



**MODELOS ESTOCÁSTICOS DE CRESCIMENTO
INDIVIDUAL E DESENVOLVIMENTO DE SOFTWARE DE
ESTIMAÇÃO E PREVISÃO**

Nuno Miguel Baptista Brites
Licenciado em Matemática

DISSERTAÇÃO APRESENTADA À UNIVERSIDADE DE ÉVORA PARA
A OBTENÇÃO DO GRAU DE
MESTRE EM MATEMÁTICA E APLICAÇÕES - ESPECIALIZAÇÃO EM
MATEMÁTICA E APLICAÇÕES

Orientador: Professor Doutor Carlos Alberto dos Santos Braumann

Universidade de Évora, Novembro de 2010

MODELOS ESTOCÁSTICOS DE CRESCIMENTO INDIVIDUAL E DESENVOLVIMENTO DE SOFTWARE DE ESTIMAÇÃO E PREVISÃO

Este exemplar corresponde à versão
final devidamente corrigida da dissertação
defendida por Nuno Miguel Baptista Brites
e aprovada pelo Júri com a classificação final
de **19 valores**.

Júri:

- **Presidente do Júri:** Professor Doutor António Costa Ornelas Gonçalves
Universidade de Évora
- **Arguente:** Professor Doutor Russel Alpizar Jara
Universidade de Évora
- **Orientador:** Professor Doutor Carlos Alberto dos Santos Braumann
Universidade de Évora

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, ao Professor Carlos Braumann pelo facto de ter aceite esta orientação bem como toda a paciência, dedicação e colaboração prestadas no decurso destes dois anos. Bem sei que estas curtas palavras não são suficientes para agradecer a sua preciosa ajuda.

À Doutora Patrícia Filipe, agradeço as suas sugestões, críticas e conselhos, não esquecendo, claro, a sua paciência e disponibilidade. Um especial agradecimento à Professora Ana Sampaio pelo seu constante apoio, motivação e ajuda. As suas sábias palavras, nos momentos mais difíceis, muito me encorajaram. Ao Professor Carlos Roquete agradeço a sua disponibilidade e o facto de ter cedido os dados necessários para a aplicação dos modelos e software.

Agradeço à minha família, em especial ao meu pai e aos meus irmãos Aristides e Mónica, todo o apoio prestado. Sem eles não seria aquilo que sou hoje. O facto de ter chegado até aqui, depois dos momentos difíceis por que passámos, mostra que com esforço, dedicação, trabalho e perseverança podemos atingir, de uma maneira ou outra, os nossos objectivos. A vós, que tudo devo, o meu muito obrigado.

Ao meu amigo João Almeida agradeço toda a ajuda e disponibilidade. Ao Doutor Pedro Antunes um especial agradecimento pelo constante apoio informático, pela sua paciência e pelas longas horas nocturnas.

Finalmente, agradeço profundamente ao Doutor Rui Oliveira o seu incansável e imprescindível apoio, generosidade e amizade que contribuíram para o sucesso deste trabalho.

A todos vós, espero um dia poder retribuir a preciosa ajuda prestada.

À minha família, em particular ao meu Pai.

Resumo

Os modelos de crescimento individual são geralmente adaptações de modelos de crescimento de populações. Inicialmente estes modelos eram apenas determinísticos, isto é, não incorporavam as flutuações aleatórias do ambiente. Com o desenvolvimento da teoria do cálculo estocástico podemos adicionar um termo estocástico, que representa a aleatoriedade ambiental que influencia o processo em estudo. Actualmente, o estudo do crescimento individual em ambiente aleatório é cada vez mais importante, não apenas pela vertente financeira mas também devido às suas aplicações nas áreas da saúde e da pecuária, entre outras. Problemas como o ajustamento de modelos de crescimento individual, estimação de parâmetros e previsão de tamanhos futuros são tratados neste trabalho. São apresentadas novas aplicações do modelo estocástico monomolecular generalizado e um novo *software* de aplicação deste e de outros modelos.

Palavras-chave: Modelos de crescimento individual, Equações diferenciais estocásticas, gSDE.

Abstract

STOCHASTIC MODELS OF INDIVIDUAL GROWTH AND SOFTWARE DEVELOPMENT OF ESTIMATION AND PREDICTION

Individual growth models are usually adaptations of growth population models. Initially these models were only deterministic, that is, they did not incorporate the random fluctuations of the environment. With the development of the theory of stochastic calculus, we can add a stochastic term that represents the random environmental influences in the process under study. Currently, the study of individual growth in a random environment is increasingly important, not only by the financial scope but also because of its applications in health care and livestock production, among others. Problems such as adjustment of an individual growth model, estimation of parameters and prediction of future sizes are treated in this work. New applications of the generalized stochastic monomolecular model and a new software applied to this and other models are presented.

Keywords: Individual growth models, Stochastic differential equations, gSDE.

Conteúdo

Lista de Abreviaturas	xiii
1 Introdução	1
2 Conceitos de Probabilidades e Processos Estocásticos	3
2.1 Conceitos de Probabilidades	3
2.2 Conceitos de Processos Estocásticos	6
2.2.1 Tipos clássicos de processos estocásticos	8
2.2.2 Exemplos de processos estocásticos	10
3 Equações Diferenciais Estocásticas	15
3.1 Motivação	15
3.2 Integral de Itô	16
3.3 Cálculo de Itô	23
3.4 Teorema da Existência e Unicidade	25
4 Modelos de Crescimento Individual	27
4.1 Modelos Determinísticos	27
4.1.1 Modelos autónomos	28
4.1.2 Modelos não-autónomos	33
4.2 Modelos Estocásticos	35
4.2.1 O modelo estocástico monomolecular generalizado	36
4.2.2 O modelo estocástico monomolecular generalizado para vários indivíduos	41
4.2.3 O modelo de Ornstein-Uhlenbeck	42
4.2.4 O modelo estocástico de Bertalanffy-Richards	42
4.2.5 O modelo estocástico de Gompertz	43
4.2.6 O modelo estocástico de Gompertz com parâmetro limite	43
4.2.7 O modelo estocástico multifásico	46
4.2.8 O modelo estocástico multifásico para vários indivíduos	48

4.2.9	O modelo estocástico de tamanho assintótico variável	50
4.2.10	O modelo de Black-Scholes	52
5	Software gSDE	57
5.1	Funcionalidades	57
6	Aplicação a Dados Reais	71
6.1	Dados de Bovinos	71
6.1.1	Aplicação a dados de 1 animal	72
6.1.2	Aplicação a dados de 97 animais	76
6.2	Dados Financeiros	79
7	Conclusões	83
A	Resolução de Equações Diferenciais Estocásticas	87
A.1	Modelo estocástico monomolecular generalizado	87
A.2	Modelo estocástico de Gompertz com parâmetro limite	88
A.3	Modelo de Black-Scholes	89
B	Programas em R	91
B.1	Algoritmos do software gSDE	91
B.1.1	Algoritmo para o modelo estocástico monomolecular para vários indivíduos	92
B.1.2	Algoritmo para o modelo de regressão não-linear	104
B.1.3	Algoritmo para o modelo estocástico de tamanho assintótico variável	106
B.1.4	Algoritmo para o modelo estocástico bifásico	108
B.2	Aplicação do modelo de Black-Scholes	115

Lista de Abreviaturas

v.a.	Variável aleatória.
l.i.m.	Limite em média quadrática.
q.c.	Quase certamente.
EDE	Equação diferencial estocástica.
RNL	Regressão não-linear.
EMV	Estimativas/Estimadores de máxima verosimilhança.

Lista de Figuras

2.1	Exemplo de uma trajectória de um processo estocástico.	7
2.2	Simulações do processo de Wiener.	12
4.1	Exemplo gráfico do modelo exponencial com $b = 0.02 > 0$, $b = -0.05 < 0$ e $X(0) = 50$	29
4.2	Exemplo gráfico do modelo logístico com $b = 0.1$, $a = 500$ e $X(0) = 50$	30
4.3	Exemplo gráfico do modelo monomolecular com $b = 0.05$, $a = 500$ e $X(0) = 50$	31
4.4	Exemplo gráfico dos modelos de Gompertz e Bertalanffy-Richards com $b = 0.07$, $a = 500$ e $X(0) = 50$	32
5.1	Vista inicial do software gSDE	58
5.2	Barra de menús do software gSDE: File	58
5.3	Barra de menús do software gSDE: Save→SDE	58
5.4	Barra de menús do software gSDE: Save→NLR	59
5.5	Barra de menús do software gSDE: Help	59
5.6	Barra de menús do software gSDE: funcionalidades principais	59
5.7	Barra de menús do software gSDE: Model Step 1	60
5.8	Barra de menús do software gSDE: Dados	60
5.9	Software gSDE: Model	61
5.10	Software gSDE: Step 2	61
5.11	Software gSDE: Starting Interval	62
5.12	Software gSDE: Save	62

5.13 Software gSDE: SDE	62
5.14 Software gSDE: SDE→MLE	63
5.15 Software gSDE: SDE→Fitting	63
5.16 Software gSDE: SDE→Prediction	64
5.17 Software gSDE: SDE→Fitting/Prediction values e RMSE	64
5.18 Software gSDE: NLR	65
5.19 Software gSDE: NLR→LSE	65
5.20 Software gSDE: NLR→Fitting	66
5.21 Software gSDE: NLR→Prediction	66
5.22 Software gSDE: NLR→Fitting/Prediction values e RMSE	67
5.23 Software gSDE: Graphics	67
5.24 Software gSDE: Graphics→SDE/NLR	68
5.25 Software gSDE: Gráficos independentes	68
5.26 Software gSDE: R Code	69
5.27 Software gSDE: Step 2 (Random A)	70
5.28 Software gSDE: Step 2 (Biphasic)	70
6.1 Gráfico com os pesos de 1 animal.	72
6.2 Pesos observados de 1 animal e curvas estimadas.	73
6.3 Previsão passo-a-passo e longo prazo (Gompertz e Bertalanffy-Richards)	74
6.4 Ajustamento EDE vs RNL.	75
6.5 Previsão passo-a-passo EDE vs RNL.	75
6.6 Previsão longo prazo EDE vs RNL.	76
6.7 Previsão longo prazo (97 animais).	78
6.8 Modelos monofásico e bifásico de Gompertz (1 animal).	79
6.9 Representação gráfica das acções da SONAE SGPS entre 27/10/2003 e 24/06/2009.	80
6.10 Previsão a longo prazo e passo-a-passo e respectivos intervalos de confiança a 95%.	81

Lista de Tabelas

6.1	EMV, IC (95%), $\mathcal{L}(\cdot)$ e AIC (1 animal).	72
6.2	REQM para o ajustamento (1 animal).	73
6.3	REQM para a previsão.	74
6.4	REQM para o ajustamento RNL vs EDE.	76
6.5	REQM para a previsão RNL vs EDE.	76
6.6	EMV, IC (95%), $\mathcal{L}(\cdot)$ e AIC (97 animais).	77
6.7	REQM para a previsão a longo prazo (1 animal vs 97 animais).	77
6.8	EMV, IC (95%), $\mathcal{L}(\cdot)$ e AIC (97 animais); $\alpha_X =$ estimativa do valor médio da v.a $a = h^{-1}(A)$ e $\theta_X =$ estimativa do desvio-padrão da v.a $a = h^{-1}(A)$.	78
6.9	EMV, IC (95%), $\mathcal{L}(\cdot)$ e AIC (97 animais).	78
6.10	REQM para o ajustamento pelos modelos bifásico e monofásico.	79
6.11	Estimativas e intervalos de confiança assintóticos $((\cdot)_a)$ e exactos $((\cdot)_e)$ para o modelo de Black-Scholes	80
6.12	REQM para a previsão a longo prazo e passo-a-passo.	81

Introdução

Os modelos determinísticos de crescimento individual podem ser representados por uma equação diferencial ordinária da forma

$$\frac{dX(t)}{dt} = f(X(t)),$$

onde $X(t)$ representa o tamanho (peso, altura, volume, etc) do indivíduo e f é uma função dependente do tamanho do indivíduo e que limita o seu crescimento.

Se considerarmos que o crescimento do indivíduo está sujeito a perturbações aleatórias do ambiente, obtemos uma equação diferencial estocástica da forma

$$dX(t) = f(X(t))dt + g(X(t))dW(t), \quad t > 0, \tag{1.1}$$

onde g é uma função real que mede a intensidade das flutuações e $W(t)$ é o processo de Wiener. Dada uma condição inicial $X(0) = X_0$ independente do processo de Wiener, a equação (1.1) pode ainda ser escrita na forma de uma equação integral por

$$X(t) = X_0 + \int_0^t f(X(s))ds + \int_0^t g(X(s))dW(s). \tag{1.2}$$

A equação (1.2) contém um integral clássico (no sentido de Riemann ou de Lebesgue), que pode ser calculado pelas regras usuais de cálculo, e um integral estocástico relativo ao processo de Wiener. Naturalmente este último integral não pode ser calculado do mesmo modo que o outro, dado que o processo de Wiener tem variação ilimitada q.c. num intervalo limitado de tempo. Para isso

introduzimos nos capítulos 2 e 3 a teoria e as técnicas de cálculo deste tipo de integrais bem como um teorema e uma fórmula de cálculo para resolver equações diferenciais estocásticas.

Note-se que $X(t, \omega)$ e $W(t, \omega)$ dependem do acaso, ω , e do tempo, t , logo representam processos estocásticos. Optamos, por comodidade, por omitir a dependência do acaso na notação usada.

Recentemente foram abordados os modelos estocásticos monomolecular, de Gompertz e de Bertalanffy-Richards aplicados aos dados de bovinos mertolengos. Esta abordagem, efectuada por Filipe, P., Braumann, C. e Brites, N. (ver [9], [10], [11], [12], [13], [15] e [14]), no âmbito do projecto de investigação "Modelação por equações diferenciais estocásticas do crescimento de organismos em ambiente aleatório", envolveu ainda o estudo do cálculo das estimativas dos parâmetros dos modelos aplicados, cálculo de valores previstos e ainda o desenvolvimento do estudo de aplicação de métodos não-paramétricos, entre outros. No capítulo 4 apresentamos estes e outros modelos cuja aplicação prática tem suscitado grande interesse nas mais variadas áreas do conhecimento.

No projecto de investigação referido, do qual faço parte como bolsheiro de investigação, desenvolvemos algoritmos na linguagem de programação R para os cálculos referidos, nomeadamente o cálculo das estimativas destes modelos bem como a obtenção dos valores ajustados e previstos e respectivos gráficos. Dada a complexidade e quantidade dos algoritmos criados, houve a necessidade de desenvolver uma aplicação informática de modo a gerir e integrar todos os algoritmos. Essa aplicação informática, apresentada no capítulo 5, foi chamada de gSDE: growth Stochastic Differential Equation. Ainda nesse capítulo explicamos o seu modo de utilização e uma descrição detalhada dos algoritmos desenvolvidos.

Finalmente, no capítulo 6, e com base no *software* apresentado, aplicamos os modelos apresentados a dados reais de bovinos e cotações de acções.

No apêndice A encontra-se a resolução das equações diferenciais estocásticas referentes aos modelos estudados. No apêndice B apresentamos os algoritmos necessários à obtenção dos resultados obtidos no capítulo 6.

O capítulo 7 apresenta as conclusões do trabalho realizado e sugestões para trabalho futuro.

Conceitos de Probabilidades e Processos Estocásticos

Neste capítulo fazemos uma breve revisão sobre alguns conceitos e resultados de probabilidades e processos estocásticos. Apresentamos as definições necessárias ao entendimento do estudo que se segue bem como as principais propriedades. As demonstrações dos teoremas e propriedades apresentadas encontram-se em qualquer bom livro da teoria da medida (ver [2], [24], [26] ou [7]) ou em livros de referência sobre probabilidades e processos estocásticos (ver [22], [20] ou [21]).

2.1 Conceitos de Probabilidades

Ao conjunto de todos os resultados possíveis de uma experiência aleatória designamos por espaço amostral e representamos por Ω . No que se segue, consideramos Ω um conjunto não-vazio.

Definição 2.1.1 *Uma álgebra- σ é uma família \mathcal{F} de subconjuntos de Ω que verifica*

- i) $\{\emptyset, \Omega\} \in \mathcal{F}$;*
- ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$, onde A^c representa o complementar do conjunto A ;*
- iii) $\{A_n | n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$.*

Os elementos de \mathcal{F} designam-se por conjuntos mensuráveis (ou \mathcal{F} -mensuráveis, de modo a explicitar a álgebra- σ que lhes está associada).

Definição 2.1.2 Uma medida de probabilidade P na álgebra- σ \mathcal{F} é uma função $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ que verifica:

i) $P(\emptyset) = 0$;

ii) $P(\Omega) = 1$;

iii) Se $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ são conjuntos disjuntos dois-a-dois de \mathcal{F} , então

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n).$$

Definição 2.1.3 Um espaço de probabilidade é um terno (Ω, \mathcal{F}, P) , onde Ω é um conjunto, \mathcal{F} é uma álgebra- σ em Ω e P é uma medida de probabilidade em \mathcal{F} .

Os elementos de \mathcal{F} chamam-se acontecimentos; $P(A)$, $A \in \mathcal{F}$ representa a probabilidade do acontecimento A .

Definição 2.1.4 Chama-se álgebra- σ de Borel, e representa-se por \mathcal{B} , à mais pequena álgebra- σ gerada pelos abertos de \mathbb{R} . Os elementos de \mathcal{B} designam-se por borelianos. Note-se que, em \mathbb{R} , qualquer subconjunto aberto pode ser escrito como uma união numerável de intervalos abertos disjuntos e que a álgebra- σ de Borel é gerada pela família de todos os intervalos limitados semi-abertos contidos em \mathbb{R} .

Definição 2.1.5 Seja (Ω, \mathcal{F}, P) um espaço de probabilidade. A função $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma variável aleatória se

$$\forall B \in \mathcal{B} : X^{-1}(B) \in \mathcal{F}. \quad (2.1)$$

Adicionalmente, quando (2.1) se verifica, dizemos que X é \mathcal{F} -mensurável, ou simplesmente mensurável quando se subentender a álgebra- σ que está associada a X .

Teorema 2.1.1 Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma variável aleatória. Então,

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$$

é a mais pequena álgebra- σ de \mathcal{F} para a qual X é mensurável. A esta álgebra- σ chama-se álgebra- σ gerada por X .

Definição 2.1.6 *Sejam (Ω, \mathcal{F}, P) um espaço de probabilidade e $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma variável aleatória. Chama-se*

i) valor esperado (ou valor médio) de X ao integral

$$E[X] = \int_{\Omega} X dP,$$

se este integral existir e for finito;

ii) variância de X ao integral

$$\text{Var}[X] = \int_{\Omega} |X - E[X]|^2 dP,$$

se este integral existir e for finito.

Definição 2.1.7 *Sejam (Ω, \mathcal{F}, P) um espaço de probabilidade e X uma variável aleatória definida nesse espaço. Define-se:*

i) X é variável aleatória de quadrado integrável quando $E[X^2] < +\infty$;

ii) espaço L^2 é o espaço constituído pelas variáveis aleatórias¹ de quadrado integrável, definidas em (Ω, \mathcal{F}, P) ;

iii) norma L^2 é a norma definida por

$$\forall X \in L^2 : \|X\|_{L^2} = (E[X^2])^{1/2}.$$

Definição 2.1.8 *Seja $(X_n : n \in \mathbb{N})$ uma sucessão de variáveis aleatórias em L^2 . Diz-se que $(X_n : n \in \mathbb{N})$ converge para X , em L^2 , se*

$$\|X_n - X\|_{L^2} \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty \Leftrightarrow E[(X_n - X)^2] \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty.$$

¹Na realidade deveríamos dizer: "espaço constituído pelas classes de equivalência de variáveis aleatórias...", isto é, para duas variáveis aleatórias X, Y definidas em (Ω, \mathcal{F}, P) , considere-se a relação de equivalência

$$X \sim Y \text{ sse } P[X \neq Y] = 0$$

e tomemos o representante da classe de equivalência $[X] = \{Y : X \sim Y\}$ para construir o espaço L^2 .

A este tipo de convergência chama-se convergência em média quadrática e representa-se por $X_n \xrightarrow{m.q.} X$ quando $n \rightarrow +\infty$ ou l.i.m. $X_n = X$.

Definição 2.1.9 *Sejam X uma variável aleatória e $(X_n : n \in \mathbb{N})$ uma sucessão de variáveis aleatórias definidas no espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) .*

i) *Diz-se que X_n converge quase certamente (q.c.) ou converge com probabilidade 1 para X , e denota-se por*

$$X_n \xrightarrow{q.c.} X \text{ ou } \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = X \text{ q.c.,}$$

se $X_n(\omega)$ converge para $X(\omega)$, $\forall \omega \in \Omega \setminus N$, onde $N \in \mathcal{F}$ é um conjunto de medida nula (isto é, $P(N) = 0$).

ii) *Diz-se que X_n converge em probabilidade (ou converge estocasticamente) para X , e denota-se por*

$$X_n \xrightarrow{P} X \text{ ou } \lim_{n \rightarrow +\infty} -P X_n = X,$$

se $\forall \delta > 0, P[|X_n - X| > \delta] \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$.

2.2 Conceitos de Processos Estocásticos

Em linguagem corrente dizemos que um processo estocástico é um modelo matemático que descreve o modo como um fenómeno aleatório evolui no tempo, ou seja, é uma estrutura que modela os acontecimentos naturais onde o acaso interfere e em que não é possível prever, de modo determinístico, o futuro. Em linguagem matemática, uma definição de processo estocástico é a seguinte:

Definição 2.2.1 *Seja (Ω, \mathcal{F}, P) um espaço de probabilidade, $E \subset \mathbb{R}$ e $T \subset \mathbb{R}^+$ um conjunto não-vazio tal que $\forall t \in T, X(t)$ é uma variável aleatória definida em Ω com valores em E . Então, a colecção $X = (X(t), t \in T)$ diz-se um processo estocástico.*

Usaremos, indiferentemente, a notação $X(t)$ ou X_t .

O conceito de processo estocástico generaliza o de variável aleatória no sentido em que o faz depender de um parâmetro t , normalmente a designar o tempo, e pode ser interpretado como uma família de variáveis aleatórias. O processo estocástico descrito anteriormente é, formalmente, uma função $X(t, \omega)$ definida em $T \times \Omega$. Ao fixarmos ω obtemos uma função não aleatória de t , à qual chamamos trajectória do processo. Diferentes valores de ω produzem diferentes trajectórias. Um exemplo de uma trajectória é apresentada na figura 2.1.

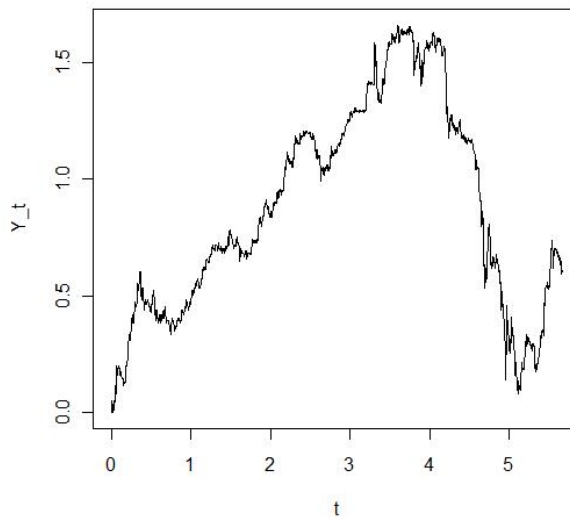


Figura 2.1: Exemplo de uma trajectória de um processo estocástico.

O conjunto E designa-se por espaço de estados. Ao conjunto T chamamos conjunto de índices do processo. Os processos estocásticos são classificados de acordo com a natureza do espaço de estados, E , e do conjunto de índices, T . Assim, quando T é um conjunto finito (ou infinito numerável) o processo chama-se processo de tempo discreto; quando T é um conjunto infinito contínuo o processo chama-se processo em tempo contínuo. Analogamente, quando o conjunto de estados é finito (ou infinito numerável) o processo chama-se processo discreto; no caso de ser infinito contínuo o processo diz-se processo contínuo. Neste trabalho consideramos apenas processos estocásticos em tempo contínuo com espaço de estados contínuo.

Definição 2.2.2 *Seja $X = (X(t), t \in T)$ um processo estocástico definido no espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) com conjunto de índices $T = [0, +\infty[$. Uma família de sub-álgebras- σ de \mathcal{F} tais que, para $s \leq t$, se tenha $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, diz-se uma filtração.*

Chamamos *filtração natural do processo X* à família $(\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : 0 \leq s \leq t), t \in T)$ formada pelas álgebras- σ geradas pelo processo X até ao instante t .

Um processo estocástico $X = (X(t), t \in T)$ está adaptado à filtração $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ se $X(t)$ é \mathcal{F}_t -mensurável, $\forall t \in T$, ou seja, as imagens inversas dos conjuntos $B \in \mathcal{B}$ estão contidas em \mathcal{F}_t .

2.2.1 Tipos clássicos de processos estocásticos

Sejam $X = (X_t, t \in T)$ um processo estocástico e T um intervalo de números reais.

Definição 2.2.3 X_t é um processo estocástico com incrementos independentes se e só se

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, \forall t_0, \dots, t_n \in T : t_0 < t_1 < \dots < t_n,$$

$$X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

são variáveis aleatórias mutuamente independentes.

Definição 2.2.4 X_t é um processo estocástico com incrementos estacionários se e só se

$\forall s, t \in T, s < t$, a distribuição de $X_t - X_s$ depende apenas da amplitude $t - s$.

Definição 2.2.5 X_t é um processo de segunda ordem se e só se

$$\forall t \in T : E[X_t^2] < \infty.$$

Definição 2.2.6 X_t é estacionário em sentido forte (ou fortemente estacionário) se e só se

$$\forall h \in T, \forall n \in \mathbb{N}, \forall t_1, \dots, t_n \in T, t_1 < \dots < t_n : (X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \stackrel{d}{=} (X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h}),$$

onde $\stackrel{d}{=}$ representa a igualdade em distribuição.

Teorema 2.2.1 Se X_t é estacionário em sentido forte e de segunda ordem, então:

i) $E[X_t] = \text{constante}$, e portanto, independente de t ;

ii) $\forall h \in T, \text{COV}(X_t, X_{t+h}) = \text{COV}(X_0, X_h) = \gamma(h)$, independente de t .

Definição 2.2.7 X_t é estacionário em sentido fraco (ou estacionário de segunda ordem) se e só se:

- i) $\forall t \in T, E[X_t^2] < \infty$;
- ii) $\forall t \in T, E[X_t] = m$, independente de t ;
- iii) $\forall t, h \in T, COV(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h)$, independente de t .

Observação 2.2.1 Para processos estacionários em sentido fraco, $\gamma(h) = COV(X_t, X_{t+h})$, $h \in T$ representa a função de autocovariância.

Definição 2.2.8 Sejam (Ω, \mathcal{F}, P) um espaço de probabilidade, X_t um processo estocástico e \mathcal{F}_t uma filtração. X_t é uma martingala- \mathcal{F}_t se:

- i) X_t está adaptado à filtração \mathcal{F}_t ;
- ii) $E[|X_t|] < +\infty$;
- iii) $\forall s \leq t : E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$ q.c.

Se a filtração considerada for óbvia ou coincidente com a filtração natural, então X_t designa-se apenas martingala.

Definição 2.2.9 Um processo estocástico X_t , com espaço de estados E , é um processo de Markov se satisfaz a seguinte condição:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t_1, \dots, t_{n+1} \in T, \forall x_1, \dots, x_n \in E, \forall B \in \mathcal{B} :$$

$$P(X_{t_{n+1}} \in B | X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_n} = x_n) = P(X_{t_{n+1}} \in B | X_{t_n} = x_n),$$

onde B é um conjunto de Borel. Em termos de distribuições condicionais,

$$F_{X_{t_{n+1}} | X_{t_1}=x_1, \dots, X_{t_n}=x_n}(x) = F_{X_{t_{n+1}} | X_{t_n}=x_n}(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

De modo informal podemos dizer que, dado o valor presente, num processo de Markov o comportamento futuro não é alterado pelo conhecimento do seu passado.

Os processos de Markov são classificados de acordo com o tipo de espaço de estados e do espaço dos parâmetros. Deste modo, designamos por processo de Markov em tempo contínuo (respectivamente discreto) caso T seja contínuo (respectivamente discreto). No caso particular de o espaço de estados, E , ser discreto estamos na presença de uma classe especial de processos de Markov, a que chamamos de cadeias de Markov. No presente texto apenas estamos interessados em processos de Markov em tempo contínuo com $T = [0, +\infty[$.

Definição 2.2.10 *Sejam X_t um processo de Markov e B um conjunto de Borel.*

As probabilidades de transição do processo X_t são dadas por:

$$P(t, B|s, x) = P(X_t \in B | X_s = x), \forall s \leq t;$$

A densidade de transição, caso exista, do processo X_t é dada por:

$$p(t, u|s, x) = f_{X_t|X_s=x}(u) = \frac{\partial}{\partial u} F_{X_t|X_s=x}(u).$$

Definição 2.2.11 *Um processo de Markov é homogêneo quando as suas probabilidades de transição, $P(t, B|s, x)$, são estacionárias, isto é, quando*

$$P(t + \tau, B|s + \tau, x) = P(t, B|s, x).$$

2.2.2 Exemplos de processos estocásticos

Não podemos terminar este capítulo sem antes apresentar alguns exemplos clássicos de processos estocásticos que têm um papel central na teoria das equações diferenciais estocásticas. Consideremos um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) tal como definido no início do capítulo.

Definição 2.2.12 *Seja $W = (W_t, t \geq 0)$ um processo estocástico definido em (Ω, \mathcal{F}, P) com as seguintes propriedades:*

- i) $W(0) = 0$ q.c;*
- ii) $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s), \forall 0 \leq s \leq t$;*
- iii) W_t tem incrementos independentes.*

Um processo estocástico assim definido chama-se processo de Wiener padrão² ou movimento Browniano.

Em 1828, o botânico inglês Robert Brown observou pequenas partículas de pólen imersas num líquido a movimentarem-se de forma completamente aleatória. Mais tarde, em 1905, Albert Einstein justificou este movimento com a constante colisão entre as partículas e as moléculas do líquido envolvente e caracterizou-o por um processo estocástico que viria a ser chamado processo de Wiener. Finalmente, em 1918, apareceu a primeira definição matemática do termo através do matemático Norbert Wiener.

Nas equações diferenciais estocásticas, o processo de Wiener representa o efeito acumulado das perturbações aleatórias na evolução de determinado fenómeno em estudo. Dada a importância deste processo, iremos apresentar algumas das suas propriedades.

Definição 2.2.13 *Considere-se uma função $f : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ e sejam $\mathcal{P}_n = \{t_0^n, t_1^n, \dots, t_n^n\}$ partições do intervalo $[0, t]$ com $0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_n^n = t \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, tais que $\delta_n = \max_{0 \leq i \leq n-1} |t_{i+1}^n - t_i^n| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$.*

i) *A variação da função f no intervalo $[0, t]$ é definida por*

$$V_f([0, t]) = V_f(t) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}^n) - f(t_i^n)|.$$

ii) *Diz-se que f tem variação finita no intervalo $[0, t]$ se $V_f(t) < \infty$;*

iii) *Diz-se que f tem variação limitada no intervalo $[0, t]$ se $\sup_{u \in [0, t]} V_f(u) < k$;*

iv) *Diz-se que f tem variação quadrática no intervalo $[0, t]$ se existir e for finito o limite da soma*

$$V_f^2(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}^n) - f(t_i^n)|^2.$$

Proposição 2.2.1 *O processo de Wiener, W_t , goza das seguintes propriedades:*

i) *Possui uma versão separável contínua, ou seja, tem uma versão com trajectórias q.c. contínuas;*

²Diremos processo de Wiener ou processo de Wiener padrão, indiferentemente, salvo menção contrária.

- ii) $W_t \sim \mathcal{N}(0, t), \forall 0 \leq t$;*
- iii) $COV[W_s, W_t] = E[W_s W_t] = s \wedge t$;*
- iv) W_t é um processo de Markov homogéneo;*
- v) A distribuição condicional de $W_{s+\tau}$ dado $W_s = x$ é Normal com média x e variância τ ;*
- vi) W_t é uma martingala;*
- vii) As trajectórias do processo de Wiener são q.c. não diferenciáveis;*
- viii) As trajectórias do processo de Wiener são q.c. de variação ilimitada;*
- ix) Tem variação quadrática finita, $b - a$, no intervalo $[a, b]$.*

Apesar de o processo de Wiener gozar das propriedades (vii) e (viii), existe $\frac{dW_t}{dt}$ no sentido das funções generalizadas. Consequentemente, define-se

$$\frac{dW_t}{dt} = \xi_t$$

como sendo um processo estocástico generalizado. A este processo chamamos ruído branco.

Na figura 2.2 apresentam-se duas trajectórias simuladas do processo de Wiener no intervalo $[0, 1]$.

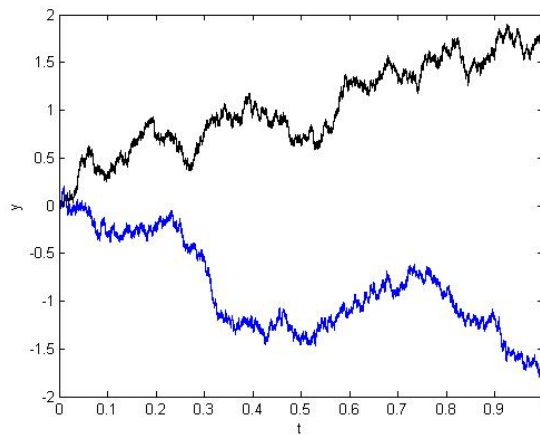


Figura 2.2: Simulações do processo de Wiener.

Observação 2.2.2 *No que se segue, adoptámos a seguinte notação para esperança matemática e probabilidade condicionadas:*

$$E[\bullet|X_s = x] = E_{s,x}[\bullet]$$

e

$$P(\bullet|X_s = x) = P_{s,x}(\bullet).$$

Definição 2.2.14 *Seja (Ω, \mathcal{F}, P) um espaço de probabilidade e $(X_t, t \geq 0)$ um processo estocástico definido nesse espaço. Dizemos³ que X_t é um processo de difusão se:*

i) X_t é um processo de Markov;

ii) X_t tem trajectórias q.c. contínuas;

iii) $X_t \in L^2$, isto é, $E[X_t^2] < +\infty$;

iv)

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \frac{P_{s,x}(|X_{s+\Delta} - X_s| > \varepsilon)}{\Delta} = 0;$$

v) existe e é finito o limite

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0^+} E_{s,x} \left[\frac{X_{s+\Delta} - X_s}{\Delta} \right] = a(s, x);$$

vi) existe e é finito o limite

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0^+} E_{s,x} \left[\frac{(X_{s+\Delta} - X_s)^2}{\Delta} \right] = b(s, x).$$

Se a forma funcional das funções $a(s, x)$ e $b(s, x)$ não depender de s , então o processo chama-se processo de difusão homogéneo.

Definição 2.2.15 *As funções $a(s, x)$ e $b(s, x)$ apresentadas anteriormente chamam-se, respectivamente, coeficiente de tendência (ou momento infinitesimal de primeira ordem) e coeficiente de difusão (ou momento infinitesimal de segunda ordem).*

³Existem na literatura definições alternativas de processos de difusão (ver, por exemplo, [22]).

O coeficiente de tendência, $a(s, x)$, mede a velocidade da média do processo no instante s , enquanto que o coeficiente de difusão, $b(s, x)$, mede a intensidade das flutuações do processo, ou seja, mede a velocidade da variância do processo no instante s .

Definição 2.2.16 *Chama-se função delta de Dirac à função generalizada $\delta(x)$ com as seguintes propriedades:*

- i) $\delta(x) = 0, \forall x \neq 0$;*
- ii) $\delta(x) = +\infty, x = 0$;*
- iii) $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$.*

A caracterização, do ponto de vista probabilístico, de um processo de difusão, recorre apenas aos seus momentos infinitesimais e às equações de Kolmogorov.

Proposição 2.2.2 *Sejam X_t um processo de difusão como definido anteriormente com função densidade de transição $p(t, y|s, x)$, contínua em s e com primeira e segunda derivadas parciais finitas em ordem a x e contínuas relativamente a s . Nestas condições, verifica-se a:*

- i) equação de Kolmogorov progressiva (ou equação de Fokker-Planck)*

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(a(s, x)p)}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2(b(s, x)p)}{\partial y^2} = 0,$$

com condição inicial

$$\lim_{t \downarrow s} p(t, y|s, x) = \delta(x - y),$$

onde δ representa a função delta de Dirac e (s, x) fixo;

- ii) equação de Kolmogorov regressiva*

$$\frac{\partial p}{\partial s} + a(s, x) \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2} b(s, x) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0,$$

com condição inicial

$$\lim_{t \uparrow s} p(t, y|s, x) = \delta(x - y),$$

onde δ representa a função delta de Dirac e (t, y) fixo.

Equações Diferenciais Estocásticas

3.1 Motivação

Começamos este capítulo com um exemplo da necessidade de introduzir o conceito de efeito aleatório na perturbação de um sistema dinâmico. Considere-se o ponto $X(0) = X_0 \in \mathbb{R}$ e o seguinte problema de Cauchy induzido por uma equação diferencial ordinária:

$$\begin{cases} dX(t) = f(X(t))dt, & (t > 0) \\ X(0) = X_0, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e $X : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é a solução do problema (3.1). Se considerarmos que $X(t)$ representa a trajectória de uma partícula, então $dX(t)/dt$ representa a sua velocidade. É natural admitir que a velocidade da partícula tenha pequenas oscilações que não são explicadas pela função f , isto é, este sistema não incorpora o efeito aleatório que as flutuações ambientais induzem na velocidade da trajectória de X . Assim, torna-se necessário adicionar um *ruído* ao problema (3.1) que mostre a influência das flutuações ambientais sobre a dinâmica do sistema:

$$\begin{cases} dX(t) = f(X(t))dt + g(X(t))\xi(t)dt, & (t > 0) \\ X(0) = X_0, \end{cases} \quad (3.2)$$

onde $g(\cdot)$, que mede a intensidade das flutuações ambientais, é uma função que depende de $X(t)$. Tendo em conta que $dW(t) = \xi(t)dt$, o sistema (3.2) toma a seguinte forma:

$$\begin{cases} dX(t) = f(X(t))dt + g(X(t))dW(t) \\ X(0) = X_0, \end{cases} \quad (3.3)$$

que representa uma Equação Diferencial Estocástica (EDE). A sua solução é dada por

$$X(t) = X_0 + \int_0^t f(X(s))ds + \int_0^t g(X(s))dW(s), \quad t > 0, \quad (3.4)$$

onde o primeiro integral é um integral de Riemann-Stieltjes mas o segundo não existe neste sentido, dado que as trajectórias do processo de Wiener são q.c. de variação ilimitada em $[0, t]$. No entanto, dado que o processo de Wiener tem variação quadrática finita, podemos calcular o segundo integral através da definição de integral estocástico. Note-se que omitimos, como já se referiu, a dependência de ω em $X(t)$ na notação usada.

Mostraremos de seguida como encontrar a solução (3.4) e a definição do integral estocástico

$$\int_0^t g(X(s))dW(s).$$

3.2 Integral de Itô

Suponhamos que desejamos calcular o seguinte integral

$$\int_0^t W(t)dW(t).$$

Se aplicarmos as regras de cálculo habituais, obtemos como solução

$$\frac{1}{2}W^2(t). \quad (3.5)$$

Vamos verificar se esta solução está correcta.

Sejam $f : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(t) = W(t)$, uma função e $\mathcal{P}_n = \{t_0^n, t_1^n, \dots, t_n^n\}$, $n = 1, 2, \dots$, partições do intervalo $[0, t]$ com $0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_n^n = t \geq 0$, tal que os diâmetros $\delta_n = \max_{0 \leq i \leq n-1} |t_{i+1}^n - t_i^n| \rightarrow$

0 quando $n \rightarrow +\infty$. Consideremos as somas de Riemann-Stieltjes aproximadoras do integral $\int_0^t f(u)dW(u)$:

$$\sum_{i=0}^{n-1} W(\xi_i^n)(W(t_{i+1}^n) - W(t_i^n))$$

com $\xi_i^n \in [t_i^n, t_{i+1}^n]$ e usemos limites em média quadrática quando $n \rightarrow +\infty$ para possível definição do integral.

Consideremos o caso particular de $\xi_i^n = (1 - \lambda)t_i^n + \lambda t_{i+1}^n$ e as somas de Riemann-Stieltjes

$$S_\lambda(W(t)) = \sum_{i=0}^{n-1} W(\xi_i^n)(W(t_{i+1}^n) - W(t_i^n)).$$

Facilmente verificamos que, para λ fixo, o limite em média quadrática quando $n \rightarrow +\infty$ destas somas é $\frac{W^2(t)}{2} + (\lambda - \frac{1}{2})t$. Com efeito,

$$E \left[\left(S_\lambda(W(t)) - \frac{W(t)^2}{2} - \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) t \right)^2 \right] \rightarrow 0.$$

O limite anterior depende da escolha do valor de λ e, conseqüentemente, do ponto intermédio $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$, pelo que não existe integral no sentido de Riemann-Stieltjes pois falha a existência de limite comum para todas as escolhas de pontos intermédios. Ao fixarmos $\lambda = 0$, obtemos como ponto intermédio o ponto inicial do intervalo, isto é $\xi_i = t_i$, e verificamos que

$$\int_0^t W(t)dW(t) = \frac{1}{2}W^2(t) - \frac{1}{2}t,$$

que é um resultado diferente do indicado em (3.5). De facto, para diferentes valores de λ obtemos diferentes integrais. Se considerarmos $\lambda = \frac{1}{2}$ o resultado do integral é

$$\int_0^t W(t)dW(t) = \frac{1}{2}W^2(t).$$

O facto apresentado de que diferentes valores de λ implicam diferentes integrais, levanta uma questão pertinente: qual o valor de λ que devemos escolher? A escolha de $\xi_i = t_i$, ou seja, o ponto inicial, permite-nos definir integrais de funções que não apenas o processo de Wiener, isto é,

integrais do tipo

$$\int_0^t G(\cdot) dW(t),$$

onde G pertence a uma vasta classe de funções com a propriedade de serem não-antecipativas. Veremos mais à frente como definir estas funções.

Como se referiu, a escolha de λ permite obter diferentes integrais. Assim, quando

- i) $\lambda = 0$, escolhemos o ponto inicial do intervalo e obtemos o integral de Itô;
- ii) $\lambda = \frac{1}{2}$, escolhemos o ponto intermédio do intervalo e obtemos o integral de Stratonovich;

Vamos agora dedicar-nos ao estudo destes integrais. Começamos com a introdução de algumas definições e resultados importantes.

Definição 3.2.1 *Seja $W(t)$, $t \geq 0$ um processo de Wiener padrão definido num espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) .*

- i) *Chama-se filtração natural do processo de Wiener até ao instante $s > 0$ à álgebra- σ*

$$\mathcal{M}_s = \sigma(W(u), 0 \leq u \leq s);$$

- ii) *Chama-se álgebra- σ dos incrementos futuros do processo de Wiener à álgebra- σ*

$$\mathcal{M}_s^+ = \sigma(W(u) - W(s), u \geq s);$$

- iii) *Uma família, $\{\mathcal{A}_s : 0 \leq s \leq t\}$, de álgebras- σ é chamada filtração não-antecipativa, relativamente a $W(s)$, se*

- a) $\mathcal{A}_s \supset \mathcal{M}_s$, $0 \leq s \leq t$;
- b) \mathcal{A}_s é independente de \mathcal{M}_s^+ , $\forall s \geq 0$.

Informalmente podemos dizer que a filtração \mathcal{A}_s contém toda a informação disponível do processo até ao instante s .

A escolha da filtração não-antecipativa \mathcal{A}_s costuma coincidir com a própria filtração natural do processo de Wiener \mathcal{M}_s , desde que não seja necessário incluir informação adicional do processo. Caso contrário, considera-se uma filtração *maior* (por exemplo, de modo a incluir a condição inicial do problema de Cauchy), desde que a mesma seja não-antecipativa.

Definição 3.2.2 *Um processo estocástico $G(t)$ é chamado de não-antecipativo, relativamente à filtração \mathcal{A}_t , se $G(t)$ é \mathcal{A}_t -mensurável, $\forall t \geq 0$ (ou seja, $G(t)$ depende apenas da informação disponível até ao instante t).*

Tendo em conta estas definições podemos definir o integral de Itô para uma classe especial de funções não-antecipativas ¹, as funções em escada.

Definição 3.2.3 *Chama-se espaço de Hilbert, no intervalo $[0, t]$, e representa-se por $H^2[0, t]$ ao espaço das funções $G : [0, t] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que verificam as seguintes condições:*

- i) G é conjuntamente mensurável relativamente à medida de Lebesgue l em $[0, t]$ e à medida de probabilidade P ;
- ii) G é não-antecipativa;
- iii) $\int_0^t E[G^2(u, \omega)] du < +\infty$.

Observação 3.2.1 *Nesta última definição consideramos, de modo abusivo, uma qualquer função G com a propriedade de ser conjuntamente mensurável relativamente às medidas l e P . Formalmente deveríamos referir-nos aos conjuntos das funções conjuntamente mensuráveis que sejam quase iguais (duas funções G_1 e G_2 são quase iguais quando o conjunto de pontos (t, ω) onde diferem tem medida $(l \times P)$ nula) com respeito à medida produto $l \times P$. Assim, a função G é na realidade um representante da classe de equivalência das funções conjuntamente mensuráveis relativamente à relação de equivalência de quase-igualdade. Deste modo, para simplificar a linguagem, referimo-nos à função G como um representante da classe de equivalência em vez da referência a uma determinada classe de equivalência.*

¹Na realidade, para definir o integral de Itô, não basta que G seja não-antecipativa. É necessário que $G = G(t, \omega)$ seja conjuntamente mensurável.

Definição 3.2.4 Uma função, G , no espaço $H^2[0, t]$ é chamada de função em escada se existir uma partição $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ do intervalo $[0, t]$ tal que

$$G(t) = G(t_i), \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}, \quad i = 0, \dots, (n-1).$$

Note-se que $G(t_i)$ é \mathcal{A}_{t_i} -mensurável pois G é não-antecipativa.

Ao espaço de funções em escada de $H^2[0, t]$ iremos chamar $H_E^2[0, t]$.

Definição 3.2.5 Seja G uma função em $H_E^2[0, t]$. O integral de Itô da função G no intervalo $[0, t]$ é dado por

$$\int_0^t G(s) dW(s) = \sum_{i=0}^{n-1} G(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)). \quad (3.6)$$

Proposição 3.2.1 Sejam F e G duas funções em $H_E^2[0, t]$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ duas constantes. As seguintes propriedades verificam-se:

i)

$$\int_0^t (\alpha F(s) + \beta G(s)) dW(s) = \alpha \int_0^t F(s) dW(s) + \beta \int_0^t G(s) dW(s); \quad (3.7)$$

ii)

$$E \left[\int_0^t F(s) dW(s) \right] = 0; \quad (3.8)$$

iii)

$$E \left[\left(\int_0^t F(s) dW(s) \right)^2 \right] = E \left[\int_0^t (F(s))^2 ds \right] = \int_0^t E \left[(F(s))^2 \right] ds. \quad (3.9)$$

Definimos o integral de Itô para funções em escada, ou seja, funções no espaço $H_E^2[0, t]$. Vamos agora generalizar este integral para funções genéricas em $H^2[0, t]$ através da existência de sucessões aproximadoras de funções em escada.

Teorema 3.2.1 Seja $G \in H^2[0, t]$ uma função. Então, existe uma sucessão de funções limitadas em escada, $G_n \in H_E^2[0, t]$, tais que

$$E \left[\left(\int_0^t |G(s) - G_n(s)|^2 ds \right) \right] \xrightarrow{m.q.} 0, \quad n \rightarrow +\infty$$

Definição 3.2.6 *Sejam G e G_n nas condições do teorema anterior. O integral de Itô da função G no intervalo $[0, t]$ é dado por*

$$\int_0^t G(s)dW(s) = \text{l.i.m.}_{n \rightarrow +\infty} \int_0^t G_n(s)dW(s).$$

Proposição 3.2.2 *Sejam F e G duas funções em $H^2[0, t]$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ duas constantes. As seguintes propriedades verificam-se:*

i)

$$\int_0^t (\alpha F(s) + \beta G(s)) dW(s) = \alpha \int_0^t F(s)dW(s) + \beta \int_0^t G(s)dW(s); \quad (3.10)$$

ii)

$$E \left[\int_0^t F(s)dW(s) \right] = 0; \quad (3.11)$$

iii)

$$E \left[\left(\int_0^t F(s)dW(s) \right)^2 \right] = E \left[\int_0^t (F(s))^2 ds \right] = \int_0^t E \left[(F(s))^2 \right] ds. \quad (3.12)$$

iv)

$$E \left[\int_0^t F(s)dW(s) \int_0^t G(s)dW(s) \right] = E \left[\int_0^t F(s)G(s)ds \right]. \quad (3.13)$$

v) *no caso de $G(s)$ ser determinística,*

$$\int_0^t G(s)dW(s) \sim \mathcal{N} \left(0, \int_0^t G^2(s)ds \right). \quad (3.14)$$

O integral de Itô para funções no espaço $H^2[0, t]$ pode ser estudado como função do seu limite superior, ou seja, como um integral indefinido. A prova destas propriedades encontra-se, por exemplo, em [3].

Definição 3.2.7 *Sejam $G \in H^2[0, d]$ uma função e $[0, d]$ um intervalo. O integral de Itô da função G no intervalo $[0, d]$, considerando t como limite superior de integração, é dado por*

$$Z(t) = \int_0^t G(s)dW(s) = \int_0^d G(s)I_{[0,t]}(s)dW(s).$$

Proposição 3.2.3 *Seja $Z(t)$ um processo estocástico como definido anteriormente. São válidas as seguintes propriedades:*

- i) $Z(t)$ é uma martingala- \mathcal{A}_t ;*
- ii) $Z(t)$ tem uma versão contínua, isto é, com trajectórias q.c. contínuas;*
- iii) $Z(t)$ tem incrementos não-correlacionados.*

As classes de funções até aqui apresentadas são bastante simples. Na prática interessa-nos estudar integrais de Itô onde a função G não pertence apenas ao espaço $H^2[0, t]$, mas a uma classe mais ampla: a classe das funções no espaço $M^2[0, t]$.

Definição 3.2.8 *Dizemos que $G(s, \omega)$ é uma função do espaço $M^2[0, t]$ se:*

- i) é conjuntamente mensurável;*
- ii) é não-antecipativa em relação à filtração \mathcal{A}_s ;*
- iii) o integral*

$$\int_0^t G^2(s) ds$$

existe e é finito q.c..

Note-se que a exigência $\int_0^t G^2(s) ds < +\infty$ é mais fraca do que a que foi apresentada na definição de espaço H^2 , logo $H^2[0, t] \subset M^2[0, t]$.

A extensão do integral de Itô a funções do espaço $M^2[0, t]$ é semelhante à efectuada para sucessões de funções em escada aproximadoras em $H_E^2[0, t]$, estando a diferença no tipo de convergência, que é mais fraca.

Teorema 3.2.2 *Seja $G \in M^2[0, t]$. Então, existe uma sucessão de funções limitadas em escada, $G_n \in H_E^2[0, t]$, tais que*

$$\int_0^t (G(s) - G_n(s))^2 ds \rightarrow 0 \text{ q.c.}, \quad n \rightarrow +\infty$$

Definição 3.2.9 *Sejam G e G_n nas condições do teorema anterior. O integral de Itô da função G no intervalo $[0, t]$ é dado por*

$$\int_0^t G(s) dW(s) = \text{l.i.m.}_{n \rightarrow +\infty} P \int_0^t G_n(s) dW(s).$$

Observação 3.2.2 Dada a natureza das funções do espaço $M^2[0, t]$, não existe a garantia de que as propriedades (3.11), (3.12) e (3.13) se verifiquem pois os respectivos momentos podem não existir.

Finda a apresentação do integral de Itô, é agora necessário introduzir as regras para o cálculo destes integrais: o cálculo de Itô.

3.3 Cálculo de Itô

O cálculo de Itô diverge do cálculo habitual pela simples introdução de uma nova regra de diferenciação (regra da cadeia de Itô). Vamos apresentar a definição de processo de Itô e de seguida o teorema de Itô que nos conduz ao cálculo dos integrais estocásticos.

Definição 3.3.1 Sejam $(W(t), t \geq 0)$ o processo de Wiener, X_0 uma variável aleatória \mathcal{A}_0 -mensurável, F uma função conjuntamente mensurável adaptada à filtração \mathcal{A}_s e tal que $\int_0^d |F(s)| ds < +\infty$ q.c. e ainda G uma função do espaço $M^2[0, d]$. Chama-se processo de Itô, definido em $t \in [0, d]$, ao integral estocástico

$$X(t, \omega) = X_0(\omega) + \int_0^t F(s, \omega) ds + \int_0^t G(s, \omega) dW(s) \quad (3.15)$$

(3.15) pode ainda ser escrito na forma diferencial como

$$dX(t) = F(t)dt + G(t)dW(t) \quad (3.16)$$

Teorema 3.3.1 (Teorema de Itô) Sejam $X(t, \omega)$ um processo de Itô como definido anteriormente e $Y(t) = h(t, X(t))$ onde h , $h_t(t, x)$ e $h_{xx}(t, x)$ são contínuas. Então:

i) $Y(t) = Y(t, \omega)$ é um processo de Itô com condição inicial $Y_0 = h(0, X_0)$;

ii) a forma diferencial de $Y(t)$ é dada pela regra da cadeia de Itô:

$$dY_t = \left(\frac{\partial h(t, X_t)}{\partial t} + \frac{\partial h(t, X_t)}{\partial x} F(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h(t, X_t)}{\partial x^2} G^2(t) \right) dt + \frac{\partial h(t, X_t)}{\partial x} G(t) dW_t; \quad (3.17)$$

iii) a forma integral de $Y(t)$ é dada por

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \left(\frac{\partial h(s, X_s)}{\partial s} + \frac{\partial h(s, X_s)}{\partial x} F(s) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h(s, X_s)}{\partial x^2} G^2(s) \right) ds + \int_0^t \frac{\partial h(s, X_s)}{\partial x} G(s) dW_s. \quad (3.18)$$

Finda a apresentação de definições, propriedades e teoremas relativos ao cálculo de Itô, podemos agora resolver equações diferenciais estocásticas, ou seja, calcular as suas soluções. Começamos pela definição de solução de uma equação diferencial estocástica de Itô. No que se segue consideramos:

- i) $W = (W_t, t \geq 0)$ o processo de Wiener;
- ii) X_0 uma variável aleatória independente do processo de Wiener;
- iii) $\mathcal{A}_t = \mathcal{F}(X_0, W_s), 0 \leq s \leq t \geq 0$;
- iv) F, G duas funções definidas em $[0, T]$, conjuntamente mensuráveis e $T > 0$.

Definição 3.3.2 O processo estocástico X_t é solução da equação diferencial estocástica de Itô

$$\begin{cases} dX_t = F(X_t, t)dt + G(X_t, t)dW_t, & 0 \leq t \leq T \\ X(0) = X_0, \end{cases} \quad (3.19)$$

se

- i) X é \mathcal{F}_t -mensurável;
- ii) F é não-antecipativa e

$$\int_0^T F dt < +\infty;$$

- iii) G é não-antecipativa e

$$\int_0^T G^2 dt < +\infty;$$

- iv)

$$X_t = X_0 + \int_0^t F(X_s, s)ds + \int_0^t G(X_s, s)dW_t \quad q.c., \quad \forall t \in [0, T].$$

3.4 Teorema da Existência e Unicidade

Teorema 3.4.1 *Sejam $F : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ e $G : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções contínuas que satisfazem as seguintes condições:*

$$i) |F(x, t) - F(y, t)| \leq L|x - y| \text{ e } |G(x, t) - G(y, t)| \leq L|x - y|, \forall 0 \leq t \leq T \text{ e } \forall x, y \in \mathbb{R};$$

$$ii) |F(x, t)| \leq L(1 + |x|) \text{ e } |G(x, t)| \leq L(1 + |x|), \forall 0 \leq t \leq T \text{ e } \forall x \in \mathbb{R},$$

onde $L > 0$ é uma constante.

Seja X_0 uma variável aleatória independente dos incrementos futuros do processo de Wiener e tal que

$$E[|X_0^2|] < +\infty;$$

Nestas condições, existe uma única solução X_t da equação diferencial estocástica de Itô

$$\begin{cases} dX_t = F(X_t, t)dt + G(X_t, t)dW_t, & 0 \leq t \leq T \\ X(0) = X_0. \end{cases} \quad (3.20)$$

Esta solução é um processo de Markov e, se F e G forem contínuas em t , é também um processo de difusão.

A unicidade enunciada significa o seguinte: se X_t e Y_t forem soluções da equação (3.20) então

$$P[X_t = Y_t] = 1, \quad \forall 0 \leq t \leq T.$$

As restrições impostas às funções F e G são, respectivamente, a continuidade uniforme à Lipschitz e restrição ao crescimento.

A demonstração deste teorema recorre ao Lema de Gronwall e encontra-se em qualquer bom livro de equações diferenciais estocásticas, nomeadamente em [3].

Corolário 3.4.1 *No caso de a equação (3.20) ser autónoma, isto é, $F(X_t, t) = f(X_t)$ e $G(X_t, t) = g(X_t)$, com f e g com derivada contínua, então existe solução única da EDE (3.20) até um possível instante de explosão. Se se verificar que o instante de explosão é $+\infty$ com probabilidade 1, então a solução existe e é única para todo o $t \geq 0$.*

Modelos de Crescimento Individual

Neste capítulo apresentamos uma grande variedade de modelos de crescimento individual, as suas propriedades e, nos casos pertinentes, as respectivas soluções. Começamos por apresentar modelos determinísticos, isto é, modelos que não têm em conta as flutuações aleatórias do ambiente onde o indivíduo está inserido. Seguem-se os modelos estocásticos, mais completos e com aplicações significativamente mais realistas que os modelos determinísticos. De modo a estudar as propriedades e soluções dos modelos estocásticos são necessários conhecimentos do cálculo de Itô, devido à presença de integrais estocásticos na resolução das equações diferenciais estocásticas que modelam o crescimento individual. Os conhecimentos necessários a este estudo foram introduzidos nos capítulos anteriores.

Neste texto, a palavra *indivíduo* refere-se a um animal, uma planta, à cotação de uma acção, etc. O objectivo é estudar a evolução de um indivíduo ao longo do tempo, tendo em conta as flutuações ambientais que o rodeiam, através da aplicação de vários modelos. Finalmente, apresentamos as comparações entre esses modelos e justificamos a preferência de um modelo relativamente a outros.

4.1 Modelos Determinísticos

Os modelos determinísticos de crescimento individual são, na sua maior parte, adaptações de modelos clássicos do crescimento de populações. Enquanto que nos modelos de crescimento populacionais estamos interessados em descrever a forma como varia o número de indivíduos através do tempo, nos modelos de crescimento individual estudamos as alterações no tamanho de um único

indivíduo. Modelos como o de Malthus, o logístico e o de Gompertz foram aplicados, por exemplo, por Malthus (*An essay on the principle of population*, 1798), Verhulst (*Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement*, 1838) e Gompertz (*On the nature of the function expressive of the law of human mortality*, 1825) no estudo do crescimento de populações e indivíduos.

4.1.1 Modelos autónomos

Nesta secção apresentamos os modelos determinísticos autónomos, isto é, modelos que não incorporam a aleatoriedade ambiental e cuja forma funcional depende da variável temporal unicamente através de X_t . Estes modelos podem ser representados, de forma genérica, pela equação

$$dX(t) = f(X(t))dt, \quad (4.1)$$

onde $X(t)$ representa o tamanho do indivíduo no instante t e $f(X(t))$ a taxa com que esse tamanho evolui com o tempo. Para cada função particular $f(x)$, obtemos um novo modelo. Assim, para $f(x) = bx$, $f(x) = bx(1 - \frac{x}{a})$ e $f(x) = b(a - x)$ obtemos, respectivamente, os modelos exponencial, logístico e monomolecular, apenas para fornecer alguns exemplos.

O modelo exponencial: $f(X(t)) = bX(t)$

Suponhamos que queremos estudar a evolução do crescimento de um indivíduo num determinado meio. Designemos por $X(t)$ o tamanho (peso, altura, comprimento, volume, etc.) do indivíduo no instante de tempo $t \geq 0$. Suponhamos ainda que, no instante t_0 , conhecemos o seu tamanho, seja $X(t_0) = x_0$. Nestas condições, um dos modelos mais popular, antigo, simples e com várias aplicações é o modelo exponencial (ou modelo de Malthus) descrito por

$$\frac{dX(t)}{dt} = bX(t), \quad X(t_0) = x_0, \quad (4.2)$$

onde b representa o coeficiente de crescimento intrínseco do indivíduo. A solução desta equação é bastante simples de calcular, obtendo-se

$$X(t) = x_0 e^{b(t-t_0)}.$$

Este modelo, devido a Malthus em 1798, é irrealista pois permite que o indivíduo cresça infinitamente (caso $b > 0$), ignorando assim as restrições impostas pelo ambiente onde o indivíduo está inserido (abundância de alimentos, carga genética, etc.). Por outro lado, também permite tamanhos bastante pequenos (e, no limite, nulos) no caso em que $b < 0$. A figura 4.1 mostra estes dois exemplos. A aplicação deste modelo ao crescimento do tamanho de um indivíduo é completamente

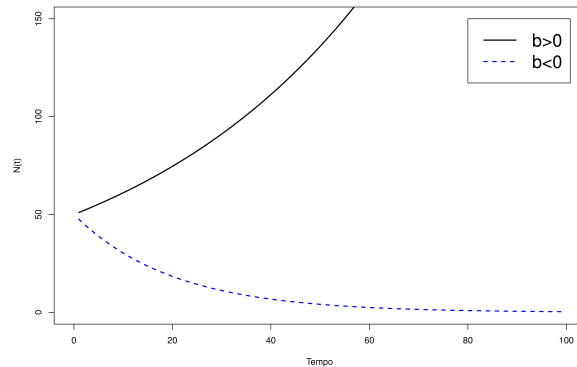


Figura 4.1: Exemplo gráfico do modelo exponencial com $b = 0.02 > 0$, $b = -0.05 < 0$ e $X(0) = 50$.

inadequada. Basta verificar que o peso, altura ou tamanho de um indivíduo atingem um valor médio a partir de determinada idade. Porém, pode ser razoável aplicar o modelo Malthusiano a um período de crescimento temporariamente limitado, geralmente numa fase inicial.

O modelo logístico: $f(X(t)) = bX(t) \left(1 - \frac{X(t)}{a}\right)$

O problema da modelação do crescimento ilimitado foi ultrapassado em 1838 por Verhulst, que propôs um modelo que limitasse o crescimento, chamado modelo logístico (ou modelo de Verhulst):

$$\frac{dX(t)}{dt} = bX(t) \left(1 - \frac{X(t)}{a}\right), \quad (4.3)$$

onde $b > 0$ representa o coeficiente de crescimento intrínseco do indivíduo e $a > 0$ é um valor de referência que, no caso da modelação do crescimento de animais, representa o tamanho na maturidade. A solução deste modelo pode obter-se aplicando a mudança de variável $Y(t) = \frac{a}{X(t)}$ e integrando no intervalo $[t_0, t]$:

$$X(t) = \frac{x_0 a e^{b(t-t_0)}}{a + x_0 (e^{b(t-t_0)} - 1)},$$

onde $X(t_0) = x_0$ é o valor do tamanho do indivíduo no instante t_0 . O gráfico deste modelo é semelhante a um S alongado, onde o "alongamento" significa a tendência do modelo ao aproximar-se do valor de referência. Apresentamos um exemplo na figura 4.2.

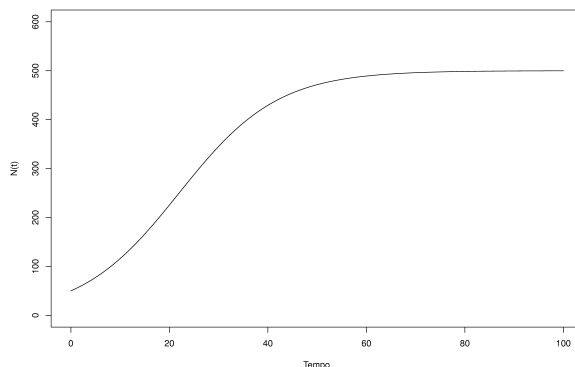


Figura 4.2: Exemplo gráfico do modelo logístico com $b = 0.1$, $a = 500$ e $X(0) = 50$.

A grande diferença entre este modelo e o anterior é que o tamanho do indivíduo aproxima-se, quando $t \rightarrow +\infty$, do valor de referência a , não permitindo deste modo o crescimento infinito mas permitindo um crescimento praticamente exponencial até determinado instante. De facto, faz todo o sentido que o tamanho evolua de acordo com o meio envolvente e que se aproxime de um determinado valor, oscilando em torno desse valor. Note-se que, no limite, este modelo reduz-se ao anterior quando o valor de referência é suficientemente grande.

O modelo monomolecular: $f(X(t)) = b(a - X(t))$

Outro modelo clássico é o modelo monomolecular (ou modelo de Mitscherlich), muitas vezes aplicado a problemas de modelação na agricultura (crescimento de árvores e plantas) e ao crescimento de humanos. Este modelo tem a seguinte expressão:

$$\frac{dX(t)}{dt} = b(a - X(t)), \quad (4.4)$$

com $b > 0$ a representar o coeficiente de crescimento e $a > 0$ o tamanho na maturidade (no caso de indivíduos) ou a capacidade de sustentabilidade do meio (no caso de populações). Aplicando a mudança de variável $Y(t) = a - X(t)$ e integrando no intervalo $[t_0, t]$, obtém-se a solução

$$X(t) = a - (a - x_0)e^{-b(t-t_0)}. \quad (4.5)$$

Um exemplo gráfico deste modelo apresenta-se na figura 4.4.

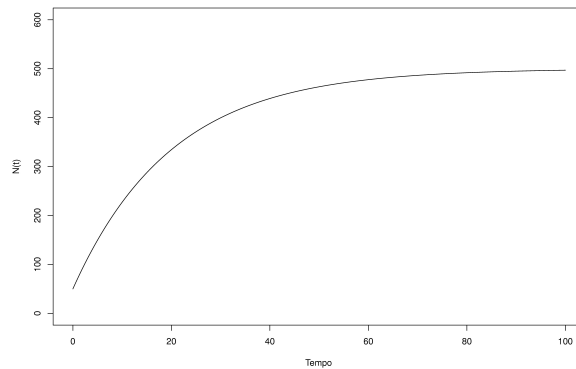


Figura 4.3: Exemplo gráfico do modelo monomolecular com $b = 0.05$, $a = 500$ e $X(0) = 50$.

O modelo de Bertalanffy-Richards: $f(X(t)) = \frac{b}{c}X(t) (a^c X^{-c}(t) - 1)$

Um dos primeiros modelos (senão o primeiro) a ser usado de forma específica para descrever o crescimento individual, proposto por Bertalanffy (1959) e Richards (1959), foi o modelo de Bertalanffy-Richards, dado pela equação

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{b}{c}X(t) (a^c X^{-c}(t) - 1) dt, \quad X(t_0) = x_0, c > 0, \quad (4.6)$$

onde a representa o tamanho médio assintótico, b a taxa de aproximação ao tamanho médio assintótico, $X(t)$ o tamanho do indivíduo no instante de tempo t e $X(t_0) = x_0$ o tamanho inicial do indivíduo. O parâmetro c está relacionado com o tipo de medida que se quer modelar. Para descrever medidas não-lineares, como volume ou peso, é natural considerar $c = \frac{1}{3}$. A solução deste modelo é dada por

$$X(t) = a \left[1 - (1 - (x_0/a)^c) e^{b(t-t_0)} \right]^{1/c}. \quad (4.7)$$

O modelo de Gompertz: $f(X(t)) = bX(t)(\ln(a) - \ln(X(t)))$

O modelo de Gompertz pode ser considerado o caso limite do modelo de Bertalanffy-Richards quando $c = 0$. Este modelo é representado pela equação

$$\frac{dX(t)}{dt} = bX(t)(\ln(a) - \ln(X(t))) dt, \quad X(t_0) = x_0, \quad (4.8)$$

e a sua solução é dada por

$$X(t) = a \exp\{-b \exp\{-b(t - t_0)\}\}. \quad (4.9)$$

Na figura seguinte apresentamos um exemplo gráfico dos modelos de Bertalanffy-Richards e Gompertz:

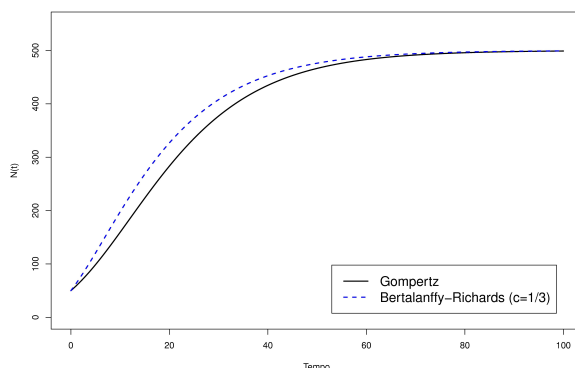


Figura 4.4: Exemplo gráfico dos modelos de Gompertz e Bertalanffy-Richards com $b = 0.07$, $a = 500$ e $X(0) = 50$.

O modelo monomolecular generalizado

Os modelos referidos anteriormente podem ser incorporados num único modelo, a que chamamos modelo monomolecular generalizado, cuja representação é a seguinte

$$dY(t) = b(A - Y(t))dt, \quad Y(t_0) = y_0, \quad (4.10)$$

com $Y(t) = h(X(t))$ a representar uma função de transformação estritamente crescente de classe C^1 , $y_0 = h(x_0)$ o tamanho inicial transformado, $A = h(a)$ o tamanho assintótico transformado, $b > 0$ a taxa de aproximação ao tamanho assintótico, $X(t)$ o tamanho do indivíduo no instante de

tempo t e $X(t_0) = x_0 > 0$ o tamanho inicial do indivíduo. Deste modo, os modelos atrás descritos, com exceção do modelo exponencial que não tem convergência assintótica para uma constante, são casos particulares do modelo monomolecular generalizado, através das seguintes transformações:

- $h(x) = -1/x$, corresponde ao modelo logístico;
- $h(x) = x$, corresponde ao modelo monomolecular;
- $h(x) = x^c$, corresponde ao modelo de Bertalanffy-Richards;
- $h(x) = \ln(x)$, corresponde ao modelo de Gompertz.

4.1.2 Modelos não-autónomos

Os modelos não-autónomos que se seguem podem ser consultados em [1].

Modelos multifásicos

As curvas de crescimento de um indivíduo apresentam, com alguma regularidade, vários períodos de crescimento rápido. No caso humano, parece-nos razoável considerar que, do nascimento à adolescência, o crescimento é mais *rápido* do que a partir de aqui até à idade adulta. Estes períodos de crescimento podem ser combinados num mesmo modelo que incorpora as várias fases do crescimento. Koops (1986) propôs um modelo baseado em n modelos logísticos para obter um modelo de crescimento multifásico. Bock e Thissen (1976) utilizaram este modelo com $n = 2$ e $n = 3$ para descrever a evolução da altura dos seres humanos. Existem ainda estudos, aplicados a dados de peso de ratos e coelhos, que mostram uma melhoria substancial no ajustamento destes modelos em relação ao uso de modelos monofásicos.

O modelo de Weibull

Em 1951 o modelo de Weibull foi introduzido como um modelo polivalente. A sua origem prende-se com a distribuição de probabilidade de Weibull. Este modelo é aplicado, muitas vezes, em dinâmica populacional (ver [8]) e no estudo de casos de sobrevivência relacionados com doenças e infecções. É ainda aplicado como modelo de crescimento individual (ver [27]) e é descrito pela equação

$$\frac{dX(t)}{dt} = mbt^{m-1}(A - X(t)),$$

com solução

$$X(t) = A - de^{-b(t-t_0)^m},$$

onde $d = A - x_0$. Note-se que este modelo reduz-se ao monomolecular no caso em que $m = 1$.

O modelo de Jolicoeur

O modelo de Jolicoeur (ver [19]) é derivado do modelo logístico. Este modelo é descrito pela equação

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{m}{t}X(t) \left(1 - \frac{X(t)}{A}\right),$$

e a sua solução é dada por

$$X(t) = \frac{A}{1 + b(t - t_0)^{-m}}.$$

O modelo de Johnson

Este modelo (ver [25]) tem aplicações no crescimento de peixes. A sua equação e solução são dadas, respectivamente, por

$$\frac{dX(t)}{dt} = -\frac{1}{bt^2}X(t)$$

$$X(t) = Ae^{\frac{1}{b(t-t_0)}}.$$

O modelo de Tanaka

A maioria dos modelos até aqui apresentados têm a particularidade de possuírem um limite superior de crescimento. Em 1982, Tanaka introduziu um modelo com um período inicial de crescimento exponencial seguido de um lento período de crescimento *indeterminado*. Este modelo, com

quatro parâmetros, foi pioneiro a descrever o crescimento *indeterminado* e teve aplicações a dados do crescimento de conchas. Note-se que a palavra *indeterminado* não se refere a um crescimento infinito, até porque, na natureza, existem sempre restrições ao livre crescimento. Refere-se sim, a um crescimento muito lento que se situa em torno de um valor quando o indivíduo atinge a maturidade. Este modelo é representado pela seguinte expressão

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{1}{\sqrt{f(t-c)^2 + a}},$$

cuja solução é

$$X(t) = \frac{1}{\sqrt{f}} \ln(|2f(t-c) + 2\sqrt{f^2(t-c)^2 + fa}|) + d.$$

O modelo polinomial

O uso de polinómios para representar curvas de crescimento foi utilizado por Goldstein (1979) e Wishart (1938). A grande vantagem deste técnica reside no facto de os polinómios poderem aproximar uma curva. Boas propriedades estatísticas, nomeadamente a qualidade do ajustamento, fizeram estes autores aplicar este modelo, com um polinómio de grau três, a dados de crescimento da altura de adolescentes.

Um exemplo do modelo polinomial, aplicado por Yi e Li-feng, baseado no modelo de Gompertz é

$$X(t) = ce^{\sum_{j=0}^{n-1} \beta_j t^j}.$$

4.2 Modelos Estocásticos

No caso estocástico queremos adicionar ao modelo determinístico¹ a aleatoriedade ambiental. Para isso, consideramos que o indivíduo está sujeito a flutuações aleatórias do ambiente que afetam o seu crescimento. Deste modo, o modelo (4.1) assume a forma de uma equação diferencial estocástica

$$dX(t) = f(X(t))dt + g(X(t))\varepsilon(t)dt, \quad (4.11)$$

¹Estudamos apenas os modelos estocásticos autónomos.

onde a aleatoriedade ambiental é representada pela presença de um ruído aditivo colorido, que aproximamos pelo ruído branco padrão $\varepsilon(t)$, proporcional à intensidade das flutuações aleatórias com factor de proporcionalidade $g(X(t))$ que pode depender do tamanho do indivíduo. Na secção 2.2.2, verificamos que o ruído branco padrão é a *derivada* do processo de Wiener. Tendo este aspecto em conta, podemos re-escrever a equação (4.11) do seguinte modo

$$dX(t) = f(X(t))dt + g(X(t))dW(t), \quad (4.12)$$

onde $W(t)$ é um processo de Wiener (definido em 2.2.12). A correspondente forma integral é

$$X(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(X(s))ds + \int_{t_0}^t g(X(s))dW(s), \quad t_0 \geq 0, t > 0, \quad (4.13)$$

considerando $X(t_0) = x_0$.

A existência e unicidade da solução desta equação (autónoma) são dadas pelo corolário 3.4.1. Sabemos que $X(t)$ é um processo de difusão homogêneo (ver 2.2.14) com coeficientes de tendência e difusão dados, respectivamente, por

$$a(t, x) = f(x)$$

e

$$b(t, x) = g^2(x).$$

Tal como nos modelos determinísticos, existem na literatura vários modelos estocásticos de crescimento individual em ambiente aleatório. Não faremos aqui uma exposição exaustiva de todos esses modelos, mas uma síntese dos mais relevantes do ponto de vista prático, isto é, daqueles que podemos aplicar (e que já aplicámos) a dados disponíveis, como por exemplo, dados de bovinos e dados financeiros. Iremos igualmente apresentar as soluções e algumas propriedades destes modelos.

4.2.1 O modelo estocástico monomolecular generalizado

Consideremos o modelo determinístico generalizado (4.10)

$$dY(t) = b(A - Y(t))dt, \quad Y(0) = y_0, \quad (4.14)$$

ao qual se adiciona a aleatoriedade das flutuações ambientais $g(X(t)) = \sigma$, que supomos de intensidade constante em termos do seu efeito sobre $Y(t)$. Vem

$$dY(t) = b(A - Y(t))dt + \sigma dW(t), \quad Y(0) = y_0, \quad (4.15)$$

onde, tal como no modelo determinístico generalizado, $Y(t) = h(X(t))$ representa uma função de transformação estritamente crescente de classe C^1 , $y_0 = h(x_0)$ o tamanho inicial transformado, $A = h(a)$ o tamanho médio assintótico transformado, $b > 0$ a taxa de aproximação ao tamanho médio assintótico, $X(t)$ o tamanho do indivíduo no instante de tempo t e $X(t_0) = x_0$ o tamanho inicial do indivíduo. A intensidade das flutuações aleatórias do ambiente é representada por σ .

A este modelo chamamos modelo estocástico monomolecular generalizado (conhecido na literatura financeira como modelo de Vasicek).

Este modelo, vastamente utilizado para modelar o crescimento individual em ambiente aleatório, é conhecido também como modelo de reversão para a média pois considera que o processo $Y(t)$ converge para o valor de referência A com uma taxa de aproximação b . O nome de *reversão para a média* resulta do facto de este processo reverter para o valor de referência A , na ausência de flutuações aleatórias do ambiente, isto é, quando $\sigma = 0$.

O modelo estocástico monomolecular generalizado satisfaz as condições do Teorema 3.4.1, logo podemos determinar a sua solução, a qual sabemos ser um processo de difusão homogéneo com coeficiente de tendência $b(A - y)$ e coeficiente de difusão σ^2 . Para a obter podemos aplicar o cálculo de Itô e a transformação $Z(t) = Y(t) - A$, cujo resultado² é

$$Y(t) = A + e^{-bt}(y_0 - A) + \sigma e^{-bt} \int_0^t e^{bs} dW(s). \quad (4.16)$$

Atendendo a (3.14) e ao facto de que em (4.16) a função integranda ser determinística, concluímos que o integral estocástico segue uma distribuição Normal com média zero e variância $\frac{e^{2bt}-1}{2b}$, pelo que o processo $Y(t)$ tem distribuição Normal, isto é,

²A resolução desta EDE encontra-se no apêndice A.1.

$$Y(t) \sim \mathcal{N}\left(A + e^{-bt}(y_0 - A), \frac{\sigma^2}{2b}(1 - e^{-2bt})\right). \quad (4.17)$$

Em regime assintótico, ou seja, quando $t \rightarrow +\infty$, esta distribuição converge para uma distribuição Normal

$$\mathcal{N}\left(A, \frac{\sigma^2}{2b}\right).$$

Se considerarmos que existe uma variável aleatória com esta última distribuição, seja $Y_{+\infty}$, então podemos dizer que Y_t converge em distribuição para $Y_{+\infty}$ e a densidade estacionária é a função densidade de probabilidade da distribuição estacionária.

A grande diferença entre este modelo e o determinístico é que, enquanto que no primeiro o processo evolui de forma aleatória com a sua distribuição de probabilidade a convergir para uma distribuição de equilíbrio, no modelo determinístico o processo converge simplesmente para o valor de referência A .

Conhecida a solução do modelo e suas distribuições, podemos calcular as estimativas dos parâmetros $p = (A, b, \sigma)$ para descrevermos a sua evolução. Suponhamos que o processo $Y(t)$ representa a evolução do tamanho de um indivíduo observado nos instantes $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ e designemos essas observações pelas variáveis aleatórias $Y_0 = Y(t_0), \dots, Y_n = Y(t_n)$ e $Y = (Y_0, \dots, Y_n)$. Sejam $y = (y_0, \dots, y_n)$ os valores observados dessas variáveis aleatórias. Para determinar a densidade de transição entre dois instantes de observação consecutivos t_{k-1} e t_k , tomemos como condição inicial $Y_{t_{k-1}} = y_{k-1}$ e resolvamos a EDE. Neste caso, a solução é dada por

$$Y(t_k) = A + e^{-b(t_k - t_{k-1})}(y_{k-1} - A) + \sigma e^{-bt_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{bs} dW(s), \quad \forall k = 1, \dots, n. \quad (4.18)$$

Logo, a distribuição de Y_{t_k} condicionada a se ter $Y_{t_{k-1}} = y_{k-1}$, é Gaussiana com média $A + e^{-b(t_k - t_{k-1})}(y_{k-1} - A)$ e variância $\frac{\sigma^2}{2b}(1 - e^{-2b(t_k - t_{k-1})})$. Assim, a função densidade de probabilidade

de transição, isto é de Y_k condicionada a se ter $Y_{k-1} = y_{k-1}$, é

$$f_{Y_k|Y_{k-1}=y_{k-1}}(y_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\sigma^2}{2b} (1 - e^{-2b(t_k - t_{k-1})})}} e^{-\frac{(y_k - A - (y_{k-1} - A)e^{-b(t_k - t_{k-1})})^2}{2\frac{\sigma^2}{2b}(1 - e^{-2b(t_k - t_{k-1})})}}. \quad (4.19)$$

O cálculo do vector de estimativas p pode ser efectuado pelo método da máxima verosimilhança. Uma vez que, pelas propriedades dos processos de Markov, a densidade conjunta das variáveis aleatórias Y_1, \dots, Y_n , dado Y_0 , é o produto das densidades de transição (4.19), esta densidade conjunta tem valores coincidentes por definição com a função de verosimilhança, pelo que obtemos para função de log-verosimilhança

$$\mathcal{L}(y; p) = -\frac{n}{2} \ln \left(\frac{\sigma^2}{2b} \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \ln(1 - e^{-2b\bar{t}_k}) - \frac{b}{\sigma^2} \sum_{k=1}^n \frac{(y_k - A - (y_{k-1} - A)e^{-b\bar{t}_k})^2}{1 - e^{-2b\bar{t}_k}} - \frac{n}{2} \ln(2\pi), \quad (4.20)$$

onde $\bar{t}_k = t_k - t_{k-1}$.

As estimativas de máxima verosimilhança, $\hat{p} = (\hat{A}, \hat{b}, \hat{\sigma})$, do vector $p = (A, b, \sigma)$, podem ser obtidas por maximização da função \mathcal{L} ou através da resolução de um sistema não-linear de equações baseado nas condições de primeira ordem (ver [6])

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}(y; p)}{\partial A} \Big|_{\hat{A}} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}(y; p)}{\partial b} \Big|_{\hat{b}} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}(y; p)}{\partial \sigma} \Big|_{\hat{\sigma}} = 0 \end{cases}$$

Estes duas vias de resolução empregam métodos numéricos e de optimização que, na maior parte dos casos, requerem um esforço computacional considerável, bem como algum tempo dispendido na programação dos correspondentes algoritmos. Assim, apresentamos um método alternativo mais simples, rápido, com pouco esforço computacional e com grandes vantagens de aplicação prática a dados reais. Este método por ser consultado em [16].

Das três condições de primeira ordem escolhem-se duas e resolvem-se em ordem à respectiva variável:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(y; p)}{\partial A} = 0 \Leftrightarrow -\frac{b}{\sigma^2} \sum_{k=1}^n \frac{y_k - A - (y_{k-1} - A)e^{-b\bar{t}_k}}{1 + e^{-b\bar{t}_k}} = 0,$$

donde

$$\hat{A} = \sum_{k=1}^n \frac{y_k - y_{k-1}e^{-\hat{b}\bar{t}_k}}{1 + e^{-\hat{b}\bar{t}_k}} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1 - e^{-\hat{b}\bar{t}_k}}{1 + e^{-\hat{b}\bar{t}_k}} \right)^{-1} =: \psi_1(\hat{b}) \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(y; p)}{\partial \sigma} = 0 \Leftrightarrow -\frac{n}{\sigma} + \frac{2b}{\sigma^3} \sum_{k=1}^n \frac{(y_k - A - (y_{k-1} - A)e^{-b\bar{t}_k})^2}{1 - e^{-2b\bar{t}_k}} = 0,$$

donde

$$\hat{\sigma} = \left[\frac{2\hat{b}}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(y_k - \hat{A} - (y_{k-1} - \hat{A})e^{-\hat{b}\bar{t}_k})^2}{1 - e^{-2\hat{b}\bar{t}_k}} \right]^{\frac{1}{2}} =: \psi_2(\hat{A}, \hat{b}) \quad (4.22)$$

As equações (4.21) e (4.22) definem duas funções que relacionam as estimativas de máxima verosimilhança, nomeadamente \hat{A} como uma função de \hat{b} , $\psi_1(\hat{b})$, e $\hat{\sigma}$ como uma função de \hat{A} e \hat{b} , $\psi_2(\hat{A}, \hat{b})$

Ao substituírmos estas duas funções na função de log-verosimilhança (4.20), calculada no ponto \hat{p} , obtemos uma nova função, \mathcal{L}^* , que depende apenas de um parâmetro. Com efeito,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y, \hat{p}) = \mathcal{L}^*(y; \hat{b}) := & -\frac{n}{2} \ln \left(\frac{\psi_2(\psi_1(\hat{b}), \hat{b})^2}{2\hat{b}} \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \ln(1 - e^{-2\hat{b}\bar{t}_k}) - \\ & - \frac{\hat{b}}{\psi_2(\psi_1(\hat{b}), \hat{b})^2} \sum_{k=1}^n \frac{(y_k - \psi_1(\hat{b}) - (y_{k-1} - \psi_1(\hat{b}))e^{-\hat{b}\bar{t}_k})^2}{1 - e^{-2\hat{b}\bar{t}_k}} - \frac{n}{2} \ln(2\pi). \end{aligned} \quad (4.23)$$

O problema inicial de optimização resume-se agora à maximização de uma função de uma variável \hat{b} .

Após a determinação da estimativa de b , \hat{b} , as estimativas de A , \hat{A} , e de σ , $\hat{\sigma}$, calculam-se a partir das funções $\psi_1(\hat{b})$ e $\psi_2(\hat{A}, \hat{b})$.

4.2.2 O modelo estocástico monomolecular generalizado para vários indivíduos

O modelo anterior considerava apenas a evolução do tamanho de um indivíduo. Porém, na vida real tem particular interesse o estudo da evolução do tamanho de um indivíduo, quando este se encontra inserido num conjunto de indivíduos *semelhantes*. A palavra *semelhante* significa que os indivíduos co-habitam no mesmo meio e as suas características não diferem muito de indivíduo para indivíduo, não obstante a diferente carga genética de cada um. Este modelo, quando aplicado ao crescimento de animais, toma partido do conhecimento relativo ao crescimento dos outros indivíduos.

Consideremos o modelo anterior e a existência de m indivíduos observados em diferentes instantes. Para o indivíduo j temos os instantes de observação $0 = t_{j,0} < t_{j,1} < \dots < t_{j,n_j}$, com $j = 1, \dots, m$ e n_j o número de observações do indivíduo j . Sejam $Y(t_{j,k}) = y_{j,k}$ ($k = 1, \dots, n_j$) as observações do indivíduo j ($j = 1, \dots, m$). Consideramos ainda que, para este caso, os resultados sobre a distribuição do processo $Y(t)$, apresentados no modelo anterior, continuam válidas.

Para o indivíduo j podemos escrever a função de log-verosimilhança como

$$\mathcal{L}_{Y_j}(y_j; p) = -\frac{n_j}{2} \ln \left(\frac{\sigma^2}{2b} \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_j} \ln(1 - e^{-2b\bar{t}_{j,k}}) - \frac{b}{\sigma^2} \sum_{k=1}^{n_j} \frac{\left(y_{j,k} - A - (y_{j,k-1} - A)e^{-b\bar{t}_{j,k}} \right)^2}{1 - e^{-2b\bar{t}_{j,k}}} - \frac{n_j}{2} \ln(2\pi), \quad (4.24)$$

onde $\bar{t}_{j,k} = t_{j,k} - t_{j,k-1}$.

É natural considerar que as observações de cada indivíduo são independentes dos outros indivíduos. Logo, a função de log-verosimilhança global para os m indivíduos é dada pela soma das funções $\mathcal{L}(y_j; p)$, isto é,

$$\mathcal{L}_{Y_1, \dots, Y_m}(y_1, \dots, y_m; p) = \sum_{j=1}^m \mathcal{L}_{Y_j}(y_j; p). \quad (4.25)$$

As estimativas de máxima verosimilhança de $p = (A, b, \sigma)$ são obtidas por um método semelhante ao explicado na secção 4.2.1.

4.2.3 O modelo de Ornstein-Uhlenbeck

No cálculo da solução do modelo estocástico monomolecular generalizado foi sugerida a mudança de variável $Z(t) = Y(t) - A$ que transforma a equação inicial na seguinte

$$dZ(t) = -bZ(t)dt + \sigma dW(t).$$

Esta equação representa o tão conhecido modelo de Ornstein-Uhlenbeck³ e é um caso particular do modelo estocástico monomolecular generalizado (corresponde ao caso em que $A = 0$).

4.2.4 O modelo estocástico de Bertalanffy-Richards

Este modelo, representado pela equação

$$dX^c(t) = b(a^c - X^c(t))dt + \sigma dW(t), \quad X(t_0) = x_0, b > 0, a > 0, \sigma > 0,$$

ou ainda por

$$dX(t) = \left[\frac{b}{c} X(t) \left(\frac{a^c}{X^c(t)} - 1 \right) + \frac{\sigma^2}{2c} \left(\frac{1}{c} - 1 \right) X^{1-2c}(t) \right] dt + \frac{\sigma}{c} X^{1-c}(t) dW(t),$$

é um caso particular do modelo estocástico monomolecular generalizado quando a função $h(x) = x^c$ e $h(a) = a^c$. Foi o primeiro modelo de crescimento especificamente designado para descrever o crescimento individual. Considerando $c = 1/3$, é um modelo bastante usado para descrever o volume e o peso de um indivíduo. As propriedades apresentadas para o modelo estocástico monomolecular generalizado (para um ou vários indivíduos) aplicam-se a este modelo com as devidas transformações de variáveis. Assim, fazendo a mudança de variável $Y(t) = X^c(t)$, obtemos de (4.16)

$$X(t) = \left\{ a^c + e^{-bt}(X_0^c - a^c) + \sigma e^{-bt} \int_0^t e^{bs} dW(s) \right\}^{1/c}.$$

³A resolução desta EDE encontra-se no apêndice A.1.

4.2.5 O modelo estocástico de Gompertz

O modelo estocástico de Gompertz deriva da aplicação da transformação $h(X(t)) = \ln(X(t))$, $A = h(a) = \ln(a)$ ao modelo (4.15). Pode ser considerado como um caso limite do modelo estocástico de Bertalanffy-Richards com $c = 0$. A sua forma é dada pela equação diferencial estocástica

$$d\ln(X(t)) = b(\ln(a) - \ln(X(t)))dt + \sigma dW(t), \quad X(t_0) = x_0 > 0,$$

com $b > 0, a > 0, \sigma > 0$. Usando o Teorema de Itô, obtemos,

$$dX(t) = \left(bX(t)(\ln(a) - \ln(X(t))) + \frac{\sigma^2}{2}X(t) \right) dt + \sigma X(t)dW(t), \quad X(t_0) = x_0,$$

ou, fazendo $\bar{a} = ae^{\frac{\sigma^2}{2b}}$,

$$dX(t) = bX(t)(\ln(\bar{a}) - \ln(X(t)))dt + \sigma X(t)dW(t), \quad X(t_0) = x_0.$$

As propriedades apresentadas para o modelo estocástico monomolecular generalizado (para um ou vários indivíduos) aplicam-se a este modelo com as devidas transformações de variáveis. Assim, fazendo a mudança de variável $Y(t) = \ln(X(t))$, obtemos de (4.16)

$$X(t) = \exp \left\{ \ln(a) + e^{-bt}(\ln(X_0) - \ln(a)) + \sigma e^{-bt} \int_0^t e^{bs} dW(s) \right\}.$$

4.2.6 O modelo estocástico de Gompertz com parâmetro limite

O modelo estocástico de Gompertz com parâmetro limite foi estudado por Gutiérrez (ver [18]) e aplicado à evolução do custo salarial médio mensal nos sectores da construção, indústria e serviços em Espanha.

Este modelo permite a introdução de um parâmetro adicional, chamado parâmetro limite, no já conhecido modelo estocástico de Gompertz com três parâmetros. Esta alteração melhora o modelo apresentado no sentido em que permite obter uma aproximação melhor aos dados. A sua inclusão afecta directamente os coeficientes de tendência e difusão e tira proveito do facto da variável em estudo ter um valor a partir do qual as trajectórias evoluem no tempo.

O modelo estocástico de Gompertz com quatro parâmetros, $p = (\alpha, \beta, \sigma, \gamma)$, é um processo de

difusão homogéneo com coeficiente de tendência $a(x) = \alpha(x - \gamma) - \beta(x - \gamma) \ln(x - \gamma)$ e coeficiente de difusão $b(x) = (x - \gamma)^2 \sigma^2$ e satisfaz a seguinte equação diferencial estocástica⁴

$$dX_t = (X_t - \gamma) (\alpha - \beta \ln(X_t - \gamma)) dt + \sigma(X_t - \gamma) dW_t, \quad X(0) = x_0, \quad (4.26)$$

onde α representa a taxa intrínseca de crescimento, β é o factor de abrandamento, σ é o coeficiente de volatilidade do ambiente e γ é o parâmetro limite, ou seja, é o valor mínimo a partir do qual o processo evolui no tempo.

A sua solução, via cálculo de Itô e com a transformação $Y_t = \ln(X_t - \gamma)$, é dada por:

$$X_t = \gamma + \exp \left\{ e^{-\beta t} \left(\ln(x_0 - \gamma) + \frac{1}{\beta} \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) (e^{\beta t} - 1) \right) + \sigma e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s} dW_s \right\}. \quad (4.27)$$

Se considerarmos que $f(y, t|x, s)$ é a densidade de transição e que é contínua em t , tem derivadas parciais contínuas em ordem a t e a s , então $f(y, t|x, s)$ pode ser determinada pela equação de Kolmogorov regressiva

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathcal{D}f = 0, \quad (4.28)$$

desde que

$$\lim_{t \uparrow s} f(y, t|x, s) = \delta(y - x),$$

com $\delta =$ função delta de Dirac e \mathcal{D} é o operador de difusão $\mathcal{D} = a(x) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} b(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

Em condições análogas, podemos ainda obter $f(y, t|x, s)$ a partir da equação de Kolmogorov progressiva (ou equação de Fokker-Planck)

$$\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial a}{\partial x} f - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} f = 0. \quad (4.29)$$

A resolução das equações (4.28) e (4.29) permite obter a densidade de transição

$$f(y, t|x, s) = \frac{1}{y - \gamma} (2\pi\sigma^2\lambda^2(s, t))^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{(\ln(y - \gamma) - \mu(s, t))^2}{2\sigma^2\lambda^2(s, t)} \right\}, \quad (4.30)$$

⁴A resolução desta EDE encontra-se no apêndice A.2.

que representa a função densidade de probabilidade da variável aleatória $\ln X_t$, isto é,

$$X_t \sim \mathcal{LN}(\mu(s, t); \sigma^2 \lambda^2(s, t)), \quad (4.31)$$

com:

$$\mu(s, t) = \exp(-\beta(t-s)) \ln(x-\gamma) + \frac{\alpha - \sigma^2/2}{\beta} (1 - \exp(-\beta(t-s)))$$

e

$$\lambda^2(s, t) = \frac{1}{2\beta} (1 - \exp(-2\beta(t-s))).$$

A estimação dos parâmetros do modelo é feita à custa da função de log-verosimilhança. Assim, considerando as observações do processo $x = (x_0, \dots, x_n)$ nos instantes (t_0, \dots, t_n) , a diferença entre instantes consecutivos é igual a h e a condição inicial é $P[X_{t_0} = x_0] = 1$, temos que a função de log-verosimilhança é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x|p) &= \log \left\{ \prod_{j=1}^n f(x_j, t_j | x_{j-1}, t_{j-1}) \right\} = \\ &= \frac{-\beta \sum_{j=1}^n \left[\ln(x_j - \gamma) - F(t-h) \ln(x_{j-1} - \gamma) - \frac{\xi(1-F(t-h))}{\beta} \right]^2}{\sigma^2(1-F^2(t-h))} - \frac{n-1}{2} \ln(2\pi) - \\ &- \frac{n-1}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{n-1}{2} \ln \left(\frac{1-F^2(t-h)}{2\beta} \right) - \sum_{j=1}^n \ln(x_j - \gamma), \end{aligned} \quad (4.32)$$

com $F(u) = e^{-\beta(t-u)}$ e $\xi = \alpha - \sigma^2/2$.

Os estimadores $\hat{\xi}$, $\hat{\beta}$, e $\hat{\sigma}^2$ são obtidos por maximização de \mathcal{L} :

$$\hat{\xi} = \frac{\hat{\beta}}{(n-1)(1-e^{-\hat{\beta}h})} \sum_{j=1}^n \left[y_{j,\hat{\gamma}} - e^{-\hat{\beta}h} y_{j-1,\hat{\gamma}} \right], \quad (4.33)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{2\hat{\beta}}{(n-1)(1-e^{-2\hat{\beta}h})} \sum_{j=1}^n \left[y_{j,\hat{\gamma}} - e^{-\hat{\beta}h} y_{j-1,\hat{\gamma}} - \frac{\hat{\xi}}{\hat{\beta}} (1-e^{-\hat{\beta}h}) \right]^2, \quad (4.34)$$

$$\hat{\beta} = \frac{1}{h} \ln \left[\frac{[\sum_{j=1}^n y_{j-1,\hat{\gamma}}]^2 - (n-1) \sum_{j=1}^n y_{j-1,\hat{\gamma}}^2}{[\sum_{j=1}^n y_{j,\hat{\gamma}}][\sum_{j=1}^n y_{j-1,\hat{\gamma}}] - (n-1) \sum_{j=1}^n (y_{j,\hat{\gamma}} y_{j-1,\hat{\gamma}})} \right], \quad (4.35)$$

com $y_{j,\hat{\gamma}} = \ln(x_j - \hat{\gamma})$, $y_{j-1,\hat{\gamma}} = \ln(x_{j-1} - \hat{\gamma})$ e $j = 1, \dots, n$.

Finalmente, o estimador $\hat{\gamma}$ é obtido pela resolução da equação não linear:

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j - \hat{\gamma}} + \frac{2\hat{\beta}}{\hat{\sigma}^2(1 - e^{-2\hat{\beta}h})} \left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{x_j - \hat{\gamma}} - \frac{e^{-\hat{\beta}h}}{x_{j-1} - \hat{\gamma}} \right) \right] \times \\ \times \left[\ln(x_j - \hat{\gamma}) - e^{-\hat{\beta}h} \ln(x_{j-1} - \hat{\gamma}) - \frac{\hat{\xi}}{\hat{\beta}}(1 - e^{-\hat{\beta}h}) \right] = 0. \quad (4.36)$$

com $\hat{\gamma} < x_{(0)}$.

Observação 4.2.1 *Esta equação pode ser resolvida pelo método de Newton-Raphson. Este método tem a vantagem de convergir quadraticamente, ao contrário de outros métodos (bissecção, falsa posição ou secante). A sua grande desvantagem prende-se com a dificuldade de programação da função objectivo bem como da sua derivada e ainda o facto de nem sempre convergir. Para contornar este problema pode-se recorrer ao método de Muller (não necessita do cálculo de derivadas e tem ordem de convergência 1.84, ou seja, aproximada ao método de Newton-Raphson).*

4.2.7 O modelo estocástico multifásico

Em modelos anteriores verificámos que a evolução do tamanho de um indivíduo apresenta apenas uma fase de crescimento, b . Isto significa que existe uma única forma funcional para descrever a dinâmica média para toda a curva de crescimento. Em [13] foi considerada uma extensão destes modelo de modo a permitir que o indivíduo apresente várias fases de crescimento ao longo da sua vida. De modo a simplificar a apresentação deste modelo consideramos duas fases de crescimento: b_1 e b_2 .

Como anteriormente, iremos considerar o modelo (4.15), onde introduzimos duas fases distintas na curva de evolução do tamanho do indivíduo

$$dY(t) = b_t(A - Y(t))dt + \sigma dW(t), \quad Y(t_0) = y_0, b_1, b_2 > 0, A > 0, \sigma > 0, \quad (4.37)$$

com

$$b_t = \begin{cases} b_1, & t \leq u \\ b_2, & t > u. \end{cases}$$

O parâmetro b passa agora a depender da idade, sendo u o instante aproximado da mudança de fase.

A solução deste modelo tem a seguinte forma

$$Y_t = \begin{cases} A + e^{-b_1(t-t_0)}(y_0 - A) + \sigma e^{-b_1 t} \int_{t_0}^t e^{b_1 s} dW(s), & t \leq u \\ A + e^{-b_2(t-u)}(Y_u - A) + \sigma e^{-b_2 t} \int_u^t e^{b_2 s} dW(s), & t > u. \end{cases}$$

As probabilidades de transição dividem-se em três casos, conforme a fase de crescimento. Assim, considerando que $n_u + 1$ é o número de observações até à idade u , temos que:

1. $\forall t_k : t_{k-1} < t_k < u, k = 1, \dots, n_u :$

$$f_{Y_k|Y_{k-1}=y_{k-1}}(y_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\sigma^2}{2b_1} (1 - e^{-2b_1(t_k-t_{k-1})})}} e^{-\frac{(y_k - A - (y_{k-1} - A)e^{-b_1(t_k-t_{k-1})})^2}{2 \frac{\sigma^2}{2b_1} (1 - e^{-2b_1(t_k-t_{k-1})})}} \quad (4.38)$$

2. $\forall t_{k-1} : u < t_{k-1} < t_k, k = n_u + 2, \dots, n :$

$$f_{Y_k|Y_{k-1}=y_{k-1}}(y_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\sigma^2}{2b_2} (1 - e^{-2b_2(t_k-t_{k-1})})}} e^{-\frac{(y_k - A - (y_{k-1} - A)e^{-b_2(t_k-t_{k-1})})^2}{2 \frac{\sigma^2}{2b_2} (1 - e^{-2b_2(t_k-t_{k-1})})}} \quad (4.39)$$

3. $\forall u : t_{k-1} < u < t_k, k = n_u + 1 :$

$$f_{Y_k|Y_{k-1}=y_{k-1}}(y_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \left[\frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{G_k^2(1-F_k^2)}{b_1} + \frac{1-G_k^2}{b_2} \right) \right]^2}} e^{-\frac{(y_k - A - (y_{k-1} - A)F_k G_k)^2}{2 \left[\frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{G_k^2(1-F_k^2)}{b_1} + \frac{1-G_k^2}{b_2} \right) \right]^2}}, \quad (4.40)$$

onde $F_k = e^{-b_1(u-t_{k-1})}$ e $G_k = e^{-b_2(t_k-u)}$.

Supondo que o indivíduo foi observado nos instantes $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ com as respectivas observações dadas por $y = (y_0, \dots, y_n)$, podemos calcular as estimativas do vector $\tilde{p} = (A, b_1, b_2, \sigma)$

pelo método da máxima verosimilhança. A função de log-verosimilhança é dada por

$$\tilde{\mathcal{L}}(y; \tilde{p}) = \mathcal{L}(y; A, b_1, \sigma) + \mathcal{L}(y, u; A, b_1, b_2, \sigma) + \mathcal{L}(y; A, b_2, \sigma),$$

donde se obtém

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}(y; \tilde{p}) = & -\frac{n}{2} \ln \left(\frac{\pi \sigma^2}{b_2} \right) - \frac{n_u}{2} \ln \left(\frac{b_2}{b_1} \right) - \frac{1}{2} \ln(b_2) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_u} \ln \left(1 - E_k^{2b_1} \right) - \\ & - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(1 - F_{n_u+1}^2) G_{n_u+1}^2}{b_1} + \frac{1 - G_{n_u+1}^2}{b_2} \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=n_u+2}^n \ln \left(1 - E_k^{2b_2} \right) - \\ & - \frac{b_1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^{n_u} \frac{\left(y_k - A - (y_{k-1} - A) E_k^{b_1} \right)^2}{1 - E_k^{2b_1}} - \frac{(y_{n_u+1} - A - (y_{n_u} - A) F_{n_u+1} G_{n_u+1})^2}{\sigma^2 \left(\frac{G_{n_u+1}^2 (1 - F_{n_u+1}^2)}{b_1} + \frac{1 - G_{n_u+1}^2}{b_2} \right)} - \\ & - \frac{b_2}{\sigma^2} \sum_{k=n_u+2}^n \frac{\left(y_k - A - (y_{k-1} - A) E_k^{b_2} \right)^2}{1 - E_k^{2b_2}}, \end{aligned} \quad (4.41)$$

onde $E_k = e^{-(t_k - t_{k-1})}$ e $\mathcal{L}(y; A, b_1, \sigma)$, $\mathcal{L}(y; A, b_2, \sigma)$ e $\mathcal{L}(y, u; A, b_1, b_2, \sigma)$ são obtidas recorrendo às densidades de transição (4.38), (4.39) e (4.40), respectivamente.

As estimativas de máxima verosimilhança são obtidas pela maximização da função $\tilde{\mathcal{L}}(y; \tilde{p})$. Os métodos numéricos utilizados para a optimização de funções requerem um conjunto inicial de dados, isto é, um ponto de partida. Na maior parte das vezes é necessário fornecer vários conjuntos de pontos iniciais para que o método de optimização convirja. Cientes de que esta tarefa é difícil e por vezes ingrata, sugerimos como pontos de arranque as estimativas obtidas para o modelo estocástico monomolecular (considerando a estimativa do parâmetro b como ponto de arranque para o parâmetro b_1). Deste modo, o utilizador apenas terá de sugerir o ponto de arranque para o parâmetro b_2 .

4.2.8 O modelo estocástico multifásico para vários indivíduos

Tal como no modelo (4.2.2), consideramos agora o caso do modelo estocástico multifásico aplicado a vários indivíduos. A equação do modelo e respectiva solução mantêm-se iguais, havendo pequenas alterações nas expressões das densidades de transição e na função de log-verosimilhança.

Consideramos a existência de m indivíduos observados nos instantes $0 = t_{j,0} < t_{j,1} < \dots < t_{j,n_j}$, cujas observações são $Y(t_{j,k}) = y_{j,k}$, com $j = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n_j$ e n_j o número de observações do indivíduo j . Assim, considerando que $n_{j,u} + 1$ é o número de observações anteriores à idade u para o indivíduo j , temos que as densidades de transição são dadas por:

1. $\forall t_{j,k} : t_{j,k-1} < t_{j,k} < u, k = 1, \dots, n_{j,u} :$

$$f_{Y_{j,k}|Y_{j,k-1}=y_{j,k-1}}(y_{j,k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\sigma^2}{2b_1} (1 - e^{-2b_1(t_{j,k}-t_{j,k-1})})}} e^{-\frac{(y_{j,k}-A-(y_{j,k-1}-A)e^{-b_1(t_{j,k}-t_{j,k-1})})^2}{2 \frac{\sigma^2}{2b_1} (1 - e^{-2b_1(t_{j,k}-t_{j,k-1})})}} \quad (4.42)$$

2. $\forall t_{j,k-1} : u < t_{j,k-1} < t_{j,k}, k = n_{j,u} + 2, \dots, n_j :$

$$f_{Y_{j,k}|Y_{j,k-1}=y_{j,k-1}}(y_{j,k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\sigma^2}{2b_2} (1 - e^{-2b_2(t_{j,k}-t_{j,k-1})})}} e^{-\frac{(y_{j,k}-A-(y_{j,k-1}-A)e^{-b_2(t_{j,k}-t_{j,k-1})})^2}{2 \frac{\sigma^2}{2b_2} (1 - e^{-2b_2(t_{j,k}-t_{j,k-1})})}} \quad (4.43)$$

3. $\forall u : t_{j,k-1} < u < t_{j,k}, k = n_{j,u} + 1 :$

$$f_{Y_{j,k}|Y_{j,k-1}=y_{j,k-1}}(y_{j,k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \left[\frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{G_{j,k}^2(1-F_{j,k}^2)}{b_1} + \frac{1-G_{j,k}^2}{b_2} \right) \right]^2}} e^{-\frac{(y_{j,k}-A-(y_{j,k-1}-A)F_{j,k}G_{j,k})^2}{2 \left[\frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{G_{j,k}^2(1-F_{j,k}^2)}{b_1} + \frac{1-G_{j,k}^2}{b_2} \right) \right]^2}}, \quad (4.44)$$

onde $F_{j,k} = e^{-b_1(u-t_{j,k-1})}$ e $G_{j,k} = e^{-b_2(t_{j,k}-u)}$.

Supondo que o indivíduo j foi observado nos instantes $0 = t_{j,0} < t_{j,1} < \dots < t_{j,n_j}$ com as respectivas observações dadas por $y_j = (y_{j,0}, \dots, y_{j,n_j})$, podemos calcular as estimativas do vector $\tilde{p} = (A, b_1, b_2, \sigma)$ pelo método da máxima verosimilhança. A função de log-verosimilhança, para o indivíduo j , é dada por

$$\tilde{\mathcal{L}}_{Y_j}(y_j; \tilde{p}) = \mathcal{L}_{Y_j}(y_j; A, b_1, \sigma) + \mathcal{L}_{Y_j}(y_j, u; A, b_1, b_2, \sigma) + \mathcal{L}_{Y_j}(y_j; A, b_2, \sigma),$$

donde se obtém

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{L}}_{Y_j}(y_j; \tilde{p}) &= -\frac{n_j}{2} \ln \left(\frac{\pi \sigma^2}{b_2} \right) - \frac{n_{j,u}}{2} \ln \left(\frac{b_2}{b_1} \right) - \frac{1}{2} \ln(b_2) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_{j,u}} \ln \left(1 - E_{j,k}^{2b_1} \right) - \\
&\quad - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(1 - F_{j,n_{j,u}+1}^2) G_{j,n_{j,u}+1}^2}{b_1} + \frac{1 - G_{j,n_{j,u}+1}^2}{b_2} \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=n_{j,u}+2}^{n_j} \ln \left(1 - E_{j,k}^{2b_2} \right) - \\
&\quad - \frac{b_1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^{n_{j,u}} \frac{\left(y_{j,k} - A - (y_{j,k-1} - A) E_{j,k}^{b_1} \right)^2}{1 - E_{j,k}^{2b_1}} - \frac{\left(y_{j,n_{j,u}+1} - A - (y_{j,n_{j,u}} - A) F_{j,n_{j,u}+1} G_{j,n_{j,u}+1} \right)^2}{\sigma^2 \left(\frac{G_{j,n_{j,u}+1}^2 (1 - F_{j,n_{j,u}+1}^2)}{b_1} + \frac{1 - G_{j,n_{j,u}+1}^2}{b_2} \right)} - \\
&\quad - \frac{b_2}{\sigma^2} \sum_{k=n_{j,u}+2}^{n_j} \frac{\left(y_{j,k} - A - (y_{j,k-1} - A) E_{j,k}^{b_2} \right)^2}{1 - E_{j,k}^{2b_2}}, \tag{4.45}
\end{aligned}$$

onde $E_{j,k} = e^{-(t_{j,k} - t_{j,k-1})}$.

A função de log-verossimilhança global para os m indivíduos é dada pela soma de cada uma das funções $\tilde{\mathcal{L}}_{Y_j}(y_j; \tilde{p})$, isto é,

$$\tilde{\mathcal{L}}_{Y_1, \dots, Y_m}(y_1, \dots, y_m; \tilde{p}) = \sum_{j=1}^m \tilde{\mathcal{L}}_{Y_j}(y_j; \tilde{p}) \tag{4.46}$$

As estimativas de máxima verossimilhança de $\tilde{p} = (A, b_1, b_2, \sigma)$ são obtidas por maximização da função (4.46).

4.2.9 O modelo estocástico de tamanho assintótico variável

Os modelos de crescimento apresentados até ao momento, aplicados a um conjunto de indivíduos independentes entre si, consideram que todos os indivíduos partilham o mesmo tamanho assintótico médio transformado, A . No entanto, mantendo o pressuposto de que os indivíduos são relativamente homogéneos, existe certamente alguma diferença genética, isto é, do ponto de vista genético existe heterogeneidade entre os indivíduos. Por outro lado, mesmo sem diferenças genéticas, no mesmo meio, podem existir condições de crescimento diferentes. Uma primeira versão deste modelo, aplicado a dados de bovinos mertolengos, pode ser consultada em [4].

Consideramos agora o caso em que essa heterogeneidade tem reflexo no tamanho assintótico médio, ou seja, o parâmetro A deixa de ser o mesmo para todos os indivíduos e assume-se como uma variável aleatória com uma certa distribuição de probabilidade e que varia de forma independente

entre os indivíduos. Para este estudo consideramos, como anteriormente, o modelo estocástico monomolecular com a alteração ao nível do tamanho assintótico

$$dY(t) = b(A - Y(t))dt + \sigma dW_t, \quad Y(0) = y_0, \quad (4.47)$$

onde $Y(t) = h(X(t))$, $A = h(a)$ e $A \sim \mathcal{N}(\alpha, \theta^2)$ independente do processo de Wiener $W(t)$.

A distribuição de probabilidade do processo $Y(t)$ passa agora a ter em conta o facto de A ser uma v.a.. Assim, tendo em conta (4.17), o processo $Y(t)$ tem distribuição Gaussiana com média e variância dadas por

$$\mu = E[Y(t)] = E[E[Y(t)|A]] = E[A - (A - y_0)e^{-bt}] = \alpha - (\alpha - y_0)e^{-bt}$$

e

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y(t)] &= E[\text{Var}[Y(t)|A]] + \text{Var}[E[Y(t)|A]] \\ &= E\left[\frac{\sigma^2}{2b}(1 - e^{-2bt})\right] + \text{Var}[A - (A - y_0)e^{-bt}] \\ &= \frac{\sigma^2}{2b}(1 - e^{-2bt}) + \theta^2(1 - e^{-bt})^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$Y(t) \sim \mathcal{N}\left(\alpha - (\alpha - y_0)e^{-bt}; \frac{\sigma^2}{2b}(1 - e^{-2bt}) + \theta^2(1 - e^{-bt})^2\right).$$

Note-se que esta distribuição é similar à distribuição do processo dado pelo modelo (4.15). As diferenças situam-se na alteração do parâmetro A para a sua média, α , e a inclusão da variância devida à variabilidade da v.a. A .

Suponha-se agora que m indivíduos são observados nos instantes $0 = t_{j,0} < t_{j,1} < \dots < t_{j,n_j}$, cujas observações são $Y(t_{j,k}) = y_{j,k}$, com $j = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n_j$ e n_j o número de observações do indivíduo j . Dada a distribuição do processo podemos, após alguns cálculos intensos, determinar

a função de log-verosimilhança para o indivíduo j

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_j}(y_j; p) = & -\frac{n_j}{2} \ln(2\pi) - \frac{n_j}{2} \ln\left(\frac{\sigma^2}{2b}\right) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_j} \ln(1 - E_{j,k}^2) - \frac{1}{2} \ln(D_j) - \\ & - \frac{b(D_j - 1)}{\sigma^2 D_j} \left(\sum_{k=1}^{n_j} \frac{(y_{j,k} - y_{j,k-1} E_{j,k})^2}{1 - E_{j,k}^2} \right) + \frac{2b^2 \theta^2}{\sigma^4 D_j} \left(\sum_{k=1}^{n_j} \frac{y_{j,k} - y_{j,k-1} E_{j,k}}{1 + E_{j,k}} \right)^2 - \\ & - \frac{b}{\sigma^2 D_j} \sum_{k=1}^{n_j} \frac{(y_{j,k} - \alpha - (y_{j,k-1} - \alpha) E_{j,k})^2}{1 - E_{j,k}^2}, \end{aligned}$$

com $D_j = \frac{2b\theta^2}{\sigma^2} \sum_{k=1}^{n_j} \frac{1 - E_{j,k}}{1 + E_{j,k}} + 1$, $E_{j,k} = e^{-b(t_{j,k} - t_{j,k-1})}$ e $p = (\alpha, \theta, b, \sigma)$ a representar o vector dos parâmetros a estimar.

A função de log-verosimilhança global para os m indivíduos é dada pela soma de cada uma das funções $\mathcal{L}_{Y_j}(y_j; p)$, isto é,

$$\mathcal{L}_{Y_1, \dots, Y_m}(y_1, \dots, y_m; p) = \sum_{j=1}^m \mathcal{L}_{Y_j}(y_j; p). \quad (4.48)$$

As estimativas de máxima verosimilhança de $p = (\alpha, \theta, b, \sigma)$ são obtidas por maximização da função (4.48). Os métodos numéricos de otimização de funções requerem um ponto inicial de arranque. Sugerimos como ponto de arranque as estimativas obtidas em (4.25), isto é, os valores obtidos para o modelo em que o parâmetro A é igual para todos os indivíduos. Deste modo, o único valor inicial que o utilizador terá que fornecer é o desvio-padrão da v.a. A (assumindo que o ponto de arranque para α é o valor \hat{A} obtido em (4.48)).

4.2.10 O modelo de Black-Scholes

O modelo de Black-Scholes é amplamente conhecido no meio financeiro pois é o modelo de referência para descrever o comportamento da cotação de uma acção em bolsa. Considerando $X(t)$ como a cotação da acção no instante t , o modelo é caracterizado pela equação

$$dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dW_t, \quad X(0) = x_0, r > 0, \sigma > 0, \quad (4.49)$$

ou ainda na forma integral

$$X(t) = x_0 + r \int_0^t X(s) ds + \sigma \int_0^t X(s) dW(s), \quad (4.50)$$

onde r representa a taxa média aritmética instantânea de rendimento, σ representa a volatilidade do mercado e x_0 é o valor da cotação no instante zero.

A sua solução⁵, que sabemos existir pelo corolário 3.4.1, é dada por

$$X_t = x_0 e^{Rt + \sigma W_t}, \quad (4.51)$$

com $R = r - \frac{\sigma^2}{2}$. Se efectuarmos a mudança de variável $Y_t = \ln(X_t) - \ln(x_0)$, a equação (4.51) passa a ser equivalente a

$$Y_t = Rt + \sigma W_t$$

Como $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$, verifica-se que $Y_t \sim \mathcal{N}(Rt, \sigma^2 t)$ e a sua função densidade de probabilidade é

$$f_{Y_t}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp \left\{ -\frac{(y - Rt)^2}{2\sigma^2 t} \right\}.$$

Suponha-se agora a existência dos seguintes pares ordenados de instantes de observação e valores observados $(t, y) = (t_k, y_k)$ com $k = 0, \dots, n$ e $t_0 = 0$. Neste caso, a função densidade de probabilidade de $Y_k | Y_{k-1} = y_{k-1}$ é dada por

$$f_{Y_k | Y_{k-1} = y_{k-1}}(y_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_k - t_{k-1})}} \exp \left\{ -\frac{(y_k - y_{k-1} - R(t_k - t_{k-1}))^2}{2\sigma^2(t_k - t_{k-1})} \right\}, \quad (4.52)$$

e a sua função de log-verosimilhança é (escrevemos $V = \sigma^2$ por comodidade)

⁵A resolução desta EDE encontra-se no apêndice A.3.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(y; R, V) &= \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi V(t_k - t_{k-1})}} \exp \left\{ -\frac{(y_k - y_{k-1} - R(t_k - t_{k-1}))^2}{2V(t_k - t_{k-1})} \right\} \right) \\ &= -\frac{n}{2} \ln(2\pi V) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \ln(t_k - t_{k-1}) - \frac{1}{2V} \sum_{k=1}^n \frac{(y_k - y_{k-1} - R(t_k - t_{k-1}))^2}{2V(t_k - t_{k-1})}\end{aligned}$$

Os estimadores de máxima verosimilhança \hat{R} e \hat{V} são determinados pela maximização da função de log-verosimilhança e satisfazem, entre outras, a condição

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}(y; R, V)}{\partial R} \Big|_{\hat{R}} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}(y; R, V)}{\partial V} \Big|_{\hat{V}} = 0, \end{cases}$$

donde obtemos os estimadores de R e V :

$$\hat{R} = \frac{Y_n}{t_n} \quad (4.53)$$

$$\hat{V} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \frac{(y_k - y_{k-1} - \hat{R}(t_k - t_{k-1}))^2}{t_k - t_{k-1}} \quad (4.54)$$

Podemos agora determinar as expressões das matrizes de informação de Fisher e sua inversa. Deste modo poderemos calcular os intervalos de confiança assintóticos para \hat{R} e \hat{V} .

A matriz de informação de Fisher é dada por:

$$F = \begin{bmatrix} -E \left[\frac{\partial^2 L(\bullet)}{\partial R^2} \right] & -E \left[\frac{\partial^2 L(\bullet)}{\partial R \partial V} \right] \\ -E \left[\frac{\partial^2 L(\bullet)}{\partial V \partial R} \right] & -E \left[\frac{\partial^2 L(\bullet)}{\partial V^2} \right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{t_n}{V} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2V^2} \end{bmatrix}.$$

A matriz de variância-covariância assintótica de R e V é dada pelo inverso da matriz F :

$$H = F^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{V}{t_n} & 0 \\ 0 & \frac{2V^2}{n} \end{bmatrix}.$$

Os intervalos de confiança (a 95%) assintóticos aproximados para R e V são:

$$IC_{95\%}^a(R) = \hat{R} \pm 1.96 \sqrt{\frac{\hat{V}}{t_n}} \quad (4.55)$$

$$IC_{95\%}^a(V) = \hat{V} \pm 1.96 \sqrt{\frac{2\hat{V}^2}{n}}. \quad (4.56)$$

Em [5] podemos verificar que

$$(\hat{R} - R) \sqrt{\frac{(n-1)t_n}{n\hat{V}}} \sim t_{(n-1)},$$

e

$$\frac{n\hat{V}}{V} \sim \chi_{(n-1)}^2,$$

logo podemos calcular os intervalos de confiança exactos a 95% para R e V :

$$IC_{95\%}^e(R) = \hat{R} \pm t_{0.975;(n-1)} \left[\sqrt{\frac{(n-1)t_n}{n\hat{V}}} \right]^{-1} \quad (4.57)$$

$$IC_{95\%}^e(V) = \left[\frac{n\hat{V}}{\chi_{0.975;(n-1)}}; \frac{n\hat{V}}{\chi_{0.025;(n-1)}} \right] \quad (4.58)$$

Uma vez que temos os valores das cotações das acções até ao instante t_k , interessa-nos agora efectuar a previsão para instantes $t_j > t_k$. Comecemos por constatar que Y_t é um Processo de Markov. Assim,

$$E[Y_t | Y_1, \dots, Y_{t-1}] = E[Y_t | Y_{t-1}].$$

De (4.52) temos que

$$Y_t | Y_k \sim \mathcal{N}(Y_k + R(t - t_k); V(t - t_k)),$$

logo, a cotação prevista para os instantes $t_j > t_k$, é dada por

$$\hat{Y}_j = \hat{E}[Y_j|Y_k] = Y_k + \hat{R}(t_j - t_k), \quad (4.59)$$

no caso da previsão a longo prazo e

$$Y_j^* = \hat{E}[Y_j|Y_{j-1}] = Y_{j-1} + \hat{R}_j(t_j - t_{j-1}), \quad (4.60)$$

no caso da previsão passo a passo, onde \hat{E} é um estimador da esperança matemática e \hat{R}_j é o estimador de m.v. de R baseado nas observações Y_0, Y_1, \dots, Y_{j-1} .

Os erros da previsão, $\hat{Y}_j - Y_j$ e $Y_j^* - Y_j$, têm distribuição Normal com média e variância dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned} E[\hat{Y}_j - Y_j] &= 0 \\ V[\hat{Y}_j - Y_j] &= \frac{\hat{V}t_j(t_j - t_k)}{t_k}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} E[Y_j^* - Y_j] &= 0 \\ V[Y_j^* - Y_j] &= \frac{\hat{V}_j t_j(t_j - t_{j-1})}{t_{j-1}}, \end{aligned}$$

onde \hat{V}_j é um estimador de m.v. de V baseado nas observações Y_0, Y_1, \dots, Y_{j-1} .

Assim, podemos determinar os seus intervalos de confiança aproximados a 95%:

$$\hat{Y}_j \pm 1.96 \sqrt{\frac{\hat{V}t_j(t_j - t_k)}{t_k}}. \quad (4.61)$$

$$Y_j^* \pm 1.96 \sqrt{\frac{\hat{V}_j t_j(t_j - t_{j-1})}{t_{j-1}}}. \quad (4.62)$$

Software gSDE

O software gSDE (growth Stochastic Differential Equations) foi desenvolvido de modo a permitir calcular estimativas dos parâmetros, ajustamentos, previsões e gráficos de alguns modelos de crescimento individual em ambiente aleatório. Em particular, pode ser usado para estudar alguns dos modelos apresentados neste trabalho. O software foi desenvolvido na linguagem de programação C#, na plataforma Microsoft Visual Studio 2010. Todos os algoritmos foram implementados na linguagem R versão 2.9.0. Pode ser instalado em qualquer computador pessoal e não necessita software adicional para o seu uso. É um software amigável, de fácil interacção e pode ser manipulado por qualquer pessoa, mesmo com poucos conhecimentos informáticos. De seguida iremos apresentar as funções do gSDE e algumas instruções para o seu uso. A descrição dos algoritmos usados encontra-se no apêndice [B.1](#). O DVD anexo a este trabalho contém uma cópia do software, as instruções de instalação e respectivo manual de utilização.

5.1 Funcionalidades

A vista inicial do software é a seguinte:

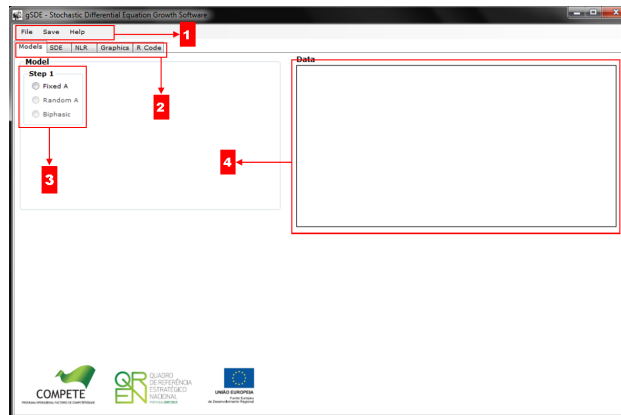


Figura 5.1: Vista inicial do software gSDE

Caixa 1

A caixa 1 contém a barra de menús usual em qualquer software.

File→Open Data File (.xls): Comando para abrir uma folha de dados em formato .xls;

File→Open R Script (.txt): Comando para abrir um ficheiro de texto com código R;

File→Exit: Comando para fechar o software.

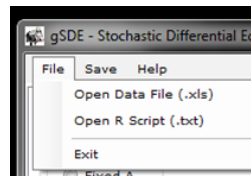


Figura 5.2: Barra de menús do software gSDE: File

Save→SDE→MLE/Fitting/Prediction: Comando para salvar os dados resultantes das operações de cálculo das estimativas de máxima verosimilhança, dados ajustados e dados previstos. Guarda os dados em formato .xls.

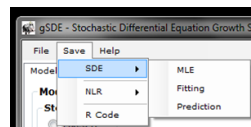


Figura 5.3: Barra de menús do software gSDE: Save→SDE

Save→NLR→LSE/Fitting/Prediction: Comando para salvar os dados resultantes das operações de cálculo das estimativas dos mínimos desvios quadrados (least square estimates), dados ajustados e dados previstos. Guarda os dados em formato .xls.

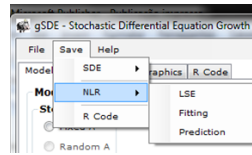


Figura 5.4: Barra de menús do software gSDE: Save→NLR

Help→Help/About: Comando que contém o ficheiro de ajuda e informação sobre o software.

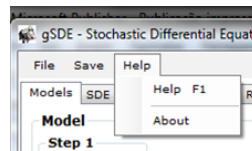


Figura 5.5: Barra de menús do software gSDE: Help

Caixa 2

A caixa 2 contém as funcionalidades principais do software.

Models: escolha dos modelos estocásticos de crescimento individual;

SDE: cálculo das estimativas de máxima verosimilhança, ajustamento e previsão a longo prazo e passo-a-passo;

NLR: cálculo das estimativas dos mínimos desvios quadrados (least square estimates), ajustamento e previsão a longo prazo e passo-a-passo;

Graphics: apresentação dos gráficos referentes às opções anteriores;

R Code: apresentação do código R dos programas usados e janela de execução do programa R.



Figura 5.6: Barra de menús do software gSDE: funcionalidades principais

Caixa 3

A caixa 3 contém os principais modelos estocásticos (modelos 4.2.2, 4.2.8 e 4.2.9). Da primeira vez que o programa é usado apenas o modelo 4.2.2 está disponível, ou seja, é obrigatório executar este modelo. Esta obrigação prende-se com o facto de que a obtenção das estimativas dos parâmetros deste modelo servirem como pontos iniciais para a execução dos outros modelos.

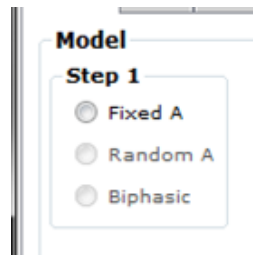


Figura 5.7: Barra de menús do software gSDE: Model Step 1

Caixa 4

A caixa 4 mostra uma janela com os dados escolhidos pelo utilizador.

Data							
	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
▶	0,9527720739...	240	0	26	0	26	0
	1,0321697467...	255	0,9637234770...	240	0,9500342231...	205	0,9007525...
	1,1088295687...	271	1,0403832991...	259	1,0266940451...	221	0,9774127...
	1,2347707049...	305	1,1663244353...	305	1,1526351813...	255	1,1033536...
	1,3305954825...	331	1,2621492128...	337	1,2484599589...	286	1,1991786...
	1,4099931553...	344	1,3415468856...	345	1,3278576317...	297	1,2785765...
	1,4674880219...	345	1,3990417522...	345	1,3853524982...	295	1,3360711...
	1,5633127994...	358	1,4948665297...	344	1,4811772758...	302	1,4318955...
	1,6919917864...	321	1,6235455167...	309	1,6098562628...	273	1,5605745...
	1,8343600273...	352	1,7659137577...	341	1,7522245037...	297	1,7029431...

Figura 5.8: Barra de menús do software gSDE: Dados

Após a *escolha* obrigatória do modelo *Fixed A* fica disponível a escolha do modelo transformado (transformação da variável $Y(t)$). Por defeito aparecem as escolhas que conduzem aos modelos estocásticos de Gompertz e de Bertalanffy-Richards ($c = 1/3$). O utilizador poderá escolher outras transformações através da opção *Other (user defined)*, onde deverá escrever as funções de transformação e sua inversa. A escrita de funções deverá respeitar a syntax imposta pelo R. No final deverá guardar as opções escolhidas.

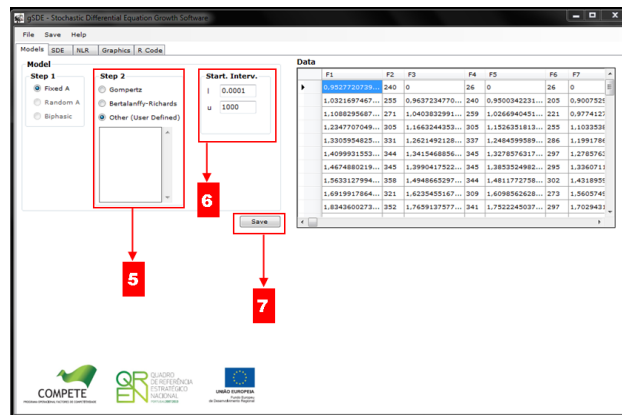


Figura 5.9: Software gSDE: Model

Caixa 5

Escolha do modelo transformado. Exemplo da escrita de uma função de transformação:

```
h<-function(x) log(x)
f<-function(x) exp(x)
Df <- f
body(Df)<-deriv(body(f), "x")
```

As duas últimas linhas calculam a derivada da função de transformação (usada no cálculo dos intervalos de confiança). Estas linhas permanecem inalteradas qualquer que seja a função escrita.

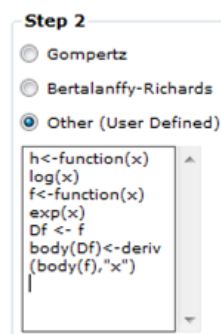


Figura 5.10: Software gSDE: Step 2

Caixa 6

Escolha dos pontos de arranque necessários à minimização da função (4.23). As letras l e u designam respectivamente *lower* e *upper* e representam os limites do intervalo.

Start. Interv.

l

u

Figura 5.11: Software gSDE: Starting Interval

Caixa 7

O utilizador deverá premir o botão *Save* para guardar as opções seleccionadas.



Figura 5.12: Software gSDE: Save

Depois da escolha do modelo o utilizador poderá seleccionar o menú *SDE* (exeplicação para o modelo de Gompertz):

The screenshot shows the gSDE software interface with the following panels and highlighted areas:

- MLE (8):** A table with columns 'Estimate', 'Lower Lim.', and 'Upper Lim.' for parameters 'a', 'b', and 's'.

	Estimate	Lower Lim.	Upper Lim.
a	411.1957	403.11213	419.27926
b	1.6762826	1.620422	1.7321432
s	0.30221647	0.29289021	0.31160272
- Fitting (9):** A panel with 'Path to Fit' and 'Num. 3'.
- Prediction (10):** A panel with 'Type' (Step by Step selected), 'Path to Predict' (Num. 3), 'Based on' (1 Path selected), and 'Num. of Obs. to Predict' (Num. 15).
- Fitting Results (11):** A table with columns 'Fit.', 'Ob.', and 'Res.'.

Fit.	Ob.	Res.
208.366	205	3.36617
223.93	221	2.92956
247.941	255	-7.05942
264.766	286	-21.2338
277.711	297	-19.2895
286.513	295	-8.48692
300.127	302	-1.8735
316.39	273	43.3898
331.856	297	34.8561
385.987	315	70.9871
386.147	308	78.1467
- Prediction Results (11):** A table with columns 'Pred.', 'Ob.', and 'Res.'.

Pred.	Ob.	Res.
450.043	480	-29.9566
475.806	500	-24.1942
494.622	500	-5.37816
485.738	522	-36.2616
475.421	460	15.4212
452.935	461	-8.06537
451.292	440	11.2916
421.691	440	-18.3094
421.944	437	-15.0556
417.608	398	19.6079
400.645	375	25.6452
- Root Mean Square Error (12):** Two panels showing RMSE values: 46.199226 and 27.520483.

Figura 5.13: Software gSDE: SDE

Caixa 8

Cálculo das estimativas de máxima verosimilhança: para obter estas estimativas o utilizador deverá premir o botão *Run*.

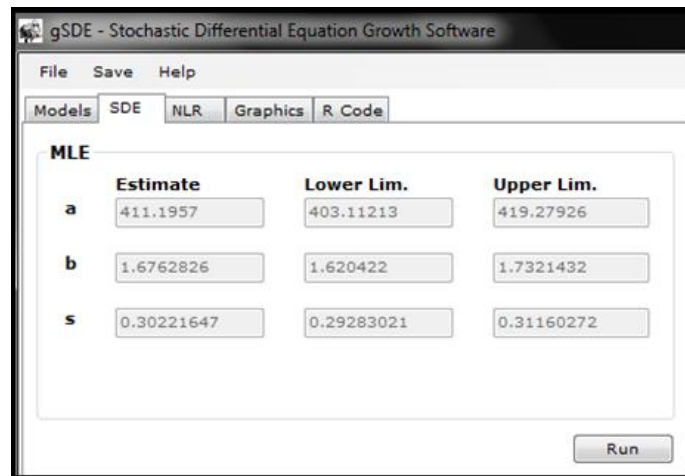


Figura 5.14: Software gSDE: SDE→MLE

Caixa 9

Cálculo dos valores ajustados: para obter estes valores o utilizador deverá indicar a trajectória que pretende ajustar e premir o botão *Run*.



Figura 5.15: Software gSDE: SDE→Fitting

Caixa 10

Cálculo dos valores previstos: para obter estes valores o utilizador deverá indicar a trajectória que pretende ajustar, o número de instantes que pretende prever, o tipo de previsão que pretende (passo-a-passo ou longo prazo) e ainda se pretende efectuar a previsão com base nas observações de uma ou todas as trajectórias (retirando a que deseja prever¹). Finalmente deverá premir o botão *Run*.

¹Situação de não se conhecer o passado da trajectória da qual se quer prever o futuro, usando-se para isso a informação sobre o passado de outras trajectórias.

Prediction

Type

Step by Step

Long Term

Path to Predict

Num. 3

Based on

1 Path

(All-1) Paths

Num. of Obs. to Predict

Num. 15

Run

Figura 5.16: Software gSDE: SDE→Prediction

Caixas 11 e 12

Tabela onde são apresentados os valores ajustados/previstos e respectivos erros (Raíz do erro quadrático médio).

Fitting Results			
Values			
	Fit.	Ob.	Res.
	208.366	205	3.36617
	223.93	221	2.92956
	247.941	255	-7.05942
	264.766	286	-21.2338
	277.711	297	-19.2895
	286.513	295	-8.48692
	300.127	302	-1.8735
	316.39	273	43.3898
	331.856	297	34.8561
	385.987	315	70.9871
	386.147	308	78.1467

Root Mean Square Error

RMSE 46.199226

Prediction Results			
Values			
	Pred.	Ob.	Res.
	450.043	480	-29.9566
	475.806	500	-24.1942
	494.622	500	-5.37816
	485.738	522	-36.2616
	475.421	460	15.4212
	452.935	461	-8.06537
	451.292	440	11.2916
	421.691	440	-18.3094
	421.944	437	-15.0556
	417.608	398	19.6079
	400.645	375	25.6452

Root Mean Square Error

RMSE 27.520483

Figura 5.17: Software gSDE: SDE→Fitting/Prediction values e RMSE

O menu *NLR* fica disponível após o utilizador executar o menu *SDE* (exeplicação para o modelo de Gompertz):

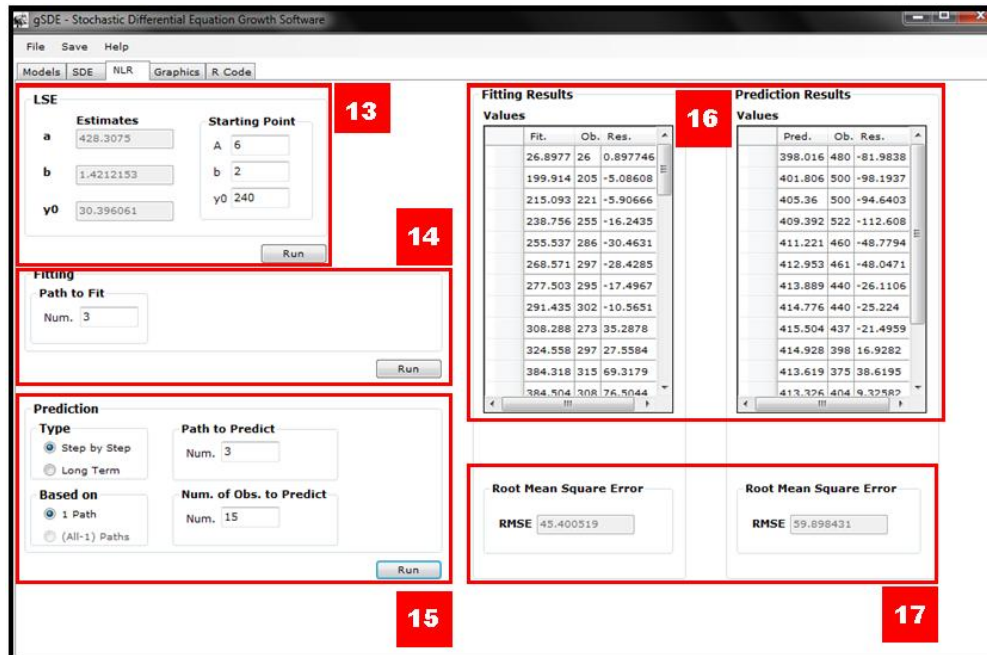


Figura 5.18: Software gSDE: NLR

Caixa 13

Cálculo das estimativas do modelo de regressão não-linear: para obter estas estimativas o utilizador deverá premir o botão *Run*.

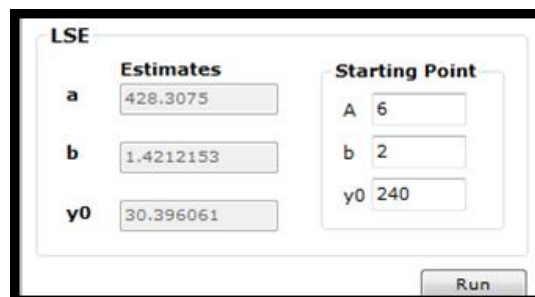


Figura 5.19: Software gSDE: NLR→LSE

Caixa 14

Cálculo dos valores ajustados (para a regressão não-linear): para obter estes valores o utilizador deverá indicar a trajectória que pretende ajustar e premir o botão *Run*.

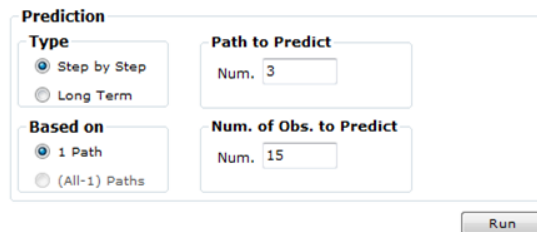


The screenshot shows a dialog box titled "Fitting". Inside, there is a label "Path to Fit" above a text input field containing the number "3". At the bottom right of the dialog box is a button labeled "Run".

Figura 5.20: Software gSDE: NLR→Fitting

Caixa 15

Cálculo dos valores previstos (para a regressão não-linear): para obter estes valores o utilizador deverá indicar a trajectória que pretende ajustar, o número de instantes que pretende prever, o tipo de previsão que pretende (passo-a-passo e longo prazo). Finalmente deverá premir o botão *Run*.



The screenshot shows a dialog box titled "Prediction". It is divided into four sections: "Type" with radio buttons for "Step by Step" (selected) and "Long Term"; "Based on" with radio buttons for "1 Path" (selected) and "(All-1) Paths"; "Path to Predict" with a text input field containing "3"; and "Num. of Obs. to Predict" with a text input field containing "15". A "Run" button is located at the bottom right.

Figura 5.21: Software gSDE: NLR→Prediction

Caixas 16 e 17

Tabela onde são apresentados os valores ajustados/previstos e respectivos erros (Raiz do erro quadrático médio).

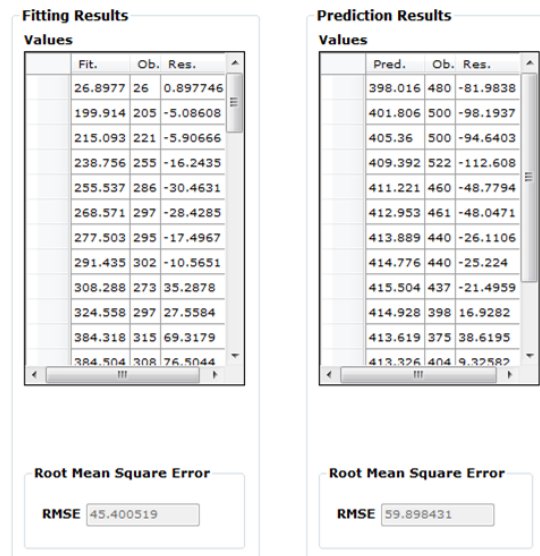


Figura 5.22: Software gSDE: NLR→Fitting/Prediction values e RMSE

O menú *Graphics* apresenta os vários gráficos gerados pelas opções apresentadas nos menús anteriores:

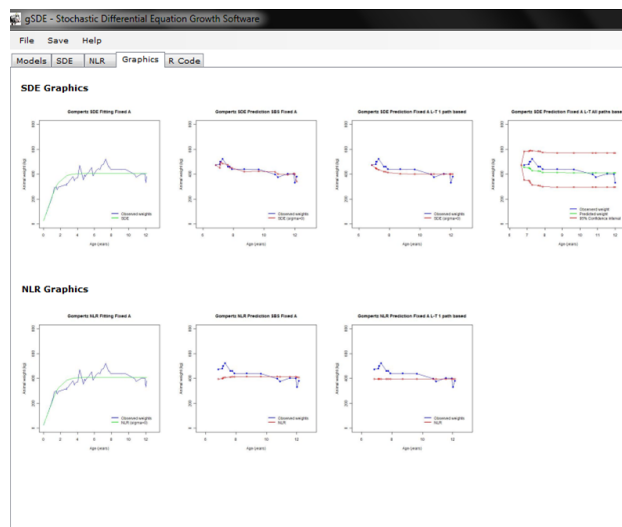


Figura 5.23: Software gSDE: Graphics

Caixas 18 e 19

Os gráficos referentes ao menú SDE constam na parte superior e os referentes ao menú NLR aparecem na parte inferior da janela:

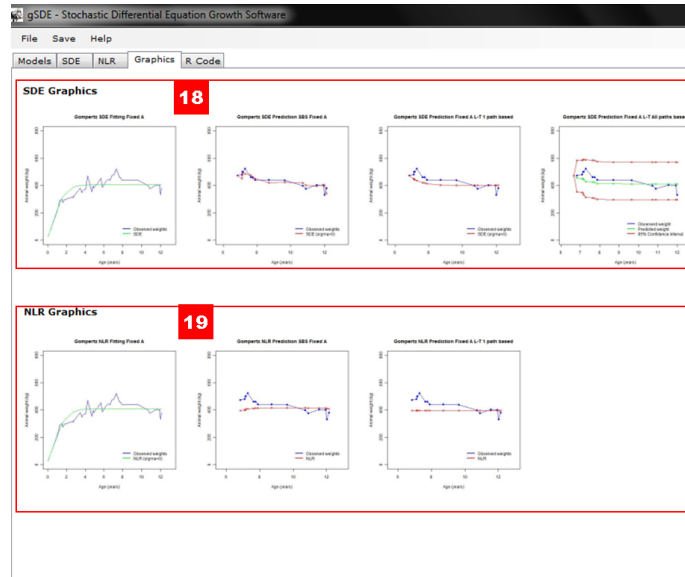


Figura 5.24: Software gSDE: Graphics→SDE/NLR

Caixa 20

Ao premir uma janela de um gráfico o mesmo abre numa janela independente:

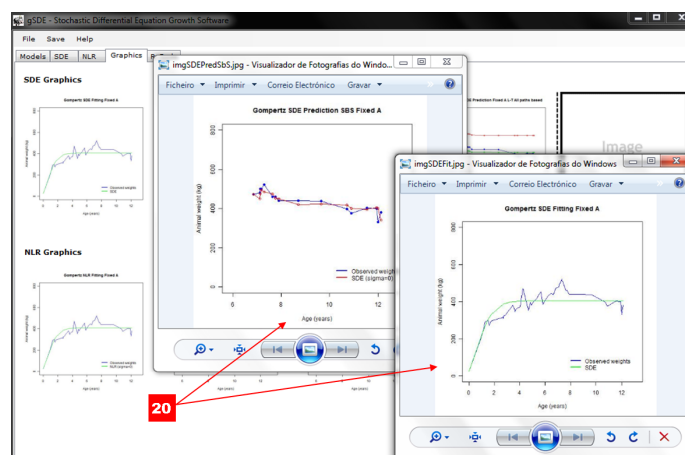


Figura 5.25: Software gSDE: Gráficos independentes

O menu *R Code* contém duas janelas: uma de visualização e edição de código R e outra de visualização das opções efectuadas nos menus anteriores.

Caixas 21 e 22

Os botões *Clear* e *Execute Script* têm como funções, respectivamente, apagar a janela *R Script* e executar o que se introduz nessa mesma janela. Ao premir este último aparecerá o resultado na janela *R output*:

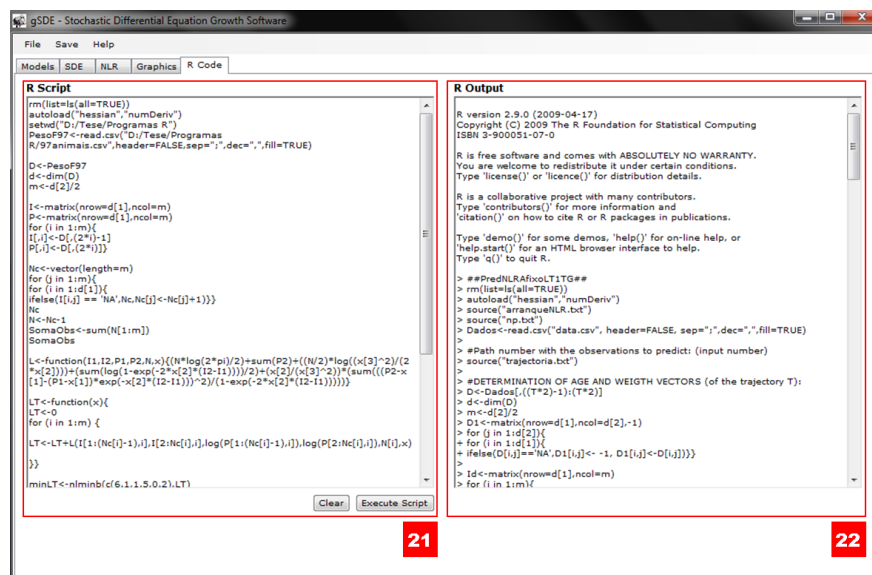


Figura 5.26: Software gSDE: R Code

Voltando agora ao menu inicial, vemos que podemos escolher outros dois modelos: o modelo *Random A* (modelo de tamanho assintótico variável, ver 4.2.9) e o *Biphasic model* (modelo bifásico, ver 4.2.8). As funcionalidades destes dois modelos são as mesmas que foram apresentadas no exemplo anterior. A excepção prende-se com os pontos de arranque para a minimização das funções (4.48) e (4.46). Para estes dois casos, usam-se como pontos de arranque, as estimativas obtidas no modelo *Fixed A* (modelo estocástico monomolecular generalizado para vários indivíduos, ver 4.2.2). Uma vez que estes modelos têm quatro parâmetros e o modelo inicial apenas tem três, o utilizador terá que introduzir o valor de arranque para o parâmetro em falta. Geralmente este valor é conseguido tendo em conta a natureza dos dados com que estamos a trabalhar. Em último caso, como normalmente acontece nos algoritmos de optimização, podemos escolher este valor por

tentativa-erro. As imagens em anexo mostram estes dois casos:

Caixa 23

Neste caso, o valor inicial em falta é o desvio padrão da variável aleatória A (ver (4.47)):

Figura 5.27: Software gSDE: Step 2 (Random A)

Caixas 24 e 25

Para o modelo bifásico o utilizador deve inserir um valor de arranque para a estimativa da segunda fase b_2 e o instante de mudança de fase u (ver (4.37)):

Figura 5.28: Software gSDE: Step 2 (Biphasic)

Aplicação a Dados Reais

Neste capítulo aplicamos a dados reais alguns dos modelos apresentados. São determinadas as estimativas dos parâmetros dos modelos e intervalos de confiança assintóticos. Foram também estudados os problemas de ajustamento e previsão. Efectuamos ainda uma comparação entre os modelos estocásticos e os modelo de regressão não-linear. Para efectuar os cálculos e gráficos necessários a esta apresentação recorreremos ao *software* gSDE. No caso do modelo de Black-Scholes apresentamos o algoritmo criado no apêndice [B.2](#).

6.1 Dados de Bovinos

A aplicação a dados de bovinos de modelos de crescimento individual em ambiente aleatório foram estudados por Filipe, P. e Braumann, C. (ver [\[9\]](#) e [\[4\]](#)). Neste trabalho aplicamos os modelos estocásticos de Gompertz e Bertalanffy-Richards ($c = 1/3$) aos dados de bovinos mertolengos. O estudo inicia-se com a aplicação dos modelos aos dados de um único animal e termina com a aplicação aos dados de 97 animais.

Os dados, gentilmente cedidos pelo Professor Carlos Roquete (ICAAM-Universidade de Évora), referem-se a bovinos mertolengos da estirpe rosilho, criados na região de Serpa. Os animais foram criados com as mães até à idade de desmame. Posteriormente foram criados em pastoreio e suplementados com silagens durante os meses de Outono e Inverno. Os dados contêm os pesos (em kg) dos animais e respectivos instantes de medição. Note-se que, para diferentes animais, existem diferentes instantes de observação.

6.1.1 Aplicação a dados de 1 animal

Começamos pela apresentação de um gráfico com os dados de um animal com 51 observações:

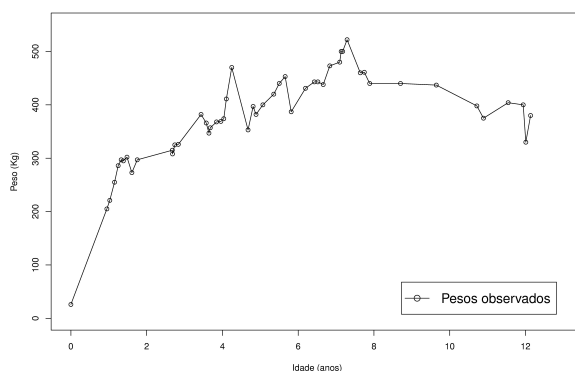


Figura 6.1: Gráfico com os pesos de 1 animal.

As estimativas dos parâmetros $p = (A, b, \sigma)$ dos modelos estocásticos de Gompertz e de Bertalanffy-Richards ($c = 1/3$) foram calculadas através dos estimadores obtidos em (4.21) e em (4.22) e da função de log-verossimilhança (4.23). Para a determinação dos intervalos de confiança assintóticos para os parâmetros do modelo é necessária a matriz de informação de Fisher e a sua inversa. Estes cálculos encontram-se no programa R em anexo (ver apêndice B.1). Foi ainda determinado, para cada um dos modelos, o valor da função de log-verossimilhança e respectivo AIC (número parâmetros = 3). Os resultados apresentam-se na seguinte tabela:

Modelo	a	b	σ	\mathcal{L}	AIC
Gompertz	406.13 ± 37.320	1.4899 ± 0.3734	0.2216 ± 0.0441	-346.05	686.10
B-R ($c = 1/3$)	407.37 ± 43.325	1.2228 ± 0.4344	0.5235 ± 0.1049	-236.75	467.50

Tabela 6.1: EMV, IC (95%), $\mathcal{L}(\cdot)$ e AIC (1 animal).

O gráfico seguinte mostra os valores observados para o animal e os modelos (determinísticos) de Gompertz e Bertalanffy-Richards ($c = 1/3$) estimados obtidos com as estimativas apresentadas na tabela 6.1. Apresenta-se ainda uma tabela com o erro padrão do ajustamento, ou seja, a raiz do erro quadrático médio (REQM).

Verifica-se que, para o ajustamento, o modelo de Bertalanffy-Richards é melhor do que o modelo

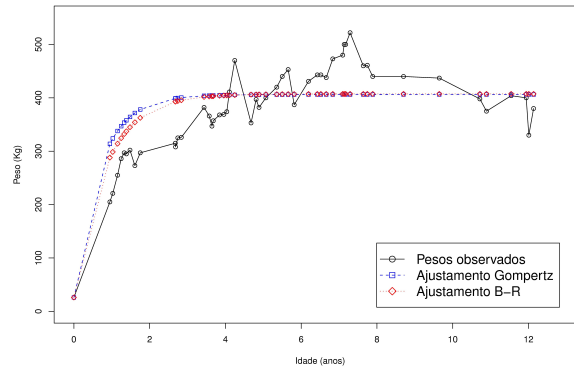


Figura 6.2: Pesos observados de 1 animal e curvas estimadas.

Modelo	REQM
Gompertz	46.199
B-R ($c = 1/3$)	44.919

Tabela 6.2: REQM para o ajustamento (1 animal).

de Gompertz pois apresenta valores inferiores de AIC e REQM.

Com os dados observados aplicamos o modelo de previsão (passo-a-passo e longo prazo). Estes valores são obtidos do seguinte modo:

Previsão passo-a-passo

Dados os valores do processo até ao instante t_k , $Y(t_1), \dots, Y(t_k)$, pretendemos prever o valor de $Y(t)$ para $t > t_k$,

$$Y(t) = A + (Y(t_k) - A)e^{-b(t-t_k)} + \sigma e^{-bt} \int_{t_k}^t e^{bs} dW(s).$$

Tendo em conta que Y_t é um processo de Markov, resulta que os valores previstos são obtidos em função dos valores observados no passado e portanto, $E[Y(t)|Y_1, \dots, Y_k] = E[Y(t)|Y_k]$. Daqui obtém-se

$$\hat{Y}(t) = \hat{E}[Y(t)|Y(t_1), \dots, Y(t_k)] = \hat{E}[Y(t)|Y(t_k)] = \hat{A} + (Y(t_k) - \hat{A})e^{-\hat{b}(t-t_k)}, \forall t > t_k.$$

Previsão longo prazo

Dado o valor do processo $Y(t_k)$, para $k < s$, pretendemos prever os valores de $Y(t_s)$. Neste caso os

predictores são dados por

$$\hat{Y}(t) = \hat{E}[Y(t)|Y(t_k)] = \hat{A} + (Y(t_k) - \hat{A})e^{-\hat{b}(t-t_k)}.$$

O valor de observações disponíveis deste animal é $n = 51$. Iremos retirar as últimas 15 observações para efectuarmos a previsão desses dados. Os gráficos seguintes mostram os dados observados e os previstos (passo-a-passo e longo prazo), para os modelos estocásticos de Gompertz e Bertalanffy-Richards:

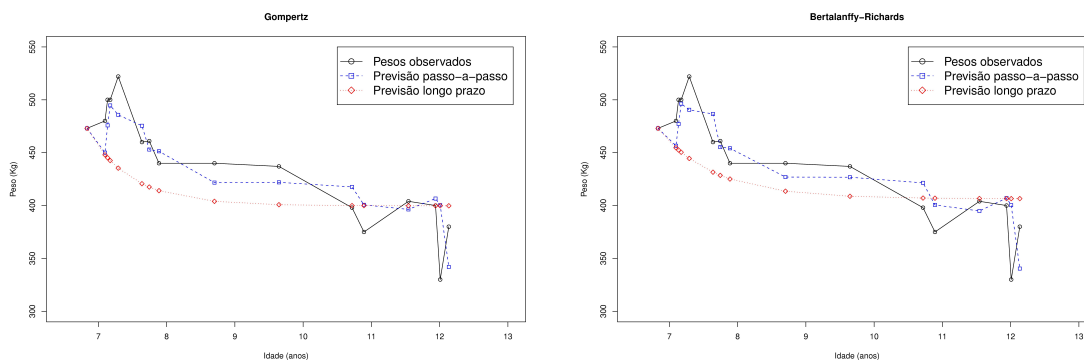


Figura 6.3: Previsão passo-a-passo e longo prazo (Gompertz e Bertalanffy-Richards)

O erro quadrático médio associado à previsão é:

Modelo	REQM (PP)	REQM (LP)
Gompertz	27.520	42.788
B-R ($c = 1/3$)	27.260	38.867

Tabela 6.3: REQM para a previsão.

Nota-se claramente que o modelo de previsão passo-a-passo é superior ao modelo de previsão a longo prazo. De facto, no primeiro modelo, os valores previstos são sucessivamente determinados com base nas estimativas calculadas até ao instante imediatamente anterior. Na previsão a longo prazo os valores previstos são calculados com base no instante inicial da previsão. Para a previsão o modelo de Bertalanffy-Richards continua a ser superior pois apresenta um valor de REQM inferior.

Relativamente à regressão esperamos que este método forneça valores melhores do que os modelos estocásticos para o ajustamento, já que minimizam a soma dos quadrados dos desvios. No caso

da previsão esperamos resultados bastante superiores com os modelos estocásticos, pois estes modelos efectuem a previsão com base no tamanho actual do indivíduo. De facto, a previsão através destes últimos modelos, utiliza a própria dinâmica do crescimento bem como o modo como essa dinâmica é afectada pelas flutuações aleatórias do ambiente.

A equação de regressão é dada pela seguinte fórmula:

$$\hat{Y}(t_i) = \hat{A} + (\hat{y}_0 - \hat{A})e^{-\hat{b}(t_i - t_0)} \quad (6.1)$$

No caso da regressão o vector de parâmetros a ser estimado é $p_r = (A, b, y_0)$.

Apresentamos os gráficos de ajustamento e previsão do modelo de regressão e dos modelos estocásticos. No final apresentamos uma tabela com os valores da REQM.

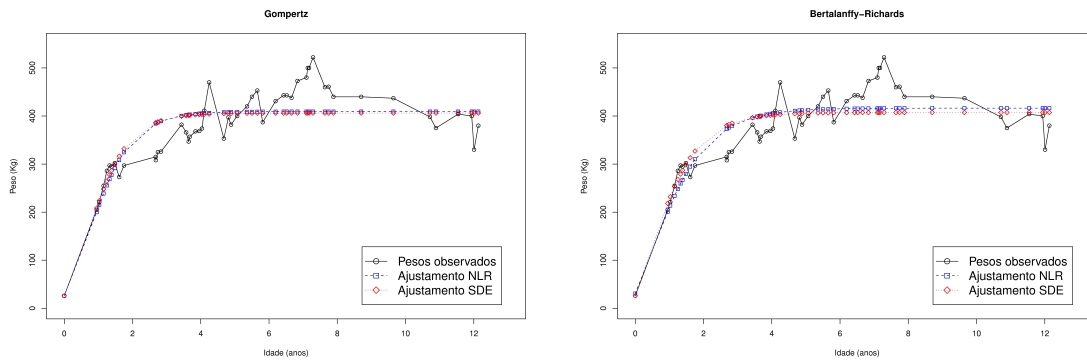


Figura 6.4: Ajustamento EDE vs RNL.

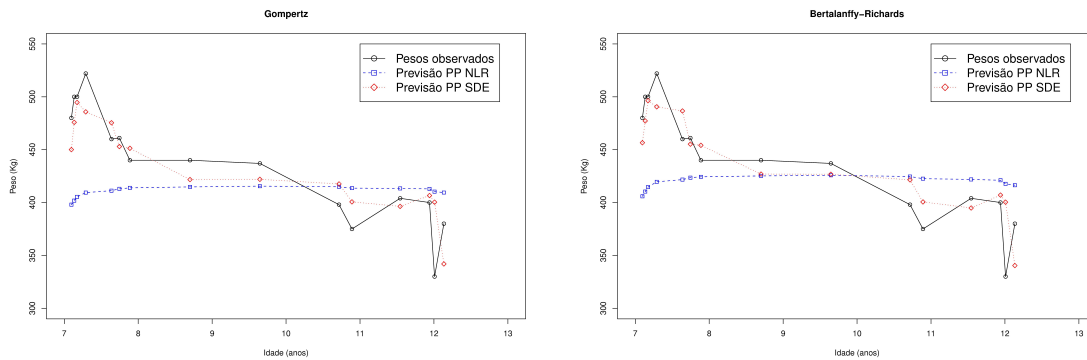


Figura 6.5: Previsão passo-a-passo EDE vs RNL.

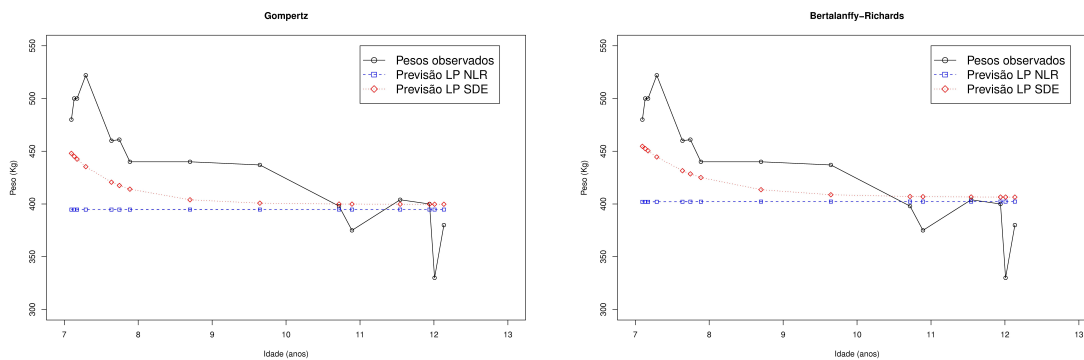


Figura 6.6: Previsão longo prazo EDE vs RNL.

Modelo	REQM (NLR)	REQM (SDE)
Gompertz	45.400	46.199
B-R ($c = 1/3$)	42.709	44.919

Tabela 6.4: REQM para o ajustamento RNL vs EDE.

Modelo	REQM (NLR PP)	REQM (SDE PP)	REQM (NLR LP)	REQM (SDE LP)
Gompertz	59.899	27.520	68.928	42.788
B-R ($c = 1/3$)	56.279	27.260	64.319	38.867

Tabela 6.5: REQM para a previsão RNL vs EDE.

Pela análise destes últimos gráficos e tabelas podemos concluir que:

1. o modelo de regressão ajusta-se melhor aos dados do que os modelos de equações diferenciais estocásticas. Pode confirmar-se pelos gráficos e pelos valores da REQM que são inferiores;
2. o modelo de regressão é um mau modelo de previsão quando comparado com os modelos de equações diferenciais estocásticas. O modelo de regressão apresenta valores da REQM bastante superiores aos modelos estocásticos;
3. a previsão passo-a-passo apresenta valores mais próximos dos valores observados em relação à previsão a longo prazo.

6.1.2 Aplicação a dados de 97 animais

Aplicamos agora alguns dos modelos anteriores a dados de 97 animais criados nas condições acima descritas. Apresentamos as estimativas de máxima verosimilhança referentes aos modelos estocástico monomolecular generalizado para vários indivíduos, ao modelo multifásico e ao modelo

estocástico de tamanho assintótico variável. Apresentamos ainda os resultados obtidos dos modelos de ajustamento e previsão com base nas observações de 96 animais. Foram usadas as transformações $Y(t) = \ln(X(t))$ e $A = \ln(a)$ para obtermos o modelo estocástico de Gompertz e $Y(t) = (X(t))^{1/3}$ e $A = (a)^{1/3}$ para o modelo estocástico de Bertalanffy-Richards.

Modelo estocástico de Gompertz e de Bertalanffy-Richards

Enquanto que no exemplo anterior utilizamos os dados de um único animal para determinar as estimativas dos parâmetros A , b e σ , neste caso usamos os dados referentes a todos os animais para calcular essas mesmas estimativas. É de esperar, naturalmente, valores diferentes pois estamos a introduzir no modelo mais informação disponível. As estimativas obtidas são:

Modelo	a	b	σ	\mathcal{L}	AIC
Gompertz	411.19 ± 8.0836	1.6763 ± 0.0558	0.3022 ± 0.0094	-9758.0	19516
B-R ($c = 1/3$)	425.73 ± 9.5243	1.1806 ± 0.0557	0.5970 ± 0.0186	-9564.8	19135

Tabela 6.6: EMV, IC (95%), $\mathcal{L}(\cdot)$ e AIC (97 animais).

Pela análise desta tabela verifica-se que o modelo estocástico de Bertalanffy-Richards continua a ser melhor (menor valor de AIC). Note-se ainda que, ao introduzir informação adicional no modelo, obtemos intervalos de confiança assintóticos mais precisos, isto é, com menor amplitude.

Para a previsão (com base nos dados de 96 animais) também esperamos obter melhores resultados ao nível da REQM, pela mesma razão apresentada. Os gráficos e a tabela seguinte confirmam isso mesmo:

Modelo	REQM (LP 1 animal)	REQM (LP 97 animais)
Gompertz	42.788	41.008
B-R ($c = 1/3$)	38.867	38.733

Tabela 6.7: REQM para a previsão a longo prazo (1 animal vs 97 animais).

Modelo estocástico de tamanho assintótico variável

A tabela seguinte mostra as estimativas obtidas pela aplicação dos modelos (de tamanho assintótico variável) de Gompertz e de Bertalanffy-Richards aos dados de 97 animais. Para obter

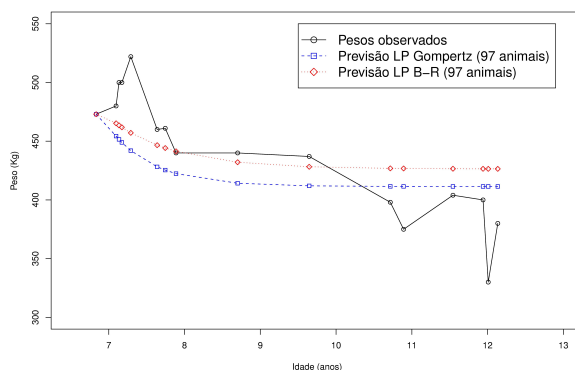


Figura 6.7: Previsão longo prazo (97 animais).

estas estimativas individuais é usada toda a informação referente ao conjunto dos indivíduos. O número total de observações é de 2129.

Modelo	α_X	θ_X	b	σ	\mathcal{L}	AIC
Gompertz	396.45 ± 13.516	0.0824 ± 0.0360	1.7471 ± 0.0707	0.2985 ± 0.0094	-9749.8	19490
B-R ($c = 1/3$)	423.34 ± 11.541	0.0821 ± 0.0020	1.1920 ± 0.0619	0.5960 ± 0.0187	-9564.8	19120

Tabela 6.8: EMV, IC (95%), $\mathcal{L}(\cdot)$ e AIC (97 animais); α_X = estimativa do valor médio da v.a $a = h^{-1}(A)$ e θ_X = estimativa do desvio-padrão da v.a $a = h^{-1}(A)$.

Neste caso, à semelhança da aplicação dos modelos aos dados de 1 animal, verifica-se que o modelo estocástico de Bertalanffy-Richards é melhor do que o modelo de Gompertz (verificação pelo valor do AIC).

Modelo estocástico multifásico

Nos modelos anteriores considerámos que o indivíduo apenas apresentava uma fase de crescimento. Neste modelo, consideramos que o indivíduo apresenta duas fase de crescimento: b_1 e b_2 . A escolha da idade u , que separa as duas fases de crescimento, foi calculada de modo a ter em conta a idade do desmame. Geralmente o desmame dos animais ocorre entre os 6 e os 9 meses de idade. Para este conjunto de animais o desmame ocorreu por volta 8 meses correspondendo a cerca de $u = 0.7$ anos. As estimativas deste modelo são:

Modelo	a	b_1	b_2	σ	\mathcal{L}	AIC
Gompertz	418.42 ± 11.116	1.7732 ± 0.0610	1.1764 ± 0.1130	0.2856 ± 0.0091	-9721.8	19435
B-R ($c = 1/3$)	432.11 ± 11.982	1.2388 ± 0.0629	0.9640 ± 0.1009	0.5842 ± 0.0186	-9532.6	19057

Tabela 6.9: EMV, IC (95%), $\mathcal{L}(\cdot)$ e AIC (97 animais).

Pelo critério de AIC verifica-se que o modelo bifásico é ligeiramente melhor do que o modelo monofásico. O gráfico seguinte mostra uma trajectória de um animal e respectivos modelos monofásico e bifásico de Gompertz:

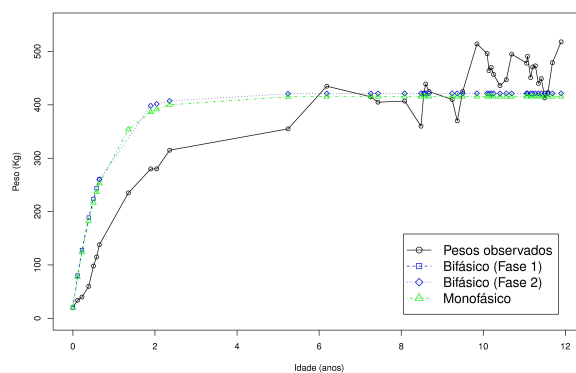


Figura 6.8: Modelos monofásico e bifásico de Gompertz (1 animal).

A REQM associada a este ajustamento é:

Modelo	REQM (Bifásico)	REQM (Monofásico)
Gompertz	45.767	45.857

Tabela 6.10: REQM para o ajustamento pelos modelos bifásico e monofásico.

Apesar de a diferença entre os erros ser bastante pequena, verifica-se que o modelo bifásico é ligeiramente superior que o modelo monofásico.

6.2 Dados Financeiros

Vamos aplicar o modelo de Black-Scholes aos dados das acções da SONAE SGPS (cotação diária do fecho) no período compreendido entre 27/10/2003 a 24/06/2009. Os dados foram retirados do sítio da Euronext Portugal (<http://www.euronext.com>).

Começamos por apresentar uma representação gráfica dos dados e uma tabela com as estimativas dos parâmetros do modelo e respectivos intervalos de confiança assintóticos e exactos a 95%, dados respectivamente pelas equações (4.53), (4.54), (4.55), (4.56), (4.57) e (4.58):

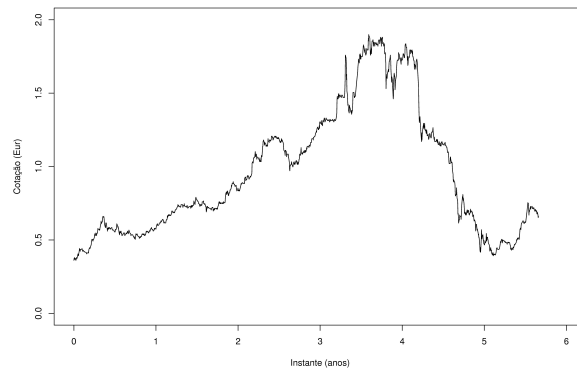


Figura 6.9: Representação gráfica das acções da SONAE SGPS entre 27/10/2003 e 24/06/2009.

R_a	V_a	R_e	V_e
0.1072 ± 0.2946	0.1278 ± 0.0093	0.1072 ± 0.2948	0.1278 ± 0.0099

Tabela 6.11: Estimativas e intervalos de confiança assintóticos ($(\cdot)_a$) e exactos ($(\cdot)_e$) para o modelo de Black-Scholes

Através destes resultados concluímos que a amplitude intervalar de V é bastante precisa já que a dimensão da amostra é bastante grande ($n = 1449$). Infelizmente, como o valor estimado de V é pouco satisfatório obtivemos uma grande amplitude da estimativa intervalar para R . Contudo, se fosse possível aumentar o intervalo de tempo em que se fizeram as observações, conseguiríamos uma menor amplitude para esse intervalo.

Note-se ainda que, devido ao facto de n ser bastante elevado, os intervalos assintóticos e exactos são quase iguais.

Para efectuarmos a previsão retirámos da amostra as últimas 100 observações. Estudámos os casos da previsão a longo prazo e passo-a-passo e respectivos intervalos de confiança, conforme as expressões (4.59), (4.60), (4.61) e (4.62).

Mostramos os gráficos com os valores previstos (e respectivos intervalos de confiança) e a tabela com a REQM:

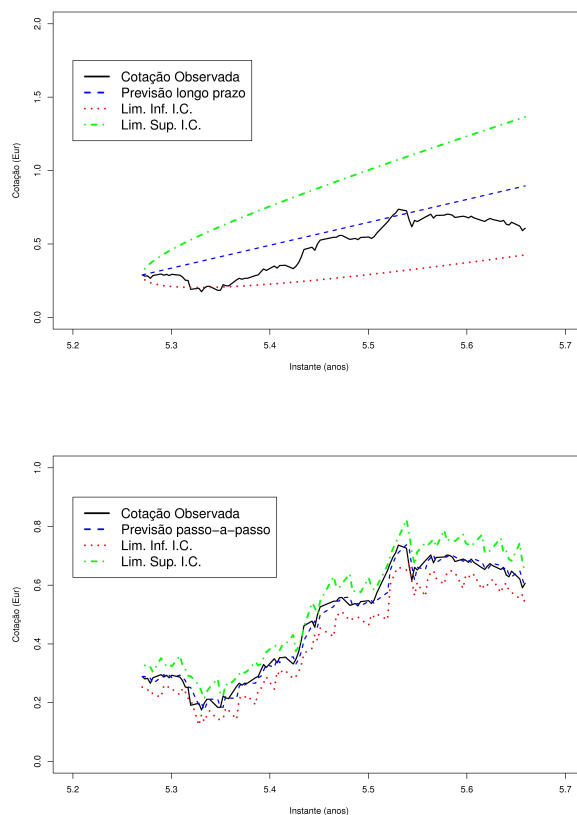


Figura 6.10: Previsão a longo prazo e passo-a-passo e respectivos intervalos de confiança a 95%.

REQM (LP)	REQM (PP)
0.3059	0.2001

Tabela 6.12: REQM para a previsão a longo prazo e passo-a-passo.

Como era de esperar a previsão passo-a-passo produz valores mais realistas do que a previsão a longo prazo. Note-se que a REQM para a previsão passo-a-passo é cerca de 34% menor do que a previsão a longo prazo.

Conclusões

Começamos por fazer uma breve revisão sobre aspectos de probabilidades e processos estocásticos necessários ao estudo dos integrais estocásticos. Passamos, de seguida, à teoria das equações diferenciais estocásticas onde apresentamos o Teorema de Itô e a fórmula de Itô de modo a permitirem resolver algumas equações diferenciais estocásticas.

Apresentamos os modelos determinísticos mais usuais na modelação do crescimento individual, as suas propriedades mais importantes e as respectivas soluções acompanhadas do modo de resolução. Aos modelos determinísticos adicionamos o efeito da aleatoriedade ambiental a que o indivíduo se encontra sujeito, obtendo assim os modelos estocásticos. Vimos que o efeito das flutuações aleatórias ambientais pode ser descrito por um ruído aditivo colorido que, por sua vez, pode ser aproximado pelo ruído branco padrão, dando assim origem à introdução do processo de Wiener nos modelos estocásticos.

Demos especial atenção aos modelos estocásticos, nomeadamente ao modelo monomolecular generalizado (e modelos particulares que deste se obtêm), ao modelo bifásico, ao modelo com tamanho médio assintoticamente variável e ao modelo de Black-Scholes. Concluimos que, para os nossos dados, o modelo multifásico, com duas fases de crescimento, e o modelo com tamanho médio assintoticamente variável, isto é, considerando que o tamanho médio assintótico é uma variável aleatória, explicam melhor o crescimento individual do que os modelos monofásicos e o modelo com

tamanho médio assintótico fixo.

Verificámos ainda que os métodos clássicos de regressão não-linear não são os mais adequados para modelar os efeitos da aleatoriedade ambiental pois, para estes modelos, os desvios observados em relação à curva de regressão são independentes em instantes de tempo diferentes. Este pressuposto é válido quando os erros são devidos a erros de medição mas não quando esses erros se devem às flutuações aleatórias do ambiente. A título de exemplo podemos verificar que, na regressão não-linear, se existir um atraso no crescimento de um indivíduo, esse atraso não tem influência no tamanho futuro do indivíduo. A grande diferença entre estes modelos e os modelos estocásticos é que, estes últimos, incorporam a dinâmica do próprio processo de crescimento bem como o efeito que as flutuações aleatórias do ambiente induzem nessa dinâmica.

Calculámos as estimativas dos parâmetros dos modelos apresentados e aproveitámos esses valores para servirem de pontos de arranque para a optimização das funções de log-verosimilhança dos modelos com quatro parâmetros. Especificamente, para o modelo estocástico monomolecular generalizado, apresentámos um novo método de cálculo das suas estimativas. Verificámos que, ainda para este modelo, existem várias transformações do processo que originam novos modelos. Tal é o caso da transformação $Y(t) = (X(t))^{1/3}$, correspondente ao modelo de Bertalanffy-Richards, cujas aplicações no caso do estudo da evolução do volume de um indivíduo é a mais indicada.

Para cada modelo apresentado, calculámos as estimativas dos parâmetros, fizemos ajustamento e aplicámos métodos de previsão (passo-a-passo e longo prazo). Como era de esperar a previsão passo-a-passo originou valores bastante mais próximos do que a previsão a longo prazo. Isto deve-se sobretudo ao facto de inserirmos a última observação prevista no cálculo da seguinte. Comprovámos estas situações através da raiz do erro quadrático médio, pelo critério de AIC e ainda pela análise gráfica.

Apresentámos o modelo de Black-Scholes, importante pela sua aplicação prática e pelo facto de ter conduzido Fisher Black, Myron Scholes e Robert Merton a obter a célebre fórmula de Black-Scholes, que mais tarde, em 1997, os levaria a receber o prémio Nobel da economia (foi atribuído apenas a Scholes e Merton pois Black faleceu em 1995). Relativamente a este modelo estudámos as suas propriedades mais relevantes e a sua solução, designada por movimento Browniano geométrico.

Para cada um dos modelos apresentados desenvolvemos algoritmos para calcular as propriedades acima referidas. Os algoritmos foram criados na linguagem de programação R. Tendo em conta o número elevado de programas criados resolvemos desenvolver um novo software de modo a incorporar todos os algoritmos e que seja de fácil utilização. Designamos este novo software por gSDE: growth stochastic differential equations e o mesmo encontra-se disponível para toda a Comunidade. É um software aberto a sugestões e contribuições e pode ser complementado com novos modelos estocásticos.

Como sugestão de trabalho futuro desejaríamos estudar e desenvolver modelos estocásticos mais gerais com aplicação ao crescimento individual e ampliar o novo software de modo a permitir a inclusão de novas funcionalidades e novos modelos.

Resolução de Equações Diferenciais Estocásticas

Neste capítulo apresentamos a resolução das principais equações diferenciais estocásticas referenciadas.

A.1 Modelo estocástico monomolecular generalizado

O modelo estocástico monomolecular generalizado é dado pela EDE

$$dY(t) = b(A - Y(t))dt + \sigma dW(t), \quad Y(0) = y_0.$$

Aplicando o teorema 3.3.1, com $Z(t) = h(t, Y(t)) = Y(t) - A$, obtemos

$$dZ(t) = -bZ(t)dt + \sigma dW(t), \quad Z(0) = z_0.$$

Multiplicando ambos os membros da equação por e^{bt} resulta que

$$e^{bt} dZ(t) = -bZ(t)e^{bt}dt + e^{bt}\sigma dW(t).$$

Atendendo ao facto de que $d(e^{bt}Z(t)) = be^{bt}Z(t)dt + e^{bt}dZ(t)$, podemos escrever

$$d[e^{bt}Z(t)] = \sigma e^{bt}dW(t).$$

Integrando entre 0 e t obtemos

$$e^{bt}Z(t) - Z(0) = \int_0^t \sigma e^{bs}dW(s) \Leftrightarrow Z(t) = e^{-bt}Z(0) + e^{-bt}\sigma \int_0^t e^{bs}dW(s).$$

Podemos agora desfazer a transformação $Z(t) = Y(t) - A$ e voltar a escrever a equação nas variáveis originais

$$Y(t) = A + e^{-bt}(y_0 - A) + e^{-bt}\sigma \int_0^t e^{bs}dW(s). \quad (\text{A.1})$$

A.2 Modelo estocástico de Gompertz com parâmetro limite

O modelo estocástico de Gompertz com parâmetro limite é dado pela EDE

$$dX(t) = (X(t) - \gamma)(\alpha - \beta \ln(X(t) - \gamma))dt + \sigma(X(t) - \gamma)dW(t), \quad X(0) = x_0.$$

Aplicando o teorema 3.3.1, com $Y(t) = h(t, X(t)) = \ln(X(t) - \gamma)$, obtemos

$$dY(t) = \left(\alpha - \beta Y(t) - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW(t), \quad Y(0) = y_0.$$

Multiplicando ambos os membros da equação por e^{bt} resulta que

$$e^{bt}dY(t) = e^{bt} \left(\alpha - \beta Y(t) - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma e^{bt}dW(t).$$

Atendendo ao facto de que $d(e^{bt}Y(t)) = be^{bt}Y(t)dt + e^{bt}dY(t)$, podemos escrever

$$d[e^{bt}Y(t)] = e^{bt} \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma e^{bt}dW(t).$$

Integrando entre 0 e t obtemos

$$e^{bt}Y(t) - Y(0) = \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right) \int_0^t e^{bs} ds + \sigma \int_0^t e^{bs} dW(s)$$

\Leftrightarrow

$$Y(t) = e^{-bt} \left(y_0 + \frac{1}{\beta} \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) (e^{\beta t} - 1) \right) + \sigma e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s} dW(s).$$

Podemos agora desfazer a transformação $Y(t) = h(t, X(t)) = \ln(X(t) - \gamma)$ e voltar a escrever a equação nas variáveis originais

$$X_t = \gamma + \exp \left\{ e^{-\beta t} \left(\ln(x_0 - \gamma) + \frac{1}{\beta} \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) (e^{\beta t} - 1) \right) + \sigma e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s} dW_s \right\}.$$

A.3 Modelo de Black-Scholes

O modelo de Black-Scholes é dado pela EDE

$$dX(t) = rX(t)dt + \sigma X(t)dW(t), \quad X(0) = x_0.$$

Aplicando o teorema 3.3.1, com $Y(t) = h(t, X(t)) = \ln(X(t)) - \ln(x_0)$ e fazendo $R = r - \frac{\sigma^2}{2}$ obtemos

$$dY(t) = Rdt + \sigma dW(t), \quad Y(0) = y_0.$$

Integrando entre 0 e t obtemos

$$Y(t) - y_0 = Rt + \sigma \int_0^t dW(t).$$

Atendendo ao facto de a função integranda ser um função em escada podemos simplificar e concluir que

$$Y(t) = y_0 + Rt + \sigma W(t)$$

Podemos agora desfazer a transformação $Y(t) = h(t, X(t)) = \ln(X(t)) - \ln(x_0)$ e voltar a escrever a equação nas variáveis originais

$$X(t) = x_0 e^{Rt + \sigma W(t)}.$$

Programas em R

B.1 Algoritmos do software gSDE

Apresentamos agora o modo de construção dos algoritmos desenvolvidos para as várias funcionalidades do *software* gSDE. Todos os algoritmos começam com a leitura dos dados a partir de uma folha de cálculo:

```
Dados<-read.csv("data.csv", header=FALSE, sep=";",dec=".",fill=TRUE)
# Colocação dos dados numa matriz D
D<-Dados
# Dimensão da matriz D
d<-dim(D)
# Número de indivíduos
m<-d[2]/2
```

Uma vez que nem todos os indivíduos apresentam o mesmo número de observações, temos que a dimensão máxima da matriz é o número de observações do indivíduo que tem mais observações registadas. Deste modo, as células da folha de cálculo dos indivíduos que têm menos observações são preenchidas automaticamente por "NA".

B.1.1 Algoritmo para o modelo estocástico monomolecular para vários indivíduos

No caso de estarmos a trabalhar com vários indivíduos juntamos todos os instantes e observações em quatro vectores: I1, I2, G1 e G2. Uma vez que na função de verosimilhança (ver equação (4.24)) consta a diferença entre instantes consecutivos para os vários indivíduos, $t_{j,k+1} - t_{j,k}$, é conveniente criar o vector I1 contendo os instantes $t_{j,k}$ e o vector I2 contendo os $t_{j,k+1}$. Estes vectores são basicamente os vectores de todas as observações mas retirando, respectivamente, a última e a primeira observações de cada animal j . De modo análogo procede-se à criação dos vectores G1 e G2 contendo os tamanhos observados. O resultado é o seguinte:

$$I1^T = (t_{1,1}, \dots, t_{1,n_1-1}, t_{2,1}, \dots, t_{2,n_2-1}, \dots, t_{j,1}, \dots, t_{j,n_j-1})$$

$$I2^T = (t_{1,2}, \dots, t_{1,n_1}, t_{2,2}, \dots, t_{2,n_2}, \dots, t_{j,2}, \dots, t_{j,n_j})$$

$$G1^T = (y_{1,1}, \dots, y_{1,n_1-1}, y_{2,1}, \dots, y_{2,n_2-1}, \dots, y_{j,1}, \dots, y_{j,n_j-1})$$

$$G2^T = (y_{1,2}, \dots, y_{1,n_1}, y_{2,2}, \dots, y_{2,n_2}, \dots, y_{j,2}, \dots, y_{j,n_j}),$$

onde u^T representa o vector transposto do vector u .

A criação destes vectores foi efectuada do modo seguinte:

```
# Criação de uma matriz, com a mesma dimensão da matriz D,
# cujos elementos são iguais a -1:
D1<-matrix(nrow=d[1],ncol=d[2],-1)
# Substituição do valor -1 pelos instantes e observações. As
# células com a informação "NA" são alteradas para o valor -1:
for (j in 1:d[2]){
for (i in 1:d[1]){
ifelse(D[i,j]=='NA',D1[i,j]<- -1, D1[i,j]<-D[i,j])}}
# Criação de uma matriz com os instantes (cada coluna é referente a um indivíduo):
```



```

Id<-matrix(nrow=d[1],ncol=m)
for (i in 1:m){
  Id[,i]<-D1[(2*i)-1]}
# Criação de um vector com todos os instantes:
VId<-cbind(c(Id[,1:m]))
VIdades<-VId[VId>=0]
# Criação de uma matriz com as observações (cada coluna é referente a um indivíduo):
Pe<-matrix(nrow=d[1],ncol=m)
for (i in 1:m){
  Pe[,i]<-D1[(2*i)]}
# Criação de um vector com todas as observações:
Vpe<-cbind(c(Pe[,1:m]))
Vpesos<-Vpe[Vpe>0]
# Cálculo do número de observações por indivíduo:
Nc<-vector(length=m)
for (j in 1:m){
  for (i in 1:d[1]){
    ifelse(Id[i,j]>=0,Nc[j]<-Nc[j]+1,Nc)}}
N<-Nc-1
# Soma do número total de observações:
SomaObs<-sum(N[1:m])
SomaObs
# À matriz D1 retira-se a primeira linha de observações,
isto é, para cada indivíduo retira-se a primeira observação:
D2k<-D1[-1,]
# À matriz D1 adiciona-se, no fim, uma linha cujos elementos são -1:
D1temp<-matrix(nrow=d[1]+1,ncol=d[2])
D1temp<-rbind(D1,rep(-1,d[2]))
# Matriz auxiliar:
D1k<-matrix(nrow=d[1]+1,ncol=d[2])

```

```

D1k<-D1temp
for (j in 1:d[2]){
for (i in 1:d[1]+1){
ifelse(D1temp[i,j] == -1, D1k[i-1,j]<- -1, D1k[i,j]<-D1temp[i,j])}}
# Criação da matriz de instantes sem as últimas observações:
ID1k<-matrix(nrow=d[1]+1,ncol=m)
for (i in 1:m){
ID1k[,i]<-D1k[, (2*i)-1]}
# Criação da matriz de tamanhos sem as últimas observações:
PD1k<-matrix(nrow=d[1]+1,ncol=m)
for (i in 1:m){
PD1k[,i]<-D1k[, (2*i)]}
# Criação da matriz de instantes sem as primeiras observações:
ID2k<-matrix(nrow=d[1]-1,ncol=m)
for (i in 1:m){
ID2k[,i]<-D2k[, (2*i)-1]}
# Criação da matriz de tamanhos sem as primeiras observações:
PD2k<-matrix(nrow=d[1]-1,ncol=m)
for (i in 1:m){
PD2k[,i]<-D2k[, (2*i)]}
# Criação dos vectores com os instantes e pesos:
I1ktemp<-cbind(c(ID1k[,1:m]))
I2ktemp<-cbind(c(ID2k[,1:m]))
P1ktemp<-cbind(c(PD1k[,1:m]))
P2ktemp<-cbind(c(PD2k[,1:m]))
# Retiramos os elementos que são iguais a -1:
I1<-I1ktemp[I1ktemp>=0]
I2<-I2ktemp[I2ktemp>=0]
G1<-h(P1ktemp[P1ktemp>=0])
G2<-h(P2ktemp[P2ktemp>=0])

```

Na definição dos vectores $G1$ e $G2$ verifica-se a existência de uma função h . Esta função refere-se à função de transformação (ver (4.15) e figura 5.9).

O cálculo das estimativas de máxima verosimilhança segue o método apresentado na secção 4.2.1 (equações (4.21), (4.22) e (4.23)):

```
ff<-function(b){
  (sum((G2-G1*(exp(-b*(I2-I1)))/(1+exp(-b*(I2-I1))))*(sum((1-exp(-b*(I2-I1)))/(
  1+exp(-b*(I2-I1))))))^(-1)}

gg<-function(A,b){
  ((2*b/(SomaObs))*(sum(((G2-A-(G1-A)*exp(-b*(I2-I1)))^2)/
  (1-exp(-2*b*(I2-I1))))))^ (1/2)}

V<-function(b){
  ((SomaObs)/2)*log(2*pi)+((SomaObs)/2)*log((gg(ff(b),b))^2/(2*b)))+(1/2)*
  (sum(log(1-exp(-2*b*(I2-I1)))))+(b)/(gg(ff(b),b))^2*(sum((G2-ff(b)-(G1-ff(b))*
  exp(-b*(I2-I1)))^2/(1-exp(-2*b*(I2-I1)))))}

# Maximização da função de log-verosimilhança:
opt<-optimise(V,int=c(inf,sup))

Os valores "inf" e "sup" são os referenciados na figura 5.11. As estimativas dos parâmetros
 $p = (A, b, \sigma)$  são dadas pelas instruções:

# Estimativa do parâmetro A:
A<-ff(b)

# Estimativa do parâmetro a (a função f é a inversa da função de transformação):
a<-f(A)

# Estimativa do parâmetro b:
b<-opt$minimum

# Estimativa do parâmetro sigma:
s<-gg(ff(b),b)
```

Para determinar os intervalos de confiança assintóticos (a 95%) recorreremos à matriz de informação de Fisher. Consequentemente, obtivemos a matriz de variâncias covariâncias:

```
hessLG<-function(x){-((SomaObs*log(2*pi)/2)+sum(G2)+((SomaObs/2)*
log((x[3]^2)/(2*x[2])))+(sum(log(1-exp(-2*x[2]*(I2-I1)))/2)+
(x[2]/(x[3]^2))*(sum(((G2-x[1])-(G1-x[1]))*
exp(-x[2]*(I2-I1)))^2)/(1-exp(-2*x[2]*(I2-I1))))))}
# Cálculo da matriz Hessiana:
h<--hessian(hessLG,c(f(b),b,s))
# Cálculo da matriz de variâncias-covariâncias:
vh<-solve(hm)
# Determinação da amplitude dos intervalos de confiança:
# A função Df é a derivada da função f.
e1<-1.96*sqrt(vh[1,1])*Df(a)
e2<-1.96*sqrt(vh[2,2])
e3<-1.96*sqrt(vh[3,3])
# Determinação dos intervalos de confiança:
# l para lower e u para upper:
lA<-A-e1
uA<-A+e1
lb<-b-e2
ub<-b+e2
ls<-s-e3
us<-s+e3
```

Para efectuarmos o ajustamento dos modelos aos dados usámos a estimativa do valor esperado do processo nos instantes a ajustar, que é dado pela expressão (4.18):

```
# Vector dos valores ajustados:
sde_fit<-A+(P1[1]-A)*exp(-b*I[2:(N+1)])
# Vector dos resíduos:
sde_fit_res<-sde_fit-P[2:(N+1)]
```

Matriz com valores ajustados, observados e resíduos:

```
sde_fit_resMY<-matrix(nrow=(N), ncol=3)
```

```
sde_fit_resMY[,1]<-sde_fit
```

```
sde_fit_resMY[,2]<-P[2:(N+1)]
```

```
sde_fit_resMY[,3]<-sde_fit_res
```

```
sde_fit_resMY
```

Cálculo da raiz do erro quadrático médio:

```
REQMY_sde_fit<-sqrt(sum(sde_fit_res^2)/N)
```

Para a previsão passo-a-passo considerámos os seguintes comandos:

np = número de instantes a prever (introduzido pelo utilizador):

k = número de observações observadas menos as que queremos prever:

```
k<-(N-np)
```

Criação dos vectores de estimativas:

```
App<-vector(length=np)
```

```
bpp<-vector(length=np)
```

```
spp<-vector(length=np)
```

O primeiro valor previsto corresponde ao último observado:

```
sde_predPP<-vector(length=np+1)
```

```
sde_predPP[1]<-P[k+1]
```

Cálculo das estimativas passo-a-passo.

Actualizamos as EMV de cada vez que introduzimos um novo

valor previsto:

```
for (i in 1:np) {
```

```
ff<-function(b){
```

```
(sum((P2[1:(k+i)]-P1[1:(k+i)]*(exp(-b*(I2[1:(k+i)]-I1[1:(k+i)])))))/
```

```
(1+exp(-b*(I2[1:(k+i)]-I1[1:(k+i)]))))*(sum((1-exp(-b*(I2[1:(k+i)]-
```

```
I1[1:(k+i)])))/(1+exp(-b*(I2[1:(k+i)]-I1[1:(k+i)]))))^(-1)}
```

```
gg<-function(A,b){
```

```
((2*b/(k+i))*(sum(((P2[1:(k+i)]-A-(P1[1:(k+i)]-A)*exp(-b*(I2[1:(k+i)]-
```

```

I1[1:(k+i)]))^(1/2)/(1-exp(-2*b*(I2[1:(k+i)]-I1[1:(k+i)]))))^(1/2)}
V<-function(b){
((k+i)/2)*log(2*pi)+((k+i)/2)*log((gg(ff(b),b))^2/(2*b)))+(1/2)*
(sum(log(1-exp(-2*b*(I2[1:(k+i)]-I1[1:(k+i)])))))+(b)/(gg(ff(b),b))^2)*
(sum((P2[1:(k+i)]-ff(b)-(P1[1:(k+i)]-ff(b))*exp(-b*(I2[1:(k+i)]-
I1[1:(k+i)]))))^2/(1-exp(-2*b*(I2[1:(k+i)]-I1[1:(k+i)]))))))}
Opt<-optimise(V,int=c(inf,sup))
Opt
bpp[i]<-Opt$minimum
App[i]<-ff(bpp[i])
spp[i]<-gg(ff(bpp[i]),bpp[i])
# Vector dos valores previstos:
sde_predPP[i+1]<-App[i]+(P1[k+i]-App[i])*exp(-bpp[i]*(I2[(k+i)]-I1[(k+i)]))}
# Invertemos a função de transformação:
sde_predPPX<-f(sde_predPP)
# Cálculo dos resíduos:
sde_predPP_res<-sde_predPP[2:(np+1)]-P[(k+2):(N+1)]
# Matriz com valores ajustados, observados e resíduos:
sde_predPP_resMY<-matrix(nrow=np, ncol=3)
sde_predPP_resMY[,1]<-sde_predPP[2:(np+1)]
sde_predPP_resMY[,2]<-P[(k+2):(N+1)]
sde_predPP_resMY[,3]<-sde_predPP_res
# Cálculo da raiz do erro quadrático médio:
REQMY_sde_predPP<-sqrt(sum(sde_predPP_res^2)/(np))

```

O caso da previsão a longo prazo é mais simples pois apenas é necessário calcular uma vez as EMV. A previsão a longo prazo pode ser efectuada com base nas observações (até ao instante da previsão) da própria trajectória do processo ou com base nas restantes trajectórias. O código gerado é o seguinte:

Previsão com base na trajectória actual (excluimos na estimação dos parâmetros os

instantes a prever)

```
# np = número de instantes a prever (introduzido pelo utilizador):
# k = número de observações observadas menos as que queremos prever:
k<-(N-np)
# Vectors com os instantes e observações até ao instante onde começa a previsão:
Inp<-I[(N+1-np):(N+1)]
Pnp<-P[(N+1-np):(N+1)]
Inp
Pnp
# Cálculo das EMV até ao instante onde começa a previsão:
ff<-function(b){
  (sum((P2[1:k]-P1[1:k]*(exp(-b*(I2[1:k]-I1[1:k]))))/(1+exp(-b*(I2[1:k]-I1[1:k])))))*
  (sum((1-exp(-b*(I2[1:k]-I1[1:k])))/(1+exp(-b*(I2[1:k]-I1[1:k]))))^(-1))}
gg<-function(A,b){
  ((2*b/(k))*(sum(((P2[1:k]-A-(P1[1:k]-A)*exp(-b*(I2[1:k]-I1[1:k]))^2)/
  (1-exp(-2*b*(I2[1:k]-I1[1:k]))))))^(1/2)}
V<-function(b){
  ((k)/2)*log(2*pi)+((k)/2)*log((gg(ff(b),b))^2/(2*b)))+(1/2)*
  (sum(log(1-exp(-2*b*(I2[1:k]-I1[1:k])))))+(b)/(gg(ff(b),b))^2)*
  (sum((P2[1:k]-ff(b)-(P1[1:k]-ff(b))*exp(-b*(I2[1:k]-I1[1:k]))^2/
  (1-exp(-2*b*(I2[1:k]-I1[1:k]))))))}
Opt<-optimise(V,int=c(inf,sup))
# Estimativa do parâmetro b:
bk<-Opt$minimum
# Estimativa do parâmetro A:
Ak<-ff(bk)
# Estimativa do parâmetro sigma:
sk<-gg(Ak,bk)
# Vector dos valores previstos:
```

```

sde_pred<-Ak+(P[k+1]-Ak)*exp(-bk*(I[(k+2):(N+1)]-I[(k+1)]))
# Cálculo dos resíduos:
sde_pred_res<-sde_pred-Pnp[2:(np+1)]
# Matriz com valores ajustados, observados e resíduos:
sde_pred_resMY<-matrix(nrow=np, ncol=3)
sde_pred_resMY[,1]<-sde_pred
sde_pred_resMY[,2]<-Pnp[2:(np+1)]
sde_pred_resMY[,3]<-sde_pred_res
# Matriz com valores ajustados, observados e resíduos,
invertendo a transformação:
sde_pred_resX<-f(sde_pred)-f(Pnp[2:(np+1)])
sde_pred_resMX<-matrix(nrow=np, ncol=3)
sde_pred_resMX[,1]<-f(sde_pred)
sde_pred_resMX[,2]<-f(Pnp[2:(np+1)])
sde_pred_resMX[,3]<-sde_pred_res
# Cálculo da raiz do erro quadrático médio:
REQMY_sde_pred<-sqrt(sum(sde_pred_res^2)/(np))
REQMX_sde_pred<-sqrt(sum(sde_pred_resX^2)/(np))

```

Previsão com base na trajectória actual (excluimos na estimação dos parâmetros os instantes a prever)

```

# EMV das trajectórias (excepto a que contém os instantes que queremos prever).
# T representa a trajectória que contém os instantes que queremos prever:
Dados<-read.csv("data.csv", header=FALSE, sep=";",dec=".",fill=TRUE)
D<-Dados[, -(((T*2)-1):(T*2))]
d<-dim(D)
m<-(d[2]-1)/2
# Cálculo dos vectores I1, I2, G1 e G2:
D1<-matrix(nrow=d[1],ncol=d[2],-1)
for (j in 1:d[2]){

```



```

for (i in 1:d[1]){
  ifelse(D[i,j]=='NA',D1[i,j]<- -1, D1[i,j]<-D[i,j])}
  Id<-matrix(nrow=d[1],ncol=m)
  for (i in 1:m){
    Id[,i]<-D1[, (2*i)-1]}
  VId<-cbind(c(Id[,1:m]))
  VIdades<-VId[VId>=0] #vector com todas as idades
  Pe<-matrix(nrow=d[1],ncol=m)
  for (i in 1:m){
    Pe[,i]<-D1[, (2*i)]}
  Vpe<-cbind(c(Pe[,1:m]))
  Vpesos<-Vpe[Vpe>0] #vector com todos os pesos
  Nc<-vector(length=m)
  for (j in 1:m){
    for (i in 1:d[1]){
      ifelse(Id[i,j]>=0,Nc[j]<-Nc[j]+1,Nc)}}
  N<-Nc-1
  SomaObs<-sum(N[1:m])
  D2k<-D1[-1,]
  D1temp<-matrix(nrow=d[1]+1,ncol=d[2])
  D1temp<-rbind(D1,rep(-1,d[2]))
  D1k<-matrix(nrow=d[1]+1,ncol=d[2])
  D1k<-D1temp
  for (j in 1:d[2]){
    for (i in 1:d[1]+1){
      ifelse(D1temp[i,j] == -1, D1k[i-1,j]<- -1, D1k[i,j]<-D1temp[i,j])}
    ID1k<-matrix(nrow=d[1]+1,ncol=m)
    for (i in 1:m){
      ID1k[,i]<-D1k[, (2*i)-1]}
    PD1k<-matrix(nrow=d[1]+1,ncol=m)

```

```

for (i in 1:m){
PD1k[,i]<-D1k[, (2*i)]}
ID2k<-matrix(nrow=d[1]-1,ncol=m)
for (i in 1:m){
ID2k[,i]<-D2k[, (2*i)-1]}
PD2k<-matrix(nrow=d[1]-1,ncol=m)
for (i in 1:m){
PD2k[,i]<-D2k[, (2*i)]}
I1ktemp<-cbind(c(ID1k[,1:m]))
I2ktemp<-cbind(c(ID2k[,1:m]))
P1ktemp<-cbind(c(PD1k[,1:m]))
P2ktemp<-cbind(c(PD2k[,1:m]))
I1<-I1ktemp[I1ktemp>=0]
I2<-I2ktemp[I2ktemp>=0]
G1<-h(P1ktemp[P1ktemp>=0])
G2<-h(P2ktemp[P2ktemp>=0])
# Cálculo das EMV:
ff<-function(b){
(sum((G2-G1*(exp(-b*(I2-I1)))/(1+exp(-b*(I2-I1)))))*
(sum((1-exp(-b*(I2-I1)))/(1+exp(-b*(I2-I1))))^(-1))}
gg<-function(A,b){
((2*b/(SomaObs))*(sum(((G2-A-(G1-A)*exp(-b*(I2-I1)))^2)/
(1-exp(-2*b*(I2-I1))))))^ (1/2)}
V<-function(b){
((SomaObs)/2)*log(2*pi)+((SomaObs)/2)*log((gg(ff(b),b))^2/(2*b)))+(1/2)*
(sum(log(1-exp(-2*b*(I2-I1)))))+(b)/(gg(ff(b),b))^2)*
(sum((G2-ff(b)-(G1-ff(b))*
exp(-b*(I2-I1)))^2/(1-exp(-2*b*(I2-I1))))}
opt<-optimise(V,int=c(inf,sup))
# Estimativa do parâmetro b:

```

```

b<-opt$minimum
# Estimativa do parâmetro A:
A<-ff(b)
# Estimativa do parâmetro sigma:
s<-gg(ff(b),b)
# Construção dos vectores com os instantes e observações realizadas,
da trajectória T:
IYobs<-Dados[,(((T*2)-1):(T*2))]
IYobstemp<-matrix(nrow=d[1],ncol=2,-1)
for (j in 1:2){
for (i in 1:d[1]){
ifelse(IYobs[i,j]=='NA',IYobstemp[i,j]<- -1, IYobstemp[i,j]<-IYobs[i,j])}}
Iobst<-IYobstemp[,1]
Yobst<-IYobstemp[,2]
Iobs<-Iobst[Iobst>=0]
Yobs<-Yobst[Yobst>=0]
Iobs
Yobs
LYobs<-h(Yobs)
leYobs<-length(Yobs)-1
leYobs
# np = número de instantes a prever (introduzido pelo utilizador):
# k = número de observações observadas menos as que queremos prever:
k<-(leYobs-np)
# Número de observações que desejo prever +1
leY<-np+1
# Vector dos valores previstos:
YprevMonoG<-vector(length=leY)
# O primeiro valor previsto corresponde ao último observado:
YprevMonoG[1]<-LYobs[(k+1)]

```

```

for (i in 2:leY){
YprevMonoG[i]<-A+exp(-b*(Iobs[k+i]-Iobs[k+1]))*(LYobs[(k+2)]-A)}
# Aplicamos a transformação inversa:
PYprevMonoG<-f(YprevMonoG)
# Matriz com valores ajustados, observados e resíduos:
sde_pred_resMXall<-matrix(nrow=np+1, ncol=3)
sde_pred_resMXall[,1]<-PYprevMonoG
sde_pred_resMXall[,2]<-Yobs[(k+1):(k+leY)]
sde_pred_resMXall[,3]<-PYprevMonoG-Yobs[(k+1):(k+leY)]
# Cálculo da raiz do erro quadrático médio:
REQMGAllT<-sqrt(sum((PYprevMonoG[2:leY]-Yobs[(k+2):leYobs+1])^2)/(leY-1))

```

B.1.2 Algoritmo para o modelo de regressão não-linear

A equação de regressão é dada pela seguinte fórmula:

$$\hat{Y}(t_i) = \hat{A} + (\hat{y}_0 - \hat{A})e^{-\hat{b}(t_i - t_0)} \quad (\text{B.1})$$

Neste caso, o vector de parâmetros a ser estimado é $p_r = (A, b, y_0)$.

Cálculo das estimativas dos parâmetros $p_r = (A, b, y_0)$

```

# Construção das matrizes dos instantes e das observações:
D<-Dados
d<-dim(D)
m<-(d[2]-1)/2
D1<-matrix(nrow=d[1],ncol=d[2],-1)
for (j in 1:d[2]){
for (i in 1:d[1]){
ifelse(D[i,j]=='NA',D1[i,j]<- -1, D1[i,j]<-D[i,j])}}
Id<-matrix(nrow=d[1],ncol=m)
for (i in 1:m){
Id[,i]<-D1[(2*i)-1]}

```

```

# Matriz dos instantes:
I<-Id[Id>=0]
Pe<-matrix(nrow=d[1],ncol=m)
for (i in 1:m){
Pe[,i]<-D1[, (2*i)]}
# Matriz das observações:
P<-h(Pe[Pe>0])
# Número de observações
N<-length(P)-1
# Regressão não-linear:
# O ficheiro arranqueNLR.txt contém os pontos
de arranque necessários ao cálculo das EMV. Usámos
como pontos de arranque para A e b as EMV. Para y0
considerámos o primeiro instante observado:
source("arranqueNLR.txt")
nlr_lse_df<-data.frame(cbind(I,P))
mod_lse<-nls(P ~ beta1+(beta3-beta1)*exp(-beta2*I),nlr_lse_df,
start=list(beta1=z1, beta2=z2, beta3=z3),trace=TRUE)
summary(mod_lse,correlation=TRUE)
resultados<-summary(mod_lse,correlation=TRUE)$coefficients
# Estimativa para A:
out1<-resultados[1,1]
# Estimativa para b:
out2<-resultados[2,1]
# Estimativa para y0:
out3<-resultados[3,1]

```

Cálculo dos valores previstos e ajustados

A determinação destes valores é análoga ao efectuado no caso do modelo estocástico.

B.1.3 Algoritmo para o modelo estocástico de tamanho assintótico variável

Para este modelo apenas considerámos o cálculo das estimativas de máxima verosimilhança. Para o cálculo destas estimativas são necessários pontos de arranque. Considerámos para pontos de arranque as estimativas de máxima verosimilhança obtidas para o modelo com tamanho assintótico médio fixo (ver B.1.1).

```
# Leitura da tabela com os dados:
Dados<-read.csv("data.csv", header=FALSE, sep=";",dec="," ,fill=TRUE)
D<-Dados
d<-dim(D)
m<-(d[2]-1)/2
# Construção das matrizes com os instantes e observações:
I<-matrix(nrow=d[1],ncol=m)
P<-matrix(nrow=d[1],ncol=m)
for (i in 1:m){
  I[,i]<-D[(2*i)-1]
  P[,i]<-D[(2*i)]}
Nc<-vector(length=m)
for (j in 1:m){
  for (i in 1:d[1]){
    ifelse(I[i,j] == 'NA',Nc,Nc[j]<-Nc[j]+1)}}
N<-Nc-1
SomaObs<-sum(N[1:m])
# Função de log-verosimilhança (para i indivíduo j):
L<-function(I1,I2,P1,P2,N,x){
  -(-sum(P2)-(N/2)*log(2*pi)-(N/2)*log((x[4]^2)/(2*x[3]))-(1/2)
  *sum(log(1-(exp(-x[3]*(I2-I1)))^2))-(1/2)*log((((2*x[3]*x[2]^2)/
  (x[4]^2))*(sum(((1-(exp(-x[3]*(I2-I1))))/(1+exp(-x[3]*(I2-I1))))+1))-
  ((x[3])/((((2*x[3]*x[2]^2)/(x[4]^2))*(sum(((1-(exp(-x[3]*(I2-I1))))/
  (1+exp(-x[3]*(I2-I1)))))+1)*(x[4]^2))))*sum((P2-x[1])-(P1-x[1]))*
```

```

(exp(-x[3]*(I2-I1)))^2/(1-(exp(-x[3]*(I2-I1)))^2))+((2*(x[3]^2)
*x[2]^2)/((x[4]^4)*(((2*x[3]*x[2]^2)/(x[4]^2))*(sum((1-(exp(-x[3]*
(I2-I1))))/(1+exp(-x[3]*(I2-I1))))+1)))*((sum((P2-P1*(exp(-x[3]*
(I2-I1))))/(1+(exp(-x[3]*(I2-I1))))))^2)-
((x[3]*(((2*x[3]*x[2]^2)/(x[4]^2))*(sum((1-(exp(-x[3]*(I2-I1))))/
(1+exp(-x[3]*(I2-I1))))+1)-1))/(((2*x[3]*x[2]^2)/(x[4]^2))*
(sum((1-(exp(-x[3]*(I2-I1))))/(1+exp(-x[3]*(I2-I1))))+1)*
(x[4]^2)))*(sum((P2-P1*(exp(-x[3]*(I2-I1)))^2/(1-(exp(-x[3]*
(I2-I1)))^2))))))
}
# Soma das funções de log-verosimilhança:
LT<-function(x){
LT<-0
for (i in 1:m) {
LT<-LT+L(I[1:(Nc[i]-1)],i),I[2:Nc[i]],i),h(P[1:(Nc[i]-1)],i),h(P[2:Nc[i]],i),N[i],x)
}}
minLT<-nlminb(sp,LT)
minLT
# Cálculo das estimativas dos parâmetros.
# Estimativa de alfa:
a1<-minLT$par[1]
# Estimativa de teta:
a2<-minLT$par[2]
# Estimativa de b:
b<-minLT$par[3]
# Estimativa de sigma:
s<-minLT$par[4]
A<-f(a1)
# Cálculo dos intervalos de confiança a 95%:
hm<-hessian(LT,c(a1,a2,b,s))

```

```

#matriz se var-cov assintóticas
vh<-solve(hm)
e1<-1.96*sqrt(vh[1,1])*Df(a1)
e2<-1.96*sqrt(vh[2,2])*Df(a2)
e3<-1.96*sqrt(vh[3,3])
e4<-1.96*sqrt(vh[4,4])
la1<-A-e1
ua1<-A+e1
la2<-a2-e2
ua2<-a2+e2
lb<-b-e3
ub<-b+e3
ls<-s-e4
us<-s+e4

```

B.1.4 Algoritmo para o modelo estocástico bifásico

Cálculo das estimativas dos parâmetros $p = (A, b_1, b_2, \sigma)$

Neste modelo considerámos a existência de duas fases de crescimento com parâmetros b_1 e b_2 .

```

# Leitura da tabela de dados:
Dados<-read.csv("data.csv", header=FALSE, sep=";",dec="," ,fill=TRUE)
D<-Dados
d<-dim(D)
m<-(d[2]-1)/2
# Cálculo dos vectores I1, I2, G1 e G2:
D1<-matrix(nrow=d[1],ncol=d[2],-1)
for (j in 1:d[2]){
  for (i in 1:d[1]){
    ifelse(D[i,j]==NA',D1[i,j]<- -1, D1[i,j]<-D[i,j])}}
Id<-matrix(nrow=d[1],ncol=m)

```



```

for (i in 1:m){
  Id[,i]<-D1[, (2*i)-1]}
Pe<-matrix(nrow=d[1],ncol=m)
for (i in 1:m){
  Pe[,i]<-D1[, (2*i)]}
Vpe<-cbind(c(Pe[,1:m]))
Vpesos<-h(Vpe[Vpe>0])
Nu<-vector(length=m)
for (j in 1:m){
  for (i in 1:d[1]){
    ifelse(D1[i, (2*j)-1]<u & D1[i, (2*j)-1]>=0, Nu[j]<-Nu[j]+1, 0)}}
nju<-sum(Nu)-m
Nc<-vector(length=m)
for (j in 1:m){
  for (i in 1:d[1]){
    ifelse(Id[i, j]>=0, Nc[j]<-Nc[j]+1, Nc)}}
N<-Nc-1
SomaObs<-sum(N[1:m])
D2k<-D1[-1,]
D1temp<-matrix(nrow=d[1]+1,ncol=d[2])
D1temp<-rbind(D1,rep(-1,d[2]))
D1k<-matrix(nrow=d[1]+1,ncol=d[2])
D1k<-D1temp
for (j in 1:d[2]){
  for (i in 1:d[1]+1){
    ifelse(D1temp[i, j] == -1, D1k[i-1, j]<- -1, D1k[i, j]<-D1temp[i, j])}}
ID1k<-matrix(nrow=d[1]+1,ncol=m)
for (i in 1:m){
  ID1k[,i]<-D1k[, (2*i)-1]}
PD1k<-matrix(nrow=d[1]+1,ncol=m)

```

```

for (i in 1:m){
PD1k[,i]<-D1k[, (2*i)]}
ID2k<-matrix(nrow=d[1]-1,ncol=m)
for (i in 1:m){
ID2k[,i]<-D2k[, (2*i)-1]}
PD2k<-matrix(nrow=d[1]-1,ncol=m)
for (i in 1:m){
PD2k[,i]<-D2k[, (2*i)]}
I1ktemp<-cbind(c(ID1k[,1:m]))
I2ktemp<-cbind(c(ID2k[,1:m]))
P1ktemp<-cbind(c(PD1k[,1:m]))
P2ktemp<-cbind(c(PD2k[,1:m]))
I1<-I1ktemp[I1ktemp>=0]
I2<-I2ktemp[I2ktemp>=0]
G1<-h(P1ktemp[P1ktemp>=0])
G2<-h(P2ktemp[P2ktemp>=0])
# u representa o instante de mudança de fase.
# Cálculo dos vectores com instantes e respectivas
observações anteriores a u, posteriores a u e entre o valor u:
Mu<-cbind(I1,I2,G1,G2)
#### valores menores do que u
Mu_menos<-matrix(nrow=SomaObs,ncol=4)
for (i in 1:SomaObs){
ifelse((Mu[i,1]<Mu[i,2]) & (Mu[i,2]<u), Mu_menos[i,]<-c(Mu[i,]),Mu_menos[i,]<-c(-1))}
# Instantes e observações anteriores a u:
Iu1t_menos<-Mu_menos[,1]
Iu2t_menos<-Mu_menos[,2]
Gu1t_menos<-Mu_menos[,3]
Gu2t_menos<-Mu_menos[,4]
Iu1menos<-Iu1t_menos[Iu1t_menos>=0]

```

```

Iu2menos<-Iu2t_menos[Iu2t_menos>=0]
Gu1menos<-Gu1t_menos[Gu1t_menos>=0]
Gu2menos<-Gu2t_menos[Gu2t_menos>=0]
# Instantes e observações posteriores a u:
Mu_mais<-matrix(nrow=SomaObs,ncol=4)
for (i in 1:SomaObs){
  ifelse((u<=Mu[i,1]) & (Mu[i,1]<Mu[i,2]), Mu_mais[i,]<-c(Mu[i,]),Mu_mais[i,]<-c(-1))}
  Iu1t_mais<-Mu_mais[,1]
  Iu2t_mais<-Mu_mais[,2]
  Gu1t_mais<-Mu_mais[,3]
  Gu2t_mais<-Mu_mais[,4]
  Iu1mais<-Iu1t_mais[Iu1t_mais>=0]
  Iu2mais<-Iu2t_mais[Iu2t_mais>=0]
  Gu1mais<-Gu1t_mais[Gu1t_mais>=0]
  Gu2mais<-Gu2t_mais[Gu2t_mais>=0]
# Instantes e observações entre o valor de u:
Mu_entre<-matrix(nrow=SomaObs,ncol=4)
for (i in 1:SomaObs){
  ifelse((Mu[i,1]<u) & (u<=Mu[i,2]), Mu_entre[i,]<-c(Mu[i,]),Mu_entre[i,]<-c(-1))}
  Iu1t_entre<-Mu_entre[,1]
  Iu2t_entre<-Mu_entre[,2]
  Gu1t_entre<-Mu_entre[,3]
  Gu2t_entre<-Mu_entre[,4]
  Iu1entre<-Iu1t_entre[Iu1t_entre>=0]
  Iu2entre<-Iu2t_entre[Iu2t_entre>=0]
  Gu1entre<-Gu1t_entre[Gu1t_entre>=0]
  Gu2entre<-Gu2t_entre[Gu2t_entre>=0]
# Cálculo das estimativas:
LT<-function(x){
  -(-(sum(G2))-(SomaObs/2)*log((pi*x[4]^2)/(x[3])))-(nju/2)*

```

```

log(x[3]/x[2])-(m/2)*log(x[3])-(1/2)*sum(log(1-exp(-2*x[2]*
(Iu2menos-Iu1menos))))-sum(
(1/2)*log((((1-exp(-2*x[2]*(u-Iu1entre)))*(exp(-2*x[3]*
(Iu2entre-u))))/(x[2]))+((1-exp(-2*x[3]*(Iu2entre-u)))/
(x[3]))))- (1/2)*
sum(log(1-exp(-2*x[3]*(Iu2mais-Iu1mais))))-(x[2]/x[4]^2)*
sum((((Gu2menos-x[1]-(Gu1menos-x[1])*exp(-x[2]*(Iu2menos-
Iu1menos))))^2)/
(1-exp(-2*x[2]*(Iu2menos-Iu1menos))))-sum((((Gu2entre-x[1]-
(Gu1entre-x[1])*exp(-x[2]*(u-Iu1entre))*exp(-x[3]*(Iu2entre-u))))^2)/
((x[4]^2)*(((exp(-2*x[3]*(Iu2entre-u))*(1-exp(-2*x[2]*
(u-Iu1entre))))/(x[2]))+((1-exp(-2*x[3]*(Iu2entre-u)))/(x[3]))))-
(x[3]/x[4]^2)*sum((((Gu2mais-x[1]-(Gu1mais-x[1])*
exp(-x[3]*(Iu2mais-Iu1mais))))^2)/(1-exp(-2*x[3]*(Iu2mais-Iu1mais))))})
mLT<-nlminb(sp,LT)
a<-mLT$par[1]
b1<-mLT$par[2]
b2<-mLT$par[3]
s<-mLT$par[4]
A<-f(a)
# Cálculo dos intervalos de confiança a 95%:
hessLT<-function(x){
(-(sum(G2))-(SomaObs/2)*log((pi*x[4]^2)/(x[3]))-(nju/2)*
log(x[3]/x[2])-(m/2)*log(x[3])-(1/2)*sum(log(1-exp(-2*
x[2]*(Iu2menos-Iu1menos))))-sum(
(1/2)*log((((1-exp(-2*x[2]*(u-Iu1entre)))*(exp(-2*x[3]*
(Iu2entre-u))))/(x[2]))+((1-exp(-2*x[3]*(Iu2entre-u)))/
(x[3]))))- (1/2)*
sum(log(1-exp(-2*x[3]*(Iu2mais-Iu1mais))))-(x[2]/x[4]^2)
*sum((((Gu2menos-x[1]-(Gu1menos-x[1])*exp(-x[2]*(Iu2menos-

```

```

Iu1menos)))^2)/
(1-exp(-2*x[2]*(Iu2menos-Iu1menos)))-sum(((Gu2entre-x[1]
-(Gu1entre-x[1])*exp(-x[2]*(u-Iu1entre)))*exp(-x[3]*(Iu2entre-u)))^2)/
((x[4]^2)*(((exp(-2*x[3]*(Iu2entre-u))*(1-exp(-2*x[2]*
(u-Iu1entre))))/(x[2]))+((1-exp(-2*x[3]*(Iu2entre-u)))/(x[3]))))-
(x[3]/x[4]^2)*sum(((Gu2mais-x[1]-(Gu1mais-x[1])*exp(-x[3]*
(Iu2mais-Iu1mais))))^2)/(1-exp(-2*x[3]*(Iu2mais-Iu1mais))))))}
he<-hessian(hessLT,c(a,b1,b2,s))
hm<--he
vh<-solve(hm)
e1<-1.96*sqrt(vh[1,1])*Df(a)
e2<-1.96*sqrt(vh[2,2])
e3<-1.96*sqrt(vh[3,3])
e4<-1.96*sqrt(vh[4,4])
la<-A-e1
ua<-A+e1
lb1<-b1-e2
ub1<-b1+e2
lb2<-b2-e3
ub2<-b2+e3
ls<-s-e4
us<-s+e4

```

Cálculo dos valores ajustados e previstos

Neste modelo considerámos a existência de duas fases de crescimento com parâmetros b_1 e b_2 . Para o cálculo dos valores ajustados e previstos recorreremos às expressões para a densidade de transição cuja forma depende das fases de crescimento. As expressões consideradas foram apresentadas na secção 4.2.8 (ver expressões (4.42), (4.43) e (4.44)).

Código para o ajustamento:

```
# Cálculo dos valores ajustados.
```

```

# O primeiro valor ajustado corresponde ao último observado:
sde_fit_bif<-vector(length=Nc)
sde_fit_bif[1]<-G1[1]
# Expressão para a 1ª fase
for (i in 2:nju){sde_fit_bif[i]<-a+exp(-b1*(Iu2menos[i-1]-I1[1]))*(G1[1]-a)}
# Expressão para a transição
sde_fit_bif[nju+1]<-a+exp(-b2*(Iu2entre-u))*(sde_fit_bif[nju]-a)
# Expressão para a 2ª fase
Yu<-a+exp(-b1*(u-I1[1]))*(G1[1]-a)
sde_fit_bif[nju+2]<-Yu
for (i in 2:(Nc-nju-1)){sde_fit_bif[nju+1+i]<-a+exp(-b2*(Iu2mais[i-1]-u))*(Yu-a)}
# Invertemos a transformação:
Xsde_fit_bif<-f(sde_fit_bif)
# Matriz com valores ajustados, observados e resíduos:
sde_fit_bif_res<-Xsde_fit_bif[2:Nc]-f(G2)
sde_fit_res_bifMX<-matrix(nrow=N, ncol=3)
sde_fit_res_bifMX[,1]<-Xsde_fit_bif[2:Nc]
sde_fit_res_bifMX[,2]<-f(G2)
sde_fit_res_bifMX[,3]<-sde_fit_bif_res
sde_fit_res_bifMX
# Cálculo da raiz do erro quadrático médio:
REQMX_sde_fit_bif<-sqrt(sum(sde_fit_bif_res^2)/N)

Código para a previsão:

# np = número de instantes a prever (introduzido pelo utilizador):
# k = número de observações observadas menos as que queremos prever:
k<-(leYobs-np)
# Número de observações que desejo prever +1:
leY<-np+1
# Vector das previsões:

```

(apenas na segunda fase)

```
sde_pred_bif<-vector(length=leY)
sde_pred_bif[1]<-LYobs[k+1]
for (i in 2:leY){sde_pred_bif[i]<-a+exp(-b2*(Iobs[(k+i)]-Iobs[(k+1)]))*(LYobs[(k+1)]-a)}
# Invertemos a transformação:
Xsde_pred_bif<-f(sde_pred_bif)
# Matriz com valores ajustados, observados e resíduos:
sde_pred_bif_res<-Xsde_pred_bif-f(LYobs[(k+1):(leYobs+1)])
sde_pred_res_bifMX<-matrix(nrow=leY, ncol=3)
sde_pred_res_bifMX[,1]<-Xsde_pred_bif
sde_pred_res_bifMX[,2]<-f(LYobs[(k+1):(leYobs+1)])
sde_pred_res_bifMX[,3]<-sde_pred_bif_res
# Cálculo da raiz do erro quadrático médio:
REQMX_sde_pred_bif<-sqrt(sum(sde_pred_bif_res^2)/(leY-1))
```

B.2 Aplicação do modelo de Black-Scholes

Dado que o modelo de Black-Scholes não foi introduzido no software gSDE apresentamos o programa desenvolvido para o cálculo dos valores apresentados na secção 6.2.

```
rm(list=ls(all=TRUE))
autoload("hessian","numDeriv")
setwd("D:/Tese/Programas R")
Dados<-read.csv("D:/Tese/Programas R/dados.csv",header=FALSE,sep=";",dec=".",fill=TRUE)
D<-Dados[1:1349,]
I<-Dados[1:1349,1]          #Coluna dos instantes.
C<-Dados[1:1349,2]        #Coluna das cotações.
lx0<-log(C[1])
G<-log(C)-lx0              #Logaritmo das cotações.
N<-length(I)              #Número de Observações.
```

```

Re<-G[N]/I[N]                #Estimador m.v. de R.

Re

Ve<-(1/(N-1))*sum((G[2:N]-G[1:N-1]-Re*(I[2:N]-I[1:N-1]))^2/(I[2:N]-I[1:N-1]))

#Estimador m.v. de V.

Ve

H<-matrix(nrow=2,ncol=2)

H[1,1]<-Ve/I[N]

H[1,2]<-0

H[2,1]<-0

H[2,2]<-(2*(Ve)^2)/N

H

ICa_Re_sup<-Re+1.96*sqrt(H[1,1])

ICa_Re_sup

ICa_Re_inf<-Re-1.96*sqrt(H[1,1])

ICa_Re_inf

ICa_Ve_sup<-Ve+1.96*sqrt(H[2,2])

ICa_Ve_sup

ICa_Ve_inf<-Ve-1.96*sqrt(H[2,2])

ICa_Ve_inf

ICe_Re_sup<-Re+qt(0.975,N-1)*(sqrt(((N-1)*I[N])/(N*Ve)))^-1

ICe_Re_sup

ICe_Re_inf<-Re-qt(0.975,N-1)*(sqrt(((N-1)*I[N])/(N*Ve)))^-1

ICe_Re_inf

ICe_Ve_sup<-(N*Ve)/qchisq(0.025,N-1)

ICe_Ve_sup

ICe_Ve_inf<-(N*Ve)/qchisq(0.975,N-1)

ICe_Ve_inf

#Previsão longo prazo 100 dias:

I1<-Dados[1350:1449,1]

C1<-Dados[1350:1449,2]

```



```

G1<-log(C1)-log(C[1])
Rep<-G1[100]/I[100]          #Estimador m.v. de R.
Rep
Vep<-(1/(100-1))*sum((G1[2:100]-G1[1:99]-Rep*(I1[2:100]-I1[1:99]))^2/
(I1[2:100]-I1[1:99])) #Estimador m.v. de V.
Vep
Yt<-G1[1]+Rep*(I1[2:100]-I1[1])
Yt
IC_Yt_inf<-Yt-1.96*sqrt(Vep*I1[2:100]*(I1[2:100]-I1[1])/I1[1])
IC_Yt_inf
IC_Yt_sup<-Yt+1.96*sqrt(Vep*I1[2:100]*(I1[2:100]-I1[1])/I1[1])
IC_Yt_sup
REQMlp<-sqrt((sum(((C1[1]*exp(Yt))-C1[2:100])^2))/99)
REQMlp
postscript("longo.eps")
plot(I1,G1,xlab="Instante (anos)",ylab="Cotação (Eur)", type="l",lty=1,
lwd=2, col="black", xlim=c(5.2,5.7), ylim=range(0:2))
lines(I1, c(G1[1],Yt), type="l",pch=21,lty=2,lwd=2,col="blue")
lines(I1[2:100],IC_Yt_inf,type="l",pch=21,lty=3,lwd=3,col="red")
lines(I1[2:100],IC_Yt_sup,type="l",pch=21,lty=4,lwd=3,col="green")
legend(5.2,1.75,cex=1.5,c("Cotação Observada","Previsão longo prazo",
"Lim. Inf. I.C.", "Lim. Sup. I.C."),col=c("black","blue","red","green")
,lwd=3,lty=1:4)
dev.off()
#Previsão passo a passo 100 dias:
I1<-Dados[1350:1449,1]
C1<-Dados[1350:1449,2]
G1<-log(C1)-log(C[1])
Yp<-vector(length=100)
Repp<-vector(length=100)

```

```

Repp[1]<-Re
Yp[1]<-G1[1]+Re*(I1[2]-I1[1])
for (i in 2:100){
  Repp[i]<-G1[i-1]/I1[i-1]
  Yp[i]<-G1[i-1]+Repp[i]*(I1[i]-I1[i-1])}
Yp
Vepp<-vector(length=100)
Vepp[1]<-Ve
for (i in 2:100){
  Vepp[i]<-(1/(99))*sum((c(G1[2:100],Yp[2:i])-c(G1[1:99],Yp[1:i-1]))-
  Re*(c(I1[2:100],I1[2:i])-c(I1[1:99],I1[1:i-1])))^2/(c(I1[2:100],I1[2:i])-
  c(I1[1:99],I1[1:i-1])))}
Vepp
IC_Yp_inf<-vector(length=100)
IC_Yp_sup<-vector(length=100)
IC_Yp_inf[1]<-Yp[1]-1.96*sqrt(Vepp[1]*I1[1]*(I1[2]-I1[1])/I1[1])
IC_Yp_inf[2:100]<-Yp[2:100]-1.96*sqrt(Vepp[2:100]*I1[2:100]*(I1[2:100]-
I1[1:99])/I1[1:99])
IC_Yp_sup[1]<-Yp[1]+1.96*sqrt(Vepp[1]*I1[1]*(I1[2]-I1[1])/I1[1])
IC_Yp_sup[2:100]<-Yp[2:100]+1.96*sqrt(Vepp[2:100]*I1[2:100]*(I1[2:100]-
I1[1:99])/I1[1:99])
IC_Yp_inf
IC_Yp_sup
REQMpp<-sqrt((sum(((C1[1]*exp(Yp))-C1[1:100])^2))/99)
REQMpp
postscript("passo.eps")
plot(I1,G1,xlab="Instante (anos)",ylab="Cotação (Eur)", type="l",
lty=1,lwd=2, col="black", xlim=c(5.2,5.7), ylim=range(0:1))
lines(I1,Yp, type="l",pch=21,lty=2,lwd=2,col="blue")
lines(I1,IC_Yp_inf,type="l",pch=21,lty=3,lwd=3,col="red")

```

```
lines(I1,IC_Yp_sup,type="l",pch=21,lty=4,lwd=3,col="green")
legend(5.2,0.9,cex=1.5,c("Cotação Observada","Previsão passo-a-passo"
, "Lim. Inf. I.C.", "Lim. Sup. I.C."),col=c("black","blue","red","green"),
lwd=3,lty=1:4)
dev.off()
```


Bibliografia

- [1] Banks, B. R., *Growth and Diffusion Phenomena*, Springer-Verlag, 1994.
- [2] Bartle, R. G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, John Wiley and Sons, Inc., 1995.
- [3] Braumann, C. A., *Introdução às Equações Diferenciais Estocásticas e Aplicações*, SPE, 2005.
- [4] Braumann, C. A., Filipe, P., Carlos, C. e Roquete, C., *Growth of individuals in randomly fluctuating environments*, Journal of Computational and Applied Mathematics (submitted), 2009.
- [5] Braumann, C. A., *Estimação de parâmetros para uma ou várias trajectórias do movimento Browniano geométrico*, Afirmar a estatística: um desafio para o século XXI, Actas do VI Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística, p. 149-156, Tomar, 1999.
- [6] Casella, G. e Berger, R., *Statistical inference*, Duxbury, Califórnia, 1990.
- [7] Capinski, M. e Koop, E., *Measure, Integral and Probability*, Springer, 1998.
- [8] Fahrmeir, L. e Tutz, G., *Multivariate statistical modelling based on general linear models*, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [9] Filipe, P. A., Braumann, C. A. e Roquete, C., *Modelos de crescimento de animais em ambiente aleatório*, Estatística Ciência Interdisciplinar, Actas do XV Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística, p. 401-410, 2007.

- [10] Filipe, P. A. e Braumann, C. A., *Animal Growth in Random Environments: Estimation with Several Paths*, Bulletin of the International Statistical Institute LXII, p. 5806-5809, 2007.
- [11] Filipe, P. A., Braumann, C. A. e Roquete, C. J., *Crescimento individual em ambiente aleatório: várias trajetórias*, Estatística - da Teoria à Prática, Actas do XV Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística, (Hill, M.M., Ferreira, M-A., Dias, J.G., Salgueiro, M.F., Carvalho, H., Vicente, P. e Braumann, C.A. eds.), Edições SPE, p. 259-268, 2008.
- [12] Filipe, P. A. e Braumann, C. A., *Modelling Individual Animal Growth in Random Environments*, Proceedings of the 23rd International Workshop on Statistical Modelling, p. 232-237, Ed. Paul H. C. Eilers, Utrecht, 2008.
- [13] Filipe, P. A., Braumann, C. A. e Roquete, C. J., *Modelos multifásicos de crescimento de animais em ambiente aleatório*, Estatística - Arte de Explicar o Acaso, Actas do XVI Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística, (Oliveira, I., Correia,E., Ferreira, F., Dias, S. e Braumann, C.A. eds.), p. 299-306, Edições SPE, 2009.
- [14] Filipe, P. A., Braumann, C. A., Brites, N. M. e Roquete, C. J., *Modelling animal growth in random environments: an application using nonparametric estimation*, Biometrical Journal, Vol. 52. Iss. 5, p. 653-666, 2009.
- [15] Filipe, P. A., Braumann, C. A., Carlos, C. e Roquete, C. J., *Growth of individuals in randomly fluctuating environments*, Proceedings of the 2009 International Conference in Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, Ed. J. Vigo-Aguiar, p. 201-212, Gijón, 2009.
- [16] Franco, J. C. G., *Maximum likelihood estimation of mean reverting processes*, Real Options Practice - Onward Inc., 2003.
- [17] Goldsworthy, P. e Colegrove, M., *Growth and yield of highland maize in Mexico*, Journal of Agriculture Science, **83**,p. 213-221, 1974.
- [18] Gutiérrez, R. e Gutiérrez-Sanches, R. *et al*, *A new stochastic Gompertz diffusion process with threshold parameter: computational aspects and applications*, Journal of Applied Mathematics and computation, **183**,p. 738-747, 2006.

- [19] Jolicoeur, P., *A flexible 3-parameter curve for limited or unlimited somatic growth*, Growth, **19**, p. 271-281, 1985.
- [20] Karlin, S. e Taylor, H. M., *A First Course in Stochastic Processes*, Academic Press, New York, 1981.
- [21] Karlin, S. e Taylor, H. M., *A Second Course in Stochastic Processes*, Academic Press, New York, 1981.
- [22] Øksendal, B., *Stochastic Differential Equations. An introduction with applications (sixth edition)*, Springer, Berlin, 2003.
- [23] Preece, M. A. e Baines, M. J., *A new family of mathematical models describing the human growth curve*, Annales of Human Biology, **5**, p. 1-24, 1978.
- [24] Halmos, P. R., *Measure Theory*, Springer, 1974.
- [25] Ricker, W. E., *Growth rates and models*, Fish Physiology, **8**, 1980.
- [26] Wheeden, R. L. e Zygmund, A., *Measure and Integral, an Introduction to Real Analysis*, Marcell Dekker, 1977.
- [27] Tomassone, R. e Dervin, C., *Biométrie: modélisation de phénomènes biologiques*, Masson, Paris, 1993.
- [28] Valentine, H., *Tree-growth models: derivations employing the pipe-model theory*, Journal of Theoretical Biology, **117**, p. 579-585, 1985.

ESTE TEXTO INCLUI UM DVD.

