



# ANÁLISE CONJUNTA DE REGRESSÕES

## AJUSTAMENTO E ZONAGEM AGRÍCOLA

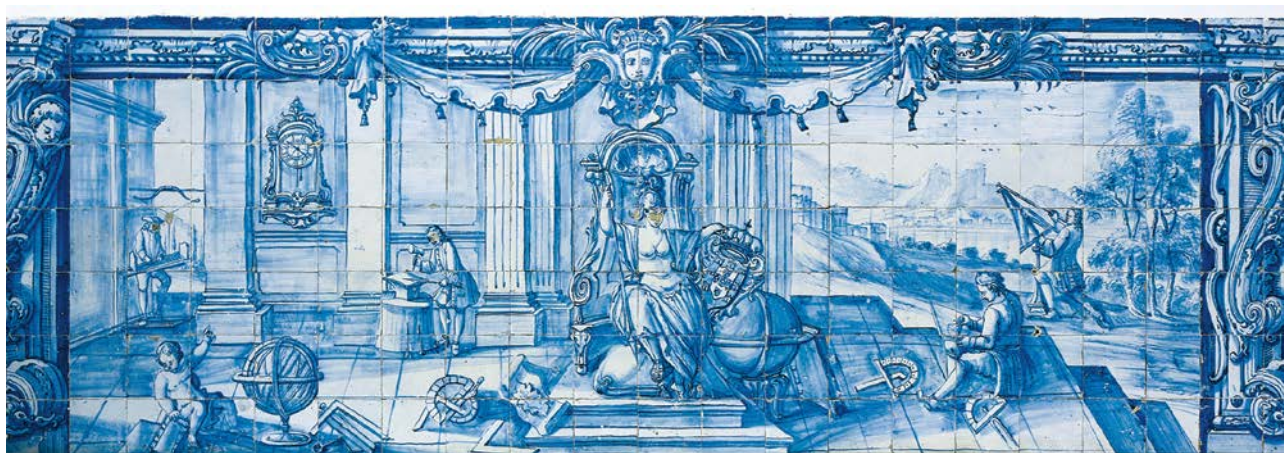
---

*Victor Ramos Tavares*

Tese apresentada à Universidade de Évora  
para obtenção do Grau de Doutor em Matemática  
Especialidade: Matemática e Aplicações

ORIENTAÇÃO: *Prof.ª Doutora Dulce Gamito Santinhos Pereira*  
CO-ORIENTAÇÃO: *Prof. Doutor João Tiago Praça Nunes Mexia*

ÉVORA, FEVEREIRO DE 2013



## **Agradecimentos**

À Professora Doutora Dulce Gamito Santinhos Pereira e ao Professor Catedrático, Doutor João Praça Nunes Mexia, meus Orientadores, a quem reconheço pelo grande empenho na orientação durante a elaboração deste trabalho.

Ao IPAD, atualmente Instituto Camões pela conceção da Bolsa de Estudo

À Universidade de Cabo-Verde pelas licenças concedidas.

## Resumo

A Análise conjunta de regressões, ACR, é uma técnica utilizada para estudar a interação *gentipo x ambiente* baseada em regressões.

Nesta técnica ajusta-se uma regressão linear por cultivar. Nestas regressões a variável controlada é o índice ambiental que mede a produtividade dos vários ambientes. Nas culturas anuais, os ambientes compreendem aos pares (local, ano). Os valores dos índices ambientais e dos coeficientes das regressões são ajustados simultaneamente.

Até agora a ACR tem sido aplicada a uma única cultura de cada vez. Neste trabalho vamos procurar ultrapassar essa limitação através da modelação dos logaritmos dos índices ambientais tendo-se desenvolvido um modelo da forma:

$$z_{i,j} = v + l_j + \lambda_j, i = 1, \dots, n, J = 1, \dots, n$$

onde  $z_{i,j}$  é o logaritmo do índice ambiental para o  $i$ -ésimo ambiente na  $j$ -ésima cultura,  $v$  um valor médio geral,  $l_i$  o efeito do  $i$ -ésimo local e  $\lambda_j$  o efeito do  $j$ -ésimo cultivar.

Ao utilizar esta modelação, os locais corresponderão a estações experimentais de forma a poder-se ter várias culturas no mesmo local. Ora, as estações experimentais são escolhidas por forma a serem representativas das regiões onde estão implantadas.

Assim, os índices ambientais correspondentes às várias estações experimentais e, conseqüentemente, às respectivas regiões, pudesse ser utilizados para agrupar regiões contíguas com índices semelhantes obtendo-se assim, um elemento interessante para a Zonagem agrícola no que diz respeito às culturas que se trabalha. Pode-se ainda procurar uma Zonagem para grupos de cultivares. Por exemplo, adiante trabalharemos com dados da cevada e trigo os quais são cereais.

**Abstract**  
**Joint Regression Analysis.**  
**Adjustment and Agricultural Zoning.**

Joint Regression Analysis, JRA, is one of the techniques for the study of genotypeXenvironment interaction based on the use of regressions .In JRA a linear regression of the yields of each cultivar on a controlled variable, the environment index ,is adjusted .The index miss erasures the productivity of each environment .In yearly cultures the environments correspond to the pairs (location ,years) .These indexes and the correlation coefficients are adjusted simultaneously.

Up to now JRA has been applied to single crops .Now we try to overcome this restriction through modeling of the logarithms of the environmental indexes .We developed a model

$$\tau_{i,j} = v + l_j + \lambda_j, i = 1, \dots, b, J = 1, \dots, J$$

where  $\tau_{i,j}$  is the logarithm of the environmental index for the i-th environment and the j-th crop ,  $v$  is the general mean ,  $l_i$  is the effect of the i-th environment and  $\lambda_j$  is the effect of the j-th crop .

When applying this model the location will correspond to experimental situations in order to have several crops in the same locations .Now experimental stations are chosen to be representative of the regions in which they are located .Then the  $l_1, \dots, l_b$  can be used to group contiguous regions with similar location effects .We thus get an useful tool for Agricultural Zoning for the crops we used or, even, for the group to which those crops belong . For instance we worked with barley and wheat that are cereals.

## Símbolos e Notações

$j$	Número de cultivares
$b$	Número de blocos
$(\alpha_j, \beta_j) \left[ (\tilde{\alpha}_j, \tilde{\beta}_j) \right]$	Vetores dos coeficientes e coeficientes ajustados para as regressões
$A^t$	Transposta da matriz $A$
$A^{-1}$	Matriz inversa de $A$
$A^+$	Matriz inversa de Moore-Pemrose de $A$
$0_{r \times s}$	Matriz nula de ordem $r \times s$
$I_n$	Matriz identidade de ordem $n$
$X$	Matriz $X$
$Y$	Matriz $Y$
$B$	Matriz $B$
$p_{i,j}$	Peso atribuído ao $j$ -ésimo cultivar no $i$ -ésimo bloco
$car(A)$	Característica da matriz $A$
$\  \ $	Norma euclidiana
$\nabla^\perp$	Complemento ortogonal de $\nabla$
$grad(S)$	Gradiente da função $S$
$pr(A)$	Probabilidade do acontecimento $A$
$\chi_{g,\delta}^2$	Distribuição Qui-quadrado central com $g$ graus de liberdade
$\chi_{g,0}^2$	Distribuição Qui-quadrado central com $g$ graus de liberdade e parâmetro de não centralidade $\delta$
$F(z r,s)$	Distribuição $F$ central com $r$ e $s$ graus de liberdade
$F(z r,s,\delta)$	Distribuição $F$ central com $r$ e $s$ graus de liberdade e parâmetro de não centralidade $\delta$
$\bar{F}(z r,s,\delta)$	Quociente de dois qui quadrados independentes $\chi_r^2(\delta)$ e $\chi_s^2$
$f_{1-q,r,g}$	Valor crítico da distribuição $F$ ao nível de significância $q$ com $r$ e $g$ graus de liberdade
$\bar{f}_{1-q,r,g}$	Quantil de probabilidade $1-q$ da distribuição de quociente de dois qui-quadrados centrais e independentes com $r$ e $g$ graus de liberdade, $\chi_r^2$ e $\chi_g^2$

$T_{1-q,s,g}$	Quantil de probabilidade de $1-q$ da amplitude Studentizada, com $r$ e $g$ graus de liberdade
$Var$	Variância
$\sim$	Distribui-se como
$\otimes$	Produto de Kronecker
$\oplus$	Soma direta ortogonal de matrizes
$\ln$	Logaritmo natural
$D(r_1, \dots, r_s)$	Matriz diagonal $s \times s$ cujos elementos da diagonal principal correspondem a $r_1, \dots, r_s$
$Hess$	Matriz Hessiana
$N(\mu, \sigma^2)$	Normal de valor médio $\mu$ e variância $\sigma^2$
$\Omega$	Espaço paramétrico total
$\Sigma$	Matriz da covariância
$\dim$	Dimensão de um sub-espaço
$R(A)$	Espaço imagem da matriz $A$
$R(A)^\perp$	Complemento ortogonal do espaço imagem da matriz $A$
$R^2$	Coefficiente de determinação
$R^n$	Espaço Euclidiano de dimensão $n$
ANOVA	Análise da variância
ACR	Análise Conjunta de Regressões
D	Demonstração
$X$	Variável aleatória
$\underline{x}$	Vetor aleatório
$\underline{X}$	Matriz aleatória
$X'X$	Matriz cruzada

## Índice de tabelas

Tabela 1 valores de $N_{\varepsilon}(\bar{\delta})$	45
Tabela 2 Quadro resumo da ANOVA	66
Tabela 3a Regressões para a cultura da cevada	69
Tabela 3b Regressões para a cultura do trigo	69
Tabela 4 Índices ambientais ajustados	79
Tabela 5 Coeficiente de correlação de SPEARMAN	80
Tabela 6 Logarítmos dos índices ambientais e seus totais	80
Tabela 7 Quadro resumo da ANOVA para a aplicação	81

## Índice de figuras

Fig.1 Gráfico do contorno superior	35
Fig. 2 Distribuição " t" central	60
Fig. 3 Regressões no local BR da cevada	70
Fig. 4 Regressões no local CAS da cevada	70
Fig. 5 Regressões no local HE da cevada	71
Fig. 6 Regressões no local HRA da cevada	71
Fig. 7 Regressões no local CHT da cevada	72
Fig. 8 Regressões no local UHO da cevada	72
Fig. 9 Regressões no local LED da cevada	73
Fig. 10 Regressões no local LIP da cevada	73
Fig. 11 Regressões no local VER da cevada	74
Fig. 12 Regressões no local BR do trigo	75
Fig. 13 Regressões no local CAS do trigo	75
Fig. 14 Regressões no local HE do trigo	76
Fig. 15 Regressões no local HRA do trigo	76
Fig. 16 Regressões no local CHT do trigo	77
Fig. 17 Regressões no local UHO do trigo	77
Fig. 18 Regressões no local LED do trigo	78
Fig. 19 Regressões no local LIP do trigo	78
Fig. 20 Regressões no local VER do trigo	79



## Índice de conteúdos

1	Introdução.....	1
2	Resultados preliminares.....	2
2.1	Matrizes.....	2
2.1.1	Generalidades.....	2
2.1.2	Matrizes simétricas e de projeção ortogonal.....	3
2.1.3	Produto de Kronecker de matrizes.....	6
2.2	Estimadores dos mínimos quadrados.....	8
2.3	Vetores normais.....	9
2.3.1	Momentos e funções geradoras.....	9
2.3.2	Transformações lineares.....	15
2.3.3	Distribuições associadas.....	18
2.3.4	Teorema de Scheffé.....	24
2.3.5	Partição ortogonal.....	27
2.3.6	Cruzamento de fatores.....	29
3	Análise Conjunta de Regressões – ACR.....	31
3.1	Aspetos preliminares.....	31
3.2	Contorno superior.....	35
3.3	Estabilidade.....	37
4.	Índices Ambientais.....	47
4.1	Generalidades.....	47
4.2	Ajustamento.....	48
4.3	Inferência.....	53
4.4	Análise da variância.....	62
4.5	Zonagem agrícola.....	66
5	Aplicações.....	67
5.1	Generalidades.....	67
5.2	Análise conjunta de regressões.....	67
5.3	Seleção do caso a tratar.....	80
5.4	Zonagem agrícola.....	81
6	Conclusão.....	82
7.	Bibliografia.....	83

## 1 Introdução

A Análise Conjunta de Regressões, ACR, é ver Aastveit & Mejza (1999), uma das técnicas utilizadas no estudo da interação genótipo X ambiente. Entre essas técnicas a ACR baseia-se, como o seu nome indica, no ajustamento de regressões lineares, uma por cultivar (genótipo), do rendimento numa variável controlada, o índice ambiental. Este índice mede a capacidade produtiva dos vários ambientes para os quais se têm resultados. No caso de culturas anuais esses ambientes são dados pelos pares (local, ano).

O objetivo central do nosso estudo incidirá sobre o índice ambiental. Procuraremos encontrar medidas da capacidade produtiva que permitam considerar simultaneamente várias culturas, ultrapassando assim a utilização normal de se aplicar a ACR apenas na comparação de genótipos de uma única cultura.

No **capítulo 2** apresentamos resultados preliminares relativos a:

- Matrizes;
- Estimadores dos mínimos quadrados;
- Vetores normais que nos serão úteis.

Segue-se o **capítulo 3** em que apresentamos os aspetos fundamentais da ACR de forma a fundamentar o estudo dos índices ambientais. Esse estudo é levado a efeito no **capítulo 4** apresentando-se um modelo linear para os logaritmos dos índices ambientais de forma

$$z_{i,j} = v + l_i + \lambda_j, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n$$

,onde  $v$  pode ser interpretado como um valor médio geral,  $l_i$  como o efeito do  $i$ -ésimo, ambiente,  $i = 1, \dots, n$  e  $\lambda_j$  como o efeito da  $j$ -ésima cultura,  $j = 1, \dots, n$ .

Veremos :

- Quando um modelo destes se ajusta;
- Caso se ajuste como realizar a inferência para o mesmo;
- Veremos como utilizar os efeitos dos locais ajustados em zonagem agrícola.

Aplicaremos os nossos resultados no **capítulo 5** a dados fornecidos pelo Instituto Central de Melhoramento Vegetal da República Checa.

A aplicação será feita em duas fases:

- Numa primeira fase utilizaremos os resultados da ACR clássica;
- Na segunda fase utilizaremos o modelo logarítmico.

## 2 Resultados preliminares

### 2.1 Matrizes

#### 2.1.1 Generalidades

Restringir-nos-emos a matrizes reais, isto é, cujos elementos são números reais. Sendo  $A$  uma matriz de  $n \times m$ ,  $a_{i,j}$  será o elemento de  $A$  utilizado na  $i$ -ésima linha e na  $j$ -ésima coluna,  $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, m$ , pondo-se  $A = [a_{i,j}]$

A norma euclidiana de  $A$  será  $\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{i,j}^2}$ , se

$$A = [\underline{a}_1 \ \dots \ \underline{a}_m]$$

ter-se-á

$$\|A\|^2 = \sum_{j=1}^m \|\underline{a}_j\|^2$$

com  $\|\underline{v}\|$  a norma euclidiana do vetor  $\underline{v}$

As matrizes quadradas terão tantas linhas quanto as colunas e se  $A = [a_{i,j}]$  for quadrada  $n \times n$  os  $a_{1,1} \dots a_{n,n}$  são os respetivos elementos principais. Se os únicos elementos não nulos de  $A$  forem diagonais poremos

$$A = D(a_{1,1} \dots a_{n,n})$$

As matrizes podem ser fracionadas em sub-matrizes

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} \dots A_{1,s} \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ A_{r,1} \dots A_{r,s} \end{bmatrix}$$

em particular tem-se

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \dots 0 \\ \vdots \quad \vdots \\ 0 \dots A_r \end{bmatrix} = D(A_1, \dots, A_r)$$

quando  $r = s$  e as únicas sub-matrizes não nulas têm índices iguais, dizemos então que  $A$  é diagonal por blocos.

### 2.1.2 Matrizes simétricas e de projeção ortogonal

Uma matriz quadrada  $M$  é simétrica se

$$M^t = M$$

, isto é, com  $M = [m_{i,j}]$ , se tiver  $m_{i,j} = m_{j,i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, n$ , quando  $M$  é  $n \times n$ . Por outro lado uma matriz quadrada  $P$   $n \times n$  é ortogonal se

$$PP^t = P^tP = I_n$$

onde  $I_n$  é a matriz identidade de ordem  $n$

Uma matriz quadrada  $n \times n$   $A$  é invertível se e só se existir uma matriz  $A^{-1}$  tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Vê-se que  $A^{-1}$  são quadradas  $n \times n$ . Aliás uma matriz  $P$   $n \times n$  é ortogonal se e só se for invertível e se tiver

$$P^{-1} = P^t$$

Observe-se, ver por exemplo Schott (1997) que sendo  $M$  simétrica, existe  $P$  matriz ortogonal tal que

$$M = P^t D(r_1 \dots r_n) P$$

,onde  $D(r_1 \dots r_n)$  é a matriz diagonal cujos elementos principais  $r_1 \dots r_n$  são os valores próprios de  $M$ . Os vetores linha de  $P$  serão os vetores próprios de  $M$  associados aos valores próprios com os mesmos índices.

No que segue necessitaremos de alargar a noção de matriz inversa. Moore levantou a questão de dada uma matriz  $A$ , não necessariamente quadrada, existir uma matriz  $A^+$  tal que

$$\begin{cases} AA^+A = A \\ A^+AA^+ = A^+ \\ (AA^+)^t = AA^+ \\ (A^+A)^t = A^+A \end{cases}$$

,tendo Pemrose mostrado que  $A^+$ , a inversa de MOORE PEMROSE de  $A$ , existe sempre e é única, ver Pollock (1979). Se  $A$  for invertível ter-se-á  $A^+ = A^{-1}$

Tendo-se em geral  $(A^t)^+ = (A^+)^t$

pelo que, se  $A$  for simétrica,  $A^+$  será simétrica.

Se  $M$  for simétrica tendo-se

$$M = P^t D(r_1 \dots r_n) P$$

é fácil de verificar que

$$M^+ = P^t D(r_1^+ \dots r_n^+) P$$

,com

$$\begin{cases} r_j^+ = r_j^{-1} \text{ se } r_j \neq 0, \\ r_j^+ = 0 \text{ se } r_j = 0 \end{cases}$$

Por outro lado dado um sub-espço  $\nabla$  de  $R^n$  o respetivo complemento ortogonal  $\nabla^\perp$  é formado por todos os vetores ortogonais a  $\nabla$ , dizendo-se que  $\underline{v} \in R^n$  é ortogonal a  $\nabla$  se for ortogonal a todos os vetores de  $\nabla$ . Dado  $\underline{z} \in R^n$  tem se uma partição única

$$\underline{z} = \underline{z}_{\nabla} + \underline{z}_{\nabla^{\perp}}$$

com  $\underline{z}_{\nabla} \in \nabla$  e  $\underline{z}_{\nabla^{\perp}} \in \nabla^{\perp}$ . Tem-se ainda,

$$\begin{cases} \underline{z}_{\nabla} = Q(\nabla)\underline{z} \\ \underline{z}_{\nabla^{\perp}} = Q(\nabla^{\perp})\underline{z} \end{cases}$$

,com  $Q(\nabla)$  e  $Q(\nabla^{\perp})$  as matrizes de projeção ortogonal sobre  $\nabla$  e  $\nabla^{\perp}$  vendo-se que

$$Q(\nabla^{\perp}) = I_n - Q(\nabla).$$

Mostra-se ver, Schott (1997), que  $Q$  é matriz de projeção ortogonal, sobre o seu espaço imagem  $R(Q)$ , se e só se for simétrica e idempotente.

**De**

$$Q = P^t D(r_1 \dots r_n) P$$

e de  $Q$  ser idempotente tira-se  $r_j = 0$  ou  $r_j = 1, j = 1, \dots, n$ , e, conseqüentemente,

$$Q = Q^+.$$

Duas matrizes de projeção ortogonal são mutuamente ortogonais,  $Q_1 \perp Q_2$  se  $Q_1 Q_2 = 0$

logo se os vetores linha de  $Q_1$  forem ortogonais aos vetores coluna de  $Q_2$ . Como  $Q_1$  e  $Q_2$  são simétricas os seus vetores linha são os seus vetores coluna. Ora os vetores de  $R(Q_1)[R(Q_2)]$  são combinações lineares de vetores coluna de  $Q_1(Q_2)$  assim, se  $Q_1 \perp Q_2$  os vetores de  $R(Q_1)$  serão ortogonais aos de  $R(Q_2)$  pondo-se

$$R(Q_1) \perp R(Q_2).$$

Observe-se que se  $Q_1 \perp Q_2$ , então  $Q_1 + Q_2$  é simétrica e idempotente, logo matriz de projeção ortogonal já que

$$(Q_1 + Q_2)(Q_1 + Q_2) = Q_1 Q_1 + Q_1 Q_2 + Q_2 Q_1 + Q_2 Q_2 = Q_1 + Q_2$$

No que segue famílias de matrizes de projeção ortogonal mutuamente ortogonais desempenharão um papel importante já que os seus espaços imagens são mutuamente ortogonais, tendo-se

$$R\left(\sum_{j=1}^m Q_j\right) = \oplus_{j=1}^m R(Q_j)$$

onde  $\oplus$  indica uma soma direta ortogonal de sub-espacos. Então todo o vetor

$$\underline{z} \in R\left(\sum_{j=1}^m Q_j\right) \text{ tem uma e uma só representação } \underline{z} = \sum_{j=1}^m \underline{z}_j \text{ com } \underline{z}_j \in R(Q_j), j=1, \dots, m, \text{ e onde}$$

os vetores  $\underline{z}_1, \dots, \underline{z}_m$  mutuamente ortogonais.

### 2.1.3 Produto de Kronecker de matrizes

Este produto  $\otimes$  de matrizes tem importantes aplicações em Estatística tendo sido estudado em detalhe, veja-se por exemplo Steeb (1991), Graham (1981) e Steeb & Hardy (2011).

Dadas a matrizes  $A = [a_{i,j}]$  do tipo  $m \times n$  e  $B$ , temos

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{1,1}B & \dots & a_{1,n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}B & \dots & a_{m,n}B \end{bmatrix}$$

o produto  $\otimes$  não é comutativo mas é associativo, isto é,

$$A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C = A \otimes B \otimes C$$

e goza ainda da propriedade distributiva, tendo-se

$$(A + B) \otimes (C + D) = A \otimes C + A \otimes D + B \otimes C + B \otimes D.$$

Sendo  $\alpha$  um escalar tem-se

$$(\alpha A) \otimes B = \alpha(A \otimes B) = A \otimes (\alpha B) \text{ e, se } C_1, C_2 \text{ e } D_1, D_2 \text{ estiverem definidas, também se tem}$$

$$(C_1 \otimes D_1)(C_2 \otimes D_2) = (C_1 C_2) \otimes (D_1 D_2).$$

Vê-se ainda que

$$(A \otimes B)^t = A^t \otimes B^t$$

,logo se  $A$  e  $B$  forem simétricas  $A \otimes B$  será simétrica e que se  $U$  e  $V$  forem idempotentes

$$(U \otimes V)(U \otimes V) = (UU) \otimes (VV) = U \otimes V$$

$U \otimes V$  é idempotente . Assim o produto  $\otimes$  de matrizes de projeção ortogonal dá matrizes de projeção ortogonal.

Por outro lado

$$\begin{cases} (A \otimes B)(A^+ \otimes B^+)(A \otimes B) = (A A^+ A) \otimes (B B^+ B) = A \otimes B \\ (A^+ \otimes B^+)(A \otimes B)(A^+ \otimes B^+) = (A^+ A A^+) \otimes (B^+ B B^+) = A^+ \otimes B^+ \end{cases}$$

E como

$$(A \otimes B)(A^+ \otimes B^+) = (A A^+) \otimes (B B^+)$$

e com  $A A^+$  e  $B B^+$  matrizes de projeção ortogonal, logo simétricas, vem

$$[(A \otimes B)(A^+ \otimes B^+)]^t = (A \otimes B)(A^+ \otimes B^+)$$

Da mesma maneira vê-se que

$$[(A^+ \otimes B^+)(A \otimes B)]^t = (A^+ \otimes B^+)(A \otimes B)$$

Estabelecemos assim a

### **Proposição 1.2**

Tem-se

$$(A \otimes B)^+ = A^+ \otimes B^+$$



## 2.2 Estimadores dos mínimos quadrados

Dado um vetor aleatório  $\underline{y}$  com vetor médio

$$\underline{\mu} = X \underline{\beta}$$

,  $\underline{\psi} = G \underline{\beta}$  é estimável se se tiver um estimador linear

$$\underline{\psi}^* = M \underline{Y}$$

centrado de  $\underline{\psi}$ . Ora o vetor médio de  $\underline{\psi}^*$  é

$$E(\underline{\psi}^*) = M \underline{\mu} = M X \underline{\beta},$$

tendo pois de se ter para todo o  $\underline{\beta}$ ,

$$G \underline{\beta} = M X \underline{\beta}$$

o que se verifica se e só se

$$G = MX$$

,por outro lado a matriz

$$T = X(X'X)^+ X'$$

é simétrica e idempotente sendo a matriz de projeção ortogonal sobre o espaço imagem

$$\Omega = R(X)$$

,da matriz do modelo.

Assim

$$\underline{\tilde{\beta}} = (X'X)^+ X' \underline{Y}$$

será o estimador dos mínimos quadrados de  $\underline{\beta}$  já que

$$X\tilde{\underline{\beta}} = T\underline{Y}$$

minimiza

$$s(\tilde{\underline{\beta}}) = \|\underline{Y} - X\underline{\beta}\|^2$$

visto ter-se

$$\begin{aligned} \|\underline{Y} - X\underline{\beta}\|^2 &= \|(\underline{Y} - X\underline{\tilde{\beta}}) + X(\tilde{\underline{\beta}} - \underline{\beta})\|^2 \\ &= \|(\underline{Y} - X\underline{\tilde{\beta}})\|^2 + \|X(\tilde{\underline{\beta}} - \underline{\beta})\|^2 \end{aligned}$$

atendendo a  $\underline{Y} - X\underline{\tilde{\beta}} \in \Omega^\perp$  e a  $X(\tilde{\underline{\beta}} - \underline{\beta}) \in \Omega$  serem ortogonais.

A partir de  $\tilde{\underline{\beta}}$  obtém-se para os vetores estimáveis os estimadores de mínimos quadrados

$$\tilde{\underline{\psi}} = G\tilde{\underline{\beta}}.$$

## 2.3 Vetores normais

### 2.3.1 Momentos e funções geradoras

Nesta alínea basear-nos-emos na apresentação de Mexia (1995) onde se podem encontrar as demonstrações dos resultados que agora se apresentam.

Dado um vetor aleatório

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$$

cujos componentes têm valores médios  $\mu_1, \dots, \mu_k$  o vetor médio  $E(\underline{X})$  será

$$\underline{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_k \end{bmatrix}$$

Dada a linearidade do operador  $E$  é fácil verificar que

$$E(A\underline{X} + \underline{b}) = AE(\underline{X}) + \underline{b}$$

Dada ainda uma matriz aleatória  $\underline{X} = [X_{i,j}]$  cujos elementos têm valores médios  $\mu_{i,j}, i = 1, \dots, h, j = 1, \dots, s$  ter-se-á a matriz média

$$E(\underline{X}) = [\underline{\mu}_{i,j}]$$

tendo-se

$$E(\underline{AX} + \underline{B}) = AE(\underline{X}) + \underline{B}$$

já que com  $A = [a_{l,h}]$  uma matriz  $m \times h$  e  $B$  uma matriz  $m \times s$ , se tem

$$\underline{AX} + \underline{B} = \begin{bmatrix} \sum_{h=1}^r a_{1,h} X_{h,1} + b_{1,1} \cdots \sum_{h=1}^r a_{1,h} X_{h,s} + b_{1,s} \\ \vdots \\ \sum_{h=1}^r a_{m,h} X_{h,1} + b_{m,1} \cdots \sum_{h=1}^r a_{m,h} X_{h,s} + b_{m,s} \end{bmatrix}$$

, vindo

$$E(\underline{AX} + \underline{B}) = \begin{bmatrix} \sum_{h=1}^r a_{1,h} \mu_{h,1} + b_{1,1} \cdots \sum_{h=1}^r a_{1,h} \mu_{h,s} + b_{1,s} \\ \vdots \\ \sum_{h=1}^r a_{m,h} \mu_{h,1} + b_{m,1} \cdots \sum_{h=1}^r a_{m,h} \mu_{h,s} + b_{m,s} \end{bmatrix}$$

$$= AE(\underline{X}) + \underline{B}.$$

Estabelecemos a expressão de  $E(\underline{AX} + \underline{B})$  para exemplificar a técnica seguida para obter este tipo de resultado.

Analogamente tem-se

$$E(\underline{AX} + \underline{B}) = AE(\underline{X}) + \underline{B}$$

Recordemos agora que dado o par  $(X, Y)$  de variáveis aleatórias a respetiva covariância é

$$E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$$

e se  $X$  e  $Y$  forem independentes, tem-se

$$E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(X - E(X))E(Y - E(Y)) = 0$$

,visto o valor médio de produto de variâncias aleatórias independentes ser o produto dos valores médios, e

$$E(X - E(X)) = E(X) - E(X) = 0$$

Estas expressões generalizam-se para pares de vetores aleatórios  $(\underline{X}, \underline{Y})$  sendo a respetiva matriz de covariância cruzada

$$\Sigma(\underline{X}, \underline{Y}) = E[(\underline{X} - E(\underline{X}))(\underline{Y} - E(\underline{Y}))]$$

vendo-se que

$$\Sigma(\underline{Y}, \underline{X}) = \Sigma(\underline{X}, \underline{Y})^t$$

Caso  $\underline{X}$  e  $\underline{Y}$  forem independentes as suas componentes são independentes, vindo

$$\Sigma(\underline{Y}, \underline{X}) = 0_{r \times s}$$

,com  $r$  e  $s$  os números de componentes de  $\underline{X}$  e  $\underline{Y}$ .

Mostra-se ainda que

$$\Sigma(A\underline{X}, B\underline{Y}) = A\Sigma(\underline{Y}, \underline{X})B^t$$

caso  $\underline{X} = \underline{Y}$  tem-se a matriz da covariância

$$\Sigma(\underline{X}) = E[(\underline{X} - E(\underline{X}))(\underline{X} - E(\underline{X}))^t] = \Sigma(\underline{X}, \underline{X})$$

,vendo-se que

$$\begin{aligned} \Sigma(A\underline{X}) &= \Sigma(A\underline{X}; A\underline{X}) \\ &= A\Sigma(\underline{X}; \underline{X})A^t \\ &= A\Sigma(\underline{X})A^t \end{aligned}$$

Recordemos que para a variável aleatória  $X$  se tem a função geradora de momentos

$$\varphi_X(u) = E(e^{uX})$$

que, se estiver definida num intervalo aberto contendo a origem é indefinidamente derivável na origem, tendo-se

$$\mu_r' = E(X^r) = \varphi_X^{(r)}(u)$$

onde  $\langle r \rangle$  indica a ordem da derivação.

Observe-se que

$$\begin{aligned} \varphi_{aX+b}(u) &= E(e^{u(aX+b)}) \\ &= e^{bu} E(e^{(au)X}) \\ &= e^{bu} \varphi_X(au) \end{aligned}$$

Por outro lado se  $X_1$  e  $X_2$  forem independentes tem-se

$$\begin{aligned} \varphi_{X_1+X_2}(u) &= E(e^{u(X_1+X_2)}) \\ &= E(e^{uX_1} e^{uX_2}) \end{aligned}$$

e, como  $E(e^{uX_1})$  e  $E(e^{uX_2})$  são independentes, tem-se

$$\begin{aligned} \varphi_{X_1+X_2}(u) &= E(e^{uX_1}), E(e^{uX_2}) \\ &= \varphi_{X_1}(u) \varphi_{X_2}(u) \end{aligned}$$

Por outro lado interessa-nos considerar ainda a função geradora de cumulantes

$$\psi_X(u) = \ln \varphi_X(u)$$

obtendo-se, caso existam momentos de 2ª ordem, já que  $\varphi_X(0) = 1$

$$\left\{ \begin{aligned} \psi_X(0) &= 1 \\ \psi_X'(0) &= \frac{\varphi_X'(0)}{\varphi_X(0)} = \varphi_X'(0) = E(X) \\ \psi_X''(0) &= \frac{\varphi_X''(0) - (\varphi_X'(0))^2}{\varphi_X(0)^2} = E(X^2) - E(X)^2 = \text{Var}(X) \end{aligned} \right.$$

Estes resultados generalizam-se para os vetores aleatórios. A função geradora de momentos de  $\underline{X}$  será

$$\varphi_{\underline{X}}(\underline{u}) = E\left(e^{\underline{u}^t \underline{X}}\right)$$

,tendo-se

$$\mu_{\underline{X}}(\underline{X}) = E\left(X_1^{\Gamma_1} \dots X_k^{\Gamma_k}\right) = \left( \frac{\left( \frac{\partial^{\sum_1^k \Gamma_j}}{\partial u_j^{\Gamma_j}} \right) \varphi_{\underline{X}}(\underline{u})}{\prod_{j=1}^k \partial u_j^{\Gamma_j}} \right)_{\underline{u}=\underline{0}} = \varphi_{\underline{X}}^{(r)}(\underline{0})$$

caso  $\varphi_{\underline{X}}(\underline{u})$  esteja definido num aberto contendo a origem.

Vê-se ainda que, com

$$\psi_{\underline{X}}(\underline{u}) = \ln \varphi_{\underline{X}}(\underline{u})$$

se tem

$$E(X_j) = \psi_{\underline{X}}^{\delta_j}(\underline{0}), j = 1, \dots, k$$

,onde  $\underline{\delta}_j$  tem componentes todas nulas, salvo a  $j$ -essima que é 1. Assim

$$E(\underline{X}) = (\mathbf{grad} \psi_{\underline{X}}(\underline{u}))_{(\underline{u}=\underline{0})}$$

,onde  $\mathbf{grad}$  indica o gradiente. Analogamente, dada a matriz hessiana

$$H_{ess}(\psi_{\underline{X}}(\underline{u})) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \psi_{\underline{X}}(\underline{u})}{\partial u_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 \psi_{\underline{X}}(\underline{u})}{\partial u_1 \partial u_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 \psi_{\underline{X}}(\underline{u})}{\partial u_k \partial u_1} & \dots & \frac{\partial^2 \psi_{\underline{X}}(\underline{u})}{\partial u_k^2} \end{bmatrix}$$

tem-se

$$\Sigma(\underline{X}) = (H_{ess}(\psi_{\underline{X}}(\underline{u})))_{\underline{u}=\underline{0}}$$

já que

$$\frac{\partial^2 \psi_{\underline{X}}(\underline{u})}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{\frac{\partial^2 \psi_{\underline{X}}(\underline{u})}{\partial u_i \partial u_j} - \frac{\partial \psi_{\underline{X}}(\underline{u})}{\partial u_i} \frac{\partial \psi_{\underline{X}}(\underline{u})}{\partial u_j}}{\partial \psi_{\underline{X}}(\underline{u})}, i=1, \dots, k, j=1, \dots, k$$

vindo

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 \psi_{\underline{X}}(\underline{u})}{\partial u_i \partial u_j} \right)_0 &= E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j) \\ &= \mathbf{Cov}(X_i; X_j), i=1, \dots, k, j=1, \dots, k. \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \varphi_{A\underline{X}+b}(\underline{u}) &= E\left(e^{\underline{u}^t (A\underline{X}+b)}\right) \\ &= e^{\underline{u}^t b} E\left(e^{(A^t \underline{u})^t \underline{X}}\right) \\ &= e^{\underline{b}^t \underline{u}} \varphi_{\underline{X}}(A^t \underline{u}) \end{aligned}$$

,vindo

$$\psi_{A\underline{X}+b}(\underline{u}) = \underline{b}^t \underline{u} + \psi_{\underline{X}}(A^t \underline{u}).$$

Tem-se ainda com  $\underline{X}_1$  e  $\underline{X}_2$  independentes

$$\begin{aligned} \varphi_{\underline{X}_1+\underline{X}_2}(\underline{u}) &= E\left(e^{\underline{u}^t (\underline{X}_1+\underline{X}_2)}\right) \\ &= E\left(e^{\underline{u}^t \underline{X}_1} e^{\underline{u}^t \underline{X}_2}\right) \\ &= E\left(e^{\underline{u}^t \underline{X}_1}\right) E\left(e^{\underline{u}^t \underline{X}_2}\right) \\ &= \varphi_{\underline{X}_1}(\underline{u}) \varphi_{\underline{X}_2}(\underline{u}) \end{aligned}$$

vindo

$$\psi_{\underline{X}_1+\underline{X}_2}(\underline{u}) = \psi_{\underline{X}_1}(\underline{u}) + \psi_{\underline{X}_2}(\underline{u})$$

logo

$$\begin{cases} E(\underline{X}_1 + \underline{X}_2) = E(\underline{X}_1) + E(\underline{X}_2) \\ \Sigma(\underline{X}_1 + \underline{X}_2) = \Sigma(\underline{X}_1) + \Sigma(\underline{X}_2) \end{cases}$$

como é fácil de se ver derivando a partir  $\psi_{\underline{X}_1 \times \underline{X}_2}(\underline{u})$ .

Supondo que  $\underline{X}_1$  e  $\underline{X}_2$  são independentes, então

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{X}_1 \\ \underline{X}_2 \end{bmatrix}$$

terá, com

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

a função geradora de momentos

$$\begin{aligned} \varphi_{\underline{X}}(\underline{u}) &= E\left(e^{\underline{u}'\underline{X}}\right) \\ &= E\left(e^{\sum_{c=1}^2 u_c X_c}\right) \\ &= E\left(e^{u_1' X_1} e^{u_2' X_2}\right) \\ &= E\left(e^{u_1' X_1}\right) E\left(e^{u_2' X_2}\right) \\ &= \varphi_{\underline{X}_1}(u_1) \varphi_{\underline{X}_2}(u_2) \end{aligned}$$

### 2.3.2 Transformações lineares

Iniciamos a nossa discussão dos vetores normais introduzindo resultados relativos a momentos e respectivas funções geradoras. Isto dado ao papel central que as funções geradoras de momentos têm na teoria dos vetores normais.

Um vetor aleatório  $\underline{Y}$  com vetor médio  $\underline{\mu}$  e matriz da covariância  $V$  é normal se tem função geradora de momentos

$$\varphi_{\mathfrak{N}}(\underline{u} | \underline{\mu}, V) = e^{\underline{\mu}'\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{u}'V\underline{u}}$$

pondo-se  $\underline{Y} \sim \mathfrak{N}(\underline{\mu}, V)$ .

Observa-se que  $V$  pode não ser invertível. Quando  $V$  é invertível, ver Mexia (1995), a densidade é



$$n(\underline{y}|\underline{\mu}, V) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(\underline{y}-\underline{\mu})'V^{-1}(\underline{y}-\underline{\mu})}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det(V)}}$$

,sendo  $n$  o número de componentes.

Estabeleçamos a

### Proposição 2.2

Caso  $\underline{Y} \sim \mathcal{N}(\underline{\mu}, V)$  tem-se  $A\underline{Y} + \underline{b} \sim \mathcal{N}(A\underline{\mu} + \underline{b}, AVA^t)$

D: Começamos por observar que

$$\begin{cases} E(A\underline{Y} + \underline{b}) = A(E\underline{Y}) + \underline{b} = A\underline{\mu} + \underline{b} \\ \Sigma(A\underline{Y} + \underline{b}) = AVA^t \end{cases}$$

ora,

$$\begin{aligned} \varphi_{A\underline{X} + \underline{b}}(\underline{u}) &= e^{\underline{b}'\underline{\mu}(A\underline{X} + \underline{b})} \varphi_{\underline{X}}(A^t \underline{u}) \\ &= e^{\underline{b}'\underline{\mu}} e^{(A^t \underline{u})\underline{\mu} + \frac{1}{2}(A^t \underline{u})' V (A^t \underline{u})} \\ &= e^{\underline{u}'(A\underline{\mu} + \underline{b}) + \frac{1}{2}\underline{u}' AVA^t \underline{u}} \\ &= \varphi_{\mathcal{N}}(\underline{u} | A\underline{\mu} + \underline{b}, AVA^t) \end{aligned}$$

o que estabelece a tese.

### Corolário

Se

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_1 \\ \underline{Y}_2 \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \underline{\mu}_1 \\ \underline{\mu}_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} V_{1,1} & V_{1,2} \\ V_{2,1} & V_{2,2} \end{bmatrix}\right)$$

tem-se

$$A_1 \underline{Y}_1 + A_2 \underline{Y}_2 \sim \mathcal{N}(A_1 \underline{\mu}_1 + A_2 \underline{\mu}_2, A_1 V_{1,1} A_1^t + A_1 V_{1,2} A_2^t + A_2 V_{2,1} A_1^t + A_2 V_{2,2} A_2^t)$$

Nota: Ao escrever a distribuição de  $\underline{Y}$  está-se a indicar que  $\underline{Y}$  tem vetor médio

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} \underline{\mu}_1 \\ \underline{\mu}_2 \end{bmatrix}$$

com  $\underline{\mu}_l = E(\underline{Y}_l), l = 1, 2$ , e matriz de covariância

$$V = \begin{bmatrix} V_{1,1} & V_{1,2} \\ V_{2,1} & V_{2,2} \end{bmatrix}$$

,onde  $V_{1,1} = \Sigma(\underline{Y}_1), V_{1,2} = \Sigma(\underline{Y}_1, \underline{Y}_2), V_{2,1} = \Sigma(\underline{Y}_2, \underline{Y}_1)$  e  $V_{2,2} = \Sigma(\underline{Y}_2)$

**D:** A tese resulta da **proposição 2.2** e de

$$A_1 \underline{Y}_1 + A_2 \underline{Y}_2 = [A_1 A_2] \begin{bmatrix} \underline{\mu}_1 \\ \underline{\mu}_2 \end{bmatrix}$$

,já que

$$[A_1 A_2] \begin{bmatrix} \underline{\mu}_1 \\ \underline{\mu}_2 \end{bmatrix} = A_1 \underline{\mu}_1 + A_2 \underline{\mu}_2$$

,e que

$$[A_1 A_2] \begin{bmatrix} V_{1,1} & V_{1,2} \\ V_{2,1} & V_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^t \\ A_2^t \end{bmatrix} = A_1 V_{1,1} A_1^t + A_1 V_{1,2} A_2^t + A_2 V_{2,1} A_1^t + A_2 V_{2,2} A_2^t$$

,atendendo-se a que

$$[A_1 A_2]^t = \begin{bmatrix} A_1^t \\ A_2^t \end{bmatrix}$$

Como vimos atrás, se  $\underline{Y}_1$  e  $\underline{Y}_2$  forem independentes tem-se

$$\Sigma(\underline{Y}_1, \underline{Y}_2) = 0$$

Isto é a nulidade de  $\Sigma(\underline{Y}_1, \underline{Y}_2)$  é condição necessária de independência  $\underline{Y}_1$  e  $\underline{Y}_2$ . No

caso em que  $\underline{Y} = \begin{bmatrix} \underline{\mu}_1 \\ \underline{\mu}_2 \end{bmatrix}$  é normal, esta condição é necessária e suficiente.

Por outro lado temos ainda a

Proposição 2.3

Se  $\underline{Y}_1$  e  $\underline{Y}_2$  forem independentes e  $\underline{Y}_l \sim \mathcal{N}(\underline{\mu}_l, V_l), l=1,2$

,tem-se

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_1 \\ \underline{Y}_2 \end{bmatrix} \sim \mathcal{N} \left( \begin{bmatrix} \underline{\mu}_1 \\ \underline{\mu}_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix} \right)$$

**D:** com  $\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$  tem-se

$$\begin{aligned} \varphi_{\underline{Y}}(\underline{u}) &= \varphi_{\underline{Y}_1}(\underline{u}_1) \varphi_{\underline{Y}_2}(\underline{u}_2) \\ &= \pi_{l=1}^2 e^{\underline{\mu}_l' \underline{u}_l + \frac{1}{2} \underline{u}_l' V_l \underline{u}_l} \\ &= e^{\underline{\mu}' \underline{u} + \frac{1}{2} \underline{u}' V \underline{u}} \end{aligned}$$

,com

$$\begin{cases} \underline{\mu} = \begin{bmatrix} \underline{\mu}_1 \\ \underline{\mu}_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

,o que estabelece a tese.

### 2.3.3 Distribuições associadas

Suponhamos que

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \sim \mathcal{N} \left( \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}, I_n \right)$$

então, ver por exemplo Mexia (1995)

$$\|\underline{Y}\|^2 = \sum_{i=1}^n Y_i^2$$

,distribui-se como um qui-quadrado com  $n$  graus de liberdade e parâmetro de não centralidade,

$$\delta = \sum_{i=1}^n \mu_i^2 = \|\underline{\mu}\|^2$$

tendo-se

$$\varphi(u|n, \delta) = \frac{e^{-\frac{\delta u}{1-2u}}}{(1-2u)^{\frac{n}{2}}}$$

,bem como

$$\begin{aligned} \psi(u|n, \delta) &= \frac{\delta u}{1-2u} - \frac{n}{2} \ln(1-2u) \\ &= \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2(1-2u)} - \frac{n}{2} \ln(1-2u) \end{aligned}$$

,logo  $\chi_{n,\delta}^2 = \|\underline{Y}\|^2$  tem o valor médio e a variância

$$\begin{cases} \mu(n, \delta) = \underline{\psi}'(\mathbf{0}|n, \delta) = \delta + n \\ \sigma^2(n, \delta) = \underline{\psi}''(\mathbf{0}|n, \delta) = \delta + 2n \end{cases}$$

Quando  $\delta = 0$  o qui-quadrado diz-se central tendo-se

$$\begin{cases} \mu(n, 0) = n \\ \sigma^2(n, 0) = 2n \end{cases}$$

Existem três pontos importantes a considerar. Suponhamos que se têm os qui-quadrados independentes  $\chi_{v_1, \delta_1}^2$  e  $\chi_{v_2, \delta_2}^2$

,tem-se então

$$\begin{aligned}
\varphi_{\chi_{n_1, \delta_1}^2(u) + \chi_{n_2, \delta_2}^2} &= \pi_{i=1}^2 \varphi(u | n_i, \delta_i) \\
&= \pi_{i=1}^2 \frac{e^{\frac{\delta_i u}{1-2u}}}{(1-2u)^{n_i/2}} \\
&= \frac{e^{\frac{(\delta_1 + \delta_2)u}{1-2u}}}{(1-2n)^{n_1+n_2/2}}
\end{aligned}$$

Isto é,  $\chi_{n_1, \delta_1}^2$  e  $\chi_{n_2, \delta_2}^2$  distribuem-se como um  $\chi_{n_1+n_2, \delta_1+\delta_2}^2$  somando-se pois os graus de liberdade e os parâmetros de não centralidade. Diz-se que há reprodutibilidade para graus de liberdade e parâmetros de não centralidade.

O segundo ponto é que

$$\begin{aligned}
\varphi(u | n, \delta) &= \frac{e^{-\frac{\delta}{2} \frac{\delta}{2(1-2u)}}}{(1-2u)^{n/2}} \\
&= e^{-\frac{\delta}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^j}{j!} \frac{1}{(1-2u)^{\frac{n+2j}{2}}} \\
&= e^{-\frac{\delta}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^j}{j!} \varphi(u | n+2j, 0)
\end{aligned}$$

Daqui conclui-se que a distribuição  $G(n, \delta)$  do  $\chi_{n, \delta}^2$  é dada por,

$$G(\mathbf{z} | n, \delta) = e^{-\frac{\delta}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^j}{j!} G(\mathbf{z} | n+2j, 0)$$

com  $G(\cdot | m, 0)$  a distribuição do qui-quadrado central com  $m$  graus de liberdade.

A densidade  $g(\mathbf{z} | m, 0)$  de  $\chi_m^2$  é, ver Mexia (1995)

$$\begin{cases} g(\mathbf{z} | m, 0) = 0; z < 0 \\ g(\mathbf{z} | m, 0) = \frac{1}{\Gamma(m/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{z}{2}}, z > 0 \end{cases}$$

assim a densidade  $g(\mathbf{z} | m, 0)$  de  $\chi_{m, \delta}^2$  dada por

$$g(\mathbf{z}|m, \delta) = e^{-\frac{\delta}{2}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^j}{j!} g(\mathbf{z}|m+2j, 0)$$

Diremos que  $G(\mathbf{z}|m, \delta)$  é dada por uma mistura com coeficientes  $e^{-\frac{\delta}{2}} \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^j}{j!}$   $j=0, \dots$  das distribuições  $G(\mathbf{z}|m+2j, 0)$ .

Observe-se que

$$\begin{cases} G(\mathbf{z}|m, \delta) = pr(\chi_m^2 \leq z) \\ G(\mathbf{z}|m+2j, 0) = pr(\chi_{m+2j}^2 \leq z); j=0, 1, \dots \end{cases}$$

tendo-se pois

$$\begin{aligned} G(\mathbf{z}|m, \delta) &= pr(\chi_{m, \delta}^2 \leq z) \\ &= e^{-\frac{\delta}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^j}{j!} pr(\chi_{m+2j}^2 \leq z) \\ &= e^{-\frac{\delta}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^j}{j!} G(\mathbf{z}|m+2j, 0) \end{aligned}$$

Pode admitir-se a existência duma variável indicatriz  $N$  com distribuição de POISSON

com parâmetro  $\frac{\delta}{2}$ , logo tendo-se

$$pr(N = j) = e^{-\frac{\delta}{2}} \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^j}{j!}, j = 0, 1, \dots$$

E, que quando  $(N = j)$ ,  $\chi_{m, \delta}^2$  se distribui-se como  $\chi_{m+2j, 0}^2$ ,  $j = 0, 1, \dots$

Sejam  $\chi_{m, \delta}^2$  e  $\chi_g^2$  um par de qui-quadrados independentes dos quais o segundo é um qui-quadrado central. Então

$$f = \frac{g}{m} \frac{\chi_{m, \delta}^2}{\chi_g^2}$$

tem, ver Mexia (1995) a distribuição  $F$  com  $m$  e  $g$  graus de liberdade e parâmetro de não centralidade  $\delta$ , pondo-se  $f \sim F(m, g, \delta)$ . A distribuição  $F$  desempenha um papel central na teoria da estatística. No entanto a distribuição  $\bar{F}(m, g, \delta)$  de

$$T = \frac{\chi_{m,\delta}^2}{\chi_g^2}$$

é equivalente a anterior já que,

$$\bar{F}(z|m, g, \delta) = pr(f \leq z) = pr\left(T \leq \frac{m}{g} z\right) = F\left(\frac{m}{g} z|m, g, \delta\right)$$

e é mais manejável pelo que a utilizamos.

Atendendo á distribuição do  $\chi_{m,\delta}^2$  ser dada por uma mistura podemos agora escrever

$$pr(T \leq z) = \sum_{j=0}^{\infty} pr(N = j) pr(T \leq z, n = j)$$

,ora quando  $N = j$ ,  $T = \frac{\chi_{m+2j}^2}{\chi_g^2}$  vindo

$$pr(T \leq z|N = j) = \bar{F}(z|m + 2j, g, 0)$$

vindo

$$\bar{F}(z|m, g, \delta) = e^{-\frac{\delta}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^j}{j!} \bar{F}(z|m + 2j, 0)$$

bem como,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{F}(z|m, g, \delta)}{\partial \delta} &= e^{-\frac{\delta}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^j}{j!} \bar{F}(z|m + 2j, \delta, 0) + e^{-\frac{\delta}{2}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^{j-1}}{(j-1)!} \bar{F}(z|m + 2j, g, 0) \\ &= -\frac{1}{2} \bar{F}(z|m, g, \delta) + \frac{1}{2} e^{-\frac{\delta}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^i}{i!} \bar{F}(z|m + 2i, \delta, 0) \\ &= \frac{\bar{F}(z|m + 2, g, \delta) - \bar{F}(z|m, g, \delta)}{2} \end{aligned}$$

Ora  $\chi_{m+2,\delta}^2$  será a soma de dois qui-quadrados independentes  $\chi_{m,\delta}^2$  e  $\chi_{g,0}^2$  vindo

$$pr\left(\frac{\chi_{m,\delta}^2}{\chi_g^2} < \frac{\chi_{m+2,\delta}^2}{\chi_g^2}\right) = 1$$

,e portanto,

$$\begin{aligned}\bar{F}(z|m+2, g, \delta) &= pr\left(\frac{\chi_{m+2,\delta}^2}{\chi_g^2} \leq z\right) < pr\left(\frac{\chi_{m,\delta}^2}{\chi_g^2} \leq z\right) \\ &= \bar{F}(z|m+2, g, \delta)\end{aligned}$$

vindo

$$\frac{\partial \bar{F}(z|m, g, \delta)}{\partial \delta} < 0$$

Suponhamos agora que se quer testar uma hipótese que pode ser escrita como

$$H_0 : \delta = 0 \quad \text{contra as alternativas } H_1 : \delta > 0.$$

Se teremos uma estatística

$$f \sim F(z|m, g, \delta)$$

podemos substituí-la por

$$T = \frac{m}{g} f$$

já que, com "q" o valor crítico para um teste de nível q com estatística f ,podemos pas-

sar a utilizar o valor critico  $\frac{m}{g} c_q$  . Então a potência do teste com estatística T é

$$pot(\delta) = pr\left(T > \frac{m}{g} c_q\right) = 1 - \bar{F}\left(\frac{m}{g} c_q | m, g, \delta\right).$$



vendo-se que  $Poi(\delta)$  cresce com  $\delta$ . Assim a probabilidade de se registrar  $H_0$  é sempre superior quando esta hipótese é falsa do que quando é verdadeira e o teste é estritamente não distorcidos.

### 2.3.4 Teorema de Scheffé

Dado  $\underline{Z} \sim \mathfrak{N}(\eta, V)$  tem-se, ver Mexia (1995).

$$U = (\underline{z} - \eta)' V (\underline{z} - \eta) \sim \sigma^2 \chi_c^2$$

com  $c = \text{car}(V)$ .

Assim se  $\underline{Z}$  for independente de  $S \sim \sigma^2 \chi_g^2$ , tem-se

$$F^0 = \frac{g}{c} \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{S}} \sim F(z|c, g, 0)$$

Sendo  $f_{p,c,g}$  o  $p$ -ésimo quantil de  $F(z|c, g, 0)$  teremos

$$\begin{aligned} pr \left[ (\eta - \underline{z})' V (\eta - \underline{z}) \leq c f_{1-q,c,g} \left( \frac{S}{g} \right) \right] &= pr(F^0 \leq f_{1-q,c,g}) \\ &= 1 - q \end{aligned}$$

Obtendo-se assim um elipsoide de confiança de nível  $1 - q$  para  $\eta$ .

Estabelecemos agora o

#### Teorema de Scheffé (1.2)

Indicando por  $\bigcap_{\underline{d}}$  que se consideram todos os vetores com o mesmo número de com-

$$\text{ponentes de } \eta \text{ tem-se } pr \left[ \bigcap_{\underline{d}} \left( \left| \underline{d}^t \eta - \underline{d}^t \underline{Z} \right| \leq \sqrt{c f_{1-q,c,g} \underline{d}^t V \underline{d} \frac{S}{g}} \right) \right] = 1 - q$$

D: Observa-se que quando  $\underline{d} = \underline{0}$  se tem a desigualdade trivial  $0 \leq 0$  pelo que nos basta considerar os  $\underline{d} \neq \underline{0}$ . Cada um destes vetores é ortogonal a um par de planos paralelos tangentes ao elipsoide de confiança de nível  $1-q$  estando o ponto afim de  $\eta$  entre esses planos se e só se, ver Scheffé (1959),

$$|\underline{d}'\eta - \underline{d}'\underline{z}| \leq \sqrt{c f_{1-q, cg} \underline{d}'V\underline{d} \frac{S}{g}}$$

Para completar a demonstração basta-nos observar que um ponto está no interior de um elipsoide se e só se estiver entre todos os pares de planos paralelos tangentes ao elipsoide.

Observe-se que quando

$$\sqrt{c f_{1-q, r, g} \underline{d}'V\underline{d} \frac{S}{g}} < |\rho - \underline{d}'\underline{z}|$$

a desigualdade correspondente a  $\underline{d}$  não se pode verificar com

$$\rho = \underline{d}'\eta$$

dizendo-se então que  $\rho = \underline{d}'\eta$  é significativamente diferente de  $\rho$  ao nível  $q$ .

Por outro lado o teorema de Scheffé dá-nos intervalos de confiança simultâneos

$$\left[ \underline{d}'\underline{z} - \sqrt{c f_{1-q, r, g} \underline{d}'V\underline{d} \frac{S}{g}}; \quad \underline{d}'\underline{z} + \sqrt{c f_{1-q, r, g} \underline{d}'V\underline{d} \frac{S}{g}} \right]$$

para os parâmetros

$$\rho(\underline{d}) = \underline{d}'\eta$$

tendo-se  $\rho(\underline{d})$  significativamente diferente de  $\rho_{(0)}$  ao nível  $q$  se e só se o intervalo de confiança para  $\rho(\underline{d})$  não contiver  $\rho_{(0)}$ .

Em particular com

$$\underline{\delta}_{i,j} = \underline{\delta}_i - \underline{\delta}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \longrightarrow i \\ , i \neq j \\ \longrightarrow j \\ \\ \end{array}$$

tem-se

$$\rho(\underline{\delta}_{i,j}) = \eta_i - \eta_j; i \neq j$$

,quando  $\rho(\underline{\delta}_{i,j})$  é significativamente diferente de 0 ao nível  $q$  ter-se-á, com probabilidade do erro majorada por  $q$ ,

$$\eta_i \neq \eta_j$$

Assim podemos, dado os intervalos de confiança serem simultâneo, com a probabilidade de de estarmos certos não inferior a  $1-q$ , afirmar que diferem todos os pares  $\eta_i; \eta_j$  tais que

$$\sqrt{c f_{1-q,c,g} \underline{\delta}_{i,j}^t V \underline{\delta}_{i,j} \frac{S}{g}} < |\eta_i - \eta_j|$$

Com

$$V = \begin{bmatrix} v_{1,1} & \cdots & v_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n,1} & \cdots & v_{n,n} \end{bmatrix}$$

tem-se

$$\underline{\delta}_{i,j}^t V \underline{\delta}_{i,j} = v_{i,i} - 2v_{i,j} + v_{j,j}$$

### 2.3.5 Partição ortogonal

Admitimos que  $\underline{Z} \sim \mathcal{N}(\eta, r^2 I_n)$  é independente de  $S \sim \sigma^2 \chi_0^2$ , tendo-se ainda uma partição ortogonal

$$R^n = \bigoplus_{j=1}^m \nabla_j \text{ com}$$

$$\begin{cases} \nabla_j = R(Q_j), J = 1, \dots, m \\ c_j = \dim(\nabla_j) = \text{car}(Q_j), J = 1, \dots, m \end{cases}$$

Seja  $A_j$  uma matriz cujos vetores linha constituem uma base ortonormada para  $\nabla_j, j = 1, \dots, m$ . Tem-se então

$$\begin{cases} A_j A_j^t = I_j, J = 1, \dots, m \\ A_j^t A_j = Q_j, J = 1, \dots, m \end{cases}$$

e como

$$\underline{\lambda}_j = A_j \underline{\eta}, j = 1, \dots, m$$

tem-se ainda

$$\underline{\tilde{\lambda}}_j = A_j \underline{Z} \sim \mathcal{N}(\underline{\lambda}_j, \sigma^2 I_{g_j}), j = 1, \dots, m$$

independente de  $S, j = 1, \dots, m$ . Assim temos, ver Mexia (1995)

$$V_j^\circ = \|\underline{\tilde{\lambda}}_j\|^2 \sim \sigma^2 \delta \chi_{g_j, \delta_j}^2, j = 1, \dots, m$$

,com

$$V_j^\circ = \frac{1}{\sigma^2} \|\underline{\lambda}_j\|^2, J = 1, \dots, m$$

independente de  $S$ . Temos ainda, ver Mexia (1995) os

$$V_j^\circ = \|\underline{\tilde{\lambda}}_j - \underline{\lambda}_j\|^2 \sim \sigma^2 \delta \chi_{g_j, 0}^2$$

também independentes de  $S$

teremos assim as

$$\begin{cases} F_j = \frac{g}{g_j} \frac{U_j}{S} \sim F(g_j, g, \delta_j), j = 1, \dots, m \\ T_j^\circ = \frac{g}{g_j} \frac{U_j^\circ}{S} \sim F(g_j, g, 0), j = 1, \dots, m \end{cases}$$

As estatísticas  $F_j, j = 1, \dots, m$  podem ser utilizadas para testar as hipóteses

$$H_{0,j} : \underline{\lambda}_j = \underline{0}, j = 1, \dots, m$$

sendo  $\delta_{1-q,g,\delta}$  o  $(1-q)$ ésimo quantil de  $F(g_j, g, 0)$  o mesmo será o valor crítico do teste de nível  $q$  para  $H_{0,j}, j = 1, \dots, m$ . A potência deste teste

$$Pot(\delta_j | g_j, g) = 1 - F(f_{1-q,g_j,g} | g_j, g, \delta_j), j = 1, \dots, m$$

crece com  $\delta_j, j = 1, \dots, m$  já que

$$\frac{\partial Pot(\delta_j | g_j, g)}{\partial \delta_j} = - \frac{\partial F(f_{1-q,g_j,g} | g_j, g, \delta_j)}{\partial \delta_j} > 0, j = 1, \dots, m$$

pelo que os testes  $F$  para as  $H_{0,j}, j = 1, \dots, m$  serão estritamente não distorcidos.

Podemos no entanto testar, por dualidades hipóteses mais gerais. Assim

$$pr\left(\|\underline{\lambda}_j - \tilde{\underline{\lambda}}_j\|^2 \leq f_{1-q,g_j,g} \frac{S}{g}\right) = pr\left(T_j^\circ \leq f_{1-q,g_j,g} \frac{S}{g}\right) = 1 - q, j = 1, \dots, m$$

obtendo-se assim, para as  $\underline{\lambda}_j, j = 1, \dots, m$ , esferas de confiança de nível  $1 - q$ . Ora quando  $\underline{b}_j$  não está aberto pela correspondente esfera de confiança temos

$$F_j(\underline{b}_j) = \frac{S}{g_j} \frac{\|\tilde{\underline{\lambda}}_j - \underline{b}_j\|^2}{S} \geq f_j^\circ \leq t_{1-q,g_j,g}, j = 1, \dots, m$$

,logo se utilizarmos  $F_j(\underline{b}_j)$  como estatística para testar

$$H_{0,j}(\underline{b}_j) : \underline{\lambda}_j = \underline{b}_j, j = 1, \dots, m$$

regeita-se esta hipótese. Como o nível de esfera de confiança é de  $1-q$  vê-se que obtemos, por dualidade, um teste de nível  $1-q$ .

### 2.3.6 Cruzamento de fatores

Interessa-nos considerar um caso como partição ortogonal. Suponhamos as componentes de  $\underline{Z}$  correspondem às combinações de níveis de vários fatores, com  $a_1 \dots a_u$  níveis. Então  $\underline{Z}$  terá  $n = \prod_{i=1}^u a_i$  componentes, e sendo os conjuntos de fatores os sub-conjuntos de  $\bar{u} = \{1, \dots, u\}$   $\Delta c \leq \bar{u}$  estará associado

- o valor médio geral dos conjuntos de  $\eta$  se  $c = \emptyset$ ;
- os efeitos dos níveis de único fator com índice em  $c$  se  $\#(c) = 1$ ;
- as interações entre os conjuntos de níveis de fatores em índices  $c$  se  $\#(c) > 1$ .

Podemos identificar os conjuntos de fatores com os respectivos índices

$$j(c) = 1 + \sum_{i=c} 2^{j-1}, j = 1, \dots, 2^n$$

Embora pudéssemos utilizar esses índices para ordenar as matrizes  $A$  temos, ver Fonseca et al (2003), as seguintes expressões

$$\underline{A}(c) = X^2 A_l(c)$$

onde

$$A_l(\varphi) = \begin{cases} A_l(c) = \frac{1}{\sqrt{a_l}} 1_{a_l}^t, l \notin \varphi \\ A_l(c) = U_{a_l}, l \in \varphi \end{cases}$$

sendo  $U_{a_l}$  obtida retirando a primeira linha igual a  $\frac{1}{\sqrt{a_l}} 1_{a_l}^t$  duma matriz  $P_{a_l}$  ortogonal

$a_l \times a_l$ . Diremos que  $P_{a_l}$  é matriz ortogonal estandarizada. Tem-se ainda

$$c(\varphi) = \text{car}(A(c)) = \prod_{l \in c} (a_l - 1)$$

,por exemplo podemos ter

$$U_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$U_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

Por outro lado o produto  $\otimes$  de matrizes ortogonais estandarizada dá matrizes ortogonais estandarizada. Assim  $L_\delta$  pode ser obtido retirando a primeira linha a

$$P_8 = P_2 \otimes P_2 \otimes P_2$$

Com

$$P_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Se  $a$  for par, obtêm-se os vetores linha  $v_1, \dots, v_a$  de  $P_a$  aplicando o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt aos vetores  $\frac{1}{\sqrt{a}}1_a, \underline{\delta}_2, \dots, \underline{\delta}_{a-1}$

Recorde-se que

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{a_1}}1_{a_1}$$

$$v_2 = \frac{1}{\|\underline{\delta}_2 - (v_1^t \underline{\delta}_2 | \underline{\delta}_2)\|} \left( \underline{\delta}_2 - \sum_{l=1}^{i-1} (v_l^t \underline{\delta}_i | \underline{\delta}_i) \right)$$

⋮

$$v_i = \frac{1}{\|\underline{\delta}_i - \sum_{l=1}^{i-1} (v_l^t \underline{\delta}_i | \underline{\delta}_i)\|} \left( \underline{\delta}_i - (v_1^t \underline{\delta}_2 | \underline{\delta}_2) \right), i = 3, \dots, a$$

Uma vez obtidas as matrizes  $A(c)$  permite-se aplicar diretamente os resultados da alínea anterior.

## 3 Análise Conjunta de Regressões – ACR

### 3.1 Aspetos preliminares

Tradicionalmente a ACR era aplicada a redes de ensaios em blocos causalizados estando presentes todas as cultivares em todos os blocos. Estimaram-se os índices ambientais através das médias dos blocos, ver Gusmão (1985 1986a)

Atualmente utilizam-se modelos com blocos incompletos. Salientam-se que os  $\alpha$ -designs em que os blocos estão agrupados em super-blocos estando cada cultivar presente  $\alpha$  vezes em cada super-bloco, ver Patterson & Williams (1976). Em geral toma-se  $\alpha=1$ . Não podemos agora utilizar a média dos blocos como estimadores dos índices ambientais tendo se recorrer a técnicas computacionais.

Para realizar o ajustamento minimizamos

$$S(\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{x}) = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^b p_{i,j} (\gamma_{i,j} - \alpha_j - \beta_j x_i)^2$$

onde,

$J$  é o número de cultivares;

$b$  é o número de pares (local, ano). Referimo-nos a esses pares como blocos.

$p_{i,j}$  toma valores [1]0 quando o  $j$ -ésimo cultivar  $j=1,2,\dots,J$  está presente [não está presente] no  $i$ -ésimo bloco,  $j=1,2,\dots,J, i=1,\dots,b$ ;

$\gamma_{i,j}$  é o valor da produção do  $j$ -ésimo cultivar, se estiver presente, no  $i$ -ésimo bloco  $j=1,2,\dots,J, i=1,\dots,b$ ;

$\alpha_j$  e  $\beta_j$  são a ordenada na origem e a inclinação para a regressão linear correspondente ao  $j$ -ésimo cultivar  $j=1,2,\dots,J$ ;

$x_1, \dots, x_b$  são os valores dos índices ambientais a ajustar para os vários blocos.

Um algoritmo que tem sido utilizado muitas vezes é o algoritmo zig-zag, ver Mexia et al (1999). Trata-se dum algoritmo iterativo. Começa-se com um vetor  $\underline{x}_0$  para os índices ambientais. No caso  $\alpha$ -designs toma-se, para cada bloco, a média das produções do



super-bloco em que está integrado. Em seguida ajusta-se pelo método usual dos mínimos quadrados os coeficientes das regressões lineares.

Com  $x_{0,1}, \dots, x_{0,b}$  valores iniciais dos índices ambientais obtém-se os

$$\begin{cases} T_{1,j,x} = \sum_{i=1}^b p_{i,j} x_{0,i} \\ T_{j,y} = \sum_{i=1}^b p_{i,j} y_{i,j} \end{cases}, \mathbf{j} = \mathbf{1}, \dots, \mathbf{J}$$

e as

$$\begin{cases} S_{1,j,x,x} = \sum_{i=1}^b p_{i,j} x_{0,i}^2 \\ S_{1,j,x,y} = \sum_{i=1}^b p_{i,j} x_{0,i} y_{i,j} \\ S_{1,j,y,y} = \sum_{i=1}^b p_{i,j} y_{i,j}^2 \end{cases}, \mathbf{j} = \mathbf{1}, \dots, \mathbf{J}$$

Com  $x_j$  o número de blocos em que o  $j$ -ésimo cultivar está presente  $j = 1, \dots, J$ , obtêm-se os

$$\begin{cases} s_{1,j,x,x} = S_{1,j,x,x} - \frac{T_{1,j,x}^2}{n_j}, j = 1, \dots, J \\ s_{1,j,x,y} = S_{1,j,x,y} - \frac{T_{1,j,x} T_{1,j,y}}{n_j}, j = 1, \dots, J \\ s_{1,j,y,y} = S_{1,j,y,y} - \frac{T_{1,j,y}^2}{n_j}, j = 1, \dots, J \end{cases}$$

Observe-se que no caso das  $\alpha$ -designs com  $\alpha = 1$  se tem

$$n_j = \dot{n}, j = 1, \dots, J \text{ com } \dot{n} \text{ o número de super- blocos.}$$

Temos agora os estimadores

$$\tilde{\beta}_{1,j} = \frac{s_{1,j,x,y}}{s_{1,j,x,x}}, j = 1, \dots, J$$

e

$$\tilde{\alpha}_{1,j} = \frac{T_{1,j,y} - \tilde{\beta}_{1,j}T_{1,j,x}}{n_j}, j = 1, \dots, J$$

As somas dos quadrados dos resíduos são dadas por

$$\Delta_{j,j} = s_{1,j,y,y} - \frac{s_{1,j,x,y}^2}{s_{1,j,x,x}}, j = 1, \dots, J$$

tendo-se pois a soma das somas dos quadrados dos resíduos

$$\Delta_1 = \sum_{j=1}^J \Delta_{j,j}$$

Assim haverá uma primeira minimização em ordem aos coeficientes das regressões. Segue-se uma segunda minimização em ordem aos índices ambientais. É esta alternância de minimizações que dá o nome ao algoritmo.

Para realizar a segunda minimização observamos que, com  $\tilde{\alpha}_1$  e  $\tilde{\beta}_1$  os vetores de componentes  $\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_j$  e  $\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_j$ , a função objetivo, dados estes estimadores, pode ser reescrita como

$$S(\underline{x} | \underline{\tilde{\alpha}}_1, \underline{\tilde{\beta}}_1) = \sum_{i=1}^b h_i(x_i | \underline{\tilde{\alpha}}_1, \underline{\tilde{\beta}}_1)$$

onde

$$h_i(x | \underline{\tilde{\alpha}}_1, \underline{\tilde{\beta}}_1) = \sum_{j=1}^J p_{i,j} (Y_{i,j} - \tilde{\alpha}_{1,j} - \tilde{\beta}_{1,j}x_i)^2; i = 1, \dots, b$$

vindo

$$h_i'(x | \underline{\tilde{\alpha}}_1, \underline{\tilde{\beta}}_1) = -2 \sum_{j=1}^J p_{i,j} (Y_{i,j} - \tilde{\alpha}_{1,j} - \tilde{\beta}_{1,j}x_i) \tilde{\beta}_{1,j}; i = 1, \dots, b,$$

logo ao minimizarmos  $S(\underline{x} | \underline{\tilde{\alpha}}_1, \underline{\tilde{\beta}}_1)$  em ordem a  $\underline{x}$  obtemos um mínimo com componentes

$$x_{1,i}^{\circ} = \frac{\sum_{j=1}^J p_{i,j} \tilde{\beta}_{1,j} Y_{i,j} - \sum_{j=1}^J p_{ij} \tilde{\alpha}_{1,j} \tilde{\beta}_{1,j}}{\sum_{j=1}^J p_{i,j} \tilde{\beta}_{1,j}^2} ; i = 1, \dots, b.$$

Concluídas as duas minimizações vamos realizar uma estandarização dos índices ambientais de forma a manter invariante o mínimo e o máximo.

Sejam

$$\begin{cases} x_0' = \min \langle x_{0,1}, \dots, x_{0,b} \rangle \\ x_0'' = \max \langle x_{0,1}, \dots, x_{0,b} \rangle \end{cases} \quad \begin{cases} x_1^{0'} = \min \langle x_{1,1}^0, \dots, x_{1,b}^0 \rangle \\ x_1^{0''} = \max \langle x_{1,1}^0, \dots, x_{1,b}^0 \rangle \end{cases}$$

,tomando-se

$$x_{1,i} = x_0' + \frac{x_0'' - x_0'}{x_1^{0''} - x_1^{0'}} (x_{1,i}^0 - x_1^{0'}), i = 1, \dots, b$$

realiza-se uma estandarização já que quando

$$x_{1,i}^0 = x_1^{0'} \left[ x_{1,i}^0 = x_1^{0''} \right]$$

se tem

$$x_{1,i} = x_0' \left[ x_{1,i} = x_0'' \right].$$

Pode em seguida repetir-se a dupla minimização e a estandarização tomando como vetor inicial de índices ambientais

$$\underline{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{1,1} \\ \vdots \\ x_{1,b} \end{bmatrix}$$

Entra-se assim num processo recursivo que termina quando a soma das somas dos quadrados dos resíduos estabilizar. Na prática o método tem se revelado eficiente bastando um número pequeno de ciclos (em geral 12) mesmo quando, ver Mexia e Pinto (2003) o algoritmo é aplicado a casos pouco estruturados. Embora não se disponha numa forma

teórica de convergência do algoritmo foi possível, ver Mexia e Pereira (2004), realizar a validação estocástica do mesmo.

### 3.2 Contorno superior

Realizado o ajustamento o contorno superior do conjunto das regressões lineares desempenha um papel muito interessante na seleção dos cultivares. Começamos por observar que dado um par de retas  $a_j + b_j x$ ,  $j = 1, 2, \dots$  as mesmas cruzam se e só se  $b_1 \neq b_2$ . Podemos aliás admitir, sem perda de generalidade, que  $b_1 < b_2$ . A abcissa do cruzamento é

$$x_0 = \frac{a_1 - a_2}{b_2 - b_1}$$

Tendo-se  $a_1 + b_1 x \leq [\geq] a_2 + b_2 x$  quando  $x \geq [\leq] x_0$ , isto é, á esquerda [direita] do cruzamento tem-se  $a_1 + b_1 x > a_2 + b_2 x$  [ $a_1 + b_1 x < a_2 + b_2 x$ ]

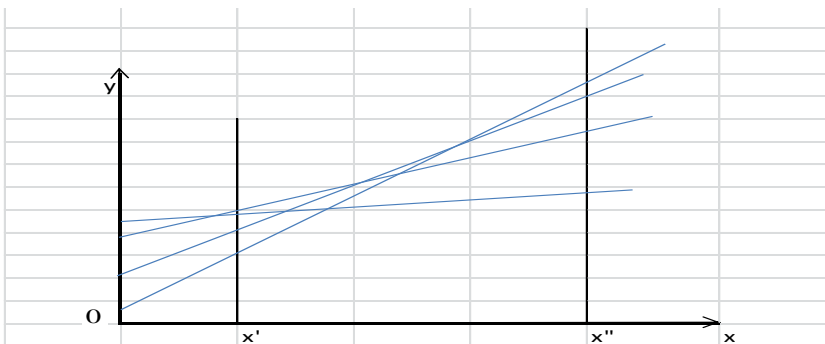
A partir daqui é fácil estabelecer a

#### Proposição 3.1

O contorno superior do conjunto das regressões lineares ajustadas é uma poligonal com a concavidade voltada para cima.

Observa-se que nem todas as cultivares integram necessariamente o contorno superior, como demonstra a **figura 1**.

Fig. 1: gráfico do contorno superior



As cultivares que integram o contorno superior são as cultivares dominantes.

Observa-se que o contorno superior corresponde ao intervalo  $[x'; x'']$  limitado pelo menor e pelo maior dos índices ambientais com que se trabalha. Este intervalo tem uma composição

$$[x'; x''] = \bigcup_{j=1}^J [x'_j; x''_j]$$

onde  $[x'_j; x''_j]$  é o intervalo constituído pelos valores dos índices ambientais para os quais o j-ésimo cultivar dominante tem produções mais altas. Sendo  $\beta_{j_1}^*, \dots, \beta_{j_l}^*$  as inclinações ajustadas para os cultivares dominantes ordenados por ordem crescente,

$$\beta_{j_l}^* < \beta_{j_{l+1}}^*, l = 1, \dots, d-1$$

podemos admitir que as regressões correspondentes aos cultivares, estão ordenadas pela ordem crescente das suas inclinações.

Como afirmamos atrás, os cultivares dominantes devem ser selecionados. Os restantes devem ser comparados com os cultivares dominantes.

Observe-se agora que dado o par de retas  $a_j + b_j x, j = 1, 2, \dots$  com  $b_1 < b_2$  a diferença

$$d(x) = (a_2 + b_2 x) - (a_1 + b_1 x)$$

é crescente. Assim no intervalo  $[c; d]$  o mínimo [máximo] de  $d(x)$  corresponde ao extremo esquerdo [direito]. Daqui resulta que  $\alpha_j^* + \beta_j^* x$  corresponde a uma cultivar não dominante com  $\beta_j^* < \beta_{j_l}^*$  [ $>$ ] se deve comparar o par com índices  $(j; j_l)$  tomando  $x = x'_j [x''_j]$ .

Neste tipo de comparações podem-se utilizar métodos de comparação múltipla como por exemplo o de Scheffé e Tukey, ver Pereira (2003). No entanto pode-se aplicar um simples teste "t" já que o que se pretende comparar é um par de regressões para um dado valor de  $x$ .

Sendo  $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{x})$  o trio de vetores ajustados, utilizando por exemplo o algoritmo zig-zag, seja  $S$  a soma de quadrados dos resíduos obtidos na última iteração. Ao j-ésimo cultivar podemos fazer corresponder a matriz

$$X_j = [ \mathbf{I} \quad \underline{x}_j ], j = 1, \dots, J$$

onde  $\underline{x}_j$  é o vetor dos índices ambientais ajustados para os blocos contendo o j-ésimo  $j = 1, \dots, J$  cultivar. Se tomarmos  $\underline{x}_j$  como um vetor fixo o par  $(\tilde{\alpha}_j, \tilde{\beta}_j)$  terá a matriz de covariância  $\sigma^2 (X_j^t X_j)^{-1} j = 1, \dots, J$ . Dada a independência dos vetores  $\underline{Y}_1, \dots, \underline{Y}_j$  somos

levados a admitir que os pares  $(\tilde{\alpha}_j, \tilde{\beta}_j)$  são independentes,  $j=1, \dots, J$ . Então as  $\tilde{\alpha}_j + \tilde{\beta}_j x$  serão independentes entre si com variâncias  $\sigma^2 k_j(x)$  onde

$$k_j(x) = [1 \quad \mathbf{x}] (X_j^t X_j)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} \quad j=1, \dots, J$$

sendo ainda independentes de  $S$  que será o produto por  $\sigma^2$  dum qui-quadrado central com

$$g = \sum_{j=1}^J b_j - 2J$$

onde  $b_j$  é o número de blocos em que está presente o  $j$ -ésimo cultivar. Para compararmos  $\tilde{\alpha}_j + \tilde{\beta}_j x'_{j_i}$  com  $\tilde{\alpha}_{j_i} + \tilde{\beta}_{j_i} x'_{j_i}$  temos a estatística do teste "t"

$$t_{j,j_i}(x'_{j_i}) = \frac{(\tilde{\alpha}_j + \tilde{\beta}_j x'_{j_i}) - (\tilde{\alpha}_{j_i} + \tilde{\beta}_{j_i} x'_{j_i})}{\sqrt{(k_j(x'_{j_i}) + k_{j_i}(x'_{j_i})) \frac{S}{g}}}$$

com  $g$  graus de liberdade. Para comparar  $\tilde{\alpha}_j + \tilde{\beta}_j x''_{j_i}$  com  $\tilde{\alpha}_{j_i} + \tilde{\beta}_{j_i} x''_{j_i}$  a estatística será

$$t_{j,j_i}(x''_{j_i}) = \frac{(\tilde{\alpha}_j + \tilde{\beta}_j x''_{j_i}) - (\tilde{\alpha}_{j_i} + \tilde{\beta}_{j_i} x''_{j_i})}{\sqrt{(k_j(x''_{j_i}) + k_{j_i}(x''_{j_i})) \frac{S}{g}}}$$

A primeira [segunda] destas estatísticas utiliza-se quando  $\tilde{\beta}_j < \tilde{\beta}_{j_i}$  [ $\tilde{\beta}_j > \tilde{\beta}_{j_i}$ ].

### 3.3 Estabilidade

A ANOVA tem sido utilizada, ver por exemplo Plaisted & Peterson (1959), Plaisted (1960) Allard & Bradshaw (1964), Fox & Resielle (1982), Wricke (1962) e Shukla (1972) para estudar a estabilidade das produções em rede de ensaios. A estabilidade era então expressa em termos de valores médios. Não se atendendo á diferentes capacidades produtivas dos locais utilizados. A ACR permite ultrapassar esta dificuldade.

Admitamos que para  $L$  anos se têm os resultados para  $J$  cultivares, havendo  $b_l, l=1, \dots, L$  blocos nos vários anos. Sejam  $(\tilde{\alpha}_{j,l}; \tilde{\beta}_{j,l}) j=1, \dots, J, l=1, \dots, L$  os parâmetros ajustados para os diferentes cultivares nos  $L$  anos que se consideraram. Representemos ainda que  $\sigma^2 V_{j,l}$  as matrizes da covariância dos pares  $(\tilde{\alpha}_{j,l}, \tilde{\beta}_{j,l}) j=1, \dots, J, l=1, \dots, L$  admitindo-se, como atrás, que se pode utilizar os índices ambientais obtidos na última iteração para obter estes

estimadores. Como os blocos podem não ser os mesmos nos vários anos centramos a nossa análise nos coeficientes angulares. Assim a estabilidade traduzir-se-á por constância aproximada das taxas de resposta, em termos de produção, e variação na fertilidade.

Temos então

$$\text{Var}(\tilde{\beta}_{j,l}) = \frac{\sigma^2}{s_{j,l}}, j = 1, \dots, J, l = 1, \dots, L$$

com

$$s_{j,l} = \sum_{i=1}^{b_l} p_{i,j,l} x_{i,l}^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^{b_l} p_{i,j,l} x_{i,l} \right)^2}{\sum_{i=1}^{b_l} p_{i,j,l}}$$

sendo  $p_{i,j,l} = 0[1]$  se no  $l$ -*esimo* ano o cultivar  $j$  ausente [presente] no  $i$ -*esimo* bloco do  $l$ -*esimo* ano,  $j = 1, \dots, J$ ,  $i = 1, \dots, b_l$ ,  $l = 1, \dots, L$   $x_{i,l}$  o índice ambiental para o  $i$ -*esimo* bloco,  $i = 1, \dots, b_l$  no  $l$ -*esimo* ano,  $l = 1, \dots, L$ .

Temos

$$\beta_{j,l} = \xi(\tilde{\beta}_{j,l}), j = 1, \dots, J, l = 1, \dots, L$$

sendo o  $j$ -*esimo* cultivar perfeitamente estável no que diz respeito à capacidade de resposta e variação da fertilidade, se e só se  $\beta_{j,i} = \dots = \beta_{j,L}$ .

Ponhamos

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\beta}_j = \begin{bmatrix} \beta_{j,1} \\ \vdots \\ \beta_{j,L} \end{bmatrix}; j = 1, \dots, J \\ \tilde{\underline{\beta}}_j = \begin{bmatrix} \tilde{\beta}_{j,1} \\ \vdots \\ \tilde{\beta}_{j,L} \end{bmatrix}; j = 1, \dots, J \end{array} \right.$$

e representemos por  $W$  uma matriz obtida retirando a primeira linha igual a

$\left[ \frac{1}{\sqrt{L}} \dots \frac{1}{\sqrt{L}} \right]$  uma matriz  $L_{p_L}$  ortogonal  $L \times L$ , obtém-se

$$P_L \underline{\beta}_j = \begin{bmatrix} \sqrt{L} \beta_j \\ W_L \underline{\beta}_j \end{bmatrix} j = 1, \dots, J$$

com

$$\beta_{j\bullet} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \beta_{j,l}, j=1, \dots, J$$

logo

$$\begin{aligned} \|\underline{\beta}_j\|^2 &= \|P_L \underline{\beta}_j\|^2 \\ &= L\beta_{j\bullet}^2 + \|W_L \underline{\beta}_j\|^2, j=1, \dots, J \end{aligned}$$

vindo

$$\begin{aligned} \|W_L \underline{\beta}_j\|^2 &= \|\underline{\beta}_j\|^2 - L\beta_{j\bullet}^2 \\ &= \sum_{l=1}^L \beta_{j,l}^2 - L\beta_{j\bullet}^2 \\ &= \sum_{l=1}^L (\beta_{j,l} - \beta_{j\bullet})^2 \end{aligned}$$

pelo que as componentes de  $\underline{\beta}_j$  são idênticas se e só se

$$W_L \underline{\beta}_j = 0, j=1, \dots, J$$

Por outro lado  $W_L \tilde{\underline{\beta}}_j$  tem vetor médio  $W_L \underline{\beta}_j, j=1, \dots, J$  e matriz covariância

$$\Sigma(W_L \tilde{\underline{\beta}}_j) = W_L \Sigma(\tilde{\underline{\beta}}_j) W_L^t = \sigma^2 W_L D \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \dots & \\ & & 1 \end{pmatrix} W_L^t, j=1, \dots, J$$

se se admitir que os vetores dos rendimentos para os diferentes anos são independentes e conseqüentemente que os componentes dos  $\tilde{\underline{\beta}}_j = (\tilde{\alpha}_j, \tilde{\beta}_j), j=1, \dots, J$  são independentes.

Então, ver Mexia (1990),

$$G_j = (W_L \tilde{\underline{\beta}}_j)^t \left( W_L D \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \dots & \\ & & 1 \end{pmatrix} W_L^t \right)^{-1} (W_L \tilde{\underline{\beta}}_j), j=1, \dots, J$$

será o produto por  $\sigma^2$  dum qui-quadrado com  $L-1$  graus de liberdade e parâmetro de não centralidade

$$\delta_j = \frac{1}{\sigma^2} (W_L \underline{\beta}_j)^t \left( W_L D \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \dots & \\ & & 1 \end{pmatrix} W_L^t \right)^{-1} (W_L \underline{\beta}_j), j=1, \dots, J$$

Observa-se que o  $j$ -ésimo parâmetro de não centralidade se anula, se e só se  $W_L \underline{\beta}_j = 0$ , isto é, se houver perfeita estabilidade para o  $j$ -ésimo cultivar. Podemos pois utilizar os  $G_j, j=1, \dots, J$  para medir a falta de estabilidade para os diferentes cultivares.



Para a inferência admitimos que os  $\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_j$  são independentes de  $S$ , a soma das somas dos quadrados dos resíduos, que se têm no final dos ajustamentos e que  $S \sim \sigma^2 \chi_g^2$  com

$$g = \sum_{l=1}^L b_l - JL$$

Então as estatísticas

$$T_j = \frac{G_j}{S}, j = 1, \dots, J$$

distribuir-se-ão como os quocientes de qui-quadrados independentes  $\frac{\chi_{L-1, \delta_j}^2}{\chi_g^2}$ , tendo-se

$$T_j \sim \bar{F}(\cdot | L-1, g, \delta_j), j = 1, \dots, J$$

A densidade de  $\bar{F}(\cdot | r, s, \delta)$  é, ver Mexia (1988)

$$\bar{f}(z | r, s, \delta) = e^{-\delta/z} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\delta}{j!} \bar{f}(z | r + 2j, \delta)$$

com,

$$\begin{cases} \bar{f}(z | r', s) = 0; z < 0 \\ \bar{f}(z | r', s) = \frac{\Gamma\left(\frac{r'+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r'}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \frac{z^{r'/2-1}}{(1+z)^{r'+s/2}} \end{cases}$$

Ora o integral entre  $-\infty$  e  $+\infty$  numa densidade é 1, logo

$$\int_0^{+\infty} \frac{z^{r'/2-1}}{(1+z)^{r'+s/2}} dz = \frac{\Gamma\left(\frac{r'}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r'+s}{2}\right)}$$

assim o valor médio para  $\bar{f}(z | r', s)$  é, caso  $s > 2$

$$\begin{aligned}
\mu(\dots|r',s) &= \frac{\Gamma\left(\frac{r'+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r'}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{+\infty} \frac{z^{\frac{r'+2}{2}-1}}{(1+z)^{\frac{(r'+2)+(1-2)}{2}}} dz \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{r'+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r'}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{r'+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r'+1}{2}\right)} \\
&= \frac{\frac{r'}{2}}{\frac{s-2}{2}} \\
&= \frac{r}{s-2}
\end{aligned}$$

Então o valor médio para  $\bar{f}(\dots|r,s,\delta)$  será

$$\begin{aligned}
\mu(\dots|r,s,\delta) &= e^{-\delta/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^j}{j!} \frac{r+2j}{s-2} \\
&= \frac{r}{s-2} e^{-\delta/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^j}{j!} + \frac{e^{-\delta/2}}{s-2} \frac{\delta}{2} \cdot 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^{j-1}}{(j-1)!} \\
&= \frac{r+\delta}{s-2}
\end{aligned}$$

já que

$$e^{-\delta/2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^{j-1}}{(j-1)!} = e^{-\delta/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^j}{j!} = 1$$

Caso  $T$  tenha densidade  $\bar{f}(\dots|g,\delta_j) j=1,\dots,J$  tem-se o estimador centrado

$$\tilde{\delta} = (s-2)T - r$$

Em particular os

$$\tilde{\delta}_j = (g-2)T_j - (L-1); j=1,\dots,J$$

serão estimadores centrados dos  $\delta_j, j=1,\dots,J$

Para obtermos a variância destes estimadores observamos que o segundo momento relativo à origem de  $\bar{f}(\dots | r', \delta)$  é, caso  $s > 4$

$$\begin{aligned} \mu_2'(\dots | r', s) &= \frac{\Gamma\left(\frac{r'+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r'}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_0^{+\infty} \frac{z^{\frac{r'+4}{2}-1}}{(1+z)^{\frac{(r'+4)+(1-4)}{2}}} dz \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{r'+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r'}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{r'+4}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-4}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r'+s}{2}\right)} \\ &= \frac{\frac{r'}{2}}{s-4} \frac{\frac{r'+2}{2} \frac{r'}{2}}{s-2} \\ &= \frac{(r'+2)r'}{(s-4)s} \end{aligned}$$

Assim o segundo momento relativo à origem de  $\bar{f}(z | r, s, \delta)$  será

$$\begin{aligned} \mu_2'(\dots | r, s, \delta) &= e^{-\delta/z} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^j}{j!} \frac{(r+2+2\delta)(r+2\delta)}{(s-4)(s-2)} \\ &= e^{-\delta/z} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^j}{j!} \frac{r^2 + 2r + 4(r+1)j + 4j^2}{(s-4)(s-2)} \\ &= \frac{1}{(s-4)(s-2)} \left( r^2 + 2r + 4(r+1)\frac{\delta}{2} + 4\left(\frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{4}\right) \right) \\ &= \frac{r^2 + 2r + 2(r+2)\delta + \delta^2}{(s-4)(s-2)} \end{aligned}$$

já que

$$\begin{aligned} e^{-\delta/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^j}{j!} (2j) &= \delta e^{-\delta/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^{j-1}}{(j-1)!} \\ &= \delta \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}
e^{-\delta/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^j}{j!} \delta^2 &= e^{-\delta/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^j}{j!} j(j-1) + e^{-\delta/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^j}{j!} \delta \\
&= e^{-\delta/2} \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^{j-2}}{(j-2)!} + e^{-\delta/2} \left(\frac{\delta}{2}\right) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^{j-1}}{(j-1)!} \\
&= \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\delta}{2}\right) \\
&= \frac{\delta^2}{4} + \frac{\delta}{2}
\end{aligned}$$

Teremos então para esta densidade a variância

$$\begin{aligned}
\text{var}(\dots | r, s, \delta) &= \frac{r^2 + 2r + 2(r+2)\delta + \delta^2}{(s-4)(s-2)} - \frac{r^2 + 2r\delta + \delta^2}{(s-2)^2} \\
&= \frac{2(r+\delta)^2 + 2(s-2)(r+1)\delta}{(s-4)(s-2)^2}
\end{aligned}$$

pelo que também se tem

$$\text{var}(\tilde{\delta}) = \frac{2(r+\delta)^2 + 2(s-2)(r+1)\delta}{(s-4)}$$

em particular temos para os mesmos estimadores as variâncias

$$\text{var}(\tilde{\delta}_j) = \frac{2(l-1+\delta_j)^2 + 2(g-2)L\sqrt{\delta}}{(g-4)} \quad j=1, \dots, J$$

Consideramos agora intervalos de confiança. Dado ter-se

$$\bar{F}(z | r, s, \delta) = e^{-\delta/z} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^j}{j!} \bar{F}(z | r, 2\delta, s)$$

tem-se, como vimos atrás

$$\frac{\partial \bar{F}(z | r, s, \delta)}{\partial \delta} < 0$$

Este facto tem uma consequência importante, se  $T$  com distribuição  $F(\dots | r, s, \delta)$  tomar o valor  $t$ , resolvendo em ordem a  $\delta$  equações

$$\begin{cases} \bar{F}(t|r, s, \delta) = 1 - \frac{q}{2} \\ \bar{F}(t|r, s, \delta) = \frac{q}{2} \end{cases}$$

obtemos, ver Mood et al (1987, pag389-391) os extremos de um intervalo de confiança bilateral de nível  $1-q$  para  $\delta$ . Analogamente os intervalos unilaterais  $[0; \delta_{1-q}]$  e  $[\delta_q; +\infty]$  serão limitados pelas soluções das equações

$$\bar{F}(t|r, s, \delta) = q$$

e

$$\bar{F}(t|r, s, \delta) = 1 - q$$

Por dualidade podemos utilizar estes intervalos de confiança para testar hipóteses da forma  $H_0(d): \delta = d$

O teste bilateral [unilateral esquerda; unilateral direita] de nível  $q$  não rejeita  $H_0(d)$  quando o intervalo de confiança de nível  $1-q$  bilateral [unilateral esquerda; unilateral direita] contém  $d$ .

A aplicação destes resultados à construção de intervalos de confiança para os  $\delta_j, j=1, \dots, J$  e para testar os  $H_{0,j}(d_j): \delta_j = d_j, j=1, \dots, J$  é direta.

Para obter os extremos dos intervalos de confiança  $\delta_j$  podemos truncar  $\bar{F}(\cdot|r, s, \delta)$  resolvendo assim as equações

$$\bar{F}_N(t|r, s, \delta) = 1 - p$$

,com

$$\bar{F}_N(t|r, s, \delta) = e^{-\delta/2} \sum_{j=0}^N \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^j}{j!} F(t|r+2j, s)$$

Como

$$0 < F(z|r, s, \delta) - \bar{F}_N(z|r, s, \delta) < e^{-\delta/2} \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^j}{j!} = 1 - e^{-\delta/2} \sum_{j=0}^N \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^j}{j!}$$

,dado  $\delta$  e um limite superior  $\varepsilon$  para o erro de truncatura, torna-se fácil obter uns valores adequados  $N_\varepsilon(\delta)$  para  $N$  de forma a ter um erro de truncatura que não excede  $\varepsilon$ . Aliás a função

$$g_N(\delta) = e^{-\delta/2} \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^j}{j!}$$

tendo derivada

$$\begin{aligned} g'_N(\delta) &= -\frac{1}{2} e^{-\delta/2} \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^j}{j!} + \frac{1}{2} e^{-\delta/2} \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^{j-1}}{(j-1)!} \\ &= e^{-\delta/2} \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^N}{N!} > 0 \end{aligned}$$

é crescente, logo se se fixar um limite superior  $\bar{\delta}$  para  $\delta$  e tomando

$$N = N_\varepsilon(\bar{\delta})$$

temos um erro de truncatura que não excede  $\varepsilon$  sempre que  $\delta < \bar{\delta}$ . Na tabela seguinte apresen-

tamos valores para  $N_\varepsilon(\bar{\delta})$

tabela 1: valores de $N_\varepsilon(\bar{\delta})$				
$\bar{\delta} \backslash \varepsilon$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$
5	7	9	10	13
10	11	13	15	19
20	18	21	24	28
50	37	42	46	52
100	67	73	78	87

Seguindo Mexia (1988) vamos ajustar fórmulas para o cálculo dos valores de  $\bar{F}(r', s)$  de forma a podermos se recorrer e a calcular os extremos de intervalos de confiança. caso

$$\begin{aligned} \bar{F}(z|r+2, s) &= \frac{\Gamma\left(\frac{r+2+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} = \int_0^z \frac{u^{-\frac{r+1}{2}-1}}{(1+u)^{\frac{r+2+s}{2}}} du \\ &= \frac{r+2}{r} \frac{\Gamma\left(\frac{r+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \left( -\frac{2}{r+s} \frac{z^{r/2}}{(1+z)^{\frac{r+s}{2}}} + \frac{r}{r+s} \int_0^z \frac{u^{\frac{r}{2}-1}}{(1+u)^{\frac{r+s}{2}}} du \right) \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{r+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_0^z \frac{u^{\frac{r}{2}-1}}{(1+u)^{\frac{r+s}{2}}} du - \frac{2}{r} \frac{\Gamma\left(\frac{r+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \frac{z^{\frac{r}{2}}}{(1+z)^{\frac{r+s}{2}}} \\ &= \bar{F}(z|r, s) - \frac{2}{r} \frac{\Gamma\left(\frac{r+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \frac{z^{\frac{r}{2}}}{(1+z)^{\frac{r+s}{2}}} \end{aligned}$$

basta poder calcular os valores de  $\bar{F}(z|1, s)$  e de  $\bar{F}(z|2, s)$ .

Ora fazendo  $u = tg^2(v)$  vem, para  $z > 0$  dado  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$$\begin{aligned}\bar{F}(z|1, s) &= \frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_0^z \frac{1}{\sqrt{u}(1+u)^{\frac{1+s}{2}}} du \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_0^{\text{arctg}(\sqrt{z})} \cos(v)^{s-1} dv\end{aligned}$$

E como, ver Santos (1997)

$$\begin{aligned}\int_0^{\text{arctg}(\sqrt{z})} \cos(v)^{j+2} dv &= \left[ \frac{1}{j+2} \text{sen}(v) \cos(v)^{j+1} \right]_0^{\text{arctg}(\sqrt{z})} + \frac{j+1}{j+2} \int_0^{\text{arctg}(\sqrt{z})} \cos(v)^j dv \\ &= \frac{\sqrt{z}}{(j+2)(j+z)^{\frac{j+2}{2}}} + \frac{j+1}{j+2} \int_0^{\text{arctg}(\sqrt{z})} \cos(v)^j dv; \delta = 0,1\end{aligned}$$

pode-se obter os valores de  $\bar{F}(z|1, s)$ .

Por outro lado, para  $z > 0$  temos,

$$\begin{aligned}\bar{F}(z|2, s) &= \frac{\Gamma\left(\frac{2+s}{2}\right)}{\Gamma(1)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_0^z \frac{1}{(1+u)^{\frac{1+s}{2}}} du \\ &= \frac{m}{2} \left[ -\frac{2}{m} \frac{1}{(1+u)^{\frac{s}{2}}} \right]_0^z \\ &= 1 - \frac{1}{(1+z)^{\frac{s}{2}}}\end{aligned}$$

## 4. Índices Ambientais

### 4.1 Generalidades

Neste capítulo vamos ajustar o modelo logaritmo para as médias ambientais.

Começamos por considerar o ajustamento do modelo mostrando em seguida como realizar inferência. Dado a estrutura linear do modelo, podemos utilizar ANOVA e técnicas relacionadas.

Em particular veremos como estudar os efeitos dos

- ambientes;
- culturas.

Enquanto o fator cultura é simples já que para cada cultura considerada se terá um nível, no caso do ambiente podem-se considerar sub-fatores. Assim é possível considerar sub-fatores

- Local;
- Ano.

No entanto quando se consideram vários anos podem surgir dificuldades resultantes de culturas diferentes reagirem de maneiras diferentes as mudanças climáticas que se verificam de ano para ano. Assim poderá começar-se por resultados obtidos para:

- um mesmo ano agrícola;
- nos mesmos locais para as diferentes culturas consideradas



## 4.2 Ajustamento

Havendo  $m$  locais e  $n$  culturas, teremos uma matriz

$$X = [x_1, \dots, x_m]$$

em que os vetores coluna contêm os valores dos índices ambientais para as diferentes culturas.

A existência duma forte relação entre os índices ambientais para as diferentes culturas traduzir-se-á pela existência duma componente principal dominante quando se consideram os índices ambientais como valores de vários anos associados às culturas. Assim, sendo

$\theta_1 \geq \dots \geq \theta_n$  os valores próprios da matriz  $X^t X$ ,

$$c = \frac{\theta_1}{\sum_{j=1}^n \theta_j}$$

poderá ser utilizado para medir a relevância da primeira componente principal já que as frações da informação total transportada pelas diferentes componentes são proporcionais aos valores próprios correspondentes.

Por vezes é útil considerar os pares de matrizes  $XX^t$  e  $X^t X$  tendo-se a

### **Proposição 4.1**

As matrizes conjugadas  $XX^t$  e  $X^t X$  têm os mesmos valores próprios não nulos  $\theta_1, \dots, \theta_n$  os quais serão positivos. Se  $\underline{\alpha}_1, \dots, \underline{\alpha}_n$  forem os vetores próprios mutuamente ortogonais de  $XX^t$  correspondentes aos  $\theta_1, \dots, \theta_n$  para  $X^t X$  têm-se os vetores próprios

$$\underline{\beta}_j = \frac{1}{\sqrt{\theta_j}} X^t \underline{\alpha}_j, j = 1, \dots, n$$

também mutuamente ortogonais associados aos  $\theta_1, \dots, \theta_n$ , tendo-se ainda

$$\underline{\alpha}_j = \frac{1}{\sqrt{\theta_j}} X \underline{\beta}_j, j = 1, \dots, n$$

D: Como as matrizes  $XX^t$  e  $X^tX$  são semi-definidas positivas os respectivos valores próprios não nulos serão positivas. Por outro lado

$$\begin{aligned} X^tX\underline{\beta}_j &= \frac{1}{\sqrt{\theta_j}} X^tXX^t\underline{\alpha}_j \\ &= \frac{1}{\sqrt{\theta_j}} X^t(\theta_j\underline{\alpha}_j) \\ &= \theta_j \left( \frac{1}{\sqrt{\theta_j}} X^t\underline{\alpha}_j \right) \\ &= \theta_j\underline{\beta}_j, j=1, \dots, n \end{aligned}$$

O que mostra que os  $\underline{\beta}_1, \dots, \underline{\beta}_n$  são vetores próprios de  $XX^t$  associados aos valores próprios  $\theta_1, \dots, \theta_n$ .

Por outro lado

$$\begin{aligned} \underline{\beta}_j^t\underline{\beta}_h &= \frac{1}{\sqrt{\theta_j\theta_h}} \underline{\alpha}_j^tXX^t\underline{\alpha}_h \\ &= \sqrt{\frac{\theta_h}{\theta_j}} \underline{\alpha}_j^t\underline{\alpha}_h = 0; j \neq h \end{aligned}$$

pelo que os  $\underline{\beta}_1, \dots, \underline{\beta}_n$  serão mutuamente ortogonais.

O resto da demonstração é direto.

Quando  $m < n$ ,  $[m > n]$  pode ser mais fácil resolver a equação característica de  $XX^t[X^tX]$  dos quais a de  $X^tX[XX^t]$  utilizando-se a proposição 4.1 para obterem os vetores próprios da outra matriz.

Por outro lado a matriz  $X$  terá a decomposição em valores singulares, ver Schott (1997)

$$X = \sum_{j=1}^n \theta_j^{\frac{1}{2}} \underline{\alpha}_j \underline{\beta}_j^t$$

Logo quando  $\theta_1$  é dominante ter-se-á

$$X \approx \theta_1^{\frac{1}{2}} \underline{\alpha}_1 \underline{\beta}_1^t$$

Assim, com

$$\begin{cases} X = [x_{i,j}] \\ \underline{\alpha}_1 = (\underline{\alpha}_{1,1} \dots \underline{\alpha}_{1,n}) \\ \underline{\beta}_1 = (\underline{\beta}_{1,1} \dots \underline{\beta}_{1,m}) \end{cases}$$

ter-se-á

$$x_{i,j} \approx \theta_1^{1/2} \alpha_{1,i} \beta_{1,j}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$$

vindo

$$z_{i,j} = v + l_i + \lambda_j + e_{i,j}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$$

,com

$$\begin{cases} z_{i,j} = \ln x_{i,j}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m \\ v = \frac{1}{2} \ln \theta_1 \\ l_i = \ln \alpha_{1,i}, i = 1, \dots, n \\ \lambda_j = \ln \beta_{1,j}, j = 1, \dots, m \end{cases}$$

Começamos pelo caso completo ordenado as componentes de  $\underline{Y}$  de acordo com os índices

$$l = (i-1)m + j, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$$

tendo-se então com

$$\underline{\tau} = \begin{bmatrix} v \\ \underline{l} \\ \underline{\lambda} \end{bmatrix}$$

a matriz do modelo

$$X = [1_{nm} \ 1_n \otimes I_m]$$

Como  $\ln$  é crescente a substituição dos índices ambientais pelos seus logaritmos não origina dificuldades de interpretação. Observe-se que podemos interpretar os novos parâmetros como

$l_1 \dots l_n$  - efeitos dos locais;

$\lambda_1 \dots \lambda_m$  - efeitos das culturas

E caso se possa admitir que

$$(*) \quad \sum_{i=1}^n l_i = \sum_{j=1}^m \lambda_j = 0$$

,  $v$  será o valor médio geral.

Está-se no caso completo quando para todos os pares  $(i, j), i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$  se tem um índice ambiental. Para se ajustar o modelo, no caso completo, podia-se resolver a equação característica de  $XX^t[X^tX]$  e ajustar  $\underline{\alpha}_1$  e  $\underline{\theta}_1$  [ $\underline{\beta}_1$  e  $\underline{\theta}_1$ ] recorrendo á proposição 4.1 para se ajustar  $\underline{\beta}_1$  [ $\underline{\alpha}_1$ ]. No entanto em geral utilizar-se-á mínimos quadrados visto que, então não é preciso estar-se no caso completo. Quando se segue esta via temos

$$S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (z_{i,j} - v - l_i - \lambda_j)^2$$

Como soma de quadrados dos resíduos. Obtém-se para  $\sigma^2$  o estimador

$$\sigma^2 = \frac{S}{n+m-1}$$

Admitindo, para aplicar os mínimos quadrados que se está no caso completo ordenamos as componentes de  $\underline{Y}$  de acordo com os índices, então como vimos, o estimador de mínimos quadrados é

$$\tilde{\underline{z}} = (X^tX)^+ X^t \underline{Z}.$$

Observe-se que com a soma das colunas de  $\underline{1}_{nm}$  os vetores coluna de  $X$  não são linearmente independentes.

Para ultrapassar esta dificuldade utilizamos as restrições (\*) passando a tomar

$$\begin{cases} l_n = -\sum_{i=1}^{n-1} l_i \\ \lambda_m = -\sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j \end{cases}$$

e representando por  $\underline{l}^\circ$  [ $\underline{\lambda}^\circ$ ] o vetor com componentes  $l_1, \dots, l_{n-1}$  [ $\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}$ ] temos

$$\underline{\underline{z}}^\circ = \begin{bmatrix} v \\ \underline{l}^\circ \\ \underline{\lambda}^\circ \end{bmatrix}$$

como vetor de parâmetros.

A matriz modelo passa a ser

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{1}_{nm} & \dot{X}_1 & \dot{X}_2 \end{bmatrix}$$

,com

$$\overset{\circ}{X}_1 = \begin{bmatrix} I_{n-1} \otimes 1_m \\ -1_{n-1}^t \otimes 1_m \end{bmatrix}$$

e

$$\overset{\circ}{X}_2 = 1_n \otimes \begin{bmatrix} I_{m-1} \\ -1_{m-1} \end{bmatrix}$$

Dado ter-se eliminado a dependência linear entre vetores coluna da matriz do modelo o estimador dos mínimos quadrados passa a ser, ver Mexia (1995)

$$\tilde{\underline{z}}^\circ = \left( \begin{matrix} \overset{\circ}{X}^t & \overset{\circ}{X} \\ \overset{\circ}{X} & \overset{\circ}{X} \end{matrix} \right)^{-1} \begin{matrix} \overset{\circ}{X}^t \\ \overset{\circ}{X} \end{matrix} \underline{Z}$$

No caso incompleto haverá que eliminar as linhas de  $\overset{\circ}{X}$  correspondentes às observações em falta obtendo-se a nova matriz  $\overset{\circ\circ}{X}$  de modelo. Se os vetores desta forem linearmente independentes teremos o estimador

$$\tilde{\underline{z}}^\circ = \left( \begin{matrix} \overset{\circ\circ}{X}^t & \overset{\circ\circ}{X} \\ \overset{\circ\circ}{X} & \overset{\circ\circ}{X} \end{matrix} \right)^{-1} \begin{matrix} \overset{\circ\circ}{X}^t \\ \overset{\circ\circ}{X} \end{matrix} \underline{Z}$$

mas se houver dependência linear terá de se utilizar

$$\tilde{\underline{z}}^\circ = \left( \begin{matrix} \overset{\circ\circ}{X}^t & \overset{\circ\circ}{X} \\ \overset{\circ\circ}{X} & \overset{\circ\circ}{X} \end{matrix} \right)^+ \begin{matrix} \overset{\circ\circ}{X}^t \\ \overset{\circ\circ}{X} \end{matrix} \underline{Z}.$$

Observe-se agora que os vetores dos índices ambientais ajustados, e conseqüentemente os vetores de logaritmos  $\underline{Z}_1, \dots, \underline{Z}_m$ , foram obtidos a partir de conjuntos disjuntos de observações podendo pois admitir-se a independência destes vetores. Por outro lado como estes vetores, no caso completo têm o mesmo número de componentes estamos, então, no caso equilibrado. Neste caso, ver Scheffé (1959) & Ito (1980) a ANOVA e técnicas associadas são robustas relativamente á heterocedasticidade e ainda mais para a não normalidade.

Admitimos que os  $\underline{Z}_1, \dots, \underline{Z}_m$  são independentes, normais com vetores médios  $\underline{\mu}_1, \dots, \underline{\mu}_m$  a matriz da covariância  $\sigma^2 I_n$ . Assim

$$\underline{z} = \begin{bmatrix} \underline{z}_1 \\ \vdots \\ \underline{z}_m \end{bmatrix}$$

será normal com vetor médio

$$\underline{\mu} = \begin{bmatrix} \underline{\mu}_1 \\ \vdots \\ \underline{\mu}_m \end{bmatrix}$$

a matriz da covariância  $\sigma^2 I_{nm}$ .

Então o teorema de Gauss-Markov, ver por exemplo Mexia (1995) diz-nos que  $\tilde{\tau}$  é no

caso completo, normal com vetor médio  $\underline{\tau}^\circ$  a matriz de covariância  $\sigma^2 \begin{pmatrix} \circ & t & \circ \\ X & X & \end{pmatrix}^{-1}$  inde-

pendente de

$$S = \underline{Z}' \underline{Z} - \underline{Z}' \overset{\circ}{X} \overset{\circ}{\tilde{Z}}$$

que se distribui como o produto por  $\sigma^2$  dum qui-quadrado central com

$$g = nm - (n + m - 1) = (n - 1)(m - 1)$$

graus de liberdade.

### 4.3 Inferência

Na alínea anterior introduzimos um modelo linear para os logaritmos dos índices ambientais ajustados.

Vamos agora ver como realizar inferência para esse modelo. Começamos pela inferência para  $\sigma^2$ . Em primeiro lugar temos um estimador centrado

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{S}{g}$$

Podendo construir os intervalos de confiança de nível  $1 - q$  para  $\sigma^2$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{S}{x_{g, 1-q}^2}; \frac{S}{x_{g, q}^2} \right] \\ \left[ 0; \frac{S}{x_{g, q}^2} \right] \\ \left[ \frac{S}{x_{g, 1-q}^2}; +\infty \right] \end{array} \right.$$

onde  $x_{g,q}$  é o p-ésimo quantil de distribuição do qui-quadrado central com  $g$  graus de liberdade.

Estes intervalos permitem construir, por dualidade, testes de hipóteses bilateral, unilateral direito e unilateral esquerdo de nível  $q$  para

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$$

que rejeitam  $H_0$  quando  $\sigma_0^2$  não está contido no intervalo de confiança correspondente de nível  $1-q$ .

Por outro lado

$$U(\underline{b}) = (\underline{\tilde{\tau}}^0 - \underline{b}^t)' \begin{pmatrix} \overset{\circ}{X}^t & \overset{\circ}{X} \end{pmatrix} (\underline{\tilde{\tau}}^0 - \underline{b})$$

distribui-se, ver Mexia (1995) como o produto  $\sigma^2$  por um qui-quadrado com

$$n+m-1 = \text{car} \begin{pmatrix} \overset{\circ}{X}^t & \overset{\circ}{X} \end{pmatrix}$$

graus de liberdade e parâmetro de não centralidade

$$\delta = \frac{1}{\tau^2} (\underline{\tilde{\tau}}^0 - \underline{b}^t)' \begin{pmatrix} \overset{\circ}{X}^t & \overset{\circ}{X} \end{pmatrix}^{-1} (\underline{\tilde{\tau}}^0 - \underline{b})$$

$U(\underline{b}) \sim \tau^2 \chi_{n+m-1, \delta(\underline{b})}$  independentes de  $S$

Observe-se que se tem  $\delta = 0$  quando e só quando

$$H_0(\underline{b}): \underline{\tau}^\circ = \underline{b}$$

se verifica. Temos então para  $H_0(\underline{b})$  a estatística de teste  $F$ ,

$$f(\underline{b}) = \frac{g}{n+m-1} \frac{U(\underline{b})}{S}$$

Com  $n+m-1$  e  $g$  graus de liberdade e parâmetro de não centralidade  $\delta$  que só se anula quando  $\mathfrak{N}_0(\underline{b})$  se verifica pelo que este teste é, ver Mexia (1995), estritamente não distorcido.

Por outro lado, ver Mexia (1995),

$$U' = (\underline{\tilde{\tau}}' - \underline{\tilde{\tau}}^t)' \begin{pmatrix} \overset{\circ}{X}^t & \overset{\circ}{X} \end{pmatrix}^{-1} (\underline{\tilde{\tau}}' - \underline{\tilde{\tau}}^t)$$

distribui-se como o produto  $\sigma^2$  por um qui-quadrado central com  $n+m-1, g$  graus de liberdade independente de  $S$ .

Tem-se assim a variável pivot

$$F' = \frac{g}{n+m-1} \frac{U'}{S}$$

com distribuição F central com  $n+m-1$  e  $g$  graus de liberdade, sendo  $f_{1, nm-1, g}$  o p-essimo quantil dessa distribuição teremos,

$$pr\left(U' \leq (n+m-1) f_{1-q, n+m-1, g} \frac{\mathbf{S}}{\mathbf{g}}\right) = 1-q$$

,logo

$$\left(\underline{\tau}' - \tilde{\underline{\tau}}'\right) \left(\overset{\circ}{X}{}^t \overset{\circ}{X}\right)^{-1} \left(\underline{\tau}' - \tilde{\underline{\tau}}'\right) \leq k$$

com

$$k = (n+m-1) f_{1-q, n+m-1, g} \frac{\mathbf{S}}{\mathbf{g}}$$

será um elipsoide de confiança de nível  $1-q$  para  $\underline{\tau}^0$ . Observe-se que o teste  $F$  de nível  $q$  para  $H_0(\underline{b})$  rejeita a hipótese se e só se  $\underline{b}$  não estiver contido no elipsoide de confiança de nível  $1-q$ . Assim o teste  $F$  gozará de nulidade.

Seja

$$\underline{\psi} = A \underline{Z}'$$

com  $A$  uma matriz com vetores linha linearmente independentes. Para  $\underline{\psi}$  teremos o estimador



$$\underline{\tilde{\psi}} = A \underline{\tilde{z}}^0 \sim \mathcal{N} \left( \underline{\psi}, \sigma^2 A \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\mathbf{x}}^t & \overset{\circ}{\mathbf{x}} \end{pmatrix}^{-1} A^t \right)$$

independente de

$\mathbf{S} \sim \sigma^2 \chi_g^2$ . Interessa-nos estabelecer a

**Proposição 4.2**

A matriz  $A \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\mathbf{X}}^t & \overset{\circ}{\mathbf{X}} \end{pmatrix}^{-1} A^t$  é positiva definida com  $\text{car} \left( A \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\mathbf{X}}^t & \overset{\circ}{\mathbf{X}} \end{pmatrix}^{-1} A^t \right) = \text{car}(A)$ .

D: Como qualquer que seja  $\underline{z}, \underline{z}^t X^{\circ} X^{\circ} \underline{z} = \left\| \overset{\circ}{\mathbf{X}} \underline{z} \right\|^2 \geq 0$  a matriz  $\overset{\circ}{\mathbf{X}}^t \overset{\circ}{\mathbf{X}}$  é semi-definida positiva tendo-se, ver Silvey (1975)

$$\text{car} \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\mathbf{X}}^t & \overset{\circ}{\mathbf{X}} \end{pmatrix} = \text{car} \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\mathbf{X}} \end{pmatrix} = n + m - 1$$

logo dado esta matriz ser  $(n + m - 1) \times (n + m - 1)$  é definida positiva.

**Corolário**

O parâmetro de não centralidade

$$\delta(\underline{d}) = \frac{1}{\sigma^2} (\underline{\psi} - \underline{d})^t \left( A \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\mathbf{X}}^t & \overset{\circ}{\mathbf{X}} \end{pmatrix}^{-1} A^t \right) (\underline{\psi} - \underline{d})$$

anula-se se e só se

$$H_0(\underline{d}): \underline{\psi} = \underline{d}$$

se verificar.

Existe então uma matriz ortogonal  $P$  tal que

$$\begin{pmatrix} \overset{\circ}{X}^t & \overset{\circ}{X} \\ \overset{\circ}{X} & \overset{\circ}{X} \end{pmatrix}^{-1} = P^T D(r_1, \dots, r_{n+m-1}) P$$

com  $r_j > 0, j = 1, \dots, n+m-1$ . Assim ter-se-á

$$\begin{pmatrix} \overset{\circ}{X}^t & \overset{\circ}{X} \\ \overset{\circ}{X} & \overset{\circ}{X} \end{pmatrix}^{-1} = B^t B$$

com

$$B^t = P^t D \begin{pmatrix} \frac{1}{r_1^2} & & \\ & \dots & \\ & & \frac{1}{r_{n+m-1}^2} \end{pmatrix}$$

Matriz invertível visto ser o produto de matrizes invertíveis, logo,

$$\text{com } (A B^t) = \text{car}(A)$$

tendo-se ainda, ver Silvey (1975)

$$\text{car} \left( A \begin{pmatrix} \overset{\circ}{X}^t & \overset{\circ}{X} \\ \overset{\circ}{X} & \overset{\circ}{X} \end{pmatrix}^{-1} A^t \right) = \text{car}(A B^t B A^t) = \text{car}(A B^t) = \text{car}(A)$$

e como  $A \begin{pmatrix} \overset{\circ}{X}^t & \overset{\circ}{X} \\ \overset{\circ}{X} & \overset{\circ}{X} \end{pmatrix}^{-1} A^t$  tem números de linhas e colunas iguais ao número de linhas

de  $A$  é invertível e como também é semi-definida positiva é definida positiva.

Temos agora para  $H_0(\underline{d})$  a estatística de teste

$$f(\underline{d}) = \frac{g}{c} \frac{U(\underline{d})}{S}$$

com  $c$  e  $g$  graus de liberdade e parâmetro de não centralidade  $\delta(\underline{d})$  que se anula quando e só quando  $H_0(\underline{d})$  se verifica pelo que o teste é estritamente não distribuído.

Por outro lado com

$$U'' = (\underline{\tilde{\psi}} - \underline{\psi})^t \left( A \begin{pmatrix} \overset{\circ}{X} & \overset{\circ}{X} \\ \overset{\circ}{X} & \overset{\circ}{X} \end{pmatrix}^{-1} A^t \right)^{-1} (\underline{\tilde{\psi}} - \underline{\psi})$$

tem-se, tal como atrás, a variável pivot

$$F'' = \frac{g}{c} \frac{U''}{S}$$

com distribuição  $F$  central com  $c$  e  $g$  graus de liberdade que permite construir para  $\underline{\psi}$  o elipsoide de confiança de nível  $1-q$  dada por

$$(\underline{\psi} - \underline{\tilde{\psi}})^t \left( A \begin{pmatrix} \overset{\circ}{X} & \overset{\circ}{X} \\ \overset{\circ}{X} & \overset{\circ}{X} \end{pmatrix}^{-1} A^t \right)^{-1} (\underline{\psi} - \underline{\tilde{\psi}}) \leq c f_{1-q, c, g} \frac{S}{g} .$$

À semelhança do que vimos atrás, os testes  $F$  para  $H_0(\underline{d})$  gozam de dualidade já que esta hipótese é rejeitada pelo teste de nível  $q$  se e só se o elipsoide de confiança de nível  $1-q$  não contiver  $\underline{d}$ .

Aplicando-se o teorema de Scheffé obtemos para os

$$\rho(\underline{d}) = \underline{d}^t \underline{\psi}$$

os intervalos de confiança com nível de confiança conjunto  $1-q$

$$\left[ \underline{d}^t \underline{\tilde{\psi}} - \sqrt{c f_{1-q, c, g} \underline{d}^t A \begin{pmatrix} \overset{\circ}{X} & \overset{\circ}{X} \\ \overset{\circ}{X} & \overset{\circ}{X} \end{pmatrix}^{-1} A^t \underline{d} \frac{S}{g}}; \quad \underline{d}^t \underline{\tilde{\psi}} + \sqrt{c f_{1-q, c, g} \underline{d}^t A \begin{pmatrix} \overset{\circ}{X} & \overset{\circ}{X} \\ \overset{\circ}{X} & \overset{\circ}{X} \end{pmatrix}^{-1} A^t \underline{d} \frac{S}{g}} \right]$$

e, se

$$\sqrt{c f_{1-q, c, g} \underline{d}^t A \begin{pmatrix} \overset{\circ}{X} & \overset{\circ}{X} \\ \overset{\circ}{X} & \overset{\circ}{X} \end{pmatrix}^{-1} A^t \underline{d} \frac{S}{g}} < \left| \underline{d}^t \underline{\tilde{\psi}} - h \right|$$

,  $\underline{d}^t \underline{\tilde{\psi}}$  será significativamente diferente de  $h$  ao nível  $q$ .

Em particular os vetores  $\psi$  podem ter uma componente

$$\psi = \underline{a}' \underline{\tilde{\tau}}^\circ$$

tendo-se o estimador

$$\tilde{\psi} = \underline{a}' \underline{\tilde{\tau}}^\circ \sim \mathfrak{N} \left( \psi, \sigma^2 \underline{a}' \left( \overset{\circ}{X} \overset{\circ}{X} \right)^{-1} \underline{a} \right)^{-1}$$

, independente de  $S \sim \sigma^2 \chi_g^2$ .

Para testar

$$H_0(\underline{d}): \psi = d$$

temos o teste  $t$  com estatística

$$t = \frac{\tilde{\psi} - d}{\sqrt{dk}}$$

com

$$k = \underline{a}' \left( \overset{\circ}{X} \overset{\circ}{X} \right)^{-1} \underline{a}.$$

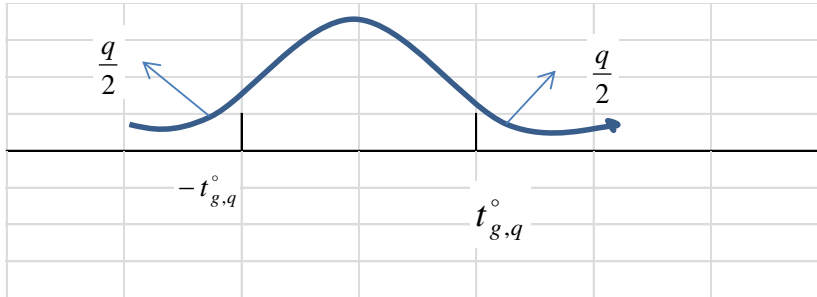
Este teste tem  $g$  graus de liberdade e encontra-se associado á variável pivot

$$t' = \frac{\tilde{\psi} - \psi}{\sqrt{k \frac{S}{g}}}$$

que tem distribuição  $t$  central com  $g$  graus de liberdade.

Para a distribuição o  $t$  central com  $g$  graus de liberdade tem-se, ver a fig. 2

Fig. 2: Distribuição  $t$  central



sendo as caudas com probabilidades  $\frac{q}{2}$  limitadas por  $-t_{g,q}^{\circ}$  e  $t_{g,q}^{\circ}$ . Observe-se que

$t_{g,q}^{\circ}$  é o  $\left(1 - \frac{q}{2}\right)$ -*esimo* quantil desta distribuição. Tem-se então para  $\psi$  o intervalo de confiança de nível  $1 - q$  limitado simetricamente dos dois lados

$$\left[ \tilde{\psi} - t_{g,q}^{\circ} \sqrt{k \frac{S}{g}} ; \tilde{\psi} + t_{g,q}^{\circ} \sqrt{k \frac{S}{g}} \right].$$

À semelhança dos testes  $F$ , o teste  $t$  bilateral goza de dualidade já que, ao nível  $q$ ,  $H_0(\underline{d})$  é rejeitada se e só se  $d$  não estiver contido no intervalo de confiança bilateral de nível  $1 - q$ .

Teremos ainda o intervalo de confiança, de nível  $1 - q$

$$\left[ \tilde{\psi} - t_{g,2q}^{\circ} \sqrt{k \frac{S}{g}} ; +\infty \right]$$

$$\left[ -\infty ; \tilde{\psi} + t_{g,2q}^{\circ} \sqrt{k \frac{S}{g}} \right]$$

limitados á direita e á esquerda que podem ser utilizados para mostrar que os testes  $t$  unilaterais não são distorcidos,

$$\text{com } k = \underline{a}^t \left( \overset{\circ}{X} \overset{\circ}{X} \right)^{-1} \underline{a}.$$

Em particular as componentes únicas de  $\psi$  pode ser um dos parâmetros do modelo. Se se tratar da  $j$ -ésima componente de  $\psi$ ,  $\underline{a}$  terá como única componente não nula a  $j$ -ésima que será igual a 1 e será o  $j$ -ésimo elemento principal da matriz  $\begin{pmatrix} \overset{\circ}{X}^t & \overset{\circ}{X} \end{pmatrix}^{-1}$ .

Assim com

$$\begin{pmatrix} \overset{\circ}{X}^t & \overset{\circ}{X} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} w_{1,1} \cdots & w_{1,n+m-1} \\ \vdots & \vdots \\ w_{n+m-1,1}, \cdots & w_{n+m-1,n+m-1} \end{bmatrix}$$

, tem-se

$$\underline{a}^t \begin{pmatrix} \overset{\circ}{X}^t & \overset{\circ}{X} \end{pmatrix}^{-1} \underline{a} = w_{j,j}, j = 1, \dots, n+m-1 .$$

Teremos então intervalos de confiança para a  $j$ -ésimo parâmetro de

$$\underline{\tau}^{\circ} = \begin{bmatrix} v \\ \underline{l}^{\circ} \\ \underline{\lambda}^{\circ} \end{bmatrix}$$

tendo-se

$$\begin{cases} \tau_1^{\circ} = v \\ \tau_j^{\circ} = l_{j-1}^{\circ}, j = 1, \dots, n \\ \tau_j^{\circ} = \lambda_{j-n}^{\circ}, j = n+1, \dots, n+m-1 . \end{cases}$$

Até agora temos admitido estar no caso completo. Quando se sai deste caso terá de se substituir  $\overset{\circ}{X}$  por  $\overset{\circ\circ}{X}$  e a matriz  $\overset{\circ\circ}{X}^t \overset{\circ\circ}{X}$  pode não ser invertível, então  $\begin{pmatrix} \overset{\circ\circ}{X}^t & \overset{\circ\circ}{X} \end{pmatrix}^{-1}$  terá

de ser substituída por  $\begin{pmatrix} \overset{\circ\circ}{X}^t & \overset{\circ\circ}{X} \end{pmatrix}^+$  tende-se

$$w = \text{car} \begin{pmatrix} \overset{\circ\circ}{X}^t & \overset{\circ\circ}{X} \end{pmatrix}^+ < n+m-1$$

e os parâmetros de não centralidade podem ser nulos sem que se verifique a correspondente hipótese testado. Assim os testes  $F$  deixarão de ser estritamente não distorcidos embora sejam não distorcidos já que quando se verificam as hipóteses a testar, os parâmetros de não centralidade

$$\begin{cases} \delta(\underline{b}) = \frac{1}{\sigma^2} (\underline{\psi}^\circ - \underline{b})' \left( \overset{\circ\circ}{X^t} \overset{\circ\circ}{X} \right)^+ (\underline{\tau}^\circ - \underline{b}) \\ \delta(\underline{d}) = \frac{1}{\sigma^2} (\underline{\psi}^\circ - \underline{d})' \left( \overset{\circ\circ}{X^t} \overset{\circ\circ}{X} \right)^+ (\underline{\tau}^\circ - \underline{d}) \end{cases}$$

são nulos.

#### 4.4 Análise da variância

Nesta alínea vamos ver como aplicar a análise da variância no caso completo. Tomemos

$$\begin{cases} J_r = 1_r 1_r' \\ K_r = I_r - \frac{1}{r} J_r \end{cases}$$

, vê-se facilmente que  $\frac{1}{r} J_r$  e que  $K_r$  são matrizes simétricas e indempotentes sendo portanto matrizes de projeção ortogonal mutuamente ortogonais já que

$$\frac{1}{r} J_r K_r = K_r \frac{1}{r} J_r = 0_{r \times r}$$

As matrizes de projeção ortogonal mutuamente ortogonais estão associadas a partições ortogonais de sub-espacos. No nosso modelo teremos

$$\begin{cases} Q_1 = \frac{1}{n} J_n \otimes \frac{1}{m} J_m \\ Q_2 = K_n \otimes \frac{1}{m} J_m \\ Q_3 = \frac{1}{n} J_n \otimes K_m \\ Q_4 = K_n \otimes K_m \end{cases}$$

com espacos imagem  $\nabla_1, \nabla_2, \nabla_3$  e  $\nabla_4$  mutuamente ortogonais.

O espaço imagem  $\Omega^0 = R(X^\circ)$  de  $X^\circ$  tem a partição ortogonal

$$\Omega^0 = \bigoplus_{j=1}^4 \nabla_j$$

Se os vetores linha duma matriz  $A$  constituem uma base ortonormada para  $\nabla = R(K)$  ter-se-á

$$\begin{cases} A^t A = K \\ AA^t = I_h \end{cases}$$

com

$$h = \text{car}(K) = \text{car}(A) = \dim(R(A)).$$

No nosso caso termos as matrizes

$$\begin{cases} A_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} 1_n^t \otimes \frac{1}{\sqrt{m}} 1_m^t \\ A_2 = W_n \otimes \frac{1}{\sqrt{m}} 1_m^t \\ A_3 = \frac{1}{\sqrt{n}} 1_m^t \otimes W_m \\ A_4 = W_m \otimes W_m \end{cases} ; \quad \begin{cases} h_1 = 1 \\ h_2 = n-1 \\ h_3 = m-1 \\ h_4 = (n-1)(m-1) \end{cases}$$

onde, como vimos  $W_r$  é obtida eliminando a primeira linha igual a  $\frac{1}{\sqrt{r}} 1_r^t$ , duma matriz ortogonal (estandarizada)  $P_r^\circ$ ,  $r \times r$ .

Obtidos as matrizes  $A_j$ ,  $j=1,2,3,4$  calculem-se os

$$S_j = \|A_j \underline{Z}\|^2, j=1,2,3,4$$

caso se admite ter-se

$$\underline{Z} \sim \mathcal{N}(\underline{\lambda}, \sigma^2 1_{nm})$$

tem-se, ver Mexia (1995)  $S_j \sim \sigma^2 \chi_{h_j, \delta_j}^2$ ,  $j=1,2,3,4$  com

$$\delta_j = \|A_j \underline{\lambda}\|^2, j=1,2,3,4$$



As hipóteses que nos interessa testar relativas a efeitos de locais e de culturas podem ser escritas como

$$H_{0,j} : A_j \underline{\lambda} = 0, j = 2,3$$

ou equivalentemente como

$$H_{0,j} : \delta_j = 0, j = 2,3$$

temos agora a

### **Proposição 4.3**

As estatísticas

$$F_j = \frac{h_4}{h_j} \frac{S_j}{S_4}, j = 2,3$$

têm distribuição  $F$  com  $h_j$  e  $h_4$  graus de liberdade e parâmetros de não centralidade  $\delta_j$  que se anulam quando e só quando  $H_{0,j} : \delta_j = 0, j = 2,3$  se verifica.

D: os vetores  $A_j \underline{Z}$  e  $A_4 \underline{Z}$  tem matriz de covariância cruzada

$$A_j (\sigma^2 I_{nm}) A_y^t = \sigma^2 A_j A_y^t = 0_{k_j \times h_y}, j = 2,3$$

já que como é fácil verificar, as matrizes  $A_j A_4^t, j = 2,3$  são nulas. Ora os vetores  $A_j \underline{Z}$  e  $A_4 \underline{Z}$  têm distribuições conjunta normal,  $j = 2,3$ , já que

$$\begin{bmatrix} A_j \underline{Z} \\ A_y \underline{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_j \\ A_y \end{bmatrix} \underline{Z}, j = 2,3$$

tendo matriz de covariância cruzada nula, esses vetores são independentes, logo  $S_j$  e  $S_4$  são independentes  $j = 2,3$ . Como

$$\underline{\lambda} \in R(X^\circ) = \bigoplus_{j=1}^3 R(A_j^t)$$

tem-se

$$A_4 \underline{\lambda} = 0,$$

logo  $\delta_4 = 0$ . Assim tem-se  $S_j \sim \sigma^2 \chi_{h_j, \delta_j}^2, j=1,2,3$  independente de  $S_4 \sim \sigma^2 \chi_{h_4, 0}^2, j$  donde resulta a parte da tese relativos às distribuições das estatísticas. A parte relativo aos parâmetros da não centralidade resulta diretamente da expressão desses parâmetros.

Observe-se que, com

$$\underline{\psi}_j = A_j \underline{\lambda}, j = 2,3$$

as hipóteses que estamos a considerar podem ser rescritas como

$$H_{0,j} : \underline{\psi}_j = 0, j = 2,3$$

tratando-se pois de um caso particular de hipóteses consideradas na coluna precedente. O que regularize o tratamento desta seção é ele assentar na partição ortogonal de  $R^{nm}$  nos espaços imagens das  $A_j, j=1,2,3,4$ .

No caso completo a análise pode ser simplificada resolvendo o problema através duma análise da variância com dois fatores sem interação.

Sejam

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{0,i} = \sum_{j=1}^n z_{i,j}, i = 1, \dots, m \\ T_{0,j} = \sum_{i=1}^m z_{i,j}, j = 1, \dots, m \\ T_{0,0} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n z_{i,j} \end{array} \right.$$

O que nos permite calcular a soma dos quadrados

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1^0 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n z_{i,j}^2 \\ S_2^0 = \sum_{i=1}^m \frac{T_{0,i}^2}{n} \\ S_3^0 = \sum_{j=1}^m \frac{T_{0,j}^2}{m} \\ S_4^0 = \frac{T_{0,0}^2}{nm} \end{array} \right.$$

a partir daí construir a tabela da ANOVA.

**Tabela2: Quadro resumo da ANOVA**

Origem da variação	Soma de Quadrados	Graus de liberdade	Quadrado médio	Teste F
Locais	$s_1^0 = S_2^0 - S_4^0$	$(m-1)$	$Q_1^0 = \frac{s_1^0}{m-1}$	$F_1 = \frac{s_1^0}{s_E}$
Culturas	$s_2^0 = S_3^0 - S_4^0$	$(n-1)$	$Q_2^0 = \frac{s_2^0}{n-1}$	$F_1 = \frac{s_2^0}{s_E}$
Erro	$s_E^0 = S_1^0 - S_2^0 - S_3^0 + S_4^0$	$(n-1)(m-1)$	$Q_E^0 = \frac{s_E^0}{(n-1)(m-1)}$	

Se  $F_1[F_2]$  é significativo ao nível  $q$  e  $m > 2[n > 2]$  diferirão significativamente a esse nível os pares  $(i, i')[(j, j')]$  tais que

$$|T_{i_0} - T_{i'_0}| > \sqrt{m-1 f_{1-q, n-1, (m-1)(n-1)} \frac{s_E^0}{(m-1)(n-1)}}$$

$$|T_{j_0} - T_{j'_0}| > \sqrt{n-1 f_{1-q, n-1, (n-1)(m-1)} \frac{s_E^0}{(m-1)(n-1)}} .$$

#### 4.5 Zonagem agrícola

Quando se utiliza um modelo deste os locais têm de ser identificados como estações experimentais de forma a poder ter-se várias culturas no mesmo local.

Ora, as estações experimentais devem ser representantes das regiões em que estão implantadas. Pode-se pois pensar em agrupar regiões contíguas com efeito de local semelhante. Obtém-se assim uma contribuição para a Zonagem agrícola para as culturas utilizadas ou mesmo para o grupo de culturas a que estas pertencem.

## 5 Aplicações

### 5.1 Generalidades

Esta aplicação está centrada no modelo logarítmico. Assim foi preciso encontrar um caso em que, para mais duma cultivar, se tivesse para pelo menos um ano, ensaios nos mesmos locais. Fomos assim levados a identificar locais com estação experimentais admitindo que as mesmas eram suficientemente homogéneas. Convém desde já referir a dificuldade que encontramos em conseguir dados convenientes. Felizmente o Instituto Central de Melhoramento Vegetal da República Checa muito amavelmente forneceu-nos dados adequados. Da sorte de se identificarmos estações experimentais com os locais resulta, o ter de para cada cultura estudada trabalhar para o mesmo conjunto de cultivares para todos os locais, caso contrário embora se pudesse recorrer ao algoritmo de zig zag, os estimadores dos índices ambientais poderiam estar “contaminados” pela variação dos cultivares utilizada de local para local. Esta condição implica por sua vez que o conjunto dos cultivares comuns a todos os locais não seja demasiado reduzido. Como veremos os dados relativos a *cevada* e *trigo* com que trabalhamos satisfazem esta exigência do conjunto comum de cultivares não ser demasiado reduzido.

Se se tiverem resultados para cada cultura relativos a vários anos nos mesmos locais comuns verifica pelo menos para certos locais, o bom comportamento da ACR de forma a poder-se acertar a precisão dos estimadores com que se trabalha.

### 5.2 Análise conjunta de regressões

Os dados que utilizaremos referem-se á cultura de *cevada* e *trigo* nos anos de 2004,2005,2006,2007 e 2008. Os mesmos foram conduzidos em 9 estações experimentais com os códigos,

BR, CAS, HE, HRA, CHT, UHO, LED, LIP e VER

Para todos os pares locais x cultura aplicamos a ACR apresentando-se nas tabelas **3a** e **3b** os coeficientes ajustados e os valores dos ajustamentos.

Tabela3a: Regressões para cultura da cevada

Barley	ZONAS/LOCAIS																										
	BR			CAS			HE			HRA			CHT			UHO			LED			LIP			VER		
	Rgressões lineares			Rgressões lineares			Rgressões lineares			Rgressões lineares			Rgressões lineares			Rgressões lineares			Rgressões lineares			Rgressões lineares			Rgressões lineares		
Cultivar	$\tilde{\alpha}_j$	$\tilde{\beta}_j$	$R_j^2$	$\tilde{\alpha}_j$	$\tilde{\beta}_j$	$R_j^2$	$\tilde{\alpha}_j$	$\tilde{\beta}_j$	$R_j^2$	$\tilde{\alpha}_j$	$\tilde{\beta}_j$	$R_j^2$	$\tilde{\alpha}_j$	$\tilde{\beta}_j$	$R_j^2$	$\tilde{\alpha}_j$	$\tilde{\beta}_j$	$R_j^2$	$\tilde{\alpha}_j$	$\tilde{\beta}_j$	$R_j^2$	$\tilde{\alpha}_j$	$\tilde{\beta}_j$	$R_j^2$	$\tilde{\alpha}_j$	$\tilde{\beta}_j$	$R_j^2$
1020062	,062	,967	<b>0,94</b>	,778	,854	<b>0,94</b>	-,749	1,088	<b>0,97</b>	,017	,949	<b>0,93</b>	,156	,930	<b>0,98</b>	-,189	,998	<b>0,98</b>	,032	,925	<b>0,92</b>	-,099	,969	<b>0,68</b>	-,159	,990	<b>0,76</b>
1020130	1,857	,620	<b>0,74</b>	-,945	1,058	<b>0,82</b>	-,734	1,026	<b>0,95</b>	-,1344	1,131	<b>0,94</b>	,037	,898	<b>0,95</b>	,056	,977	<b>0,98</b>	,671	,881	<b>0,94</b>	-,1620	1,250	<b>0,83</b>	-,3539	1,348	<b>0,69</b>
1020183	-,152	1,015	<b>0,96</b>	-,1434	1,160	<b>0,87</b>	,013	,951	<b>0,80</b>	-,664	1,064	<b>0,88</b>	-,286	1,031	<b>0,97</b>	,850	,765	<b>0,96</b>	,504	,893	<b>0,90</b>	-,2022	1,326	<b>0,87</b>	-,5743	1,650	<b>0,76</b>
1020197	,092	,977	<b>0,96</b>	2,267	,666	<b>0,86</b>	,172	,936	<b>0,89</b>	-,453	1,031	<b>0,96</b>	,218	,921	<b>0,90</b>	,143	,975	<b>0,95</b>	,149	,962	<b>0,96</b>	-,639	1,101	<b>0,93</b>	,026	,971	<b>0,81</b>
5073863	,202	1,016	<b>0,96</b>	,504	,977	<b>0,98</b>	,889	,863	<b>0,92</b>	1,949	,681	<b>0,84</b>	,218	,921	<b>0,95</b>	-,146	1,053	<b>0,97</b>	-,219	1,043	<b>0,91</b>	-,043	,980	<b>0,81</b>	2,701	,657	<b>0,42</b>
5075152	-,414	1,090	<b>0,97</b>	-,1746	1,242	<b>0,95</b>	-,2089	1,279	<b>0,96</b>	-,621	1,123	<b>0,90</b>	-,916	1,110	<b>0,97</b>	-,445	1,077	<b>0,95</b>	-,430	1,061	<b>0,95</b>	-,3284	1,572	<b>0,95</b>	-,886	1,108	<b>0,52</b>
5075648	-,024	1,000	<b>0,94</b>	-,433	1,076	<b>0,97</b>	,967	,898	<b>0,97</b>	1,260	,806	<b>0,91</b>	,389	,964	<b>0,98</b>	,176	1,022	<b>0,98</b>	-,140	1,028	<b>0,91</b>	1,893	,728	<b>0,79</b>	,978	,914	<b>0,75</b>
5075649	,144	,954	<b>0,91</b>	1,668	,751	<b>0,83</b>	,907	,928	<b>0,93</b>	-,499	1,072	<b>0,92</b>	-,596	1,087	<b>0,96</b>	-,322	1,020	<b>0,93</b>	,465	,927	<b>0,96</b>	,980	,761	<b>0,80</b>	,073	1,014	<b>0,94</b>
5075684	,780	,889	<b>0,93</b>	1,465	,833	<b>0,88</b>	1,044	,861	<b>0,88</b>	1,120	,785	<b>0,91</b>	,205	,941	<b>0,94</b>	,206	,963	<b>0,94</b>	-,772	1,120	<b>0,96</b>	,213	,991	<b>0,93</b>	3,480	,611	<b>0,42</b>
5075710	-,742	1,117	<b>0,96</b>	-,190	1,015	<b>0,96</b>	-,1079	1,128	<b>0,94</b>	-,568	1,167	<b>0,92</b>	,658	,992	<b>0,93</b>	,061	,949	<b>0,93</b>	-,150	1,057	<b>0,94</b>	2,763	,626	<b>0,43</b>	,246	,997	<b>0,68</b>
5076209	-,1743	1,338	<b>0,92</b>	-,1051	1,205	<b>0,98</b>	,723	,974	<b>0,90</b>	1,002	,883	<b>0,94</b>	,267	1,033	<b>0,95</b>	-,510	1,178	<b>0,97</b>	-,241	1,101	<b>0,96</b>	2,871	,521	<b>0,39</b>	-,1587	1,243	<b>0,77</b>
5076389	-,081	1,016	<b>0,94</b>	-,882	1,163	<b>0,98</b>	-,065	1,068	<b>0,93</b>	-,1199	1,306	<b>0,92</b>	-,266	1,072	<b>0,93</b>	,120	1,022	<b>0,94</b>	,132	1,003	<b>0,92</b>	-,1011	1,175	<b>0,95</b>	4,408	,496	<b>0,44</b>

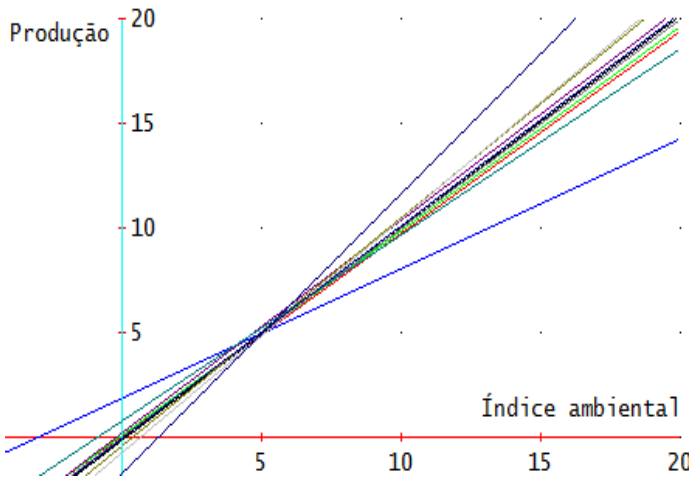
Tabela 3b: Regressões para cultura do trigo

wheat	ZONAS/LOCAIS																										
	BR			CAS			HE			HRA			CHT			UHO			LED			LIP			VER		
	Rgressões lineares			Rgressões lineares			Rgressões lineares			Rgressões lineares			Rgressões lineares			Rgressões lineares			Rgressões lineares			Rgressões lineares			Rgressões lineares		
Cultivar	$\tilde{\alpha}_j$	$\tilde{\beta}_j$	$R_j^2$	$\tilde{\alpha}_j$	$\tilde{\beta}_j$	$R_j^2$	$\tilde{\alpha}_j$	$\tilde{\beta}_j$	$R_j^2$	$\tilde{\alpha}_j$	$\tilde{\beta}_j$	$R_j^2$	$\tilde{\alpha}_j$	$\tilde{\beta}_j$	$R_j^2$	$\tilde{\alpha}_j$	$\tilde{\beta}_j$	$R_j^2$	$\tilde{\alpha}_j$	$\tilde{\beta}_j$	$R_j^2$	$\tilde{\alpha}_j$	$\tilde{\beta}_j$	$R_j^2$	$\tilde{\alpha}_j$	$\tilde{\beta}_j$	$R_j^2$
1090020	1,320	,816	<b>0,90</b>	1,860	,700	<b>0,53</b>	-,790	1,099	<b>0,86</b>	1,971	,753	<b>0,75</b>	,335	,891	<b>0,90</b>	1,944	,739	<b>0,81</b>	3,707	,508	<b>0,67</b>	,797	,839	<b>0,84</b>	3,587	,519	<b>0,37</b>
1090155	1,198	,834	<b>0,92</b>	,173	,900	<b>0,79</b>	,883	,878	<b>0,81</b>	1,669	,818	<b>0,82</b>	-,2295	1,223	<b>0,94</b>	-,013	1,002	<b>0,96</b>	1,971	,751	<b>0,84</b>	-,170	1,059	<b>0,83</b>	3,612	,617	<b>0,73</b>
5073662	-,070	,994	<b>0,86</b>	-,2846	1,320	<b>0,90</b>	1,129	,894	<b>0,91</b>	-,1330	2,350	<b>0,94</b>	,064	,951	<b>0,77</b>	,224	,943	<b>0,83</b>	-,3012	1,317	<b>0,90</b>	-,8350	2,055	<b>0,91</b>	-,1760	1,223	<b>0,79</b>
5073670	-,658	1,059	<b>0,93</b>	2,758	,730	<b>0,80</b>	-,1411	1,117	<b>0,88</b>	5,134	,465	<b>0,60</b>	,704	,992	<b>0,92</b>	-,1887	1,201	<b>0,94</b>	-,2517	1,286	<b>0,92</b>	4,935	,314	<b>0,24</b>	-,7288	1,848	<b>0,76</b>
5073677	,666	,990	<b>0,92</b>	5,421	,523	<b>0,58</b>	1,803	,867	<b>0,97</b>	3,241	,680	<b>0,70</b>	-,289	1,051	<b>0,92</b>	-,153	1,058	<b>0,91</b>	,065	1,027	<b>0,92</b>	1,212	,898	<b>0,77</b>	1,320	,886	<b>0,55</b>
5073687	-,1268	1,159	<b>0,94</b>	7,657	,301	<b>0,17</b>	,858	,900	<b>0,91</b>	-,10641	2,086	<b>0,87</b>	1,152	,886	<b>0,84</b>	1,057	,959	<b>0,90</b>	,912	,947	<b>0,90</b>	-,8690	2,155	<b>0,89</b>	-,5281	1,514	<b>0,78</b>
5074948	-,579	1,071	<b>0,95</b>	4,214	,610	<b>0,72</b>	-,1278	1,169	<b>0,98</b>	5,654	,410	<b>0,50</b>	,655	,953	<b>0,91</b>	2,039	,779	<b>0,87</b>	2,612	,769	<b>0,72</b>	2,713	,689	<b>0,45</b>	-,2351	1,240	<b>0,88</b>
5074957	-,031	1,029	<b>0,94</b>	-,1901	1,171	<b>0,87</b>	,394	,942	<b>0,90</b>	2,379	,737	<b>0,72</b>	1,827	,809	<b>0,93</b>	-,451	1,049	<b>0,94</b>	-,1147	1,101	<b>0,87</b>	1,102	,804	<b>0,73</b>	-,1467	1,176	<b>0,82</b>
5075007	,608	,966	<b>0,93</b>	-,988	1,137	<b>0,87</b>	-,832	1,136	<b>0,91</b>	5,739	,407	<b>0,60</b>	-,317	1,040	<b>0,92</b>	-,280	1,021	<b>0,94</b>	-,793	1,159	<b>0,87</b>	1,575	,792	<b>0,67</b>	,876	,935	<b>0,65</b>
5075051	,608	,966	<b>0,93</b>	-,8690	1,874	<b>0,95</b>	-,1836	1,160	<b>0,81</b>	-,2373	1,239	<b>0,95</b>	-,1925	1,171	<b>0,89</b>	-,1566	1,158	<b>0,93</b>	-,1014	1,089	<b>0,93</b>	-,4461	1,541	<b>0,95</b>	-,8069	1,781	<b>0,83</b>
5075548	-,1610	1,175	<b>0,98</b>	,842	1,004	<b>0,65</b>	-,1792	1,183	<b>0,94</b>	2,898	,748	<b>0,63</b>	1,064	,897	<b>0,94</b>	-,2255	1,316	<b>0,96</b>	,419	1,021	<b>0,96</b>	4,921	,338	<b>0,46</b>	3,948	,594	<b>0,28</b>
5076066	-,1222	1,172	<b>0,95</b>	,724	,870	<b>0,41</b>	-,616	1,081	<b>0,87</b>	-,14922	2,601	<b>0,90</b>	-,2444	1,323	<b>0,93</b>	,098	,984	<b>0,87</b>	-,615	1,094	<b>0,90</b>	-,10988	2,572	<b>0,94</b>	5,065	,496	<b>0,21</b>
5076078	1,282	,852	<b>0,97</b>	,870	,933	<b>0,87</b>	,154	1,003	<b>0,94</b>	5,616	,364	<b>0,31</b>	-,1016	1,090	<b>0,97</b>	1,389	,824	<b>0,82</b>	1,630	,805	<b>0,90</b>	-,961	1,054	<b>0,78</b>	6,720	,259	<b>0,08</b>
5076092	1,555	,816	<b>0,92</b>	-,6274	1,554	<b>0,69</b>	-,829	1,071	<b>0,93</b>	3,565	,627	<b>0,60</b>	2,114	,782	<b>0,86</b>	-,572	1,029	<b>0,95</b>	-,860	1,089	<b>0,97</b>	5,632	,224	<b>0,26</b>	-,1357	1,161	<b>0,83</b>
5076105	-,449	1,070	<b>0,87</b>	-,3761	1,385	<b>0,87</b>	,974	,874	<b>0,76</b>	1,359	,939	<b>0,64</b>	-,512	1,066	<b>0,92</b>	,026	1,001	<b>0,90</b>	-,800	1,043	<b>0,74</b>	2,647	,746	<b>0,56</b>	-,3616	1,421	<b>0,82</b>
5076112	-,170	,986	<b>0,96</b>	-,062	,989	<b>0,70</b>	,581	,943	<b>0,92</b>	2,041	,776	<b>0,65</b>	,883	,874	<b>0,87</b>	,399	,938	<b>0,87</b>	-,558	,993	<b>0,83</b>	8,085	-,079	<b>0,17</b>	6,062	,329	<b>0,22</b>

Apresentam-se em seguida os correspondentes contornos superiores também para os pares *local x cultivar*.

❖ 1.Cultura da cevada( Barley)

Fig.3 Regressões no local BR



$$=0.062+0.967 \cdot x : (1020062)$$

$$=1.857+0.62 \cdot x : (1020130)$$

$$=-0.152+1.015 \cdot x : (1020183)$$

$$=0.092+0.977 \cdot x : (1020187)$$

$$=0.202+1.016 \cdot x : (5073863)$$

$$=-0.414+1.09 \cdot x : (5075152)$$

$$=-0.024+1 \cdot x : (5075648)$$

$$=0.144+954 \cdot x : (5075649)$$

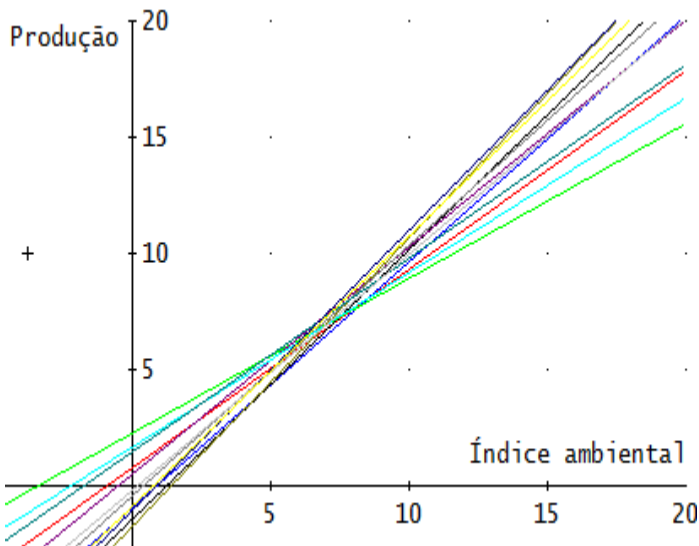
$$=0.78+0.889 \cdot x : (5075684)$$

$$=-0.742+1.117 \cdot x : (5075710)$$

$$=-1.743+1.338 \cdot x : (5076209)$$

$$=-0.061+1.016 \cdot x : (5076389)$$

Fig.4 Regressões no local CAS



$$=0.778+0.854 \cdot x : (102062)$$

$$=-0.945+1.058 \cdot x : (1020130)$$

$$=-1.434+1.16 \cdot x : (1020183)$$

$$=2.268+0.666 \cdot x : (1020197)$$

$$=0.504+0.977 \cdot x : (5073863)$$

$$=-1.748+1.242 \cdot x : (5075152)$$

$$=-0.433+1.078 \cdot x : (5075648)$$

$$=1.668+0.751 \cdot x : (5075649)$$

$$=1.465+0.833 \cdot x : (5075684)$$

$$=-0.19+1.015 \cdot x : (5075710)$$

$$=-1.051+1.205 \cdot x : (5076209)$$

$$=-0.882+1.163 \cdot x : (5076389)$$

Fig.5 Regressões no local HE

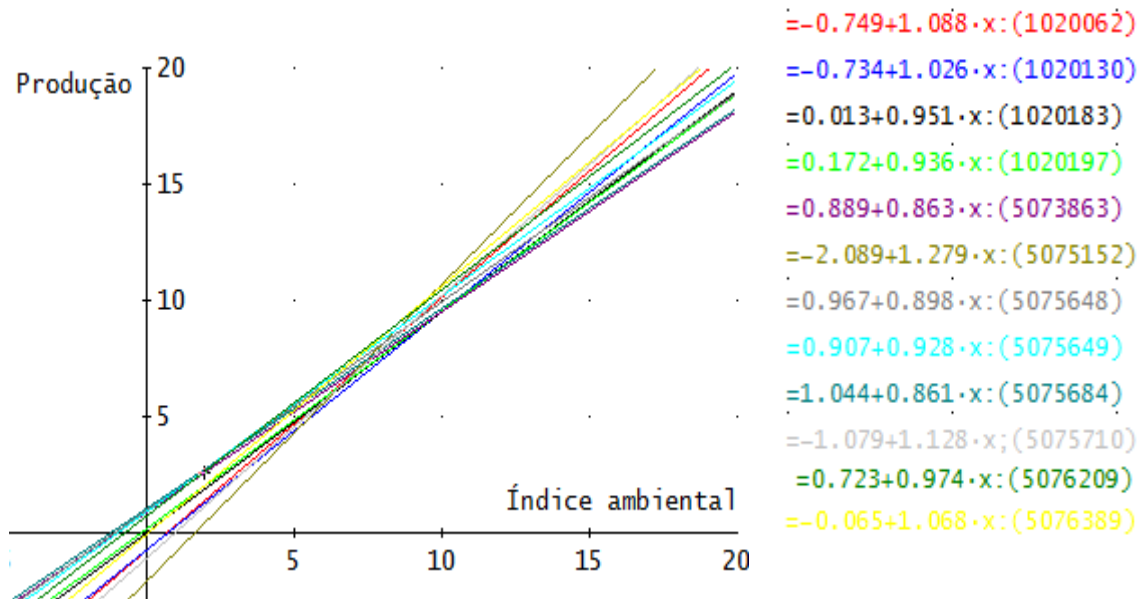


Fig.6 Regressões no local HRA

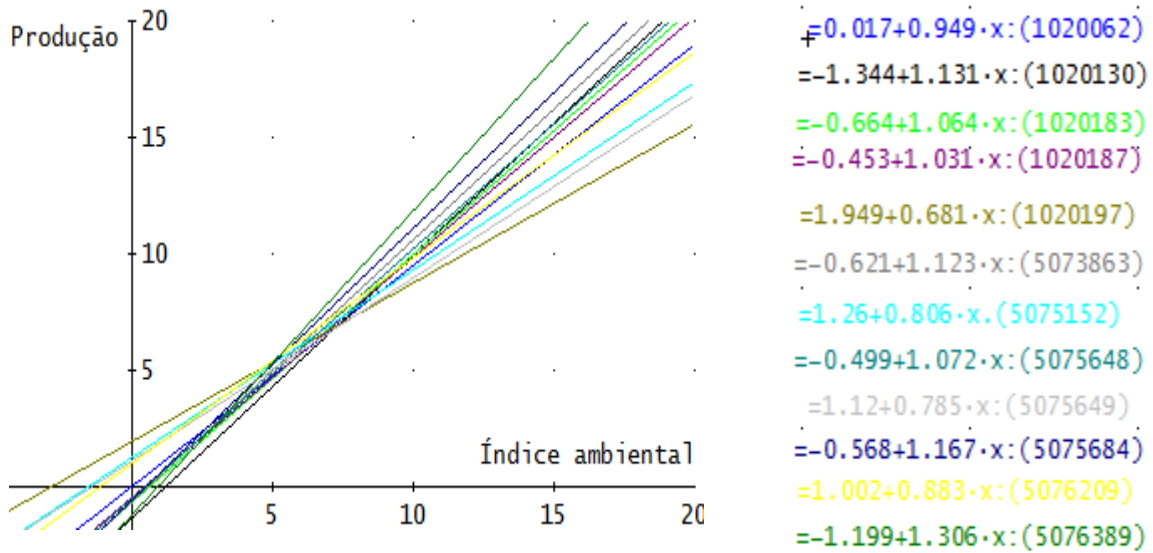
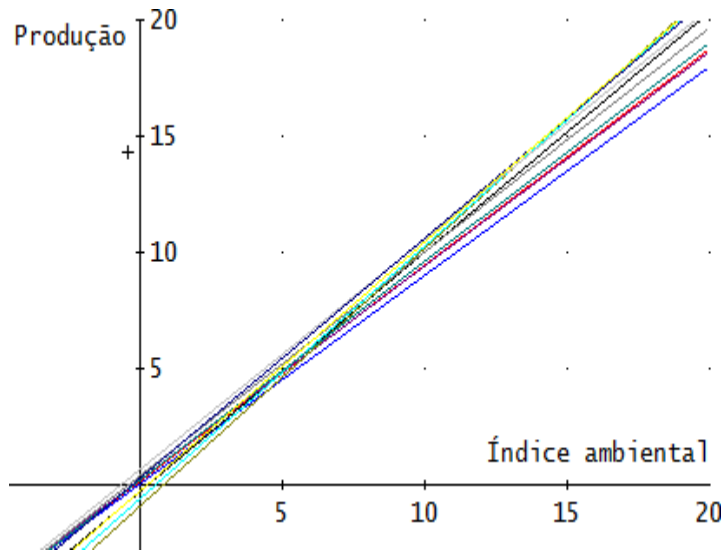




Fig.7 Regressões no local CHT



$$=0.156+0.93 \cdot x: (1020062)$$

$$=0.037+0.898 \cdot x: (1020130)$$

$$=-0.286+1.031 \cdot x: (1020183)$$

$$=0.218+0.921 \cdot x: (1020197)$$

$$=0.218+0.921 \cdot x: (5073863)$$

$$=-0.916+1.11 \cdot x: (5075152)$$

$$=0.389+0.964 \cdot x: (5075648)$$

$$=-0.596+1.087 \cdot x: (5075649)$$

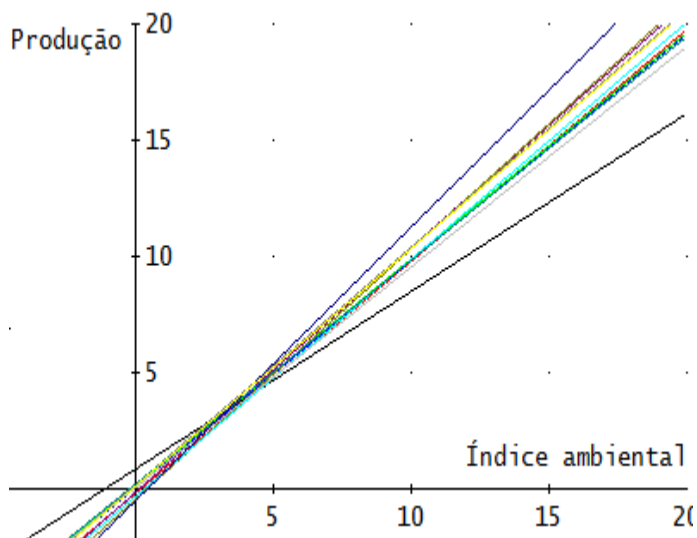
$$=0.205+0.941 \cdot x: (5075684)$$

$$=0.658+0.992 \cdot x: (5075710)$$

$$=0.286+1.033 \cdot x: (5076209)$$

$$=-0.266+1.072 \cdot x: (5076389)$$

Fig.8 Regressões no local UHO



$$=-0.189+0.998 \cdot x: (1020062)$$

$$=0.056+0.977 \cdot x: (1020130)$$

$$=0.85+0.765 \cdot x: (1020183)$$

$$=0.143+0.975 \cdot x: (1020197)$$

$$=-0.146+1.053 \cdot x: (5073863)$$

$$=-0.445+1.077 \cdot x: (5075152)$$

$$=0.176+1.022 \cdot x: (5075648)$$

$$=-0.322+1.02 \cdot x: (5075649)$$

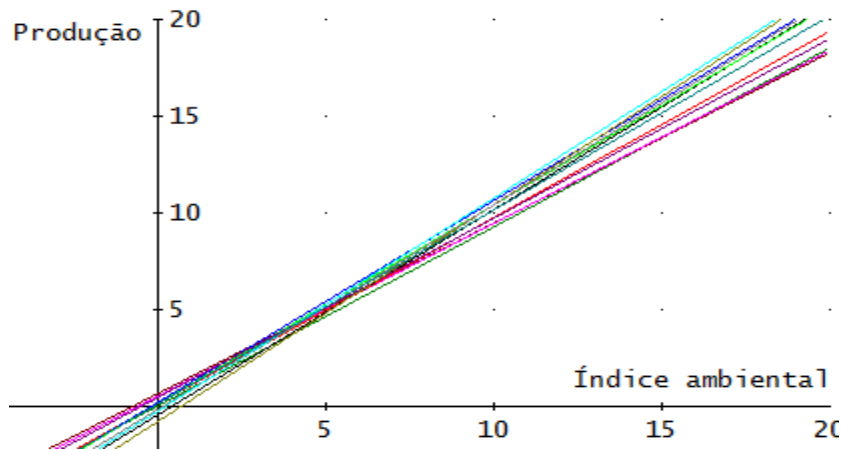
$$=0.206+0.963 \cdot x: (5075684)$$

$$=0.061+0.949 \cdot x: (5075710)$$

$$=-0.51+1.178 \cdot x: (5076209)$$

$$=0.12+1.022 \cdot x: (5076389)$$

Fig.9 Regressões no local LED



$$=0.032+0.925 \cdot x : (1020062)$$

$$=0.671+0.881 \cdot x : (1020130)$$

$$=0.54+0.893 \cdot x : (1020183)$$

$$=0.149+0.962 \cdot x : (1020197)$$

$$=0.219+1.043 \cdot x : (5073863)$$

$$=-0.43+1.061 \cdot x : (5075152)$$

$$=0.14+1.028 \cdot x : (5075648)$$

$$=0.465+0.927 \cdot x : (5075649)$$

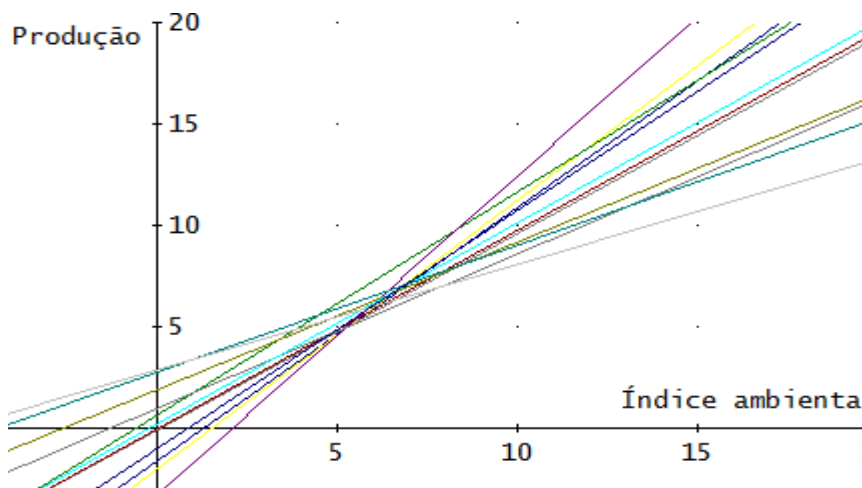
$$=-0.772+1.12 \cdot x : (5075684)$$

$$-0.15 + 1.057 \cdot x : (5075710)$$

$$=-0.241+1.101 \cdot x : (5076209)$$

$$=0.132+1.003 \cdot x : (5076389)$$

Fig.10 Regressões no local LIP



$$=-0.99+0.969 \cdot x : (1020062)$$

$$=-1.620+1.250 \cdot x : (1020130)$$

$$=-2.022+1.326 \cdot x : (1020183)$$

$$=-0.639+1.101 \cdot x : (1020197)$$

$$=-0.043+0.980 \cdot x : (5073863)$$

$$=-3.284+1.572 \cdot x : (5075152)$$

$$=1.893+0.728 \cdot x : (5075648)$$

$$=0.980+0.761 \cdot x : (5075649)$$

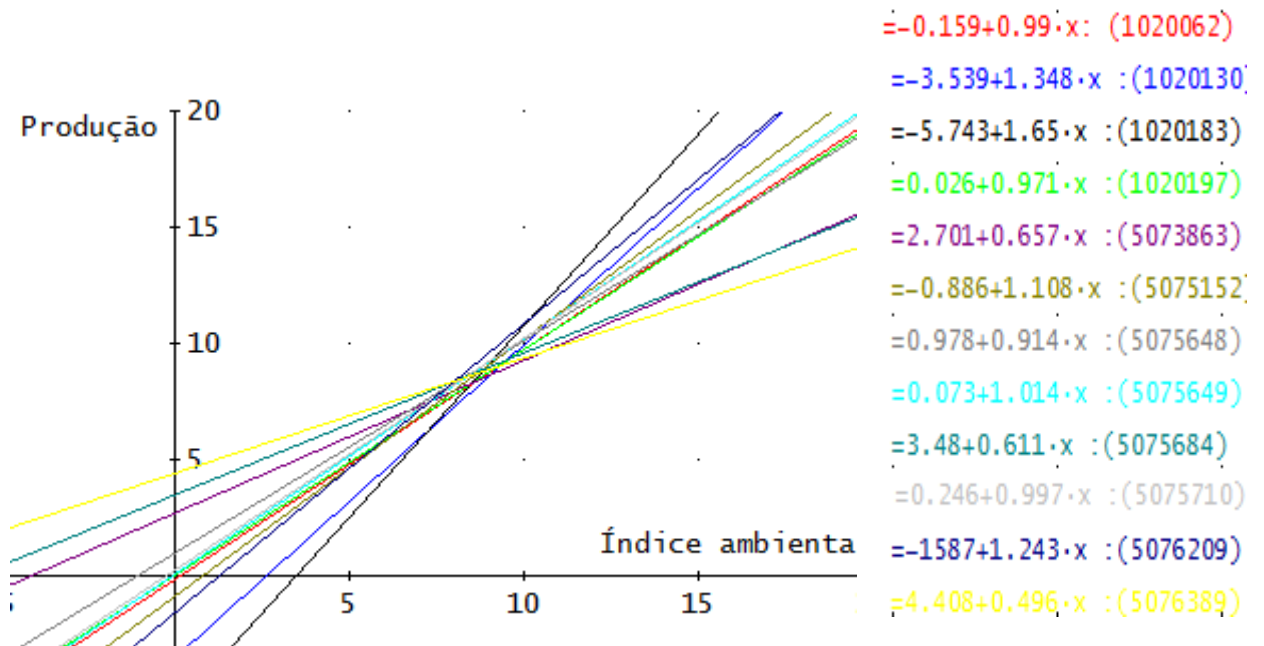
$$=0.213+0.991 \cdot x : (5075684)$$

$$=2.763+0.628 \cdot x : (5075710)$$

$$=2.871+0.521 \cdot x : (5076209)$$

$$=-1.011+1.175 \cdot x : (5076389)$$

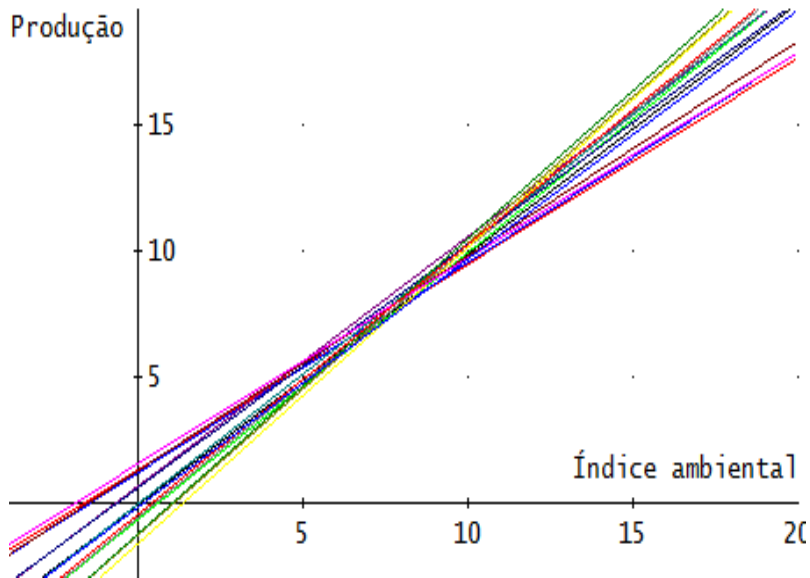
Fig.11 Regressões no local VER



A partir da análise conjunta de regressão linear, um por cultivar, desenha-se as cultivares que farão parte do contorno superior formado por aquelas mais produtivas.

Representações semelhantes vai ter a cultura trigo (wheat) , como a seguir é mostrado:

Fig.12 Regressões no local BR



$$=1.32+0.816 \cdot x: (1090020)$$

$$=1.198+0.834 \cdot x: (1090155)$$

$$=-0.07+0.994 \cdot x: (5073662)$$

$$=-0.658+1.059 \cdot x: (5073670)$$

$$=0.666+0.99 \cdot x: (5073677)$$

$$=-1.268+1.159 \cdot x: (5073687)$$

$$=-0.579+1.071 \cdot x: (5074948)$$

$$=-0.031+1.029 \cdot x: (5074957)$$

$$=0.608+0.966 \cdot x: (5075007)$$

$$=0.608+0.966 \cdot x: (5075051)$$

$$=-1.61+1.175 \cdot x: (5075548)$$

$$=-1.222+1.172 \cdot x: (5076066)$$

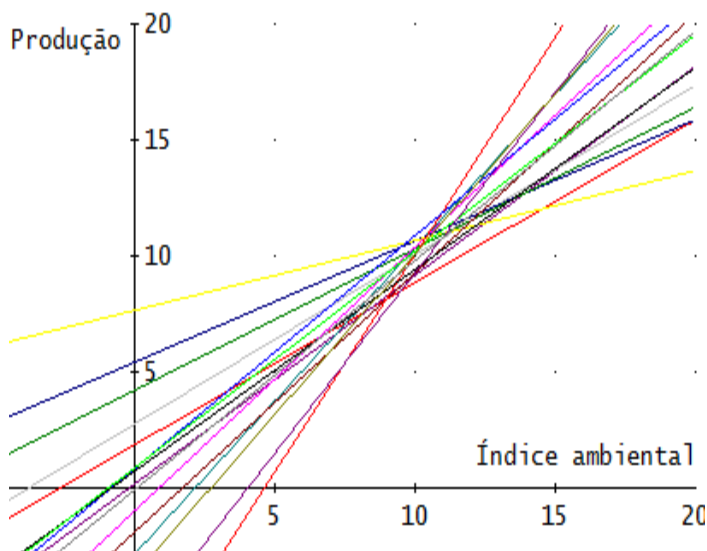
$$=1.282+0.852 \cdot x: (5076078)$$
  

$$=1.555+0.816 \cdot x: (5076092)$$

$$=-0.449+1.07 \cdot x: (5076105)$$

$$=-0.17+0.986 \cdot x: (5076112)$$

Fig.13 Regressões no local CAS



$$=1.86+0.7 \cdot x: (1090020)$$

$$=0.173+0.9 \cdot x: (1090155)$$

$$=-2.848+1.32 \cdot x: (5073662)$$

$$=2.758+0.73 \cdot x: (5073670)$$

$$=5.421+0.523 \cdot x: (5073677)$$

$$=7.657+0.301 \cdot x: (5073687)$$

$$=4.214+0.61 \cdot x: (5074948)$$

$$=-1.901+1.117 \cdot x: (5074957)$$

$$=-0.988+1.137 \cdot x: (5075007)$$

$$=0.842+1.004 \cdot x: (5075548)$$

$$=0.724+0.87 \cdot x: (5076066)$$

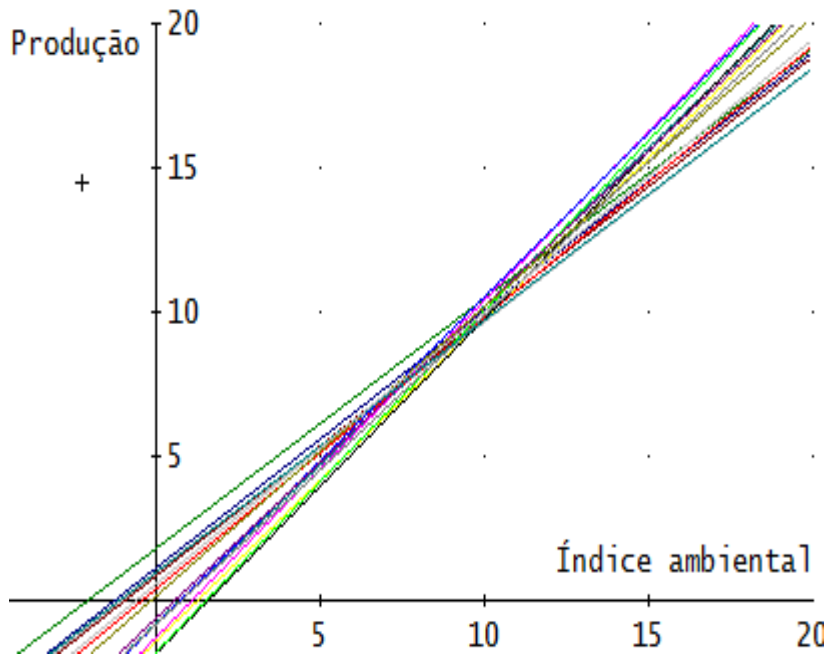
$$=0.87+0.933 \cdot x: (5076078)$$

$$=-6.274+1.554 \cdot x: (5076092)$$

$$=-3.761+1.385 \cdot x: (5076105)$$

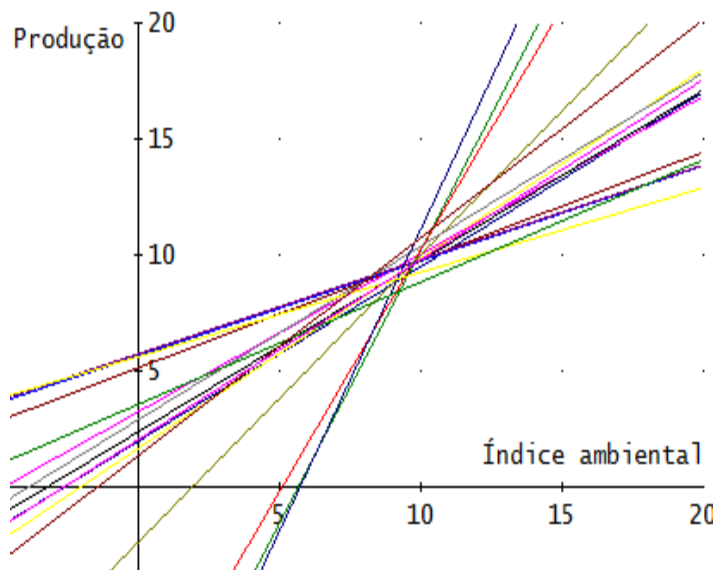
$$=-0.082+0.989 \cdot x: (5076112)$$

Fig.14 Regressões no local HE



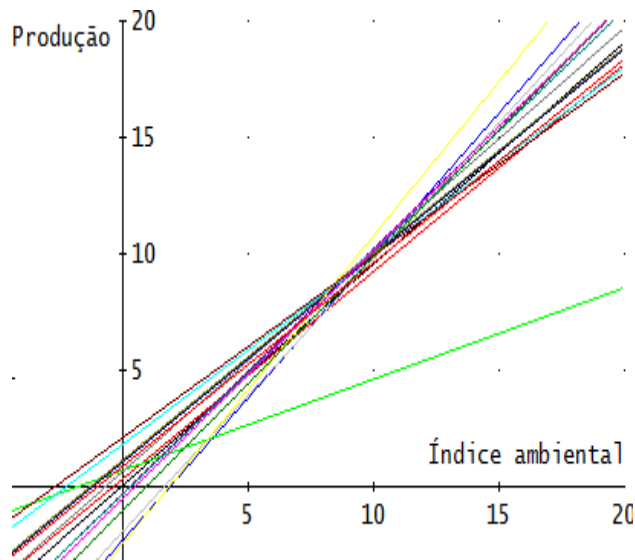
$$\begin{aligned} &= -0.79 + 1.099 \cdot x : (1090020) \\ &= 0.883 + 0.878 \cdot x : (1090155) \\ &= 1.129 + 0.894 \cdot x : (5073662) \\ &= -1.411 + 1.117 \cdot x : (5073670) \\ &= 1.803 + 0.867 \cdot x : (5073677) \\ &= 0.858 + 0.9 \cdot x : (5073687) \\ &= -1.278 + 1.169 \cdot x : (5074948) \\ &= 0.394 + 0.942 \cdot x : (5074957) \\ &= -0.832 + 1.136 \cdot x : (5075007) \\ &= -1.836 + 1.16 \cdot x : (5075051) \\ &= -1.792 + 1.183 \cdot x : (5075548) \\ &= -0.616 + 1.081 \cdot x : (5076066) \\ &= 0.154 + 1.003 \cdot x : (5076078) \\ &= -0.829 + 1.071 \cdot x : (5076092) \\ &= 0.974 + 0.874 \cdot x : (5076105) \\ &= 0.581 + 0.943 \cdot x : (5076112) \end{aligned}$$

Fig.15 Regressões no local HRA



$$\begin{aligned} &= 1.971 + 0.753 \cdot x : (1090020) \\ &= -0.79 + 1.099 \cdot x : (1090155) \\ &= -13.33 + 2.35 \cdot x : (5073662) \\ &= 5.134 + 0.465 \cdot x : (5073670) \\ &= 3.241 + 0.68 \cdot x : (5073677) \\ &= -10.641 + 2.086 \cdot x : (5073687) \\ &= 5.654 + 0.41 \cdot x : (5074948) \\ &= 2.379 + 0.737 \cdot x : (5074957) \\ &= 5.739 + 0.407 \cdot x : (5075007) \\ &= -2.373 + 1.239 \cdot x : (5075051) \\ &= 2.898 + 0.748 \cdot x : (5075548) \\ &= -14.922 + 2.601 \cdot x : (5076066) \\ &= 5.616 + 0.364 \cdot x : (5076078) \\ &= 3.565 + 0.527 \cdot x : (5076092) \\ &= 1.359 + 0.939 \cdot x : (5076105) \\ &= 2.041 + 0.776 \cdot x : (5076112) \end{aligned}$$

Fig.16 Regressões no local CHT



$$=0.335+0.891 \cdot x: (1090020)$$

$$=-2.295+1.223 \cdot x: (1090155)$$

$$=0.064+0.951 \cdot x: (5073662)$$

$$=0.704+0.392 \cdot x: (5073670)$$

$$=-0.289+1.051 \cdot x: (5073677)$$

$$=1.152+0.886 \cdot x: (5073687)$$

$$=0.655+0.953 \cdot x: (5074948)$$

$$=1.827+0.809 \cdot x: (5074957)$$

$$=-0.317+1.04 \cdot x: (5075007)$$

$$=-1.925+1.171 \cdot x: (5075051)$$

$$=1.064+0.887 \cdot x: (5075548)$$

$$=-2.444+1.323 \cdot x: (5076066)$$

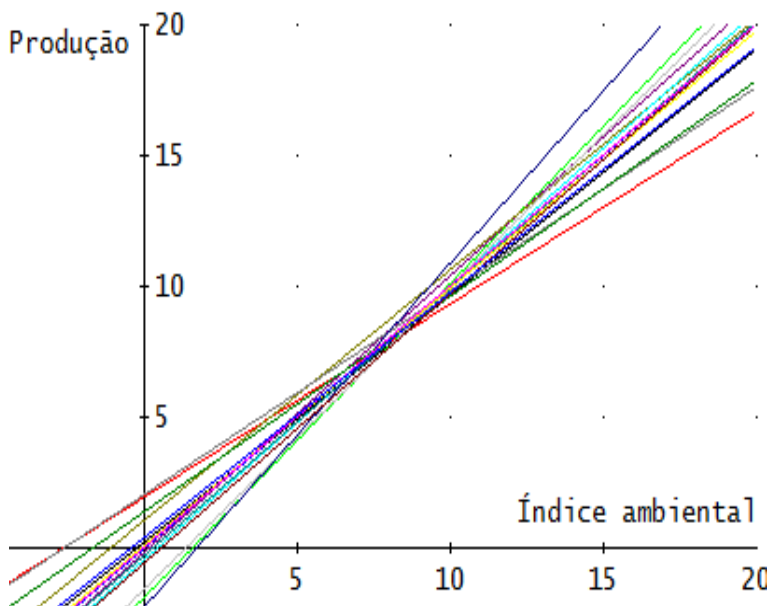
$$=-1.016+1.09 \cdot x: (5076078)$$

$$=2.114+0.782 \cdot x: (5076092)$$

$$=-0.512+1.066 \cdot x: (5076105)$$

$$=0.883+0.874 \cdot x: (5076112)$$

Fig.17 Regressões no local UHO



$$=1.944+0.739 \cdot x: (1090020)$$

$$=-0.013+1.002 \cdot x: (1090155)$$

$$=0.224+0.943 \cdot x: (5073662)$$

$$=-1.887+1.201 \cdot x: (5073670)$$

$$=-0.153+1.058 \cdot x: (5073677)$$

$$=1.057+0.959 \cdot x: (5073687)$$

$$=2.039+0.779 \cdot x: (5074948)$$

$$=-0.451+1.049 \cdot x: (5074957)$$

$$=-0.28+1.021 \cdot x: (5075007)$$

$$=-1.566+1.158 \cdot x: (85075051)$$

$$=-2.255+1.316 \cdot x: (5075548)$$

$$=0.098+0.984 \cdot x: (5076066)$$

$$=1.389+0.824 \cdot x: (5076078)$$

$$=-0.572+1.029 \cdot x: (5076092)$$

$$=0.026+1.001 \cdot x: (5076105)$$

$$=0.399+0.938 \cdot x: (5076112)$$

Fig.18 Regressões no local LED

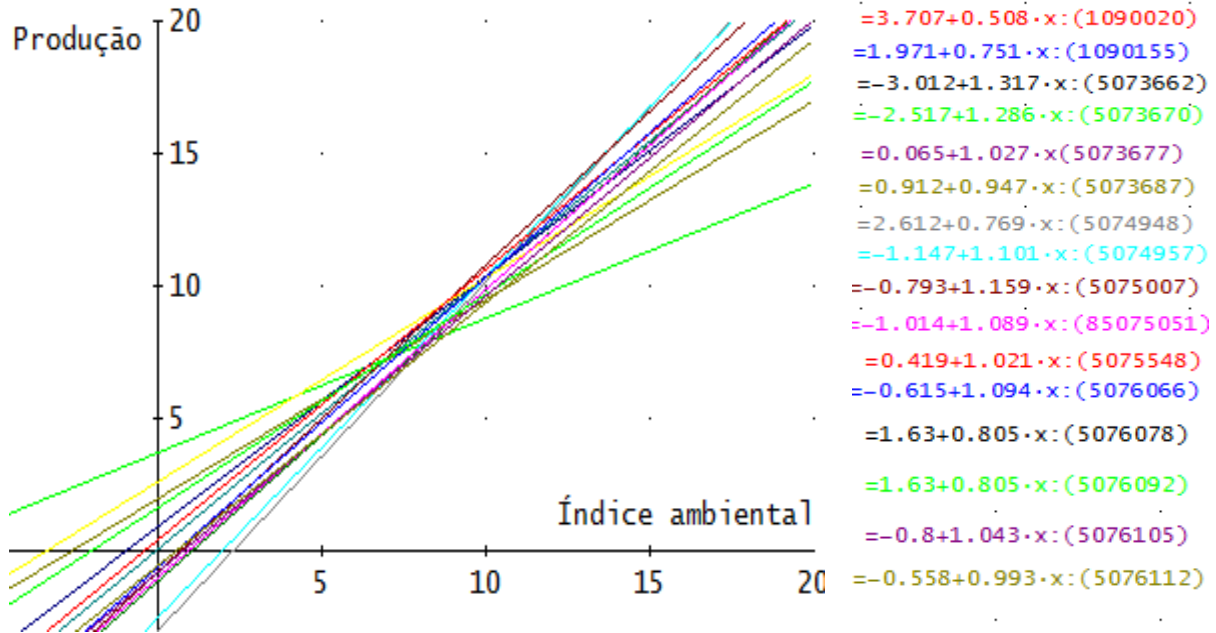


Fig.19 Regressões no local LIP

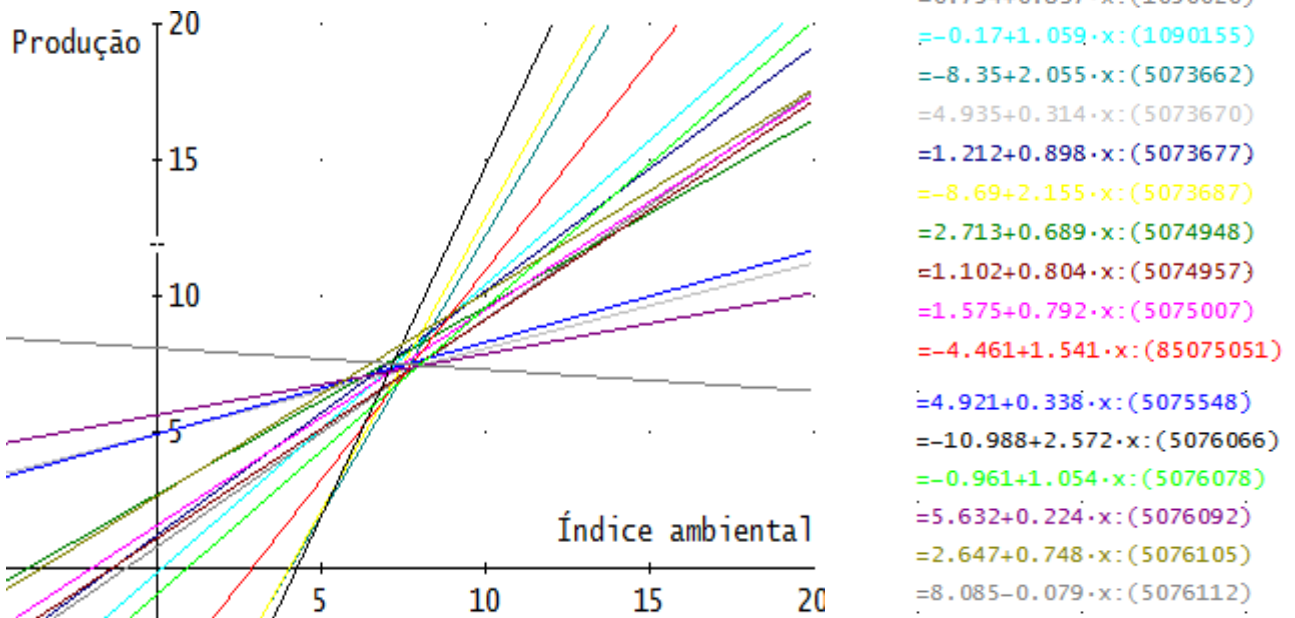
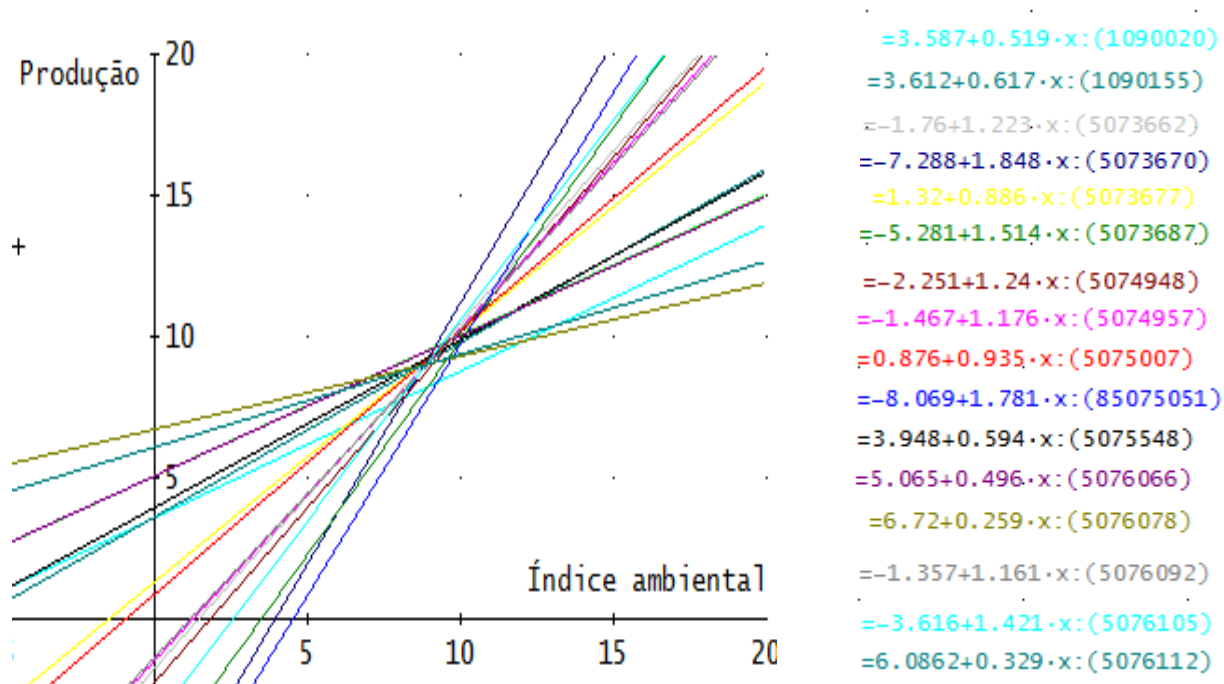


Fig.20 Regressões no local VER



Do exame das tabelas **3a** e **3b** e dos gráficos do contorno superior pode concluir-se pela aplicabilidade da ACR nos dados com que estivemos a trabalhar.

Na **tabela 4** apresentamos os índices ambientais ajustados.

Tabela 4: Índices ambientais ajustados

Estação	CEVADA					TRIGO				
	Anos					Anos				
	2004	2005	2006	2007	2008	2004	2005	2006	2007	2008
BR	11,54	11,33	6,65	7,34	10,14	8,72	6,67	6,64	3,60	6,60
CAS	11,75	10,33	9,41	9,98	8,64	9,40	8,22	7,21	5,97	7,22
HE	9,53	8,78	8,45	5,86	10,42	7,68	6,85	5,75	5,30	9,32
HRA	9,77	10,22	6,91	9,28	9,14	7,54	8,32	4,86	4,75	4,60
CHT	9,87	10,27	7,17	7,45	8,61	8,28	8,60	3,44	4,08	5,11
UHO	10,43	8,50	7,76	5,96	9,64	7,28	5,77	4,53	1,87	6,08
LED	11,57	9,59	9,19	7,01	8,68	7,11	6,48	6,21	3,08	6,26
LIP	7,16	7,80	4,59	7,07	7,84	5,97	6,07	3,64	4,47	4,83
VER	10,4	9,20	9,28	9,44	7,28	9,44	8,55	7,42	8,14	8,32



### 5.3 Seleção do caso a tratar

Para se fazer uma avaliação preliminar da possibilidade do ajustamento do modelo logarítmico utilizaremos o coeficiente ordinal de SPEARMAN para os vários anos. Para cada ano obteve-se o coeficiente correspondente aos índices ambientais ajustados para as duas culturas. Os valores obtidos estão apresentados no **tabela 5**.

**Tabela5: Coeficiente de correlação de SPEARMAN**

Anos	SPEARMAN
<b>2004</b>	0,066
<b>2005</b>	0,367
<b>2006</b>	0,650
<b>2007</b>	0,583
<b>2008</b>	0,200

Assim observa-se uma forte variação destes coeficientes de ano para ano. Como referimos, uma variação pode ser devido às diferentes culturas reagem diferentemente às variações do clima de ano para ano.

Dado a técnica que estamos a considerar tem sido desenvolvido para este trabalho não havendo, pois grandes experiências da utilização da mesma, vamos restringir-nos ao ano de 2006.

Os logaritmos dos índices ambientais ajustados nesse ano para as duas culturas encontram-se na **tabela 6**.

**Tabela 6: Logaritmos dos índices ambientais e seus totais**

Estação	CEVADA	TRIGO	Total
<i>BR</i>	1,879	1,870	<b>3,749</b>
<i>CAS</i>	2,242	1,975	<b>4,217</b>
<i>HE</i>	2,134	1,749	<b>3,883</b>
<i>HRA</i>	1,933	1,581	<b>3,514</b>
<i>CHT</i>	1,970	1,235	<b>3,205</b>
<i>UHO</i>	1,989	1,511	<b>3,500</b>
<i>LED</i>	2,082	1,826	<b>3,908</b>
<i>LIP</i>	1,524	1,300	<b>2,824</b>
<i>VER</i>	2,228	2,004	<b>4,232</b>
<b>Total</b>	<b>17,981</b>	<b>15,053</b>	<b>33,034</b>

## 5.4 Zonagem agrícola

Optamos pela ANOVA com dois fatores em interação tendo-se o resumo da mesma na **Tabela 7**

**Tabela 7: Quadro resumo da ANOVA para a aplicação**

Origem da variação	Soma de Quadrados	Graus de liberdade	Quadrado médio	Teste F
Locais	0,83	8	0,104	5,54**
Culturas	0,42	1	0,420	22,00**
Erro	0,15	8,0	0,015	

onde

\*\* significativo ao nível de 1%.

A mínima diferença significativa entre totais para locais, ao nível de 5% é de 1,21 concluindo-se que o índice ambiental para LIP é significativamente inferior às de CAS e VER.

Por outro lado o total dos índices ambientais para trigo é significativamente inferior às para a cevada ao nível de 1%.

## 6 Conclusão

Introduzimos o modelo para os logaritmos dos índices ambientais que permite.

- considerar simultaneamente várias culturas;
- ajustar índices ambientais que podem ser utilizadas em Zonagem Agrícola.

Neste modelo os fatores que se consideram eram:

- locais;
- culturas.

Já que fundamentalmente se está a pensar em analisar dados colhidos no mesmo ano agrícola.

A tese seguinte virá completar o modelo de forma a poder-se considerar dados de vários anos agrícolas. Para já observamos que a diferença das reações de culturas diferentes às variações climáticas de ano para ano poderá ser interpretado com uma interação AnoX Cultura a incluir no modelo. Pretenderemos aprofundar o estudo deste problema, ou seja, estudar o que estará na origem das reações diferentes entre as várias culturas relativamente a variações climáticas e sua influência nos índices ambientais.

Continua a ser importante a aplicação do algoritmo zig zag, pelos bons resultados já conhecidos e aplicados em Mexia & Pinto 2003, Mexia & Pereira 2003, Pinto 2006 e Oliveira 2007. Sendo a técnica introduzida neste trabalho, o logaritmo dos índices ambientais, ao permitir o uso de várias culturas, complementa o algoritmo zig zag. Fica aberto a possibilidade de novas pesquisas, nesse domínio, a partir do modelo logaritmo. Para se aplicar este modelo, é preciso que determinadas condições sejam garantidas como as quais cita-se que as regiões ou locais com que se trabalham sejam suficientemente homogêneas e que o conjunto dos cultivares comuns a todos os locais não ser demasiado reduzido. Só assim se pode esperar um bom comportamento da ACR e uma boa precisão dos estimadores. Um passo significativo para contornar o problema, sugere-se que as culturas sejam realizadas em rede fixa por locais de ensaios.

## 7. Bibliografia

- ❖ Aastveit, H. & Mejza, S. (1992). A selected bibliography on statistical methods for the analysis of genotype  $\times$  environment interaction. *Biuletyn Oceny Odmian*, 24 - 25 :83 - 97.
- ❖ Allard, W. & Bradshaw, D. (1964). Implications of genotype-environment interactions in applied plant breeding. *Crop. Sci.* 4 503:508
- ❖ Fonseca, M. et al (2003). Estimators and tests for variance components in cross nested orthogonal designs. *Dicussiones Mathematicae – Prob et Atat.* 175-201
- ❖ Fox, N. & Rosielle, A. (1982). Reducing the influence of environmental main-effects on pattern analysis of plant breeding environments. *Euphytica* 31.
- ❖ Graham, A. (1981). *Kronecker Products and Matrix calculus: Which applications.* Ellis Horwood Ltd.
- ❖ Gusmão, L. (1985). An adequate design for regression analysis of yield trials. *Theor. Appl. Genet.*, 71: 314 - 319.
- ❖ Gusmão, L. (1986a). Inadequacy of blocking in cultivar yield trials. *Theor. Appl. Genet.*, 72: 98 - 104.
- ❖ Gusmão, L. (1986b). A interação genótipo  $\times$  ambiente e a comparação de cultivares de cereais. Tese de Doutoramento. Instituto Superior de Agronomia. Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa.
- ❖ Ito, K. (1980). Robustness of ANOVA and Macanova test procedures. P. R. Krishnaiah (ed), *Handbook of statistics*, vol. I North Holland.
- ❖ Mexia, T. & Pinto, I. (2003). Joint Regression Analysis and Connectedness – Application to Grapevines - *Colloquium Biometryczne*, 33: 235 - 248.
- ❖ Mexia, T. et al. (1999).  $L_2$  environmental indexes *Biometrical Letters*, 36: 33-40.
- ❖ Mexia, T. & Pereira, D. and Baeta, J. (2001) Joint Regressions Analysis for winter rye cultivars using  $L_2$  index . *Colloquium Biometryczne*, 31: 207-212.
- ❖ Mexia, T. et al. (1997). Upper contour of a Joint Regression Analysis, *J. Genet. & Breed.*, 51 : 253 – 255.
- ❖ Mexia, T. (1995). *Introdução à Inferência Estatística Linear.* Edições Lusófonas, Lisboa.

- ❖ Mexia, T., Gusmão, L. & Baeta, J. (1991). Analysis of cultivar yield trials designed in Randomize Complete Blocks. - Revista de Ciências Agrárias, 14: 59 - 63.
- ❖ Mexia, T. (1989). Contolled heteroscedasticity, quociente vector spaces and F tests for hypotesis on mean vectors. Trabalhos de investigação, Nº 1 FCT/UNL.
- ❖ Mood, M. et al. (1974). Introduction to the theory of statistics. New York: Mcgraw-Hill.
- ❖ Oliveira, R. (2007). Estabilidade em análise conjunta de regressões e condição dinâmica de Planos de melhoramentos. Tese de Doutoramento Universidade Aberta.
- ❖ Pereira, G. (2004). Análise Conjunta Pesada de Regressões em Redes de Ensaios. Tese de Doutoramento Universidade de Évora.
- ❖ Pereira, G. & Mexia, T. (2010). Comparing double minimization and zig zag algorithms in Joint Regression Analysis: the complete case. Journal off Statical computation, Vol. 8, Iss. 2pp.133-141, 2010.
- ❖ Patterson, C. & Williams, R.(1976). A new class of resolvable incomplet block designs. Biometrika, 63:83-92.
- ❖ Plaisted, L. & Patterson, C. ( 1959). A technique for evaluating the ability of selections to yield consistently in different locations or seasons. American Potato Journal, 36: 381-385.
- ❖ Plaisted, L. ( 1960). A Shorter method for r evaluating the ability of selections to yield consistently over locations. American Potato Journal,37: 166-172.
- ❖ Pollock, G. (1975) . The Algebra of Econometrics – Villy.
- ❖ Santos, C. & Mexia, T. (2007a). Modelos com estrutura comutativa ortogonal por blocos e estatísticas relevantes. Atas do XIV congresso anual da sociedade portuguesa.
- ❖ Santos, C. Nunes, C. & Mexia, T. (2007b). OBS, COBS and Mixed Models associated to commutatice Jordan Algebra. In proceedings of 56TH session of the international Statistical Institute. Lisboa.
- ❖ Scheffé,H. (1959). The analysis of variance. John Wiley and sons, New York.
- ❖ Schott,R. (1997). Matrix analysis for Statistics. New York: John Wiley et Sons.
- ❖ Shukla, K. (1972). Some statistical aspects of partitioning genotype- environment components of variability. Heredity, 29:237-245.

- ❖ Silvey, D.(1975). *Statistical Inference. Monographs on Applied Probability and Statistics.* London: Chapman et Hall.
- ❖ Steeb, H. et Hardy, Y. (2011). *Matrix Calculus and Kronecker product: A practical approach to linear and multilinear algebra. (Scnd Edition)* World Scientific Publishing Company.