

**UNIVERSIDADE DE ÉVORA**  
**ESCOLA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA - DEPARTAMENTO DE**  
**ENGENHARIA RURAL**



**RESISTÊNCIA DE MATERIAIS**

**CONCEITOS GERAIS**

(Apontamentos para uso dos Alunos)

**JOSÉ OLIVEIRA PEÇA**

**ÉVORA**

**2016**

## INDICE

Nota do autor .....	3
1. Introdução .....	4
2. Tensão ( <i>stress</i> ) e extensão ( <i>strain</i> ) .....	4
3. Comportamento elástico e plástico.....	5
4. Material dúctil e material frágil .....	6
5. Ensaio uniaxial de um material dúctil .....	7
6. Ensaio uniaxial de um material frágil.....	9
7. Coeficiente de Poisson .....	11
8. Estado de tensão numa secção oblíqua.....	11
9. Trabalho de deformação ( <i>Energy of strain</i> ) .....	12
10. Tenacidade e resiliência. Aços endurecidos .....	14
11. Fadiga ( <i>Fatigue</i> ) .....	15
12. Princípio de Saint-Venant.....	16
13. Princípio da sobreposição dos efeitos (Principle of superposition).....	17
14. Noção de segurança .....	17
15. Peça linear ( <i>Rod</i> ) .....	19
16. Revisão de diagrama de esforços .....	20
Referências .....	28

## Nota do autor

Tendo sido interrompido, a partir do ano lectivo de 2015/2016, o 1º Ciclo do Curso de Engenharia Civil, o autor resolveu reunir toda a informação que foi disponibilizada aos alunos da disciplina de Resistência de Materiais, durante os 8 anos em que o curso funcionou na Universidade de Évora.

O presente trabalho versa os *Conceitos Gerais* da Resistência de Materiais e é uma edição revista e acrescentada das edições que foram publicadas em 2010; 2009 e 2008.

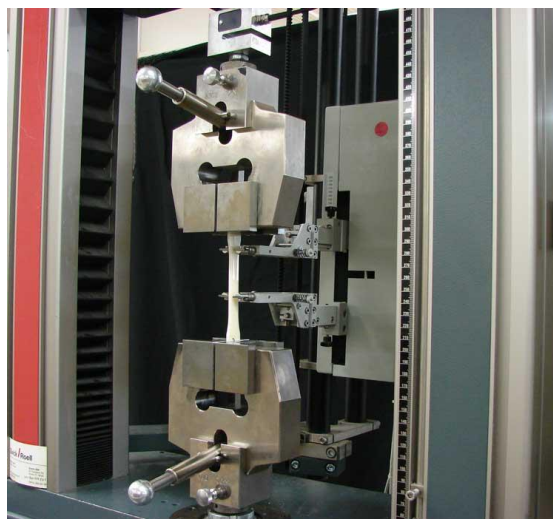
No curso, a disciplina de Resistência de Materiais tinha a duração de um único semestre (4º semestre), pelo que foi necessário seleccionar os temas mais relevantes a ensinar sobre *Esforço axial*.

No último ponto estão incluídos exercícios, abordados nas aulas práticas, sobre diagramas de esforços, tema ministrado na unidade curricular de Mecânica Aplicada que precedia a Resistência de Materiais na Licenciatura em Engenharia Civil

## 1. Introdução

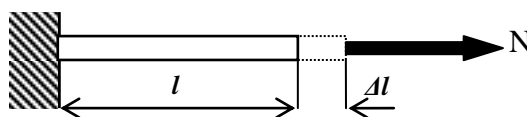
Ao engenheiro interessa a maneira como o material se deforma quando sujeito à acção de forças (Mecânica dos Materiais). Este conhecimento é baseado em ensaios nos quais amostras do material são submetidas a cargas conhecidas, medindo-se as deformações por elas induzidas.

O ensaio de tracção uniaxial realiza-se em equipamentos que aplicam, progressivamente, força de tracção (*tensile load*) ou de compressão (*compression load*) em provetes (*test specimen*) de dimensões padronizadas. A força e a alteração das dimensões do provete são medidas e registadas continuamente.

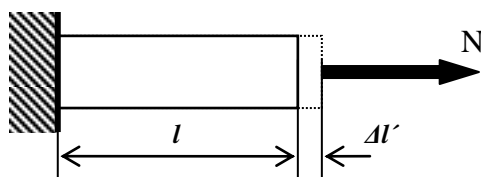


## 2. Tensão (*stress*) e extensão (*strain*)

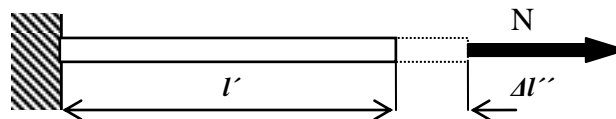
No ensaio uniaxial de tracção (*tensile test*) de um determinado material, o alongamento ( $\Delta l$ ) (*elongation*) registado para um determinado valor de força axial (N) (*tensile load*), depende das dimensões do provete.



De facto, para a mesma força, o alongamento será tanto menor, quanto maior for a área da secção do provete:



O alongamento será tanto maior, quanto maior for o comprimento do provete:

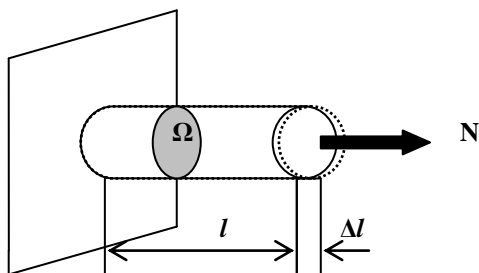


Utilizando o conceito de **tensão** (*stress*) em vez de força passa a ser possível fazer uma análise independente das dimensões e geometria do corpo. Do mesmo modo, usa-se o conceito de **extensão** (*strain*) em vez de alongamento, o que permite fazer uma análise independente das dimensões e geometria do corpo.

No caso de um provete de comprimento inicial  $l$  (*gauge length*) e secção inicial  $\Omega$  (*original cross-section area*), sujeito a uma força axial  $N$ , a qual lhe induz um alongamento  $\Delta l$ , define-se:

- tensão ( $\sigma$ ) como a força por unidade de superfície da secção transversal;
- extensão ( $\varepsilon$ ) como o alongamento por unidade de comprimento da barra:

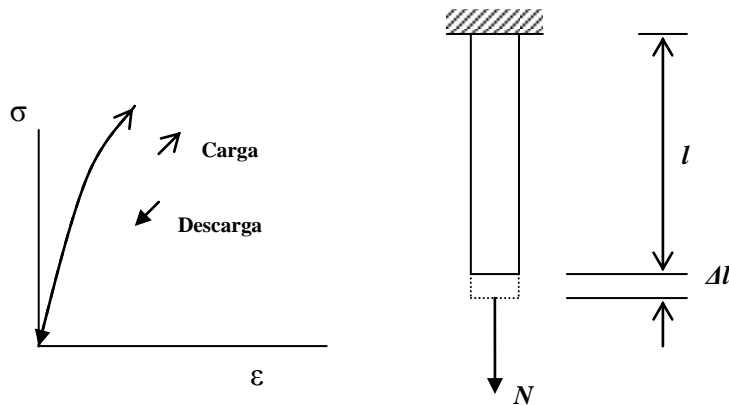
$$\sigma = \frac{N}{\Omega} \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$



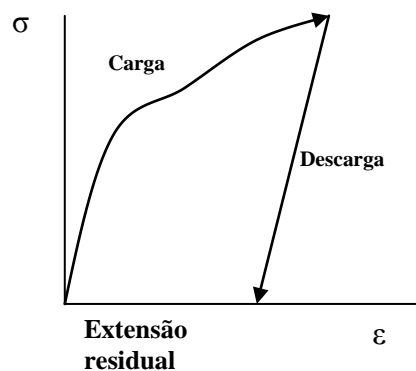
O gráfico que exprime  $N=f(\Delta l)$  num ensaio de tracção uniaxial, ao ser transposto para um gráfico  $\sigma =f(\varepsilon)$ , seguirá a mesma curva, enquanto o comprimento  $l$  e secção  $\Omega$ , não sofrerem grandes alterações, isto é enquanto as deformações forem pequenas.

### 3. Comportamento elástico e plástico

- **Comportamento elástico** (*elastic deformation*) – Deformação recuperável que ocorre simultaneamente com a aplicação de carga e em que as relações entre a deformação e a força que lhe corresponde são as mesmas na fase de carga (*uniformly increasing load*) e na fase de descarga (*removal of the load*);



- **Comportamento plástico** - Deformação não recuperável que ocorre simultaneamente com a aplicação de carga e que, de uma maneira geral, se manifesta apenas a partir de uma determinado nível de carga.



Um material pode ter, em maior ou menor grau, ambos os comportamentos acima indicados, o que conduz à noção de material dúctil e material frágil.

#### 4. Material dúctil e material frágil

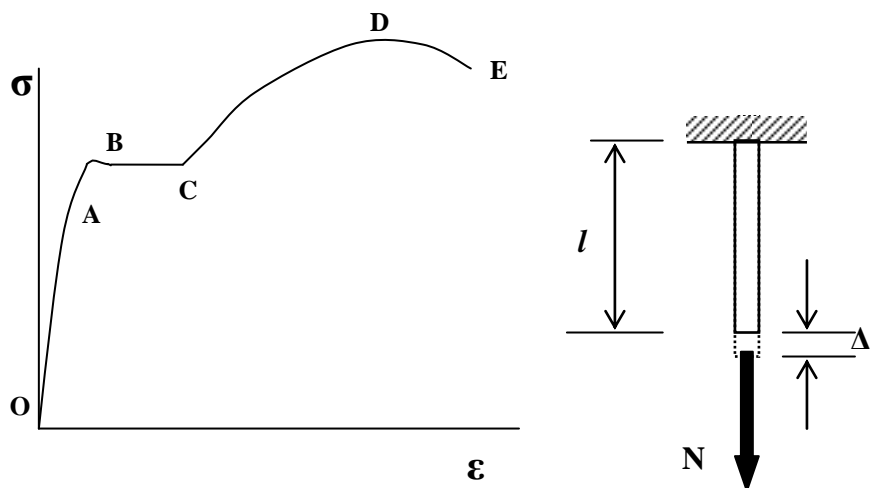
Materiais dúcteis (*ductile material*), são materiais, como o aço macio (*mild steel; low carbon steel*), que ao serem carregados até à rotura, experimentam, antes desta, uma deformação plástica apreciável, geralmente muito superior à deformação elástica.

De uma maneira geral os metais são materiais dúcteis, mas este comportamento decresce a temperaturas baixas, isto é a rotura pode acontecer com menor pré-aviso de deformação plástica.

Materiais frágeis (*brittle material*) são materiais, como o betão (*concrete*), ferro fundido (*cast iron*), pedra (*rock*), vidro (*glass*), que atingem a rotura praticamente sem sofrer deformação permanente, isto é, com um comportamento elástico praticamente até à rotura.

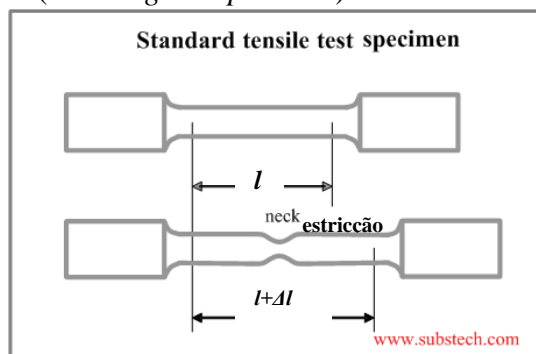
## 5. Ensaio uniaxial de um material dúctil

A figura seguinte ilustra esquematicamente o diagrama de um ensaio uniaxial de tracção (*tension test diagram*) de um provete (*test specimen*) de aço macio:

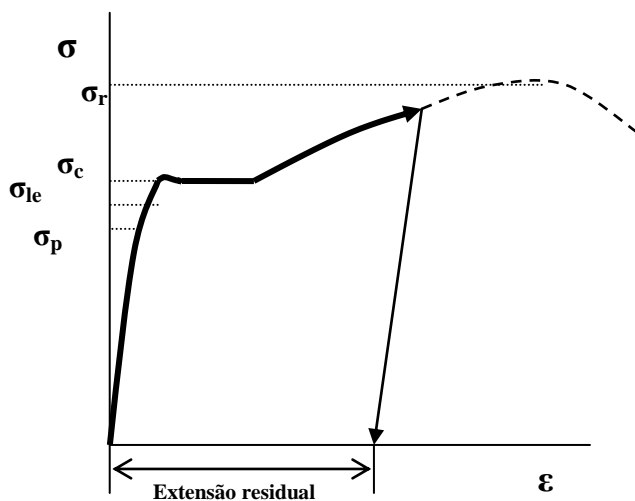


Há a destacar as seguintes zonas:

- **OA** - zona de comportamento elástico linear (*zone of elasticity*). É a zona de serviço do material;
- **BC** - patamar de cedência (*yielding zone*). É uma zona de deformação puramente plástica;
- **CD** - zona de endurecimento (*zone of strain hardening*);
- **D** - estricção (*necking*);
- **E** - o provete parte-se (*breaking the specimen*).



Definem-se as seguintes tensões:



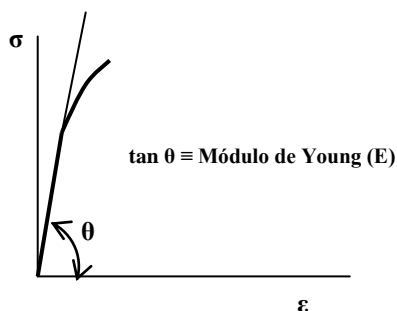
- $\sigma_p$  - **tensão limite de proporcionalidade** (*proportional limit stress*) – Tensão abaixo da qual é válida a lei de Hooke. Tensão limite do comportamento elástico linear.
- $\sigma_{le}$  - **tensão limite de elasticidade** (*elastic limit stress*) – Tensão máxima para a qual após uma descarga, não ocorre qualquer deformação permanente.
- $\sigma_c$  - **tensão de cedência** (*yield point; yield stress*) – Tensão à qual se verifica um aumento de deformação, mesmo sem variar a tensão.
- $\sigma_r$  - **tensão de rotura** (*rupture stress*) – Tensão à qual se verifica o aparecimento da estricção.

Em muitos materiais  $\sigma_{le} \approx \sigma_p$ .

Na zona linear a relação  $\sigma=f(\epsilon)$  será:

$$\sigma = E \times \epsilon \quad (\text{lei de Hooke unidireccional})$$

na qual  $E = \frac{\sigma}{\epsilon}$  toma o nome de **módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young** (*Young's modulus*).

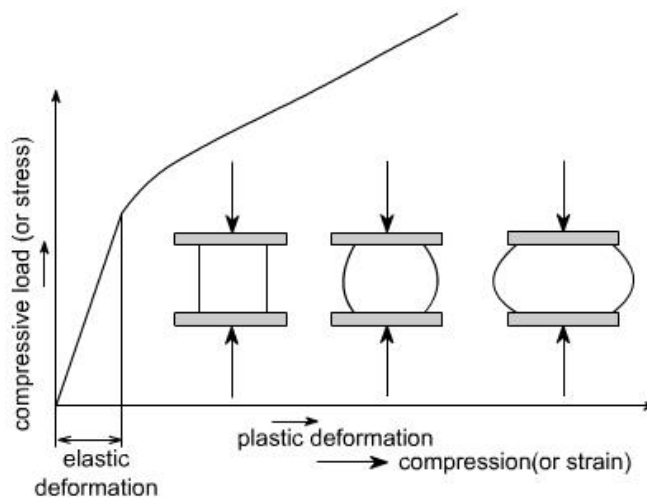


Material	E (GPa)
Aço	200 a 210
Cobre	110 a 120
Alumínio	70

Notar que quanto maior for o módulo de Young, mais rígido (*stiff*) é o material, isto é menos alonga ao ser sujeito a uma força de tracção.



Materiais dúcteis num ensaio de compressão uniaxial (*compression test*), apresentam um diagrama de tensão extensão como se ilustra na figura seguinte:

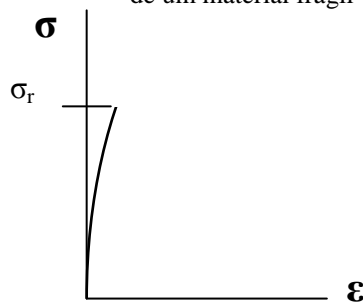


Há uma zona de comportamento elástico, seguida de uma zona de comportamento plástico. Os valores de tensão de proporcionalidade em compressão apresentam valores semelhantes aos verificados em tracção. Naturalmente o fenómeno de estricção não ocorre em compressão. Pelo contrário, o provete vai sofrendo um progressivo esmagamento, como indicado na figura.

## 6. Ensaio uniaxial de um material frágil

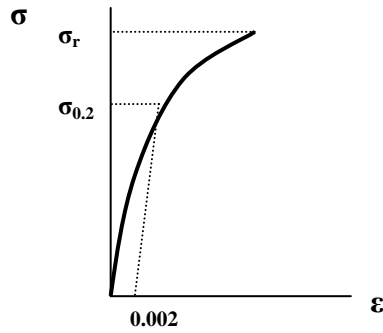
No ensaio uniaxial de tracção de um provete de betão, há a destacar:

Ensaio uniaxial de tracção de um material frágil



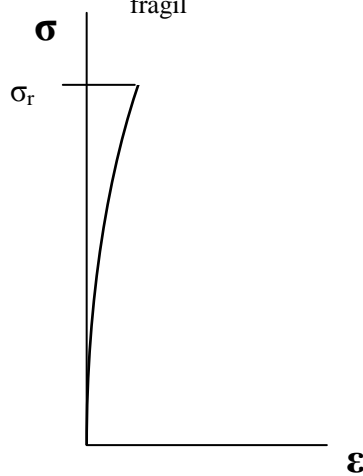
- A zona de deformação linear é pouco definida;
- A rotura (*breaking the specimen*) acontece bruscamente, sem ter sido precedida por deformações;
- Praticamente sem deformação residual, mesmo quando solicitado até à rotura.

Nos materiais frágeis, em geral, a tensão de cedência é pouco definida, uma vez que a passagem de um comportamento elástico para o comportamento plástico não é muito nítida. Convencionou-se para estes materiais que a tensão limite de elasticidade é a que provoca uma extensão permanente de 0.2 %, ou seja  $\epsilon = 0.002$ . Representa-se:  $\sigma_{0.2}$ .

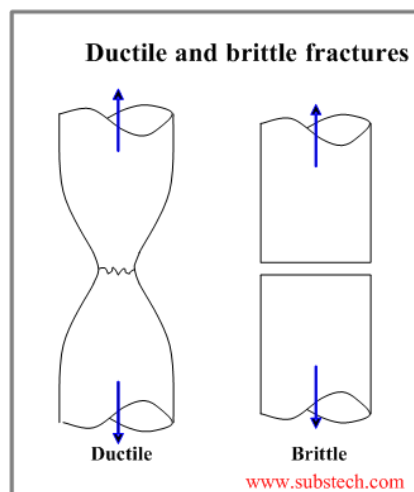


Num ensaio de compressão uniaxial, o comportamento é idêntico, no entanto a carga de rotura à compressão é muito superior à carga de rotura à tracção.

Ensaio uniaxial de compressão de um material frágil

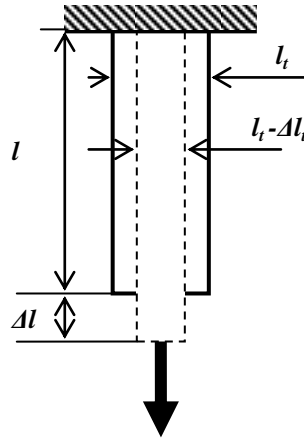


A rotura em compressão pode ocorrer por fractura (*splitting*) ou por abertura de fendas (*cracking*). Ocorre sem ter sido precedida por deformações.



## 7. Coeficiente de Poisson

O alongamento longitudinal da barra definido pela extensão  $\varepsilon$  é acompanhado de uma contracção transversal  $\Delta l_t$ .



Define-se extensão transversal ( $\varepsilon_t$ ) da barra com dimensão transversal  $l_t$ , como a contracção transversal por unidade de dimensão transversal da barra.

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta l_t}{l_t}$$

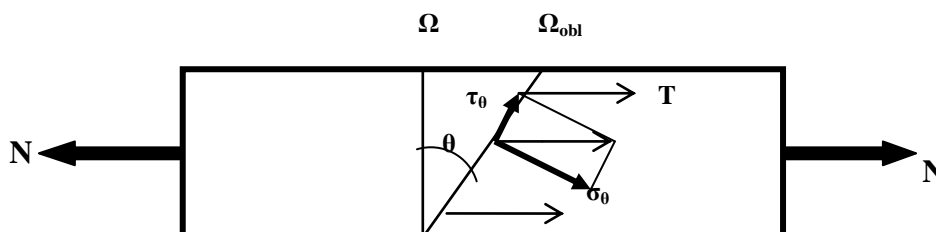
Atendendo a que:  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$

Define-se coeficiente de Poisson  $\nu = \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon}$

No aço macio  $\nu = 0.3$  na zona elástica e  $\nu = 0.5$  na zona plástica.

## 8. Estado de tensão numa secção oblíqua

Tensão numa secção oblíqua.



$$\Omega_{obl} = \frac{\Omega}{\cos \theta} \quad T = \frac{N}{\Omega_{obl}}$$

$$\sigma_{\theta} = T \times \cos \theta \quad \tau_{\theta} = T \times \sin \theta$$

Combinando as expressões anteriores, permite-nos afirmar que numa barra de secção transversal,  $\Omega$ , sujeita a uma força de tracção,  $N$ , em qualquer secção oblíqua ao eixo da barra fazendo um ângulo  $\theta$  com o eixo da barra, surgem tensões cujas componente normal e componente tangencial à secção oblíqua valem respectivamente:

$$\sigma_{\theta} = \frac{N}{\Omega} \cos^2 \theta \quad \tau_{\theta} = \frac{1}{2} \frac{N}{\Omega} \sin 2\theta$$

Como se pode inferir a tensão normal (*normal stress*) é máxima nas secções transversais ( $\theta = 0^\circ$ ) e a tensão tangencial (*shearing stress*) é máxima nas secções a  $45^\circ$ .

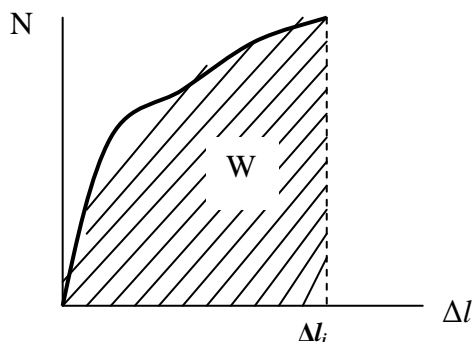
No ensaio uniaxial em tracção ou compressão de um material dúctil, quando ocorre a cedência, aparecem no provete linhas inclinadas a  $45^\circ$  em relação ao eixo do provete (linhas de Lüder-Hartman) Estas linhas coincidem com os planos em que se inicia a cedência (escorregamento), o que revela que a deformação plástica ocorre em primeiro lugar nas facetas onde a tensão tangencial é máxima.

Sendo o escorregamento tanto verificado em tracção como em compressão do provete, isto explica que a tensão de cedência tenha o mesmo valor nas duas situações.

Nos materiais frágeis a rotura, dá-se por quebra de ligação entre as partículas do material. Isto explica o facto da resistência à rotura ser diferente em tracção e compressão. Por exemplo no betão a resistência à tracção é condicionada pelas propriedades do ligante (pasta de cimento), enquanto que na compressão são importantes as propriedades do inerte (contacto entre as pedras que formam o inerte).

## 9. Trabalho de deformação (*Energy of strain*)

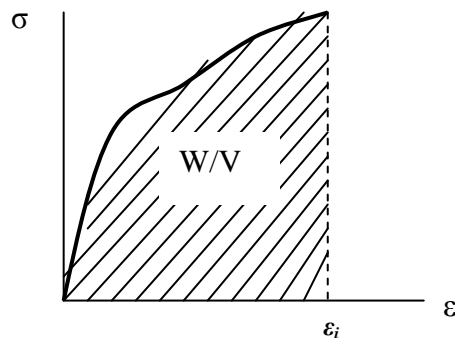
Atendendo ao conceito de trabalho de uma força, num ensaio uniaxial de tracção de uma barra, a área definida no gráfico  $N=f(\Delta l)$ , entre 0 e  $\Delta l_i$ , representa o trabalho realizado na barra pela aplicação da força até ao alongamento  $\Delta l_i$ .



$$W = \int_0^{\Delta l_i} N(\Delta l) d\Delta l$$

Com a introdução do conceito de tensão e extensão, é fácil de provar que, num ensaio uniaxial de tracção de uma barra, a área definida no gráfico  $\sigma = f(\epsilon)$ , entre 0 e  $\epsilon_i$ ,

representa o trabalho, por unidade de volume, realizado na barra pela aplicação da força até à extensão  $\varepsilon_i$ .



De facto, atendendo a que:

$$W = \int_0^{\Delta l_i} N(\Delta l) d\Delta l \quad \sigma = \frac{N}{\Omega} \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

Podemos escrever:

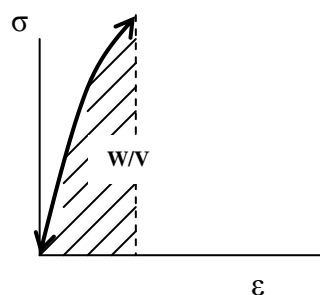
$$W = \int_0^{\varepsilon_i} \Omega \sigma(\varepsilon) l d\varepsilon = V \int_0^{\varepsilon_i} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon$$

Conclui-se:

$$\frac{W}{V} = \int_0^{\varepsilon_i} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon$$

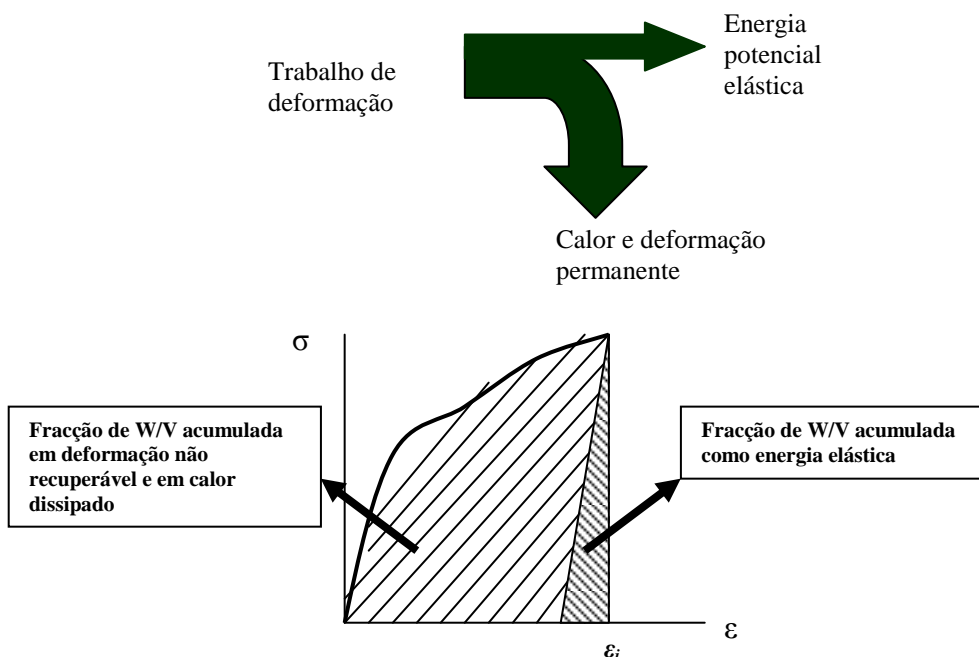
O trabalho (W) fornecido à barra é energia que se está a transmitir à barra. Se a aplicação da força for feita de forma muito lenta, então podemos desprezar qualquer conversão em energia cinética.

Enquanto o material estiver na zona de comportamento elástico, a energia fornecida é convertida em energia potencial elástica (*elastic potential energy of strain*).



A transformação é reversível “quase a 100 %”, isto é a energia potencial elástica pode ser convertida no trabalho de uma força (*external work*). A barra está a actuar como uma mola.

Se o trabalho de deformação começar a provocar deformação plástica, então a energia transmitida à barra é, em parte transformada em calor, o qual por ser dissipado para o exterior, não é recuperável.

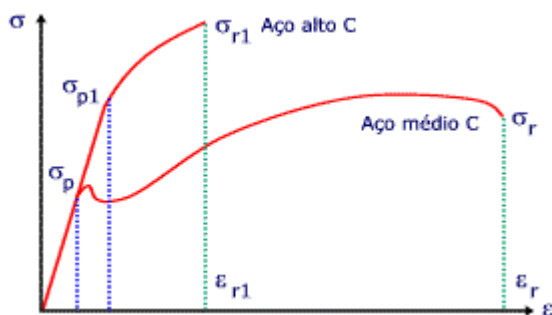


Só a fracção de energia potencial elástica é que é reversível, podendo recuperar-se como trabalho de uma força.

## 10. Tenacidade e resiliência. Aços endurecidos

Ao trabalho de deformação, por unidade de volume, realizado até provocar a rotura denomina-se **tenacidade** (*toughness*).

Ao trabalho de deformação, por unidade de volume, realizado até provocar a cedência denomina-se **resiliência** (*resilience*). Portanto um material com elevada resiliência é aquele que tem capacidade de acumular energia sem adquirir deformações permanentes. A figura seguinte mostra o exemplo de digramas de tensão extensão de dois aços. O aço de elevado teor de carbono é por exemplo usado na construção de molas. O aço de média ou baixo teor de carbono (aço macio) é usado para estruturas.

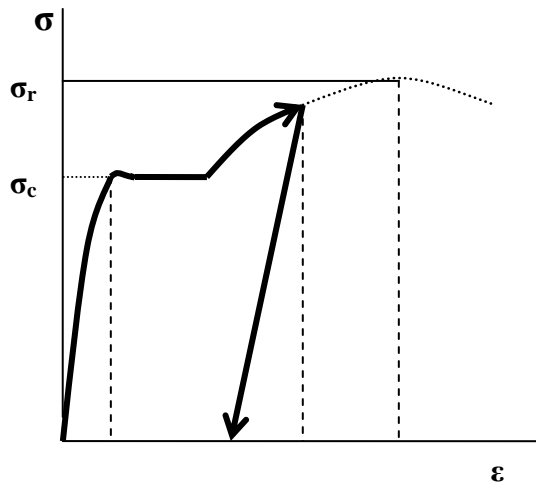


A tenacidade de um aço macio é superior à tenacidade de um aço com elevado teor de carbono. Em geral a tenacidade elevada é característica dos materiais dúcteis.

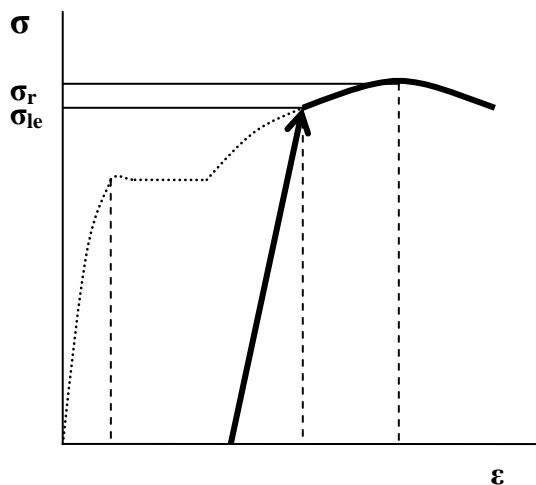
A resiliência de um aço aumenta com o teor de carbono.

O endurecimento do aço, aumentando o seu teor de carbono, permite aumentar a sua capacidade de acumular energia sem adquirir deformações permanentes (resiliência), mas diminui a sua capacidade de acumular energia no domínio plástico (tenacidade).

Um material dúctil após ter sido sujeito a uma deformação plástica, figura seguinte:



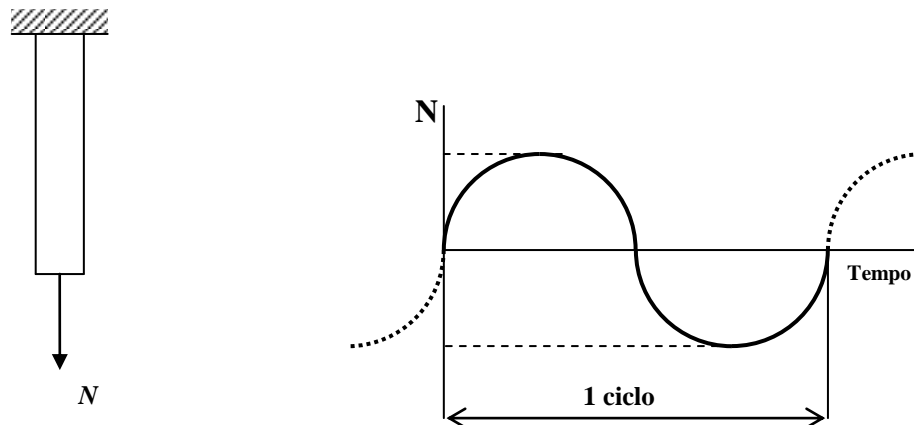
Se este material for de novo sujeito a uma solitação uniaxial, passará a ter o comportamento indicado na figura seguinte:



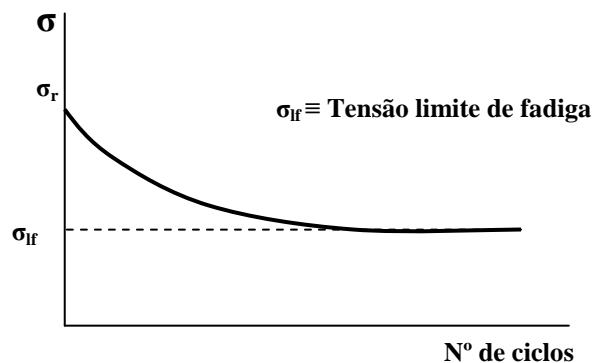
Este processo é conhecido por endurecimento a frio. Como se pode reconhecer, este processo permite aumentar a capacidade do material para acumular energia sem adquirir deformações permanentes (resiliência), mas diminui a sua capacidade de acumular energia no domínio plástico (tenacidade).

## 11. Fadiga (*Fatigue*)

Num ensaio de fadiga à tracção, o provete é submetido a uma força axial que varia ciclicamente entre um valor de intensidade em tracção e o mesmo valor de intensidade em compressão (*alternating loads*).



Regista-se o número de ciclos que levam a peça à rotura. O procedimento é efectuado para diversos valores de intensidade da força cíclica. Um gráfico de intensidade da força (cíclica) em função do número de ciclos que conduzem à rotura, mostra que a força tende para uma assíntota denominada **tensão limite de fadiga** (*fatigue limit stress*).



Nos aços **tensão limite de fadiga** é cerca de metade da tensão de rotura e é inferior à tensão de cedência.

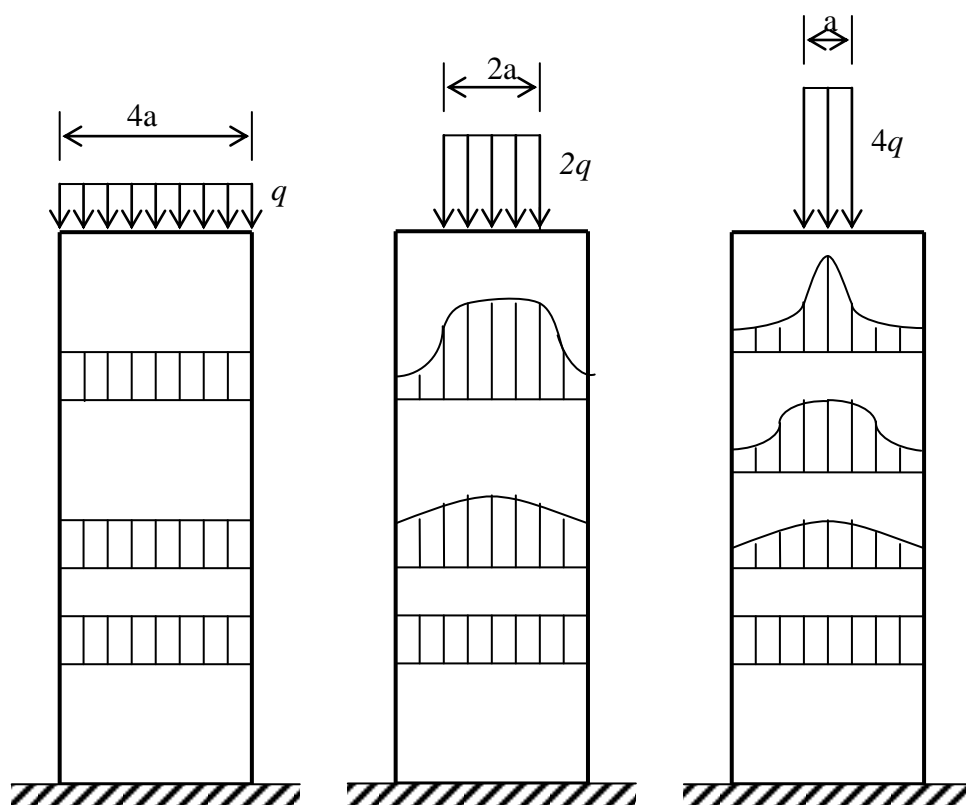
$$\frac{1}{2}\sigma_r \approx \sigma_{if} < \sigma_c$$

Os resultados de ensaios de fadiga em tracção apresentam uma grande dispersão e são fortemente condicionados pelo acabamento superficial do provete. O mecanismo de rotura por fadiga inicia-se numa fissura superficial da peça, fissura que vai progredindo à medida que o ensaio decorre. Desta forma a rotura por fadiga acontece de forma inesperada, daí o seu perigo.

## 12. Princípio de Saint-Venant

Se um corpo estiver sujeito à acção de um sistema de forças actuando numa zona limitada da superfície, as tensões e deformações que esse sistema de forças provoca a uma distância grande da superfície de aplicação não dependem da maneira particular como as forças estão aplicadas, mas apenas da sua resultante.





Na figura anterior, a mesma resultante de carga (aplicada de forma diferente) sobre a superfície da barra, reflecte-se a uma certa distância da superfície de forma idêntica.

### 13. Princípio da sobreposição dos efeitos (Principle of superposition)

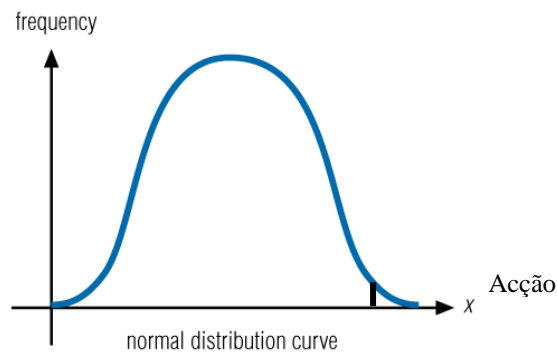
Nos corpos ou estruturas em que as acções aplicadas provoquem deformações suficientemente pequenas para poderem ser consideradas infinitesimais (a geometria do corpo ou da estrutura não se altera senão infinitesimalmente) e que, além disso, essas acções solicitam o corpo ou estrutura na zona de comportamento elástico linear, então o efeito de aplicação de uma força é independente do facto de já estarem, ou não, aplicadas outras forças no corpo ou na estrutura.

Por consequência os efeitos da aplicação de diversos sistemas de forças ao corpo ou à estrutura, podem ser calculados separadamente e adicionados (*That is, if several forces are applied to a system, it is possible to determine the internal forces, stresses, displacements and strains due to each force acting separately and then obtain the result effect of all forces as the sum of the effects of each force*).

### 14. Noção de segurança

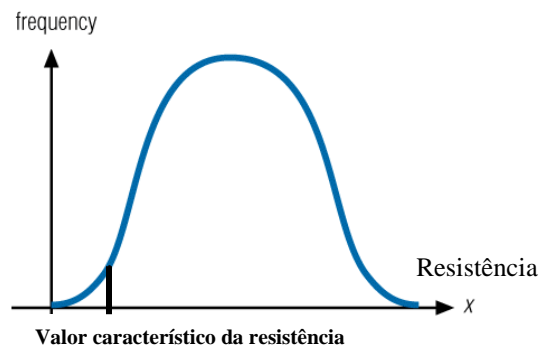
Critério semi-probabilístico de segurança

Normalmente não há a certeza de qual é o valor de solicitação. Há sim uma “visão” probabilística; a solicitação tem maior probabilidade de ter um determinado valor...



O *valor característico* para as acções é aquele que só tem 5 % de probabilidade de ser superado.

Do mesmo modo, normalmente não há a certeza de qual é o valor da propriedade de resistência do material. Há sim uma “visão” probabilística; a capacidade de resistência do material tem maior probabilidade de ter um determinado valor...



O *valor característico* para a resistência do material é aquele que só tem 5 % de probabilidade de ser inferior.

A partir dos *valores característicos* definem-se os *valores de cálculo*:

**Valor de cálculo das acções = Valor característico das acções × Coeficiente de majoração**

**Valor de cálculo da resist. do material = Valor característicos da resist. do material × Coeficiente de minoração**

Estes factores têm a função de “cobrir” outras incertezas, como:

Solicitações relacionadas com condições ambientais difíceis de prever (temperatura; humidade; efeitos corrosivos, etc.);

Incerteza quanto à garantia de uniformidade do material quanto à sua estrutura e dimensões;

Incerteza se a teoria usada para o dimensionamento e o método de cálculo que a apoia, será ou não uma visão perigosamente simplificada da realidade.

(Critério da) Tensão de segurança

$$\frac{\text{Valor característico das acções}}{\text{secção}} \leq \frac{\text{Valor característico da tensão resistente}}{\text{Coeficient e de segurança}}$$

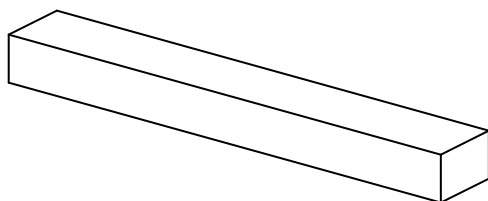
O coeficiente de segurança reúne num só número o coeficiente de majoração das acções e o coeficiente de minoração das propriedades resistentes. Deste modo este método é menos flexível, uma vez que não permite dar pesos diferentes às incertezas referentes às acções e às propriedades resistentes do material.

## 15. Peça linear (*Rod*)



“Edifício das areias” (em construção) – Estaleiro da obra da Barragem do Sabor - 2010

É uma peça em que uma das dimensões (comprimento) é consideravelmente superior às outras duas (as que definem a secção transversal da peça – *cross section*) e que pode ser encarada como gerada por uma figura geométrica plana que se desloca ao longo de uma recta (ou curva com grande raio de curvatura), mantendo-se perpendicular a essa linha (*axis of the rod*).

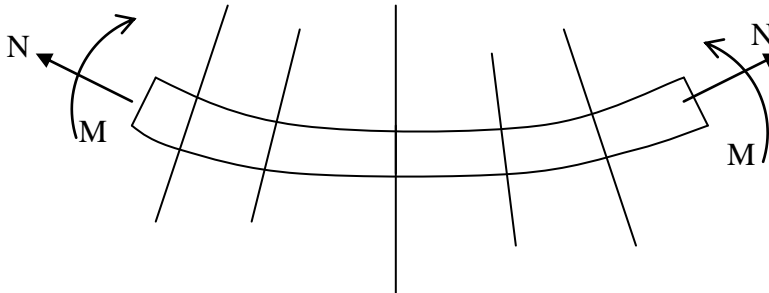


As peças lineares assumem importância, na medida em que nelas é possível relacionar de maneira simples os esforços que actuam simetricamente em relação à secção (esforço normal e momento flector) com as tensões que eles provocam, especialmente se a relação tensão-extensão for linear. Para os esforços que não actuam simetricamente (esforço transversal e momento torçor) esse relacionamento já não é tão simples a não

ser para formas particulares da secção transversal: secções de paredes finas e secções circulares em torção.

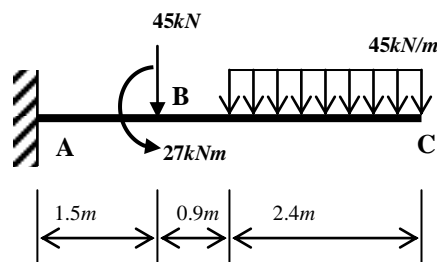
Lei da conservação das secções planas (Hipótese de Bernoulli)

Quando numa peça linear actuam apenas esforço axial e momento flector constantes (esforços simétricos), as suas secções mantêm-se planas e perpendiculares ao eixo durante a deformação.

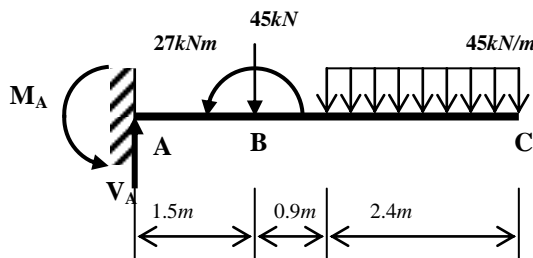


## 16. Revisão de diagrama de esforços

1) Admita a barra ABC da figura seguinte. No ponto B tem aplicado uma carga concentrada e um momento.



a) Calcule as reacções no apoio:

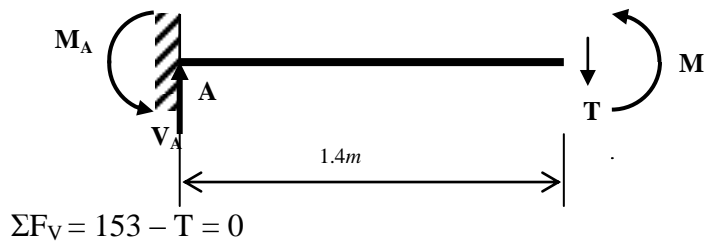


$$\Sigma F_V = V_A - 45 - 45 \times 2.4 = 0$$

$$\Sigma M = M_A + 27 - 45 \times 1.5 - 45 \times 2.4 \times 3.6 = 0$$

$$V_A = 153 \text{ kN}; M_A = 429.3 \text{ kNm}$$

b) Calcule os esforços na secção a 1.4 m do apoio, apresentando os resultados segundo a convenção de RM:

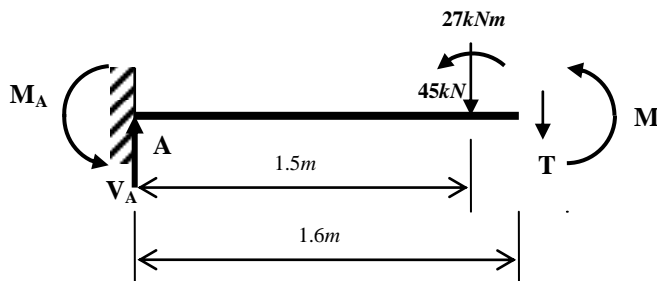


$$\Sigma F_V = 153 - T = 0$$

$$\Sigma M = 429.3 - 153 \times 1.4 + M = 0$$

$$T = 153 \text{ kN}; M = -215.1 \text{ kNm}$$

c) Calcule os esforços na secção a 1.6 m do apoio, apresentando os resultados segundo a convenção de RM:

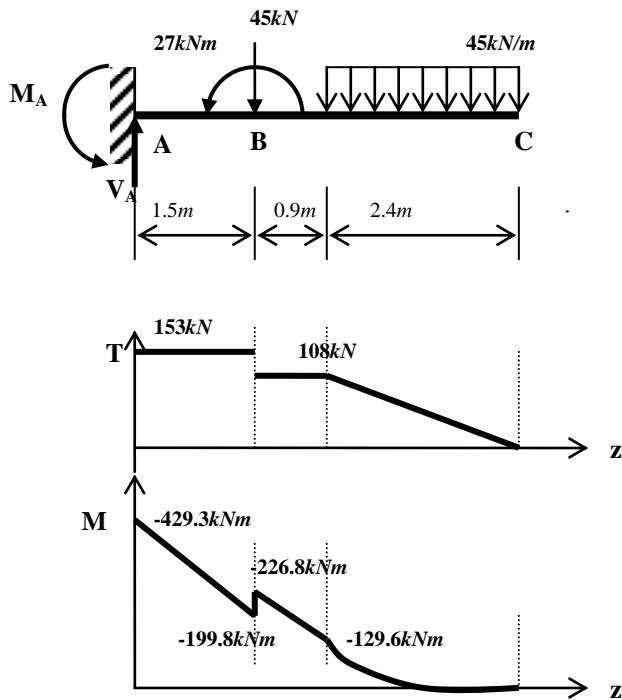


$$\Sigma F_V = 153 - 45 - T = 0$$

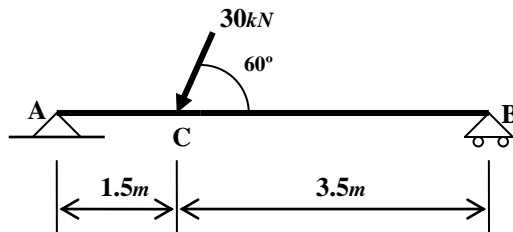
$$\Sigma M = 429.3 - 153 \times 1.6 + 45 \times 0.1 + 27 + M = 0$$

$$T = 108 \text{ kN}; M = -216 \text{ kNm}$$

d) Trace o diagrama de esforços da barra:

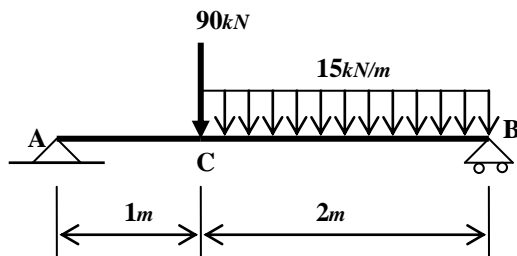


2) Para a viga da figura seguinte trace o diagrama de esforços



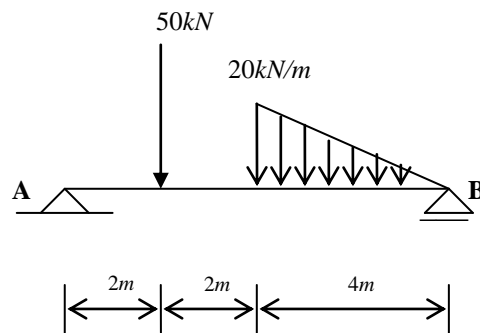
Solução:  $V_A = 18.18kN$ ;  $V_B = 7.79kN$ ;  $H_A = 15.00kN$ ;  $M_C = 27.27kNm$

3) Para a viga da figura seguinte trace o diagrama de esforços



Solução:  $V_A = 70kN$ ;  $V_B = 50kN$ ;  $M_C = 70kNm$

4) Para a seguinte barra:



a) Calcule as reacções nos apoios

Solução:  $V_A = 50.83kN$ ;  $V_B = 39.17kN$ ;

b) Calcule os esforços na secção a meio vão

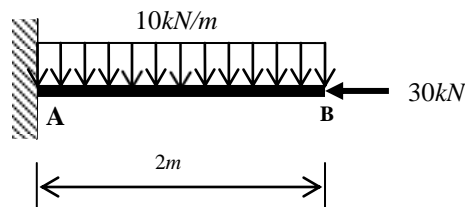
Solução:  $N = 0$ ;  $T = 0.83kN$ ;  $M = 103.33kNm$ ;

c) Calcule os esforços na secção a 2 m do apoio simples

Solução:  $N = 0$ ;  $T = -29.17kN$ ;  $M = 71.67kNm$ ;

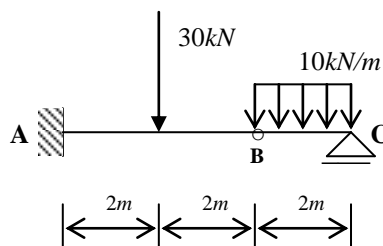
d) Trace o diagrama de esforços da barra.

5) Para a barra AB da figura seguinte trace o diagrama de esforços N;T;M



Solução:  $T_A = 20kN$ ;  $M_A = -20kNm$ ;  $N_A = -30kN$ ;  $T_B = 0$ ;  $M_B = 0$ ;  $N_B = -30kN$ ;

6) Para a seguinte estrutura de duas barras com uma articulação em B:



a) Calcule as reacções nos apoios.

Solução:  $V_C = 10kN$ ;  $V_A = 40kN$ ;  $H_A = 0$ ;  $M_A = 100kNm$

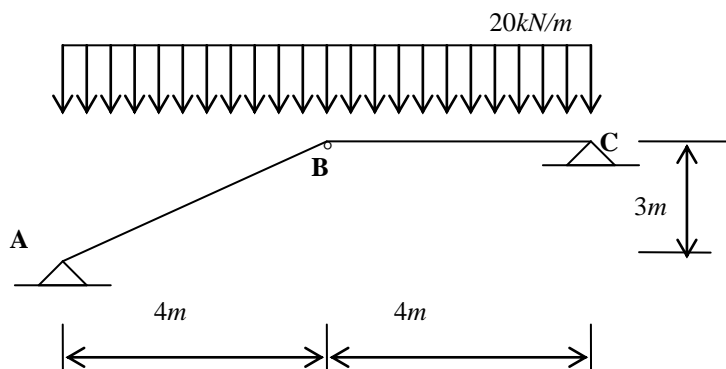
b) Os esforços na secção a 3m do encastramento

Solução:  $N = 0$ ;  $T = 10kN$ ;  $M = -10kNm$

c) Os esforços na secção a 5m do encastramento

Solução:  $N = 0$ ;  $T = 0$ ;  $M = 5kNm$

7) Para a seguinte estrutura de duas barras com uma articulação em B:



a) Calcule as reacções nos apoios.

Solução:  $V_A = 120kN$ ;  $V_C = 40kN$ ;  $H_A = 106.67kN$ ;  $H_C = 106.67kN$ ;

b) Na barra BC, calcule os esforços na secção a 4m do apoio C

Solução:  $N = -106.67kN$ ;  $T = 40kN$ ;  $M = 0$

c) Na barra AB, calcule os esforços na secção junto do apoio A. Note que os esforços aplicados nesta secção são as reacções do apoio A.

Solução:  $N = -157.34kN$ ;  $T = 32kN$ ;  $M = 0$

d) Na barra AB, calcule os esforços na secção junto da articulação B.

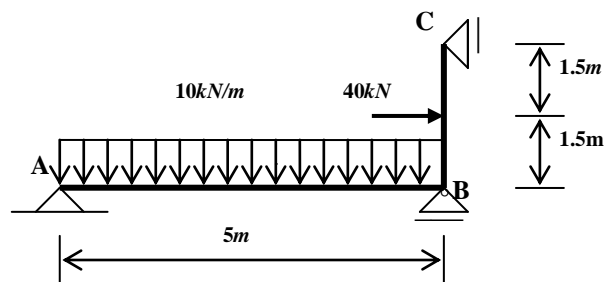
Solução:  $N = -109.34kN$ ;  $T = -32kN$ ;  $M = 0$

e) Calcule os esforços na secção a meio da barra AB

Solução:  $N = -133.34kN$ ;  $T = 0$ ;  $M = 40kNm$ ;

f) Trace o diagrama de esforços em ambas as barras.

8) A figura seguinte mostra uma estrutura formada por duas barras AB e BC, ligadas por uma rótula em B, onde existe simultaneamente um apoio simples:



Determine:

a) Reacções nos apoios;

Solução:  $V_A = 25kN$ ;  $V_B = 25kN$ ;  $H_A = 20kN$ ;  $H_C = 20kN$

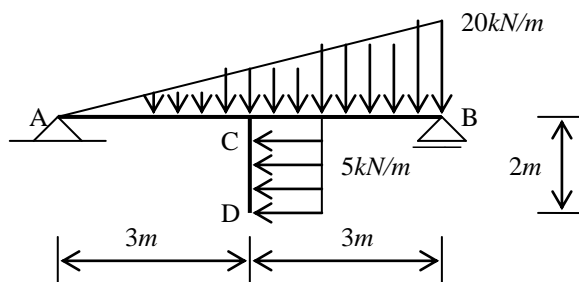
b) Esforços na secção a meio vão da barra AB;

Solução:  $N = 20kN$ ;  $T = 0kN$ ;  $M = 31.25kNm$

c) Diagrama de esforços na barra AB.



9) A estrutura é formada por duas barras AB e CD soldadas entre si



a) Calcule as reacções nos apoios

Solução:  $V_A = 18.33kN$ ;  $V_B = 41.67kN$ ;  $H_A = 10kN$

b) Na barra AB, calcule os esforços na secção a 1.5m do apoio A

Solução:  $N = -10kN$ ;  $T = 14.58kN$ ;  $M = 25.62kNm$

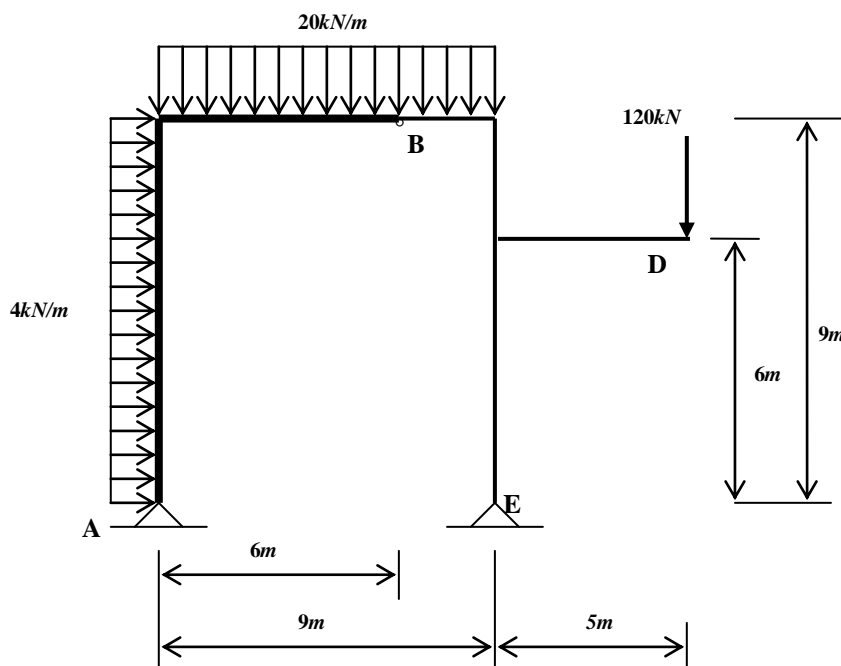
c) Na barra AB, calcule os esforços na secção a 4.5m do apoio A

Solução:  $N = 0$ ;  $T = -15.42kN$ ;  $M = 41.86kNm$

d) Calcule os esforços a meio da barra CD

Solução:  $N = 0$ ;  $T = 5kN$ ;  $M = -2.5kNm$

10) A figura seguinte mostra uma estrutura formada por duas barras AB e BDE, ligadas por uma rótula em B:



Determine:

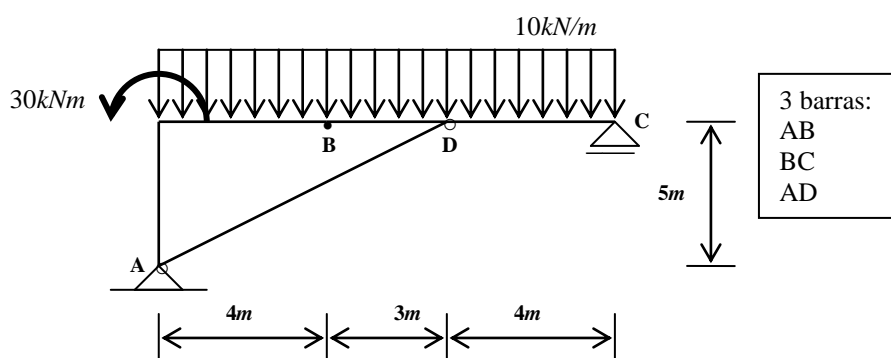
a) Reacções nos apoios;

Solução:  $V_A = 5.33kN$ ;  $V_E = 294.67kN$ ;  $H_A = 54.45kN$ ;  $H_E = -18.45kN$

b) Esforços na secção situada 3m à esquerda da articulação B.

Solução:  $N = 18.45kN$ ;  $T = -54.67kN$ ;  $M = 254.04kNm$

11) Para a seguinte estrutura de 3 barras AB, BC e AD com articulações em A, B e D.



a) Calcule as reacções nos apoios A e C

Solução:  $V_A = 57.73kN$ ;  $V_C = 52.27kN$ ;

b) Faça o equilíbrio da barra BC

c) Na barra BC calcule os esforços na secção a 2m do apoio C

Solução:  $N = 0$ ;  $T = -32.27kN$ ;  $M = 84.54kNm$ ;

d) Na barra BC calcule os esforços na secção a 5.5m do apoio C

Solução:  $N = -56.42kN$ ;  $T = 43.03kN$ ;  $M = 75.79kNm$ ;

e) Faça o equilíbrio da barra AB. Note que a barra AB e a barra AD apoiam-se no mesmo apoio A. Este apoio reage ao conjunto das duas barras com a reacção calculada na alínea (a). Contudo a barra AB recebe do apoio A reacções que só poderão ser conhecidas efectuando o equilíbrio dessa barra, separadamente.

f) Na barra AB calcule os esforços na secção a meio do seu tramo horizontal

Solução:  $N = -56.42kN$ ;  $T = 78.03kN$ ;  $M = -136.04kNm$ ;

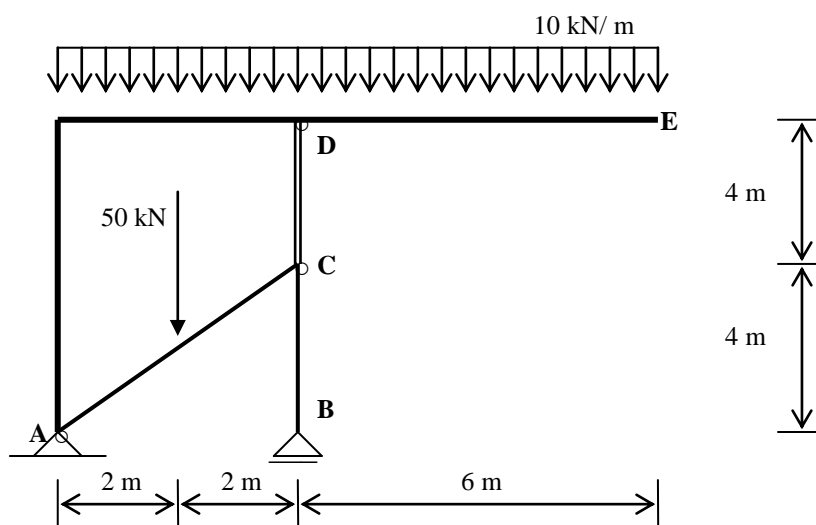
g) Na barra AB calcule os esforços na secção a meio do seu tramo vertical

Solução:  $N = -98.03kN$ ;  $T = -56.42kN$ ;  $M = -141.07kNm$ ;

h) Na barra AD calcule os esforços em qualquer secção

Solução:  $N = 69.34kN$ ;  $T = 0$ ;  $M = 0$ ;

12) Para a seguinte estrutura de 3 barras AB, AE e CD com articulações em A, C e D.



a) Calcule as reacções nos apoios A e B

Solução:  $V_A=0kN$ ;  $V_B=150kN$

b) Faça o equilíbrio da barra AB. Note que a barra AB e a barra AE apoiam-se no mesmo apoio A. Este apoio reage ao conjunto das duas barras com a reacção calculada na alínea (a). Contudo, a barra AB recebe do apoio A reacções que só poderão ser conhecidas efectuando o equilíbrio dessa barra, separadamente.

c) Na barra AB calcule os esforços na secção a meia altura do tramo vertical

Solução:  $N = -150kN$ ;  $T = 0$ ;  $M = 0$

d) Faça o equilíbrio da barra AE. Note que a barra AB e a barra AE apoiam-se no mesmo apoio A. Este apoio reage ao conjunto das duas barras com a reacção calculada na alínea (a). Contudo, a barra AE recebe do apoio A reacções que só poderão ser conhecidas efectuando o equilíbrio dessa barra, separadamente.

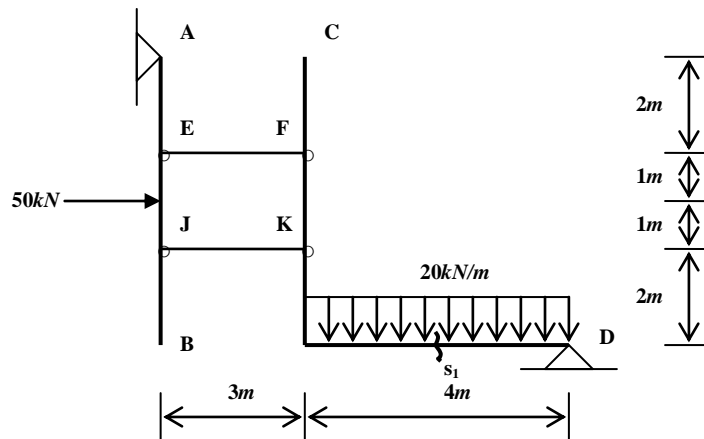
e) Na barra AE calcule os esforços na secção a 8m de E

Solução:  $N = 0$ ;  $T = -45 kN$ ;  $M = -70 kNm$

f) Na barra CD (biela) calcule os esforços em qualquer secção

Solução:  $N = -125kN$ ;  $T = 0$ ;  $M = 0$ ;

13) Para a estrutura formada pelas barras AB e CD, ligadas pelas bielas EF e JK, da figura seguinte:



Determine:

a) As reacções nos apoios;

Solução:  $V_D = 80kN$ ;  $H_D = 51.67kN$ ;  $H_A = 1.67kN$

b) Os esforços nas bielas;

Biela EF: compressão  $H_E = 28.33kN$ ; Biela JK: compressão  $H_J = 23.33kN$

c) Os esforços na secção  $s_1$  a meio do ramo horizontal da barra CD.

Solução:  $N = -51.67kN$ ;  $T = -40kN$ ;  $M = 120kNm$

## Referências

Dias da Silva, V. – *Mecânica e Resistência dos Materiais*, capítulo V – Conceitos fundamentais de resistência dos materiais. 2ª Edição. Edição: ZUARI – Edição de Livros Técnicos, Lda. 1999. ISBN: 972-98155-0-X.

William Nash – *Resistência de Materiais*, capítulo I – Tracção e compressão. Edição: McGraw-Hill . 2001. ISBN: 972-773-090-6.