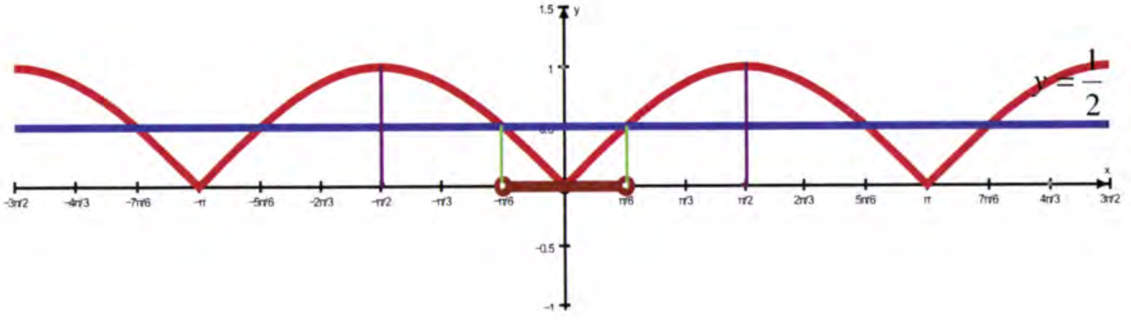


figura 4.7

A função $y = |sen\,x|$ é periódica de período π. Consideramos para *"Vale"*, o intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ de tamanho π.

A equação $|sen\,x| = \frac{1}{2}$ tem duas raízes. Assim, no exemplo que apresentamos, verificamos por observação do gráfico que, as soluções da desigualdade $|sen\,x| < \frac{1}{2}$ no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ são todos os valores de x que pertencem ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right[$.

Então, todas as soluções de $|sen\, x| < \frac{1}{2}$ são os valores de x pertencentes a

$\left]-\frac{\pi}{6} + \pi n\,,\ \frac{\pi}{6} + \pi n\right[$, $n \in Z$ e que podemos apresentar da seguinte forma:

$$-\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in Z.$$

Apresentamos em seguida, outra abordagem de resolução.

Então, se $sen^2 x < \frac{1}{4} \Leftrightarrow sen^2 x - \frac{1}{4} < 0$, aplicando o caso notável, tem-se:

$$\left(sen\, x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(sen\, x + \frac{1}{2}\right) < 0.$$

O produto é negativo quando um termo é positivo e o outro negativo, assim,

$$\begin{cases} sen\, x - \frac{1}{2} > 0 \\ sen\, x + \frac{1}{2} < 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} sen\, x - \frac{1}{2} < 0 \\ sen\, x + \frac{1}{2} > 0. \end{cases}$$

Com facilidade se verifica que o primeiro sistema não tem solução, não existe nenhum valor para x tais que as condições $sen\, x > \frac{1}{2}$ e $sen\, x < -\frac{1}{2}$ se intersectem.

Apresentamos outro gráfico *(figura 4.8)*, para melhor visualizarmos a intersecção das duas condições do segundo sistema, $sen\, x < \frac{1}{2} \ \wedge \ sen\, x > -\frac{1}{2}$

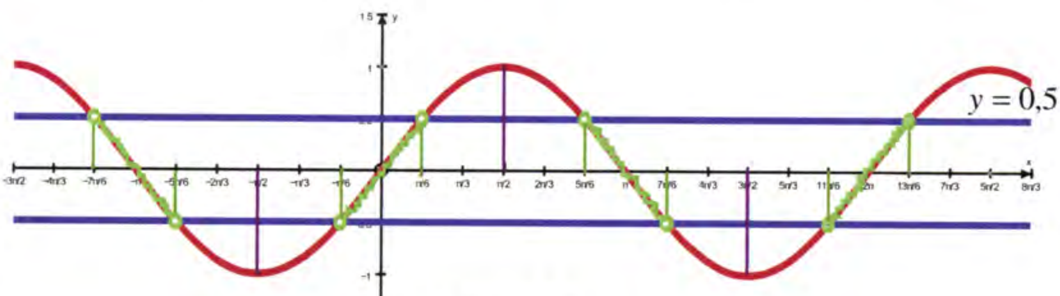


figura 4.8

E a resposta é: $-\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \frac{\pi}{6} + \pi n, \ n \in Z.$

§ Exemplo de aplicação 8

Resolva a desigualdade $sen\left(\dfrac{3x}{2}+\dfrac{\pi}{12}\right)<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Resolução:

Consideramos $\dfrac{3x}{2}+\dfrac{\pi}{12}=\mu$, assim a desigualdade torna-se $sen\,\mu<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

No intervalo $\dfrac{\pi}{2}\le\mu\le\dfrac{5\pi}{2}$ o conjunto solução desta desigualdade é o intervalo

$\dfrac{3\pi}{4}<\mu<\dfrac{9\pi}{4}$.

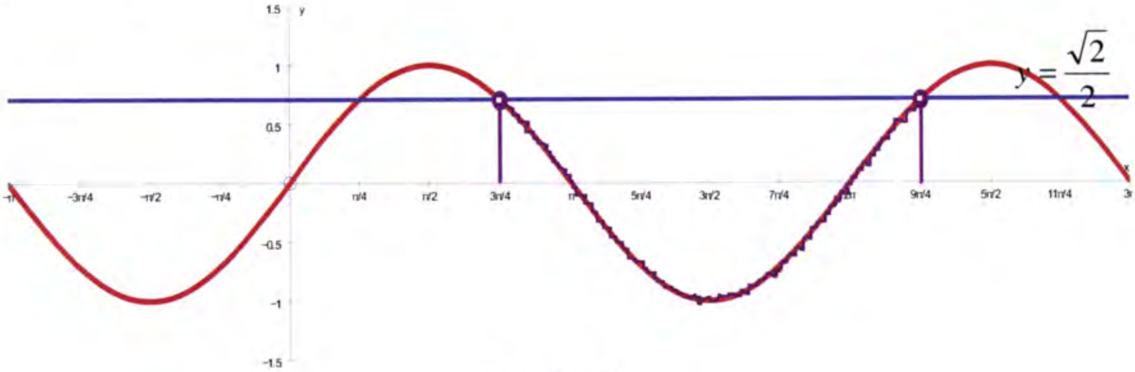


figura 4.9

Logo o conjunto de todas as soluções apresentadas é

$$\frac{3\pi}{4}+2\pi n<\mu<\frac{9\pi}{4}+2\pi n,\quad n\in Z.$$

Voltando ao argumento inicial, temos

$$\frac{3\pi}{4}+2\pi n<\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{12}<\frac{9\pi}{4}+2\pi n,\quad n\in Z$$

e a nossa solução é:

$$\frac{4\pi}{9}+\frac{4}{3}\pi n<x<\frac{13\pi}{9}+\frac{4}{3}\pi n,\ n\in Z.$$

§ Exemplo de aplicação 9

Resolva a desigualdade $\cos 2x - sen\, 2x \geq 0$.

Resolução:

Seja $\cos 2x - sen\, 2x \geq 0$, aplicando o método do ângulo auxiliar estudado no capítulo 3, multiplicam-se ambos os membros da desigualdade por $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e obtem-se:

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} sen\, 2x \geq 0$ que é equivalente a $\cos\frac{\pi}{4}.\cos 2x - sen\frac{\pi}{4}.sen\, 2x \geq 0$.

Assim, aplicando a fórmula (1.3) temos,

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0.$$

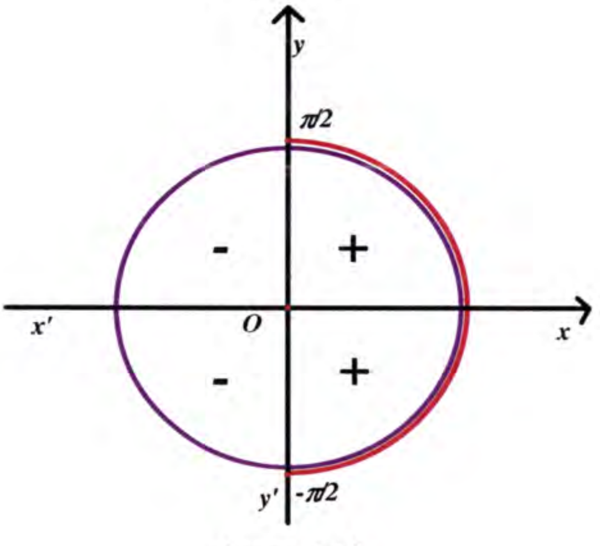


figura 4.10

Pelas propriedades do *co-seno* sabemos que as soluções desta desigualdade são aqueles e só aqueles valores de x tais que:

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad em\ que\ n \in Z.$$

Resolvendo em ordem a x temos: $-\frac{3\pi}{8} + \pi n \leq x \leq \frac{\pi}{8} + \pi n$, $n \in Z$.

§ Exemplo de aplicação 10

Resolva a desigualdade $4sen^2x - 8sen\,x + 3 \leq 0$.

Resolução:

Fazendo a substituição $sen\,x = \mu$, temos $4\mu^2 - 8\mu + 3 \leq 0$. Com facilidade encontramos as raízes de $4\mu^2 - 8\mu + 3$ e obtemos $\mu_1 = \frac{1}{2}$ e $\mu_2 = \frac{3}{2}$. Decompondo a equação num produto de factores temos: $4\left(\mu - \frac{1}{2}\right)\left(\mu - \frac{3}{2}\right) \leq 0$.

Substituindo novamente μ por $sen\,x$, obtemos:

$$\left(sen\,x - \frac{1}{2}\right)\left(sen\,x - \frac{3}{2}\right) \leq 0.$$

O segundo termo da equação é sempre negativo isto é, $sen\,x - \frac{3}{2} < 0$ porque $|sen\,x| \leq 1$. Mas como $\left(sen\,x - \frac{1}{2}\right)\left(sen\,x - \frac{3}{2}\right) \leq 0$, concluimos que é equivalente a $sen\,x \geq \frac{1}{2}$.

Como obtivemos uma desigualdade elementar, a resposta é trivial visto que $senx = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$. Então $x > \frac{\pi}{6} \wedge x < \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Assim,

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\,, \quad n \in Z.$$

Para finalizar este capítulo 4, apresentamos mais duas desigualdades trigonométricas, cujo processo de resolução não é tão simples como os anteriores, num dos exemplos propomos o método de indução matemática e no outro aplicamos a teoria de extremos de uma função de duas variáveis.

§ Exemplo de aplicação 11

Use o método de indução matemática para mostrar que:

$$\left|\cos\left(nt-(n-1)\frac{\pi}{2}\right)\right| \leq n\left|\cos t\right|.$$

Quando $n=1$ tem-se $|\cos t| \leq |\cos t|$, o que é verdade.

Hipótese de indução:

Supondo que é válida para $n = k$ tem-se $\left|\cos\left[kt-(k-1)\frac{\pi}{2}\right]\right| \leq k.|\cos t|$

$\left|\cos\left[kt-(k-1)\frac{\pi}{2}\right]\right| \leq k.|\cos t|$ é equivalente a $\left|\cos\left[k\left(t-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right]\right| \leq k.|\cos t|$.

Sabemos que $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -sen\,x$, então

$\left|\cos\left[k\left(t-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right]\right| \leq k.|\cos t|$ é equivalente a $\left|sen\,k\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right| \leq k.|\cos t|$

Tese de indução:

$$\left|\cos\left[(k+1)t-k\frac{\pi}{2}\right]\right| \leq (k+1).|\cos t|$$

Demonstração:

$$\left|\cos\left[(k+1)t-k\frac{\pi}{2}\right]\right| = \left|\cos\left[k\left(t-\frac{\pi}{2}\right)+t\right]\right|$$

Aplicando a fórmula (1.3) do co-seno para a adição de ângulos, tem-se

$$\left|\cos\left[k\left(t-\frac{\pi}{2}\right)+t\right]\right| = \left|\cos\left[k\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right].\cos t + \left(-sen\left(k\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right).sen\,t\right|.$$

Sabe-se pela propriedade dos módulos que $|x+y| \leq |x|+|y|$ então,

$$\left|\cos\left[k\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right].\cos t+\left(-sen\left(k(t-\frac{\pi}{2})\right)\right).sen t\right| \leq$$

$$\leq \left|\cos\left[k\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right].\cos t\right| + \left|-sen\left[k\left(t-\frac{\pi}{2}\right).sen t\right]\right| \leq$$

o módulo do produto é o produto dos módulos $|x.y| = |x|.|y|$ então

$$\leq \left|\cos\left[k\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right]\right|.|\cos t| + \left|sen\left[k\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right]\right|.|sen t|.$$

Sabe-se que, $\left|\cos\left[k\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right]\right| \leq 1$ e $|sen t| \leq 1$,

então, $\left|\cos\left[k\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right]\right|.|\cos t| + \left|sen\left[k\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right]\right|.|sen t| \leq |\cos t| + \left|sen\left[k\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right]\right|$

Como por hipótese, $\left|sen k\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right| \leq k.|\cos t|$ então,

$$\left|\cos\left[k\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right]\right|.|\cos t| + \left|sen\left[k\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right]\right|.|sen t| \leq |\cos t| + k|\cos t| \leq (k+1)|\cos t|$$

Logo,

$$\left|\cos\left[(k+1)t - k\frac{\pi}{2}\right]\right| \leq (k+1).|\cos t|.$$

§ Exemplo de aplicação 12

Mostre que $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$. (4.12)

Resolução:

Apresentamos um método diferente para resolver esta desigualdade trigonométrica, aplicando a teoria de extremos de uma função de duas variáveis.

Sejam $A, B \; e \; C$, ângulos de um triângulo arbitrário, então podemos dizer que $C = 180° - (A + B)$.

Assim, $\cos C = \cos[180° - (A + B)]$ ou seja $\cos C = -\cos(A + B)$.

Logo,

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \cos A + \cos B - \cos(A + B) - \frac{3}{2} \leq 0.$$

Denotamos: $f(A, B) = \cos A + \cos B - \cos(A + B) - \dfrac{3}{2}$.

Se mostrarmos que o máximo da função $f(A, B)$ é 0, temos realmente que a desigualdade é válida.

Assim, a resolução da desigualdade reduz-se ao estudo de uma função de duas variáveis.

1º Passo:

A condição necessária para $f(A, B)$ ser extremo é: $f'_A = f'_B = 0$

Então, vamos encontrar os pontos críticos, resolvendo o sistema, assim:

$$\begin{cases} f'_A = -sen A + sen(A + B) = 0 \\ f'_B = -sen B + sen(A + B) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_A = 0 \\ f'_B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -senA + sen(A + B) = 0 \\ -senB + sen(A + B) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} senA - senB = 0 \\ -senA + sen(A + B) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} senA = senB \\ -senA + senA.\cos B + senB.\cos A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} senA = senB \\ -senA + senA.\sqrt{1 - sen^2 B} + senA.\cos A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} senA = senB \\ -senA + senA.\sqrt{1 - sen^2 A} + senA.\cos A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} senA = senB \\ -senA + senA.\sqrt{\cos^2 A} + senA.\cos A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} senA = senB \\ -senA + senA.\cos A + senA.\cos A = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} senA = senB \\ -senA + 2senA.\cos A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} senA = senB \\ senA(-1 + 2\cos A) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} senA = senB \\ senA = 0 \vee \cos A = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Se $senA = 0$ não temos triângulo, logo $A = \frac{\pi}{3}$. Assim

$$\begin{cases} senA = senB \\ A = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} senB = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ A = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = \dfrac{\pi}{3} \vee B = \pi - \dfrac{\pi}{3} \\ A = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}.$$

Sabemos que $A + B + C = 180^{\circ}$, então se $B = \frac{2\pi}{3}$ temos $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} + 0 = \pi$ não temos triângulo. Assim $A = \frac{\pi}{3}$ e $B = \frac{\pi}{3}$.

Daqui, podemos dizer que o ponto crítico é: $(A,B)_{cr} = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$.

2º Passo:

A condição suficiente para $f(A,B)$ ser um extremo é:

$$f''_{AA}(A,B)_{cr} \cdot f''_{BB}(A,B)_{cr} - (f''_{AB}(A,B)_{cr})^2 > 0$$

onde $f''_{AA} \cdot f''_{BB} - (f''_{AB})^2$ é a forma quadrática da função $f(A,B)$

Se $f''_{AA}(A,B)_{cr} < 0$ ou ($f''_{BB}(A,B)_{cr} < 0$) a função $f(A,B)$ tem um máximo no ponto $(A,B)_{cr}$.

Temos que: $f''_{AA} = -\cos A + \cos(A+B)$; $f''_{BB} = -\cos B + \cos(A+B)$ e $f''_{AB} = \cos(A+B)$.

No ponto crítico $(A,B)_{cr} = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ temos que:

$$f''_{AA}\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)=-1; \quad f''_{BB}\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)=-1 \text{ e } f''_{AB}\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}.$$

A partir do ponto crítico obtemos a forma quadrática:

$$f''_{AA}\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right).f''_{BB}\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)-\left(f''_{AB}\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)\right)^2=(-1).(-1)-\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}>0,$$

logo existe extremo.

Então a função $f(A,B)$ tem um máximo no ponto $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$. Donde,

$$f_{máx}(A,B)=f\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{2\pi}{3}-\frac{3}{2}=0$$

assim, $f(A,B)$ é sempre menor ou igual a zero, $f(A,B)\leq 0$ pois o valor máximo de $f(A,B)$ é zero, $f_{máx}(A,B)=0$.

Recorrendo a este método podem ser também resolvidos problemas semelhantes quer com duas, quer com uma variável.

Capítulo 5

Sistemas de equações trigonométricas

Para que um aluno resolva correctamente sistemas de equações trigonométricas, é necessário conhecer as propriedades da soma dos senos e dos co-senos, demonstradas no capítulo 1, saber aplicá-las, tarefa realizada no capítulo 2 e ter um bom domínio tanto em equações trigonométricas estudadas no capítulo 3 como em equações algébricas.

Neste capítulo, propomos 6 exemplos de aplicação de sistemas de equações onde vamos apresentar propostas de resolução originais.

No processo de resolução de um sistema de equações trigonométricas, reduzimos este sistema a uma equação de uma variável ou a um sistema algébrico de equações, relativamente aos mesmos argumentos ou a funções desses argumentos.

§ Exemplo de aplicação 1

Resolva o sistema de equações $\begin{cases} tg\,x + tg\,y = \dfrac{5}{2} \\ x + y = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$ (5.1)

Resolução:

Vamos propor duas abordagens de resolução para o sistema de equações dado.

1ª Abordagem:

Utilizando o método de substituição. A partir da segunda equação obtemos que $y = \dfrac{\pi}{2} - x$ e em seguida substituímos na primeira equação.

Assim, obtemos uma equação só com uma variável, e usando as funções complementares tem-se que

$$tg\,x + tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{5}{2} \quad \Leftrightarrow \quad tg\,x + \cot g\,x = \frac{5}{2}.$$

Como $\cot g\,x = \dfrac{1}{tg\,x}$, multiplicando a equação por $tg\,(x)$ obtemos,

$$tg^2 x - \frac{5}{2} tg\,x + 1 = 0.$$

As raízes desta equação do segundo grau são:

$$tg\,x = 2 \text{ ou } tg\,x = \frac{1}{2}.$$

Daqui segue que $x = arc\,tg\,2 + \pi n$ ou $x = arc\,tg\dfrac{1}{2} + \pi k$, em que $n, k \in Z$.

Assim obtemos:

Para $x = arc\,tg\,2 + \pi n$ tem-se $y = \frac{\pi}{2} - arctg\,2 - \pi n \Leftrightarrow y = arccotg\,2 - \pi n$

e para $x = arctg\frac{1}{2} + \pi k$ tem-se $y = \frac{\pi}{2} - arctg\frac{1}{2} - \pi k \Leftrightarrow y = arccotg\frac{1}{2} - \pi k$ onde

$n, k \in Z$.

Portanto,

$$\begin{cases} x = arctg\,2 + \pi n, \\ y = arc\cot g\,2 - \pi n; \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x = arctg\frac{1}{2} + \pi k, \\ y = arc\cot g\frac{1}{2} - \pi k. \end{cases}$$

2ª Abordagem

Vamos reduzir o sistema dado a um sistema algébrico de 2 variáveis; transformamos o primeiro membro da primeira equação do sistema e depois de reduzir ao mesmo denominador aplicamos a fórmula (1.1), isto é

$$tg\,x + tg\,y = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{\cos y.senx}{\cos y.\cos x} + \frac{seny.\cos x}{\cos y.\cos x} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{sen(x+y)}{\cos x.\cos y} = \frac{5}{2}.$$

Utilizando a fórmula (1.28) $\cos x.\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$ no denominador, obtemos

$$\frac{2sen(x+y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)} = \frac{5}{2}.$$

Agora substituindo $x + y = \frac{\pi}{2}$, obtemos:

$$\frac{2sen\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2} + \cos(x-y)} = \frac{5}{2} \quad \text{portanto} \quad \frac{2}{\cos(x-y)} = \frac{5}{2}.$$

Resolvendo esta equação em relação a $\cos(x-y)$, obtemos $\cos(x-y) = \frac{4}{5}$ e por (3.3) temos,

$$x - y = \pm\, arc\cos\frac{4}{5} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Então,

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} \\ \cos(x-y) = \dfrac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} \\ x - y = \pm\, arc\cos\dfrac{4}{5} + 2\pi k \end{cases}$$

recorrendo ao método da adição ordenada temos que:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} \pm \dfrac{1}{2}\, arc\cos\dfrac{4}{5} + \pi k, \\ y = \dfrac{\pi}{4} \mp \dfrac{1}{2} arc\cos\dfrac{4}{5} - \pi k, \quad k \in Z. \end{cases}$$

Pelas duas abordagens, os resultados obtidos, apesar de escritos de forma diferente, correspondem às mesmas soluções.

§ Exemplo de aplicação 2

Resolva o sistema de equações $\begin{cases} sen\, x.\cos y = \dfrac{1}{4}, \\ 3tg\, x = tg\, y. \end{cases}$ (5.2)

Resolução:

O domínio deste sistema de equações são todos os números reais diferentes de

$\dfrac{\pi}{2} + \pi n \ com\ n \in Z.$

Na segunda equação se fizermos a substituição $tg\, x = \dfrac{senx}{\cos x}$ obtemos,

$3 sen\, x.\cos y = sen\, y.\cos x$.

Visto que $sen x . \cos y = \frac{1}{4}$, temos que a segunda equação simplificada é, $sen\, y \, . \cos x = \frac{3}{4}$.

Assim,

$$\begin{cases} sen\, x \, . \cos y = \dfrac{1}{4}, \\ \cos x \, . \, sen\, y = \dfrac{3}{4}, \end{cases}$$ que é equivalente a (5.2), quando $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$.

Somando as equações do sistema e depois subtrair da primeira equação a segunda e aplicando as fórmulas (1.1) e (1.4), obtemos um sistema equivalente ao anterior:

$$\begin{cases} sen(x+y) = 1, \\ sen(x-y) = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Resolvendo as equações trigonométricas elementares, obtemos o sistema,

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x - y = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n; \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x - y = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n. \end{cases} \quad k \text{ e } n \in Z.$$

Portanto as soluções são:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + \pi(k+n), \\ y = \dfrac{\pi}{3} + \pi(k-n). \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{6} + \pi(k+n), \\ y = \dfrac{2\pi}{3} + \pi(k-n). \end{cases}$$ k e n mudam independentemente um do outro.

§ Exemplo de aplicação 3

Resolva o sistema de equações $\begin{cases} \cos x + \cos y = \sqrt{3} \\ x + y = \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$

Resolução:

Como os argumentos são diferentes, não é possível utilizar o método do ângulo auxiliar estudado no capítulo 3.

Então, na primeira equação vamos transformar a *soma dos co-senos* em produto, usando a fórmula (1.26) demonstrada no capítulo 1. Assim

$$2\cos\frac{x+y}{2} \,.\, \cos\frac{x-y}{2} = \sqrt{3}\,.$$

Atendendo à segunda equação do sistema, podemos considerar $\dfrac{x+y}{2} = \dfrac{\pi}{6}$

então,

$$2\,\frac{\sqrt{3}}{2} \,.\, \cos\frac{x-y}{2} = \sqrt{3}\,.$$

Daqui obtemos que,

$$\cos\frac{x-y}{2} = 1\,.$$

Resolvendo a equação trigonométrica elementar, temos, $x - y = 4\pi n$, $n \in Z$.

Assim, o sistema reduz-se a

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{3}, \\ x - y = 4\pi n, \end{cases}$$

somando e subtraindo as duas equações, obtemos a solução

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n\,, \\ & \text{com } n \in Z\,. \\ y = \dfrac{\pi}{6} - 2\pi n\,. \end{cases}$$

§ Exemplo de aplicação 4

Resolva o sistema de equações $\begin{cases} sen(x-y) = 0\,, \\ sen(x+y) = 1. \end{cases}$

Resolução:

Neste exemplo, chamamos a atenção para um erro típico cometido com alguma frequência e para a importância do período da função.

Escrevendo as soluções gerais de cada uma das equações trigonométricas simples ao sistema apresentado, obtemos:

$$\begin{cases} x - y = k\pi, \ \ k \in Z \\ x + y = \dfrac{(4k+1)\pi}{2}, \ \ k \in Z. \end{cases}$$

À semelhança da última parte da equação anterior, podemos dizer que:

$$x = \frac{(6k+1)\pi}{4} \ \ e \ \ y = \frac{(2k+1)\pi}{4}\,, k \in Z\,.$$

Então se: $k = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} \ e \ y = \dfrac{\pi}{4}$; se $k = 1 \Rightarrow x = \dfrac{7\pi}{4} \ e \ y = \dfrac{3\pi}{4}$;

se $k = -1 \Rightarrow x = -\dfrac{5\pi}{4} \ e \ y = -\dfrac{\pi}{4}$.

Mas, com relativa facilidade se nota que perdemos algumas soluções, por exemplo;

$$x = \frac{3\pi}{4} \ \ e \ \ y = -\frac{\pi}{4}\,.$$

que satisfazem a solução do sistema dado e no entanto não figuram como solução.

- O que é que aconteceu? Quer dizer que a solução apresentada não é suficiente?

O problema é que quando descrevemos as soluções gerais das equações do sistema anterior, cometemos um erro. Este consiste em considerar o parâmetro k na primeira equação e também considerá-lo na segunda equação.

Na realidade necessitamos de introduzir os parâmetros inteiros k e n independentes um do outro.

Assim, a solução correcta é da forma $\begin{cases} x - y = k\pi\,, \; k \in Z\,, \\ x + y = \dfrac{(4n+1)\pi}{2}\,, n \in Z\,, \end{cases}$ daqui obtemos, que

$$x = \frac{(4n+1)\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{(4n+1)\pi}{4} - \frac{k\pi}{2}, \qquad k, n \in Z.$$

Logo a resposta correcta com $k, n \in Z$,

$$\left\{ \left(\frac{(4n+1)\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \frac{(4n+1)\pi}{4} - \frac{k\pi}{2} \right) \right\}.$$

Neste exemplo observamos o lapso que se pode cometer se escolhermos os períodos incorrectamente, isto é, o mesmo k para ambas as equações.

§ Exemplo de aplicação 5

Resolva o sistema de equações no intervalo $[0, \pi]$.

$$\begin{cases} 2\,sen\,2x + 2\cos 5x = 1 + \sqrt{3} \\ 4\,sen\,7x - 4\,sen\,3x = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Resolução:

Temos que analisar muito bem este problema, pois temos argumentos diferentes.

Verificamos que

$$\frac{7x-3x}{2}=2x \quad e \quad \frac{7x+3x}{2}=5x.$$

Assim, podemos simplificar a equação $4sen7x-4\,sen\,3x=2\sqrt{3}$. Primeiro dividimos todos os termos por 4; depois aplicando a fórmula da diferença de senos (1.25) $sen\alpha - sen\beta = 2\,sen\,\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, obtemos:

$$sen7x-sen3x=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2sen\frac{4x}{2}.\cos\frac{10x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2\,sen\,2x\,.\cos 5x=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Assim,

$$\begin{cases} sen2x+\cos 5x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ sen2x\,.\cos 5x=\dfrac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}.$$

Resolver cada uma das equações individualmente, não parece tarefa fácil. Analisando com algum cuidado verificamos que a soma das duas grandezas é $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ e o produto das mesmas é $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Como não existem outras grandezas tais que isto se verifique, sem recorrer a qualquer cálculo só existe um único par que verifica as condições, ou seja

$$\begin{cases} sen2x=\dfrac{1}{2} \\ \cos 5x=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} sen2x=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 5x=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=(-1)^k\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{2} \\ x=\pm\dfrac{\pi}{30}+\dfrac{2\pi n}{5} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x=(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi k}{2} \\ x=\pm\dfrac{\pi}{15}+\dfrac{2\pi n}{5} \end{cases} \quad k,n\in Z.$$

No primeiro sistema, vamos encontrar as soluções no intervalo $[0,\pi]$.

Quando $k=0 \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{12}$, quando $k=1 \Rightarrow x=\dfrac{5\pi}{12}$ e quando $k=2 \Rightarrow x=\dfrac{13\pi}{12}$;

Quando $n=0 \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{30}$, quando $n=1 \Rightarrow x=\dfrac{11\pi}{30}$ *ou* $x=\dfrac{13\pi}{30}$ e quando $n=2 \Rightarrow x=\dfrac{5\pi}{6}$ ou $x=\dfrac{23}{30}\pi$;

Assim, no intervalo $[0, \pi]$, temos todos os possíveis valores de x

$$\begin{cases} x=\left\{\dfrac{\pi}{12},\dfrac{5\pi}{12}\right\} \\ x=\left\{\dfrac{\pi}{30},\dfrac{11\pi}{30},\dfrac{13\pi}{30},\dfrac{5\pi}{6},\dfrac{23\pi}{30}\right\} \end{cases}$$ donde "*o vazio*" $\{\ \}$ é o conjunto solução.

Agora relativamente ao segundo sistema:

- quando $k=0 \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{6}$, quando $k=1 \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{3}$ e quando $k=2 \Rightarrow x=\dfrac{7\pi}{6}$;

- quando $n=0 \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{15}$, quando $n=1 \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{3}$ *ou* $x=\dfrac{7\pi}{15}$ e quando $n=2 \Rightarrow x=\dfrac{11\pi}{15}$ *ou* $x=\dfrac{13\pi}{15}$.

Assim, no intervalo $[0, \pi]$, temos todos os possíveis valores de x,

$$\begin{cases} x=\left\{\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right\} \\ x=\left\{\dfrac{\pi}{15},\dfrac{\pi}{3},\dfrac{7\pi}{15},\dfrac{11\pi}{15},\dfrac{13\pi}{15}\right\}. \end{cases}$$

A solução do sistema $\begin{cases} 2sen2x + 2\cos5x = 1+\sqrt{3} \\ 4sen7x - 4\,sen3x = 2\sqrt{3} \end{cases}$ em $[0, \pi]$ é $x=\dfrac{\pi}{3}$.

§ Exemplo da aplicação 6

Resolva $f(x)=\begin{cases} sen\,x-\dfrac{1}{sen\,x}=sen\,y \\ \cos x-\dfrac{1}{\cos x}=\cos y \end{cases}$

Resolução:

O sistema só tem significado para $sen\,x\neq 0$ e $\cos x\neq 0$, assim $x\neq \pi k \wedge x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$ com $k\in Z$,ou seja, $D_f=\left\{x\in R: x\neq \dfrac{\pi}{2}+\dfrac{k\pi}{2},\ k\in Z\right\}$.

Temos que $\left(a\pm\dfrac{1}{a}\right)^2=a^2\pm 2+\dfrac{1}{a^2}$, assim elevando ambos os membros de cada uma das equações obtemos,

$$f(x,y)=\begin{cases} sen^2x-2+\dfrac{1}{sen^2x}=sen^2y \\ \cos^2x-2+\dfrac{1}{\cos^2x}=\cos^2y \end{cases}.$$

Recorrendo ao método da adição ordenada, concluímos que

$$f(x,y)=\begin{cases} 1-4+\dfrac{1}{sen^2x}+\dfrac{1}{\cos^2x}=1 \\ \\ uma\ das\,equações\ iniciais \end{cases}.$$

Obtemos o valor de x, resolvendo a equação $\dfrac{1}{sen^2x}+\dfrac{1}{\cos^2x}=4$, assim

$\cos^2x+sen^2x=4.(sen^2x\,.\cos^2x)\Leftrightarrow 1=4.sen^2x\,.\cos^2x\Leftrightarrow 1=(2sen\,x.\cos x)^2$.

Aplicando a fórmula (1.7) da duplicação do ângulo, tem-se, $1=sen^2(2x)$, desenvolvendo o caso notável temos a seguinte equação:

$$(1-sen\,2x).(1+sen\,2x)=0\Leftrightarrow sen\,2x=1 \vee sen\,2x=-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee 2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\,, k \in Z \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in Z$$

que é equivalente a $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \Leftrightarrow x = (2k+1).\frac{\pi}{4}\,,\ k \in Z$.

Voltando ao sistema, $f(x,y) = \begin{cases} x = (2k+1).\frac{\pi}{4}\,, k \in Z \\ sen\,x - \frac{1}{sen\,x} = sen\,y \end{cases}$.

Ao atribuir valores inteiros ao parâmetro k, obtemos valores para x, tais que

$$sen\,x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } sen\,x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Analisando cada uma das situações separadamente:

i) Se $sen\,x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ então, $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{\sqrt{2}} = sen\,y \Leftrightarrow sen\,y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

ii) Se $sen\,x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ então, $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} = sen\,y \Leftrightarrow sen\,y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Assim, as soluções do sistema são,

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ y = -\frac{\pi}{4} + n\pi \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ y = \frac{\pi}{4} + n\pi \end{cases} \quad com\ n, k \in Z.$$

Capítulo 6

Problemas Geométricos

Ao falar-se sobre métodos de aplicação da trigonometria na resolução de problemas geométricos tem que mencionar-se como relações principais todas as identidades trigonométricas habituais, transformações trigonométricas, teorema dos co-senos e senos, igualdades e equações trigonométricas e também em casos particulares, a utilização das funções trigonométricas inversas.

Na resolução de problemas geométricos frequentemente usamos conceitos da trigonometria, por exemplo quando temos informação sobre os ângulos duma figura geométrica. Mas por vezes, mesmo não tendo informações sobre ângulos da dada figura o uso da trigonometria é mais desejável porque o processo de resolução é mais simples e claro, e por isso pode-se escolher um ângulo que forme uma relação de modo a se poder usar as propriedades, regras e fórmulas das funções trigonométricas calculando primeiro os comprimentos correspondentes ou então construir relações entre os seus comprimentos.

Neste capítulo começamos por apresentar três versões distintas da demonstração do teorema dos co-senos e duas do teorema dos senos.

§ 6.1 Teorema dos Co-senos.

Seja um triângulo qualquer ΔABC, de lados a, b e c cujos ângulos opostos aos respectivos lados são α, β e γ, então

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \tag{6.1}$$

§ 1ª Abordagem Teorema dos co-senos

Demonstração:

Seja o triângulo ΔABC da figura 6.1 vamos expressar um lado a partir dos outros dois e do ângulo por eles formado.

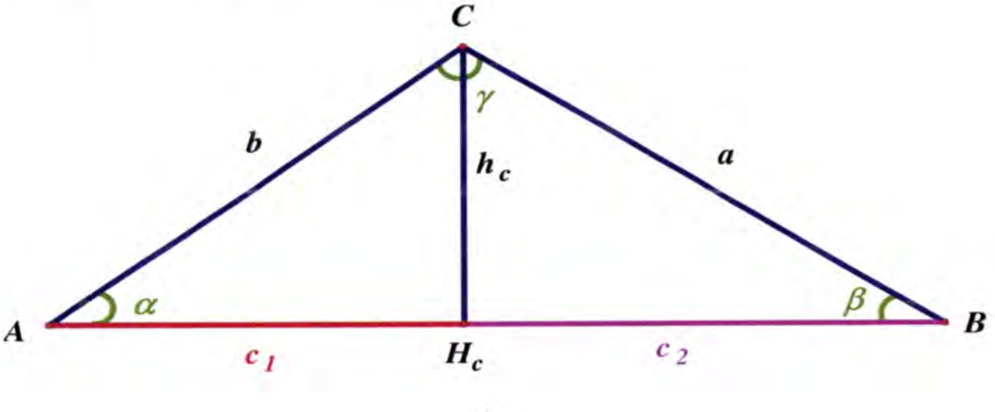


figura 6.1

Do triângulo ΔAH_cC temos:

$$\cos\alpha = \frac{c_1}{b} \Rightarrow c_1 = b.\cos\alpha \Rightarrow c - c_1 = c - b.\cos\alpha.$$

Usando o teorema de Pitágoras temos,

$$b^2 = h_c^{\ 2} + c_1^{\ 2} \Leftrightarrow h_c^{\ 2} = b^2 - c_1^{\ 2} \Leftrightarrow h_c^{\ 2} = b^2 - b^2.\cos^2\alpha.$$

Do triângulo ΔH_cBC, pelo Teorema de Pitágoras temos:

$$a^2 = h_c^{\ 2} + (c - c_1)^2 \Leftrightarrow a^2 = h_c^{\ 2} + (c - b\cos\alpha)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h_c^{\ 2} = a^2 - (c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha)$$

Assim obtemos que:

$$h_c^2 = b^2 - b^2\cos^2\alpha \quad \text{e} \quad h_c^2 = a^2 - c^2 + 2bc\cos\alpha - b^2\cos^2\alpha$$

então

$$b^2 - b^2\cos^2\alpha = a^2 - c^2 + 2bc\cos\alpha - b^2\cos^2\alpha \Leftrightarrow b^2 = a^2 - c^2 + 2bc\cos\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha .$$

Analogamente se tem

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \quad \text{e} \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

§ 2ª Abordagem Teorema dos co-senos

Demonstração:

<u>1º Caso</u>: Suponhamos que o ângulo α é agudo.

Consideremos o triângulo ΔABC e nele construímos a altura $\overline{BD}$ *(figura 6.2)* e obtemos assim o triângulo rectângulo ΔBDC.

Nele,

$$\overline{BC}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{BD}^2 \quad \text{ou} \quad a^2 = (b - b_1)^2 + h^2$$

(os valores h e b_1 estão descritos na figura 6.2).

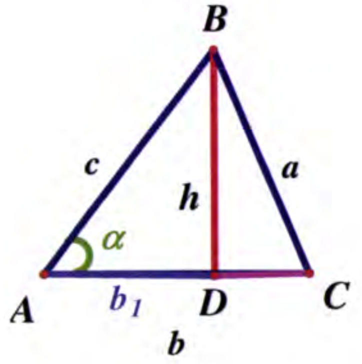


figura 6.2

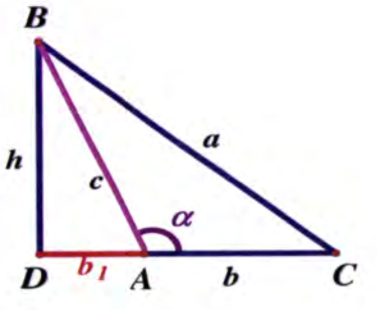


figura 6.3

Relacionamos agora os valores h e b_1 através dos elementos da base do triângulo ΔABC.

Considerando agora o triângulo ΔABD, obtemos:

$$h = c.sen\alpha \quad \text{e} \quad b_1 = c.\cos\alpha.$$

Substituindo h e b_1 na expressão $a^2 = (b - b_1)^2 + h^2$ por $h = c.sen\alpha$ e

$b_1 = c.\cos\alpha$, concluímos que

$$a^2 = (b - c.\cos\alpha)^2 + c^2\ sen^2\alpha.$$

Fazendo as simplificações obtemos:

$$a^2 = b^2 - 2bc\cos\alpha + c^2(\cos^2\alpha + sen^2\alpha) = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

<u>2º Caso</u>: Suponhamos agora que o ângulo α é obtuso.

Consideremos o triangulo ΔABC e do vértice B traçamos uma altura $\overline{BD}$ na continuação do lado $\overline{AC}$ *(figura 6.3).*

Seja agora o triângulo rectângulo ΔBDC temos:

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2 \quad \text{ou} \quad a^2 = h^2 + (b + b_1)^2$$

onde $b_1 = \overline{AD}$. Os valores h e b_1 são expressos através dos elementos da base do triângulo ΔABC.

Do triângulo ΔABD obtemos:

$$h = c.sen(180^\circ - \alpha) = c.sen\alpha$$

$$b_1 = c.\cos(180^\circ - \alpha) = -c.\cos\alpha.$$

Substituindo h e b_1 na igualdade $a^2 = h^2 + (b + b_1)^2$ pelas expressões anteriores e depois de serem feitas as transformações necessárias, obtemos:

$$a^2 = c^2\ sen^2\alpha + (b - c.\cos\alpha)^2 =$$

$$= c^2(sen^2\alpha + \cos^2\alpha) + b^2 - 2bc\cos\alpha = c^2 + b^2 - 2bc\cos\alpha .$$

<u>3º Caso</u>: Consideremos agora o caso, quando o ângulo α é recto.

Neste caso, $\cos\alpha = 0$ e seguidamente $b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = b^2 + c^2$.

Conforme o Teorema de Pitágoras: $b^2 + c^2 = a^2$.

Fazendo uma comparação entre $b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = b^2 + c^2$ e $b^2 + c^2 = a^2$, obtemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha .$$

§ 3ª Abordagem Teorema dos co-senos

Nesta abordagem do teorema dos co-senos podemos usar as propriedades do produto escalar para obter a fórmula $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

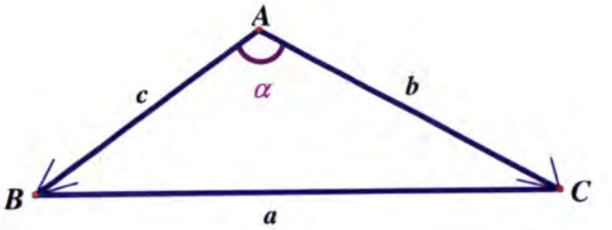


figura 6.4

Demonstração:

Aplicando o produto escalar de dois vectores, vem que

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = \left\| \overrightarrow{AC} \right\| \times \left\| \overrightarrow{AB} \right\| \times \cos\alpha .$$

Por outro lado,

$$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$$

donde

$$\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CB} = (-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}).(-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})$$

assim

$$\left\|\overrightarrow{CB}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2$$

portanto

$$\left\|\overrightarrow{CB}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - 2\,\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2.$$

Podemos dizer que $\left\|\overrightarrow{CB}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - 2\left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \cos\alpha + \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2$

$$\left\|\overrightarrow{CB}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - 2\left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \cos\alpha$$

ou então,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

§ 6.1.1 Consequência do Teorema dos Co-senos

Se num triângulo o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos restantes lados, então esse triângulo é rectângulo.

Dado: $a^2 + b^2 = c^2$ *pretende-se demonstrar que o ângulo* $\gamma = 90^\circ$.

Demonstração:

Pela definição do Teorema dos Co-senos temos $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ donde segue que $\cos\gamma = \dfrac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab}$.

Como por hipótese, $a^2 + b^2 = c^2$, então $\cos\gamma = \dfrac{c^2 - c^2}{2ab} \Leftrightarrow \cos\gamma = 0$ o que implica que $\gamma = 90^\circ$ como pretendíamos demonstrar.

A fórmula do co-seno da diferença de ângulos (1.5) pode ser também obtida a partir os Teorema dos co-senos.

§ 6.1.2 Dedução da fórmula do co-seno da diferença de ângulos pelo teorema dos co-senos.

$$\cos(a-b) = \cos a . \cos b + sen\, a . sen\, b$$

Demonstração:

Suponhamos a circunferência trigonométrica com centro na origem e raio unitário (figura 6.5). Sejam a e b dois arcos trigonométricos com $a > b$.

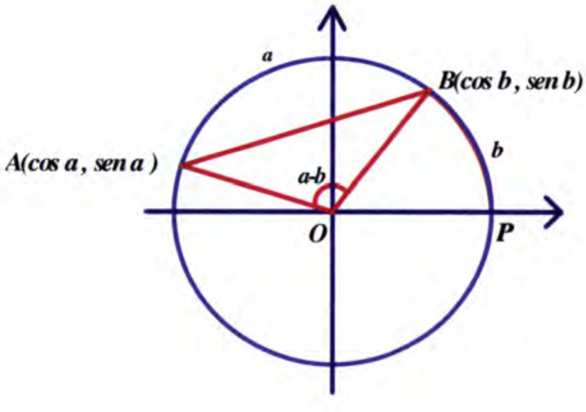


figura 6.5

Seja P, o ponto de intersecção da circunferência com o semi-eixo positivo Ox, a amplitude do arco PB tem medida b e a amplitude do arco PA tem medida a. Nestas condições, podemos concluir que o arco BA tem medida $a-b$.

Pelo ***teorema dos co-senos,*** sabemos que em qualquer triângulo, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, menos o dobro do produto desses lados, pelo co-seno do ângulo que eles formam.

Assim, para o triângulo ΔOAB:

$$\overline{AB}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OA}^2 - 2.\overline{OB}.\overline{OA}.\cos(a-b).$$

Ora, $\overline{OB} = \overline{OA} = 1$ por ser o raio do círculo trigonométrico e $\overline{AB}$ é a distância entre os pontos $A(\cos a, sen\, a)$ e $B(\cos b, sen\, b)$.

Usando a fórmula da distância entre dois pontos na equação $\overline{AB}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OA}^2 - 2.\overline{OB}.\overline{OA}.\cos(a-b)$ temos:

$$(\cos a - \cos b)^2 + (sen\, a - sen\, b)^2 = 1^2 + 1^2 - 2.1.1\cos(a-b).$$

Desenvolvendo a equação,

$$\cos^2 a - 2\cos a.\cos b + \cos^2 b + sen^2 a - 2 sen\, a.sen\, b + sen^2 b = 2 - 2\cos(a-b).$$

Relembrando a fórmula fundamental da trigonometria,

$$\cos^2 a + sen^2 a = \cos^2 b + sen^2 b = 1,$$

substituindo temos: $1 + 1 - 2\cos a.\cos b - 2 sen\, a.sen\, b = 2 - 2\cos(a-b)$,

simplificando a equação:

$$-2(\cos a.\cos b + sen\, a.sen\, b) = -2\cos(a-b)$$

donde finalmente podemos escrever a fórmula do co-seno da diferença de dois ângulos a e b:

$$\cos(a-b) = \cos a.\cos b + sen\, a.sen\, b.$$

Vamos agora enunciar uma propriedade do paralelogramo cuja demonstração se baseia no ***Teorema dos co-senos.***

§ 6.1.3 Propriedade:

Num qualquer paralelogramo $[ABCD]$, sejam d_1 e d_2 as suas diagonais e a e b dois lados consecutivos, então é válida a seguinte igualdade,

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Demonstração:

Seja o paralelogramo $[ABCD]$ da figura 6.6.

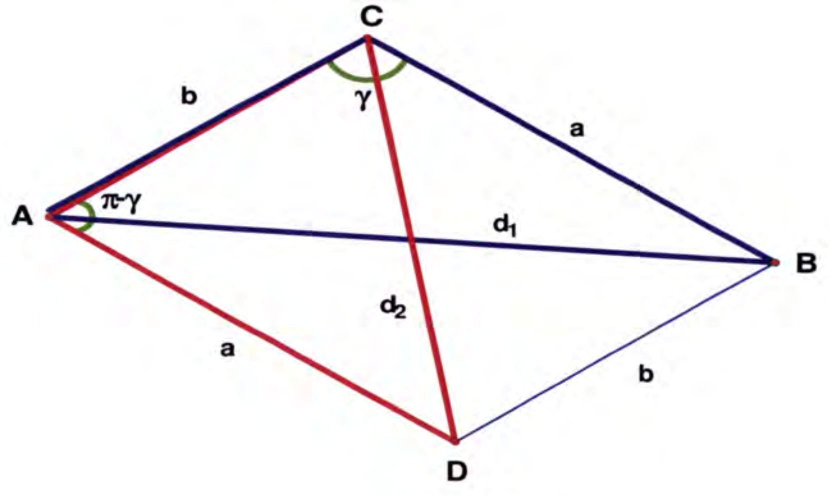


figura 6.6

De acordo com o teorema dos co-senos aplicado ao triângulo ΔABC:

$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b\cos\gamma.$$

Por definição a soma de dois ângulos consecutivos dum paralelogramo é 180º, assim se $\angle ACB = \gamma$ então $\angle A = \pi - \gamma$. Aplicando novamente o mesmo teorema ao triângulo temos:

$$d_2^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos(\pi - \gamma).$$

Conhecemos a relação entre dois ângulos suplementares $\cos(180^\circ - \gamma) = -\cos\gamma$.

Então:

$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b\cos\gamma \text{ e } d_2^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.(-\cos\gamma).$$

Assim, a soma $d_1^2 + d_2^2$ é igual a:

$$d_1^2 + d_2^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b\cos\gamma + a^2 + b^2 + 2.a.b.\cos\gamma =$$

$$= a^2 + b^2 + a^2 + b^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Logo

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2), \text{ para qualquer paralelogramo } [ABCD].$$

§ 6.2 Teorema dos Senos

Seja um triângulo qualquer ΔABC, de lados a, b e c cujos ângulos opostos aos respectivos lados são α, β e γ, então

$$\frac{a}{sen\alpha}=\frac{b}{sen\beta}=\frac{c}{sen\gamma}.$$

§ 1ª Abordagem Teorema dos Senos

Demonstração:

Consideremos o triângulo ΔABC da figura 6.7.

Sejam h_c e h_a, as alturas do triângulo relativamente aos lados c e a respectivamente, e sejam k_a e k_c os pontos de intersecção das referidas alturas com os lados a e c respectivamente.

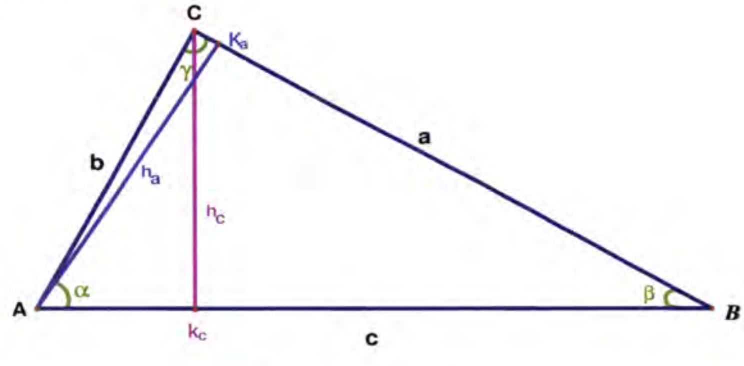


figura 6.7

Consideremos um vértice arbitrário, pode ser por exemplo o vértice C:

Pelo triângulo rectângulo ΔAK_cC temos:

$$sen\alpha=\frac{h_c}{b} \Leftrightarrow h_c=b.sen\alpha.$$

Pelo triângulo rectângulo ΔK_cBC temos:

$$sen\beta=\frac{h_c}{a} \Leftrightarrow h_c=a.sen\beta,$$

deste modo podemos dizer que $b.sen\alpha = a.sen\beta$ donde,

$$\frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{b}{sen\,\beta}.$$

Escolhendo agora, por exemplo, o vértice A:

Pelo triângulo rectângulo ΔAK_aC obtemos,

$$sen\,\gamma = \frac{h_a}{b} \Leftrightarrow h_a = b.sen\gamma$$

Pelo triângulo rectângulo ΔABK_a temos,

$$sen\,\beta = \frac{h_a}{c} \Leftrightarrow h_a = c.sen\,\beta$$

e deste modo também podemos dizer que,

$$b.sen\gamma = c.sen\,\beta \Leftrightarrow \frac{b}{sen\,\beta} = \frac{c}{sen\,\gamma}.$$

Logo é verdade que,

$$\frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{b}{sen\,\beta} = \frac{c}{sen\,\gamma}.$$

Repare-se que também poderia ter sido considerada nos cálculos apresentados a altura relativa ao lado b, e ter-se-ia procedido à demonstração do mesmo modo.

§ 6.2.1 - Teorema dos senos completo

Seja um triângulo qualquer ΔABC, de lados a, b e c cujos ângulos opostos aos respectivos lados são α, β e γ e seja r o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ΔABC então,

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma} = 2r.$$

Demonstração:

Seja 0, o ponto de intersecção das mediatrizes do ΔABC e também o centro da circunferência circunscrita ao referido triângulo, conforme a figura 6.8.

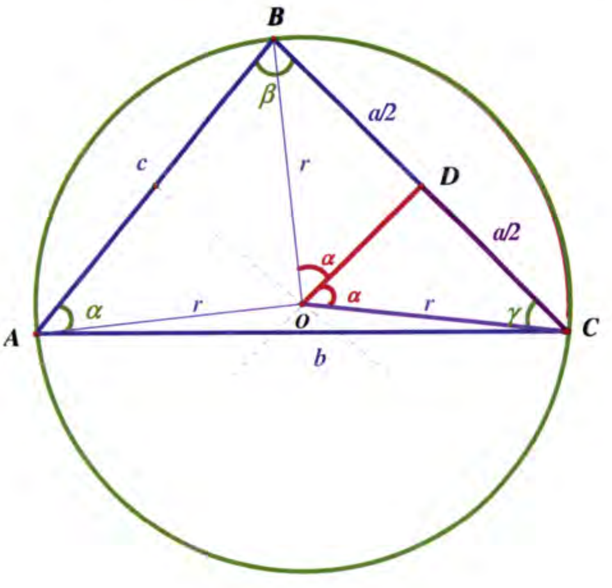


figura 6.8

Seja D é o ponto médio de $\overline{BC}$ então $\overline{BD} = \overline{DC}$.

Os triângulos ΔCOA, ΔCOB e ΔAOB são isósceles porque cada um deles contém dois raios da circunferência circunscrita.

Seja α igual a $\frac{1}{2}$ da medida do ângulo BOC. Como o ângulo ao centro numa circunferência tem o dobro da amplitude do ângulo inscrito no mesmo arco, então

$$\alpha = \frac{1}{2} \angle\, BOC \Rightarrow \angle BOC = 2\alpha .$$

Os triângulos $\Delta BDO \cong \Delta ODC$ pois ΔOBC é isósceles.

Já vimos que $\angle BOC = 2\alpha$, pois é ângulo ao centro cujo arco é o mesmo que o ângulo α inscrito.

Como $\overline{OD}$ divide $\angle BOC$ em duas partes iguais $\Rightarrow \angle BOD = \alpha$.

Como ΔCOB é isósceles e $\overline{OD} \perp \overline{BC}$ porque $\overline{OD}$ é a bissectriz de $\angle BOC$ o que implica que $\angle DOC = \alpha$.

Considerando o triângulo ΔCOD, podemos dizer pelo teorema dos Senos considerando os elementos conhecidos, que

$$\frac{\frac{a}{2}}{sen\alpha} = \frac{r}{sen90^{\circ}} \Leftrightarrow \frac{\frac{a}{2}}{sen\alpha} = \frac{r}{1} \Leftrightarrow \frac{a}{2} = r.sen\alpha \Leftrightarrow \frac{a}{sen\alpha} = 2r.$$

Analogamente se determina que,

$$\frac{b}{sen\beta} = 2r \text{ e } \frac{c}{sen\gamma} = 2r \Leftrightarrow \frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma} = 2r.$$

§ 2ª Abordagem Teorema dos senos

Para esta abordagem necessitamos do seguinte resultado:

§ 6.2.2 Lema

O lado de qualquer triângulo é igual ao produto do diâmetro da circunferência circunscrita pelo seno do ângulo oposto a esse lado.

Demonstração:

Consideremos o triângulo ΔABC, de lados a, b e c e ângulos opostos a esses lados α, β e γ, respectivamente. Seja ainda a circunferência circunscrita ao referido triângulo, de raio R, pretende-se demonstrar que,

$$a = 2R\,sen\,\alpha,\ b = 2R\,sen\,\beta \text{ e } c = 2R\,sen\,\gamma.$$

1º Caso - O ângulo A é agudo.

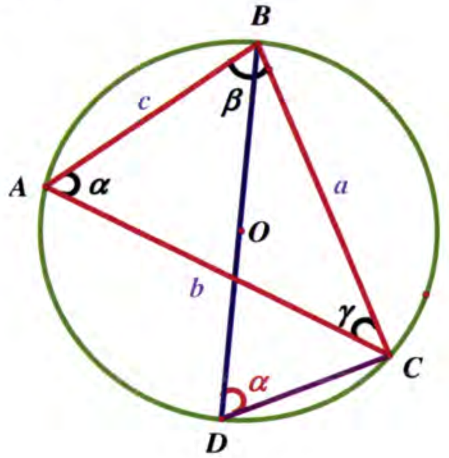


figura 6.9

Considere-se a figura 6.9, a partir do vértice B construímos o diâmetro $\overline{BD}$.

Unimos os pontos D e C obtemos o ΔBCD; por definição o ângulo $\angle BCD = 90^\circ$, pois um dos lados do triângulo é o diâmetro da circunferência.

O ângulo $\angle BDC = \alpha$ pois é um ângulo inscrito e baseado no mesmo arco que o ângulo $\angle BAC$.

Do triângulo ΔBCD, por definição de seno, $sen\,\alpha = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$, obtemos que o valor do cateto incógnito $\overline{BC}$ é igual à hipotenusa $\overline{BD}$, multiplicada pelo seno de $\angle BDC$, ou seja ,

$$\overline{BC} = \overline{BD}\,.\,sen\,\alpha \quad \text{ou seja} \quad a = 2R\ sen\,\alpha\,.$$

De modo análogo demonstramos as duas fórmulas restantes para os ângulos

$$\beta < 90^\circ \ \text{ e } \ \gamma < 90^\circ.$$

<u>2º Caso</u> - **O ângulo A é obtuso.** Consideremos o triângulo ΔABC da figura 6.10, escolhemos por exemplo, o vértice B. A partir do vértice B construímos o diâmetro $\overline{BD}$ e consideremos o triângulo ΔBCD, em que $\angle BCD = 90^\circ$.

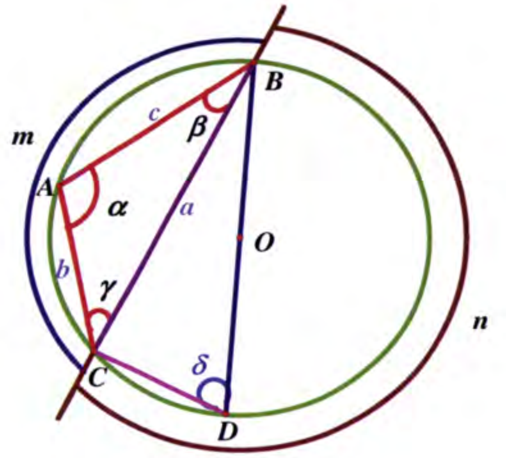


figura 6.10

Seja $\angle BDC = \delta$, por definição $sen\,\delta = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$ logo $\overline{BC} = \overline{BD}.sen\,\delta$.

Seja α o ângulo correspondente ao arco CB então $\alpha = \dfrac{1}{2} arco\, n$ mas

$arco\, m + arco\ n = 360^o \Rightarrow \delta + \alpha = \dfrac{1}{2}(\ arco\ n + arco\ m) = \dfrac{1}{2} \times 360^o = 180^o$.

Como $\alpha + \delta = 180^\circ$ implica que $\delta = 180^o - \alpha$ daí,

$$sen\,\delta = sen(180^\circ - \alpha) = sen\,\alpha$$

por isso,

$$\overline{BC} = \overline{BD}\,sen\,\alpha$$

ou seja chegámos à fórmula

$$a = 2R\ sen\,\alpha\,.$$

<u>3º Caso</u> - O ângulo A é recto.

Num triângulo rectângulo ΔABC, o lado a é a hipotenusa, então

$$a = 2R \quad \text{ou seja,} \quad a = 2R\ sen 90^\circ.$$

Do resultado anterior, obtém-se que

$$2R = \frac{a}{sen\,\alpha}, \quad 2R = \frac{b}{sen\,\beta} \quad \text{e} \quad 2R = \frac{c}{sen\,\gamma}.$$

Então é verdade que,

$$\frac{a}{sen\,\alpha}=\frac{b}{sen\,\beta}=\frac{c}{sen\,\gamma}.$$

O ***teorema dos senos*** permite a dedução de uma fórmula para o cálculo da área de um triângulo qualquer.

§ 6.2.3 Teorema dos senos no cálculo da área de um triângulo qualquer.

Seja o triângulo ΔABC da figura 6.11 de altura h.

A ***área de um triângulo qualquer*** é $S=\dfrac{abc}{4R}$.

Sejam a, b e c as medidas dos lados do triângulo, R o raio da circunferência circunscrita ao triângulo e S a área do triângulo.

Demonstração:

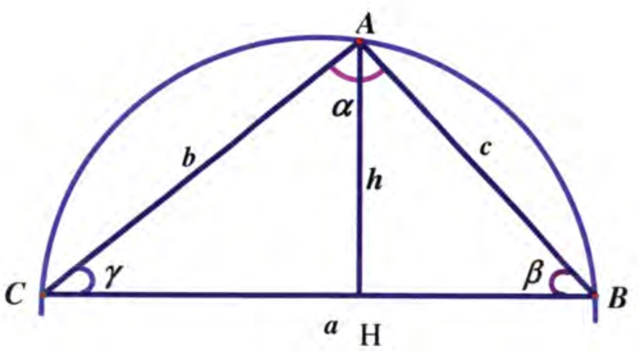


figura 6.11

Sabemos que a área de um triângulo é $S=\frac{1}{2}\times a\times h$.

Considerando, por exemplo, o triângulo rectângulo ΔCAH, podemos escrever:

$$sen\ \gamma=\frac{h}{b}\Leftrightarrow h=b.sen\,\gamma.$$

Substituindo na fórmula da área, temos $S = \frac{1}{2} \times a \times b.sen\,\gamma$, aplicando o teorema dos senos completo temos que $\frac{c}{sen\,\gamma} = 2R$, onde R é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ΔABC, assim $sen\,\gamma = \frac{c}{2R}$. Portanto,

$$S = \frac{1}{2}.a.b.\frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}.$$

Temos então a fórmula para o cálculo da ***área de um triângulo qualquer***:

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

A partir do resultado anterior e do teorema dos senos completo obtemos a igualdade seguinte:

$$S = \frac{1}{2}\,a.b\,sen\,\gamma = \frac{1}{2}b.c\,sen\,\alpha = \frac{1}{2}\,a.c\,sen\,\beta.$$

De facto por $S = \frac{abc}{4R}$ e pelo teorema dos senos completo temos que $\frac{c}{sen\,\gamma} = 2R$, assim, $c = 2R.sen\,\gamma$, onde γ é o ângulo formados pelos lados de medidas a e b.

Substituindo na fórmula da área acima, vem:

$$S = \frac{a.b.2R.sen\,\gamma}{4R} \text{ ou seja } S = \frac{a.b\,sen\,\gamma}{2}.$$

Genericamente, podemos escrever a fórmula acima em função de qualquer par de medidas dos lados a saber:

$$S = \frac{1}{2}\,a.b.sen\,\gamma = \frac{1}{2}\,b.c.sen\,\alpha = \frac{1}{2}a.c.sen\,\beta.$$

§ 6.3 Aplicação do teorema dos senos e do teorema dos co-senos e outras relações trigonométricas em problemas geométricos.

§ Exemplo de aplicação 1

Seja um arco arbitrário AB, em que o ponto M divide o arco em dois arcos iguais ou seja $A\widehat{M} = M\widehat{B}$.

Mostre que para qualquer ponto K pertencente ao segmento de recta AB temos que

$$\overline{AK}\,.\,\overline{KB} = \overline{AM}^2 - \overline{KM}^2$$

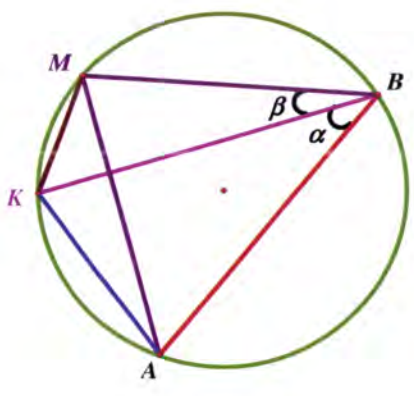


figura 6.12

Demonstração:

Consideremos α *e* β, ângulos do ΔABK e ΔKBM respectivamente;

Aplicando o teorema dos senos no ΔABK temos:

$$\frac{\overline{AK}}{sen\alpha} = 2R \Rightarrow \overline{AK} = 2R.sen\alpha .$$

Aplicando o teorema dos senos ao ΔAMB temos: $\overline{AM} = 2R\,sen(\alpha + \beta)$.

Novamente pelo teorema dos senos no ΔKBM temos: $\overline{KM} = 2R\,sen\beta$.

Sabemos que $\overline{AM} = \overline{MB}$ o que implica que $\angle MKB = \angle ABM = \alpha + \beta$.

Do triângulo ΔKBM : $\angle BMK = 180^\circ - \beta - (\alpha + \beta) = 180^\circ - (\alpha + 2\beta)$, assim

$$sen[180^\circ - (\alpha + 2\beta)] = sen(\alpha + 2\beta)$$

$$\frac{\overline{KB}}{sen(\alpha + 2\beta)} = 2R \quad \Rightarrow \overline{KB} = 2R\, sen(\alpha + 2\beta)$$

Portanto, vamos mostrar que a relação $\overline{AK}\,.\,\overline{KB} = \overline{AM}^2 - \overline{KM}^2$ é equivalente à identidade trigonométrica

$$2R.sen\alpha.\,2R\,sen(\alpha + 2\beta) = 4R^2 sen^2(\alpha + \beta) - 4R^2 sen^2\beta$$

$$\Leftrightarrow sen\,\alpha.sen(\alpha + 2\beta) = sen^2(\alpha + \beta) - sen^2\beta.$$

Aplicando a fórmula (1.30) $sen\alpha.sen\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$, no primeiro membro da igualdade obtemos:

$$\frac{1}{2}[\cos(-2\beta) - \cos(2\alpha + 2\beta)] = sen^2(\alpha + \beta) - sen^2\beta.$$

Simplificando tem-se:

$$\frac{1}{2}\left[\cos^2\beta - sen^2\beta - \cos^2(\alpha + \beta) + sen^2(\alpha + \beta)\right] = sen^2(\alpha + \beta) - sen^2\beta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\cos^2\beta - \cos^2(\alpha + \beta)\right] + \frac{1}{2}\left[sen^2(\alpha + \beta) - sen^2\beta\right] = sen^2(\alpha + \beta) - sen^2\beta$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\cos^2\beta - \cos^2(\alpha + \beta)\right] - \frac{1}{2}\left[sen^2(\alpha + \beta) - sen^2\beta\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos^2\beta - \frac{1}{2}\cos^2(\alpha + \beta) - \frac{1}{2}sen^2(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}sen^2\beta = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\cos^2\beta + sen^2\beta\right] - \frac{1}{2}\left[\cos^2(\alpha + \beta) + sen^2(\alpha + \beta)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1) - \frac{1}{2}(1) = 0 \quad P.V$$

Para além de mostrarmos $\overline{AK}\,.\,\overline{KB} = \overline{AM}^2 - \overline{KM}^2$ ainda podemos dizer que:

$\overline{AK}\,.\,\overline{KB} = \overline{AM}^2 - \overline{KM}^2$ é equivalente a $sen\alpha.sen(\alpha + 2\beta) = sen^2(\alpha + \beta) - sen^2\beta$.

A seguir apresenta-se uma propriedade principal das bissectrizes; a mesma é necessária na resolução dos problemas que se seguem.

§ 6.3.1 Propriedade principal das bissectrizes.

Dado o triângulo ΔABC, de lados $a, b\ e\ c$ e ângulos opostos a esses lados, $2\alpha, 2\beta\ e\ 2\gamma$, respectivamente e b_a é a bissectriz do ângulo 2α.

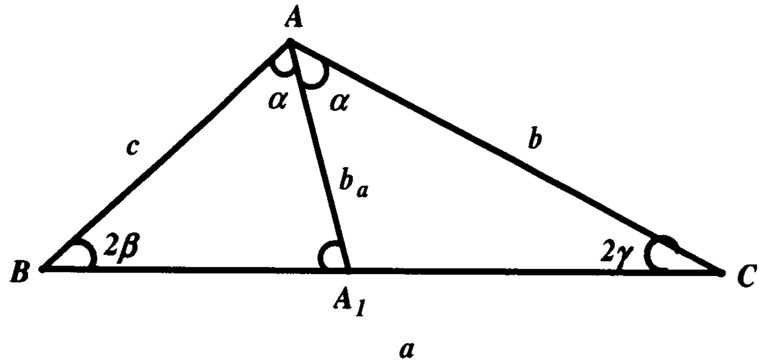


figura 6.13

A bissectriz divide o lado oposto ao ângulo em partes proporcionais, isto é,

$$\frac{\overline{BA_1}}{A_1C} = \frac{c}{b}$$

Demonstração:

Pelo teorema dos senos e pelo triângulo ΔBAA_1 tem-se

$$\frac{c}{sen\left[180°-(2\beta+\alpha)\right]} = \frac{BA_1}{sen\alpha} \Leftrightarrow \frac{c}{sen(2\beta+\alpha)} = \frac{\overline{BA_1}}{sen\alpha} \Leftrightarrow \frac{sen\alpha}{sen(2\beta+\alpha)} = \frac{\overline{BA_1}}{c}.$$

Do triângulo ΔAA_1C:

$$\frac{b}{sen(2\beta+\alpha)} = \frac{\overline{A_1C}}{sen\alpha} \Leftrightarrow \frac{sen\alpha}{sen(2\beta+\alpha)} = \frac{\overline{A_1C}}{b}.$$

Visto que,

$$\frac{sen\,\alpha}{sen(2\beta+\alpha)} = \frac{\overline{BA_1}}{c} \quad \text{e} \quad \frac{sen\,\alpha}{sen(2\beta+\alpha)} = \frac{\overline{A_1C}}{b}.$$

Logo concluimos que

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} = \frac{c}{b}.$$

A seguir vejamos um exemplo de aplicação onde se pretende aplicar o teorema dos senos e o teorema dos co-senos. Neste problema propomos que se encontre todos os elementos de um triângulo, conhecendo à partida três desses elementos.

§ Exemplo de aplicação 2

Seja o triângulo ΔABC, conhecemos os comprimentos dos lados a e b e a amplitude do ângulo γ (adjacente a esses lados).

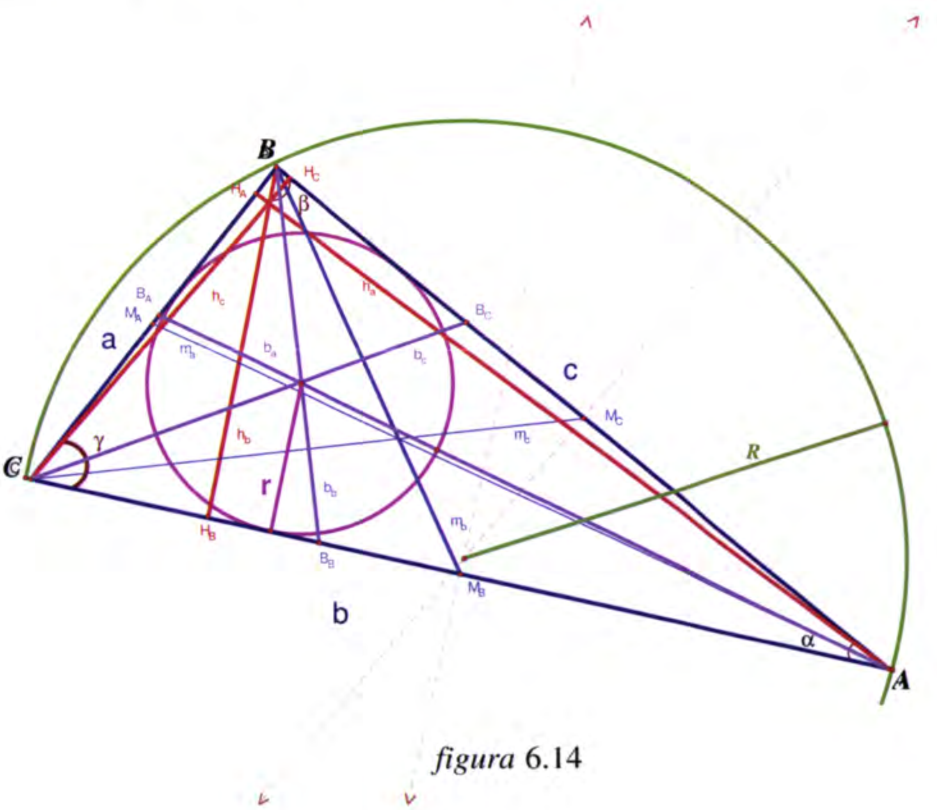


figura 6.14

Pretende-se determinar os restantes elementos do triângulo ΔABC, ou seja *i)* o lado c; os ângulos α *e* β; as alturas h_a, h_b *e* h_c; relativamente aos lados a, b, e c respectivamente; as bissectrizes b_a, b_b *e* b_c relativamente aos ângulos α, β *e* γ;

ii) As medianas m_a, m_b *e* m_c; e os raios r *e* R das circunferências inscrita e circunscrita respectivamente, ao triângulo ΔABC.

Observar que é possível definir um qualquer triângulo arbitrário, caso se conheça 3 dos seus lados; ou 2 lados e o ângulo adjacente a esses lados ou então caso se conheçam 1 lado e os dois ângulos que lhe correspondem.

No nosso problema, como já o referimos conhecemos os lados a e b e o ângulo γ.

Encontrar o lado c***:***

De acordo com o ***teorema dos co-senos*** temos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a.b.\cos\gamma \quad \text{donde} \quad c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2a.b.\cos\gamma}\,.$$

Encontrar os ângulos α *e* β***:***

Pelo ***teorema dos senos*** temos:

$$\frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{b}{sen\,\beta} = \frac{c}{sen\,\gamma} = 2R\,.$$

$$\frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{c}{sen\,\gamma} \Leftrightarrow \frac{a\,sen\,\gamma}{c} = sen\,\alpha \Leftrightarrow \alpha = (-1)^n \, arc\,sen\left(\frac{a\,sen\,\gamma}{c}\right) + \pi n\,,\ n \in Z.$$

Acontece que α é um ângulo do ΔABC e por isso é um ângulo positivo menor que π *radianos*.

Assim fazendo $n = 0$ temos que $\alpha = arc\,sen\left(\frac{a\,sen\,\gamma}{c}\right)$.

Analogamente encontramos β:

$$\beta = arc\,sen\left(\frac{b.\,sen\,\gamma}{c}\right).$$

Descobrir a altura h_c***, relativamente ao lado*** c***:***

Construímos a altura h_c e obtemos um triângulo rectângulo ΔCH_cB, recto em H_c, aplicando a razão trigonométrica do *seno* obtemos: $sen\,\beta = \frac{h_c}{a} \Leftrightarrow h_c = a\,sen\beta$.

Analogamente obtemos as outras duas alturas:

$$h_a = c.sen\,\beta \quad \text{e} \quad h_b = a\,sen\gamma.$$

De acordo com o teorema dos senos, são iguais:

$$\frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{c}{sen\gamma} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{sen\,\alpha}{sen\gamma} \Leftrightarrow a\,sen\gamma = c\;sen\,\alpha.$$

Encontrar a bissectriz do ângulo γ***:***

Consideremos o ΔBCB_C, onde CB_C é a bissectriz do ângulo γ.

Conhecendo agora dois ângulos $\frac{\gamma}{2}$ e β e um lado a, podemos aplicar o ***teorema dos senos***, sabemos ainda que o terceiro ângulo $\angle CB_CB$ é $\pi - \left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right)$.

Assim,

$$\frac{b_c}{sen\,\beta} = \frac{a}{sen\left[\pi - \left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right)\right]}$$

donde resulta que:

$$b_c = \frac{a.sen\,\beta}{sen\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right)}.$$

Consideremos o ΔBCB_B, onde $BB_B\,(b_b)$ é a bissectriz do ângulo β, então,

$$\frac{b_b}{sen\gamma} = \frac{a}{sen\left[\pi - \left(\frac{\beta}{2} + \gamma\right)\right]} \Leftrightarrow b_b = \frac{a.sen\gamma}{sen\left(\frac{\beta}{2} + \gamma\right)}.$$

Consideremos o ΔAB_AC, onde $AB_A\,(b_a)$ é a bissectriz do ângulo α, então

$$\frac{b_a}{sen\gamma} = \frac{b}{sen\left[\pi - \left(\gamma + \frac{\alpha}{2}\right)\right]} \Leftrightarrow b_a = \frac{b.sen\gamma}{sen\left(\gamma + \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Encontrar a mediana CM_C ou seja m_c:

Seja M_C, o ponto médio de BA e seja m_c a mediana CM_C, que podemos considerar como um lado do ΔCBM_C, não podemos aplicar o teorema dos senos pois só conhecemos ângulo β. Mas, conhecemos dois lados a ; $\frac{c}{2}$ e o ângulo β.

Então pelo ***teorema dos co-senos:***

$$m_c^{\,2} = a^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2.a.\frac{c}{2}.\cos\beta \Leftrightarrow m_c = \frac{\sqrt{4a^2 + c^2 - 4.a.c.\cos\beta}}{2}.$$

Analogamente se tem, as medianas m_a e m_b:

$$m_a = \frac{\sqrt{a^2 + 4b^2 - 4.a.b.\cos\gamma}}{2} \quad \text{e} \quad m_b = \frac{\sqrt{4a^2 + b^2 - 4.a.b.\cos\gamma}}{2}.$$

Encontrar R – o Raio da circunferência circunscrita:

Seja R o raio da circunferência circunscrita, que por definição o seu centro resulta da intersecção das mediatrizes.

Pelo ***teorema dos senos completo,*** *sabemos* que

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma} = 2R.$$

De qualquer uma das relações do teorema encontramos o valor de R,

$$R = \frac{c}{2sen\gamma} \quad \text{ou} \quad R = \frac{b}{2sen\beta} \quad \text{ou} \quad R = \frac{a}{2sen\alpha}.$$

Encontrar r – o raio da circunferência inscrita:

Seja r o raio da circunferência inscrita, cujo centro resulta da intersecção das bissectrizes *(bastam duas)* b_a *e* b_c, por exemplo.

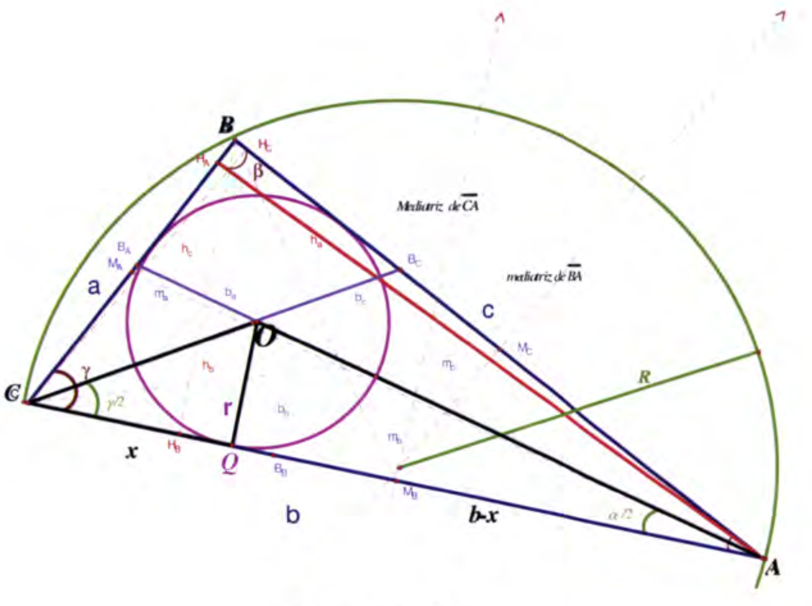


figura 6.15

O raio é perpendicular ao lado do triângulo no ponto de tangencia da circunferência.

O centro da circunferência inscrita resulta da intersecção das bissectrizes.

Sejam os triângulos ΔCOQ e ΔQOA , designemos por $x = \overline{CQ}$ logo $\overline{QA} = b - x$.

Do triângulo ΔCOQ temos: $r = x.\,tg\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)$, e do triângulo ΔQOA temos: $r = (b - x).tg\dfrac{\alpha}{2}$, podemos igualar as duas expressões uma vez que as mesmas têm o mesmo valor para o raio.

Assim,

$$x.tg\frac{\gamma}{2}=(b-x).tg\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow x.tg\frac{\gamma}{2}+x.tg\frac{\alpha}{2}=b.tg\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow x=\frac{b.tg\frac{\alpha}{2}}{tg\frac{\gamma}{2}+tg\frac{\alpha}{2}}$$

$$r=x\,.\,tg\,\frac{\gamma}{2} \text{ ou seja, } r=b.\frac{tg\frac{\alpha}{2}\,.\,tg\frac{\gamma}{2}}{tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\gamma}{2}}.$$

Analogamente,

$$r=a.\frac{tg\frac{\beta}{2}\,.\,tg\frac{\gamma}{2}}{tg\frac{\beta}{2}+tg\frac{\gamma}{2}} \quad \text{e} \quad r=c.\frac{tg\frac{\alpha}{2}\,.\,tg\frac{\beta}{2}}{tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\beta}{2}}.$$

A partir destas relações podemos deduzir, que para qualquer triângulo arbitrário é válida a seguinte igualdade,

$$a.\frac{tg\frac{\beta}{2}\,.\,tg\frac{\gamma}{2}}{tg\frac{\beta}{2}+tg\frac{\gamma}{2}}=b.\frac{tg\frac{\alpha}{2}\,.\,tg\frac{\gamma}{2}}{tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\gamma}{2}}=c.\frac{tg\frac{\alpha}{2}\,.\,tg\frac{\beta}{2}}{tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\beta}{2}}$$

Claro que podemos "brincar" com um problema deste género, seria interessante encontrar novamente todos os elementos do triângulo mas agora conhecendo por exemplo, os ângulos α e β e o raio r da circunferência inscrita.

Após a resolução deste problema com relação a todos os elementos do triângulo, observámos que a bissectriz b_c está entre a altura h_c e a mediana m_c em relação ao ângulo γ.

Assim como para os outros dois ângulos também se verifica esta relação, propomos o seguinte problema relacionado com a disposição da bissectriz, da altura e da mediana relativo ao mesmo vértice num triângulo arbitrário.

Mas antes necessitamos do seguinte resultado:

Num triângulo ΔABC com ângulos α, β e γ arbitrários (todos agudos ou um deles obtuso) então ao lado maior corresponde o maior ângulo oposto.

Assim: Se a relação entre os lados for: $a > c > b$ **então** $\alpha > \gamma > \beta$**, isto é,**

$$a > c > b \Rightarrow \alpha > \gamma > \beta .$$

Considerando $b > a \Rightarrow \beta > \alpha$

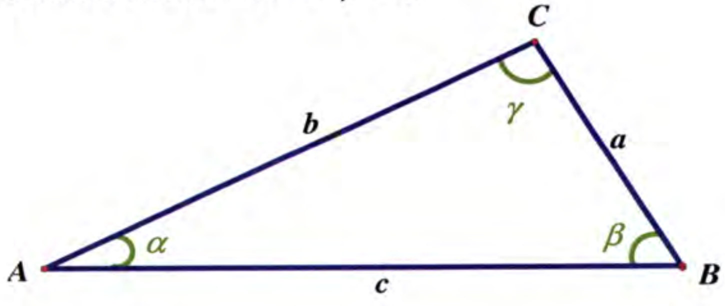


figura 6.16

Pelo teorema dos Senos completo sabe-se que

$$\frac{b}{sen\,\beta} = \frac{a}{sen\,\alpha} = 2R$$

$$sen\,\beta = \frac{b}{2R} \quad \text{e} \quad sen\,\alpha = \frac{a}{2R}$$

1ª Situação: **Sejam** α *e* β **ângulos agudos.**

Como $b > a$ então $\frac{b}{2R} > \frac{a}{2R}$, então $sen\beta > sen\alpha$ como α *e* β pertencem ao primeiro quadrante, sabemos que o seno é crescente no primeiro quadrante.

Logo,

$$\text{se } \beta > \alpha \iff sen\,\beta > sen\,\alpha$$

Por isso concluímos que se

$$sen\,\beta > sen\,\alpha \Rightarrow \beta > \alpha$$

2ª Situação:

Seja β um ângulo obtuso e claro que $\beta > \alpha$, conforme a figura 6.17

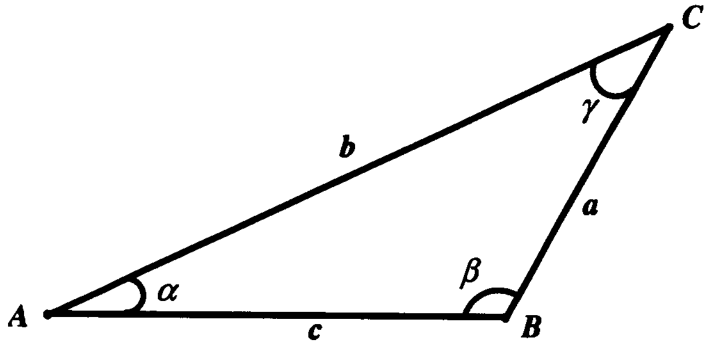


figura 6.17

Sabemos que $sen\,\beta = sen(180° - \beta)$ e é evidente que $sen(180° - \beta)$ é agudo.

Como β é obtuso, então $180° - \beta$ é agudo e por isso $180° - \beta$ está no primeiro quadrante.

Então comparemos, $sen(180° - \beta)$ com $sen\,\alpha$:

$$\alpha \text{ e } \beta \in \Delta ABC \Rightarrow \alpha + \beta < 180° \Rightarrow 180° - \beta > \alpha.$$

Visto que $(180° - \beta)$ e $\alpha \in I°\,Quadrante \Rightarrow sen(180° - \beta) > sen\,\alpha$.

Assim, como $sen\,\beta = sen(180° - \beta) > sen\,\alpha \Rightarrow sen\,\beta > sen\,\alpha$ apesar de $\beta \in II°\,Quadrante$.

§ Exemplo de Aplicação 3

Seja ΔABC, um triângulo arbitrário qualquer.

Mostre que cada bissectriz se encontra sempre entre a altura e a mediana relativas ao mesmo vértice.

Resolução:

Considere os triângulos das figuras 6.18 e 6.19, de lados $a, b\ e\ c$ e ângulos opostos a esses lados $\alpha,\ \beta\ e\ \gamma$, respectivamente.

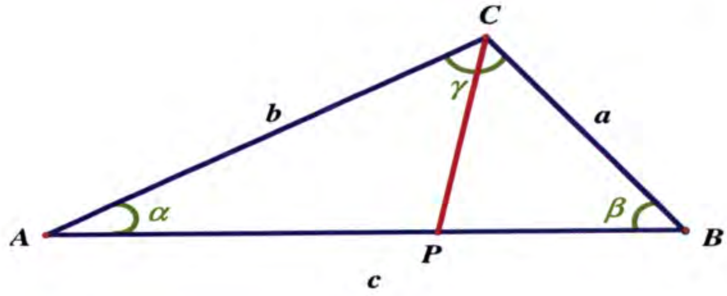


figura 6.18

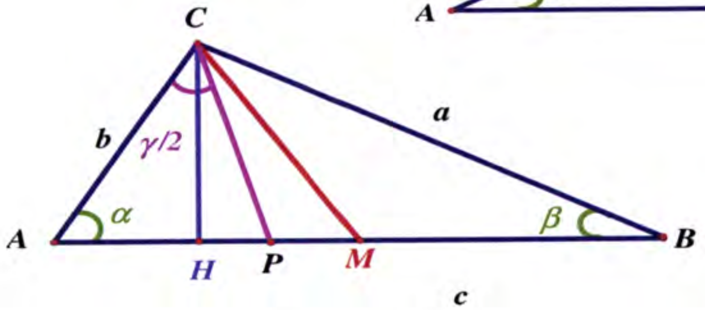


figura 6.19

Vamos considerar duas situações, a primeira em que $b > a$ *(figura 6.18)* e outra em que $b < a$ *(figura 6.19)*.

Seja então $b > a$

Qual a posição da bissectriz em relação à mediana?

Seja $\overline{CP}$ a bissectriz em relação ao ângulo γ.

De acordo com a propriedade das bissectrizes sabemos que, $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \dfrac{b}{a}$ e como por hipótese, $b > a$ então, $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PB}} > 1$ daqui é evidente que, $\overline{AP} > \overline{PB}$.

A mediana por definição divide o lado oposto ao ângulo γ (neste caso, o lado é $\overline{AB} = c$) em partes iguais.

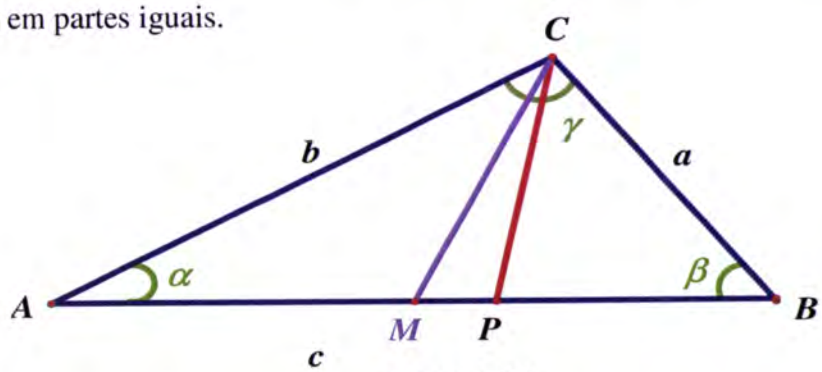


figura 6.20

Como $\overline{AM} = \overline{MB}$ e $\overline{AP} > \overline{PB}$ então $\overline{AB} = 2\,\overline{AM}$ também

$$\overline{AB} = \overline{AP} + \overline{PB} < \overline{AP} + \overline{AP} = 2\overline{AP} \quad (pois\ \overline{AP} > \overline{PB}) \text{ então } \overline{AB} < 2\overline{AP}$$

$$2\overline{AM} < 2\overline{AP} \Rightarrow \overline{AM} < \overline{AP}.$$

Daqui se conclui que o ponto M se situa à esquerda do ponto P.

Logo a mediana fica à esquerda da bissectriz.

Qual a posição da bissectriz em relação à altura?

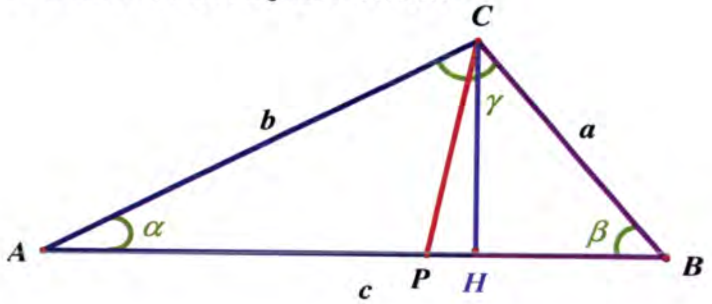


figura 6.21

Consideramos os triângulos ΔACH e ΔHCB em que $\angle AHC$ é recto.

Como $b > a$ então $\beta > \alpha$

$$\angle ACH = 90^{\circ} - \alpha > 90^{\circ} - \beta = \angle HCB \Rightarrow \angle ACH > \angle HCB.$$

Seja P um ponto de intersecção da bissectriz com lado $\overline{AB}$ e $\gamma = 2 \times \angle ACP$.

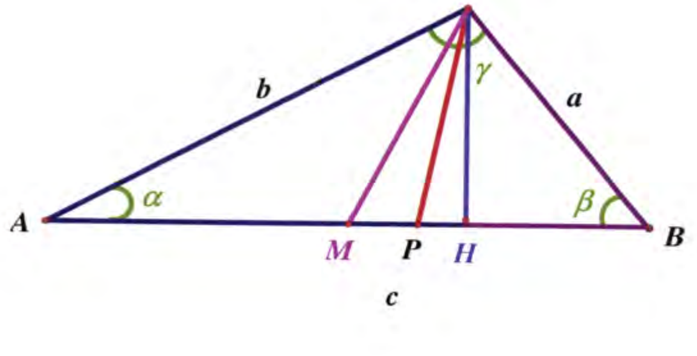
Mas também $\gamma = \angle ACH + \angle HCB < 2 \times \angle ACH$ pois $\angle ACH > \angle HCB$.

Daqui obtemos $2 \times \angle ACP < 2 \times \angle ACH$ donde $\angle ACP < \angle ACH$.

Então o segmento de recta $\overline{CP}$ fica à esquerda do segmento de recta $\overline{CH}$ ou seja a bissectriz encontra-se à esquerda da altura.

Vimos que a mediana fica ao lado esquerdo da bissectriz e que a bissectriz fica ao lado esquerdo da altura, conforme nos mostra a figura 6.22.

figura 6.22



Considerando agora a figura 6.19 se mudarmos a notação dos ângulos de α para β e β para α, obtemos novamente que os lados correspondentes tenham a relação $b > a$ e chegamos à situação da figura 6.18. Por isso, neste teorema não é importante separar as situações $b > a$ ou $b < a$, pois a bissectriz está sempre entre a mediana e a altura. Claro que na situação da figura 6.19 a mediana está à direita e a altura à esquerda da bissectriz mas obedece às condições do teorema que nos diz que, ***"cada bissectriz encontra-se sempre entre a altura e a mediana relativas ao mesmo vértice".***

Para finalizar este capítulo, propomos a resolução de um problema geométrico cujo método de resolução se baseia na aplicação na teoria de extremos de uma função de uma variável.

§ Exemplo de Aplicação 4

Quais deverão ser as dimensões de um rectângulo inscrito num segmento de circunferência para que esse seja o rectângulo de maior área?

São dados do problema, o raio R e o ângulo α. O arco correspondente ao ângulo ao centro é inferior a uma semi-circunferência.

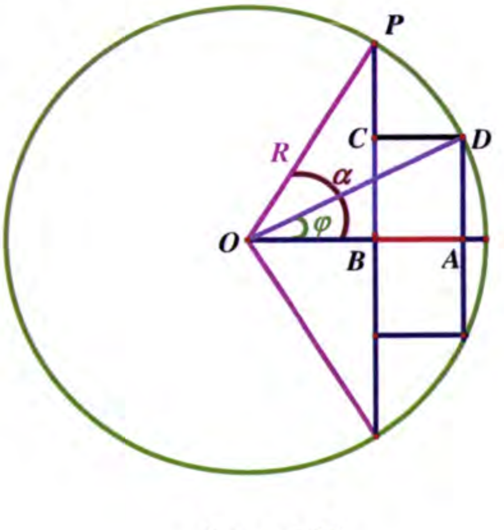


figura 6.23

Resolução:

Designamos por $\overline{AB}$ a largura do rectângulo e por $\overline{BC}$ metade do comprimento do rectângulo que pretendemos.

Seja $R = \overline{OP} = \overline{OD}$ e $\angle\ POA = \alpha$.

Seja φ o ângulo ao centro do ΔAOD, qual deverá ser o valor de φ para que o rectângulo inscrito na circunferência seja o maior possível?

A função $f(\varphi)$ que designa a área do rectângulo é

$$f(\varphi) = A_{[ABCD]} = \overline{AD} \times \overline{AB}.$$

Pelo triângulo ΔAOD tem-se:

$$sen\,\varphi = \frac{\overline{AD}}{R} \Leftrightarrow \overline{AD} = R.sen\,\varphi \quad \text{e} \quad \cos\varphi = \frac{\overline{OA}}{R} \Leftrightarrow \overline{OA} = R.\cos\varphi.$$

Ora, $\overline{AB} = \overline{OA} - \overline{OB}$, então pelo triângulo ΔOBP tem-se

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OB}}{R} \Leftrightarrow \overline{OB} = R.\cos\alpha$$

assim,

$$\overline{AB} = R.(\cos\varphi - \cos\alpha).$$

Como $f(\varphi) = A_{[ABCD]} = \overline{AD} \times \overline{AB}$ então,

$$f(\varphi) = A_{[ABCD]} = R.sen\,\varphi\,.\,R\,.(\cos\varphi - \cos\alpha) = R^2.\left(\frac{1}{2}sen\,2\varphi - sen\,\varphi.\cos\alpha\right).$$

Por definição sabe-se que se f é derivável num intervalo aberto $E =]a,b[$ contendo c e $f'(c) = 0$ e ainda que $f'' < 0$, então f tem um máximo relativo em c.

Não esquecendo que R *e* α são constantes, então

$$f'(\varphi) = \frac{1}{2}R^2.2\cos 2\varphi - R^2\cos\alpha.\cos\varphi = R^2.(\cos 2\varphi - \cos\alpha.\cos\varphi)$$

$f'(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \cos 2\varphi - \cos\alpha.\cos\varphi = 0$, sabe-se que $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$ então

$$2\cos^2\varphi - 1 - \cos\alpha.\cos\varphi = 0\,.$$

Fazendo a substituição, $t = \cos\varphi$ tem-se,

$$2t^2 - \cos\alpha.t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha + 8}}{4}.$$

Mas $t = \dfrac{\cos\alpha - \sqrt{\cos^2\alpha + 8}}{4}$ não é solução da solução pois $|t| = |\cos\varphi| \le 1$. De facto $0 < \alpha < 90^\circ \Rightarrow \varphi < 90^\circ$ então $\varphi \in 1^\circ\, quadrante$, portanto $\cos\varphi > 0$ neste caso $0 < t < 1$ como $t = \dfrac{\cos\alpha - \sqrt{\cos^2\alpha + 8}}{4} < 0$ ou seja, neste caso t não é solução da equação.

Agora seja $t = \dfrac{\cos\alpha + \sqrt{\cos^2\alpha + 8}}{4}$ é *ponto crítico* porque

$$f''(\varphi) = \left(R^2.\cos 2\varphi - R^2.\cos\varphi.\cos\alpha\right)' = -2R^2.sen\,2\varphi + R^2.\cos\alpha.sen\varphi = R^2.sen\varphi(\cos\alpha - 4\cos\varphi)$$

$\varphi \in 1^\circ\, quadrante \Rightarrow sen\varphi > 0$.

Claro que $R^2 > 0$, assim apenas se tem que estudar o sinal de $\cos\alpha - 4\cos\varphi$,

$$\cos\alpha - 4\cos\varphi = \cos\alpha - 4\left(\frac{\cos\alpha + \sqrt{\cos^2\alpha + 8}}{4}\right) = -\frac{\sqrt{\cos^2\alpha + 8}}{4} < 0\,.$$

Como $f'' < 0$, a área do rectângulo é máxima quando

$$\cos\varphi = \frac{\cos\alpha + \sqrt{\cos^2\alpha + 8}}{4} \Leftrightarrow \varphi = arc\cos\left(\frac{\cos\alpha + \sqrt{\cos^2\alpha + 8}}{4}\right).$$

Assim, relativamente à largura e comprimento temos que $\overline{AB} = R(\cos\varphi - \cos\alpha)$ e $2\,\overline{BC} = 2R.sen\varphi$, respectivamente.

***Caso particular:* O segmento circular coincide com um semicírculo.**

Então $\alpha = 180^\circ$, logo

$$\cos\varphi = \frac{\cos 180^\circ + \sqrt{(\cos 180^\circ)^2 + 8}}{4} \Leftrightarrow \cos\varphi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Neste caso, a largura e o comprimento são $\overline{AB} = R\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\pi\right) = \frac{3}{2}R$ e o $2\overline{BC} = 2R.sen\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.R$ respectivamente.

Capítulo 7

Aplicações a problemas de Topografia e Física

Neste capítulo vamos mostrar a aplicação prática do Teorema dos Senos e do Teorema dos Co-senos no estudo de problemas de Topografia e de Física.

Os exemplos propostos foram escolhidos com o objectivo de serem de fácil entendimento para os alunos do Ensino Secundário. Estes podem ser usados para serem leccionados aos alunos como actividades de campo.

§7.1 Problemas de Topografia.

Os teodolitos são os aparelhos mais comuns em topografia. Estes aparelhos medem ângulos verticais e horizontais. Os teodolitos mais modernos já possuem distanciómetro incorporado, estes aparelhos são designados por estações totais. O aparelho que aparece nas figuras 7.1 e 7.3 é uma "estação total".

Vamos supor que o aparelho que temos só tem capacidade para nos fornecer a amplitude dos ângulos.

Consideramos que ao serem fixados dois ângulos de um triângulo, o terceiro ângulo, se fosse observado, teria por medida o suplemento da soma dos outros dois.

Quanto às distâncias (conhecidas, ou a calcular), consideramo-las sempre reduzidas ao horizonte ou seja no plano horizontal. Assim, os ângulos que intervêm na resolução dos problemas desde que não sejam de inclinação, são sempre ângulos considerados neste plano.

§ Exemplo de aplicação 1

Defina a distância entre o ponto acessível A e o ponto B, inacessível, que se encontra no outro lado da ria.

figura 7.1

Fotografia da Ria Formosa – Ludo – Vista Serra Algarvia

Escolhemos um ponto C alcançável e fixamo-lo, depois medimos a distância do segmento $[AC]$ a que chamamos base. Então seja $\overline{AC} = b$.

Para se proceder à medição dos ângulos, coloca-se o aparelho em cada um dos pontos de apoio A e C e visualizando o vértice B, faz-se as leituras das amplitudes dos ângulos $\angle BAC$ e $\angle BCA$.

Designemos por α o ângulo $\angle BAC$; por β o ângulo $\angle ABC$ e por γ o ângulo $\angle ACB$.

Assim, no triângulo ΔABC conhecemos o valor para o comprimento do lado $\overline{AC} = b$ e conhecemos as amplitudes dos ângulos α e γ .

Designemos o lado desconhecido $\overline{AB}$ por c, e vamos então encontrá-lo com a ajuda do Teorema dos Senos.

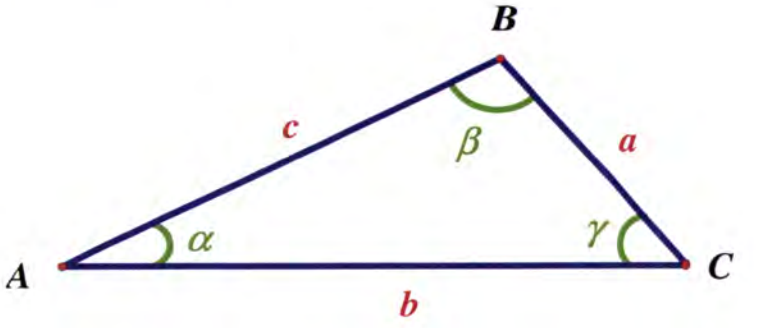


figura 7.2

Sabemos que, $\beta = 180^o - (\alpha + \gamma)$, então

$$sen\,\beta = sen\left[180^\circ - (\alpha + \gamma)\right] = sen(\alpha + \gamma)$$

$$\frac{c}{sen\,\gamma} = \frac{b}{sen\,\beta} \quad \text{ou seja} \quad \frac{c}{sen\,\gamma} = \frac{b}{sen(\alpha + \gamma)}.$$

Assim,

$$\overline{AB} = c = \frac{b\,sen\,\gamma}{sen(\alpha + \gamma)} \quad \text{com } b,\ \alpha \text{ e } \gamma \text{ conhecidos.}$$

§ Exemplode aplicação 2

Defina a distância entre os dois objectos A e B, não alcançáveis, conforme indicado na figura 7.3.

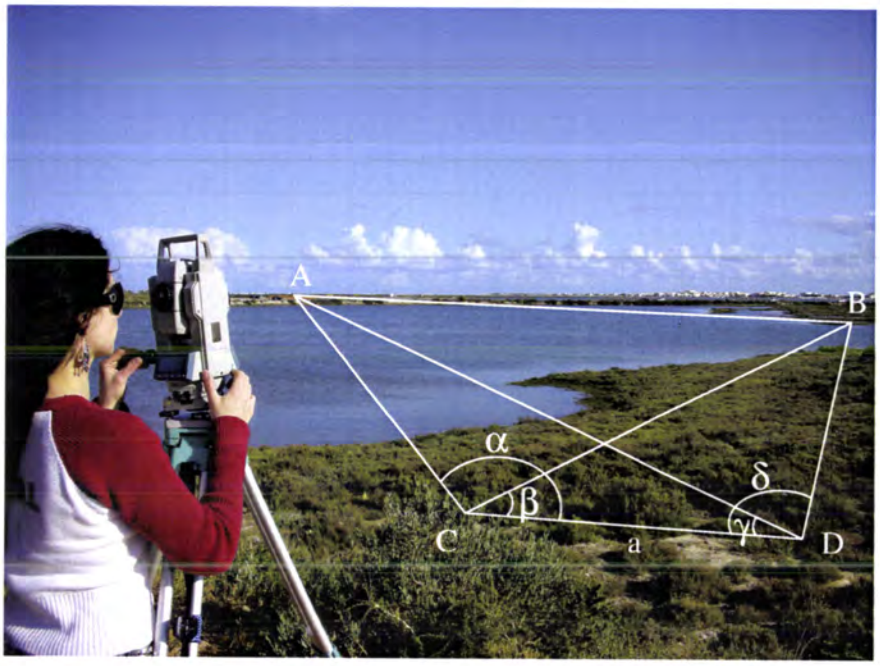


figura 7.3

Fotografia da Ria Formosa – Ludo – Vista Ilha de Faro

Escolhemos dois pontos ao nosso alcance, C e D, a partir dos quais se podem avistar os pontos A e B.

Em seguida, medimos a distância entre os pontos C e D, a qual designamos por a, depois com o auxilio do aparelho determinamos as amplitudes dos ângulos $\angle ACD$; $\angle ADC$; $\angle BCD$ e $\angle CDB$.

Designemos por $\alpha = \angle ACD$; $\gamma = \angle ADC$; $\beta = \angle BCD$ e $\delta = \angle CDB$.

Agora, com base nos cálculos do problema anterior, ou seja por intermédio do teorema dos senos, determina-se as distâncias $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.

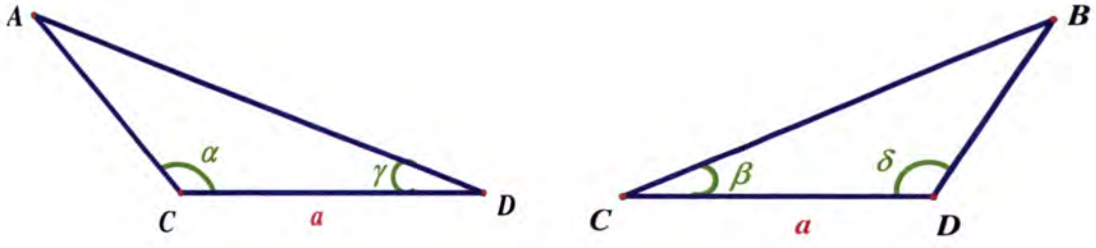


figura 7.4

$$\frac{\overline{AC}}{sen\gamma}=\frac{a}{sen(\alpha+\gamma)} \quad e \quad \frac{\overline{BC}}{sen\delta}=\frac{a}{sen(\beta+\delta)}$$

$$\overline{AC}=\frac{a\,sen\,\gamma}{sen(\gamma+\alpha)} \quad e \quad \overline{BC}=\frac{a\,sen\,\delta}{sen(\beta+\delta)} \quad .$$

Agora consideramos o triângulo ΔABC, em que estão conhecidas as medidas dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ e do ângulo entre eles formado que é igual a $\alpha-\beta$.

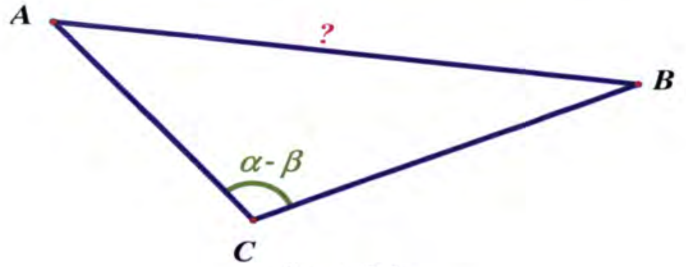


figura 7.5

Aplicando o teorema do co-senos temos que

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{CB}^2-2\overline{AC}.\overline{CB}.\cos(\alpha-\beta)$$

então

$$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2.\overline{BC}.\overline{AC}.\cos(\alpha-\beta)} \quad .$$

§ 7.2 Uma aplicação na Física

Descartes foi um dos Matemáticos que se dedicaram ao estudo da Óptica, tendo aplicado, neste domínio da Física, conhecimentos de Trigonometria.

Um exemplo ilustrativo é a Lei de Snell-Decartes, que relaciona o ângulo de incidência com o ângulo de refracção quando o raio luminoso passa a fronteira entre dois meios diferentes.

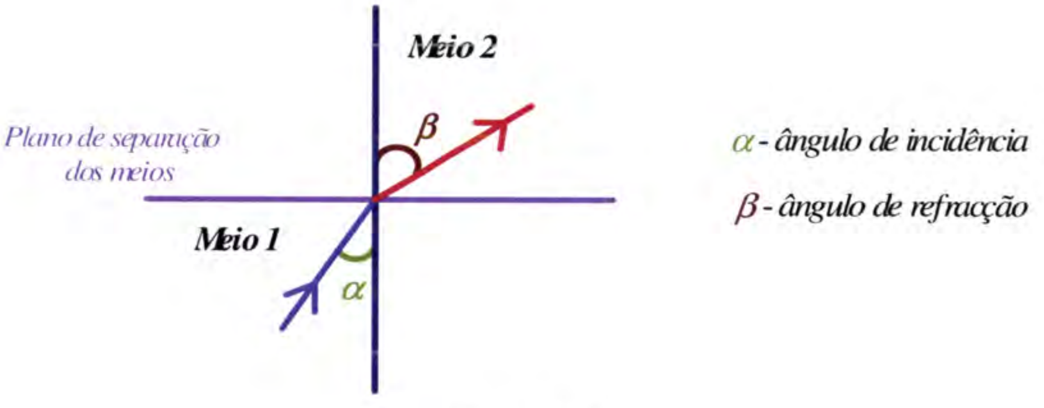


figura 7.6

O fenómeno da refracção foi estudado ao longo dos séculos, mas foi apenas no séc. XVII que aquela fórmula foi fixada com rigor, em simultâneo, por Descartes e pelo geómetra holandês Willebrord Snell.

O arco-íris é um fenómeno explicado pela Lei de Snell-Descartes, pois consiste na decomposição da luz branca do sol ao atravessar as gotículas da chuva.

A **refracção** ocorre quando um feixe luminoso incide numa superfície de separação de dois meios transparentes, penetrando no segundo e mudando de direcção de propagação. Isto ocorre porque a velocidade de propagação da luz altera-se, assim como o seu comprimento de onda. No entanto, a frequência mantém-se nos diferentes meios de propagação.

Este fenómeno obedece à seguinte lei:

§ Lei de Snell da refracção – o quociente entre o seno do ângulo de incidência e o seno do ângulo de refracção é constante para cada meio e igual à razão entre o índice de refracção do segundo meio e o do primeiro.

$$\frac{sen(\theta_i)}{sen(\theta_r)} = \frac{n_2}{n_1}.$$

A razão $\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$ representa o índice de refracção relativo entre os dois meios, sendo o inverso da razão entre as velocidades de propagação da luz nos mesmos $\frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}$.

O *índice de refracção*, depende da natureza do meio e da "cor" (frequência) dos raios.

§ Exemplo de aplicação

Sobre uma lâmina de faces paralelas (que se apresenta na figura 7.7) fez-se incidir um raio laser.

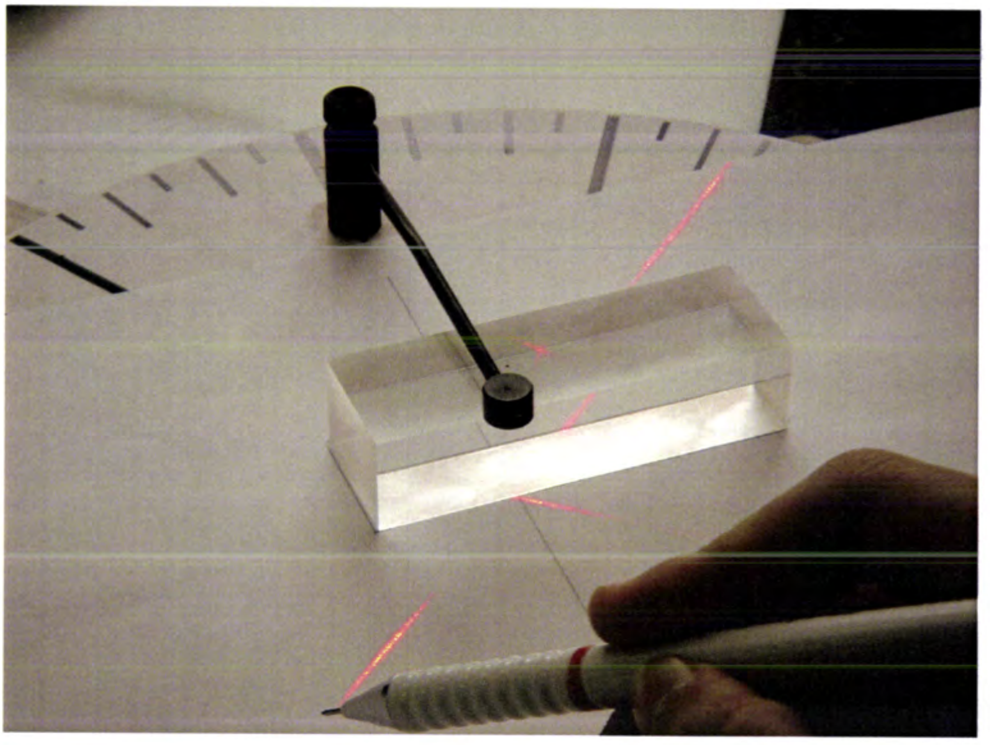


figura 7.7

Fotografia da Refracção de um feixe de raio laser numa lamina de faces paralelas

Designamos por α o ângulo de incidência do raio e por d a espessura da lâmina, conforme a figura 7.8.

Conhecidos os valores de α e d, calcular o desvio $\overline{BD}$ deste raio depois de passar através lâmina de faces paralelas.

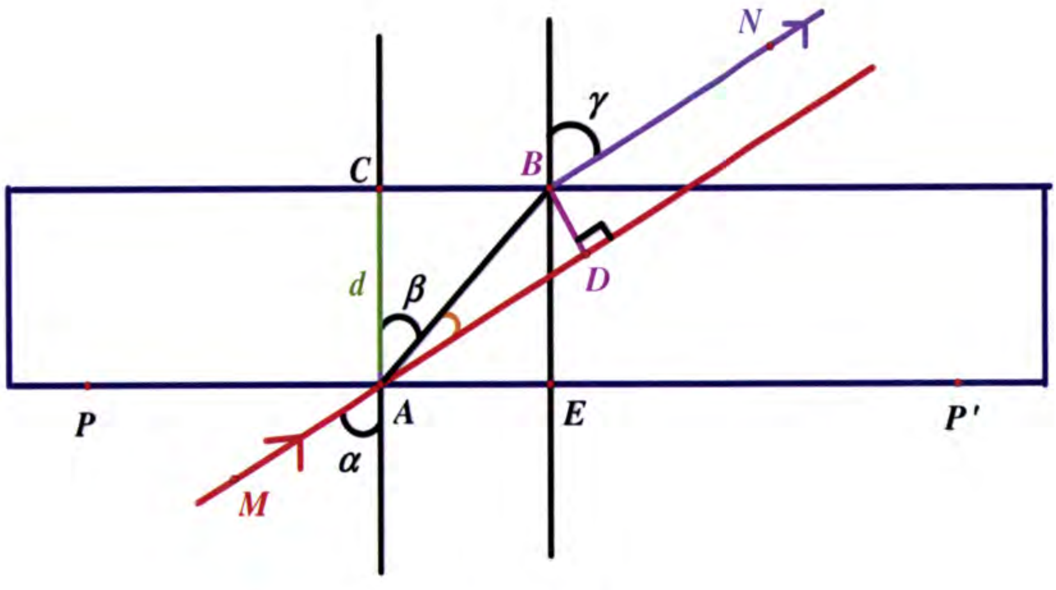


figura 7.8

Esquema da refracção do feixe de raio laser na lamina de faces paralelas.

Designa-se por MA o raio laser incidente na base inferior da lâmina (PP') e por BN o raio laser emergente. O raio MA ao incidir na lâmina no ponto A sofre um fenómeno de refracção, propagando-se na lâmina de vidro segundo uma nova direcção - AB.

Ao atingir o ponto B da superfície de separação vidro – ar, sofre uma nova refracção e imerge da lâmina segundo a direcção BN, (raio refractado).

Seja β o ângulo de refracção *(ar-vidro)* que a recta AB faz com a perpendicular AC e seja γ o ângulo de refracção *(vidro-ar)* formado pela recta BN e pela recta BE paralela à recta CA.

A partir da refracção da luz, temos que

$$\frac{sen\,\alpha}{sen\,\beta} = \frac{n_{vidro}}{n_{ar}} \quad e\ que \quad \frac{sen\,\beta}{sen\,\gamma} = \frac{n_{ar}}{n_{vidro}}\ .$$

Em regra considera-se que o índice de refracção do ar é aproximadamente 1.

Então $\frac{sen\,\alpha}{sen\,\beta}=\frac{n}{1}$ *e que* $\frac{sen\,\beta}{sen\,\gamma}=\frac{1}{n}$ em que n é o índice de refracção do vidro, portanto

$$sen\,\beta=\frac{sen\,\alpha}{n} \text{ e } sen\,\beta=\frac{sen\,\gamma}{n}.$$

Logo $sen\,\alpha=sen\,\gamma$ e como os ângulos α *e* γ de incidência e refracção respectivamente, são forçosamente agudos então $\alpha=\gamma$.

Consideremos agora o triângulo ΔCAB e aplicando a razão trigonométrica do co-seno, podemos dizer que, $\cos\beta=\frac{d}{\overline{AB}}$, entretanto já sabemos o valor do ângulo β pela relação $sen\,\beta=\frac{sen\,\alpha}{n_{vidro}}$.

Consideremos agora o triângulo ΔABD recto em D e vamos tentar encontrar o comprimento do desvio $\overline{BD}$.

Como ângulos verticalmente opostos são iguais, então $\alpha\cong\angle CAD$, logo $\angle BAD=\alpha-\beta$.

Por isso,

$$sen(\alpha-\beta)=\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}},$$

já sabemos que $\overline{AB}=\frac{d}{\cos\beta}$ então o deslocamento do raio de luz é

$$\overline{BD}=\overline{AB}.sen(\alpha-\beta)=\frac{d.sen(\alpha-\beta)}{\cos\beta}.$$

Logo o desvio é dado pela expressão

$$\overline{BD}=\frac{d.sen(\alpha-\beta)}{\cos\beta}.$$

Capítulo 8

Relações trigonométricas na teoria de Números Complexos.

Os alunos do Ensino Secundário abordam o tema dos "Números Complexos" no 12º Ano de Escolaridade, realizam a operações (adição, subtracção, multiplicação e divisão) com números complexos na forma algébrica, conhecem os conceitos de simétrico, inverso e conjugado de um número complexo e representam geometricamente os números complexos.

Sabem escrever um número complexo na forma trigonométrica e realizam operações com números complexos na forma trigonométrica. Calculam as n raízes de índice n de um número complexo através da fórmula de Moivre generalizada e fazem a sua construção geométrica.

Neste capítulo pretendemos mostrar que as fórmulas trigonométricas estudadas no primeiro capítulo tem aplicação no campo dos números complexos. Demonstramos as fórmulas de Euler, a forma exponencial dos números complexos e a fórmula de Moivre e apresentamos também alguns exemplos onde aplicamos algumas das já referidas fórmulas trigonométricas.

Os números complexos aparecem como uma extensão dos números reais e o seu conjunto representa-se por C. Um elemento de C representa-se por $a+bi$, com $a,b\in$ R na forma algébrica. Diz-se que (a) é a parte real de z e escreve-se $\text{Re}(z)=a$, (bi) é a parte imaginária de z, (i) é a unidade imaginária e (b) é o coeficiente da parte imaginária e escreve-se $\text{Im}(z) = b$.

Se a parte real for nula e o coeficiente da parte imaginária não nulo, o número diz-se imaginário puro. Se a parte imaginária for nula, o número é real.

No que diz respeito à representação geométrica dos números complexos, a parte imaginária do número representa-se no eixo dos yy, chamado eixo imaginário e a parte real do número representa-se no eixo dos xx, chamado eixo real.

§ 8.1 Fórmulas de Euler

A forma trigonométrica dos números complexos pode exprimir-se numa função exponencial, por esta razão vamos recordar os desenvolvimentos em séries de potências de x *(Maclaurin)* das funções: e^x, $sen\,x$ *e* $\cos x$.

Assim temos:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \tag{8.1}$$

$$sen\,x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ldots \tag{8.2}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \tag{8.3}$$

Na fórmula (8.1) podemos substituir x por ix, então temos:

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^3x^3}{3!} + \frac{i^4x^4}{4!} + \ldots$$

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

$$e^{ix} = (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots) + i(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots).$$

Observando (8.2) e (8.3), podemos escrever:

$$e^{ix} = \cos x + i\,sen\,x \ . \qquad (8.4)$$

Também na fórmula (8.1) podemos substituir x por ($-ix$), e então temos:

$$e^{-ix} = 1 - ix + \frac{(-ix)^2}{2!} + \frac{(-ix)^3}{3!} + \frac{(-ix)^4}{4!} + \dots$$

$$e^{-ix} = 1 - ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$e^{-ix} = (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots) - i(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots)$$

Observando atentamente (8.2) e (8.3), vericamos que:

$$e^{-ix} = \cos x - i\,sen\,x. \qquad (8.5)$$

Se somarmos e subtrairmos (8.4) e (8.5) por esta ordem, obtemos:

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x \Leftrightarrow \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad (8.6)$$

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2i\,sen\,x \Leftrightarrow sen\,x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \qquad (8.7)$$

E desta forma, as duas fórmulas anteriores, que exprimem o $\cos x$ e $sen\,x$ na função exponencial são conhecidas por *Fórmulas de Euler.*

§ 8.2 Forma exponencial dos números complexos

Recorrendo aos conhecimentos de ângulos associados conseguimos que todos os complexos se reduzam à forma trigonométrica, um número complexo escrito na forma trigonométrica é $z = \rho.(\cos\alpha + i.sen\,\alpha)$ com $\rho \in \Re_0^+$ e como $e^{ix} = \cos x + i\,sen\,x$, obtemos,

$$z = \rho.e^{i\alpha}$$

§ Exemplo de aplicação 1

Determine o módulo e o argumento do complexo $z = 1 - \cos x + i\, sen\, x$.

Resolução:

Se um número complexo está na forma algébrica $z = a + bi$, o seu módulo é dado por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e o argumento por $tg\,\theta = \dfrac{b}{a}$.

Se o número complexo está na forma trigonométrica $z = \rho.(\cos\theta + i\, sen\theta)$, o seu módulo é $|z| = \rho$ e o seu argumento é θou seja $\arg(z) = \theta$.

O complexo z, na forma trigonométrica, escreve-se $z = (1 - \cos x) + i\, sen\, x$.

Seja $|z|$o módulo do complexo z, a partir da fórmula algébrica temos

$$|z| = \sqrt{(1-\cos x)^2 + sen^2 x} = \sqrt{1 - 2\cos x + \cos^2 x + sen^2 x}$$

por (1.20)

$$|z| = \sqrt{2\,(1 - \cos x)} = \sqrt{2.2 sen^2 \frac{x}{2}} = 2\left| sen\, \frac{x}{2} \right|.$$

Seja θ o argumento do complexo z, por (1.7) e por (1.20) então

$$tg\,\theta = \frac{sen\, x}{1 - \cos x} = \frac{2.sen\,\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2.sen^2\frac{x}{2}} = \cot g\,\frac{x}{2}$$

$$tg\,\theta = tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) \text{ ou seja, } \theta = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right).$$

Vamos resolver o mesmo problema utilizando outro método diferente.

Aplicando as fórmulas (1.7) e (1.20) podemos dizer que

$$z = 2 sen^2 \frac{x}{2} + 2i\, sen\, \frac{x}{2}\, \cos\, \frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = 2\, sen\frac{x}{2}\left(sen\frac{x}{2} + i\cos\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow z = 2sen\,\frac{x}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) + i\,sen\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)\right]$$

assim, o módulo é

$$|z| = 2\left|sen\frac{x}{2}\right| \text{ e o argumento é } \theta = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right).$$

§ Exemplo de aplicação 2

Determine o módulo e o argumento do número complexo

$$z = \sqrt{3} - i + 2\cos\theta + 2i\,sen\,\theta$$

Resolução:

O complexo $\sqrt{3} - i$ na forma trigonométrica escreve-se

$$\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\,sen\frac{11\pi}{6}\right)$$

pois $|z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$ e $tg\,\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $\theta \in 4^\circ$ quadrante logo

$\theta = -\frac{\pi}{6}$ ou seja $\theta = \frac{11\pi}{6}$.

Voltanto então ao complexo $z = \sqrt{3} - i + 2\cos\theta + 2i\,sen\,\theta$, temos que

$$z = 2\cos\frac{11\pi}{6} + 2i\,sen\frac{11\pi}{6} + 2\cos\theta + 2i\,sen\,\theta$$

$$z = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + \cos\theta\right) + 2i\left(sen\frac{11\pi}{6} + sen\,\theta\right).$$

Por (1.26) e (1.24) donde $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ e

$sen\,p + sen\,q = 2\,sen\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ podemos então escrever,

$$z=2\left(2\cos\frac{\frac{11\pi}{6}+\theta}{2}\cos\frac{\frac{11\pi}{6}-\theta}{2}+2i\,sen\frac{\frac{11\pi}{6}+\theta}{2}\cos\frac{\frac{11\pi}{6}-\theta}{2}\right)$$

colocando $\cos\frac{11\pi-6\theta}{12}$ em evidencia, vem que

$$z=4\cos\frac{11\pi-6\theta}{12}.cis\frac{11\pi+6\theta}{12}.$$

Logo podemos concluir que

$$|z|=\rho=4\left|\cos\frac{11\pi-6\theta}{12}\right| \text{ e } \arg(z)=\frac{11\pi+6\theta}{12}.$$

§ Exemplo de aplicação 3

Resolva a equação: $sen\,z=3$, considerando $z=x+yi$.

Resolução:

Pela fórmula de Euler (8.7) sabe-se que $sen\,x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$, então podemos dizer que

$$sen\,z=3 \Leftrightarrow \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=3 .$$

Efectuando cálculos simples no desenvolvimento da equação, obtemos

$$e^{iz}-\frac{1}{e^{iz}}=6i \Leftrightarrow e^{2iz}-1=6ie^{iz} \Leftrightarrow \left(e^{iz}\right)^2-6ie^{iz}-1=0.$$

Fazendo a substituição $e^{iz}=t$, obtemos uma equação simples do segundo grau.

$$t^2-6it-1=0.$$

Donde se obtém duas raízes imaginárias

$$t_{1,2}=3i\pm\sqrt{-9+1} \Leftrightarrow t_{1,2}=3i\pm 2\sqrt{2}i \Leftrightarrow t_{1,2}=(3\pm 2\sqrt{2})i.$$

Agora se $e^{iz} = t$, obtemos

$$e^{iz} = (3 \pm 2\sqrt{2})i.$$

Tanto $(3 + 2\sqrt{2})$ como $(3 - 2\sqrt{2})$ são números positivos, assim sendo, os números complexos $(3 \pm 2\sqrt{2})i$ são uns imaginários puros, cujos afixos se encontram situados no semi-eixo positivo oy, ou seja o argumento destes números complexos é $\frac{\pi}{2}$ *rad* e os módulos são $3 \pm 2\sqrt{2}$.

Assim,

$$\left|(3 \pm 2\sqrt{2})i\right| = 3 \pm 2\sqrt{2} \text{ e } \arg\left[(3 \pm 2\sqrt{2})i\right] = \frac{\pi}{2}.$$

Atendendo à definição de logaritmo, tem-se

$$e^{iz} = (3 \pm 2\sqrt{2})i \Leftrightarrow iz = Ln\left((3 \pm 2\sqrt{2})i\right).$$

Sabe-se que $Ln\ \xi = \ln|\xi| + i\, Arg\ \xi$, onde $Arg\ \xi = \arg \xi + 2k\pi$

assim de acordo com esta definição temos:

$$iz = Ln\left[\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right)i\right] = \ln\left|\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right)i\right| + i\, Arg\left[\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right) i\right]$$

ou seja,

$$iz = \ln(3 \pm 2\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right).$$

Multiplicando ambos os membros por (i) e simplificando, obtemos

$$-z = i.\ln(3 \pm 2\sqrt{2}) + i^2.\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \Leftrightarrow z = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) - i.\ln(3 \pm 2\sqrt{2})$$

A solução da equação $sent = 3$ é: $z = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) - i.\ln(3 \pm 2\sqrt{2})$.

§ Exemplo de aplicação 4

Calcule o módulo de z, considerando o complexo $z=\dfrac{a+b}{1+ab}$, com $a=cis\alpha$ e $b=cis\beta$.

Resolução:

Substituindo $a=cis\alpha$ e $b=cis\beta$ e especificando cis no complexo temos,

$$z=\frac{\cos\alpha+i\,sen\alpha+\cos\beta+i\,sen\beta}{1+(\cos\alpha+i\,sen\alpha)(\cos\beta+i\,sen\beta)},$$

no numerador agrupamos a parte real e a parte imaginária e no denominador aplicamos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, e obtemos

$$z=\frac{(\cos\alpha+\cos\beta)+i(sen\alpha+sen\beta)}{1+\cos\alpha\cos\beta+i\cos\alpha\,sen\beta+i\,sen\alpha\cos\beta-sen\alpha\,sen\beta}.$$

Agora no numerador aplicamos as fórmulas de transformação logarítmica da soma de co-senos (1.26) e da soma de senos (1.24) e no que diz respeito ao denominador, depois de aplicarmos a soma dos co-senos (1.2) e a soma dos senos (1.1) recorremos às fórmulas (1.19) e por (1.7) respectivamente

$$1+\cos 2x=2\cos^2 x \quad \text{e} \quad sen 2x=2\,sen x\cos x$$

assim,

$$z=\frac{(\cos\alpha+\cos\beta)+i(sen\alpha+sen\beta)}{1+\cos(\alpha+\beta)+i\,sen(\alpha+\beta)}=\frac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2i\,sen\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}+2i\,sen\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

Colocando em evidência, o termo comum nas duas partes da fracção, temos

$$z=\frac{2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+i\,sen\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+i\,sen\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

Assim para o módulo de z, temos

$$|z|=\left|\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\right|.$$

Para finalizar o capítulo vamos recordar a fórmula de Moivre generalizada para podermos resolver os dois exemplos de aplicação que apresentamos a seguir, esta fórmula é demonstrada nos manuais escolares adoptados no Ensino Secundário.

§ 8.3 Radiciação de números complexos

Fórmula de Moivre generalizada.

Dado um número complexo w, não nulo, tal que $w=\rho\, cis\,\theta$, a equação $z^n = w$ com $n\in N$ e $n\geq 2$, tem n soluções obtidas da seguinte forma:

Seja $z = r\, cis\,\alpha$

$$z^n = w \Leftrightarrow (r\, cis\,\alpha)^n = \rho\, cis\,\theta \Leftrightarrow r^n cis(n\alpha) = \rho\, cis\,\theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^n = \rho \\ n\alpha = \theta + 2k\pi \end{cases} \wedge \quad k\in Z \quad \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \alpha = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} \end{cases} \wedge \quad k\in Z.$$

Como não interessa repetir soluções, basta atribuir a k, n valores consecutivos, por exemplo, $k\in\{0, 1, 2, 3, ..., n-1\}$.

Assim, as n soluções da equação são:

$$z = \sqrt[n]{\rho}\; cis\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right),\quad k\in\{0, 1, 2, 3, ..., n-1\}.$$

Algumas características das soluções da equação $z^n = w$:

- Todas as soluções têm o mesmo módulo: $\sqrt[n]{\rho}$.

- No plano complexo, os respectivos afixos situam-se sobre uma circunferência de centro na origem do referencial e raio $\sqrt[n]{\rho}$.

- Os argumentos das n soluções estão em progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{n}$.

- No plano complexo, os afixos dividem a circunferência de centro na origem e raio $\sqrt[n]{\rho}$ em n partes iguais.

Das características anteriores conclui-se que, no plano complexo, as imagens geométricas das soluções da equação $z^n = w$ são os vértices de um polígono regular centrado na origem do referencial.

Fórmula de Moivre generalizada

Se $z = \rho\, cis\,\theta$ é um número complexo não nulo, então, tem n *raízes índice n* que são dadas por:

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\ cis\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right),\quad n \in \{0, 1,\ 2,\ ...,\ n-1\}. \tag{8.8}$$

§ Exemplo de aplicação 1

Calcule $\left(\dfrac{-\cos\alpha - i\,sen\,\alpha}{sen\,\alpha - i\cos\alpha} + \dfrac{\sqrt{3}.\,(i\,sen\,\alpha - \cos\alpha)}{\cos\alpha - i\,sen\,\alpha}\right)^{\frac{2}{3}}$.

Resolução:

Reduzindo os dois quocientes ao mesmo denominador e aplicando em seguida a propriedade distributiva da multiplicação, obtemos

$$\left(\frac{-\cos^2\alpha + i\,sen\,\alpha\,\cos\alpha - i\,sen\,\alpha\cos\alpha - sen^2\alpha + \sqrt{3}\,.\,i}{sen\,\alpha\cos\alpha - i\,sen^{\,2}\alpha - i\cos^2\alpha - sen\,\alpha\cos\alpha}\right)^{\frac{2}{3}}$$

simplificando a expressão, temos

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{-i}\right)^{\frac{2}{3}}$$

multiplicando ambos os termos da fracção pelo conjugado de $(-i)$,ou seja, (i) obtemos

$$\left(-\sqrt{3}-i\right)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{(-\sqrt{3}-i)^2}\,.$$

Passamos o número complexo da forma algébrica para a forma trigonométrica. Em seguida aplicamos a fórmula da potência,

$$\sqrt[3]{\left(2cis\frac{7\pi}{6}\right)^2}=\sqrt[3]{4\,cis\frac{7\pi}{3}}=\sqrt[3]{4\,cis\frac{\pi}{3}}$$

recorrendo à fórmula de Moivre generalizada

$$\sqrt[3]{4\,cis\frac{\pi}{3}}=\sqrt[3]{4}\,cis\,\frac{2k\pi+\frac{\pi}{3}}{3}\quad\wedge\ k\in\{0,1,2\}.$$

Assim, as soluções à nossa questão são:

se $k=0$ resulta o número complexo $z_0=\sqrt[3]{4}\,cis\frac{\pi}{9}$;

se $k=1$ resulta o número complexo $z_1=\sqrt[3]{4}\,cis\frac{7\pi}{9}$;

se $k=2$ resulta o número complexo $z_2=\sqrt[3]{4}\,cis\frac{13\pi}{9}$.

Por atribuição de qualquer outro valor inteiro a k resultava um dos três números complexos z_0, z_1 e z_2.

As imagens geométricas das soluções da equação são os vértices de um triângulo equilátero. Esses vértices situam-se sobre uma circunferência de centro na origem raio $\sqrt[3]{4}$ e os argumentos estão em progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{3}$.

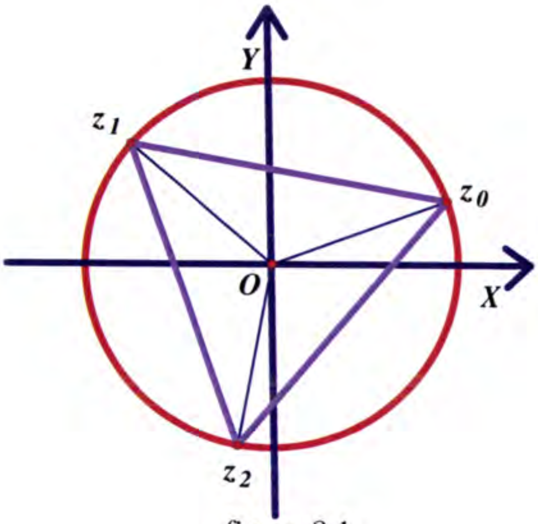


figura 8.1

§ Exemplo de aplicação 2

Determine as raízes da equação $z^6 - 2z^3\cos\theta + 1 = 0$.

Resolução:

Fazendo, $z^3 = t$ obtém-se a equação transformada,

$$t^2 - 2t\cos\theta + 1 = 0.$$

Calculando as raízes desta equação do segundo grau obtemos

$$t = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1} \Leftrightarrow t = \cos\theta \pm \sqrt{-(1-\cos^2\theta)} \Leftrightarrow t = \cos\theta \pm \sqrt{i^2 sen^2\theta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \cos\theta \pm i.sen\theta.$$

Substituindo em $z^3 = t$, temos

$$z^3 = \cos\theta + i\,sen\theta \quad \text{ou} \quad z^3 = \cos\theta - i\,sen\theta,$$

ou seja

$$z = \sqrt[3]{\cos\theta + i\,sen\theta} \quad \text{ou} \quad z = \sqrt[3]{\cos(-\theta) + i\,sen(-\theta)}$$

portanto

$$z = cis\frac{\theta + 2k\pi}{3} \quad \text{ou} \quad z = cis\frac{(-\theta) + 2k\pi}{3} \text{ com } k \in \{0,1,2\}.$$

Agora se $k = 0$ então $z_1 = cis\frac{\theta}{3}$ e $z_4 = cis(-\theta)$;

se $k = 1$ então $z_1 = cis\frac{\theta + 2\pi}{3}$ e $z_5 = cis\frac{-\theta + 2\pi}{3}$;

finalmente se $k = 2$ obtemos $z_3 = cis\frac{\theta + 4\pi}{3}$ $z_6 = cis\frac{-\theta + 4\pi}{3}$.

Conclusão

Neste trabalho foi proposto uma nova forma de apresentação do tema, onde foram mostradas uma variedade de questões que incluem os conceitos trigonométricos, tentando deste modo que os alunos compreendessem "*como, donde e porquê*" aparecem as relações trigonométricas.

Demonstrámos com abordagens distintas um conjunto de afirmações trigonométricas principais, apresentando-se em seguida, exemplos diversificados de aplicação dessas fórmulas, na resolução de problemas.

Este trabalho, pode servir também de material de apoio a professores do Ensino Básico/Secundário, que queiram enriquecer e aprofundar um pouco mais os seus conhecimentos científicos nesta área.

A realização deste trabalho contribuiu para o reforço das minhas competências profissionais no ensino da trigonometria. Por achar que valeu a pena, gostaria que destino final deste trabalho não fosse simplesmente "ficar esquecido" na prateleira de uma biblioteca mas de o partilhar com colegas através da realização de acções de formação.

Referências Bibliográficas

[1] Calado, J. Jorge G.: *"Compêndio de Trigonometria"*, Livraria Popular de Francisco Franco (1974);

[2] Andreev, P.P; Shuvalova, E.Z.: *"Geometria"*, Editora Nauka, Moscovo (1967);

[3] Santos, Fernando Borja.: *"Sebenta de Matemática: Números Complexos"* - Universidades e Escolas Superiores (1990);

[4] Fernandes, António do Nascimento Palma,: *" Elementos de Geometria", 2ª edição,* Tip. da Livraria Simões Lopes, *"Aprovado oficialmente como livro único"* pelo Ministério da Educação Nacional (1952);

[5] Gelfand, I.M.; Lvovsky, S.M.; Toom, A.L.: *"Trigonometria"*, Editora MCNMO (2002);

[6] Neves, Maria Augusta F.; Guerreiro, Luís ; Moura, Ana.: *"Matemática A-11º Ano-Geometria II"*, Porto Editora (2004);

[7] Costa, Belmiro; Resende, Lurdes do Céu; Rodrigues, Ermelinda.: *"Espaço 12 – Ensino Secundário"*, ASA Editores, S.A. (2005);

[8] Gomes, Francelino; Viegas, Cristina.: *"XEQ MAT – Matemática 11º Ano - Volume I."* Texto Editora, Lda. (2004);

[9] Jorge, Ana Maria B.; Alves, Conceição B.; Fonseca, Graziela; Barbedo, Judite.: *"Infinito 11B (parte 1) Matemática B -11º Ano"* , Areal Editores (2005);

[10] Bernardes, António; Loureiro, Cristina; Viana, José Paulo; Bastos, Rita.: *"Matemática 11 - Geometria"* , Edições Contraponto (2004);

[11] Câmara, Ângela Maria.: *" XeqMat 11 volume 1 – Matemática", A folha Cultural* (2004);

[12] Spiegel, Murray R.; Rapun, Lorenzo Abellanas.: *"Fórmulas e Tabelas de Matemática Aplicada*", Editora McGraw-Hill de Portugal, Lda. (1990)

[13] Alain, Georges.: *"Dicionário Prático de Matemática";* Terramar – Editores, Distribuidores e Livreiros, Lda. (1995)

[14] Samko, Natasha.: "Materiais da disciplina *Capítulos Escolhidos de Matemática Elementar I*", no âmbito do Mestrado em Matemática, Universidade do Algarve. (2003)

[15] Samko, Natasha.: *"Curso de aprofundamento em Matemática, ano zero, para professores e alunos do ensino secundário", Monuscripto*