

UNIVERSIDADE DE ÉVORA
ESCOLA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA - DEPARTAMENTO DE
ENGENHARIA RURAL



RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

MOMENTO FLECTOR

(Apontamentos para uso dos Alunos)

JOSÉ OLIVEIRA PEÇA

ÉVORA

2016

INDICE

Nota do autor	3
1. Definições	4
1.1. Generalidades	4
1.2. Flexão recta.....	5
1.3. Flexão desviada	5
2. Flexão circular ($N=0$; $M = \text{constante}$; $T=0$; $M_t=0$).....	6
2.1. Flexão circular recta	7
2.2. Flexão circular desviada	10
2.3. Análise de segurança de uma viga sujeita à flexão circular	12
2.4. Flexão circular recta em peças mistas	14
2.5. Problemas resolvidos.....	16
2.6. Problemas de aplicação	27
3. Flexão circular composta ($N\neq 0$; $M = \text{constante}$; $T=0$; $M_t=0$)	32
3.1. Problemas resolvidos.....	36
3.3. Problemas de aplicação	46
4. Flexão simples ($M\neq 0$; $N=0$; $T\neq 0$; $M_t=0$).....	47
4.1. Problemas resolvidos.....	48
4.2. Problemas de aplicação	52
5. Flexão em regime elasto-plástico (<i>elastoplastic bending</i>)	54
5.1. Problemas resolvidos.....	60
5.2. Problemas de aplicação	70
6. Caderno de problemas de momento flector	72
6.1. Flexão circular	72
6.2. Flexão circular desviada	73
6.3. Flexão circular recta em peças mistas	77
6.4. Flexão circular composta.....	81
6.5. Flexão simples	88
6.6. Flexão em regime elasto-plástico	90
Referências	94

Nota do autor

Tendo sido interrompido, a partir do ano lectivo de 2015/2016, o 1º Ciclo do Curso de Engenharia Civil, o autor resolveu reunir toda a informação que foi disponibilizada aos alunos da disciplina de Resistência de Materiais, durante os 8 anos em que o curso funcionou na Universidade de Évora.

O presente trabalho versa o tema do *Momento flector* da Resistência de Materiais e é uma edição revista e acrescentada das edições que foram publicadas em 2013; 2010; 2009 e 2008.

No curso, a disciplina de Resistência de Materiais tinha a duração de um único semestre (4º semestre), pelo que foi necessário seleccionar os temas mais relevantes a ensinar sobre *Momento flector*.

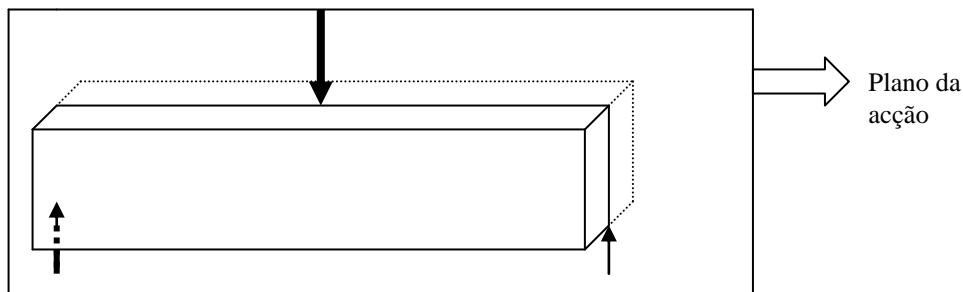
Nos diversos pontos deste trabalho são apresentados os aspectos formais importantes, completados com problemas resolvidos e não resolvidos de aplicação.

No último ponto estão incluídos todos os exercícios de aplicação sobre *Momento flector* abordados nas aulas práticas e os que foram alvo de avaliação nas provas de frequência e de exame.

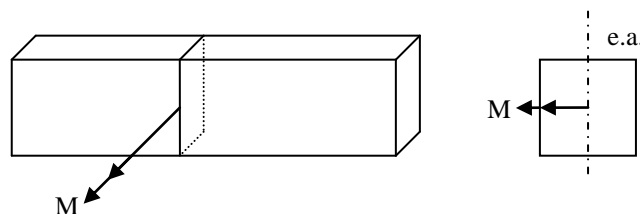
1. Definições

1.1. Generalidades

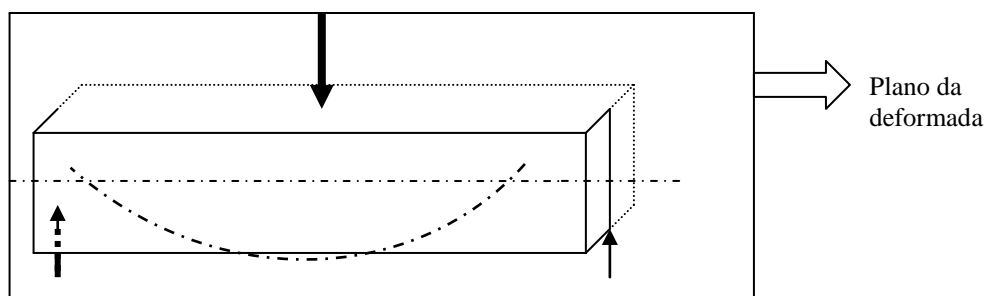
Plano da acção é o plano que contém as forças e momentos que solicitam a barra, como se mostra na figura:



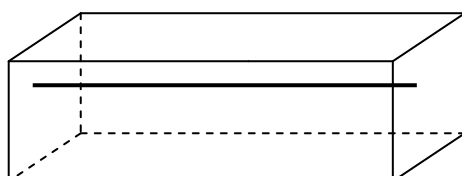
Define-se eixo de acção (e.a.) como a linha resultante da intersecção do plano da acção com o plano da secção transversal da peça. O eixo da acção é perpendicular ao vector que representa o momento flector actuante na secção:



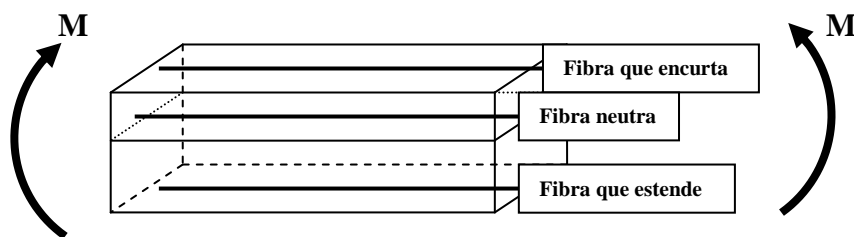
Deformada é a linha que define a forma do eixo da peça após deformação. O plano da deformada é o plano definido pela linha média antes e depois da deformação:



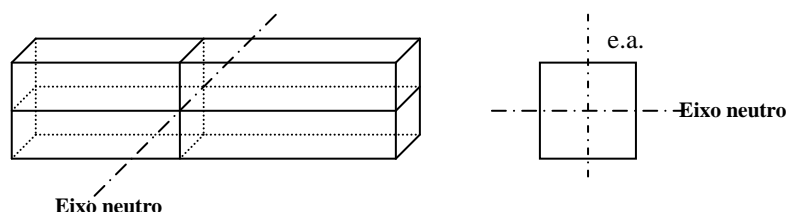
O prisma de secção infinitesimal paralelo ao eixo da peça denomina-se fibra.



Na flexão da peça haverá fibras que aumentam de comprimento e fibras que encurtam. Fibra neutra é aquela que flexiona sem alterar o seu comprimento. A superfície definida pelas fibras neutras denomina-se superfície neutra (*neutral layer*).



A superfície neutra intersecta a secção numa linha chamada eixo neutro (*neutral axis*).



1.2. Flexão recta

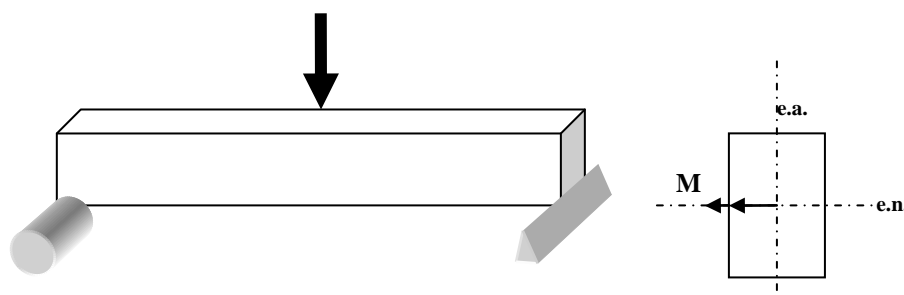
A flexão diz-se **flexão recta** (*direct bending*) se o plano da acção passar por um eixo principal da secção, ou seja, quando o eixo da acção for coincidente com um eixo principal da secção.

Em virtude de eixos de simetria numa secção serem eixos principais, infere-se que uma peça solicitada em flexão com o eixo da acção coincidente com um eixo de simetria da secção, está em flexão recta.

Na flexão recta o eixo neutro (e.n.) da secção é paralelo ao vector momento flector actuante nessa secção, pelo que **o eixo neutro é perpendicular ao eixo da acção**.

Na flexão recta o plano da deformada é coincidente com o plano da acção.

A figura seguinte mostra uma peça de secção rectangular está solicitada em flexão recta.

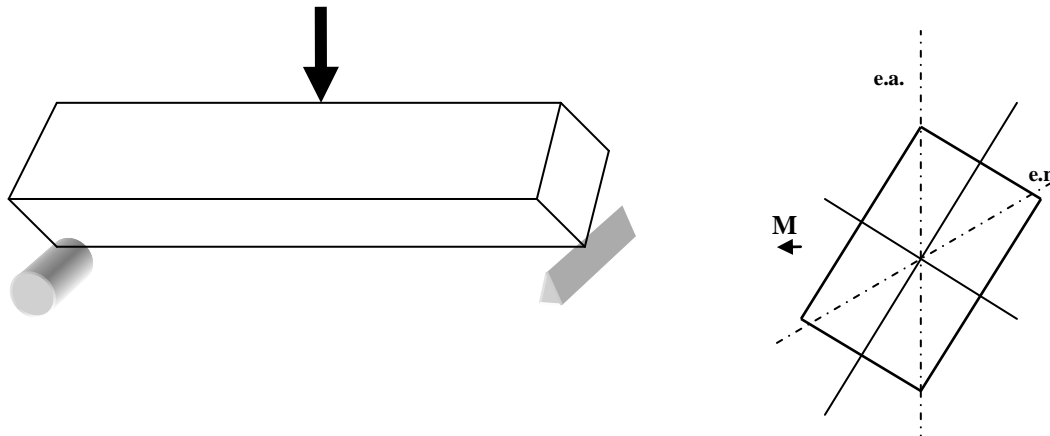


1.3. Flexão desviada

A flexão diz-se **flexão desviada** (*oblique bending*) se o plano da acção **não** passar por um eixo principal da secção, ou seja, quando o eixo da acção **não** for coincidente com um eixo principal da secção. Na flexão desviada, o eixo neutro (e.n.) faz um ângulo com

o vector momento flector actuante nessa secção. Deste modo **na flexão desviada não se conhece a priori a direcção do eixo neutro relativamente ao eixo da acção.**

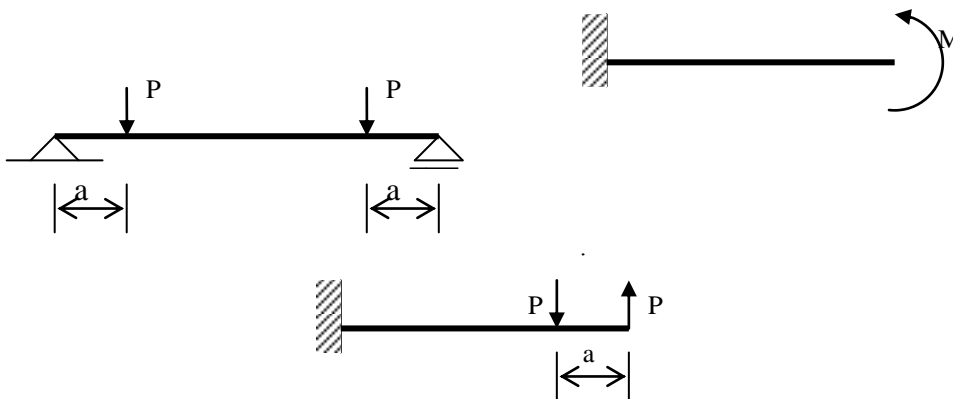
Na flexão desviada o plano da deformada não é coincidente com o plano da acção.



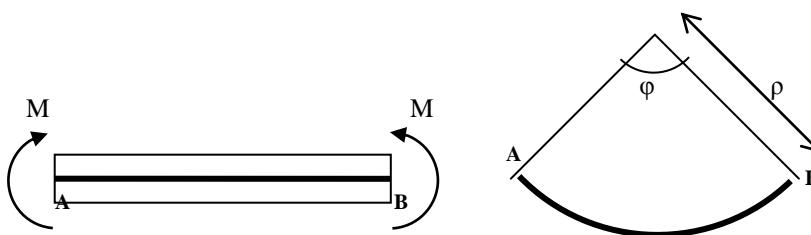
2. Flexão circular ($N=0$; $M = \text{constante}$; $T=0$; $M_t=0$)

Uma peça linear (*rod*) diz-se sujeita a uma flexão circular, ou pura (*pure bending*), quando está apenas sujeita a momento flector constante (*constant bending moment*), sendo nulos o esforço axial, e o momento torçor. O momento flector constante implica que o esforço transversal seja igualmente nulo.

Verifique que as seguintes barras estão, na totalidade ou em parte, sujeitas a flexão pura.



Em flexão circular a deformada (*deflected rod*) é um arco de circunferência com curvatura (*curvature*) $1/\rho$, daí a designação de flexão circular.

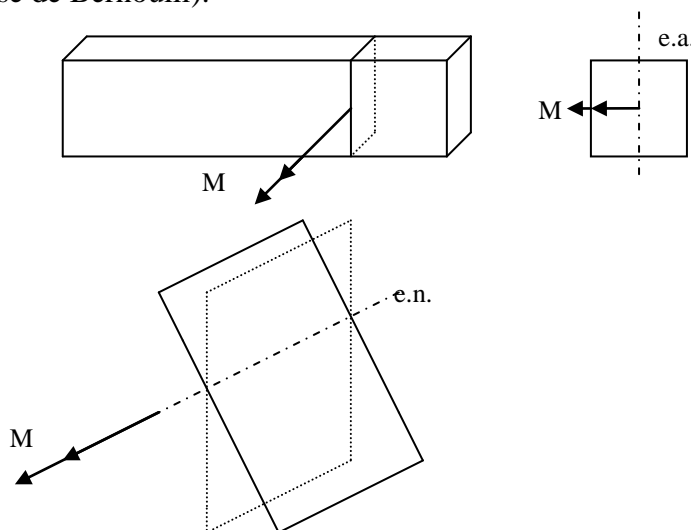


A fibra neutra de comprimento l , após a deformação, é um arco de circunferência de igual comprimento, pelo que o ângulo φ , em radianos, é dado pela seguinte expressão:

$$\varphi = \frac{l}{\rho}$$

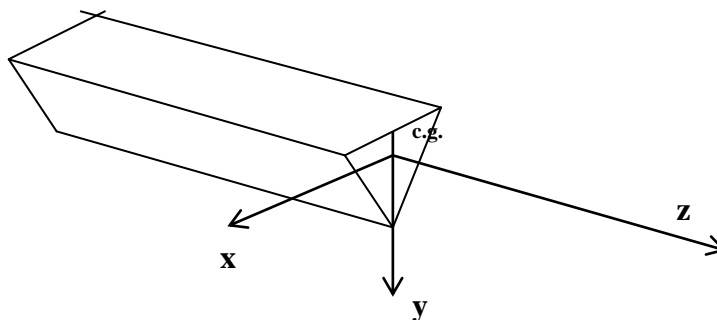
Cada secção da peça sofre uma rotação em torno do eixo neutro.

Uma vez que em flexão circular $T=0$ e $M_t=0$, ou seja não existem tensões tangenciais na secção ($\tau = 0$), então é válido afirmar que a secção depois de deformada se mantém plana (Hipótese de Bernoulli).

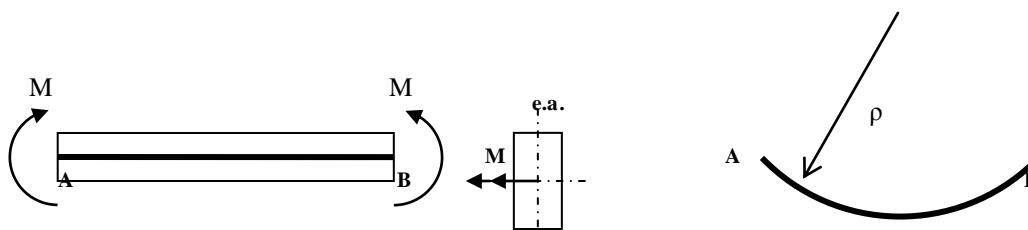


2.1. Flexão circular recta

Neste ponto e nos seguintes vamos admitir um sistema de eixos centrado no cg da secção. A peça é rectilínea, homogénea, feita de material com comportamento elástico linear e as deformações são pequenas.

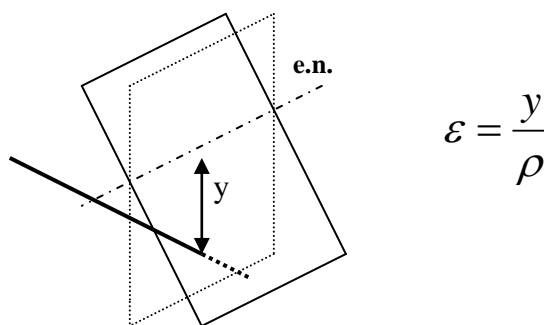


Para facilitar vamos admitir uma peça linear com secção rectangular (figura seguinte). Por estar sujeita a uma flexão circular recta, as suas secções apresentam apenas momento flector constante (flexão circular) em que o eixo de acção coincide com um eixo principal da secção (flexão recta). Nesta flexão, por ser recta, o eixo neutro é perpendicular ao eixo de acção.

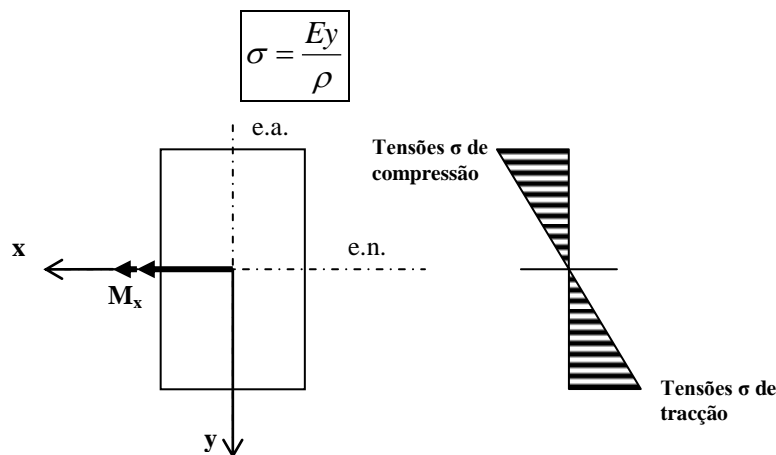


No caso presente, as fibras abaixo da superfície neutra vão alongar e as fibras acima vão encurtar.

Atendendo a que a secção depois de deformada se mantém plana, prova-se, com base em considerações geométricas, que a extensão de uma fibra situada à distância y do eixo neutro é dada pela seguinte expressão:



Se a peça for de material de comportamento elástico linear ($\sigma = E\epsilon$), então:



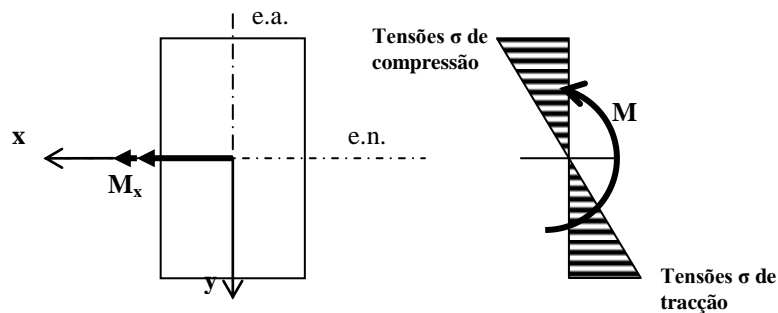
A posição do eixo neutro pode ser determinado se atendermos ao facto da na flexão circular o esforço axial ser zero ($N = 0$), ou seja:

$$\int_{\Omega} \sigma d\Omega = \int_{\Omega} \frac{Ey}{\rho} d\Omega = 0 \Rightarrow \int_{\Omega} y d\Omega = 0$$

Este integral representa o momento estático da secção relativamente ao eixo neutro (*static moment of the section with respect to the neutral axis*). O facto de ele ser nulo significa que o eixo neutro passa pelo centro de gravidade da secção (*centroid of the section*).

Na flexão circular recta o eixo neutro passa pelo centro de gravidade da secção transversal da peça (porque a flexão é circular) e é perpendicular ao eixo de acção (porque a flexão é recta).

O momento flector será:



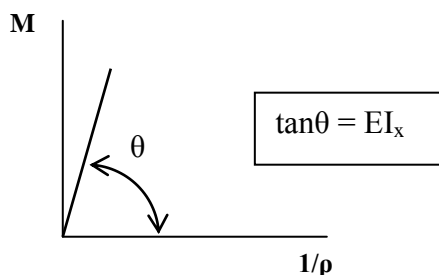
$$M = \int_{\Omega} \sigma y d\Omega = \frac{E}{\rho} \int_{\Omega} y^2 d\Omega = \frac{E}{\rho} I_x$$

o que implica:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x}$$

sendo I_x o momento de inércia da secção relativamente ao eixo neutro, neste caso o eixo dos xx (*moment of inertia of the section with respect to the neutral axis*).

A quantidade EI designa-se rigidez de flexão (*flexural rigidity*). Quanto maior a rigidez de flexão, menor a curvatura ($1/\rho$), para um determinado momento flector.



A partir das expressões anteriores, deduz-se:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y$$

Esta expressão permite calcular a tensão normal devida a um momento flector M , em qualquer ponto que diste y do eixo neutro. É válida em **flexão circular recta** de um material homogéneo com comportamento elástico linear.

Na expressão anterior o sinal da tensão σ (+ \equiv tensão de tracção; - \equiv tensão de compressão) é originado pela combinação dos sinais de y (+ na parte positiva do eixo dos yy ; - na parte negativa do eixo dos yy) e dos sinais de M (+ no sentido positivo do eixo dos xx ; - no sentido negativo do eixo dos xx)

Os maiores valores de tensão (quer de tracção quer de compressão) ocorrem nos pontos mais afastados do eixo neutro. Em dimensionamento é importante conhecer estes valores. De uma forma expedita é possível determinar o maior destes valores em módulo, que denominaremos $|\sigma|_{\max}$:

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|M_x|}{I_x / |y|_{\max}} = \frac{|M_x|}{W_x}$$

$W_x = I_x / |y|_{\max}$ denomina-se módulo de flexão (*section modulus*), o qual depende apenas da geometria da secção transversal da peça.

Os valores de módulo de flexão em relação aos eixos principais de inércia, correntemente representados por W_x e W_y (cm^3), podem ser encontrados para secções mais usuais, em:

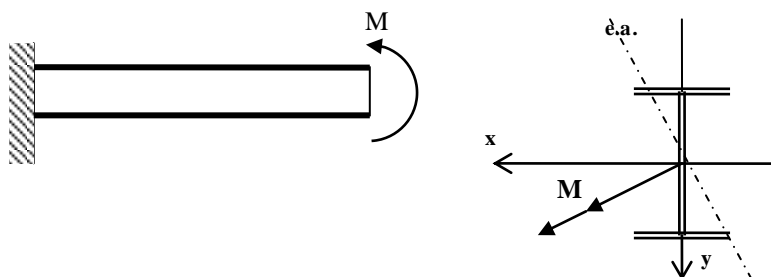
- Tabelas Técnicas - A. Correia dos Reis, M. Brazão Farinha, J.P. Brazão Farinha. Edição de 2008 (existe edição anterior na Biblioteca da Mitra).

- Por vezes as firmas fornecedoras de perfis têm dados técnicos nos seus folhetos:

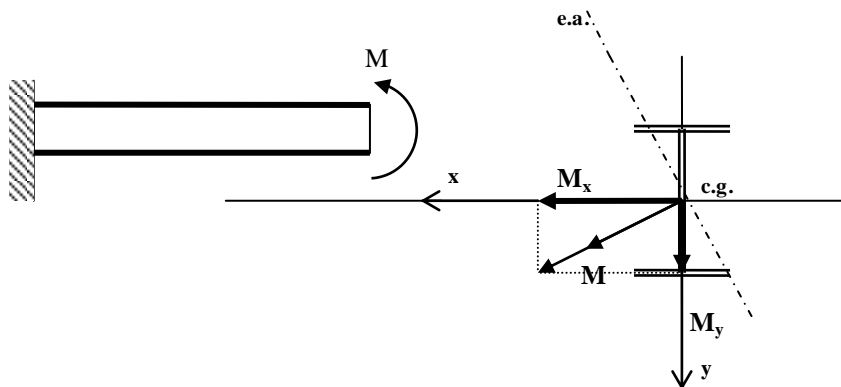
<http://www.fachagas.pt/cache/bin/XPQWfpAXX617UzkZMyMbs1ZKU.pdf>

2.2. Flexão circular desviada

Uma peça linear está sujeita a uma flexão circular desviada, quando as suas secções apresentam apenas momento flector constante e o eixo da acção **não** é coincidente com um eixo principal da secção. Nestas circunstâncias não se conhece a priori o eixo neutro (e.n.) da secção. Sabe-se apenas que e.n. passa pelo centro de gravidade da secção, uma vez que na flexão circular, $N=0$.



A abordagem da flexão desviada faz-se decompondo o momento flector actuante na secção nas suas componentes segundo os eixos principais centrais de inércia.



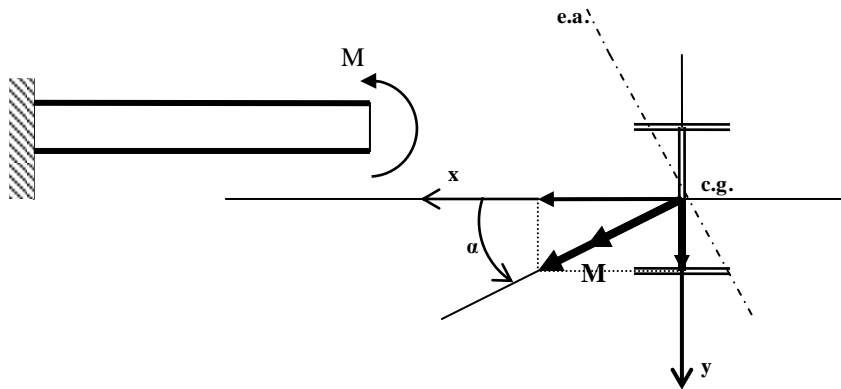
A tensão normal na secção é dada pela expressão:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$$

Na expressão anterior o sinal da tensão σ (+ \equiv tensão de tracção; - \equiv tensão de compressão) é originado pela combinação dos sinais de y e de x (+ na parte positiva dos respectivos eixos; - na parte negativa dos respectivos eixos) e dos sinais de M_x e M_y (+ no sentido positivo dos respectivos eixos; - no sentido negativo dos respectivos eixos).

A expressão anterior pode tomar outra forma:

$$\sigma = |M| \left(\frac{\cos \alpha}{I_x} y - \frac{\sin \alpha}{I_y} x \right)$$

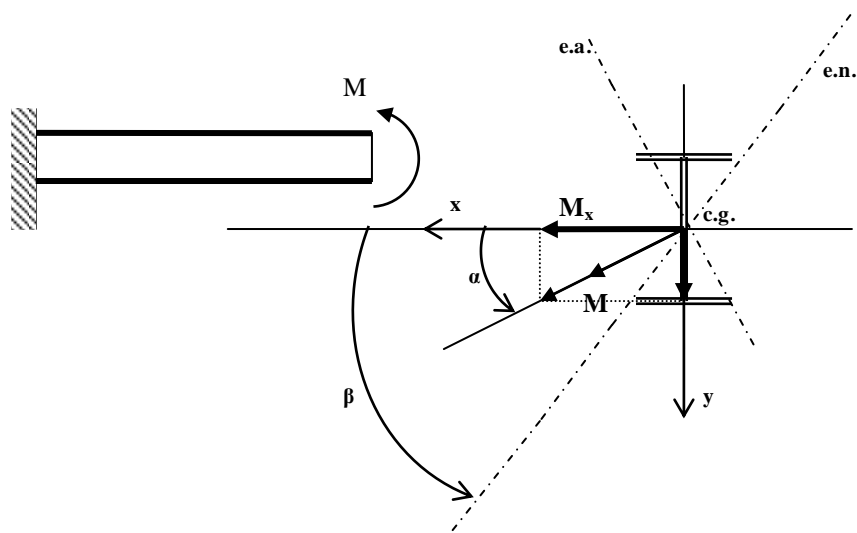


Na expressão anterior o sinal da tensão σ (+ \equiv tensão de tracção; - \equiv tensão de compressão) é originado pela combinação dos sinais de y e de x (+ na parte positiva dos respectivos eixos; - na parte negativa dos respectivos eixos) e do sinal do ângulo α (+ no sentido marcado na figura; - no sentido contrário ao marcado na figura).

O eixo neutro pode ser encontrado igualando a expressão anterior a zero (uma vez que no eixo neutro $\sigma=0$). Facilmente se conclui que o eixo neutro pode ser localizado através do ângulo β , tal que:

$$\tan \beta = \frac{I_x}{I_y} \tan \alpha$$

Na expressão anterior o sinal do ângulo β resulta do sinal do ângulo α ; se o sinal do ângulo β resultar positivo deverá ser traçado no sentido indicado na figura seguinte; se o sinal do ângulo β resultar negativo deverá ser traçado no sentido contrário.



Resumindo, as expressões a seguir indicadas, permitem calcular a tensão normal devida a um momento flector M , em qualquer ponto da secção com coordenadas (x,y) . São válidas em flexão circular desviada de um material homogéneo com comportamento elástico linear.

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x = |M| \left(\frac{\cos \alpha}{I_x} y - \frac{\sin \alpha}{I_y} x \right)$$

A curvatura da peça pode ser calculada pela expressão:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E} \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{I_x^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{I_y^2}}$$

2.3. Análise de segurança de uma viga sujeita à flexão circular

A análise de segurança de uma viga (*beam*) sujeita à flexão circular recta (e, de facto, sujeita a qualquer tipo de flexão), parte do pressuposto que as acções sobre a viga (forças concentradas; cargas distribuídas; momentos aplicados) já estão afectados dos coeficientes de majoração previstos nos Euro-códigos. Dito por outras palavras: aquando da análise de segurança de uma viga sujeita à flexão, os valores das acções são os **valores de cálculo das acções**.

Os valores de cálculo das acções permitem determinar o momento flector M_x .

A expressão, anteriormente deduzida:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y$$

permite relacionar tensão, momento flector e geometria da secção da viga.

Três tipos de problemas podem ser encarados:

- **Verificação da segurança** (σ é a incógnita);
- **Cálculo da capacidade máxima** (M_x é a incógnita);
- **Dimensionamento da viga** (I_x e y são incógnitas). Notar que o dimensionamento é, à partida, um problema indeterminado (2 incógnitas e uma única equação) ou seja, várias secções de geometria diferente poderão satisfazer.

Verificação da segurança

No caso do material apresentar valores de cálculo da tensão resistente, iguais em compressão e tracção (caso dos aços de construção):

$$\sigma_{Rdt} = |\sigma_{Rdc}| = \sigma_{Rd}$$

Neste caso:

$$|\sigma|_{\max} \leq \sigma_{Rd} \Rightarrow \frac{|M_x|}{W_x} \leq \sigma_{Rd}$$

No caso do material apresentar valores:

$$\sigma_{Rdt} \neq |\sigma_{Rdc}|$$

Neste caso será necessário verificar-se, separadamente, se:

- o valor máximo da tensão de tracção é $\leq \sigma_{Rdt}$;

e se:

- o módulo do valor máximo da tensão de compressão é $\leq |\sigma_{Rdc}|$.

Dimensionamento da viga

No caso do material apresentar valores de cálculo da tensão resistente, iguais em compressão e tracção:

$$\sigma_{Rdt} = |\sigma_{Rdc}| = \sigma_{Rd}$$

o dimensionamento de uma peça em flexão circular recta passa por calcular o módulo de flexão relativamente ao eixo neutro, tal que:

$$W_x \geq \frac{|M_x|}{\sigma_{Rd}}$$

No caso de $\sigma_{Rdt} \neq |\sigma_{Rdc}|$

Neste caso, determinar por tentativas a secção de forma a verificar-se simultaneamente:

- o valor máximo da tensão de tracção é $\leq \sigma_{Rdt}$.

- o módulo do valor máximo da tensão de compressão é $\leq |\sigma_{Rdc}|$.

Capacidade máxima

No caso do material apresentar valores de cálculo da tensão resistente, iguais em compressão e tracção:

$$\sigma_{Rdt} = |\sigma_{Rdc}| = \sigma_{Rd}$$

Neste caso:

$$|M_x| \leq W_x \times \sigma_{Rd}$$

No caso de $\sigma_{Rdt} \neq |\sigma_{Rdc}|$

Neste caso, será o menor dos valores de $|M_x|$ dado pelas expressões seguintes:

$$|M_x| \leq \frac{\sigma_{Rdt} \times I_x}{|y_t|_{\max}} \quad \text{e} \quad |M_x| \leq \frac{|\sigma_{Rdc}| \times I_x}{|y_c|_{\max}}$$

A análise de segurança em flexão circular desviada é feita de forma semelhante. Admita que M_x e M_y são momentos flectores provenientes de valores de cálculo das accões sobre a viga.

No caso do material apresentar valores de cálculo da tensão resistente iguais em compressão e tracção:

$$\sigma_{Rdt} = |\sigma_{Rdc}| = \sigma_{Rd}$$

e a secção ter envolvente rectangular e 1 eixo de simetria:



Verificação da segurança

$$\frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \leq \sigma_{Rd}$$

Dimensionamento da viga

Determinar, por tentativas, os valores de W_x e W_y tais que:

$$\frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \leq \sigma_{Rd}$$

Capacidade máxima

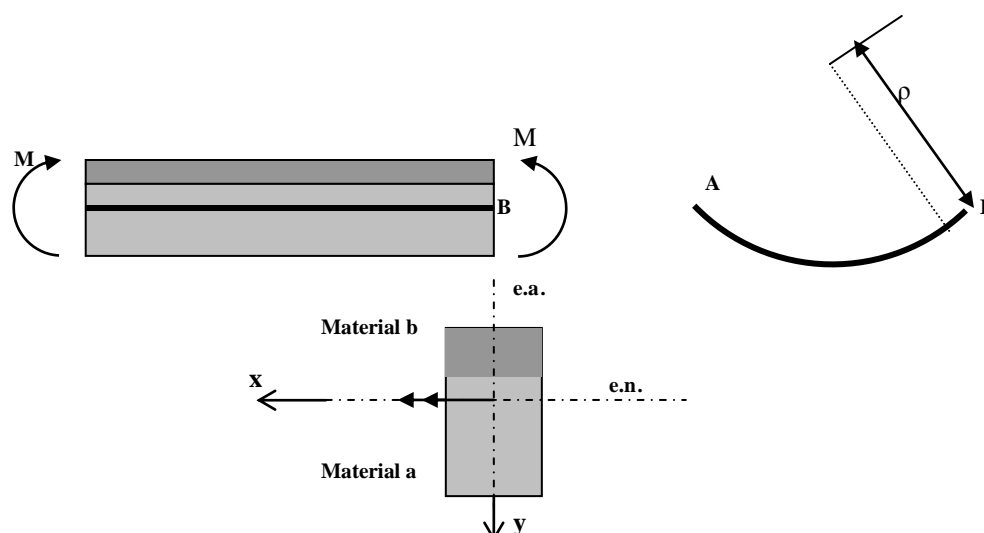
Dado que:

$|M_x| = |M \cos \alpha|$ e $|M_y| = |M \sin \alpha|$, bastará resolver em ordem a $|M|$ a seguinte expressão:

$$|M| \left(\frac{|\cos \alpha|}{W_x} + \frac{|\sin \alpha|}{W_y} \right) \leq \sigma_{Rd}$$

2.4. Flexão circular recta em peças mistas

Analisa-se o caso mais simples de uma peça linear constituída por dois materiais de comportamento elástico linear sujeita a uma flexão circular recta. A análise é aproximada, introduzindo um erro quando o coeficiente de Poisson dos dois materiais for diferente. O erro é pequeno não comprometendo a aplicabilidade prática do que se expõe seguidamente. Na flexão circular recta o eixo neutro é perpendicular ao eixo de acção.



No caso presente, as fibras abaixo da superfície neutra vão alongar e as fibras acima vão encurtar.

Prova-se, com base em considerações geométricas, que a extensão de uma fibra situada à distância y do eixo neutro é dada pela seguinte expressão:

$$\varepsilon = \frac{1}{\rho} y$$

Admitindo o comportamento elástico linear dos materiais a e b, então:

$$\sigma_a = \frac{E_a y}{\rho} \quad \sigma_b = \frac{E_b y}{\rho}$$

A posição do eixo neutro pode ser determinado se atendermos ao facto da na flexão circular o esforço axial ser zero, ou seja:

$$\int_{\Omega} \sigma d\Omega = \int_{\Omega_a} \sigma_a d\Omega + \int_{\Omega_b} \sigma_b d\Omega = 0$$

ou seja:

$$E_a \int_{\Omega_a} y d\Omega + E_b \int_{\Omega_b} y d\Omega = 0$$

Este integral representa a soma do momento estático das secções de material a e b, ponderadas com os respectivos módulos de elasticidade dos materiais que as constituem, relativamente ao eixo neutro. O facto de ele ser nulo significa que o **eixo neutro passa pelo centro de gravidade da secção ponderada com os módulos de elasticidade dos materiais que constituem a peça.**

O momento flector será:

$$M_x = \int_{\Omega} \sigma y d\Omega = \frac{E_a}{\rho} \int_{\Omega_a} y^2 d\Omega + \frac{E_b}{\rho} \int_{\Omega_b} y^2 d\Omega$$

o que implica:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E_a I_{an} + E_b I_{bn}}$$

sendo I_{an} e I_{bn} o momento de inércia das secções de material a e b, relativamente ao eixo neutro.

A partir das expressões anteriores, deduz-se:

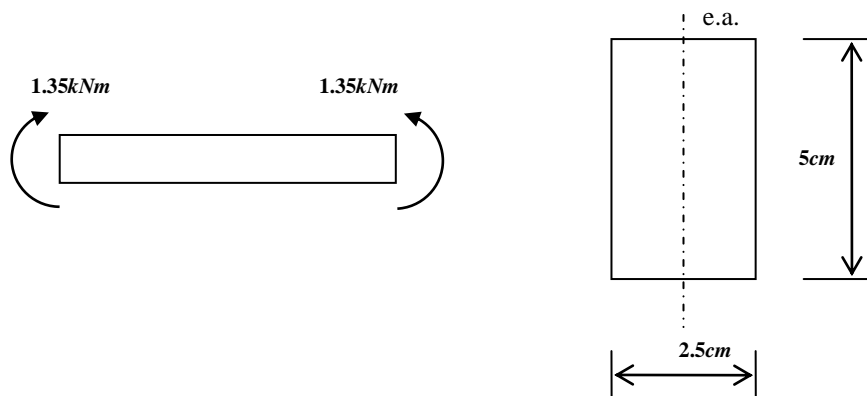
$$\sigma_a = \frac{M_x}{I_{an} + \frac{E_b}{E_a} I_{bn}} y$$

$$\sigma_b = \frac{M_x}{I_{bn} + \frac{E_a}{E_b} I_{an}} y$$

As tensões máximas ocorrem nos pontos mais afastados do eixo neutro.

2.5. Problemas resolvidos

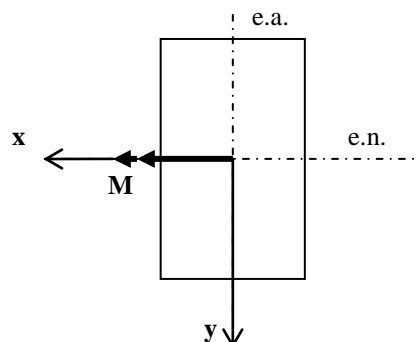
P2.1) O troço da viga de secção rectangular está sujeito à acção de momentos como se mostra na figura.



- Escreva a expressão que permite calcular a tensão em qualquer ponto da secção;
- Determine a tensão máxima na secção.
- Trace o diagrama das tensões normais na secção.

Resolução:

a) Trata-se de uma flexão circular ($M = \text{constante}$) e recta (e.a. coincide com um eixo principal de inércia). O e.n. é perpendicular ao e.a. (porque a flexão é recta) e passa pelo c.g. da secção (porque é flexão circular).



A expressão geral da flexão:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x = |M| \left(\frac{\cos \alpha}{I_x} y - \frac{\sin \alpha}{I_y} x \right)$$

Uma vez que $\alpha=0^\circ$, fica:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y$$

Sendo, $I_x = \frac{2.5 \times 5^3}{12} = 26.04 \text{ cm}^4$

Obtém-se:

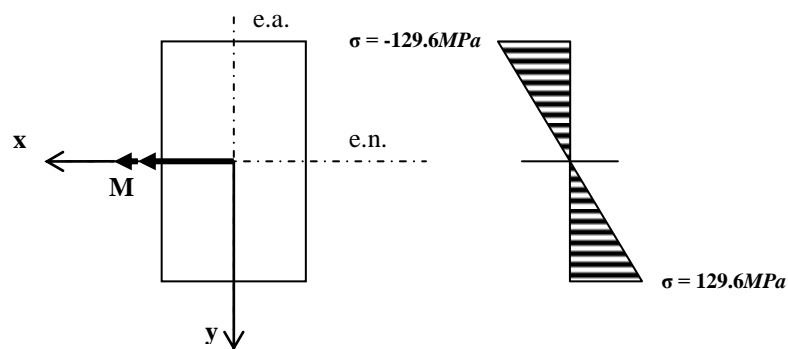
$$\sigma = \frac{1.35}{26.04 \times 10^{-8}} y$$

b)

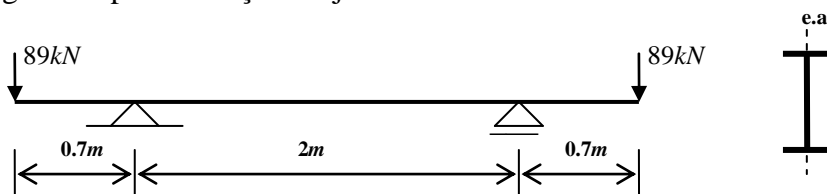
$$\sigma_{\max} = \frac{1.35}{26.04 \times 10^{-8}} \times 2.5 \times 10^{-2} = 129.6 \text{ MPa} \quad (\text{tração})$$

$$\sigma_{\max} = \frac{1.35}{26.04 \times 10^{-8}} \times (-2.5 \times 10^{-2}) = -129.6 \text{ MPa} \quad (\text{compressão})$$

c)



P2.2) A viga tem aplicada ações cujos valores de cálculo estão indicados na figura:



Admita:

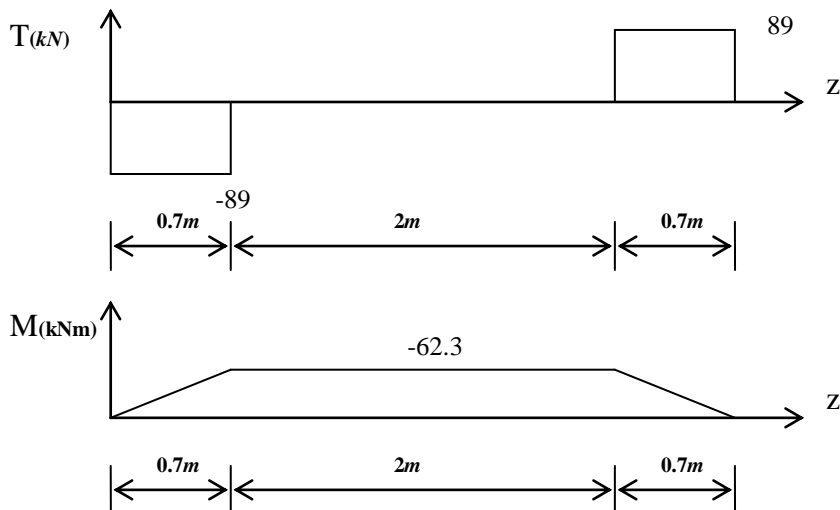
$$E=200 \text{ GPa}$$

Valor de cálculo da tensão resistente do material (igual em compressão e tração): $\sigma_{Rd}=235 \text{ MPa}$

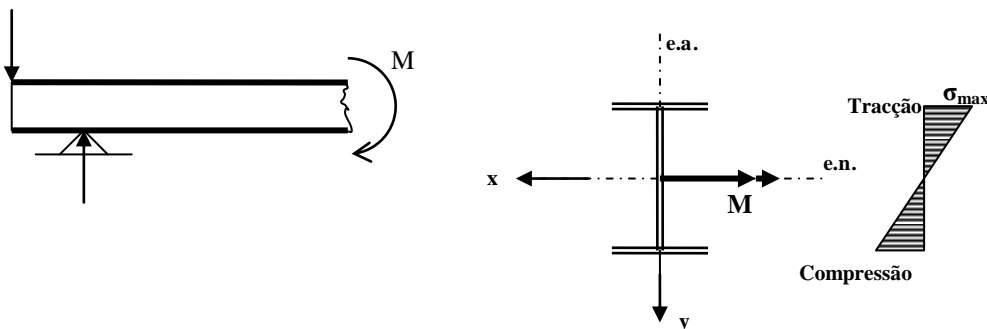
Dimensione a viga como um perfil INP.

Resolução

A figura seguinte mostra o diagrama de esforços na viga:



A figura seguinte mostra os esforços numa secção localizada entre os apoios. Nesta secção a viga está sujeita a flexão circular (uma vez que $M=\text{constante}$; $T=0$; $N=0$; $M_t=0$) e recta (uma vez que o e.a. é um eixo de simetria da secção). O e.n. passa no c.g. da secção (por ser flexão circular) e é perpendicular ao e.a. (por ser flexão recta).



Uma vez que: $W_x \geq \frac{|M|}{\sigma_{Rd}}$

$$W_x \geq \frac{62.3}{235 \times 10^3} = 265 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

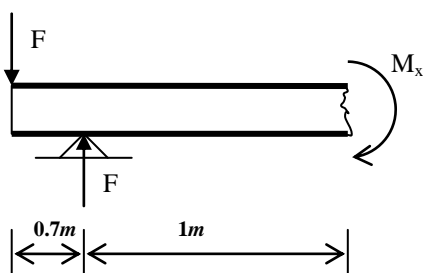
$$W_x \geq 265 \text{ cm}^3$$

Solução: INP220, o qual apresenta $W_x = 278 \text{ cm}^3$

P2.3) Para a viga dimensionada no P2.2, determine a **capacidade máxima**.

Resolução

$$|M_x| \leq W_x \times \sigma_{Rd}$$



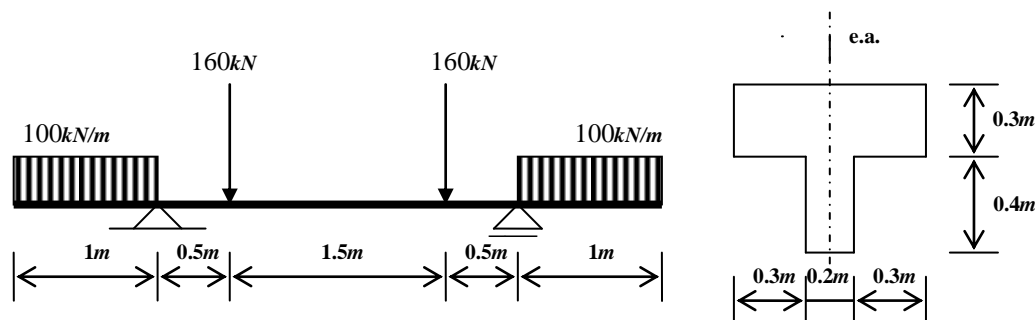
$$F \times 1.7 - F \times 1 - M_x = 0$$

$$M_x = 0.7F$$

$$|M_x| = 0.7|F|$$

$$|F| \leq \frac{W_x \times \sigma_{Rd}}{0.7} = \frac{278 \times 10^{-6} \times 235 \times 10^3}{0.7} = 93.3 \text{ kN}$$

P2.4) A viga têm aplicadas acções cujos valores de cálculo estão indicados na figura:



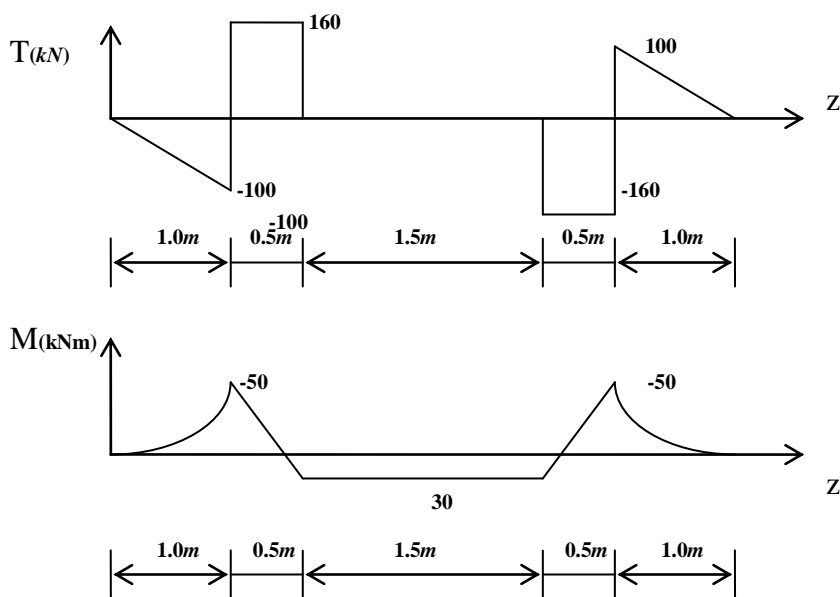
Admita o valor de cálculo da tensão resistente do material:

$$|\sigma_{Rdc}| = 10 \text{ MPa} \text{ e } \sigma_{Rdt} = 1.8 \text{ MPa}$$

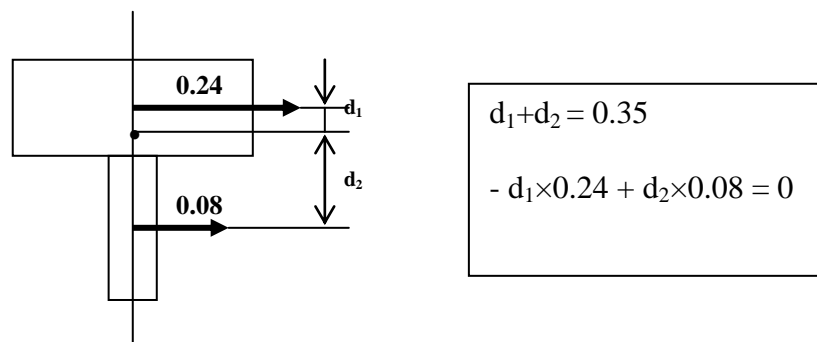
Verifique a segurança a meio vão da viga.

Resolução

A figura seguinte mostra o diagrama de esforços na viga:

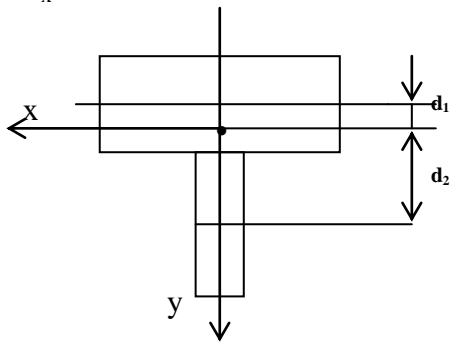


Determinação do c.g. da secção para colocação do referencial xyz:



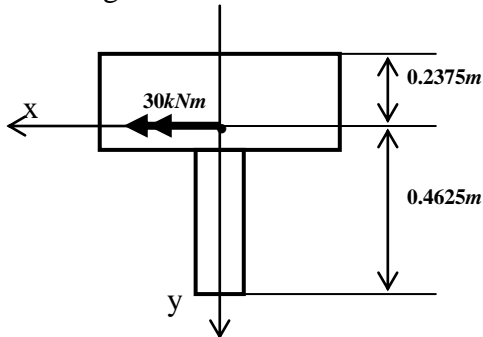
$$d_1 = 0.0875m; d_2 = 0.2625m$$

Cálculo do I_x



$$I_x = \frac{0.8 \times 0.3^3}{12} + (0.8 \times 0.3) \times 0.0875^2 + \frac{0.2 \times 0.4^3}{12} + (0.2 \times 0.4) \times 0.2625^2 = 102.167 \times 10^{-4} m^4$$

A meio vão da viga temos flexão circular recta:

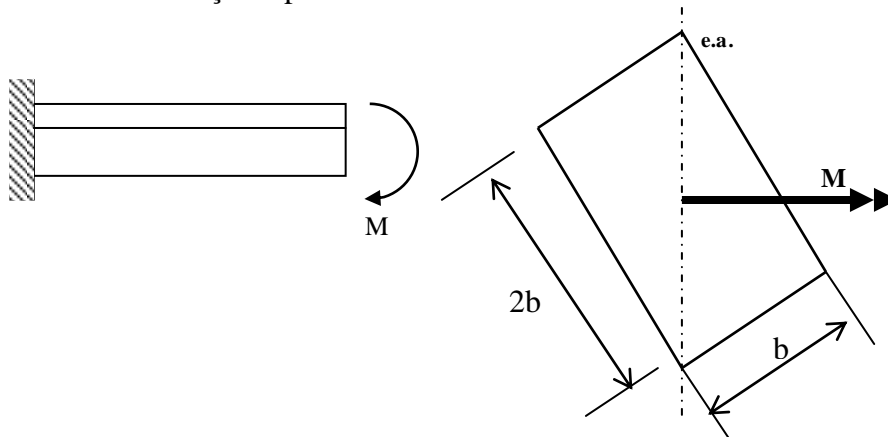


$$\sigma_{\max_c} = \frac{30}{102.167 \times 10^{-4}} \times (-0.2375) = -0.697 MPa \Rightarrow |\sigma_{\max_c}| = 0.697 MPa \leq 10 MPa$$

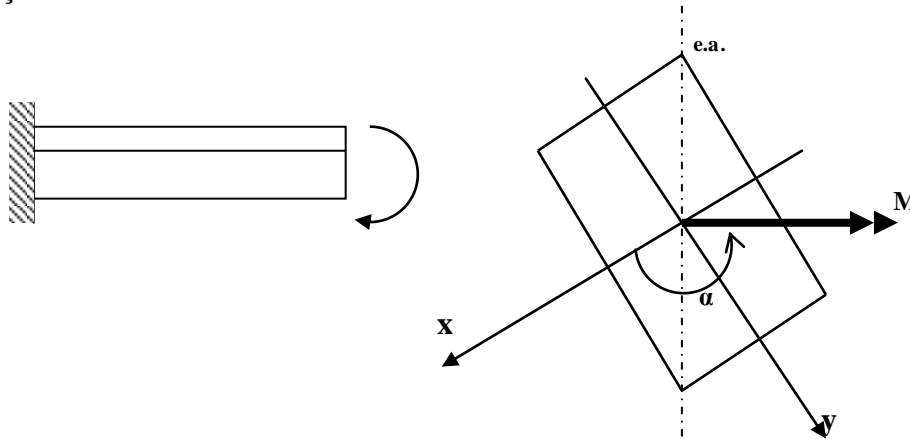
$$\sigma_{\max_t} = \frac{30}{102.167 \times 10^{-4}} \times (0.4625) = 1.358 MPa \leq 1.8 MPa$$

Conclusão: **VERIFICA A SEGURANÇA**

P2.5) Na barra indicada na figura seguinte sujeita a flexão circular desviada, calcule o estado de tensão na secção e posicione o eixo neutro.



Resolução



Da geometria deduz-se o ângulo $\alpha=153.4^\circ$ indicado na figura anterior.

$$\alpha = 153.4^\circ \Rightarrow \sin \alpha = 0.447; \cos \alpha = -0.894$$

Atendendo a que:

$$\sigma = |M| \left(\frac{\cos \alpha}{I_x} y - \frac{\sin \alpha}{I_y} x \right)$$

$$\sigma = -|M| \left(\frac{0.894}{I_x} y + \frac{0.447}{I_y} x \right)$$

$$I_x = \frac{b(2b)^3}{12} = \frac{2}{3} b^4 \quad I_y = \frac{2b(b)^3}{12} = \frac{1}{6} b^4$$

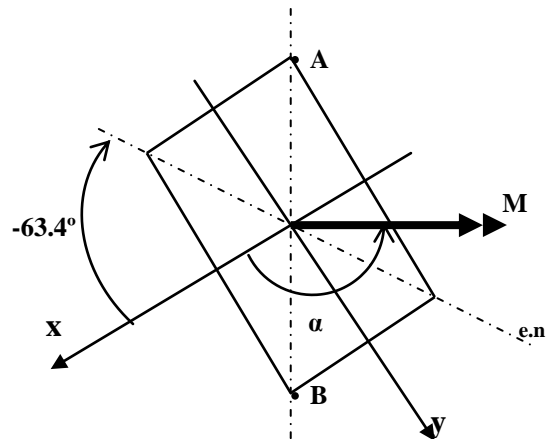
$$\sigma = -\frac{|M|}{b^4} (1.342y + 2.683x)$$

No eixo neutro $\sigma=0$, pelo que a expressão anterior requer:

$$1.342y + 2.683x = 0$$

de onde se conclui que o eixo neutro é a recta de equação: $y = -2x$
O eixo neutro passa pela origem e definindo um ângulo β , tal que:

$$\tan \beta = \frac{I_x}{I_y} \tan \alpha = 4 \tan \alpha = -2 \Rightarrow \beta = -63.4^\circ$$



A tensão máxima de tracção verifica-se no ponto A $(-b/2; -b)$. A tensão máxima de compressão verifica-se no ponto B $(b/2; b)$.

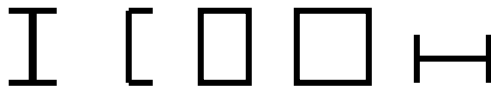
Substituindo na equação da tensão:

$$\sigma = -\frac{|M|}{b^4}(1.342y + 2.683x)$$

obtem-se:

$$\sigma_{\max_{Comp}} = -2.683 \frac{|M|}{b^3} \quad \sigma_{\max_{Tracção}} = 2.683 \frac{|M|}{b^3}$$

Nos casos em que a secção tem **envolvente rectangular e 1 eixo de simetria:**



a tensão máxima pode ser calculada pela seguinte expressão:

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y}$$

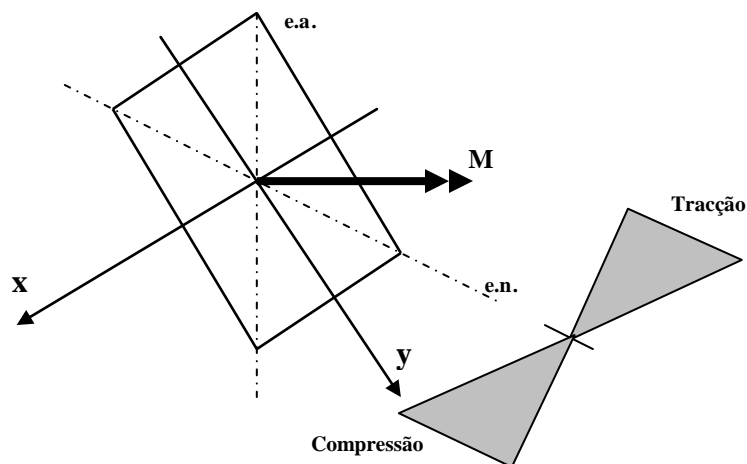
sendo W_x e W_y os valores de módulo de flexão em relação aos eixos principais de inércia.

Aplicando ao caso presente:

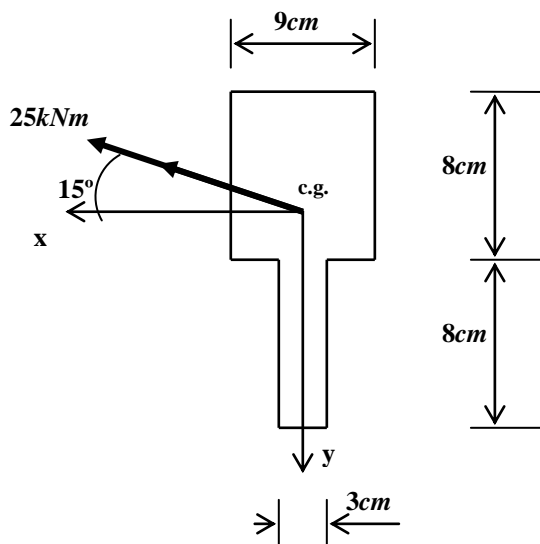
$$W_x = \frac{I_x}{b} = \frac{2}{3}b^3 \quad W_y = \frac{I_y}{b/2} = \frac{1}{3}b^3$$

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} = \frac{0.894M}{\frac{2}{3}b^3} + \frac{0.447M}{\frac{1}{3}b^3} = 2.682 \frac{M}{b^3}$$

sendo de tracção na parte superior e de compressão na parte inferior.

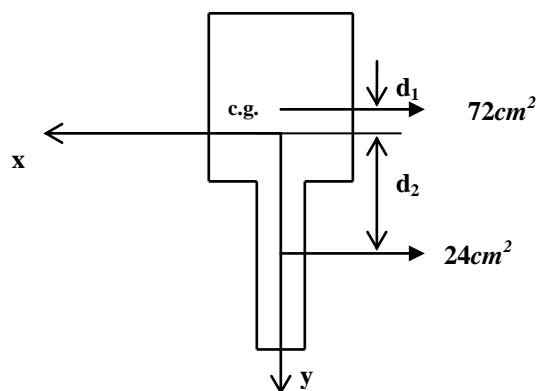


P2.6) O momento flector $M=25kNm$ é aplicado a uma viga com a secção transversal indicada na figura seguinte:



a) Determine e desenhe o diagrama das tensões normais. (4 valores)

Determinação do c.g.:



$$72 \times d_1 - 24 \times d_2 = 0 \text{ e } d_1 + d_2 = 8 \rightarrow d_1 = 2cm; d_2 = 6cm$$

Determinação dos momentos de inércia em relação aos eixos:

$$I_x = \frac{9 \times 8^3}{12} + 9 \times 8 \times 2^2 + \frac{3 \times 8^3}{12} + 3 \times 8 \times 6^2 = 1664 \text{ cm}^4$$

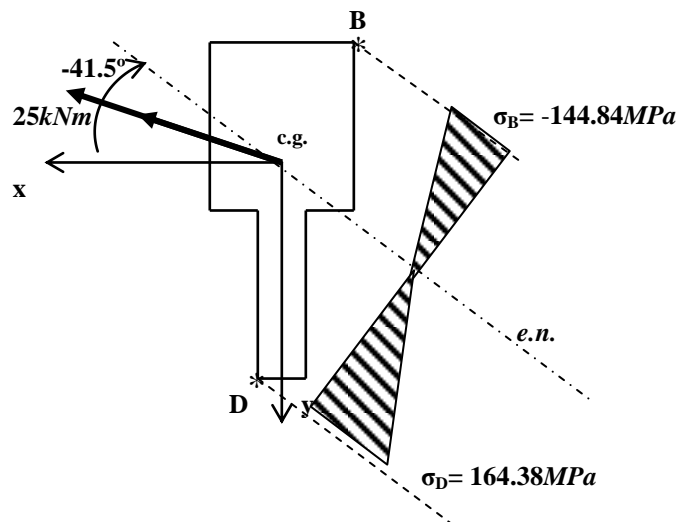
$$I_y = \frac{8 \times 9^3}{12} + \frac{8 \times 3^3}{12} = 504 \text{ cm}^4$$

Determinação do eixo neutro:

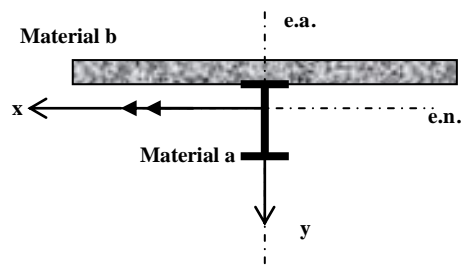
$$\tan \beta = \frac{1664}{504} \times \tan(-15^\circ) \Rightarrow \beta = -41.5^\circ$$

$$\sigma_B = 25 \times \left[\frac{\cos(-15^\circ)}{1664 \times 10^{-8}} (-6 \times 10^{-2}) - \frac{\sin(-15^\circ)}{504 \times 10^{-8}} (-4.5 \times 10^{-2}) \right] = -144.84 \text{ MPa}$$

$$\sigma_D = 25 \times \left[\frac{\cos(-15^\circ)}{1664 \times 10^{-8}} (10 \times 10^{-2}) - \frac{\sin(-15^\circ)}{504 \times 10^{-8}} (1.5 \times 10^{-2}) \right] = 164.38 \text{ MPa}$$

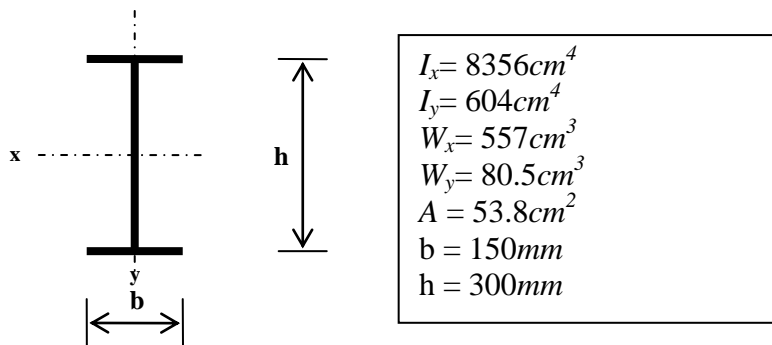


P2.7) A barra da figura é constituída por dois materiais a e b, com módulos de elasticidade respectivamente: $E_a=210 \text{ GPa}$ e $E_b=21 \text{ GPa}$.



Suponha que está sujeita a um momento de 200 kNm , conforme o vector momento representado na figura.

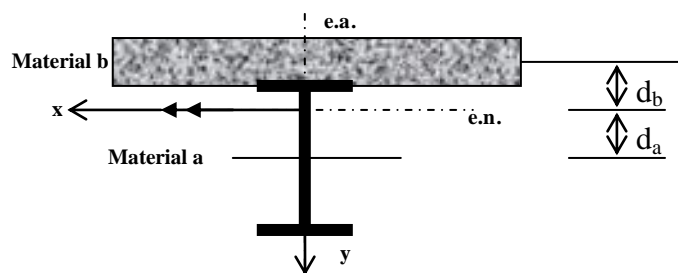
A secção de material **b** tem $150 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ e a secção do material **a** é um IPE300.



- Localize o eixo neutro na secção da peça;
- Determine a distribuição de tensões normais na peça;
- Calcule a tensão máxima.

Resolução

a)



O eixo neutro passa pelo centro de gravidade da secção ponderada com os módulos de elasticidade dos materiais que constituem a peça:

$$21 \times 10^6 \times (1.5 \times 0.1) \times d_b = 210 \times 10^6 \times 53.81 \times 10^{-4} \times d_a$$

Por outro lado, por razões geométricas: $d_b + d_a = 0.2$

Resolvendo: $d_b = 0.053m$ $d_a = 0.147m$

b)

$$\sigma_a = \frac{M}{I_{an} + \frac{E_b}{E_a} I_{bn}} y = \frac{200}{I_{an} + 0.1 I_{bn}} y \quad \sigma_b = \frac{M}{I_{bn} + \frac{E_a}{E_b} I_{an}} y = \frac{200}{I_{bn} + 10 I_{an}} y$$

$$I_{an} = 8356 \times 10^{-8} + 53.81 \times 10^{-4} \times 0.147^2 = 19984 \times 10^{-8} m^4$$

$$I_{bn} = (1.5 \times 0.1^3 / 12) + (1.5 \times 0.1) \times 0.053^2 = 54640 \times 10^{-8} m^4$$

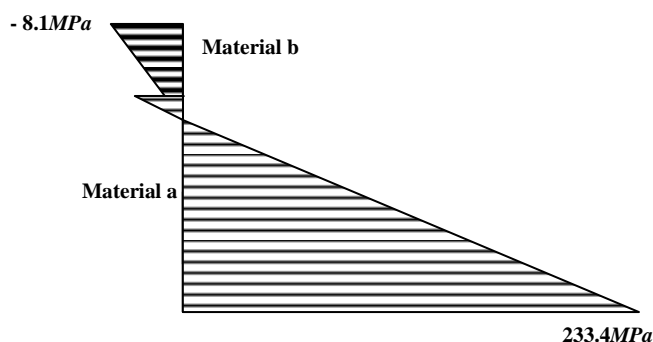
$$\sigma_a = 785.92 \times 10^3 y \quad \sigma_b = 78.59 \times 10^3 y$$

c) O valor de σ_{amax} obtém-se no ponto de coordenada $y = 0.147 + 0.15 = 0.297m$

$$\sigma_{amax} = 785.92 \times 10^3 \times 0.297 = 233.4 MPa$$

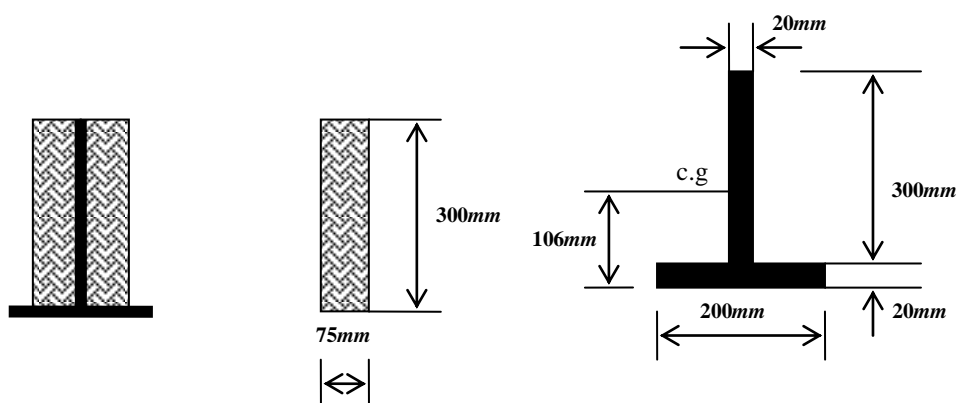
O valor de σ_{bmax} obtém-se no ponto de coordenada $y = -(0.053 + 0.05) = -0.103m$

$$\sigma_{bmax} = 78.59 \times 10^3 \times (-0.103) = -8.1 MPa$$

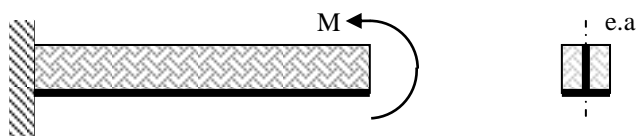


Na figura anterior as tensões de compressão têm valores muito inferiores às tensões de tracção. No entanto, as primeiras distribuem-se numa área maior do que as segundas. Desta forma as forças de compressão equilibram as de tracção, com a consequente resultante nula ($N=0$).

P2.8) Duas barras de madeira estão unidas firmemente a uma barra de aço (secção T), formando a secção composta ilustrada:

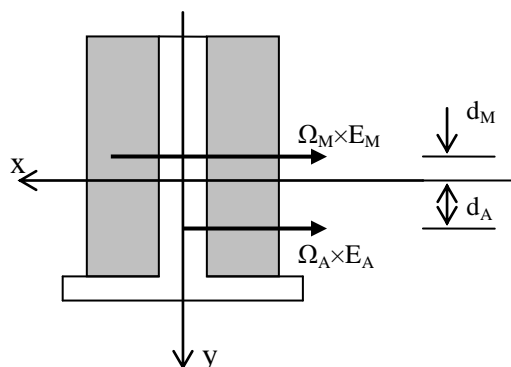


A barra está solicitada com $M = 50kNm$ como indicado na figura seguinte:



	Aço	Madeira
Módulo de elasticidade	200GPa	12.5GPa

Calcule a tensão máxima na madeira e no aço. (4 valores)



$$\Omega_M = 2 \times 30 \times 7.5 = 450 \text{ cm}^2$$

$$\Omega_A = 2 \times 20 + 30 \times 2 = 100 \text{ cm}^2$$

$$\Omega_M \times E_M \times d_M = \Omega_A \times E_A \times d_A$$

$$d_A + d_M = 17 - 0.6 = 6.4 \text{ cm}$$

o sistema anterior permite determinar $d_A = 1.405 \text{ cm}$ e $d_M = 4.995 \text{ cm}$

$$I_{nM} = 2 \times \left(\frac{7.5 \times 30^3}{12} + 7.5 \times 30 \times 4.995^2 \right) = 44978.06 \text{ cm}^4$$

$$I_{nA} = \frac{2 \times 30^3}{12} + 2 \times 30 \times 24.95 + \frac{20 \times 2^3}{12} + 2 \times 20 \times 121.11 = 10854.73 \text{ cm}^4$$

$$\sigma_M = \frac{50}{44978.06 \times 10^{-8} + \frac{200}{12.5} \times 10854.73 \times 10^{-8}} \times y = 22867.2 \times y$$

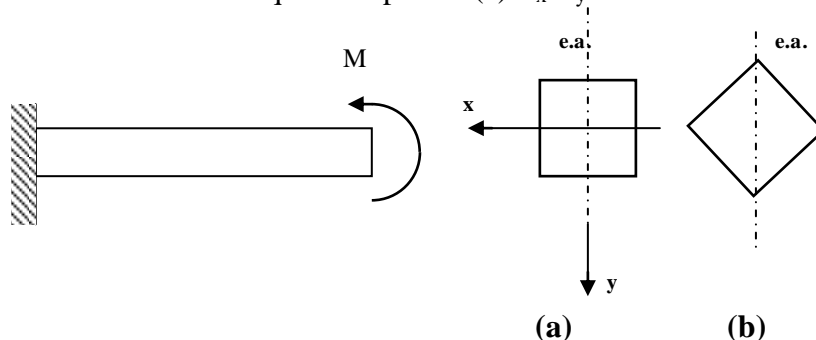
$$\sigma_A = \frac{50}{10854.73 \times 10^{-8} + \frac{12.5}{200} \times 44978.06 \times 10^{-8}} \times y = 365875.29 \times y$$

$$\sigma_{M \max} = 22867.2 \times (-20 \times 10^{-2}) = -4572.30 \text{ kPa} = -4.57 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{A \max} = 365875.29 \times 12.005 \times 10^{-2} = 43923 \text{ kPa} = 43.923 \text{ MPa}$$

2.6. Problemas de aplicação

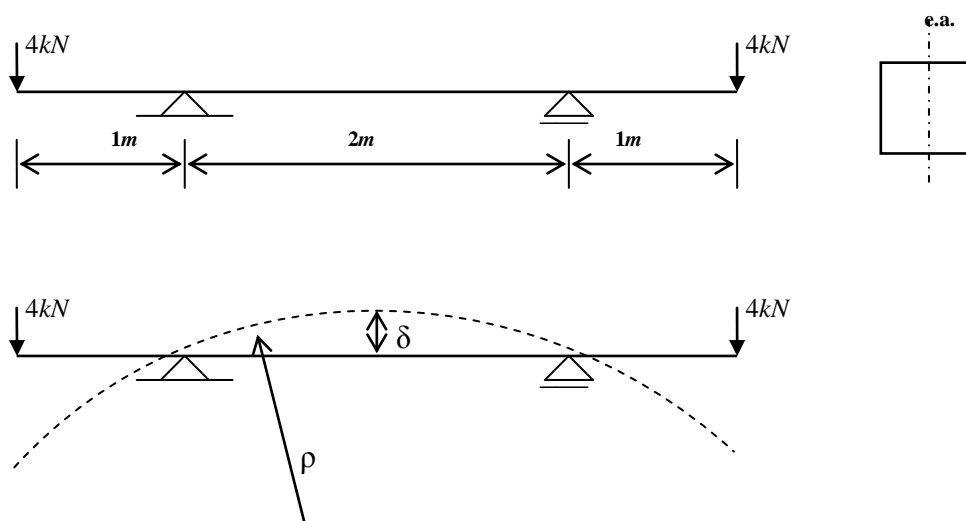
P2.9) Para a barra quadrada de aresta h , qual é a orientação mais vantajosa sob o ponto de vista de flexão? Admita que na hipótese (a): $I_x = I_y = h^4/12$



Solução: Uma vez que a tensão máxima em (b) é 41.4% superior à da hipótese (a), então a hipótese (a) é preferível.

P2.10) Determine o valor do deslocamento na vertical (flecha) a meio vão da viga da figura, admitindo que é uma barra de secção quadrada com 5 cm de aresta, feita de

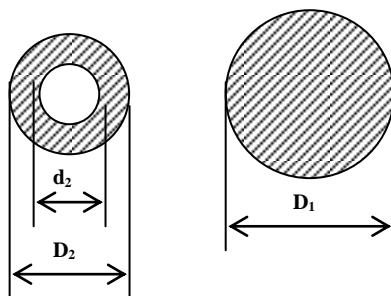
material com $E = 206\text{GPa}$



Uma vez que as deformações são infinitesimais, admita que o comprimento do arco entre os apoios é de $2m$.

Solução: $\delta = 1.86\text{cm}$

P2.11) Admita as secções da figura. Sabendo que na secção tubular $\frac{d_2}{D_2} = 0.9$



Determine a relação entre as áreas das secções das duas peças para que a capacidade de resistir à flexão circular recta seja igual em ambas as peças.

Relembra-se:

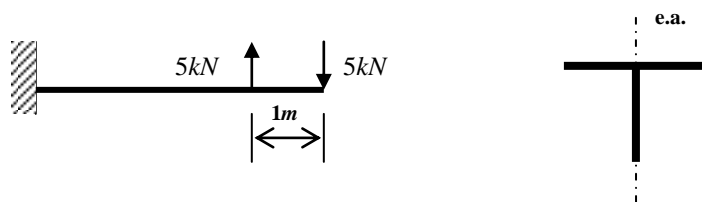
Momentos principais de inércia de uma secção circular de diâmetro D :

$$I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64}$$

Os momentos principais de inércia de uma secção em coroa circular é a diferença entre os momentos principais de inércia das secções definidas pela circunferência exterior e circunferência interior.

Solução: $\Omega_2 \approx 0.39\Omega_1$

P2.12)

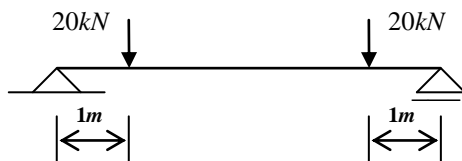


A barra em consola (*cantilever*) da figura é um perfil TNP100

- Trace o diagrama de distribuição das tensões normais na secção junto ao encastramento;
- Para o perfil colocado em posição invertida (rodando 180° em torno do seu eixo) trace de novo o diagrama de distribuição das tensões normais na secção;
- Com base na resposta em b) conclua qual a posição aconselhada se o material que constitui a barra tiver menor capacidade de resistir à tracção do que à compressão.

Solução a) Compressão: $\sigma_{\max} = 203MPa$
 Tracção: $\sigma_{\max} = 76.5MPa$

P2.13) A viga simplesmente apoiada (*simply supported beam*) tem aplicadas acções cujos valores de cálculo estão indicados na figura:

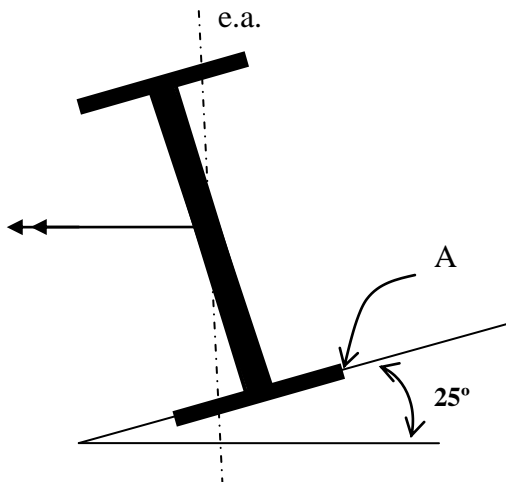


Admita um material com valor de cálculo da tensão resistente do material, $\sigma_{Rd}=150MPa$

- Dimensione** a viga como um perfil INP.
- Trace o diagrama de distribuição das tensões normais na secção a meio vão.

Solução a) IPN180; b) $|\sigma|_{\max}=124MPa$

P2.14) A figura representa a secção transversal de uma madre de uma cobertura, à qual está aplicado um momento flector de 1.5kNm. Admita que se trata de um INP100

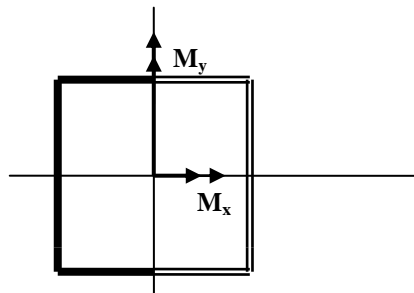


- Posicione na figura o eixo neutro;
- Trace o diagrama das tensões normais na secção;
- Calcule a tensão normal no ponto A.

Solução:

- Tracção $\sigma_{\max} = 169.6 \text{ MPa}$ Compressão $\sigma_{\max} = 169.6 \text{ MPa}$
- Compressão $\sigma = 90 \text{ MPa}$

P2.15) Uma viga tem a secção transversal constituída por dois UNP65. Supondo sujeita a dois momentos flectores, respectivamente com os seguintes módulos: $|M_y| = 4 \text{ kNm}$ e $|M_x| = 2 \text{ kNm}$



determine:

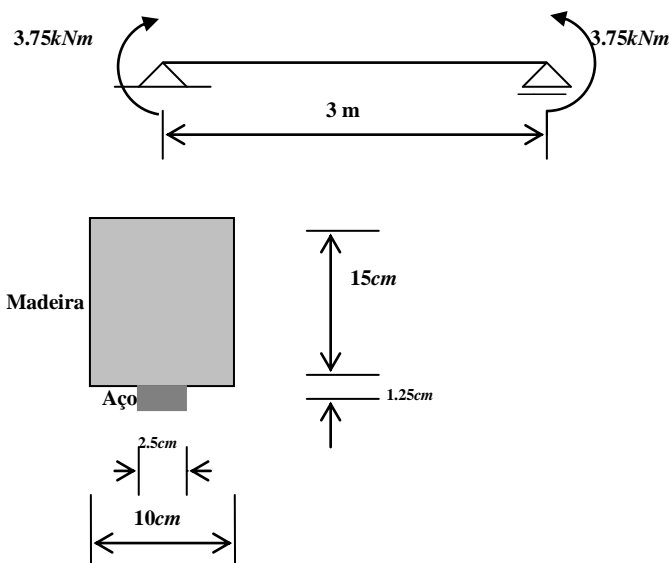
- O eixo neutro;
- As tensões normais máximas.

Nota: Relembrar da *Geometria de Massas* o teorema de Steiner e os Momentos de inércia de áreas compostas.

Solução:

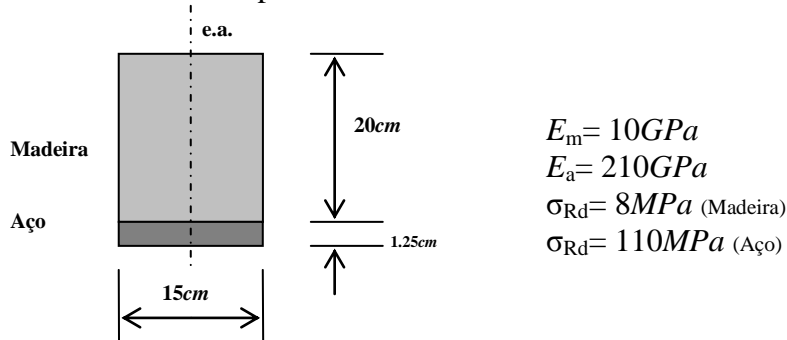
- $y = 1.37x$
- Tracção $\sigma_{\max} = 156.65 \text{ MPa}$ Compressão $\sigma_{\max} = 156.65 \text{ MPa}$

P2.16) Para a viga mista de madeira reforçada com uma placa de aço, determine a tensão máxima e a tensão mínima. Admita que o módulo de elasticidade do aço é 20 vezes o módulo de elasticidade da madeira



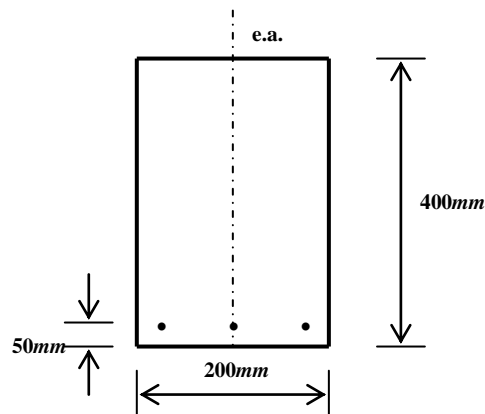
Solução: $|\sigma_{\max}| = 83.2 \text{ MPa}$; $|\sigma_{\min}| = 6.47 \text{ MPa}$

P.2.17) Para a viga mista de madeira reforçada com uma placa de aço, determine o momento flector máximo que pode suportar. Admita os valores indicados para o módulo de elasticidade e para o valor de cálculo da tensão resistente do material.



Solução: $M \leq 14.61 \text{ kNm}$

P2.18) Uma viga de betão está reforçada com três varões de aço. Nesta viga são aplicadas acções cujos valores de cálculo induzem na secção um momento flector de 55 kNm .



Admitindo:

- Diâmetro dos varões = 22 mm
- módulo de elasticidade do betão = 25 GPa ;
- módulo de elasticidade do aço = 200 GPa ;

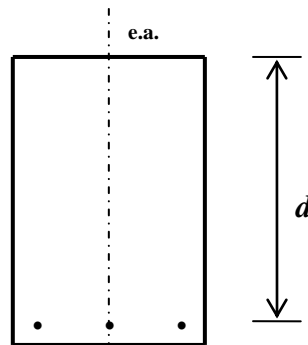
Calcule o máximo valor da tensão no betão e no aço.

Solução: Betão $|\sigma|_{\max} = 13.04 \text{ MPa}$; Aço $\sigma_{\max} = 158.8 \text{ MPa}$

P2.19) No projecto de uma viga de betão reforçada com varões de aço, pretende-se que as tensões que se atinjam em ambos os materiais sejam os respectivos valores de cálculo da tensão resistente.

Admitindo:

- $\sigma_{Rda} \equiv$ Valor de cálculo da tensão resistente do aço;
- $\sigma_{Rdb} \equiv$ Valor de cálculo da tensão resistente do betão;
- $E_a \equiv$ Módulo de elasticidade longitudinal do aço;
- $E_b \equiv$ Módulo de elasticidade longitudinal do betão;
- $d \equiv$ distância da superfície superior do betão aos varões de aço.



Demonstre que nestas condições a distância c da superfície superior da viga até ao eixo neutro é:

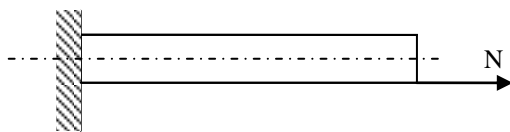
$$c = \frac{d}{1 + \frac{\sigma_{Rda} E_b}{\sigma_{Rdb} E_a}}$$

3. Flexão circular composta ($N \neq 0$; $M = \text{constante}$; $T=0$; $M_t=0$)

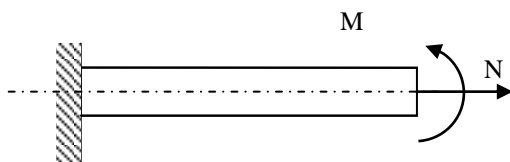
No capítulo de Esforço Axial abordou-se exclusivamente a situação de **esforço axial puro (tracção ou compressão)**, o qual correspondia ao caso em que o eixo da peça se mantinha rectilíneo durante a deformação. O esforço axial puro em peças lineares de eixo rectilíneo e de material homogéneo requer que a resultante das forças exteriores normais à secção passe pelo centro de gravidade da secção.

A flexão circular composta (*eccentric tension-compression*) é precisamente o que acontece em peças lineares de eixo rectilíneo e de material homogéneo sob acção de forças exteriores paralelas ao seu eixo cuja resultante não passa pelo centro de gravidade da secção.

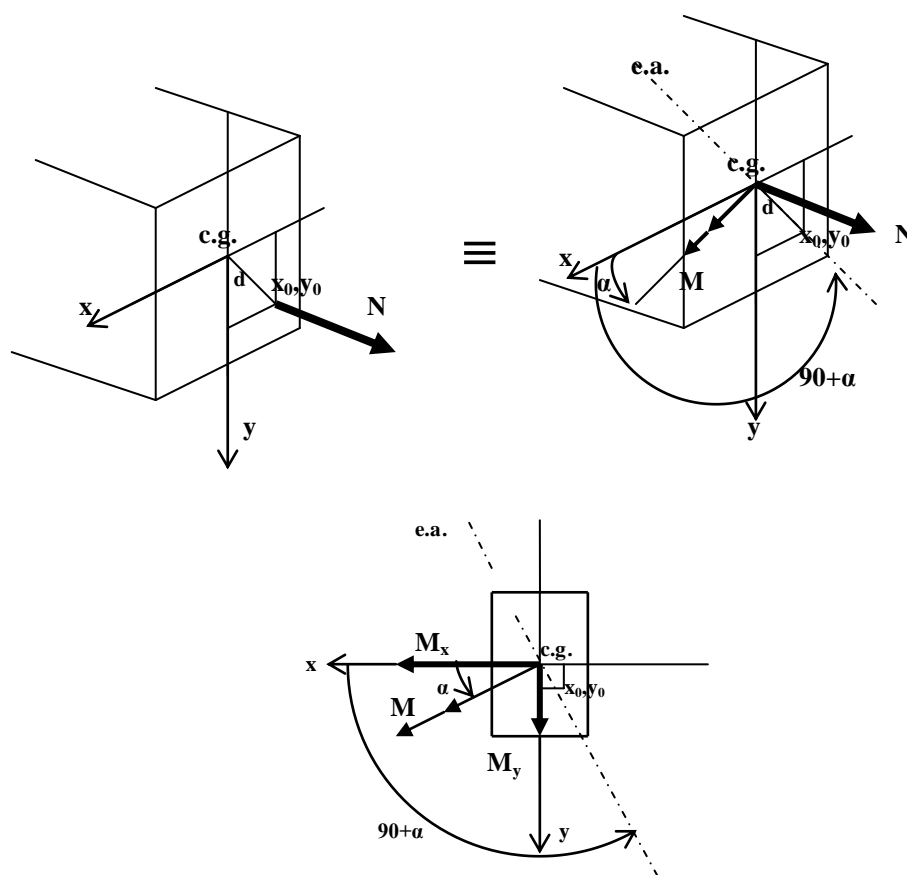
Um exemplo de flexão circular composta está ilustrado na figura seguinte:



Esta situação é equivalente à figura seguinte:



Assim a flexão circular composta equivale à **sobreposição** (ver I.13) de um esforço axial puro (N) e uma flexão circular, recta ou desviada, (M):



Admitamos na figura anterior que a barra está sujeita a um esforço axial de tracção cuja resultante está aplicada no ponto de coordenadas (x_0, y_0) , a que corresponde a uma distância d do centro de gravidade da secção.

Esta acção é equivalente a um esforço axial de tracção N (positivo), centrado no centro de gravidade da secção, e a um momento $|M| = |N \times d| = N \times d$. De acordo com o referencial da figura, temos:

$$y_0 = d \times \sin(\alpha + 90^\circ) = d \times \cos \alpha$$

$$x_0 = d \times \cos(\alpha + 90^\circ) = -d \times \sin \alpha$$

A tensão provocada num ponto genérico de coordenadas (x, y) pode ser calculada adicionando à tensão provocada pelo momento flector M , a tensão originada nesse ponto pelo esforço axial N (positivo):

$$\sigma = \frac{N}{\Omega} + |M| \left(\frac{\cos \alpha}{I_x} y - \frac{\sin \alpha}{I_y} x \right)$$

$$\sigma = \frac{N}{\Omega} + Nd \left(\frac{\cos \alpha}{I_x} y - \frac{\sin \alpha}{I_y} x \right)$$

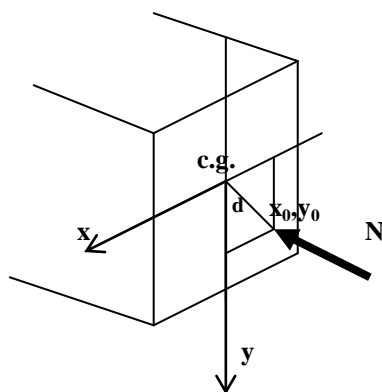
$$\sigma = \frac{N}{\Omega} + N \left(\frac{d \cos \alpha}{I_x} y - \frac{d \sin \alpha}{I_y} x \right)$$

$$\sigma = \frac{N}{\Omega} + N \left(\frac{y_0}{I_x} y + \frac{x_0}{I_y} x \right)$$

$$\sigma = N \left(\frac{1}{\Omega} + \frac{y_0}{I_x} y + \frac{x_0}{I_y} x \right) \quad (\text{eq. 1})$$

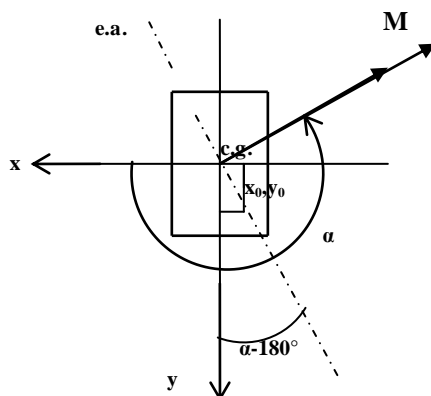
Esta expressão permite calcular a tensão normal em qualquer ponto da secção com coordenadas (x,y), devida a uma força axial de tracção N (positivo), aplicada num ponto de coordenadas (x₀,y₀) (flexão circular composta). É válida para um material homogéneo com comportamento elástico linear.

No caso de uma força de compressão numa barra não sujeita a encurvadura (a estudar em capítulo próprio),



Admitamos na figura anterior que a barra está sujeita a um esforço axial de compressão cuja resultante está aplicada no ponto de coordenadas (x₀,y₀), a que corresponde a uma distância **d** do centro de gravidade da secção.

Esta acção é equivalente a um esforço axial de compressão N (negativo), centrado no centro de gravidade da secção, e a um momento $|M| = |N \times d| = -N \times d$. De acordo com o referencial da figura, temos:



$$y_0 = d \times \cos (\alpha - 180^\circ) = -d \times \cos \alpha$$

$$x_0 = d \times \sin (\alpha - 180^\circ) = d \times \sin \alpha$$

A tensão provocada num ponto genérico de coordenadas (x,y) pode ser calculada adicionando à tensão provocada pelo momento flector M, a tensão originada nesse ponto pelo esforço axial N (negativo):

$$\sigma = \frac{N}{\Omega} + |M| \left(\frac{\cos \alpha}{I_x} y - \frac{\sin \alpha}{I_y} x \right)$$

$$\sigma = \frac{N}{\Omega} + (-N \times d) \left(\frac{\cos \alpha}{I_x} y - \frac{\sin \alpha}{I_y} x \right)$$

$$\sigma = \frac{N}{\Omega} - N \left(\frac{d \cos \alpha}{I_x} y - \frac{d \sin \alpha}{I_y} x \right)$$

$$\sigma = \frac{N}{\Omega} - N \left(\frac{-y_0}{I_x} y - \frac{x_0}{I_y} x \right)$$

$$\sigma = \frac{N}{\Omega} + N \left(\frac{y_0}{I_x} y + \frac{x_0}{I_y} x \right)$$

$$\sigma = N \left(\frac{1}{\Omega} + \frac{y_0}{I_x} y + \frac{x_0}{I_y} x \right) \quad (\text{eq. 2})$$

Esta expressão permite calcular a tensão normal em qualquer ponto da secção com coordenadas (x,y), devida a uma força axial de compressão N (negativo), aplicada num ponto de coordenadas (x₀,y₀) (flexão circular composta). É válida para um material homogéneo com comportamento elástico linear.

Comparando as equações 1 e 2, acima deduzidas, concluímos que são a mesma, constituindo a fórmula geral da flexão circular composta:

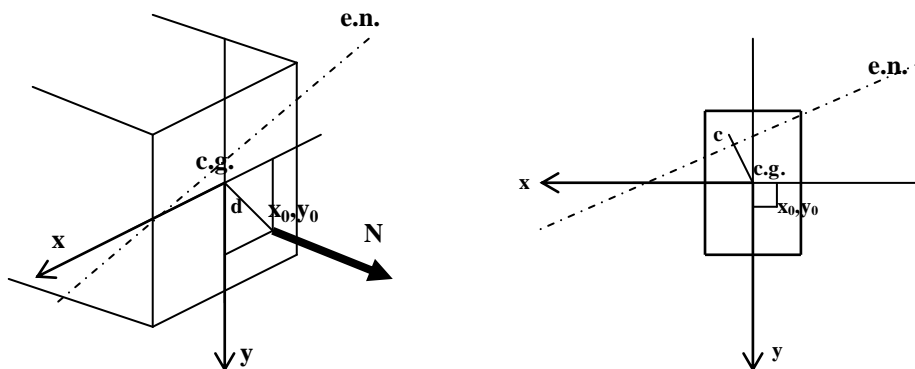
$$\sigma = N \left(\frac{1}{\Omega} + \frac{y_0}{I_x} y + \frac{x_0}{I_y} x \right) \quad N \text{ positivo se tracção}; N \text{ negativo se compressão}$$

Na flexão circular composta, o eixo neutro não passa pelo centro de gravidade. O eixo neutro é uma recta que, no referencial adoptado terá a seguinte equação:

$$\frac{1}{\Omega} + \frac{y_0}{I_x} y + \frac{x_0}{I_y} x = 0$$

Prova-se que se o ponto (x₀,y₀) pertencer a um quadrante, então o eixo neutro desenvolve-se nos outros 3 quadrantes e dista do centro de gravidade da secção a distância OC:

$$OC = \frac{1}{\Omega} \sqrt{\frac{y_0^2}{I_x^2} + \frac{x_0^2}{I_y^2}}$$

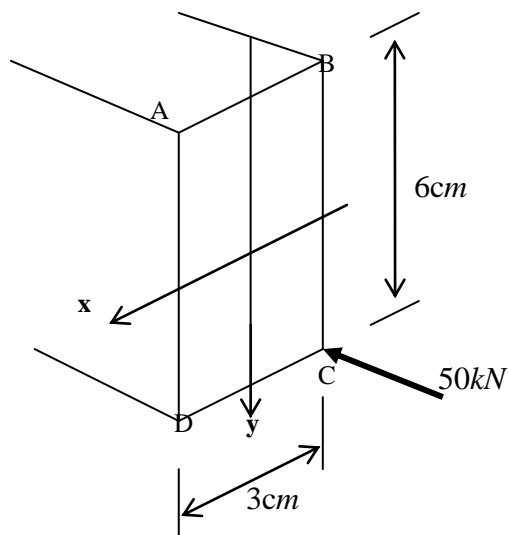


A expressão anterior mostra que à medida que a excentricidade da força N diminui, isto é o ponto (x_0, y_0) se aproxima do centro de gravidade, a distância OC aumenta, isto é o eixo neutro afasta-se do centro de gravidade. O eixo neutro pode ter mesmo uma localização que não intersecta a secção da peça; nestas condições as tensões instaladas na peça terão, todas, o mesmo sinal. Assim, em cada secção, haverá um lugar geométrico sobre o qual o ponto de aplicação de um esforço axial excêntrico provoca uma flexão cujo eixo neutro é tangente à secção. O lugar geométrico destes pontos denomina-se **núcleo central** (*core or kern of the section*).

O conhecimento do núcleo central permite, por exemplo limitar a excentricidade para a aplicação de um esforço axial de compressão, evitando o aparecimento de tensões de tracção. Este aspecto é muito relevante sabendo que muitos dos materiais empregues na engenharia civil (betão, pedra, ligações de alvenaria) têm muito menor resistência à tracção do que à compressão.

3.1. Problemas resolvidos

P3.1) O sólido paralelepípedo mostrado na figura encontra-se sujeito a uma força de compressão de $50kN$ indicada na figura:



Admita que o comprimento da barra é suficientemente pequeno para eliminar qualquer possibilidade de encurvadura.

Determine a tensão normal no ponto A e no ponto C.

Resolução

$$\sigma = N \left(\frac{1}{\Omega} + \frac{y_0}{I_x} y + \frac{x_0}{I_y} x \right)$$

$$I_x = \frac{3 \times 6^3}{12} = 54 \text{ cm}^4 \quad I_y = \frac{6 \times 3^3}{12} = 13.5 \text{ cm}^4$$

$$\sigma = -50 \left(\frac{1}{18 \times 10^{-4}} + \frac{3 \times 10^{-2}}{54 \times 10^{-8}} y + \frac{-1.5 \times 10^{-2}}{13.5 \times 10^{-8}} x \right)$$

$$\sigma = -50 \left(\frac{1}{18 \times 10^{-4}} + \frac{3}{54 \times 10^{-6}} y - \frac{1.5}{13.5 \times 10^{-6}} x \right)$$

Ponto A (1.5×10^{-2} , -3×10^{-2}): $\sigma = 138.89 \text{ MPa}$

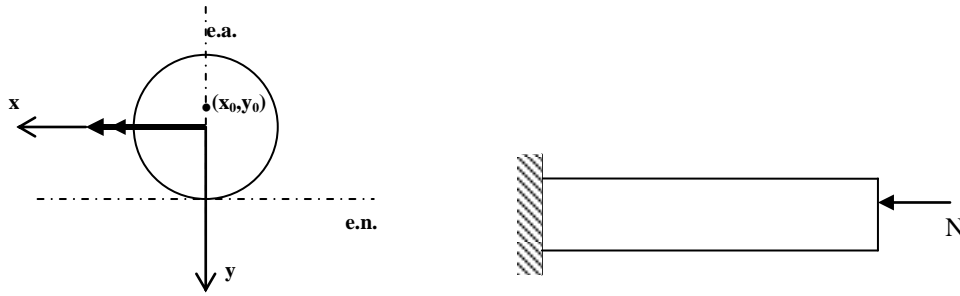
Ponto C (-1.5×10^{-2} , 3×10^{-2}): $\sigma = -194.44 \text{ MPa}$

P3.2) Determine o núcleo central de uma barra de secção circular de raio R

Resolução

Tendo em consideração que por razões de simetria o núcleo central será um círculo centrado na secção da peça, bastará determinar o seu raio.

Para que numa situação de flexão circular composta a secção da peça esteja sujeita a tensões do mesmo sinal, é necessário que o eixo neutro seja, pelo menos tangente ao contorno da peça:



Seja r o raio da circunferência que define o núcleo central. Atendendo à expressão:

$$OC = \frac{\frac{1}{\Omega}}{\sqrt{\frac{y_0^2}{I_x^2} + \frac{x_0^2}{I_y^2}}}$$

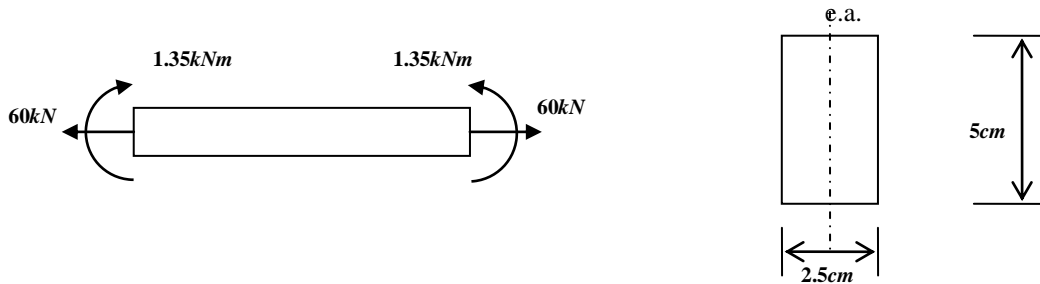
em que: $\Omega = \pi R^2$ $OC = R$ $y_0 = -r$ $x_0 = 0$ $I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4}$

Substituindo e resolvendo fica:

$$r = \frac{R}{4}$$

Assim a compressão de uma peça de secção circular, desde que o ponto de aplicação da força não ultrapasse $\frac{1}{4}$ do raio, não serão geradas tensões de tracção na secção da peça. Este aspecto é relevante em situações de matérias que não suportam esforços de tracção.

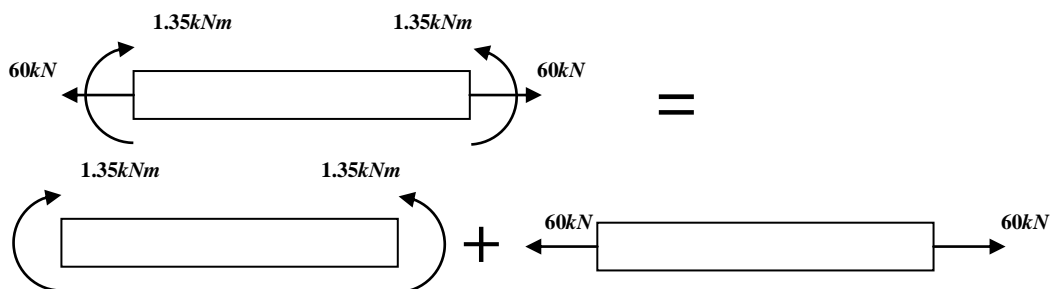
P3.3) Admita que troço da viga de secção rectangular do problema 1 está agora, igualmente, sujeito a uma força axial de tracção (centrado no c.g. da secção) como se mostra na figura.



- Escreva a expressão que permite calcular a tensão em qualquer ponto da secção;
- Determine a tensão máxima na secção.
- Trace o diagrama das tensões normais na secção.

Resolução

- Utilizando o princípio da sobreposição dos efeitos:



$$\sigma = \frac{N}{\Omega} + \frac{M}{I_x} y$$

$$\sigma = \frac{60}{12.5 \times 10^{-4}} + \frac{1.35}{26.04 \times 10^{-8}} y$$

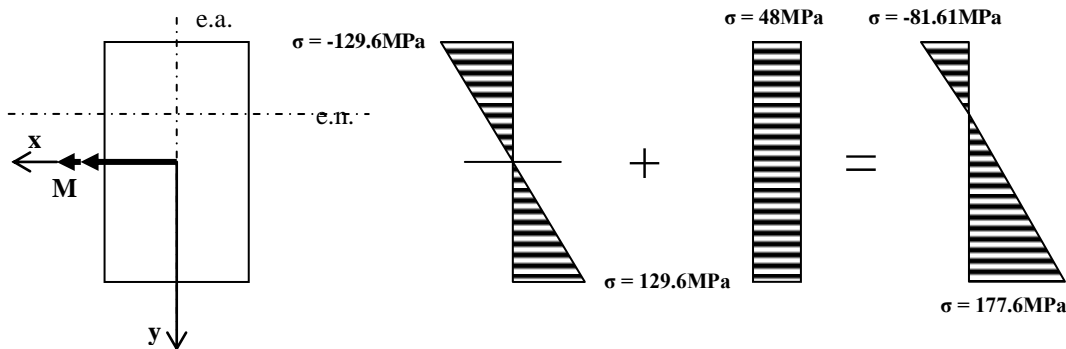
$$\sigma = 4.8 \times 10^4 + 518.43 \times 10^4 y$$

b)

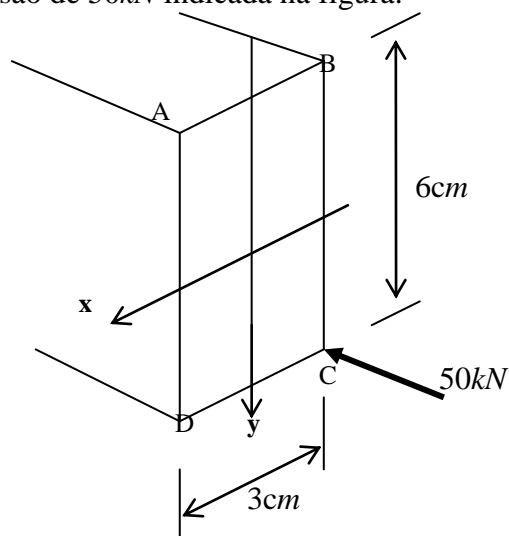
$$\sigma_{\max} = 4.8 \times 10^4 + 518.43 \times 10^4 \times (-2.5 \times 10^{-2}) = -81.61 \text{ Mpa}$$

$$\sigma_{\max} = 4.8 \times 10^4 + 518.43 \times 10^4 \times 2.5 \times 10^{-2} = 177.61 \text{ Mpa}$$

c)



P3.4) O sólido paralelepipedico mostrado na figura encontra-se sujeito a uma força de compressão de 50kN indicada na figura:



Admita que o comprimento da barra é suficientemente pequeno para eliminar qualquer possibilidade de encurvadura.

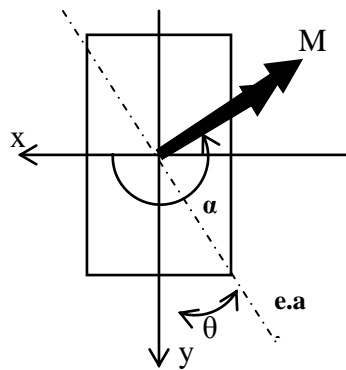
a) Utilizando o princípio da sobreposição determine a tensão normal no ponto A e no ponto C.

b) Resolva a alínea a), utilizando a expressão desenvolvida para a força axial excêntrica.

Resolução

a) Utilizando o princípio da sobreposição dos efeitos

$$\sigma = -\frac{N}{\Omega} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x = -\frac{N}{\Omega} + |M| \left(\frac{\cos \alpha}{I_x} y - \frac{\sin \alpha}{I_y} x \right)$$



$$\tan \theta = \frac{1.5}{3} \Rightarrow \theta = 26.56^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ + 26.56^\circ = 206.56^\circ$$

$$|M| = 50 \times \sqrt{3^2 + 1.5^2} \times 10^{-2} = 1.68 \text{ kNm}$$

$$I_x = \frac{3 \times 6^3}{12} = 54 \text{ cm}^4 \quad I_y = \frac{6 \times 3^3}{12} = 13.5 \text{ cm}^4$$

$$\sigma = -\frac{50}{18 \times 10^{-4}} + 1.68 \left(\frac{-0.8945}{54 \times 10^{-8}} y - \frac{-0.4471}{13.5 \times 10^{-8}} x \right)$$

$$\sigma = -\frac{50}{18 \times 10^{-4}} - 1.68 \left(\frac{0.8945}{54 \times 10^{-8}} y - \frac{0.4471}{13.5 \times 10^{-8}} x \right)$$

Ponto A(1.5×10^{-2} , -3×10^{-2}): $\sigma = 139.17 \text{ MPa}$

Ponto C(-1.5×10^{-2} , 3×10^{-2}): $\sigma = -194.72 \text{ MPa}$

b)
$$\sigma = N \left(\frac{1}{\Omega} + \frac{y_0}{I_x} y + \frac{x_0}{I_y} x \right)$$

$$\sigma = -50 \left(\frac{1}{18 \times 10^{-4}} + \frac{3 \times 10^{-2}}{54 \times 10^{-8}} y + \frac{-1.5 \times 10^{-2}}{13.5 \times 10^{-8}} x \right)$$

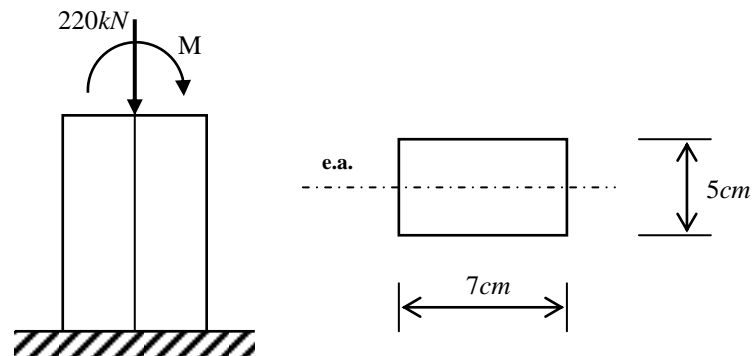
$$\sigma = -50 \left(\frac{1}{18 \times 10^{-4}} + \frac{3}{54 \times 10^{-6}} y - \frac{1.5}{13.5 \times 10^{-6}} x \right)$$

Ponto A(1.5×10^{-2} , -3×10^{-2}): $\sigma = 138.89 \text{ MPa}$

Ponto C(-1.5×10^{-2} , 3×10^{-2}): $\sigma = -194.44 \text{ MPa}$

As diferenças em relação à alínea a) devem-se às aproximações nos cálculos.

P3.5) A barra tem aplicadas acções (força e momento) cujos valores de cálculo estão indicados na figura:



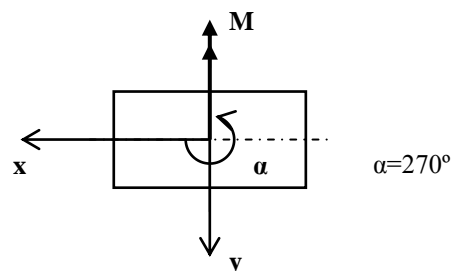
Admita um material com valor de cálculo da tensão resistente do material $\sigma_{Rd}=180MPa$, quer em tracção, quer em compressão.

- Escreva a expressão que permite calcular a tensão em qualquer ponto da secção;
- Para o momento aplicado (M), determine a **capacidade máxima**.

Resolução

- Utilizando o princípio da sobreposição dos efeitos

$$\sigma = -\frac{N}{\Omega} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x = -\frac{N}{\Omega} + |M| \left(\frac{\cos \alpha}{I_x} y - \frac{\sin \alpha}{I_y} x \right)$$



$$\sigma = -\frac{N}{\Omega} + \frac{|M|}{I_y} x$$

$$\sigma = -\frac{220}{35 \times 10^{-4}} + \frac{|M|}{142.92 \times 10^{-8}} x$$

O valor máximo de tensão será obtido em compressão quando $x = -3.5cm$.

$$\sigma_{\max} = -\frac{220}{35 \times 10^{-4}} + \frac{|M|}{142.92 \times 10^{-8}} \times (-3.5 \times 10^{-2})$$

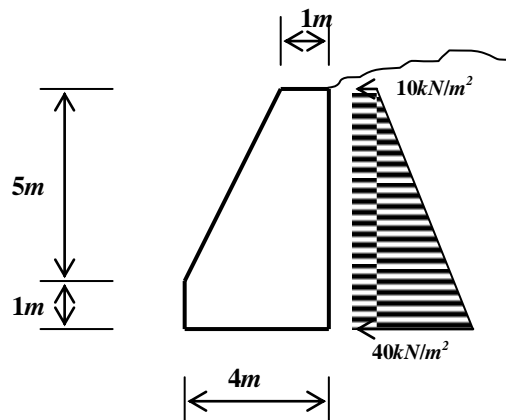
$$\sigma_{\max} = -\left(\frac{220}{35 \times 10^{-4}} + \frac{|M|}{142.92 \times 10^{-8}} \times 3.5 \times 10^{-2} \right)$$

$$|\sigma_{\max}| \leq 180 \times 10^3$$

$$\frac{220}{35 \times 10^{-4}} + \frac{|M|}{142.92 \times 10^{-8}} \times 3.5 \times 10^{-2} \leq 180 \times 10^3$$

$$|M| \leq 4.78 \text{ kNm}$$

P3.6) A teoria desenvolvida para a flexão circular composta permite ainda verificar as tensões na base de um muro de suporte de terras, como o indicado na figura seguinte.

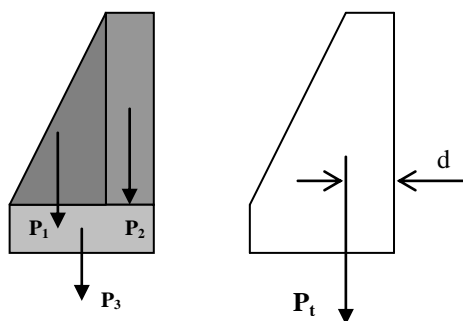


O objectivo será sempre a presença de tensões de compressão na secção correspondente à base do muro.

Os cálculos serão realizados para um metro de comprimento de muro. Admita que o muro é feito de material um peso volúmico $\gamma_b = 25 \text{ kN/m}^3$.

Resolução

Peso próprio do muro



$$V_1 = \frac{3 \times 5}{2} \times 1 = 7.5 \text{ m}^3 \Rightarrow P_1 = 187.5 \text{ kN}$$

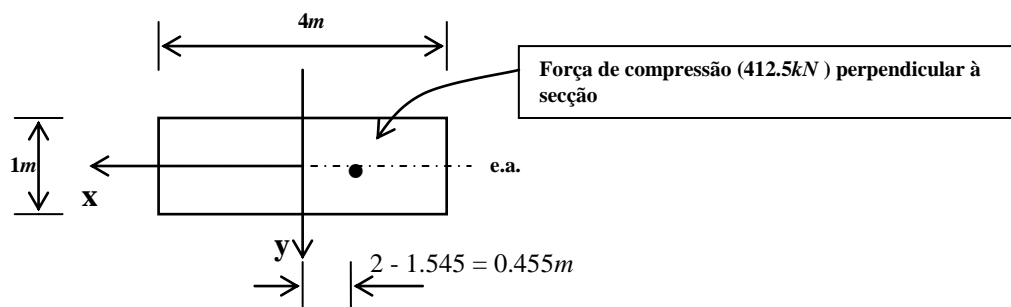
$$V_2 = 1 \times 5 \times 1 = 5 \text{ m}^3 \Rightarrow P_2 = 125 \text{ kN}$$

$$V_3 = 4 \times 1 \times 1 = 4 \text{ m}^3 \Rightarrow P_3 = 100 \text{ kN}$$

$$P_t = 412.5 \text{ kN}$$

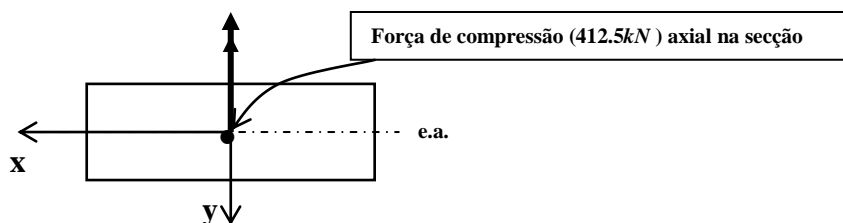
$$P_t \times d = P_1 \times \left(1 + \frac{1}{3} \times 3\right) + P_2 \times 0.5 + P_3 \times 2 \Rightarrow d = 1.545 \text{ m}$$

A figura seguinte mostra a secção da base do muro:

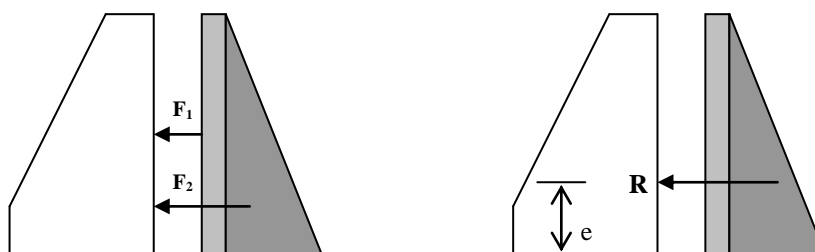


A acção anterior é equivalente a uma força + momento:

$$M_1 = 412.5 \times 0.455 = 187.69 \text{ kNm}$$



Pressão das terras



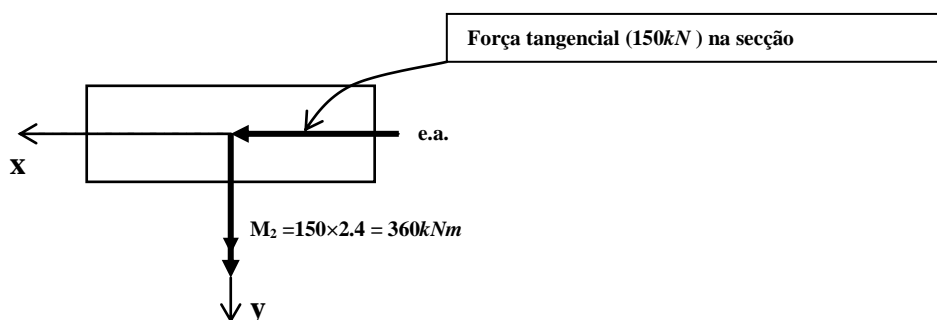
$$F_1 = 6 \times 1 \times 10 = 60 \text{ kN}$$

$$F_2 = \frac{6 \times 30}{2} \times 1 = 90 \text{ kN}$$

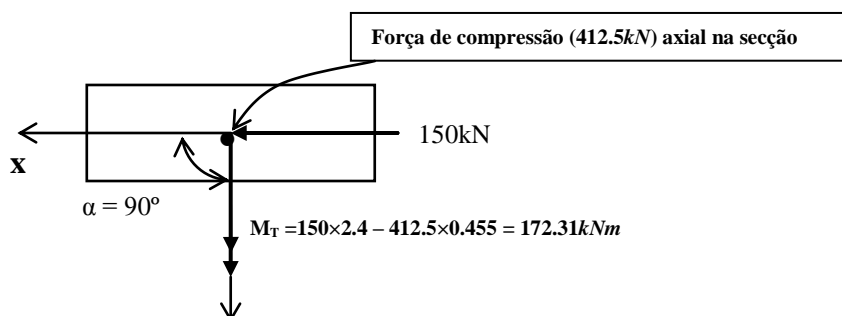
$$R = F_1 + F_2 = 150 \text{ kN}$$

$$R \times e = F_1 \times 3 + F_2 \times \frac{6}{3} \Rightarrow e = 2.4 \text{ m}$$

A figura seguinte mostra a secção da base do muro com as acções nessa secção devido à força R:



Conjugando a solicitação devido ao peso próprio e a solicitação devido à pressão das terras:



Ignorando as tensões tangenciais provocadas pela força de 150kN e utilizando o princípio da sobreposição dos efeitos

$$\sigma = -\frac{N}{\Omega} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x = -\frac{N}{\Omega} + |M| \left(\frac{\cos \alpha}{I_x} y - \frac{\sin \alpha}{I_y} x \right)$$

$$\sigma = -\frac{N}{\Omega} - \frac{|M|}{I_y} x$$

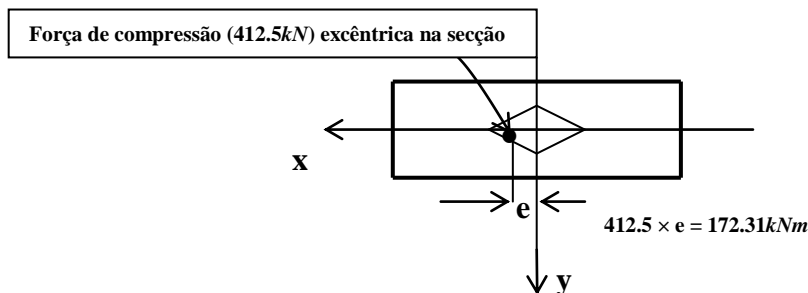
$$\sigma = -\frac{412.5}{4} - \frac{172.31}{5.33} x$$

O valor de tensão, quando $x = -2\text{m}$, é $\sigma = -38.47 \text{ kPa}$

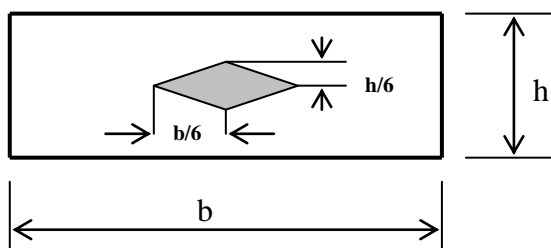
O valor de tensão, quando $x = 2\text{m}$, é $\sigma = -167.78 \text{ kPa}$

Conclui-se que o muro terá sempre uma tensão de compressão sobre o solo onde se apoia.

A presença exclusiva de tensões do mesmo sinal (neste caso de compressão) na secção, permite-nos concluir que a resultante da força axial de compressão (412.5kN) e do momento flector (172.31kNm) corresponde a uma força excêntrica (excentricidade e), a qual passa pelo núcleo central da secção.

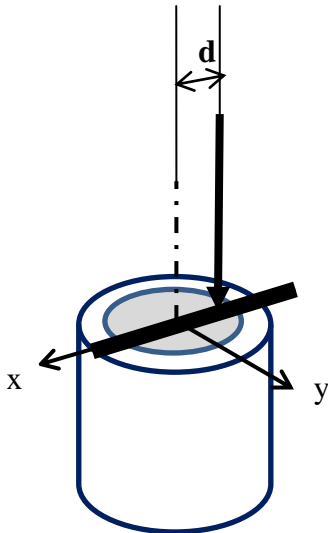


Das tabelas técnicas é possível conhecer as dimensões do núcleo central:



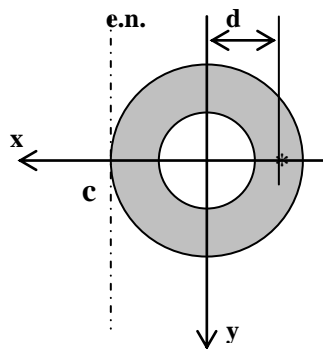
$$e = \frac{172.31}{412.5} = 0.418m \leq \frac{b}{6} = \frac{4}{6} = 0.667m$$

P3.7 - A força P é aplicada numa placa rígida suportada por um tubo de betão com 60cm de diâmetro exterior e 50cm de diâmetro interior. A direcção da força P é paralela ao eixo do tubo.



a) Calcule a máxima excentricidade, \underline{d} , admissível por forma a não haver tracção na secção:

$$\Omega = \frac{\pi}{4}(60^2 - 50^2) = 863.94cm^2$$



$$\sigma = N \left(\frac{1}{\Omega} + \frac{y_0}{I_x} y + \frac{x_0}{I_y} x \right) = -P \left(\frac{1}{\Omega} + \frac{-d}{I_y} x \right)$$

$$\sigma_c = 0 = -P \left(\frac{1}{\Omega} + \frac{-d}{I_y} \frac{\phi_e}{2} \right) \Rightarrow \frac{1}{\Omega} - \frac{d\phi_e}{2I_y} = 0 \Rightarrow d = \frac{2I_y}{\Omega\phi_e} = \frac{2 \times 329376.35}{863.94 \times 60} = 12.71cm$$

b) Calcule o máximo valor para a carga \underline{P} , admitindo uma excentricidade de 10cm e um valor de cálculo para a tensão (de compressão) resistente do material $|\sigma_{Rd}| = 2.94MPa$.

$$-P \left[\frac{1}{\Omega} + \frac{-10 \times 10^{-2}}{I_y} \times (-30 \times 10^{-2}) \right] = -2940kPa$$

$$P = \frac{2940}{\frac{1}{863.94 \times 10^{-4}} + \frac{300 \times 10^{-4}}{329376.35 \times 10^{-8}}} = 142.146kN$$

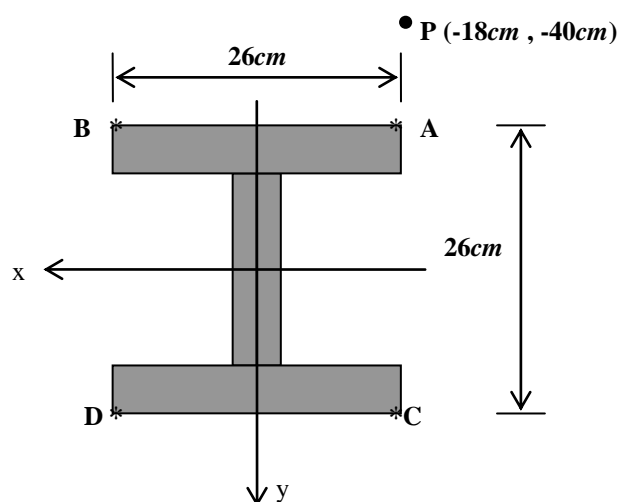
Resposta: $P \leq 142.146kN$

3.3. Problemas de aplicação

P3.8) Uma barra de aço com a secção transversal indicada na figura está **comprimada** excentricamente por uma força $F = 100kN$ (perpendicular à secção) aplicada em P.

Dados: $\Omega = 120.72cm^2$ $I_y = 5278cm^4$ $I_x = 15050cm^4$

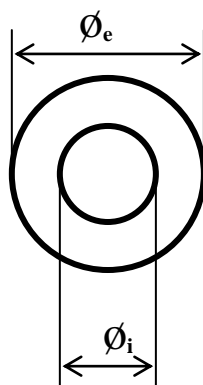
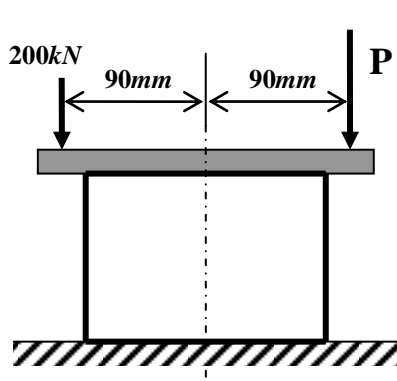
- Calcular as tensões nas fibras extremas A, B, C e D;
- A localização do eixo neutro.



Solução:

- $\sigma_A = -87.17MPa$; $\sigma_B = 1.49MPa$; $\sigma_C = -18.06MPa$; $\sigma_D = 70.60MPa$
- $y = -1.283x + 3.12$ (c/ as distâncias em cm)

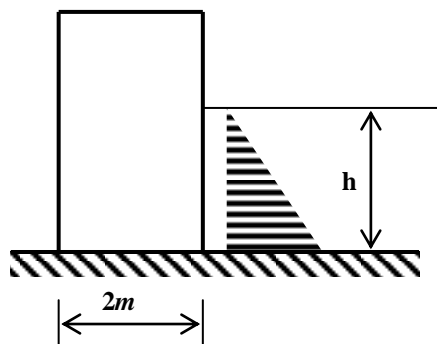
P3.9) Duas forças são aplicadas numa placa rígida suportada por um tubo de aço com 160mm de diâmetro exterior e 130mm de diâmetro interior. Admitindo que a tensão máxima de compressão no tubo não pode ultrapassar 75MPa, calcule entre que valores admissíveis tem de estar a carga P.



$$I_x = I_y = \frac{\pi}{64} (\phi_e^4 - \phi_i^4)$$

Solução: $134kN \leq P \leq 230kN$

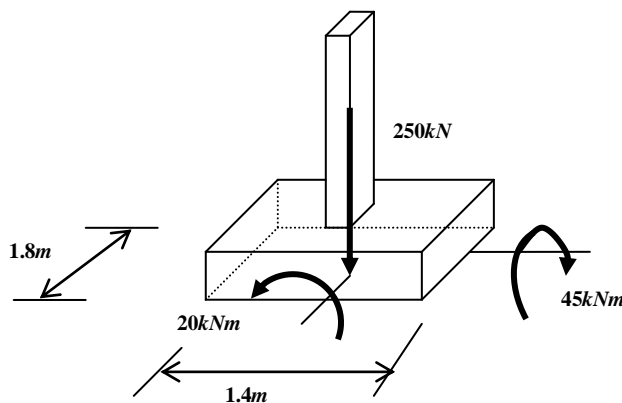
P3.10) Considere o dique representado na figura. O impulso que a água exerce é triangular e na base vale $9.8 \times h$ (kN/m^2). O peso do dique por metro de comprimento e $N=300kN/m$



- Calcule o diagrama de tensões na base do dique para uma altura de água de $h=1.5m$.
- Calcule a altura máxima de água tal que toda a base do muro esteja a trabalhar à compressão.
- Considerando uma tensão admissível no terreno $\sigma_{adm}=0.45MPa$, verifique se a água pode chegar, em segurança, até uma altura h da alínea anterior.

Soluções: a) $\sigma_{max} = -158.3kPa$; $\sigma_{min} = -141.7kPa$; b) $h = 3.94m$; c) Sim, porque:
 $|\sigma|_{max} = 300kPa \leq 450kPa$

P3.11) Para uma tensão admissível no solo de $0.2MPa$, verifique a fundação do pilar indicado.



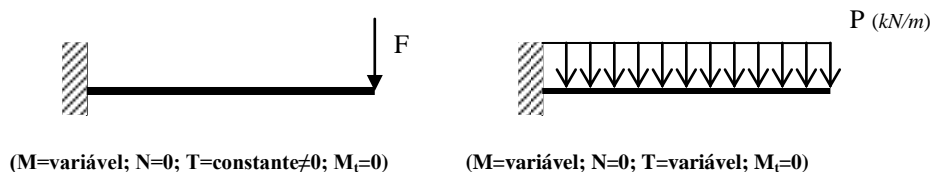
Soluções: Segurança verificada:
 $|\sigma_{max}| = 0.193MPa \leq 0.2MPa$; Não há qualquer ponto da base à tracção.

4. Flexão simples ($M \neq 0$; $N = 0$; $T \neq 0$; $M_t = 0$)

O ponto 2. foi dedicado ao estudo da flexão circular ($M = \text{const}$; $N = 0$; $T = 0$; $M_t = 0$).

A análise efectuada anteriormente permitiu a dedução de expressões para as tensões normais na secção, bem como conhecer a sua curvatura, admitindo um comportamento elástico e linear do material.

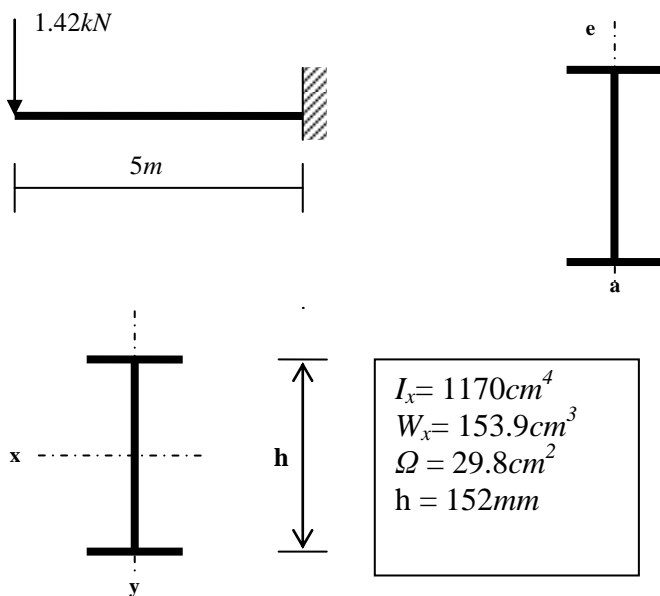
Contudo as expressões deduzidas para a flexão circular podem ser usadas em situações de **flexão simples** (*transverse bending*) em que existe um esforço transversal diferente de zero ($T \neq 0$), como nos casos seguintes:



Em situações em que existe um esforço transverso variável a utilização das expressões deduzidas para a flexão circular incorrem num erro o qual é tolerável se a peça tiver um comprimento muito superior à sua altura; este é o caso das situações da maioria das aplicações práticas

4.1. Problemas resolvidos

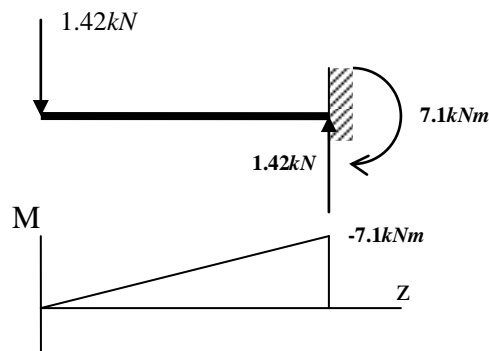
P4.1) A viga da figura seguinte é constituída por um perfil com as características indicadas.



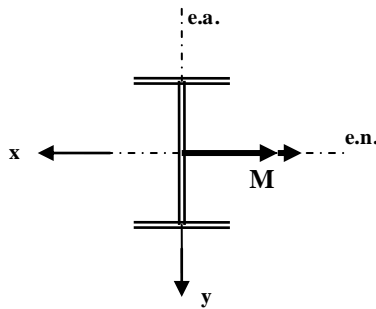
a) Determine as tensões máximas a que a viga está solicitada.

Resolução:

Em primeiro lugar há que conhecer a secção mais solicitada à flexão, a qual se obtém traçando o diagrama de momento flector.



A secção do encastramento é a secção mais solicitada.



Trata-se de uma viga solicitada com **flexão simples** ($M \neq 0$; $N = 0$; $T \neq 0$; $M_t = 0$). Uma vez que o seu comprimento é muito superior a qualquer das outras dimensões, será tolerável a aproximação de se utilizar as expressões deduzidas para a flexão circular:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x = |M| \left(\frac{\cos \alpha}{I_x} y - \frac{\sin \alpha}{I_y} x \right)$$

Uma vez que $\alpha = 180^\circ$, fica:

$$\sigma = -\frac{|M|}{I_x} y$$

Obtém-se:

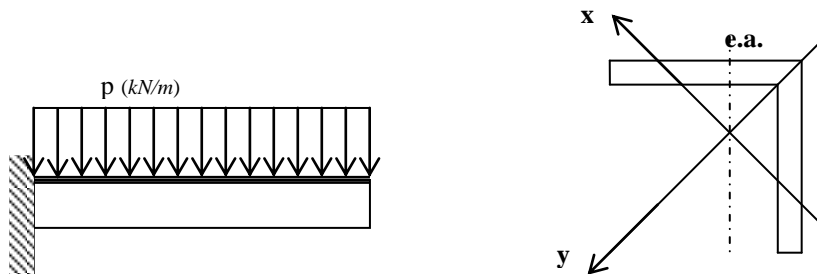
$$\sigma = -\frac{7.1}{1170 \times 10^{-8}} y$$

b)

$$\sigma_{\max} = -\frac{7.1}{1170 \times 10^{-8}} \times 7.6 \times 10^{-2} = -46.1 \text{ MPa} \quad (\text{compressão})$$

$$\sigma_{\max} = -\frac{7.1}{1170 \times 10^{-8}} \times (-7.6 \times 10^{-2}) = 46.1 \text{ MPa} \quad (\text{tracção})$$

P4.2) A cantoneira de abas iguais (*equal-leg angle section*) 100×10 , encastrada, está sujeita à flexão provocada pelo seu peso próprio. Admita que a barra tem 3m de comprimento. Determine a posição do eixo neutro e o diagrama das tensões normais na secção junto do encastramento.



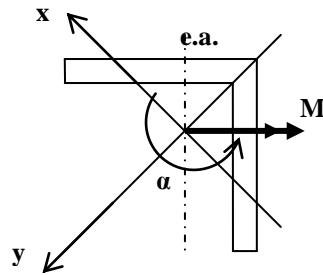
Resolução:

Nas condições do problema temos: $M \neq 0$; $N = 0$; $T \neq 0$; $M_t = \text{desprezável}$.

O momento flector máximo ocorre no encastramento e, em módulo, tem o

valor: $M = \frac{pl^2}{2}$

Atendendo ao facto de L100×10 ter 15.1kg/m → 0.148kN/m, então: M=0.666kNm



Da figura anterior tira-se: $\alpha = 180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$

A distribuição das tensões na secção:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x = M \left(\frac{\cos \alpha}{I_x} y - \frac{\sin \alpha}{I_y} x \right)$$

Atendendo ao facto de L100×10 ter:

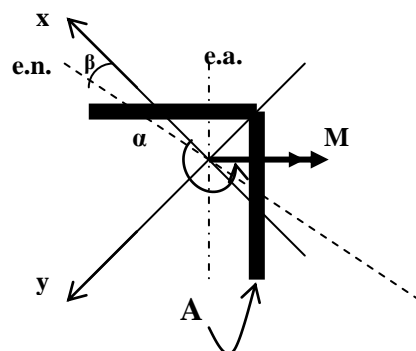
$$I_y = 280 \text{ cm}^4; I_x = 73.3 \text{ cm}^4$$

$$\sigma = -642.47 \times 10^3 \times y + 168.19 \times 10^3 \times x$$

A posição do eixo neutro fica conhecida pela expressão:

$$\tan \beta = \frac{I_x}{I_y} \tan \alpha$$

cujo resultado é: $\beta = 14.7^\circ$

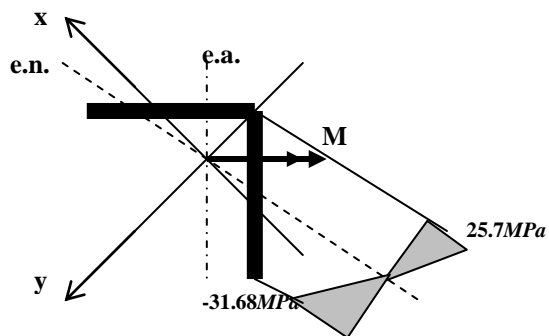


Atendendo às dimensões apresentadas nas tabelas técnicas pode deduzir-se as coordenadas, em cm, dos seguintes pontos:

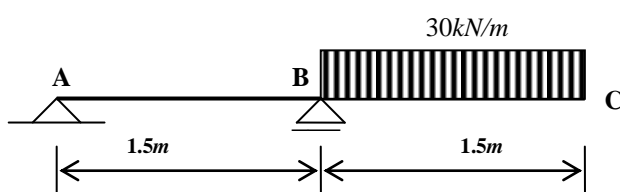
A(-7.07, 3.08); B(0, -4)

$$\sigma_A = -642.47 \times 10^3 \times (3.08 \times 10^{-2}) + 168.19 \times 10^3 \times (-7.07 \times 10^{-2}) = -31.68 \times 10^3 \text{ kPa}$$

$$\sigma_B = -642.47 \times 10^3 \times (-4.0 \times 10^{-2}) = 25.7 \times 10^3 \text{ kPa}$$

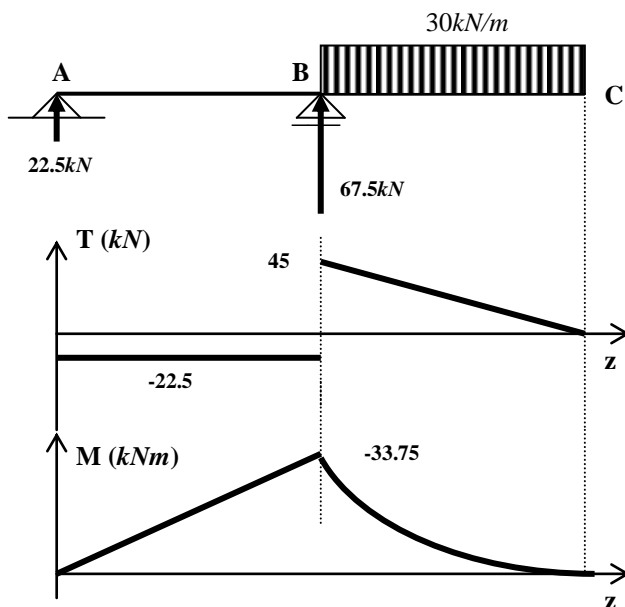


P4.3) Considere a viga ABC sujeita à acção cujo valor de cálculo se ilustra na figura seguinte:

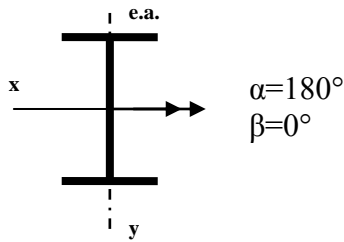


Admita que a secção é um INP e que o valor de cálculo de resistência do material é de $235MPa$, quer em tracção quer em compressão.

a) Trace o diagrama de esforços; (3 valores)



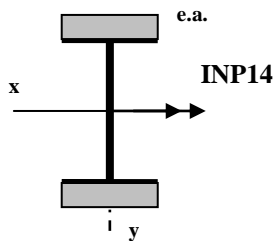
b) Dimensione a viga apenas à flexão. Ver tabela de INP anexa. (2 valores)



$$\sigma = -\frac{|M|}{I_x} y \Rightarrow \sigma_{\max} = -\frac{|M|}{I_x} y_{\max} \Rightarrow |\sigma_{\max}| = \frac{|M|}{W_x}$$

$$\frac{33.75}{W_x} \leq 235 \times 10^3 \Rightarrow W_x \geq 143.62 \text{ cm}^3 \Rightarrow \text{INP18}$$

c) Verifique a alternativa de utilizar o INP situado na tabela anexa, na 2ª posição imediatamente acima do INP que obteve na alínea b), reforçado com chapas de 1cm de espessura soldadas a toda a largura do banzo (inferior e superior). (2 valores)



$$W_x = \frac{I_x}{|y_{\max}|} = \frac{I_x}{8}$$

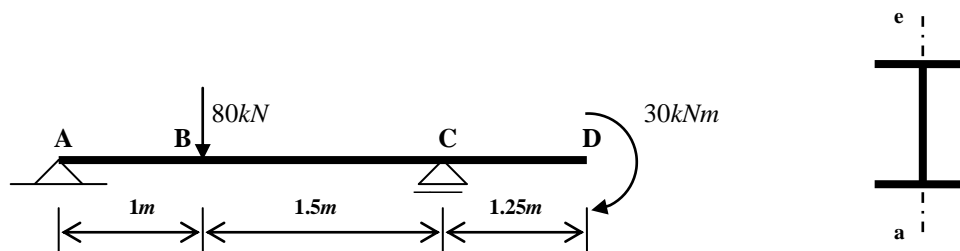
$$I_x = 573 + 2 \times \left(\frac{6.6 \times 1^3}{12} + 6.6 \times 1 \times 7.5^2 \right) = 1316.6 \text{ cm}^4$$

$$W_x = \frac{1316.6}{8} = 164.58 \text{ cm}^3$$

Uma vez que este módulo de flexão é superior ao valor encontrado para o INP18, então o INP14 + reforço VERIFICA.

4.2. Problemas de aplicação

P4.4) A viga simplesmente apoiada (*simply supported beam*) tem aplicada acções cujos valores de cálculo estão indicados na figura:



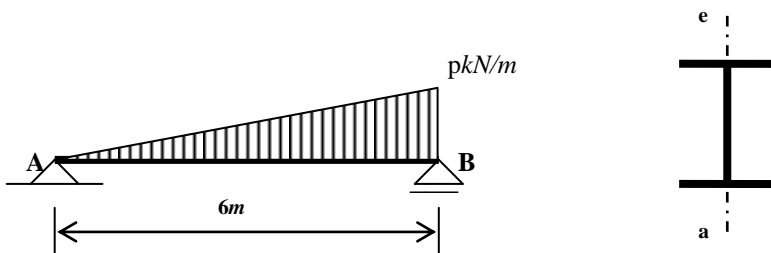
Admita que o valor de cálculo de resistência do material é de $160MPa$, quer em tracção quer em compressão.

a) Trace o diagrama de esforços, localize a secção mais solicitada à flexão e indique o valor do momento flector nessa secção

b) **Dimensione** a viga como INP

Solução: a) Secção B; $M = +36kNm$; b) $W_x \geq 225cm^3$ (INP220)

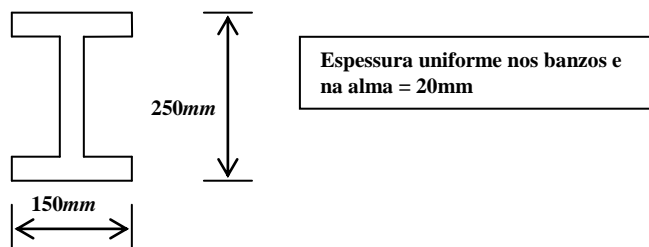
P4.5) Considere a viga da figura seguinte sujeita à flexão simples:



a) Determine as reacções nos apoios;

b) Trace o diagrama de esforços, localize a secção mais solicitada à flexão e indique o valor do momento flector nessa secção;

c) Admitindo o perfil da figura e um valor $\sigma_{Rd} = 125MPa$, determine o valor máximo de p kN/m.

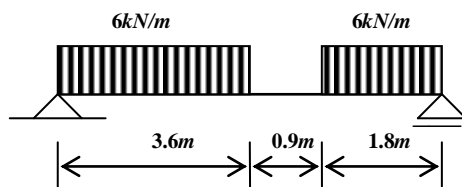


Soluções: a) $|V_A| = p$; $|V_B| = 2p$;

b) Secção a $3.46m$ do apoio A; $M = +2.31 \times p$, em kNm

c) $p \leq 41.1kN/m$

P4.6) A viga simplesmente apoiada (*simply supported beam*) tem aplicadas acções cujos valores de cálculo estão indicados na figura:

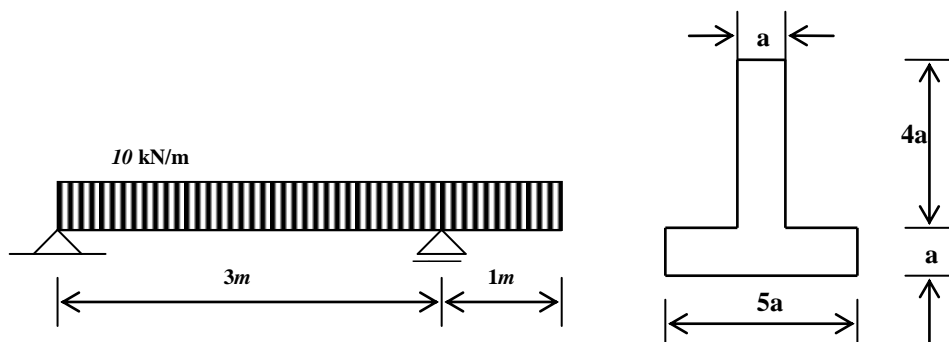


Admita um material com valor de cálculo da tensão resistente do material, $\sigma_{Rd} = 110MPa$. Despreze o efeito do esforço transversal e do peso próprio

a) **Dimensione** a viga determinando o valor mínimo do módulo de flexão da secção.

Solução: $218cm^3$

P4.7) A viga simplesmente apoiada (*simply supported beam*) tem aplicadas acções cujos valores de cálculo estão indicados na figura:



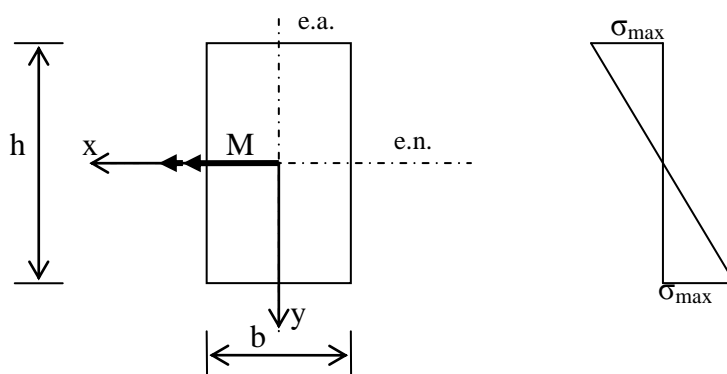
Admita um material com valor de cálculo da tensão resistente do material, $\sigma_{Rd}=175MPa$. Despreze o efeito do esforço transversal e do peso próprio

a) **Dimensione** a viga determinando o valor mínimo da dimensão **a** da secção.

Solução: $a \geq 2.06cm$

5. Flexão em regime elasto-plástico (*elastoplastic bending*)

Considere-se a seguinte secção rectangular de uma barra em flexão circular recta ($N=0$; $M = \text{constante}$; $T=0$; $M_t=0$)

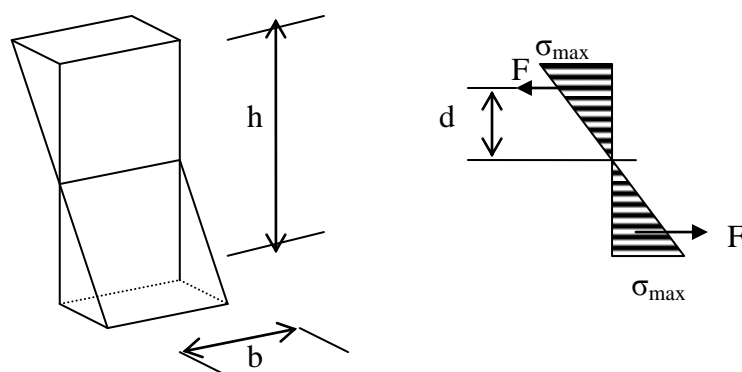


$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{I_x} y_{max}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x} = \frac{\sigma}{Ey}$$

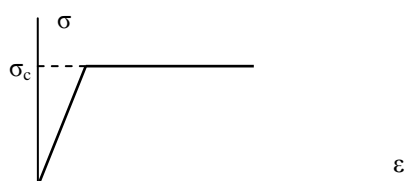
Directamente do diagrama de distribuição das tensões normais:



$$M = 2 \times F \times d \quad F = b \times \left(\sigma_{\max} \times \frac{h}{2} \times \frac{1}{2} \right) \quad d = \frac{2}{3} \times \frac{h}{2}$$

$$M = 2 \times b \sigma_{\max} \times \frac{h}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{h}{2} = \frac{b \sigma_{\max} h^2}{6}$$

Vamos supor que o material da barra tem o comportamento reológico elástico – perfeitamente plástico (*perfect plasticity*) da figura seguinte, o qual retrata o comportamento aproximado de um material dúctil como o aço macio.



Se o momento for suficiente ($M=M_e$), as fibras mais afastadas atingirão a tensão de cedência do material:

$$\sigma_c = \frac{M_e}{I_x} y_{\max} \quad \frac{1}{\rho_e} = \frac{M_e}{EI_x}$$

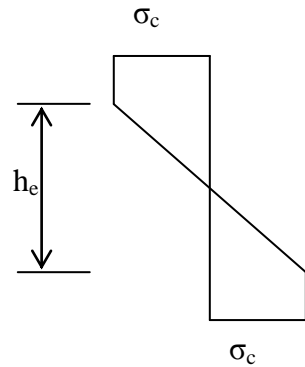
Assim o momento correspondente ao limite da fase elástica e a respectiva curvatura, serão:

$$M_e = \sigma_c \frac{I_x}{y_{\max}} \quad \frac{1}{\rho_e} = \frac{\sigma_c}{y_{\max} E}$$

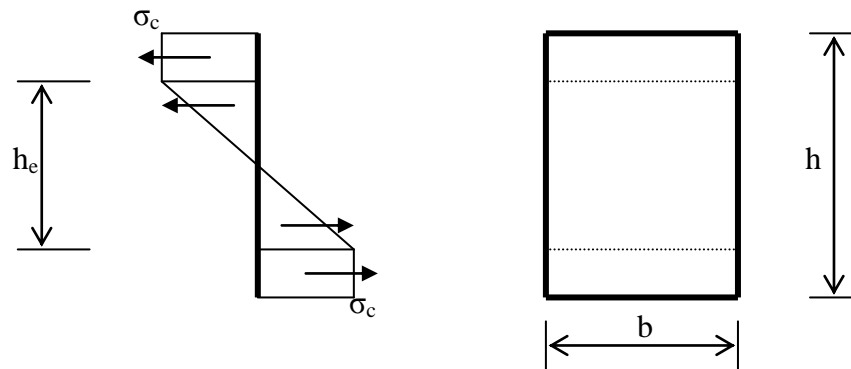
No caso particular da secção quadrangular, obtém-se:

$$M_e = \frac{b \sigma_c h^2}{6} \quad \frac{1}{\rho_e} = \frac{2 \sigma_c}{h E}$$

Para $M > M_e$, a figura seguinte mostra o diagrama das tensões normais. Parte da secção já está em comportamento plástico, com a parte central de dimensão h_e , ainda em comportamento elástico.



A barra está em **comportamento elasto-plástico**. O momento M aplicado no caso da secção quadrangular em estudo, fica:



$$M = \left(\frac{h - h_e}{2} \times b \sigma_c \right) \times \left(h_e + \frac{h - h_e}{2} \right) + \left(\frac{b \sigma_c \times \frac{h_e}{2}}{2} \right) \times \left(2 \times \frac{2}{3} \times \frac{h_e}{2} \right)$$

$$M = \frac{b \sigma_c}{4} \left(h^2 - \frac{1}{3} h_e^2 \right)$$

$$M = M_e \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{h_e}{h} \right)^2 \right] \quad (1)$$

As fibras da peça para valores de y contidas no intervalo de $\pm h_e/2$, continuam em deformação com comportamento elástico linear, então:

$$\sigma = \frac{E y}{\rho}$$

Em particular:

$$\sigma_c = \frac{E \frac{h_e}{2}}{\rho}$$

Assim para $M > M_e$ a peça continua um arco de circunferência com curvatura:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2\sigma_c}{h_e E} \quad (2)$$

Substituindo h_e da expressão (1):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2\sigma_c}{h E} \frac{1}{\sqrt{3 - 2\frac{M}{M_e}}} \quad \text{para } M > M_e$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_e} \frac{1}{\sqrt{3 - 2\frac{M}{M_e}}} \quad (3)$$

sendo $1/\rho_e$ a curvatura que se atinge no limite da fase elástica.

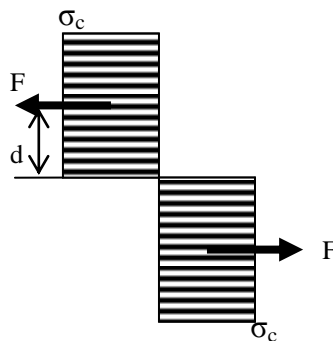
Quando todas as fibras da secção estiverem em comportamento plástico o que acontece quando $M=M_p$, então: $h_e=0$. De acordo com (2): $1/\rho = \infty$. Tendo em consideração a expressão (3), fica:

$$M_p = \frac{3}{2} M_e$$

Tendo em consideração o valor do momento limite da fase elástica, anteriormente obtido:

$$M_p = \frac{3}{2} M_e = \frac{b\sigma_c h^2}{4}$$

Directamente do diagrama de distribuição das tensões normais:



$$M = 2 \times F \times d \quad F = b \times \left(\sigma_c \times \frac{h}{2} \right) \quad d = \frac{h}{4}$$

Resulta, igualmente:

$$M_p = \frac{b\sigma_c h^2}{4}$$

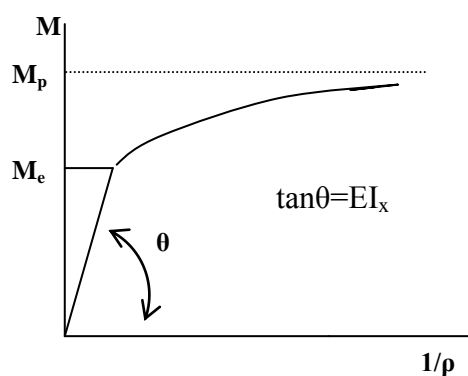
O momento máximo ($M_p \equiv$ **momento flector de cedência ou momento plástico último**) que uma secção rectangular suporta em regime elasto-plástico é 1.5 vezes o momento máximo em regime elástico (M_e).

A relação entre o momento flector de cedência (M_p) e o momento máximo em regime elástico designa-se por **factor de forma** da secção:

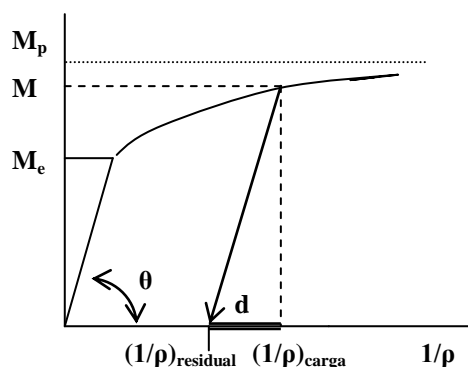
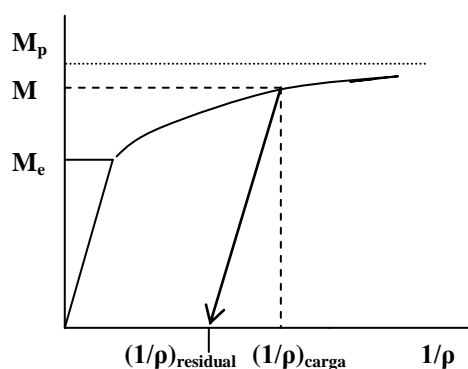
$$\varphi = \frac{M_p}{M_e}$$

Secção	Factor de forma (ϕ)
Rectângulo	1.5
Triângulo isósceles	2.343
Losango	2
Círculo	1.7
Perfil INP	≈ 1.15
Perfil UNP	≈ 1.2

A figura seguinte representa, esquematicamente, o comportamento de uma barra em flexão até à plastificação total.



Se a determinado ponto da flexão elasto-plástica, a barra for descarregada, ela manterá uma deformação residual, como se mostra:



Da figura anterior:

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)_{residual} = \left(\frac{1}{\rho}\right)_{carga} - d$$

$$d = \frac{M}{\tan \theta} = \frac{M}{EI_x}$$

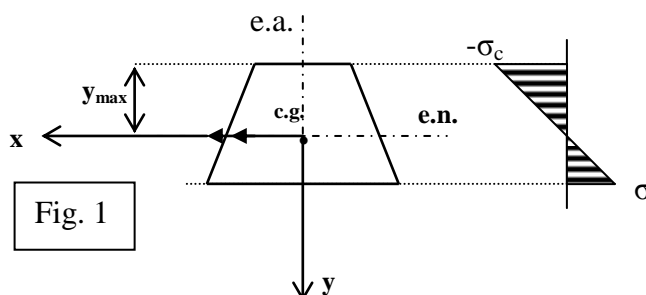
Substituindo:

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)_{residual} = \left(\frac{1}{\rho}\right)_{carga} - \frac{M}{EI}$$

A expressão anterior permite relacionar o valor da curvatura residual da barra (após ter sido descarregada), com a curvatura em carga.

5.1. Caso de peças com um único eixo de simetria

Admitamos a secção da figura, correspondente a uma viga sujeita a flexão circular recta. Por ser uma flexão recta o eixo da acção coincide com o eixo de simetria e o eixo neutro é perpendicular ao eixo da acção. Pelo facto de ser uma flexão circular ($N=0$), o eixo neutro passa pelo c.g. da secção.

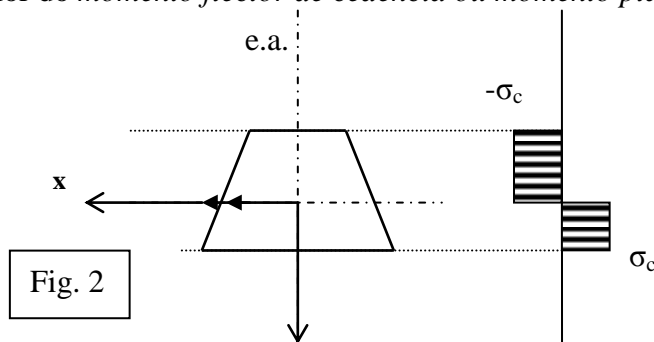


o cálculo do valor de M_e pode ser encontrado recorrendo à expressão geral:

$$\sigma_c = \frac{M_e}{I_x} y_{max} \Rightarrow M_e = \frac{I_x}{y_{max}} \sigma_c \Rightarrow |M_e| = \frac{I_x}{|y_{max}|} \times |\sigma_c| \Rightarrow |M_e| = W_x \times |\sigma_c|$$

Para aquelas secções cujo valor de I_x , do módulo de flexão W_x , e a posição do c.g. se encontram em tabelas, o cálculo é imediato. Em todos os outros casos a resolução deste problema passa por determinar a posição do centro de gravidade.

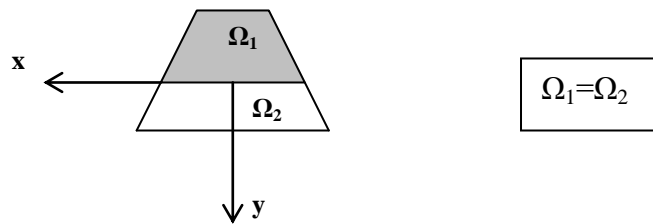
Cálculo do valor do *momento flector de cedência ou momento plástico último*, M_p :



Uma vez que a resultante das tensões na secção tem de ser nula ($N=0$)

$$\int_{\Omega} \sigma_c d\Omega = \int_{\Omega_1} \sigma_c d\Omega - \int_{\Omega_2} \sigma_c d\Omega = 0 \Rightarrow \sigma_c \Omega_1 - \sigma_c \Omega_2 = 0 \Rightarrow \Omega_1 = \Omega_2 = \frac{\Omega}{2}$$

O reposicionamento do eixo neutro divide a área da secção em duas áreas iguais, **não passando, de uma maneira geral pelo centro de gravidade da secção.**



Assim, notar que o sistema de eixos nas figuras 1 e 2 podem não coincidir.

O equilíbrio de momentos na secção, obriga:

$$M_p = \int_{\Omega} \sigma_c y d\Omega = \Omega_1 \sigma_c y_{G1} + \Omega_2 \sigma_c y_{G2} = \frac{\Omega}{2} (y_{G1} + y_{G2}) \sigma_c$$

em que y_{G1} e y_{G2} correspondem à posição dos centros de gravidade, respectivamente de Ω_1 e Ω_2 no referencial da figura 2.

A quantidade:

$$Z = \frac{M_p}{\sigma_c} = \frac{\Omega}{2} (y_{G1} + y_{G2})$$

denomina-se **módulo de flexão plástica**, o qual só depende da geometria da secção.

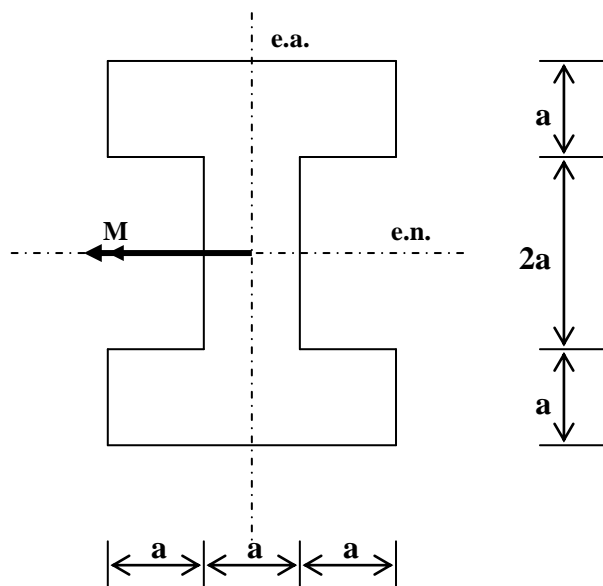
Atendendo à noção de *factor de forma*:

$$\varphi = \frac{M_p}{M_e} = \frac{Z}{W_x}$$

O factor de forma é o cociente entre o módulo de flexão plástica e o módulo de flexão elástica.

5.1. Problemas resolvidos

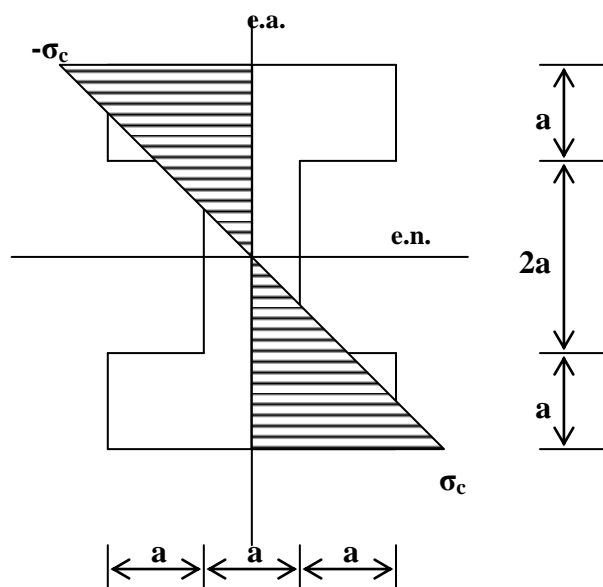
P5.1) Admitamos a peça feita de material elástico – perfeitamente plástico, cuja secção está representada na figura, sujeita a uma flexão circular recta, como indicado.



- Qual o valor limite para o momento flector em regime elástico? Qual a curvatura da peça neste altura?
- Qual o valor de momento flector que ocasiona a plastificação dos banzos? Qual a curvatura da peça neste altura?
- Qual o valor de momento flector que ocasiona a plastificação completa da secção? Qual o valor do factor de forma?
- Se a peça for descarregada a partir do momento flector calculado em b), calcule o valor da curvatura residual.

Resolução:

a)



Atendendo à expressão geral:

$$M_e = \sigma_c \frac{I_n}{y_{\max}}$$

Na expressão anterior, I_n é o momento de inércia da secção em relação ao eixo neutro, o qual pode ser calculado, atendendo aos teorema das secções compostas e ao teorema de Steiner. O resultado é:

$$I = \frac{44}{3} a^4$$

Uma vez que $y_{\max} = 2a$, substituindo:

$$M_e = \frac{22}{3} a^3 \sigma_c$$

Note bem: o resultado anterior também pode ser alcançado a partir do diagrama de distribuição das tensões normais. Para tal há que ter em consideração as diferentes áreas em que as tensões estão aplicadas (alma e banzos).

A curvatura pode ser obtida da expressão geral:

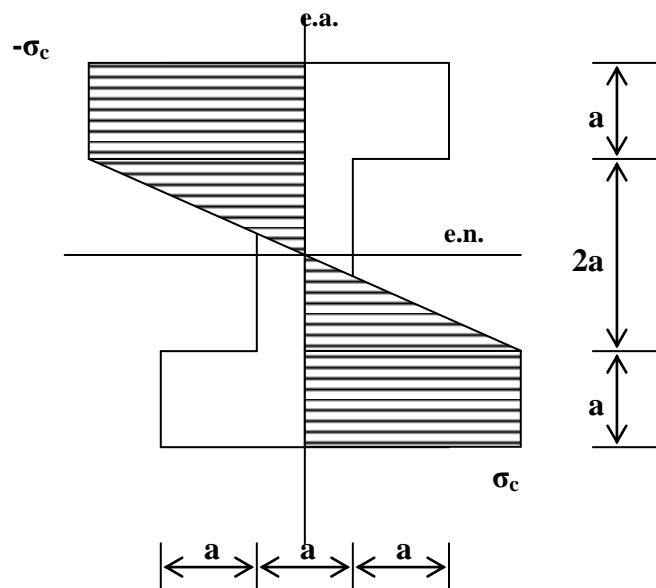
$$\frac{1}{\rho_e} = \frac{\sigma_c}{y_{\max} E}$$

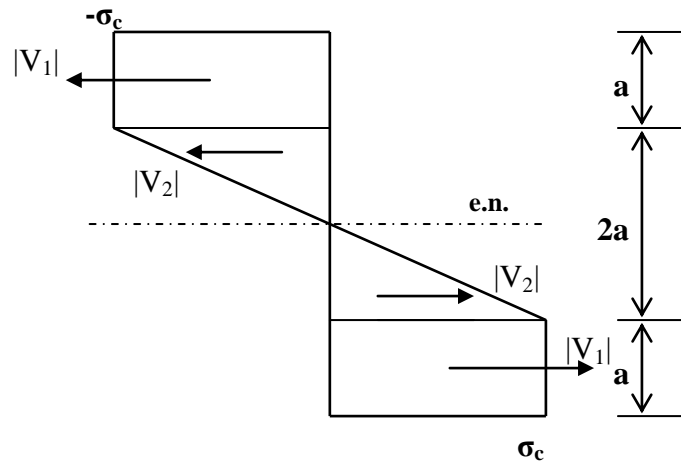
ou seja:

$$\frac{1}{\rho_e} = \frac{\sigma_c}{2aE}$$

b)

A partir do seguinte diagrama, pode conhecer-se o momento pretendido:





$$|V_1| = 3a \times a \times \sigma_c = 3a^2 \sigma_c$$

$$|V_2| = a \times \frac{a \times \sigma_c}{2} = \frac{a^2 \sigma_c}{2}$$

$$M = |V_1| \times \left(\frac{3}{2} a \times 2 \right) + |V_2| \times \left(\frac{2}{3} a \times 2 \right) = \frac{29}{3} a^3 \sigma_c$$

As fibras da peça de valores de y (alma) contidas no intervalo de $\pm a$, continuam em deformação com comportamento elástico linear. Recorrendo à expressão geral:

$$\sigma = \frac{Ey}{\rho}$$

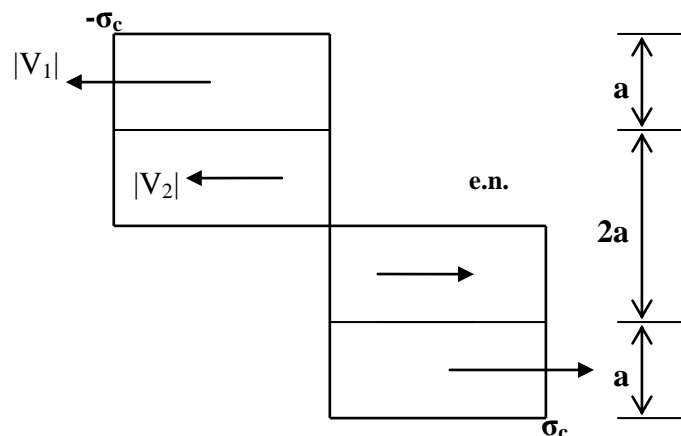
Para $y = a$, então $\sigma = \sigma_c$:

$$\sigma_c = \frac{Ea}{\rho}$$

Assim, a curvatura da peça quando os bantos estiverem em comportamento plástico, será um arco de circunferência com curvatura:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sigma_c}{aE}$$

c)



$$|V_1| = 3a \times a \times \sigma_c = 3a^2 \sigma_c$$

$$|V_2| = a \times a \times \sigma_c = a^2 \times \sigma_c$$

$$M_p = |V_1| \times \left(\frac{3}{2} a \times 2\right) + |V_2| \times \left(\frac{1}{2} a \times 2\right) = 10a^3 \sigma_c$$

O factor de forma:

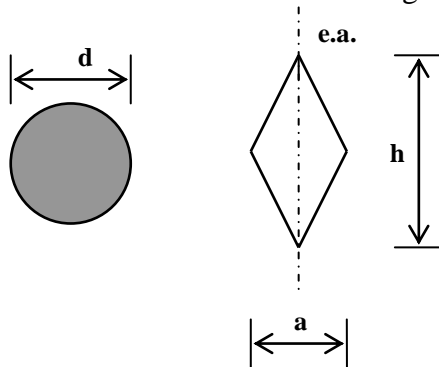
$$\varphi = \frac{M_p}{M_e} = \frac{10a^3 \sigma_c}{\frac{22}{3} a^3 \sigma_c} \approx 1.364$$

d)

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)_{residual} = \left(\frac{1}{\rho}\right)_{c\ arg\ a} - \frac{M}{EI}$$

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)_{residual} = \frac{\sigma_c}{aE} - \frac{\frac{29}{3} a^3 \sigma_c}{\frac{44}{3} a^4 E} = \frac{15}{44} \frac{\sigma_c}{aE}$$

P5.2) Determinar o factor de forma das seguintes secções:



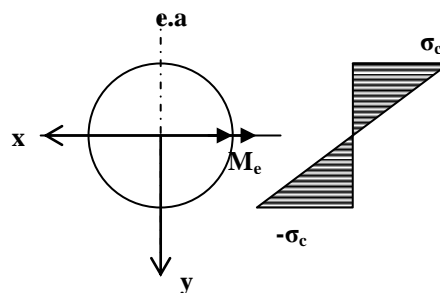
Solução:

Secção circular: $\varphi = 16/(3\pi) \approx 1.7$

Secção em losango $\varphi = 2$

Resolução para o caso da secção circular:

Determinação do momento flector limite da fase elástica (M_e)



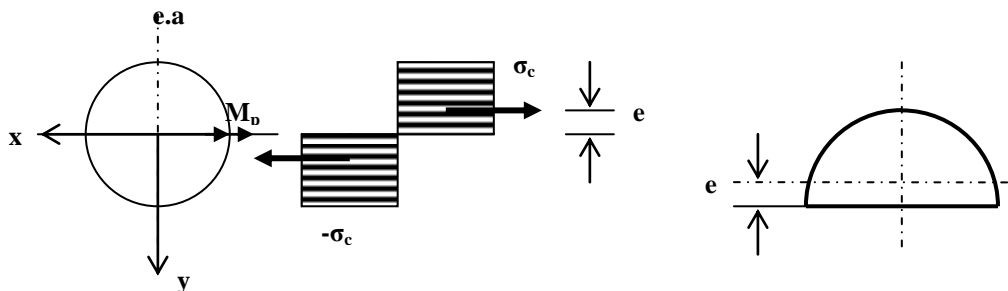
Atendendo à fórmula geral da flexão:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x = |M| \left(\frac{\cos \alpha}{I_x} y - \frac{\sin \alpha}{I_y} x \right)$$

Uma vez que $\alpha = 180^\circ$ e que a tensão nas fibras mais afastadas será a tensão de cedência, fica:

$$\sigma_c = -\frac{|M_e|}{I_x} y_{\max} = -\frac{|M_e|}{\frac{\pi d^4}{64}} \left(-\frac{d}{2}\right) = \frac{32|M_e|}{\pi d^3} \Rightarrow M_e = \frac{\pi d^3 \sigma_c}{32}$$

Determinação do momento flector de cedência ou momento plástico (M_p)



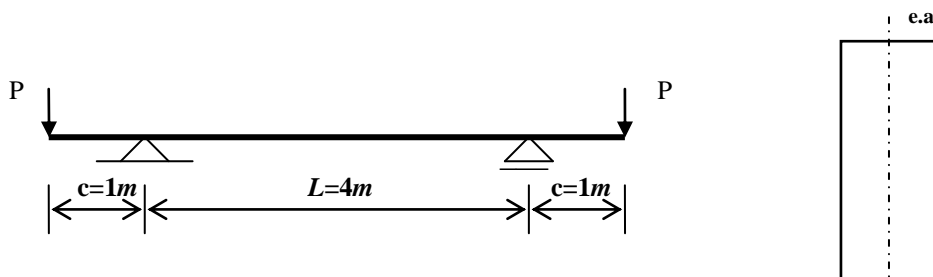
$$M_p = \sigma_c \frac{\pi \frac{d^2}{4} (2e)}{2}$$

$$e = \frac{2d}{3\pi} \quad (\text{tabelas técnicas})$$

$$M_p = \sigma_c \frac{d^3}{6}$$

$$\varphi = \frac{M_p}{M_e} = \frac{16}{3\pi} \approx 1.7$$

P5.3) A viga simplesmente apoiada (*simply supported beam*) tem aplicadas acções cujos valor de cálculo é P:



Admita que a viga tem secção rectangular $b=3\text{cm} \times h=9\text{cm}$; Admita um material com as seguintes características: $\sigma_c = 230\text{MPa}$; $E = 200\text{GPa}$

Despreze o efeito do esforço transversal e do peso próprio

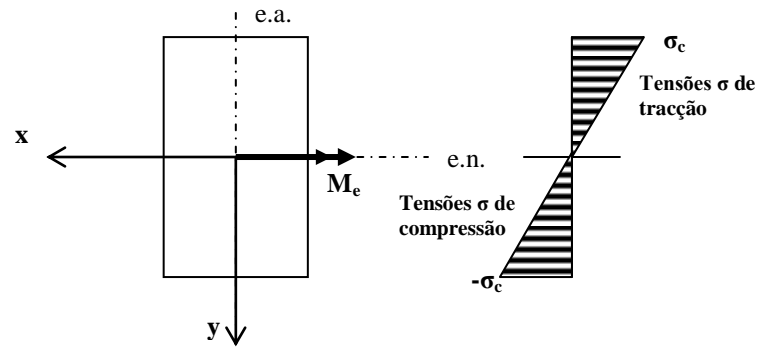
- Calcular P ao qual é atingido o limite de comportamento elástico à flexão da barra;
- Determine a flecha (δ_e) da barra quando $P = P_e$
- Determine a carga limite correspondente à plastificação da barra, atendendo a que o factor de forma da secção rectangular é 1.5;
- Admita que $P=13\text{kN}$, determine a flecha da barra.

Resolução:

A barra está sujeita a flexão circular recta com momento $|M|=P \times c$.

As tensões normais, em flexão circular obedecem à seguinte expressão:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$$



Uma vez que $\alpha = 180^\circ$ e que a tensão nas fibras mais afastadas será a tensão de cedência, fica:

$$\sigma_c = -\frac{|M_e|}{I_x} y_{\max} = -\frac{|M_e|}{I_x} \left(-\frac{h}{2}\right)$$

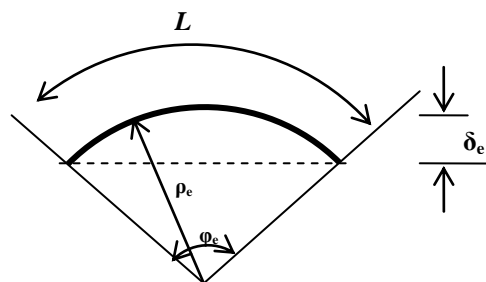
ou seja:

$$|M_e| = P_e \times c = \frac{2I_x \sigma_c}{h}$$

$$P_e = \frac{2I_x \sigma_c}{hc}$$

Resposta: $P_e = 9.3 \text{ kN}$

b)



Atendendo à expressão geral da curvatura em flexão circular recta:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_x}$$

Para $M = M_e$

$$\frac{1}{\rho_e} = \frac{M_e}{EI_x}$$

Substituindo pelo valor encontrado para M_e na alínea anterior:

$$\frac{1}{\rho_e} = \frac{2\sigma_c}{hE}$$

A fibra neutra da barra é um arco de circunferência de comprimento L e raio ρ_e , pelo que se pode estabelecer a relação geométrica com o ângulo ao centro φ_e (radianos):

$$L = \varphi_e \times \rho_e$$

Assim o ângulo ao centro φ_e (radianos):

$$\varphi_e = \frac{L}{\rho_e} = \frac{2\sigma_c L}{hE}$$

Da figura pode agora concluir-se,

$$\delta_e = \rho_e - \rho_e \cos \frac{\varphi_e}{2} = \rho_e \left(1 - \cos \frac{\varphi_e}{2} \right)$$

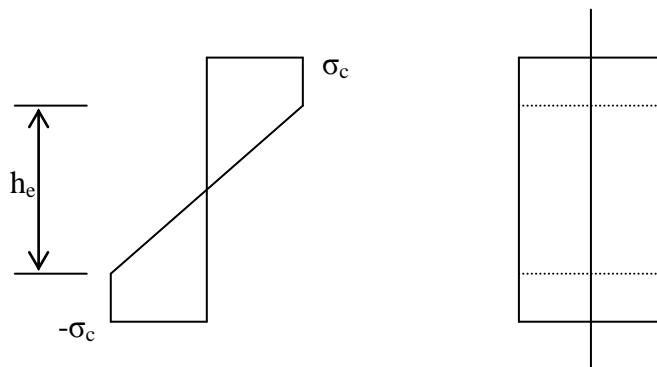
Note bem: para a expressão anterior o ângulo ao centro φ_e **necessita de ser convertido de radianos para graus.**

Resposta $\delta_e = 5.11 \text{ cm}$

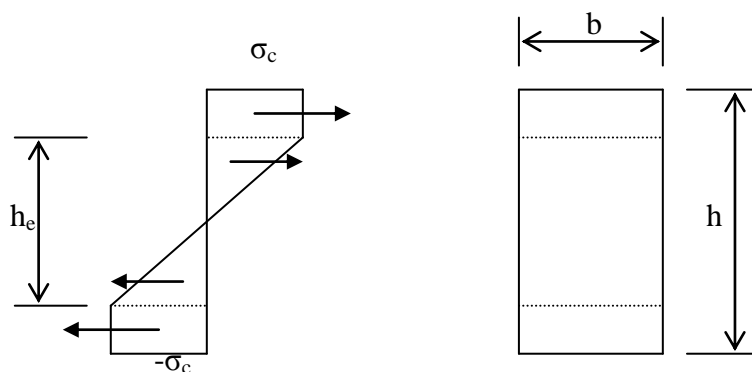
c) $M_p = 1.5M_e \rightarrow P_p \times c = 1.5P_e \times c \rightarrow P_p = 1.5P_e$

Resposta: $P_p = 13.95 \text{ kN}$

d) Temos que determinar a curvatura da peça. Para tal necessitamos de conhecer a faixa h_e de secção que ainda se encontra na fase elástica:



Admitamos o seguinte diagrama de distribuição de tensões normais na secção, o qual mostra que as fibras da peça afastadas mais do que $h_e/2$ do eixo neutro se encontram em deformação plástica:



Para o caso da secção quadrangular, fica:

$$M = \left(\frac{h-h_e}{2} \times b\sigma_c \right) \times \left(h_e + \frac{h-h_e}{2} \right) + \left(\frac{b\sigma_c \times \frac{h_e}{2}}{2} \right) \times \left(2 \times \frac{2}{3} \times \frac{h_e}{2} \right)$$

$$M = \frac{b\sigma_c}{4} \left(h^2 - \frac{1}{3}h_e^2 \right)$$

$$h_e = \sqrt{3 \times \left(h^2 - \frac{4M}{b\sigma_c} \right)}$$

Uma vez que o momento $M = P \times c = 13 \text{ kNm}$, substituindo valores obtém-se:

$$h_e = 0.041 \text{ m} = 4.1 \text{ cm}$$

As fibras da peça contidas no intervalo de $\pm h_e/2$, de valores de y , continuam em deformação com comportamento elástico linear, então:

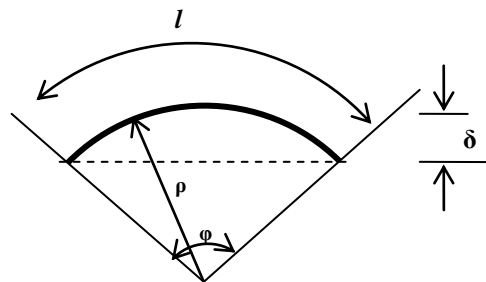
$$\sigma = \frac{E y}{\rho}$$

Em particular: $\sigma_c = \frac{E \frac{h_e}{2}}{\rho}$

Assim a peça continua um arco de circunferência com curvatura:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2\sigma_c}{h_e E}$$

Atendendo a que:



Repetindo o raciocínio da alínea b):

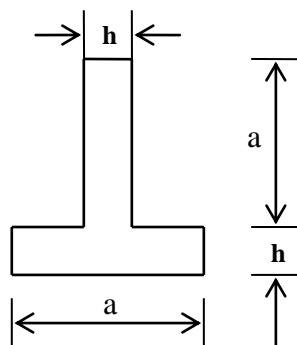
$$\delta = \rho - \rho \cos \frac{\varphi}{2} = \rho \left(1 - \cos \frac{\varphi}{2} \right) \quad (\varphi \text{ em graus})$$

Sendo φ dado pela expressão

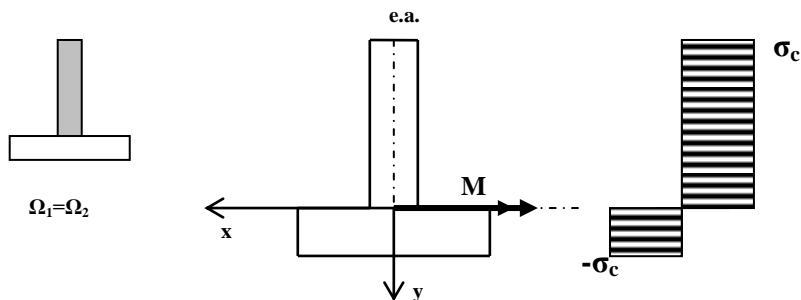
$$\varphi = \frac{l}{\rho} = \frac{2\sigma_c l}{h_e E} \quad (\varphi \text{ em radianos})$$

Resposta $\delta = 11.2 \text{ cm}$

P5.4) Determinar o *momento flector de cedência ou momento plástico último*, M_p , e o *módulo de flexão plástica*, Z , para secção **T** da figura seguinte:



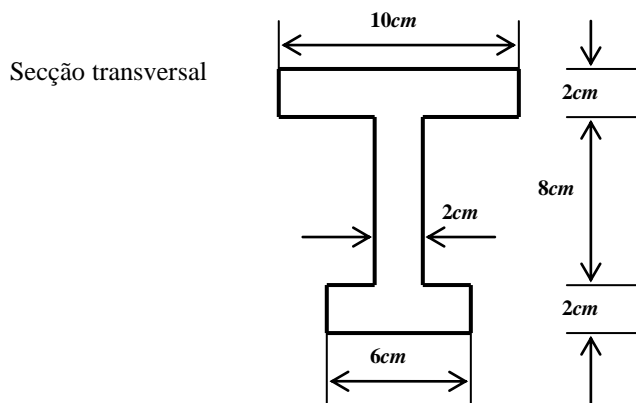
Resolução:



$$M_p = \sigma_c \times a \times h \times \frac{a}{2} + \sigma_c \times a \times h \times \frac{h}{2}$$

$$M_p = \sigma_c ah \left(\frac{a+h}{2} \right) \quad Z = ah \left(\frac{a+h}{2} \right)$$

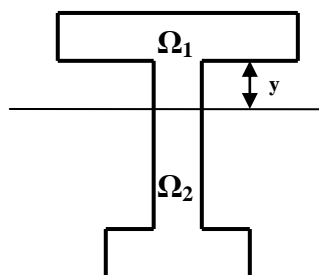
P5.5) Admita uma peça cuja secção está representada na figura seguinte, sujeita a uma flexão circular recta.



Admitindo:

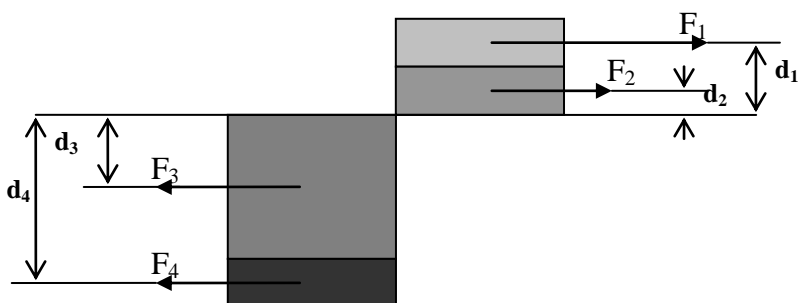
- Peça feita de material elástico - perfeitamente plástico, quer à tracção, quer à compressão, com uma tensão de cedência de 240MPa;

a) Calcule o momento plástico.



$$\Omega_1 = 100 \times 20 + 20 \times y \quad \Omega_2 = 60 \times 20 + 20 \times (80 - y)$$

$$\Omega_1 = \Omega_2 \Rightarrow y = 20 \text{ mm}$$



$$F_1 = (10 \times 2) \times 10^{-4} \times 240 \quad F_2 = (2 \times 2) \times 10^{-4} \times 240 \quad F_3 = (2 \times 6) \times 10^{-4} \times 240$$

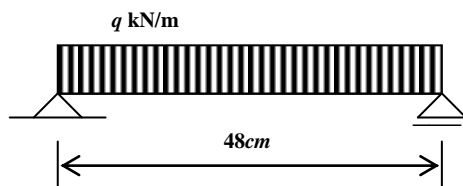
$$F_4 = (6 \times 2) \times 10^{-4} \times 240 \quad d_1 = 30 \text{ mm} \quad d_2 = 10 \text{ mm} \quad d_3 = 30 \text{ mm} \quad d_4 = 70 \text{ mm}$$

$$F_1 \times d_1 + F_2 \times d_2 + F_3 \times d_3 + F_4 \times d_4 = 44.16 \text{ kNm}$$

5.2. Problemas de aplicação

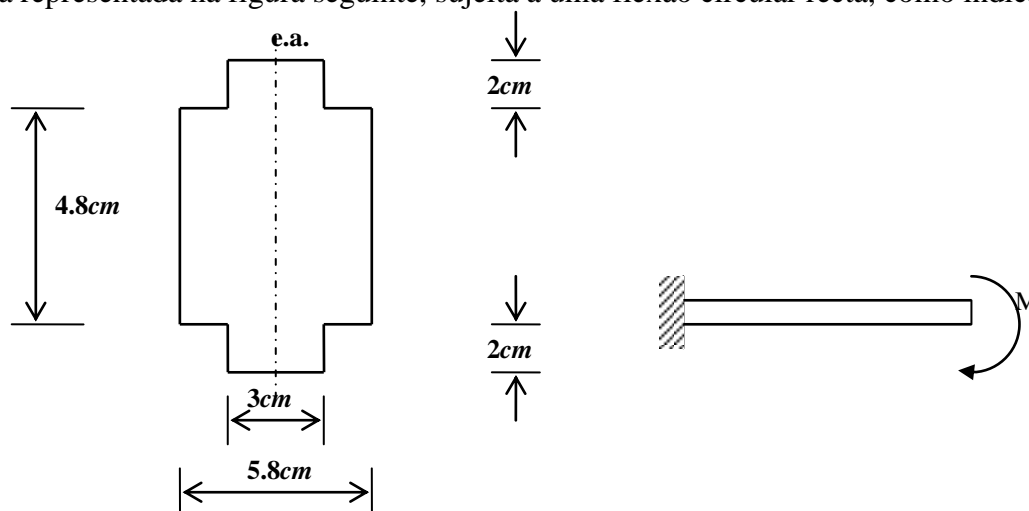
P5.5) Para a barra de secção quadrada de 3cm de lado, assumindo uma tensão de cedência de 230MPa, determine:

- A carga q em que se atinge o limite de comportamento elástico à flexão da barra.
- Tendo em consideração que o factor de forma da secção é 1.5, determine a carga limite que plastifica totalmente a secção.



Solução: $q_e = 35.93 \text{ kN/m}$; $q_p = 53.9 \text{ kN/m}$

P5.6) Admita uma peça feita de material elástico - perfeitamente plástico, cuja secção está representada na figura seguinte, sujeita a uma flexão circular recta, como indicado.

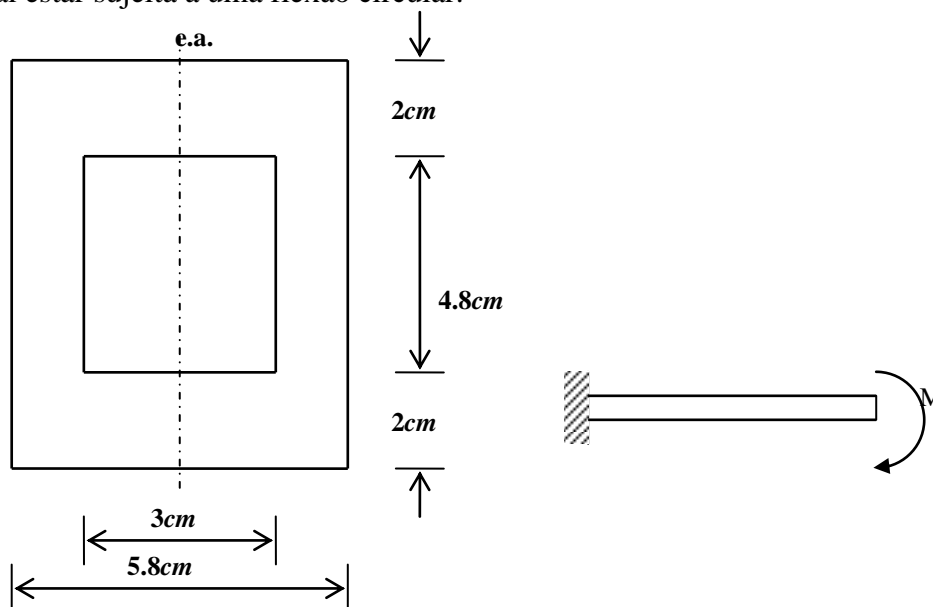


Admitindo para o material uma tensão de cedência de 300MPa , calcule:

- Determine o valor do momento elástico (M_e);
- Determine o valor de momento flector que promove a plastificação de todas as fibras situadas a uma distância igual ou superior a 2.4cm do eixo neutro.

Solução: a) 13.37kNm ; b) 18.92kNm

P5.7) Uma viga com a secção transversal da figura é feita de um material elástico - perfeitamente plástico cujo valor da tensão de cedência é $\sigma_c = 300\text{MPa}$. Admita que a viga vai estar sujeita a uma flexão circular.

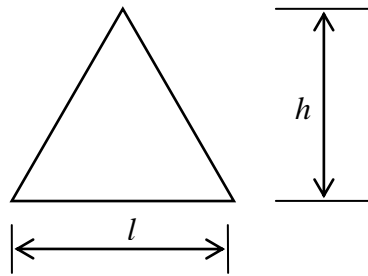


Calcule:

- O momento elástico M_e ;
- Determine o valor de momento flector que promove a plastificação de todas as fibras situadas a uma distância igual ou superior a 2.4cm do eixo neutro.

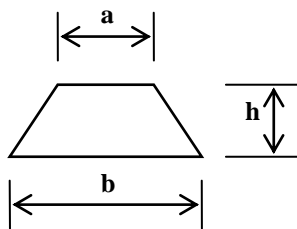
Solução: a) 20.57kNm ; b) 26.9kNm

P5.8) Determinar factor de forma da secção em forma de triângulo equilátero:



Nota: Para a resolução do problema, ter em consideração:

- Numa secção triangular $I_x = \frac{lh^3}{36}$
- Numa secção trapezoidal isósceles



$$\text{área} = \frac{a+b}{2} \times h \quad \text{Distância (d) do c.g. à base b}$$

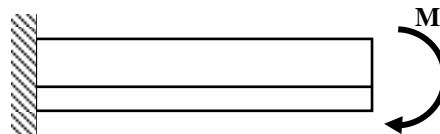
$$d = \frac{b+2a}{3(a+b)} h$$

Solução: $\varphi = 2.343$

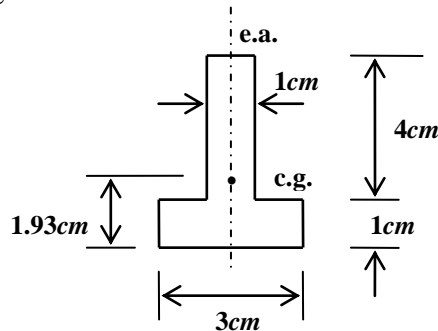
6. Caderno de problemas de momento flector

6.1. Flexão circular

1) Uma viga em consola tem aplicado um momento M como se mostra na figura:



Admitindo a secção a seguir indicada:



a) Calcule o valor máximo do momento M de forma a que tensão normal de **compressão** não ultrapasse 80MPa;

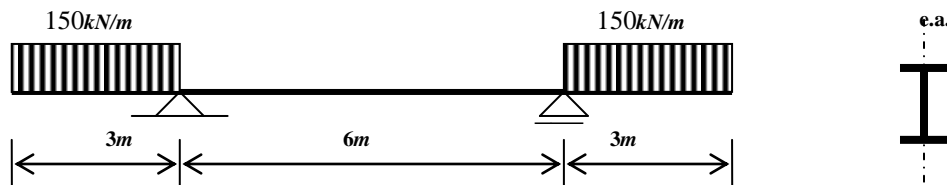
b) Para o valor de momento da alínea anterior, trace o diagrama das tensões normais na secção, indicando o valor das tensões máximas.

Solução: a) $|M| \leq 675.55 Nm$; b) $\sigma_{max. trac} = 127.25 MPa$; c) $\sigma_{max. comp} = -80 MPa$

6.2. Flexão circular desviada

2) A barra da figura é um perfil IPN600:

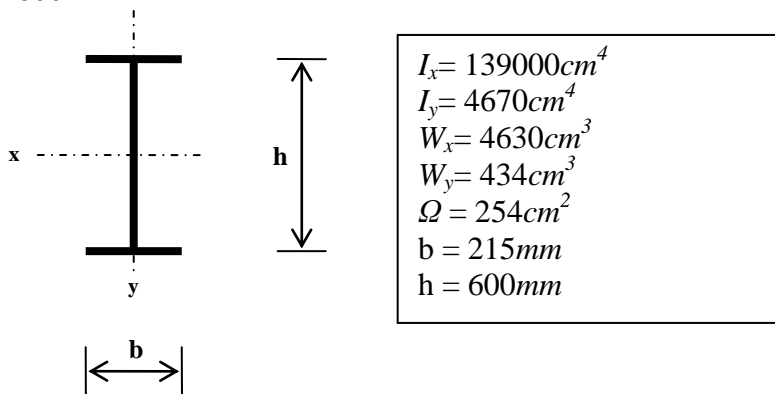
a) Trace o diagrama de distribuição das tensões normais na secção a meio-vão;



b)

Admitindo que o eixo da acção está agora rodado de 3° no sentido contrário dos ponteiros do relógio, determine o valor da tensão máxima na secção.

INP600

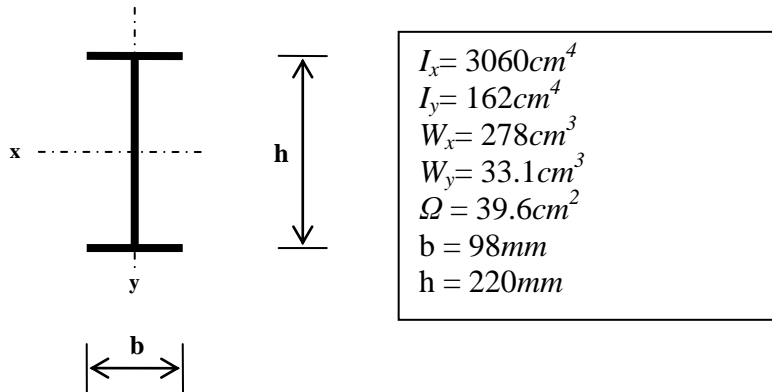


Solução: a) Tracção $\sigma_{max} = 145.7 MPa$; Compressão $\sigma_{max} = 145.7 MPa$; b) Tracção $\sigma_{max} = 226.8 MPa$; Compressão $\sigma_{max} = 226.8 MPa$;

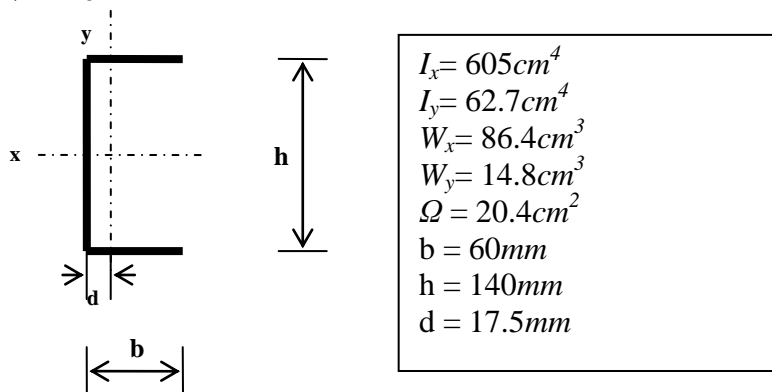
3) Admita que se pretende comparar os dois perfiz indicados na figura seguinte no que respeita flexão circular. Os perfiz são feitos de material com valor de cálculo da tensão resistente $\sigma_{Rd} = 235 MPa$.



INP220



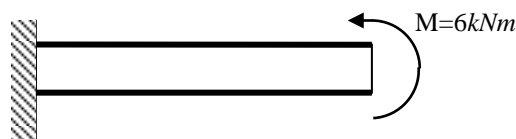
UNP140

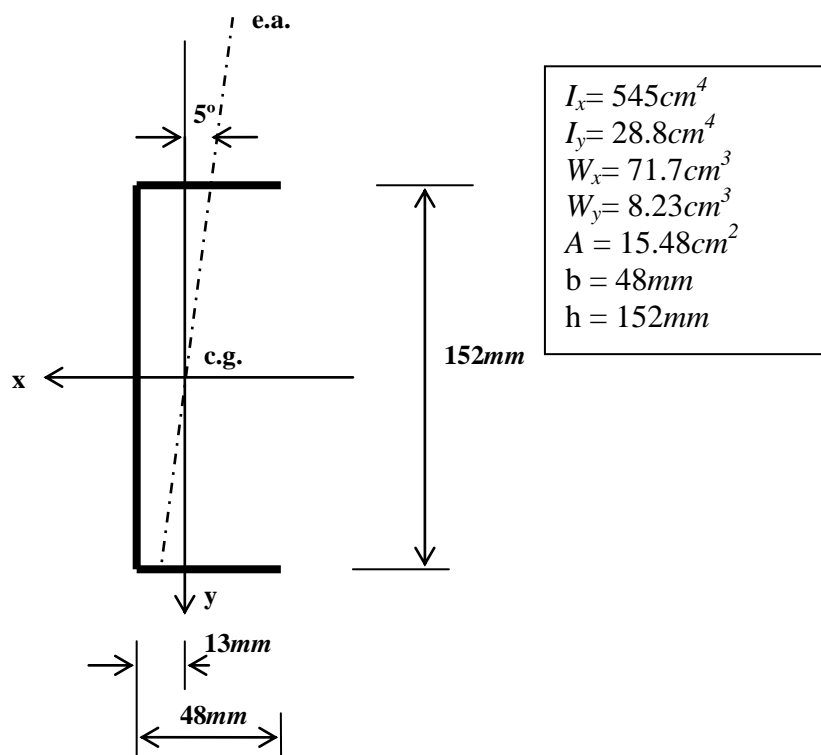


- a) Determine o valor máximo do momento flector permitido em cada um dos perfiz.
 b) Calcule o ângulo θ de desvio do eixo da acção, que iguala os dois perfiz no que respeita à capacidade de resistência à flexão.

Solução: a) Perfil I - $M \leq 65.37 \text{ kNm}$; Perfil \square - $M \leq 40.6 \text{ kNm}$; b) 5.37°

- 4) A figura mostra uma viga em consola cuja acção ($M = 6 \text{ kNm}$) está aplicada como se mostra na figura:

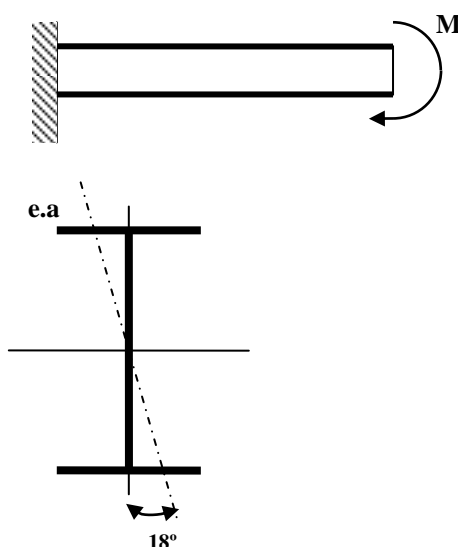




- Num desenho da secção posicione o eixo neutro;
- Calcule o valor máximo da tensão normal de tracção e indique em que ponto da secção se verifica;
- Calcule o valor máximo da tensão normal de compressão e indique em que ponto da secção se verifica;
- Trace o diagrama das tensões normais na secção.

Solução: a) $\beta = 121.13^\circ$; b) $\sigma_{max. trac} = 107 MPa$; c) $\sigma_{max. comp} = -146.9 MPa$

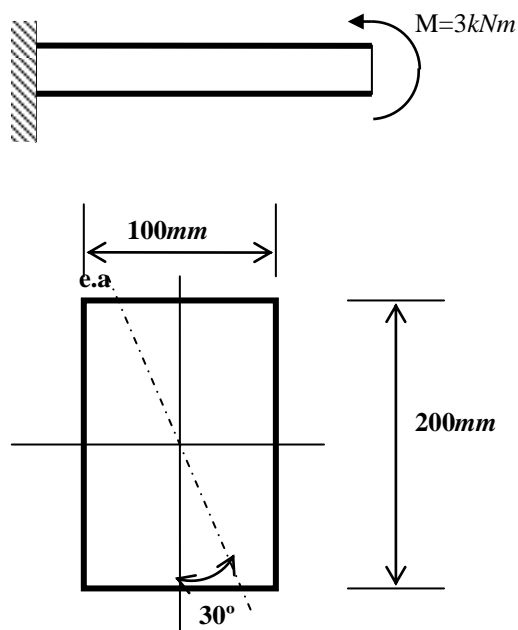
- Uma viga em consola, constituída por um INP26, tem aplicado um momento M como se mostra na figura:



- Calcule o valor máximo do momento M para que tensão normal de compressão não ultrapasse $80 MPa$; Solução: a) $|M| \leq 9.74 kNm$

b) Trace o diagrama das tensões normais na secção.

6) A figura mostra uma viga em consola cujo valor de cálculo da acção ($M = 3kNm$) está aplicada como se mostra na figura:



a) Marque a posição do eixo neutro na secção.

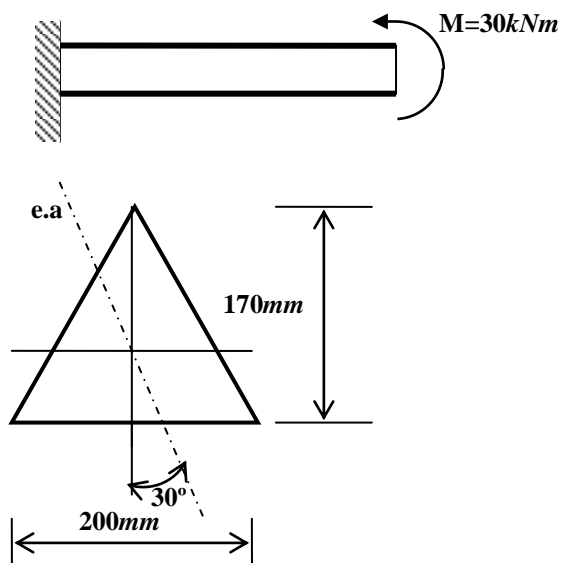
b) Calcule o valor máximo da tensão normal de tracção e indique em que ponto da secção se verifica.

c) Calcule o valor máximo da tensão normal de compressão e indique em que ponto da secção se verifica.

d) Trace o diagrama das tensões normais na secção.

Solução: a) $\beta = 66.59^\circ$; b) $\sigma_{max. trac} = 8.4 MPa$, $(-0.05; 0.1)$; c) $\sigma_{max. comp} = -8.4 MPa$, $(0.05; -0.1)$

7) A figura mostra uma viga em consola cujo valor de cálculo da acção ($M = 30kNm$) está aplicada como se mostra na figura:



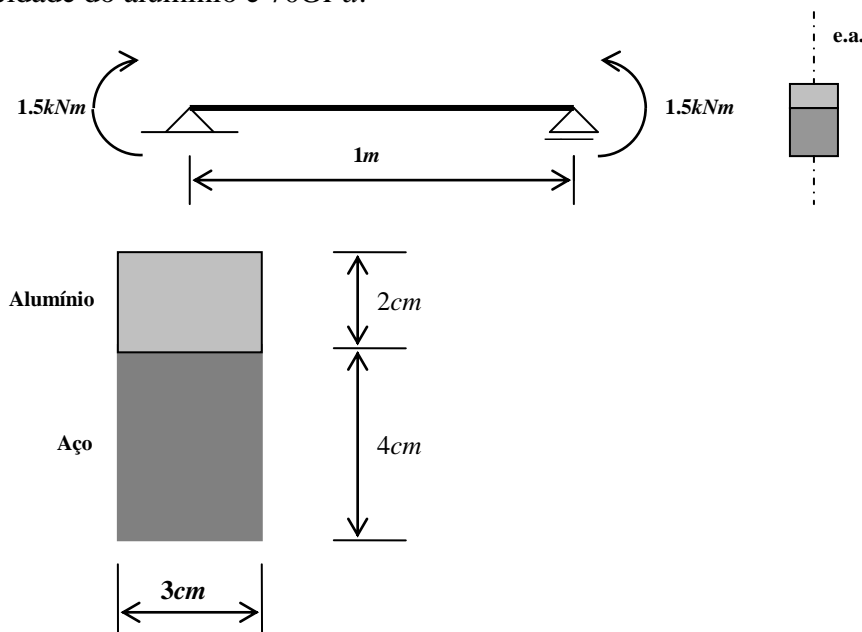
a) Marque a posição do eixo neutro na secção. (2 valores)

- b) Calcule o valor máximo da tensão normal de tracção e indique em que ponto da secção se verifica. (1 valor)
 c) Calcule o valor máximo da tensão normal de compressão e indique em que ponto da secção se verifica. (1 valor)
 d) Trace o diagrama das tensões normais na secção. (2 valores)

Solução: a) $\beta=29.08^\circ$; b) $\sigma_{max. trac}=106.8MPa$, (vértice inferior direito); c) $\sigma_{max. comp}=-107.9MPa$, (vértice superior)

6.3. Flexão circular recta em peças mistas

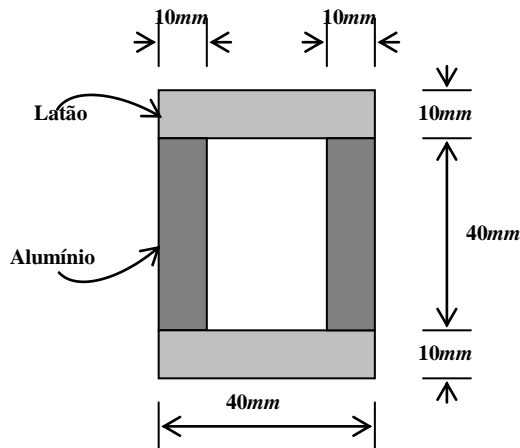
- 8) Uma barra de alumínio e uma barra de aço, são unidas firmemente para formar uma viga mista. Admita que o módulo de elasticidade do aço é $200GPa$ e o módulo de elasticidade do alumínio é $70GPa$.



Trace o diagrama de distribuição das tensões normais na secção.

Solução: a) Aço: $\sigma_{tracção\ max}=112MPa$, $\sigma_{Compressão\ max}=71MPa$; Alumínio: $\sigma_{Compressão\ max}=56.9MPa$, $\sigma_{Compressão\ min}=24.85MPa$

- 9) Duas barras de latão estão unidas firmemente a duas barras de alumínio, formando a secção composta ilustrada:



A qual está solicitada como indicado na figura seguinte:



Admitindo:

Latão - módulo de elasticidade de 105GPa ;

- valor de cálculo para a tensão resistente de 160MPa .

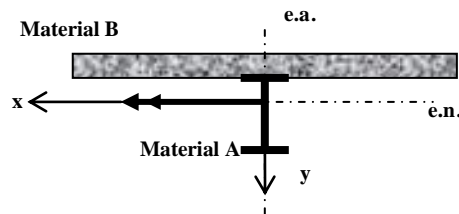
Alumínio - módulo de elasticidade de 70GPa ;

- valor de cálculo para a tensão resistente de 100MPa .

Calcule o máximo para o valor de cálculo da acção aplicada (momento M).

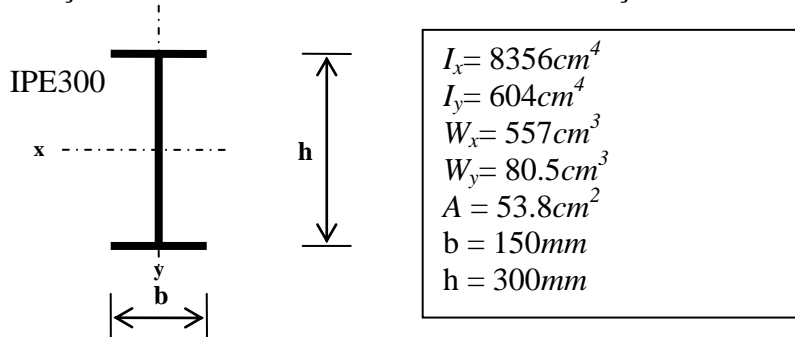
Solução: $M \leq 3.08\text{kNm}$

10) A barra da figura é constituída por dois materiais A e B, com módulos de elasticidade respectivamente: $E_A=210\text{GPa}$ e $E_B=21\text{GPa}$.



Suponha que está sujeita a um momento flector cujo valor de cálculo é 200kNm .

A secção de material B tem $150\text{cm} \times 12\text{cm}$ e a secção do material A é um IPE300.

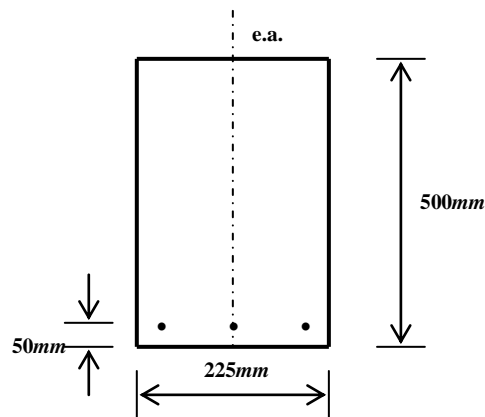


Admita que o material B não resiste à tracção.

- Localize o eixo neutro na secção da peça;
- Determine a distribuição de tensões normais na peça;
- Calcule a tensão máxima.

Solução: Aço $\sigma_{\text{tracção max}} = 217\text{MPa}$; Betão $\sigma_{\text{compressão max}} = 7.5\text{MPa}$

11) Uma viga de betão está reforçada com três varões de aço:



Admitindo:

Betão

- módulo de elasticidade de $20GPa$;
- valor de cálculo para a tensão resistente de $10MPa$.

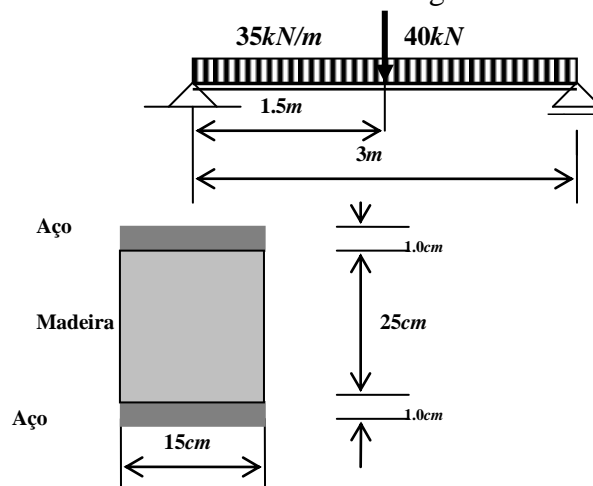
Aço

- Diâmetro dos varões = $24mm$
- módulo de elasticidade de $200GPa$;
- valor de cálculo para a tensão resistente de $150MPa$.

Calcule o máximo valor de cálculo para o momento flector que pode ser aplicado na viga.

Solução: $M \leq 79.09kNm$

12) A viga de madeira reforçada com duas placas de aço está sujeita a cargas cujos valores de cálculo estão indicados na figura.



	Madeira	Aço
Módulo de elasticidade	$13GPa$	$200GPa$
Valor de cálculo da tensão resistente	$12.4MPa$	$165MPa$

Verifique exclusivamente à flexão a segurança da viga.

Solução: a) $\sigma_{Aço \max} = 147.68MPa < 165MPa$, verifica; $\sigma_{Madeira \max} = 8.89MPa < 12.4MPa$, verifica

13) A viga da figura 1 é constituída por um perfil de alumínio reforçado por duas barras de latão colocadas como se indica na secção representada na fig. 2.

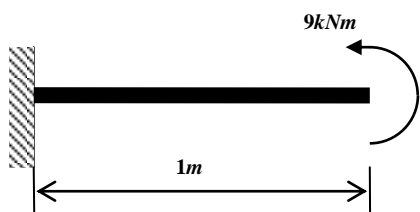


Fig. 1

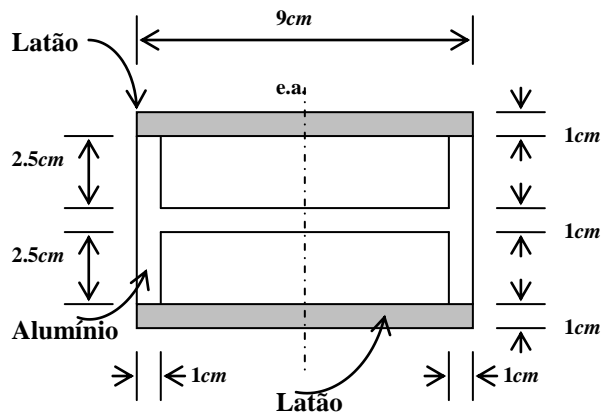


Fig. 2

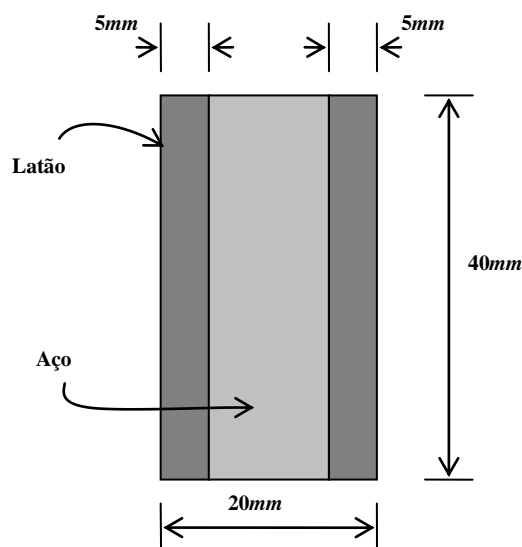
Considere:

	Alumínio	Latão
Módulo de elasticidade	70GPa	105Gpa
Valor de cálculo da tensão resistente	100MPa	160MPa

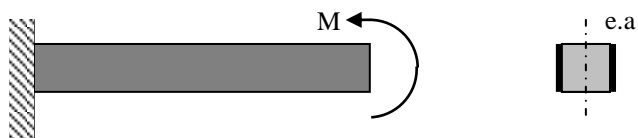
Verifique à flexão a segurança da viga, quer no latão quer no alumínio.(5 valores)

Solução: a) $\sigma_{Alum\ max}=73.05MPa < 100MPa$, verifica; $\sigma_{Latão\ max}=146.1MPa < 160MPa$, verifica

14) Duas barras de latão estão unidas firmemente a uma barra de aço, formando a secção composta ilustrada:



A barra está solicitada como indicado na figura seguinte:



Admitindo:

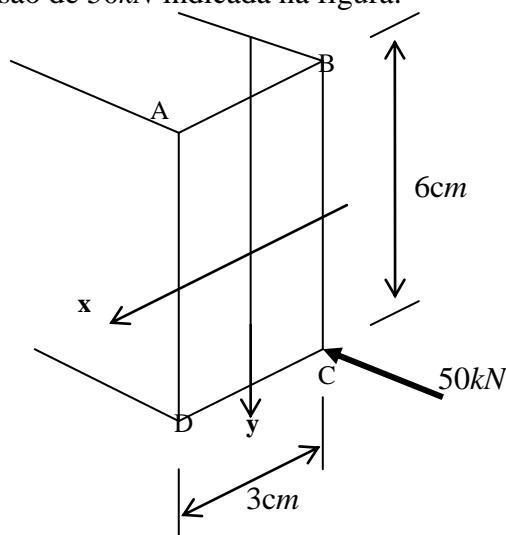
	Aço	Latão
Módulo de elasticidade	200GPa	105GPa
Valor de cálculo da tensão resistente	275MPa	160MPa

Calcule o momento máximo M que se pode aplicar.

Solução: a) $M \leq 1.12 kNm$

6.4. Flexão circular composta

15) O sólido paralelepípedo mostrado na figura encontra-se sujeito a uma força de compressão de 50kN indicada na figura:

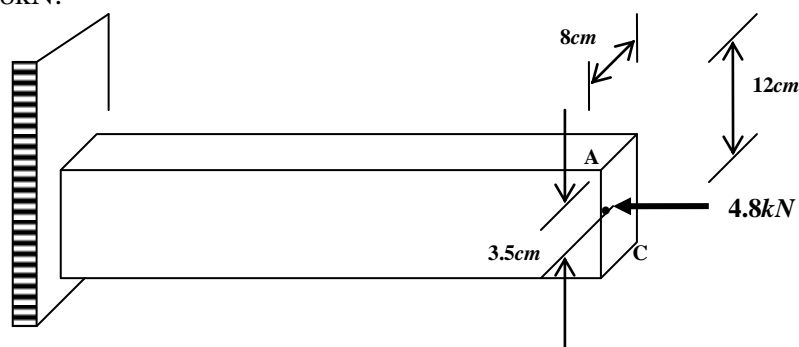


Admita que o comprimento da barra é suficientemente pequeno para eliminar qualquer possibilidade de encurvadura.

- Localize o eixo neutro na secção;
- Trace o diagrama das tensões normais na secção.

Solução: b) $\sigma_C = -194.4 MPa$; $\sigma_A = 138.9 MPa$

16) A viga de madeira de secção indicada na figura está submetida a um esforço axial excêntrico de 4.8kN.

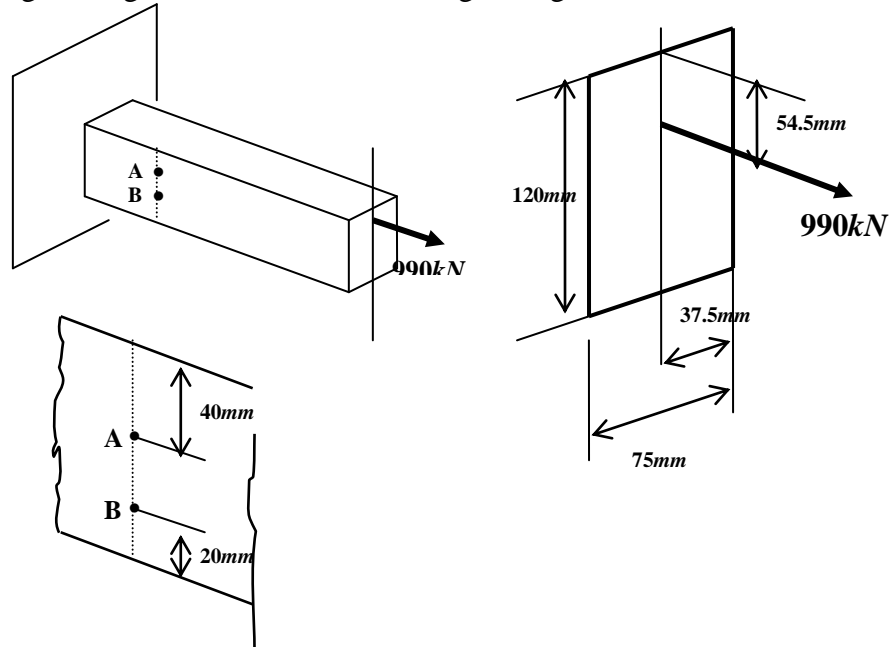


- Determine as tensões nos vértices A e C;

- b) Determine a posição do eixo neutro.
 c) Trace o diagrama das tensões normais na secção.

Solução: a) $\sigma_A = -2.62MPa$; $\sigma_C = 1.62MPa$

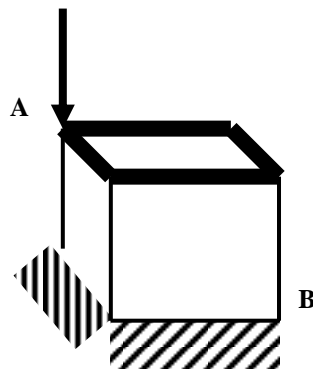
17) Admita a viga carregada como se mostra na figura seguinte:

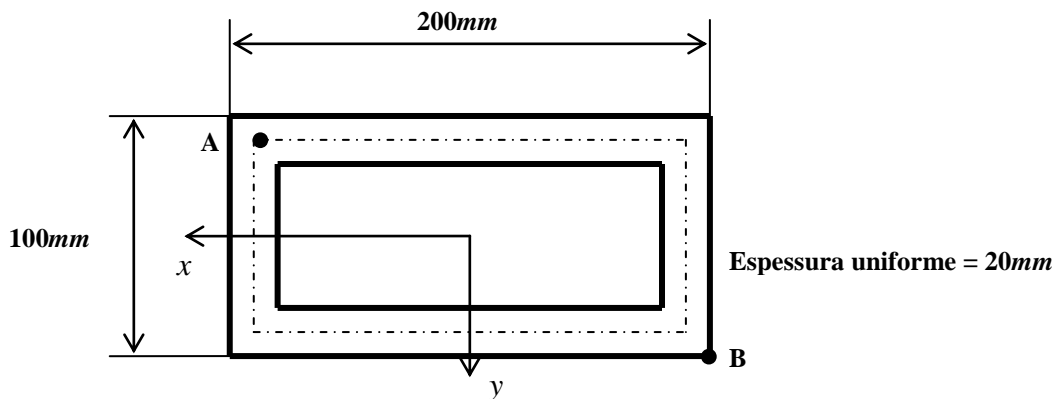


- a) Determine o valor da tensão em A e B;
 b) Prove que não existe na barra qualquer ponto em compressão.

Solução: a) $\sigma_B = 89.83MPa$; $\sigma_A = 120.08MPa$

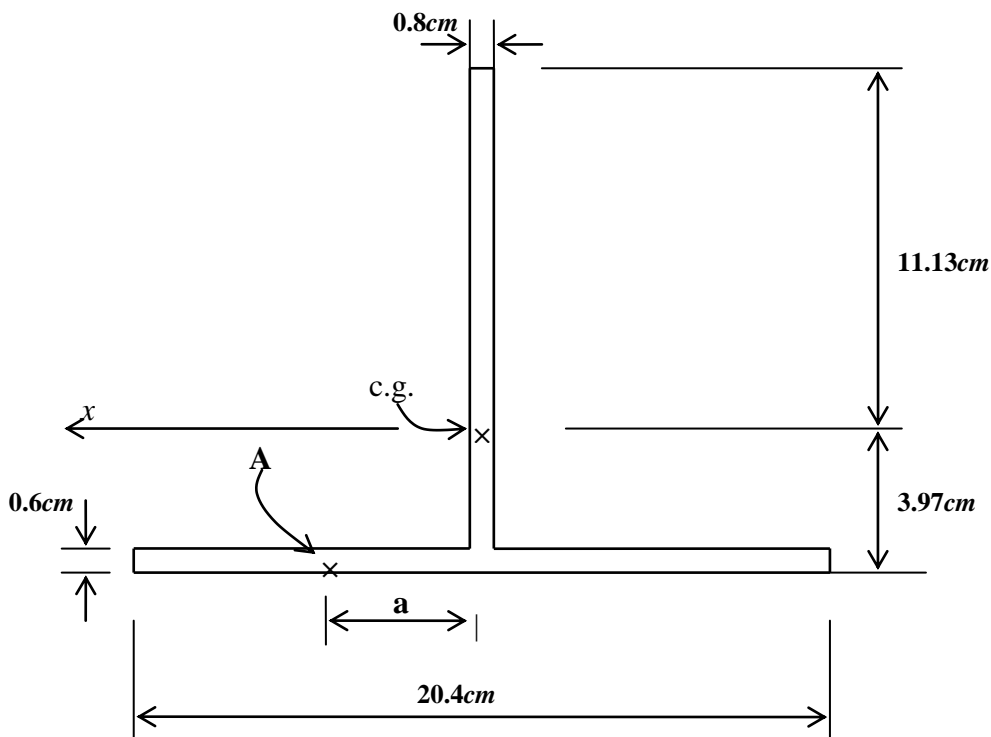
18) Um tubo de secção rectangular com as dimensões da figura é comprimido no ponto A, paralelamente ao eixo, com uma carga de 180kN.





- Calcule a tensão normal no ponto B;
 - Determine a equação do eixo neutro;
 - Trace o diagrama das tensões normais na secção;
 - Determine uma nova posição para a força de compressão, ao longo do eixo de xx, de forma a que não haja tensões de tracção na secção. Utilize a tabela anexa.
- Solução: a) $\sigma_B=43.9MPa$; b) $(0; 33.14mm), (-49.34mm; 0)$; d) $(44.4mm; 0)$

19) A barra de secção T está sujeita a uma carga de **compressão** cujo valor de cálculo é $65kN$. A linha de acção da força passa no ponto A indicado na figura:

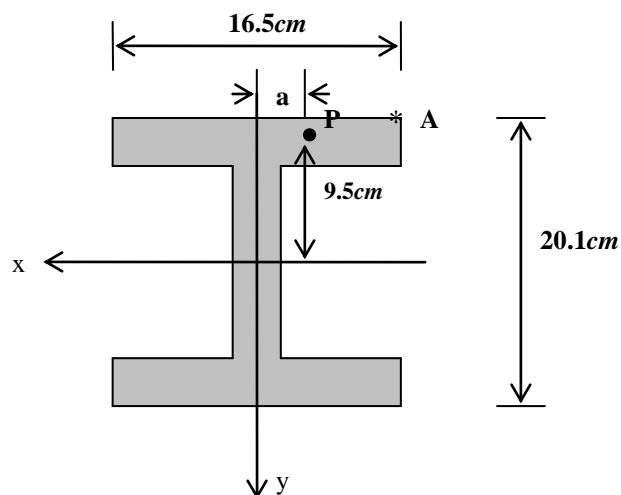


Admita que a área da secção é $23.84cm^2$; $I_x=543.1cm^4$; $I_y=425.1cm^4$

- Para um valor de $a=4.5cm$, posicione na secção o eixo neutro;
- Determine a maior valor que a distância **a** pode ter, para que a tensão máxima de **compressão** na secção não ultrapasse $120MPa$.

Solução: b) $a=4.83cm$

20) Uma barra de aço com a secção transversal indicada na figura está comprimida excentricamente por uma força axial de $150kN$ (perpendicular à secção) aplicada em P.

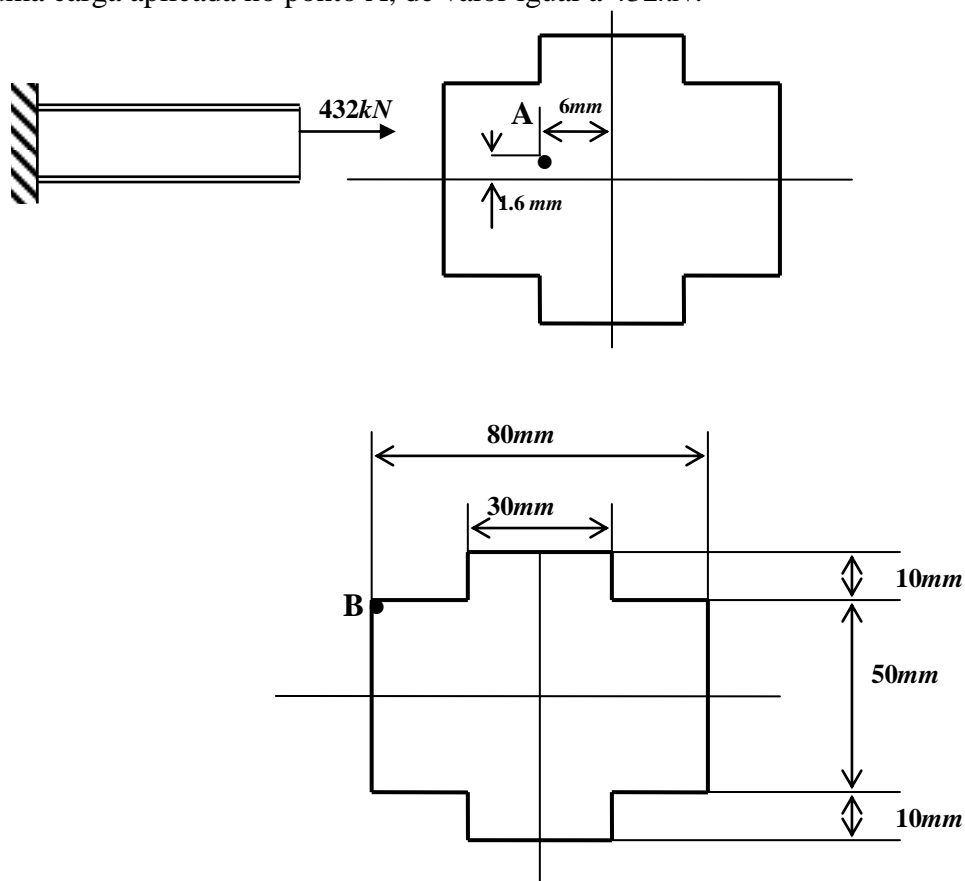


Determine a distância a , para que a tensão de compressão no ponto A não ultrapasse 125MPa .

Dados: $\Omega = 45.7\text{cm}^2$ $I_y = 762\text{cm}^4$ $I_x = 3450\text{cm}^4$

Solução: $a \leq 3.12\text{cm}$

21) Admita a viga encastrada com a secção mostrada na figura, carregada axialmente por uma carga aplicada no ponto A, de valor igual a 432kN :

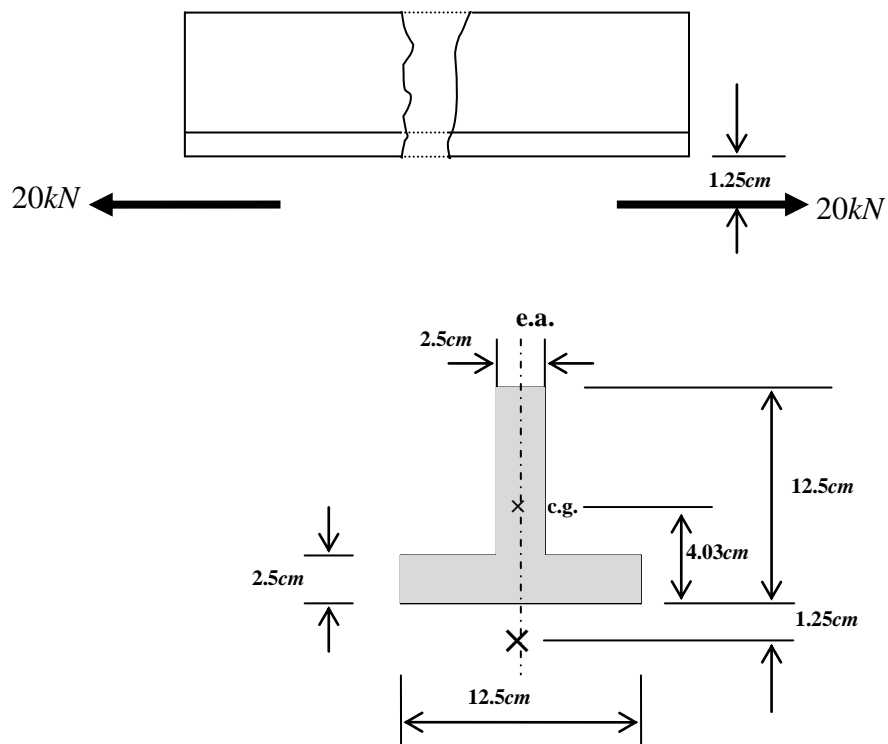


a) Determine o valor da tensão em B;

b) Prove que não existe na barra qualquer ponto em compressão.

Solução: a) $\sigma = 154.06\text{MPa}$

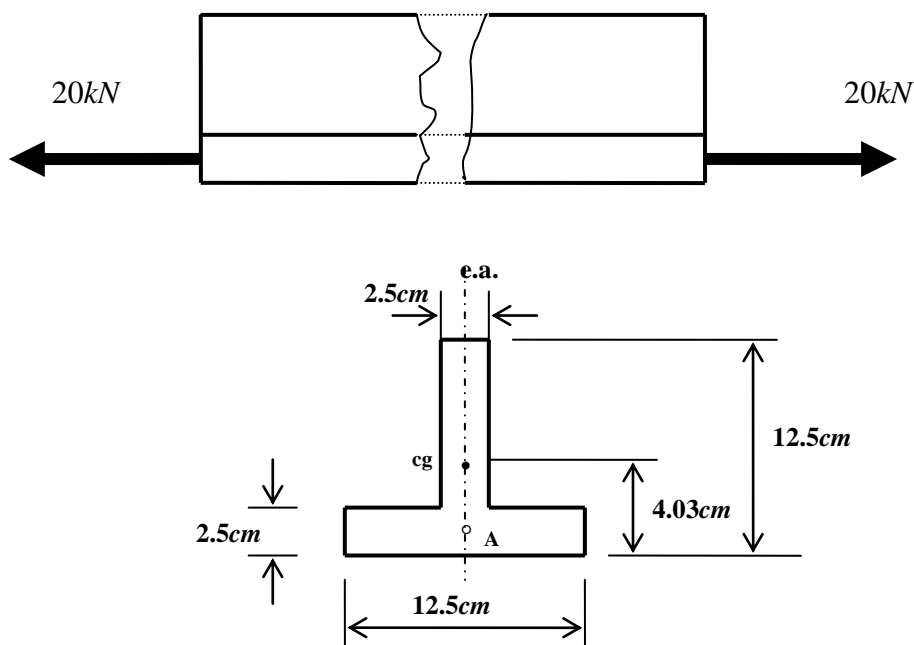
22) A barra de secção T está sujeita a uma carga de tracção cujo valor de cálculo é $20kN$. A linha de acção da força passa $1.25cm$ abaixo da face do banzo, como se mostra na figura:



- a) Determine a equação do eixo neutro e trace-o na secção;
 b) Efectue o diagrama das tensões com a indicação da tensão máxima de compressão e de tracção.

Solução: a) $y=-2.78cm$; b) $\sigma_{max. comp}=-8.1MPa$; $\sigma_{max. trac}=9.1MPa$

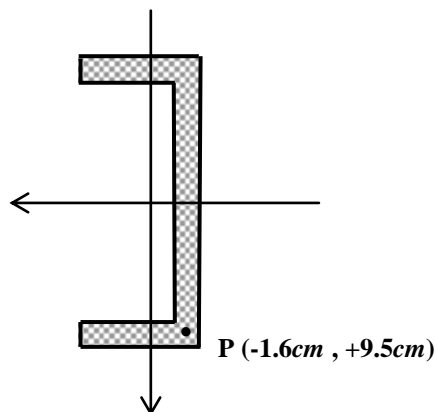
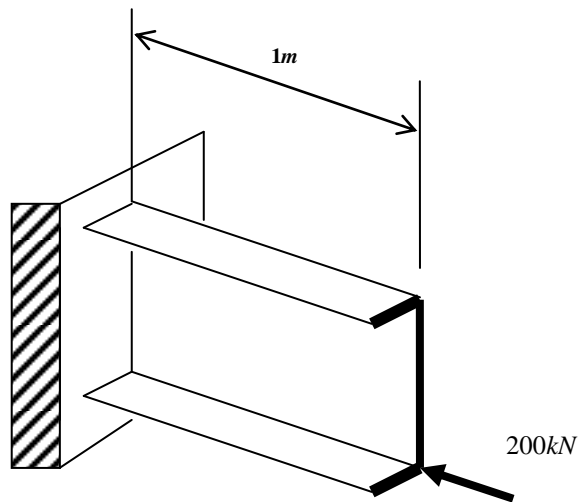
23) A barra de secção T está sujeita a uma carga de tracção cujo valor de cálculo é $20kN$. A linha de acção da força passa a meio do banzo (ponto A), como se mostra na figura:



- Determine a tensão máxima de compressão e de tracção;
- Posicione o eixo neutro na peça;
- Encontre uma nova posição para o ponto A para que a secção só tenha tensões de tracção.

Solução: b) $y = -4.9\text{cm}$; a) $\sigma_{\text{max. comp}} = -2.58\text{MPa}$; $\sigma_{\text{max. trac}} = 6.48\text{MPa}$; (0; 1.61 cm)

24) A viga está sujeita a uma força de compressão de 200kN aplicada perpendicularmente à secção no ponto P indicado na figura:

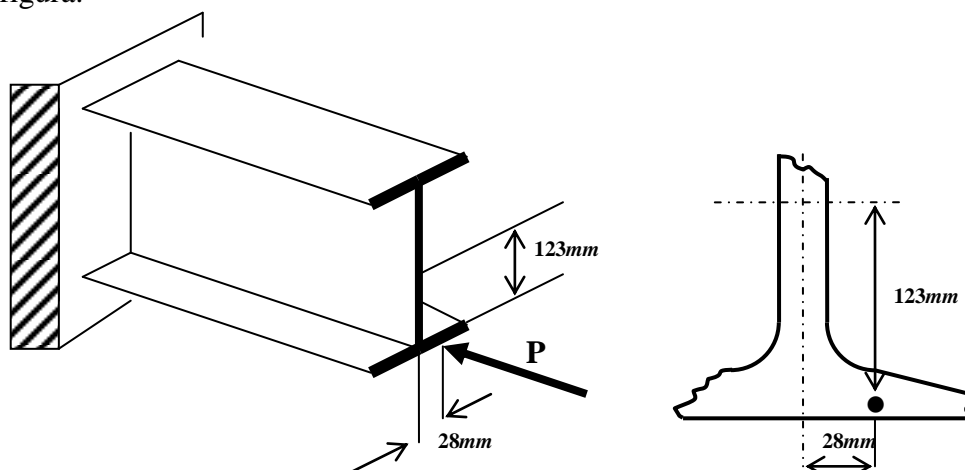


Admita um perfil UNP200 (ver tabela anexa).

- Localize o eixo neutro na secção;
- Trace o diagrama das tensões normais na secção.

Solução: b) $\sigma_{\text{max. comp}} = -205\text{MPa}$; $\sigma_{\text{max. trac}} = 156.1\text{MPa}$

25) Uma viga em consola, constituída por um INP26, tem aplicado uma força P como se mostra na figura:

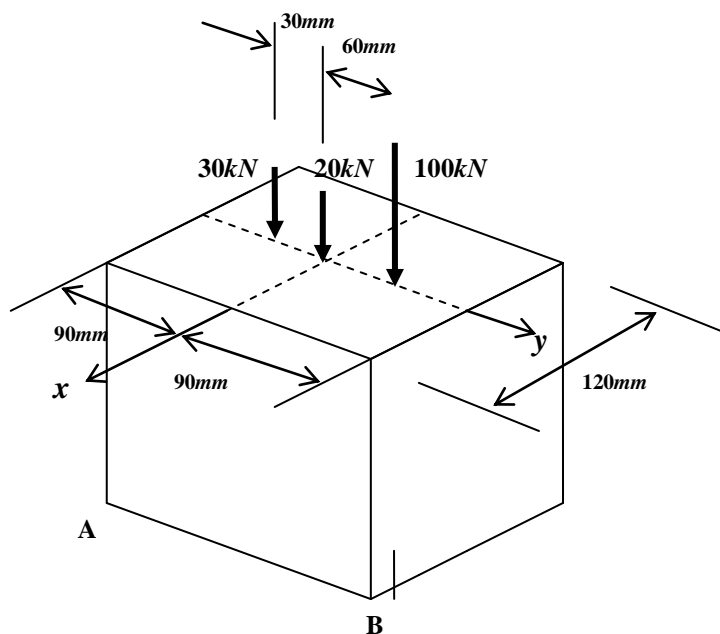


a) Calcule o valor máximo da força P para que a tensão normal de compressão não ultrapasse 80MPa;

b) Trace o diagrama das tensões normais na secção.

Solução: a) $P \leq 78.81 kN$; b) $\sigma_{max. comp} = -80 MPa$; $\sigma_{max. trac} = 5.05 MPa$

26) A coluna está sujeita a três cargas axiais, como se mostra na figura:

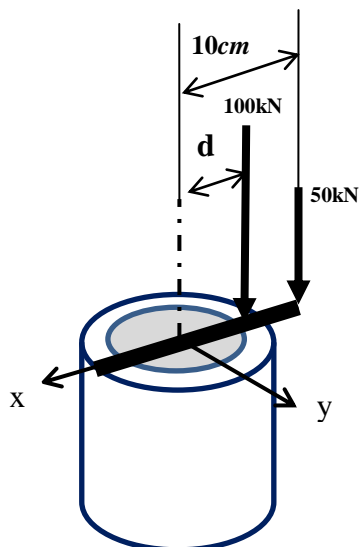


a) Determine a equação do eixo neutro;

b) Determine a tensão no canto A.

Solução: a) $y = -79.4 mm$; b) $\sigma_A = 0.926 MPa$

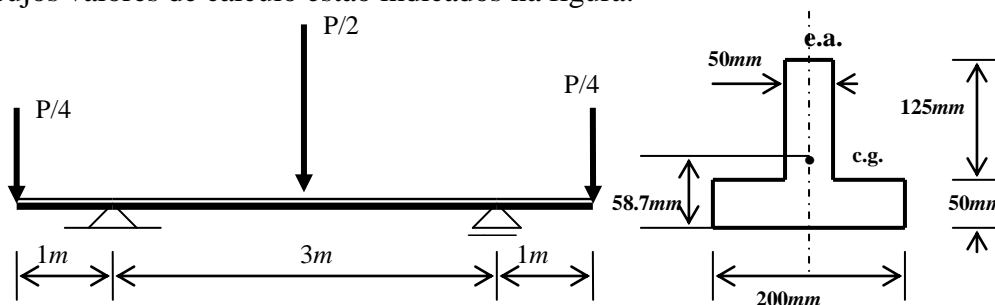
27) Duas forças são aplicadas numa placa rígida suportada por um tubo de aço com 16cm de diâmetro exterior e 13cm de diâmetro interior. Admitindo que a tensão máxima de compressão no tubo não pode ultrapassar 75MPa, calcule o valor máximo para a distância d.



Solução: $d \leq 7.02\text{cm}$

6.5. Flexão simples

28) A viga simplesmente apoiada tem aplicadas acções, nas extremidades e a meio vão, cujos valores de cálculo estão indicados na figura:



Admita um material com os seguintes valores de cálculo da tensão resistente do material:

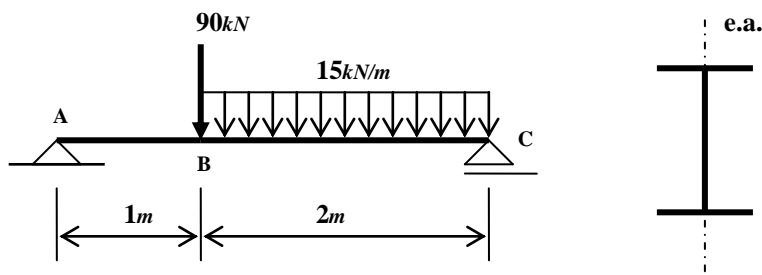
Tracção, $\sigma_{Rd} = 35\text{MPa}$

Compressão, $\sigma_{Rd} = 150\text{MPa}$

Determine o máximo para o valor de cálculo da acção P (capacidade da viga).

Solução: $P \leq 47.75\text{kN}$

29) A viga tem aplicada acções cujos valores de cálculo estão indicados na figura:



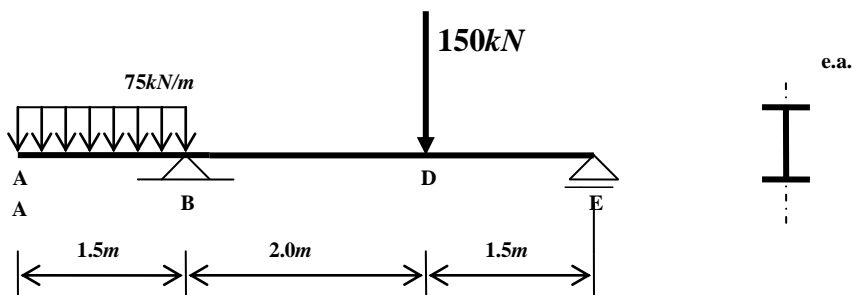
Admita que o valor de cálculo de resistência do material é de $140MPa$, quer em tracção quer em compressão.

a) Trace o diagrama de esforços, localize a secção mais solicitada à flexão e indique o valor do momento flector nessa secção;

b) Dimensione a viga como INP da tabela anexa.

Solução: a) Secção B; $M = +70kNm$; b) $W_x \geq 500cm^3$ (INP280)

30) Considere a viga AE sujeita a acções cujos valores de cálculo se ilustram na figura seguinte:

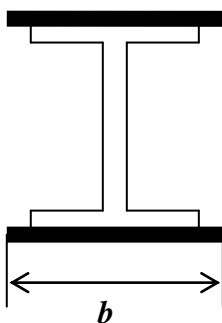


Admita que a secção é um INP e que o valor de cálculo de resistência do material é de $235MPa$, quer em tracção quer em compressão.

a) Trace o diagrama de esforços;

b) Dimensione a viga apenas à flexão. Ver tabela de INP anexa.

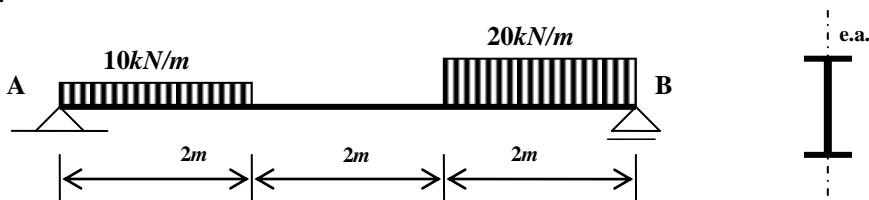
c) Em alternativa pode utilizar o INP situado na tabela anexa, na 2ª posição imediatamente acima do INP que obteve na alínea b), desde que o reforço com chapas de $1cm$ de espessura soldadas no banzos inferior e superior, como indicado na figura seguinte:



Calcule o valor mínimo para a largura b da chapa de reforço.

Solução: a) Secção D; $M = +92.4kNm$; b) $W_x \geq 393.2cm^3$ (INP260); c) $b \geq 6.3cm$

31) Considere a viga sujeita a acções cujos valores de cálculo se ilustram na figura seguinte:

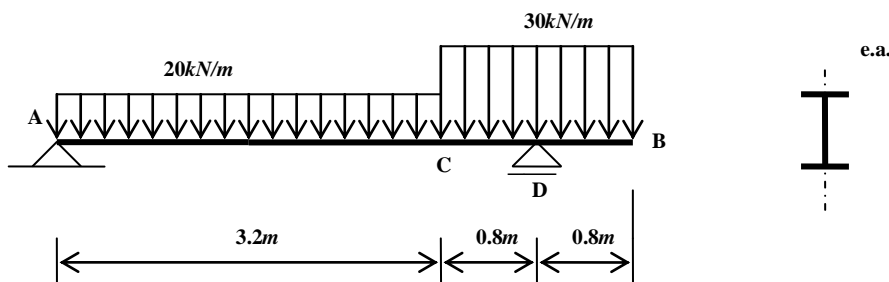


a) Trace os diagramas de esforços; (4 valores)

b) Exclusivamente com base nas tensões normais, dimensione a viga como um perfil INP (ver dados na tabela anexa), admitindo um valor de cálculo da tensão resistente do material, $\sigma_{Rd} = 235MPa$. (1 valor)

Solução: INP18

32) Considere a viga sujeita a acções cujos valores de cálculo se ilustram na figura seguinte:

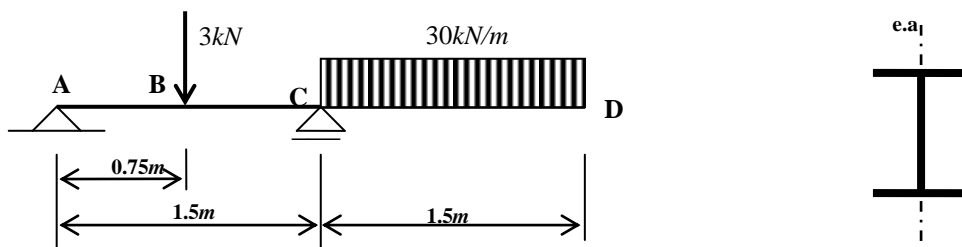


Admita que a secção é um INP e que o valor de cálculo de resistência do material é de $140MPa$, quer em tracção quer em compressão.

- Trace o diagrama de esforços;
- Dimensione a viga apenas à flexão. Ver tabela de INP anexa.

Solução: INP22

33) Considere a viga AD sujeita às acções cujos valores de cálculo se apresentam na figura seguinte:



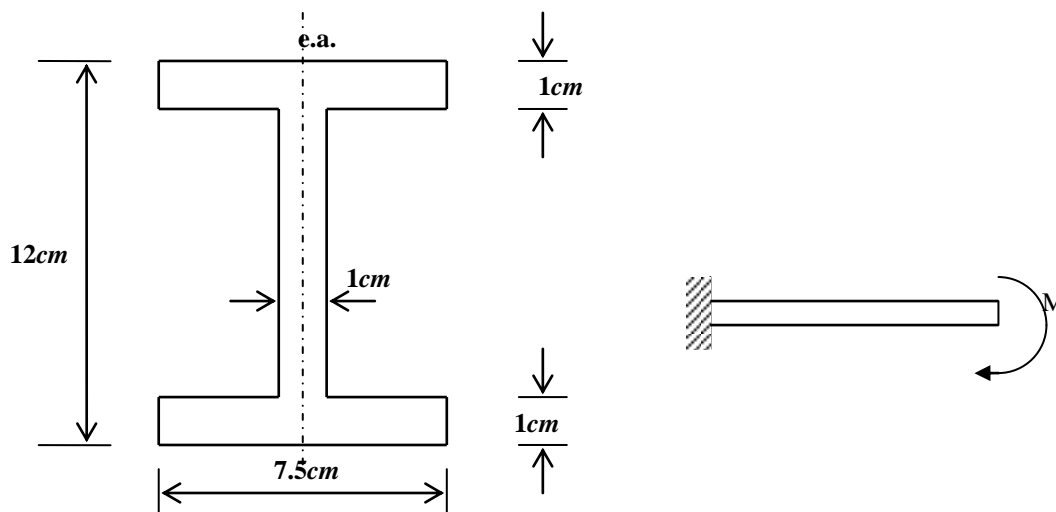
Admita que a secção é um INP e que o valor de cálculo de resistência do material é de $235MPa$, quer em tracção quer em compressão.

- Trace o diagrama de esforços;
- Dimensione a viga apenas à flexão. Ver tabela de INP anexa.
- Verifique a alternativa de utilizar o INP situado na tabela anexa, na 2ª posição imediatamente acima do INP que obteve na alínea b), reforçado com chapas de $1cm$ de espessura soldadas a toda a largura do banzo (inferior e superior).

Solução: a) INP18; b) $\sigma_{max\ tracção} = 205.1MPa < 235MPa$, verifica

6.6. Flexão em regime elasto-plástico

34) Admita uma peça cuja secção está representada na figura seguinte, sujeita a uma flexão circular recta, como indicado.

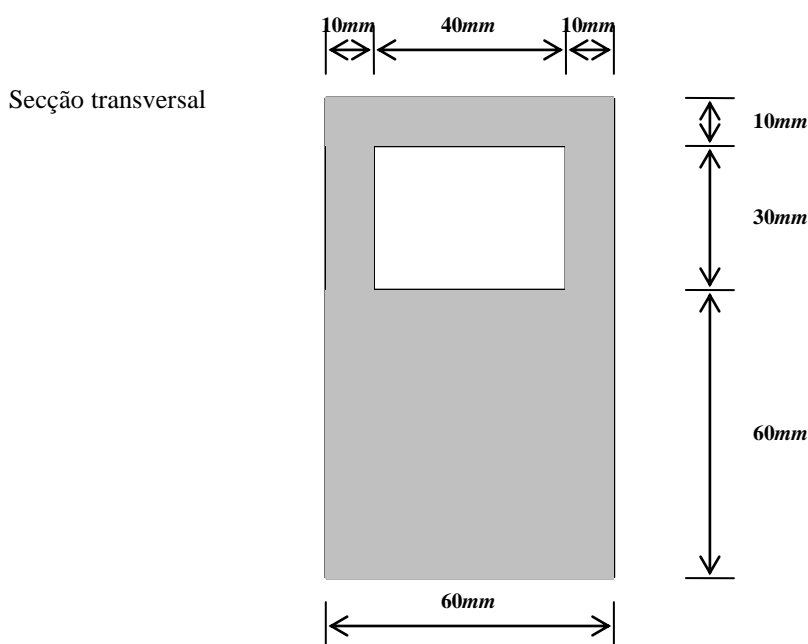


Admitindo que a peça é feita de material elástico - perfeitamente plástico, quer à tracção, quer à compressão com uma tensão de cedência de 200MPa e um módulo de elasticidade de 200GPa .

- Calcule o momento elástico da viga;
- Determine o raio de curvatura da peça no limite da fase elástica;
- Calcule o valor de momento flector que promove a plastificação de todas as fibras situadas a uma distância igual ou superior a 4.75cm do eixo neutro.
- Determine o raio de curvatura da peça nas condições da alínea c);
- Calcule o momento plástico;
- Calcule o factor de forma;
- Calcule o módulo de flexão plástica.

Solução: a) $M_e=17.94\text{kNm}$; b) $\rho_e= 60\text{m}$; c) $M=20\text{kNm}$; d) $\rho= 47.5\text{m}$ e) $M_p=21.5\text{kNm}$ f) $\varphi=1.2$; g) $Z=107.5\text{cm}^3$

35) Admita uma peça cuja secção está representada na figura seguinte, sujeita a uma flexão circular recta.



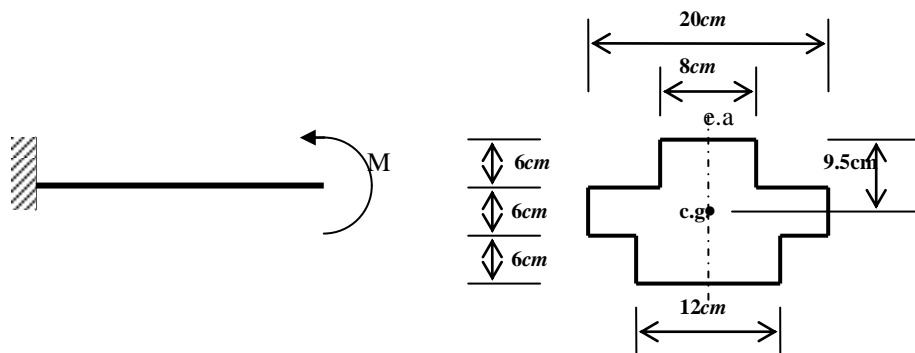
Admitindo:

- Peça feita de material elástico - perfeitamente plástico, quer à tracção, quer à compressão, com uma tensão de cedência de $250MPa$;

a) Calcule o momento plástico.

Solução: a) $M_p=28.5kNm$

36) Admita uma peça cuja secção está representada na figura seguinte, sujeita a uma flexão circular recta, como indicado.



Admitindo que a peça é feita de material elástico - perfeitamente plástico, quer à tracção, quer à compressão, com uma tensão de cedência de $250MPa$;

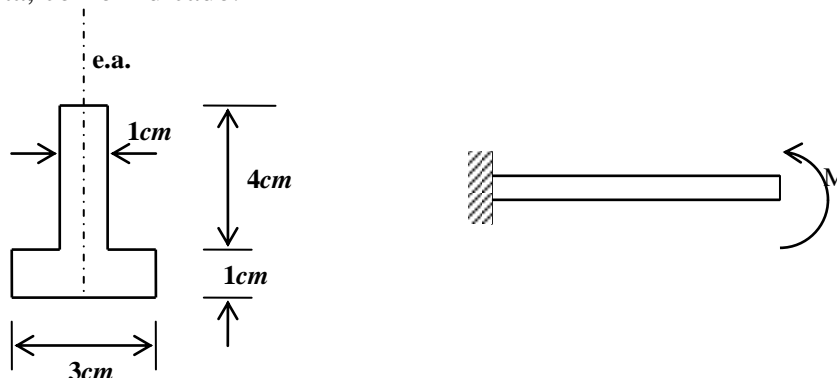
a) Calcule o momento elástico da viga;

b) Calcule o momento plástico;

c) Calcule o factor de forma.

Solução: a) $M_e=130.42kNm$; b) $M_p=223.2kNm$; c) $\psi=1.71$

37) Admita uma peça cuja secção está representada na figura seguinte, sujeita a uma flexão circular recta, como indicado.



Admitindo que a peça é feita de material elástico - perfeitamente plástico, com uma tensão de cedência de $250MPa$ (quer à tracção, quer à compressão) e com um módulo de elasticidade de $200GPa$.

a) Calcule o momento elástico da viga;

b) Determine o raio de curvatura da peça no limite da fase elástica;

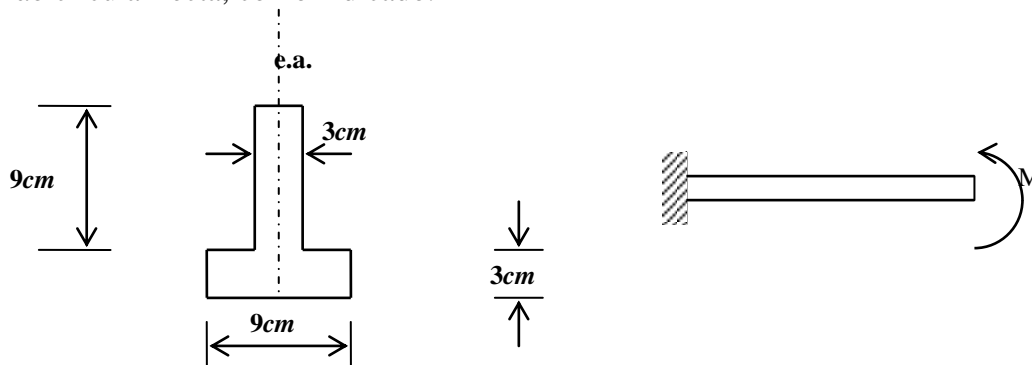
c) Calcule o momento plástico;

d) Calcule o factor de forma.

e) Calcule o módulo de flexão plástica.

Solução: a) $M_e=1.33kNm$; b) $\rho_e= 24.56m$; c) $M_p=2.31kNm$; d) $\varphi=1.74$; e) $Z=9.25cm^3$

38) Admita uma peça cuja secção está representada na figura seguinte, sujeita a uma flexão circular recta, como indicado.

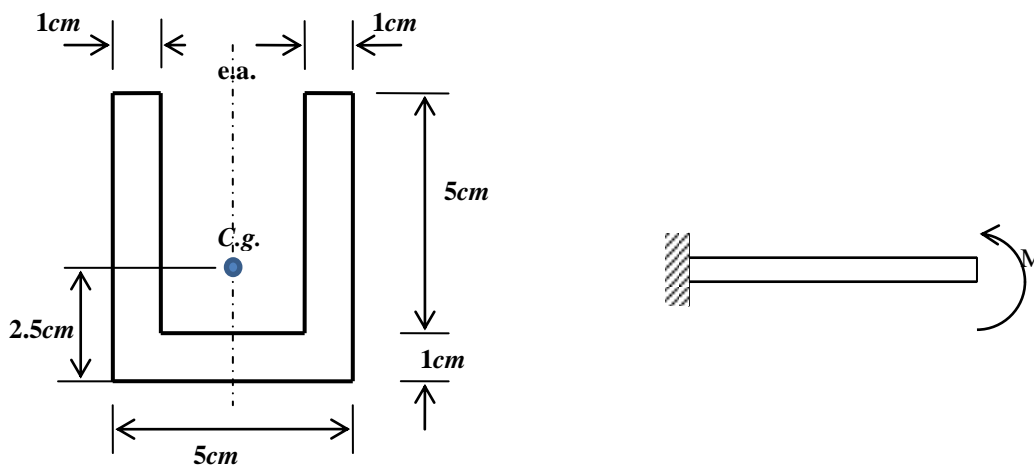


Admitindo que a peça é feita de material elástico - perfeitamente plástico, quer à tracção, quer à compressão com uma tensão de cedência de 235MPa e um módulo de elasticidade de 200GPa .

- Trace o diagrama de distribuição de tensões normais na secção;
- Calcule o momento elástico da viga;
- Determine o raio de curvatura da peça no limite da fase elástica;
- Calcule o momento plástico;
- Calcule o factor de forma.
- Calcule o módulo de flexão plástica.

Solução: b) $M_e=21.57\text{kNm}$; c) $\rho_e=63.83\text{m}$; d) $M_p=38.07\text{kNm}$; e) $\varphi=1.76$; f) $Z=162\text{cm}^3$

39) Admita uma peça cuja secção está representada na figura seguinte, sujeita a uma flexão circular recta, como indicado.



Admitindo que a peça é feita de material elástico - perfeitamente plástico, quer à tracção, quer à compressão, com uma tensão de cedência de 250MPa ;

- Calcule o momento elástico da viga;
- Calcule o momento plástico;
- Calcule o factor de forma.

Solução: a) $M_e=3.66\text{kNm}$; b) $M_p=6.094\text{kNm}$; c) $\varphi=1.67$

Referências

Dias da Silva, V. – *Mecânica e Resistência dos Materiais*, capítulo VII – Momento Flector. 2ª Edição. Edição: ZUARI – Edição de Livros Técnicos, Lda. 1999. ISBN: 972-98155-0-X.

William Nash – *Resistência de Materiais*. Edição: McGraw-Hill . 2001. ISBN: 972-773-090-6.