



Universidade de Évora
Departamento de Pedagogia e Educação

**O CONHECIMENTO PROFISSIONAL DO PROFESSOR E AS
INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS NA SALA DE AULA:
UM ESTUDO NOS 1.º E 2.º CICLOS DO ENSINO BÁSICO**

MÓNICA SOFIA CORREIA PATRÍCIO

Orientadora: Professora Doutora Ana Paula Canavarro

Mestrado em Educação Matemática

2010



Universidade de Évora
Departamento de Pedagogia e Educação

**O CONHECIMENTO PROFISSIONAL DO PROFESSOR E AS
INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS NA SALA DE AULA:
UM ESTUDO NOS 1.º E 2.º CICLOS DO ENSINO BÁSICO**

MÓNICA SOFIA CORREIA PATRÍCIO

Especialidade em Educação Matemática



171 875

Orientadora: Professora Doutora Ana Paula Canavarro

2010

Resumo

O conhecimento profissional do professor e as investigações matemáticas na sala de aula: um estudo nos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico

Este estudo tem como objectivo contribuir para a compreensão do conhecimento profissional do professor de Matemática envolvido no desenvolvimento de tarefas de investigação na sala de aula, focando-se em quatro questões orientadoras: (i) Como é que os professores colocam em prática as tarefas de investigação, considerando a planificação e condução das aulas? (ii) Que dificuldades sentem os professores no desenvolvimento de tarefas de investigação na sala de aula? (iii) Como é que o conhecimento didáctico dos professores influencia o desenvolvimento de tarefas de investigação? (iv) Como é que o conhecimento didáctico dos professores é influenciado pelo desenvolvimento de tarefas de investigação?

A fundamentação teórica assenta sobre as duas grandes temáticas do estudo: o conhecimento profissional do professor, sendo discutida a sua natureza, estrutura e conteúdo, e as tarefas de investigação, das quais se aprofunda a natureza e a utilização em sala de aula. Apresenta-se ainda investigação empírica referente ao conhecimento profissional do professor envolvido no desenvolvimento de tarefas de investigação.

O estudo assumiu uma abordagem interpretativa, concretizando-se através dois estudos de caso, um de uma professora de 1.º Ciclo e outro de um professor de Matemática do 2.º Ciclo do Ensino Básico. Estes professores trabalharam em colaboração com a investigadora sobre tarefas de investigação, que até aí não conheciam, planificando, leccionando e reflectindo acerca de um conjunto de aulas com tarefas desta natureza. Foram recolhidos dados durante as sessões de trabalho referidas, bem como nas aulas e ainda em entrevistas realizadas a cada um dos professores.

Uma leitura transversal dos casos permite retirar algumas conclusões. A possibilidade de enquadramento nos conteúdos programáticos parece ser o principal critério de selecção das tarefas por parte dos professores. Na planificação, é a inventariação dos conteúdos que a tarefa mobiliza a principal prioridade, na busca da redução do grau de incerteza relacionado com as eventuais reacções dos alunos. Quanto à condução de tarefas de investigação, a fase de introdução foi a mais breve, tendo servido o objectivo de conduzir à compreensão do propósito da tarefa por parte dos alunos e também reforçar alguns aspectos metodológicos do trabalho investigativo. A fase de desenvolvimento da tarefa foi aquela a que o professor de 2.º Ciclo atribuiu maior importância, embora também valorizada pela professora de 1.º Ciclo. Aqui, os professores consideram que o seu papel é acompanhar e orientar o trabalho dos alunos, ajudando a ultrapassar possíveis obstáculos, mantendo uma atitude questionadora. Quanto à fase de discussão, a grande preocupação dos professores é garantir a compreensão das ideias apresentadas pelos alunos. No entanto, existem duas estratégias distintas: enquanto a professora de 1.º Ciclo, que muito valorizou esta fase, estimula a interacção aluno-aluno, atribuindo-lhes a responsabilidade de validar/rejeitar as conjecturas apresentadas, o professor de 2.º Ciclo centra em si toda esta fase, assumindo a responsabilidade de corrigir as ideias apresentadas.

O desenvolvimento de tarefas de investigação é influenciado pelo conhecimento didáctico, revelando-se determinantes o conhecimento dos alunos e da forma como aprendem e o conhecimento do processo instrucional. O desenvolvimento de tarefas de investigação influencia várias componentes do conhecimento didáctico do professor, permitindo-lhe fortalecer o seu conhecimento matemático, desenvolver um conhecimento mais completo dos alunos e da forma como aprendem. Por último, a prática lectiva com tarefas de investigação fornece ao professor dados importantes de como planificar e conduzir tarefas de natureza aberta, de forma a tirar o máximo partido das suas potencialidades.

Palavras-chave: Conhecimento profissional do professor, tarefas de investigação, prática lectiva em Matemática.

Abstract

The teacher's professional knowledge and the mathematics investigations in the classroom: A study in the 1st and 2nd Cycles of the Basic Education

This study's aim is to contribute to the understanding of the professional knowledge of the Maths teacher, involved in the development of investigative tasks in the classroom, focusing four guiding questions: (i) how do teachers give practical way to the investigative tasks, having in mind the lesson plans and lesson execution? (ii) Which difficulties do the teachers face when developing the investigative tasks in the classroom? (iii) How does the teachers' didactical knowledge influence the development of the investigative tasks? (iv) How is the teachers' didactical knowledge influenced by the development of the investigative tasks?

The theoretical framework is based on two broad themes of the study: teacher's professional knowledge (discussing its nature, structure and contents) and the investigative tasks (whose nature and use in the classroom is deepened). Besides, empirical research in what concerns to the professional knowledge of the teacher involved in the development of investigative tasks is also added.

The study assumed an interpretative approach, materialised through two case studies, one of a primary school teacher, the other of a preparatory school Maths teacher. The teachers worked in cooperation with the researcher on the investigative tasks, which, until then, they weren't familiar with, planning, teaching and thinking about a set of lessons with tasks of this kind. Data were collected during the work meetings, as well as in the lessons and also in interviews to each one of the teachers.

A transversal appreciation of the cases allows us to draw some conclusions. The possibility of integrating the programmatic contents seems to be the main criteria for the selection of the tasks by the teachers. In the planning, the main priority of the task is the inventory of contents, aiming to reduce the level of uncertainty in what concerns to eventual reactions of the students. In what concerns to the conduction of the investigative tasks, the introduction phase was the shortest, fulfilling the aim of leading to the understanding of the proposal of the task by the students and also to reinforce some methodological aspects of the investigative work. The task's development phase was the one the preparatory school teacher dedicated more importance, though it was also valued by the primary school teacher. In this aspect, the teachers consider that their role is to follow and lead the students' work, helping them to overtake eventual obstacles, keeping the questioning attitude. In what concerns the discussion phase, the big concern of the teachers is to reassure the understanding of the ideas presented by the students. However, there are two different strategies: while the primary school teacher, who really valued this phase, stimulates the student-student interaction, giving them the responsibility of validating/rejecting the presented conjectures; the preparatory school teacher centres around himself all this phase, assuming the responsibilities of correcting the presented ideas.

The development of the investigative tasks is influenced by the didactical knowledge, and it is determinant the knowledge about the students and about the way they learn and the instructional knowledge. The development of the investigative tasks influences several components of the didactical knowledge of the teacher, allowing him/her to reinforce his mathematical knowledge, developing a more complete knowledge about the students and the way they learn. Finally, the lessons execution with investigative tasks provides the teacher with important data about how to plan and conduct open nature tasks, in order to take the biggest advantage of their potential.

Key words: teacher's professional knowledge, investigative tasks, Maths lessons execution.

Agradecimentos

À minha orientadora, Professora Doutora Ana Paula Canavarro, que muito me apoiou e incentivou e será sempre para mim uma referência pelas inúmeras qualidades profissionais e humanas.

Aos professores colaborantes neste estudo, pela disponibilidade e empenho.

À Professora Doutora Teresa Mergulhão, pela enorme dedicação na revisão do texto.

À Cristina, minha exímia companheira nesta *viagem*, pela amizade e prontidão em todos os momentos.

Ao meu pai e à minha família, por acreditarem em mim.

Aos meus amigos, que apesar da distância estão sempre comigo.

À minha Sofiazinha, pela cor que tem dado à minha vida.

Ao António, pelo companheiro que tem sido, sempre empenhado em realizar os meus sonhos.

Índice

Capítulo I - Introdução.....	1
Enquadramento do estudo	2
Objectivo e questões do estudo	5
Pertinência do estudo.....	6
Capítulo II - O conhecimento profissional do professor de Matemática	9
Que conhecimento profissional?	9
A natureza do conhecimento profissional do professor.....	10
A estrutura do conhecimento profissional do professor	14
O conteúdo do conhecimento profissional do professor	16
O conhecimento didáctico do professor.	18
Conhecimento da Matemática.	21
Conhecimento dos alunos e dos seus processos de aprendizagem.....	23
Conhecimento do currículo.	24
Conhecimento do processo instrucional.	28
Capítulo III - As investigações matemáticas	33
A natureza das investigações.....	33
Processos usados na investigação matemática	36
Justificação da utilização das investigações	43
A organização e estrutura da aula com investigações	50
Introdução da tarefa.....	51
Desenvolvimento da tarefa.....	51
A discussão dos resultados	51
As investigações matemáticas e o currículo de Matemática do Ensino Básico	52
Capítulo IV - O conhecimento profissional do professor e as investigações matemáticas na sala de aula	57
Conhecimento da Matemática	59

Conhecimento dos alunos e dos processos de aprendizagem.....	61
Conhecimento do currículo	63
Conhecimento do processo instrucional	66
Seleccção e planificação de tarefas de investigação	66
Condução da aula.....	67
Introdução da tarefa	67
Desenvolvimento da tarefa.	68
Discussão da tarefa.	72
Avaliação do trabalho investigativo	74
Capítulo V - Metodologia	75
Opções metodológicas.....	75
Participantes na investigação.....	78
Intervenção didáctica.....	80
Técnicas e instrumentos de recolha de dados.....	82
As entrevistas.....	82
A observação de aulas	83
A análise documental.....	85
Análise de dados.....	85
Fundamentos de natureza ética.....	88
Capítulo VI - A professora Petra.....	91
Apresentação	92
Conhecimento de si	92
Conhecimento do contexto	98
Conhecimento da Matemática	99
Conhecimento dos alunos e seus processos de aprendizagem	101
Conhecimento do currículo	102
Conhecimento do processo instrucional.....	106
Síntese.....	108
Petra e as investigações na sala de aula.....	110
A planificação das aulas com as tarefas de investigação.....	110

A selecção das tarefas.....	111
Papel atribuído à planificação.....	114
O conteúdo das planificações.....	115
A discussão das planificações com a investigadora.....	123
Preocupações e dificuldades.....	125
Síntese dos principais aspectos da planificação.....	128
A condução das aulas com as tarefas de investigação.....	129
A fase de introdução da tarefa de investigação.....	129
A fase de desenvolvimento da tarefa de investigação.....	131
A gestão do tempo.....	131
O papel da professora.....	133
Preocupações e dificuldades.....	141
A fase de discussão das tarefas de investigação.....	142
Síntese dos principais aspectos da condução.....	146
Petra e a sua reflexão sobre as aulas com tarefas de investigação.....	149
Aspectos bem conseguidos identificados pela professora.....	149
Dificuldades identificadas pela professora.....	151
Aprendizagens que a professora reconhece ter realizado com a experiência.....	154
Síntese dos principais aspectos da reflexão.....	157
Capítulo VII - O professor Paulo	161
Apresentação.....	161
Conhecimento de si.....	162
Conhecimento do contexto.....	164
Conhecimento da Matemática.....	165
Conhecimento dos alunos e seus processos de aprendizagem.....	165
Conhecimento do currículo.....	166
Conhecimento do processo instrucional.....	172
Síntese.....	173
Paulo e as investigações na sala de aula.....	175
A planificação das aulas com as tarefas de investigação.....	175
A selecção das tarefas.....	175
Papel atribuído à planificação.....	178

O conteúdo das planificações.....	179
A discussão das planificações com a investigadora. A	184
Preocupações e dificuldades.....	186
Síntese dos principais aspectos da planificação.	190
A condução das aulas com as tarefas de investigação.....	191
A fase de introdução da tarefa de investigação.	191
A fase de desenvolvimento da tarefa de investigação.	194
A gestão do tempo.	195
O papel do professor.....	195
Preocupações e dificuldades.....	201
A fase de discussão da tarefa de investigação.	202
Síntese dos principais aspectos da condução.....	206
Paulo e a sua reflexão sobre as aulas com tarefas de investigação.....	208
Aspectos bem conseguidos identificados pelo professor	208
Dificuldades identificadas pelo professor.....	211
Aprendizagens que o professor reconhece ter realizado com a experiência	215
Síntese dos principais aspectos da reflexão.....	218

Capítulo VIII - Conclusão 221

Síntese do estudo.....	221
Conclusões do estudo	223
Caracterização da prática lectiva envolvendo investigações.....	223
A planificação.....	223
A fase de introdução.	224
O desenvolvimento da tarefa.	225
A discussão da tarefa.	227
Dificuldades na prática lectiva envolvendo investigações	228
Influências do conhecimento didáctico na prática lectiva envolvendo investigações	231
Desenvolvimento do conhecimento didáctico decorrente da prática lectiva envolvendo investigações	235
Síntese das conclusões.....	238

Considerações finais.....	244
Bibliografia	249
Anexos	255

Índice de Quadros

<i>Quadro 1:</i> Categorias do conhecimento didáctico do professor	20
<i>Quadro 2:</i> Momentos na realização de uma investigação	41
<i>Quadro 3:</i> Papéis do professor no decurso da realização de actividade investigativa na aula de Matemática	59

Índice de Figuras

<i>Figura 1:</i> Um modelo alternativo para o estudo do conhecimento profissional	19
<i>Figura 2:</i> Componentes do conhecimento profissional, posto em uso na prática lectiva	28
<i>Figura 3:</i> Relação entre os diversos tipos de tarefas, relativamente ao seu grau de desafio e estruturação	34
<i>Figura 4:</i> A actividade de investigação	40
<i>Figura 5:</i> Modelo simplificado de Lakatos para a heurística da descoberta matemática	42
<i>Figura 6:</i> Objectivos da tarefa 4 – “Divisões por 11, 111,…”	115
<i>Figura 7:</i> Objectivos da tarefa 5 – “Cubos, cubos e mais cubos”	116
<i>Figura 8:</i> Questões essenciais a colocar aos alunos da tarefa 5 – “Cubos, cubos e mais cubos”	117
<i>Figura 9:</i> Introdução da tarefa 3 – “Travessia do rio”	119
<i>Figura 10:</i> Introdução da tarefa 4 – “Divisões por 11, 111,…”	120
<i>Figura 11:</i> Desenvolvimento da tarefa 5 – “Cubos, cubos e mais cubos”	120
<i>Figura 12:</i> Desenvolvimento da tarefa 5 – “Cubos, cubos e mais cubos”	121
<i>Figura 13:</i> Síntese do conhecimento aprendido da tarefa 5 – “Cubos, cubos e mais cubos”	122
<i>Figura 14:</i> Síntese do conhecimento aprendido da tarefa 2 – “Números quadrados e triangulares”	122
<i>Figura 15:</i> Guião da aula 3 – Tarefa “Cubos, cubos e mais cubos”	180
<i>Figura 16:</i> Guião da aula 5 – Tarefa “Um outro olhar sobre a tabuada”	181
<i>Figura 17:</i> Guião da aula 2 – Tarefa “Travessia do rio”	181
<i>Figura 18:</i> Guião aula 3 – “Cubos, cubos e mais cubos”	184
<i>Figura 19:</i> Guião da aula 2 – Tarefa “Travessia do rio”	186
<i>Figura 20:</i> Guião da aula 4 – Tarefa “Escadas”	190

Índice de Anexos

Anexo 1– Ficha do professor participante no estudo	257
Anexo 2– Cronograma das actividades dos professores colaborantes no estudo.....	258
Anexo 3– Banco de Investigações.....	259
Anexo 4 – Guião para planificação de aula.....	278
Anexo 5 – Guião-exemplo para planificação de aula.....	279
Anexo 6– Guião da 1.ª Entrevista.....	281
Anexo 7– Guião da 2.ª Entrevista.....	284
Anexo 8 – Guião de Entrevista para Reflexão sobre a condução da aula	287
Anexo 9 – Guião de observação de aula.....	288

Capítulo I

Introdução

Este estudo centra-se fundamentalmente no professor. A premissa de que o professor é o elemento-chave do processo de ensino-aprendizagem assume neste trabalho um lugar de destaque, considerando-se por isso que uma maior compreensão do seu conhecimento profissional pode fornecer um contributo importante para a resolução das problemáticas existentes em relação à disciplina de Matemática.

A primeira vez que a investigadora contactou com as tarefas de investigação durante o seu percurso escolar foi já enquanto aluna do ensino superior na ESE de Portalegre. Desta experiência, que lhe permitiu em simultâneo perspectivar o entusiasmo sentido pelos alunos e reflectir o papel do professor no desenvolvimento deste tipo de tarefas, guarda o pensamento que a invadiu no momento de que afinal existia mais matemática para além das páginas intermináveis de exercícios dos livros e manuais e que é com esta que os alunos devem contactar mais frequentemente. Tal convicção tem acompanhado a investigadora ao longo da sua carreira e sublimou-se na vontade/necessidade de aprofundar os seus conhecimentos nesta área, o que posteriormente deu origem a este estudo, cujo tema reúne duas áreas de interesse para a mesma: o conhecimento profissional do professor e as tarefas de investigação na sala de aula.

Mais tarde, enquanto a investigadora lia o texto de Cunha, Oliveira e Ponte (1999) “Investigações matemáticas na sala de aula”, referente ao projecto “Matemática Para Todos” (MPT), que pretendia averiguar os processos que os alunos de 2.º e 3.º Ciclos utilizam ao se envolverem em actividades de investigação, a dinâmica de trabalho que geram na aula e as competências que requerem da parte do professor, surgiu-lhe a ideia de que poderia ser interessante, à semelhança do que aconteceu no

referido estudo, estudar dois professores de ciclos diferentes e tentar caracterizar e compreender o conhecimento profissional dos professores do 1.º e do 2.º Ciclos do Ensino Básico envolvido no desenvolvimento de tarefas de investigação na sala de aula.

O motivo da escolha do 1.º e do 2.º Ciclos para desenvolver o estudo deve-se ao facto de serem os ciclos que devido à formação da investigadora, lhe estão mais próximos. Consequentemente, um estudo sobre professores destes níveis de ensino poderia conduzir a uma mais profunda compreensão e um maior desenvolvimento profissional por parte da mesma.

Enquadramento do estudo

A sociedade deposita na escola e nos professores expectativas futuras e o compromisso de responder às suas exigências e necessidades. Segundo Silva, Veloso, Porfirio e Abrantes (1999), as aprendizagens que os alunos realizam no seio do contexto escolar devem proporcionar um ambiente estimulante do ponto de vista intelectual e traduzir a herança cultural presente na sociedade na qual os alunos se irão inserir.

As mudanças na sociedade devem ter expressão máxima a nível educacional. Os currículos escolares devem incorporar as características sociais e culturais de uma determinada época e, assim como o conhecimento cresce, as tecnologias evoluem e as necessidades individuais e sociais mudam, também a escola e o currículo devem acompanhar esta evolução sob pena de se tornarem obsoletos (APM, 1990).

Verifica-se que, desde a Segunda Grande Guerra Mundial, a sociedade tem experimentado mudanças constantes a vários níveis, cujo grande motor impulsionador tem sido a evolução tecnológica, às quais as ciências em geral e a matemática em particular não ficaram alheias.

O conhecimento matemático a cada novo dia aumenta, especializando-se e aperfeiçoando-se. Para Davis e Hersh (1995), “o mundo vive uma idade de ouro” (p.41) no que concerne à produção matemática, pois, à medida que se torna mais elaborada e complexa, em parte devido às solicitações feitas pela ciência e pela tecnologia, a

matemática torna-se, ela própria, num potencial ponto de partida para novas investigações. Mas será esta a perspectiva que a nossa escola espelha?

A investigação em Educação Matemática realizada em Portugal mostra uma visão absolutista da Matemática ainda instaurada nas nossas escolas, concordante com a imagem desta ciência como “um produto acabado, exposta em aulas teóricas e praticada em aulas de resolução de exercícios”, pouco informada pelas perspectivas dominantes em educação (Ponte, Matos e Abrantes, 1998b). Daqui resulta uma disciplina irremediavelmente difícil, com uma conotação socialmente negativa em que o insucesso é fatalmente aceite, resultando como um factor de orientação, selecção e frustração em que só uma elite consegue obter sucesso a esta disciplina (APM, 1996; Silva, Veloso, Porfírio e Abrantes, 1999). Esta matemática “não-produtiva”, de “carácter reprodutivo”, vai pouco além de devolver a imagem de uma ciência “congelada” (Gerdes, 1985 em Ernest, 1996); por outro lado, o desenvolvimento de capacidades de treino e mecanização não é concordante com as capacidades que se exigem aos cidadãos hoje em dia (Silva *et al.*, 1999).

Também os estudos nacionais como as Provas de Aferição, que se vêm realizando em Portugal há já alguns anos nos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico, bem como os estudos comparativos internacionais como o TIMSS 1995 (*Third International Mathematics and Science Study*) e o PISA 2003 (*Programme for International Student Assessment*), nos quais os alunos portugueses têm participado e se têm posicionado nos últimos lugares, têm revelado que capacidades mais complexas como o raciocínio, a resolução de problemas e a comunicação matemática não estão muito desenvolvidas.

Existe assim um desfasamento em Portugal bastante acentuado relativamente ao que os alunos deveriam aprender na disciplina de Matemática e aquilo que aprendem de facto. Parece poder concluir-se que o uso de tarefas que desenvolvam capacidades mais complexas de raciocínio e a comunicação matemática não se traduzem numa prática frequente dos professores, constituindo-se uma prioridade alterar esta tendência.

Segundo o NCTM (1991), o sistema educativo da era industrial não se coaduna com as necessidades económicas do presente. Os novos objectivos da sociedade contemporânea passam por garantir que todos os cidadãos se tornem matematicamente alfabetizados e desenvolvam o seu poder matemático. Assim, devem ter a oportunidade de desenvolver outro tipo de capacidades como explorar, conjecturar, raciocinar e comunicar matematicamente e utilizar com eficácia uma variedade de métodos matemáticos na resolução de problemas.

Por conseguinte, devem os professores perspectivar uma abordagem curricular que valorize objectivos educacionais mais amplos, em que o seu papel vá para além de um transmissor passivo de conhecimentos, devendo criar experiências que promovam o desenvolvimento de capacidades de ordem superior, como o raciocínio, a formulação e resolução de problemas, utilizando processos matemáticos como explorar, identificar padrões, formular e testar conjecturas, justificar, generalizar, bem como a comunicação matemática, que constituem as grandes capacidades transversais da aprendizagem da Matemática enunciadas pelo Programa de Matemática do Ensino Básico publicado em 2007.

Nesta perspectiva, as tarefas de investigações constituem uma experiência de ensino-aprendizagem da Matemática que assume particular relevo por envolverem processos fundamentais do pensamento e da actividade matemática como a formulação e a resolução de problemas, a conjecturação, a demonstração e a comunicação de descobertas (Abrantes, 1999).

Todavia, verifica-se que o desenvolvimento de tarefas de investigação constitui uma perspectiva curricular inovadora e, como tal, resulta problemática para o professor, impondo-lhe sérios desafios (Oliveira, Ponte, Santos e Brunheira, 1999a).

Desde logo, existem barreiras que são dificilmente transponíveis pelos professores, como a cultura de currículo instaurada, muito centrada nos conteúdos em detrimento dos aspectos metodológicos e das finalidades da aprendizagem da Matemática, que torna difícil a integração de tarefas de investigação e levanta problemas a nível da gestão curricular (Ponte *et al.*, 1998a; Oliveira *et al.*, 1999a).

A avaliação é outra questão pouco pacífica. Verifica-se que a realização de provas e exames vem muitas vezes enviesar a lógica dos currículos estabelecidos, pois “o mundo dos testes e dos exames a que os seus alunos vão ser submetidos é um mundo de destinos e não de viagens” (Silva *et al.*, 1999).

Também o envolvimento dos alunos neste tipo de tarefas levanta várias dificuldades que, não obstante a sua complexidade, se devem fundamentalmente a uma experiência matemática anterior baseada na transmissão passiva de conceitos e no treino repetitivo de procedimentos que determinam fortemente o seu desempenho na realização de investigações (Ponte, 2003).

Acresce ainda o facto de a profissão de professor estar a atravessar um momento de crise. A desvalorização do estatuto da carreira docente, que teve início na década de 80 e que tem vindo a perpetuar-se e intensificar-se até aos dias de hoje, assim como a

responsabilização social dos professores, em particular dos professores de Matemática, face aos problemas da educação, está a provocar nos docentes uma atitude de apatia, insegurança e conformismo conducente a um desinvestimento na profissão, traduzido comumente num sentimento de impotência face às lacunas do sistema educativo e na resistência a projectos de inovação (Oliveira, 1998b).

As dificuldades que os professores possuem em concretizar orientações curriculares de cunho inovador não se devem sobretudo a uma falta de empenho profissional. Tais condicionantes remetem para aspectos mais profundos, cuja natureza interessa problematizar, conhecer e compreender (Ponte, Oliveira, Cunha e Segurado, 1998a).

Por conseguinte, o desenvolvimento de tarefas de investigação, por lidarem com os aspectos essenciais da prática do professor, como sejam a planificação e condução de aulas, e por constituírem um tipo de metodologia complexa e pouco familiar aos mesmos, é susceptível de gerar controvérsias e levar o professor a reflectir e a explicitar a sua prática, constituindo uma oportunidade óptima para analisar o conhecimento profissional que o professor mobiliza no desenvolvimento deste tipo de tarefas (Oliveira, 1998a).

Objectivo e questões do estudo

Este estudo tem como objectivo contribuir para a compreensão do conhecimento profissional dos professores de Matemática dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico envolvido no desenvolvimento de tarefas de investigação na sala de aula, nomeadamente ao nível do conhecimento didáctico nas suas diferentes dimensões: (i) Conhecimento matemático; (ii) Conhecimento dos alunos e da aprendizagem; (iii) Conhecimento do currículo; (iv) Conhecimento do processo instrucional.

Formularam-se assim quatro questões de investigação que irão nortear o estudo, as quais se apresentam em seguida:

1. Como é que os professores colocam em prática as tarefas de investigação, considerando a planificação e a condução das aulas?
2. Que dificuldades sentem os professores no desenvolvimento de tarefas de investigação na sala de aula?
3. Como é que o conhecimento didáctico dos professores influencia o desenvolvimento de tarefas de investigação?
4. Como é que o conhecimento didáctico dos professores é influenciado pelo desenvolvimento de tarefas de investigação?

Pertinência do estudo

O pressuposto de que o professor é um elemento-chave do processo de ensino-aprendizagem reúne o consenso geral e esse aspecto tem sido denunciado pela investigação realizada que tem virado para si, progressivamente, todas as atenções.

A ideia de que os alunos na aprendizagem da Matemática devem ter oportunidade de se envolverem em actividade matemática, de forma a experimentarem o processo de criação e compreenderem a sua natureza, é de igual modo consensual para a comunidade de educadores matemáticos (Silva *et al.*, 1999).

Corroborando a ideia anterior, Ponte, Ferreira, Oliveira e Varandas (1999a) sugerem que toda a actividade matemática que se pretenda rica envolve necessariamente actividade investigativa.

Assim, as tarefas de investigação assumem particular interesse no panorama actual da investigação em educação matemática, particularmente numa altura em que foi recentemente publicado o Programa de Matemática do Ensino Básico, que contém referências explícitas à realização de tarefas de investigação na sala de aula, ao contrário do que acontecia nos programas anteriores.

Neste contexto, o estudo do conhecimento profissional do professor envolvido no desenvolvimento de tarefas de investigação pode fornecer contributos importantes a

várias áreas da investigação em educação matemática, como o desenvolvimento curricular e a formação e desenvolvimento profissional de professores.

O conhecimento profissional referente à realização de tarefas de investigação pode analisar-se num plano instrucional, através da selecção e preparação de tarefas, da sua condução, discussão e partilha de estratégias e da avaliação dos alunos; e, num plano curricular, considerando a articulação com o currículo oficial e a gestão curricular (Ponte, 2003).

Assim, a caracterização e a compreensão dos saberes profissionais que o professor mobiliza no desenvolvimento de tarefas de investigação na sala de aula podem fornecer dados importantes para a formação inicial e contínua de professores, nomeadamente para a construção de programas que promovam o desenvolvimento das competências necessárias para que este tipo de tarefas tenha o reflexo desejado na prática dos professores.

É também sabido que os estudos realizados no âmbito do desenvolvimento de tarefas de investigação têm tido pouca incidência no 1.º Ciclo (Ponte, 2003). Por outro lado, sabe-se que, num futuro ainda algo indeterminado, os 1.º e 2.º Ciclos do actual currículo passarão a integrar um só ciclo com a duração de seis anos. Assim, uma vez que esta investigação é referente ao estudo do conhecimento profissional de professores, envolvido no desenvolvimento de tarefas de investigação destes dois ciclos de ensino, a sua comparação permite perceber os aspectos da prática que afastam e aproximam os professores do 1.º e do 2.º Ciclos e tirar consequências para o desenvolvimento curricular.

Pese embora o estudo dos alunos e dos seus processos de aprendizagem não constitua um objectivo desta investigação, este poderá fornecer contributos para a problematização da forma como os alunos do 1.º e do 2.º Ciclos do Ensino Básico se envolvem em trabalho investigativo, trazendo também este aspecto mais valias ao desenvolvimento curricular.

Por último, e uma vez que este estudo é sobre o conhecimento profissional do professor, um melhor conhecimento dos mesmos, das dificuldades e conflitos característicos da sua profissão pode ajudar ao estabelecimento de políticas educativas mais adequadas (Ponte, 1998b).

Capítulo II

O conhecimento profissional do professor de Matemática

O professor é um profissional, cuja profissão possui desafios e conflitos característicos, com os seus próprios processos de desenvolvimento, cuja identidade e prática devem ser problematizadas sob diferentes perspectivas (Ponte *et al.*, 1996a; Ponte *et al.*, 1998b).

Que conhecimento profissional?

O estudo do professor, em particular o estudo do seu conhecimento, tem dominado a atenção dos investigadores em educação matemática a partir do momento em que o professor passou a ser considerado como uma componente fundamental e activa no processo de ensino-aprendizagem e deixou de ser “visto como um transmissor passivo de factos e informação, usando um repertório bem definido de meios de ensino e avaliação das aprendizagens dos alunos [...] um técnico que deveria seguir o currículo estabelecido [...]” (Ponte *et al.*, 1998b, p.215).

As características do processo de ensino-aprendizagem, desenvolvido num contexto institucionalizado, são pois condicionadas pelas características e natureza do conhecimento do professor. Importa, porquanto, determinar o que se entende por este conhecimento. Duas questões se colocam: “Qual é o conhecimento que possui um professor de tal forma que nos permita considerá-lo um profissional do ensino? O que

tem implícito o conhecimento do professor? Ou, por outras palavras, qual é a natureza do conhecimento profissional do professor?” (Llinares & Sánchez, 1990, p. 79).

A natureza do conhecimento profissional do professor

Várias têm sido as aproximações à conceptualização do conhecimento profissional do professor desenvolvidas a fim de se compreender o que fazem os professores nas suas aulas. Todavia, se alguma similaridade existe entre as tentativas de caracterização do conhecimento profissional do professor, é que este está sempre associado a uma “tensão” existente entre o conhecimento teórico, transmitido através dos livros, de carácter geral e proposicional, independente de contexto, e o conhecimento derivado da prática, mais contextualizado e proveniente de situações concretas, formado a partir da sua experiência profissional (Llinares & Sánchez, 1990).

Tempos houve em que se acreditava que o conhecimento específico de um professor de Matemática era determinado apenas pelo conhecimento da Matemática como disciplina, ou, por outras palavras, o conhecimento profissional do professor era determinado apenas pelo conhecimento acerca do assunto a ensinar (Llinares & Sánchez, 1990). Posteriormente, esta perspectiva esteve muito tempo afastada da atenção dos investigadores, tendo-se insistido na premissa de que o conhecimento é essencialmente prático, adquirido e desenvolvido através da experiência.

Um exemplo desta posição é o trabalho de Freema Elbaz (1983), que forneceu um importante contributo para a compreensão do conhecimento profissional do professor, o qual apelidou de *conhecimento prático* (*practical knowledge*), ao referir que o professor possui um conhecimento amplo que cresce com a experiência. Este tipo de conhecimento experiencial é informado pelo conhecimento teórico acerca do assunto a ensinar, e pelas áreas de desenvolvimento da criança, teorias sociais e de aprendizagem, sendo integrado pelo professor incorporando opiniões e valores pessoais, que orientam a sua prática. A autora não nega a importância do conhecimento do conteúdo, o conhecimento proposicional, mas refere que este é muitas vezes sobrevalorizado quando é comparado com o conhecimento que os especialistas de diferentes áreas devem ter, em detrimento de outros tipos de conhecimento, como por exemplo o conhecimento sobre psicologia, cuja importância tem sido demonstrada. A conceptualização de

conhecimento prático sugere que o professor possui um conjunto de fontes que lhe permitem ter um papel activo na transformação do seu contexto e na determinação dos seus modos de actuação e objectivos a alcançar.

Esta autora atribui três dimensões para descrever o conhecimento do professor: *conteúdo*, *estrutura* (serão tratados mais à frente) e *orientação*. Na dimensão *orientação*, pretende elucidar acerca da forma como a experiência influencia a construção social deste conhecimento, como este é adquirido e usado (Linares & Sánchez, 1990). Desta forma, atribui-lhe cinco orientações: orientação para a situação, orientação pessoal, orientação social, orientação experiencial e orientação teórica.

Também Shön (1992) atribui uma especial importância à prática. Refere-se ao conhecimento profissional como uma competência “artística” que os profissionais evidenciam em situações da prática singulares, incertas e conflituosas, que resultam em juízos, decisões e acções eficientes e inteligentes que realizam de um modo espontâneo e hábil, sem conseguirem porquanto estabelecer as regras e os procedimentos que seguem ou explicitá-los verbalmente. É por isso um conhecimento tácito, ou seja, um “saber mais do que o que podemos dizer” (Shön, 1992, p.33).

Para se reportar a este conhecimento essencialmente prático, Shön utiliza a terminologia *conhecimento na acção*, que está embebido do contexto em que se desenrola, estruturado a nível social e institucional e é partilhado por toda a comunidade de profissionais que, em situações indeterminadas e imprevistas da sua profissão, mantêm um diálogo reflexivo com a prática e revelam, através dela, a forma particular de ver o mundo. É esta capacidade de *reflexão sobre e na acção e de reflexão sobre a reflexão na acção* que permite um diálogo entre o pensamento e a acção, de forma a reorganizar o conhecimento, reestruturando algumas das suas estratégias de actuação, teorias sobre os fenómenos e modos de configurar o problema, reinventando um plano para uma nova compreensão, susceptível de modelar a sua prática futura, aumentando a competência. Porquanto, um profissional competente é também um investigador e não somente um perito, cujo comportamento está modelado, pois a sua actividade é inteligente, resultando numa tentativa de ajuste e contínua detecção e correcção do erro.

O que os professores conhecem está na prática. Assim, quando se tenta descrever o conhecimento tácito que está implícito nas acções, através da observação e reflexão sobre elas, tais descrições resultam sempre em construções, mais ou menos distorcidas, que têm subjacentes o seu propósito e o sistema linguístico utilizado, pois resultam da tentativa de converter num carácter estático, explícito e simbólico algo que

é naturalmente implícito e dinâmico. Estas descrições resultam em meras conjecturas que necessitam sempre de ser postas à prova, através da observação das acções originais (Shön, 1992).

Tal como Shön, também Calderhead (1987) reconhece que ensinar é uma actividade profissional reflexiva que resulta num processo complexo e intencional de resolução de problemas profissionais. Refere que os professores possuem um corpo especializado de conhecimento, adquirido através do treino e da experiência, e confiam neste para a sua prática diária. É um conhecimento orientado para o objectivo de ensinar os seus alunos e muitas vezes algo preocupado em responder também às solicitações dos demais agentes do processo educativo e contaminado pelas suas solicitações. É um conhecimento que responde a situações complexas e ambíguas, analisando-as e interpretando-as, fazendo julgamentos e tomando decisões para traçar uma linha de acção em favor dos seus alunos. As respostas dos professores são intuitivas, imediatas e adaptadas ao contexto em que se desenrolam.

Na mesma linha de ideias, Berliner (1987) refere que “a experiência pode mudar uma pessoa” (p.81). Segundo este autor, o que permite a competência em qualquer área da actividade humana é a capacidade de se reflectir sobre a experiência. Desta forma, os professores competentes possuem um conhecimento mais elaborado e diversificado, que foi desenvolvido ao longo de anos de experiência e prática, ressaltando no entanto o autor que nem todos os professores aprendem da mesma forma, pelo que experiência não é condição única e suficiente para desencadear competência. Por conseguinte, este tipo de conhecimento especializado, complexo, frequentemente tácito e simplesmente derivável da experiência, que difere do dos professores em início de carreira, é de uma natureza diferente do conhecimento do conteúdo, pois engloba representações mentais acerca dos alunos e da organização e gestão da sala de aula, determinando, condicionando e alterando o próprio conhecimento do conteúdo dos professores. Resulta num conhecimento que advém de muitas horas de instrução e de interacção com os alunos, ao qual o autor chamou *conhecimento pedagógico (pedagogical knowledge)* que influencia a organização e a gestão da sala de aula e é a base para interpretar o currículo.

Numa perspectiva algo distanciada das anteriores, Wilson, Shulman e Richert (1987) caracterizam como redutoras as conceptualizações anteriores, por darem excessiva atenção à prática e ignorarem a importância do conhecimento do conteúdo na génese do conhecimento profissional do professor, aceitando a existência de uma

dicotomia entre a teoria e a prática, sendo a teoria a sua base. Na tentativa de reunir consenso acerca daquilo que os professores necessitam saber, as autoras levaram a cabo uma investigação, tendo-se debruçado sobre aquilo que, como viriam a constatar, constitui apenas uma das componentes do conhecimento profissional do professor - o conhecimento dos professores acerca do assunto a ensinar (*subject matter knowledge*) - e o papel que esse conhecimento desempenha no ensino. As investigadoras concluíram que os professores devem dominar o assunto a ensinar e esse conhecimento é provável que influencie a sua prática e a aprendizagem dos alunos; todavia, o conhecimento do assunto a ensinar revela-se por si só insuficiente, pois os professores necessitam de encontrar formas de comunicar esse conhecimento aos alunos. Por conseguinte, qualquer tentativa de conceptualização do conhecimento do professor deve incluir dois aspectos: o conhecimento teórico e prático do assunto a ensinar, que informa e é informado pela sua prática. O professor possui assim um corpo de conhecimentos profissionais que inclui um conhecimento do assunto a ensinar e conhecimentos de pedagogia necessários para ensinar esse conteúdo, o qual Shulman apelidou de *conhecimento pedagógico do conteúdo* (*pedagogical content knowledge*). A reflexão constitui o cerne deste processo de aprendizagem a partir da experiência, em que o professor se detém para “olhar para trás”, reflecte acerca do ensino e da aprendizagem que ocorreu e reconstrói significados. Como que um processo cíclico, ele regressa ao ponto de partida com uma nova compreensão, fruto de uma transformação do seu conhecimento profissional.

Também este modelo foi criticado por atribuir muita importância a aspectos proposicionais do conteúdo do conhecimento do professor em detrimento da sua vertente prática e de aspectos relacionados com o contexto (Borrvalho, 2002; Garção, 2004).

Foram aqui apresentadas algumas das perspectivas que pretendem fornecer um contributo para aquilo que constitui o complexo e como que intangível conhecimento do professor. Sem o intuito de tomar partido por nenhuma delas, pois acredita-se que não existem modelos perfeitos, pretende-se sim tomar em linha de conta aquilo que é comum em todas elas e particular de cada uma, para enriquecer a compreensão global acerca do conhecimento profissional do professor. Passemos assim à análise de outra das suas componentes, a estrutura.

A estrutura do conhecimento profissional do professor

São muitos os autores que teorizam acerca da estrutura do conhecimento profissional do professor. Elbaz (1983) refere que é razoável admitir-se que o conhecimento do professor obedece a uma estrutura interna, pois é um conhecimento que guia a sua prática e gera alguma consistência ao seu trabalho. Por conseguinte, o conhecimento está organizado de uma forma hierárquica, com diferentes níveis de generalidade, destacando o autor três termos para reflectir a sua relação com a prática, com a experiência do professor e com a dimensão pessoal: regras de prática, princípios práticos e imagens.

As regras de prática constituem directrizes específicas, formuladas para indicar o que se deve “fazer ou não fazer” na resolução de um conflito encontrado na prática. Os princípios práticos referem-se aos propósitos do professor. São mais inclusivos e de formulação menos explícita, sendo mais expressivos acerca da dimensão pessoal do conhecimento prático do professor. A imagem é de todos a menos explícita e a mais inclusiva das três.

A este nível, as imagens que os professores formam acerca de como um professor deve ser, da sua experiência, do conhecimento teórico, do contexto, incorporam os sentimentos, valores, crenças e necessidades. Estão por isso embebidas de juízos de valor, sendo sumários descritivos e metafóricos do posicionamento global do professor que orientam a sua conduta, expressam os seus propósitos e medeiam o pensamento e a acção (Linares & Sánchez, 1990). Elbaz refere ainda que estes três níveis estão inter-relacionados de uma forma não unidireccional e interagem uns com os outros, mas nem sempre os três níveis estão envolvidos. As imagens e os princípios podem dar origem a várias regras que os exemplificam. Segundo Guimarães (1996), tanto as regras como os princípios práticos incorporam várias componentes do conhecimento, enquanto que as imagens orientam as tomadas de decisões e a realização de julgamentos que orientam a prática, sendo temporais, interactivas e não neutras. Desta forma, as regras e os princípios expressam o conhecimento instrucional, enquanto que as imagens servem para requisitar aspectos do conhecimento prático do professor (Elbaz, 1983).

Também Wilson, Shulman e Richert (1987) apresentam uma proposta para a organização do conhecimento profissional. Segundo as autoras, o conhecimento humano é armazenado em conjuntos e organizado em *esquemas* que as pessoas utilizam

para interpretar situações familiares e raciocinar acerca de situações novas. Por conseguinte, as experiências são traduzidas em *representações internas*. A habilidade de representar um assunto é um aspecto importante do conhecimento. Para que os professores sejam bem sucedidos, não basta terem uma compreensão intuitiva ou pessoal de um conceito, princípio ou teoria particular, devem também compreender maneiras de comunicar o conhecimento e de o transformar nas finalidades do ensino.

O professor tem assim um papel importante no desenvolvimento de representações poderosas e apropriadas, pois necessita de avaliar a sua própria compreensão do assunto a ensinar e deve ter um bom conhecimento das possibilidades representacionais relevantes para a compreensão deste por parte dos seus alunos. Desta forma, o professor possui um vasto *reportório representacional* como *narrativas, exemplos, associações*, pois tal como “os alunos são muitos múltiplos também as representações devem ser várias” (Wilson, Shulman & Richert, 1987, p.113). Esta multiplicidade é continuamente criada pelo professor, introduzindo alterações e representações alternativas nos seus esquemas, susceptíveis de enriquecer e aumentar a sua própria compreensão sobre assunto que ensina.

Berliner (1987) também forneceu algum contributo para a compreensão de como se estrutura o conhecimento do professor na sua mente, tendo concluído que os professores experientes diferem dos professores em início de carreira de diversas formas. No caso dos professores mais experientes, a sua experiência dá-lhes *representações mentais* acerca do aluno típico. Possuem *esquemas* elaborados (redes de conhecimento que orientam a prática) e um *reportório* com significados pessoais acerca dos alunos, inteiramente desenvolvidos, através dos quais operam, estando estes devidamente “rotulados” com termos. Quando um aluno é rotulado de tímido, o termo chama episódios ou eventos que são a sua fonte rica de conhecimento pessoal.

Enquanto os professores novatos possuem um tipo de conhecimento proposicional, formado por factos, princípios e conceitos, os professores experientes possuem *imagens* acerca dos conhecimentos e habilidades que os alunos podem possuir, daqueles que podem necessitar de mais apoio seu, e dos comportamentos e problemas de indisciplina que pode vir a ter, que adveio da experiência. Também a sua memória para a informação está organizada de maneira diferente e sua percepção é mais selectiva e centrada nos eventos e episódios instrucionais; por conseguinte, o que recordam parece ser mais funcional. Em suma, os professores experientes parecem possuir um processo cognitivo que engloba *esquemas ricos*, um *conhecimento episódico* sobre os

alunos e uma *memória singular* para analisar o trabalho dos mesmos ou para planejar outras tarefas instrutivas.

Analisada que foi a estrutura do conhecimento do professor, passemos a outra das suas dimensões, o conteúdo. Qual é afinal a substância do conhecimento do professor? O que sabem os professores?

O conteúdo do conhecimento profissional do professor

Uma terceira dimensão que Elbaz (1983) propõe para o conhecimento prático do professor é o conteúdo. Assim, o conhecimento prático é um conhecimento de algo que está estritamente relacionado com o conhecimento de como fazer alguma coisa. Para se referir ao conteúdo do conhecimento prático do professor, Elbaz (1983) propõe cinco categorias para o descrever: *conhecimento de si (self)*, *conhecimento do contexto de ensino (milieu of teaching)*, *conhecimento do assunto a ensinar (subject matter)*, *conhecimento do desenvolvimento do currículo (curriculum development)* e *conhecimento instrucional (instruction)*. O *conhecimento de si* diz respeito à forma como os valores pessoais e propósitos dos professores se relacionam e informam a sua prática. Inclui também a imagem que o professor tem de si, enquanto professor e profissional, a forma como vê o seu lugar da sala de aula e na escola e os tipos de autoridade e responsabilidade que assume. O *conhecimento do contexto de ensino* é expresso pelas declarações e opinião acerca do mesmo e pela forma como o professor organiza a sua experiência social na escola. Inclui a configuração da sala de aula, as relações do professor com os colegas e administradores da escola, a sua visão acerca do contexto político de educação e o lugar que pretende ocupar dentro da escola. O *conhecimento do assunto a ensinar* refere-se ao conhecimento que é concebido na e para a prática, incluindo a forma como a experiência modifica esse conhecimento. Diz respeito às concepções que estão na base das diferentes facetas do assunto e as formas como os professores seleccionam e combinam diferentes áreas da disciplina. Refere-se também à visão que os professores possuem dessa mesma disciplina e das suas finalidades. O *conhecimento do desenvolvimento do currículo* diz respeito à forma como os professores percebem o processo de desenvolvimento curricular e os processos de formação, a organização do processo instrutivo, a elaboração de materiais,

os objectivos e as finalidades do currículo e as necessidades dos alunos bem como o impacto que estes aspectos têm na sua evolução do conceito de currículo. O conhecimento instrucional engloba o conhecimento dos alunos e do processo de ensino-aprendizagem.

Calderhead (1987), por seu turno, refere que, ao considerar-se o ensino como uma actividade profissional, é natural que se aceite a existência de um corpo de conhecimento especializado por parte do professor. Por conseguinte, o professor, tal como outros profissionais, adquire no seu dia-a-dia um conhecimento especializado que advém da experiência e no qual tem inteira confiança, sendo um conhecimento sobre o currículo, sobre os métodos de ensino, sobre o assunto a ensinar e sobre o comportamento das crianças e outra informação associada à riqueza de trabalhar com crianças em numerosos contextos e com diferentes materiais.

Também Berliner (1987) deu algum contributo para aquilo que constitui o conhecimento do professor, referindo que é um tipo de conhecimento que os professores experientes revelam, um conhecimento complexo, tácito e que se desenvolve com a experiência, o qual apelidou de conhecimento pedagógico. Este conhecimento influencia a gestão e organização da sala de aula e é a base para interpretar o currículo. Inclui o conhecimento acerca dos saberes prévios e das necessidades dos seus alunos, de estratégias de sala de aula e acerca dos tipos de comportamentos e problemas de indisciplina que pode esperar.

Wilson, Shulman e Richert (1987) desenvolveram um modelo onde referem que os professores extraem diversos tipos de conhecimentos quando necessitam de realizar decisões sobre o conteúdo das suas actuações, a que chamam de componentes base do conhecimento profissional do ensino e são as seguintes: o *conhecimento do conteúdo*, que inclui a sua compreensão acerca dos factos e conceitos pertencentes a um domínio; o *conhecimento das metas, finalidades e valores educativos* que contribuem para as decisões pedagógicas; o *conhecimento pedagógico geral*, que inclui o conhecimento de princípios e técnicas pedagógicas que não estão relacionados com o assunto a ensinar; o *conhecimento dos alunos*, incluindo conhecimento das suas características e das suas cognições, assim como aspectos motivacionais e desenvolvimento da sua aprendizagem; o *conhecimento do currículo*, que reflecte o seu entendimento dos programas e materiais designados para leccionar determinados tópicos e assuntos a um determinado nível; o *conhecimento de outros assuntos*, que engloba conhecimentos de outras disciplinas que não aquela que lecciona; e, por fim, o *conhecimento do contexto*.

Na perspectiva das autoras, o modelo das componentes base do conhecimento é desenvolvido sobre o pressuposto de que os professores requerem um corpo de conhecimento profissional que engloba conhecimentos de pedagogia em articulação com o assunto a ensinar. O *conhecimento pedagógico geral* diz respeito a teorias e princípios sobre ensino e aprendizagem, conhecimento dos alunos e conhecimento dos princípios e técnicas do comportamento e gestão da aula. Por seu turno, o *conhecimento do assunto a ensinar* inclui as estruturas substantivas (ideias, factos, e conceitos de um determinado campo e as relações entre eles) e as estruturas sintácticas da disciplina (conhecimento da forma como a disciplina cria e avalia novo conhecimento).

Influenciado por ambos os tipos de conhecimentos anteriores *do assunto a ensinar e o pedagógico geral*, as autoras referem a existência de um conhecimento bastante importante para o professor, o *conhecimento pedagógico do conteúdo* (*pedagogical content Knowledge*), que emerge tendo por base o conhecimento do conteúdo e cresce à medida que aquele é transformado nas finalidades do ensino. Desta forma, o *conhecimento pedagógico do conteúdo*, também apelidado por *conhecimento didáctico* (Ponte, Oliveira, Brunheira & Varandas, 1999b), inclui o entendimento do que significa ensinar um determinado tópico, assim como o domínio dos princípios e técnicas requeridas para fazê-lo. Por outras palavras, é uma forma de conhecimento de conteúdo que:

Personifica os aspectos do conteúdo os mais ligados à sua capacidade de ensino. Dentro da categoria de conhecimento pedagógico do conteúdo, eu incluo os tópicos mais regularmente ensinados numa determinada área, as formas de representação daquelas ideias, as analogias mais poderosas, ilustrações, exemplos, explicações, e demonstrações - em uma palavra as maneiras de representar e de formular o assunto que o fazem compreensível a outro... [ele] igualmente inclui uma compreensão do que faz a aprendizagem de tópicos específicos fácil ou difícil: as concepções e as pré-concepções que os estudantes de idades e de proveniências diferentes trazem com eles para a aprendizagem (Shulman, 1986, p. 9, *in* Wilson, Shulman & Richert, 1987).

O conhecimento didáctico do professor. Ponte *et al.* (1999b) identificam o conhecimento pedagógico do conteúdo de Shulman com o conhecimento didáctico que, segundo estes autores, “faz a síntese entre pedagogia e conteúdo [...] este [o professor] não só conhece a disciplina e princípios pedagógicos gerais, como os conhece de um modo integrado, em função das necessidades da sua prática profissional.” (Ponte *et al.*, 1999b, p. 45).

Da revisão da literatura realizada acerca do conteúdo do conhecimento profissional do professor, parece poder concluir-se que este conhecimento é abrangente, complexo e diversificado, pois vai beber a vários tipos de conhecimentos, tanto relacionados com o conteúdo, como com a pedagogia. Da intersecção das diversas componentes deste conhecimento, emerge a ideia de que estas estão fortemente mescladas, sendo muitas vezes difícil isolá-las (Canavarro, 2003). Debrucemo-nos, por ora, sobre as que estão mais fortemente relacionadas com a condução do processo de ensino-aprendizagem e que, por isso, constituem as quatro categorias do conhecimento didáctico do professor de Matemática: conhecimento da Matemática, conhecimento dos alunos e dos seus processos de aprendizagem, conhecimento do currículo e conhecimento do processo instrucional (Canavarro, 2003; Ponte, 1996b).

A pedagogia envolve três domínios decisivos: o currículo (objectivos e sua articulação com os conteúdos); os alunos e os seus processos de aprendizagem; e o conhecimento necessário à organização e condução das aulas. Ao passo que os conhecimentos da Matemática, do currículo e dos alunos e da aprendizagem, não obstante a sua componente experiencial, englobam saberes de referência determinados, o conhecimento da instrução, pelo contrário, apresenta uma natureza distinta, estando directamente ligado a aspectos processuais e intuitivos, só perceptível quando analisada a prática lectiva do professor. A figura que se segue põe em evidência os aspectos do conhecimento pedagógico, ressaltando a dicotomia existente entre a teoria e a prática profissional na tentativa de integrar o conhecimento base com o conhecimento na acção (Oliveira e Ponte, 1997).

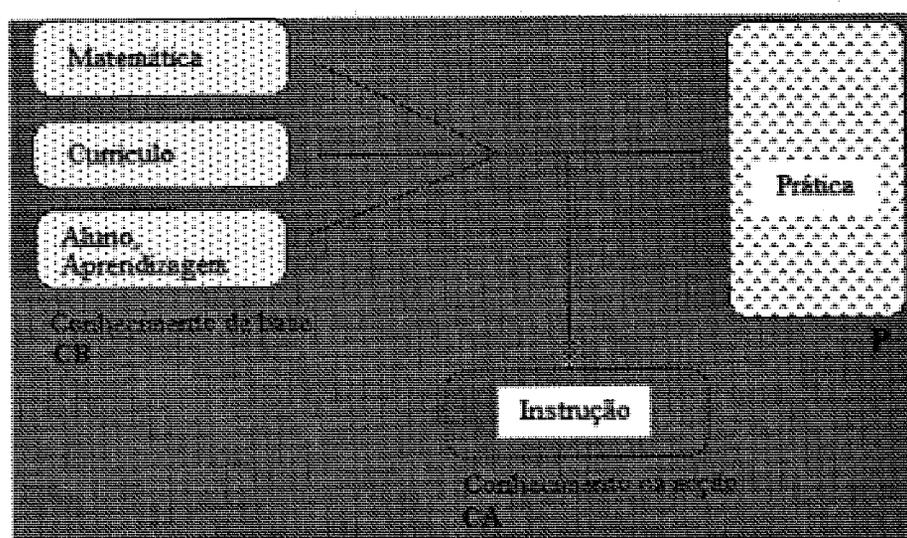


Figura 1: Um modelo alternativo para o estudo do conhecimento profissional (Oliveira & Ponte, 1997)

Segundo Canavarro (2003, p.37) o conhecimento profissional do professor engloba campos específicos “que são mobilizados de forma diferente perante as diversas actividades profissionais do professor”.

No que refere ao desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem, analisemos, no quadro que se segue, alguns dos indicadores pertencentes a cada um dos domínios do conhecimento didáctico do professor.

Quadro 1: Categorias do conhecimento didáctico do professor (Oliveira *et al.*, 1999, p. 197).

Matemática	Conceitos Terminologia Relações entre conceitos Processos matemáticos Forma de validação de resultados Competências básicas e processos de raciocínio
Processos de aprendizagem	Relação entre acção e reflexão Papel das interacções Papel das concepções dos alunos Papel dos conhecimentos prévios Estratégias de raciocínio Perspectivas em relação às capacidades dos alunos
Currículo	Finalidades e objectivos Ligação entre conceitos Ligação com os outros assuntos Representações dos conceitos Materiais
Instrução	Ambiente de trabalho e cultura da sala de aula Tarefas – concepção, selecção, sequenciação Tarefas – apresentação, apoio da execução, reflexão Actividade Comunicação e negociação de significados Modos de trabalho na sala de aula

“O conhecimento didáctico é o traço mais distintivo do conhecimento profissional do professor” (Ponte *et al.*, 1999b, p. 45). Todavia, verifica-se, como já havia sido referido, que o conhecimento profissional “não existe compartimentado” e, por isso, o conhecimento didáctico está relacionado com outros dois “domínios essenciais” do conhecimento do professor: (i) o conhecimento de si mesmo - inclui a auto-imagem que o professor possui enquanto pessoa e profissional, as suas virtudes e limites. Constitui um aspecto muito importante para a acção do professor e compreensão global do conhecimento como um todo integrado; (ii) o conhecimento do contexto – engloba, antes de tudo, o conhecimento dos alunos, que constituem o cerne

da sua prática, assim como o conhecimento dos colegas, encarregados de educação, comunidade e sistema educativo. Inclui, também, aspectos relacionados com a visão da profissão, como o estatuto, autonomia, investimento (Ponte, 1995).

Analisemos, de uma forma mais pormenorizada, cada uma das categorias do conhecimento didático do professor, indicadas no quadro 1, que são aquelas que assumem particular interesse neste estudo.

Conhecimento da Matemática. A ideia de que o professor deve ter um bom conhecimento de Matemática está largamente generalizada. O que não consegue reunir consenso são as mais variadas respostas para a pergunta: o que se entende por um “bom conhecimento de Matemática?” (Ponte *et al.*, 1998b, p. 225). Acerca deste aspecto, Ponte *et al.* referem ainda:

É saber muita Matemática? Que Matemática? É saber com bastante profundidade a parte restrita da Matemática que se é chamado a ensinar? É conhecer também alguns aspectos da História e algumas aplicações importantes de diversos domínios da Matemática? É conhecer apenas conceitos e técnicas ou inclui igualmente a capacidade de resolver problemas e de realizar pequenas investigações? (Ponte *et al.*, 1998b, p. 225).

Quanto ao conhecimento de Matemática que os professores devem possuir, Ball, Lubienski e Mewborn (2001) referem que este é de natureza diferente do conhecimento que os matemáticos possuem, em virtude de terem estudado matemática aplicada.

A este respeito, também Wilson, Shulman e Richert (1987) não negam a necessidade da compreensão de um conhecimento amplo e específico do assunto a ensinar por parte do professor, mas este não constitui condição suficiente para se estar capacitado para ensinar. O professor deve também ter a habilidade de comunicar esse assunto de uma forma compreensível aos seus alunos.

Ainda sobre este assunto, um estudo levado a cabo por Ball (1990) indica que, por vezes, são os professores com um melhor domínio científico que fomentam níveis mais fracos de aprendizagem (referido em Ponte, 1995).

Ponte (1995), na tentativa de elucidar acerca do tipo de conhecimento da Matemática que os professores possuem, refere que este, para além do *conhecimento de tópicos específicos*, engloba também uma *visão geral sobre a matemática*, quer como ciência quer como disciplina escolar, a *perspectiva sobre a sua natureza* e a sua *relação com a realidade*. Todos estes domínios do conhecimento matemático possuem a sua

base formal e objectiva, mas estão também intimamente relacionados com o conhecimento prático do professor.

A perspectiva anterior é, em alguns aspectos, semelhante à exposta por Ball (1991), que propõe uma descrição do conhecimento matemático para o ensino com três componentes: *o conhecimento da disciplina*, que inclui o conhecimento proposicional e procedimental (tópicos específicos e relações entre eles, conceitos, assim como procedimentos e algoritmos) e que tende a ser a visão generalizada do que é o conhecimento matemático para o ensino; *conhecimento sobre a disciplina*, que engloba o entendimento acerca da natureza do conhecimento matemático e da actividade matemática, que tem tido pouca expressão curricular; não obstante, a visão dos professores acerca da Matemática é transmitida, de uma forma inadvertida, aos seus alunos, através da forma como organizam as suas aulas, nas tarefas e materiais que seleccionam e pelo tipo de discurso que mantêm com os seus alunos; e a *relação do professor com a disciplina* refere-se à atitude, à resposta emocional e ao relacionamento com a disciplina (Canavarro, 2003).

Da investigação empírica realizada em Portugal nos últimos anos, resulta a ideia de que parece existir o denominador comum de que os professores possuem um conhecimento insatisfatório da Matemática, “em diversos aspectos inadequado”. Torna-se premente definir quais as competências a desenvolver nos professores dos diferentes níveis de ensino de forma a colmatar os problemas detectados, quer a nível do conhecimento científico, quer a nível das suas capacidades (Ponte, Matos & Abrantes, 1998b).

Outra das ideias emergentes é a de que os professores tendem a revelar uma visão geral da matemática como um corpo de conhecimentos abstracto, como uma ciência exacta, rigorosa, universal e infalível, quando se preconiza que o seu conhecimento sobre a matemática deve traduzir uma visão desta ciência que relegue para segundo plano os seus aspectos utilitários, que contemple a compreensão da sua natureza como modo de pensar e como produto histórico e social da actividade humana (Ponte, Matos & Abrantes, 1998b; Silva *et al.*, 1999).

Verifica-se também que nem todos os professores apresentam a mesma relação com a Matemática, dependendo da visão e das concepções que possuem da mesma e que tiveram origem em reflexões sobre experiências próprias, de outrem, ou da forma como esta disciplina lhes foi apresentada ao longo do seu percurso escolar (Ponte, Matos & Abrantes, 1998b; Canavarro, 1993). Por conseguinte, a relação que os

professores devem manter com esta ciência também deve ser diferente, estando longe de ser a mais desejável, pois “sem viver a Matemática como um domínio onde é possível retirar prazer pela realização de actividades de exploração e descoberta, é difícil ver como podem esses professores promover tal perspectiva nos alunos” (Ponte, Matos & Abrantes, 1998b, p.236).

Ajudar os professores a melhorar as várias dimensões do seu conhecimento matemático é uma tarefa que se impõe, caso contrário estes poderão nunca ficar sensíveis para o facto de que a matemática com que os alunos devem contactar não deve ser apenas o “produto final” mas devem dar-lhe a oportunidade de se envolverem em momentos de actividade matemática genuína, contactar com o processo de criação que está inerente à natureza da matemática e ao que significa saber matemática, onde as tarefas de investigação devem ocupar um lugar de destaque (Silva *et al.*, 1999).

Conhecimento dos alunos e dos seus processos de aprendizagem. O sucesso do processo de ensino-aprendizagem deve incluir, por parte do professor, um conhecimento profundo dos seus alunos e da forma como eles aprendem. Por mais desenvolvido que o professor possua o conhecimento da Matemática e as demais componentes do seu conhecimento profissional, deve sempre possuir um domínio da situação concreta a que o seu conhecimento se vai aplicar e ao grupo-turma a que se destina (Varandas, 2000).

Esta importante componente do conhecimento didáctico do professor foi também ressaltada pelas autoras Wilson, Shulman e Richert (1987) ao se referirem a ela como uma das suas componentes base, que englobam o conhecimento das características dos alunos e das suas cognições, assim como os aspectos do desenvolvimento e os aspectos motivacionais da aprendizagem dos alunos. Só quando satisfeitos os requisitos anteriores, o professor poderá adequar as suas “representações do conteúdo” aos alunos de forma a tornar o seu conhecimento compreensível para os mesmos.

A evolução do estudo da aprendizagem por parte da Psicologia tem-nos apresentado várias perspectivas acerca da forma como os alunos aprendem, das quais se destacam o Behaviorismo, o Construtivismo Social e o Situacionismo (Canavarro, 2003). Toda a formação inicial de professores, de uma forma mais ou menos proeminente, proporciona a proximidade dos professores com tais abordagens. Verifica-se todavia que o conhecimento dos professores acerca dos seus alunos e da aprendizagem parece não ser guiado de uma forma explícita pela teoria, mas, tal como as outras componentes, resulta num saber predominantemente prático que os

professores adquirem através da experiência com as turmas que vão tendo e pela reflexão acerca das estratégias que vão implementado e dos resultados que vão obtendo (Canavarro, 2003).

Ainda relativamente ao conhecimento sobre a aprendizagem, Cunha (1998) refere que as crenças que os professores desenvolvem acerca da forma como os alunos aprendem apresentam uma matriz pouco formal, tendo origem durante a formação inicial e são influenciadas pela sua experiência enquanto alunos. Nas palavras de Thompson (1992), citado em Cunha (1998):

[..] as concepções acerca [..] da aprendizagem tendem as ser colecções ecléticas de crenças que aparentam ser mais o resultado dos anos de experiência na sala de aula do que de algum tipo de estudo formal ou informal (p.135).

Da investigação em Educação Matemática realizada, parece poder concluir-se que no seio dos professores impera uma visão tendencialmente negativa sobre os alunos e sobre a aprendizagem ancorada no senso comum, onde a via de excelência para a aprendizagem é a prática repetitiva de procedimentos, em que o domínio prévio de pré-requisitos é fundamental. Por conseguinte, o insucesso de alguns alunos é algo cumulativo e difícil de recuperar. A actividade matemática dos alunos resume-se muitas vezes ao “ver, ouvir e repetir”. Para os professores, a Matemática é uma disciplina só acessível a alguns, sendo a motivação o problema pedagógico que mais os afecta. Só após os alunos dominarem na plenitude as competências de cálculo, podem envolver-se em tarefas de natureza mais complexa (Ponte, Matos & Abrantes, 1998b).

Todavia, segundo Canavarro (2003), tal como as demais componentes do conhecimento didáctico do professor, também o conhecimento sobre a aprendizagem dos alunos está fortemente interligado com os outros domínios do seu conteúdo. Desta forma, qualquer análise desta componente traz sempre inerente aspectos como a visão da natureza e finalidades da Matemática que, como já se verificou anteriormente, tendem a não ser as mais desejadas, ou do conhecimento do currículo, o qual se analisará de seguida.

Conhecimento do currículo. O conhecimento curricular engloba o conhecimento das finalidades e orientações gerais do currículo, o conhecimento do currículo dos anos que lecciona e dos anos anteriores e posteriores, o domínio do conhecimento dos materiais utilizáveis e das abordagens e estratégias (Ponte, 1995).

Um currículo é “em sentido lato [...] um conjunto organizado de objectivos, orientações metodológicas, conteúdos e processos de avaliação” (APM, 1988, p.25). Por conseguinte, o currículo é um plano, um *instrumento*, um meio ao dispor de todos os agentes da educação que deve ter implícitos os princípios de clareza e utilidade, onde se apresentam linhas metodológicas, actividades e materiais de ensino e de avaliação. Todavia, *nenhum currículo pode ser concebido como definitivo*, sob pena de se tornar obsoleto, pois deve incorporar as características da sociedade e esta está em constante evolução. Desta forma, deve espelhar a evolução tecnológica e científica e, por isso, está sujeito a avaliações periódicas. A *flexibilidade* é outro dos aspectos-chave de um currículo, cujos eixos fundamentais são claros e explícitos e permitem concretizações diferenciadas para todos os professores e para cada um, uma vez que a tónica é deslocada dos conteúdos para as metodologias e objectivos do ensino da Matemática. Deve ser *significativo* para os alunos, isto é, deve o estudo de um conteúdo valer por si só, independentemente de ser importante para o futuro ou funcionar como um pré-requisito. A metodologia, tipo de actividades, interesse das situações e actualidade do assunto assumem particular atenção. A Matemática deve ser apresentada de uma forma *integrada*, ou seja, “deve incorporar e evidenciar as relações múltiplas existentes dentro da própria Matemática, as relações da Matemática com as outras disciplinas e as relações da Matemática com o mundo real” (APM, 1988, p. 28). O currículo deve ser *equilibrado*, pois “a Matemática deve ser para todos”, não significando que todos tenham contacto com a mesma Matemática, privilegiando-se actuações diversificadas e níveis de diferenciação de acordo com as diferentes vocações ou intenções profissionais (APM, 1988, p.29).

Dado o carácter histórico do currículo, decorrente das alterações constantes da nossa sociedade, em Portugal tem-se assistido a algumas reformas curriculares e programáticas. Relativamente ao ensino básico, no ano de 2001 entrou em vigor o Decreto-Lei 6/2001 referente à Reorganização Curricular do Ensino Básico, resultante de um projecto de reflexão e transformação do currículo do ensino básico (Abrantes, 2002). Foi também publicado recentemente o novo Programa de Matemática para o Ensino Básico, cuja fase de experimentação se iniciou nas escolas no ano lectivo 2008/09.

Verifica-se todavia que o conhecimento que o professor possui do currículo e dos demais documentos curriculares é muitas vezes inapropriado, constituindo-se este aspecto como um obstáculo à sua legítima operacionalização.



A visão de currículo não é a mesma para todos os professores (Ponte, Matos & Abrantes, 1998b). Segundo Cunha (1998), os professores possuem crenças e concepções acerca de algumas componentes curriculares que consideram de maior importância, como os conteúdos programáticos, a sua articulação e a introdução de novos conteúdos, os objectivos para o ensino da Matemática, as metodologias recomendadas, o uso de tecnologia (calculadora e computador), a avaliação, entre outros.

Sobre este aspecto, a investigação educacional tem ressaltado que os professores tendem a realizar uma análise redutora dos programas, considerando-os extensos e reduzindo-os a uma listagem de matérias e assuntos a ensinar, que traduz uma sobrevalorização das finalidades relativas à aquisição de conhecimentos e ao domínio de procedimentos por parte dos alunos. O cumprimento dos programas é o grande “cavalo de batalha” dos professores, resumindo-se à leccionação de todos os tópicos seleccionados para cada ano lectivo e deixando para segundo plano as finalidades e metodologias. Desta forma, parece haver uma grande confusão naquilo que constitui o programa e aquilo que significa cumprir o programa (Ponte, Matos & Abrantes, 1998b).

Segundo Oliveira *et al.* (1999a) parecem existir dois tipos de relacionamento entre currículo e professor: (a) o currículo como documento com força de lei, que é preciso respeitar e seguir à risca, principalmente no que se refere aos conteúdos a leccionar; (b) currículo como orientador, que é preciso adaptar consoante o contexto de trabalho e as características, necessidades e interesses dos alunos, dando-se alguma margem de autonomia na sua interpretação, adaptação e recriação.

Garção (2004) afirma que alguns professores tendem a apresentar uma visão estática de currículo e tendem a reduzi-lo a um conjunto de programas, que cumprem integralmente, sendo o manual escolar o principal mediador das suas práticas.

Outro aspecto problemático a nível curricular é o uso das tecnologias. O desenvolvimento das Novas Tecnologias de Informação, nomeadamente a vulgarização da calculadora e do computador, veio questionar as práticas tradicionais do ensino da Matemática (Velo, 1991). A sua utilização na sala de aula coloca vários desafios aos professores, em particular a questionação acerca de alguns aspectos metodológicos e sobre a pertinência da leccionação de alguns conteúdos programáticos (Cockroft, 1985).

Ponte (1994b) refere que a investigação feita em Portugal mostra que os professores fazem pouco uso dos materiais didácticos com excepção dos tradicionais quadro, giz e manual. As novas tecnologias, não obstante as recomendações programáticas e curriculares, estão ainda pouco integradas nas práticas lectivas. Esta

tendência é coerente com uma tradição do ensino ainda vigente, que valoriza a exposição pelo professor e a resolução de exercícios por parte dos alunos, sendo um obstáculo à generalização de modos de trabalhar que coloquem o aluno no centro da aprendizagem. No que concerne à calculadora, esta é aceite de modos muito diversos e usada de formas distintas, não se tirando dela as potencialidades enunciadas nos documentos oficiais. Relativamente ao computador, os professores vêem nele essencialmente um instrumento de motivação dos alunos. A sua utilização revela-se problemática, pelas questões de ordem técnica e logística que envolve. Aulas envolvendo tecnologia requerem uma significativa preparação, e a sua implementação exige algum domínio técnico e didáctico.

Uma outra componente curricular não menos importante é a avaliação, sendo também fonte de dificuldades e controvérsias para os professores. Existe uma tendência generalizada para sobrevalorizar os testes como instrumento único de avaliação, mas os testes são indicadores apenas das aprendizagens dos alunos relativas a conteúdos e procedimentos, não conseguindo caracterizar aspectos essenciais do progresso dos alunos. No entanto, preconiza-se cada vez mais a valorização de uma avaliação de carácter formativo e a necessidade de diversificar as metodologias e formas de avaliação (Ponte, Matos & Abrantes, 1998b).

As formas de avaliação parecem ser decorrentes da posição relativamente às demais componentes do currículo; no entanto, verifica-se que esta “exerce uma influência muitas vezes decisiva sobre os objectivos, os conteúdos e os métodos que são realmente valorizados.” Todas as componentes do currículo devem ser analisadas de uma forma integrada e devem revelar coerência (Ponte *et al.*, 1998b). Todavia, as pressões exercidas, resultantes da realização de exames no final do ciclo e do 12.º ano, vão dando aos professores “mensagens muito controversas” (Ponte *et al.*, 1998b).

O caminho perspectiva-se na direcção da adopção de uma visão de currículo como um orientador da prática do professor que possa constituir o alicerce de uma prática coerente com uma visão actual da Matemática, cujas finalidades de ensino valorizem “a capacidade de formular e resolver problemas, de raciocinar criticamente, de modelar situações, de analisar criticamente processos e resultados e de usar metodologias diversificadas” (Silva *et al.*, 1999, p. 69). O conhecimento acerca da gestão curricular é um conhecimento que necessita de ser constantemente alimentado e renovado, acompanhando a evolução das perspectivas curriculares, possibilitando a adopção de um quadro curricular que preconize como grande objectivo do ensino da

Matemática o desenvolvimento do “poder matemático” enunciado pelo NCTM (1998) em detrimento do tão generalizado domínio de técnicas de cálculo (Ponte & Oliveira, 2002).

Conhecimento do processo instrucional. Esta quarta e última componente do conhecimento didáctico, pela ordem aqui adoptada, constitui, segundo Ponte e Oliveira (2002), a sua vertente fundamental.

Santos (2000) revela que o conhecimento instrucional é determinado de uma forma directa pelas demais componentes do conhecimento didáctico, assim como pelo conhecimento do contexto e pelo conhecimento que o professor possui de si (figura 2).

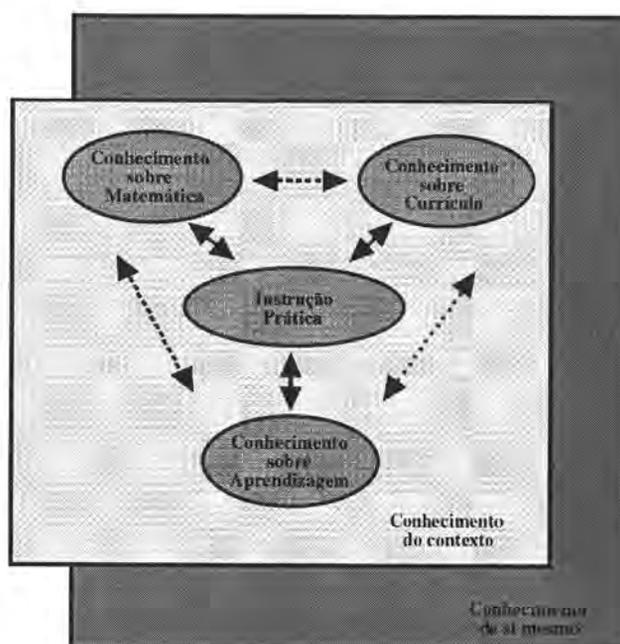


Figura 2: Componentes do conhecimento profissional, posto em uso na prática lectiva (Santos, 2000 p.65)

O conhecimento acerca do processo instrucional refere-se ao conhecimento directamente relacionado com a prática lectiva, apresentando um papel determinante nas fases de planificação, condução e avaliação do processo de ensino e aprendizagem (Canavarro, 2003).

A respeito desta componente do conhecimento do professor, Ponte e Oliveira (2002) referem que esta:

Inclui como aspectos fundamentais a planificação de longo e médio prazo bem como de cada aula, a concepção das tarefas e tudo o que diz respeito à condução das aulas de Matemática, nomeadamente as formas

de organização do trabalho dos alunos, a criação de uma cultura de aprendizagem da sala de aula, a regulação da comunicação e a avaliação das aprendizagens dos alunos e do ensino do próprio professor. Esta vertente inclui tudo o que se passa antes da aula, em termos de preparação e tudo o que se passa depois, em termos de reflexão, mas o seu núcleo essencial diz respeito à condução efectiva das situações de aprendizagem (p.7).

É através da prática que o professor acciona um ou mais esquemas do conhecimento que vão ser fortalecidos pela produção de novos esquemas decorrentes das decisões e acções que realiza em função da actividade concreta. Decorrida a acção novas entidades conceptuais se formarão através da reflexão e da avaliação dos episódios da memória. Os esquemas conceptuais mobilizados vão dar lugar à agenda, monitorização e avaliação da actividade da aula (Ponte *et al.*, 1999b).

Clark and Yinger (1987) realizaram um estudo acerca da fase *pré-activa* da prática do professor. O processo de *planificação* é um plano mental de ideias e conhecimentos acerca dos alunos, da escola, do currículo, que se misturam para formar uma “imagem” que actua como um guia da acção na sala de aula. Planificar é “um processo psicológico básico em que a pessoa visualiza o futuro, estabelece meios e fins e constrói estruturas para guiar a sua acção futura” (p.86). Este estudo sugere que o acto de planificar pode servir diferentes propósitos, assim como pode apresentar vários tipos, como anual, por período, por semana, por unidade ou por aula. A mais usual entre os professores é a planificação por unidade e, em seguida, por semana e por aula. As razões mais frequentes que levam os professores a planificar são as seguintes: planificar para satisfazer necessidades pessoais imediatas (para reduzir a incerteza e a ansiedade, para encontrar direcção a seguir, confiança e segurança); planificar como um meio e um fim instrucional (para conhecer material, para recolher e organizar materiais, para organizar o tempo e o fluxo da actividade); para utilizar directamente os planos durante a instrução (para organizar os alunos, para iniciar a actividade, como auxiliar de memória, para fornecer um quadro para a instrução e avaliação).

Ao plano mental realizado por uma aula, Ponte *et al.* (1999b) apelidam-no de agenda. Começa a desenvolver-se num momento anterior à acção e nunca apresenta um carácter definitivo, mas dinâmico, evoluindo à medida que a preparação da aula se torna mais específica, ou mesmo durante a própria aula, quando o professor necessita de fazer escolhas, tomar decisões e fazer alterações imprevistas. A agenda termina com o final da aula, podendo vir a servir apenas como objecto de análise.

Esta imagem mental não assume em geral forma escrita, embora este aspecto varie em função da experiência profissional do professor (Canavarro, 2003).

Clark and Yinger (1987) referem que o leque de prioridades a que obedece a planificação do professor não é linear, sendo que os interesses dos alunos e o contexto de ensino surgem como preferenciais, em detrimento de aspectos relacionados com os objectivos. Outro enfoque que a investigação realizada por estes autores proporcionou é que durante a planificação a categoria que ocupa mais tempo aos professores é a abordagem dos conteúdos; em seguida, o delineamento de estratégias e tarefas a realizar, e só uma pequena parte é dedicada aos objectivos.

Gimeno (1989), em Canavarro (2003), atribui às tarefas um papel fundamental na planificação, devido ao seu carácter estruturante da acção. Relativamente aos materiais de suporte desta planificação, os manuais são os principais mediadores da acção do professor (Garção, 2004).

Não obstante a importância da planificação e da reflexão, o aspecto fulcral do conhecimento do processo instrucional é a *condução da aula*, também identificada com a fase a monitorização. Esta fase tem por base a agenda definida, no entanto recorre às estruturas conceptuais do conhecimento do professor em tempo real e resulta numa tensão constante entre os objectivos previamente estabelecidos e a avaliação que realiza da actividade dos alunos (Ponte *et al.*, 1999b).

Ponte *et al.* (1999a) ressaltam a importância do complexo papel do professor na condução da aula, pois esta não se esgota com a selecção de tarefas válidas e envolventes. Por conseguinte:

O professor tem de ser capaz de construir um ambiente de aprendizagem estimulante e criar múltiplas oportunidades de discussão e reflexão entre os alunos, mas isto não será bastante se as tarefas matemáticas propostas não constituírem um terreno propício a uma exploração matemática rica ou se não forem suficientemente desafiantes. [...] Contudo o professor será sempre um actor central neste processo e parte do seu trabalho não pode ser formalizado. Fica a cargo do seu senso matemático e educacional decidir o que é importante a cada momento, escutando muito, mostrando flexibilidade, e tentando descobrir qual será o movimento seguinte mais adequado (Ponte *et al.*, 1999a, p. 149).

Carter e Doyle (1987) referem que contexto e a realidade da sala de aula se instituem como constrangimentos no processo de instrução. Ensinar consiste em duas grandes tarefas: atingir a ordem social e gerir o trabalho académico. Assim, as preocupações com a gestão da sala de aula sobrepõem-se às preocupações de

desenvolvimento conceptual dos alunos. Quando são apresentadas tarefas pouco familiares e complexas aos alunos, susceptíveis de acarretar desordem e ruptura, o professor responde a este dilema renegociando o trabalho com os alunos, repartindo a tarefa em unidades mais simples, tornando-a mais fácil, para que estes obtenham bons resultados. Os professores mostram uma tendência para manter o que lhes é familiar, em detrimento da introdução de procedimentos novos e incertos.

Corroborando esta ideia, Boavida (1993) refere que a aula de Matemática típica dos professores apresenta três tempos: enquadramento, exposição e consolidação. Esta estrutura de aula tende a ser considerada pelos docentes como a mais eficiente para o controlo disciplinar dos alunos (Canavarro, 1993).

Verifica-se todavia que várias são as orientações curriculares e do seio da comunidade de educadores matemáticos para que os alunos tenham oportunidade de contactar com uma experiência matemática autêntica, próxima da actividade dos matemáticos, desenvolvendo e utilizando processos matemáticos e capacidades de ordem superior. Este aspecto deve constituir o cerne do ensino-aprendizagem da disciplina de Matemática (Ponte *et al.*, 1999a).

As aulas implicando tarefas que proporcionem uma actividade rica e genuína aos alunos são de natureza diferente das aulas marcadas pela rotina, em que a exposição e o treino de procedimentos têm um carácter dominante. Por conseguinte, outro tipo de exigências e desafios se colocam aos professores, onde a imprevisibilidade e complexidade são uma constante, em que até a mais eficiente planificação pode não conseguir prever todos os caminhos que se poderão seguir (Canavarro, 2003).

A investigação desenvolvida mostra que este desafio está ao alcance de todos os professores, desde que assumam este tipo de ensino como uma meta pessoal e obtenham apoio das várias fontes e entidades com as quais se relacionam, desde a escola às autoridades educacionais, não ignorando o contributo da investigação educacional (Ponte *et al.*, 1999a).

Concluída a etapa de condução da aula, é altura de reflectir acerca da mesma, é a fase da *avaliação final*. Esta fase inicia-se com a condução da aula e refere-se a um balanço relativo à consonância entre a agenda e a leitura realizada acerca dos resultados obtidos nos seguintes aspectos: (a) o grau de previsibilidade das reacções dos alunos em relação ao planeado; (b) a adequação dos objectivos e a conduta do professor. A avaliação pode ter um carácter implícito, como geralmente ocorre com todos os professores quando tudo decorre como o previsto, ou, pelo contrário, pode apresentar

um carácter explícito quando o professor sente necessidade de realizar uma reflexão deliberada sobre a sua acção (Ponte *et al.*, 1999b).

Em suma, o conhecimento didáctico diz respeito à vertente do conhecimento profissional do professor relativo à prática lectiva. Este conhecimento na acção, orientado para a prática lectiva, relaciona-se directamente com o conhecimento do contexto (escola, comunidade, sociedade) e o conhecimento de si mesmo, incluindo quatro vertentes: o conhecimento da Matemática, o conhecimento do currículo, o conhecimento dos alunos e dos seus processos de aprendizagem e o conhecimento do processo instrucional. As quatro vertentes estão completamente dependentes entre si e marcam sempre presença, de uma forma mais ou menos incisiva, na prática do professor quando ensina Matemática (Ponte & Oliveira, 2002). Por conseguinte, na actividade do professor:

Está presente a Matemática escolar, estão presentes certos objectivos e prioridades curriculares, está presente a visão do aluno e do modo como aprende, bem como um conhecimento de modos de trabalho, recursos e formas de actuação prática do professor (Ponte e Oliveira, 2002, p.8).

Capítulo III

As investigações matemáticas

A natureza das investigações

As tarefas apresentadas aos alunos podem ser de natureza diversa, conforme os objectivos que se pretendam atingir e as competências que se aspirem desenvolver.

Desta forma, as tarefas podem variar quanto ao grau de desafio e acessibilidade que suscitam, quanto ao grau de estruturação e, também, se são referentes a contextos reais ou são formuladas em termos puramente matemáticos (Ponte, 2005). Ao passo que o grau de desafio de uma tarefa está intimamente relacionado com a percepção da acessibilidade e da dificuldade da mesma, podendo esta variar entre direcções antípodas de *desafio reduzido* e *desafio elevado*, o grau de estruturação remete para uma vertente que está relacionada com aquilo que é dado e pedido numa tarefa, variando entre os pólos *aberto* e *fechado*. Assim, uma tarefa *muito estruturada* diz-se *fechada* quando é claramente enunciado o que é dado e o que é pedido; pelo contrário, diz-se *aberta* quando é *pouco estruturada*, isto é, quando existe alguma indeterminação no que é dado, no que é pedido ou em ambas as componentes (Ponte, 2005). Neste último caso, a criatividade de quem resolve desempenha um papel crucial.

Na tentativa de se definir a natureza das tarefas de investigação, proceder-se-á à sua comparação com outras tarefas, como os exercícios, os problemas e as explorações,

para que, desta forma, se possa compreender o que é particular das investigações e qual a sua essência.

Para o efeito, observemos a figura 3, que resulta do cruzamento das dimensões *grau de desafio* e *grau de estruturação*.



Figura 3: Relação entre os diversos tipos de tarefas, relativamente ao seu grau de desafio e estruturação (Ponte, 2005, p.17).

Nos 1.º e 2.º quadrantes, situam-se as tarefas muito estruturadas, ditas fechadas, como sejam os exercícios e os problemas. Pese embora os primeiros originem um desafio reduzido, os problemas são susceptíveis de provocar um desafio elevado. Os 3.º e 4.º quadrantes dizem respeito às tarefas pouco estruturadas, ou seja, abertas, nomeadamente as explorações e as investigações. Embora as explorações conduzam a um desafio reduzido, as investigações, pelo contrário, são susceptíveis de envolver os alunos em graus bastante elevados de desafio intelectual.

A barreira que separa e demarca a essência de uma determinada tarefa nem sempre é muito clara, pois, por exemplo, o que é um exercício para uns alunos pode resultar num problema para outros, e vice-versa. Assim, a natureza de uma tarefa está também intimamente relacionada com os alunos a quem se destina, com os seus conhecimentos prévios, bem como com a natureza do apoio que é fornecido pelo professor (Ponte, 2005).

Por conseguinte, no que concerne à natureza dos exercícios e problemas, ambos apresentam uma estrutura bastante fechada, podendo, no entanto, causar graus de desafio bastante diversos. Polya, ao tentar distingui-los, refere que o problema resulta de uma questão para a qual o aluno não possui um método imediato para a sua resolução, enquanto que o exercício é uma questão que pode ser resolvida por um método familiar

ao aluno, o qual este facilmente adivinha. O cerne desta diferença reside no interesse educativo e na experiência matemática que as tarefas podem suscitar:

Se [o professor] preenche o tempo de que dispõe a exercitar os seus alunos em operações rotineiras, aniquila o interesse e tolhe o desenvolvimento intelectual dos alunos; [ao passo que se o professor] desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhe problemas adequados aos seus conhecimentos e ajudando-os em interpelações estimulantes, poderá despertar neles o gosto pelo pensamento independente e proporcionar-lhes alguns meios para o concretizarem (Polya, 2003, p.11).

A distinção entre problema e investigação é de certo modo mais clara, pese embora os dois proporcionem o envolvimento em processos complexos de pensamento. Ainda que ambos suscitem um grau de desafio muito elevado, a estruturação é bastante diferente. Em oposição aos problemas, nas investigações os pontos de partida não estão bem enunciados e necessitam de formulação e reformulação por parte dos alunos e, conseqüentemente, os pontos de chegada podem também ser bastante distintos entre si.

Enquanto que resolver um problema é *abrir caminho para a meta*, sendo os principais objectivos a estratégia seguida e a solução a que conduz (Ernest, 1991), nas investigações matemáticas a ênfase é totalmente deslocada da meta para a viagem, não existindo um objectivo específico. Pretende explorar-se um terreno desconhecido sob várias perspectivas, formular-se conjecturas e obter-se o convencimento geral da credibilidade das descobertas realizadas (Pirie, 1987, em Ernest, 1991). Na resolução de problemas, o processo converge para uma solução única; nas tarefas de investigação, o processo é divergente, podendo obter-se múltiplas conclusões.

Segundo Ponte (2005), o ponto de partida de uma investigação é o de identificar claramente o problema a resolver, resultando esta fase decisiva para tudo o que se vai passar de seguida. Pode assim afirmar-se que uma das características fundamentais das tarefas de investigação reside na necessidade da inclusão da formulação do problema, que precede a sua resolução, na formulação de questões de investigação, sendo o objecto de inquirição alterado pelo sujeito, o que irá condicionar o processo de resolução e, conseqüentemente, as conclusões obtidas. Como refere Ponte (2005):

Pode sempre programar-se o modo de começar uma investigação, mas nunca se sabe como ela irá acabar. A variedade de percursos que os alunos seguem, os avanços e recuos, as divergências que surgem entre eles, o modo como a turma reage às intervenções do professor são elementos largamente imprevisíveis numa aula de investigação (Ponte, 2005, p. 25).

Mais importante que estabelecer uma distinção entre problema e investigação, o que é essencial é que o professor dê a oportunidade aos seus alunos de se envolverem em experiências matematicamente ricas, que contenham conceitos matemáticos fundamentais, onde os alunos tenham oportunidade de experimentar, formular, discutir, conjecturar, generalizar, provar, comunicar as suas ideias e tomar decisões (Serrazina *et al.*, 2002).

Dado o carácter aberto das tarefas de investigação, estas podem participar da actividade matemática de todos os alunos com diferentes graus de competência matemática, e em todas as salas de aula, desde o nível pré-escolar ao ensino superior, cabendo ao professor o papel de adaptar a tarefa aos seus alunos (Ponte *et al.*, 2002b).

Este tipo de experiências matemáticas estimula os alunos a formular, a testar, a justificar, a provar as suas conjecturas, a reflectir e a generalizar as suas ideias. Na medida que incita à explicitação dos processos matemáticos dos alunos, à argumentação, à demonstração e à avaliação do trabalho realizado, perante a pequena comunidade matemática formada no contexto da sala de aula, permite-lhes em simultâneo perspectivar o verdadeiro trabalho dos matemáticos, em que o conhecimento matemático se desenvolve como um empreendimento comum (Santos *et al.*, 2002; Oliveira *et al.* 1998a; Ponte *et al.* 1999b).

Em última análise, quanto à sua natureza, as investigações são a dimensão da actividade matemática que identifica a *aprendizagem* da matemática com o *fazer* matemática (Oliveira *et al.*, 1996).

Processos usados na investigação matemática

O ensino tradicional, marcado por uma visão da matemática como ciência das verdades absolutas e do rigor, tem dado particular enfoque à apropriação passiva de conteúdos e ao treino de procedimentos. Várias são as orientações, no seio da comunidade de educadores matemáticos e de documentos oficiais, de que o cerne do ensino deve ser a aquisição de capacidades de ordem superior, ligadas à formulação e resolução de problemas, o pensamento crítico e o uso de estratégias de natureza metacognitiva (Abrantes *et al.*, 1996; Lerman, 1996).

É premente a transmissão de uma mensagem diferente da matemática, que relativize as rotinas de cálculo e enfatize as ideias e os processos basilares da matemática e que permita a compreensão da sua natureza (Tudella *et al.*, 1999).

É tão necessário conhecer uma parte do corpo dos resultados como saber como se pensa matematicamente, ou seja, conhecer os modos de pensar que convencionamos designar por “hábitos matemáticos de pensamento”. (Goldenberg, 1999, p. 37)

Bell (1982), na tentativa de distinguir entre dois aspectos distintos da matemática - os *conteúdos*, que se referem a estruturas conceptuais pré-existentes, e os *processos*, que consistem na actividade de fazer matemática -, refere:

Os conteúdos representam ideias particulares e destrezas, tais como, rectângulos, máximo divisor comum, soluções de equações. Por outro lado, há um processo matemático, ou a actividade matemática, cujos temas acompanham a par e passo os das ideias matemáticas; eu diria que consiste na abstracção, representação, generalização e demonstração (citado em Love, 1996, p. 93).

Porfírio e Oliveira (1999) referem que o conceito de investigação está ligado à actividade que os matemáticos profissionais utilizam na produção de conhecimento. O objectivo da investigação é a descoberta intencional de um objecto, propriedade, etc., recorrendo a um processo algo sistemático.

As investigações matemáticas implicam processos complexos de pensamento e requerem envolvimento e criatividade, identificados com os processos característicos da actividade matemática como formular, testar e provar conjecturas, argumentar e usar procedimentos de natureza metacognitiva (Abrantes *et al.*, 1996).

O processo de investigação matemática consiste na actividade de procura de caminhos para uma resposta, cuja pergunta foi formulada pelo investigador. Este processo identifica-se com a própria actividade. No entanto, este é susceptível de não conduzir a uma resposta única, pois uma questão pode ter múltiplas soluções, ou até não ter nenhuma. No caso das investigações, o objecto e o processo de inquirição caminham juntos, pois o foco da mesma muda assim que novas questões são postas, em função de quem a conduz. Consequentemente, no desenvolvimento de uma investigação, novas situações são geradas e exploradas (Ernest, 1991). Porfírio e Oliveira (1999) referem que o aluno, ao se aperceber de uma forma progressiva da diversidade de caminhos por onde pode dirigir a sua investigação, é obrigado a decidir acerca do foco da mesma.

Este processo caracteriza-se assim por ser divergente, pois o objectivo é explorar uma questão matemática em todas as suas dimensões e sob diferentes perspectivas (Ernest, 1991).

Silva *et al.* (1999) enunciam algumas das ideias e procedimentos experimentados pelos matemáticos, aquando da produção de conhecimento, que têm equivalentes elementares que podem e devem ser propostos como tarefas aos alunos:

[...] as ideias de relação funcional e transformação; a procura de regularidades e invariantes; a abstracção e a generalização; a construção de conceitos por analogia; a procura de modelos matemáticos para situações do mundo concreto ou estudadas noutros domínios científicos; o uso da intuição na exploração de situações envolvendo objectos matemáticos; a formulação de conjecturas; a sua demonstração ou refutação (Silva *et al.*, 1999, p. 83).

Brocardo (2001) refere que o processo investigativo é caracterizado por possuir uma “não linearidade”. Em conformidade com a ideia anterior, também Porfirio e Oliveira (1999) referem que o processo investigativo resulta não linear, sendo pródigo em recuos e avanços. Existe uma diversidade de percursos possíveis para a investigação – carácter divergente – em que o ponto de partida é a formulação de questões. Cada uma delas constituirá um foco de atenção e permitirá recolher, organizar e analisar os dados, formular e testar conjecturas. As conjecturas que não resistirem aos testes realizados necessitam de reformulação, o que constituirá um novo desafio e poderá conduzir à recolha de novos dados e/ou à sua reorganização. Caminha-se, assim, no sentido de encontrar conjecturas poderosas que resistam a sucessivos testes, às quais, por vezes, é dado o estatuto de conclusões, quando se verificam válidas para os casos testados, sendo assumidas como válidas para todos, sobretudo pelos alunos mais novos e/ou com menos experiência. O passo premente será o da demonstração ou prova, que permitirá que as justificações da validade de uma relação sejam organizadas com base num raciocínio lógico ou, pelo menos, credível.

Porém, nem todos os alunos, principalmente os de níveis de escolaridade mais baixos e com um domínio menor de conhecimentos matemáticos, poderão estabelecer uma prova. Nestes casos, a investigação não perde relevância, mas deve o professor insistir na importância da realização de um elevado número de testes e, com base no trabalho desenvolvido, apenas poderão chegar a uma conclusão do tipo “parece que esta relação se verifica sempre”, “parece podermos concluir que”. No entanto, este aspecto da investigação deve ser bastante bem trabalhado, principalmente na fase da discussão,

com os alunos com maturidade suficiente para realizar provas e demonstrações. Segundo Abrantes (1999), a demonstração representa para os alunos geralmente uma forma de lhes dar certeza da validade de uma hipótese, o que empobrece o seu significado, pois esta é também uma forma de explicar o porquê da validade de uma conjectura. A demonstração apresenta assim duas vertentes distintas, a da confirmação e da compreensão.

Bell *et al* (1983) propõem um modelo de investigação com quatro fases: formulação do problema, resolução do problema, verificação, integração. Esta proposta apresenta bastantes semelhanças com as fases que Polya (1945) definiu para a resolução de problemas (compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano, verificação do plano), mas a diferença central reside na inclusão da formulação de problemas, que precede a sua resolução, o que representa, em última análise, a característica mais distintiva das investigações que permite distingui-las dos problemas. Em cada uma das fases, Polya e alguns seguidores identificaram estratégias a que chamaram *heurísticas*, com diferentes graus de generalidade (Ernest, 1991).

Outros autores utilizaram diferentes nomenclaturas para enunciar as mesmas fases da actividade matemática, como sejam “Entrar, Atacar, Rever” ou “Formulação do problema, Implementação, Avaliação, Conclusão”; porém, as ideias são concordantes entre si e, também, com as de Polya (Love, 1999). Segundo Love (1999), resumir a actividade matemática a uma lista de quatro ou cinco etapas é dizimar um processo que resulta no maior empreendimento humano - o conhecimento matemático. Todavia, estas listas são amiúde alargadas por conjuntos de estratégias associadas às diferentes etapas. Assim, associadas à etapa de formulação de problemas, podem estar as seguintes estratégias: *identificar factores, gerar variáveis, seleccionar variáveis, formular sub-problemas, representação através de diagrama*.

Ponte *et al.* (1999b) consideram como principais etapas na realização de uma investigação as seguintes: (1) *colocar questões e estabelecer conjecturas* - uma conjectura consiste numa afirmação referente a um objecto ou a uma classe de objectos, que se considera verdadeira e que tenta dar resposta a uma pergunta. Nem todas as conjecturas possuem o mesmo interesse matemático: algumas são simples e evidentes, outras inesperadas e outras são de bastante interesse pelas conclusões que podem suscitar; (2) *testar e refinar conjecturas* - depois de formulada, uma conjectura deve ser testada por múltiplas vezes. Basta um contra-exemplo para a invalidar, mas estes nem sempre são os mais correctos. Por vezes, uma conjectura que resulta falsa, com uma

simples modificação ou refinamento pode tornar-se verdadeira; (3) *argumentar e provar conjecturas* – as conjecturas que resistem a múltiplos testes não constituem verdades matemáticas. Para o serem, têm de ser sujeitas a prova ou demonstração, ou seja, justificadas com base em argumentação lógica ou, pelo menos, aceitável. Verifica-se, no entanto, que a generalidade dos alunos não sente a necessidade de justificar e não tem a noção de como fazê-lo. Esta tendência é concordante com um ensino-aprendizagem da Matemática em que a realização de investigações, a argumentação e a demonstração são subalternizadas.

Oliveira (1998a) ilustra na figura 4, de uma forma muito simplificada, os diversos processos matemáticos envolvidos numa actividade de investigação, explicitando que o seu conceito pretende aproximar a actividade dos alunos à dos matemáticos:



Figura 4: A actividade de investigação (Oliveira, 1998a, p.15)

Segundo a investigadora, este processo resulta num ciclo que pode ser várias vezes percorrido e interrompido em qualquer um dos pontos pela necessidade de rever o percurso realizado, assim como a ordem das etapas pode ser invertida e/ou algumas dessas etapas podem ser menos aprofundadas.

O ponto de partida será a formulação de uma ou mais questões perante uma situação, sendo a observação um elemento fundamental na procura de regularidades. À medida que as conjecturas vão resistindo a sucessivos testes, tornam-se poderosas, suscitando confiança. Pode acontecer que a conjectura falhe no teste, necessitando de reformulação ou até mesmo de abandono; olha-se então a questão de forma distinta,

formulando-se conjecturas diferentes da primeira. Se o teste for favorável, segue-se a demonstração para que a conjectura evolua para uma propriedade válida.

Ponte *et al.* (2005) referem que uma investigação matemática envolve quatro momentos principais e cada um desses momentos pode incluir diversas actividades, como indica o Quadro 2:

Quadro 2: Momentos na realização de uma investigação (Ponte *et al.*, 2005, p. 21).

Exploração e formulação de questões	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Reconhecer uma situação problemática; ▪ Explorar a situação problemática; ▪ Formular questões.
Conjecturas	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Organizar dados; ▪ Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura).
Testes e reformulação	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Realizar testes; ▪ Refinar uma conjectura.
Justificação e avaliação	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Justificar uma conjectura; ▪ Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio.

Segundo os autores, o primeiro momento - *exploração e formulação de questões* - abrange o reconhecimento da situação problemática, a sua exploração prévia e a formulação de questões. Segue-se a *formulação de conjecturas*, que procede a recolha e organização de dados. O terceiro inclui a *realização de testes* e o eventual refinamento das conjecturas. Por último, o momento da *justificação e da avaliação* refere-se à argumentação, à demonstração e à avaliação do trabalho realizado. Pode acontecer que por vezes estes momentos surjam em simultâneo, como a formulação de questões e a conjectura inicial por exemplo, denunciando as interacções existentes entre eles.

O conceito de investigação identifica-se com a actividade que os matemáticos profissionais experimentam na produção de conhecimento. Assim, este tipo de tarefa matemática, quando adaptada à maturidade dos alunos, é susceptível de lhes mostrar uma visão da matemática mais genuína, como ciência viva, inacabada e falível, alargando a compreensão da sua natureza por parte dos mesmos (Porfirio e Oliveira, 1999).

Davis e Hersh (1995) apresentam um modelo de Lakatos para a descoberta matemática, contido na sua obra *Proofs and Refutations*, cujo objectivo era mostrar uma visão alternativa para a matemática, uma imagem da ciência viva, falível e em constante desenvolvimento:

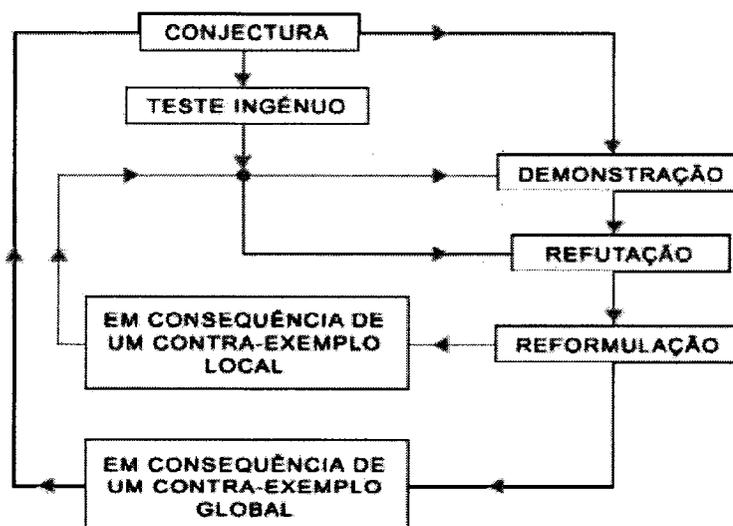


Figura 5: Modelo simplificado de Lakatos para a heurística da descoberta matemática (Davis & Hersh, 1995, p.276)

Lakatos, para descrever o modelo para o desenvolvimento do conhecimento geral, utilizou a metáfora da *semente*, afirmando:

Parto de uma afirmação a que chamo “semente”. A afirmação *semente* deve ser interessante e bastante simples. O objectivo do exercício consiste em que o estudante regue a semente, de modo a que esta se transforme numa planta robusta. Geralmente, apresento várias sementes e eles escolhem a que querem estudar, de acordo com a sua experiência (Davis & Hersh, 1995, p.276).

Em suma, a actividade matemática tem sido caracterizada em termos de etapas de resolução de problemas e dos estados mentais a elas associados. Polya (1945) foi o pioneiro a delinear as etapas para a resolução de um problema (compreender o problema, estabelecer um plano, executar o plano, rever o processo), e a explicitar as heurísticas que lhes estavam articuladas.

Todavia, as fases para a resolução de problemas preconizadas por Polya não encerram em si um aspecto fundamental da actividade matemática, a formulação de problemas, que precede a sua resolução e constitui uma das diferenças basilares que permite a distinção entre as tarefas de resolução de problemas e de investigação.

Existe alguma profusão de termos para identificar as diferentes etapas do processo de criação matemática, pese embora as ideias a elas associadas sejam similares. Por conseguinte, o processo de criação, não obstante a nomenclatura que lhes é

atribuída, encerra os seguintes procedimentos: o *reconhecimento da situação problemática*, a *exploração e a formulação de questões*, a *formulação de conjecturas*, a *recolha e a organização de dados*, a *realização de testes* e o eventual *refinamento das conjecturas* e, por fim, a *justificação e a avaliação* que se referem à argumentação, à demonstração e à avaliação do trabalho realizado. Verifica-se, no entanto, que nem todas estas fases apresentam o mesmo grau de dificuldade para os alunos, resultando algumas mais problemáticas, principalmente para alunos de uma faixa etária mais baixa e/ou com menos experiência neste tipo de actividade.

Este processo é, muitas vezes, caracterizado como sendo *cíclico*, *sistemático* e *interactivo* e por possuir uma *não linearidade*: diz-se *cíclico*, pois o conjunto das etapas do processo pode ser várias vezes repetido; *sistemático*, porque tenta inculcar uma determinada ordem no seguimento do conjunto das etapas, ordem essa que nem sempre é conseguida por se verificar que é invertida (e por vezes algumas etapas são pouco aprofundadas); *interactivo*, pois algumas etapas podem surgir em simultâneo, como por exemplo a formulação de questões e a conjectura inicial; e, por fim, é *não linear*, pois pode ser interrompido em qualquer um dos pontos, pela necessidade de rever o percurso realizado (Oliveira, 1998a; Love, 1999; Porfírio e Oliveira, 1999; Brocardo, 2001; Ponte *et al.*, 2005).

Justificação da utilização das investigações

O desenvolvimento de capacidades rotineiras servia como finalidade a uma sociedade industrializada, em nada semelhante à sociedade contemporânea. A sociedade actual é herança do desenvolvimento tecnológico, que provocou uma mudança extrema em todas as ciências, negócios, indústria e governo, pela facilidade e rapidez com que se acede à informação, em qualquer lugar, em qualquer altura (NCTM, 1991; Silva *et al.*, 1999).

Todavia, novas e muitas mudanças se avizinham. Há que desenvolver competências para viver numa realidade de incerteza e constante mudança. (Oliveira, 2002)

A sociedade contemporânea exige que os cidadãos desenvolvam uma boa fluência matemática, que lhes permita interpretar a informação expressa em linguagem matemática, sob a forma numérica e gráfica, e a pensar matematicamente.

É incumbência da escola desenvolver um ambiente rico e estimulante para os alunos realizarem a aprendizagem da herança cultural da sociedade a que pertencem, de forma a que consigam compreender e dominar o real (Perrenoud, 1999).

Perrenoud (1999) refere que a trilogia de habilidades - ler, escrever e contar -, que fundou a escolaridade obrigatória no século XIX não responde às necessidades da sociedade da nossa época. Hoje espera-se que os alunos, para além de dominarem um conjunto de conhecimentos e procedimentos, aprendam a dar-lhes sentido, os consigam mobilizar e transferir para situações complexas que obriguem ao estabelecimento do problema antes de o resolver, determinando os conhecimentos pertinentes e os reorganizem em função da situação, que inventem estratégias originais não previsíveis. Deixamos assim de falar da escola na lógica da adição de saberes para falar da escola na lógica do desenvolvimento de competências, relacionando os saberes e a sua operacionalização em situações complexas.

Por conseguinte, todos os cidadãos devem ter acesso a uma educação matemática que, para além dos objectivos utilitários da matemática, valorizem também a compreensão da sua natureza como herança cultural resultante da actividade humana (Silva *et al.*, 1999).

Verifica-se que as actividades de investigação fornecem um importante contributo para que grande parte das finalidades do ensino, e em particular do ensino da Matemática, se vejam cumpridas. Pois, como refere Mendonça (1999), este tipo de actividade permite uma transformação social, actuando o professor não só a nível cognitivo, como também a nível social e político, desenvolvendo no aluno o espírito crítico necessário ao desenvolvimento de uma sociedade democrática.

Nem toda a aprendizagem pode ser efectuada mediante actividades de investigação; no entanto, estas apresentam potencialidades que dificilmente podem ser facultadas por outro tipo de tarefas, como sejam a motivação e o envolvimento que proporcionam, em que os alunos aprendem a investigar e a pensar matematicamente. Assim, é necessário que todos os alunos se envolvam em actividades que, para além de lhes permitir a aprendizagem, lhes permitam a compreensão do que aprenderam (APM, 1996).

Cunha *et al.* (1996) justificam a importância da realização das actividades de investigação matemática por elas:

- (a) constituírem uma parte essencial da experiência matemática e, conseqüentemente, permitirem uma visão mais completa desta ciência; (b) estimularem um envolvimento dos alunos, necessário a uma aprendizagem significativa; (c) poderem ser trabalhados em vários níveis maturidade e de desenvolvimento; (d) potenciarem um modo de pensamento holístico, (ao relacionarem muitos tópicos) essencial ao raciocínio matemático. (Cunha *et al.*, 1996, p.173)

Também Silva *et al.*, (1999) referem alguns dos principais aspectos responsáveis pela crescente valorização das tarefas de investigação na última década, ao nível do ensino-aprendizagem da Matemática:

De facto, as actividades de investigação lidam com o essencial da natureza da actividade matemática (formulação e resolução de problemas); permitem uma melhor compreensão da natureza dos processos de fazer matemática (experimentar, explorar, identificar padrões, formular e testar conjecturas, generalizar e demonstrar); estimulam o pensamento globalizante (relacionando tópicos da matemática); permitem de forma significativa trabalho diferenciado de alunos com diferentes competências e estilos cognitivos em matemática; facilitam o desenvolvimento integrado de atitudes, capacidades e conhecimentos. (Silva *et al.*, 1999, p.75)

Também os grandes objectivos preconizados pelo NCTM (1991) para que o aluno se torne alfabetizado em matemática se vêem parcialmente cumpridos na realização de actividades de investigação na sala de aula, na medida em que estas desenvolvem o poder matemático dos alunos, que inclui: a capacidade de explorar, conjecturar, raciocinar logicamente; utilizar, com eficácia, uma variedade de métodos e processos matemáticos na resolução de situações problemáticas; comunicar sobre a matemática e através dela; estabelecer conexões dentro e fora da matemática; utilizar informação matemática representada de diversas formas. O desenvolvimento do poder matemático afecta também o incremento da autoconfiança, da perseverança, da capacidade de tomar decisões, do espírito inventivo, da flexibilidade, da curiosidade e do interesse. Desta forma, os alunos: (1) *aprendem a valorizar a matemática*, como modo de pensar e como actividade humana, compreendendo as relações de dependência existentes dentro da própria ciência e entre esta e outras ciências (Silva *et al.*, 1999; Santos *et al.*, 2002); (2) *adquirem confiança na sua capacidade de fazer matemática*, pois as actividades de investigação permitem diferentes abordagens que facilitam o

envolvimento de alunos com diferentes níveis de competência e maturidade (Santos *et al.*, 2002); (3) *tornam-se aptos a resolver problemas de matemática*, na medida em que, na realização de actividades de investigação, resolvem problemas, cujas questões iniciais são abertas e necessitam de ser formulados por si, conduzindo, por isso, a caminhos muito divergentes (Tudella *et al.*, 1999); (4) *aprendem a comunicar matematicamente*, pois são estimulados a justificar e a provar as suas afirmações, explicitando matematicamente, através de sinais, símbolos e termos matemáticos, as suas argumentações perante colegas e professor (Oliveira *et al.*, 1996); (5) *raciocinam matematicamente*, deparando-se com experiências matemáticas em que consolidam ou inventam conhecimento, experienciando o tipo de trabalho desenvolvido pelos matemáticos profissionais, através de vários processos matemáticos como experimentar, explorar, identificar padrões, formular e testar conjecturas, generalizar e demonstrar (Silva *et al.*, 1999).

A importância de os alunos realizarem actividades de investigação para o estudo da própria disciplina, para perceberem as suas conexões dentro e fora da matemática, para ampliarem os seus conhecimentos e para aprenderem a resolver problemas das mais diversas áreas é também ressaltada pelo o relatório Cockcroft (1985).

Abrantes *et al.* (1999) justificam a incorporação de actividades de natureza investigativa na aula e no currículo pelas seguintes razões: (i) por se identificarem com a actividade matemática e com os processos de produção de conhecimento matemático, cujo envolvimento neste tipo de trabalho por parte dos alunos ajuda a desenvolver uma imagem real da matemática; (ii) por favorecerem um envolvimento, por parte dos alunos, conducente a uma aprendizagem significativa; (iv) por permitirem a participação de alunos com diferentes níveis de competência matemática, por poderem ser abordadas de diversos modos e diferentes graus de profundidade; (v) por estimularem um pensamento globalizante que permite o estabelecimento de conexões entre diferentes tópicos matemáticos; (vi) por apresentarem um carácter transversal da disciplina de Matemática e poderem ser inseridas em qualquer parte do currículo; (vii) por reforçarem aprendizagens mais elementares, pelo facto de lidarem com aspectos complexos do pensamento.

Oliveira *et al.* (1999), ao reflectirem sobre a experiência de um projecto colaborativo, atribuem as seguintes virtudes às actividades de investigação:

- São adequadas para todos os alunos, mesmo para os que têm menor competência matemática;

- Permitem o envolvimento dos alunos em actividade matemática genuína e significativa para eles;
- Permitem o desenvolvimento da autonomia;
- Estimulam a interacção entre alunos, quer organizados em grupo ou em pares, resultante da necessidade de falarem e discutirem as suas ideias.

Varandas e Nunes (1999) referem ainda que a realização deste tipo de tarefas permite um ensino centrado nos alunos, pois a eles cabe todo o protagonismo na organização e desenvolvimento da tarefa. Por conseguinte, estas tarefas permitem o desenvolvimento de competências de vária ordem, na medida em que os alunos são levados a exprimir e a fundamentar as suas opiniões, a procurar a informação de que necessitam, a desenvolver hábitos de trabalho em grupo, a fortalecer a sua persistência, a avaliar situações e tomar decisões. Permitem, também, o desenvolvimento da autonomia e da autoconfiança.

Porfirio e Abrantes (1999) defendem também que as actividades de investigação são susceptíveis de actuar em várias componentes do ambiente intelectual e social, na medida que os alunos passam a apreciar a Matemática como uma forma de desenvolver a autonomia e a cooperação com os seus pares.

A realização deste tipo de tarefas fornece aos professores *feedback* sobre as aprendizagens dos alunos, pois incitam à extrapolação de conceitos a situações novas, o que permite indicar qual o significado que lhes foi atribuído e com que profundidade foi interiorizado (APM, 1996).

Também Shoenfeld (1996) refere que o pensamento matemático envolvido em tarefas de investigação ajuda os alunos a aprender múltiplos caminhos de ver o mundo, instrumentos e perspectivas que ajudam a compreendê-lo e a dar-lhe sentido. Esse mesmo conhecimento constitui um desafio intelectual que os ajuda a “empurrar as fronteiras do seu conhecimento”, tornando-se a sala de aula um local onde se aprende a pensar.

Cunha, Oliveira e Ponte (1996) referem que estas actividades são importantes por:

- Permitirem a exploração de conceitos matemáticos em diferentes níveis e com o grau de profundidade adequado;

- Promoverem o desenvolvimento de capacidades de ordem superior e processos matemáticos pouco contemplados num ensino que enfatiza os conteúdos;
- Permitirem níveis diversos de alcance a alunos com capacidades díspares, pois trabalham ao ritmo próprio;
- Estimularem o professor a repensar aspectos essenciais da sua prática.

Em suma, todos os autores apresentados atribuem várias potencialidades às actividades de investigação e expõem inúmeros argumentos para a sua realização na sala de aula, aos quais os professores e os responsáveis pelo ensino da Matemática não podem permanecer indiferentes. As razões pelas quais se consideram as investigações como actividades de alcance matemático ímpar e se justificam a sua realização na sala de aula são as seguintes:

- Ao se identificarem com a actividade matemática genuína, de formulação e resolução de problemas, e com os processos de produção de conhecimento matemático, este tipo de tarefas permite aos alunos compreenderem a essência da matemática e desta forma *desenvolver uma imagem real e completa sobre a matemática e o gosto por esta ciência* (Cunha *et al.*,1996; Silva *et al.*,1999; Abrantes *et al.*,1999);
- Promovem o *desenvolvimento de capacidades de ordem superior* e processos matemáticos pouco contemplados num ensino que enfatiza os conteúdos, como experimentar, explorar, identificar padrões, formular e testar conjecturas, generalizar e demonstrar (Cunha, Oliveira e Ponte, 1996; Silva *et al.*, 1999);
- Permitem o *desenvolvimento de competências* de várias ordens, não só a nível intelectual como também a nível social e afectivo, na medida em que os alunos são levados a exprimir e a fundamentar as suas opiniões, a procurar a informação de que necessitam, a desenvolver hábitos de trabalho em grupo, a fortalecer a sua persistência, a avaliar situações e a tomar deliberações, desenvolvendo, conseqüentemente, a autonomia e autoconfiança e a cooperação (Varandas e Nunes, 1999; Porfiro e Abrantes, 1999; Oliveira *et al.*, 1999);
- *Estimulam um pensamento globalizante* que permite o estabelecimento de conexões entre diferentes tópicos matemáticos, essencial ao raciocínio

matemático, permitindo uma perspectiva coerente e integrada da Matemática, em oposição à perspectiva compartimentada que os alunos tendem a manifestar, reforçando aprendizagens mais elementares e percebendo as relações de dependência dentro da ciência e desta com outras ciências (Cunha, Oliveira e Ponte, 1996; Silva *et al.*, 1999; Oliveira *et al.*, 1999);

- *Permitem o envolvimento de todos alunos* com diferentes níveis de maturidade e/ou de diferentes níveis de competência matemática, pois possibilitam trabalhar a um ritmo próprio e a graus de profundidade diferentes, conduzindo a uma *aprendizagem significativa* (Cunha, Oliveira e Ponte, 1996; Oliveira *et al.*, 1999; Abrantes *et al.* (1999); Silva *et al.*, 1999);
- Apresentam um *carácter transversal* da disciplina de Matemática, podendo ser inseridas em qualquer parte do currículo, antes, durante ou após a leccionação de um tópico matemático (Abrantes *et al.*, 1999);
- *Estimulam o professor a repensar aspectos essenciais da sua prática*, na medida que o seu papel na realização deste tipo de tarefas muda completamente, passando os alunos a ser os agentes da sua aprendizagem e o professor um mero moderador da mesma, o que pode resultar problemático (Cunha, Oliveira e Ponte, 1996);
- Funcionam como um *espelho*, onde o professor pode ver reflectidas as *experiências matemáticas do aluno* e a sua profundidade, bem como o seu *pensamento matemático* (Silver, 1996);
- *Criam uma nova dinâmica na sala de aula*, concordante com as orientações curriculares oficiais, pois a realização deste tipo de tarefas permite um *ensino centrado nos alunos* e é a eles que cabe todo o protagonismo na organização e desenvolvimento da tarefa (Varandas e Nunes, 1999).

A estrutura e organização da aula com investigações

A aula envolvendo actividades de investigação é condicionada por diversos factores. Um desses factores, anterior à realização da aula, é a sua *planificação*. Todavia, é sabido que, numa aula deste tipo, são os alunos os protagonistas e os agentes da sua aprendizagem, pois são eles que formulam as questões de partida e escolhem os caminhos a explorar, sendo estes aspectos difíceis de prever e planear pelo professor. Contudo, o professor pode fazer incidir o seu plano sobre outros aspectos, como sejam: decidir que apoio dar, nas diferentes fases da tarefa; decidir como os alunos vão trabalhar, se em grupo, individualmente ou a pares; promover a discussão, entre os alunos, das suas ideias; reforçar o envolvimento dos alunos em actividade matemática plena; formular questões introdutórias para desafiar os alunos e explicitar o que se pretende com a tarefa, etc. (Tudella *et al.*, 1999).

O sucesso de uma aula de investigação reside na dinâmica que o professor consegue criar e no alcance do seu discurso (a aprofundar no capítulo IV). O seu papel é paralelamente difícil e decisivo. Este deve desenvolver o seu conhecimento matemático, integrando e expressando uma visão da natureza desta ciência como produto da actividade humana. Deve também estar atento aos processos de pensamento dos seus alunos e possuir flexibilidade para lidar com possíveis imprevistos, que são susceptíveis de acontecer com mais frequência e variedade em aulas com esta dinâmica, de cariz inovador (Abrantes *et al.*, 1999).

A aula deve desenvolver-se no sentido da existência de um equilíbrio entre o desafio e o sucesso dos alunos. O professor deve desenvolver situações problemáticas que constituam um desafio para os alunos, que não sejam nem fáceis nem difíceis demais, de forma a evitar-lhes a frustração. Deve também alertar os alunos para o facto de o seu sucesso residir menos na obtenção de respostas correctas e mais na elaboração de conjecturas sustentáveis e na construção de argumentos que convençam os outros da sua validade (Mason, 1996).

A estrutura da aula envolvendo actividades de investigação apresenta, comumente, três fases: introdução da tarefa, desenvolvimento da tarefa/realização da investigação e discussão final. Estas fases podem ser realizadas de diversas maneiras, pese embora a mais usual seja uma pequena introdução, seguida da realização da tarefa

em grupos pequenos ou mesmo a pares e, por fim, a discussão dos resultados em grande grupo (Tudella *et al.*, 1999; Ponte *et al.* 2005).

Introdução da tarefa

Esta fase, que se quer curta para que os alunos não percam o interesse pela tarefa e reservem o tempo restante para a realização da mesma, apresenta uma importância crucial no sucesso da tarefa, pois dela dependem as fases seguintes. As grandes finalidades desta fase são: que os alunos compreendam o que se espera que eles desenvolvam, que atribuam significado à tarefa e que se crie um ambiente de aprendizagem para o desenvolvimento da mesma (Ponte *et al.*, 2005).

Desenvolvimento da tarefa

Passada que está a fase introdutória, espera-se que os alunos tenham compreendido o propósito da tarefa e que iniciem a sua realização. Os alunos, nesta fase, assumem o protagonismo total, sendo o professor o sustentáculo da actividade, garantindo que aqueles desenvolvam uma atitude investigativa (Tudella *et al.*, 1999; Ponte *et al.*, 2005).

Por conseguinte, devem os alunos utilizar o conjunto de processos que caracterizam a actividade matemática, como: exploração e formulação de questões, (re) formulação, teste e justificação de conjecturas e avaliação do trabalho realizado (Ponte *et al.*, 2005), da forma mais autónoma possível.

A discussão dos resultados

Esta fase resulta numa das mais importantes de toda a actividade matemática, pois os alunos não só têm a oportunidade de apresentar e discutir os resultados, ou seja, de comunicar matematicamente, como de reflectir sobre eles - estes elementos são fundamentais para o desenvolvimento de competências de várias ordens (Ponte *et al.*, 1999).

Segundo Ponte *et al.* (2005), sem a discussão final, a investigação incorre na perda de sentido. Também o relatório Cockroft (1985) refere que uma investigação só possui significado quando debatidos os resultados, assim como os processos empregues, as pistas falsas seguidas e os erros cometidos durante a mesma.

Shoenfeld (1996) ressalta a importância de comunicar matematicamente, pois a linguagem matemática, como as outras linguagens, apresenta variadas virtudes, funcionando como um meio de clareza, análise e estética.

Ao salientarem a importância da fase de discussão, Tudella *et al.* (1999) referem que esta constitui uma ocasião favorável à reflexão, dando aos alunos a oportunidade de criar uma visão mais verdadeira da Matemática, ao valorizarem os processos em detrimento dos produtos, mesmo que não conduzam a uma resposta correcta.

É usualmente nesta fase que os alunos confrontam as suas ideias, estratégias, hipóteses e justificações, ao submeter o seu trabalho ao escrutínio público, experimentando o sentimento de dúvida, a atitude crítica e a necessidade de argumentação e justificação das suas ideias. Todos os aspectos anteriores facultam uma maior compreensão do trabalho investigativo, desenvolvendo as capacidades de comunicar matematicamente e o poder de argumentação, assim como permitem a conexão entre tópicos matemáticos e o aprofundamento de outros já existentes (Oliveira *et al.*, 1999).

As investigações matemáticas e o currículo de Matemática do Ensino Básico

Pese embora no nosso país as actividades de investigação na sala de aula não possuam uma tradição muito forte, verifica-se que esta tendência não é, actualmente, concordante com as orientações curriculares expressas pelos documentos oficiais, o Currículo Nacional do Ensino Básico e o Programa de Matemática do Ensino Básico.

Em 2007, foi publicado o novo Programa de Matemática do Ensino Básico¹ que resultou da necessidade de um reajustamento dos programas vigentes desde 1990 para o

¹ Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

1.º Ciclo² e 1991 para os 2.º e 3.º Ciclos⁴, devido à necessidade de uma maior articulação entre os três ciclos que compõem o ensino básico, a novas formulações para melhorar os objectivos para o ensino e aprendizagem da disciplina, e também devido a um desfasamento no que respeita às orientações existentes naqueles documentos e no Currículo Nacional do Ensino Básico (publicado em 2001)⁵.

No referido documento, a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática são expressas como capacidades transversais para a aprendizagem da disciplina de Matemática, às quais deve ser dispensada especial atenção. O programa está desta forma concebido em torno do desenvolvimento destas três capacidades. Pese embora as actividades de investigação não constituam uma das capacidades centrais deste documento, a resolução de problemas constitui-se fulcral para o desenvolvimento das mesmas. Por conseguinte, numa investigação o aluno, para além de resolver um problema, tem de o formular previamente, tem de se envolver em raciocínio matemático na geração e organização de dados, na formulação e teste de conjecturas, no seu refinamento e/ou prova e tem de comunicar matematicamente quando tem de defender as suas ideias e argumentos e convencer os outros da validade dos mesmos. Ainda que de uma forma pouco explícita, as actividades de investigação constituem um eixo orientador neste documento e este aspecto é visível ao longo do mesmo, como por exemplo nos “Objectivos gerais” a desenvolver, onde se pode ler que os alunos devem ser capazes de “formular e investigar conjecturas matemáticas”, “formular problemas”, “explorar regularidades e formular e investigar conjecturas matemáticas”, entre muitos outros. Apesar de nem sempre aparecer a palavra “investigar”, referem-se a processos matemáticos que estão intimamente relacionadas com esta actividade. Vejamos, em seguida, este aspecto em pormenor ao longo dos diferentes ciclos.

No 1.º Ciclo do Ensino Básico e no que se refere ao bloco “Números e operações”, existe um apelo directo à realização de actividades de investigação, através

² Ministério da Educação (1990). *Organização curricular e programas: 1.º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Imprensa Nacional.

³ Ministério da Educação (1991). *Organização curricular e programas: 2.º ciclo do ensino básico (vol.I)*. Lisboa: Imprensa Nacional.

⁴ Ministério da Educação (1991). *Organização curricular e programas – 3.º ciclo do ensino básico (vol.I)*. Lisboa: Imprensa Nacional.

⁵ Ministério da Educação (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências essenciais*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

da referência aos seguintes objectivos específicos: “(...) investigar regularidades em sequências e em tabelas de números” (p.17) e “Investigar regularidades numéricas” (p.18). Também no bloco “Geometria e Medida”, constitui um objectivo específico para a leccionação de um tópico “Investigar várias planificações do cubo e construir um cubo a partir de uma planificação dada” (p.23). No bloco “Organização e tratamento de dados”, o apelo à realização de investigações está presente também nas “Indicações metodológicas”, onde se pode ler: “A abordagem de vários conceitos deste tema pode ser feita a partir de investigações tendo por base as características dos alunos da turma (...)” (p.26).

No que concerne ao 2.º Ciclo do Ensino Básico, e relativamente ao bloco “Números e operações”, o apelo à realização de tarefas de investigação é realizado nas “Indicações metodológicas”, onde se pode ler: “A resolução de problemas que incluam a investigação de regularidades numéricas constitui um aspecto a privilegiar da didáctica dos números neste ciclo” (p.32). No bloco “Organização e tratamento de dados”, a referência ao trabalho investigativo é feita da seguinte forma:

O estudo deste tema deve assumir uma natureza investigativa, estimulando os alunos a formular questões como ponto de partida para o trabalho a desenvolver. A procura de resposta para os problemas formulados deve conduzi-los à necessidade de recolha e análise de dados.
(p.42)

Neste ciclo, existe ainda referência à realização de actividade investigativa como objectivo para o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas, assim representada: “Usar formulações de problemas, por exemplo, com informações insuficientes, ou sem solução” (p.46); “Incentivar a formulação de problemas a partir de situações matemáticas e não matemáticas” (p.47).

No que se refere ao 3.º Ciclo do Ensino Básico, no bloco “Números e operações”, as “Indicações metodológicas” são bastante incisivas quanto ao uso de actividades de investigação na sala de aula, evidenciando a importância atribuída a este tipo de tarefas, onde se pode ler:

As tarefas propostas aos alunos devem incluir, de forma equilibrada, a resolução de problemas, a exploração e investigação de situações numéricas, bem como exercícios, destinados a consolidar aspectos rotineiros da aprendizagem (...). Na resolução de problemas, como nas tarefas de exploração e investigação, é importante que os alunos tenham tempo apropriado para realizar experiências, elaborar estratégias,

formular conjecturas, descrever processos e justificá-los com progressivo rigor (pp.48, 49).

Ainda neste bloco, aparece o apelo ao trabalho investigativo como referência ao desenvolvimento de objectivos relativos a um tópico matemático, expresso do seguinte modo: “Resolver problemas e investigar regularidades envolvendo números racionais e reais” (p.50).

Quanto ao bloco “Geometria”, as “Indicações metodológicas” fazem, mais uma vez, apelo ao facto de ser dado tempo suficiente para o aluno se envolver nos processos matemáticos inerentes à resolução de problemas e à realização de tarefas investigativas e exploratórias, apelando também ao uso de *software* adequado: “Os alunos devem recorrer a *software* de Geometria Dinâmica, sobretudo na realização de tarefas exploratórias e de investigação” (p.51). Constituem “Objectivos específicos” para o desenvolvimento de tópicos matemáticos deste bloco: “(...) investigar as propriedades deste quadrilátero [paralelogramo]” (p.52). Relativamente à “Álgebra”, são sugeridas algumas “Indicações metodológicas” relacionadas com as tarefas de investigação, como:

A investigação das fórmulas das áreas e dos volumes de figuras e sólidos geométricos e da soma dos ângulos internos e externos de polígonos convexos constitui igualmente uma oportunidade para desenvolver o pensamento algébrico (...). Neste ciclo retoma-se a investigação de sequências e regularidades, já realizada em ciclos anteriores (p.55).

Ainda no bloco anterior, são referidos como “Objectivos específicos” para desenvolver tópicos matemáticos, os seguintes processos característicos da actividade investigativa: “Resolver e formular problemas envolvendo equações e sistemas de equações”, “Resolver e formular problemas envolvendo inequações”(e ainda “Resolver e formular problemas, e modelar situações utilizando funções” (pp.57, 58).

Também no bloco “Organização e tratamento de dados”, as referências ao trabalho investigativo são bastante incisivas, podendo ler-se:

Neste tema os alunos realizam investigações estatísticas baseadas em situações reais (...). Para desenvolverem essas investigações, os alunos formulam questões, planeiam o estudo estatístico, seleccionam amostras adequadas, recolhem dados sobre os elementos das amostras, representam-nos e interpretam-nos (p.59).

Ainda neste bloco, pode ler-se como “Objectivos específicos” para o desenvolvimento de tópicos, os seguintes processos relacionados com o trabalho

investigativo: “Resolver e formular problemas envolvendo a noção de probabilidade” (p.61).

Para o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas são tecidos os seguintes “Objectivos específicos”: “Formular problemas a partir de situações matemáticas e não matemáticas” e “Usar as TIC na resolução de problemas e em actividades de exploração e investigação” (p.63).

Em suma, pese embora a resolução de problemas seja a experiência matemática, próxima das actividades de investigação, que é mais privilegiada neste documento ao longo dos três ciclos, as actividades de investigação, ao contrário do que acontecia com os programas anteriores, também apresentam uma referência explícita. No entanto, verifica-se que a incidência do apelo à realização de actividades de investigação na sala de aula vai aumentando ao longo dos ciclos, sendo decisivamente premente a sua realização no 3.º Ciclo.

Verifica-se também que o apelo ao trabalho investigativo nem sempre é feito de uma forma directa, referindo-se muitas vezes a processos característicos da actividade matemática em geral. Assim, neste estudo, só foram consideradas, como referências ao trabalho investigativo, aquelas que utilizavam alguma forma verbal do verbo “investigar” ou alguma palavra da família do substantivo comum “investigação” ou, ainda, quando havia referência ao processo matemático característico do trabalho investigativo, a formulação de problemas. Os restantes processos matemáticos, embora também relacionados com o trabalho investigativo, podem estar relacionados com outro tipo de tarefas, como a resolução de problemas, não tendo sido, por isso, tidos em conta.

Desta forma, pode afirmar-se que não existem discordâncias ou ambiguidades, como as houve outrora, entre Programas de Matemática e Currículo Nacional do Ensino Básico. Ambos os documentos oficiais fazem referência explícita à realização de trabalho de cunho investigativo, ao longo dos três ciclos do ensino básico, sendo que o Currículo Nacional refere que as actividades de investigação devem constituir uma experiência de aprendizagem regularmente proporcionada aos alunos. Terão estas indicações algum reflexo na prática dos professores?

Capítulo IV

O conhecimento profissional do professor e as investigações matemáticas na sala de aula

Neste capítulo, analisar-se-á o conhecimento profissional do professor directamente relacionado com o desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem – o conhecimento didáctico – necessário ao desenvolvimento de tarefas de investigação, nas suas quatro componentes: conhecimento da Matemática, conhecimento dos alunos e dos seus processos de aprendizagem, conhecimento do currículo e conhecimento do processo instrucional (Canavarro, 2003; Ponte, 1996b).

Os moldes em que se preconiza o processo de ensino-aprendizagem da Matemática são hoje diversos do que se expõe a seguir:

[...] o professor chamava alguém para fazer os trabalhos de casa, fazia a revisão da aula anterior, dava nova matéria, resolvia no quadro alguns exemplos de aplicação e a partir daí, até ao fim da aula, tratava-se de começar a treinar o novo tipo de exercícios (APM, 1988, citado em Tudella *et al.*, 1999, p. 87).

O desenvolvimento do *poder matemático* dos alunos constitui, actualmente, uma questão central no processo ensino-aprendizagem da Matemática, o qual é evidenciado nas Normas para o Currículo (NCTM, 1991) e para o qual as tarefas de natureza aberta, como as investigações, podem fornecer um importante contributo. Por conseguinte, urge que os professores sejam competentes em:

Escolher actividades matemáticas que aliciem a inteligência e o interesse dos alunos; providenciar oportunidades para aprofundar a sua

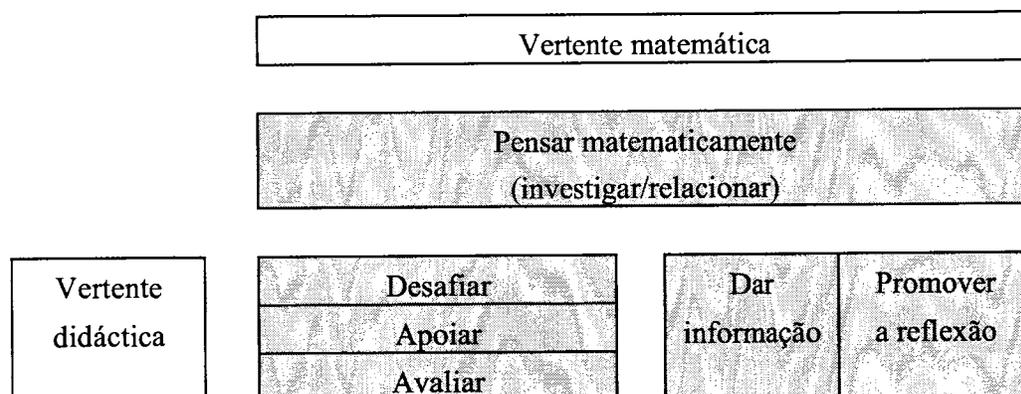
compreensão da matemática que está a ser estudada e suas aplicações; Organizar o discurso na sala de aula de modo a promover a investigação e o desenvolvimento das ideias matemáticas; Utilizar, e ajudar os alunos a utilizar, tecnologia e outros instrumentos em investigações matemáticas; Procurar, e ajudar os alunos a procurar, conexões com conhecimentos já adquiridos ou em estudo; Orientar o trabalho individual, em pequeno grupo e com toda a turma (NCTM, 1994, p.1).

No entanto, a competência do professor está directamente relacionada com o seu conhecimento profissional, o conhecimento que resulta da reflexão sobre e durante a acção na resolução de dilemas e situações conflituosas da sua prática (Shön, 1992).

Por conseguinte, o desenvolvimento de tarefas de investigação nas aulas de Matemática impõe novas exigências no que refere ao conhecimento didáctico do professor nas suas duas vertentes base: quer ao nível dos *conhecimentos matemáticos*, pois dada a sua natureza aberta as investigações podem ser desenvolvidas segundo diferentes níveis de profundidade e podem conduzir os alunos por caminhos matemáticos inesperados, necessitando o professor de ter boas bases matemáticas para se sentir seguro no apoio a facultar aos alunos nas possíveis explorações e a concentrar as suas atenções na reflexão e abstracção sobre a investigação; quer a nível de uma *sensibilidade pedagógica* para decidir se uma investigação poderá ser ainda produtiva e ser susceptível de continuar a despertar o interesse dos alunos, ou, se pelo contrário, é mais proveitoso parar e passar à fase da discussão (Goldenberg, 1999).

Também Ponte *et al.* (1999b) e a APM (1996) referem a existência de uma dupla vertente no trabalho do professor durante o desenvolvimento de tarefas de investigação, que são dependentes entre si: a vertente *matemática*, referente à tarefa de investigação em causa, quando avalia o alcance matemático de uma tarefa, quando se envolve num raciocínio matemático perante os alunos, quando estabelece conexões entre o trabalho realizado e outros conceitos matemáticos; e a vertente *didáctica*, que é determinante para que os objectivos curriculares da actividade se vejam cumpridos, como a criação ou selecção da tarefa, a sua planificação, condução e avaliação, a capacidade de lidar com imprevisto e situações de incerteza, de compreender os processos de pensamento dos alunos e de promover a reflexão. Esta dupla vertente dos papéis do professor pode ser observada no quadro 3.

Quadro 3: Papéis do professor no decurso da realização de actividade investigativa na aula de Matemática (Ponte et al., 1999b, p. 24).



Analisemos em seguida a vertente matemática do papel do professor que diz respeito ao seu conhecimento da Matemática, e posteriormente as restantes: conhecimento dos alunos e dos seus processos de aprendizagem, conhecimento do currículo e conhecimento do processo instrucional.

Conhecimento da Matemática

O conhecimento da Matemática inclui o conhecimento de tópicos específicos por parte do professor, uma visão geral da Matemática como ciência e como disciplina, bem como a relação que o professor mantém com a mesma (Ponte, 1995; Canavarro, 2003).

A ideia de que o desenvolvimento de tarefas de investigação requer da parte dos professores um domínio mais profundo dos *conteúdos matemáticos* parece ser partilhada pela comunidade de educadores matemáticos (Oliveira *et al.*, 1999c; Goldenberg, 1999).

O conhecimento matemático do professor está presente antes mesmo do início da aula, quando o professor selecciona, adapta ou cria uma tarefa de investigação, tendo que pensar acerca do alcance matemático da mesma. Posteriormente, dado o carácter aberto deste tipo de tarefas, é possível que o professor tenha que considerar aspectos

imprevistos destas e tenha que se envolver em raciocínio matemático da mesma forma que os alunos (colocando questões, formulando conjecturas, fazendo testes, validando resultados) e tenha que fornecer-lhes informações acerca de conceitos que podem não estar muito presentes ou até estabelecer conexões entre eles. Estes aspectos só serão possíveis de concretizar se o professor possuir um conhecimento matemático sólido acerca dos tópicos em si e da relação entre eles. Caso contrário, poder-se-á inviabilizar o sucesso da tarefa, fazendo com que os professores se centrem na sua própria investigação e não consigam a abstracção suficiente para reflectirem percursos alternativos sobre a tarefa (Goldenberg, 1999; Ponte *et al.*, 1999).

Outro aspecto acerca do conhecimento da Matemática diz respeito à *visão que os professores possuem da Matemática* e que influencia determinantemente a forma como estes encaram as tarefas de investigação. Por conseguinte, os professores que possuem uma visão absolutista desta ciência encaram o conhecimento matemático como um “edifício sólido” e construído cumulativamente, tendem a sobrevalorizar aspectos relacionados com o domínio de conceitos matemáticos e procedimentos repetitivos, não atribuindo por isso interesse a este tipo de tarefas. Pelo contrário, os professores que encaram a Matemática como uma actividade humana tendem a valorizar a sua importância (Ponte, 2003).

Por último, e no que concerne à *relação dos professores com a Matemática*, Oliveira *et al.*, (1999a) referem que, para uma integração de tarefas de investigação bem sucedida na prática de ensino, é necessário da parte do professor uma boa relação com este tipo de trabalho, que este aprecie o seu valor enquanto experiência matemática através da compreensão da sua natureza e que tenha gosto pessoal em realizá-lo.

Todavia, verifica-se que a relação que o professor mantém com o trabalho investigativo parece estar estritamente relacionado com a relação que o mesmo mantém com a matemática no geral, com as experiências pessoais que teve enquanto aluno dos ensinos básico, secundário e superior, bem como com as suas experiências que teve nos primeiros anos de carreira. Para estes autores, *a relação que os professores mantêm com as actividades de investigação* é bastante variável e constitui um dos principais desafios que o desenvolvimento de tarefas de investigação coloca aos professores. Enquanto uns professores parecem manter uma relação de prazer e curiosidade com este tipo de trabalho, outros mostram-se completamente indiferentes, ou até com dificuldade em desenvolvê-lo.

Conhecimento dos alunos e dos processos de aprendizagem

O sucesso do processo de ensino-aprendizagem está dependente do conhecimento profundo dos alunos e da forma como eles aprendem (Varandas, 2000). Este aspecto torna-se fulcral para o sucesso de aulas envolvendo trabalho investigativo.

Um profundo conhecimento dos alunos e da forma como trabalham e aprendem é importante em todas as fases do trabalho do professor: na selecção da tarefa e sua planificação, de forma a ir ao encontro dos interesses dos alunos e das suas necessidades; no desenvolvimento da tarefa, em que o professor deve avaliar o progresso dos alunos e apoiar o seu trabalho; e na discussão final para conseguir gerir de uma forma proveitosa as suas intervenções (Oliveira, 1999a; Ponte *et al.*, 1999b; 2003).

No processo de aprendizagem, as interacções professor-aluno-professor desempenham um papel fulcral (Varandas, 2000). Por conseguinte, durante as aulas, e em particular nas aulas envolvendo trabalho investigativo, o professor deve ter em conta o que fomenta de uma forma explícita através das suas intervenções, que podem comprometer toda a actividade investigativa dos alunos. Assim, as interacções entre o professor e os alunos consideram-se de extrema importância, quer no ambiente de aprendizagem desenvolvido, quer no apoio prestado ao longo da tarefa, devendo ser na maioria das vezes da iniciativa do professor, no sentido de clarificar ou explicitar as ideias dos alunos, de forma a:

- *Estimular o confronto de opiniões.* Durante a actividade dos alunos, estes muitas vezes solicitam a intervenção do professor para decidir conflitos resultantes de divergências de ideias entre os seus pares. O professor deve responder estimulando os alunos a explicitar e a argumentar a favor do seu ponto de vista;
- *Incentivar ao sentido crítico, à reflexão e à argumentação.* A insegurança é uma característica bastante comum entre os alunos pouco habituados a uma aprendizagem da qual são protagonistas. Assim, é usual que estes solicitem com frequência a presença do professor para lhes validar os seus processos ou ideias. O professor deve incentivar o aluno a procurar argumentos e razões para validar

ou não ele próprio o seu trabalho, apelando ao desenvolvimento da argumentação, sentido crítico, reflexão e autonomia;

- *Fornecer informações pertinentes.* Por vezes, neste tipo de trabalho, surgem situações diversas em que os alunos necessitam que o professor lhes forneça informação. Essas situações podem traduzir-se na necessidade de reforço de um conteúdo que está esquecido ou que não foi suficientemente integrado; resultarem de situações de bloqueio das quais os alunos não conseguem sair; ou ainda por os alunos enveredarem por “caminhos” em que os seus conhecimentos matemáticos não conseguem dar resposta, impedindo-os de avançar autonomamente (Tudella *et al.*, 1999).

As interacções entre os alunos também são de extrema importância para o progresso na tarefa, indicando que esta está a evoluir da forma desejável (Ponte *et al.*, 1998a).

A investigação educacional realizada tem contribuído para melhorar a compreensão e o desenvolvimento do conhecimento acerca dos alunos quando se envolvem em trabalho de cunho investigativo.

Ponte *et al.* (1998a) assinalam que experiências que sejam novidade para os alunos envolvem naturalmente mais dificuldades. Este é um aspecto problemático das tarefas de investigação, devido ao facto de estas não apresentarem grande reflexo nas experiências de sala de aula proporcionadas pelos professores.

Ponte e Matos (1996) referem que existem matérias complexas de ser investigadas, não devendo subestimar-se as dificuldades com que os alunos se deparam. No entanto, estas dificuldades podem ser importantes, pois promovem o debate e a reflexão, permitem detectar enganos e propiciam a consolidação de conceitos específicos e ideias matemáticas importantes para o progresso da investigação, ao mesmo tempo que, pelo facto dos alunos se envolverem em actividade matemática, desenvolvem uma visão mais ampla e mais verdadeira desta ciência.

Também Helena Rocha (1996), ao descrever a forma como os alunos evoluíram no decorrer de uma experiência com tarefas de investigação, refere que estes inicialmente se sentiram algo desorientados sem conseguirem desenvolver estratégias de execução e algo perdidos com esta forma de trabalho autónomo, pois estas tarefas são em geral menos estruturadas que as que estão habituados a desenvolver. Ao iniciar a tarefa, parece existir uma tendência para começarem a observar os dados ao acaso e só depois manifestam uma preocupação mais incisiva com a sistematização. Outro aspecto

problemático que os alunos evidenciaram foi a dificuldade a nível da língua materna no registo de conclusões, o que denota falta de hábitos de expressão escrita. A necessidade de apoio da parte do professor foi bastante incisiva no início, para obtenção de informações sobre o que fazer; no entanto, foi diminuindo à medida que os alunos foram ficando mais familiarizados com este tipo de trabalho.

O conhecimento da aprendizagem está relacionado com a forma como o professor percepção as capacidades dos alunos. As tarefas de investigação evidenciam que muitos alunos possuem “capacidades frequentemente insuspeitadas pelo professor” (Ponte *et al.*, 1998a). Sobre este aspecto, Silver (1996) destaca que existem alunos com um elevado grau de sucesso em tarefas escolares estruturadas, que reagem emocional e cognitivamente de forma negativa a tarefas menos directivas (que lhes dão mais responsabilidade na aprendizagem), sendo um factor de resistência às mudanças de ensino por parte dos professores.

Conhecimento do currículo

O conhecimento curricular engloba o conhecimento das finalidades e orientações gerais do currículo, o conhecimento do currículo dos anos que lecciona, bem como dos currículos dos anos anteriores e posteriores a esse, o domínio do conhecimento dos materiais utilizáveis e das abordagens e estratégias (Ponte, 1995).

O conhecimento profissional do professor referente à realização de tarefas de investigação pode ser analisado num plano instrucional e num plano curricular. A nível do plano curricular, analisar-se-á a articulação das tarefas de investigação com o currículo oficial, assim como a gestão curricular (Ponte, 2003).

Oliveira *et al.* (1999b) definem o professor como um “fazedor do currículo”, ao salientarem o seu papel fundamental na planificação e condução de actividades de investigação na sala de aula, cuja selecção, adaptação ou criação, estabelecimento de objectivos, metodologia e estratégias estão relacionados com a especificidade da turma e contexto em questão e, por isso, necessitam de ser definidos por si e por si reformulados, em função da sua reflexão sobre a prática e o conhecimento profissional.

Assim, a realização de actividades de investigação é uma perspectiva curricular inovadora e, como tal resulta problemática. No desempenhar dos seus papéis numa aula deste tipo, várias são as exigências e desafios que se colocam ao professor, sendo que este constitui um elemento basilar no processo de ensino-aprendizagem (Oliveira *et al.*, 1999).

Um aspecto relacionado com o conhecimento curricular que resulta problemático, e por isso constitui um desafio para o professor, é a *integração das tarefas de investigação no currículo*, pois está relacionada com a *visão que os professores possuem do currículo*. Assim, pode admitir-se que os professores que vêem o currículo como um documento, com força de lei, como um programa que é preciso cumprir, terão mais dificuldade em valorizar este tipo de tarefas e em integrá-las no currículo, ao passo que os professores que apresentam uma visão do currículo como um documento orientador, em constante desenvolvimento em função das necessidades dos alunos, é natural que valorizem a participação destes no processo de construção do conhecimento matemático e tenham conseqüentemente necessidade de integrar as tarefas de investigação no currículo Oliveira *et al.*, (1999a).

Outro aspecto controverso deste tipo de conhecimento, relacionado com a *gestão curricular*, é o facto de os professores considerarem os programas extensos e os alunos com falta de preparação matemática. Para este tipo de professores que sobrevalorizam a aquisição de conteúdos e o treino de procedimentos rotineiros em detrimento da actividade matemática e vêem o programa como uma listagem de conteúdos que têm que cumprir na íntegra, a realização de tarefas de investigação pode inviabilizar o cumprimento do mesmo, causando-lhes algum desconforto (Ponte *et al.*, 1998a).

As tarefas de investigação podem ter como suporte vários tipos de *materiais*, constituindo um importante auxiliar do raciocínio dos alunos e funcionando também como elemento motivador. O desenvolvimento deste tipo de tarefas também oferece um contexto ideal para o recurso às *tecnologias*. Assim, Ponte e Canavarro (1997) referem que a presença do computador na aula fornece um importante contributo no desenvolvimento de tarefas como as de investigação e exploração, sendo o facto de este permitir efectuar rapidamente inúmeras experiências com objectos matemáticos diversos, como números, gráficos, funções, figuras geométricas, etc., o mais importante contributo do computador para o ensino da Matemática.

O computador, como ferramenta de trabalho para o desenvolvimento de tarefas de investigação, permite a aquisição de novas estratégias cognitivas por parte dos alunos, como uma experimentação mais espontânea de novos valores e a respectiva visualização gráfica, a perda do receio de errar e uma análise mais cuidada do problema antes de o iniciar (Ponte, 1991).

Não obstante a controvérsia em torno da pertinência da utilização da calculadora nos dois primeiros ciclos de ensino, a calculadora é um recurso inigualável na aula de Matemática. Assim, devem coexistir tarefas que consolidem e desenvolvam competências de cálculo, com tarefas cujo cálculo seja realizado pela calculadora, por este se tornar secundário face às competências a desenvolver em tarefas como as de investigação matemática, sobretudo cálculos fastidiosos e demorados que descentram a atenção dos alunos do essencial da tarefa a realizar (Zenhas, 2005).

Verifica-se todavia que as novas tecnologias, não obstante as recomendações programáticas e curriculares, estão ainda pouco integradas nas práticas lectivas, o que é concordante com a visão dominante da Matemática onde se sobrevaloriza o domínio do cálculo, acrescentando o facto de a sua utilização colocar desafios técnicos, didácticos e logísticos ao professor (Ponte, 1994a).

Não obstante os contributos da investigação educacional e do desenvolvimento curricular, muitas são as questões relacionadas com o conhecimento curricular referente às tarefas de investigação, que continuam sem resposta consensual: (a) qual o seu potencial valor nos diferentes graus de ensino? (b) devem ser mais ou menos estruturadas? (c) devem ou não elaborar-se sugestões para os professores, e de que tipo? (d) as actividades justificam-se a si mesmas ou devem ser encaradas como “suporte” da aprendizagem dos conteúdos matemáticos? (e) como articulá-las com outro tipo de tarefas? (f) como articulá-las com os diferentes tópicos matemáticos? (g) qual a importância e visibilidade que estas tarefas devem assumir no currículo? (h) qual o peso dar a este tipo de tarefas nas aulas? (Ponte, 1995; Cunha, Oliveira e Ponte, 1996).

Nenhum currículo é “à prova” de tarefas de investigação, pois independentemente do programa e currículo em vigor, o professor tem sempre possibilidade de introduzir estas tarefas nas suas aulas (Silva *et al.*, 1999). Todavia, verifica-se que actualmente os documentos programáticos do ensino básico são algo incisivos quanto ao uso de investigação nas aulas de Matemática, por estas constituírem um meio primordial no processo de ensino-aprendizagem, para a exploração de diferentes conceitos matemáticos, para o desenvolvimento de capacidades importantes

nos alunos, possibilitando-lhes diferentes níveis de consecução e estimulando o professor a rever aspectos fundamentais da sua prática (Cunha *et al.*, 1995). Terá este aspecto, de futuro, um maior reflexo na prática dos professores?

Conhecimento do processo instrucional

Analisar-se-á em seguida o conhecimento profissional necessário à selecção e planificação de tarefas de investigação, bem como à condução de uma aula envolvendo trabalho investigativo, em particular identificando e reflectindo os desafios e problemáticas que o desenvolvimento deste tipo de tarefas coloca aos professores.

Seleccção e planificação de tarefas de investigação

A selecção e a planificação de tarefas de investigação constituem, segundo Oliveira *et al.*, (1999), um trabalho complexo, pois requerem do professor um conhecimento didáctico profundo quer acerca dos seus alunos, dos seus conhecimentos, interesses e capacidades, quer a nível curricular, dos objectivos, materiais e recursos, dos quais se pode socorrer no apoio às mesmas. É também importante um conhecimento científico sólido para perceber o alcance matemático de uma tarefa e avaliar da sua adequação aos alunos em causa.

Varandas e Nunes (1999) sugerem que a escolha de tarefas de investigação e a sua planificação colocam vários desafios ao professor, sendo necessário preparar o modo como a tarefa vai ser apresentada aos alunos, se de forma oral, escrita ou ambas (mista); seleccionar a metodologia de trabalho, se em grupo ou individual; decidir o modo como irá ser gerida a discussão final, assim como qual a produção final que os alunos terão que realizar.

Existem professores que apresentam uma criatividade curricular desenvolvida que lhes permite criar tarefas de investigação, pese embora esta capacidade demore

tempo e experiência a adquirir-se. Até então, é natural que os professores utilizem tarefas já prontas, fazendo-lhe apenas algumas adaptações quando necessário (Ponte, 2003; Cunha, 1997).

Condução da aula

Outro grande desafio que as tarefas de investigação colocam ao professor é a condução da aula. A estrutura de uma aula contendo trabalho investigativo envolve, comumente, três fases; *introdução da tarefa* pelo professor; *realização da tarefa* por parte dos alunos, durante a qual o professor orienta e apoia os alunos individualmente ou em pequeno grupo; *apresentação dos resultados dos alunos e discussão*, inclui a apresentação e análise das estratégias usadas e resultados alcançados (Oliveira *et al.*, 1999a; Ponte *et al.*, 1999a).

Introdução da tarefa. Nesta fase é de extrema importância que o professor crie um ambiente estimulante de forma a despertar nos alunos a curiosidade e estimular a sua atitude investigativa (Ponte, 2003). No início da aula o professor tem ainda de tomar decisões importantes. Por conseguinte, o professor tem de equacionar as questões a colocar, decidir a quantidade de informação a fornecer, os aspectos críticos, o modo de introduzir a tarefa, a forma de estimular e manter o desenvolvimento do trabalho dos alunos, que apoio fornecer aos alunos, quais os modos de trabalho mais adequados, como realizar a discussão e que *feedback* dar aos alunos sobre o trabalho realizado (Oliveira, 1999a).

Se o professor, no início, tecer considerações demasiado pormenorizadas, poderá amputar alguns aspectos essenciais da tarefa, ao passo que a falta de pistas poderá vir a resultar em obstáculos que limitarão a progressão do trabalho dos alunos (Tudella *et al.*, 1999; Ponte *et al.*, 2005).

A apresentação da tarefa pode ser feita de diversos modos. O mais frequente é o misto, em que a apresentação oral à turma por parte do professor não dispensa o complemento com um enunciado escrito. A apresentação oral pretende, por um lado, clarificar a tarefa e explicitar a sua natureza e, por outro, criar um clima susceptível de despertar nos alunos curiosidade e abertura para exporem as suas ideias e argumentos,

incentivando-os a serem “pequenos exploradores”, a “partirem à descoberta”- o uso de metáforas como as anteriores veiculam o significado do trabalho a realizar. A esta fase deve ser dada tanta mais atenção quanto mais novos forem os alunos e/ou menor for a sua experiência com este tipo de tarefas (Tudella *et al.*, 1999; Ponte *et al.*, 2005).

Desenvolvimento da tarefa. Durante esta fase, os papéis que o professor é chamado a desempenhar são bem distintos dos de uma aula de cariz tradicional, centrada em si, sem imprevistos nem incertezas.

[...] No acompanhamento que o professor faz do trabalho dos alunos, ele deve procurar atingir um equilíbrio entre dois pólos. Por um lado, dar-lhes autonomia que é necessária para não comprometer a sua autoria da investigação e, por outro lado, garantir que o trabalho dos alunos vá fluindo e seja significativo do ponto de vista da disciplina de Matemática (Ponte *et al.*, 2003, p. 47).

Por conseguinte, o professor é sobretudo um orientador, mudando-se, completamente as relações de poder na sala de aula, o que nem sempre é facilmente aceite pelos alunos. Deve apresentar também uma postura interrogativa, pois o reflexo das suas intervenções tem sempre impacto no trabalho dos alunos, não devendo no entanto validar os seus resultados. Deve possuir um bom conhecimento do trabalhos dos seus alunos para conseguir gerir, de uma forma proveitosa, as suas intervenções na discussão final (Oliveira, 1999a).

A fase de exploração da tarefa pode ser algo morosa, pois os alunos demoram algum tempo a familiarizar-se com a tarefa e a atribuir-lhe significado, dando ao professor a sensação de improdutividade. No entanto, esta fase constitui o trampolim para que os alunos comecem a gerar dados, a organizá-los e, conseqüentemente, a formular questões e conjecturas. O surgimento de questões resulta geralmente da necessidade que os alunos sentem de integrar conhecimentos anteriores na tarefa. O trabalho em grupo promove o despontar de ideias dispersas; porém, o trabalho converge para o desenvolvimento de ideias e questões comuns, devido à intervenção dos alunos líderes do grupo. No entanto, verifica-se que os alunos tendem a formular questões e conjecturas de uma forma implícita, havendo pouca precisão na sua discussão com os colegas, dificuldade esta que só é contornada se os alunos tiverem que registar por escrito, como usualmente se faz, as suas ideias, explicitando-as na procura da aprovação do grupo (Ponte *et al.* 1999; Ponte *et al.*, 2005).

Segue-se a formulação de conjecturas. Uma conjectura matemática consiste numa afirmação resultante da resposta a uma questão que se considera provisoriamente verdadeira. As conjecturas podem surgir aquando da observação directa dos dados, por geração e organização de dados, por analogia com outras conjecturas. Também do diálogo professor-aluno novas conjecturas podem surgir ou o seu refinamento. É de ressaltar que nem todas as conjecturas formuladas possuem o mesmo alcance matemático, sendo que as mais importantes são as que são imprevisíveis e que suscitam mais criatividade por parte dos alunos. No entanto, o carácter provisório das conjecturas nem sempre é explícito, pois os alunos tendem a atribuir-lhe o estatuto de conclusões (Ponte *et al.* 1999; Ponte *et al.*, 2005).

Uma vez formuladas, as conjecturas necessitam de ser submetidas a testes. Este passo é facilmente interiorizado pelos alunos, realizando-o de uma forma quase intuitiva durante o processo indutivo, pese embora os alunos menos experientes não manifestem uma preocupação muito forte em testar as suas conjecturas. A dificuldade prende-se com o facto de os alunos, ao experimentarem um número reduzido de casos para qual a conjectura é válida, tenderem a assumi-la como conclusão. Esta tendência pode ser atenuada com o apoio fornecido pelo professor, incentivando a procura de contra-exemplos (Ponte *et al.* 1999; Ponte *et al.*, 2005).

As conjecturas, pese embora resistam a vários testes, não constituem ainda verdades matemáticas. Para possuírem alguma validade matemática, necessitam de uma justificação baseada em argumentação lógica. Contudo, verifica-se que os alunos manifestam pouca necessidade de procurar justificação para as suas conjecturas, assim como apresentam pouca noção de como realizá-lo, tendência que é concordante com um ensino em que a realização de investigação, a argumentação e a demonstração apresentam uma incidência reduzida. Porém, este facto tende a atenuar-se com a experiência, uma vez que o motivo da necessidade de fazer justificações muda: começa por ser para explicar e convencer os outros e passa a ser uma necessidade lógica para si próprio. A fundamentação das conjecturas dos alunos deve ser realizada com base em justificações aceitáveis para alunos mais novos, progredindo para pequenas provas matemáticas à medida que os alunos desenvolvem ferramentas matemáticas mais sofisticadas. A condução dos alunos por parte do professor será no sentido de exigir graus de formalização mais elevados, consoante o nível de desenvolvimento matemático dos alunos, através de justificações com graus progressivos de generalização e abstracção (Ponte *et al.* 1999; Oliveira *et al.*, 1999; Ponte *et al.*, 2005).

Um elemento que parece resultar problemático é o de conciliar a actividade investigativa com o registo dos resultados. Esta dificuldade resulta do facto de parte da comunicação realizada entre os alunos ser não verbal, sendo as suas ideias pouco explícitas ou, por vezes, utilizando termos matemáticos pouco correctos, o que, por si só, não inviabiliza a validade dos raciocínios. O professor deve combater esta tendência, de uma forma progressiva e comedida, sem pôr em causa a autoconfiança dos alunos e a fluência do seu trabalho (Ponte *et al.*, 1999). O professor deve, também, alertar os alunos, para o facto de que a prática do registo escrito, se for bem conseguida, favorecerá uma boa classificação, como também, os ajudará nas suas próprias explorações, funcionando como elemento facilitador da actividade matemática (Mason, 1996).

Verifica-se que a acção do professor resulta bastante complexa na gestão dos vários momentos da aula e no apoio fornecido aos alunos, que se quer na medida exacta, de forma a manter os alunos num “fluxo” de actividade. Por conseguinte, Ponte *et al.* (1999b; 2005) atribuem aos professores seis papéis fundamentais no desenvolvimento de aulas envolvendo tarefas de investigação:

- *Desafiar os alunos*, criando um ambiente adequado ao trabalho investigativo, de forma a motivá-los e estimular-lhes a curiosidade, colocar-lhes boas questões (as abertas incitam a um maior envolvimento na tarefa) escrita ou oralmente, que lhes forneçam a informação estritamente necessária para a compreensão e interpretação da tarefa. Dado o cariz ímpar deste tipo de tarefa, que lhe confere as potencialidades já enunciadas, o professor deve responder à heterogeneidade dos alunos, estimulando-lhes a criatividade nas diversas explorações;
- *Avaliar o progresso dos alunos*, observando, recolhendo e interpretando informação e recorrendo do seu conhecimento profissional para compreender se estes perceberam a natureza da tarefa, se esta constitui um verdadeiro desafio e decidir que tipo de apoio dar-lhes, colocando questões e pedindo explicações, fazendo uma discussão intermédia, passando à fase seguinte ou dando mais tempo;
- *Raciocinar matematicamente*. Oliveira *et al* (1999) referem que só através da observação directa de um matemático em acção os alunos compreenderão o que significa fazer matemática. Assim, na sequência de uma situação imprevista, em que um aluno apresenta uma conjectura não considerada *a priori* pelo professor,

é possível que este se envolva num raciocínio matemático puro, fazendo-o em voz alta e mostrando aos alunos como se aborda o teste de conjecturas, transparecendo o espírito investigativo. Este tipo de actividades leva os alunos a raciocinar matematicamente, estabelecendo conexões com outros conteúdos matemáticos e reflectindo sobre eles, fortalecendo o seu conhecimento sobre a disciplina;

- *Apoiar o trabalho dos alunos*, garantindo que o potencial desta actividade não se perca e se atinjam os objectivos propostos, através de uma vertente de exploração matemática e de gestão da situação didáctica. No que respeita à exploração matemática, o professor deve ter em atenção os seguintes aspectos: privilegiar uma postura interrogativa na clarificação de ideias aos alunos, no apoio ao seu progresso, na compreensão do processo investigativo, não validando o trabalho dos seus alunos. Quanto à gestão da situação didáctica, o professor deve promover a sintonia dos alunos do mesmo grupo, encorajar todos os alunos a participar no trabalho, valorizar os seus contributos e promover normas adequadas de comportamento, tanto em pequeno como em grande grupo;
- *Fornecer e recordar informação* e conceitos anteriormente estudados quando necessário para impedir bloqueios, sempre que possível através de questões. O professor deve também introduzir novas ideias, representações e conexões para promover a consolidação e melhor compreensão dos conteúdos e desenvolver um conhecimento matemático mais rico e completo;
- *Promover a reflexão dos alunos*, nomeadamente na discussão final, de forma a que os alunos relacionem o trabalho realizado com conhecimentos anteriores, enriquecendo assim o seu conhecimento matemático; se apercebam da importância dos processos em que estão envolvidos e dos resultados obtidos; aumentem a sua autoconfiança quando discutem, reflectem e avaliam o trabalho realizado; e assumam a sua participação e responsabilidade no processo (Ponte *et al.* 1999b; 2005).

Outro aspecto problemático para o professor é o de saber até que ponto deve prolongar a investigação, de forma a reservar tempo para a discussão. Para estes aspectos, como para todos os outros, não existem receitas. Deve o professor usar de toda a sua sensibilidade e conhecimento profissional para ultrapassar estes dilemas, estando

atento aos sinais de cansaço ou de energia dos alunos, decidindo se há-de parar a investigação ou, pelo contrário, deve dar mais tempo para os alunos continuarem a experimentar o prazer de uma viagem que não mais os levará ao local de partida (Tudella *et al.*, 1999; Ponte *et al.* 2005).

Discussão da tarefa. A discussão final é geralmente a última fase do trabalho investigativo; no entanto, pode realizar-se sempre que necessário. Por vezes, a meio da tarefa é necessário um momento de discussão para ajudar os alunos a sair de certos bloqueios, de modo a enriquecer a investigação (Tudella *et al.*, 1999; Ponte *et al.* 2005).

Esta fase deve consistir num momento de partilha e confronto de ideias, de justificação de afirmações e validação ou rejeição de conjecturas por parte dos alunos, exigindo do professor boas competências a nível da gestão de discussões e capacidade de raciocínio matemático. Verifica-se, no entanto, que os professores manifestam dificuldades nesta fase, principalmente devido à falta de experiência em gerir e estimular a participação dos alunos neste tipo de trabalho, e à fraca familiarização dos alunos com esta dinâmica de aula (e à sua consequente dificuldade na comunicação matemática) (Ponte, 2003).

O papel do professor será de moderador e orientador nas intervenções dos alunos, estimulando a comunicação dentro dos grupos, incitando à explicitação de ideias e à argumentação em defesa das afirmações próprias e ao questionamento mútuo (Tudella *et al.*, 1999).

A gestão do tempo escolar é também susceptível de gerar condicionalismos ao professor, podendo acontecer que a actividade de investigação seja realizada numa aula e a sua discussão na aula seguinte. Este aspecto pode desvirtuar a fase de discussão se o professor não gerar uma boa interacção entre a actividade matemática desenvolvida, os resultados obtidos e a reflexão sobre eles, pois os alunos de uma aula para a outra esquecem muitos dos aspectos importantes e os registos escritos que vão realizar não serão tão completos (Ponte *et al.*, 1998a; 2005; Tudella *et al.*, 1999).

Em suma, as investigações são tarefas cuja (re)criação e implementação dependem estritamente do conhecimento profissional do professor, em particular do seu conhecimento didáctico, exigindo uma interacção permanente entre as suas componentes: conhecimento de e da matemática; conhecimento do currículo;

conhecimento dos alunos e da forma como aprendem; conhecimento do processo instrucional (Canavarro, 2003).

Verifica-se assim que o professor deve apresentar uma base sólida de conhecimentos matemáticos, que é necessária em diferentes fases da tarefa. Quando o professor cria, selecciona ou adapta uma tarefa, ele necessita de pensar matematicamente sobre ela para perceber se o alcance desta se adequa aos objectivos por si propostos. Do mesmo modo, durante a condução da tarefa, o professor envolve-se em raciocínios matemáticos análogos aos dos seus alunos para os poder apoiar de uma forma mais efectiva. Por vezes, as investigações são susceptíveis de conduzir os alunos para territórios imprevistos, cujos conhecimentos não conseguem acompanhar, cabendo ao professor continuar a fornecer apoio (Ponte *et al.*, 1999c).

O professor deve também desenvolver uma imagem da matemática que valorize o desenvolvimento de capacidades de ordem superior em detrimento da apropriação passiva de conteúdos e treino de procedimentos rotineiros. Deve, por isso, manter uma boa relação com esta ciência e, em particular, com as tarefas de investigação.

Quanto ao currículo, o professor deve percepcioná-lo com um conjunto de orientações que devem ser adaptadas ao contexto com o qual se depara, de forma a responder à sua especificidade, recriando-o através da selecção ou criação de tarefas, na definição de objectivos a desenvolver, na decisão da metodologia e estratégias a adoptar, em função da sua reflexão sobre a prática (Oliveira *et al.*, 1999b).

O professor necessita de ter um conhecimento profundo dos seus alunos e da forma como aprendem, da sua realidade cultural e cognitiva, de forma a proporcionar-lhes experiências de aprendizagem diversificadas, significativas e desafiantes, num constante apelo à curiosidade e entusiasmo (Tudella *et al.*, 1999).

No que concerne ao processo instrucional, o professor deve ser competente nas várias etapas de uma tarefa de investigação (sua (re)criação, condução e avaliação), nos papéis que é chamado a desempenhar (desafiar os alunos, avaliar o progresso dos alunos, raciocinar matematicamente, fornecer e recordar informação, apoiar o trabalho dos alunos e promover a reflexão do alunos), tendo consciência das exigências e obstáculos que incorrem ao desenvolver este tipo de tarefa (relação que os professores mantêm com as actividades de investigação, a integração das tarefas de investigação no currículo, a construção ou adaptação de tarefas de investigação, a condução da aula e a avaliação do trabalho investigativo), e o tipo de interacções que deve manter com os alunos de forma a conseguir um fluxo investigativo até ao final (estimulando o confronto de

opiniões, incentivando ao sentido crítico, à reflexão e à argumentação e fornecendo informações pertinentes). Deve, também, disponibilizar e ensinar os seus alunos a utilizar todos os instrumentos tecnológicos e materiais manipuláveis que auxiliam o trabalho investigativo (Tudella *et al.*, 1999; Oliveira *et al.*, 1999; Ponte *et al.*, 2005).

Avaliação do trabalho investigativo

Outro aspecto controverso do conhecimento instrucional é a *avaliação do trabalho investigativo*, que reúne em si duas facetas problemáticas para o professor: a avaliação e as actividades de investigação. O professor deve determinar os aspectos mais importantes a avaliar, que devem envolver parâmetros da ordem dos conhecimentos, das capacidades (como o raciocínio, a comunicação, o espírito crítico e o estabelecimento de conexões entre os conceitos) e das atitudes (como a persistência, a autoconfiança e a curiosidade). Os instrumentos de avaliação adequados, aos quais o professor pode recorrer, são os relatórios da investigação e a sua observação directa (Oliveira *et al.*, 1999).

Capítulo V

Metodologia

Neste capítulo apresentar-se-ão as opções metodológicas adoptadas neste estudo, tendo em conta o objectivo e as questões de investigação delineados e a sua respectiva justificação à luz do paradigma interpretativo de investigação. Indicar-se-ão, em seguida, os participantes no estudo e os critérios para a selecção dos mesmos. Segue-se a natureza da intervenção didáctica da investigadora. Posteriormente, serão indicadas as técnicas e os instrumentos de recolha de dados e processos de análise dos mesmos utilizados neste estudo e, por fim, as questões de natureza ética tidas em conta para a realização do mesmo.

Opções metodológicas

Com este estudo pretendia contribuir-se para a compreensão do conhecimento profissional do professor envolvido no desenvolvimento de tarefas de investigação na sala de aula.

Todavia, como refere Shön (1992), o conhecimento profissional está embebido pelo contexto em que se desenvolve e é evidenciado durante a prática, pois é um conhecimento tácito e dificilmente verbalizável. Assim, qualquer tentativa de descrição deste tipo de conhecimento pode resultar em construções distorcidas que têm implícitas

os propósitos de quem o descreve, devendo estas ser sempre confrontadas com a observação da prática do professor, por parte do investigador.

Pelo exposto e tendo em conta o objectivo deste estudo, a prática lectiva dos professores, nos seus diferentes momentos (preparação, condução e reflexão), assumiu particular relevância.

Este estudo assumiu uma metodologia qualitativa, tendo como referência o paradigma interpretativo. O professor, no desenvolvimento de tarefas de investigação na sala de aula, mobiliza conhecimento didáctico, conhecimento esse que interessa compreender e caracterizar, com vista ao seu desenvolvimento. Por conseguinte, a finalidade deste estudo não é tecer generalizações acerca do conhecimento que os professores mobilizam nas suas práticas, mas gerar compreensão acerca do mesmo, tendo em conta o contexto em que se desenvolve, a partir dos significados que os professores atribuem ao que os rodeia. Por outras palavras: “a preocupação não é a de saber se os resultados são susceptíveis de generalização, mas sim a de que outros contextos e sujeitos a eles podem ser generalizados” (Bogdan & Bicklen, 1994, p.66).

Reiterando a ideia anterior, Almeida *et al.* (2000) referem que as pessoas interagem em função dos significados que atribuem a objectos, pessoas e condições, sendo os mesmos produzidos pela própria interacção e interpretação do sujeito. Porquanto, só através da compreensão desses significados é possível perceber quais os factores que orientam a prática do professor e a tornam particular, tendo em conta o contexto onde se desenvolve. Assim, pretende-se a busca da globalidade dos fenómenos, estudando-se a realidade sem a fragmentar e sem a descontextualizar, partindo-se de dados e não de teorias prévias para os compreender e explicar, evidenciando particularidades em detrimento de leis gerais.

De acordo com Bogdan e Bicklen (1994) e Carmo e Ferreira (1998), uma investigação qualitativa possui várias características que podem ou não estar cumulativamente contempladas, podendo uma ou outra ser mais ou menos perceptível, o que por si só não invalida a natureza da mesma. No caso da presente investigação, esta goza das características preconizadas pelos autores supracitados, que permitem caracterizá-la de qualitativa, como sejam: (a) ser naturalista; (b) ser descritiva; (c) interessar mais o processo do que simplesmente o produto ou os resultados; (d) ser indutiva; (e) ser holística e humanística e (f) a investigadora constituir o principal instrumento de recolha de dados.

Em primeiro lugar, esta investigação é *naturalista*, sendo o ambiente natural dos sujeitos a fonte directa dos dados, pois considera-se que separar comportamentos e atitudes do seu contexto é perder de vista o seu significado. A investigadora preocupou-se com o contexto em que as acções foram desencadeadas para serem melhor compreendidas. As práticas dos professores foram observadas no seu ambiente natural de sala de aula.

Outra característica que possui é ser *descritiva*, na medida em que os dados recolhidos são sob a forma de palavras ou imagens e não de números. A investigadora analisou os dados em toda a sua riqueza, respeitando, tanto quanto possível, a forma como foram registados ou transcritos. Nenhuma informação foi considerada trivial sob pena de permitir uma melhor compreensão do objecto de estudo.

Em terceiro lugar, neste estudo a *ênfase é colocada nos processos* em detrimento dos produtos. Os investigadores qualitativos são “eternos insatisfeitos”, não se contentam em saber que determinado fenómeno existe, procuram conhecer e compreender tudo o que se relaciona com ele, “tentam compreender o processo mediante o qual as pessoas constroem significados e descrevem em que consistem estes mesmos significados” (Bogdan & Bicklen, 1994, p.70).

Outra aspecto que esta investigação contempla é o facto de ser *indutiva*, pois os dados foram analisados de uma forma indutiva, ou seja, as abstracções foram construídas à medida que os dados particulares recolhidos se foram agrupando, desenvolvendo-se conceitos e chegando à compreensão de fenómenos, a partir de padrões provenientes da recolha de dados.

[Os investigadores] ao encontrarem aquilo que pensam interessar-lhes, organizam então uma malha larga, tentando avaliar o interesse do terreno ou das fontes de dados para os seus objectivos[...] À medida que vão conhecendo melhor o tema em estudo, os planos são modificados e as estratégias seleccionadas. [...] A área de trabalho é delimitada. De uma fase de exploração alargada passam para uma área mais restrita de análise dos dados coligidos. (Bogdan & Bicklen, 1994, pp.89, 90).

Esta investigação caracteriza-se também por ser *holística e humanística*. É *holística*, pois a investigadora teve em conta a realidade global dos professores, estudando o passado e o presente dos mesmos como um todo; é *humanística*, pois o foco da investigadora foi apreender rigorosamente as perspectivas dos professores, o modo como dão sentido às suas vidas, perceber o que eles experimentam e o modo como interpretam as suas experiências, colocando-se o mais possível na sua perspectiva.

Por fim, a *investigadora foi o principal instrumento de recolha de dados*. A fiabilidade e a validade dos dados depende muito da sua sensibilidade e objectividade e do seu conhecimento e experiência.

Nesta investigação, optou-se por um *design* de estudo de caso, pois pretende-se a explicação de fenómenos no seu contexto, utilizando muitas fontes de dados. Relativamente aos estudos de caso, Ponte (1994a) refere que:

[Os estudos de caso] usam-se para compreender especificidade de uma dada situação ou fenómeno, para estudar os processos e as dinâmicas da prática, com vista à sua melhoria, ou para ajudar um dado organismo ou decisor a definir novas políticas. O seu objectivo fundamental é proporcionar uma melhor compreensão de um caso específico (p. 17).

Corroborando a ideia anterior, Yin (em Carmo & Ferreira, 1998) refere que o estudo de caso constitui a estratégia preferida quando se pretende responder às questões “como?” e “porquê?”, em que o investigador não pode controlar acontecimentos e o estudo se focaliza na investigação de um fenómeno no seu contexto real.

Participantes na investigação

Na presente investigação, optou-se pela realização de dois estudos de caso. Os referidos casos dizem respeito a dois professores de Matemática, um do 1.º Ciclo, a leccionar o quarto ano, e outro do 2.º Ciclo do Ensino Básico, a leccionar o sexto ano de escolaridade. A escolha dos níveis de ensino indicados para a realização do estudo relaciona-se com o facto destes serem aqueles com os quais a investigadora, pela sua formação inicial, está directamente relacionada e porquanto este aspecto poderia permitir-lhe uma maior compreensão dos mesmos e um maior desenvolvimento profissional. Outro aspecto que conduziu à selecção de dois casos dos níveis de ensino mais elementares relaciona-se com o facto de, num futuro próximo, os 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico irem integrar o mesmo ciclo de escolaridade, com a duração de seis anos, cujas responsabilidades de leccionação ainda não estão bem definidas. Assim, considerou-se que poderia ser um elemento enriquecedor para o estudo o facto de se

tentar caracterizar e compreender em que aspectos se aproxima e distancia o conhecimento didáctico dos professores de Matemática dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico no desenvolvimento de tarefas de investigação na sala de aula, e a que se ficam a dever.

Uma vez que o trabalho de investigação na sala de aula constitui uma metodologia inovadora (Ponte, 2003), pensou-se que seria conveniente para o estudo seleccionar docentes com alguma propensão para a inovação e que manifestassem, de alguma forma, flexibilidade nas suas práticas. Como inovação e formação costumam andar a par, seleccionaram-se professores que integrassem ou tivessem integrado o Programa de Formação Contínua em Matemática (PFCM) para professores do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico.

O primeiro professor escolhido foi a professora Petra, pois, uma vez que a investigadora já havia leccionado na escola a que esta professora pertence e havia partilhado com ela algumas impressões profissionais, sabia de antemão que esta reunia as características supracitadas e se enquadrava no perfil pretendido. Além do mais, era alguém com quem simpatizava e acreditava poder desenvolver uma relação de grande cumplicidade a nível pessoal e profissional. Depois de confrontada pela investigadora, no sentido de vir a fazer parte deste projecto, a referida professora mostrou-se desde logo receptiva à ideia, mesmo antes de compreender os objectivos do mesmo, e agradada com o facto de este poder contribuir para o desenvolvimento do seu conhecimento profissional.

A escolha do segundo professor foi algo mais demorada, pois a investigadora não tinha conhecimento de nenhum professor do 2.º Ciclo do Ensino Básico que integrasse ou tivesse integrado o PFCM e que estivesse disponível para participar neste estudo. Por conseguinte, foi em conversa com um dos formadores deste programa numa Escola Superior de Educação que se apurou a possível disponibilidade e o interesse do professor Paulo para participar neste estudo, pela sua receptividade e pelo desejo de inovar. Assim, feitas as solicitações, este professor também mostrou deste o início disponibilidade e curiosidade em participar nesta investigação.

De referir que ambos os professores pertencem ao Quadro de Zona Pedagógica e, por isso, esperava-se que possuíssem um conhecimento profissional sólido desejável para o cumprimento dos objectivos deste estudo. Leccionavam em escolas distintas do mesmo distrito e, não obstante saberem da existência um do outro, não se conheceram e não estabeleceram qualquer tipo de contacto ao longo do estudo.

Ultrapassada a fase da selecção dos casos, foi altura de formalizar a sua participação no estudo. Assim, procedeu-se à realização de uma reunião entre a investigadora e cada um dos professores, com o intuito de firmar um acordo onde foram explicados aos professores o objectivo do estudo e questões de investigação, bem como os seus direitos e deveres enquanto colaboradores no mesmo (Anexo 1). Foi fornecido um cronograma de actividades a cada professor onde estavam discriminadas e calendarizadas todas as acções que tinham de levar a cabo, como sejam a participação em duas entrevistas, a selecção de cinco tarefas de investigação e respectiva planificação, a discussão conjunta da planificação com a investigadora, a leccionação de cinco aulas observadas e a reflexão sobre essas aulas. Esta calendarização sofreu posteriormente ajustes, relacionados com a disponibilidade da investigadora e dos professores (Anexo 2).

Intervenção didáctica

Tendo em conta o facto de os professores nunca terem desenvolvido tarefas de investigação nas suas aulas, pelo menos nos moldes que Ponte, Brocardo e Oliveira (2005) preconizam e sobre o qual este estudo assenta, considerou-se necessária e adequada a intervenção didáctica da investigadora junto dos mesmos. Para além de criar condições de viabilidade para o estudo, esta intervenção constituiria uma oportunidade de desenvolvimento profissional para os professores envolvidos, correspondendo a algumas das suas legítimas expectativas.

Assim, a natureza da intervenção da investigadora consistiu em fornecer aos professores as tarefas de investigação, apoiá-los na planificação das mesmas e incitar à reflexão sobre a sua prática lectiva com desenvolvimento deste tipo de tarefas.

Foi entregue aos professores, antes do início do estudo, um conjunto de cerca de dezassete tarefas de investigação, apelidado de “Banco de Investigações” (Anexo 3), seleccionadas e reunidas de acordo com critérios pré-estabelecidos, de forma a conterem tarefas direccionadas para cada um dos ciclos que os professores leccionavam ou para ambos cumulativamente, mais ou menos abertas e mais ou menos estruturadas e que contemplassem várias áreas da Matemática, como a Geometria, a Álgebra, os Números

e Cálculo e Probabilidades. Solicitou-se aos professores que seleccionassem cinco dessas tarefas, nas quais poderiam realizar as adaptações que considerassem necessárias.

Foi também entregue, a par do “Banco de Investigações”, um plano de aula tipo (Anexo 4), com uma estrutura pré-estabelecida que os professores tinham de preencher para cada tarefa, de forma a evidenciarem as suas intenções para cada aula, no que se refere aos “objectivos” que pretendiam alcançar, à “tarefa seleccionada”, ao “material” e à “metodologia” a utilizar, às “questões a colocar aos alunos”, à “forma como pretendiam conduzir a aula” e como iriam proceder à “avaliação”. Para melhor elucidar os professores acerca da forma como se pretendia que planificassem as suas aulas, foi ainda fornecido aos mesmos um plano de aula como exemplo, já completo e experimentado (Anexo 5).

O referido plano de aula, depois de preenchido e acompanhado do enunciado da tarefa, com as devidas adaptações realizadas, era enviado à investigadora antes de cada aula observada. A investigadora juntamente com a sua orientadora, avaliavam a adequação e pertinência do mesmo.

Posteriormente, a investigadora e o/a professor(a) reuniam antes da aula, num local seleccionada pelos professores, a fim de discutirem as alterações sugeridas e/ou esclarecerem aspectos menos claros do referido documento. Este momento era importante para que a investigadora pudesse melhor compreender as intenções dos professores enunciadas no plano de aula e dar algumas sugestões quando necessário, inteirar-se das dificuldades sentidas na preparação de cada aula, perceber os motivos que os conduziram à selecção da tarefa em causa e discutir junto dos professores a pertinência das alterações sugeridas.

Por conseguinte, as tarefas que os professores seleccionaram e a justificação dessa selecção, a natureza das adaptações realizadas ao enunciado da mesma, bem como as características do plano de aula realizado e a discussão do mesmo, foram também alvo de análise neste estudo.

Técnicas e instrumentos de recolha de dados

Carmo e Ferreira (1998) e Quivy e Campenhoudt (2003) referem que num estudo de caso se utilizam diferentes técnicas e instrumentos de recolha de dados, tais como: a observação, a entrevista, a análise documental e o questionário. Deste modo, existe recolha de uma grande quantidade de informação relativa aos casos, conduzindo a uma maior profundidade e informação mais detalhada sobre cada um em concreto, o que proporciona uma grande familiaridade com as vidas e culturas dos investigados. Ao longo do estudo, caminha-se para a formulação de uma teoria rigorosa com base na análise dos dados recolhidos e fiel aos mesmos.

Tendo em conta a riqueza de várias fontes de dados para a compreensão dos casos, que advém do seu cruzamento, constituíram neste estudo técnicas e instrumentos de recolha de dados os seguintes: a entrevista, a observação e a análise documental.

As entrevistas

As entrevistas têm a função de revelar clareza acerca de certos aspectos do fenómeno estudado, permitindo recolher dados descritivos na linguagem do próprio sujeito, o que possibilita ao investigador perceber a forma como este interpreta o mundo, sugerindo-lhe pistas para completar a leitura, sendo essencial que a entrevista decorra de uma forma aberta e flexível (Bogdan & Bicklen, 1994; Quivy & Campenhoudt, 2003). Nas entrevistas semi-estruturadas ou guiadas, não obstante possuírem uma determinada estrutura, ao entrevistado é permitida a liberdade de falar sobre o assunto e de exprimir opiniões. O facto de apresentarem uma estrutura e focarem certos assuntos possibilita obter dados comparáveis entre vários sujeitos, simplificando grandemente a sua análise (Bogdan & Bicklen, 1994; Bell, 1997). O investigador deve ter atenção à parcialidade, consciencializando-se de que a sua maneira de ser e de se exprimir pode influenciar os entrevistados (Bell, 1997).

Tendo em conta os pressupostos anteriores, foram realizadas duas entrevistas semi-estruturadas a cada um dos professores, com base em guiões previamente

elaborados, que permitiram, de uma forma flexível, abordar questões similares com ambos os professores.

A realização da primeira entrevista apresentava como intuito o de caracterizar e compreender o conhecimento profissional dos professores antes do estudo (Anexo 6).

Com a segunda e última entrevista, pretendia-se a obtenção de informações e o esclarecimento de alguns aspectos que a observação de aulas e a análise documental não permitiram clarificar, tentando perceber qual a posição dos mesmos relativamente ao desenvolvimento de tarefas na sala de aula, as facilidades e dificuldades sentidas na preparação, na condução das mesmas e a que se ficaram a dever, bem como as repercussões que esta experiência teve no seu conhecimento profissional (Anexo 7).

Foram também realizadas entrevistas informais antes e após cada aula com tarefas de investigação. As entrevistas realizadas antes das aulas tiveram como objectivos perceber as intenções dos professores relativamente à planificação realizada, perceber os motivos que estiveram na origem da selecção de uma determinada tarefa e apoiar os professores na preparação da aula. As entrevistas realizadas após cada aula serviram para incitar à reflexão, levando os professores a realizar um balanço acerca da condução da aula (Anexo 8).

As entrevistas foram realizadas num local seleccionado pelos professores, num ambiente calmo e onde apenas se encontrava a investigadora e os professores, tendo estas sido audio-gravadas.

A observação de aulas

Segundo Quivy e Campenhoudt (2003), a observação directa é aquela em que o próprio investigador procede directamente à recolha de informações, sem se dirigir aos sujeitos interessados, e incide sobre todos os indicadores pertinentes previstos. Tem como suporte um guião construído a partir daqueles indicadores e que designa comportamentos a observar, onde regista directamente as informações sem que o sujeito observado tenha acesso à produção da informação procurada (Anexo 9). Durante a observação, o investigador deve ser discreto, integrando-se no contexto como se dele fizesse parte. Deve manter-se neutro num contexto educativo de conflito e deve ter consciência de que os seus sentimentos e preconceitos, ou seja a sua subjectividade, são susceptíveis de causar enviesamentos (Bogdan & Bicklen, 1994).

Segundo Shön (1992), é através de situações imprevistas e indeterminadas da sua prática que o profissional revela a sua forma particular de ver o mundo, ou seja, o seu conhecimento na acção, pelo que a observação das aulas foi considerada relevante.

Assim, a investigadora observou cinco aulas de cada um dos professores. No caso do professor de 2.º Ciclo, as aulas tiveram a duração de noventa minutos cada, ao passo que as aulas da professora de 1.º Ciclo atingiram, na maioria das vezes, uma duração igual ou superior aos cento e cinquenta minutos. Esta observação, que teve sempre que possível um intervalo mínimo de duas semanas entre as mesmas, decorreu durante os segundo e terceiro períodos do ano lectivo 2007/2008.

A observação destas aulas teve como intuito apreender a prática dos professores na condução de tarefas de investigação e a forma como implementam o plano de aula realizado. Para o efeito, a investigadora utilizou um guião (Anexo 9) que continha aspectos gerais a observar e onde fez algumas anotações sobre episódios particulares e imprevistos, descrições, diálogos e aspectos para esclarecer posteriormente com os professores. A recolha de dados foi realizada ora em locais fixos de boa visibilidade, ora circulando pela sala, para melhor se aperceber do trabalho do professor na interacção com os alunos.

Foram realizadas gravações áudio para complementar os registos escritos, dada a complexa dinâmica deste tipo de aulas com metodologia de trabalho em grupo em que o professor tem que circular continuamente pelos grupos e interagir com os mesmos. O aparato técnico foi quase imperceptível, pois a gravação foi realizada por um gravador formato MP3 que os professores usavam pendurado ao pescoço, como se de um acessório se tratasse.

A presença da investigadora parece não ter provocado alterações no normal funcionamento das aulas, uma vez que os alunos estavam habituados à presença de outros professores na sala de aula, devido ao facto de ambos os professores frequentarem o Programa de Formação Contínua em Matemática e terem, por isso, aulas assistidas pelos formadores desse programa. Os alunos do professor de 2.º Ciclo manifestaram, num ou noutro momento pontual, curiosidade pela presença da investigadora, que rapidamente foi dissipada, tendo-a recebido com naturalidade. Os alunos da professora de 1.º Ciclo, por já conhecerem a investigadora, pois esta havia sido docente na escola a que eles pertenciam no ano lectivo anterior, tendo-lhes leccionado actividades de enriquecimento curricular na área de Informática, aceitaram com bastante entusiasmo e naturalidade a sua presença nas suas aulas.

Da observação de cada aula, dos registos escritos e gravação áudio recolhidos resultaram relatos descritivo-analíticos efectuados pela investigadora, contendo resumos das mesmas, com a descrição de momentos e aspectos particulares e fundamentais que caracterizavam cada uma delas, bem como as reflexões e significados atribuídos, quer pelo professor quer pela investigadora.

A análise documental

Os instrumentos de recolha de dados apresentados até agora são da responsabilidade da investigadora, tendo esta o papel principal na sua produção. Embora não tão comumente, os materiais elaborados pelos sujeitos de observação podem também constituir dados para análise, resultando numa fonte de férteis descrições da perspectiva do sujeito acerca do mundo em geral (Bogdan & Bicklen, 1994). Bell (1997) afirma que todos os documentos são susceptíveis de veicular informações inadvertidas pelo autor dos mesmos. Cabe ao investigador apreendê-las e avaliar o seu significado preciso, colocando-se na sua perspectiva e analisando-o rigorosamente.

A análise documental foi utilizada pela investigadora como técnica de recolha de dados complementar à entrevista e à observação. A referida análise incidiu sobre dois tipos de documentos: os planos de aula produzidos pelos professores; a tarefa de investigação seleccionada e as adaptações realizadas ao enunciado da mesma.

Análise de dados

A análise de dados consiste numa tarefa analítica, num processo de interpretação dos dados de forma a torná-los compreensíveis e os seus resultados partilháveis. Digamos que é o percurso de transformação que os dados sofrem desde “páginas de descrições vagas” até ao “produto final”:

O processo de análise de dados é como um funil: as coisas estão abertas de início (ou no topo) e vão-se tornando mais fechadas e específicas no

extremo. O investigador qualitativo planeia utilizar parte do estudo para perceber quais são as questões mais importantes. Não presume que se sabe o suficiente para reconhecer as questões importantes antes de efectuar a investigação. (Bogdan & Bicklen, 1994, p.50)

Por conseguinte, este processo consiste num incessante e sistemático método de busca e organização das várias fontes de dados recolhidos, como as transcrições de entrevistas, os relatos de observação de aulas e outros documentos, com o objectivo de aumentar a compreensão dos mesmos. A análise dos dados engloba “o trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta dos aspectos importantes e do que deve ser aprendido e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros” (Bogdan & Bicklen, 1994, p. 205).

Não obstante a análise de dados mais formal ter-se iniciado após a conclusão total da recolha de dados, a recolha e a análise de dados coexistiram, pois a reflexão acerca do que se vai descobrindo no trabalho de campo é algo inevitável para o investigador qualitativo, sob pena de se perder uma orientação do trabalho realizado e de os dados recolhidos serem insuficientes para posterior análise (Bogdan & Bicklen, 1994).

Assim, desde o início da recolha de dados, o investigador tem a possibilidade de ir testando a validade das suas primeiras interpretações, das ideias e teorias que começam a emergir sobre os casos, de forma a poder afinar o âmbito do estudo e complementar as informações, refinando as teorias formadas ou mesmo abandonando-as (Canavarro, 2003; Bogdan & Bicklen, 1994).

Desta forma, a análise dos dados iniciou-se de um modo mais informal e intuitivo, e apresentou três momentos distintos. O primeiro momento foi o tratamento das primeiras entrevistas realizadas aos professores. Os dados foram organizados numa tabela comparativa contendo as entrevistas de ambos os professores, seguindo um sistema de categorias, sendo depois reduzidos. Esta primeira entrevista, que tinha como intuito caracterizar o conhecimento profissional dos professores antes do estudo, forneceu o suporte informativo para o início da escrita dos casos de cada um deles.

A fase da análise que se seguiu foi a escrita dos relatos das aulas observadas. Estes relatos apresentavam já uma forma reduzida dos dados, pois não eram transcrições integrais das aulas, mas resumos, o mais completos possível, das mesmas. Por conseguinte, eram relatos descritivo-analíticos das aulas, com os episódios determinantes e a descrição dos aspectos particulares que caracterizavam as aulas, bem

como reflexões dos professores e da investigadora acerca da forma como aqueles introduziam a tarefa de investigação e o ambiente que criavam, a forma como promoviam o desenvolvimento e a discussão da tarefa e o cumprimento das intenções enunciadas na planificação.

Por último, e antes de se iniciar a análise formal dos dados, procedeu-se ao tratamento da entrevista final realizada aos professores, que pretendia a obtenção de informações sobre o conhecimento profissional do professor e o desenvolvimento de tarefas de investigação, as principais preocupações e as dificuldades encontradas, bem como o esclarecimento de outros aspectos ainda pouco claros. Esta entrevista foi tratada exactamente do mesmo modo descrito para a anterior.

A análise formal dos dados consistiu em percorrer algumas vezes todos os dados organizados cronologicamente de forma a ter uma noção da totalidade dos mesmos (Bogdan & Bicklen, 1994). A leitura dos dados foi sugerindo a repetição e o destaque de palavras, frases, padrões de comportamento, forma dos professores pensarem e acontecimentos, permitindo encaixar estas unidades nas categorias de análise definidas *a priori* informadas pela teoria. Esta categorização prévia foi sendo refinada e reformulada à medida que o processo de análise evoluía, dando espaço à criação de uma nova categorização.

Seguiu-se finalmente a fase de interpretação dos dados organizados em categorias de análise, atribuindo-lhes significados e relacionando-os de forma a refinar ou reformular a teoria inicial. Esta interpretação foi complementada com a análise documental. Desta forma, concluiu-se a escrita de cada caso, já iniciada anteriormente. Primeiro, escreveu-se o caso da professora Petra e, em seguida, o caso do professor Paulo, seguindo as categorias de análise definidas. Posteriormente, fez-se uma análise comparativa de ambos os casos, procurando-se identificar os aspectos que os aproximavam e que os distinguiam, e a que se ficavam a dever. Finalmente escreveram-se as conclusões, extraindo os aspectos relevantes dos momentos de análise anteriores, com o intuito de responder às questões de investigação formuladas.

Fundamentos de natureza ética

A ética relativa à investigação com sujeitos humanos refere-se ao normativo que norteia os procedimentos que são susceptíveis de ser considerados correctos e incorrectos, e à qual nenhum investigador deve ficar indiferente. No entanto, não obstante a existência de linhas orientadoras, as decisões de carácter ético estão estritamente relacionadas com a pessoa que o investigador é, com os seus valores e as suas crenças (Bogdan & Bicklen, 1994).

Sobre este assunto, Bogdan e Bicklen (1994) referem a existência de dois aspectos fundamentais: “o consentimento informado e a protecção dos sujeitos contra qualquer espécie de danos” (p.75).

Por conseguinte, a investigadora, antes do início do estudo, reuniu com os professores a fim de firmar um acordo no qual constavam os objectivos do estudo, bem como algumas clarificações referentes aos direitos do professor, enquanto participante nesta investigação. Durante a mesma, os professores foram informados e esclarecidos acerca dos propósitos do estudo e foi-lhes fornecido um cronograma das actividades onde estes puderam observar e compreender o que se esperava que fossem os seus contributos no mesmo. Foram, também, informados de como e quando as suas intervenções iriam ser audio-gravadas e para que fim. Esta informação foi repetida sempre que se realizou uma gravação ao longo do estudo.

A investigadora comprometeu-se a salvaguardar a identidade dos professores, pelo que foram utilizados em todos os registos, nomes fictícios, por forma a que os resultados do estudo não causassem transtorno ou prejuízo aos visados. Responsabilizou-se ainda por fornecer aos dois professores *feedback* dos resultados do estudo, quando este estivesse concluído, e por lhes facultar uma cópia do mesmo.

Outro aspecto importante relacionado, por um lado com os princípios gerais éticos, e, por outro com a validade do estudo, foi o facto de os casos realizados acerca dos professores lhes terem sido entregues e dados a ler de forma a estes avaliarem o grau de identificação com a pessoa que estava descrita, em particular no que refere aos significados e às interpretações construídos a partir dos dados, ou se, pelo contrário, detectavam incongruências que os perturbassem. De realçar que ambos os professores referiram concordar com o conteúdo dos casos, não tendo sido necessária a realização de alterações significativas.

A questão da fidelidade dos dados obtidos foi outro dos aspectos que nunca se perdeu de vista neste estudo. Assim, a investigadora tentou sempre ser autêntica em relação aos dados que recolheu, assim como na interpretação e na compreensão que estes lhe suscitaram, procurando não se deixar influenciar por factores de natureza intrínseca ou extrínseca a si própria, que pudessem proporcionar enviesamentos.

Por último, uma questão não menos importante foi a relação mantida entre a investigadora e os professores, integralmente baseada no respeito pela pessoa que os professores são, na compreensão pelas suas ideias, tentando sempre colocar-se o mais possível na sua perspectiva, e na admiração pela sua disponibilidade em abrir a sua sala de aula a um elemento estranho à mesma. Do mesmo modo, também os professores revelaram dedicação e empenho em cumprir as suas atribuições neste estudo.

Dada a duração do estudo e a complexidade de uma interacção deste tipo, esta transcende muitas vezes o limite de um simples acordo, para chegar a assemelhar-se a uma amizade (Bogdan & Bicklen, 1994). Por conseguinte, foi por vezes difícil para a investigadora não poder retribuir durante o estudo de igual forma as reflexões profundas que os professores fizeram acerca de temas que a apaixonam, ou de dar *feedback* acerca de aspectos que lhe agradam ou que a incomodam. Este é um aspecto difícil de controlar, mas a determinação acerca da fidelidade e da validade do estudo ajudaram a ultrapassar essa dificuldade.

Capítulo VI

A professora Petra

Petra é o nome que neste estudo foi atribuído à professora de 1.º Ciclo. O presente capítulo irá tratar exclusivamente desta professora. Após a apresentação de Petra, segue-se a caracterização do seu conhecimento profissional, nas suas diferentes dimensões: conhecimento de si; conhecimento do contexto; conhecimento da Matemática; conhecimento dos alunos e dos seus processos de aprendizagem; conhecimento do currículo; conhecimento do processo instrucional. Posteriormente, far-se-á a análise do trabalho da professora no desenvolvimento de tarefas de investigação na sala de aula, nas suas diferentes fases: planificação e condução. Para concluir, analisar-se-á a reflexão da professora sobre a sua prática lectiva com o desenvolvimento de aulas com tarefas de investigação, dando particular importância ao balanço dos aspectos melhor conseguidos, às dificuldades encontradas e às aprendizagens que a mesma reconhece ter realizado com esta experiência.

Apresentação

Petra tem 41 anos, é casada e tem dois filhos. É uma mulher simpática, educada, discreta, reflexiva, dedicada e uma entusiasta pela Matemática. Tem um trato agradável e um espírito flexível e jovem, que expressa também na forma de vestir.

A investigadora conheceu Petra num Agrupamento de Escolas do distrito de Portalegre a que ambas pertenceram no ano lectivo 2006/2007, tendo aquela leccionado a área de enriquecimento curricular de Informática aos seus alunos do terceiro ano de escolaridade. Das reuniões periódicas realizadas e da troca de pareceres regulares sobre o trabalho desenvolvido, a professora suscitou na investigadora empatia. Posteriormente, o conhecimento do trabalho desenvolvido pela professora no âmbito do Programa de Formação Contínua em Matemática, bem como a percepção da sua prontidão para com os colegas, a sua dedicação e entusiasmo pelo ensino da Matemática e a sua abertura a novas experiências despertaram admiração e a vontade de convidar a professora para participar neste estudo. Petra aceitou de imediato o convite pelas aprendizagens que antevia que esta experiência poderia proporcionar a si e aos seus alunos.

Conhecimento de si

Petra é professora do 1.º Ciclo do Ensino Básico e a profissão de professora, que exerce há vinte anos, assenta-lhe na perfeição. No entanto, o seu intuito era ser Engenheira Informática, mas, por não ter obtido média de entrada para este curso, acabou por ingressar para o curso do Magistério por ser o que lhe estava mais acessível. Talvez alguma insatisfação lhe tenha ficado desta escolha forçada, que a fez iniciar outros cursos sem porém ter terminado nenhum, configurando-lhe um percurso académico algo instável.

Após ter concluído o curso do Magistério, com média de 15 valores, inscreveu-se num curso de Física, ramo da Óptica, embora a impossibilidade de assistir às aulas,

por já se encontrar a leccionar ao 1.º Ciclo, numa aldeia distante da Universidade, a tenham levado a desistir. Mais tarde, e conduzida por uma paixão antiga - a Matemática, inscreveu-se no curso de Professores do Ensino Básico de Matemática e Ciências da Natureza da Universidade Aberta e conseguiu concluir metade das cadeiras. No entanto, a falta de método e depois o nascimento dos filhos levaram-na, mais uma vez, a abandonar este projecto.

Depois, não largando a Matemática, o que é que eu pensei: vou inscrever-me na Universidade Aberta e vou para Matemática e Ciências na Universidade Aberta! Fiz metade do curso. Fiz metade do curso porque eu não sou uma pessoa muito metódica, portanto eu trabalho sobre pressão [...] e na Universidade Aberta não havia obrigatoriedade de ir às aulas. Moral da história: era em cima do acontecimento que eu estudava. O que é que acontece? Não consegui fazer metade das cadeiras e depois, entretanto começaram os filhos, não é, eu não tinha disponibilidade, foi complicado... desisti. [risos] (Entrevista 1)

A sua já longa carreira, que conta com vinte anos, iniciou-se no 1.º Ciclo, mas por pouco tempo, apenas dois anos. Os catorze anos seguintes foram dedicados ao ensino da Língua Portuguesa, do Francês, da Geografia e da História, na Telescola, experiência para si muito gratificante.

Durante a sua carreira, Petra desempenhou também as funções de coordenadora de um projecto - o PIPSE (Programa Interministerial de Promoção do Sucesso Educativo) do concelho onde lecciona, tendo estado afastada da actividade lectiva nesse ano.

Posteriormente, surge a necessidade de realizar o Complemento de Formação para Professores do 1.º Ciclo numa Escola Superior de Educação, que, devido à obrigatoriedade de assistir às aulas, concluiu com uma boa média. Desta experiência ressalta o facto de ter frequentado todas as cadeiras optativas relacionadas com a Matemática e a importância de os professores da ESE lhe terem feito ter “outra visão” da Matemática.

Uma “visão completamente diferente da Matemática” e muitas aprendizagens importantes foram-lhe também proporcionadas por um formador no âmbito do Programa de Formação Contínua em Matemática, o qual frequentou durante dois anos. Esta experiência acabou por ser para si muito importante, pois coincidiu com a altura em que, após um longo período afastada do 1.º Ciclo, a professora regressou à

leccionação deste nível de ensino, ajudando-a a ter, segundo a mesma, “uma visão completamente diferente para trabalhar a Matemática com os miúdos”:

Professora: Entretanto, tenho muita pena de não ser professora de Matemática e gosto muito. Andei dois anos no curso de Matemática com o professor Narciso, onde aprendi bastante, sem dúvida nenhuma... e na ESE também, a ter outra visão...

Investigadora - No Programa de Formação Contínua?

Professora - Sim também bastante... pronto... uma visão completamente diferente! (Entrevista 1)

Petra tem muita pena de não ser professora de Matemática. Não gosta muito de falar de si, mas não apresenta reservas em falar do seu trabalho. Não quis caracterizar-se e a sua modéstia e educação dificilmente deixaram transparecer a imagem que os seus colegas possuem de si, de uma boa profissional, muito empenhada e sempre pronta a ajudar, e dos seus alunos que a consideram “a melhor professora do mundo!”:

Agora é assim... como é que eles me vêem? É difícil! A professora Ivone diz muitas vezes que acha que eu sou uma boa professora, que... pronto... que eu me farto de trabalhar, que sou muito interessada, muito empenhada, que acha que eu até faço demais!

[...] Eles a mim? Isso faz parte de um 1.º Ciclo, os miúdos gostam muito sempre da professora, “é a melhor professora do mundo!”, os bilhetinhos todos os dias, mas isso é comigo como é com qualquer outro colega, entendes? (Entrevista 1)

Atribui parte do sucesso do seu desempenho ao contributo dos seus colegas do 1.º Ciclo, com quem afirma ter uma relação muito boa e próxima, a quem reconhece muita experiência e competência e por quem possui uma enorme admiração.

Petra diz recorrer muitas vezes aos seus colegas para trocar ideias, materiais ou para pedir ajuda na resolução de situações problemáticas da sua prática, pois atribui muita importância ao trabalho colaborativo. Lamenta o facto de os professores terem uma grande tendência para o isolamento, considerando-se “reis da sua sala”:

[...] a partilha entre colegas é fundamental! É tu dizeres assim: “fiz assim, não resultou!”, “eu fiz desta maneira experimental!”. E eu acho que eu e a Ivone somos muito assim. Quantas vezes eu saio da minha sala, às vezes estou a abordar um assunto qualquer e de repente: “olha eu já estou aqui um bocado baralhada nisto” [...]

Eu acho que nós os professores nos fechamos muito no nosso mundo, os professores têm essa tendência e mais até o professor do 1.º Ciclo, que sempre se habituou a dominar e a ser o rei da sua sala! (Entrevista 2)

Deste grupo, destaca a professora Ivone, cuja proximidade se deve ao facto de ambas terem uma grande afinidade com a Matemática, de terem frequentado o Programa de Formação Contínua em Matemática, tendo realizado muitos trabalhos em conjunto e de terem participado juntas em vários encontros da APM:

Nós perdemo-nos! E uma quando descobre uma coisa, um problema, vem e traz e diz assim: “Olha Petra descobri este problema, o que é que tu achas?” e discutimos o problema e passamos horas a falar do problema [...] e passamos imensas horas a falar dos problemas e da Matemática, porque gostamos mesmo! Depois, desde que iniciámos a formação, temos trabalhado sempre em grupo, e o facto de termos participado nesses encontros da Associação de Professores de Matemática, trabalhamos muitas, muitas horas, daí se calhar uma ligação especial. (Entrevista 1)

No que concerne a este estudo, a professora refere ter partilhado muitas vezes impressões sobre todas as tarefas realizadas com Ivone, seja relatando-lhe como as aulas correram ou as descobertas a que os alunos chegaram, seja propondo-lhe problemas e desafios para ver se esta chegava a certas descobertas. Outras vezes era a própria Ivone que procurava Petra para obter *feedback* relativamente às aulas.

Para além de Ivone, Petra recorreu ainda, sem reservas, à ajuda de uma colega de Matemática do 3.º Ciclo, bem como à investigadora para preparação de algumas aulas, verificando-se que o trabalho colaborativo é apanágio desta professora.

Enquanto docente, privilegia na sala de aula o ensino individualizado e o tentar ao máximo evitar o erro por parte dos alunos. No entanto, considera bastante difícil e muito desgastante operacionalizar um ensino individualizado numa turma com vinte e cinco alunos como a sua, muito heterogénea, com três alunos com necessidades educativas especiais e com uma aluna chinesa, o que lhe causa alguma frustração.

As assimetrias económicas e sociais existentes na nossa sociedade e a multiculturalidade sujeitam o professor a desempenhar papéis de natureza diversa, o que se torna bastante difícil dada a escassez de apoio técnico especializado para o efeito, refere:

Ou seja, a diversidade cultural, actualmente, é de tal forma que gera *stress* no professor. Eu acho que hoje o que se exige à escola é tanta coisa, é em tantos domínios que tu, enquanto professor, porque tens que te desdobrar em assistente social, em técnico social que lhe chamem, em

mãe, em pai, porque muitos deles não têm nenhum apoio em casa [...] e está tudo em cima da própria escola, inclusivamente em ocupar os tempos livres dos alunos, enquanto os pais estão a trabalhar, não é? E acho que isso é que gera a dificuldade em ser professor hoje em dia, a diversidade cultural. [...] Para mim essa é a principal dificuldade! As turmas grandes, a diversidade que é enorme, a heterogeneidade numa sala de aula é enorme, e é, muitas vezes, a falta de apoios e de meios, porque devíamos ter muito mais técnicos de ensino especial, técnicos especializados, que dessem apoio às turmas. (Entrevista 1)

Por conseguinte, actualmente a professora atravessa na profissão uma fase de desencanto que nunca esperou sentir, pois adora o que faz. Refere que se pudesse abandonava esta profissão, não pelas crianças, mas pelo sistema que considera sobrecarregar demasiado os professores com burocracias, sendo muito injusto e com muitas incoerências, como o novo regime de avaliação e o novo modelo de gestão das escolas.

Não obstante, a professora continua a considerar a profissão muito gratificante, pelo facto de trabalhar com pessoas e pelo que isso tem de enriquecedor e maravilhoso:

Há valores que foram passados de acordo com os meus valores. [...] E, obviamente, também aprendemos com eles muitas coisas que eles nos ensinam... e também fui enriquecendo com isso! Mas o que mais me realiza nisto tudo é que existe muita gente que já trabalhou comigo, que já passou por mim, que tem um bocadinho de mim, pronto! E isso é maravilhoso, sei lá! (Entrevista 1)

A sua memória guarda apenas recordações de experiências positivas acerca dos seus alunos. Afirma não ter experiências negativas, tendo dificuldade em eleger uma que a tenha marcado especialmente mais que as outras. Refere que gostou muito de leccionar na Telescola, pois gosta trabalhar com alunos mais velhos. Ao nível do 1.º Ciclo, prefere os alunos dos terceiro e quarto anos, por ser muito difícil ensinar as crianças a ler e escrever e por os alunos mais velhos proporcionarem um tipo de desafio diferente:

Custa-me imenso ensinar a ler e a escrever, eu gosto dos miúdos que já lêem e escrevem, já põem questões pertinentes, já te dão luta, já exigem mais de ti, os pequeninos também exigem, mas noutra vertente. (Entrevista 1)

Porquanto, a experiência que refere ter exigido mais de si, e por isso considera mais marcante, é aquela pela qual ainda está a passar, que é a de trabalhar uma turma

do primeiro ao quarto anos de escolaridade, ensinar-lhe todas as áreas e desenvolver-lhe todas a competências:

Agora a que tem exigido mais de mim e a que eu realmente tenho investido é esta turma, que eu trabalhei desde o primeiro até ao quarto [anos], a responsabilidade desta turma é toda minha, em todas as áreas! Se calhar, é por isso talvez que, não digo que tenha sido a mais positiva, mas a mais marcante! (Entrevista 1)

De todas as áreas que lecciona no 1.º Ciclo, a que lecciona com mais agrado é a Matemática, porque gosta, sendo também aquela que considera ensinar melhor. No entanto, refere que esse facto fá-la ser menos tolerante para com os alunos em aceitar os seus erros:

Eu acho que nós somos sempre melhores a leccionar o que gostamos, como é óbvio! Se tu gostas, se tu te empenhas, se tu vives aquilo, eu acho que sou melhor a leccionar isso. Por outro lado, às vezes, também tenho alguma dificuldade, como gosto e como ... às vezes não sou tão... como é que hei-de explicar... como é que se diz... se calhar não admito tanto o erro, entendes? (Entrevista 1)

Atribui muita importância à formação contínua, tendo já realizado algumas formações em diferentes áreas como a Informática, a Língua Portuguesa e a Matemática. No entanto, apenas concebe a formação em contexto, à semelhança daquela que foi realizada no âmbito do Programa de Formação Contínua em Matemática, pois permite trabalhar no terreno, as tarefas concebidas têm um público alvo concreto - os seus alunos, podem ser aplicadas e avaliadas, enquanto que em outro tipo de formação a avaliação é impossível porque não existe experimentação:

Esta formação da Matemática foi excelente por isso, porque tu ao estares a fazer a formação, ao estares a criar as tuas aulas, estás com o público alvo determinado, é aquele, não é outro, com aquelas dificuldades, com aquelas facilidades, digamos, com aquele perfil e não com outro. Portanto, quando tu trabalhas para aqueles alunos, e quando concebes tarefas tens o público bem definido, é muito mais fácil e podes fazer uma avaliação depois daquilo, porque experimentaste, porque fizeste, porque correu bem ou porque correu mal e porque consegues avaliar. (Entrevista 1)

Como projectos de formação a curto prazo, Petra gostaria de realizar um mestrado em Ensino da Matemática e gostava de o fazer em simultâneo com experimentação dos novos programas de 1.º Ciclo, por considerar poder colher mais valias de ambas as partes, para ambos os projectos. No entanto, apresenta algumas

reservas quanto ao mestrado por se sentir demasiado cansada neste final de ano lectivo e final de ciclo para a sua turma:

Olha eu gostava muito, muito mesmo, de fazer mestrado no Ensino da Matemática, é a minha próxima aposta! E gostaria até de fazer já no próximo ano, porque, esta questão dos novos programas, ia cair que nem ginja! Só que é assim, não me sinto com força suficiente, a sério! Sinto-me muito cansada! (Entrevista 2)

Conhecimento do contexto

Petra refere que a escola onde lecciona se insere num meio sociocultural baixo, com muitos problemas económicos e sociais, com algumas famílias desestruturadas, onde a oferta cultural, embora já algo diversa, fica um pouco aquém daquela que uma cidade pode proporcionar. Por conseguinte, a professora costuma ter em conta estes aspectos no seu dia-a-dia, por exemplo nas experiências que proporciona aos alunos. No entanto, refere que a sua conduta profissional é igual independentemente do meio.

Sente-se privilegiada relativamente à escola a que pertence, devido à riqueza dos recursos materiais e humanos disponibilizados e que Petra refere serem impensáveis noutras escolas do 1.º Ciclo. Diz-se uma defensora do modelo de Escolas Integradas pela possibilidade da ligação interciclos que este proporciona. No entanto, esta ligação nem sempre é fácil, pois existe um grande isolamento entre professores de diferentes ciclos e uma valorização excessiva, tendendo os professores de cada ciclo a atribuir a culpa dos problemas dos seus alunos aos professores do ciclo anterior. Petra tem consciência desta limitação, porquanto refere que o facto dos professores de outros ciclos leccionarem as áreas de enriquecimento curricular ao 1.º Ciclo e necessitarem de realizar reuniões conjuntas tem quebrado algumas barreiras e tem incitado à reflexão conjunta:

Acabamos por nos valorizar muito! Nós somos os melhores, nós é que trabalhamos, e os outros falham, e nós: “como é que chega aqui um menino do Pré-escolar e não sabe fazer isto ou aquilo!” e eu acho que isso

às vezes prejudica um pouco. Por outro lado, penso que... e tenho notado, é o quarto ano que cá estou, noto uma melhoria, não é ideal, mas noto que estamos a tentar que essa ligação seja cada vez mais coesa, percebes? E as A.E.C.'s, que foram um pouco à força, mas também têm contribuído um pouco, porque nós temos de fazer reuniões trimestrais com os colegas de segundo... têm ajudado. Se não fossem as A.E.C.'s, se calhar, eu nem conhecia alguns dos colegas de 2.º e 3.º Ciclos. Isso permite uma maior ligação e isso é positivo. (Entrevista 1)

Desta forma, o conhecimento que a professora possui do corpo docente da sua escola é muito limitado e reduz-se ao conhecimento dos colegas do ciclo a que pertence, a quem reconhece muito mérito, uma vasta experiência em ensino e a quem diz recorrer com frequência.

Quanto aos seus alunos, Petra refere que são muito heterogéneos entre si tem alunos muito bons e outros com grandes dificuldades de aprendizagem. São, no geral, muito participativos e têm vindo progressivamente a manifestar comportamentos perturbadores neste ano lectivo, cujas causas lhe são alheias.

Conhecimento da Matemática

A Matemática para Petra é essencialmente ensinar a pensar, ajudar a desenvolver o raciocínio e a despertar para os problemas que nos rodeiam, pois para resolvê-los há que saber pensar e raciocinar:

A Matemática para mim é ensinar a pensar, eu acho que é mais isso, é o desenvolver do raciocínio, é o despertar para os problemas, e a nossa vida é problemas, eles estão em todo o lado. Eu acho que é ensinar a pensar, a Matemática é isso. (Entrevista 1)

Petra possui um entusiasmo particular pela Matemática que lhe advém dos seus tempos de aluna. Refere que sempre foi uma aluna razoável a Matemática e dessa altura recorda em especial uma professora de Matemática que está muito presente na sua

memória e é para si uma referência, por ter sido uma professora muito boa, que a fazia envolver-se nas tarefas e interessar-se pela aprendizagem da disciplina:

Sei lá, se calhar, ela fazia-nos viver aquilo... eu realmente gostava do que estava a fazer, eu envolvia-me nas tarefas de uma forma interessada... depois com os outros professores não sentia isso, entendes? Eu gostei muito daquela professora de Matemática e não me esqueço... ela está muito presente na minha memória! (Entrevista 1)

No que se refere à formação inicial, afirma que a formação proporcionada pelo Magistério foi bastante adequada a nível científico, apontando-lhe algumas fragilidades a nível pedagógico, por existir um desfazamento entre a teoria e a prática:

A parte científica foi sem dúvida bem trabalhada, bem consolidada. A parte pedagógica... depois é no terreno que tu vais aprendendo, vais evoluindo, fica muito aquém depois do que vais encontrar diariamente! Acho que aí houve, se calhar, alguma fragilidade. (Entrevista 1)

Refere que as aprendizagens proporcionadas pelo Complemento de Formação para professores do 1.º Ciclo e pelo Programa de Formação em Matemática a ajudaram muito no seu enriquecimento profissional: “Eu acho que aprendi a viver a Matemática!”.

Afirma gostar, transversalmente, de todas as áreas da Matemática, não apresentando uma preferência particular por nenhuma, por todas elas estarem interligadas. Gosta da Estatística, dos Números e Operações e, sobretudo, da Resolução de Problemas:

Eu gosto delas todas, [risos] transversalmente, aliás eu acho que elas se cruzam, não é? Todas se cruzam um bocadinho, porque se tu vais para a Geometria, tu acabas por utilizar Números e Operações [...] quando vais para a Estatística tens que utilizar Números e Operações. Eu acho que elas estão todas misturadas, que é difícil de dizer que era isto ou era aquilo. Eu gosto muito da Estatística, mas também gosto muito dos Números e Operações e da Resolução de Problemas especialmente! (Entrevista 1)

Conhecimento dos alunos e seus processos de aprendizagem

Para Petra, os alunos só aprendem Matemática se a trabalharem, se se envolverem nas tarefas e se lhes atribuírem significado e utilidade para a sua vida, para o seu quotidiano. Segundo a professora, este tipo de aulas são as preferidas dos alunos e são também as mais importantes para eles. Porém, nem sempre consegue propô-las, pelo tempo e trabalho que demoram a preparar e a conduzir, sendo que o tempo escasseia sempre em turmas heterogéneas como a sua.

Quanto ao insucesso verificado na disciplina de Matemática, Petra atribuí-o à falta de entusiasmo dos alunos perante a disciplina, causado pelo fraco envolvimento na aprendizagem da mesma, devido a um ensino que sobrevaloriza a aquisição de conteúdos e muito centrado na figura do professor.

Os miúdos só gostam de Matemática se se envolverem nela, se a desmontarem, se a trabalharem. E eu acho que isso ainda não é feito em muitas salas de aula incluindo a minha, porque eu nem sempre o consigo fazer. Nós estamos muito presos ainda a uma série de conteúdos que eles têm de abordar e para eles descobrirem e desmontarem a Matemática tens que lhes dar tempo, pois se há uns que descobrem facilmente outros não, eles têm diferentes ritmos e depois confrontas-te com a falta de tempo. Eu acho que se os alunos trabalharem a Matemática e se os tentares envolver eles gostam. (Entrevista 1)

Petra tem tentado fazer face à falta de entusiasmo dos alunos perante a Matemática; no entanto, refere que nem sempre tem conseguido. Sendo ela a mesma professora, tendo ela passado sempre a mesma mensagem, existem alunos seus que gostam muito da disciplina, enquanto outros não.

Porque é que há miúdos que adoram Matemática e há miúdos que detestam? E eu penso: se eu sou a mesma professora, se passei a mesma mensagem, o meu entusiasmo, porque é que estes gostam e os outros não gostam? E o mesmo a Língua Portuguesa, tenho alunos que adoram Língua Portuguesa e outros não, gostam mais de Matemática. (Entrevista 1)

Tem consciência que é muito difícil trabalhar com as diferenças dos alunos, principalmente em turmas numerosas como a sua. O ensino individualizado é também uma das linhas mestras da sua actuação, mas este só é exequível com apoio dentro da sala de aula ou com turmas com um número médio de 16 alunos. Caso contrário,



considera que o trabalho do professor se torna esgotante, bastante frustrante e com muitos objectivos por cumprir e muitas metas por alcançar.

A relação que mantém com os seus alunos é boa e de muita compreensão, com momentos para trabalhar e outros para brincar, pois há que saber ler os sinais dos alunos e não insistir quando eles estão cansados. No entanto, tem notado de ano para ano a turma a desestabilizar e os alunos com maiores dificuldades de concentração, o que se deve em parte ao facto da turma ter integrado novos elementos com ritmos e regras diferentes, o que dificulta o trabalho, como refere.

A crescente falta de concentração dos alunos é uma preocupação muito presente para Petra, pois afirma que grande parte dos erros que os alunos cometem se deve a este aspecto. A professora refere que os alunos hoje em dia passam muito tempo na escola e são muitas as solicitações a que estão sujeitos, não tendo tempo para brincar. Existem alunos que após as aulas têm as actividades de enriquecimento curricular e de seguida o ATL e nas férias vão também para a escola frequentar o ATL.

Petra não realiza nenhuma preparação especial dos alunos para as Provas de Aferição, pois afirma que alguns dos problemas que trabalha nas suas aulas são retirados das mesmas e o trabalho que desenvolve nas suas aulas vai muito ao encontro das tarefas propostas nas provas, dando pouca ênfase aos algoritmos:

[...] eu não me interessa que eles saibam multiplicar ou de dividir por três algarismos, para quê? Eles têm máquina de calcular que lhes facilita isso! Eu interessa-me é que, perante aquele problema, eles saibam que vão ter que dividir, isso é que é importante! (Entrevista 1)

Conhecimento do currículo

Petra considera a aprendizagem da Matemática importante por permitir o desenvolvimento do pensamento e do raciocínio, desenvolvimento esse que é essencial para a compreensão e resolução de questões e problemas, o que é difícil de proporcionar por outras disciplinas.

Segundo a professora, os objectivos da Matemática mudaram. No tempo em que ela andava na escola, apelava-se muito à memorização e à mecanização de procedimentos. Hoje insiste-se mais na compreensão.

Eu penso que na altura dos nossos pais, e a até na minha altura, apelava-se muito à memorização e à mecanização de procedimentos e acho que nós hoje estamos mais voltados... já deixámos a memorização... se calhar até demais...[risos] Já estamos mais voltados para a questão de eles entenderem mais o que estão a fazer. Eu penso que a grande diferença é essa. [...] Eu digo muitas vezes, eu só entendi o conceito que está implícito à tabuada já enquanto professora, porque enquanto aluna, nunca percebi que 1×3 ou 3×5 era porque se repetia três vezes o cinco, eu decorei aquilo tudo! Sabia a tabuada da frente para trás e de trás para a frente, mas nunca compreendi isso! E hoje os meus alunos e os alunos de qualquer professor entendem que 3×5 é 15 porque é $5+5+5$, eu acho que hoje nós temos a preocupação de os fazer entender os conceitos que estão implícitos nas coisas. No nosso tempo não, memorizávamos, mas não entendíamos! (Entrevista 1)

A elevada importância que se atribuía outrora à memorização no ensino da Matemática devia-se um facilitismo existente. Segundo Petra, era mais fácil ensinar um conceito aos alunos e depois fazê-los decorar, do que ensinar-lho a partir da compreensão do mesmo. No último caso, o professor tem de trabalhar mais o conceito, tem de questionar mais os alunos e isso acaba por demorar mais tempo, pondo em causa o cumprimento da sua planificação, que é a questão que se coloca hoje em dia aos professores e não se colocava outrora num ensino que apelava à memorização.

A professora é declaradamente contra a monodocência no 1.º Ciclo e refere que não é possível que um professor seja competente para leccionar tantas áreas e de natureza tão diversa como aquelas que é chamado a leccionar, ainda que a um nível básico é importante a segurança científica, refere. Reconhece que há sempre uma área que é mais desprezada em detrimento de outras, consoante a formação específica de cada professor e o seu gosto.

Revê-se mais no currículo de 2.º Ciclo, pois apesar de considerar que este é pouco mais que uma sistematização daquilo que os alunos aprenderam no 1.º Ciclo, existem professores responsáveis por diferentes áreas. Julga que o mesmo deveria acontecer também no 1.º Ciclo, embora não se necessitasse de uma especialização tão grande.

[...] eu contesto a monodocência, [...] acho que, uma pessoa, é impossível ser um bom profissional em todas as áreas, como tu tens que ser no 1.º

Ciclo. Eu não concordo minimamente! Acaba sempre por ficar uma para trás, no meu caso não ficou a Matemática, porque eu gosto, porque... mas reconheço que, se calhar, noutros colegas ficará a Matemática, como para mim ficaram as Expressões, que eu detesto e porque eu reconheço que tenho extremas limitações! (Entrevista 2)

No que concerne aos documentos oficiais, Petra refere que trabalha essencialmente com o Currículo, descurando o Programa mais do que devia. Estabelece uma distinção pouco precisa entre currículo e programa e refere que o currículo vai mais ao encontro do que ela considera importante, referindo que o Programa devia ser reformulado.

Quando questionada se já conhece o Programa de Matemática publicado em 2007, refere que apenas deu uma vista de olhos na diagonal, não apresentando por isso uma opinião formada sobre o mesmo. Assim, quando refere que o programa devia ser reformulado, refere-se ao antigo Programa de Matemática.

Eu revejo-me mais no currículo que propriamente no programa. Pronto, não perguntes bem porquê. [risos][...] E nunca recorro tanto ao programa e faço tudo, planificações anuais e isso tudo... recorro sempre ao outro (Entrevista 1).

Quanto ao Programa de Matemática do 1.º Ciclo, Petra refere que gere o seu seguimento mediante aquilo que considera lógico e afirma que tem a preocupação de cumpri-lo, embora nem sempre consiga. No entanto, a preocupação do cumprimento do programa está neste ano lectivo mais presente, uma vez que os seus alunos vão ser sujeitos a uma Prova de Aferição, refere. Devido à turma ser no geral boa a Matemática e devido ao apoio dos pais em casa, ao qual a professora atribui muita importância, esta pôde ir sempre avançando um pouco no programa, nos anos lectivos anteriores, pelo que este já se encontra quase cumprido.

Relativamente às orientações programáticas e curriculares que considera mais importantes, refere as seguintes: o cálculo mental, que deve começar-se logo no primeiro ano; a estimativa e a atitude crítica perante um resultado, que estão dependentes de um cálculo mental bem desenvolvido; por fim, a resolução de problemas. A nível da Geometria, considera importante também o desenvolvimento da visualização espacial.

Petra refere que se deveriam introduzir algumas alterações programáticas a nível da Matemática do 1.º Ciclo, que são ideias que resultaram da discussão e reflexão no

Programa de Formação Contínua em Matemática. Devia aprofundar-se a Estatística por ser uma área muito presente no nosso dia-a-dia e que os alunos devem dominar, e integrar-se as Probabilidades por ser uma área de muito interesse, refere:

Quanto ao resto, acho que está tudo mais ou menos. Mas era isso que eu fazia, penso que a Estatística passa muito pela rama e eu acho que a Estatística está cada vez mais presente no nosso dia-a-dia, eles têm que dominar... e as Probabilidades, [...] que é tão interessante e tem tantas... (Entrevista 1)

Para a planificação das suas aulas, utiliza o Currículo Nacional e recorre a tarefas que constrói, que pesquisa em várias fontes como a Internet ou que lhe são sugeridas pelos colegas. Raramente utiliza o manual, utilizando-o unicamente para a realização dos trabalhos de casa:

Nenhuma, até me custa! [importância dada ao manual] Mas é ao [manual] de Matemática e são todos, pois eles compram os manuais e eu raramente trabalho com eles, passam meses... Olha sabes para quê é que eu utilizo o manual? Para o trabalho de casa. Porque eu raramente trabalho o manual e até temos um manual que eu aprecio que é o “Amiguinhos” e eu até gosto, mas é com te digo... utilizo só pontualmente... eu construo as minhas tarefas, construo, isto é, construo algumas, outras tiro de outros livros, pesquisa na Internet, outras adapto. (Entrevista 1)

Existe, no entanto, uma questão que não é pacífica para Petra e lhe tem causado algum mal-estar: receia ter descurado excessivamente os cálculos e a mecanização no geral, em prol da resolução de problemas e ultimamente das investigações. Numa sociedade complexa e tecnologicamente desenvolvida como a de hoje, não reconhece sentido a que se perca tempo a realizar cálculos que as calculadoras podem resolver em segundos e está convencida que o tempo deve ser aproveitado com o desenvolvimento de competências mais complexas e importantes. Para si, o importante é que, mediante um problema, o aluno consiga realizar o raciocínio correcto, que saiba qual a operação que melhor se adequa e para isso o desenvolvimento do espírito crítico é fundamental. No entanto, os seus alunos ainda vão passar por muitos professores que podem ter uma perspectiva diferente da sua e valorizar o cálculo. Esse aspecto poderá representar uma limitação para eles, que não dominam muito bem os algoritmos:

A mim o que me importa é qual é a operação que eu vou ter que fazer ou qual é o raciocínio que eu vou ter de fazer para poder resolver isto, não é, e que eu sei se me aparece esta questão eu tenho que recorrer à multiplicação ou à divisão... enquanto que a conta ou o algoritmo em si

não é para mim importante, não é determinante. Mas os meus alunos estão no 4.º ano e, se calhar, para o ano... Imagina que o professor que vai trabalhar com eles diz que é determinante, eles não conseguem, eles fazem uma divisão simples, básica, mas se tiver por exemplo 3 algarismos eles não a fazem e vão ter muita dificuldade, eu reconheço que vão. Eu não reconheço muita importância a isso, mas se calhar até tem, há quem defenda que tem! (Entrevista 2)

Conhecimento do processo instrucional

O trabalho que Petra desenvolve nas aulas de Matemática é consentâneo com o tipo de propostas das Provas de Aferição e este aspecto foi visível nos resultados obtidos pelos alunos na referida Prova: 6 alunos tiveram classificação A, 9 tiveram B, outros 9 tiveram C e 1 teve D. Foi importante o reconhecimento dos bons resultados pelos seus colegas. Refere que nas Provas de Aferição se apela muito ao raciocínio e menos à mecanização e ao cálculo e é nesta premissa que assenta o seu trabalho.

Quanto ao trabalho desenvolvido neste estudo, refere que não foi determinante para o sucesso alcançado nas Provas de Aferição, pois os alunos apenas realizaram trabalho de investigação em cinco aulas, mas considera ter fornecido um importante contributo, pois é um tipo de trabalho em que se apela também muito ao raciocínio e se trabalha muitos conceitos ao mesmo tempo, permitindo a sua melhor consolidação:

É assim, eu acho que ajudam sempre, porque tu estás a trabalhar muitos conceitos ao mesmo tempo [...] mas não foi determinante... porque também só trabalhámos cinco vezes, não é? Não foi determinante, mas sem dúvida nenhuma que foi um grande contributo! (Entrevista 2)

Os materiais constituem outra das preocupações presentes para Petra. Considera que estes constituem uma mais valia pelo suporte que dão às tarefas, permitindo uma progressão mais rápida e a possibilidade de os alunos irem mais longe nas mesmas. Costuma utilizar vários materiais de suporte à aprendizagem dos seus alunos e atribui-lhes muita importância, como o ábaco e o material multibásico. Já utilizou também o *Cuisenaire* e o *Tangram*. Com o geoplano refere não simpatizar muito:

Isso é fundamental! Aliás se tu puderes, quantos mais materiais eles puderem utilizar melhor, claro que adequados à tarefa em si, não é? (Entrevista 1)

Quanto à calculadora, refere que a utiliza esporadicamente e que concebe o seu uso não para verificar cálculos, mas para realizar cálculos morosos ou para desenvolver a estimativa e o cálculo mental:

Não, não utilizo frequentemente [calculadora], utilizo esporadicamente e nunca para verificar cálculos, entendes? Olha por acaso hoje usámos, porque dei-lhes aquele problema: dava-lhes 100 m de rede e eles tinham que me desenhar galinheiros diferentes e depois tínhamos que chegar a uma conclusão sobre a área e do perímetro daqueles galinheiros construídos. Eles desenharam tantos e formaram tantos galinheiros, porque depois o perímetro era sempre o mesmo, eles chegaram logo à conclusão que o perímetro era sempre o mesmo, agora as áreas... tinham que chegar à conclusão do que estava a acontecer ali. Então, para ser mais rápido, eu disse-lhes: “olhem peguem na calculadora e façam”. A calculadora, utilizo-a normalmente para isso, para efectuar cálculos que estão a dificultar muito o trabalho e que não me interesse o cálculo em si, mas o que me interesse o resultado final para... e usei uma vez também, mas naquele género que os obrigue a pensar no número antes de o colocar lá. (Entrevista 1)

Relativamente às tarefas de investigação, Petra considera as tecnologias fundamentais para o seu desenvolvimento. Refere que antevê que o computador possa também ter múltiplas vantagens. A calculadora, que foi aquela com a qual trabalhou, presta um apoio inestimável por permitir que os alunos foquem a sua atenção nos aspectos mais importantes da investigação e não se percam em questões com menos interesse como os cálculos:

A calculadora, eu acho que tem múltiplas vantagens, não é, e o computador também terá, nunca experimentei trabalhar investigação a esse nível, mas terá também múltiplos aspectos positivos. A calculadora foi a que nós trabalhámos mais e realmente é fundamental, se eles tivessem de fazer aqueles cálculos todos desistam na primeira! (Entrevista 2)

Síntese

Petra gostava muito de ser professora de Matemática. De todas as áreas que lecciona no 1.º Ciclo, a que refere gostar mais de leccionar é a Matemática e por isso diz ser a que sente leccionar melhor.

Para Petra, a Matemática é importante porque ajuda a desenvolver o pensamento e o raciocínio e ajuda na compreensão e na resolução dos problemas que nos rodeiam. Gosta de todas as áreas na Matemática.

Deixa escapar, embora com muita dificuldade, que os seus colegas a acham uma boa professora, muito dedicada e empenhada e que os seus alunos a consideram “a melhor professora do mundo”.

Refere valorizar muito o trabalho colaborativo, recorrendo com muita frequência aos seus colegas de 1.º Ciclo para trocar materiais, impressões e para pedir ajuda na resolução de situações problemáticas da sua prática.

Na sala de aula, privilegia um ensino individualizado que considera muito difícil de operacionalizar numa turma numerosa e heterogénea como a sua.

Quanto à formação inicial, refere que o conhecimento proporcionado pelo Magistério foi adequado a nível científico, apontando-lhes algumas fragilidades a nível pedagógico.

Da sua experiência de formação, ressalta o Complemento de Formação para professores de 1.º Ciclo e o Programa de Formação Contínua em Matemática que a ajudaram a “ter uma visão diferente da Matemática”. Valoriza a formação contínua que é feita em contexto, pois permite trabalhar no concreto e avaliar o trabalho realizado, como aquela em que participou no âmbito do PFCM.

O desafio profissional mais exigente pelo qual diz já ter passado foi ensinar uma turma do 1.º ao 4.º ano de escolaridade e desenvolver-lhe todas as competências. Prefere leccionar os 3.º e 4.º anos, pois os alunos já sabem ler e escrever e já proporcionam um tipo de desafios diferente.

Não obstante referir que a sua escola se situa num meio socioeconómico baixo, é uma escola com uma grande riqueza de meios quer humanos, quer materiais. Além do mais, é uma escola integrada, o que para Petra é uma mais valia pela ligação interciclos que proporciona, incitando à reflexão conjunta.

Petra caracteriza a sua turma de heterogénea e participativa, com alunos muito bons e outros com dificuldades de aprendizagem, com a qual refere ter uma boa relação. Um problema que considera que os seus alunos estão a revelar cada vez mais é a falta de concentração, que, segundo a mesma, se deve às várias solicitações a que as crianças hoje em dia estão sujeitas, não tendo tempo para brincar.

Refere que os objectivos de ensino-aprendizagem da Matemática mudaram, a ênfase passou da memorização para a compreensão, sendo este tipo de ensino mais difícil e demorado.

Petra atribui o insucesso generalizado na disciplina de Matemática a um ensino muito centrado na figura do professor e na aquisição de conteúdos. Para esta professora, os alunos só aprendem Matemática se a trabalharem, se se envolverem nas tarefas e se lhes atribuírem significado e utilidade.

As orientações programáticas que considera mais importantes desenvolver nos alunos são: o cálculo mental, a estimativa, associada a uma atitude crítica, a resolução de problemas e a visualização espacial.

Os recursos que diz utilizar para orientar a sua prática são o Currículo Nacional, tarefas que constrói, que pesquisa na Internet e que lhe são sugeridas pelos colegas. Raramente utiliza o manual, usando-o apenas para a realização de trabalhos de casa.

Valoriza bastante os materiais manipuláveis, desde que adequados à tarefa que se pretende desenvolver, pois permitem que os alunos progridam mais rapidamente na tarefa. Quanto à calculadora, refere utilizá-la esporadicamente para a realização de cálculos morosos e para o desenvolvimento do cálculo mental e da estimativa.

Relativamente ao programa de Matemática do 1.º Ciclo (1991), refere que este deveria sofrer alterações, nomeadamente aprofundando a Estatística e introduzindo as Probabilidades. Refere que estas ideias resultaram do PFCM. Este ano apresenta uma maior preocupação com o cumprimento do programa, devido ao facto de os seus alunos irem realizar as Provas de Aferição de 4.º ano.

No que concerne às Provas de Aferição, refere que estas não servem para avaliar o que os alunos sabem, pois este tipo de avaliação tem de possuir um carácter contínuo. Diz não realizar nenhuma preparação especial dos alunos para estas provas, uma vez que o trabalho que desenvolve com os alunos é consentâneo com as propostas das mesmas, em que apela mais ao raciocínio e menos ao cálculo e à mecanização, capacidades que teme ter desvalorizado de uma forma excessiva.

De momento, a professora refere estar a atravessar um momento de desencanto com a profissão, não se revendo no actual sistema. No entanto, este aspecto não é impeditivo do seu investimento profissional, tendo em mente realizar um mestrado em Educação Matemática.

Petra e as investigações na sala de aula

Esta secção será dedicada à análise do trabalho da professora inerente ao desenvolvimento de tarefas de investigação nos seus diferentes momentos: planificação e condução. Assim, serão apresentados dados acerca da forma como Petra preparou as suas aulas e o modo como as conduziu nas fases de introdução, desenvolvimento e discussão.

Petra nunca havia contactado com tarefas de investigação; no entanto, a sua colega Ivone já tinha desenvolvido uma tarefa deste género com os seus alunos, à qual Petra reconhecia imensas potencialidades, tendo muita curiosidade em experimentar também.

Ao longo deste estudo, Petra manteve uma atitude bastante receptiva e a sua envolvência foi tão forte que as tarefas de investigação passaram a ser as suas tarefas de eleição para sala de aula.

A planificação das aulas com as tarefas de investigação

Como já foi referido no capítulo da Metodologia, nesta fase foi solicitado à professora que preparasse, para cada aula, acompanhada pela investigadora, um guião pré-estabelecido onde indicasse a tarefa seleccionada, bem como os objectivos que pensava vir a cumprir com o desenvolvimento da mesma, as questões que iria colocar aos alunos, a forma como pensava conduzir a aula, as descobertas e conclusões susceptíveis de os seus alunos realizarem e o modo como iria avaliar o seu trabalho.

Posteriormente, após o referido guião ser enviado à investigadora, era analisado pela mesma e pela sua orientadora e discutido com a professora antes da aula.

Não obstante Petra apresentar uma agenda profissional e pessoal muito preenchidas, mostrou sempre muita preocupação que os seus ajustes aos prazos de entrega do guião ou à calendarização das aulas observadas não prejudicassem a investigadora e o desenvolvimento do presente estudo.

A selecção das tarefas. Petra foi seleccionando as tarefas à medida que era necessário planificar cada uma das aulas observadas. Assim, as suas cinco tarefas eleitas foram, por ordem em que ocorreram as aulas, as seguintes: “Explorações com números”, “Números quadrados e números triangulares”, “Travessia do rio”, “Divisões por 11, 111...” e “Cubos, cubos e mais cubos” (Anexo 3).

A selecção da tarefa “Exploração com números” deveu-se ao facto de ser de todas a mais familiar para a professora, uma vez que a sua colega Ivone já a havia explorado com os seus alunos e, desde essa altura, sentia vontade de a experimentar na sua sala de aula. Reconhecia-lhe enormes potencialidades e a possibilidade de exploração de várias ideias matemáticas.

A tarefa seleccionada para a segunda aula observada foi “Números quadrados e números triangulares”, por considerar que esta tarefa possuía bastantes potencialidades e estar com expectativas elevadas em relação à mesma.

Relativamente à escolha da tarefa “Travessia do rio”, esta deveu-se ao facto de os temas Probabilidades e Estatística serem temas com os quais a professora simpatiza e também por considerá-los muito importantes para ajudar os alunos a compreender a realidade, a prever e a generalizar acontecimentos e desenvolver-lhes o espírito crítico. Considera também importantes aspectos relacionados com o desenvolvimento da comunicação matemática que este tema proporciona, como as discussões que se geram entre os alunos e os pormenores da linguagem que aqui são de extrema importância. Não obstante estes temas costumarem ser um pouco omissos no 1.º Ciclo, por não fazerem parte do Programa de Matemática (de 1991), a professora não os tem descurado, tendo a sua importância e pertinência neste nível de ensino sido discutidas e debatidas aquando da sua frequência no Programa de Formação Contínua em Matemática:

Eu escolhi esta tarefa porque acho que o estudo de Probabilidades e Estatística é muito interessante e eu gosto muito [...] até para eles se

habituem a serem críticos e a partir de determinadas ocorrências poderem generalizar [...] Eu acho que no dia-a-dia isso é fundamental, (...) acho que é fundamental para o desenvolvimento do raciocínio, para eles próprios transporem para a realidade determinados acontecimentos. Para mim eu acho que é muito importante [...] Tinha trabalhado muito isso na formação [...] as probabilidades, por isso estava consciente das possibilidades que a tarefa tinha [...] (Reflexão Aula 3)

A partir da terceira aula observada, a professora manifestou algumas dificuldades em seleccionar as tarefas seguintes, pois considerou que algumas, por envolverem conceitos específicos do 2.º Ciclo, não poderiam adaptar-se directamente à sua turma do quarto ano de escolaridade, como as referentes às potências. Também não estava certa das potencialidades de tarefas como a “Escadas” e considerava que não haveria necessidade de realizar tarefas que envolvessem directamente os conceitos de área e perímetros, uma vez que estes conceitos já tinham sido bastante trabalhados com os seus alunos, nem com tabuadas, pois estes já tinham descoberto espontaneamente muitas das regularidades existentes na tabuada. A investigadora enviou à professora esclarecimentos acerca da tarefa “Números em escada” e referiu que a tarefa “Divisões por 11, 111...” poderia ser adaptada aos seus alunos, bastando para isso substituir as fracções do enunciado por divisões. Após estes esclarecimentos, a professora acabou por seleccionar esta última tarefa para a aula seguinte.

Assim, quanto à tarefa “Divisões por 11, 111...”, a sua escolha deveu-se ao facto de a professora a considerar bastante diferente das tarefas realizadas anteriormente, permitindo o desenvolvimento da compreensão do algoritmo da divisão (dos quocientes resultantes, em particular, a compreensão da ordem de grandeza da sua parte inteira e em que situações se obtém uma parte inteira superior ou inferior à unidade ou um número inteiro) e por permitir também a descoberta de regularidades.

A quinta e última tarefa seleccionado foi “Cubos, cubos e mais cubos”. A sua escolha está relacionada com o facto desta envolver o conceito de volume e este ser o único conteúdo que a professora ainda não tinha leccionado para as Provas de Aferição.

Segundo Petra, os critérios por si adoptados para a selecção das tarefas foram as características da tarefa em si e a sua possibilidade de integração na planificação, estando, quando possível, essa tarefa relacionada com os conteúdos a abordar.

[...] Acho que tive sempre em atenção isso, os conceitos que eu tinha que abordar em determinada situação... tentei fazer uma ligação entre as duas coisas: a tarefa e integrá-la na minha planificação, digamos. (Entrevista 2)

Petra considera inconcebível desenvolver uma tarefa de investigação que não esteja relacionada com os conteúdos a leccionar, referindo que estas devem ser integradas na planificação anual da disciplina, no início do ano lectivo, para não acontecer como aconteceu no presente ano. A professora já tinha a sua planificação realizada e, ao longo deste estudo, foi necessário incorporar as tarefas de investigação na mesma, sendo que algumas não apresentavam uma relação directa com os conteúdos que esta se encontrava a leccionar.

[...] Contextualizar é fundamental! [...] É assim, acho que é muito difícil tu conceberes uma tarefa que não tenha a ver com o conceito em si, o conceito matemático que tu queiras abordar. Pronto, obviamente, se tens que abordar esse conceito que seja na altura em que tu o tens planificado [...] para que tenha um seguimento lógico, não é? Não é hoje estar a trabalhar por exemplo área e amanhã volume e depois vir trabalhar uma coisa qualquer que não tem nada a ver. (Entrevista 2)

Para a selecção das tarefas, Petra refere que, para além de ter em conta planificação da turma, outra grande preocupação que a norteou foi a diversificação a nível do grau de dificuldade, dos materiais a utilizar, dos conteúdos a mobilizar:

Eu acho que a nível de tarefa até diversificámos bastante aquilo que lhes propusemos, acho que até abordámos diferentes conteúdos, abordámos diferentes aspectos, trabalhámos com diferentes materiais, e acho que pressupunha a mobilização de diferentes saberes e acho que foi... a esse nível, acho que foi bastante conseguido... o grau de dificuldade. [...] (Entrevista 2)

De todas as tarefas seleccionadas, Petra refere que inicialmente tinha expectativas elevadas em relação à primeira tarefa “Exploração com números”, às quais a tarefa correspondeu. No entanto, a realização das tarefas seguintes puseram em causa a sua opinião inicial, tendo aquela tarefa vindo a revelar-se a menos interessante em oposição à “Travessia no rio”, a qual elege por atribuir muita importância ao estudo das Probabilidades, ou mesmo “Números quadrados e triangulares” ou “Cubos, cubos e mais cubos”, às quais reconhece imensas potencialidades:

É assim, achei todas interessantes, a primeira que eu achava que ia ser... acabou por ser a menos interessante de todas. Eu gostei muito da “Travessia do Rio”, para já gosto muito dessa questão das Probabilidades e desse jogo todo a esse nível e gostei muito desta última dos “cubos” e a dos “números triangulares”... É assim, é difícil desligar, elas foram todas

interessantes, mas esta última acho que também tem grandes potencialidades! (Entrevista 2)

As tarefas eleitas pela professora são também as que esta considera que os alunos mais apreciaram. No caso da tarefa “Travessia do Rio”, a professora refere que o jogo é motivante em todas as idades, em particular nesta, sendo que verificou que os alunos, não obstante gostarem de investigar, com o complemento do jogo estiveram entusiasmados durante todo o tempo, o mesmo tendo acontecido com a tarefa “Cubos, cubos e mais cubos” pelo facto de envolver materiais manipuláveis.

A do jogo [Travessia do Rio], indiscutivelmente! E a dos “cubos”, também, porque tens ali o material, desde que eles possam concretamente trabalhar com... coisas diferentes... e o jogo... o lúdico... é uma maravilha! [...] Nota-los mais envolvidos, não há momentos de recusa, digamos, da tarefa, não há momentos de quebra, portanto eles estão sempre entusiasmados, querem fazer mais [...] Enquanto que há outras tarefas que notei alguma quebra a determinada altura, a determinada altura estavam fartos [...] (Entrevista 2)

Papel atribuído à planificação. Petra considera a planificação como a fase do desenvolvimento de tarefas de investigação à qual o professor deve dar mais atenção.

Investigadora: Qual é a fase do trabalho investigativo que deve merecer maior atenção por parte do professor? Porquê?

Professora: A planificação! [risos]... (Entrevista 2)

De facto, o tempo que disponibilizava para a planificação e o empenho com que o fazia denunciavam a importância que Petra atribui a esta fase do desenvolvimento de tarefas de investigação. No entanto, a professora refere que a planificação deste tipo de tarefas é bastante trabalhosa e desgastante.

Petra explorava cada tarefa com elevado grau de profundidade, referindo que prescindia de grande parte do seu fim-de-semana para esse efeito. Assim, refere que o sucesso da aula está directamente relacionado com a realização de uma boa planificação. Quanto mais atenção o professor dedicar à escolha da tarefa, à selecção dos materiais, à inventariação dos conhecimentos que os alunos irão adquirir, mais proveitosa será a aula:

Exige muito trabalho do professor, mas é óbvio que se fizeres uma boa planificação, tens uma garantia quase de sucesso! Quando tu tens uma

preocupação maior na planificação, na escolha dos materiais, na escolha das tarefas [...] (Entrevista 2)

O conteúdo das planificações. Os guiões apresentados por Petra eram bastante cuidados e adaptados à tarefa a que diziam respeito.

No que se refere aos “Objectivos” a atingir com o desenvolvimento da tarefa, verifica-se que Petra não se ficou por indicar muitos dos objectivos que são comuns a todas as tarefas de investigação, como sejam: explorar relações entre números e formular conjecturas; testar, refutar, justificar e generalizar as conjecturas formuladas e comunicar ideias matemáticas com rigor. A professora considerou fundamental enunciar objectivos específicos de cada uma das tarefas, ressaltando o que cada tarefa tinha de particular que a permitia diferenciar das restantes, para além dos conteúdos que mobilizava.

Confirmando a ideia anterior, veja-se por exemplo o guião da tarefa número quatro, “Divisões por 11, 111,...” (figura 6), da qual se destacam os seguintes objectivos específicos desta tarefa enunciados pela professora: “Explorar e usar regularidades e padrões na divisão”; “Desenvolver a confiança dos alunos nas suas capacidades de fazerem matemática de forma mais autónoma”.

<p>Objectivos:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Interligar vários tópicos matemáticos; • Explorar e usar regularidades e padrões na divisão; • Passar da identificação de regularidades à capacidade de as utilizar como estratégia de resolução de problemas; • Desenvolver a capacidade de estabelecer relações e fazer generalizações; • Desenvolver a confiança dos alunos nas suas capacidades para fazerem matemática de forma mais autónoma; • Desenvolver capacidades de argumentação e raciocínio matemático; • Comunicar descobertas e ideias matemáticas. • Familiarização com a calculadora básica e conhecimento do seu funcionamento, vantagens e algumas das suas limitações; • Desenvolvimento do sentido crítico relativamente aos resultados de cálculos.

Figura 6: Objectivos da tarefa 4 – “Divisões por 11, 111,...”

Os objectivos sombreados representam aqueles que a professora não considerou e a investigadora sentiu necessidade de acrescentar, uma vez que esta tarefa era propícia à familiarização com a calculadora, com as vantagens que tem na realização de cálculos morosos, como os exigidos pela tarefa, mas também constatar que esta, na

impossibilidade de apresentar dízimas infinitas, trunca o número ou faz arredondamentos.

Também no guião da tarefa “Cubos, cubos e mais cubos” (figura 7), se destacam os seguintes objectivos específicos enunciados pela professora: “Investigar propriedades e relações geométricas”; “Formular argumentos válidos recorrendo à visualização e ao raciocínio espacial, explicitando-os em linguagem corrente” e “Usar o sentido crítico relativamente à utilização de procedimentos e resultados matemáticos”.

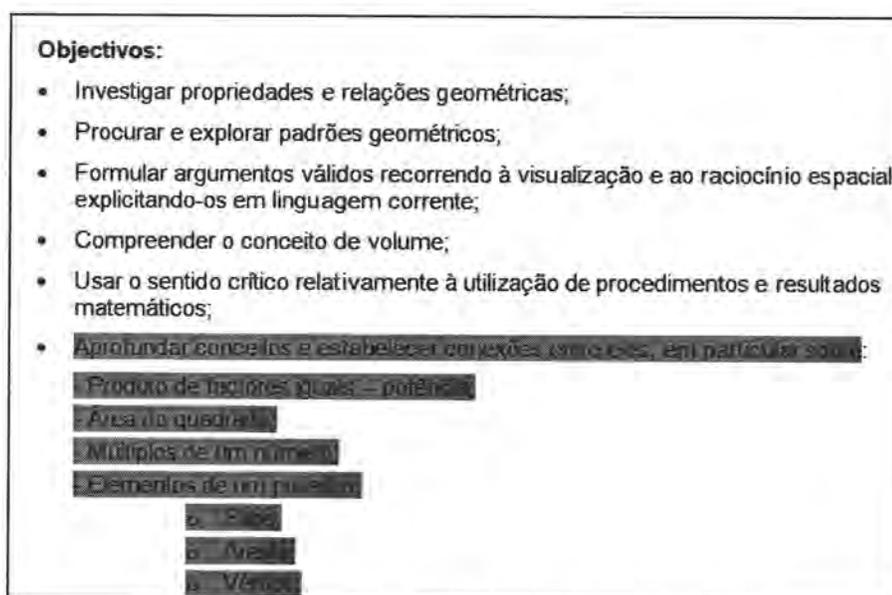


Figura 7: Objectivos da tarefa 5 – “Cubos, cubos e mais cubos”.

Os objectivos sombreados representam aqueles que a professora não considerou e a investigadora achou importante acrescentar, uma vez que esta tarefa era propícia à mobilização, conexão e consolidação dos conceitos referidos.

No que concerne ao “Material” de suporte às tarefas indicado nos guiões, era normalmente o necessário e específico para cada tarefa, bem como o geral: o enunciado escrito, os acetatos e canetas de acetato, o retroprojector para a apresentação à turma, e a calculadora. A calculadora foi indicada em todos os guiões das tarefas, com excepção do guião da tarefa “Travessia do rio”.

Relativamente às “Questões essenciais a colocar aos alunos”, verifica-se que a professora variou ao longo de todas as tarefas as questões dos guiões. Para além das questões gerais características das tarefas de investigação, colocou questões específicas relacionadas com cada uma das tarefas, para auxiliar os alunos a progredirem na mesma, como se pode observar no guião que se segue referente à tarefa “Cubos, cubos e mais cubos” (figura 8), do qual se podem destacar as seguintes questões: “Se considerarmos

o cubo $1 \times 1 \times 1$ o 1.º termo de uma sequência, o cubo $2 \times 2 \times 2$ o 2.º e assim por diante, és capaz de dizer quantos cubinhos serão necessários para construir o 10.º termo da sequência? E o 100.º?” e “Consegues formular uma conjectura que te permita indicar, para um cubo qualquer, o número de cubinhos com 0, 1, 2 ou 3 faces pintadas?”.

Questões essenciais a colocar aos alunos:

1.ª Parte

- “Quantos cubos diferentes consegues construir com o número de cubinhos que constituem o cubo de Rubik? Como explicas esse número?”
- “Conseguiste construir um maior número de cubos diferentes com 100 ou com 200 cubinhos? Explica o teu raciocínio.”
- “Todos concordam com a explicação?”
- “Haverá alguma conexão entre a aresta do cubo e o número de cubinhos necessários para a sua construção?”
- “O que acha o grupo desta conjectura? Todos concordam?”
- “Será que funciona sempre? É válida para todos os casos?”
- “Como consegues convencer os teus colegas de que a tua conjectura é verdadeira?”
- “A partir de um determinado número de cubinhos, consegues descobrir se é possível construir um cubo, utilizando-os todos?”
- “Se consideramos o cubo $1 \times 1 \times 1$ o 1.º termo de uma sequência, o cubo $2 \times 2 \times 2$ o 2.º e assim por diante, és capaz de dizer quantos cubinhos serão necessários para construir o 10.º termo da sequência? E o 100.º?”

2.ª Parte

- “Ao pintarmos exteriormente um cubo qualquer, os cubinhos que o constituem poderão ter, no máximo, quantas faces pintadas?”
- “Consegues formular uma conjectura que te permita indicar, para um cubo qualquer, o número de cubinhos com 0, 1, 2 ou 3 faces pintadas?”
- “O que acha o grupo desta conjectura? Todos concordam?”
- “Será que funciona sempre? É válida para todos os casos?”
- “Como consegues convencer os teus colegas de que a tua conjectura é verdadeira?”

Figura 8: Questões essenciais a colocar aos alunos da tarefa 5 - “Cubos, cubos e mais cubos”

Apenas pontualmente houve necessidade de acrescentar mais algumas questões, como aconteceu no guião apresentado acima, para que os alunos generalizassem a fórmula do volume. As alterações realizadas a nível desta parte dos guiões, quando existiram, foram mais no sentido de ordenar as questões, pois a professora não teve inicialmente este cuidado por não saber que era necessário apresentá-las pela ordem que iam acontecer na aula, o que permitia uma maior compreensão do alcance das mesmas.

No que concerne à “Metodologia de trabalho”, a professora elegeu o trabalho em grupo, realizando cinco grupos de cinco alunos para as tarefas “Exploração com números” e “Números quadrados e triangulares” e quatro grupos de quatro alunos e um de cinco para as tarefas “Divisões por 11, 111,...”, “Cubos, cubos e mais cubos” e “Travessia do rio”. A professora formou grupos de cinco alunos para que, formando menos grupos, pudesse mais facilmente apoiá-los; no entanto, nas restantes vezes formou grupos de quatro, parecendo que esta é a forma que considera mais funcional.

Petra refere ser adepta do trabalho em grupo e que este tipo de metodologia é comum nas suas aulas. A forma organizada com que os seus alunos trabalham em grupo e o entusiasmo com que o fazem parecem denunciar este aspecto.

Acho, aliás eu sou adepta do trabalho de grupo em tudo, não é só nestas [tarefas], na maioria, portanto sou adepta mesmo! [...] Agora o trabalho de grupo para mim, seja a que nível for, seja a nível escolar, seja nos miúdos, seja nos adultos, eu privilegio sempre o trabalho em grupo [...] (Entrevista 2).

Mesmo na tarefa “Travessia do rio”, que, pelas suas características, se prestava a uma exploração a pares, Petra preferiu dividir os alunos por grupo e dentro de cada grupo formar duas equipas.

Petra teve sempre o cuidado de formar os grupos *a priori* seguindo os princípios da heterogeneidade e do equilíbrio e, de aula para aula, variou o mais possível os alunos, para que estes não se cansassem de trabalhar sempre com os mesmos colegas e não criassem hábitos dentro dos grupos.

A professora considera poder haver lugar nas tarefas de investigação para outros tipos de trabalho, como o trabalho individual, que diz querer experimentar para poder ver até onde podem ir os alunos individualmente, bem como o trabalho em grande grupo. No entanto, em relação a este último, já apresenta mais reservas por considerar que os alunos mais fracos tendem a inibir-se mais e serem anulados pelos outros alunos mais participativos e com melhor desempenho na disciplina. Além do mais, no trabalho em grupo, os alunos mais inibidos não têm tanto receio de expor as suas ideias e são influenciados pelos restantes elementos a participar, o que acaba por ser vantajoso para os mesmos.

Em grande grupo, também é importante, embora eu ache que os miúdos mais apagados, os miúdos menos participativos têm tendência a anular-se

por mais que tu lhes solicites a participação, mas acho que eles inibem-se um bocadinho no grande grupo [...] [em grupo] não têm tanto medo de errar, porque não são recriminados por tanta gente ao mesmo tempo. [...] Quase que não dão tempo para os outros falarem e para os outros pensarem, eles não conseguem [...] acho que é muito importante para os bons alunos, mas os miúdos mais fracos, tendem a desligar-se, porque sentem ainda mais a diferença, acentua-se mais a diferença. (Entrevista 2)

Quanto à “Forma como pensa conduzir a aula”, verifica-se que a professora manteve a estrutura característica das aulas de trabalho de investigação: introdução da tarefa, desenvolvimento da tarefa e discussão da tarefa. No entanto, realizou alterações relativamente ao conteúdo do guião ilustrativo, adaptando a condução da aula a cada uma das tarefas. Assim, as formas de condução da aula apresentadas nos diferentes momentos da tarefa foram distintas de aula para aula, sendo que as diferenças mais significativas incidiram na parte referente ao desenvolvimento da tarefa, havendo também diferenças nas introduções e discussões das aulas.

No que concerne à introdução das tarefas, um aspecto comum às mesmas, e que a professora considerou importante reforçar nas aulas, foram as regras referentes ao trabalho em grupo. Veja-se, por exemplo a introdução da tarefa apresentada pela professora no guião da tarefa número três, “Travessia do rio” (figura 9), da qual se destaca o facto de a professora ter feito alusão à importância de se explicitarem as regras do jogo, o objectivo do mesmo, os produtos que são esperados dos alunos, bem como a importância de os alunos registarem todas as somas que vão saindo, que nesta tarefa é fundamental, facultando-lhes folha de registo própria para esse efeito.

Introdução (cerca de 15 minutos): Apresentação do material necessário para a realização do jogo (tabuleiro, fichas coloridas, dados numéricos e folha de registo de somas). Durante este período, explicitar-se-ão as regras do jogo, tendo o cuidado de verificar se todos os alunos as compreenderam. Pretende-se, também, que os alunos tomem consciência do objectivo do jogo e da importância do registo de todas as somas que vão saindo. Dar-se-ão indicações acerca do modo como eles devem trabalhar e dos produtos esperados. Salientar-se-á, ainda, a importância do respeito pelas opiniões e espaço de intervenção de todos os colegas do grupo.

Figura 9: Introdução da tarefa 3 – “Travessia do rio”

Na introdução do guião da tarefa número 4, “Divisões por 11, 111, ...” (figura 10), destaca-se o facto de a professora considerar fundamental referir nesta fase que as questões dos guiões são meras orientações, tendo os alunos liberdade para seguir outro tipo de direcções, ressaltando o carácter divergente deste tipo de tarefas e apelando à criatividade dos mesmos.

Introdução (cerca de 10 minutos): Distribuição do enunciado escrito da tarefa e explicação oral do mesmo a toda a turma. Pretende-se, com esta etapa, garantir que os alunos compreendam a tarefa e, sobretudo, despertar-lhes a curiosidade para que os mesmos se sintam motivados para a sua realização.

Será ainda o momento de referir que as questões colocadas no enunciado constituem meras orientações e, como tal, a sua realização não pressupõe um só caminho e uma resposta única, mas sim os caminhos e as respostas que o seu espírito investigativo os leve a percorrer e a descobrir e que, em sua opinião, se revelem pertinentes no contexto da investigação proposta.

Reforçar que o sentido de responsabilidade, de flexibilidade e de respeito pelo seu trabalho e pelo dos colegas é determinante no desenrolar da tarefa.

Figura 10: Introdução da tarefa 4 – “Divisões por 11, 111,…”

Quanto ao desenvolvimento da tarefa “Cubos, cubos e mais cubos” (figura 11), interessa referir os aspectos particulares deste guião, como o facto de a professora ter considerado fundamental indicar que “deve certificar-se de que os alunos utilizam o material disponível e recorrem a modos de representação sugestivos sempre que os cubinhos unitários se revelem insuficientes” e ainda que “não validará ou refutará as conjecturas formuladas. Apenas colocará questões que apelem à reflexão e ao desenvolvimento do raciocínio espacial”. O aspecto anterior, de não validar ou refutar as conjecturas dos alunos, foi uma necessidade que nasceu da reflexão da professora sobre o trabalho desenvolvido, como será discutido mais à frente.

Desenvolvimento da tarefa (1 hora e meia): Durante este período, pretende-se que os alunos procedam à exploração da tarefa, sistematizando e organizando dados com vista ao seu relacionamento. A professora deve certificar-se de que os alunos utilizam o material disponível e recorrem a modos de representação sugestivos sempre que os cubinhos unitários se revelem insuficientes. Devem proceder à formulação de conjecturas, com base nos dados obtidos, e explicá-las aos colegas. No decorrer do trabalho dos alunos, a professora circulará pelos grupos para saber se eles compreendem a tarefa proposta, se estão a formular questões e conjecturas, se já as testaram, se são capazes de justificar os seus resultados. Pretende-se apoiar os alunos, incentivá-los a progredir e, sempre que necessário, desbloquear situações de impasse e levá-los a reflectir sobre o trabalho realizado. Fomentar a condução do discurso por parte dos alunos e atribuir-lhes, em geral, a responsabilidade de ultrapassar os obstáculos, dando destaque ao processo de justificação será aspecto prioritário neste trabalho. A professora não validará ou refutará as conjecturas formuladas. Apenas colocará questões que apelem à reflexão e ao desenvolvimento do raciocínio espacial.

Figura 11: Desenvolvimento da tarefa 5 – “Cubos, cubos e mais cubos”

Relativamente à parte referente à discussão do mesmo guião, também ela revela a preocupação da professora em deixar que os alunos tenham o papel central na discussão, validando e/ou refutando as conjecturas apresentadas, e na argumentação de ideias de forma a desenvolver a comunicação matemática, como se pode verificar na figura 12:

Discussão da tarefa/reflexão (cerca de uma hora e meia): Cada grupo partilha com a turma as suas descobertas, através de uma linguagem correcta, mobilizando vocabulário associado a conceitos matemáticos anteriormente estudados. A comunicação (confronto de resultados e processos) será uma forma de levar os alunos a clarificar e a consolidar o seu pensamento matemático. Pretende-se que este terceiro momento da aula se pautar por uma cultura de argumentação, capaz de justificar, de forma lógica, as diversas descobertas efectuadas. Serão os restantes grupos a validar ou a refutar as conjecturas formuladas na etapa anterior. Nesta fase, a intervenção do professor apenas se justificará caso os alunos não consigam apresentar argumentos válidos face às conjecturas apresentadas. A partilha de diferentes formas de abordagem de uma mesma tarefa é fundamental para estimular o gosto e a confiança em realizar actividades que envolvam raciocínio matemático.

Figura 12: Desenvolvimento da tarefa 5 – “Cubos, cubos e mais cubos”

Quanto ao tempo dispensado às aulas, este era normalmente uma manhã, tendo existido a necessidade de, na maioria das aulas observadas, prolongar a tarefa para a tarde ou mesmo para a manhã seguinte. Assim, a professora atribuiu sempre 10 minutos à introdução de todas as tarefas, com excepção da tarefa “Travessia do rio”, à qual destinou um pouco mais, 15 minutos. No que refere ao desenvolvimento e discussão das tarefas, a professora atribuiu em todos os guiões o mesmo tempo e a mesma importância a ambas as fases, sendo de 60 minutos em todas as tarefas, com excepção da tarefa “Cubos, cubos e mais cubos”, na qual reservou 90 minutos para estas fases.

No que concerne à “Síntese do conhecimento matemático aprendido”, verifica-se que esta parte do guião lhe mereceu muito investimento e dedicação, ao mesmo tempo que, como a professora refere, lhe causou entusiasmo. Petra tentou prever ao máximo todas as descobertas susceptíveis de os alunos realizarem, evidenciando preocupações prementes com o rigor matemático, com a generalização e a justificação das ideias apresentadas.

Outra característica dos guiões desta professora foi a completude, pois, para além das regularidades numéricas, procurou também apresentar regularidades geométricas (Figuras 13 e 14). Nos guiões das tarefas “Travessia do rio” e “Divisões por 11, 111,..” foi necessário reforçar e concretizar algumas das descobertas a que os alunos poderiam chegar, as quais a professora apresentou de uma forma mais geral, ou não indicou por considerar que os alunos não chegariam tão longe.

- O cubo de ordem n é a soma dos n ímpares consecutivos, que se seguem aos t_{n-1} primeiros ímpares.
 $1 = 1^2$ $3+5 = 2^2$ $7+9+11 = 3^2$ $13+15+17+19 = 4^2 \dots$
- A soma dos n primeiros cubos é o quadrado da soma dos n primeiros números.
 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$
 $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (1 + 2 + 3 + 4)^2$
- O cubo de ordem n obtém-se:

$$n^3 = n^2 + (n^2 \times n_{-1})$$

$$3^3 = 3^2 + (3^2 \times (3-1))$$

Ou

$$n^3 = (n_{-1})^2 + n^2 + (n_{-1})^2 + (n \times n_{-1})$$

$$3^3 = 2^2 + 3^2 + 2^2 + (3 \times 2)$$

2.ª Questão

- O cubo de ordem 1 fica com todas as faces pintadas;
- Num cubo de ordem n ($n > 1$), o número máximo de faces pintadas de cada um dos cubos unitários que o constituem é 3;
- Todos os cubos unitários que constituem o cubo de ordem 2 ficam com 3 faces pintadas;
- Quando se pintam todas as faces de um cubo de ordem n ($n > 2$):
 - a) $(n - 2)^3$ cubos ficam sem pintura porque se encontram no seu interior;
 - b) Ficam sempre 8 cubos unitários com 3 faces pintadas, que são os que se localizam nos vértices;
 - c) $(n-2)^2 \times 6$ cubos unitários ficam com 1 face pintada;
 - d) O número de cubos unitários com 2 faces pintadas são os múltiplos de 12, consecutivos maiores que 0:
 $3^3 - 12$ cubos com 2 faces pintadas ...

Figura 13: Síntese do conhecimento aprendido da tarefa 5 – “Cubos, cubos e mais cubos”.

- Um número quadrado de ordem n (Q_{0n}) é a área do quadrado de lado n ou seja n^2 ou, por outras palavras, o produto de dois números iguais;
 $Q_{01} = 1^2 = 1 \times 1 = 1$
 $Q_{02} = 2^2 = 2 \times 2 = 4$
 $Q_{03} = 3^2 = 3 \times 3 = 9$
 $Q_{04} = 4^2 = 4 \times 4 = 16$
 $Q_{05} = 5^2 = 5 \times 5 = 25 \dots$
- Para passar de um dado quadrado de lados iguais a n , ao quadrado seguinte, precisamos de juntar duas filas de comprimento n e mais uma unidade para o canto:



Figura 14: Síntese do conhecimento aprendido da tarefa 2 – “Números quadrados e triangulares”

A parte sombreada do guião (figura 13) diz respeito a uma alteração que a investigadora considerou necessário realizar para que a ideia apresentada pela professora ficasse mais precisa do ponto de vista matemático.

A discussão das planificações com a investigadora. A discussão da planificação realizada por Petra tinha lugar na sua escola e realizava-se normalmente na tarde do dia anterior à aula. A professora costumava enviar o guião da tarefa à investigadora um dia antes da data marcada para a discussão, pelo que esta não se podia realizar com maior antecedência.

Durante a mesma, a investigadora tentava perceber os motivos que levaram a professora à selecção da tarefa em causa e as expectativas que esta possuía. Posteriormente, passava-se à análise do guião enviado pela professora, depois deste ter sido examinado e melhorado quando necessário pela investigadora e pela sua orientadora. Procedia-se assim à análise de cada uma das partes do guião, dando especial atenção àquelas onde existiam reparos e/ou alterações a fazer, nomeadamente as partes referentes às “Questões essenciais colocar aos alunos” e “Síntese do conhecimento matemático aprendido”.

Este momento pautava-se pelo diálogo, no sentido de melhorar a proposta apresentada, bem como pela análise e reflexão da parte da professora acerca exequibilidade das sugestões apresentadas, esforçando-se sempre no sentido de as pôr em prática:

Professora: Mas olha que o que tu me estás a dizer não deixa de ter alguma pertinência, digamos! De eu fazer a tal divisão de 1 por 3, por exemplo. Começar por essa explicação. “Então isto aqui representa o quê?”, “Ah! Representa metade, pois, porque estamos a dividir por dois, então fica metade para cada um”, “Então e se agora quisermos dividir por 3? Quanto é que vai calhar a cada um?” E eles aí vão sentir logo muita dificuldade, não é? “Ah e tal é impossível!” E então a partir daí falamos um bocadinho. (Preparação aula 4)

Apenas no que refere à tarefa “Travessia do rio” a professora contestou a sugestão da necessidade da contextualização da tarefa; no entanto, ao longo da aula, esse aspecto surgiu como uma necessidade por parte da mesma.

A professora gostava de expressar as suas expectativas em relação à tarefa, que normalmente eram de entusiasmo e optimismo; no entanto, estava sempre com receio

que o tempo faltasse. Houve apenas uma tarefa que deixou Petra claramente mais insegura e necessitou de uma discussão preparatória mais demorada, a tarefa “Divisões por 11, 111,...”, por mobilizar um conjunto de conhecimentos que os alunos não dominavam e com os quais a professora não se sentia muito familiarizada.

Professora: Estou muito insegura nesta tarefa.... estou bastante insegura! Para já, nunca se trabalha o conceito de dízima, quando muito número decimal e mais nada! Dízima nunca entra! E finito e infinito são termos que eles à partida sabem, que ouvem da rua e nós comentamos às vezes isso, mas não é do vocabulário corrente... e o periódico e o não periódico! Eu nem queria que eles entrassem muito nesses termos!

Investigadora: Pois! Em vez de dizerem período, podes dizer que são os algarismos que se repetem na parte decimal.

Professora: Posso-lhe chamar período mesmo! Os algarismos que se repetem na parte decimal chamam-se período. Mas pronto, estou um bocado... eu própria não estou muito à vontade, porque não é do uso corrente, não faz parte, e depois trabalho com números muito complexos já para eles... com ordens, digamos assim... com uma parte decimal muito complexa...

Investigadora: Mas olha, é um tipo de número que lhes pode aparecer num problema qualquer...

Professora: Exacto! A mim o que me interessa, ao fim ao cabo, é que eles percebam essas pequeninas coisas, que descubram regularidades e que descubram e que saibam quando é que vai dar um número inteiro, quando é que a divisão é exacta. Para mim isso é importante, eles saberem que dividiram tudo e não sobrou nada, pronto em que circunstâncias é que isso acontece e se eles chegarem aí para mim já é bom, percebes? Por que o resto é um bocadinho difícil! [...] Esta exige um conjunto base que eles não têm! (Preparação aula 4)

Assim, houve necessidade de a investigadora ajudar a consolidar alguns dos conceitos mobilizados por esta tarefa, bem como de prestar alguns esclarecimentos acerca do funcionamento da calculadora. Foi ainda sugerido pela investigadora que, na introdução da tarefa, a professora apresentasse um exemplo de uma divisão familiar aos alunos cujo quociente fosse uma dízima infinita, para que desta forma os alunos pudessem atribuir significado aos quocientes que iriam obter na tarefa, que eram na sua maioria infinitos. A professora teve alguma dificuldade em atribuir importância a esta sugestão, que posteriormente afirmou ter sido fundamental.

As alterações realizadas aos enunciados das tarefas e as suas intenções também eram debatidos nesta fase. A professora realizou adaptações no guião da tarefa “Explorações com números”, como seja o facto de aumentar o tamanho da tabela de 4x4

para 10x10, por considerar que desta forma os alunos poderiam efectuar mais conjecturas que na anterior, possuindo um maior conjunto de dados para o realizar. Este aspecto é totalmente compreensível atendendo à faixa etária dos alunos e ao facto de ser a primeira vez que estes contactavam com o trabalho de investigação propriamente dito. Acresce ainda o facto de ter sido esta a forma com a qual a sua colega Inês havia explorado a tarefa, transmitindo-lhe esta estrutura certamente mais segurança. Também o enunciado da tarefa “Travessia do rio” sofreu alterações, tendo a professora retirado algumas pistas que este continha, por considerá-las muito directivas e susceptíveis de fornecer aos alunos estratégias para ganhar o jogo, referindo: “o engraçado das tarefas de investigação é deixar que os alunos procurem a sua própria estratégia!”.

Preocupações e dificuldades. Para a professora, a fase de planificação de tarefas de investigação resulta muito morosa, exigente e, por conseguinte, difícil de desenvolver todos os dias, deixando-a sempre com alguma insegurança proveniente do elevado grau de imprevisibilidade que estas tarefas lhe proporcionam.

Considera que, dada sobrecarga burocrática a que os professores estão sujeitos nas escolas, a planificação de tarefas de investigação, pela disponibilidade e trabalho que exigem, pode tornar-se bastante desgastante, referindo por isso que “não admira que muitos professores não realizem tarefas de investigação!”.

É sem dúvida trabalhoso, aliás eu passava os fins-de-semana a pesquisar e pronto a... é claro que nunca, de forma alguma, consegui descobrir tudo, como é evidente! Isso pressupõe do professor uma grande disponibilidade, que nem sempre temos e depois sobrecarregam-nos com reuniões, com papéis, com relatórios, é difícil! (Entrevista 2)

A parte científica matemática é de facto a grande preocupação desta professora. Desta forma, Petra tenta prever ao máximo todas as descobertas que os alunos podem realizar com a exploração de cada tarefa, para ser surpreendida o menos possível, sob pena de não conseguir compreender ou responder a uma conjectura imprevisível dos alunos. Para o efeito, durante a planificação coloca-se o mais possível no papel dos alunos, o que considera muito difícil:

A preocupação é sempre a parte científica, tentar dominar o mais possível. Claro que não consegues dominar tudo, mas não vires inseguro a nível científico... o que é que eles te poderão perguntar, o que é que

pode surgir, que questões podem... é que eles podem adquirir como conhecimento da tarefa... (Entrevista 2)

Também as questões a colocar aos alunos parecem ser de extrema relevância para esta professora, ocupando-lhe muito tempo como a mesma refere: “eu perco imenso tempo nas perguntas, sempre!” (Preparação da tarefa 4).

Por conseguinte, não admira que a docente atribua também à falta de segurança científica uma das causas para o facto de o trabalho investigativo não possuir a presença desejada na prática dos professores. No entanto, considera este aspecto perfeitamente compreensível, sobretudo no que refere ao 1.º Ciclo, uma vez que existem professores com uma formação muito deficiente em Matemática a leccionar neste nível de ensino, principalmente os professores do 2.º Ciclo das variantes de Português e Inglês e Português e Francês e que, conseqüentemente, não possuem nem segurança, nem conhecimento que consigam responder aos desafios e exigências colocados por este tipo de tarefas:

Tens muitos professores de Humanidades e professores que são de Português e Francês e de Português e Inglês que estão no 1.º Ciclo e que tem que abordar Matemática, em que eles próprios reconhecem que não têm competência e têm dificuldade em abordar esta área. É assim, acho que um professor desses vai ter muitas dificuldades em trabalhar numa tarefa destas. Eu, por exemplo, sou de Matemática, eu sempre fui do Científico-Natural, eu tenho 12.º ano de Matemática, trabalhei e tenho trabalhado sempre com Matemática e reconheço que tenho imensas lacunas, quanto mais uma pessoa que teve Matemática até ao 9.º ano... que a partir daí nunca mais teve. É complicado, não é? (Entrevista 2)

Através do exposto, pode facilmente depreender-se que a formação é uma necessidade sempre presente para esta professora, pelos benefícios que esta já lhe trouxe para o seu desenvolvimento profissional e que ela sente poder vir ainda a acrescentar, principalmente a nível científico, onde ela considera possuir algumas lacunas, nomeadamente a nível dos temas Estatística e Probabilidades. Enquanto aluna, estes temas não integravam os programas de Matemática quer do ensino básico e secundário, quer do curso do Magistério Primário; por conseguinte, o único contacto que teve com o estudo das Probabilidades foi durante a sua frequência no Programa de Formação Contínua em Matemática, sendo o seu conhecimento sobre o mesmo, segundo a própria, “bastante intuitivo”. A estes aspectos acresce o facto de o tema Probabilidades ser um tema omissos no Programa de 1.º Ciclo e por isso nunca necessitou de se dedicar a ele ao

longo da sua carreira. Portanto, a preparação da aula referente à tarefa “Travessia do rio”, por necessitar de um algum domínio sobre este tema, trouxe algumas dificuldades à professora, dificuldades essas que conseguiu ultrapassar devido a uma maior dedicação à tarefa e através do recurso à ajuda de uma colega da área da Matemática, com a qual quis esclarecer antes as suas dúvidas:

[...] senti dificuldades na preparação, mais naquela parte dos conhecimentos [ponto do guião], porque é assim, eu conheço isto tudo de uma forma muito intuitiva, conheço as coisas básicas “muito prováveis”, “pouco prováveis”. Se me disseres para calcular... sei lá... eu sei calcular a probabilidade de um acontecimento que são os casos favoráveis sobre os possíveis, pronto, sei isso tudo, mas aqui estava com alguma dificuldade. Quando começo a analisar, estava mesmo só a analisar as somas que iriam sair e eram onze não é? Já não sei como é que foi, pois podia sair o 2, o 3, podia sair do 2 ao 12 eu só analisei assim: há doze somas possíveis de sair. Aquilo para mim foi uma confusão e depois quando tentava passar para percentagem aquilo não me dava nada certo! Pronto tive alguma dificuldade aí... depois ultrapassei porque comecei a ver não podia ser, mas não estava a ver a hipótese de considerar o $1+6$ ou o $6+1$, estava só a considerar uma hipótese, depois falei com aquela colega de Matemática. (Reflexão da aula 3)

Também a parte dos Números Racionais referente aos números fraccionários constituía um tema pouco presente para a professora, em particular os conceitos de dízima e período, por não fazerem parte do programa de 1.º Ciclo, sendo necessários à exploração da tarefa “Divisões por 11, 111...”. Este aspecto suscitou alguma insegurança na professora, que se traduziu na incerteza de que questões colocar aos alunos e em enumerar as conclusões a que estes poderiam chegar. Outro aspecto que dificultou o trabalho da professora na preparação da tarefa foi o facto desta desconhecer que algumas calculadoras efectuem arredondamentos no último dígito do visor, o que estava a inviabilizar a própria investigação da professora e a consequente verificação de algumas regularidades e formação de conjecturas.

Todas as dúvidas anteriores foram dissipadas aquando da preparação da tarefa em conjunto com a investigadora, o que fez aumentar o optimismo da professora em relação à mesma.

Como te disse, senti muita dificuldade na preparação, falta-me um bocadinho... a dízima e depois não sabia muito bem o que era o período, o período da dízima, tinha alguma dificuldade sobre isso [...] são aqueles pormenores que nós falámos, eu falei no Secundário e a partir daí nunca mais falei... [...] Na aula já vinha com mais segurança, já tinha

esclarecido as dúvidas contigo. Mas a primeira vez lá em casa senti algumas dificuldades, principalmente em que questões colocar, a pertinência de algumas ou não, mais a esse nível e depois na parte dos conhecimentos nas aprendizagens que eles iriam realizar com a tarefa, porque tive dificuldade na comunicação. (Reflexão Aula 4)

Como já foi antes referido, outra vertente mais frágil do seu conhecimento é a Geometria, pois a professora afirma que em todo o seu percurso académico os números e o cálculo eram sobrevalorizados em detrimento da Geometria. Por conseguinte, Petra possui algumas dificuldades na visualização espacial que se traduziram num elevado esforço de abstracção e dificuldades na preparação da tarefa “Cubos, cubos e mais cubos”.

Não obstante as fragilidades do conhecimento matemático expostas não porem em causa directamente o desempenho de Petra enquanto professora de 1.º Ciclo, esta foi a primeira a reconhecê-las e a mostrar uma grande necessidade de as ultrapassar. Esta professora tem plena consciência de que todos os professores possuem sempre aspectos do seu conhecimento que podem ser melhorados: “O conhecimento nunca é suficiente... e nem que andes cá a vida toda, é sempre insuficiente!” (Entrevista 2). Assim, Petra considera que a insegurança científica que a preparação e a exploração das tarefas de investigação pode causar é susceptível de ser ultrapassada através de dedicação e pesquisa, assim como com o trabalho colaborativo, como aconteceu consigo:

Tens que pesquisar. Quando não a tens [segurança científica], tens que a procurar ou então é preferível não fazer [...] Sem dúvida! Mas se não tens predisposição para isso ou se não o queres fazer, então é melhor que não faças este tipo de tarefas [...] agora para fazeres isto e se não tens conhecimento, então tens realmente que trabalhar, tens que disponibilizar tempo e tens que estar motivado para isso, até para ter novo conhecimento, senão não vale a pena! (Entrevista 2)

Síntese dos principais aspectos da planificação. A planificação de tarefas de investigação para esta professora resultou sempre morosa e muito exigente; no entanto, Petra reconhece que lhe causou entusiasmo e desafio intelectual. A professora defende que a planificação deste tipo de tarefas é muito importante, pois, quanto mais tempo o professor lhe dedicar, maior garantia de sucesso tem para a aula.

No que se refere à selecção das tarefas, a professora considerou determinante a possibilidade de enquadramento das mesmas na sua planificação anual, mas atendeu

também a outros aspectos, como a diversificação a nível do grau de dificuldade, dos materiais a utilizar, dos conteúdos a mobilizar.

Os guiões de Petra eram muito cuidados, completos e sempre adaptados a cada uma das tarefas em causa. Segundo a professora, as partes do guião que lhe exigiam mais tempo eram as “Questões essenciais a colocar aos alunos” e a “Síntese do conhecimento aprendido”. No entanto, todas as partes lhe mereciam atenção. A componente científica matemática era a sua grande preocupação. Assim tentava ao máximo antever todas as descobertas que era possível os alunos realizarem, para que na aula fosse surpreendida o menos possível. As ideias matemáticas apresentadas revelavam bastante preocupação com o rigor científico, bem como com a generalização e a justificação.

Apenas pontualmente foi necessário fazerem-se alguns melhoramentos aos guiões da professora, no que refere à ordenação das questões a realizar aos alunos e/ou na concretização de algumas das descobertas a que os alunos poderiam chegar, as quais a professora apresentou de uma forma mais geral, ou não indicou por achar que os alunos não progrediriam tanto na tarefa.

A condução das aulas com as tarefas de investigação

As aulas com tarefas de investigação tiveram a estrutura característica deste tipo de aulas, dividida por três fases: introdução da tarefa; desenvolvimento da tarefa; e discussão da tarefa.

Verifica-se que a introdução foi fase à qual a professora dedicou menos tempo, tendo as fases de desenvolvimento e conclusão sido mais longas e tido a mesma duração. Apenas a tarefa “Divisões por 11, 111,…” necessitou de uma introdução mais longa que o habitual, por mobilizar um conjunto de conhecimentos que os alunos não dominavam e que a professora teve que introduzir nesta fase.

A fase de introdução da tarefa de investigação. Para Petra, a introdução quer-se breve, sob pena de roubar tempo de exploração aos alunos. Quinze minutos foi o tempo que demoraram em média as introduções das suas tarefas.

Durante este tempo, a professora considerou fundamental começar por desafiar a curiosidade e imaginação dos seus alunos que, dada a sua faixa etária, possuem uma

capacidade de persistência e concentração mais reduzida, pelo que é necessário desafiá-los com um discurso motivante, através de expressões como a que proferiu aquando da introdução da tarefa “Exploração com números”:

Agora até à hora do almoço vamos fazer descobertas! Vamos ver quem é o grupo Super Investigador! (Relato aula 1)

O aspecto anterior também pode ser verificado na seguinte passagem da introdução da tarefa “Números quadrados e triangulares”, depois de ter falado da origem destes números, remontando ao tempo de Pitágoras e dos seus discípulos:

Hoje vocês vão trabalhar como os discípulos de Pitágoras e vão fazer muitas descobertas tal como ele! (Relato aula 2)

Após a fase de motivação, distribuía o enunciado bem como o material necessário à tarefa. Seguia-se a explicação geral da tarefa e alguns esclarecimentos de dúvidas pontuais dos alunos acerca do que se esperava que eles fizessem e dos produtos que lhes iriam ser solicitados.

Nesta fase, considerou ainda sempre importante reforçar as regras de trabalho em grupo e “a importância do respeito pelas opiniões e espaço de intervenção de todos os colegas do grupo”, bem como reforçar alguns aspectos referentes ao trabalho investigativo, como a importância do registo, a importância de debaterem a validade das conjecturas no seio do grupo e da justificação das ideias. De resto, não costumava alongar-se muito pois, segundo a mesma, os seus alunos estavam habituados a este tipo de trabalho.

No entanto, a tarefa “Divisões por 11, 111...” necessitou de uma introdução mais longa, devido às suas características e pelo facto de os alunos não possuírem um conjunto de conhecimentos que eram requisito para o desenvolvimento da mesma. Assim, a professora, por sugestão da investigadora, sentiu necessidade de explicar aos alunos que outros tipos de quocientes, para além dos números inteiros, podem advir de uma divisão - as dízimas finitas e infinitas, para que os alunos pudessem atribuir significado à tarefa e pudessem desenvolvê-la; caso contrário, parecia pouco provável que conseguissem avançar. Nesta tarefa, a professora acabou por considerar a fase da introdução a fase mais importante desta tarefa que, de resto, foi muito bem conseguida pela mesma, pois permitiu-lhe alcançar os objectivos a que se propôs e que eram fazer

com que o conceito de dízima infinita surgisse naturalmente, fortalecendo e sistematizando a compreensão do algoritmo da divisão. Assim, não obstante esta introdução ter sido mais longa, a professora reconheceu que este tempo não foi perdido, mas determinante para que os alunos conseguissem avançar, tendo sido ganho posteriormente no desenvolvimento da tarefa.

Ao longo das suas aulas, a professora foi sentindo necessidade de contextualizar mais as tarefas. Foi o que aconteceu na tarefa “Travessia do rio”, em que Petra havia questionado a sugestão da investigadora de, por uma questão de uniformização de linguagem e também para tornar a tarefa mais familiar aos alunos, esclarecer e dar alguns exemplos do tipo de acontecimentos que podem advir de uma experiência aleatória, fazendo analogias com tarefas já realizadas. Verificou-se, todavia, que a professora, durante a fase da introdução, sentiu essa necessidade e acabou por realizá-lo de uma forma espontânea, reconhecendo-lhe posteriormente importância.

Também na introdução da tarefa “Cubos, cubos e mais” foram feitas analogias, pois a professora referiu terem já realizado uma tarefa semelhante, com um bolo paralelepípedo barrado com chocolate, em que foram descobrir, depois de cortado o bolo, o número de faces barradas que possuía cada pedaço de bolo.

A fase de desenvolvimento da tarefa de investigação. Durante o estudo, Petra foi atribuindo mais importância ora à fase de desenvolvimento da tarefa, ora à de discussão. Na realidade, parece considerar ambas as fases de extrema importância: para os alunos, o desenvolvimento é a fase que lhe desenvolve mais competências; para o professor, a discussão é fundamental.

Professora: [A fase mais importante para os alunos] Foi mesmo o trabalho, o momento de descoberta, o momento de pesquisa e investigação em si, esse é para eles o momento mais importante!

Investigadora: É a fase que desenvolve mais competências?

Professora: É! A parte final para o professor é muito importante porque consolida. Agora para os miúdos, sem dúvida, é a parte de trabalho em si, o desenvolvimento da tarefa. (Entrevista 2)

A gestão do tempo. O tempo foi sempre de facto um dos elementos com os quais a professora se sentiu insatisfeita. Inicialmente, o tempo estipulado para as suas aulas

era uma manhã, o que, descontando as interrupções, perfazia um total de cerca de pelo menos duas horas e meia para cada tarefa.

Porém, desde o início do estudo que Petra se debatia com a escassez de tempo: “eu conheço os meus alunos, eu sei que o tempo vai ser pouco!”. E realmente o tempo resultou sempre pouco para Petra. Ela precisava de mais, mais tempo para a exploração da tarefa e mais tempo para a discussão, expressando sempre o seu descontentamento: “Está-se a exigir demasiado dos alunos em tão pouco tempo!”.

Além do mais, Petra referiu que a pressão do tempo condicionou o seu desempenho, levando-a a ser mais directiva nas suas intervenções:

[...] e é o tempo, eu acho que nós aqui estivemos condicionados pelo tempo, foi muito concentrado, mas se tu tiveres tempo e se fizeres isso de uma forma mais despreocupada digamos, eu acho que consegues.
E continuo a dizer: dei muitas respostas durante a tarefa, o que empobreceu a discussão. (Entrevista 2)

Também a calculadora prestou um contributo importante à gestão do tempo e ao desenvolvimento das investigações, pois, ao permitir a geração dos dados de uma forma mais rápida, facilitou a execução das tarefas e a formação e teste de conjecturas. A calculadora libertou os alunos do peso do cálculo, estando estes mais disponíveis para o desenvolvimento da criatividade, do raciocínio e da comunicação matemática. A professora não é alheia a este aspecto e incitou sempre o uso da calculadora por parte dos alunos, tendo esta feito sempre parte da inventariação de materiais em todos os planos de aula.

Alunos: Ó professora basta juntar um zero aos números quadrados para obtermos outros números quadrados.

Professora: Será? Então estás a dizer que o 10, o 40 são números quadrados!

Alunos: Não, é o 400, temos que juntar sempre dois zeros.

Professora: Como é que com a calculadora nós podemos testar facilmente essa conjectura?! (Relato aula 2)

Professora: Então estavam-me aqui a falar de um cubo de aresta 25.

Alunos: Não dá... porque 25×25 já vai dar mais...

Professora: Vejam, só na base ia dar...?

Alunos:...

Professora: Podem utilizar a calculadora. Têm a calculadora para isso!

Alunos: 625. (Relato aula 5)

O papel da professora. Para Petra, outro aspecto que constitui uma dificuldade para o professor é o apoio a fornecer aos grupos.

É difícil estar nos grupos todos, aliás o trabalho em grupo tem esse aspecto, principalmente em turmas grandes como esta! (Reflexão aula 1)

Durante o desenvolvimento da tarefa, a professora ia circulando pelos grupos para se inteirar do trabalho dos alunos, sendo muitos e complexos os aspectos a que tinha que atender nesse momento.

Petra afirma ter sempre a sensação que o apoio que dá aos grupos nunca é suficiente e equitativo:

Por mais que se tente dar o mesmo apoio a todos os grupos, não se consegue, pois a turma é muito grande e heterogénea. (Reflexão aula 2)

Assim, refere que há que dosear o apoio, por um lado não dando respostas, garantindo que todos os alunos compreenderam o que se pretende com a tarefa, e, por outro, não deixando que os alunos se percam na exploração de conjecturas que não vão conduzir a lado nenhum:

Portanto, também não podes nem dar demasiado apoio nem desviar demasiado do grupo, pois se dás demasiado apoio corres o risco de estar a direccionar o trabalho, mas também alheando-te um bocadinho corres o risco de eles estarem a tomar como certa uma ideia errada. (Entrevista 2)

Pese embora as dificuldades que este aspecto do papel do professor acarretam, Petra considera que, através da reflexão, o professor consegue aperceber-se daquilo que fez menos bem em cada aula e consegue corrigir alguns destes aspectos na sua prática:

É deixares ser um bocadinho professor, com aquela carga: “não pode errar!”. Não podes chegar e dizer logo: “isso está mal!”. É aí que tens que ter mais trabalho! [...]

É difícil! Acho que pela reflexão mesmo! Eu acho que ao fazeres tipo de actividades e depois reflectires. Depois é a reflexão, é chegares a casa e pensares: “não devia ter feito assim!” e vais resfriando essa tua vontade de dizer logo “isso está mal!” ou “faz assim...”. (Entrevista 2)

Assim, na tentativa de manter uma atitude questionadora, Petra respondia às questões dos alunos com outras questões que lançava para discussão no seio do grupo:

Aluna: Professora olhe o que eu descobri! A soma 1 tem 0 possibilidades, a soma 2 tem 1, vai crescendo....

Outra aluna do grupo: Mas não dá em todos!

Professora: A tua colega está a dizer que não dá em todos. Até agora as possibilidades têm estado a aumentar, será que vai ser sempre assim?

Aluna 2: Não, não vai ser professora!

Professora: Então vejam lá quem é que tem razão! (Relato aula 3)

Todavia, existem tarefas que, pela sua natureza mais complexa, levaram Petra a fornecer um maior apoio, como o que aconteceu com as tarefas “Divisões por 11, 111...” e “Cubos, cubos e mais cubos”, tendo o seu papel de ser mais interventivo. Nesses casos, a professora foi mais do que uma mera orientadora do trabalho dos alunos, pois, caso contrário, considera que estes não progrediriam na tarefa:

Foi uma tarefa que lhes exigiu muito da parte da manhã [...] Aquilo que eu achei hoje é que tive que ser mais interveniente e muito mais do que simples orientadora, percebes, tive que ter um papel mais presente do que nas outras tarefas [...] Talvez pela exigência, exactamente! E é assim, a divisão ainda lhes é um pouco intuitiva, ainda não entrei muito no algoritmo, então não é uma coisa que eles tenham muito consolidada e a divisão em si não é um conceito fácil! (Reflexão aula 4)

A forma como a professora apoiou os grupos também esteve dependente da segurança que esta possuía em relação à tarefa. No que se refere à tarefa “Divisões por 11, 111...”, a professora referiu que estava bastante hesitante em relação à mesma, pois esta exigia um conjunto de conhecimentos que os alunos não possuíam e com os quais a professora estava pouco familiarizada. Estava, portanto, com expectativas reduzidas em relação às descobertas que os alunos iriam fazer. Por conseguinte, esta insegurança revelou-se em alguns momentos da aula, pelo facto de a professora ter validado inadvertidamente algumas conjecturas aos alunos, dada a satisfação que sentiu em relação ao facto destes terem feito descobertas bastantes interessantes, que teve necessidade de reforçar de imediato.

Aluna: É a tabuada!

Professora: Qual tabuada?

Aluna: A tabuada do nove!

Professora: E será que acontece sempre?

Aluna: Sim...

Professora: Muito bem! Então registem esta descoberta. (Relato aula 4)

Por vezes, foi necessário que a professora fornecesse informação sobre um conteúdo já leccionado e que os alunos não tinham muito presente, caso contrário estes ficariam num impasse sem avançar:

Aluno: Ó professora, aqui, de um número para outro, vai sempre aumentando um.

Professora: Vai sempre aumentando um? Então assim o próximo número triangular seria o 2. Tu já descobriste o que se passa não estás é a conseguir explicar. Arranja lá uma forma de explicar isso melhor. [...]

Aluno: O número triangular vai sempre aumentando 1.

Professora: “Então a diferença entre os números triangulares são a sequência dos números...”

Aluno:?

Professora: Dos números naturais. São aqueles que aparecem naturalmente, já vos expliquei isso. São o 1, o 2, o 3...

Foi também o que aconteceu aquando da exploração da tarefa “Divisões por 11, 111...”, em que o facto de as calculadoras truncarem os números estava a causar dificuldades aos alunos em compreenderem que se tratava de dízimas infinitas periódicas, uma vez que estas lhes truncavam uma parte. Relativamente a este aspecto, a professora achou necessário fornecer informação acerca do funcionamento e das limitações da calculadora:

Aluna: Professora, olhe aqui, vamos ter 1:11. [enquanto mostra o resultado dado pela calculadora]

Professora: Exactamente! Ou seja, deu-nos uma dízima quê, finita ou infinita?

Alunos: Finita.

Professora: Será!?

Aluna: Não, porque acaba em 0, senão tinha que acabar em 9.

Professora: Não filha! É assim, aqui a nossa calculadora tinha que ter um visor infinito para lá aparecerem os algarismos todos, todos, todos, está bem?

Alunos: Ah!

Professora: Isto agora iria continuar 090909090909, mas como a nossa calculadora não tem um visor onde caibam esses algarismos todos, claro que ela chega ali tem que parar.

Aluna: Essa não existe professora!

Professora: Não, tinha que ser uma calculadora infinita!

Os alunos de Petra apresentavam no início pouca necessidade em testar as suas conjecturas, bastando-lhes observar uma regularidade em dois ou três casos para considerarem a conjectura comprovada. No entanto, a professora teve sempre a preocupação de os alunos testarem correctamente as suas conjecturas:

Acho que isso é importante! Nós irmos vendo, e eles: “Isto é certo!” e nós dizemos: “mas será que é certo sempre?” e que eles vejam que nestas circunstâncias já não dá! Mas é assim, mas tu tens que apelar a isso. Senão eles fazem dois ou três exemplos e está certo e não está! [...] O estar atento ao grupo é muito importante.

Essa preocupação é evidente nos seguintes episódios de duas aulas:

Alunos: Professora, nós descobrimos que “Sair soma 1” há 0 possibilidades; sair 2 há 1; sair 3 há 2; sair 4 há 3...”

Professora: Será que é sempre assim? Vamos continuar a verificar para as outras somas. (Relato aula 3)

Alunos: Professora, descobrimos que [o período] é sempre a tabuada do 9!

Professora: Será que o período será sempre a tabuada do 9? Façam lá mais divisões!

Alunos: Professora, aqui já não deu, deu 1!

Professora: Então e porque é que aí deu 1?

Alunos: Porque é uma divisão finita, onde 11 a dividir por 11 dá 1 e já não é preciso estar a dividir mais.

Professora: Então vejam lá o que se passa mais para a frente! (Relato aula 4)

Petra considerou também que, nas alturas de impasse dos alunos, é importante a presença do professor. Por um lado, para tentar desbloquear-lhes o trabalho, lançando novas questões ou fornecendo pistas; por outro lado, para o auxílio no refinamento de conjecturas ou no abandono das mesmas, de forma a permitir a progressão dos alunos na investigação:

Olhem que a tabela não é só diagonais e linhas rectas, podem descobrir outras coisas para além disso! (Relato aula 1)

Alunos: Professora 9... 18... [o período] vai duplicando!

Professora: Vai então a seguir é 27 que é o dobro de 18!

Aluno: Não.

Professora: Então vejam lá bem! (Relato aula 4)

A professora envolveu-se em raciocínio matemático junto dos alunos ao ajudá-los a testar as suas conjecturas. A propósito de uma conjectura que os alunos ficaram de testar - “se os números triangulares obedecem ao padrão dois ímpares; dois pares” -, eis a seguinte passagem que ilustra o que foi dito anteriormente:

Alunos: Ó professora não, a seguir aparece o 49!

Professora: Deixem lá ver onde é que desenharam o seguinte? Este tem quanto? 6? (número de pontos na diagonal) Agora é com 7, não é? Então vamos contar...

Alunos: Dá 28!

Professora: Vamos fazer o seguinte, que tem que ter....

Alunos: 8!....

Alunos: Tem 36.

Professora: Outro par! Agora façam o seguinte, para ver se dá ímpar. Pela vossa conjectura vai ter que dar ímpar não é? (Relato aula 3)

Outra preocupação presente para esta professora foi que os alunos compreendessem o porquê das conjecturas que estavam a formar. Deste modo, insistia na justificação das mesmas, de forma a que este aspecto constituísse uma necessidade lógica para os alunos:

Aluno: Professora com 3 [faces pintadas] é sempre 8!

Professora: O grupo concorda? E porque será?

Aluno: Porque é um cubo.

Professora: E então?

Aluno2: E um cubo tem sempre 8 vértices.

Professora: Então e só os dos vértices é que ficam sempre só com 3 faces pintadas?

Alunos: Sim.

Professora: No centro não há possibilidade de ficarem cubos com 3 faces pintadas?

Alunos: Não.

Professora: Porquê?

Alunos: Porque ali estão as arestas... ali estão 1 ali estão 2...

Professora: E se eu fizesse agora um cubo de aresta 10, também ficavam só 8 cubos com 3 faces pintadas?

Alunos: Sim professora, de certeza! (Relato aula 5)

Por conseguinte, a professora aprecia que todos os alunos registem as conjecturas do grupo, bem como a justificação das mesmas. Durante as aulas, teve sempre o cuidado de fornecer um enunciado a cada aluno para que cada um fizesse os seus próprios registos de forma a constarem no respectivo caderno diário. Considera o registo importante, pois permite aos alunos desenvolverem as técnicas de organização de dados, bem como a comunicação verbal escrita:

[...] Vão observar, de um para o outro, que regularidades [existem], se há ali algum padrão... Descubrem, registam! [...] Quando obtêm o quociente façam o favor de registar, porque se depois vocês não registam, não são capazes de comparar e ver o que está a acontecer e fazer descobertas interessantes! (Relato aula 4)

Não se esqueçam de escrever como chegaram às vossas conclusões, senão na quinta-feira os vossos colegas perguntam porquê e vocês já não sabem explicar porque não se lembram. (Relato aula 5)

Ainda relativamente aos registos, houve algumas aulas em que a professora se surpreendeu acerca da forma organizada e divergente como os alunos registavam os seus dados. Foi o que aconteceu na tarefa “Travessia do rio”, em que estes tinham de registar um elevado número de dados para começarem a formar conjecturas e a tirar conclusões, evidenciando já alguns cuidados de sistematização a este nível. Para o efeito, a professora nunca condicionou a forma de registo dos alunos, deixando que fossem eles próprios a passar por esta dificuldade, de modo a desenvolverem as suas próprias estratégias, que, quando são livres, resultam sempre divergentes.

Não obstante a baixa faixa etária destes alunos e a dificuldade em lidar com o abstracto, a professora tentou, através do fornecimento de pistas, que os alunos ao seu nível caminhassem para pequenas generalizações, conseguindo desta forma visualizar para além do que era observável, como o que se pode observar pelos relatos que se seguem:

Professora: Que descobertas já realizaram? E se eu quiser a divisão de um qualquer número por 11 sem recorrer à calculadora?

Alunos: Vamos à tabuada!

Professora: Será sempre assim? É sempre a tabuada do 9? E este aqui também é da tabuada do 9 [$11/11=1$] e este [$22/11=2$]?

Alunos: Não esses são números que dão resultados certos... são múltiplos...

Professora: Então e se eu quiser dividir 58 por 11 qual é o resultado sem ir à calculadora? (Relato aula 4)

Alunos: Temos que pôr todas as hipóteses na folha.

Professora: Quais todas as hipóteses?

Alunos: Até ao 5.

Professora: Depois o que eu gostaria era que vocês me dissessem... experimentaram para um cubo de aresta 3, experimentaram para um cubo de aresta 4, vão experimentar para um cubo de aresta 5. Então e se fosse um cubo de aresta 10 que irá acontecer?

Alunos: Sem experimentar?

Professora: Sem experimentar, pois não têm cubos para isso. Agora preocupem-se com o de aresta 5 e depois olhem para os resultados que foram obtendo, para o de aresta 2, o de aresta 3, o de aresta 4, o de aresta 5... vejam o que foram obtendo... vejam se encontram alguma regularidade... vejam o que acontece para um cubo de uma aresta qualquer. (Relato aula 5)

Enquanto existem grupos que conseguem progredir mais ou menos autonomamente na tarefa, existem outros que necessitam de bastante apoio da professora e, mesmo assim, por vezes não conseguem alcançar todos os objectivos propostos, principalmente em tarefas mais complexas. Ao aperceber-se que um número significativo de alunos não iria chegar à segunda parte da tarefa “Divisões por 11, 111...”, dada a sua elevada complexidade, a professora garantiu que pelo menos um grupo, mais avançado nas suas descobertas, se debruçasse sobre esta parte da mesma para que depois pudesse enriquecer a discussão, não ficando dessa forma nenhum aspecto por discutir:

Professora: Para o 11 já descobriram a regra, agora tentem para o 111, para ver se descobrem a regra para descobrir rapidamente o número que se obtém. Será que se mantém a mesma regra? Experimentem. [...]

Aluno: Professora a estratégia mantém-se!

Professora: [...] passem às divisões por 9, 99! (Relato aula 4)

Por vezes, a professora foi surpreendida com conjecturas das quais não estava à espera, tendo aproveitado neste caso para introduzir o conceito de “equidistantes”, que não contava utilizar:

Aluna: Os números que estão à mesma distância do sete [equidistantes] quando somados dão sempre soma 14.

Aluno: E o 7?

Aluno: O 7 é $7+7=14$... é duas vezes.

Professora: E que é o 7 em relação à soma 14?

Aluno: É metade.

Professora: E o 7 está onde está exactamente em relação aos outros?

Alunos: Ao meio.

Professora: Dizem-se equidistantes. (Relato aula 3)

A professora foi chamada a resolver conflitos que se geraram pontualmente dentro dos grupos, pois existem alunos com muita dificuldade em trabalhar em grupo e em aceitar outros pontos de vista diferentes do seu. A professora interveio tentando amenizar a situação, não atribuindo culpas, mas incitando ao diálogo e ao entendimento entre os alunos:

Alunas: Professora, olhe lá ela diz que são 8 quadrados eu acho que é 1 com 0 faces pintadas...

Professora: Tem 8 quadrados com 0 faces pintadas? Ouviram o que a vossa colega disse?

Alunas: Cubinhos!

Professora: Cubos, não são quadrados, estamos a trabalhar com cubos. Então quantos são?

Aluna: para mim são 8!

Alunas: Para mim também... para mim é 1.

Professora: Como podemos comprovar?

Alguns momentos mais exigentes e trabalhosos são compensados quando Petra verifica o entusiasmo com que os alunos exploram a tarefa e a surpreendem quanto às descobertas que realizam. A frase que a seguir se apresenta é uma frase que a professora sempre recorda quando se refere ao trabalho dos alunos neste tipo de aulas, e foi proferida por um aluno pouco persistente e difícil de motivar: “Professora, olhe o que eu descobri a brincar!” (Relato aula 2). Compensatório é também o facto de os alunos com

mais dificuldades se mostrarem interessados e envolvidos neste tipo de trabalho e conseguirem também eles realizar descobertas. Foi o que aconteceu com a Hélia, que é uma aluna com dificuldades a Matemática, que a professora sentiu necessidade de reforçar na altura, dada a satisfação que sentiu, não obstante ter validado a sua conjectura:

Alunos: Ó professora olhe aqui 70, 72, 74...

Professora: E o que é isso?

Alunos: É a tabuada do dois.

Professora: Sim. E para além disso?

Alunos: Andam de dois em dois.

Professora: Também. E que mais?

Aluna: São números pares.

Professora: Boa Hélia! Vejam lá onde é que existem mais esses números.
(Relato aula 1)

Preocupações e dificuldades. Verifica-se que, para esta professora, a fase de desenvolvimento da tarefa se desenrolava numa tensão entre duas vertentes: a gestão do tempo e o apoio a dar aos grupos:

Pronto, é difícil gerir o tempo para poder estar em todos [os grupos], para poder apoiar todos, para a discussão em si. (Entrevista 2)

A grande dificuldade para a professora é conseguir apoiar todos os grupos, estar em todos os grupos, num determinado espaço de tempo e em turmas numerosas como a sua.

[...] Realmente, ir a todos os grupos e acompanhares da melhor forma os grupos é difícil. Eu acho que é difícil, principalmente numa turma enorme como era esta, se tu tens por exemplo 16 ou 17, mas aqui eram 25, não é nada fácil!

Por conseguinte, a sua grande preocupação era verificar se os alunos estavam a compreender o que se pretendia com tarefa, apercebendo-se das conjecturas que estavam a formar e se não estavam a seguir por caminhos inférteis para a investigação, apoiando-os e dando-lhe pistas, tentando não dar respostas e direccionar o seu trabalho, aspecto este que Petra também considera muito difícil:

A grande preocupação é... tens que estar atenta para ver se todos estão realmente a perceber. [...] Que eles não se estão a desviar muito do caminho ou dos caminhos que achas, quer dizer as potencialidades são tantas, que às vezes é difícil, mas pronto tens que apoiar o grupo e tens que ver se eles não estão a tomar como certa uma conjectura que é errada porque isso assim acaba por ser contraproducente, não é? [...] Por outro lado é teres o cuidado de não responderes ou de não dares [respostas]... ou de não dizeres. (Entrevista 2)

A fase de discussão das tarefas de investigação. A fase da aula de investigação que a professora considera mais importante para si é a fase da discussão, por ser o momento de consolidação das descobertas feitas.

Eu tinha sempre a sensação que seria a discussão final [a fase mais importante] [...] é um momento de consolidação, é um momento de estruturação de tudo o que se fez [...] eu acho que é decisiva a parte final, para estruturar o pensamento e para consolidar tudo o que se fez. (Entrevista 2)

Petra refere que esta é a fase mais exigente de todas e onde tem mais receio de errar.

[...] A [fase] mais exigente é a última! [...] É onde tenho mais receio de errar! (Reflexão aula 2)

Um dos aspectos identificados por Petra nesta fase como problemático foi a comunicação matemática. Enquanto que as descobertas feitas em pequeno grupo são facilmente compreendidas pelos alunos desse grupo, pois estes estiveram envolvidos nas mesmas, quando as descobertas são partilhadas em grande grupo, a maior preocupação da docente é garantir que todos os alunos compreendam o que os grupos estão a tentar transmitir:

A discussão é onde eu tenho mais receio de errar, porque estão todos... quando estás em pequeno grupo e enquanto aquele grupo que fez aquela descoberta, portanto esteve envolvido na descoberta [...] quando está esse grupo a tentar transmitir ao grande grupo é a preocupação: “será que estes que não estiveram envolvidos na descoberta estão a perceber o que é que eles estão a querer dizer? (Entrevista 2)

No entanto, Petra refere que os alunos “têm essa dificuldade de comunicar o que estão a pensar, o que fizeram e comunicar de uma forma mais correcta possível!”

(Entrevista 2). Refere também desconhecer as razões deste aspecto, avançando contudo uma possível causa: “Será que nós enquanto docentes não valorizamos muito a parte da comunicação? Não sei...” (Entrevista 2).

Para Petra, a comunicação matemática tem de ser muito trabalhada com os alunos e a fase discussão das tarefas de investigação é um momento importante para a desenvolver. Um dos problemas é por vezes a falta de tempo, pois esta fase é a última e acaba sempre por sair prejudicada em relação às anteriores, tendo de ser realizada no tempo que sobra. Acresce o facto de que os alunos, para comunicarem uma ideia, precisam de tempo para preparar o seu discurso e para eles próprios darem significado ao que estão a tentar transmitir.

Consequentemente, diz intervir demasiado nesta fase devido ao facto de os seus alunos não possuírem ainda um vocabulário que lhes permita uma comunicação matemática eficaz. A consciência desse aspecto fá-la ter sempre a necessidade de explicar o que os alunos disseram, por outras palavras:

Por isso as minhas intervenções são demasiadas, acho eu! Eu tento sempre explicar o que eles estão a dizer, porque eu fico sempre com a sensação que eles não estão a... [compreender] [...] Porque a comunicação é difícil para eles, a comunicação matemática é muito complicada! Porque eles conseguem, porque envolveram-se e sabem porque é que fizeram, mas depois transmitir... Realmente, eu sei que temos que trabalhar muito isso, mas depois lá está a questão do tempo, chega uma altura e o tempo não dá e pronto e tu estás a ver que os outros não estão a perceber nada do que eles estão a dizer, eles não estão a conseguir expressar o que fizeram, eu sei que estou a fazer mal porque depois chego e digo: “O que eles estão a querer dizer é isto aquilo e o outro [...] É difícil, há coisas que eles ainda não conseguem, explicam pelas palavritas deles como eles conseguiram, mas os outros como não estiveram... (Reflexão aula 2)

A professora refere que durante as primeiras aulas empobreceu um pouco esta fase da aula por ter dado muitas respostas aquando da fase de exploração. Assim, quando os alunos iam apresentar as conjecturas realizadas em grupo aos restantes colegas da turma e iam justificá-las debatendo a pertinência das mesmas, já não existia muita discussão e interesse porque já sabiam à partida que o que iam apresentar estava correcto, não se esforçando muito por convencer os colegas. Além disso, nem os colegas as contestavam, pois também sabiam que a professora já as tinha validado, pelo menos parcialmente:

Acho que estive demasiado presente e depois na discussão eles acabavam por já não estar tão atentos porque à partida já sabiam que tinham... a professora já tinha dito que estava bem, todas aquelas conjecturas que eles tinham estavam correctas e eram válidas e acho que depois a discussão empobreceu um bocadinho. (Entrevista 2)

No entanto, Petra acredita que podem coexistir as duas formas de trabalho, ou seja, a estratégia de discussão pode variar de forma a beneficiar os diferentes alunos da turma: privilegiar a discussão no seio do grupo em que os alunos discutem mais profundamente a validade de uma conjectura e, nesta altura, o professor tem de estar mais presente, para insistir, para dar pistas, para orientá-los mais, como aconteceu nas primeiras aulas; ou, por outro lado, pode optar-se por deixá-los investigar livremente, orientando-os de uma forma mais moderada, e, chegada a altura de apresentarem e defenderem as suas conjecturas, decidirem em grande grupo da pertinência das mesmas, enriquecendo esta fase da aula, como aconteceu nas últimas sessões. A professora acredita que esta última estratégia poder prejudicar de alguma forma os alunos mais inibidos que têm mais facilidade em expor e defender as suas ideias em pequeno grupo, o que não acontece em grande grupo, pois são anulados pelos alunos melhores e mais participativos:

Porque é assim, também podemos ver a questão noutros... [moldes] podes trabalhar as duas questões. [...] A discussão é no grupo e quando chega ao grande grupo, digamos, já vai muito trabalho feito e também podes optar pelo contrário deixar ir as conjecturas erradas e depois eles... far-se-á luz na discussão final! Acho que as duas coisas podem ser perfeitamente equacionadas. (Entrevista 2)

A compreensão das descobertas realizadas e apresentadas pelos alunos é uma das grandes preocupações de Petra, sendo este aspecto perceptível devido ao facto de a professora insistir sempre no “porquê”, na justificação das conjecturas.

Assim, procurou que todas as conclusões fossem apresentadas com elevado grau de profundidade e justificadas por parte dos alunos:

Aluno: A diferença entre duas colunas consecutivas é 10 unidades.

Professora: Consecutivas o que significa? Seguidinhas, uma a seguir à outra. O que é que este grupo fez, pegou na calculadora estava em cima da mesa tinha algum objectivo, houve meninos que não conseguiram ver qual seria o objectivo e o que é que fez, somou todas as colunas verificou que ia sempre de 10 em 10. O que o eu quero saber é: porquê de 10 em

10? A soma das linhas vai de 100 em 100 e a das colunas vai de 10 em 10, porquê? Por que é que será?

[Depois de um aluno ter explicado que este aspecto se deve à tabela ter dez linhas e dez colunas, outro aluno demonstra elevada compreensão acerca da conjectura apresentada]

Aluno: Então, as colunas é o contrário das linhas, nas linhas somamos as unidades que dá sempre 45 e o que muda são as dezenas, nas colunas as dezenas dão sempre 450 e o que muda são as unidades. (Relato aula 1)

Nesta fase, Petra aproveitou ainda para introduzir novos conceitos, recordar e abordar conceitos já aprendidos de formas diferentes e fazer a ponte entre esses conceitos e outros, como se pode verificar no seguinte excerto em que a professora explora o conceito de volume e o relaciona com o conceito de área:

Professora: Quando vocês disseram há pouco para calcular o volume do cubo íamos multiplicar a *largura vezes comprimento vezes altura*. Quando fazemos *comprimento vezes largura* o que estamos a calcular?

Alunos: A área.

Professora: E depois a área é que vamos multiplicar...

Alunos: Pela altura.

Professora: Pela altura para vermos o volume. (Relato aula 5)

Ao longo das aulas, a professora foi manifestando preocupações com a correcção e o rigor da linguagem utilizada pelos alunos, sendo mais exigente neste aspecto.

Aluna: O período da dízima tem 4 algarismos.

Professora: E quando é que o período da dízima tem 4 algarismos, Marta?

Aluna: É quando dividimos por 1111.

Professora: Ah! Assim está bem! (Relato aula 4)

Durante a discussão de uma das tarefas, “Travessia do rio”, a professora realizou dois momentos de discussão, tendo interrompido a parte de desenvolvimento da tarefa, por ter achado pertinente perceber e recolher dados acerca da forma e da razão pela qual os alunos alteraram as suas estratégias de jogo, face às somas que estavam a obter nos dados, tendo este aspecto enriquecido a discussão final.

Ainda na fase de discussão, Petra apoiou a realização de novas conjecturas. Eis que, já no final da discussão da terceira aula, uma aluna faz a seguinte descoberta:

Aluna: Professora em cima é par, ímpar, ímpar, par.... os dois números são os dois pares e as possibilidades são ímpares...

Professora: Vem cá explicar a tua ideia.

Aluna: Este e este são pares...

Professora: Então têm a mesma possibilidade de ocorrer são os dois números pares, o 12 é par e o 2 é par e a sua possibilidade de ocorrer é ímpar é um.

Aluna: o 11 e o 3 são ímpares e a sua possibilidade de ocorrer é 2 que é par... (em seguida verificam para os outros casos) (Relato 3)

Relativamente à tarefa “Divisões por 11, 111...”, devido a esta possuir um grau de complexidade mais elevado, verificou-se que a sua discussão foi mais pobre do ponto de vista da diversidade de conclusões apresentadas, tendo-se repetido muitas delas. No entanto, a professora considera que, não obstante a discussão ser um pouco repetitiva nestes casos, é importante que nesta faixa etária todos os alunos apresentem as conclusões aos colegas, como forma de verem o seu trabalho reconhecido. Caso contrário, poderiam sentir-se tristes e desmotivarem-se futuramente com este tipo de tarefas, como refere:

Eu acho que sim, eles empenham-se todos na tarefa é natural que depois todos gostem de ir mostrar o que fizeram, ainda mais nestas idades, aliás eles perguntam logo: “vamos usar o retroprojector, o acetato?” , eles gostam todos, depois e muito difícil estar a excluir, senão eles ficam tristes. (Reflexão aula 4)

Síntese dos principais aspectos da condução. Nas aulas envolvendo tarefas de investigação, a fase de introdução foi aquela em que Petra demorou menos. Nesta fase, a professora considerou importante desafiar a imaginação e a motivação dos alunos, fazer analogias com outras tarefas, relembrar as regras de trabalho em grupo, bem como fortalecer alguns aspectos do trabalho investigativo, como a importância do registo, do teste e a discussão da validade das conjecturas formadas no seio do grupo. Numa tarefa em que os alunos não possuíam todos os conhecimentos necessários ao desenvolvimento da mesma, a professora ensinou também alguns conceitos antes de passar à fase de exploração.

Quanto à fase de desenvolvimento da tarefa, Petra considera-a a fase mais importante para os alunos, aquela que eles mais apreciam e a que lhes desenvolve mais

competências. Esta desenrolou-se sempre com dois aspectos problemáticos para esta professora: a gestão do tempo e o apoio a dar aos grupos.

Petra sempre se debateu com a questão do tempo. Para esta professora, o tempo de uma aula era pouco para o que se exigia aos alunos. Por outro lado, a consciência deste aspecto condicionava um pouco o seu desempenho, atribuindo-lhe alguns dos aspectos negativos que identificou na sua conduta, como o facto de por vezes dar pistas muito directivas e/ou validar as conjecturas dos alunos.

Outro aspecto duplamente problemático que a professora identificou nesta fase foi o apoio a fornecer aos grupos. Por um lado é muito difícil prestar um apoio efectivo aos grupos em tempo real em turmas numerosas e heterogéneas como a sua; por outro lado, este apoio deve ser no sentido de os fazer progredir na tarefa sem direccionar o seu trabalho e sem lhes dar respostas, o que não é fácil num ensino ainda muito centrado na figura do professor. No entanto, refere que, reflectindo acerca da necessidade e importância de evitar este hábito, o professor consegue controlar este ímpeto.

Verifica-se que dois outros aspectos que condicionam o tipo de apoio fornecido aos alunos pela professora, para além do tempo, são: a complexidade das tarefas, pois as que apresentavam características mais complexas necessitavam de um apoio maior da parte da professora e um papel mais interventivo da mesma; a insegurança da professora relativamente a alguns conceitos matemáticos, pois nas tarefas em que se sentia menos segura tinha uma maior tendência para ser mais directiva nas suas intervenções junto dos alunos.

Durante esta fase de desenvolvimento da tarefa pelos alunos, o seu papel foi fundamentalmente: manter uma atitude questionadora, lançando questões para o grupo; descercar o trabalho dos alunos, fornecendo informações sobre conteúdos ou pistas para os alunos progredirem na tarefa; fortalecer a importância do registo, da discussão e do teste de conjecturas; insistir na justificação das ideias e apelar à generalização; envolver-se em raciocínio matemático para compreender conjecturas formadas pelos alunos; resolver conflitos pontuais dentro dos grupos; seleccionar as conjecturas que os grupos iam apresentar e seriar a ordem de apresentação.

No que concerne à fase da discussão da tarefa, Petra considera-a de extrema importância por ser um momento de consolidação de conhecimentos. É uma fase muito exigente e onde afirma ter mais receio de errar.

Durante esta fase, o papel da professora também passou por fornecer informação sobre alguns conceitos, relembrar conceitos aprendidos e relacionar ideias.

Nesta fase, Petra teve maior consciência da existência de uma questão problemática para os seus alunos, a comunicação matemática. Refere que os alunos no geral têm esta dificuldade e que esta se pode dever ao facto de os professores não valorizarem suficientemente esta competência. Assim, a professora reconhece que este aspecto tem de ser muito trabalhado e tem de lhe ser dispensada atenção merecida, constituindo a fase de discussão de tarefas de investigação um momento importante para o fazer.

O tempo também foi um aspecto problemático identificado por Petra nesta fase. Segundo a professora, esta fase é a última e é a que acaba por ser um pouco penalizada nesta questão, em relação às restantes. Assim, uma das dificuldades sentidas por Petra, decorrente da falta de tempo, foi o facto de intervir demasiado nesta fase. Para Petra, a grande preocupação é garantir a compreensão de todas as ideias apresentadas por parte dos alunos, o que é difícil para os que não participaram das descobertas que estão a ser apresentadas. Assim, verificando o tempo a escassear, a professora acabava muitas vezes por repetir, por outras palavras, o que os alunos tinham acabado de expor.

A preocupação com a compreensão é também evidenciada pela professora quando insiste na justificação de todas as ideias apresentadas, bem como com a generalização. O cuidado com o rigor e formalização progressiva da linguagem matemática dos alunos também foram uma constante.

Outro aspecto resultante do trabalho da professora nesta fase foi de que a discussão de ideias pode realizar-se em qualquer momento da aula, e não apenas no fim da mesma.

Esta professora parece valorizar o facto de todos os alunos, dada a sua faixa etária, deverem intervir na fase da discussão, mesmo quando as descobertas realizadas são poucas e se podem tornar repetidas, pois esta é uma das formas privilegiadas para eles verem o seu trabalho valorizado, partilhando-o.

Petra e a sua reflexão sobre as aulas com tarefas de investigação

As reflexões conjuntas realizadas com Petra demoravam, em média, cerca de vinte minutos e eram profundas do ponto de vista do desenvolvimento de ideias e da justificação das mesmas, fazendo a professora sempre notar que a reflexão é um aspecto muito importante na sua prática. Reconhece que só é possível o professor mudar os aspectos mais problemáticos da sua prática através da reflexão:

Depois é a reflexão, é chegares a casa e pensares: “Não devia ter feito assim”. Vais resfriando essa tua vontade de dizer logo: “isso está mal!” ou “faz assim...” ou “porque não experimentas o outro”. (Entrevista 2)

As reflexões que a professora realizou durante e após as suas aulas permitiram alterar a sua acção e retirar ensinamentos para a sua prática futura. Este aspecto foi evidente em vários episódios das suas aulas, que já foram apresentados em pontos anteriores, como por exemplo: quando a professora decidiu, aquando da aula, que os alunos para não perderem tempo, fariam apenas um registo em conjunto, ao invés de cada um estar a fazer um registo próprio; ou quando a professora achou conveniente parar o momento de exploração da tarefa e fazer uma pequena discussão para se inteirar das razões que conduziram os alunos à mudança de estratégia de jogo, para que estes elementos pudessem enriquecer a discussão final; ou quando a professora, ao verificar que, devido à sua insegurança e/ou à pressão do tempo, estava a ser muito directiva na forma de apoiar os grupos, decidiu alterar as suas estratégias, deixando os alunos levar as suas conjecturas por validar para a fase da discussão.

Aspectos bem conseguidos identificados pela professora

Petra tem muita dificuldade em falar dos aspectos positivos da sua prática, preferindo assinalar que há sempre aspectos a melhorar. Assim, quando questionada acerca da fase melhor conseguida por si nas aulas com tarefas de investigação, refere ter tido aspectos positivos e negativos em todas:

Acho que tive sempre tantas dúvidas em todas! Acho que tive coisa boas em todas, tive coisas menos boas e pontos fracos em todas... (Entrevista 2)

Como aspecto positivo, o qual a deixa muito satisfeita, indicou o facto de os seus alunos aderirem sempre muito bem e com muito entusiasmo a este tipo de tarefas. Justifica este aspecto com o facto de estarem muito habituados a trabalhar nestes moldes, pese embora com tarefas com menos potencial que as investigações, e gostarem por isso de ter um papel activo na construção do seu conhecimento e de tarefas que lhes causem desafio intelectual:

Eu acho que apesar de ser uma tarefa de investigação e ser algo diferente do que fazia, eles estão habituados a trabalhar desta forma [...] porque eles sempre trabalharam em grupo. Eu sempre previ tarefas um pouco mais limitadas, esta realmente tem um potencial enorme, mas eles sempre trabalharam muito nesta base, do problema, do trabalho em grupo, da discussão em grupo e depois a discussão para todos e tal... sempre houve muito esse trabalho, desde o segundo ano [...] E eu também já sei que eles estavam motivados para este tipo de tarefas, portanto eu sabia que eles iam receber com agrado, que iriam envolver-se [...]

Não obstante Petra referir que conhece os seus alunos, tendo este aspecto sido visível ao longo do estudo, tem conhecimento que possui alunos com muitas potencialidades; reconhece que, em muitas aulas, os alunos a surpreenderam quanto ao volume de descobertas realizadas, bem como com o facto de ter visto alunos mais inibidos e menos participativos exporem as suas ideias e verem os seus contributos valorizados, uma vez que este tipo de tarefas permite explorações muito diversas e acessíveis a todo o tipo de alunos:

Sim, foi bom para todos os miúdos, mas principalmente para os mais caladinhos. Esses miúdos beneficiaram muito, acho que beneficiaram porque, como eu já disse há pouco, viram valorizados pequenos contributos, que em grande grupo ou noutra tarefa nem sequer teriam, se calhar... [oportunidade]. (Entrevista 2)

A professora diz agradar-lhe bastante a fase em que os alunos, na discussão, partilham as suas descobertas com os colegas e confrontam as suas ideias.

Foi pena! Que eles agora já estavam muito pressionados com o tempo, porque esta exploração podia ter sido ainda muito mais rica, não é? Também foi giro, eles a contestarem-se uns aos outros, e verem: “E pá,

eles descobriram isto, e como e que nós não descobrimos!?” ver até onde é que cada um chegou. É muito gira também essa parte! Aliás eu adoro trabalho em grupo! (Reflexão aula 1)

Dificuldades identificadas pela professora

Para Petra, a grande dificuldade deste tipo de tarefas foi sempre a gestão do tempo, pois o desenvolvimento de tarefas de investigação requer tempo, tempo de preparação e tempo para as desenvolver na sala de aula.

Assim, um dos obstáculos apontados por Petra foi o facto de as planificações destas aulas serem morosas e exigirem bastante dedicação da parte do professor, por serem tarefas de elevada complexidade, sendo que a parte mais difícil é colocar-se no papel dos alunos e tentar prever todas as descobertas que os alunos poderão realizar de forma a ser apanhada o menos possível de surpresa.

Tentar imaginar o que eles iriam descobrir, isso é a parte mais difícil! É tu veres, tu consegues ver o maior número de potencialidades que a tarefa tem para que depois não sejas apanhada de surpresa na aula, ou melhor, para que sejas apanhada o menos possível de surpresa. (Reflexão aula 2)

No que diz respeito à gestão do tempo na sala de aula, também o considera mais difícil na realização destas tarefas, atribuindo à falta de tempo alguns dos aspectos que identifica como negativos na sua prestação, os quais tentou colmatar ao longo das aulas. Um deles foi o facto de a escassez de tempo conduzir, por vezes, ao aparecimento de alguns imprevistos e mudanças de estratégias momentâneas. Foi o que aconteceu na primeira aula em que a professora tinha pedido aos alunos que cada um fosse registando as várias descobertas em enunciado próprio, por considerar importante este aspecto; no entanto, ao verificar que estavam a demorar muito tempo com este registo e que estava a perder-se tempo de descoberta, decidiu pedir a um deles que registasse as descobertas de cada grupo.

Outro aspecto negativo que identificou, decorrente da falta de tempo, foi o facto de não ter conseguido em algumas aulas seleccionar as conclusões mais importantes de cada grupo e terem surgido conclusões repetidas na discussão, o que desmotiva e cansa os alunos. Também o facto de essas conclusões não terem sido ordenadas e apresentadas

por ordem crescente de complexidade foi um factor limitador para a compreensão das mesmas por alguns alunos, principalmente aqueles com mais dificuldades.

Por último, a professora refere que a escassez do tempo teve implicações no seu desempenho, fazendo com que fosse mais directiva nas pistas fornecidas aos alunos durante a fase de desenvolvimento da tarefa e mais interventiva na fase de discussão.

Durante as aulas com investigações, Petra verificou que os alunos, quando chegavam à parte da discussão, mostravam algum desinteresse, o que poderia estar a dever-se ao facto de estar a validar as conjecturas no seio dos grupos. Petra apercebeu-se que o caminho não era esse. Se, por um lado, estava a ganhar-se tempo de descoberta, pois estando as conjecturas validadas era apresentá-las sem grandes alongamentos, uma vez que os alunos já sabiam *a priori* que o que iam apresentar estava correcto; por outro lado, estavam a perder-se aspectos muito importantes, como a discussão, argumentação e a justificação das ideias:

No futuro irei mudar quando fizer novas tarefas do género. Não podemos desligar, é verdade, mas acho que estive demasiado presente e depois na discussão eles acabavam por já não estar tão atentos porque à partida já sabiam que tinham... “a professora já tinha dito que estava bem!”. Todas aquelas conjecturas que eles tinham estavam correctas e eram válidas e acho que depois a discussão empobreceu um bocadinho. (Entrevista 2)

Ainda durante o estudo, Petra conseguiu mudar a estratégia. Assim, a validação e/ou rejeição de conjecturas seria realizada pelos próprios alunos aquando da discussão. Desta forma, mantinha todos os alunos envolvidos até ao fim e deixava que eles sentissem a dificuldade de terem que defender as suas ideias perante o professor e os colegas:

Sabes outra coisa que eu tenho vindo a notar? Hoje sem dúvida foi pior! É que quando eles passam à fase de comunicação, acaba por haver algum desinteresse porque se vão validando todas as conjecturas que eles vão colocando e apresentando e quando eles apresentam à turma eles já têm a certeza absoluta daquilo que vão dizer e os outros, já sabem que aquilo é verdade, pronto, não há discussão entre os grupos! Na próxima tarefa gostava de fazer uma coisa diferente. Há bocado estava a pensar nisso quando eles estavam a apresentar, era o seguinte: era não lhes validar nada. Dá-se a tarefa, façam tudo, coloquem, apresentem e depois a turma é que vai validar... pôr à discussão da turma, e depois eles apresentam e “então o que é que os outros acham?” “não está certo por isto e por aquilo e por o outro!” (Reflexão aula 4)

Quanto aos alunos, identificou também um aspecto problemático, a dificuldade com a comunicação matemática. Tal competência é difícil de desenvolver nos alunos e eles têm muita dificuldade em comunicar as suas ideias, quer oralmente quer por escrito:

É difícil! Para mim é comunicar, eles têm sempre muita dificuldade! É escrever o que estão a descobrir e é comunicar aos colegas o que descobriram. A comunicação é, sem dúvida, a grande lacuna, a grande dificuldade! (Entrevista 2)

Relativamente a este aspecto não nega ter alguma responsabilidade, pois tem consciência de que a sua acção pode condicionar o desempenho dos seus alunos. Se, por um lado, reconhece a importância da comunicação e apela à mesma, por outro lado, por vezes, não pode ou não consegue dar a todos os alunos o tempo de que eles necessitam para organizar o seu discurso e o seu pensamento:

Se, por um lado, eu até lhes dou muito espaço de intervenção e solicito muito a participação deles, por outro lado, quando eles estão a dizer mal, eu corrijo logo. Será por isso? Será que eu também não lhes dou tempo para eles dizerem exactamente ou comunicarem exactamente o que querem comunicar e começo a ver que eles estão a li a enrolar e então dou eu logo a resposta e acabou! Será? Não sei, entendes? Eu acho que eles acabam por chegar ali a uma altura, nós abrimos caminho, porque se nós conseguíssemos estar calados e deixar que ele se desenrascasse... Mas depois também tens outra coisa, tens vinte e cinco, como é que tu vais conseguir dar tempo a todos?! É difícil! Comunicar é, cada vez mais, fundamental! Mas depois eles não conseguem sair dali e tu vais questionando, questionando e os outros começam-se a fartar e o tempo começa a faltar e tu acabas por dizer “Querias dizer isto, não era?” e eles não disseram! (Entrevista 2)

Não obstante a preocupação com a justificação e a generalização das ideias manifestada por Petra, a professora reconhece que, apesar da justificação ser algo que eles conseguem fazer, o desenvolvimento da generalização nesta idade é difícil, uma vez que os alunos desta faixa etária têm muita dificuldade em lidar com o que é abstracto. No entanto, refere que deve garantir-se que, pelo menos, cheguem mais além do que aquilo que lhes é dado.

Acho que sim! [conseguem justificar] Claro que aquela questão de eles chegarem ao termo geral digamos, para eles é difícil! Pronto, porque tens que utilizar as letras e tens que passar isso para um número n

qualquer. Pronto, é muito difícil, mas eles conseguem ir, por exemplo até ao 10.º termo [...] além disso já é um bocado difícil para eles, mas pelo menos que cheguem além daquilo que tu lhes dás [...] que vejam a regularidade para mais 3 ou 4 termos. (Reflexão aula 5)

Pensa que uma exploração adequada das tarefas de investigação na sala de aula necessita desejavelmente de duas manhãs, uma para o desenvolvimento da tarefa e outra para a sua discussão, pelo que se torna difícil realizá-las com muita regularidade, face à necessidade de cumprimento do currículo e do programa. Para além do mais, considera complicado desenvolver este tipo de tarefas em turmas numerosas e heterogêneas como a sua, tornando o papel do professor no apoio a fornecer aos grupos bastante problemático.

Para fazer face às dificuldades supracitadas, a professora enumera duas possibilidades: não fazer este tipo de tarefas com a regularidade que gostaria ou então trabalhar em equipa e de uma forma transversal os conteúdos do 1.º Ciclo.

É assim, é difícil! Provavelmente é não fazendo tantas vezes é querer fazer determinadas coisas e não poder fazer, porque é realmente... se tu não tens um apoio, se tens 25 miúdos, se tu tens um currículo ou um programa para abordar, tens miúdos com N.E.E. que estão nas medidas do regime educativo especial, têm o português como uma língua não materna. Às vezes o ideal seria trabalhar sempre assim, mas é impossível... Se calhar um grande trabalho... trabalhar em equipa e podermos trabalhar de uma forma transversal e cruzarmos todos os conteúdos, acho que até se consegue fazer um trabalho... Nós para o ano vamos ser duas, mas tu sozinha é difícil! Mas claro que depois se houver um que trabalhe ou uma equipa que trabalhe num ano e que depois o outro possa beneficiar no ano seguinte, é ótimo, tentarmos partilhar tarefas, trabalhos, é ótimo!

Aprendizagens que a professora reconhece ter realizado com a experiência

Ao longo do estudo, Petra foi construindo um conceito sobre as tarefas de investigação baseado na sua experiência no mesmo. Assim, o aspecto que lhe parece mais característico deste tipo de tarefas é a sua natureza aberta, que pressupõe diferentes abordagens para os alunos:

É o seu carácter aberto. Tu quando dás uma tarefa de investigação não dizes exactamente qual é o fim, qual é resposta, não há um fim, não há

uma resposta. [...] não sabes muito bem qual é o destino [...] pressupõe vários caminhos, mas também pressupõe várias metas, eu acho que é mais isso. (Entrevista 2)

A professora foi mudando a sua opinião relativamente ao tipo de tarefas eleitas para as suas aulas. No início, referiu gostar muito dos problemas, mas um maior contacto com as tarefas de investigação e a constatação das potencialidades das mesmas fê-las as suas preferidas. A professora ficou de tal forma simpatizante com este tipo de tarefas que coloca a hipótese de, no próximo ano lectivo, abordar o currículo de 1.º Ciclo, tendo por base tarefas de investigação e cruzando todos os conteúdos e áreas. Por conseguinte, reconheceu em todas as tarefas imensas potencialidades, pois todas ajudaram a fortalecer e a consolidar conhecimentos, tendo mobilizado saberes das mais diversas áreas da Matemática:

Eu fiquei fã das investigações, a sério! Eu fiquei fã, acho que tem um potencial brutal, isso bem trabalhado... este ano era o desconhecido, foi a minha primeira experiência, isso bem pensado e bem articulado acho que está eleita, é a minha tarefa de eleição, acho que a partir de agora é mesmo! (Entrevista 2)

A professora refere que o desenvolvimento de tarefas de investigação lhe proporcionou inúmeras aprendizagens em vários domínios do conhecimento do professor.

Assim, o desenvolvimento deste tipo de tarefas veio fortalecer a ideia de quão importante é dosear o apoio dado aos alunos e não dar tantas respostas, concluindo que ainda pode melhorar este aspecto da sua prática:

Tantas, meu Deus [descobertas realizadas]! Muitos [conhecimentos]... em todos os domínios em todas as áreas. [...] Pronto, aprendi a nível científico, aprendi a nível didáctico, pedagógico, o trabalhar com eles o não dar tantas respostas, isso para mim não era... eu já tinha esse cuidado, porque o Narciso alertou-me muitas vezes para isso, trabalhou sempre isso: “não dê respostas, deixa-os chegarem eles” e acabei por ir interiorizando, portanto. Mas reflectindo, ainda vejo que posso melhorar, ainda tenho muito essa tendência de dar a resposta, não dosear aquilo que digo e tenho que dosear muito... Aprende-se em tantos domínios! (Entrevista 2)

Esta experiência trouxe a Petra conhecimentos acerca da planificação de aulas, referindo ter aprendido a planificar correctamente. Os elementos mais importantes que a planificação deste tipo de aulas lhe parece ter trazido, os quais considera imprescindíveis e de extrema importância para uma boa planificação, foram prever todas as questões que os alunos lhe iriam colocar e com que outras questões lhes iria responder e quais os conhecimentos que poderiam advir da tarefa, considerando que o sucesso de uma aula está dependente da qualidade da planificação que se realiza.

Aprendi tanta coisa! Olha, aprendi a planificar de forma correcta, porque acho que é assim é que é a forma correcta [...] a forma como trabalhei a planificação. Nunca tinha trabalhado a planificação dessa forma, para mim foi uma novidade e acho que realmente é fundamental! Era ideal que pudéssemos fazer sempre assim! Ou que fizéssemos sempre assim! Mas também que nos dessem condições para o fazer e que nos valorizassem um bocadinho, não valorizam. Mas sem dúvida, eu achei o máximo, o prever as situações, o pesquisar, o envolver-me eu própria antes deles se envolverem, eu envolver-me, com a mesma vontade, foi muito interessante essa parte! (Entrevista 2)

No que concerne ao conhecimento matemático, Petra reconhece que o desenvolvimento deste tipo de tarefas constitui uma mais valia pelas aprendizagens que estas proporcionam, pois aprendeu muito com a preparação destas tarefas, através das pesquisas que realizou, das descobertas que fez e através do trabalho colaborativo, permitindo-lhe colmatar algumas lacunas do seu conhecimento. Por conseguinte, esta professora reconhece que as tarefas de investigação lhe permitiram enriquecer e fortalecer muito o seu conhecimento científico e trouxeram-lhe uma maior segurança a este nível, pelo volume e qualidade das aprendizagens realizadas, pois, para além dos seus alunos, também ela realizou trabalho investigativo:

[...] aprendi a nível científico porque tive que pesquisar muito e tive que envolver-me muito, tive que adquirir muito conhecimento que não dominava, inclusivamente tive que recorrer a outras colegas, recorri a ti, recorri à Ivone, recorri a colegas do 3.º Ciclo e do 2.º Ciclo que às vezes tinha algumas dúvidas e muitas vezes não consegui lá chegar... (Entrevista 2)

Para Petra, um professor deve sempre estar muito seguro a nível científico quando desenvolve este tipo de tarefas. Para tal, deve ser-lhe dada formação para que as tarefas de investigação sejam uma constante nas aulas de Matemática.

Acrescenta, ainda, que a nível pessoal é entusiasmante do ponto de vista intelectual, pois gosta de investigar e generalizar, de chegar ela própria às descobertas e conclusões:

A parte que eu trabalhava sozinha em casa para mim era... eu divertia-me às vezes sozinha apesar de muitas vezes não ter tempo, e tive pena de não ter tanto tempo para o fazer, mas eu divertia-me, a sério! (Entrevista 2)

Por fim, o desenvolvimento deste tipo de tarefas permitiu-lhe também ficar ainda mais ciente da forma como os alunos aprendem e mais convencida que estas tarefas são de privilegiar na sala de aula por constituírem experiências de aprendizagem significativas. Refere que quanto mais contacta com as tarefas de investigação mais compreende as suas potencialidades, mais percebe o envolvimento dos alunos para com as mesmas e a riqueza das aprendizagens que realizam, pois são mais abrangentes e interactivas e este deve ser o espírito da aprendizagem da Matemática, é assim que eles aprendem a gostar da disciplina relacionando os conceitos e vendo que nada é estanque, como refere:

Olha, trouxe-me de novo que situações destas que os envolvam são de privilegiar! E se eu já gostava do trabalho em grupo, seja em pequeno seja em grande grupo, cada vez mais vou privilegiar esse assunto, eu estou a vê-los cada vez mais na construção do saber, é fundamental! É assim, o que eles constroem, o que eles se envolvem, o que eles participam, nunca mais se esquecem. [...]

Quando os alunos se envolvem nas aprendizagens, quando são construtores e não meros consumidores, a Matemática fica melhor consolidada e é mais facilmente apreendida. (Entrevista 2)

Síntese dos principais aspectos da reflexão

As reflexões realizadas por Petra eram abrangentes, aprofundadas e problematizavam o seu trabalho. Verificou-se que a reflexão é um aspecto bastante importante para esta professora, pois refere muitas vezes que é através da mesma que consegue melhorar aspectos da sua prática, quer durante quer após a sua acção.

Assim, no que respeita aos alunos, assinalou que estes revelaram sempre uma boa aceitação para com as tarefas, considerando que este aspecto se deve ao facto de estarem muito habituados a trabalhar nestes moldes, com tarefas que lhes causem

desafio intelectual. Referiu ainda que os alunos a surpreenderam algumas vezes pela quantidade de descobertas realizadas e pelo contributo que alguns deles, menos participativos e/ou com mais dificuldades, conseguiram dar em algumas aulas. Quanto às dificuldades dos alunos identificadas pela professora, estas estão relacionadas com a comunicação matemática e com a generalização.

No que se refere às dificuldades relacionadas com a sua acção durante o estudo, Petra sublinhou a gestão do tempo e a gestão do apoio a dar aos grupos.

A professora apontou vários aspectos menos bem conseguidos por si, decorrentes da escassez de tempo como: o facto de em algumas aulas não ter conseguido fazer uma selecção e seriação eficiente das descobertas dos alunos para a fase de discussão, bem como o facto de se ter sentido pressionada a ser mais directiva nas suas prestações.

Quanto à gestão do apoio a dar aos grupos, este também resultou problemático devido às características da turma, sendo difícil fornecer um apoio efectivo em tempo útil, e também por ser difícil dosear esse apoio, uma vez que a professora se apercebeu que dava muitas respostas e validava as conjecturas dos alunos, empobrecendo consequentemente a fase de discussão. Assim, os alunos já não tinham que debater a validade das ideias apresentadas, porque as sabiam já validadas.

Petra refere que as aprendizagens realizadas com o desenvolvimento deste tipo de tarefas foram a vários níveis do seu conhecimento. Assim, o contacto com as tarefas de investigação permitiu que a professora se consciencializasse das potencialidades dessas mesmas tarefas, tendo-se tornado as suas tarefas de eleição.

Com o desenvolvimento deste tipo de tarefas, Petra refere ter aprendido a planificar correctamente as suas aulas e o investimento que fez nesta fase, através da pesquisa, do trabalho investigativo e colaborativo, permitiu-lhe realizar várias aprendizagens a nível científico, fortalecendo o seu conhecimento matemático.

Actualmente, considera que este tipo de tarefas, que proporcionam uma aprendizagem significativa aos alunos e que os envolvem e motivam, são de privilegiar na sala de aula. Esta experiência permitiu também a Petra verificar que é muito importante dosear o apoio dado aos alunos e deixá-los progredir por eles próprios nas tarefas.

No entanto, refere que a planificação deste tipo de aulas é morosa e exigente para o professor, sendo difícil de desenvolver regularmente. Por outro lado, este tipo de tarefas requer tempo para a sua exploração e a sua realização frequente pode de alguma

forma condicionar o cumprimento do programa e do currículo. Assim, Petra adianta como possível resolução para estas dificuldades, a realização de tarefas de investigação em que o professor beneficie de trabalho colaborativo e com uma abordagem interdisciplinar do currículo.

Capítulo VII

O professor Paulo

Paulo é o nome escolhido neste estudo para o professor de Matemática do 2.º Ciclo e este capítulo é-lhe inteiramente dedicado. Assim, inicia-se o presente capítulo com uma apresentação breve do professor. Em seguida, faz-se a caracterização do conhecimento profissional de Paulo, nas suas diferentes componentes: conhecimento de si; conhecimento do contexto; conhecimento da Matemática; conhecimento dos alunos e seus processos de aprendizagem; conhecimento do currículo; conhecimento do processo instrucional. Segue-se uma análise relativa ao trabalho do professor no desenvolvimento de tarefas de investigação na sala de aula nas suas diferentes fases: planificação e condução. Por fim, analisa-se a reflexão do professor sobre a sua acção no desenvolvimento de aulas com tarefas de investigação, dando particular importância ao balanço dos aspectos melhor conseguidos, às dificuldades encontradas e às aprendizagens que este reconhece ter realizado com esta experiência.

Apresentação

Paulo é professor do Ensino Básico na variante de Matemática e Ciências da Natureza. Tem 33 anos, é solteiro e vive sozinho. Caracteriza-se como “amigo de todos”. É simpático, calmo, afável e sempre sorridente. Apresenta um estilo desportivo através

da forma de vestir e calçar, que acentua a sua juventude. Em suma, aparenta ser um homem de bem com a vida e o seu aspecto descontraído e sereno confirma esta ideia.

A investigadora conheceu Paulo ocasionalmente, por meio de alguns amigos comuns, não tendo a sua relação ido muito além de uma troca pontual de opiniões sobre a profissão.

Paulo frequenta, pelo segundo ano consecutivo, o Programa de Formação Contínua em Matemática para professores do 2.º Ciclo numa Escola Superior de Educação. Foi uma formadora desse Programa que indicou Paulo como um possível participante neste estudo, pela sua disponibilidade para novas experiências. O professor aceitou de pronto o convite.

Conhecimento de si

Paulo gosta muito da sua profissão de professor de Matemática e Ciências do 2.º Ciclo do Ensino Básico. A profissão de professor de Matemática foi um sonho que perseguiu desde os tempos de aluno dos ensinos básico e secundário, por gostar muito desta disciplina e ser um bom aluno, sonho esse que conseguiu concretizar tendo entrado para a sua primeira opção de candidatura ao Ensino Superior numa Escola Superior de Educação da cidade onde vive.

Assim, é professor há onze anos e desde há cinco que pertence ao Quadro de Zona Pedagógica do Alto Alentejo. Enquanto professor contratado, leccionou em várias escolas, tendo estado no Algarve, no Baixo Alentejo, Alentejo Litoral e Estremadura.

Profissionalmente, é um homem realizado, pois faz o que gosta. Enquanto professor, refere não ter experiências que o tenham marcado negativamente, sendo que todas lhe trouxeram algo de positivo.

O professor afirma valorizar muito a relação que mantém com os alunos, que, segundo o mesmo, se quer agradável e próxima. Pensa que estes o consideram um bom professor, pois é muito preocupado com eles e sempre que podem procuram a sua companhia.

Paulo preza muito a qualidade das relações que estabelece, referindo que possui uma relação muito próxima com os seus colegas, em especial com os de departamento.

Por conseguinte, planificam juntos, trocam experiências e materiais e até vão assistir às aulas uns dos outros, auxiliando-se mutuamente, sendo esta uma medida prevista no Plano de Acção da Matemática para combater o insucesso dos alunos nesta disciplina na sua escola.

Um aspecto que considera gratificante na profissão é o de chegar ao final do período ou do ano e conseguir cumprir todos os objectivos delineados. Porém, considera que nem sempre é possível a um professor de Matemática cumprir todos os objectivos a que se propõe.

Enquanto professor de Matemática e Ciências da Natureza, a disciplina que refere gostar mais de leccionar é a de Ciências da Natureza do sexto ano de escolaridade, em especial as unidades referentes à anatomia e fisiologia do Corpo Humano, pela curiosidade e entusiasmo que estes conteúdos despertam nos alunos. No entanto, é a Matemática que sente leccionar melhor, pois nas Ciências da Natureza “o que é verdade hoje já não o é amanhã” e “a Matemática é uma ciência mais rigorosa, ou é aquilo ou não é, sendo uma ciência que, embora evolua, é mais estática que as Ciências da Natureza”.

Curiosamente, a disciplina que considera ser mais difícil de preparar, conduzir e avaliar é a Matemática, devido à imagem negativa que os alunos possuem da disciplina e à falta de interesse que revelam.

Paulo encontra-se a frequentar o Programa de Formação Contínua em Matemática e afirma dar muita importância à formação, pois permite realizar novas aprendizagens, assim como lembrar aspectos importantes do ensino e aprendizagem que se vão esquecendo com a rotina.

Refere ter aceitado participar neste estudo por considerar que nunca é demais abrir as portas a experiências novas, pois é importante para o desenvolvimento de competências nos alunos, e para si enquanto profissional.

Não põe de parte a hipótese de realizar um mestrado na área da Informática; porém, considera que ainda não chegou o momento oportuno.

Conhecimento do contexto

A escola onde Paulo lecciona, pelo segundo ano consecutivo, insere-se num meio rural. É uma Escola Básica Integrada com Jardim de Infância, que, segundo o mesmo, está muito bem apetrechada a nível material e possui uma boa dinâmica, com iniciativas a vários níveis.

Paulo gosta de conhecer o meio em que os alunos e a escola se inserem, para poder adequar o seu ensino a esse meio e à turma em si e para poder compreender certas atitudes que os alunos têm para com ele. No entanto, a sua conduta é sempre a mesma, independentemente do meio onde lecciona:

A minha conduta tem sido sempre a mesma, a gente tem é que atender à turma e aos problemas que a turma tem. [...]

Temos que tentar adequar o tipo de ensino à terra. Gosto sempre, quando há problemas de Matemática, dar-lhes exemplos de coisas que eles [alunos] conheçam, o que eles melhor conhecem é o seu ambiente. [...]

Nós devemos conhecer mais ou menos o ambiente onde eles vivem para compreendermos muitas vezes as atitudes que eles têm connosco.
(Entrevista 1)

No que concerne aos seus alunos, Paulo refere que lhes dá aulas pelo segundo ano consecutivo e conhece bem as suas dificuldades. São alunos oriundos de um meio rural, com falta de apoio à aprendizagem por parte dos pais. Possuem, no geral, grandes dificuldades de aprendizagem a nível da Matemática, embora se destaquem positivamente alguns alunos devido a uma melhor preparação pela professora do 1.º Ciclo.

Relativamente ao corpo docente da sua escola, Paulo refere que é um grupo pequeno, mas onde existe muito companheirismo e amizade. Considera muito importante o facto de existir um bom ambiente entre os colegas, havendo um salutar acolhimento, principalmente para os colegas que estão deslocados da sua casa e da sua família, tornando-se mais motivante trabalhar num sítio assim.

Conhecimento da Matemática

Durante os ensinamentos básico, secundário e superior, Paulo afirma ter sido bom aluno de Matemática, tendo mantido por isso uma relação positiva com esta disciplina. Em relação aos seus professores de Matemática, afirma ter tido uns melhores que outros, mas não destaca nenhum em particular.

No que concerne à sua formação inicial, Paulo considera-a adequada do ponto de vista científico, pedagógico e didático, a nível da Matemática e das Ciências da Natureza, apontando como fragilidade única o facto de a disciplina de Prática Pedagógica, ou seja, o estágio, ter iniciado apenas no segundo ano do seu curso e ter tido continuidade ao longo do quarto ano. Na perspectiva do professor, a Prática Pedagógica deveria ter começado logo no primeiro ano e ter-se prolongado ao longo dos quatro anos. Paulo não concebe o facto de a aprendizagem das disciplinas teóricas relacionadas com a Pedagogia e Educação não possuírem, desde logo, uma interacção com a prática, com o terreno:

[...] Para mim, a única fragilidade que encontrei foram os problemas que, por vezes, surgem nas parcerias entre as Escolas Superiores de Educação e as escolas para a Prática Pedagógica [...] eu acho que nós devíamos começar logo a Prática Pedagógica no primeiro ano, é por aí que a gente devia começar, pois estamos a falar de Psicologia Educacional, Fundamentos da Educação e isso tudo, que são coisas que se falam logo no início dos cursos, porque não experimentar logo? Porque é que estamos a dar só teoria e não vamos ver na prática? (Entrevista 1)

A sua opinião relativamente à adequação do conhecimento facultado pela formação inicial manteve-se inalterável ao longo do estudo, pois Paulo, mesmo após a sua conclusão, continuou a considerar, tal como no início, que o conhecimento não foi em nenhum momento insuficiente, ao referir: “Acho que é suficiente!” (Entrevista 2).

Conhecimento dos alunos e seus processos de aprendizagem

Paulo atribui uma das causas do insucesso na disciplina de Matemática, ao facto de o ensino hoje em dia apelar menos ao desenvolvimento da memorização que outrora,

e este aspecto é visível pelo facto de a maioria dos seus alunos não saber a tabuada, como refere:

[...] eu penso que eles trazem como dificuldade é a questão da memorização, eles treinam muito pouco a memorização. Não consigo compreender que os alunos cheguem ao 2.º Ciclo e não saibam absolutamente nada de tabuada. (Entrevista 1)

Outra razão para o insucesso generalizado dos alunos a Matemática é o facto destes não se interessarem pela disciplina devido à imagem negativa que a sociedade em geral possui relativamente à mesma, acabando os alunos por se refugiarem um pouco nesta justificação e serem um pouco desculpabilizados pelos pais:

Um problema que também existe hoje em dia é os alunos não se interessarem minimamente pela Matemática e depois isso acaba por ser muito complicado para nós. [...]
 Porque ouvem sempre dizer que a Matemática é um problema, e isso tudo, porque é que não há-de ser um problema para eles? [...]
 Muitas vezes os pais, eles vêem na televisão, cada vez se ouve mais na televisão que lá estão os resultados negativos nos exames nacionais, os piores são os de Matemática. Depois eles acabam por se refugiar aí, às vezes até como desculpa para dar aos pais: “A Matemática é difícil!”.
 (Entrevista 1)

Paulo, nas suas aulas, para conseguir lidar com as diferenças dos alunos, costuma colocar sempre alunos com dificuldades ao lado de bons alunos, pois considera importante e enriquecedora, a vários níveis, a partilha que pode existir quer para os alunos que têm que auxiliar, quer para os que são auxiliados pelos colegas.

Para Paulo, a aula preferida dos alunos é uma aula em que eles estejam a manipular objectos, pois não gostam muito de escrever.

Conhecimento do currículo

Para Paulo, a Matemática deveria constar em qualquer currículo até ao décimo segundo ano de escolaridade, independentemente da área vocacional que os alunos seleccionam no décimo ano. Embora com um grau de exigência maior para os alunos

das áreas científicas, considera que todos os alunos devem aprofundar um pouco de tudo na Matemática, pois mais tarde podem necessitar desses conhecimentos.

Considera que os objectivos do ensino-aprendizagem da Matemática mudaram. Antigamente, os objectivos da Matemática estavam traçados consoante a profissão que se ia seguir, considerando que a Matemática nessa altura era mais rigorosa e o nível de exigência era maior:

Embora a Matemática agora continue a ser a mesma com alguns avanços, que é normal, mas o nível de exigência que é dado, actualmente à Matemática é muito menor do que era dado antigamente. A gente agora vê muita gente, e é por isso que eu falo no nível de exigência, vê muita gente a entrar na universidade que não sabe fazer um cálculo, um cálculo simples. (Entrevista 1)

A importância dada outrora à memorização e aos cálculos em Matemática é evocada por Paulo como algo que ainda se devia praticar hoje em dia, sob pena de se estar a exigir cada vez menos aos alunos e de eles não saberem tanto como sabiam os alunos de antigamente:

Professor: Pelo menos pelo que os meus pais normalmente me dizem, antigamente eles tinham que saber aquilo de uma ponta a outra...

Investigadora: Os cálculos?

Professor: Os cálculos todos, as tabuadas... um pouco de tudo aquilo que davam... tinham que saber mesmo aquilo, para serem bons alunos. Actualmente não se exige tanto.

Investigadora: Consideras que actualmente ao não se dar tanta importância ao cálculo está a exigir-se menos?

Professor: Sim, até porque um nono ano actual corresponde a um quinto ou sexto ano há uns anos atrás. (Entrevista 1)

Relativamente aos documentos oficiais, Paulo refere que baseia a sua prática no Programa de Matemática e nem tanto no Currículo Nacional. Refere que o Programa e o Currículo não estão bem articulados, porém não consegue justificar porquê.

O professor diz que gostaria de fazer mais investigação com os seus alunos, mas não o faz porque, no final, o que lhe exigem é o cumprimento do programa:

Normalmente baseio-me no programa... porque também é das coisas que nos exigem, infelizmente! Se muitas das vezes não trabalho mais a investigação com eles é porque no fim o que me é exigido é o programa. (Entrevista 1)

No início do estudo, Paulo afirmou não conhecer ainda o Programa de Matemática recentemente publicado, tendo apenas analisado a proposta quando este estava em fase de discussão pública, referindo que esta não fugia muito àquilo que o seu departamento põe em prática, não lhe reconhecendo grandes alterações relativamente ao programa anterior.

Ainda não reparei no novo, embora pela proposta ... aquilo até não fugia muito do que nós, actualmente, já fazemos na escola em termos de propostas de actividades, a maneira como inserimos aquilo nos vários anos curriculares. Eu penso que ele não mudou muito [o Programa de Matemática publicado em 2007]. (Entrevista 1)

Paulo afirma fazer um seguimento lógico do programa, efectuando-lhe algumas alterações, considerando importante o seu cumprimento:

Muitas vezes salto as coisas, acho que... tento seguir uma sequência daquilo que é lógico na Matemática, não andar a pular ou estar a fazer uma coisa e depois ir dar uma totalmente diferente e depois voltar ao antigamente.

[...]

Penso que é importante cumpri-lo, mas não o sigo tal e qual como está, tanto mais que nós, volta e meia, estamos a saltar do volume 1 para o volume 3 e depois para o 2, embora agora eu ache que as editoras se estão a importar mais com uma sequência lógica na Matemática que o próprio Governo. (Entrevista 1)

O docente considera que o Programa de Matemática do 2.º Ciclo deveria sofrer algumas alterações, nomeadamente em relação à sequência dos conteúdos, pois existem unidades que se repetem na íntegra nos 5.º e 6.º anos de escolaridade, sem que se acrescente, de um ano para o outro, nada de significativo. Outra alteração que Paulo faria seria retirar alguma complexidade ao nível de algumas unidades, pois considera-a elevada para a faixa etária dos alunos, para libertar mais tempo para outro tipo de actividades:

Sim, trocava a sequência. Evitava, principalmente, a repetição. Eu penso que há no programa, actualmente, nos quinto e sexto anos, conteúdos que se repetem. [...] Por exemplo a Estatística. O que é que traz de novo do quinto para o sexto ano? Eu não vejo lá nada. A nível dos volumes, do quinto para o sexto, já podemos observar no sexto ano um rigor muito mais científico. Embora eu ache que, no sexto, o grau de exigência de alguns problemas com volumes já tem um grau de exigência demasiado elevado para a idade deles. Eu retiraria algum grau de dificuldade nisso e apostaria noutras coisas mais de investigação.

[...] há livros, e a gente conhece, há aqueles que infelizmente... há professores que não só seguem à risca, como aquilo que está no livro deles é para utilizar tudo. Há pessoas que falam de volumes já, e falam de volumes de qualquer sólido geométrico, incluindo o cone, a esfera. Eu acho que isso no sexto ano não tem muito sentido.

Eu libertaria esse espaço para uma coisa mais de investigação deles, ou seja não colocava uma coisa nova, dava era mais tempo a alguns conteúdos. (Entrevista 1)

Paulo refere que há professores que assentam a sua prática no seguimento do manual; no seu caso, refere seguir o manual, com alterações na sequência dos conteúdos. Nas suas aulas, privilegia o manual para a resolução de exercícios, pois considera que é importante a sua valorização, uma vez que os alunos o compram:

Normalmente, sigo-o fazendo sempre aquelas alterações em relação à sequência das coisas. A importância maior que dou ao manual e na sociedade que temos actualmente, embora o ensino que eu privilegio com eles seja eles irem à descoberta das coisas, acabo depois sempre por ir um pouco ao encontro do manual deles. Na sociedade de hoje existe muita gente com dificuldades, eu penso que é importante nós darmos a noção ao aluno que o manual não serve só para eles o carregarem às costas, e eles não são nada baratos, para o professor não os utilizar [...] mas em termos de exercícios privilegio sempre o manual porque se eles o compraram devem sempre utilizá-lo! (Entrevista 1)

De facto, para Paulo, as fronteiras entre o manual e o programa são um pouco ténues, pois no discurso do professor pode verificar-se que este leva muito a sério algumas das propostas do manual. Para além disso, refere por vezes “a gente normalmente usa o manual”.

As orientações programáticas e curriculares que Paulo considera importantes para um ensino da Matemática de qualidade assentam na premissa de que devem ser os alunos a descobrir e a experimentar aquilo que lhes quer ensinar. No entanto, o seu discurso é pouco consistente no que se refere ao tipo de tarefas que utiliza para esse efeito: umas vezes destaca que utiliza tarefas de investigação e exploração e outras diz que utiliza os problemas:

Eu acho que se forem eles próprios a descobrir e a experimentar aquilo que realmente está ali para eles aprenderem acho que conseguimos sempre melhores resultados. [...]

Normalmente é com problemas.

Às vezes chego ao pé deles com um problema, ou com um material manipulável e outras vezes até é com uma frase, quando comecei a parte dos Quadriláteros até comecei com aquela frase para eles explicarem, que

vinha nas Provas de Aferição: “Todos os quadrados são rectângulos, mas nem todos os rectângulos são quadrados”, coloquei-lhes a frase no quadro... começámos assim a parte dos quadriláteros. (Entrevista 1)

Isso é assim, eu em termos da aprendizagem de um determinado conteúdo ou de uma determinada definição, dou-a através de uma actividade de descoberta ou de uma investigação. (Entrevista 1)

Quanto à calculadora, refere não simpatizar muito com o uso desta tecnologia na sala de aula, pois, segundo o mesmo, esta impede-o de verificar se os alunos aprenderam o que pretendia ensinar-lhes e impossibilita-o de combater o facto de os alunos não saberem realizar cálculos. Utiliza-a apenas por ser uma imposição do programa de Matemática, não lhe reconhecendo quaisquer virtudes.

A calculadora utilizo só em último caso, pois eles vão necessitar dela para as Provas de Aferição e necessitam de saber utilizá-la, mas só em último caso! Prefiro que eles façam os cálculos, e se eles estão a utilizar a calculadora é porque não sabem fazer os cálculos. (Entrevista 1)

A calculadora, embora o programa a exija, eu acabo por utilizá-la, pois temos que ver que eles têm que saber utilizar uma calculadora, mas utilizo-a o mínimo possível, pois se eu tento combater, um pouco, eles não sabem fazer cálculos. Se lhes dou uma calculadora para a mão, acabo por não ficar a saber se eles, realmente, estão a utilizar aquilo que eu lhes estou a ensinar, ou simplesmente a única coisa que estão a fazer é a carregar nos números na calculadora. (Entrevista 1)

Assim, utiliza apenas a calculadora como uma espécie de preparação para as Provas de Aferição, pois caso contrário, como sublinha, os alunos podem realizar um uso incorrecto da mesma, por exemplo pelo facto de desconhecerem que certas calculadoras não respeitam a prioridade das operações:

É assim, é importante, e quer queiramos quer não, temos que a utilizar, eles têm que a saber utilizar, torna-se importante para eles, pois quando chega um exame nacional eles têm que saber utilizar a calculadora [...] Uma calculadora muitas vezes tem coisas que eles próprios não sabem. A questão que nós vimos na tabuada as calculadoras que já têm na sua memória as regras da expressão numéricas e outras que não têm e eles chegam a um exame pensam que aquilo está bem porque foi a calculadora que deu aquele resultado e afinal a calculadora não tinha aqueles pré-requisitos! (Entrevista 2)

Por conseguinte, considera importante que os alunos saibam utilizar a calculadora; no entanto, refere que estes devem saber em que situações é pertinente o

seu uso, sob pena de a sobreutilizarem em situações em que outro tipo de cálculos se torna mais adequado:

Eu penso que é importante saber utilizar a calculadora, agora também temos que ter outro papel, dar-lhes a entender que a calculadora serve para uma determinada situação, não é para todas as situações, senão então eles aí deixam de querer saber fazer uma conta e chegamos ao ponto de ter alunos que vão à calculadora para saber quanto é $1+1$! Depois tornam-se tão dependentes da calculadora... isso também é mau... Mostrar aos alunos que a calculadora serve para... e trabalha de uma determinada maneira e serve para algumas coisas, não é para todas, não vamos estar sempre a usar calculador!. (Entrevista 2)

Não obstante Paulo gostar pouco de utilizar a calculadora e referir que faz pouco uso dela nas suas aulas, há situações em que reconhece que o seu uso é importante, principalmente em situações em requerem a resolução de cálculos muito morosos e que podem de algum modo condicionar o desempenho dos alunos na tarefa, sendo esta a funcionalidade (e virtude única) que lhe atribui:

Olha por exemplo como eles vêm preparados e por experiência de já ter alguns 5.º anos quando se trata de exercícios que requerem muito cálculo e muita operação, por vezes acaba-se por se perder um pouco numa tarefa com eles, se os obrigarmos a fazer esse cálculos morosos todos, depois nem todos o sabem fazer e chegam ali “Ah eu não sei fazer isto! Vamos esperar que alguém faça para me dar o resultado!” (Entrevista 2)

Paulo não sente necessidade de realizar uma preparação especial dos alunos para as Provas de Aferição, pois refere que o seu trabalho de sala de aula é na base da investigação e dos problemas, alguns retirados de provas já realizadas. Nas fichas que realiza com os alunos, também costuma colocar questões retiradas das referidas provas, não sentindo por isso necessidade de realizar uma preparação suplementar, a não ser com a calculadora.

Conhecimento do processo instrucional

Para planificar as suas aulas, Paulo referiu no início do estudo que costuma fazer um plano mental daquilo que pretende que os alunos retenham no final de cada unidade, parecendo dar importância primordial aos conteúdos matemáticos:

Em primeiro lugar, eu acho que é importante nós traçarmos, no início de cada unidade, pelo menos, o que é para nós importante que eles retenham daquilo ao longo das 7 ou 8 sessões ou mesmo de 3, 4 sessões... o que eu tenho em mente que eles saibam quando nós acabarmos esta unidade. Normalmente é um conceito ou outro que eles têm que saber e... (Entrevista 1)

Assim, outra ideia que Paulo considera importante passar para os alunos é a de que a Matemática não se estuda como as outras disciplinas, compreende-se e treina-se, pois se os alunos mecanizarem um procedimento sem o compreender, mais tarde esquecer-se-ão dele:

Olha uma das competências que eu também gosto de desenvolver neles é a questão de eles se aperceberem que a Matemática não se deve estudar, deve-se compreender e treinar, eu acho que é o fundamental da Matemática. A Matemática não é uma disciplina como as Ciências e como a História em que se estudam ali definições, se estudam matérias para depois se utilizarem e mais nada. Eu acho que o mais importante na Matemática é que os alunos percebam aquilo que estão a fazer. Têm que compreender porque é que aquilo é assim, não é o professor chegar lá e dizer: “isto é assim porque isto faz-se desta maneira”, e eles então mecanizam aquela maneira e então é assim. Chegamos a uma coisa em que temos ali uma operação para fazer, sabemos mecanicamente que aquilo se faz por aquele processo, agora mais tarde eles acabam por perder essa noção, que mecanismo é que devem utilizar e se nós fizermos com que eles compreendam porque é que aquilo é assim, isso aí depois não lhes foge do cérebro. (Entrevista 1)

A aula ideal para Paulo era a aula em que os alunos, perante um problema que lhes colocasse, o compreendessem e resolvessem sem dificuldade e quando chegassem ao fim se questionassem se a solução a que chegaram responde de facto ao problema. O espírito crítico é uma das competências que Paulo diz considerar muito importante desenvolver nos alunos.

[...] Terem a competência de... perante um problema, saber pelo menos compreendê-lo e tentar resolvê-lo, não chegar ... por exemplo, eles

muitas vezes têm um problema, tentam resolvê-lo segundo uma ideia deles, chegam a um resultado e pronto, acabou. Acho que há aí uma competência que é importante desenvolver neles, que acho que é eles não fazerem isso, saberem questionar, saberem questionar a sua resposta “será que aquilo está certo?” “será que realmente é aquilo que a gente queria?”, “será que nós se fôssemos por outro caminho não íamos chegar ao mesmo resultado?” (Entrevista 1)

Síntese

Paulo refere ser um homem realizado, por fazer o que gosta e o que sempre quis fazer. Considera-se um bom professor e é assim que pensa que os seus colegas e alunos o vêem. Para este professor, é muito importante o aspecto relacional, pois é um homem que preza muito a qualidade das relações que estabelece quer com os seus colegas, quer com os seus alunos.

Parece ser muito importante para si a opinião e a aceitação dos alunos em relação aos conteúdos que estão a ser leccionados. Por conseguinte, a disciplina que diz gostar mais de leccionar é a disciplina de Ciências da Natureza ao sexto ano de escolaridade pelo entusiasmo que os alunos manifestam.

A disciplina que considera ensinar melhor é a Matemática por esta ser, na sua opinião, uma ciência mais estática e mais “rigorosa”, não obstante considerar que é uma disciplina mais difícil de preparar, conduzir e avaliar devido à imagem negativa que os alunos possuem da mesma.

No que concerne à sua formação inicial, considera-a adequada do ponto de vista científico, didáctico e pedagógico, apontando como fragilidade única o facto de a Prática Pedagógica não ter início no 1.º ano do curso e acompanhar os anos seguintes. Assim, considera o conhecimento proporcionado pela formação inicial suficiente para o desenvolvimento da sua prática diária.

Refere que os seus alunos apresentam no geral dificuldades a Matemática, cujas causas atribui ao facto de o ensino hoje em dia apelar menos à memorização que antigamente (por exemplo os seus alunos vieram do 1.º Ciclo sem saber a tabuada), e

também ao facto de a sociedade possuir uma imagem negativa generalizada em relação à Matemática, perspectivando-a como uma disciplina difícil, e acabando os alunos por se refugiarem nesta ideia, sendo por vezes desculpabilizados pelos pais.

Para Paulo, o ensino da Matemática hoje em dia é menos exigente e rigoroso do que era antigamente, pois apelava-se mais à memorização e aos cálculos; actualmente, descuidam-se um pouco desses aspectos, o que, segundo o docente, é de lamentar, pois os alunos não sabem tanto como sabiam outrora.

O professor refere basear a sua prática no programa de Matemática o qual procura cumprir, fazendo-lhe algumas alterações na sequência dos conteúdos. Refere que o programa deveria sofrer algumas alterações no que se refere ao facto de existirem conteúdos que se repetem no 5.º e 6.º anos, sem que se acrescente nada de significativo de um ano para o outro, e no grau de exigência que têm alguns exercícios de certos conteúdos programáticos. Nota-se alguma dificuldade em estabelecer uma fronteira entre o programa e o manual.

O manual parece ser muito valorizado por este professor, não obstante este referir que apenas o utiliza para a realização de exercícios. Neste aspecto, o seu discurso oscila um pouco, pois se às vezes refere “a gente normalmente usa o manual”, outras refere que as situações de aprendizagem nas suas aulas partem sempre de investigações, explorações e também problemas.

Parece não considerar que as tarefas de investigação façam parte do programa, uma vez que refere que gostaria de realizar com os alunos mais actividades deste género, mas o tempo é pouco e no final o que lhe exigem é o cumprimento do programa.

A calculadora é um instrumento que o professor dispensa nas suas aulas, pois impede-o de desenvolver as competências de cálculo nos seus alunos e estes tendem a realizar um uso pouco proveitoso da mesma. Assim, utiliza-a apenas em situações muito pontuais, como seja a realização de cálculos morosos e a preparação para as Provas de Aferição, pois refere que os alunos devem saber utilizar a calculadora, uma vez que é exigido, pois esta apresenta algumas limitações que os alunos devem conhecer.

Para planificar as suas aulas, Paulo faz um plano mental do que considera importante que os alunos retenham, centrado sobretudo nos conteúdos.

A aula que Paulo parece valorizar é a aula em que os alunos perante um problema o consigam resolver de forma autónoma e cheguem à solução sem dificuldades, sendo críticos em relação à mesma.

Paulo e as investigações na sala de aula

Nesta secção, será realizada uma análise relativa ao trabalho do professor inerente ao desenvolvimento de tarefas de investigação nos seus diferentes momentos: planificação e condução. Assim, serão apresentados dados acerca da forma como o professor preparou as suas aulas e a forma como as conduziu nas fases de introdução, desenvolvimento e discussão.

Paulo já havia tido contacto, embora de forma breve, com as tarefas de investigação, no âmbito do Programa de Formação Contínua da Matemática. No entanto, afirma nunca ter desenvolvido nas suas aulas investigações nos moldes como foram abordadas neste estudo.

Ao longo deste estudo, Paulo manteve uma atitude colaborativa e receptiva, no entanto aparentava reticências em relação ao facto de este lhe poder trazer mudanças ou aprendizagens significativas.

A planificação das aulas com as tarefas de investigação

Foi solicitado ao professor que preparasse, para cada aula, um guião pré-estabelecido onde indicasse a tarefa seleccionada, bem como os objectivos que pensava vir a cumprir com o desenvolvimento da mesma, as questões que iria colocar aos alunos, a forma como pensava conduzir a aula, as descobertas e conclusões susceptíveis de os seus alunos realizarem e o modo como iria avaliar o seu trabalho. Posteriormente, após o referido guião ser enviado à investigadora, era analisado pela mesma e pela sua orientadora e discutido com o professor antes da aula.

Face à ocupação das agendas pessoal e profissional de Paulo, os guiões foram enviados com pouca antecedência pelo que a sua discussão só foi possível realizar-se no serão anterior ao dia de cada aula observada.

A selecção das tarefas. Paulo foi seleccionando as tarefas à medida que era necessário planificar cada uma das aulas observadas. Assim, as suas cinco tarefas eleitas

foram, pela ordem em que ocorreram as aulas, as seguintes: “Exploração com números”, “Travessia do rio”, “Cubos, cubos e mais cubos” “Escadas” e “Um outro olhar sobre a tabuada” (Anexo 3).

A selecção da tarefa “Exploração com números” deveu-se ao facto de ser de todas a mais familiar para o professor e por ser a que constava de um guião ilustrativo (Anexo 5) fornecido pela investigadora aos professores para que estes pudessem ter uma ideia de como se pretendia que planificassem as suas aulas. Paulo aproveitou assim para experimentar esta tarefa.

A tarefa seleccionada para a segunda aula observada foi “Travessia do rio” por se encontrar a terminar a leccionação da unidade Estatística e ir começar a leccionar a unidade Probabilidades.

Relativamente à escolha da tarefa “Cubos, cubos e mais cubos”, esta deveu-se ao facto de ir avaliar as unidades leccionadas anteriormente, Estatística e Probabilidades, e ir começar a leccionar a Geometria – área e perímetro do círculo e volumes de prismas.

A tarefa que se seguiu foi “Escadas”. Quando questionado acerca do motivo da escolha desta tarefa, o professor respondeu que esta serviria para os alunos se aperceberem que existem vários tipos de regularidades na Matemática e que se pode obtê-las de diferentes maneiras, que à primeira vista não são facilmente observáveis, mas depois acaba por se ver que “está lá qualquer coisa”.

A quinta e última tarefa seleccionada foi “Um outro olhar sobre a tabuada”. Paulo refere ter seleccionado esta tarefa por esta ser menos exigente do ponto de vista dos conhecimentos matemáticos que mobiliza, pois no final do ano lectivo, quando seria aplicada aos alunos, estes estariam cansados. Assim, como a maioria dos seus alunos não sabe a tabuada, esta tarefa para além de possibilitar o que todas as tarefas de investigação permitem, que é “descobrir algum coisa”, permite também aos alunos poderem olhar para a tabuada de outra forma, pois, como constata o professor, existem regularidades curiosas que nunca são exploradas por eles. No entanto, considera que esta tarefa é mais adequada para um 5.º ano de escolaridade para que os alunos possam verificar que existem outras formas de aprender Matemática para além da mecanização:

Investigadora: “Porque é que seleccionaste esta tarefa?”

Professor: “Para já, por causa da altura do ano que é. Se lhes desse assim algo... está bem que qualquer investigação é sempre boa para eles tentarem descobrir alguma coisa. Mas motivá-los para uma actividade

nesta altura do ano... não podia ser uma actividade que requeresse muito conhecimento! [...] E depois para eles verem também que a tabuada tem o seu interesse, se nós olharmos para ela não só como uma coisa de estar ali a fazer a tabuada até ao 10 e pronto, para a gente decorar aquilo! Para eles saberem que aquilo às vezes tem coisas curiosas no meio dela que nunca são exploradas ou que raramente são exploradas, mas que têm o seu interesse!” (Reflexão aula 5)

Em suma, o principal critério utilizado para Paulo para a selecção das tarefas foi o da possibilidade da sua ligação aos conteúdos que já tinha leccionado no presente ano lectivo ou no anterior, ou que viria ainda a leccionar. No entanto, considera que nem sempre é possível encontrar uma tarefa de investigação que se relacione com alguns dos tópicos da matéria:

[...] Nem sempre a gente consegue arranjar ou criar algum produto de investigação que coincida com a matéria em si, mas havendo possibilidade de criar situações que tenham a ver um pouco com a matéria deste ano ou até mesmo do ano anterior... [É preferível]. Procurei um pouco actividades que fossem dar resposta a coisas que eles já tinham dado ou que iriam dar, tanto do 5.º como do 6.º ano... (Entrevista 2)

Para além da possibilidade de enquadramento das tarefas nos conteúdos programáticos, Paulo teve também a preocupação de que as tarefas fossem ao encontro dos gostos e dos interesses da sua turma e à sua faixa etária, pois refere que existem tarefas que funcionam muito bem com uns alunos e com outros não. Por conseguinte, considera necessário que o professor conheça bem os seus alunos na altura de escolher tarefas e antever, aquando da planificação, até onde estes poderão chegar:

Eu acho que o principal é mesmo o grupo de alunos que se deve ter à frente. É assim, uma actividade pode ser bastante interessante para um grupo de alunos e para o outro grupo de alunos não funcionar, porque se nós conhecermos bem o grupo-turma, conseguimos mais ou menos, quando estamos a fazer a planificação de uma actividade deste género, prever quais serão as possíveis respostas deles. [...] Primeiro o grupo-turma, a faixa etária [...] ter em conta a idade deles na escolha... mais o seu enquadramento no programa se esse enquadramento é possível ou não [...] (Entrevista 2)

De todas as tarefas seleccionadas, Paulo refere ter gostado bastante da tarefa “Cubos, cubos e mais cubos”, não obstante os alunos não terem terminado a segunda parte da mesma. Afirma que esta tarefa foi importante, nomeadamente por este se ter

podido aperceber das dificuldades de visualização espacial que os seus alunos possuem, sendo esta uma preocupação que vai ter presente futuramente:

[...] Foi a dos Volumes [Cubos, cubos e mais cubos] a questão de irmos ver que realmente eles têm dificuldade e há uma coisa que.... Este ano queria ver se apertava mais com eles na visualização espacial das coisas, porque eles naquela parte tiveram dificuldade em ver quantas cores é que o cubo tinha pintado ou não e... mas gostei muito dessa! (Entrevista 2)

No entanto, numa das reflexões realizadas ao longo do estudo, o professor afirmou, já após a realização desta tarefa, que as suas tarefas de eleição eram “Exploração com números” e “Escadas” por considerar que os alunos estiveram muito empenhados e motivados e notar evolução nestes aspectos.

Quanto à tarefa que considera ter sido melhor conseguida por si, afirma ter sido a tarefa “Escadas” e a que menos o entusiasmou a si e aos alunos, pese embora a aceitação tenha sido boa e ter tido um começo mais rápido, foi a tarefa “Um outro olhar sobre a tabuada”.

Relativamente à tarefa preferida dos alunos, afirma ter sido a “Travessia do rio” por tê-los notado muito envolvidos com a mesma, devido ao complemento do jogo.

Papel atribuído à planificação. Para Paulo, uma aula de investigação sem planificação prévia não resulta. Refere que é sempre necessário fazer-se um plano da aula para o professor se orientar, pois, se não o fizer, vai demorar os primeiros 15 ou 20 minutos da aula a compreender a tarefa e os alunos começam a colocar perguntas para as quais este não possui resposta. Assim, podem perder-se elementos bastante importantes da tarefa e esta torna-se mais demorada, pelo facto do professor, ao invés de estar a apoiar os alunos, estar a investigar ao mesmo tempo que eles.

Por conseguinte, o professor deve, durante a planificação, fazer o papel do aluno e antever todas as descobertas a que estes podem chegar, sob pena de estes realizarem descobertas ou darem respostas que, caso o professor não esteja devidamente preparado, se podem perder, sendo que essas ideias poderiam ser elementos de extrema importância para o desenvolvimento da tarefa.

É importante a gente fazer um plano da aula, pelo menos para nós nos orientarmos um pouco lá dentro [...] nós fazermos uma tarefa de investigação sem fazermos planificarmos não dá resultado!

Vamos a um computador, vemos uma tarefa de investigação: “Olha isto é engraçado, tem a ver com a matéria que vou dar amanhã aos meus alunos”, tiro uma cópia para os alunos, chego lá dou-lhes a investigação, é evidente que nós chegamos aos 15 – 20 minutos e andamos um pouco à toa com aquilo e os alunos começam a fazer-nos perguntas e nós, se não tivermos aquilo devidamente preparado, acabamos por ficar à toa e acaba por não dar resultado, acaba por ficar uma actividade quase para eles e para o professor ao mesmo tempo. [risos] Se já tiver feito a planificação prévia disso é muito mais simples [...] Pronto, uma actividade de investigação não se deve prolongar por muito tempo, deve uma duas aulas no máximo e assim poderia prolongar-se por quatro ou cinco ou mais aulas sem necessidade nenhuma e se a pessoa planificar bem as coisas, fizer as suas descobertas, fizer o papel do aluno na sua planificação, estiver com o papel do aluno na sua planificação é muito melhor e cria também outra coisa... muitas vezes os alunos dão-nos respostas que se nós não estivermos devidamente preparados ou não as previrmos antes quando estamos a fazer a planificação, acabamos por perder às vezes até coisas úteis deles. (Entrevista 2)

O conteúdo das planificações. Os guiões realizados pelo professor apresentaram de uma tarefa para a outra aspectos comuns.

No que concerne aos objectivos a atingir com o desenvolvimento da tarefa, verifica-se que o professor considerou existirem sempre objectivos comuns a todas elas, como: “Explorar relações entre números e formular conjecturas; Testar, refutar, justificar e generalizar as conjecturas formuladas; Comunicar ideias matemáticas com rigor”. Assim, acrescentou apenas os conceitos necessários que considerou que cada uma delas mobilizava. Pontualmente, houve necessidade de acrescentar alguns conceitos que o professor não indicou, como aconteceu no guião da tarefa número três “Cubos, cubos e mais cubos”, do qual a seguir se apresenta uma parte (Figura 15). Os conceitos sombreados representam aqueles que o professor não considerou e a investigadora sentiu necessidade de incluir:

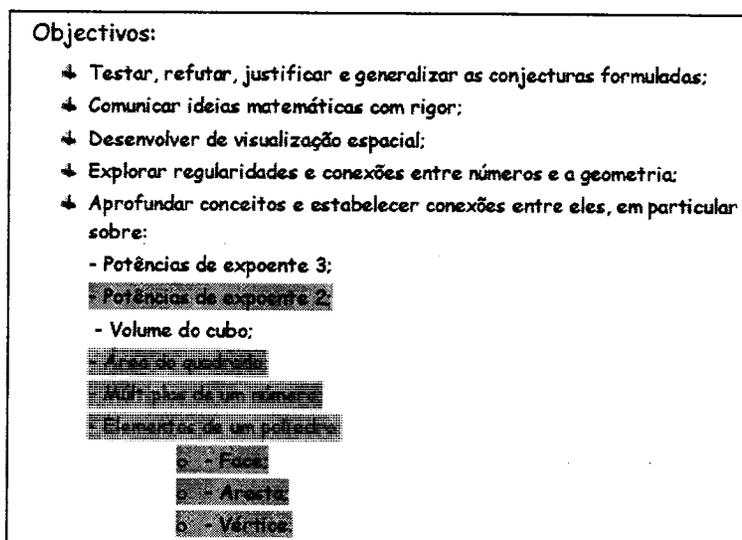


Figura 15: Guião da aula 3 – Tarefa “Cubos, cubos e mais cubos”

Também relativamente à tarefa “Travessia do rio”, houve um aspecto a alterar, que foi o facto de o professor ter colocado nos objectivos que pretendia que os alunos chegassem à definição de probabilidade de um acontecimento. O professor considerava que este aspecto fazia parte do programa, por constar do manual adoptado pela sua escola para o 6.º ano. No entanto, este conceito não faz parte do programa de Matemática do 2.º Ciclo e parecia pouco provável que os alunos chegassem à definição de probabilidade de um acontecimento a partir desta tarefa, sendo mais importante compreender e consolidar outros conceitos como os de “acontecimento certo”, “acontecimento impossível”, “acontecimento provável”, etc., mais importantes para alunos deste nível de ensino.

No que concerne ao material de suporte às tarefas indicado nos guiões, era normalmente o necessário e específico para cada tarefa, bem como o geral: o enunciado escrito, os acetatos e as canetas de acetato para a apresentação à turma, e a calculadora. A calculadora que foi indicada nas tarefas “Exploração com números”, “Escadas” e “Um outro olhar sobre a tabuada”, tendo o professor prescindido do seu uso nas restantes tarefas.

Relativamente às “Questões essenciais a colocar aos alunos”, verifica-se que o professor colocou em todas as tarefas sempre as mesmas questões gerais que servem a todas as tarefas de investigação e que estavam presentes no guião ilustrativo fornecido ao professor no início do estudo, como se pode observar no seguinte guião (figura 16) enviado pelo professor:

Questões essenciais a colocar aos alunos:

- ↓ O que são regularidades?
- ↓ Que regularidades podemos encontrar na actividade? Dá-me um exemplo.
- ↓ Podemos dizer isso de uma maneira mais geral?
- ↓ Essa regularidade verifica-se sempre?
- ↓ Porque é que essa regularidade se verifica?
- ↓ "Achas que essa conjectura está correcta?"
- ↓ "Será que funciona sempre, é válida para todos os casos?"
- ↓ "O que acha o grupo acerca desta conjectura? Todos concordam?"

Figura 16: Guião da aula 5 – Tarefa “Um outro olhar sobre a tabuada”

Assim, na maioria dos guiões, houve necessidade de incluir nesta parte outro tipo de questões mais específicas de cada tarefa para ajudar os alunos a progredir nas mesmas. Apenas no segundo guião enviado, referente à tarefa “Travessia do rio”, o professor formulou questões de carácter mais específico relacionadas com esta tarefa, como se pode observar a seguir (Figura 17):

- ↓ O que é a probabilidade de um acontecimento?
- ↓ Será que todas as somas possíveis tem a mesma probabilidade de sair?
- ↓ Quantos casos possíveis existem?
- ↓ Será que é importante contarmos como dois casos possíveis os seguintes casos:
Dado A - 3 e Dado B - 4 Dado A - 4 e Dado B - 3
- ↓ Existirá alguma tática que se possa utilizar para ganhar o jogo?
Qual?
- ↓ Se colocar todas as minhas peças na casa sete será que irei vencer?
- ↓ Se colocar pelo menos uma peça em cada casa do tabuleiro poderei ganhar?

Figura 17: Guião da aula 2 – Tarefa “Travessia do rio”

No que se refere a este guião, houve necessidade de discutir algumas das questões colocadas pelo professor, aquelas que estão sombreadas no excerto do guião. No que refere à primeira questão “O que é a probabilidade de um acontecimento?”, achou-se que a mesma só faria sentido ser colocada na discussão final se o professor quisesse fornecer alguma informação sobre a definição de probabilidade. Pese embora esta não faça parte do Programa de Matemática do 2.º Ciclo, considerou-se que a sua compreensão por parte dos alunos seria possível. Relativamente à questão “Será que todas as somas possíveis tem a mesma probabilidade de sair?”, considerou-se que, uma vez que os alunos não sabem nem iriam determinar a probabilidade numérica dos acontecimentos, o mais correcto seria reformular a questão para “Será que todas as

somas possíveis têm a mesma possibilidade de sair?”. No que concerne à questão “Se colocar todas as minhas peças na casa sete será que irei vencer?”, considerou-se que esta devia ser reformulada para “Se colocar todas as minhas peças numa só casa será que irei vencer?”, pois estaria a dar-se uma pista bastante directiva aos alunos, já que o sete é a soma que tem mais possibilidades de ocorrer. Ainda relativamente a este guião, houve necessidade de acrescentar as seguintes questões: “Têm alguma conjectura para uma táctica ganhadora?”; “Achas que essa conjectura está correcta?”; “Será que funciona sempre, é válida para todos os casos?”; “O que acha o grupo dessa conjectura? Todos concordam?”; “Como podes convencer os teus colegas de que a tua conjectura é verdadeira?”.

No que refere à metodologia de trabalho, o professor elegeu o trabalho em grupo de quatro alunos, para as tarefas “Exploração com números”, “Escadas” e “Um outro olhar sobre a tabuada”, trabalho em grupos de seis alunos para a tarefa “Cubos, cubos e mais cubos” e trabalho a pares na tarefa “Travessia do rio”.

Para Paulo, a metodologia de trabalho mais adequada para as aulas de investigação é o trabalho em grupo, embora não descarte a possibilidade do trabalho a pares:

Eu acho que o trabalho em grupo é bom para tarefas de investigação. Não quer dizer dependendo da tarefa, algumas penso que dois alunos basta. Em termos de grupo penso que não se deve exceder mais de 4 pessoas. Nós temos turmas grandes, mas se fizermos mais grupos não faz mal nenhum! Fazer mais do que 4 pessoas acho que é muito. [...]

Não porque depois eles acabam por se perder ali entre os 6 há sempre 2 ou 3 que acabam por não fazer. (Entrevista 2)

Refere que os grupos de trabalho não devem exceder os quatro elementos, pois se forem maiores, há sempre dois ou três alunos que se perdem. Na terceira aula, com a tarefa “Cubos, cubos e mais cubos”, o professor formou quatro grupos de seis alunos e verificou que esta dimensão não beneficia o trabalho dentro de cada grupo, pelo contrário, dispersa os alunos e faz com que alguns se percam e desistam.

Quanto ao trabalho individual nas aulas de investigação, Paulo já apresenta mais reservas, pois o papel do professor na prestação do apoio necessário para os alunos avançarem na investigação torna-se mais complicado, já que as turmas são numerosas. Para além disso, os alunos menos autónomos e os que apresentam mais dificuldades

acabam por se desmotivar mais facilmente e desistir, sendo que, como assinala o professor, até os melhores podem bloquear acabando a tarefa por não resultar.

No que concerne aos grupos formados ao longo das aulas observadas, Paulo considera-os equilibrados, não obstante terem sido realizados no momento, ora por ordem alfabética ora fazendo grupos só com os alunos de números pares ou ímpares. No entanto, refere que teve sempre a preocupação de criar grupos heterogêneos, em que os alunos com mais dificuldades tivessem sempre no seu grupo alunos melhores que os apoiassem e “puxassem por eles”. Outra preocupação foi a de ir diversificando os grupos para que os alunos não se cansassem de trabalhar sempre com os mesmos colegas e não criassem “vícios”:

Quis diversificar um bocadinho, mas também foi... tive a preocupação mesmo quando eles estavam lá a colocar os grupos, tive pelo menos a preocupação numa coisa, na questão dos alunos mais fracos ficarem sempre num grupo onde houvesse um bom aluno que puxasse por eles... agora de resto, acabou por não ... eu penso que eles trabalhem sempre com o mesmo grupo acaba por criar vícios que nós não queremos... que é um trabalhar e o outro pouco trabalhar ou nada e nós sabemos que há sempre [...] Sim, em termos da capacidade de cada um eles estavam equilibrados...[...] (Entrevista 2)

Quanto à “Forma como pensa conduzir a aula”, verifica-se que o professor manteve a estrutura característica das aulas de trabalho de investigação, não tendo realizado alterações significativas ao conteúdo do guião ilustrativo, a não ser no caso de algumas tarefas, em que na parte da discussão retirou alguns aspectos essenciais desta fase, talvez por não lhe atribuir significado e/ou importância.

No que se refere à distribuição dos noventa minutos pelas diferentes fases da aula, existe algumas regularidades neste aspecto: Paulo destinou sempre 10 minutos para a fase da introdução; a fase à qual na maioria das vezes destinou mais tempo no guião, por considerar mais importante, foi à fase da exploração da tarefa; à fase da discussão foram atribuídos menos tempo e menos importância.

A parte do guião referente à “Síntese do conhecimento matemático aprendido”, em que o professor indicava as descobertas susceptíveis de os alunos realizarem, foi a parte do guião que parece ter merecido maior atenção da parte de Paulo, não obstante, pontualmente existirem algumas fragilidades do ponto de vista científico, como será

discutido no ponto seguinte. Os guiões não evidenciam preocupações para com a justificação das ideias matemáticas e a generalização (Figura 18).

Síntese do conhecimento matemático aprendido:
 Notar que nesta tarefa resultam conhecimentos que podem ser generalizados:
 ↓ Conceito de potência;
 ↓ Multiplicação sucessiva;
 ↓ Os números 1, 8, 27, 64 ... são os cubos de 1, 2, 3, 4 ... respectivamente;

Figura 18: Guião aula 3 – “Cubos, cubos e mais cubos”

A discussão das planificações com a investigadora. A discussão das planificações era normalmente realizada no serão anterior à realização da aula, uma vez que o professor costumava enviar o guião no dia anterior. Assim, o professor fazia o favor de se deslocar a casa da investigadora, muitas vezes a horas tardias, para executarem esta tarefa.

Durante a mesma, a investigadora questionava o professor acerca dos motivos que o levaram à selecção da tarefa em causa e as expectativas que este possuía em relação à mesma. Posteriormente, passava-se à análise do guião enviado pelo professor, depois deste ter sido analisado e melhorado quando necessário pela investigadora e pela sua orientadora.

Na parte inicial desta fase, o professor revelou algumas vezes ansiedade em verificar se existiam muitas alterações ao guião por ele enviado, guião esse que a investigadora costumava colocar em cima da mesa de trabalho para ser discutido, e o facto de haver poucas alterações deixava-o satisfeito.

Posteriormente, analisava-se cada uma das partes do guião, dando especial atenção àquelas onde existiam reparos e/ou alterações a fazer, nomeadamente as partes referentes às “Questões essenciais colocar aos alunos” e “Síntese do conhecimento matemático aprendido”. Em geral, o professor nunca contestou nenhuma das sugestões realizadas pela investigadora e pareceu ter-se esforçado sempre no sentido de as pôr em prática. Durante a discussão das planificações, existiu um único episódio referente à tarefa “Travessia do rio”, em que o professor não esteve de acordo com a investigadora, como será discutido no ponto seguinte.

As alterações realizadas aos enunciados das tarefas e as suas intenções também eram debatidos nesta fase. O professor realizou algumas adaptações ao enunciado da tarefa “Cubos, cubos e mais cubos”, nomeadamente retirando a tabela da primeira parte, por considerar que assim estava a conduzir-se os alunos por descobertas a nível do terceiro ciclo e seria mais interessante observar as várias formas de organização a que os grupos iriam chegar. Por conseguinte, tal como refere o professor Paulo, os alunos deveriam ser capazes de organizar os dados numa tabela, pois este aspecto foi bastante trabalhado aquando do estudo da unidade anterior – Estatística, possuindo por isso expectativas elevadas em relação a este aspecto.

No que se refere à condução da aula, a investigadora considerou importante reforçar a ideia de que o professor devia dar mais tempo para a discussão, pelo facto de os alunos terem de discutir e debater as suas ideias e terem de justificá-las, referindo também que o professor deveria insistir mais no “porquê” e que fossem os alunos a validar as ideias apresentadas para que houvesse de facto discussão entre eles, ou seja que deixasse esta fase da aula a cargo dos alunos:

Professor: A discussão... os quarenta minutos depende também do que eles... porque se eles acabarem por descobrir só três ou quatro coisas, quarenta minutos, chega ali uma altura...

Investigadora: Tens que insistir no “porquê”, têm que justificar sempre. Porque é que a soma de dois números consecutivos dá sempre ímpar, que é porque eles estão sempre a somar um par com um ímpar e por isso é que vai dar ímpar, não é? Pronto, tentar que eles justifiquem sempre! Depois tentar que eles vão para a discussão sem terem as coisas corrigidas, mesmo que tenham coisas mal, não faz mal! Para depois eles próprios e os outros grupos, tentarem corrigi-los, percebes? Isso é que é interessante! Eles se corrigirem uns aos outros para haver mesmo discussão, porque se eles já vão com coisas corrigidas para a discussão, não há discussão nenhuma.

Professor: Pois...

Investigadora: Não há discussão, eles assim vão só apresentar... por isso é que a discussão também é importante, para eles perceberem que erraram e porque é que erraram.

Professor: O.K.

Investigadora: E deixares que sejam mesmo eles a discutir...

Professor: [sorri]

Investigadora: Eu sei que é difícil para nós professores... mas tentar que sejam mais eles a discutir.

Professor: Vamos ver... (Preparação aula 4)

No entanto, não obstante as observações da investigadora em relação à fase de discussão, o professor parece não ter valorizado suficientemente a sua mensagem, provavelmente por conceber a discussão final da aula como a correcção das conclusões apresentadas pelos alunos.

Preocupações e dificuldades. Ao longo do estudo, quando questionado acerca das dificuldades sentidas, Paulo sempre referiu não ter tido dificuldades na planificação das diferentes tarefas de investigação. A principal preocupação para Paulo nesta fase, como sublinhou, foi “estudar a tarefa em si”. Este aspecto foi visível pelas características dos guiões enviados, cuja principal preocupação era a parte científica. Verifica-se todavia que a dedicação à parte da planificação mais importante para Paulo nem sempre foi plena, por lhe escapar ocasionalmente algumas descobertas importantes e/ou apresentá-las de uma forma pouco explícita ou incorrecta do ponto de vista matemático.

Foi o que aconteceu no guião enviado da segunda aula assistida (Figura 19), acerca da tarefa “Travessia do rio”, em que o professor fazia a síntese do conhecimento aprendido pelos alunos de uma forma muito geral, não indicando as várias possibilidades e/ou a probabilidade numérica de cada um dos acontecimentos, apenas referindo o tipo de acontecimentos que podiam advir da mesma e o seu significado:

Como faz a síntese/ conclusão sobre o conhecimento matemático aprendido:
 Notar que nesta tarefa resultam conhecimentos que podem ser generalizados:

- ↪ Conceito de probabilidade;
- ↪ Um acontecimento certo é um acontecimento que ocorre sempre;
- ↪ Um acontecimento improvável é um acontecimento que tem uma probabilidade muito pequena de acontecer;
- ↪ Um acontecimento equiprovável é quando temos dois acontecimentos distintos que tem a mesma probabilidade de acontecer;
- ↪ Um acontecimento impossível é um acontecimento que não pode ocorrer.

Figura 19: Guião da aula 2 – Tarefa “Travessia do rio”

Aquando da discussão do guião, no dia antes da aula, a investigadora apercebeu-se que o professor estava a considerar apenas 21 casos possíveis, ao invés de 36, pois não estava a considerar como acontecimentos diferentes, por exemplo, “sair soma 2+3” e “sair soma 3+2”, de onde resultaria que as somas 6, 7 e 8 tinham igual probabilidade de sair no lançamento de dois dados (o que está errado do ponto de vista matemático,

pois a soma 7 é a que tem mais possibilidades de acontecer e, conseqüentemente, maior probabilidade de sair).

O professor considerava que, pelo facto dos dados serem iguais, não fazia sentido estarem a considerar-se como acontecimentos diferentes por exemplo “sair soma 1+6” e “sair soma 6+1”, estando, por isso, mais seguro com esta abordagem e também por considerar que de outra forma iria causar nos alunos uma maior dificuldade de compreensão, devido ao facto de não se considerar também duas possibilidades para “sair soma 1+1”.

Professor: Eu estava a dizer é que se tu estás a considerar isto um acontecimento [sair 1+2] e isto outro acontecimento [sair 2+1]?

Investigadora: Sim! Tu achavas que não?

Professor: Achava melhor que não! Eu estava a pensar não fazer! Como os dados são iguais... independentemente de tu poderes obter aqui um 2 e um 1 e ali um 1 e um 2, a soma é apenas uma, que é 3! Eu estava a pensar fazer assim...

Investigadora: Mas são coisas distintas! Uma coisa é sair assim [2 num e 1 noutra] outra coisa é sair assim [1 num e 2 no outro]. Quando arrumamos isto numa tabela são situações diferentes!

Professor: Posso levar para a questão de serem dados diferentes.

Investigadora: Mas então aqui [soma 4] ficava apenas com duas possibilidades! Isso não é muito correcto do ponto de vista Matemático! [...]

Professor: Eu penso que seria menos confuso considerar para cada tipo de soma um acontecimento! [...]

Investigadora: Mas depois acontece que parece que o 6, o 7 e o 8 têm a mesma possibilidade de sair e o 9 e o 10 também, e não têm! Sair 9 tem mais probabilidade que sair 10, porque tem esta situação [3,6], esta [4,5], esta [5,4] e esta [6,3] dá sempre 9! E para o 10 já só há 3 possibilidades e acabamos por estar a dizer que eles têm os dois a mesma probabilidade de sair e não têm porque há mais formas de obter o 9! Não está correcto, pois não! [...]

Professor: Mas aí também tens que considerar aqui [1,1] e aqui [2,2]... tens que considerar as duas hipóteses e depois se fores considerar o 6, o 7 e o 8 também têm as mesmas hipóteses. Isso aí dizem-te logo: “se aqui consideramos assim, aqui em cima também temos que considerar”!

Investigadora: Estamos a ver formas de sair o 2 é sair 1 num e 1 noutra. Formas de sair o 3 é sair 2 num e 1 noutra ou o contrário. [...]

Professor: Então impõe-se a regra de que se os números forem idênticos não se conta como duas possibilidades!

Investigadora: Agora nos outros tem de se contar como duas possibilidades, porque há duas somas que vão dar esse número! Eles têm que pensar é a nível de soma! Aqui só há uma hipótese de chegar ao 2, mas chegar ao 3 já há duas somas possíveis e é de somas que nós estamos a tratar. [...]

Professor: Porque eu estava mesmo a pensar que a própria actividade não tinha isso em conta! Se eles vão lançar dois dados, independentemente de eles fazerem uma soma ou outra, eles têm aquela possibilidade de ela sair e aqui a questão do 7 é pelo sete ser o que está a meio! Pensei que 6, 7 e o 8 tinham a mesma possibilidade de sair! Ou, senão, podemos fazer outra coisa, tentar ver o que é que eles tiram em relação ao jogo, quais são as possibilidades que eles acham que existem. Se eles chegarem à conclusão, quem fizer [...] 21 casos possíveis [...] depois posso-lhes dizer: e se nós considerássemos isto o dado 1 e isto dado 2 quais seriam os casos possíveis, será que a soma que nós queremos que saia continua a ser a mesma? E então eles através do preenchimento de uma tabela verem que existe um número que tem mais possibilidades que é o 7.

Investigadora: E efectivamente é, não é? Eles têm vários caminhos para chegar ao 7. [...] Mas tu durante o jogo tens que os ir orientando senão eles podem chegar só ao 21. Tens logo de chamá-los à atenção, porque se calhar é melhor!

Professor: Mas eles aí vão-te contar 2 vezes sair 1 com o 1... por isso é que eu estava a dizer se não seria melhor deixar assim sair só as 21 possibilidades.

O professor decidiu que deixaria os alunos investigar livremente, para ver se eles consideravam os 21 casos possíveis ou os 36, e, caso acontecesse a primeira hipótese, no final levar-se-iam os alunos a compreender o porquê de se considerarem 36 casos, embora mantivesse a opinião que seria uma opção possível os 21 casos.

No entanto, não fazia sentido deixar os alunos estarem a mergulhar em conjecturas erradas durante toda a tarefa, pois delas dependiam as conclusões para chegar ao sucesso da estratégia do jogo. Por conseguinte, seria conveniente que desde o início o professor fosse dando pistas no sentido de levar os alunos a refinar ou abandonar essas conjecturas, se fosse o caso.

Deste modo, o professor concordou com a investigadora, após as sugestões da mesma, em considerar desde o início os 36 casos possíveis, embora parecesse pouco ciente que esta seria a única forma correcta do ponto de vista matemático. Verificou-se todavia que, ao contrário do que o professor esperava, este aspecto não causou quaisquer dúvidas aos alunos. No início, alguns grupos não estavam a considerar todas as possibilidades para cada soma, mas após as pistas do professor aceitaram e compreenderam perfeitamente, parecendo que este aspecto era lógico para eles.

De facto, parece que o professor não ficou muito convencido que esta era a única forma correcta de o fazer, pois aquando da entrevista final continuava a afirmar que se podia fazer das duas maneiras. Segundo Paulo, na faixa etária em que os alunos se encontram seria melhor considerar os 36 casos possíveis e, futuramente, quando repetisse esta tarefa, iria fazê-lo até para reforçar o significado da propriedade comutativa da multiplicação, mas numa idade mais avançada já seria mais correcto trabalharem com os 21 casos:

É assim, eu acho que nós podemos fazer das duas maneiras, se quisermos podemos fazer das duas maneiras.

Eles aqui, penso que para esta idade, que o melhor é considerar os 36 casos possíveis e depois mais tarde, por alguma razão também depois essa matéria se dá mais tarde, eles se aperceberem que é importante nós termos em consideração que há dois casos possíveis que podemos considerar só como um, quando eles falarem de combinações. Porque aí já há essa importância, já não se dá importância de num dado sair 1 e noutro sair 2 e ser no primeiro a sair 2 e no segundo a sair 1. Eu penso que nesta faixa etária optava, fazendo esta investigação novamente, por considerar os 36 casos, no caso de eles irem já para a frente e eles fazerem já tudo e dar tempo para eles explorarem aquilo tudo ao máximo que passava para os 36, embora ao princípio pensasse que fossem apenas 21... não estava a dar aquela importância! E depois nós até podemos ver que essa investigação até pode ser feita quando estamos a falar das propriedades da adição, de eles saberem, pronto, estão 36 casos porque existe uma propriedade da adição que nos permite dizer que isto é verdade... (Entrevista 2)

Ainda relativamente ao segundo guião, parecia que o professor pretendia que os alunos, através desta tarefa, chegassem à definição de probabilidade, embora não referisse como pretendia que eles o fizessem. O professor teve alguma dificuldade em aceitar que este conteúdo não integrava o programa de Matemática do 2.º Ciclo, pois estava no manual e sempre o tinha dado, considerando que não fazia mal aos alunos chegarem a esta definição.

No que concerne ao quarto guião enviado, sobre a tarefa “Escadas”, este continha algumas conclusões incorrectas do ponto de vista matemático, que estão sublinhadas no excerto seguinte (Figura 20):

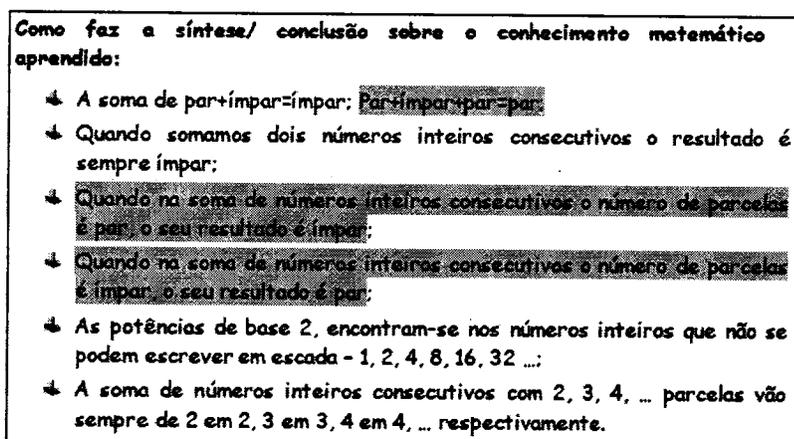


Figura 20: Guião da aula 4 – Tarefa “Escadas”

Quando confrontado com este aspecto, aquando da discussão do guião, o professor concordou logo com a investigadora, tendo referido que a primeira conclusão errada foi por distração sua e as outras foram consequência da primeira. A investigadora explicou que este aspecto está relacionado com o número de parcelas ímpares que o número contém. Assim, se o número possuir um número ímpar de parcelas ímpares, a soma será um número ímpar, se possuir parcelas ímpares em número par, a soma será um número par. O professor mostrou-se atento, parecendo que não tinha considerado este aspecto.

Ao observar os resultados da investigação a que a investigadora chegou relativamente a esta tarefa, o professor referiu: “pois eu já não fui tão longe!”. Verificase que Paulo não investigou a tarefa com a profundidade desejada e talvez devido a este aspecto tenha indicado algumas conjecturas incorrectas. Para além disso, ainda lhe passaram despercebidas outras regularidades bastante importantes que poderiam advir desta tarefa, e que certamente os alunos iriam indicar, relacionadas com os múltiplos, ou ainda uma regularidade curiosa existente nos primeiros termos das sequência dos números em escada que se escrevem como a soma de 2, 3, 4, ..., n, números naturais consecutivos.

Síntese dos principais aspectos da planificação. Paulo sempre referiu nunca ter tido dificuldades na preparação de nenhuma tarefa.

Quanto à selecção das tarefas, o principal critério tido em conta foi a possibilidade de enquadramento das mesmas no programa, tendo atendido também, em segundo plano, aos gostos e interesses da turma e à faixa etária dos alunos em questão.

O enfoque das suas planificações recaía, sobretudo, sobre a parte científica matemática, nomeadamente sobre os pontos referentes à “Síntese do conhecimento matemático aprendido”, ou seja, as descobertas a que os alunos poderiam chegar na tarefa, em detrimento de outros aspectos da planificação como o tempo, as “Questões a colocar aos alunos” e a “Forma como pensava conduzir a aula”. Verifica-se que o professor por vezes preparou as tarefa de uma forma pouco profunda, o que o levou a omitir no guião descobertas a que os alunos poderiam chegar e/ou a apresentar, pontualmente, as descobertas de uma forma incorrecta do ponto de vista matemático.

Outro aspecto característico dos guiões de Paulo é o facto de este não apresentar a preocupação em justificar as suas conclusões, o que é consentâneo com a sua acção durante as aulas de investigação, como se irá descrever a seguir.

A condução das aulas com as tarefas de investigação

As aulas com tarefas de investigação tiveram a estrutura característica deste tipo de tarefas, dividida por três fases: introdução da tarefa, desenvolvimento da tarefa e discussão da tarefa.

As fases de introdução e de discussão foram as mais curtas e às quais em algumas aulas foi dedicado o mesmo tempo, enquanto que a fase de desenvolvimento foi aquela à qual o professor reservou mais tempo.

A fase de introdução da tarefa de investigação. Paulo considera que as outras fases da aula de investigação devem merecer mais atenção por parte do professor; no entanto, curiosamente, refere ter sido a introdução a fase na qual investiu mais. Segundo o professor, nesta fase há que garantir a compreensão do trabalho a realizar por parte dos alunos. Por conseguinte, a fase introdutória da tarefa é muito importante, pois dela depende o sucesso da fase seguinte resultando, a par do desenvolvimento, na fase mais importante para os alunos:

Eu acho que foi na introdução [a fase em que investiu mais]. Ter sempre a preocupação que eles... o desenvolvimento é importante, mas na introdução, se eles não ficam bem... se não fica bem na cabecinha deles aquilo que vão fazer, se deixamos muita gente sem saber aquilo que vai

realmente fazer [...] acabamos por ter um desenvolvimento muito pouco eficaz. [...]

Essa fase [Introdução] e a fase também do desenvolvimento [fases que considera mais importantes para os alunos]. (Entrevista 2)

O início das aulas era sempre um pouco demorado, pois, como Paulo fazia os grupos no momento e como os alunos colocavam sempre muitos obstáculos e resistência ao trabalho em grupo, a organização era difícil e demorada, ainda mais porque Paulo não prescindiu, por vezes, da escrita do sumário. Por conseguinte, havia em média pelo menos 10 minutos da aula que se perdiam antes do início da tarefa.

Em seguida, Paulo iniciava a introdução da tarefa, que começava pela distribuição do enunciado da tarefa em folha A4 pelos alunos e dos materiais de suporte que algumas tarefas requeriam, o que gostava de fazer sozinho e de uma forma calma, enquanto interagia com os diferentes grupos. Este aspecto fazia com que a introdução por vezes se alongasse mais do que o desejável. Seguiu-se a leitura da tarefa em voz alta, que foi realizada na maior parte das vezes pelo próprio professor, com o intuito de os alunos compreenderem o seu propósito. Nesta fase, por vezes, ainda reforçou alguns aspectos inerentes ao trabalho investigativo, como a importância do registo, da organização dos dados e da discussão das conjecturas formadas no seio dos grupos e prestou alguns esclarecimentos e informações sobre alguns conceitos que eram requisitos para a realização das tarefas. Os episódios seguintes referentes à introdução das tarefas “Escadas” e “Cubos, cubos e mais cubos”, respectivamente, retratam o que foi dito anteriormente:

Professor: Chamam-se números em escada, os números que podem ser escritos como a soma de números naturais consecutivos. Manuel, o que é que isso quer dizer?

Aluno: São números que são somados...

Professor: São números que resultam da soma de números naturais consecutivos. O que é que esta palavra quer dizer?

Aluno: São uns a seguir aos outros.

Professor: Tomé, quais são os primeiros números naturais diz lá!

Aluno:....

Professor: Um, dois, três... o zero também é?

Aluno: Não.

Professor: Então o zero pertence a que grupo de números?

Aluno: Inaturais. [risos]

Alunos: Inteiros! [em coro]

Professor: Inteiros! Ora bem, continuando a leitura da actividade, exemplos: 5 é um número em escada, pois pode escrever-se como a soma $2+3$, soma de dois números naturais consecutivos. Olhem meninos está-me cá a parecer que hoje metade de vocês não acaba a aula aqui dentro da sala! 12 também é um número em escada, pois pode ser escrito como $3+4+5$

Aluna: Professor, números em escada são aqueles que são seguidos. Por exemplo 1, 2, 3!

Professor: Os números em escada não são esses! É assim, o número em escada são aqueles que podem ser escritos pela soma de números consecutivos! Agora, antes de começarem a actividade vou fazer aqui um exemplo para vocês não se perderem na maneira como vão fazer as coisas aí e depois já digo os grupos. [...] Ora bem, continuando... posso falar? Que números podem ser escritos como a soma de dois números naturais consecutivos, nós começámos já a actividade ali [quadro]. Depois, na segunda parte da investigação: quais podem ser expressos como a soma de três números consecutivos e quatro números consecutivos? Descobriste números que não sejam em escada? Que números têm uma única representação em escada? Ao longo da actividade vão ter que responder, vão ter que formar conjecturas sobre todas estas questões e mais algumas que achem necessárias serem colocadas para retirarem conclusões. E agora calados! (Relato aula 4)

Professor: Meninos acima de tudo... Vocês sabem que, tal como na semana passada, isto é uma actividade de investigação. Se é uma actividade de investigação vocês vão tentar formular conjecturas, discutir no grupo se essas conjecturas são válidas ou não, testá-las e depois colocá-las em regra para depois apresentá-las aqui no fim da aula aos vossos colegas. Meninos, importante: registem tudo aquilo que fazem nas folhas! Podem começar a trabalhar! (Relato aula 3)

Na introdução da tarefa propriamente dita, o professor tentava nunca se alongar muito. Todavia, os alunos nem sempre, após a introdução, compreendiam o trabalho que tinham de realizar e, por isso, as solicitações para que o professor fosse a cada grupo explicar o trabalho a realizar eram muito frequentes. Parece que o professor não era suficientemente explícito na introdução e/ou os alunos não estavam muito atentos, estando muito absorvidos nos conflitos gerados devido ao trabalho em grupo. Entretanto, os alunos começavam a exploração da tarefa geralmente passados cerca de vinte minutos do início da aula.

Aluno: Professor venha cá, não percebi!

Professor: Não leu a actividade?

Aluno: Não! Eles levaram-me a folha!

Professor: Não ouviu o professor?

Aluno: Não... eu vou ler vá! (Relato da aula 3)

Verifica-se que existem tarefas que, por serem menos exigentes do ponto de vista da sua complexidade ao gerar e organizar dados e dos conhecimentos matemáticos que mobilizam, tiveram um início mais rápido, como foi o caso da última “À volta com a tabuada”, facto que resultou positivo para o professor.

Professor: Aderiram melhor a outras [tarefas], esta aqui era... pronto, apesar de ser uma coisa que começou, teve o seu começo mais rápido, porque é uma coisa que eles conhecem, conhecem bem a tabuada, mas nunca se tinham debruçado era no que é que nós poderíamos descobrir na tabuada... não é só números, há ali coisas que... (Reflexão aula 5)

No que diz respeito à calculadora, pese embora o professor a tenha indicado na maioria dos guiões como material necessário à realização das tarefas, ao longo das mesmas o apelo ao seu uso foi quase inexistente.

Apenas na tarefa “Um outro olhar sobre a tabuada” considerou o uso da calculadora importante, por ter ajudado os alunos na tabuada do 9 e do 11.

Investigadora: A calculadora foi importante?

Professor: Foi, principalmente na tabuada do 9 e do 11, para quem quis prolongar... porque na tabuada do 3 acabaram por ir por ali, sabiam que era de 3 em 3 e isso tudo. Agora na do 9 tinham aquele truque, mas daí para a frente já utilizaram a calculadora. (Reflexão aula 5)

Mesmo na tarefa “Escadas”, que podia apelar de uma forma mais evidente ao uso da calculadora, Paulo considerou que os alunos utilizaram estratégias de cálculo mental alternativas que os ajudaram a gerar os dados, tendo prescindido da mesma. No entanto, ensinou a função «soma constante» da calculadora a uma aluna.

A fase de desenvolvimento da tarefa de investigação. Para Paulo, a fase de desenvolvimento de tarefas de investigação é a que deve merecer maior atenção por parte do professor, sendo a que considera mais importante para os alunos, a par da introdução, e é aquela que julga ter sido melhor conseguida por si.

Investigadora: E qual julgas ter sido a fase mais importante para os alunos?

Professor: Essa fase [introdução] e a fase também do desenvolvimento.

Investigadora: Qual das fases do trabalho investigativo consideras que foi melhor conseguida e pior conseguida por ti?

Professor: Eu acho que foi no desenvolvimento [...] Eu acho que mesmo a parte do desenvolvimento foi a melhor. (Entrevista 2)

A gestão do tempo. A importância que o professor atribui a esta parte da aula era evidente através do tempo que lhe destinava nos guiões relativamente à fase de discussão, por exemplo. Na maior parte dos seus guiões, reservou quase sempre cerca de dois terços da aula para o desenvolvimento da tarefa, verificando-se que muitas vezes esta fase acabava por retirar ainda um pouco de tempo à discussão, pois quando necessário, o professor prolongava-a ainda mais.

O tempo parece de facto nunca ter sido uma preocupação para Paulo. O professor considerou sempre que os alunos corresponderam às suas expectativas e não conseguiriam avançar mais, mesmo que lhes fosse dado mais tempo, sem que o professor necessitasse de fornecer mais pistas. “Se os alunos estiverem motivados e empenhados os noventa minutos são suficientes!”, refere.

Apenas numa tarefa, “Cubos, cubos e mais cubos”, o professor considerou que o tempo foi pouco, pois não foi possível realizar ambas as partes da tarefa na mesma aula. Assim, só se conseguiu realizar uma das partes e discuti-la, tendo o professor tido necessidade de reajustar a sua planificação.

O papel do professor. Paulo referiu que o seu trabalho nesta fase foi essencialmente: certificar-se se os alunos tinham compreendido o que lhes estava a ser pedido com tarefa; ir orientando os alunos no sentido de eles não se afastarem muito dos objectivos da mesma; verificar se existia algum obstáculo à sua realização, sem nunca dar respostas às questões colocadas pelos alunos, tomando conhecimento do trabalho que estava a ser desenvolvido pelos vários grupos:

Em primeiro lugar aperceber-me de se eles tinham compreendido aquilo que iam fazer, [...] para não se perderem logo de início. Depois é uma questão e orientar a aula. Ter a preocupação de ver se eles não começaram a fugir ao assunto, verificar se há ali qualquer entrave, dar-lhes uma orientação no sentido correcto deles continuarem a investigação, mas continuarem eles a investigar, evitar dar alguma resposta a alguma questão... e depois ir vendo as várias investigações e até aperceber-me

quem está mais à frente ou não na investigação, se pode ir mais além, acho que isso é o importante. (Entrevista 2)

Para Paulo, nesta fase o professor deve ir também planeando a fase seguinte, ao inteirar-se do trabalho dos diferentes grupos, ao aperceber-se dos alunos que estão mais evoluídos na tarefa, aqueles que possuem descobertas mais simples e mais complexas, de forma a que na discussão as descobertas sejam apresentadas por grau crescente de complexidade e não haja repetições:

Eu acho que é no desenvolvimento, porque é assim, a discussão também é importante, mas eu acho que é no desenvolvimento que o professor deve ter o papel principal porque é a partir daí que ele programa previamente o que se vai passar na discussão. Convém programar essa tal discussão senão depois... para evitar também repetições... É assim, nós estarmos numa turma onde temos vários grupos, em que os organizamos por grupos e depois vamos fazer uma discussão em que começamos por algo já extremamente evoluído e depois passamos para coisas mais simples... Eu acho que na fase de desenvolvimento se nós programarmos, à medida que vamos vendo os grupos e a sua evolução, se programarmos a discussão, quem começa e quem acaba a discussão para haver uma linha nessa discussão eu acho que é importante...eu acho que é a mais importante, a parte do desenvolvimento. (Entrevista 2)

Durante a fase de desenvolvimento da tarefa, Paulo ia circulando pelos grupos com o objectivo de os apoiar. Este apoio era mais efectivo logo no início do trabalho dos alunos, pois normalmente estes não compreendiam completamente o propósito da tarefa e o trabalho que tinham de desenvolver durante a fase da introdução. Por conseguinte, o professor tinha de efectuar esclarecimentos junto da maioria dos grupos.

Ao longo desta fase, o professor considerou fundamental manter uma atitude questionadora, não dando respostas e remetendo as questões para discussão no seio de cada grupo. Vejamos o seguinte episódio que revela este aspecto:

Alunos: Professor, em todas as colunas existem múltiplos de 4 menos na coluna 2 e 4.

Professor: Já verificaram todos se esta conjectura é verdadeira?!

Aluno: Não, não é! (Relato aula 1)

Outro aspecto importante do papel do professor no apoio ao trabalho dos grupos foi o fornecimento de pistas para que os alunos ultrapassassem alguns impasses e

progredissem na investigação, através da formação e do teste de conjecturas. Este aspecto é visível no episódio que se segue, que aconteceu na segunda aula, acerca da tarefa “Travessia do rio”, em que os alunos estavam a jogar e não estavam a conseguir compreender a razão de estarem sempre a obter somas iguais:

Aluno: Professor, sabe o que lhe digo? Os dados estão viciados para o seis!

Professor: Porquê? É isso que eu quero que tu saibas.

[...]

Alunos: Não descobrimos nada! Sai sempre o mesmo número!

Professor: Qual é esse número?

Alunos: É o número 8!

Professor: Então vê lá quais são as possibilidades de obter o número 8. Como é que consegues obter 8 com os dados?

Alunos: Então eu lanço e sai o 8!

Professor: Mas como?

[...]

Aluno: Professor, olhe lá! Nunca mais sai este número! [12]

Professor: Por que será?! Se calhar não sai porque não tem tanta possibilidade de sair como outros... Não será? (Relato aula 2)

Também na primeira aula, com a tarefa “Exploração com números”, Paulo sentiu necessidade de descercar o trabalho dos alunos, trabalho esse que estava muito preso à formulação de conjecturas envolvendo múltiplos, fazendo uma intervenção em grande grupo relembrando outros conceitos, como números pares, ímpares e primos, a partir dos quais os alunos poderiam formular conjecturas. Esta intervenção do professor mostrou-se muito importante para a progressão do trabalho dos alunos, pois logo em seguida houve um grupo que estabeleceu uma conjectura sobre o posicionamento na tabela dos números pares e ímpares. Foi também nesta altura que a investigação teve um avanço bastante significativo em todos os grupos, pois estes perceberam de facto o propósito da tarefa.

Professor: Ora bem meninos! Eu tenho visto aí pelos grupos que vocês todos andam a fazer conjecturas à volta dos múltiplos. Mas vocês não conhecem só múltiplos! Vocês o ano passado deram números primos, falaram desde há muito tempo de números pares e ímpares, pode haver aí muita coisa! (Aula 1)

Foi ainda necessário que o professor fornecesse informação acerca dos números primos, que pareciam já ter esquecido, para que os alunos avançassem na formulação de conjecturas sobre estes números.

Para Paulo, o apoio dado aos grupos deve ser no sentido de os fazer avançar, sendo o professor apenas um orientador do trabalho dos alunos. Verifica-se todavia que existem tarefas que, pela sua natureza mais complexa, necessitaram de um maior apoio da parte do professor, como o que aconteceu com a tarefa “Cubos, cubos e mais cubos”. O professor teve de ser mais interventivo e mais que um mero orientador do trabalho dos alunos, pois, caso contrário, estes não progrediriam na tarefa. Verifica-se que ao contrário do que o professor supunha, pois este considerava que os alunos facilmente iriam aperceber-se que a tarefa estava relacionada com o volume do cubo por este conceito já ter sido abordado no 1.º Ciclo e no 5.º ano, os alunos tiveram muitas dificuldades em chegar à fórmula do volume do cubo, devido ao facto de esta tarefa conjugar dois aspectos problemáticos para estes alunos: a dificuldade de visualização espacial e a dificuldade de generalização. No episódio que se segue pode verificar-se o que foi dito anteriormente:

Professor: Onde é que vocês utilizam a palavra cubo, será só quando vêm um cubo? Ou utilizam cubo em mais alguma situação da Matemática?

Alunos: Os metros cúbicos.

Professor: Ah! Os metros cúbicos, sim senhor! Mas utilizam em mais sítios, não é só geometria! [...]

Professor: Continua lá a fazer o que estás a fazer, e vê lá se encontras alguma relação entre a aresta do cubo e o número de cubos que leva... ao 8, ao 27 ao 64... porque é que esse número aumenta assim... tente lá perceber. [...] Porque é tu tens aí 1, 2, 3, 4, e esse número corresponde a um determinado número de cubos 1, 8, 27, 64 cubos? Porque é que esse número aumenta assim, tente lá perceber porquê?

Aluna: São os múltiplos.

Professor: Pode dar em alguma coisa. Tente lá perceber em algum cubo a utilização de cubos. Quando estou a falar de cubo estou a falar no que ele tem... quando demos o cubo no ano passado...

Aquando da exploração da tarefa “Escadas”, o professor apercebeu-se que os alunos estavam a gerar dados sem qualquer critério e desordenadamente, o que os impedia de verificar regularidades e formular conjecturas. Um grupo, por exemplo, fazia o seguinte: a seguir ao número em escada “ $1+2+3=6$ ”, o próximo número que os

alunos geraram foi o “ $3+4+5=12$ ”. Outro grupo estava a registar uma conjectura errada devido ao facto de ter os cálculos mal realizados. Foi importante o professor fornecer pistas no sentido de os alunos terem atenção a estes aspectos, caso contrário continuariam a formular conjecturas inválidas ou ficariam impossibilitados de as formular.

Professor: O dezanove não dá para escrever em escada?!

Alunos: Não! Diga lá uma forma então!

Professor: Onde é que têm os vossos registos?

Alunos: Temos até à soma de nove parcelas... Não implique!

Professor: Não é implicar! É que vos garanto que dá! (Relato aula 4)

Paulo refere ter ficado surpreendido e satisfeito pela forma diversificada e organizada como alguns grupos procederam ao registo da informação na tarefa “Travessia do rio”, uns com risquinhos, outros com tabelas. De referir que o professor não condicionou a forma de registo dos alunos, deixando que eles próprios passassem por esta dificuldade e desenvolvessem as suas próprias estratégias de organização de dados.

O episódio anterior revela também alguma preocupação e insistência por parte do professor em que os alunos testassem as suas conjecturas.

Mais uma vez está aqui patente a necessidade que os alunos manifestam em obter a validação e a atenção do professor, desta feita de um dos alunos que o professor refere ter tido nível 2 na avaliação de final de período:

Aluno: Professor, esta descoberta fui eu que fiz!

Professor: Muito bem! Assim é que é!

Aluno: No final do período quero um 3. (Relato aula 4)

Ao longo da fase de desenvolvimento da tarefa, existem outros aspectos sobre os quais o professor se debruçou, como seja o facto de tentar que os alunos caminhassem no sentido de alguma formalização e rigor na linguagem. No episódio que se segue, já se nota também da parte dos alunos alguma preocupação com o rigor da linguagem:

Aluno: Professor, aqui é a tabuada do 3 mas falta o 3!

Professor: Mas podem dizer: É a tabuada do 3 a partir de um determinado momento.

Alunos: Como? A partir de qual momento?

Professor: Se é a tabuada do 3 que nome nós damos aos números da tabuada do 3? São os ...

Alunos: Pares, ímpares...

Professor: Que nome e que nós damos aos resultados da tabuada do 3?

Alunos:... de 3 em 3....

Professor: Eu sei que é de 3 em 3.. o que eu estou a perguntar é que nome é nós damos a esses números?

Alunos: São os terceários... terceiros...

[...]

Aluno: Professor, são os múltiplos!

Professor: Ah! Então e é só nesse ou existem mais onde isso também se verifica. (Relato aula 4)

Ao aperceber-se que existiam grupos mais adiantados na investigação e que já não conseguiam progredir mais, o professor foi dando mais pistas no sentido de estes irem mais além nas suas descobertas, de forma a que estas enriquecessem posteriormente a discussão. Veja-se os seguintes episódios, onde se pode verificar o aspecto supracitado:

Professor: Olha, enquanto esperamos só mais dois ou três minutos por eles, veja lá, já vimos coisas de múltiplos, já vimos coisas de pares, de ímpares, o que é que vocês deram mais o ano passado?

Alunos: Números racionais!

Professor: Demos agora há pouco tempo!

Alunos: Primos!

Professor: E mais? Quando fizemos com as multiplicações! Quando multiplicávamos os mesmos números. [...]

Professor: Não se lembram das potências? Então vejam lá se encontram aí alguma coisa sobre potências! (Relato aula 1)

Professor: Olhem para os números! Por isso é que eu vos pedi para os colocarem por ordem. Ou então façam outra coisa, coloquem aqui só os números (somos) numa tabela [coluna], os números noutra tabela [coluna]... assim pode ser que vejam alguma coisa. (Relato aula 4)

O episódio seguinte refere uma das poucas vezes que Paulo revelou a preocupação de que os alunos justificassem as conjecturas que estavam a formar, insistindo na explicação das mesmas:

Aluna: O 1 nunca sai!

Professor: Registe essa descoberta e explique porquê! (Relato aula 2)

Os alunos revelaram-se pouco autónomos na fase de preparação da discussão, pois quando tinham de passar as suas conclusões para o acetato para apresentarem à turma, pediam ao professor para verificar se estavam correctas, ao que o professor respondia que não se corrigia nada, “alguém há-de ver se está bem ou mal na parte da discussão”. Veja-se esta passagem na quarta aula, com a tarefa “Escadas”, em que uma aluna chama o professor para partilhar com ele uma descoberta que fez, com o intuito de obter a sua validação:

Aluna: Professor, quando é a soma de dois números, vai de 2 em 2, quando é a soma de três números vai de 3 em 3, quando é de quatro, vai de 4 em 4...

Professor: E quando é a soma de sete números será que vai de 7 em 7?

Aluna: Então agora tenho que fazer com sete?

Professor: Então, quando descobrimos uma regra temos que ver se ela se verifica sempre! (Relato aula 4)

Preocupações e dificuldades. Na fase de desenvolvimento, a principal dificuldade sentida pelo professor foi a de fazer os alunos sentirem a necessidade de realizarem registos e passarem as suas ideias para o papel. O professor refere que os seus alunos estão pouco habituados a tomar iniciativas por eles próprios. Na segunda aula, acerca da tarefa “Travessia do rio”, “havia alunos que já tinham verificado que havia somas que saíam mais vezes que outras, mas ainda não tinha registado essa conjectura”, refere Paulo.

Ao longo das aulas os alunos manifestaram sempre dificuldade e recusa em trabalhar em grupo, principalmente no início, pedindo ao professor para trabalhar a pares. Esta dificuldade era traduzida em conflitos constantes entre alguns alunos dentro do mesmo grupo e entre alunos de grupos diferentes, os quais o professor era chamado frequentemente a resolver e que geravam alguma confusão na aula, condicionando um pouco o bom funcionamento da mesma e atrasando o trabalho. Assim, os alunos

demoravam sempre muito tempo até iniciarem as tarefas e interrompiam muitas vezes o trabalho, o que prejudicava a concentração e raciocínio, parecendo estarem pouco habituados a esta metodologia. Aos olhos de Paulo, este aspecto parecia como que irremediável.

A fase de discussão da tarefa de investigação. A discussão foi sempre a fase da aula que Paulo mais desvalorizou e na qual menos investiu. Este aspecto é facilmente perceptível pelo tempo que lhe dispensava nos guiões de preparação das aulas, que foi, na maior parte das vezes, bem menor que aquele que considerou para a fase de desenvolvimento da tarefa.

Confirmando o aspecto referido anteriormente, por vezes, as duas fases anteriores à discussão roubavam também mais algum tempo a esta fase, sem que isto parecesse incomodar muito o professor.

Paulo considera que esta fase da aula não é tão importante para os alunos como as outras duas anteriores, mas também que esta fase não foi tão bem conseguida por si quanto gostaria: “[...] na discussão acho que não foi tão conseguido como gostaria que tivesse sido.” (Entrevista 2)

Na última entrevista, quando questionado acerca dos motivos do seu menor sucesso nesta fase, Paulo hesitou um pouco e acabou por referir como possíveis causas a pressão do tempo e o facto de ser difícil para si interromper o trabalho de descoberta dos alunos:

Um pouco se calhar por não... como é que hei-de dizer... por falta de tempo, sobrava pouco tempo... e era a pressão de acabar também naquela aula e depois também às vezes a questão de os ver tão entusiasmados no desenvolvimento, uma pessoa fica naquela: “se lhes vamos cortar este entusiasmo, depois acaba por ser uma Discussão um pouco... (Entrevista 2)

Assim, Paulo enfatizava a quantidade de conclusões obtidas pelos alunos em detrimento da compreensão das suas ideias, pois raramente solicitou aos alunos que justificassem as suas conjecturas, o que é consentâneo com os guiões por si realizados. Deste modo, o professor considerava mais importante prolongar o mais possível a exploração da tarefa, chegando a discussão a começar quando faltavam apenas quinze minutos para o final da aula.

O professor considera que, para que a discussão corresse melhor, talvez se pudesse reservar uma segunda aula, que fosse o mais próxima possível da primeira, para que não houvesse muitos aspectos do trabalho realizado que os alunos pudessem esquecer para a fase da discussão.

Se calhar utilizar mesmo uma segunda aula para isso. Uma só para a Introdução e para a investigação propriamente dita e depois numa outra aula, e aí convém programar ser uma aula o mais perto possível da outra, não deixar distanciar muito tempo, assim tipo dois dias depois, normalmente um dia a seguir não é mas dois dias depois, para chegarmos a uma conclusão. (Entrevista 2)

De facto, a discussão foi a fase menos bem conseguida por Paulo e parece que o professor só teve consciência deste aspecto mais tarde, no final do estudo, pois ao longo do mesmo, na sua reflexão sobre as aulas que iam acontecendo, referiu sempre que não mudaria nada na fase da discussão.

Por conseguinte, as fases de discussão eram breves, muito centradas na sua pessoa e o objectivo era apresentar as conclusões de cada grupo, sem que existisse interacção entre os alunos, pois na maior parte das vezes era o professor que validava ou rejeitava as conjecturas, que vinham por validar da fase anterior. Enquanto que conseguiu manter uma atitude questionadora durante a fase de desenvolvimento das tarefas, na discussão acabou por ser da sua responsabilidade o trabalho de validação das conjecturas. As apresentações resumiam-se muitas vezes a uma conversa entre o professor e o grupo a apresentar, raramente se estendendo à restante turma, o que fazia com que os grupos que não estavam a apresentar, não se sentindo envolvidos no trabalho que estava a ser feito, estivessem desatentos à apresentação dos colegas, fazendo barulho e perturbando um pouco a aula, ficando alguns grupos a conhecer apenas as descobertas realizadas pelo próprio grupo.

Paulo reconhece que podem ter existido alguns alunos que não perceberam as conclusões que estavam a ser apresentadas na fase da discussão, devido ao facto de estarem desatentos:

Investigadora: Achas que eles perceberam todos o que se estava ali a passar, o que os colegas estavam a apresentar?

Professor: Eu acho que eles perceberam, porque alguns tinham descoberto as mesmas coisas, eu acho que sim, mas também terá havido

uma ou outra que eles não perceberam bem, então eles estavam na conversa! (Reflexão aula 5)

Nas intervenções de Paulo durante esta fase, encontra-se alguma preocupação com o rigor da linguagem matemática. Veja-se o seguinte episódio da apresentação de um grupo na primeira aula sobre a tarefa “Explorações com números”:

Alunos: Nas linhas os números vão sempre de 1 em 1; Nas colunas os números vão sempre de 4 em 4. [...]

Professor: Cada elemento da linha consegue-se somando 1 unidade ao anterior, enquanto que cada elemento das colunas consegue-se adicionando 4 unidades ao número anterior. (Relato aula 1)

A preocupação com o rigor e a formalização da linguagem matemática é também evidente no episódio que se segue referente à discussão da tarefa “Escadas”:

Alunos: A soma de 3 são múltiplos de 3.

Professor: As somas com 3 números [inteiros consecutivos] são múltiplos de 3. Onde é que está o exemplo? Está aqui!

Professor: Qual é que é o primeiro?

Aluna: É o 6.

Professor: Qual é que é o primeiro múltiplo de 3?

Alunos: É o 3.

Professor: Concordam?

Alunos: É o zero.

Professor: Então se o primeiros múltiplos são o 0 e o 3 falta ali colocar qualquer coisa.

Aluno: São os múltiplos de 3 sem ser o 0 e o 3...

Professor: Podia ser, mas não há outra maneira? O que escreveste está correcto, mas falta ali qualquer coisa. A soma de 3 números consecutivos o resultado é um múltiplo de 3 mas...

Alunos:...

Professor: São os múltiplos de 3 maiores ou iguais... qual é o primeiro que aparece?

Aluno: 6.

Professor: Então têm que ser maiores ou iguais a 6. (Relato aula 4)

Não obstante na fase de desenvolvimento o professor ter procurado seriar a ordem das apresentações dos grupos, como já foi indicado anteriormente, nem sempre

este aspecto foi conseguido, como por exemplo, na discussão da tarefa “Escadas”, em que o grupo que foi o último a apresentar era o que tinha as descobertas mais simples e já tinham sido todas apresentadas anteriormente, tendo o professor prescindido por isso da apresentação deste grupo:

Professor: O último grupo tem alguma coisa a acrescentar?

A primeira já foi aqui vista. Na soma de 3 os resultados são sempre o quê?

Alunos: Números pares e ímpares.

Professor: Só essas conclusões?! Na de 4 os números vão de 4 em 4 e são pares todos eles. (Relato aula 4)

Durante a fase de discussão, Paulo intervinha sempre enquanto os alunos estavam a expor as suas descobertas, talvez devido à pressão do tempo e/ou à preocupação em garantir a compreensão das ideias que se estavam a transmitir. No final de cada intervenção, repetia algumas vezes o que os alunos diziam por outras palavras. Por vezes, concluía ele mesmo as frases dos alunos, transmitindo o que eles pretendiam dizer de uma forma mais rápida, como se pode verificar no episódio que se segue, passado na aula com a tarefa “Escadas”:

Professor: O vosso colega o Leonardo que esteve ali muito sossegado descobriu outra coisa. Explica lá Leonardo!

Aluno: O resultado das de 3 que é de 3 em 3 e as de 5...

Professor: Eu explico pelo vosso colega senão ele atrapalha-se. O que ele descobriu foi que quando vai de 3 em 3, de 5 em 5, de 7 em 7... ele viu que quando era de 3 em 3 ia par, ímpar, par, ímpar, quando era de 5 em 5 era ímpar, par, ímpar, quando era de 7 em 7 era outra vez par, ímpar, par, ímpar. [...] (Relato aula 4)

Um outro aspecto característico da fase de discussão de Paulo foi o aprofundamento parcial das ideias matemáticas suscitadas pelas conclusões dos alunos. Por exemplo, na tarefa “Escadas”, que conduzia os alunos para uma descoberta relacionada com as potências de dois, verificou-se que alguns grupos conseguiram descobrir alguns números que não se conseguiam escrever em escada como seja o 1, 2, 4, 8, 16, mas este aspecto não foi valorizado. Veja-se esta passagem da referida aula:

Alunos: Os números que não conseguimos fazer em escada é o 1, 2, 4, 8, 16, 19, 25, 27, 29, 38, 41, 44...

Professor: O 19 conseguem.[...] Agora, ela tem aqui uma coisa que ainda não tinha sido falada aqui que foi a questão de não conseguirmos escrever em escada os números que ali estão. Grupo 1 fez esta questão? Concorda com os números que ali estão?

Alunos: Não concordo!

Professor: Com quais?

Alunos: Com o 19, ... o 1 não dá, o 2 também não, nem o 4, o 8, o 16 também não...

Professor: Alguém quer dizer alguma coisa sobre aqueles números que não dão para escrever em escada?

Professor: Quem mais fez a 4.^a pergunta, aquela dos números em escada?

Aluno: Eu.

Professor: Então diz quais são para ti os números?

Aluno: O 1, o 2, o 4 e o 8.

Professor: As tuas colegas também colocaram esses. A seguir estava o 16. Concordam? Alguém conseguiu escrever o 16?

Alunos: Não.

Professor: Então Mariana lê lá a tua primeira conclusão.

Aluna: A soma de 2 números consecutivos é sempre ímpar.

Professor: O 19 que número é?

Alunos: É ímpar.

Professor: O 23, 25, 27, 29, ... Então se colocaram na primeira que os números ímpares pertencem todos a essa de 2 em 2, esses são números ímpares por isso conseguem escrever-se... 9+10, 11+12, 12+13... o próximo seria o 32.

No final desta aula, o professor referiu que iria explorar posteriormente com os alunos alguns aspectos desta aula e possivelmente iria retomar este aspecto dos números que não se podem escrever em escada.

Síntese dos principais aspectos da condução. As tarefas tinham normalmente um início lento, pois os alunos demoravam muito tempo a organizar-se para começarem a trabalhar, revelando muita resistência ao trabalho em grupo, principalmente nas primeiras aulas.

A gestão do tempo parece ter sido pacífica para este professor, conseguindo, na sua perspectiva, que as aulas fossem ao encontro das suas expectativas. Assim, o tempo

não constituía para si uma preocupação, pois podia sempre retirar-se, se fosse necessário, um pouco de tempo à discussão.

A fase de introdução da tarefa foi aquela em que o professor referiu ter investido mais, pois na sua perspectiva esta ser muito importante e dela dependem as fases seguintes. Assim, o professor começava por ler o enunciado da tarefa em voz alta e, em seguida, colocava algumas questões aos alunos. Por vezes, considerou importante lembrar alguns aspectos do trabalho investigativo, como a importância dos registos, da formulação, o teste e a discussão de conjecturas no seio do grupo.

Porém, normalmente, esta fase não era suficiente para a compreensão dos objectivos da tarefa por parte dos alunos, pois a presença do professor nos grupos após esta fase era muito solicitada para prestar esclarecimentos.

No que se refere à fase do desenvolvimento da tarefa, que é à que o professor atribui mais importância e à qual dispensou mais tempo, o papel do professor passou por: circular pelos grupos para verificar se estes tinham compreendido os objectivos da tarefa; manter uma atitude questionadora, não dando respostas aos alunos; fornecer algumas pistas necessárias para os alunos avançarem na tarefa; certificar-se do trabalho dos alunos, planeando a fase seguinte, procurando ordenar as apresentações dos alunos por ordem crescente de complexidade, o que nem sempre foi conseguido.

Durante a fase de desenvolvimento, evidenciou ainda a preocupação de que os alunos apresentassem algum rigor na linguagem e que caminhassem para uma maior formalização da mesma.

O professor reconheceu também nesta fase que os seus alunos apresentam pouca necessidade/facilidade em realizar registos, devido ao facto de estarem pouco habituados a tomar iniciativas por eles próprios.

Quanto à fase da discussão, esta foi aquela onde o professor menos investiu e onde refere ter tido um desempenho menos positivo. Foi sempre uma fase breve, muito centrada na sua pessoa e reduzida a um apresentar de conclusões pelos alunos, cuja validação e/ou rejeição era feita por si, sem que houvesse apelo à interacção entre os alunos. A justificação e a generalização das ideias apresentadas foram aspectos sobre os quais o professor não insistiu muito, preocupação que também não evidenciou na planificação das tarefas. A ênfase foi colocada na quantidade de conclusões apresentadas e não no aprofundamento da compreensão das mesmas.

No entanto, nas aulas finais já se notou alguma preocupação da parte de Paulo na fase da discussão, nomeadamente no debate e justificação de ideias por parte dos alunos. Embora este aspecto tenha sido bastante frisado aquando da preparação das aulas pela investigadora, esta evolução pode ter nascido de uma necessidade própria da parte do professor, resultante talvez da reflexão sobre a sua acção. Embora ao longo das aulas afirmasse que não sentia necessidade de mudar nenhum aspecto das mesmas, no final do estudo reconheceu que a fase da discussão foi a menos conseguida por si.

Paulo e a sua reflexão sobre as aulas com tarefas de investigação

As reflexões conjuntas realizadas com Paulo eram breves, demoravam em média quinze minutos. Eram muito centradas nos alunos, na sua adesão à tarefa e no trabalho por eles realizado e pouco profundas do ponto de vista do desenvolvimento das ideias sobre a sua acção no âmbito das tarefas de investigação realizadas.

Aspectos bem conseguidos identificados pelo professor

O balanço realizado pelo professor acerca das aulas foi, na maior parte das vezes, positivo e estava muito relacionado com a adesão dos alunos à tarefa e ao trabalho por eles desenvolvido.

Considerou, por isso, que na maioria das vezes os alunos aderiram bem às tarefas e que os sentia bastante motivados e envolvidos nas mesmas. Quando questionado acerca das razões de se verificar o aspecto anterior, o professor referiu que não era tanto pelo facto de serem tarefas de investigação, mas por ser um jogo, no caso da tarefa “Travessia do rio”, ou pelo facto de envolver a manipulação de materiais, como na tarefa “Cubos, cubos e mais cubos”.

Investigadora: O que é que mais gostaste na aula?

Professor: Olha foi... como hei-de dizer, foi o empenho de alguns alunos.
[...]

Investigadora: E esses que estavas a dizer são alunos que normalmente não estão muito motivados, é isso?

Professor: Não, não é questão de não estarem muito motivados, vão fazendo as coisas, só que é preciso estar em cima deles para as realizar.

Investigadora: E hoje achaste que estiveram melhor?

Professor: E hoje achei que não foi preciso.

Investigadora: Por que é que achas que hoje foi assim?

Professor: Eles gostam de fazer este tipo de actividades, eles gostam...

Investigadora: Por ser com os materiais, por ser uma tarefa de investigação...

Professor: Mais por ser com materiais que eles gostam de mexer em coisas e isso tudo. (Relato aula 3)

Outro aspecto que Paulo refere ter influenciado o entusiasmo e a aceitação revelados pelos alunos em relação às tarefas foi o facto de estas constituírem novidade para eles, por ser uma tarefa diferente do que as que eles estavam habituados a fazer.

Investigadora: Porque é que achas que os alunos aderiram bem à tarefa?

Professor: Ah! Isso eles tudo o que se torna assim um bocadinho fora do normal... É assim, investigação eles vão fazendo, mas jogar assim... é assim, ao início eles reagiram um bocadinho melhor, pois apresentei-lhes um jogo à frente, com dados, com peças “e agora joguem!”; eles ao princípio levaram aquilo... “Olha vamos ter uma aula só de jogar!”, mas depois é que começaram a ver, pronto tinham que começar também a tirar conclusões, não estavam ali só a jogar, a jogar só por jogar, tinham que descobrir qualquer coisa, começaram-se a aperceber que dali tinha que sair algum resultado... (Relato aula 2)

Eu acho que por ser uma tarefa diferente do que eles estavam habituados, pelo menos os moldes como ela era apresentada e os aspectos que eles tinham que seguir... acho que foi diferente e eles acabaram por aderir mais por causa disso! [...] Por ser diferente. (Entrevista 2)

Para além do facto de Paulo ter realizado balanços positivos acerca da maioria das suas aulas, podem identificar-se outros aspectos que constituem uma matriz comum nas reflexões do professor.

A fase da aula preferida de Paulo foi sempre o desenvolvimento. Assim, referiu, desde o princípio ao fim deste estudo que o que mais gostava das aulas era a fase em

que os alunos estavam a realizar as descobertas, por considerar que é a fase mais importante para eles, onde eles o conseguiram algumas vezes surpreenderam e onde julga ter tido um melhor desempenho:

Investigadora: Que parte da aula gostaste mais? Foi da preparação, da introdução, do desenvolvimento ou agora da discussão?

Professor: Foi do desenvolvimento! Vi que eles estavam a descobrir mais coisas do que aquilo que eu estava à espera! Sinceramente não pensei que fossem descobrir tanta coisa! (Reflexão aula 4)

Para além do exposto, o professor pôde também verificar que os alunos conseguiram surpreendê-lo em alguns aspectos, como seja o facto de em algumas aulas terem conseguido realizar mais descobertas do que ele estava à espera e também por alguns alunos, que costumam ser mais difíceis de manter a trabalhar, terem conseguido realizar descobertas e se terem manifestado motivados e envolvidos nestas tarefas.

O professor notou também alguma evolução nos alunos no que refere à capacidade de organização de dados.

Investigadora: Já os notas mais investigadores ou não?

Professor: Já! Pelo menos uma coisa é verdade, tinha feito 3 actividades, esta é a quarta, fora aquelas que a gente tinha feito de investigação, já te dei alguns exemplos de algumas que já fizemos na sala de aula. Pelo menos, eles já estão a conseguir ver que quanto mais organizados forem nos dados, na organização dos dados, mais facilmente conseguem tirar conclusões. [...] (Reflexão aula 4)

Quanto aos aspectos positivos que a realização de actividade de investigação trouxe aos alunos, Paulo refere que foram o desenvolvimento do espírito crítico, o trabalho cooperativo, pelo facto de terem de trabalhar em grupo, e a capacidade de organização de dados.

Eu acho que lhes desenvolve o espírito crítico, [...] o trabalho cooperativo, ver se eles começam a cooperar uns com os outros, a busca e organização de dados de valores, das várias coisas que eles foram fazendo. Eu penso que é mais isso... (Entrevista 2)

Relativamente a outros aspectos da Matemática, para Paulo este tipo de tarefas permitiu uma consciencialização por parte dos alunos de que um conceito pode ser aprendido de várias formas e não somente através do manual. Em todas as tarefas

realizadas, embora muito diferentes entre si, tal como refere Paulo, os alunos poderiam ter aprendido o conceito de múltiplo, divisor, número par ou ímpar pela primeira vez:

[...] normalmente a gente utiliza o manual [...] Estas tarefas vieram [fazer] ver que pelo menos que se pode aprender um conceito [...] nós podemos pegar em conceitos matemáticos e dá-los de variadíssimas formas, que não é só aquilo a que eles estavam habituados no primeiro ciclo, eu penso que eles no primeiro ciclo vêm sempre muito direccionados, têm um manual, têm uma actividade e depois muitos deles ficam com a ideia: “aprendi este conceito na Matemática, isto é novo, aprendi, aprendi desta forma e é esta forma” eles consideram logo aquilo uma lei. Muitas vezes, muitos conceitos matemáticos podem-se aprender de formas totalmente diferentes e penso que eles, pelo menos nós trabalhámos alguns conceitos com eles que eram conceitos que eles já deveriam ter do 5.º ano de múltiplos, divisores, pares, ímpares, etc., e eles verem que foram 5 actividades totalmente diferentes umas das outras e em todas elas eles podiam ter aprendido aquele conceito pela primeira vez. (Entrevista 2)

Outro aspecto também comum a todas as reflexões das aulas de Paulo foi o de considerar que as suas aulas no geral correram bem. As alterações que apontou ter realizado estiveram relacionadas com os enunciados da tarefa e nunca com a condução das aulas, por isso não mudaria nenhum aspecto de fundo das mesmas. Considerou que o seu desempenho foi bom em todas as fases da aula, afirmando ter estado bem em todas elas.

Investigadora: O que é que farias da próxima vez para que aula corresse melhor?

Professor: Eu acho que nada! A tarefa está bem assim. [...]

Investigadora: E no teu procedimento, achas que também não mudavas nada? Está tudo bem?

Professor: Não, eu acho que está bom! Eu acho que estava bom! (Reflexão aula 3)

Dificuldades identificadas pelo professor

As dificuldades sentidas por Paulo nas suas aulas estavam sempre relacionadas com os alunos. Assim, uma das dificuldades identificadas pelo professor foi o facto de os alunos demorarem algum tempo a iniciar a tarefa, pois segundo o mesmo, aquando

da introdução, por vezes não estavam com atenção às suas explicações, necessitando de esclarecimentos posteriores, no seio dos grupos:

Investigadora: E quais foram as dificuldades que sentiste?

Professor: Foi eles começarem a tarefa em si. Apesar da explicação eles têm sempre que levar um empurrãozinho por mim. Como tu viste, eu expliquei para o grupo mas metade não estava a ouvir! O ano passado eles não eram assim, mas este ano é que estão assim! Depois tive, à medida que ia passando, parecia-me que eles não estavam bem a ver o que era pretendido com a tarefa e tive que estar a explicar outra vez! [...] (Reflexão aula 1)

Outro aspecto problemático identificado por Paulo foi o facto de os seus alunos se revelarem pouco autónomos:

[...] ainda não estão habituados a tomar iniciativas espontaneamente e tenho que lhes dizer tudo o que eles têm que fazer, embora já estejam melhores nesse aspecto! (Relato aula 2)

Quanto às causas do aspecto anterior e destes serem muito dependentes do professor, Paulo atribui-as ao facto de os pais negligenciarem um pouco o seu papel enquanto educadores e delegarem este papel à escola, fazendo com que os alunos fiquem muito dependentes do professor e também pelo facto de o ensino primário ser ministrado por um único professor, o que torna os alunos muito dependentes da figura do mesmo.

Sim, porque dantes nós víamos e sabíamos os nossos pais iam muito à escola e havia muitos pais preocupados com o nosso evoluir dentro da escola e as aprendizagens e isso tudo, e agora isso cada vez se vê menos e depois se eles próprios transmitem essa imagem aos alunos, os alunos acabam por também uns por se desinteressar e outros por se tornarem muito dependentes do professor, é assim ficam com muito receio, porque alguns até podem ser bons alunos e não são rebeldes e acabam por ficar muito dependentes do professor, porque depois não conseguem dar um passo sem perguntar ao professor se aquilo é assim ou não. (Entrevista 2)

O professor refere também que os seus alunos têm alguma dificuldade na comunicação escrita de ideias, tendo mais facilidade em fazê-lo oralmente:

Investigadora: O que é que mais gostaste?

Professor: O que é que mais gostei...

Investigadora: Se é que gostaste de alguma coisa! [risos]

Professor: Pelo menos aquela primeira parte em que eles olhando... é que eles oralmente têm mais facilidade em dizer alguma coisa do que passar para a escrita, eles ainda têm muita dificuldade em passar para a escrita. Logo no início pedi oralmente aquilo e eles visualizaram logo e disseram ali algumas ideias! [...] (Relato aula 3)

Outra dificuldade dos alunos identificada por Paulo prendeu-se com a falta de capacidade de organização dos dados e este aspecto, por ser muito importante nas tarefas de investigação, revelou-se um pouco inibidor impedindo os alunos por vezes de progredirem na tarefa:

Penso que o organizar as coisas para eles verem e irem começando a tirar resultados daquilo que estão a investigar foi aquilo que mais os dificultou, que mais os dificultou, quer dizer, onde eles sentiram mais dificuldade, era que estratégia deviam utilizar e como é que deviam organizar aquilo que estavam a ver. [...]

Eu acho que foi um bom arranque para eles esta parte, eles começaram a organizar-se na busca pelo conhecimento. (Entrevista 2)

O professor reconhece que é natural que os alunos tenham esta dificuldade, uma vez que este aspecto tinha sido pouco trabalhado com eles. No entanto, notou alguma evolução por parte dos alunos, tendo ficado surpreendido em algumas aulas com a forma organizada e diversificada como os alunos fizeram os seus registos.

Como já foi referido, o professor nunca identificou dificuldades relacionadas com o seu desempenho em nenhuma das fases da aula:

Investigadora: Tiveste alguma dificuldade a nível da preparação ou da condução?

Professor: Não!

Investigadora: Correu tudo bem?

Professor: Eu acho que correu tudo bem! Até me admirei das coisas que nem eu próprio tinha visto e eles descobriram! Não tinha visto... não tinha visto ali bem logo à primeira. Mas pronto, achei engraçado e diferente do que estava ali a ser visto. Eles estavam todos a ver sequências de números de 2 em 2, 3 em 3, umas com os múltiplos e com os pares e ímpares... haver só uma pessoa que viu que aquilo também dava para a frente e havia regularidade! (Reflexão aula 4)

Ao longo do estudo, Paulo considerou que as suas aulas correram conforme o planeado e raramente enumerava algum aspecto que pretendesse alterar.

Os aspectos que referiu pretender alterar no futuro estavam relacionados com os enunciados das tarefas. Assim, no que concerne à tarefa “Exploração com números”, cujo enunciado continha uma tabela 4x4, o professor referiu que uma tabela maior poderia ajudar os alunos na visualização de regularidades:

Investigadora: O que pensas que tens que fazer diferente para que a aula corra melhor?

Professor: Os grupos virem já formados [...] e para um início, se calhar um quadrado até de 6x6 ou 7x7, às vezes eles com umas coisas maiores, acho que abre mais os horizontes para eles descobrirem mais coisas [...] até de 10x10 se nós o tivéssemos colocado, eles é assim poderíamos não ter algumas conclusões que eu queria para eles agora, como a questão da soma dos números que eles acabaram por não ir por aí, mas pronto eles visualizavam à mesma que nas colunas ímpares tínhamos os números pares e nas colunas pares tínhamos os números ímpares. Se tivéssemos um quadrado de 10x10, eles mais depressa chegariam, porque estavam a pensar muito de 3 em 3, de 5 em 5, não estavam a ir à palavra múltiplos e se tivessem 0, 5, 10, 15, 20, 25 até ao 50, eles acabavam por se aperceber “Se calhar isto é capaz de estar aqui qualquer coisa!” e chegavam aos múltiplos. De resto não estou assim a ver mais nada!

Quanto à segunda tarefa seleccionada, “Travessia do rio”, o professor refere que, face à falta de necessidade que os alunos têm em fazer registos, deveria ter colocado no enunciado uma chamada de atenção para que registassem tudo o que fossem fazendo. Outro aspecto que o professor refere querer alterar numa próxima aula é juntar o registo das contagens de todos os grupos de alunos para fazer aumentar o número de repetições das experiências de forma a observar o carácter frequencista da probabilidade.

Investigadora: O que é que pensas que deves fazer diferente para que a aula corra melhor?

Professor: Diferente... se calhar colocar-lhes na folha: “vai registando tudo aquilo que fores fazendo!” [...] porque eu tive que lhes dizer: “parem aí um bocadinho e vão registar isto que aqui está!” [...] Se calhar, uma boa coisa para depois fazer numa futura aula deste tipo, por exemplo entre todos como foram 12 grupos e se eles realmente registaram todas as saídas, vamos agora colocá-las numa só para vermos: “quantas vezes lançámos o dado?” não as 20 ou 30 vezes que aí não dá para perceber bem, que o 7 é aquele que acontece mais vezes, mas se juntarmos os 12 grupos, com 30 saídas cada um, já são 360 saídas já dá para perceber melhor a tal probabilidade [...] era uma das coisas que se podia mudar, logo no início da actividade acrescentar: “vai registando tudo aquilo que fizeres! (Reflexão aula 2)

No que se refere à tarefa “Cubos, cubos e mais cubos”, o professor refere que separaria as duas partes da actividade para aulas distintas, uma vez que concluiu que uma aula é pouco para fazer ambas as partes:

Investigadora: Se pudesses fazer a aula outra vez, o que é que fazias diferente?

Professor: Em primeiro lugar tirava logo a segunda situação e deixava só a primeira. Colocaria só a primeira com o mesmo tempo e mais uma questão ou talvez até reformular as duas [...] reformular mais a nível de português [...] porque houve duas pessoas que disseram que tinham a resposta aqui em baixo [...] utilizar aresta 3 e não utilizar esta parte do 3x3x3, para ver se eles conseguiam lá chegar ao 3x3x3. [...] (Reflexão aula 3)

Aprendizagens que o professor reconhece ter realizado com a experiência

Ao longo do estudo, Paulo foi construindo um significado para as tarefas de investigação, que no início o professor identificava com uma actividade de carácter lúdico, mas esse significado posteriormente tornou-se mais autêntico, à medida que crescia a experiência do professor com este tipo de tarefas. Assim, pese embora Paulo no final do estudo ainda revelasse algumas dificuldades em definir o que são tarefas de investigação, parece ter captado alguns dos aspectos principais da sua natureza, como o seu carácter pouco estruturado.

[...] eu penso que uma actividade de investigação tem a ver com mais nós partirmos de uma coisa qualquer e a partir daí colocarmos duas ou três questões, mas em nenhuma das questões eles têm à primeira vista... eles não sabem muito bem o que vão procurar... (Entrevista 2)

Durante as reflexões conjuntas, Paulo revelou sempre dificuldades em enunciar as aprendizagens realizadas com a preparação e a condução da tarefa, referindo não se lembrar, ou não lhe ocorrer nada na altura.

Investigadora: E aprendizagens? O que é que esta tarefa te trouxe de novo? Fizeste alguma aprendizagem sobre os alunos, sobre a didáctica, sobre a pedagogia, a nível científico?

Professor: Aprendizagens... acho que nesta não houve assim nada...

Investigadora: Não te trouxe nada de novo?

Professor: Eu pelo menos não estou a ver! (Reflexão aula 3)

Nenhuma das fases do trabalho de preparar e conduzir tarefas de investigação parecem ter trazido novas aprendizagens ao professor, pelo menos às quais este atribuiu significado e importância, durante o estudo. No entanto, no final do estudo, o professor parece ter mudado de opinião. Assim, a planificação de tarefas de investigação parece ter trazido a Paulo uma nova visão enriquecedora de como devem ser planificadas e conduzidas as aulas e exploradas as tarefas de forma a tirar-se o máximo partido de todas as potencialidades das mesmas. Para o professor, estes aspectos não são frequentemente tidos em conta pelos professores, que acabam por não aprofundar muito certas tarefas devido a constrangimentos de diversa ordem, como sejam a falta de tempo e a pressão do cumprimento do programa.

Fiz! [Aprendizagens] Principalmente na questão que nós às vezes não nos preocupamos muito, devíamos preocupar-nos mais, às vezes também por falta de tempo [...] quando às vezes levamos um tarefa para dentro da sala de... somos um pouco condicionados pela questão de cumprirmos o programa e depois não exploramos também aquilo como poderíamos fazer... eu acho que isto enriqueceu-me um pouco na questão de... houve coisas que realmente não fazia a mínima ideia que aquilo não... “É pá há ali mais qualquer coisa que nós podíamos aprofundar um pouco mais” e nunca me apercebi que poderia aprofundar mais uma coisa porque não chegava lá ao ponto de investigar tão bem como deveria, eu acho que enriqueceu! (Entrevista 2)

Ao longo do estudo, notou-se um acréscimo da valorização das tarefas de investigação por parte de Paulo e este aspecto pode ter ficado a dever-se ao desempenho positivo que os seus alunos tiveram nas Provas de Aferição. Para o professor, o trabalho de investigação desenvolve o sentido crítico e o facto de os alunos olharem para uma resolução e avaliarem a razoabilidade da mesma na resposta ao problema foi uma das causas do referido sucesso.

[...] eu tive boas referências [sobre as tarefas de investigação], pois já o ano passado eles tinham trabalhado na formação da Matemática ali com a ESE. Este ano continuaram a trabalhar e fizemos este trabalho com eles de investigação e demos mais importância a esta parte da investigação e isso tudo e o que é facto é que eles me surpreenderam na Prova de Aferição! [...] Eu, por exemplo, surpreendi-me muito em 2 ou 3 problemas que lá estavam que requeriam assim um bocadinho mais de pensamento e isso tudo e vi que a maior parte dos alunos[...] eles pensaram bem para chegar ao resultado! [...]

Eu acho que uma das coisas que as investigações fazem é que eles começam-se a preocupar, porque as investigações resultam muito das descobertas deles, acabam por resultar muito do resultado em si, das coisas que vão descobrindo, mas têm que questionar como é que chegaram a esse resultado. E depois é através de fazerem este tipo de trabalho que eles se começam a aperceber que muitas das coisas que eles ao princípio lhes parecia lógico ser por ali, dá um resultado que afinal “isto não é possível!”, “vamos ver onde é que nós errámos” e começam a andar para trás e a verificar... começam a ter possibilidade de verificar onde é que têm o erro... eu penso que é assim! (Entrevista 2)

Também a ideia de que os alunos aprendem melhor através da descoberta parece ter saído fortalecida para Paulo com a participação neste estudo, pois refere que vai tentar no futuro que os alunos aprendam Matemática descobrindo eles próprios todos os conceitos, pois assim retêm melhor, pese embora os professores, como sublinha Paulo, ainda estejam muito habituados a fornecer as definições aos alunos:

É a gente deixar... ainda estamos muito agarrados a dar-lhes definições, etc., se nós os deixarmos serem eles a fazer essas definições, e é uma coisa que eu vou fazer esse ano, pelo menos com os meus de 5.º ano vou tentar fazer com eles, serem eles mesmo a descobrirem todos os conceitos, acho que eles assim retêm melhor se forem eles a descobrir. (Entrevista 2)

Parece também ter existido alguma valorização por parte do professor no que se refere à fase da discussão, pois no final do estudo, na última entrevista, Paulo parece ter mudado de opinião em relação ao seu desempenho, ao referir que a parte da discussão não foi tão bem conseguida por si quanto gostaria, como já foi discutido anteriormente. Também durante as aulas se notou alguma evolução neste aspecto por parte do professor, pois já apresentou pontualmente alguma preocupação com a justificação das ideias, aceitando que esta fase não fosse tão centrada na sua pessoa. Assim, o facto de o professor reconhecer que esteve menos bem na fase da discussão evidencia alguma reflexão sobre a sua acção e este aspecto talvez o tenha feito mudar de perspectiva em relação à natureza e importância da fase de discussão das tarefas de investigação.

Síntese dos principais aspectos da reflexão

As reflexões efectuadas pelo professor incidiram sobretudo nos alunos e na forma como estes aderiram às tarefas propostas, pois para este professor o sucesso da aula está muito dependente da aceitação dos alunos em relação à tarefa e também com o número de conjecturas que conseguiram formar.

Assim, refere que os alunos aderiram sempre bem às tarefas e que estiveram, de um modo geral, motivados durante as aulas, o que não se deveu à natureza das tarefas, mas por estas constituírem uma novidade para eles e possuírem o complemento do jogo e/ou dos materiais manipuláveis.

Para Paulo, foi importante a consciencialização por parte dos alunos de que estavam a aprender durante as aulas de investigação, pois de início pensavam que, por serem aulas divertidas e diferentes daquelas a que eles estavam habituados, não estavam a aprender nem sequer a trabalhar a Matemática, identificando este tipo de tarefas com uma actividade lúdica.

Paulo refere que a realização de tarefas de investigação trouxe aspectos positivos aos alunos, como o desenvolvimento do espírito crítico, do trabalho colaborativo, da capacidade de organizar dados e a consciencialização de que os conceitos matemáticos podem ser aprendidos de diferentes formas e não só a partir do manual.

Também as dificuldades sentidas pelo professor durante as aulas com tarefas de investigação estão essencialmente relacionadas com os alunos e traduziram-se nos aspectos problemáticos identificados nos mesmos. Assim, os aspectos que lhe dificultaram as aulas foram o facto de os alunos demorarem algum tempo a compreender a tarefa e a iniciá-la, de serem pouco autónomos, de sentirem pouca necessidade em realizar registos, de terem alguma dificuldade na comunicação verbal/escrita e na visualização espacial e de terem dificuldade na organização de dados. No que se refere a este último aspecto, Paulo considera que foi pouco trabalhado com os alunos; no entanto, sentiu alguma evolução por parte dos mesmos ao longo das aulas de investigação, tendo ficado surpreendido com os registos efectuados pelos alunos.

De todas as fases da aula com tarefas de investigação, a que mais gostou foi a fase do desenvolvimento, pois é a que considera mais importante para os alunos e onde os alunos o conseguiram surpreender com algumas descobertas realizadas.

Paulo encontrou sempre muitas dificuldades em referir concretamente que tipo de aprendizagens realizou com a preparação e a condução de tarefas de investigação

durante o estudo, parecendo que estas não lhes acrescentaram muito ao seu conhecimento profissional. No entanto, o professor parece ter valorizado a planificação das aulas, ao referir, aquando da entrevista final, que a planificação de tarefas de investigação lhe trouxe novos elementos acerca de como se deve planificar e conduzir uma aula de forma a aproveitar todas as potencialidades de uma tarefa.

Parece ter também existido uma mudança na valorização da fase de discussão de tarefas de investigação. Não obstante ao longo do estudo o professor não ter identificado aspectos menos conseguidos por si, no final do mesmo, a sua opinião parece ter mudado, tendo referido que a fase da discussão das aulas com tarefas de investigação não foi tão bem conseguida por si quanto gostaria. Este aspecto pode dever-se a uma evolução na importância atribuída a esta fase, resultante da reflexão sobre a sua prática.

Por fim, a ideia de que os alunos aprendem melhor e retêm melhor os conceitos que eles próprios descobrem parece ter saído fortalecida com a sua passagem por esta experiência, pois Paulo refere que futuramente irá tentar que os seus alunos descubram todos os conceitos a aprender.

Capítulo VIII

Conclusão

Este capítulo inicia-se com um resumo dos aspectos fundamentais do estudo. Em seguida, apresentam-se as principais conclusões do mesmo, organizadas por temas, com o intuito de responder às questões de investigação inicialmente formuladas, seguindo-se uma síntese das mesmas. Por último, tecem-se algumas considerações finais.

Síntese do estudo

Recorde-se que o objectivo do estudo era contribuir para a compreensão do conhecimento profissional do professor de Matemática, em particular do didáctico, envolvido no desenvolvimento de tarefas de investigação na sala de aula, de onde resultaram as quatro questões de investigação que se passam a enunciar:

1. Como é que os professores colocam em prática as tarefas de investigação, considerando a planificação e a condução das aulas?
2. Que dificuldades sentem os professores no desenvolvimento de tarefas de investigação na sala de aula?
3. Como é que o conhecimento didáctico dos professores influencia o desenvolvimento de tarefas de investigação?

4. Como é que o conhecimento didáctico dos professores é influenciado pelo desenvolvimento de tarefas de investigação?

O suporte teórico deste estudo assenta sobre as duas grandes temáticas do mesmo: o conhecimento profissional do professor e as tarefas de investigação. Assim, e uma vez que o professor é o cerne deste estudo, começa por discutir-se o conhecimento profissional do professor relativamente à sua natureza, estrutura e conteúdo. Em seguida, como as tarefas de investigação assumem aqui um papel privilegiado, quer pelo potencial pedagógico que encerram ao proporcionar aos alunos uma experiência matemática rica, quer como contexto para o estudo do conhecimento do professor pelos dilemas e desafios profissionais que lhe coloca o seu desenvolvimento, segue-se o seu aprofundamento teórico. Explicita-se a sua natureza, os processos matemáticos utilizados, a importância da sua utilização na sala de aula, a dinâmica de uma aula com este tipo de tarefas e o destaque que as tarefas de investigação ocupam nos documentos oficiais, em particular no Programa de Matemática do Ensino Básico, recentemente publicado. Por fim, numa terceira secção, apresenta-se uma revisão da investigação empírica realizada sobre o conhecimento do professor relativo ao desenvolvimento de tarefas de investigação na sala de aula, nomeadamente ao nível do conhecimento didáctico nas suas diferentes dimensões: conhecimento matemático; conhecimento dos alunos e da aprendizagem; conhecimento do currículo; conhecimento do processo instrucional.

O estudo, de natureza interpretativa, assumiu uma abordagem qualitativa, concretizando-se através de dois estudos de caso, uma vez que se pretendia a compreensão do conhecimento que os professores mobilizam para o desenvolvimento da sua prática lectiva envolvendo tarefas de investigação e perceber o que torna esse conhecimento particular tendo em conta o seu contexto real, dando-se particular importância à sua prática lectiva nos seus diferentes momentos: antes (preparação), durante (condução) e após (reflexão).

A recolha de dados decorreu durante o ano lectivo 2007/2008 e os dados recolhidos foram de natureza diversa. Utilizaram-se entrevistas semi-estruturadas e informais (preparação e reflexão sobre as aulas), observação da prática lectiva dos professores (aulas com desenvolvimento de investigações em turmas do 4.º e 6.º anos) e análise documental (análise dos guiões de preparação da aula, bem como os enunciados das tarefas). As gravações áudio das entrevistas semi-estruturadas e das entrevistas

informais foram transcritas, analisadas e cruzadas com os dados resultantes da observação das aulas, das quais se fizeram relatos detalhados, com a análise dos guiões de preparação de aula e com os enunciados das tarefas. Fez-se a análise de conteúdo da diversidade dos dados recolhidos, orientada pelas categoriais de análise, e produziram-se os casos, de onde resultaram as conclusões deste estudo, que se apresentam em seguida.

Conclusões do estudo

Este ponto está organizado segundo as quatro grandes temáticas que nortearam este estudo, decorrentes das questões de investigação formuladas, tendo em conta os pressupostos teóricos adoptados e os resultados obtidos. Essas temáticas são as seguintes: caracterização da prática lectiva dos professores envolvendo investigações; identificação das dificuldades sentidas pelos professores na sua prática lectiva envolvendo investigações; identificação das influências do conhecimento didáctico na prática lectiva envolvendo investigações; e as influências da prática lectiva com investigações no desenvolvimento do conhecimento didáctico dos professores.

Em cada uma destas temáticas apresentar-se-ão os resultados referentes a cada um dos professores e, em seguida, estabelecer-se-á um paralelo entre ambos, de forma a identificar quais são os aspectos da prática lectiva com investigações que lhes são comuns e os aspectos que os distanciam, tentando perceber a que se ficam a dever.

Caracterização da prática lectiva envolvendo investigações

A planificação. No que diz respeito à selecção das tarefas, a possibilidade da sua integração nos conteúdos programáticos da disciplina foi o aspecto que os professores consideraram mais importante. No entanto, tiveram também em consideração outros factores, como a adequação das tarefas à faixa etária dos alunos e aos seus gostos e interesses. No caso de Petra, a selecção das tarefas foi ainda

influenciada pela sua preocupação com a diversificação das mesmas, a nível do grau de exigência, dos materiais a utilizar, dos conteúdos a mobilizar e das áreas da Matemática a abordar.

Quanto à importância atribuída à planificação de tarefas de investigação, ambos os professores consideram esta fase muito importante e determinante para o sucesso da aula; no entanto, esta planificação parece servir diferentes finalidades para os mesmos.

A grande prioridade de ambos professores, na altura de planificarem as suas tarefas de investigação, foi a preparação científica com a antevisão das descobertas a que os alunos poderiam chegar, de forma a diminuir o grau de incerteza e insegurança na aula. Tal como referem Clark e Yinger (1987), esta é uma das causas mais frequentes que levam os professores a planificar. Para Paulo, esta era a grande finalidade da planificação de tarefas de investigação, embora o fizesse com uma profundidade relativa, aspecto que o levou a omitir algumas descobertas a que os alunos poderiam chegar e a apresentar algumas descobertas incorrectas de ponto de vista matemático. Petra, por seu turno, parecia ter uma visão mais ampla das finalidades da planificação, pois, segundo a mesma, uma boa planificação permitia-lhe uma organização eficaz da aula, sendo este aspecto evidente através da completude dos guiões de preparação realizados pela professora, que valorizavam igualmente factores como a correcção e a justificação das ideias matemáticas apresentadas, o alcance das questões a colocar aos alunos, o tempo, os objectivos e a forma como pensava conduzir a aula, todos estes aspectos adaptados à tarefa em questão. Por conseguinte, esta fase resultava morosa, exigente e difícil de realizar com frequência; no entanto, revelava-se muito compensatória pelas aprendizagens e pelo desafio intelectual que proporcionava.

A fase de introdução. Esta foi a fase menos demorada para ambos os professores, ocupando em média cerca de 15 minutos do início da aula. Para Petra, esta fase deve ser breve, sob pena de o tempo dispendido poder inviabilizar o desenvolvimento da tarefa. No entanto, numa das tarefas necessitou-se alongar mais do que o normal para ensinar alguns conteúdos que os alunos não possuíam e eram importantes para a compreensão e o desenvolvimento da mesma. Paulo considera-a uma das fases mais importantes, referindo que dela depende o êxito da tarefa.

Ambos os professores tentaram nesta fase garantir a compreensão da tarefa por parte dos alunos, embora o tenham feito de modos distintos. Paulo começava por distribuir o enunciado da tarefa e, quando necessário, o material de suporte; lia em

seguida o enunciado em voz alta enquanto colocava algumas questões aos alunos no sentido de esclarecer dúvidas acerca dos conceitos envolvidos na mesma. No entanto, reservava a interpretação e a compreensão da tarefa aos alunos, parecendo confiar no seu enunciado. Petra entendia que, dada a faixa etária dos seus alunos, a tarefa não deve ser assim apresentada “a seco” e, assim, tentava sempre desafiar a motivação e a imaginação dos alunos e/ou fazer analogias com outras tarefas, tal como aponta Ponte (2003). Após a mobilização dos alunos para a tarefa, distribuía o enunciado, explicava-lhes os objectivos e os produtos que se esperava deles e concluía com a distribuição do material de suporte necessário. Para além do exposto, Petra ainda reforçava sempre as regras de trabalho em grupo.

Durante a introdução, houve outros aspectos que os professores consideraram ser necessário fortalecer, nomeadamente aspectos característicos do trabalho investigativo, como a importância de registarem as suas conjecturas e de testarem e discutirem a validade das mesmas no seio do grupo.

O desenvolvimento da tarefa. Tanto Petra como Paulo atribuíram muita relevância à fase de desenvolvimento da tarefa. Ambos consideraram que esta é a fase mais importante para os alunos pelas competências que lhes desenvolve e é aquela que eles mais apreciam. De todas as fases da aula com trabalho investigativo, esta foi a que Paulo mais valorizou e este aspecto foi evidente através do tempo que dedicou à exploração da tarefa, quer nos guiões de preparação das aulas quer nas aulas propriamente ditas, prolongando-as sempre que necessário e encurtando o tempo destinado à discussão da tarefa. Já Petra dedicou exactamente o mesmo tempo às fases de desenvolvimento e discussão da tarefa, quer nos guiões quer nas aulas.

No que concerne ao papel dos professores nesta fase, ambos iam circulando pelos grupos para se inteirarem do trabalho que os alunos estavam a desenvolver, para verificarem se estes tinham compreendido os objectivos da tarefa e se havia algum obstáculo ao desenvolvimento da mesma. Petra percorria todos os grupos interagindo com os mesmos, questionando-os acerca do desenvolvimento do seu trabalho e apercebendo-se do rumo que o mesmo estava a tomar. As solicitações à presença da professora nos grupos era frequente, esforçando-se esta por lhes prestar um apoio equitativo e por estar quase sempre presente por lhe parecer que assim o tempo era melhor rentabilizado pelos alunos. No caso de Paulo, a sua presença nos grupos era muito solicitada no início da exploração da tarefa, que era normalmente lento, embora

posteriormente o professor tentasse libertar os grupos de forma a que estes trabalhassem de forma mais autónoma, aspecto que nem sempre foi conseguido pelos alunos, sendo mais relevantes as suas intervenções quando solicitado. Os alunos de ambos os professores gostavam de obter a aprovação do trabalho realizado, solicitando a presença dos mesmos para lhes colocar questões ou para lhes mostrar o que tinham descoberto até então e este aspecto parece estar relacionado com aquilo que é habitual fazerem nas suas aulas.

Por vezes, foi necessário descercar o trabalho dos alunos fornecendo informações sobre conteúdos ou pistas para os alunos progredirem na tarefa. Ambos os professores tentaram apoiar os alunos sem lhes dar respostas, mantendo uma atitude questionadora. Paulo, por não ter uma preocupação com o tempo tão presente quanto Petra, pois se necessitasse de mais tempo retirá-lo-ia àquele que estava reservado para a discussão, desempenhou melhor este papel nas primeiras aulas.

Outro aspecto do papel dos professores nesta fase foi fortalecer a importância do registo. Ambos os professores consideram bastante importante o facto de os alunos registarem as suas conjecturas como modo de organização das ideias e do trabalho para a fase de discussão, de forma a não perderem nenhum elemento significativo. Este aspecto parece ser uma preocupação habitual nas suas aulas.

O incentivo ao teste e à discussão de conjecturas no seio do grupo foi outro aspecto que os professores tentaram não descurar, lançando questões para o grupo e tentando que, através do teste das conjecturas, do confronto de ideias e de argumentação das mesmas, os alunos conseguissem ultrapassar os seus obstáculos.

Ambos os professores foram também chamados a resolver conflitos pontuais dentro dos grupos, embora no caso de Paulo este aspecto fosse mais frequente devido à pouca familiaridade e resistência dos alunos com o trabalho em grupo.

Para além dos aspectos anteriores, Petra considerou ainda fundamental nesta fase insistir na justificação das ideias e apelar à generalização, aspectos já identificados como importantes por Ponte *et al.* (2005) para os alunos compreenderem o carácter provisório das conjecturas e desenvolverem esta capacidade de uma forma progressiva como uma necessidade própria. Este aspecto é concordante com os guiões de preparação das aulas que a professora realizou, bem como com a preocupação evidenciada na fase de discussão de que todas as ideias apresentadas fossem justificadas, com um forte apelo à generalização das mesmas.

Verificou-se também que, por vezes, a professora se envolveu em raciocínio matemático nos grupos para compreender conjecturas formadas pelos alunos. Na realidade, a observação do professor em actividade matemática ajuda a desenvolver a sua capacidade matemática e a apreender a essência desta ciência, conforme referem Oliveira *et al.* (1999c). Esta necessidade parece ser decorrente de o facto de a professora precisar de compreender todas as conjecturas formadas pelos alunos para melhor apoiar os grupos, conjecturas essas que por vezes saíam do âmbito investigação por si realizada na fase de planificação.

O trabalho dos professores nesta fase culminava com a selecção das conjecturas que os grupos iam apresentar, por ordem crescente de complexidade, aspecto que nem sempre foi bem conseguido pelos mesmos, como adiante se explica.

A discussão da tarefa. As concepções dos professores em relação à fase de discussão de tarefas de investigação, bem como as perspectivas de cada um em relação à sua importância e propósito mostraram-se bastante divergentes. Para Petra, esta fase é crucial para o professor, por permitir num só momento o cumprimento de vários objectivos e o desenvolvimento de várias competências nos alunos como: consolidação das descobertas realizadas, através da sua justificação e generalização; aprofundamento de ideias matemáticas e estabelecimento de conexões entre elas; desenvolvimento da comunicação matemática dos alunos; *feedback* acerca do domínio de alguns conhecimentos por parte dos alunos. Para Paulo, a preocupação maior era a divulgação do trabalho realizado pelos grupos.

A importância que Petra atribuía a esta fase foi visível, desde logo, através do tempo que lhe dedicou quer nos guiões de planificação, quer durante as aulas propriamente ditas. Este aspecto contrasta com a postura de Paulo, que dedicava, na planificação das suas aulas, um tempo bem mais reduzido relativamente ao que reservava para a fase de desenvolvimento e, para além disso, esse tempo era por vezes abreviado devido à necessidade que sentia em prolongar o mais possível a fase de desenvolvimento da tarefa.

A grande preocupação dos professores nesta fase foi garantir a coerência do discurso dos alunos relativamente às ideias que estavam a ser apresentadas de forma a que estas fossem compreendidas por toda a turma. No entanto, Petra procurou essa coerência promovendo a interacção aluno-aluno, num processo de argumentação e

contra-argumentação envolvendo todos os alunos, interferindo apenas para moderar o discurso e para responsabilizar o grupo a apresentar pelo desenvolvimento do mesmo; já Paulo promoveu a interação professor-aluno, envolvendo na maior parte das vezes apenas o grupo a apresentar as suas descobertas, estando sobretudo dependente de si a validação/rejeição das ideias apresentadas.

Tanto Petra como Paulo evidenciaram nesta fase a preocupação com o rigor da linguagem matemática utilizada, interferindo várias vezes para solicitar aos alunos que clarificassem a sua linguagem e que auxiliassem a sua explicação com os dados constantes no material de apresentação. Ambos os professores, no final de cada intervenção dos grupos, fizeram uma síntese ou explicaram as ideias apresentadas por outras palavras de forma a garantir a sua compreensão pelos restantes alunos da turma.

Quanto ao momento de discussão, se para Paulo esta foi sempre realizada no final da aula, Petra parou a exploração de uma tarefa para discutir alguns aspectos importantes para a progressão dos alunos na mesma, corroborando o exposto por Tudella *et al.* (1999), segundo os quais o professor deve realizar uma discussão sempre que considerar oportuno.

Petra é da opinião que todos os alunos, dada a sua faixa etária, devem participar da parte de discussão, partilhando as descobertas realizadas, uma vez que esta é uma forma de ver o seu trabalho valorizado. Paulo parece não ter tão presente esta preocupação; no entanto, verificou-se que quase sempre solicitou o contributo de todos os grupos.

Dificuldades na prática lectiva envolvendo investigações

Tanto Petra como Paulo iniciaram esta experiência no mesmo ponto de partida, estreando-se ambos no desenvolvimento de tarefas de investigação. A implementação deste tipo de tarefas na prática lectiva dos professores exigiu uma metodologia complexa tendo-lhes colocado várias dificuldades, quer na planificação, quer na condução das suas aulas.

No que concerne à planificação, enquanto que Paulo não referiu dificuldades nesta fase, talvez devido às suas planificações evidenciarem pouco aprofundamento, para Petra, que planificava com bastante profundidade as suas aulas, as dificuldades

surgiram. Assim, Petra considerava a planificação de tarefas de investigação morosa, exigente e difícil de realizar com frequência. A principal dificuldade sentida foi colocar-se no papel dos alunos e antever todas as descobertas que estes poderiam realizar de forma a diminuir o grau de incerteza da tarefa. Também a inventariação das questões a realizar na aula para orientar e desbloquear o trabalho dos alunos, as quais considera de extrema importância, lhe exigiram muito tempo.

A segurança científica foi um dos “cavalos de batalha” de Petra. Este aspecto fez-lhe ter tido um trabalho bastante intenso no que refere à planificação das aulas, identificando alguns aspectos mais frágeis do seu conhecimento, nomeadamente no que se refere a algumas áreas que tiveram e têm tido, até então, incidência muito reduzida no 1.º Ciclo e na formação da professora ao longo do seu percurso académico, como é o caso das Probabilidades e da Geometria, fragilidades essas que colmatou através de pesquisa e do trabalho colaborativo. Quanto a Paulo, o facto de o professor ter dispensado pouco tempo à planificação não o deixou tomar consciência das suas dificuldades, algumas também relacionadas com o tema Probabilidades.

Já no que diz respeito à condução de tarefas de investigação na sala de aula, enquanto que para Petra a fase de introdução cumpriu o seu papel, para Paulo esta resultou insuficiente para a compreensão dos objectivos da tarefa por parte dos seus alunos, pois após a introdução da mesma a sua presença era muito solicitada junto dos grupos. Este aspecto pode ter ficado a dever-se em primeiro lugar à inexperiência dos alunos em aulas com tarefas pouco estruturadas e, em segundo lugar, à falta de familiaridade com o trabalho em grupo que os faziam estar envolvidos em conflitos no início da tarefa, sem prestarem atenção ao que o professor expunha.

Quanto ao desenvolvimento das tarefas de investigação, Petra identificou nesta fase dois aspectos controversos relacionados entre si: a gestão do tempo e o seu papel em apoiar os grupos. Assim, Petra reconhece que o seu papel em algumas tarefas não se coadunou com aquele que era suposto desempenhar, pois a consciência da escassez do tempo condicionou o seu desempenho, tal como referem Ponte *et al.* (1998a), fazendo com que fosse mais directiva nas suas intervenções, limitando um pouco os percursos de investigação dos alunos e dando respostas às questões dos mesmos. Por outro lado, foi difícil dar um apoio efectivo e equitativo aos grupos em tempo útil numa turma numerosa e heterogénea como a sua.

O conhecimento dos seus alunos e da forma entusiasta como se envolviam neste tipo de tarefas fez Petra antever que o tempo reservado para o desenvolvimento das

mesmas resultaria pouco para a exigência pedida. Com o intuito de aumentar o tempo, pensou que o ideal seriam duas aulas, uma para a exploração da tarefa e outra para a sua discussão, o que acabou por acontecer e resultar bastante proveitoso, sem pôr em causa nenhum aspecto do trabalho realizado, o que vai um pouco ao encontro do exposto em Ponte *et al.* (1998a). Na realidade, como referem estes autores, desde que o professor crie uma boa interacção entre o trabalho realizado durante a exploração da tarefa, os resultados obtidos e a reflexão sobre eles, pode realizar-se o trabalho de investigação num dia e a sua discussão na aula seguinte.

Paulo, por seu turno, não manifestou dificuldades relacionadas com a gestão do tempo da aula. Por um lado, considerava que os noventa minutos seriam suficientes para os alunos progredirem na tarefa, se estes estivessem motivados e predispostos para o trabalho da aula. Além disso, considerava que, caso os alunos revelassem dificuldades na realização da tarefa, estas não seriam superadas por se dar mais tempo, mas sim com uma intervenção directiva da sua parte. Por outro lado, se a fase de desenvolvimento se alongasse, Paulo reduzia o tempo da fase de discussão, sem que esse aspecto parecesse constituir para si um problema.

Ainda no que concerne a esta vertente do papel do professor, verifica-se que o apoio a conceder aos alunos no decurso da actividade foi influenciado pelas características da tarefa, bem como pela (in)segurança do professor em relação à mesma. As tarefas mais complexas necessitaram que Petra fosse mais do que uma mera orientadora do trabalho dos alunos. Também a insegurança da professora em relação aos conteúdos que a tarefa mobilizava a levavam a ser mais interventiva e directiva nas suas exposições e a validar inadvertidamente conjecturas aos alunos. De igual modo, Paulo teve de fornecer um maior apoio aos grupos, sendo este mais do que um mero orientador do seu trabalho, em tarefas de natureza mais complexas para eles.

A preparação da fase de discussão, através da selecção das descobertas mais importantes de cada grupo e a sua seriação por ordem de complexidade, resultou difícil para os professores e nem sempre foi bem conseguida pelos mesmos, uma vez que este aspecto requer um bom conhecimento do trabalho de todos os grupos, tal como refere Oliveira (1999a). Com efeito, este aspecto resultou difícil pelas turmas serem numerosas e por requerer algum tempo, que por vezes os professores não conseguiram dispensar.

De todas as fases da aula com investigação, foi na discussão onde mais se acentuaram as diferenças existentes entre estes dois professores e este aspecto parece

estar relacionado, desde logo, com a familiaridade dos professores com o desenvolvimento de tarefas de natureza mais aberta, bem como com a concepção que têm relativamente à importância e ao propósito desta fase. Enquanto para Petra, por estar habituada a trabalhar com tarefas de natureza menos estruturada, esta fase é muito importante, exigente e o tempo resulta pouco para todos os objectivos a atingir e competências a desenvolver nos alunos, as discussões de Paulo acabaram por não cumprir o seu papel, pois o professor desvalorizou esta fase.

A comunicação matemática parece ser um aspecto problemático para os alunos dos dois professores, aspecto também identificado como complexo por Ponte (2003). Petra refere que os alunos, por vezes, ainda não possuem o vocabulário suficiente para explicitarem as suas ideias. Há que desenvolver esta competência e a fase de discussão de tarefas de investigação é um momento óptimo para o fazer, pese embora o tempo seja um seu grande inimigo, pois os alunos precisam de tempo para organizarem o seu discurso e o seu pensamento. Se as descobertas feitas no seio de cada grupo são facilmente compreendidas, a sua partilha em grande grupo aos colegas que não participaram delas, torna-se mais complexa.

Outro aspecto problemático identificado por Petra foi o desenvolvimento da generalização das ideias por parte dos alunos, pois a professora refere que, dada a faixa etária dos alunos e a sua dificuldade em lidar com o abstracto, esta competência é difícil de desenvolver. Assim, a professora tentou adequar o nível de exigência à faixa etária dos alunos, de tal modo que os alunos conseguissem, pelo menos, chegar mais longe do que lhes era pedido, não deixando que este aspecto importantíssimo das tarefas desta natureza passasse em branco. Para Paulo, esta não foi uma preocupação que tivesse evidenciado durante as aulas.

Influências do conhecimento didáctico na prática lectiva envolvendo investigações

A prática dos professores foi inevitavelmente influenciada pelo seu conhecimento didáctico nos seus quatro domínios: o conhecimento da Matemática, o conhecimento dos alunos e dos seus processos de aprendizagem, o conhecimento do currículo e o conhecimento do processo instrucional (Ponte, 1996b; Canavaro, 2003). É sabido que as componentes do conhecimento didáctico se influenciam mutuamente (Canavaro, 2003) e, por isso, para compreender a forma como este condiciona o

desenvolvimento de tarefas de investigação, interessa analisar o contributo de cada uma das suas componentes.

No que diz respeito ao conhecimento da Matemática, Paulo e Petra parecem ter uma visão diferente acerca da natureza e da importância da Matemática. Para Petra, o conhecimento está em constante evolução e por isso nunca é suficiente. Considera importante a aprendizagem da Matemática por permitir que os alunos aprendam a pensar e a raciocinar, aprendam a resolver questões e problemas do mundo que os rodeia. Já para Paulo, a Matemática é uma ciência mais exacta que outras e, embora evolua, não evolui assim tanto. Quanto à importância que o professor atribui à aprendizagem da Matemática, refere costumar expressá-la aos seus alunos através de frases como: “Tudo o que nós temos à nossa volta é Matemática”, “Vocês não dão um passo sem estar a utilizar Matemática”, não obstante eles, por vezes, ignorarem o papel da Matemática no mundo que os rodeia, como refere.

Assim, no ensino-aprendizagem da Matemática, Paulo valoriza, sobretudo, objectivos relacionados com o domínio de conteúdos, com a memorização e com o cálculo. Já Petra, privilegia competências mais complexas necessárias à resolução de problemas. Este aspecto pareceu, desde logo, por um lado, influenciar a forma como os professores aderiram e sentiram o desenvolvimento de tarefas de investigação: Petra desde o início revelou-se muito entusiasmada e até surpreendida com o potencial pedagógico deste tipo de tarefas; Paulo demorou mais tempo a atribuir-lhes importância, vendo-as sobretudo como tarefas lúdicas. Por outro lado, a calculadora, que costuma ser elemento pouco presente nas aulas de Paulo, foi-o também durante as aulas com tarefas de investigação, pois para além de lhe reconhecer como benefício único o facto de facilitar os cálculos morosos, para este professor o uso da calculadora nas aulas inviabiliza o desenvolvimento do cálculo. Petra, por seu turno, refere utilizar a calculadora pontualmente em tarefas de natureza complexa que exijam a realização de muitos cálculos, bem como para desenvolver o cálculo mental. Por conseguinte, apelou bastante ao seu uso durante as aulas com tarefas de investigação e reconhece que, sem calculadora, o desenvolvimento de algumas tarefas teria sido inviabilizado.

As diferentes visões que os professores possuem acerca das finalidades e dos objectivos do ensino-aprendizagem da Matemática parecem influenciar também outros aspectos referentes às tarefas de investigação, como a importância atribuída à planificação. Enquanto para Paulo a sua planificação incidia sobretudo na parte científica, nos conteúdos que a tarefa mobilizava, Petra evidenciava igualmente

preocupação com outros aspectos como a metodologia, o tempo, a forma como pensava conduzir a aula, as questões a colocar aos alunos e os objectivos a atingir. Foi também notório este aspecto ao longo da condução das tarefas em que Paulo valorizava sobretudo a quantidade de descobertas realizadas e apresentadas, em detrimento da sua justificação e compreensão, aspectos bem presentes nas aulas de Petra.

Embora a formação matemática dos professores seja diferente, o que se deve fundamentalmente ao facto de a formação inicial dos professores ser distinta, essas diferenças não foram determinantes nem muito evidentes neste estudo, tendo-se contudo verificado algumas fragilidades no que se refere à área Probabilidades no conhecimento matemático de ambos os professores.

A visão que os professores possuem do seu próprio conhecimento matemático revelou-se importante, pois enquanto Paulo parecia confiar indubitavelmente no seu conhecimento matemático, Petra revelou-se menos confiante, principalmente em tarefas cujo âmbito transcendia o currículo do 1.º Ciclo. Este aspecto levava-a a explorar com bastante profundidade cada uma das tarefas e as ideias matemáticas que as mesmas mobilizavam, enquanto Paulo parecia contentar-se com uma ou outra ideia mais evidente das mesmas, confiando mais na sua capacidade de lidar com o imprevisto.

Quanto ao conhecimento que os professores possuíam dos seus alunos, este parece ter influenciado as decisões dos mesmos em alguns aspectos das tarefas de investigação. Ambos referem que, dada a faixa etária dos alunos, as tarefas que estes mais apreciam são as que possuem o complemento do jogo ou dos materiais manipuláveis, tendo este aspecto constituído um critério de selecção das tarefas, principalmente para Paulo. Petra teve igualmente em consideração outros aspectos, como o grau de complexidade das tarefas e a diversidade de conhecimentos e de áreas da Matemática que mobilizavam.

Paulo e Petra parecem ter visões diferentes acerca da forma como os alunos aprendem. Para Petra, os alunos só aprendem Matemática se se envolverem nas tarefas e se tiverem um papel activo na sua aprendizagem, algo que não é muito comum no ensino ainda instaurado, centrado na figura do professor, ao qual se deve a falta de entusiasmo dos alunos pela Matemática e o conseqüente insucesso na disciplina. Para Paulo, o insucesso dos alunos deve-se ao facto de o ensino hoje em dia não valorizar tanto a memorização e também devido à imagem negativa que os alunos têm da Matemática. Petra privilegia, nas suas aulas, tarefas em que os alunos sejam responsáveis pela sua aprendizagem, com base na resolução de problemas e nas tarefas

exploratórias, sendo o trabalho que os alunos realizam nas aulas semelhante ao trabalho realizado nas aulas de investigação. Também Paulo refere que privilegia nas suas aulas a aprendizagem por descoberta; no entanto, este aspecto parece ser contraditório em relação à sua prática. Assim, verifica-se que os alunos de Petra tiveram mais facilidade em iniciar as tarefas, uma vez que a familiaridade com o trabalho autónomo e com a metodologia de trabalho em grupo parece ser promotora do trabalho investigativo. Pelo contrário, os alunos de Paulo, por estarem habituados a um tipo de aulas onde têm pouco protagonismo na sua aprendizagem, geraram muitos conflitos quando tiveram de trabalhar em grupo e revelaram-se muito pouco autónomos no início das tarefas, o que dificultou o trabalho com tarefas de investigação.

Também o conhecimento instrucional necessário ao desenvolvimento de tarefas de investigação parece ser beneficiado pela experiência dos professores com o desenvolvimento de tarefas de natureza mais aberta e mais centradas na actividade dos alunos. Verifica-se que Paulo desvalorizou a fase de discussão da tarefa e revelou dificuldades na gestão da mesma. Este aspecto parece ter ficado a dever-se, principalmente, à falta de experiência do professor em gerir e estimular a participação dos alunos neste tipo de trabalho, à fraca familiarização dos alunos com esta dinâmica de aula e à consequente dificuldade na comunicação matemática, como também refere Ponte (2003).

No que diz respeito ao conhecimento do currículo, Paulo parece não considerar que as tarefas de investigação façam parte do programa, uma vez que afirma que gostaria de realizar mais investigação com os seus alunos, mas no final o que lhe exigem é o “cumprimento do programa”, parecendo ser o manual o principal instrumento de mediação da sua prática. Petra, por seu turno, parece ter uma perspectiva completamente diferente ao referir que as tarefas de investigação promovem o cumprimento do programa. Verifica-se que ambos os professores seleccionaram as tarefas de acordo com a sua possibilidade de enquadramento no mesmo. Referem ambos ser importante que as tarefas estejam relacionadas com os conteúdos leccionados ou a leccionar; no entanto, é Petra quem manifesta esta preocupação de uma forma mais premente, muito provavelmente porque visa a sua integração curricular, enquanto Paulo as vê como algo mais acessório.

Desenvolvimento do conhecimento didáctico decorrente da prática lectiva envolvendo investigações

O conhecimento que os professores foram construindo acerca da prática lectiva envolvendo tarefas de investigação foi um saber resultante da experiência neste projecto, já que para ambos este tipo de tarefas constituía uma novidade. O significado que os professores construíram acerca da natureza destas tarefas apresenta alguns aspectos comuns. Paulo considera que são tarefas pouco direccionadas, em que por vezes o ponto de partida não está muito claro para os alunos, mas depois o professor vai-lhes colocando questões no sentido de os orientar. Para Petra, as tarefas de investigação possuem um carácter aberto e divergente, pois existe um ponto de partida que pressupõe várias abordagens e conseqüentemente vários pontos de chegada, não existindo uma resposta correcta.

Ao longo das sessões, Petra foi-se enquadrando cada vez mais no perfil do professor que desenvolve aulas de investigação, perfil esse que lhe assentou na perfeição. De aula para aula, crescia a sua identificação com este tipo de tarefas, de tal forma que a sua acção foi sendo cada vez mais consentânea com aquilo que caracteriza o trabalho de um professor numa aula de investigação de acordo com Ponte (2005). As mudanças que foi realizando na sua prática nasceram de uma necessidade própria resultante da reflexão acerca da sua acção. Este aspecto parece dever-se ao facto deste ser o tipo de trabalho que Petra privilegia nas suas aulas e esta ser uma metodologia familiar para a professora.

Este estudo parece ter trazido a Petra uma perspectiva diferente relativamente às potencialidades das tarefas matemáticas a desenvolver na sala de aula. Se, no início, considerava os problemas como as suas tarefas de eleição, com esta experiência refere ter ficado uma entusiasta das tarefas de investigação, reconhecendo-lhes inúmeras potencialidades por estas ajudarem a fortalecer e a consolidar conhecimentos, mobilizando saberes das mais diversas áreas da Matemática e desenvolverem várias competências nos alunos, como o raciocínio matemático, o poder de argumentação, o espírito crítico e a comunicação matemática. Também para Paulo se notou um acréscimo da valorização das tarefas de investigação. Se, no início do estudo, Paulo parecia reduzir as tarefas de investigação a uma espécie de actividade de carácter lúdico, o professor parece ter desenvolvido uma visão mais completa das tarefas de investigação, referindo que estas ajudaram no desenvolvimento do espírito crítico dos

alunos, e este aspecto parece ter beneficiado a realização das Provas de Aferição, como refere.

Relativamente às aprendizagens que os professores referem ter realizado com este estudo, verifica-se também neste aspecto duas perspectivas completamente diferentes. Paulo apresentou sempre muitas dificuldades em enunciar aprendizagens realizadas, tendo tido, na maior parte do tempo, a convicção que este estudo não lhe havia acrescentado nada de novo, tendo apenas na entrevista final enunciado dados a este respeito. Petra, por seu turno, sempre referiu ter realizado inúmeras aprendizagens relativamente a esta experiência, desde o seu início.

Uma das componentes do seu conhecimento que Petra considerou ter saído beneficiada foi o conhecimento científico. A professora refere que o desenvolvimento de tarefas de investigação lhe permitiu fortalecer o seu conhecimento matemático e colmatar algumas fragilidades do mesmo, no que se refere por exemplo às Probabilidades e à Geometria, através da planificação das tarefas, em que teve de pesquisar muito e recorrer ao trabalho colaborativo, e pelas descobertas que realizou, pois, para além dos seus alunos, também ela realizou trabalho investigativo. Por conseguinte, estas tarefas são uma mais valia pelas aprendizagens, pelo entusiasmo e pelo desafio intelectual que proporcionam. Paulo pôde, pelo menos, aperceber-se que existem áreas do seu conhecimento que necessitam de um maior investimento, embora não tenha feito referência explícita a este aspecto. Ainda relativamente ao conhecimento matemático, Petra refere que o professor deve ter uma boa preparação a nível científico para desenvolver este tipo de tarefas. Para o efeito, deve ser dada formação aos professores para estes poderem estar à altura deste desafio e para que as tarefas de investigação tenham o reflexo desejado nas suas práticas.

Também o conhecimento dos alunos e da forma como aprendem parece ter saído fortalecido para ambos os professores. Petra refere ter ficado ainda mais convicta de que as tarefas em que os alunos têm um papel activo na sua aprendizagem são de privilegiar na sala de aula, pela motivação e pelo entusiasmo que lhes proporcionam e pela riqueza de aprendizagens realizadas, que são mais interactivas e abrangentes, permitindo-lhes perspectivar a essência da Matemática e a sentir prazer com a aprendizagem da disciplina. Também Paulo, no final do estudo, afirmou, de uma forma mais convicta e consistente do que havia realizado no início, que os alunos retêm melhor os conceitos quando os aprendem por descoberta e é desta forma que no futuro pretende que os seus alunos aprendam, ao invés de lhes fornecer as definições.

Quanto ao conhecimento referente à prática lectiva, a planificação de tarefas de investigação parece ter acrescentado elementos novos ao conhecimento dos dois professores, tendo-lhe ambos reconhecido muita relevância. Petra refere ter aprendido como se realiza correctamente uma planificação, tendo ressaltado a importância de prever todas as descobertas que os alunos poderiam chegar na tarefa e de inventariar quais as questões que lhes deveria colocar. A professora é da opinião que uma boa planificação, em que o professor se debruce sobre os vários aspectos, como a metodologia, a forma de condução da aula, as questões a colocar e que conhecimento pode advir da mesmas, é já uma garantia de sucesso da aula. Paulo considera que a planificação de tarefas de investigação lhe trouxe uma visão enriquecedora de como devem ser exploradas e conduzidas as tarefas de forma a tirar o máximo de partido das suas potencialidades, aspectos que não são frequentemente tidos em conta pelos professores devido a constrangimentos de vária ordem, como a falta de tempo e a pressão do cumprimento dos programas, como refere.

Durante esta experiência, Petra pôde aperceber-se de quão importante é dosear o apoio fornecido aos grupos. Verificou que, se durante a fase de desenvolvimento da tarefa validasse as conjecturas dos seus alunos, a fase de discussão sairia empobrecida e perder-se-iam várias potencialidades da mesma, como o poder de argumentação, a justificação de ideias matemáticas. Para além disso, os alunos perderiam o entusiasmo, por não se sentirem muito envolvidos nesta fase, já que considerariam que todas as ideias que iriam ser apresentadas já teriam passado pelo escrutínio da professora. Para fazer face ao exposto anteriormente, Petra decidiu que a validação/rejeição de conjecturas seria realizada pelos alunos aquando da discussão. A reflexão sobre a sua acção foi muito importante para esta professora e fê-la tomar decisões que nasceram de uma lógica própria no sentido de resolver algumas problemáticas da sua prática.

Quanto a Paulo, a sua concepção sobre a fase de discussão parece ter sofrido algumas alterações, pois no final do estudo Paulo reconheceu que o seu desempenho nesta fase não foi tão positivo quanto gostaria. Este aspecto pode ter nascido da reflexão do professor sobre a sua acção, da qual resultou uma mudança na sua perspectiva em relação a esta fase, a qual foi sempre muito limitada. Se, durante todo o estudo, Paulo resumiu a fase de discussão a um apresentar das conclusões dos alunos, no final do mesmo Paulo já evidenciou alguma preocupação com a justificação das ideias matemáticas apresentadas e estimulou a interacção aluno-aluno.

Em suma, o desenvolvimento de tarefas de investigação proporcionou aprendizagens pelos professores em várias componentes do seu conhecimento didáctico.

Síntese das conclusões

Neste ponto, apresentar-se-á um olhar transversal sobre as conclusões apresentadas anteriormente, de forma a extrair o essencial das mesmas e responder às questões de investigação inicialmente formuladas.

Como é que os professores colocam em prática as tarefas de investigação, considerando a planificação e a condução das aulas?

- A *planificação* de tarefas de investigação serve o propósito principal de reduzir o grau de indeterminação da tarefa, constituindo-se num elemento de segurança para os professores em estudo. O aspecto da planificação que é mais valorizado é a parte científica referente à Matemática – “estudar a tarefa em si”; no entanto, parece ser igualmente importante a dedicação a outros aspectos da mesma, como a metodologia, as questões a colocar aos alunos e a condução da aula para garantir o sucesso da mesma. A planificação que engloba os vários elementos da prática lectiva envolvendo tarefas de investigação constitui uma aposta no sucesso da aula;
- O principal critério para a *selecção de tarefas de investigação* é a possibilidade de enquadramento nos conteúdos programáticos;
- A fase de *introdução* é de todas as fases da aula com tarefas de investigação a mais breve. O principal objectivo desta fase é a compreensão da tarefa pelos alunos. Existem outros aspectos que Petra e Paulo consideraram importantes, uns relacionados com o reforço de alguns aspectos metodológicos, como a necessidade do registo e do teste e discussão das conjecturas no seio do grupo; outros com a motivação dos alunos para a tarefa, criando um ambiente estimulante;

- A fase de *desenvolvimento* da tarefa parece ser considerada por estes professores a fase mais importante para o desenvolvimento de competências nos alunos, sendo também a mais apreciada pelos mesmos. Para estes professores, o seu papel nesta fase é verificar a forma como os alunos estão a avançar na tarefa e se existe algum obstáculo à sua realização. Outros aspectos do papel do professor também revelados importantes são: manter uma atitude questionadora lançando questões para o grupo, não dando respostas; fornecer informações sobre conteúdos ou pistas para os alunos progredirem na tarefa; fortalecer a importância do registo, da discussão e do teste de conjecturas; resolver conflitos pontuais dentro dos grupos; envolver-se em raciocínio matemático junto dos alunos para tentar compreender as suas conjecturas; seleccionar as conjecturas que cada grupo vai apresentar na fase de discussão e seriar a ordem de apresentação dos grupos;
- Quanto à *discussão* de tarefas de investigação, a grande preocupação dos professores em estudo nesta fase é a coerência do discurso e das ideias apresentadas; no entanto, procuram garantir este aspecto de duas formas distintas. Enquanto um dos professores estimula a interacção aluno-aluno e lhes atribui a responsabilidade de validar/rejeitar as conjecturas apresentadas, insistindo na justificação e generalização das mesmas, o outro, pelo contrário, centra em si toda esta fase, assumindo a responsabilidade de validar e/ou rejeitar as ideias apresentadas.

Que dificuldades sentem os professores no desenvolvimento de tarefas de investigação na sala de aula?

- A *planificação* desde que completa e realizada em profundidade, é complexa, morosa e difícil de desenvolver com frequência. Os elementos da planificação que acarretam maiores dificuldades ao professor são colocar-se no papel dos alunos e antever todas as descobertas a que estes podem chegar, assim como inventariar as questões a colocar aos alunos durante a aula. Esta fase permite ao professor identificar algumas lacunas do seu conhecimento matemático, as quais, através de pesquisa e trabalho colaborativo, pode tentar colmatar. Pelo contrário, uma planificação descuidada conduz a ideias incorrectas do ponto de vista matemático e à omissão de potencialidades da tarefa;
- A fase de *introdução* para alunos pouco familiarizados com tarefas de natureza aberta e com a metodologia de trabalho em grupo é mais demorada, sendo necessário um

reforço dos objectivos da mesma de grupo em grupo, caso contrário pode inviabilizar-se a progressão dos alunos na tarefa;

- Foram identificados na fase de *desenvolvimento* da tarefa dois aspectos problemáticos inter-relacionados, apesar de a sua existência não se fazer sentir de igual forma por estes professores, parecendo este facto estar relacionado com a forma como os mesmos valorizam as diferentes fases da tarefa: a preocupação com o tempo e a forma de apoiar os grupos. Por um lado, o tempo de uma aula parece ser pouco para explorar todas as potencialidades da tarefa, e a consciência da escassez de tempo condiciona o desempenho do professor, fazendo-o ser mais directivo que o desejável, nas suas intervenções. Por outro lado, é difícil facultar um apoio equitativo e em tempo útil aos grupos, em turmas numerosas e heterogéneas. Os problemas anteriores parecem não se verificar quando o professor prolonga o mais possível esta fase, retirando tempo de discussão à tarefa por não lhe atribuir igual importância, considerando assim os noventa minutos da aula suficientes para desenvolver trabalho investigativo. A forma de apoiar os grupos parece estar também relacionada com a complexidade da tarefa e a (in)segurança do professor em relação à mesma, pois, em tarefas mais complexas e/ou nas quais o professor se sinta mais inseguro, este tende a ser mais que um mero orientador das mesmas;

- A preparação da fase de discussão, através da selecção e seriação das descobertas efectuadas pelos alunos por ordem crescente em termos de complexidade pode revelar-se problemática para os professores, principalmente por este aspecto exigir um domínio do trabalho de todos os grupos pelo professor, o que se revela difícil em turmas numerosas e em tarefas de relativa duração como estas em que o professor tem de atender um sem número de aspectos em simultâneo;

- A *fase de discussão* parece ser muito afectada com a natureza das tarefas que os professores costumam desenvolver na sua prática lectiva. Assim, uma experiência anterior rica no desenvolvimento de tarefas de natureza pouco estruturada parece ser promotora de uma concepção mais genuína daquilo que deve ser a natureza e o propósito desta fase, bem como dos papéis do professor e dos alunos na mesma. Por conseguinte, os professores buscam a coerência e a compreensão do discurso dos alunos de forma distinta: enquanto que o professor familiarizado com tarefas estruturadas centra em si toda a responsabilidade de compreensão das ideias bem como da validação e rejeição das mesmas, o outro professor que valoriza a fase de discussão como um momento determinante para o desenvolvimento de várias competências nos alunos,

entre elas a comunicação matemática, desloca para eles tal responsabilidade, insistindo na justificação e a generalização das ideias apresentadas.

Como é que o conhecimento didáctico dos professores influencia o desenvolvimento de tarefas de investigação?

- A *visão* dos professores em estudo em relação à *natureza e finalidades* do ensino-aprendizagem da *Matemática* parece influenciar a forma como os mesmos aderiram às tarefas de investigação e a importância que atribuíram a esta experiência. Assim, uma imagem da Matemática como ciência em constante evolução que privilegie o desenvolvimento de competências complexas, que vão para além da aquisição de conteúdos e o desenvolvimento do cálculo e o treino de mecanismos rotineiros, parece promover no professor o entusiasmo pelo desenvolvimento de tarefas de investigação e a sua identificação com esta metodologia de trabalho. Também a importância excessiva atribuída à parte científica (referente à Matemática) da planificação parece estar relacionada com uma sobrevalorização de competências relacionadas com o domínio de conteúdos, assim como o deslocar a ênfase da tarefa para a quantidade de descobertas realizadas e apresentadas, em detrimento da justificação e da compreensão das mesmas;
- Um *conhecimento matemático* sólido por parte do professor, embora muito importante, não parece ter-se revelado, neste estudo, determinante para o desenvolvimento de tarefas de investigação. Verificou-se também que a insegurança do professor em relação ao seu conhecimento matemático parece levá-lo a explorar com maior profundidade a tarefa; pelo contrário, os professores mais confiantes no seu conhecimento parecem poder ficar-se pelas ideias mais evidentes que a tarefa mobiliza, confiando mais na sua capacidade de lidar com o imprevisto;
- O *conhecimento dos professores em relação aos seus alunos* parece influenciar também a selecção das tarefas. Os professores em estudo consideram que os alunos nesta faixa etária privilegiam tarefas que envolvam a manipulação de materiais ou que contenham jogos. No entanto, a possibilidade de diversificação das tarefas, em relação aos conteúdos e áreas da Matemática a mobilizar e grau de complexidade, revelaram-se aspectos muito importantes;

- A *visão que os professores têm da forma como os alunos aprendem* parece influenciar o desenvolvimento de tarefas de investigação. Assim, um dos professores que considera que os alunos devem ter um papel central e activo na sua aprendizagem proporciona aos alunos experiências de aprendizagem ricas através de tarefas de natureza aberta cuja metodologia se assemelha com o trabalho desenvolvido nas aulas com tarefas de investigação. Verifica-se que os alunos deste professor, familiarizados com este tipo de metodologia, são tendencialmente mais autónomos e têm mais facilidade em iniciar as tarefas de investigação e a compreender o seu propósito, bem como em evoluir na tarefa pela facilidade em trabalhar em grupo. Pelo contrário, alunos habituados a um ensino em que o professor detém um maior protagonismo, baseado em tarefas de natureza mais estruturada, parecem depender mais do mesmo para iniciar as tarefas, tendo estas um início mais lento, e apresentam resistência e dificuldades em trabalhar em grupo;
- Também a *prática lectiva* necessária ao desenvolvimento de tarefas de investigação parece beneficiar com uma experiência rica no desenvolvimento de tarefas abertas. Um dos professores em estudo mais familiarizado com este tipo de tarefas tendeu a atribuir mais importância ao facto de os alunos apresentarem e debaterem a validade das suas ideias e de as justificarem na fase de discussão, apresentando maior facilidade na gestão desta fase;
- Um dos professores que possuía uma *visão limitada do programa* e o reduzia aos conteúdos a abordar tendeu a considerar as tarefas de investigação como exteriores ao programa, constituindo o desenvolvimento de tarefas de investigação um obstáculo ao cumprimento do mesmo;
- O principal critério adoptado pelos professores em estudo para a selecção de tarefas de investigação foi a possibilidade de enquadramento das mesmas nos conteúdos programáticos da disciplina, o que parece estar relacionado, por um lado, com o facto de os conteúdos ocuparem um lugar privilegiado no ensino-aprendizagem da Matemática e, por outro lado, com o facto de os alunos de ambos os professores irem realizar nesse ano lectivo Provas de Aferição, o que canaliza de alguma forma a atenção dos professores para este aspecto do programa.

Como é que o conhecimento didáctico dos professores é influenciado pelo desenvolvimento de tarefas de investigação?

Este estudo, embora pouco prolongado no tempo, parece apontar para o desenvolvimento do conhecimento dos professores em várias vertentes do conhecimento didáctico:

- O desenvolvimento de tarefas de investigação promove o fortalecimento do *conhecimento matemático* do professor, uma vez que, devido à sua natureza pouco estruturada, este tipo de tarefas necessita de uma exploração profunda da parte do professor, levando-o a realizar trabalho investigativo e a identificar e colmatar lacunas do seu saber;
- As tarefas de investigação parecem fortalecer o conhecimento acerca dos *alunos e da forma como aprendem*, pois os professores em estudo pareceram ter aumentado a sua convicção de que as experiências que proporcionam aos alunos um papel central na sua aprendizagem são de privilegiar na sala de aula, não só pelo entusiasmo e pela motivação que os alunos manifestam, levando-os a perspectivar a matemática de uma forma mais genuína, mas também pelas aprendizagens realizadas, que são mais sólidas e abrangentes, excedendo as expectativas dos professores. Por serem tarefas de natureza complexa, as tarefas de investigação proporcionam um maior desafio intelectual e exigem um tipo de competências diferentes aos alunos, permitindo aos professores terem um conhecimento mais completo dos mesmos, dificilmente proporcionado em aulas de cariz tradicional;
- Quanto à *prática lectiva* dos professores, esta parece sair beneficiada em múltiplos aspectos através do desenvolvimento de tarefas de investigação, desde logo, porque permite aos professores contactarem e conhecerem com uma tarefa e uma metodologia de ensino muito importantes para o desenvolvimento das competências nos alunos que hoje se preconizam;
- A *planificação* de tarefas de investigação permite, segundo Petra e Paulo, melhorar a visão acerca de como deve ser uma planificação eficaz, por se necessitar de valorizar igualmente outros aspectos para além dos conteúdos, aprendendo-se a explorar e a conduzir uma tarefa de forma a tirar o máximo partido das suas potencialidades;
- A ideia de quão importante é dosear o apoio fornecido aos alunos nas tarefas em geral parece sair fortalecida pelos professores em estudo com a condução de tarefas de investigação. Assim, na *fase de desenvolvimento* de tarefas de investigação, os

professores evitaram dar respostas ou validar as descobertas dos alunos, caso contrário, estariam a impedir que os alunos desenvolvessem a comunicação matemática e o raciocínio por não argumentarem, defenderem e justificarem as suas ideias perante os colegas, perdendo estes o entusiasmo na fase de discussão;

- A concepção dos professores em estudo em relação à natureza e a importância da *fase de discussão* parece ter sofrido alterações com o desenvolvimento de tarefas de investigação, uma vez que os professores tenderam a atribuir-lhe mais importância e a reverem e reflectirem aspectos do seu papel nesta fase, principalmente o professor com uma visão limitada do seu propósito, que resumia a discussão das tarefas a um momento de divulgação do trabalho realizado pelos alunos.

Considerações finais

A poucas páginas do fim, é chegada a altura de reflectir e problematizar as principais ideias que parecem emergir deste estudo. Segue-se a apresentação das implicações que este parece suscitar para a prática dos professores, para a formação inicial e contínua de professores e para o desenvolvimento curricular, apontando questões que poderão servir de ponto de partida para novos estudos que pretendam aprofundar a temática aqui tratada. Termina-se com o contributo do estudo para os professores e para a investigadora.

Este estudo parece indicar que as tarefas de investigação constituem um tipo de tarefa complexa cujo desenvolvimento coloca desafios de vária ordem aos professores e requer da sua parte investimento e dedicação, e influencia e é influenciado pelo conhecimento profissional do professor.

A prática lectiva dos professores envolvendo tarefas de investigação revelou influências das várias componentes do conhecimento didáctico do professor; no entanto, as que se revelaram determinantes para o seu desenvolvimento foram o conhecimento dos alunos e da forma como aprendem e o conhecimento do processo instrucional.

Assim, a ideia fulcral que parece emergir deste estudo é de que as dificuldades registadas no desenvolvimento de tarefas de investigação parecem estar relacionadas

com uma débil experiência anterior dos professores com tarefas de natureza mais aberta e não com o nível de ensino a que leccionam. Assim, o professor que atribui aos alunos o protagonismo na sua aprendizagem, proporcionando-lhes experiências de aprendizagem ricas a partir de tarefas de natureza pouco estruturada, tende a identificar-se mais facilmente com a metodologia de condução do trabalho investigativo, a aperceber-se do valor deste tipo de tarefas, a gerir eficientemente as aulas de forma a explorar correctamente as várias potencialidades das tarefas, nomeadamente a fase de discussão, que foi a que se verificou mais crítica, pois se a esta fase não for dada a importância merecida esta perde parte das suas grandes qualidades. O conhecimento matemático dos professores de 1.º e 2.º Ciclos, por seu turno, embora de natureza diferente, esperando-se do professor de 2.º Ciclo uma base científica mais sólida, não se revelou em nenhum momento da experiência distintivo da prática dos professores.

Por outro lado, verifica-se que o desenvolvimento de tarefas de investigação, para além de ser influenciado, também influencia o conhecimento didáctico do professor, em várias das suas componentes, sendo as mais importantes o conhecimento matemático, o conhecimento dos alunos e da forma como aprendem e o conhecimento do processo instrucional. Assim, o desenvolvimento de tarefas de investigação permite ao professor fortalecer o seu conhecimento matemático, na medida que este, na fase de planificação, tem de realizar trabalho investigativo para estudar as possíveis abordagens da tarefa. Os professores tendem a verificar que os alunos quando se envolvem nas aprendizagens e têm um papel activo nas mesmas, estão mais motivados para a aprendizagem e esta é mais significativa e abrangente. Por fim, o desenvolvimento de tarefas de investigação permite ao professor aprender a planificar e a conduzir uma tarefa pouco estruturada de forma a tirar o máximo partido das suas potencialidades.

Assim, dois grandes desafios se colocam à formação inicial de professores do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico, numa altura em que os currículos destes cursos sofrem reformulações: por um lado, é urgente repensar os currículos e a Matemática a ensinar a estes futuros professores de forma a colmatar algumas fragilidades científicas, bem como as suas metodologias de ensino, já que os professores tendem a adoptar na sua prática o tipo de ensino que lhes é mais familiar; por outro lado, é necessário um envolvimento dos futuros professores com o trabalho investigativo, a nível prático, de forma a sentirem prazer intelectual com a realização de tarefas de investigação e a desenvolverem uma imagem mais genuína da Matemática, pois só assim poderão transmitir esta perspectiva aos seus alunos, e a nível teórico, conhecendo e reflectindo a

natureza destas tarefas e as potencialidades que estas encerram para o desenvolvimento nos alunos das competências que hoje se preconizam. É importante também que os futuros professores sejam apoiados na (re)criação, condução e reflexão de tarefas de investigação.

Relativamente à formação profissional, é importante que os professores continuem a ter oportunidade de frequentar programas de formação contínua e que esta seja mais prolongada no tempo, pois verifica-se que estes programas nem sempre têm sido suficientes para a mudança de práticas e concepções. Deve ser proporcionado aos professores o envolvimento em tarefas de natureza mais complexa, como as tarefas de investigação, de forma a melhorar o seu conhecimento matemático e da matemática, discutindo e reflectindo as potencialidades deste tipo de tarefas. Os professores devem ser apoiados e acompanhados no desenvolvimento da didáctica necessária à sua implementação e condução e na promoção de hábitos de reflexão sobre a sua prática, já que este estudo mostra que este aspecto é de extrema importância para o desenvolvimento profissional do professor.

A nível curricular, é importante que os professores e futuros professores tenham oportunidade de discutir o verdadeiro papel das actividades de investigação nos documentos programáticos, nomeadamente no Programa de Matemática, recentemente publicado, antes da sua generalização, para que estas possam ter uma maior expressão na sua prática.

Outro aspecto que este estudo parece fazer emergir é que a possibilidade de enquadramento das tarefas de investigação nos conteúdos programáticos é um aspecto muito importante para a selecção das tarefas. Por conseguinte, as tarefas de investigação parecem não bastar-se a si próprias, apresentando o professor necessidade de as contextualizar, funcionando estas sempre como suporte à exploração de determinados conteúdos. Estará este aspecto relacionado com o facto de os alunos de ambos os professores irem ser sujeitos à realização de Provas de Aferição, sentindo os professores mais acesa a pressão da abordagem de todos os conteúdos programáticos, canalizando todas as energias neste sentido? Seria interessante perceber se os mesmos resultados seriam obtidos por professores cujos alunos não estivessem sujeitos à realização de Provas ou Exames. E se os Exames Nacionais e/ou as Provas de Aferição dedicassem um espaço às tarefas de investigação? Será que existiria um acréscimo da valorização destas tarefas, percebendo os professores as reais potencialidades das mesmas? Ou, pelo contrário, os resultados sairiam pervertidos, como aconteceu em Inglaterra, em estas

tarefas passaram a ser dominadas pela mecanização e repetição de procedimentos (Silva *et al.*, 1999; Oliveira *et al.*, 1999)?

Outro aspecto que parece sobressair deste estudo é a necessidade da criação e disponibilização de uma maior diversidade de recursos e materiais relacionados com as tarefas de investigação contendo orientações mais concretas para os professores de todos os níveis de ensino, para que se relativize o protagonismo que os manuais escolares ocupam na orientação da prática dos professores. Por outro lado, seria interessante perceber qual o reflexo na prática dos professores de um apelo explícito e concreto à realização de tarefas de investigação nos manuais escolares.

Embora o estudo dos alunos e dos seus processos de aprendizagem não constitua, *per si*, objectivo desta investigação, verifica-se que o êxito dos alunos na realização de tarefas de investigação parece estar mais relacionado com o seu grau de familiaridade com tarefas pouco estruturadas e com a metodologia de trabalho em grupo, do que o nível de ensino que frequentam ou grau de conhecimentos que possuem. No entanto, seria interessante desenvolverem-se outras investigações com alunos de ciclos diferentes e com outras experiências matemáticas.

Como seria se os professores tivessem que experimentar as tarefas de investigação de uma forma isolada, sem o acompanhamento da investigadora? Manter-se-iam os mesmos desafios? Surgiriam outros?

Não se podia terminar sem antes ressaltar a importância dos professores cooperantes neste estudo, por terem aceiteado o duplo desafio de abrir as portas das suas salas de aula a um elemento estranho à sua prática, numa cultura de escola ainda marcadamente individualista como é a nossa, ainda mais, para implementar um tipo de tarefa também ele desconhecido para os mesmos. Para estes professores, também este estudo, embora pouco prolongado, parece ter constituído uma oportunidade de desenvolvimento profissional. Desde logo, permitiu-lhes o contacto com uma metodologia de ensino muito importante para o desenvolvimento nos alunos das competências matemáticas que hoje se preconizam, e bastante complexa, requerendo da parte do professor outro tipo de competências científicas e didácticas do que aquelas que necessita para as aulas de cariz tradicional. Possibilitou-lhes enriquecer o seu banco de recursos ao disporem de mais um conjunto de tarefas a desenvolver na sala de aula, planificadas e experimentadas. Possibilitou-lhes momentos de reflexão conjunta acerca da sua prática e de trabalho colaborativo, hábitos indispensáveis e importantes a adoptar no quotidiano profissional de qualquer professor.

Finalmente, não poderia deixar de se referir o contributo que este estudo trouxe à investigadora, enquanto professora de Matemática do 2.º Ciclo, tendo constituído um momento incomparável de desenvolvimento profissional, revendo-se esta em muitas das aprendizagens que os professores referem ter realizado. Para além do enriquecimento a nível científico que é inevitável em tarefas desta natureza, a possibilidade de observar dois colegas de profissão em acção e a necessidade de reflexão acerca daquilo que caracterizou a sua prática no desenvolvimento de tarefas de investigação e dos desafios com que se depararam possibilitaram um acréscimo significativo do conhecimento a nível instrucional. Por fim, a convicção de que as tarefas de investigação constituem uma metodologia de ensino-aprendizagem com um potencial dificilmente igualável saiu fortalecida, bem como a certeza de que muito ainda há a fazer para que estas assumam o protagonismo desejado nas salas de aula de Matemática do nosso país. É difícil que os professores sozinhos, sem apoio, consigam chegar às tarefas de investigação; assim, é imperativo fazer chegar as tarefas de investigação aos professores. Como poderão os professores valorizar algo que não conhecem?!

Bibliografia

- Abrantes P., Leal, L. C., Ponte, J. P. (1996). *Investigar para Aprender Matemática*. Lisboa: APM: MPT.
- Abrantes, P. (1999). Investigações em Geometria na sala de aula. In: P. Abrantes, J.P. Ponte, H. Fonseca e L. Brunheira (Eds.), *Investigações Matemáticas na Aula e no Currículo* (pp. 153-168). Lisboa: APM.
- Abrantes, P., Ponte, J. P., Fonseca, H., Brunheira, L. (1999). *Investigações Matemáticas na Aula e no Currículo*. Lisboa: APM: MPT.
- Abrantes, P. (2002). *Currículo, inovação e autonomia no básico*. Lisboa: DN (p.35).
- Almeida, L. & Freire, T. (2000). *Metodologia da Investigação em Psicologia e Educação* (2ª edição). Braga: Psiquilíbrios.
- APM. (1996). A Natureza e Organização das Actividades de Aprendizagem e o Novo Papel do Professor. In: Abrantes P., Leal, L. C., Ponte, J. P.(Eds), *Investigar para Aprender Matemática*. (pp. 51-60). Lisboa: APM: MPT.
- Ball, D., Lubienski, S., & Mewborn, D. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In V. Richardson (Ed.). *Handbook of research on teaching* (pp.433-456). Washington: AERA.
- Bell, J. (1997). *Como Realizar um Projecto de Investigação: um guia para a pesquisa em ciências sociais e da educação* (Tradução para a língua portuguesa). Lisboa: Gradiva.[Original publicado em 1993].
- Berliner, D. (1987). Ways of Thinking About Students and Classrooms by More and Less Experienced Teachers. In J. Calderhead (Ed.), *Exploring Teachers Thinking* (pp.60-83). London: Cassell.
- Boavida, A. M. (1993). *Resolução de Problemas em Educação Matemática: Contributo para uma Análise Epistemológica e Educativa das Representações Pessoais dos Professores* (Tese de mestrado, Universidade Nova de Lisboa). Lisboa: APM.
- Bogdan, R. & Biklen, S. (1994) *Investigação Qualitativa em Educação. Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.
- Borrvalho, A. (2002). *Didáctica da Matemática e Formação inicial: Um estudo com Três Futuros Professores*. Tese de Doutoramento não publicada. Évora: Universidade de Évora. (Cap. 1)
- Brocardo, J. (2001). *As investigações na aula de Matemática: um estudo no 8.º ano*. Tese de doutoramento. Universidade de Lisboa: FCUL.

- Calderhead, J. (1987). Introduction. In J. Calderhead (Ed.), *Exploring Teachers Thinking* (pp.1-19). London: Cassell.
- Canavarro, P. (1993). *Concepções e práticas de professores de Matemática: Três estudos de caso* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Canavarro, A. P. (2003). *Práticas de ensino da matemática: duas professoras dois currículos*. Tese de doutoramento. Universidade de Lisboa: FCUL.
- Caraça, B. J. (1958). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. (4.^a edição) Lisboa: Gradiva.
- Carmo H., & Ferreira M. (1998) *Metodologia da Investigação: Guia para auto-aprendizagem*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Carter, K., Doyle, W. (1987). Teachers' Knowledge Structures and Comprehension Processes. In J. Calderhead (Ed.), *Exploring Teachers Thinking* (pp.147-160). London: Cassell.
- Clark, C., Yinger, R. (1987). Teacher Planning. In J. Calderhead (Ed.), *Exploring Teachers Thinking* (pp.84-103). London: Cassell.
- Cockcroft, W. (1985). *Las Matemáticas si cuentan*. Ministerio de educacion y ciencia. (Tradução em Espanhol de Cockroft. (1982). *Mathematics Counts*. London: HMSO).
- Cunha, H., Oliveira, H., & Ponte, J. P. (1996). Investigações matemáticas na sala de aula. In Abrantes P., Leal, L. C., Ponte, J. P. (1996). *Investigar para Aprender Matemática*. Lisboa:APM:MPT.
- Day, C. (2001). *Desenvolvimento Profissional de Professores: Os desafios da aprendizagem permanente*. Porto: Porto Editora.
- Elbaz, F. (1983). *Teacher thinking: a study of practical knowledge*. New York: Nichols Publishing Company.
- Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. London: Falmer.
- Garção, N. (2004). *Reorganização curricular do Ensino Básico: Perspectivas, decisões e dificuldades de três professoras de Matemática* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Guimarães, F. (1996). Modelos de conhecimento do professor e prática lectiva. In: Ponte, J. P., Monteiro, C., Maia, M., Serrazina, L., Loureiro, C. (Eds.), *Desenvolvimento Profissional dos Professores de Matemática. Que Formação?* SEC:SPCE
- Lerman, S. (1996). Investigações: Para onde vamos?. In Abrantes P., Leal, L. C., Ponte, J. P. *Investigar para Aprender Matemática*. Lisboa: APM: MPT.

- Llinares, S., Sánchez, V.(1990). *Teoria y Práctica en Education Matemática* (p.102-115). Alfar. Editores.
- Love, E. (1996). Avaliando a Actividade Matemática. In Abrantes P., Leal, L. C., Ponte, J. P. *Investigar para Aprender Matemática*. Lisboa:APM: MPT.
- Manson, J.(1996). O “quê”, o “porquê” e o “como” em Matemática. In: Abrantes P., Leal, L. C., Ponte, J. P. *Investigar para Aprender Matemática*. Lisboa: APM: MPT.
- Mendonça, M. C. (1999). Resolução de Problemas Pede (Re)Formulação. In: P. Abrantes, J.P. Ponte , H. Fonseca e L. Brunheira (Eds.), *Investigações Matemáticas na Aula e no Currículo* (pp. 15-34). Lisboa: APM.
- Ministério da Educação (1990). *Organização curricular e programas: 1.º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Imprensa Nacional.
- Ministério da Educação (1991). *Organização curricular e programas: 2.º ciclo do ensino básico* (vol.I). Lisboa: Imprensa Nacional.
- Ministério da Educação (1991). *Organização curricular e programas – 3.º ciclo do ensino básico* (vol.I). Lisboa: Imprensa Nacional.
- Ministério da Educação (2001). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.
- Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação: Direcção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.
- NCTM (1991). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar* (tradução do original em inglês). Lisboa: APM e IIE.
- NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da matemática* (tradução do original em inglês). Lisboa: APM e IIE.
- Oliveira, H., Segurado, M. I., & Ponte, J. P. (1996). Explorar, investigar e discutir na aula de matemática. In A. Roque & M. J. Lagarto (Eds.), *Actas do ProfMat 98* (pp. 207-213). Lisboa: APM.
- Oliveira, H., & Ponte, J. P. (1997). Investigação sobre concepções, saberes e desenvolvimento profissional dos professores de matemática. *Actas do SIEM VII* (pp. 3-23), Lisboa: APM.
- Oliveira, H.(1998a). *As actividades de investigação na aula de Matemática: Aspectos da prática do professor*. (Tese de mestrado). Lisboa: DEFCUL.
- Oliveira, H. (1998b). *Vivências de duas professoras com actividades de investigação*. *Quadrante*, 7(2), 71-98.

- Oliveira, H., Ponte, J. P., Santos, L., & Brunheira, L. (1999a). Os professores e as actividades de investigação. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 97-110). Lisboa: APM e Projecto MPT.
- Oliveira, H., Segurado, M. I., & Ponte, J. P. (1999b). Tarefas de investigação em matemática: Histórias da sala de aula. In P. Abrantes; J. P. Ponte; H. Fonseca; L. Brunheira (orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 189-206), Lisboa: Projecto MTP e APM.
- Oliveira, H., Segurado, M. I., & , J. P. (1999c). Explorar, Investigar e Discutir na Aula de Matemática. In P. Abrantes; J. P. Ponte; H. Fonseca; L. Brunheira (orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 175-187), Lisboa: Projecto MTP e APM.
- Oliveira, P. (2002a). A Aula de matemática um espaço epistemológico forte. In J. P. Ponte, C. Costa, A. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo, A. Dionísio (Eds.) *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores*. (pp.25-40). Lisboa: SPCE:SEC.
- Poincaré, H.(1996). A Invenção Matemática. In Abrantes P., Leal, L. C., Ponte, J. P. *Investigar para Aprender Matemática*. Lisboa:APM:MPT.
- Ponte, J. P. (1994a). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante*, 3(1), 3-18.
- Ponte, J. P., (1994b). O professor de Matemática: Um balanço de dez anos de investigação. *Quadrante*; 2, 79-114.
- Ponte, J. P. (1995). Saberes profissionais, renovação curricular e prática lectiva. In L. Blanco & V. Mellado (Eds.), *La formación del profesorado de ciencias y matemática en España y Portugal* (pp. 187-202). Badajoz: Universidad de Extremadura.
- Ponte, J. P. (2003). Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. *Investigar em Educação*, 2, 93-169.
- Ponte, J. P.(2005). Gestão Curricular em Matemática. In *O professor e o Desenvolvimento Curricular* (pp.11-34). Lisboa:APM:GTI.
- Ponte, J.P., Nunes, F., Veloso E. (1991) *Computadores no Ensino da Matemática: Uma colecção de estudos de caso*. APM: Lisboa
- Ponte, J. P., Monteiro, C., Maia, M., Loureiro, C. (1996a). *Desenvolvimento Profissional dos Professores de Matemática: Que Formação?* Lisboa: SEM: SPCE.
- Ponte, J. P.(1996b). *Perspectivas de desenvolvimento profissional de professores*. In Ponte, J. P., Monteiro, C., Maia, M., Loureiro, C. *Desenvolvimento Profissional dos Professores de Matemática: Que Formação?* Lisboa: SEM: SPCE.

- Ponte, J. P., Matos, J. F. (1996c). Processos Cognitivos e Interações Sociais nas Investigações Matemáticas. In: Abrantes P., Leal, L. C., Ponte, J. P.(Eds), *Investigar para Aprender Matemática*. (pp. 119-137). Lisboa:APM:MPT.
- Ponte, J.P., Canavarro, P.(1997). *A Matemática e as Novas Tecnologias*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Ponte, J. P., Oliveira, H., Cunha M. H., Segurado, M. I.(1998a). *Histórias de Investigações Matemáticas*.Lisboa:IIIE.
- Ponte, J. P., Matos, J. M., & Abrantes, P. (1998b). *O professor de Matemática*. In Investigação em educação matemática: Implicações curriculares. (pp.215-306). Lisboa: IIE.
- Ponte, J. P., Ferreira, C., Brunheira, L., Oliveira, H., Varandas, J.(1999a). Investigando as aulas de investigações matemáticas. In: P. Abrantes, J.P. Ponte, H. Fonseca e L. Brunheira (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 133-149). Lisboa: APM.
- Ponte, J. P., Oliveira, H., Brunheira, L., Varandas, J. M., & Ferreira, C. (1999b). *O trabalho do professor numa aula de investigação matemática*. Quadrante, 7(2), 41-70.
- Ponte, J. P., & Oliveira, H. (2002). Remar contra a maré: A construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. *Revista da Educação*, 11(2), 145-163.
- Ponte, J. P., Costa, C., Rosendo, A, Maia, E., Figueiredo, N., Dionísio, A. (2002b). Introdução. In J. P. Ponte, C. Costa, A. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo, A. Dionísio (Eds.) *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp.1-4). Lisboa: SPCE:SEC.
- Porfírio, J., Oliveira, H. (1999). Uma Reflexão em Torno das Tarefas de Investigação. In: P. Abrantes, J.P. Ponte, H. Fonseca e L. Brunheira (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 111-120). Lisboa: APM.
- Porfírio, J., Abrantes, P. (1999).Professores, Investigação e Inovação Curricular em Matemática. In: P. Abrantes, J.P. Ponte, H. Fonseca e L. Brunheira (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 215-226). Lisboa: APM.
- Perrenoud, Ph., (1999). Construir competências é virar as costas aos saberes?, Pátio. Revista Pedagógica, n.º 11, Novembro, pp. 15-19.
- Quivy, R. & Campenhout, L. (2003). *Manual de investigação em ciências sociais*. (3.^a ed.). Lisboa: Gradiva.
- Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo, A. Dionísio (Eds.) *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp.83-106). Lisboa: SPCE:SEC.

- Santos, L. (2000) *A prática lectiva como actividade de resolução de problemas: um estudo com três professoras do ensino secundário*. (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa) Lisboa: Associação de Professores de Matemática, Coleção Teses.
- Santos, L.; Brocardo, J.; Pires, M. e Rosendo, A. I. (2002). Investigações matemáticas na aprendizagem do 2º ciclo do ensino básico ao ensino superior. In J.P. Ponte; C. Costa; A. I. Rosendo; E. Maia; N. Figueiredo; A. F. Dionísio (Orgs.), *Actividades de Investigação* (pp. 83-106). Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.
- Schön, D.(1992). *La formación de profesionales reflexivos. Hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones* (pp.33-48). Barcelona.
- Silva, A., Veloso, E., Porfírio, J. e P. Abrantes. (1999). O Currículo de Matemática e as actividades de investigação. In: P. Abrantes, J.P. Ponte , H. Fonseca e L. Brunheira (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 69 - 84). Lisboa: APM.
- Silver, E. (1996). Acerca da Formulação de Problemas de Matemática. In Abrantes P., Leal, L. C., Ponte, J. P. *Investigar para Aprender Matemática*. Lisboa:APM:MPT.
- Tudella, A., Ferreira, C., Pires, F., & Varandas, J. (1999) Dinâmica de uma aula com investigações. In P. Abrantes; J. P. Ponte; H. Fonseca; L. Brunheira (orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 87-96), Lisboa: Projecto MTP e APM.
- Varandas, J. (2000). *Avaliação de investigações matemáticas: Uma experiência*. (Tese de mestrado). Universidade de Lisboa.
- Varandas, J., Nunes, P. (1999).Actividades de investigação: Uma experiência no 10.º ano. In: P. Abrantes, J.P. Ponte , H. Fonseca e L. Brunheira (Eds.). *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 169 - 174). Lisboa: APM.
- Veloso, M. G. (1991). *NTI: Um programa de formação de professores de Matemática*. Lisboa: APM.
- Wilson, S., Shulman, L., Richert, A. (1987). 150 Different Ways of Knowing: Representations of Knowledge in Teaching. In J. Calderhead (Ed.), *Exploring Teachers Thinking* (pp.84-103). London: Cassell.
- Zenhas, G. (2005). *A calculadora na aula de matemática – duas actividades de investigação realizadas numa turma de 6.º ano*. Educação e Matemática n.º 83. Lisboa: APM.

ANEXOS

Anexo 1– Ficha do professor participante no estudo

	<p>O conhecimento profissional do professor e as investigações matemáticas na sala de aula: Um estudo nos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico</p>
---	--

Ficha do professor colaborante no estudo⁶

Nome: _____	Idade: _____
Morada: _____	
Telem: _____	Telef: _____ E-mail: _____
Formação Inicial: _____	
Situação profissional: _____	Tempo de serviço: _____

Objectivos do estudo:

Contribuir para a compreensão do conhecimento profissional dos professores de Matemática do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico, relativamente ao desenvolvimento de tarefas de investigação na sala de aula, nomeadamente, ao nível do conhecimento didáctico nas suas diferentes dimensões:

- Conhecimento da e sobre a Matemática;
- Conhecimento dos alunos e da aprendizagem;
- Conhecimento do currículo;
- Conhecimento do processo instrucional.

Acordo:

1. Nas apresentações feitas e nos documentos produzidos, no âmbito do estudo, a investigadora compromete-se a manter sigilo, relativamente à identidade dos professores participantes;
2. O professor participante terá acesso às transcrições das suas entrevistas e a outros documentos que a si digam respeito, bem como, terá conhecimento do conteúdo da tese, antes da sua publicação, se o solicitar;
3. Depois de concluído o estudo, a investigadora compromete-se a dar *feedback* ao professor participante, relativamente à sua participação, através da oferta de uma cópia da tese final;
4. A investigadora compromete-se, ainda, a passar um certificado de participação, se o professor participante o solicitar.

_____, ____ de _____ de 2008
 A investigadora O colaborante

⁶ Adaptado a partir de Garção, N. (2004)

Anexo 2– Cronograma das actividades dos professores colaborantes no estudo



O conhecimento profissional do professor e as investigações matemáticas na sala de aula:
Um estudo nos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico

Cronograma das actividades dos professores colaborantes no estudo

	Cronograma das actividades	Prof.º 1.º ciclo	Prof.º 2.º ciclo
2.º Período	Envio do guião de uma prof.º de 1.º Ciclo	16 de Fevereiro	16 de Fevereiro
	1.ª Entrevista / Entrega do Banco de Investigações	26 de Fevereiro	23 de Fevereiro
	Feedback da(s) tarefa(s) seleccionada(s) (por mail)	3-7 de Março	25-29 de Fevereiro
	Envio do guião com a preparação da 1.ª sessão observada (por mail)	3-7 de Março	25-29 de Fevereiro
	Reunião para preparação da 1.ª sessão observada	10 de Março	3 de Março
	Observação/Reflexão da 1.ª sessão	11 de Março	4 de Março
3.º Período	Envio do guião com a preparação da 2.ª sessão observada (por mail)	24-28 de Março	7-11 de Abril
	Reunião para preparação da 2.ª sessão observada	31 de Março	14 de Abril
	Observação/Reflexão da 2.ª sessão	1 de Abril	15 de Abril
	Envio do guião com a preparação da 3.ª sessão observada (por mail)	14-18 Abril	14-18 Abril
	Reunião para preparação da 3.ª sessão observada	21 de Abril	21 de Abril
	Observação/Reflexão da 3.ª sessão	22 de Abril	22 de Abril
	Envio do guião com a preparação da 4.ª sessão observada (por mail)	28 Abril-2 Maio	26-30 de Maio
	Reunião para preparação da 4.ª sessão observada	5 de Maio	2 de Junho
	Observação/Reflexão da 4.ª sessão	6 de Maio	3 de Junho
	Envio do guião com a preparação da 5.ª sessão observada (por mail)	19-23 de Maio	9-13 de Junho
	Reunião para preparação da 5.ª sessão observada	26 de Maio	16 de Junho
	Observação/Reflexão da 5.ª sessão	27 de Maio	17 de Junho
	2.ª Entrevista	15 de Julho	16 de Julho
Considerações finais	Outubro	Outubro	

Anexo 3– Banco de Investigações
À procura de quadriláteros⁷⁷

Na figura 1 está representado um segmento de recta.

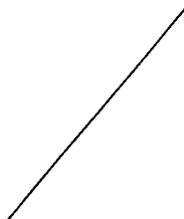


Figura 1

Se traçarmos um novo segmento de recta que cruze o primeiro e unirmos as extremidades destes dois segmentos de recta, obtemos um quadrilátero, como podes ver na figura 2:

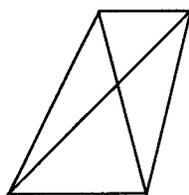
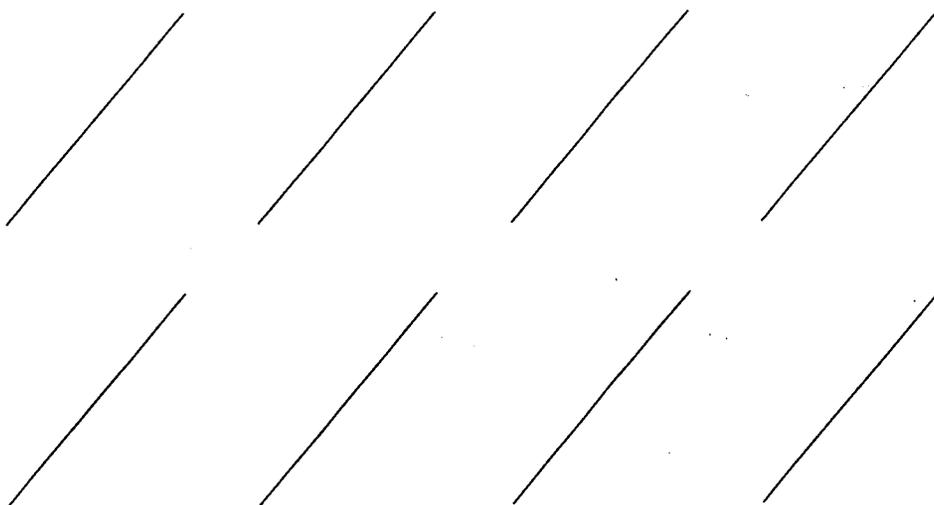


Figura 2

Actividade 1

Traça segmentos de recta que cruzem os que já estão desenhados em baixo e tenta obter outros quadriláteros diferentes.

Por baixo de cada quadrilátero que conheceres escreve o seu nome.



⁷⁷ In APM. *Investigações Matemáticas na sala de aula* - Propostas de trabalho. MPT

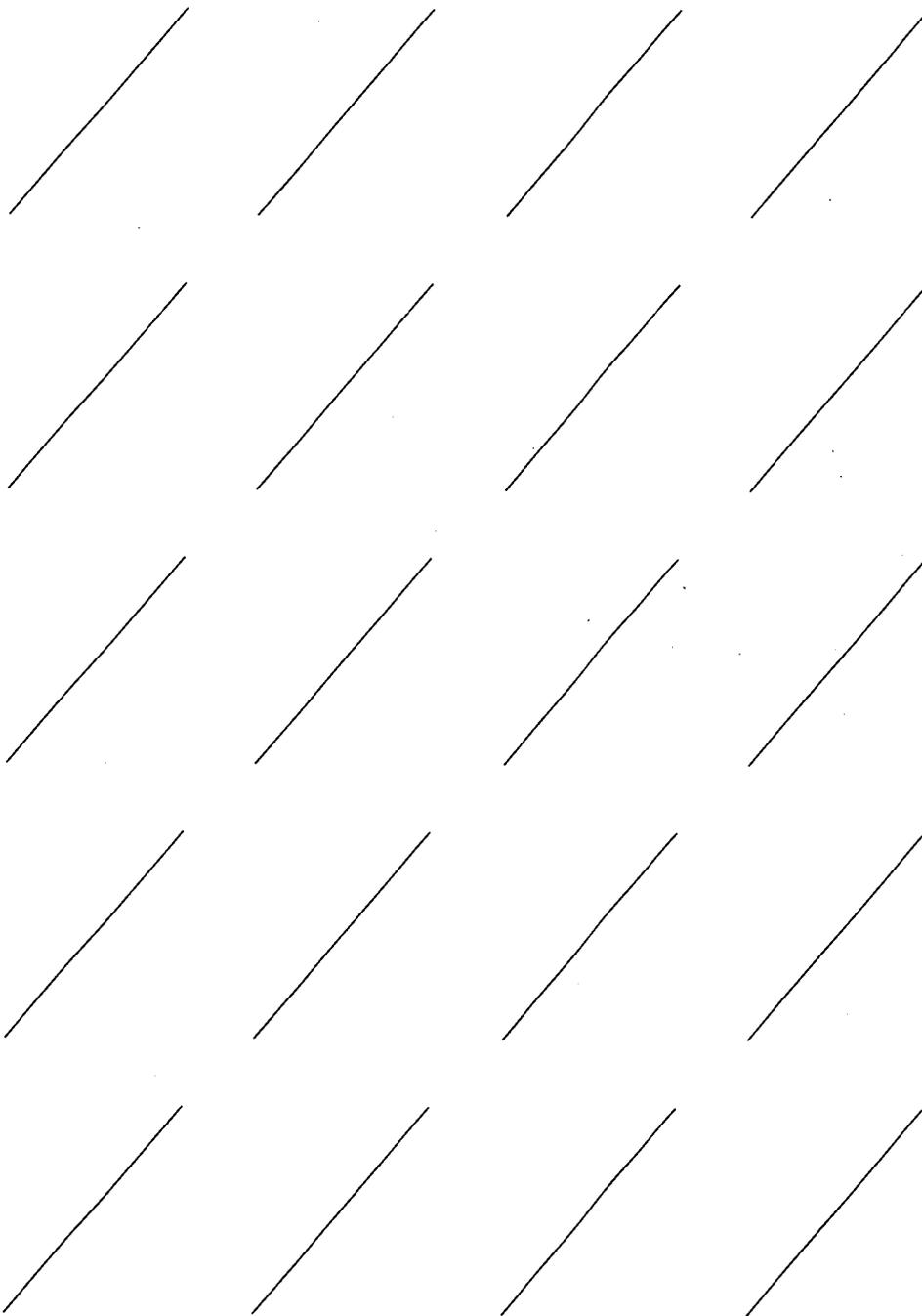
Actividade 2

Na figura 2 podes reparar que os dois segmentos de recta não possuem o mesmo comprimento. E podes notar, também, que nenhum deles é cruzado ao meio pelo outro.

Como deverás desenhar o segundo segmento de recta se quiseres obter um papagaio?

E se quiseres obter um paralelogramo? E um rectângulo? E um losango? E um quadrado?

Faz as tentativas que quiseres e escreve as tuas respostas.



A travessia do rio⁸

A investigação que te propomos está baseada num jogo, para dois jogadores.

Material:

- 2 dados cúbicos, com as faces numeradas de 1 a 6
- 2 conjuntos de 12 peças iguais, cada um deles de forma ou cor diferente
- Um tabuleiro

Regras:

- cada jogador coloca as suas peças, numa das margens do rio, podendo pôr mais do que uma na mesma casa, deixando outras vazias.
- alternadamente, os jogadores lançam os dados e calculam a soma obtida.
- se a soma corresponder a uma casa onde estejam peças suas, na margem respectiva, passa uma delas para o outro lado do rio.
- ganha quem conseguir passar primeiro todas as suas peças para o outro lado.

Se a disposição inicial for a que está representada na figura, e o jogador A obtiver um total de 6, tem direito a passar uma das peças brancas que tem na casa "6" para o outro lado.

	●	●	●●		●●	●●●		●	●●			A
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
	●	●		●●	●	●●	●	●	●		●●	B

- Achas que todas as somas têm a mesma probabilidade de sair? Analisa o número de casos possíveis, para obter cada uma das somas.
- Investiga qual deverá ser a disposição ideal das peças, para que haja maior probabilidade de vencer.

Não é muito fácil saber qual a melhor disposição das peças, para se ter mais probabilidade de ganhar o jogo. No entanto, talvez te ajude investigar um pouco para poderes responder a algumas perguntas:

- Quais os números que saem mais vezes? (podes lançar os dados 20 ou 30 vezes, não te esquecendo de registar as várias somas que irás obter)
- Consegues explicar os dados que obtiveste?
- Terá a ver com as maneiras diferentes de se obter cada uma das somas?
- Será de colocar todas as marcas no número que tem mais probabilidade de sair? Ou será de os dividir em partes mais ou menos iguais por todos os números? Ou será de as dispor de outra maneira diferente destas? (experimenta de várias maneiras e regista o número de vezes que precisaste de jogar para passar todas as marcas para a outra margem).

Nota: podes usar lápis e borracha, para fazeres estas experiências várias vezes. Basta escreveres, por exemplo, cruces no tabuleiro, que depois apagas e voltas escrever no outro lado, se sair o número correspondente)

Boa investigação!

⁸In <http://www.apm.pt/portal/index.php?id=32582>

Às voltas com os múltiplos⁹

1. Escreve em coluna os primeiros múltiplos de 5.
 - Observa os algarismos das unidades e das dezenas. Encontras alguma regularidade?
2. Investiga o que acontece com os múltiplos de 4 e de 6.
3. Investiga também o que acontece para múltiplos de outros números.

⁹ In APM. *Investigações Matemáticas na sala de aula* - Propostas de trabalho. MPT

Divisões por 11, 111...¹⁰

1. Determina o período das dízimas representadas pelas fracções:

$$\frac{3}{11}$$

$$\frac{9}{11}$$

$$\frac{18}{11}$$

$$\frac{47}{11}$$

$$\frac{52}{11}$$

$$\frac{125}{11}$$

- Que tipo de período se obtém quando dividimos um número inteiro por 11?
- Será possível, sem efectuar a divisão, indicar o período da dízima correspondente a qualquer fracção de denominador 11? Investiga e apresenta as tuas conjecturas.

2. Experimenta agora divisões por 111. Apresenta os resultados.

3. Podes ainda investigar o que se passa nas divisões por 1111...

Queres mais?

- Experimenta, agora, divisões por 9, 99, 999...

¹⁰ In APM. *Investigações Matemáticas na sala de aula* - Propostas de trabalho. MPT

Explorações com fracções

1. Procura descobrir relações entre os números representados sob a forma de fracção:

$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$...
$\frac{0}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$...
$\frac{0}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$...
$\frac{0}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$...
$\frac{0}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$...
...

- Como sempre, regista as conclusões que fores obtendo.

Explorações com números¹¹

2. Procura descobrir relações entre os números da figura:

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
...

- Como sempre, regista as conclusões que fores obtendo.

¹¹ In APM. *Investigações Matemáticas na sala de aula* - Propostas de trabalho. MPT

Explorações com números decimais

No quadro seguinte, consegue descobrir regularidades numéricas?

1. Registe todas aquelas que tiver encontrado...
2. Para cada uma, explique porque razão se verifica.

0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
0,11	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19	0,2
0,21	0,22	0,23	0,24	0,25	0,26	0,27	0,28	0,29	0,3
0,31	0,32	0,33	0,34	0,35	0,36	0,37	0,38	0,39	0,4
0,41	0,42	0,43	0,44	0,45	0,46	0,47	0,48	0,49	0,5
0,51	0,52	0,53	0,54	0,55	0,56	0,57	0,58	0,59	0,6
0,61	0,62	0,63	0,64	0,65	0,66	0,67	0,68	0,69	0,7
0,71	0,72	0,73	0,74	0,75	0,76	0,77	0,78	0,79	0,8
0,81	0,82	0,83	0,84	0,85	0,86	0,87	0,88	0,89	0,9
0,91	0,92	0,93	0,94	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99	1

Fósforos na construção de triângulos¹²



Com 3 fósforos podes construir um triângulo de perímetro 3.

Com 5 fósforos podes construir uma figura, formada por dois triângulos, com perímetro 4.

Com 7 fósforos podes construir...

- Quantos fósforos são precisos para construir uma figura formada por 10 triângulos?
- Por quantos triângulos é formada a figura que se contrói com 51 fósforos? Qual é o perímetro dessa figura?
- Se o número de fósforos for muito maior, haverá alguma regra que facilite a descoberta do número de triângulos e do perímetro da figura correspondente? Explica como encontraste essa regra.

¹²In <http://www.apm.pt/ip/antiores/out98/r12c.html>

Escadas¹³

Chamam-se *números em escada* aos números que podem ser escritos como a soma de números naturais consecutivos.

Por exemplo:

5 é um número em escada, pois pode escrever-se como 2+3;

12 também é 3+4+5;

4+5+6 ou 1+2+3+4+5 são duas das formas de representar o 15.

- Que números podem ser escritos como uma soma de dois números consecutivos?
- Quais podem ser expressos como uma soma de três números consecutivos? E utilizando quatro números consecutivos?
- Descobriste números que não sejam em escada?
- Que números têm uma única representação em escada?

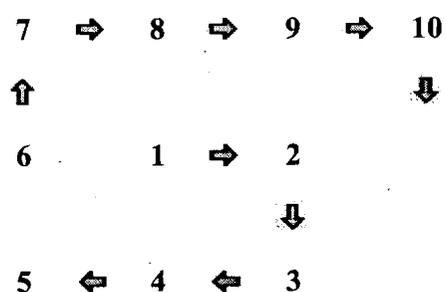
Investiga outros aspectos relacionados com estes números.

Procura justificar todas as conclusões a que fores chegando.

¹³ In <http://www.apm.pt/portal/index.php?id=32588>

Números em espiral¹⁴

Imagina uma sequência de números dispostos em espiral tal como a figura ilustra:

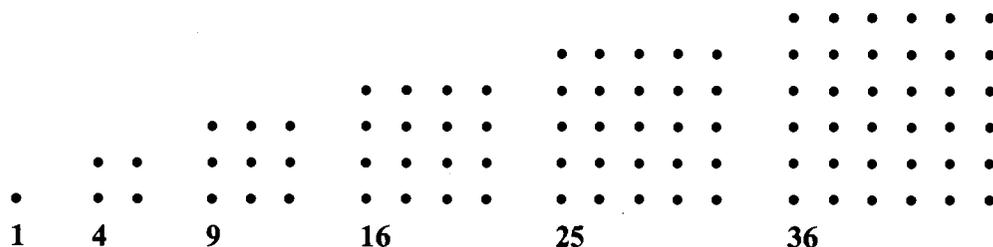


- Quais são os números que se situam na diagonal em que está o 1?
- Onde estão os números pares? E os quadrados perfeitos?

¹⁴In <http://www.apm.pt/portal/index.php?id=26373>

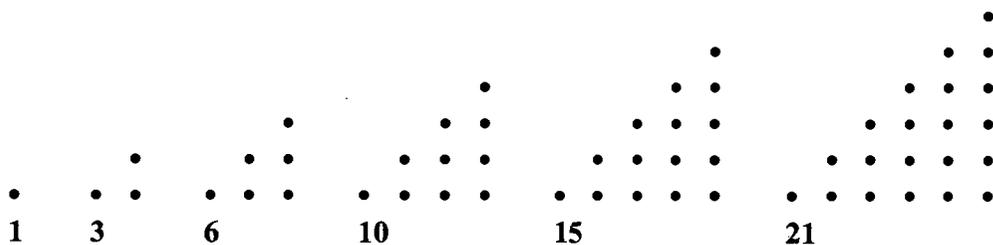
Números quadrados e triangulares¹⁵

1. Os **números quadrados** podem “*escrever-se*” formando quadrados. Por exemplo:



- Descobre um processo rápido de descobrir se um número qualquer é quadrado e regista-o na tua folha de trabalho.

2. Os **números triangulares** podem “*escrever-se*” formando triângulos. Por exemplo:



- Escreve os cinco números triangulares que se seguem ao 21.
- Investiga um processo rápido de descobrir se um número qualquer é triangular ou não.
- Regista as tuas conclusões.

¹⁵ In Ponte et al. (1998). *Histórias de Investigações Matemáticas*. Lisboa: I.E.

Números rectangulares¹⁶

- Que números, entre 1 e 30, podem ser representados sob a forma de um padrão rectangular?
-

Por exemplo, o número 8 pode ser representado da seguinte forma:

```

*   *   *   *
*   *   *   *

```

Alguns números podem ser representados por mais do que um padrão rectangular. Por exemplo o número 12 pode ser representado de duas formas diferentes.

```

*   *           *   *   *   *
*   *           *   *   *   *
*   *           *   *   *   *
*   *           *   *   *   *
*   *           *   *   *   *
*   *           *   *   *   *

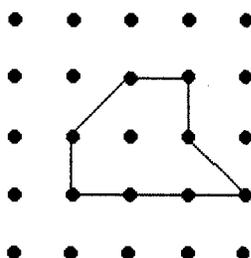
```

1. Quais os números que não são rectangulares?
2. Quais os números que têm duas formas? E três formas?
3. É possível encontrar números com quatro formas, cinco formas,...

¹⁶ In <http://www.apm.pt/portal/index.php?id=32178>

Polígonos no Geoplano¹⁷

Na figura está representado um hexágono irregular construído num geoplano.



Nota que este hexágono tem 1 prego no seu interior e 8 na fronteira e a sua área é 4.

1. Desenha outra figura com 1 prego no interior e 8 na fronteira. Qual é a sua área?
2. Desenha outras figuras. Tenta encontrar uma maneira de determinar a área dessas figuras a partir do número de pregos que ficam no interior e na fronteira.
3. Constrói agora outros polígonos com 8 pregos na fronteira, mas com diferente número de pregos no interior. Qual o polígono que têm maior área?

Imagina que tens um geoplano gigante no qual podias construir um polígono com 100 pregos na fronteira e com a maior área possível. Como o imaginas? Justifica.

¹⁷ In <http://www.apm.pt/portal/index.php?id=32630>

Potências e regularidades¹⁸

1. O número 729 poderá ser escrito como potência de base 3? Para verificar basta escrever as sucessivas potências de 3.

$$3^2 = 9$$

$$3^3 = 27$$

$$3^4 = 81$$

$$3^5 = 243$$

$$3^6 = 729$$

- Procura escrever os números que se seguem como potências de base 2:

$$64 =$$

$$128 =$$

$$200 =$$

$$256 =$$

$$1000 =$$

- Que conjecturas podes fazer acerca dos números que podem ser escritos como potências de base 2? E como potências de base 3?

2. Observa as potências de base 5:

$$5^1 = 5$$

$$5^2 = 25$$

$$5^3 = 125$$

$$5^4 = 625$$

- O último algarismo de cada uma destas potências é sempre 5. Será que isso também se verifica para as potências de 5 seguintes?

- Investiga o que se passa com as potências de 6.

- Investiga também as potências de 9 e as de 7.

¹⁸ In APM. *Investigações Matemáticas na sala de aula* - Propostas de trabalho. MPT

Um outro olhar sobre a tabuada¹⁹**1. Constroi a tabuada do 3**

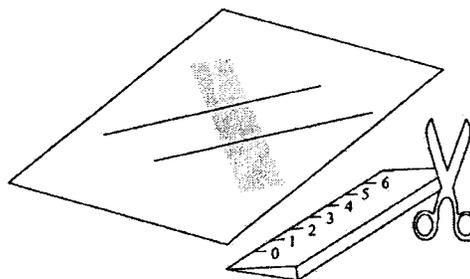
- O que encontras de curioso nesta tabuada?
- Investiga um pouco mais. Prolonga a tabuada calculando 11×3 , 12×3 , 13×3 , ... e formula algumas conjecturas.

2. Investiga agora o que acontece nas tabuadas do 9 e do 11.

¹⁹ In APM. *Investigações Matemáticas na sala de aula* - Propostas de trabalho. MPT

Vamos descobrir quadriláteros²⁰

Nesta investigação vais descobrir que figuras se formam quando colocas tiras de acetato sobre duas rectas paralelas.



Antes de começares a tua investigação vais ter de preparar o material:

- Traça duas rectas paralelas numa folha de papel a uma distância de 3 cm uma da outra.
- Traça agora duas rectas paralelas numa folha de acetato. Recorta a tira que obténs.

1. Sobrepondo a tira de acetato às duas rectas paralelas conseguirás obter um rectângulo? Como? E um quadrado? Um losango? E um paralelogramo?

Nota: Deves cortar novas tiras e experimentar de novo.

2. Se quiseres obter trapézios, como deverás cortar o acetato? Descreve as tuas descobertas.

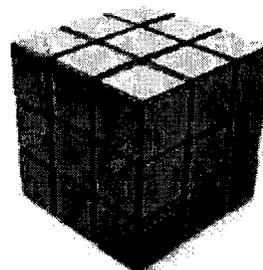
Escreve e explica todas as tuas descobertas. Podes fazer desenhos para ajudar a explicar as tuas respostas.

²⁰ In APM. *Investigações Matemáticas na sala de aula* - Propostas de trabalho. MPT

Cubos, cubos e mais cubos²¹

Com vários cubinhos podemos construir outros cubos. Um exemplo disto é o cubo de Rubik, um quebra-cabeças que pareceu nos anos 70. Rubik é o nome do húngaro que o inventou.

Exteriormente o cubo de Rubik é um cubo $3 \times 3 \times 3$ em que cada uma das suas faces tem uma cor diferente. Interiormente tem uma engrenagem que permite baralhar as cores nas diversas faces.



1.ª Questão

1. Imagina que queres construir um cubo $3 \times 3 \times 3$, isto é, de aresta 3, com vários cubinhos. Quantos tens de utilizar?
E com apenas alguns deles, que cubos consegues construir?
2. Imagina que tens 100 cubinho à tua frente. Que outros cubos consegues construir com 100 cubinhos? E se fossem 200?

Organiza as tuas descobertas numa tabela:

- Com 500 cubinhos será possível construir um cubo com todos eles? Porquê?

Indica uma forma pratica de verificar se é possível construir um cubo quando temos um determinado número de cubinhos.

Aresta do cubo	N.º de cubinhos

²¹ In APM. *Investigações Matemáticas na sala de aula* - Propostas de trabalho. MPT

2.ª Questão

Imagina agora que, depois de construído o cubo de aresta 3 com os cubinhos, se decidiu pintá-lo exteriormente de vermelho.

1. Quantos cubinhos ficam com uma única face pintada? E com duas? E com três?... E com nenhuma?
2. Investiga o que aconteceria se pintássemos um cubo de aresta 4. E se pintássemos um de aresta 5 construído da mesma forma?
Faz um desenho que te ajude a investigar o caso.

Organiza numa tabela as tuas descobertas sobre o número de cubinhos com 0, 1, 2,... faces pintadas num cubo de $3 \times 3 \times 3$, $4 \times 4 \times 4$ e $5 \times 5 \times 5$.

Observa a tabela e escreve algumas conclusões a que chegaste.

Boa Investigação!

Anexo 4 – Guião para planificação de aula



**O conhecimento profissional do professor
e as investigações matemáticas na sala de aula:
Um estudo nos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico**

Guião para planificação de aula

Objectivos:

Tarefa:

Material:

Questões essenciais a colocar aos alunos:

Forma como pensa conduzir a aula:

Síntese do conhecimento matemático aprendido:

Avaliação:

Anexo 5 – Guião-exemplo para planificação de aula



O conhecimento profissional do professor e as investigações matemáticas na sala de aula:
Um estudo nos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico

Guião-exemplo para planificação de aula

Objectivos:

- Explorar regularidades numéricas e formular conjecturas sobre essas regularidades
- Testar as conjecturas formuladas, e refutar ou generalizar as regularidades respectivas
- Justificar matematicamente porque se verificam as regularidades encontradas
- Comunicar ideias matemáticas com rigor

Tarefa(s) – Explorações com números

Material – Folhas de papel com quadro com números para os alunos, acetatos com a tabela

Questões essenciais a colocar aos alunos

- Como comunicar aos colegas a posição de um determinado número na tabela? Por ex., o 8?
- O que são regularidades? E o que são regularidades numéricas?
- Que regularidades podemos encontrar no quadro? Dá-me um exemplo.
- Podemos dizer isso de uma maneira mais geral?
- Essa regularidade verifica-se sempre? Porquê?
- Porque é que essa regularidade se verifica?
- Então e se...? (Ex. De uma coluna para a seguinte os números crescem uma unidade e de uma linha para a seguinte crescem 5. Se o quadro fosse de 6x6 continuaria a repetir-se essa regularidade? E se fosse de 7x7?)

Forma como pensa conduzir a aula

- Certificação da compreensão da tarefa (colectivamente) – 10/15 min.
- Exploração da tarefa (Trabalho a pares) – 30 min.
- Identificação e validação das regularidades encontradas (Discussão colectiva) – 30 min.
- Promover a discussão, ouvindo à vez os grupos que vale a pena porque acrescentam regularidade diferente. Ter o cuidado de seleccionar os grupos enquanto eles fazem a exploração. Começar pelas regularidades mais elementares e só depois avançar para as mais complexas. Ir registando cada regularidade por palavras depois de validadas, procurando exprimi-la de forma rigorosa.

Como faz a síntese/conclusão sobre o conhecimento matemático aprendido

Notar que nesta tarefa resultam muitos conhecimentos que podem ser generalizados e utilizados em outras alturas. No final, registar as principais conclusões, alunos passam no caderno

- Na mesma linha, para passar de um número para o seguinte acrescentamos uma unidade
- Na mesma coluna, para passar de um n° para o outro acrescenta-se o número igual ao de colunas
- Num quadrado de 2×2 a soma dos números que estão sob as duas diagonais principais é igual
- A soma de $\text{par} + \text{par} = \text{par}$; $\text{Par} + \text{ímpar} = \text{ímpar}$; $\text{Ímpar} + \text{ímpar} = \text{par}$

Guião da 1.ª Entrevista - Caracterização do professor

Conhecimento profissional

Conhecimento de si

- **Aspectos pessoais**
 - Idade/ anos de serviço docente;
 - Família;
 - Traços principais da personalidade;
 - Aspectos marcantes do percurso escolar, em particular no que refere à disciplina de Matemática e professores de Matemática;
 - Outros que consideres importantes.

- **Aspectos profissionais**
 1. Descreve, sucintamente, o teu percurso profissional.
 2. Como é que te caracterizas enquanto professor(a)?/O que é mais importante para ti?
 3. Como achas que os teus colegas te caracterizam? Porquê?
 4. Que tipo de relação manténs com os teus colegas? Costumam discutir ideias e estratégias, construir e trocar materiais de Matemática? Porquê?
 5. Como achas que os teus alunos te caracterizam? Porquê? (Autoridade; papel, etc.)
 6. Sentes-te realizado(a) profissionalmente? Porquê?
 7. O que te levou a optar pela profissão de professora do 1.º ciclo/professor do 2.º ciclo de Matemática e Ciências da Natureza?
 8. O que consideras mais gratificante na profissão?
 9. Quais as principais dificuldades desta profissão?
 10. Costumas frequentar programas de formação contínua? Que importância lhes atribuis?
 11. Refere uma experiência enquanto professor(a) de Matemática que te tenha marcado positiva e outra negativamente.
 12. Enquanto professora do 1.º ciclo/professor do 2.º ciclo de Matemática e Ciências da Natureza qual a área disciplinar/disciplina que leccionas com maior agrado e porquê? E qual delas é mais complexa de preparar, conduzir e avaliar? Porquê?
 13. Enquanto professora do 1.º ciclo/professor do 2.º ciclo de Matemática e Ciências da Natureza qual a área disciplinar/disciplina que melhor leccionas? Porquê?

Conhecimento do Contexto

1. Como caracterizas a escola onde leccionas? (promoção de actividades extracurriculares; iniciativas; dinâmica; projectos, etc.)
2. Como caracterizas os teus alunos?
3. Como caracterizas o corpo docente da tua escola?
4. Como caracterizas o meio envolvente em que a tua escola se insere e de que forma este influencia a tua conduta pessoal e profissional?

Conhecimento do Conteúdo/Matemática

1. O que é para ti a matemática?
2. Consideras que a tua formação inicial foi adequada, no que respeita à Matemática, a nível científico, pedagógico e didáctico, para o desempenho das tuas funções? Que virtudes e fragilidades lhe atribuis?
3. Que tema/área da Matemática escolherias para aprofundar os teus conhecimentos? Porquê?
4. Como foi a tua experiência com a Matemática, enquanto aluno dos ensinos Básico, Secundário e Superior?

Conhecimento do Currículo e do Programa

1. Consideras importante a aprendizagem da Matemática? Porquê?
2. Consideras que os objectivos do ensino/aprendizagem da Matemática são hoje os mesmos que eram no passado? O que mudou e de que forma as escolas e os professores têm acompanhado essa mudança?
3. Qual a tua visão sobre o currículo e programa de Matemática do 1.º Ciclo do Ensino Básico/ 2.º Ciclo do Ensino Básico? Qual a diferença entre eles?
4. Conheces o novo programa de Matemática publicado em 2007? Qual a tua opinião sobre o mesmo?
5. Qual a tua posição relativamente ao seguimento e cumprimento do programa?
6. Quais as orientações curriculares e programáticas que consideras determinantes para um ensino de Matemática de qualidade?
7. A que materiais recorres para planificares as tuas aulas? Que importância atribuis ao manual de Matemática?
8. Se pudesses realizar alterações nos programas e/ou currículo de Matemática do 1.º Ciclo do Ensino Básico/ 2.º Ciclo do Ensino Básico que alterações farias? Porquê?

Conhecimento do Processo Instrucional

1. Quais as tuas preocupações quando planificas as tuas aulas de Matemática?
2. Como defines as tuas aulas de Matemática? Que método utilizas? Que estratégias privilegas? Descreve-as, se possível.
3. Que tipo de tarefas seleccionas com mais frequência?
4. Costumas utilizar nas tuas aulas materiais de suporte à aprendizagem tais como matérias manipuláveis e tecnologias? Que importância lhes atribuis?
5. Que competências consideras mais importantes desenvolverem-se num aluno? Porquê?
6. Como defines a aula ideal de Matemática? E o aluno ideal? Estão muito longe da tua realidade profissional?
7. De que forma avalias as aprendizagens dos teus alunos? Que componentes consideras mais importantes?

Conhecimento dos Alunos e da forma como aprendem

1. A que atribuis o insucesso generalizado dos alunos portugueses à disciplina de Matemática evidenciado em provas nacionais e internacionais?

2. De que forma tens contribuído para fazer face à situação referida na questão anterior?
3. Qual a tua opinião sobre as Provas de Aferição?
4. Realizas algum tipo de preparação dos teus alunos para as Provas de Aferição?
5. Que tipo de relação manténs com os teus alunos?
6. Na tua opinião, como aprendem os alunos Matemática?
7. Como defines a aula preferida de Matemática dos alunos?
8. Como lidas com as diferenças dos alunos?
9. Que tipo de tarefas consideras mais importantes para os alunos?

....

Por que aceitaste participar neste estudo? Quais as tuas expectativas?

Guião da 2.ª Entrevista

• Questões relacionadas com o conhecimento didáctico:

a. Sobre o desenvolvimento de tarefas de investigação/ processo instrucional:

1. Quais as características que pensas que deve ter uma tarefa para ter um cariz de investigação? Já tinhas realizado aulas de investigação com os teus alunos?
2. Achas que conseguirias criar tarefas deste género? Quais as principais preocupações que terias?
3. Em que critérios te baseaste para seleccionares as tuas tarefas?
4. Que importância atribuis à planificação das aulas de investigação? Quais as preocupações que tiveste na planificação das mesmas? Consideras que realizaste uma planificação eficiente?
5. Pediste ajuda ou discutiste a tua planificação com algum colega? Porquê?
6. Qual(ais) a(s) tarefa(s) que mais gostaste e menos gostaste? Porquê?
7. Qual(ais) a(s) tarefa(s) que os alunos mais gostaram? Porquê?
8. Quais os critérios e preocupações que um professor deve ter em conta para a selecção/ adaptação de tarefas de investigação?
9. Durante uma aula de investigação quais devem ser as principais preocupações de um professor?
10. Qual é a fase do trabalho investigativo que deve merecer maior atenção por parte do professor? Porquê?
11. Em qual das fases do trabalho investigativo julgas ter sido investido mais e qual julgas ter sido a mais importante para os alunos?
12. Qual das fases do trabalho investigativo consideras que foi melhor conseguida e pior conseguida por ti? Porquê?
13. O trabalho em grupo foi a metodologia de trabalho por ti eleita para estas aulas? Consideras que é a mais adequada ou pode haver lugar para o trabalho individual ou mesmo em grande grupo?
14. De que forma realizaste a avaliação dos alunos acerca do trabalho desenvolvido nas aulas de investigação?
15. Que dificuldades vês neste tipo de aulas?

b. Sobre o currículo/programa:

1. Que importância atribuis às tarefas de investigação?
2. Que relação consideras existir entre o programa e as tarefas de investigação e entre o currículo e as tarefas de investigação? Haverá

implicações na organização dos mesmos pelo facto de se colocar os alunos perante este tipo de tarefas?

3. Que importância atribuis à calculadora para o desenvolvimento deste tipo de tarefas? E aos materiais manipuláveis?

4. Quais os objectivos que consideras ver cumpridos e as competências que consideras desenvolver com a realização de trabalho investigativo na sala de aula?

5. Consideras que as tarefas de investigação ajudaram os alunos na preparação para as Provas de Aferição do 4.º ano (6.º ano)?

c. Sobre a Matemática:

1. O conhecimento matemático que a tua licenciatura te proporcionou mostrou-se adequado para o desenvolvimento de tarefas de investigação? Ou foi em algum aspecto insuficiente? Qual?

2. O desenvolvimento de tarefas de investigação permitiu-te realizares alguma aprendizagem a nível matemático ou fortalececeres alguns conhecimentos já existentes? Quais?

3. Que aspectos da Matemática julgas ter desenvolvido nos alunos com o desenvolvimento deste tipo de tarefas?

4. Que projectos tens para o teu futuro? Gostarias de realizar alguma formação? Em que área?

d. Sobre o conhecimento de si:

1. Qual é o perfil que julgas que um professor deve possuir para desenvolver tarefas de investigação na sala de aula? Enquadraste nesse perfil?

2. Qual o tipo de tarefas que eleges para desenvolver com os teus alunos? Porquê?

e. Sobre o conhecimento dos alunos e da forma como aprendem:

1. Qual foi a recepção dos alunos às aulas de investigação? A que se ficou a dever?

2. Quais as foram as principais dificuldades dos alunos nas aulas de investigação? A que se ficam a dever?

3. De que forma as características da turma influenciaram a tua planificação?

4. O desempenho dos teus alunos surpreendeu-te?

5. Notaste alguma evolução por parte dos alunos ao longo das aulas de investigação? A que níveis?

6. Quais os principais aspectos positivos que o trabalho investigativo trouxe para os teus alunos?

• **Questões relacionadas o projecto de investigação**

1. Qual o balanço que realizas da tua participação neste projecto?
2. O projecto foi ao encontro das tuas expectativas?
3. O que mais te agradou neste projecto?
4. O que mais de desagradou?
5. O que aprendeste com este projecto?
6. Achas que vais continuar a desenvolver tarefas de investigação com os teus alunos? Porquê? Se sim, vais introduzir algumas alterações'?

Anexo 8 – Guião de Entrevista para Reflexão sobre a condução da aula



**O conhecimento profissional do professor
e as investigações matemáticas na sala de aula:
Um estudo nos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico**

Reflexão sobre a condução da aula:

1. Qual é o teu primeiro balanço sobre a aula?
2. Achas que os alunos aderiram bem à tarefa? Porquê?
3. Percebeste todas as conjecturas que os alunos apresentaram?
4. Quais foram as principais dificuldades que sentiste? A que se terão ficado a dever?
5. O que mais gostaste na aula?
6. O que pensas terás de fazer diferente para que a aula corra melhor?

Anexo 9 – Guião de observação de aula

	<p>O conhecimento profissional do professor e as investigações matemáticas na sala de aula: Um estudo nos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico</p>
---	--

Guião de observação de aula

Escola: _____ Data: ____ / ____ / ____

Professor _____

Turma: _____ Ano de escolaridade: _____ N.º de alunos: _____

Tarefa proposta:

Tema / Conteúdos:

Planta da sala:

--	--