

UNIVERSIDADE DE ÉVORA
ESCOLA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA - DEPARTAMENTO DE
ENGENHARIA RURAL



RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

ESFORÇO AXIAL

(Apontamentos para uso dos Alunos)

JOSÉ OLIVEIRA PEÇA

ÉVORA

2016

INDICE

Nota do autor	3
1. Introdução	4
2. Dimensionamento de peças sujeitas a esforço axial	4
3. Deformações axiais.....	5
3.1. Problemas de aplicação	5
4. Estruturas isostáticas em tracção-compressão axial	6
4.1. Exemplos resolvidos.....	6
4.2. Problemas de aplicação	10
5. Estruturas hiperestáticas em tracção-compressão axial.....	14
5.1. Método dos deslocamentos.....	15
5.2. Método das forças.....	18
5.3. Problemas de aplicação	22
6. Estruturas hiperestáticas em tracção-compressão axial na fase elasto-plástica.....	24
6.1. Problemas resolvidos.....	31
6.2. Problemas de aplicação	38
7. Caderno de problemas de esforço axial	39
7.1. Estruturas isostáticas em tracção e compressão axial.....	39
7.2. Estruturas hiperestáticas em tracção e compressão axial	42
7.3. Estruturas hiperestáticas em fase elásto-plástica	43
Referências	49

Nota do autor

Tendo sido interrompido, a partir do ano lectivo de 2015/2016, o 1º Ciclo do Curso de Engenharia Civil, o autor resolveu reunir toda a informação que foi disponibilizada aos alunos da disciplina de Resistência de Materiais, durante os 8 anos em que o curso funcionou na Universidade de Évora.

O presente trabalho versa o tema do *Esforço axial* da Resistência de Materiais e é uma edição revista e acrescentada das edições que foram publicadas em 2013; 2009 e 2008.

No curso, a disciplina de Resistência de Materiais tinha a duração de um único semestre (4º semestre), pelo que foi necessário seleccionar os temas mais relevantes a ensinar sobre *Esforço axial*.

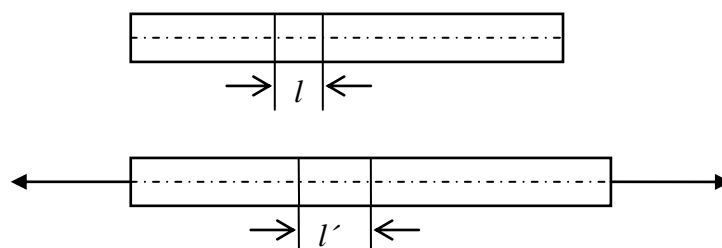
Nos diversos pontos deste trabalho são apresentados os aspectos formais importantes, completados com problemas resolvidos e não resolvidos de aplicação.

No último ponto estão incluídos todos os exercícios de aplicação sobre *Esforço axial* abordados nas aulas práticas e os que foram alvo de avaliação nas provas de frequência e de exame.

1. Introdução

Uma peça linear, de eixo rectilíneo antes da deformação, sob acção de forças exteriores paralelas ao seu eixo, diz-se em esforço axial puro (tracção ou compressão), se o seu eixo se mantiver rectilíneo durante a deformação provocada por essas forças.

De acordo com a lei da conservação das secções planas (Hipótese de Bernoulli), durante a deformação provocada por esforço axial puro, duas secções quaisquer da peça mantêm-se paralelas, variando apenas a distância entre elas.



Se a distância inicial entre duas secções for l e após a deformação passar a ser l' .

A extensão provocada é:

$$\varepsilon = \frac{l - l'}{l}$$

Se a peça linear de eixo rectilíneo for de material homogéneo então, a resultante das forças exteriores normais à secção, passa pelo centro de gravidade da secção.

2. Dimensionamento de peças sujeitas a esforço axial

Conhecido o valor de cálculo da acção (força axial) N_{sd} , o valor de cálculo da tensão instalada será:

$$\sigma_{sd} = \frac{N_{sd}}{\Omega}$$

O valor de cálculo da tensão instalada deverá ser menor ou igual ao valor de cálculo da tensão resistente do material:

$$\sigma_{sd} \leq \sigma_{Rd}$$

Deste modo, a área da secção transversal (*cross-section area*) da peça terá de ser:

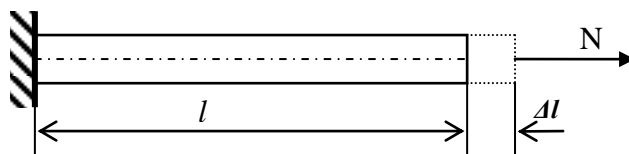
$$\Omega \geq \frac{N_{sd}}{\sigma_{Rd}}$$

Nota: em peças sujeitas à compressão axial, há que garantir que não haja *encurvadura* (aspecto a ser abordado mais à frente no curso).



3. Deformações axiais

O esforço axial N (*normal force*) aplicado numa peça de comprimento inicial l e secção Ω , admitindo que a deformação se dá na zona de comportamento *elástico linear* do material, provoca o alongamento Δl :



$$\sigma = \frac{N}{\Omega} \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

Admitindo comportamento *elástico linear*: $\sigma = E\varepsilon$

Substituindo, fica:

$$\frac{N}{\Omega} = E \frac{\Delta l}{l}$$

ou seja, a deformação axial será:

$$\Delta l = \frac{Nl}{E\Omega}$$

Ao produto $E\Omega$ dá-se o nome de **rigidez axial**, uma vez que quanto maior for menor será a deformação da peça.

Se além disso a peça estiver sujeita a uma temperatura diferente da de fabrico ou montagem, o alongamento é dado por:

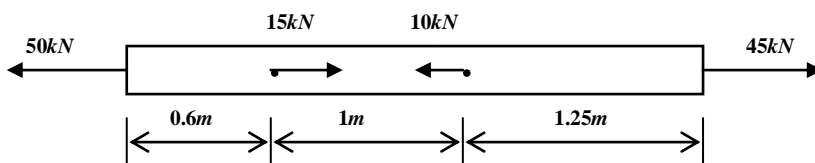
$$\Delta l = \left(\frac{N}{E\Omega} + \alpha \Delta T \right) \times l$$

sendo ΔT a variação de temperatura relativamente à temperatura de montagem e α o coeficiente de dilatação linear do material (*coefficient of thermal expansion of the material*). No caso do aço, $\alpha = 12 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$

Nas expressões anteriores, N é positivo se for uma força axial de tracção; N é negativo se for uma força axial de compressão; ΔT é positivo se for um aumento de temperatura; ΔT é negativo se for uma diminuição de temperatura

3.1. Problemas de aplicação

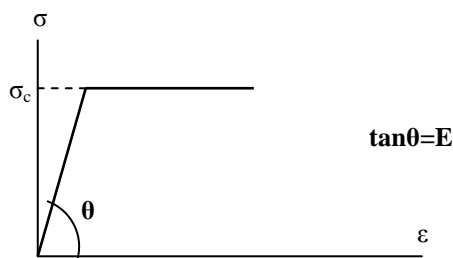
P3.1) Admita a barra da figura seguinte sujeita aos esforços indicados:



a) Trace o diagrama de esforço normal ao longo da barra;

b) Calcule o alongamento da barra, admitindo: área da secção = 5cm^2 ; $E = 200\text{GPa}$
 Resposta: $\Delta l = 1.21\text{mm}$

P3.2) Considere uma barra de 1.7m de comprimento de aço macio com tensão de cedência de 275MPa e $E = 200\text{GPa}$. A barra é sujeita a uma carga axial aplicada gradualmente desde zero até um valor para a qual a barra sofre um alongamento de 15mm e, depois completamente removida. Determine o alongamento residual da barra após a descarga. Considere que o material tem comportamento elástico perfeitamente plástico como mostra a figura seguinte:



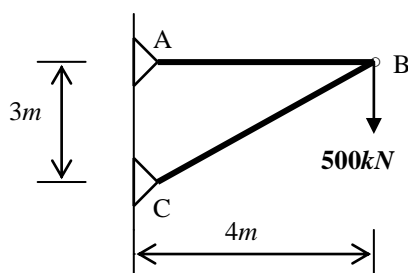
Resposta: $\Delta l_r = 12.6\text{mm}$

4. Estruturas isostáticas em tracção-compressão axial

Serão abordadas nesta fase as estruturas isostáticas (*statically determinate*) formadas por barras que se ligam entre si por rótulas. Estão apoiadas externamente em apoios que impõem restrições em número igual aos graus de liberdade da estrutura. As acções (forças exteriores) estão aplicadas nas rótulas, pelo que as barras só estarão sujeitas a esforços axiais de tracção ou compressão

4.1. Exemplos resolvidos

Problema 1 - O suporte ABC (*bracket ABC*) é formado por duas barras AB e CB ligadas em B por uma rótula. Como corpo livre as barras tem 4 graus de liberdade, os quais são suprimidos pelos dois apoios duplos em A e C. Trata-se portanto de uma estrutura isostática.



a) Admita que a barra AB deve ser constituída pela associação de duas cantoneiras de abas iguais de aço S 235. Dimensione a barra AB.



Associação de 2 cantoneiras de abas iguais

Aço S 235:

$\sigma_{Rd} = 235 \text{ MPa}$ (valor de cálculo da tensão resistente);

$E = 206 \text{ GPa}$

Dados técnicos sobre perfis:

- Tabelas Técnicas - A. Correia dos Reis, M. Brazão Farinha, J.P. Brazão Farinha. Edição de 2007 (existe edição anterior na Biblioteca da Mitra).

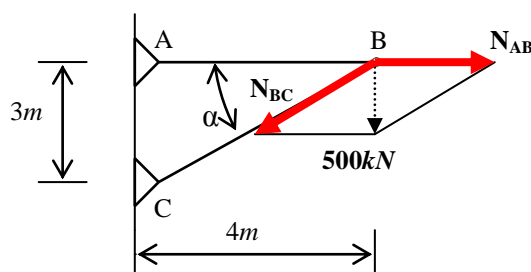
- Por vezes as firmas fornecedoras de perfis têm dados técnicos nos seus folhetos.

Exemplo:

<http://www.fachagas.pt/cache/bin/XPQWfpAXX617UzkZMyMbs1ZKU.pdf>

Resolução

A resolução passa por decompor a força actuante segundo a direcção de cada barra, uma vez que as barras estão apenas sujeitas a esforços axiais:



$$N_{AB} = \frac{500}{\tan \alpha}$$

em que $\tan \alpha = 3/4$.

$$N_{BC} = \frac{500}{\sin \alpha}$$

N_{AB} é o esforço axial de tracção na barra AB e N_{BC} é o esforço axial de compressão na barra BC.

$$\Omega_{AB} \geq \frac{N_{AB}}{\sigma_{Rd}}$$

ou seja:

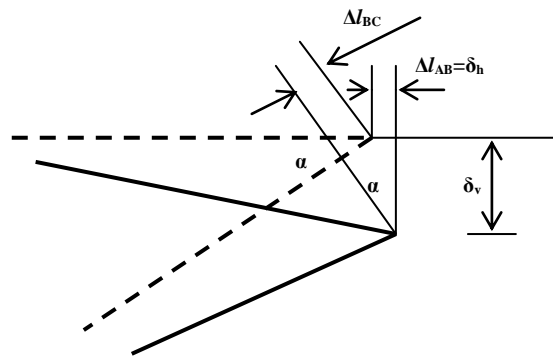
$$\Omega_{AB} \geq 28.37 \text{ cm}^2$$

Permitindo a utilização da associação de duas cantoneiras LNP 80×10, uma vez que a área da secção será $2 \times 15.1 = 30.2 \text{ cm}^2$ (ver tabelas técnicas)

Resposta: 2 LNP 80×10

b) De acordo com o dimensionamento anterior e supondo que a barra BC é constituída pela associação de 2 cantoneiras 120×15, determine o deslocamento do ponto B.

Resolução



Da figura anterior, tira-se:

$$\delta_h = \Delta l_{AB} \quad \delta_v = \frac{\Delta l_{AB} + \frac{\Delta l_{BC}}{\cos \alpha}}{\tan \alpha}$$

Uma vez que as barras estão apenas sujeitas a esforço axial:

$$\Delta l_{AB} = \frac{N_{AB} l}{E \Omega_{AB}} \quad \Delta l_{BC} = \frac{N_{BC} \frac{l}{\cos \alpha}}{E \Omega_{BC}}$$

Das tabelas técnicas tira-se:

$$2 \text{ LNP } 80 \times 10 \rightarrow \Omega_{AB} = 2 \times 15.1 \text{ cm}^2 = 30.2 \text{ cm}^2$$

$$2 \text{ LNP } 120 \times 15 \rightarrow \Omega_{BC} = 2 \times 33.9 \text{ cm}^2 = 67.8 \text{ cm}^2$$

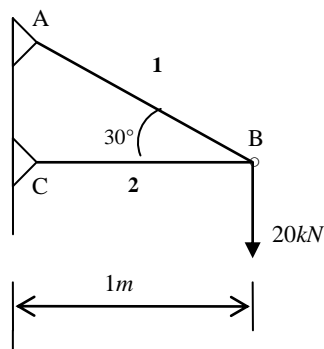
Substituindo:

$$\delta_h = 4.286 \times 10^{-3} \text{ m} \quad \delta_v = 10.686 \times 10^{-3} \text{ m}$$

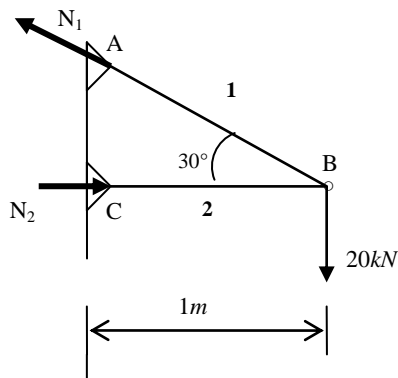
Uma vez que:

$$\delta_B = \sqrt{\delta_v^2 + \delta_h^2}, \text{ fica } \delta_B = 11.5 \text{ mm}$$

Problema 2 - O suporte da figura é formado pelas barras 1 e 2 ligadas em B por uma rótula onde está aplicada uma força exterior de 20kN.



a) Determine o esforço axial em cada uma das barras:



$$\Sigma F_v = N_1 \sin 30^\circ - 20 = 0$$

$$\Sigma F_h = -N_1 \cos 30^\circ + N_2 = 0$$

$$N_1 = 40 \text{ kN}; N_2 = 34.64 \text{ kN}$$

b) Assumindo 235 MPa para o valor de cálculo da tensão resistente do material, dimensione a secção da barra 1:

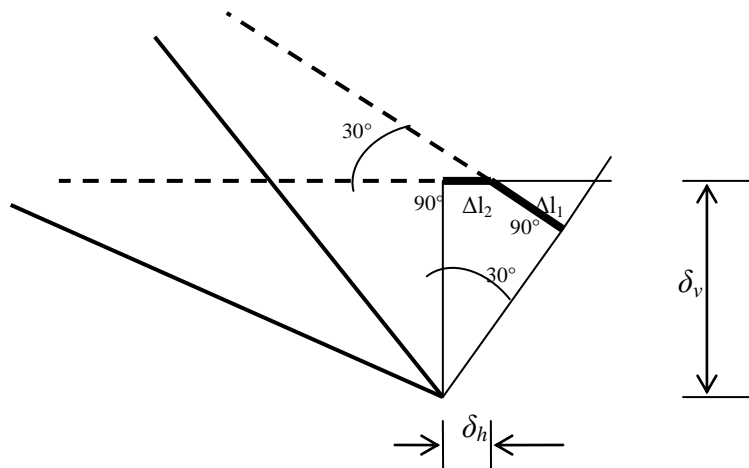
$$\frac{N_1}{\Omega_1} \leq 235 \times 10^3 \text{ kPa} \quad \Omega_1 \geq 1.7 \times 10^{-4} \text{ m}^2 = 1.7 \text{ cm}^2$$

c) Assuma que vai usar na barra 1 o valor da secção encontrado na alínea anterior e na barra 2 um perfil normalizado com secção $\Omega_2 = 2.22 \text{ cm}^2$. Admitindo um comportamento elástico linear com $E = 200 \text{ GPa}$, determine os alongamentos de cada uma das barras:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E \Omega_1} = \frac{40 \times \frac{1}{\cos 30^\circ}}{200 \times 10^6 \times 1.7 \times 10^{-4}} = 1.36 \text{ mm}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E \Omega_2} = \frac{34.64 \times 1}{200 \times 10^6 \times 2.22 \times 10^{-4}} = 0.78 \text{ mm}$$

d) Determine as componentes, horizontal e vertical, do deslocamento do ponto B:

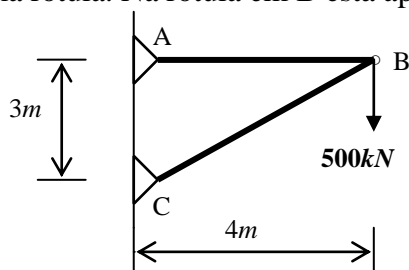


$$\delta_h = \Delta l_2 = 0.78 \text{ mm}$$

$$\delta_v = \frac{\Delta l_2 + \frac{\Delta l_1}{\cos 30^\circ}}{\tan 30^\circ} = 4.07 \text{ mm}$$

4.2. Problemas de aplicação

P4.1) O suporte ABC (*bracket ABC*) é formado por duas barras AB e CB ligadas em B por uma rótula. Na rótula em B está aplicada uma força exterior de 500 kN.



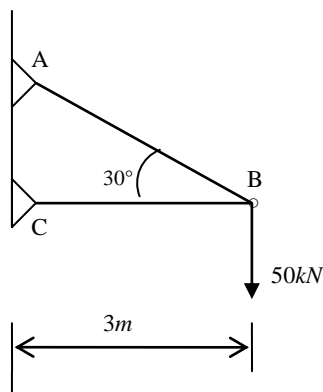
a) Determine o esforço axial em cada uma das barras.

Solução: Barra AB: 666.67 kN em tracção; Barra BC: 833.3 kN em compressão

c) Assumindo 235MPa para o valor de cálculo da tensão resistente do material, dimensione a secção de cada uma das barras (assumindo que não são de recar fenómenos de encurvadura).

Resposta: $\Omega_{AB} \geq 28.4 \text{ cm}^2$; $\Omega_{BC} \geq 35.46 \text{ cm}^2$

P4.2) O suporte ABC (*bracket ABC*) é formado por duas barras AB e CB ligadas em B por uma rótula onde está aplicada uma força exterior de 50 kN.



a) Determine o esforço axial em cada uma das barras.

Solução: Barra AB: 100kN em tração; Barra BC: 86.6kN em compressão

b) Assumindo 275MPa para o valor de cálculo da tensão resistente do material, dimensione a secção de cada uma das barras (assumindo que não são de recar fenómenos de encurvadura).

Resposta: $\Omega_{AB} \geq 3.64\text{cm}^2$; $\Omega_{CB} \geq 3.15\text{cm}^2$

c) Assuma que vai usar na barra AB um perfil normalizado com secção $\Omega_{AB}=3.7\text{ cm}^2$ e na barra CB um perfil normalizado com secção $\Omega_{CB}=7.4\text{ cm}^2$

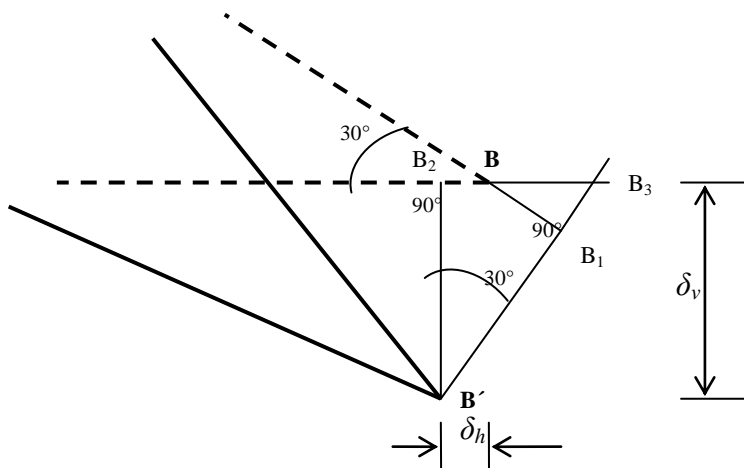
Admitindo um comportamento elástico linear com $E=200\text{GPa}$, determine os alongamentos de cada uma das barras.

(resolução através da equação $\Delta l = \frac{Nl}{E\Omega}$)

Solução: $\Delta l_{AB} = 4.68 \times 10^{-3}\text{ m}$; $\Delta l_{CB} = -1.76 \times 10^{-3}\text{ m}$

d) Determine as componentes, horizontal e vertical, do deslocamento do ponto B.

A figura seguinte mostra a vizinhança do ponto B.



Este ponto, após a deformação desloca-se para o ponto B'. O deslocamento tem, portanto, uma componente vertical δ_v e uma componente horizontal δ_h .

O segmento BB_1 corresponde ao alongamento da barra AB (Δl_{AB})

O segmento BB_2 corresponde ao encurtamento da barra BC (Δl_{CB})

Ainda que $B_1 B'$ devesse ser um arco de circunferência com centro em A, podemos aproximadamente substituir por um deslocamento rectilíneo, perpendicular à barra AB. Ainda que $B_2 B'$ devesse ser um arco de circunferência com centro em C, podemos aproximadamente substituir por um deslocamento rectilíneo, perpendicular à barra CB. As aproximações anteriores decorrem do facto dos deslocamentos serem pequenos. Da figura tira-se directamente que:

$$\delta_h = \Delta l_{CB}$$

δ_v tira-se através de considerações trigonométricas: o comprimento do segmento $B_2 B_3$ a dividir pela $\tan 30^\circ$ permite calcular δ_v . O segmento $B_2 B_3$, por sua vez, é a soma dos segmentos $B_2 B$ e BB_3 , sendo este último igual ao segmento BB_1 a dividir pelo $\cos 30^\circ$. Assim:

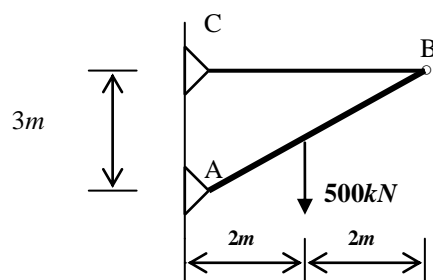
$$\delta_v = \frac{\Delta l_{CB} + \frac{\Delta l_{AB}}{\cos 30^\circ}}{\tan 30^\circ}$$

O deslocamento do ponto B, para a posição B' será, portanto:

$$\delta_B = \sqrt{\delta_v^2 + \delta_h^2}$$

Solução: $\delta_h = 1.76 \times 10^{-3} m$; $\delta_v = 12.41 \times 10^{-3} m$; $\delta_B = 12.53 \times 10^{-3} m$

P4.3) Considere a estrutura a seguir representada:



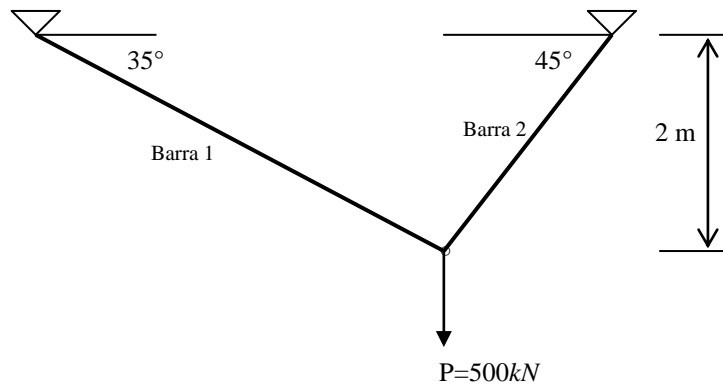
a) Dimensione a barra CB em aço S 235 ($\sigma_{Rd} = 235 MPa$; $E = 206 GPa$).

Resposta: Secção 2LNP 55x8 (associação de 2 cantoneiras de abas iguais)

b) Considerando AB como uma barra rígida, determine o deslocamento do ponto B.

Resposta: $\delta_B = 6.6 mm$

P4.4) A estrutura esquematizada na figura é constituída por duas barras 1 e 2, com secção transversal igual a $20 cm^2$ e formadas por um material com módulo de elasticidade $E = 200 GPa$ e coeficiente de dilatação linear $\alpha = 12 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ C^{-1}$.



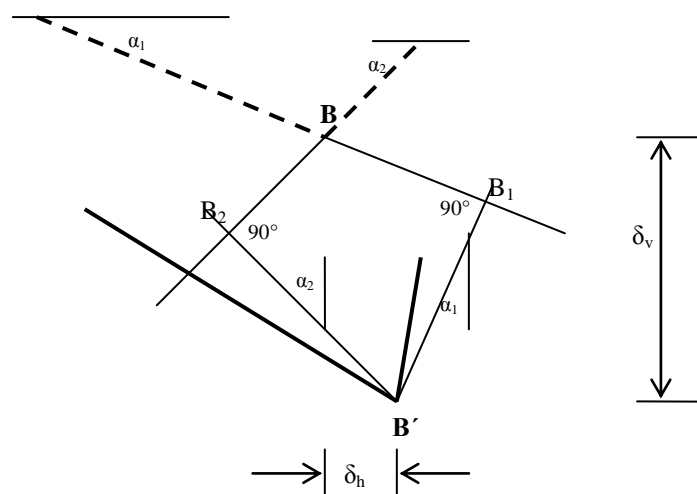
a) Determine os esforços axiais nas barras.

Solução: $N_1 = 359.01 \text{ kN}$; $N_2 = 415.89 \text{ kN}$

b) Determine o alongamento das barras sob o efeito da carga $P = 500 \text{ kN}$ e de um acréscimo de 20°C .

Solução: $\Delta l_1 = 3.97 \times 10^{-3} \text{ m}$; $\Delta l_2 = 3.62 \times 10^{-3} \text{ m}$

c) Determine o deslocamento do ponto B,



A figura anterior mostra a vizinhança do ponto B. Este ponto, após a deformação desloca-se para o ponto B'. O deslocamento tem, portanto uma componente vertical δ_v e uma componente horizontal δ_h .

O segmento BB_1 corresponde ao alongamento da barra 1 (Δl_1)

O segmento BB_2 corresponde ao encurtamento da barra 2 (Δl_2)

Seja d_1 o segmento $B'B_1$ e d_2 o segmento $B'B_2$.

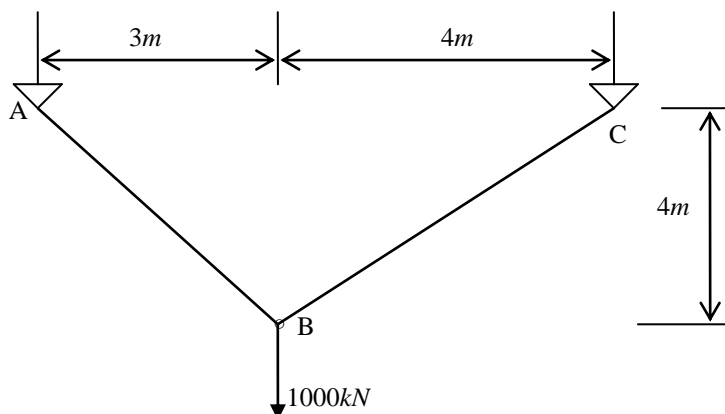
Da figura tira-se através de considerações trigonométricas:

$$\delta_h = \Delta l_1 \cos \alpha_1 - d_1 \sin \alpha_1 = d_2 \sin \alpha_2 - \Delta l_2 \cos \alpha_2$$

$$\delta_v = d_1 \cos \alpha_1 + \Delta l_1 \sin \alpha_1 = d_2 \cos \alpha_2 + \Delta l_2 \sin \alpha_2$$

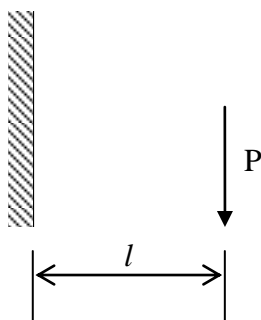
Resolvendo o sistema formado pelas segundas igualdades, tiramos d_1 e d_2 , após o que, podemos calcular δ_h e δ_v .

P4.5) Na estrutura articulada, em aço S 275, ($\sigma_{Rd} = 275 \text{ MPa}$; $E = 206 \text{ GPa}$), determine o deslocamento do ponto B. Admita: $\Omega_{AB} = 30 \text{ cm}^2$; $\Omega_{BC} = 25 \text{ cm}^2$



Resposta: $\delta_B = 8.3 \text{ mm}$

P4.6) Admita que à distância l de uma parede vertical actua uma força vertical P .



Conceba uma estrutura isostática formada por duas barras articuladas entre si, que suportem a força P na respectiva articulação.

São condições a respeitar:

As tensões induzidas em ambas as barras têm de ser iguais.

O ângulo α que as duas barras fazem entre si, tem de ser tal que minimize o peso da estrutura.

5. Estruturas hiperestáticas em tracção-compressão axial

São estruturas formadas por barras que se ligam entre si por rótulas. Estão apoiadas externamente em apoios que impõem restrições em número superior aos graus de liberdade da estrutura. As acções (forças exteriores) estão aplicadas nas rótulas, pelo que as barras só estarão sujeitas a esforços axiais de tracção ou compressão

As estruturas hiperestáticas (*statically indeterminate*) podem estar sujeita a esforços, mesmo na ausência de forças exteriores. De facto, nestas estruturas, a alteração do comprimento de uma barra (por exemplo devido a variação de temperatura), implica variação de comprimento nas outras, ou seja, provoca nestas o aparecimento de esforços.

Em contrapartida, nas estruturas hiperestáticas a perda de uma barra, não implica necessariamente o colapso da estrutura, já que se dispõe de ligações em número superior ao estritamente necessário para garantir o equilíbrio estático.

Para a determinação de esforços em estruturas hiperestáticas as equações da estática são insuficientes, pelo que ao sistema se acrescentam equações provenientes da compatibilização de deformações (*displacement equations*). Existem dois métodos para encontrar as equações da compatibilização de deformações: **método dos deslocamentos** e **método das forças**.

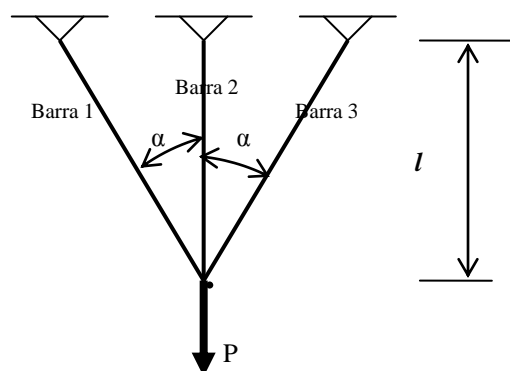
A descrição que se apresenta seguidamente é aplicável a estruturas reticuladas (constituídas por peças lineares) e admitindo que o material tem comportamento elástico linear.

5.1. Método dos deslocamentos

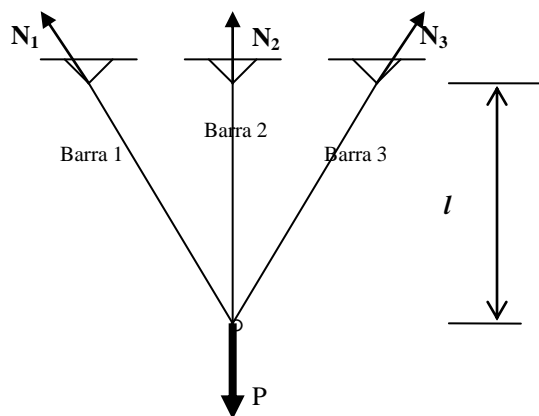
O **método dos deslocamentos** consiste nos seguintes passos:

- (1) Partir da configuração da estrutura deformada;
- (2) Assumir os alongamentos das barras necessários para se atingir a estrutura deformada e estabelecer com eles relações geométricas;
- (3) Estabelecer as relações entre os alongamentos e as forças necessárias para os provocar;
- (4) Substituir os alongamentos pelas forças, o que revelará novas equações a juntar às equações da estática.

Exemplo 1 – Admita que na estrutura seguinte as barras unidas numa rótula. As barras são do mesmo material e têm a mesma secção.



Calcular os esforços axiais nas barras ($N_1; N_2; N_3$)



Do equilíbrio das forças horizontais, conclui-se:

$$N_1 = N_3$$

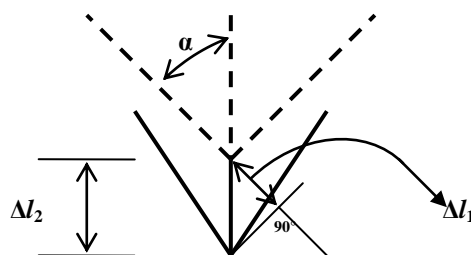
Do equilíbrio das forças verticais, conclui-se:

$$2N_1 \cos \alpha + N_2 = P$$

Duas equações da estática, mas três incógnitas:

Resolvendo pelo **método dos deslocamentos** segue os seguintes passos:

(1) A figura seguinte representa a vizinhança da rótula, estando representado por traço contínuo a nova posição das barras:



(2) Na figura anterior estão representados os alongamentos, nomeadamente da barra 2, devido ao esforço axial N_2 , e da barra 1, devido ao esforço axial N_1 . Na figura é possível estabelecer uma relação trigonométrica entre os alongamentos das duas barras (*compatibilização das deformações*):

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cos \alpha$$

(3) A relação entre o esforço axial N_2 e o alongamento da barra 2:

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l}{E\Omega}$$

A relação entre o esforço axial N_1 e o alongamento da barra 1:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E\Omega}$$

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{E\Omega \cos \alpha}$$

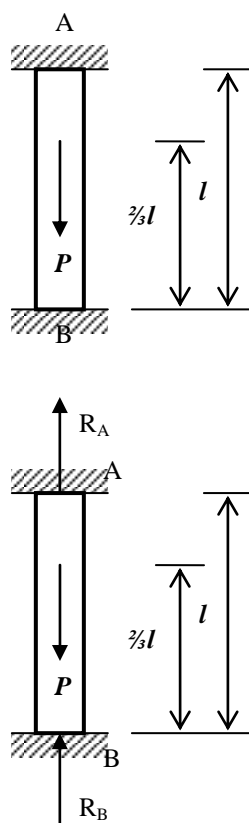
(4) Parte-se da equação estabelecida no passo 2, e substitui-se os alongamentos das barras pelos respectivos esforços axiais. Após simplificação, obtém-se:

$$N_1 = N_2 \cos^2 \alpha$$

Esta nova equação, juntamente com as equações do equilíbrio estático resolvem as incógnitas N_1 ; N_2 ; N_3 .

$$\text{Solução: } N_2 = \frac{P}{1 + 2\cos^3 \alpha} \quad N_1 = N_3 = \frac{P \cos^2 \alpha}{1 + 2\cos^3 \alpha}$$

Exemplo 2 - A barra da figura tem uma força P aplicada a $\frac{2}{3}$ da altura. A barra está encastrada em ambas as extremidades, o que impossibilita conhecer as reacções nos apoios, uma vez que temos duas incógnitas e apenas uma equação de força (1 grau de indeterminação estática)



Uma única equação da estática, mas duas incógnitas:

$$R_A - P + R_B = 0$$

Passos (1) e (2): A barra depois de deformada tem o mesmo comprimento l da figura, ainda que o terço superior da barra tenha sofrido tracção devido a um esforço axial R_A e os dois terços inferiores tenham sofrido compressão devido a um esforço axial R_B . Assim o alongamento na parte à tracção tem que ser igual ao encurtamento da parte à compressão;

$$|\Delta_t| = |\Delta_c|$$

Passo (3): Calculamos a relação entre o alongamento sofrido na parte da barra que está à tracção e a força R_A que o provoca.

$$\Delta_t = \frac{R_A \times \frac{1}{3}l}{E\Omega}$$

Calculamos a relação entre o encurtamento sofrido na parte da barra que está à compressão e a força R_B que o provoca:

$$\Delta_c = \frac{R_B \times \frac{2}{3}l}{E\Omega}$$

Passo (4): A igualdade entre o alongamento e encurtamento, revela uma equação em R_A e R_B .

$$|\Delta_r| = |\Delta_c| \quad \Rightarrow \quad R_A = 2 \times |R_B|$$

Esta equação, juntamente com a equação da estática permite resolver estas duas incógnitas.

$$\text{Solução: } |R_B| = \frac{P}{3} \quad R_A = \frac{2P}{3}$$

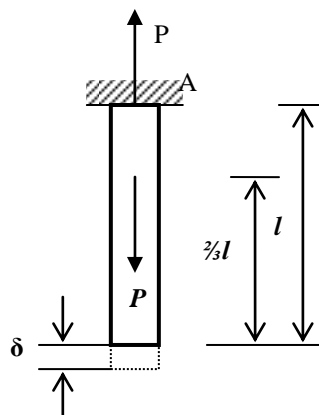
5.2. Método das forças

O **método das forças** consiste nos seguintes passos:

- (1) Eliminar um número de ligações igual ao grau de hiperstaticidade, igualmente denominado grau de indeterminação estática (número de ligações que devem ser suprimidas numa estrutura para a tornar isostática);
- (2) Determinar os deslocamentos que surgem nas ligações suprimidas;
- (3) Calcular as forças necessárias para eliminar os deslocamentos, ou seja para compatibilizar as deformações.

O exemplo 2 (do ponto anterior) resolvido pelo **método das forças** segue os seguintes passos:

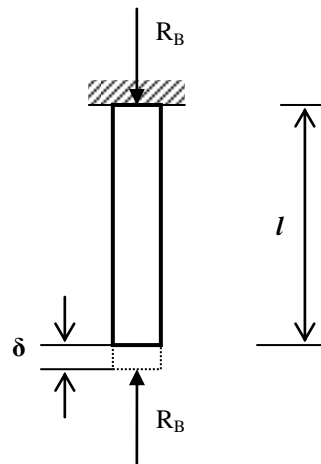
- (1) Eliminamos o apoio em B;
- (2) Calculamos o deslocamento que o apoio suprimido vai ter (deformação da barra devido à força P);



O deslocamento δ deve-se à tracção a que a barra fica sujeita no terço superior:

$$\delta = \frac{P \times \frac{1}{3}l}{E\Omega}$$

- (3) Calculamos o esforço axial R_b que é necessário aplicar em B para recolocar o apoio suprimido na sua posição inicial.



$$\delta = \frac{R_B \times l}{E\Omega}$$

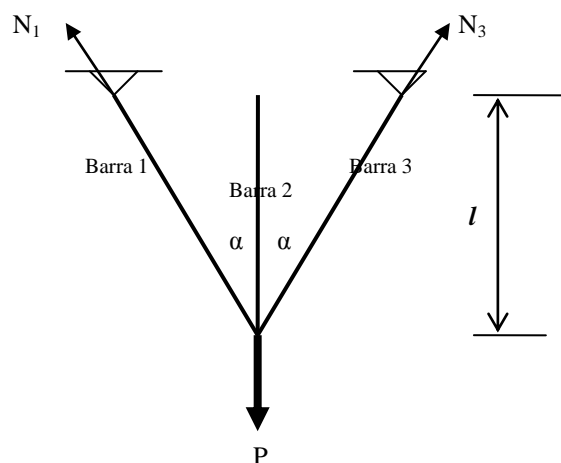
Igualando:

$$\frac{R_B \times l}{E\Omega} = \frac{P \times \frac{1}{3}l}{E\Omega}$$

Solução: $R_B = \frac{1}{3}P$ e $R_A = \frac{2}{3}P$

O exemplo 1 (do ponto anterior) resolvido pelo **método das forças** segue os seguintes passos:

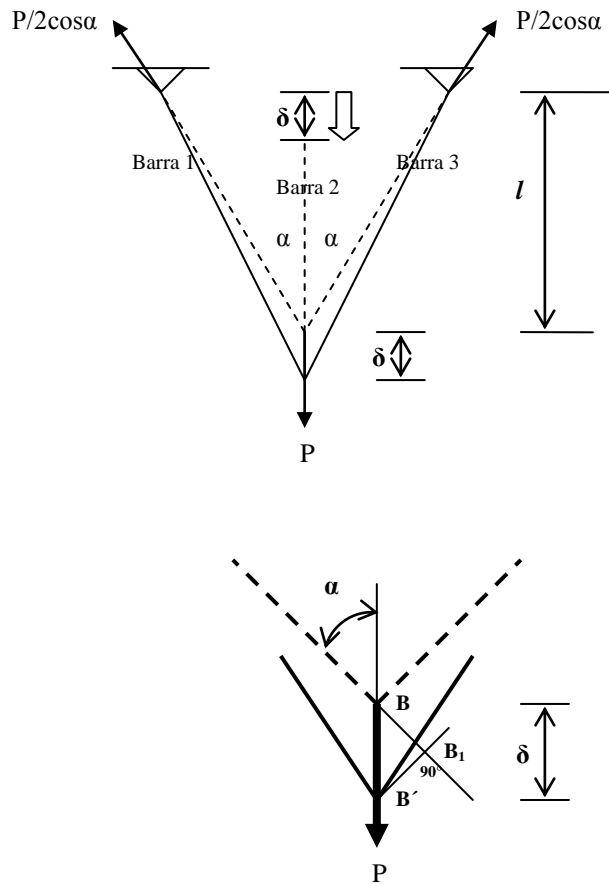
(1) Eliminamos o apoio duplo da barra 2;



Através do equilíbrio estático conclui-se:

$$N_1 = N_3 \quad N_1 = \frac{P}{2 \cos \alpha}$$

(2) Calculamos o deslocamento que o apoio suprimido vai ter (deformação da estrutura formada pelas barras 1 e 3 devido à força P);



O segmento BB_1 , corresponde ao alongamento Δl_1 da barra 1:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \frac{l}{\cos \alpha}}{E\Omega} = \frac{Pl}{2E\Omega \cos^2 \alpha}$$

Uma vez que:

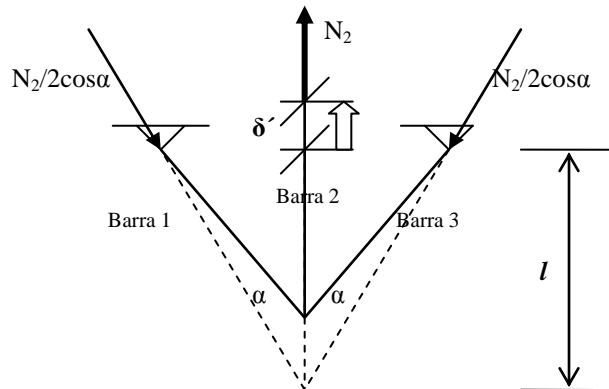
$$\Delta l_1 = \delta \cos \alpha$$

Fica:

$$\delta = \frac{Pl}{2E\Omega \cos^3 \alpha}$$

O valor anterior corresponde ao deslocamento verificado no apoio da barra 2.

(3) Calculamos o esforço axial N_2 que é necessário aplicar na barra 2 para criar o deslocamento δ' na estrutura isostática base, de forma a anular o deslocamento δ .

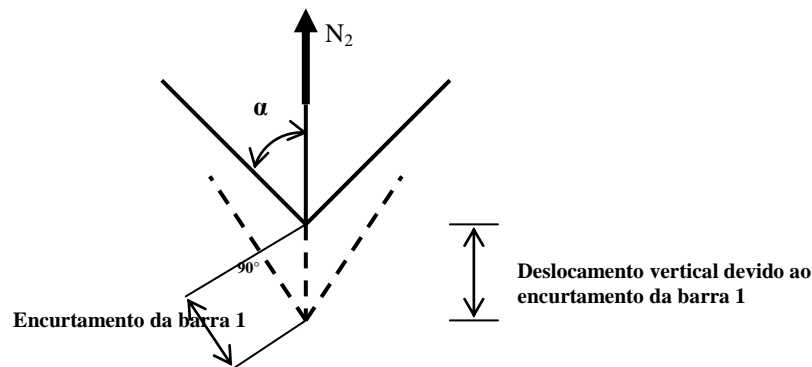


O valor de δ' é devido a duas parcelas. Uma parcela corresponde ao alongamento da barra 2; a outra parcela corresponde à projecção vertical do encurtamento das barras 1 e 3.

A primeira parcela (alongamento da barra 2), é:

$$\frac{N_2 l}{E\Omega}$$

A segunda parcela (projecção do encurtamento das barras 1 e 3), pode visualizar-se através da figura:



O encurtamento (em módulo) da barra 1:

$$\frac{N_2}{2 \cos \alpha} \times \frac{l}{\cos \alpha} \\ E\Omega$$

A projecção vertical do encurtamento, é:

$$\frac{N_2 l}{2E\Omega \cos^3 \alpha}$$

Deste modo:

$$\delta' = \frac{N_2 l}{E\Omega} + \frac{N_2 l}{2E\Omega \cos^3 \alpha}$$

Fazendo $\delta' = \delta$, fica:

$$\frac{N_2 l}{E\Omega} + \frac{N_2 l}{2E\Omega \cos^3 \alpha} = \frac{Pl}{2E\Omega \cos^3 \alpha}$$

Da expressão anterior posso conhecer o valor de N_2 . Sabendo N_2 (incógnita hiperestática), as forças N_1 e N_3 tiram-se das equações do equilíbrio estático, indicadas no início e que seguidamente se relembram:

$$N_1 = N_3$$

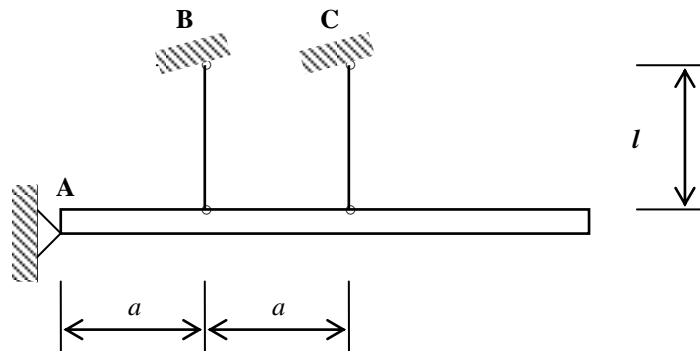
$$2N_1 \cos \alpha + N_2 = P$$

5.3. Problemas de aplicação

P5.1) A figura seguinte mostra uma barra de peso desprezável (*weightless beam*) com um apoio duplo em A (*hinged at A*) e suspensa em B e C por tirantes (*rods*), os quais são barra com rotulas em ambas as extremidades. Admita que os tirantes são iguais, têm secção transversal, Ω , e são feitos de material com módulo de Young, E, e coeficiente de dilatação linear do material, α .

Determine as reacções em todos os apoios quando ambos os tirantes estão sujeitos a um aumento de temperatura, Δt , uniforme em todo o tirante. Sugere-se o método dos deslocamentos.

Diga a que tipos de esforço axial estão sujeitos os tirantes.



NOTA: Recorde-se que se uma barra de comprimento l estiver sujeita a uma dilatação e simultaneamente a um esforço axial de tracção N, terá um alongamento:

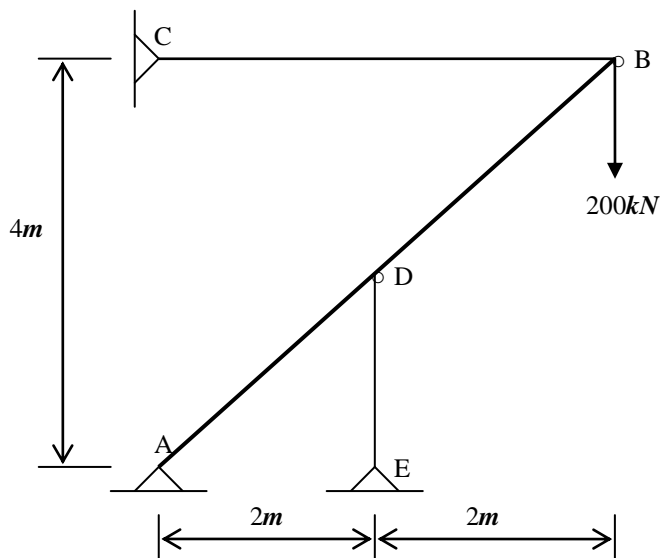
$$\Delta l = \left(\frac{N}{E\Omega} + \alpha \Delta T \right) \times l$$

Se a barra estiver sujeita a uma dilatação e simultaneamente a um esforço axial de compressão N, terá um alongamento:

$$\Delta l = \left(-\frac{|N|}{E\Omega} + \alpha \Delta T \right) \times l$$

Resposta: $|R_A| = 0.2E\Omega\alpha\Delta t$; $|R_B| = 0.4E\Omega\alpha\Delta t$; $|R_C| = 0.2E\Omega\alpha\Delta t$

P5.2) Na estrutura de aço ($E = 206GPa$), representada na figura, a barra AB pode ser considerada rígida ($\Delta l_{AB} = 0$).



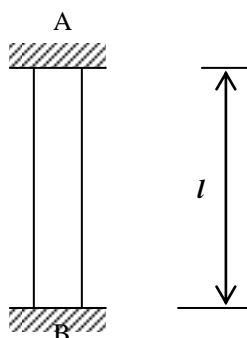
Admita: $\Omega_{CB} = 10cm^2$; $\Omega_{DE} = 6cm^2$

Determine, as reacções nos apoios. Sugere-se o método dos deslocamentos, com vista a encontrar uma equação que relacione Δl_{BC} com Δl_{DE} . Esta equação, juntamente com as três equações da estática, resolve as incógnitas do problema.

Resultados:

$$|H_C| = 153.85kN \quad |H_A| = 153.85kN \quad |V_A| = 107.69kN \quad |V_E| = 92.31kN$$

P5.3) A figura seguinte mostra uma barra de secção transversal Ω encastrada em A e B. Admita E como módulo de Young do material e α como coeficiente de dilatação linear.



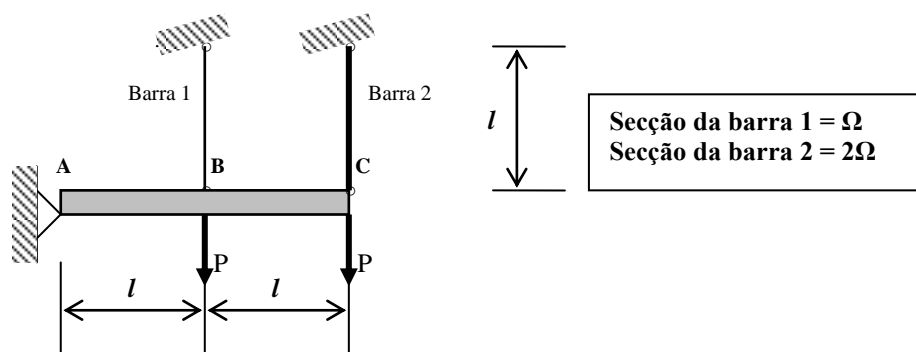
Determine as reacções nos apoios quando a barra está sujeita a um aumento de temperatura, Δt , uniforme em toda a barra. Sugere-se o método das forças. Diga se a barra está à tracção ou à compressão.

Resposta: $|R_A| = |R_B| = E\Omega\alpha\Delta t$

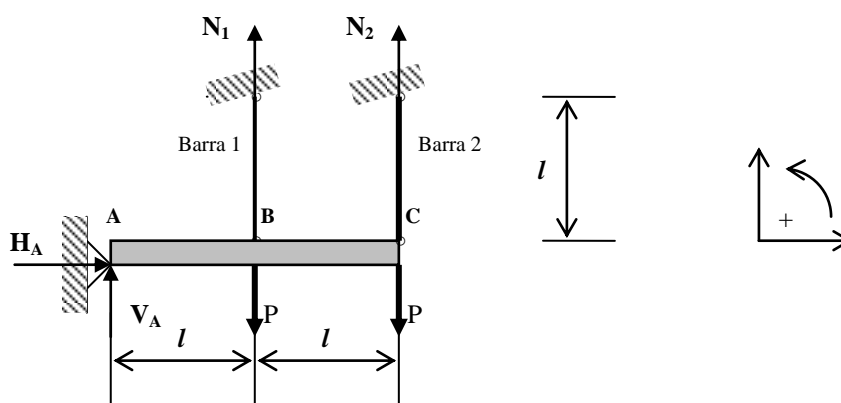
6. Estruturas hiperestáticas em tracção-compressão axial na fase elasto-plástica

Análise elasto-plástica (*Plastic strained systems; elastoplastic strain*) irá, seguidamente ser apresentada recorrendo a um exemplo. A metodologia, porém, será válida para qualquer outro exemplo.

Considere a seguinte estrutura, em que a barra ABC pode ser considerada como indeformável, sujeita a cargas cujo valor de cálculo é P.



As barras 1 e 2 são feitas de material com comportamento elástico perfeitamente plástico (*perfect plasticity*) da figura seguinte, o qual retrata o comportamento aproximado de um material dúctil como o aço macio:



Das equações da estática tira-se:

$$H_A = 0$$

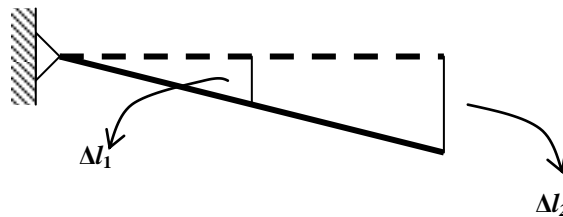
$$V_A + N_1 + N_2 - 2P = 0$$

$$N_1 \times l + N_2 \times 2l - P \times l - P \times 2l = 0 \rightarrow N_1 + 2N_2 - 3P = 0$$

As 3 equações anteriores têm 4 incógnitas (sistema hiperestático), pelo que se recorre ao método dos deslocamentos para encontrar a 4ª equação.

A figura seguinte mostra a barra ABC após deformação da estrutura (note que a barra ABC em si é indeformável):

Seja Δl_2 o alongamento da barra 2 e Δl_1 o alongamento da barra 1.



$$\frac{\Delta l_2}{2l} = \frac{\Delta l_1}{l}$$

$$\Delta l_2 = 2\Delta l_1$$

Substituindo na equação anterior os alongamentos pelas forças axiais que os produzem, obtém-se:

$$\frac{N_2 l}{E 2\Omega} = 2 \frac{N_1 l}{E \Omega}$$

$$\boxed{N_2 = 4N_1}$$

A equação anterior – equação da compatibilidade das deformações – é a 4ª equação que faltava.

Resolvendo as 4 equações, obtém-se:

$$N_1 = \frac{P}{3} \quad N_2 = \frac{4P}{3} \quad H_A = 0 \quad V_A = \frac{P}{3}$$

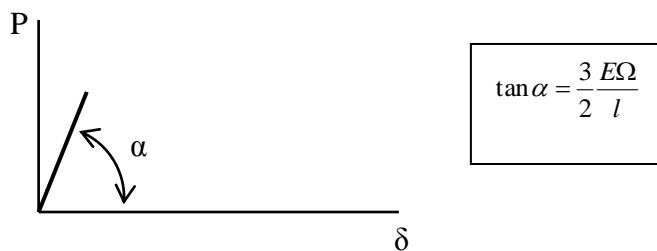
O deslocamento (*displacement*) δ do vértice C da estrutura é igual a Δl_2 , ou seja:

$$\delta = \Delta l_2 = \frac{N_2 l}{E 2\Omega} = \frac{\frac{4}{3} P l}{E 2\Omega} = \frac{2}{3} \frac{P l}{E \Omega}$$

ou seja:

$$P = \frac{3 E \Omega}{2 l} \delta$$

A equação anterior é a recta $P = f(\delta)$, como se mostra na figura seguinte:



A figura anterior mostra que à medida que P aumenta, o deslocamento δ do vértice C da barra, aumenta linearmente. Naturalmente, o aumento de P implica o aumento da tensão σ_1 e σ_2 nas barras 1 e 2, respectivamente:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{\Omega} = \frac{P}{3\Omega} \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{2\Omega} = \frac{\frac{4}{3}P}{2\Omega} = \frac{2}{3} \frac{P}{\Omega}$$

Se porventura a força P continuar a aumentar poder-se-á atingir a cedência nas barras. Atendendo a que:

$$\Delta l_2 = 2\Delta l_1$$

$$\frac{\Delta l_2}{l} = 2 \frac{\Delta l_1}{l}$$

Da expressão anterior conclui-se: $\epsilon_2 = 2\epsilon_1$

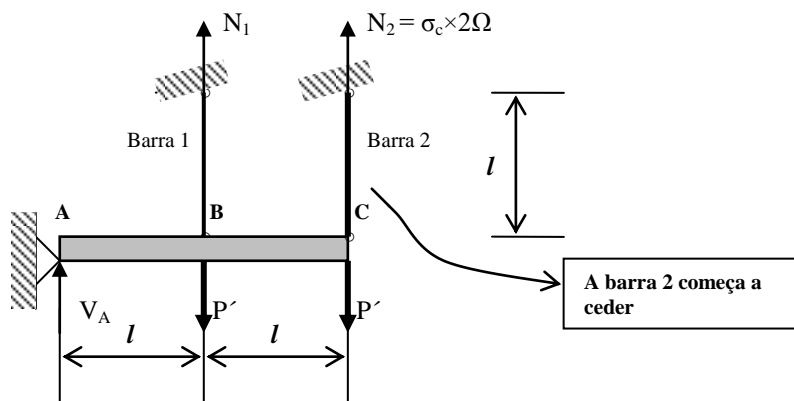
Sendo a extensão na barra 2 dupla da extensão na barra 1, então significa que a barra 2 será a primeira a atingir o a tensão de cedência.

Quando a tensão na barra 2 atingir a tensão de cedência (*yielding stress*), a estrutura deixa de estar na **fase elástica** (todas as barras em comportamento elástico) para passar para a **fase elasto-plástica** (uma vez que a barra 2 vai entrar deformação plástica).

Tal acontece quando a força P atingir o **valor (P') limite para a fase elástica da estrutura.**

A tensão na barra 2 será daqui para diante: $\sigma_2 = \sigma_c$

A força axial na barra 2 será daqui para diante: $N_2 = \sigma_c \times 2\Omega$

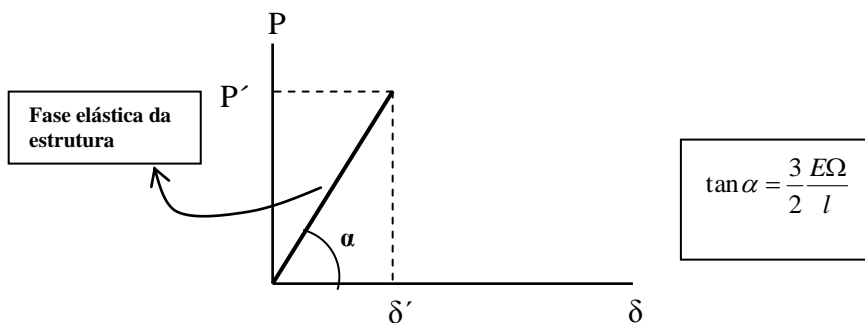


Atendendo às soluções acima indicadas:

$$N_1 = \frac{P'}{3} \quad N_2 = \frac{4P'}{3} \quad H_A = 0 \quad V_A = \frac{P'}{3}$$

Uma vez que: $N_2 = \sigma_c \times 2\Omega$

Então: $P' = \frac{3}{2} \sigma_c \Omega$



Na figura anterior está marcado o comportamento elástico da estrutura. É a fase em que todas as barras têm comportamento elástico.

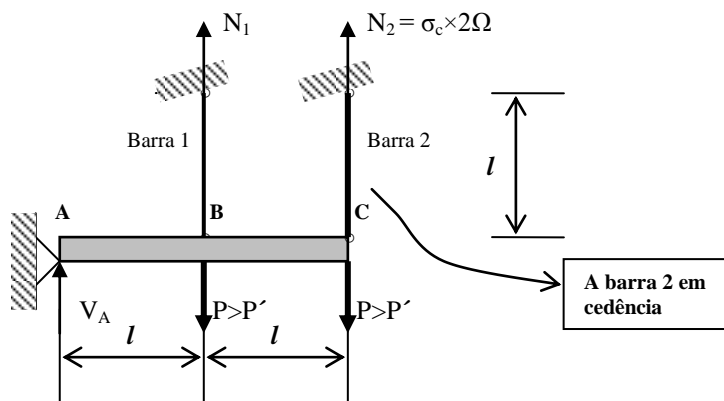
Nesta situação o deslocamento δ' do vértice C da estrutura (igual a Δl_2), é:

$$\delta' = \Delta l_2 = \frac{N_2 l}{E 2\Omega} = \frac{\sigma_c l}{E}$$

Se $P \geq P'$, entramos na fase elasto-plástica da estrutura, em que a barra 2, por se encontrar em cedência, deforma-se sem necessitar de aumento da carga sobre ela, a qual é:

$$N_2 = \sigma_c 2\Omega$$

A barra 1 continua em deformação elástica sob a acção de esforço axial N_1



Atendendo às equações do equilíbrio estático:

$$V_A + N_1 + 2\Omega\sigma_c - 2P = 0$$

$$N_1 \times l + 2\Omega\sigma_c \times 2l - P \times l - P \times 2l = 0 \rightarrow N_1 + 4\Omega\sigma_c - 3P = 0$$

Obtém-se o valor do esforço axial N_1 na barra 1, em função da carga $P \geq P'$

$$N_1 = 3P - 4\sigma_c \Omega$$

A barra 1 está ainda em deformação elástica. A barra 2 já está em cedência.

Para $P \geq P'$, o deslocamento δ do vértice C da estrutura é igual a Δl_2 , ou seja:

$$\delta = \Delta l_2 = 2\Delta l_1 = 2 \frac{N_1 l}{E\Omega} = \frac{2l}{E\Omega} (3P - 4\sigma_c \Omega)$$

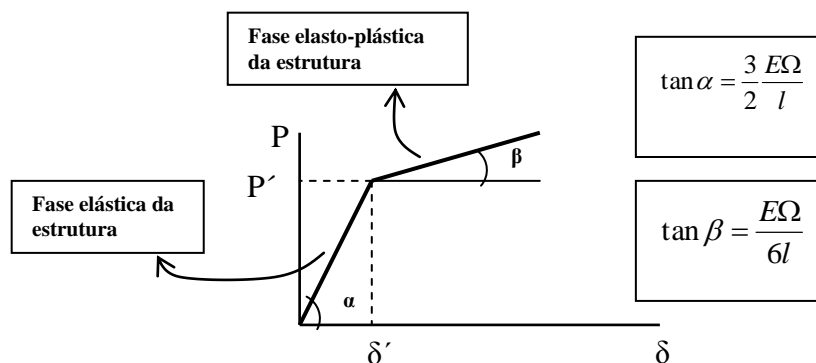
Notar que na expressão anterior se recorreu a Δl_1 , uma vez que a barra 1 é a única em regime elástico, onde é válida a conhecida expressão:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{E\Omega}$$

Da expressão de δ acima indicada, tira-se:

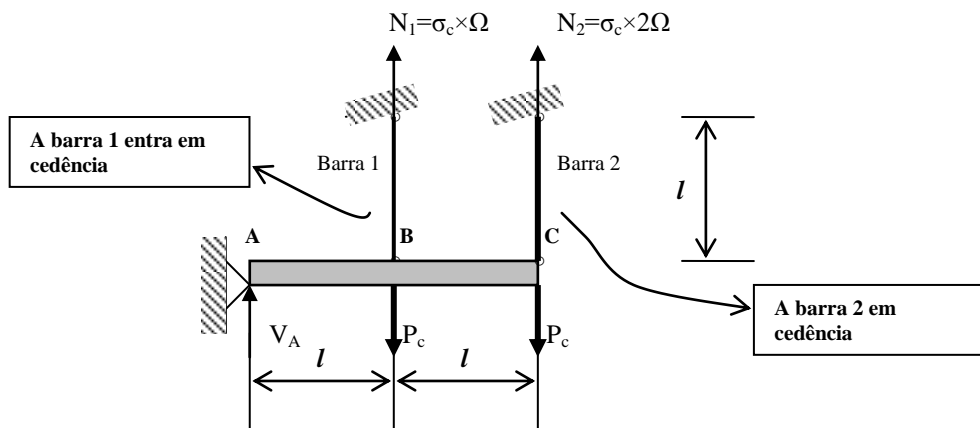
$$P = \frac{E\Omega}{6l} \delta + \frac{4}{3} \sigma_c \Omega$$

E expressão corresponde a uma nova fase do gráfico $P=f(\delta)$ que se denomina **fase elasto-plástica**:



A figura anterior mostra que à medida que $P \geq P'$ aumenta, o deslocamento δ do vértice C da barra, aumenta linearmente. Naturalmente, o aumento de P implica o aumento da tensão σ_1 da barra 1 (a tensão da barra 2 continua constante e igual à tensão de cedência).

Obviamente, vai atingir-se um valor de carga (P_c) em que a tensão na barra 1 atinge a tensão de cedência. Nestas circunstâncias toda a estrutura entra na **fase plástica** (estamos a admitir que a barra 2, entretanto, não atingiu a rotura).



Atendendo às equações do equilíbrio estático:

$$V_A + \Omega\sigma_c + 2\Omega\sigma_c - 2P_c = 0$$

$$\Omega\sigma_c \times l + 2\Omega\sigma_c \times 2l - P_c \times l - P_c \times 2l = 0 \rightarrow \Omega\sigma_c + 4\Omega\sigma_c - 3P_c = 0$$

Assim o valor da *carga de cedência da estrutura (limiting force)*, P_c :

$$P_c = \frac{5}{3}\sigma_c\Omega$$

Relembrando que:

$$P' = \frac{3}{2}\sigma_c\Omega$$

Obtém-se: $P_c = 1.11P'$

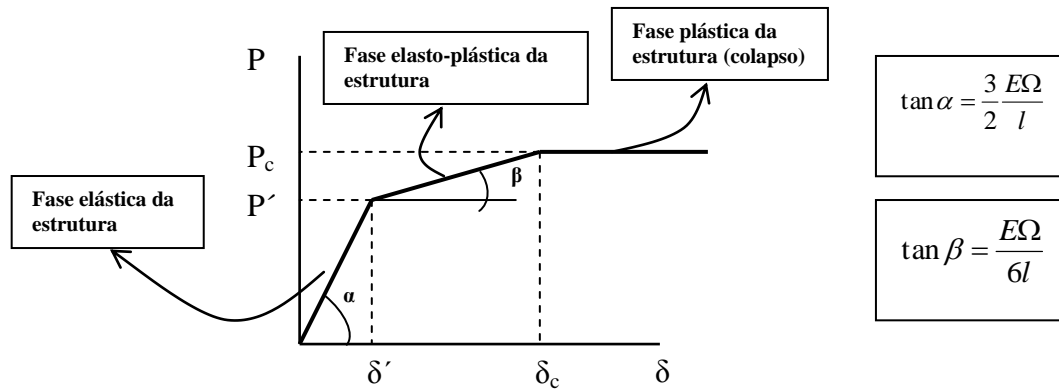
A *carga de cedência da estrutura* é 11% superior à *carga limite para a fase elástica da estrutura*.

O deslocamento δ_c do vértice da estrutura quando se atinge a cedência da estrutura pode ser encontrado, atendendo a que:

$$\delta_c = 2\Delta l_1 = \frac{2N_1 l}{E\Omega} = \frac{2\sigma_c \Omega l}{E\Omega}$$

$$\delta_c = \frac{2\sigma_c l}{E}$$

Com o aparecimento da *fase plástica* da estrutura, os deslocamentos apreciáveis causam alterações inaceitáveis na estrutura a que podemos identificar como o *colapso da estrutura*.



Relembrando que:

$$\delta' = \frac{\sigma_c l}{E}$$

fica:

$$\delta_c = 2\delta'$$

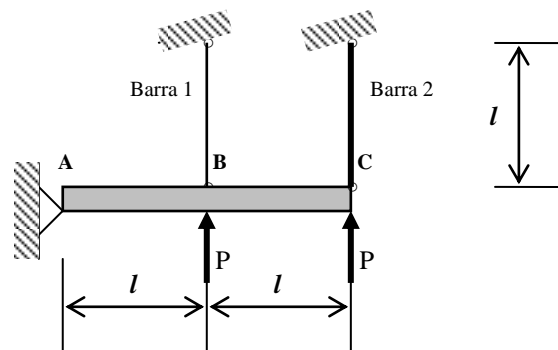
A equação anterior mostra que, no momento da cedência da estrutura, o deslocamento do vértice C é o dobro do deslocamento verificado quando se atinge o limite da fase elástica da estrutura, ou seja, no momento da cedência da estrutura o alongamento Δl_2 (ou extensão ϵ_2) da barra 2 é o dobro do alongamento (ou extensão) na mesma barra quando começa a ceder.

Encontra-se a barra 2 ainda em patamar de cedência, aquando da cedência da estrutura?

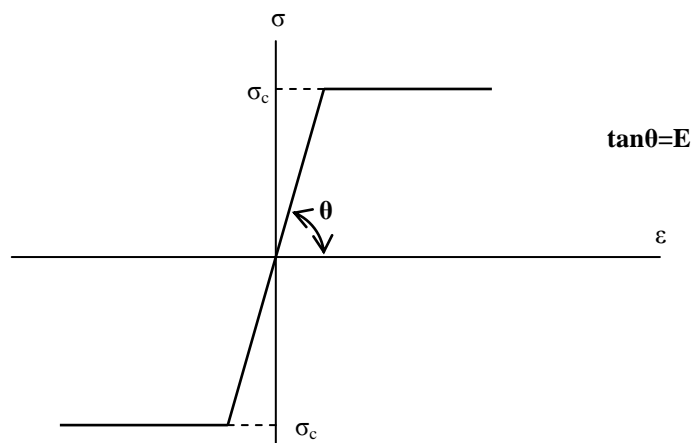
Num aço macio o patamar de cedência vai desde extensões de 0.001 a 0.015.

Como $2 \ll 15$, a barra 2 ainda está em patamar de cedência.

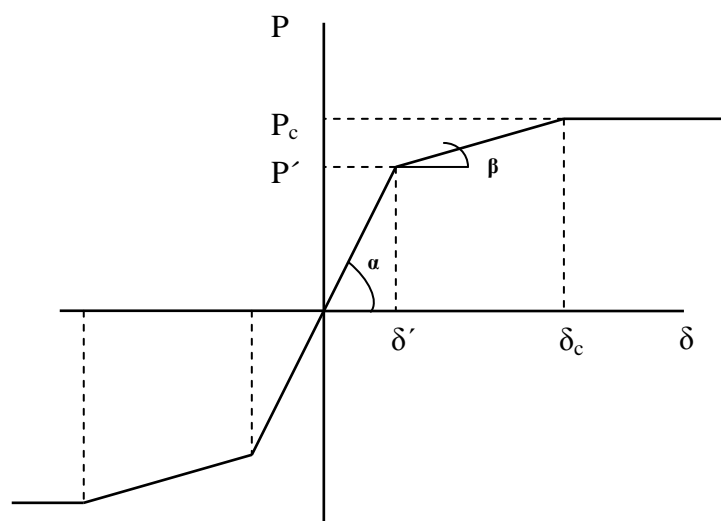
Admitindo a situação em que as forças aplicadas na barra ABC, têm o sentido da figura:



Admitindo que o material das barras têm comportamento elástico perfeitamente plástico (*perfect plasticity*) semelhante, quer em tracção, quer em compressão, com o mesmo valor de tensão de cedência:



Então, a figura seguinte apresenta-se o comportamento da estrutura em compressão, nas suas diferentes fases:



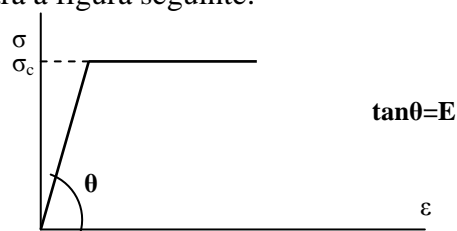
6.1. Problemas resolvidos

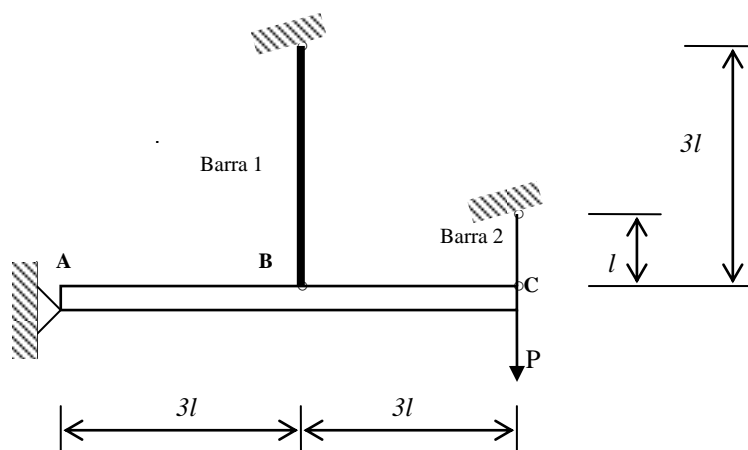
P6.1) Considere a seguinte estrutura onde a barra ABC pode ser considerada como indeformável.

Admita:

Secção da barra 1 = 5Ω ; Secção da barra 2 = Ω ;

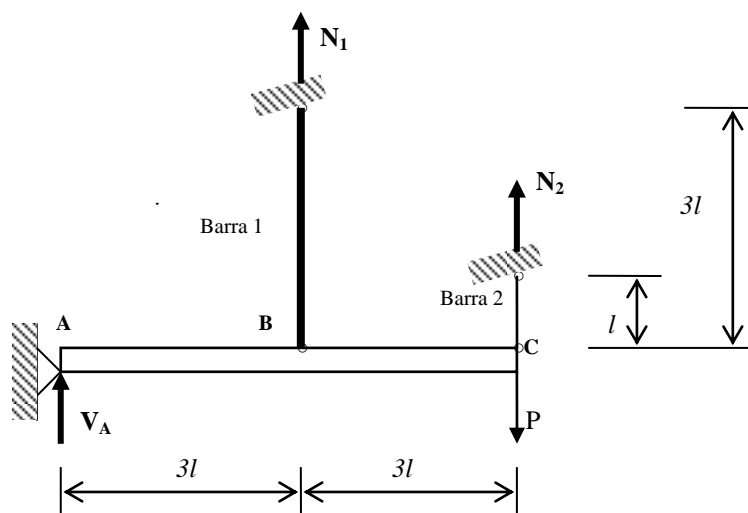
As barras 1 e 2 são feitas de material com comportamento elástico perfeitamente plástico como mostra a figura seguinte:





Utilizando a análise elasto-plástica, determine:

a) Os esforços nas barras 1; 2. Sugere-se o método dos deslocamentos. (2 valores)

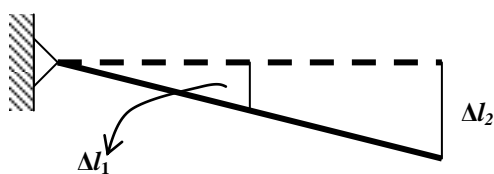


Das equações da estática tira-se:

$$V_A + N_1 + N_2 - P = 0$$

$$N_1 \times 3l + N_2 \times 6l - P \times 6l = 0 \rightarrow N_1 + 2N_2 - 2P = 0$$

Recorrendo ao método dos deslocamentos:



$$\frac{\Delta l_2}{6l} = \frac{\Delta l_1}{3l}$$

$$\Delta l_2 = 2\Delta l_1$$

Substituindo na equação anterior os alongamentos pelas forças axiais que os produzem, obtém-se:

$$\frac{N_2 \times l}{E \times \Omega} = 2 \frac{N_1 \times 3l}{E \times 5\Omega}$$

$$N_2 = \frac{6}{5} N_1$$

A equação anterior – equação da compatibilidade das deformações – é a 4ª equação que faltava.

Resolvendo as 4, obtém-se:

$$N_1 = 0.588P \quad N_2 = 0.706P \quad V_A = -0.294P$$

b) Ordem de cedência das barras; (0.5 valor)

$$\sigma_1 = \frac{0.588P}{5\Omega} = 0.1176 \frac{P}{\Omega} \quad \sigma_2 = \frac{0.706P}{\Omega} = 0.706 \frac{P}{\Omega}$$

A barra 2 será a primeira a atingir o a tensão de cedência.

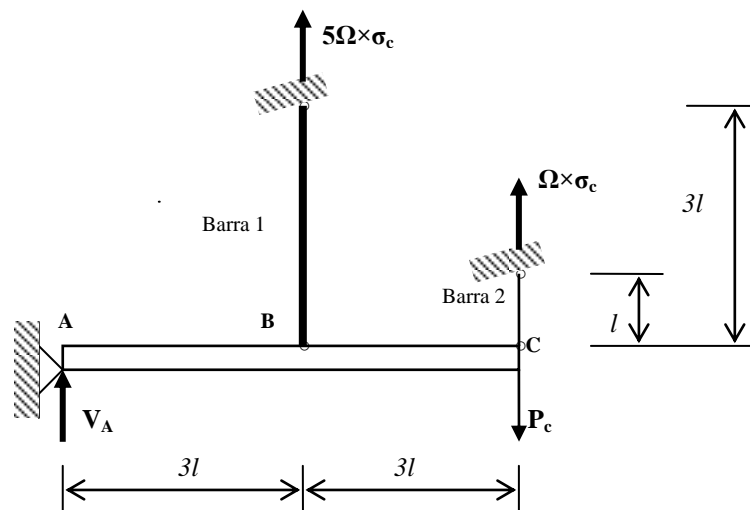
c) O valor da *carga limite para a fase elástica da estrutura*; (1 valor)

$$\sigma_c = \frac{0.706P'}{\Omega} \quad \boxed{P' = 1.416 \sigma_c \Omega}$$

d) O deslocamento vertical do ponto C, nas condições da alínea anterior; (1 valor)

$$\delta' = \Delta l_2 = \frac{N_2 l}{E \Omega} = \frac{\sigma_c l}{E}$$

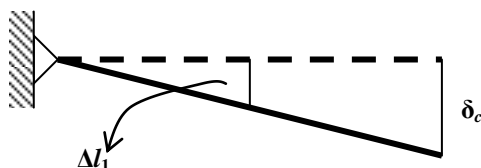
e) A *carga de cedência da estrutura*; (1 valor)



$$\Omega \sigma_c \times 6l + 5\Omega \sigma_c \times 3l - P_c \times 6l = 0 \rightarrow 21\Omega \sigma_c - 6P_c = 0$$

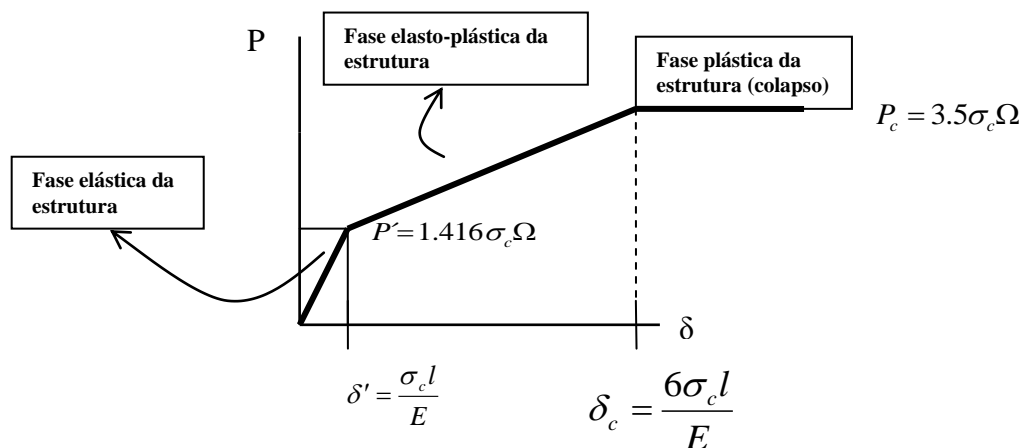
$$P_c = 3.5\sigma_c\Omega$$

f) O deslocamento vertical do ponto C, nas condições da alínea anterior; (1 valor)

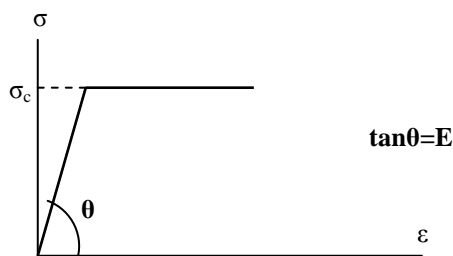


$$\delta_c = 2\Delta_1 = 2 \times \frac{N_1 \times 3l}{E \times 5\Omega} = 2 \frac{\sigma_c \times 3l}{E} \quad \delta_c = \frac{6\sigma_c l}{E}$$

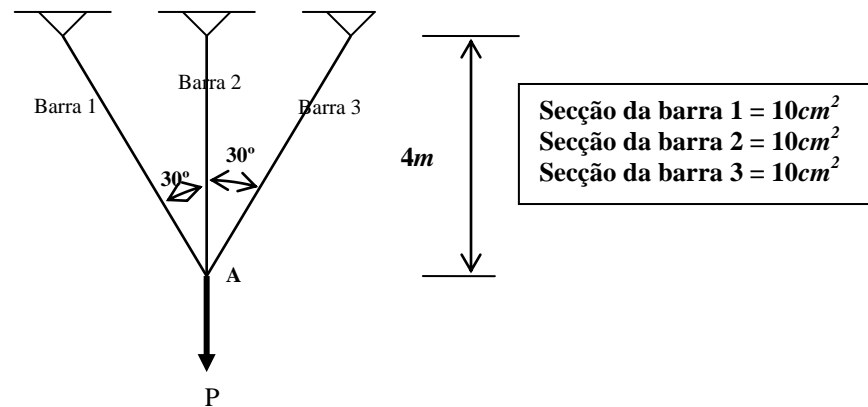
g) Trace o gráfico da carga na estrutura (P) em função do deslocamento vertical (δ), do ponto C, identificando as fases elástica, elasto-plástica e de colapso da estrutura (0,5 valor).



P6.2) Considere a seguinte estrutura de 3 barras unidas numa articulação em A. As barras são feitas de material com comportamento elástico perfeitamente plástico como mostra a figura seguinte:



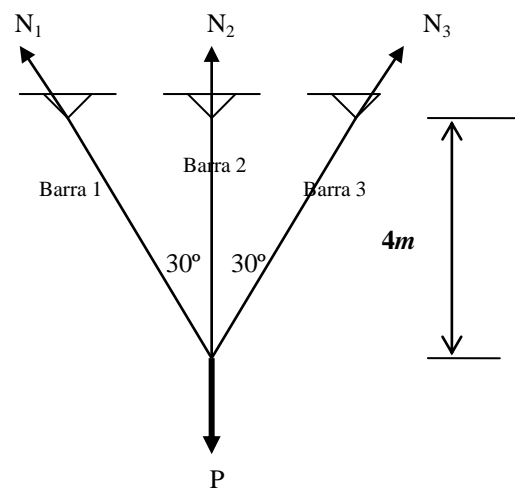
com 235MPa de tensão de cedência e 200GPa de módulo de elasticidade.



Utilizando a análise elasto-plástica, determine:

- Ordem de cedência das barras;
- Determinar a *carga limite para a fase elástica da estrutura* e o respectivo deslocamento da articulação A (*displacement of the joint*);
- Determinar a *carga de cedência da estrutura* e o respectivo deslocamento da articulação A.

Resolução

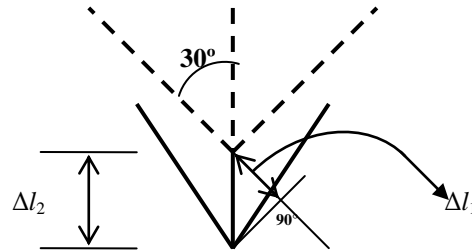


Das equações da estática tira-se:

$$N_1 = N_3$$

$$P = 2N_1 \cos 30^\circ + N_2$$

A figura seguinte representa a vizinhança da articulação A, estando representado a traço contínuo a nova posição das barras:



A equação de compatibilidade dos deslocamentos, é:

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cos 30^\circ$$

Substituindo na equação anterior os alongamentos pelas forças axiais que os produzem, obtém-se:

$$N_1 = N_2 \cos^2 30^\circ = 0.75 N_2$$

Esta equação, juntamente com as equações da estática, permite determinar os esforços nas barras:

$$\boxed{N_1 = N_3 = 0.326P} \quad \boxed{N_2 = 0.435P}$$

a) Qual é a primeira barra a ceder?

Atendendo a:

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cos 30^\circ$$

$$\varepsilon_1 l_1 = \varepsilon_2 l_2 \cos 30^\circ$$

Substituindo pelos valores, fica:

$$\varepsilon_1 = 0.75 \varepsilon_2$$

Como $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, a barra 2 é a primeira a ceder.

b) Quando a tensão na barra 2 atingir a tensão de cedência ($\sigma_2 = \sigma_c$), atinge-se o limite da fase elástica da estrutura.

$$\sigma_2 = 235 \times 10^3 \text{ kPa}$$

Atendendo ao resultado acima indicado para o esforço axial na barra 2:

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{\Omega} = \frac{0.435P'}{10 \times 10^{-4}} = 235 \times 10^3 \text{ kPa}$$

Resolvendo em ordem a P' , fica:

$$P' = 540.2 \text{ kN}$$

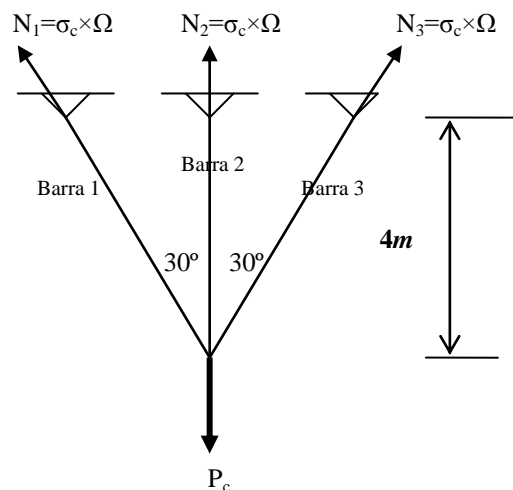
O deslocamento da articulação A, é:

$$\delta' = \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E \Omega} = \frac{\sigma_c l_2}{E} = \frac{235 \times 10^3 \times 4}{200 \times 10^6} = 4.7 \times 10^{-3} m = 0.47 cm$$

Conclui-se que a **carga limite para a fase elástica da estrutura** e o respectivo deslocamento da articulação A têm, respectivamente, os valores:

$$P' = 540.2 kN \quad \delta' = 0.47 cm$$

c) Quando as barras 1 e 3 atingirem, igualmente, a tensão de cedência ($\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma_c$), então alcançou-se **carga de cedência da estrutura** P_c



$$P_c = 2N_1 \cos 30^\circ + N_2$$

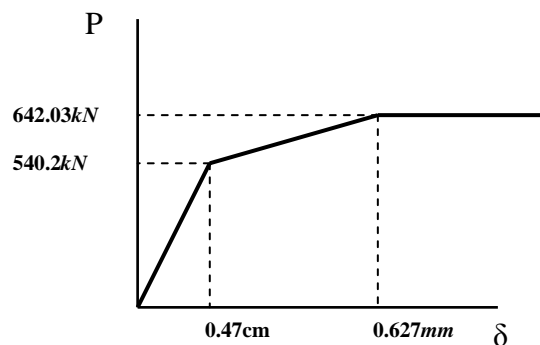
$$N_1 = N_2 = N_3 = \sigma_c \Omega = 235 \times 10^3 \times 10 \times 10^{-4} = 235 kN$$

$$P_c = 642.03 kN$$

O deslocamento δ_c da secção A da estrutura é igual a Δl_2 , ou seja:

$$\delta_c = \Delta l_2 = \frac{\Delta l_1}{\cos 30^\circ} = \frac{N_1 l_1}{E \Omega \cos 30^\circ} = \frac{\sigma_c l_1}{E \cos 30^\circ} = 6.27 \times 10^{-3} m = 0.627 cm$$

Resumindo:



6.2. Problemas de aplicação

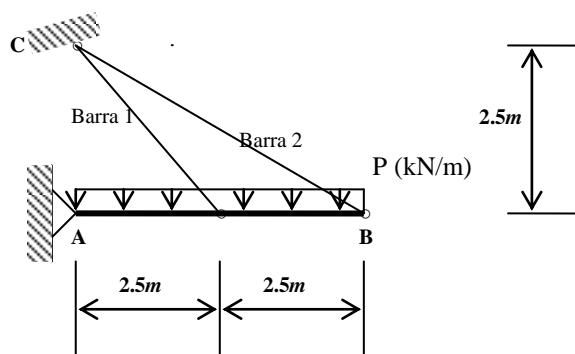
P6.3) Considere a seguinte estrutura onde a barra AB pode ser considerada como indeformável.

Admita:

Secção da barra 1 = 5cm^2 ;

Secção da barra 2 = 5cm^2 ;

As barras 1 e 2 são feitas de material com comportamento elástico perfeitamente plástico com 235MPa de tensão de cedência e 200GPa de módulo de elasticidade.



Utilizando a análise elasto-plástica, determine:

a) Ordem de cedência das barras 1 e 2;

Resposta: Barra 1, visto que $\varepsilon_2 = 0.8\varepsilon_1$

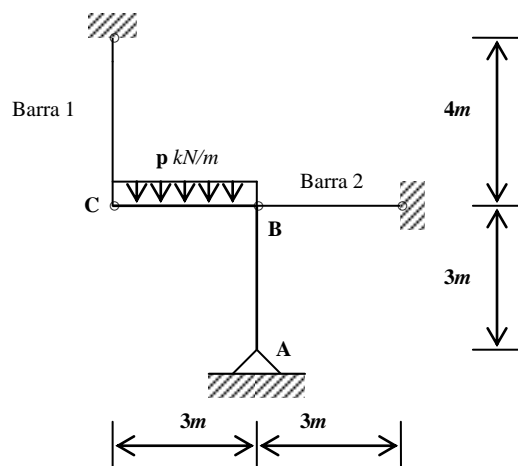
b) O valor da carga p e o deslocamento da secção B, correspondente ao momento em que se dá a cedência da primeira barra;

Resposta: $p' = 33.43\text{kN/m}$; $\delta' = 1.175\text{cm}$

c) A carga de cedência da estrutura e respectivo deslocamento da secção B.

Resposta: $p_c = 37.64\text{kN/m}$; $\delta_c = 1.469\text{cm}$

P6.4)



Na estrutura anterior a barra ABC pode ser considerada como indeformável.

Admita:

Secção da barra 1 = 4cm^2 ;

Secção da barra 2 = 4cm^2 ;

As barras 1 e 2 são feitas de material com comportamento elástico perfeitamente plástico com 235MPa de tensão de cedência e 206GPa de módulo de elasticidade.

Utilizando a análise elasto-plástica, determine:

a) Ordem de cedência das barras 1 e 2;

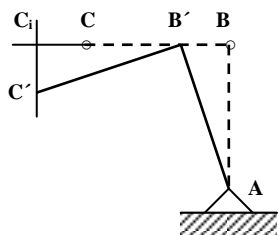
Resposta: Barra 2, visto que $\varepsilon_2 = 1.33\varepsilon_1$

b) O valor da carga p e o deslocamento da secção C, correspondente ao momento em que se dá a cedência da primeira barra;

Resposta: $p' = 109.68\text{kN/m}$; $\delta' = 0.342\text{cm}$

c) A carga de cedência da estrutura e respectivo deslocamento da secção C.

Admita que a deformação das barras 1 e 2 leva a barra ABC à posição $AB'C'$ (figura seguinte), isto é, a barra roda como um todo, mantendo o ângulo recto e sem deformação de cada um dos seus troços AB e BC, o que significa que na figura seguinte o segmento CC_1 é igual ao segmento BB' .

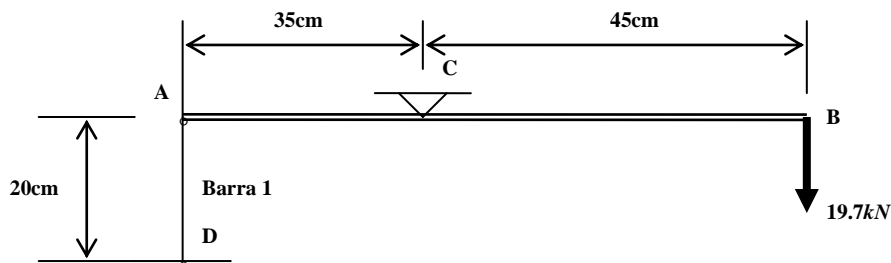


Resposta: $p_c = 125.33\text{kN/m}$; $\delta_c = 0.456\text{cm}$

7. Caderno de problemas de esforço axial

7.1. Estruturas isostáticas em tracção e compressão axial

1) Para a estrutura plana formada pela barra AB, considerada rígida e pela barra 1:

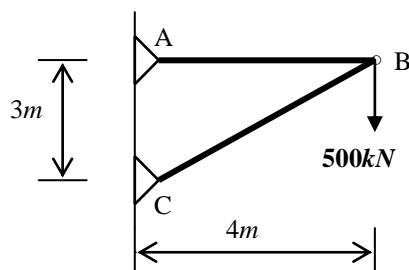


Admita que a barra 1 tem secção circular com 1.27cm de diâmetro e é feita de material com módulo de Young $E=206\text{GPa}$.

a) Determine a tensão normal na barra 1 e o deslocamento da extremidade B.

Solução: $\sigma_1 = 200\text{MPa}$; $\delta_b = 0.25\text{mm}$

2) O suporte ABC é formado por duas barras AB e CB ligadas em B por uma rótula.



Admita que ambas as barras AB e BC devem ser constituídas por perfiz tubulares de secção circular (ver tabela anexa) de aço S 235 que apresenta os seguintes valores:

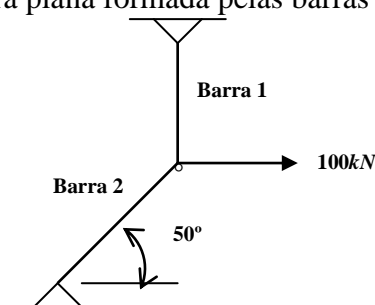
$\sigma_{Rd} = 235MPa$; $E = 206GPa$

a) Dimensione a barra AB (indicando da tabela a referência de diâmetro exterior e espessura).

b) De acordo com o dimensionamento anterior e supondo que a barra BC é um perfil tubular de secção circular $d=193.7mm$ e espessura $t=10mm$ (ver tabela técnica anexa), determine o deslocamento do ponto B (componentes vertical e horizontal).

Solução: a) $\varnothing = 101.6mm$; espessura = $10mm$. b) $\delta_v=11.84mm$; $\delta_h=4.49mm$

3) Admita a estrutura plana formada pelas barras 1 e 2 unidas por uma articulação:



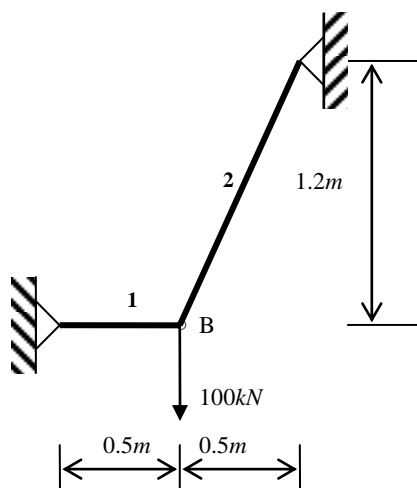
A barra 1 tem $1m$ de comprimento e a barra 2 tem $1.5m$ de comprimento. Ambas as barras são varões de $5cm$ de diâmetro, feitas de material com módulo de Young $E=200GPa$.

a) Determine as tensões normais nas barras;

b) Calcule o deslocamento vertical e horizontal da articulação.

Solução: $\sigma_1 = 60.7MPa$; $\sigma_2 = 79.3MPa$ b) $\delta_v = 0.304mm$; $\delta_h = 1.29mm$

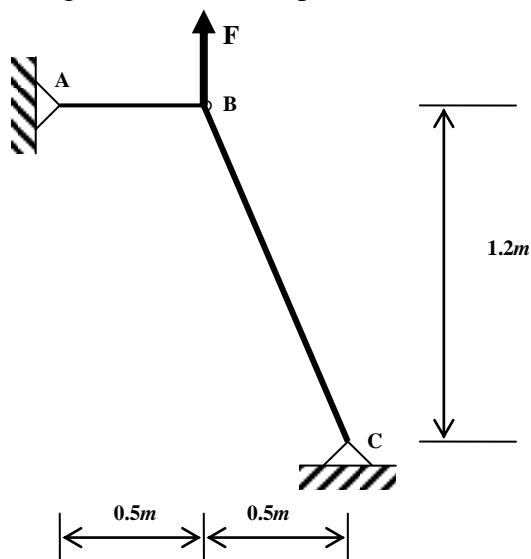
4) O suporte da figura é formado pelas bielas 1 e 2. Em B tem aplicada uma acção cujo valor de cálculo é $100kN$.



- Calcule as reacções nos apoios;
- Assuma que vai usar na barra 1 um perfil normalizado com secção $\Omega_1=3.5\text{cm}^2$ e na barra 2 um perfil normalizado com secção $\Omega_2=10.0\text{cm}^2$. Admitindo 235MPa para o valor de cálculo da tensão resistente do material, verifique a resistência da estrutura;
- Admitindo um comportamento elástico linear com $E=200\text{GPa}$, determine os alongamentos de cada uma das barras;
- Determine a componente horizontal e vertical do deslocamento do ponto B.

Solução: a) $N_1=41.67\text{kN}$, $N_2=108.33\text{kN}$; b) $\sigma_1=119.06\text{MPa} < 235\text{MPa}$;
 $\sigma_2=108.33\text{MPa} < 235\text{MPa}$, verifica; c) $\Delta l_1=0.298\text{mm}$, $\Delta l_2=0.704\text{mm}$; d) $\delta_h=0.298\text{mm}$, $\delta_v=0.887\text{mm}$

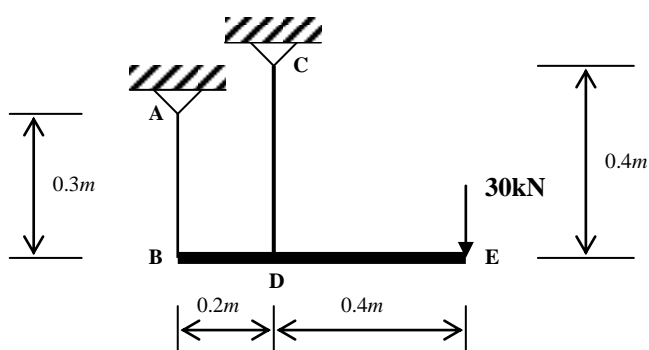
- 5) A estrutura da figura é constituída por duas bielas de aço:



- Determine o máximo do valor de cálculo da força F que se pode aplicar admitindo que as barras são varões (secção circular cheia) com 1cm de diâmetro;
 - Admita $E = 200\text{GPa}$; $\sigma_{Rd} = 275\text{MPa}$
 - Calcule o valor do deslocamento **na horizontal** do ponto B nas condições da alínea anterior.
- Solução: a) $F \leq 19.93\text{kN}$; b) $\delta_h = 0.264\text{mm}$

- 6) A barra rígida BDE está suspensa por duas bielas AB e CD.
 A biela AB é de alumínio ($E = 70\text{GPa}$), com área de secção transversal de 500mm^2 .

A biela CD é de aço ($E = 200\text{GPa}$), com área de secção transversal de 600mm^2 .



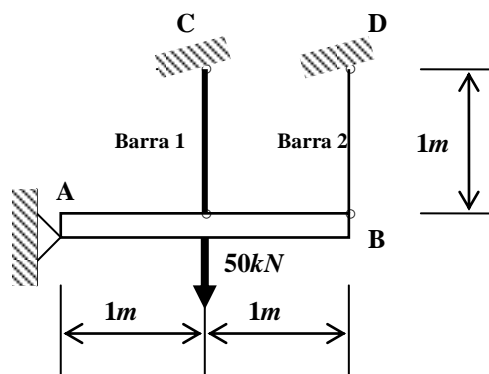
Para a força de 30kN , determine:

- Deslocamento de B;
- Deslocamento de D;
- Deslocamento de E.

Solução: a) $\delta_B = -0.514\text{mm}$; b) $\delta_D = 0.3\text{mm}$; c) $\delta_E = 1.93\text{mm}$

7.2. Estruturas hiperestáticas em tracção e compressão axial

7) A figura mostra uma estrutura plana formada por uma **barra rígida AB** e duas barras 1 e 2:



Admita as seguintes características das barras:

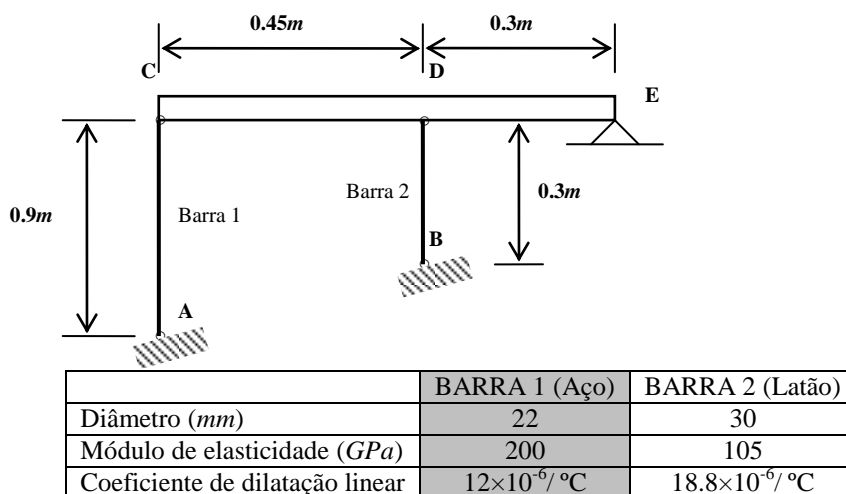
Barras	Secção (cm^2)	E (GPa)	α ($^{\circ}\text{C}$)
1	10	90	18×10^{-6}
2	5	200	12×10^{-6}

A estrutura está sujeita a uma força aplicada de 50kN e a um aumento de temperatura de 35°C

- Calcule as reacções nos apoios A, C e D. Sugere-se o *método dos deslocamentos*;
- Calcule as tensões nas barras 1 e 2.

Solução: a) $N_1 = -21.69\text{kN}$, $N_2 = 35.84\text{kN}$, $V_A = 35.85\text{kN}$; b) $\sigma_1 = -21.69\text{MPa}$; $\sigma_2 = 71.69\text{MPa}$

8) A figura mostra uma estrutura plana formada por uma barra rígida horizontal, ligada a duas barras 1 e 2.



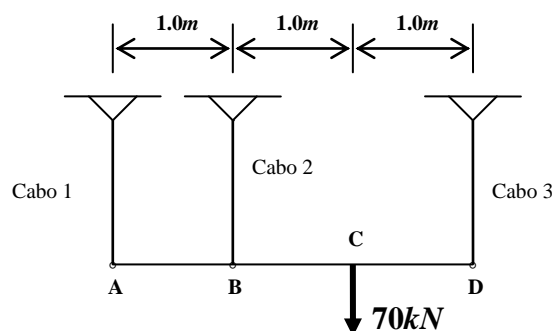
Admitindo que **UNICAMENTE** a barra 2 é submetida a um aumento de temperatura de 30°C , determine:

- Os esforços nas barras 1 e 2. Sugere-se o método dos deslocamentos.
- A tensão na barra 2, indicando, ainda, se está à compressão ou à tracção.

Solução: a) $N_1=11.4\text{kN}$, $N_2=-28.5\text{kN}$; b) $\sigma_2=-40.32\text{MPa}$

9) Considere a seguinte estrutura plana formada pela barra rígida ABCD, a qual está suspensa por 3 cabos idênticos como indicado na figura:

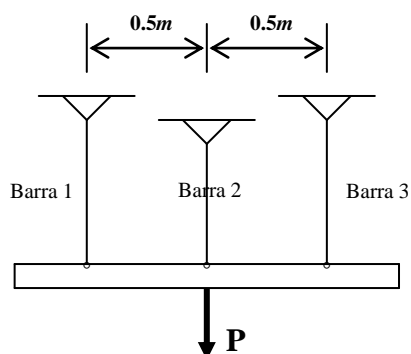
Determine a tracção em cada cabo. Sugere-se o método dos deslocamentos.



Solução: a) $N_1=10\text{kN}$, $N_2=20\text{kN}$, $N_3=40\text{kN}$

7.3. Estruturas hiperestáticas em fase elásto-plástica

10) A figura mostra uma estrutura plana formada por uma barra rígida horizontal, ligada a três barras verticais 1, 2, 3. Considere que as barras verticais têm a mesma secção de 1.77cm^2 .



As barras 1 e 3 têm $1m$ de comprimento e a barra 2 tem $0.75m$ de comprimento. As barras 1, 2 e 3 são feitas do mesmo material, com comportamento elástico perfeitamente plástico como mostra a figura seguinte:

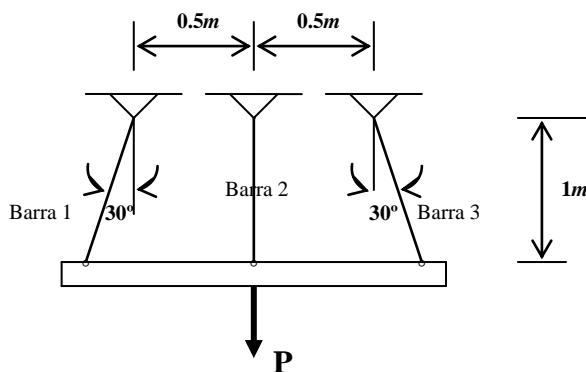


Utilizando a análise elasto-plástica, determine:

- Os esforços nas barras verticais utilizando o método dos deslocamentos;
- Os esforços nas barras verticais utilizando o método das forças;
- Ordem de cedência das barras;
- O valor da **carga limite para a fase elástica da estrutura**;
- O deslocamento vertical da barra rígida, nas condições da alínea anterior;
- A **carga de cedência da estrutura**;
- O deslocamento vertical da barra rígida, nas condições da alínea anterior;
- Trace o gráfico da carga na estrutura (P) em função do deslocamento vertical (δ), referindo a fase elástica, elasto-plástica e de colapso da estrutura;
- Após se ter solicitado a estrutura até à sua fase elasto-plástica, é efectuada a descarga. Determine o valor dos esforços nas barras durante a descarga. Admita uma extensão residual ϵ_r na barra deformada plasticamente;
- O deslocamento vertical da barra rígida, nas condições da alínea anterior;
- Após ter sido retirada a carga P determine o valor dos esforços residuais nas barras e o deslocamento vertical residual da barra rígida.

Solução: a)/b) $N_1=N_3=0.3P$; $N_2=0.4P$; c) Barra 2 cede em 1º lugar; d) $P_e=103.99kN$; e) $\delta'=\Delta l_2=0.88mm$; f) $P_c=124.79kN$; f) $\delta_c=1.2mm$

11) A figura mostra uma estrutura plana formada por uma barra rígida horizontal, ligada a três barras 1, 2, 3, com a mesma secção de $1.77cm^2$.



A barra 2 tem 1m de comprimento. As barras 1, 2 e 3 são feitas do mesmo material, com comportamento elástico perfeitamente plástico com tensão de cedência indicada na figura seguinte:

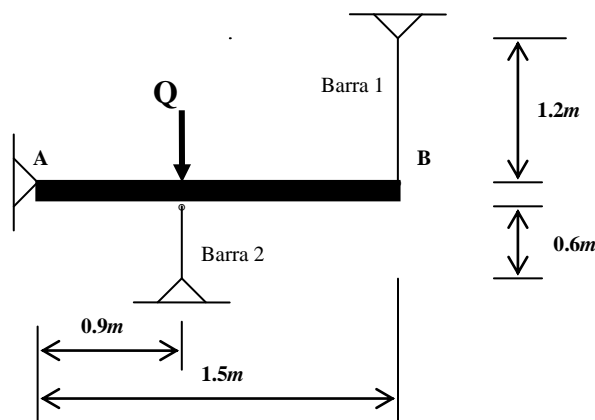


Utilizando a análise elasto-plástica, determine:

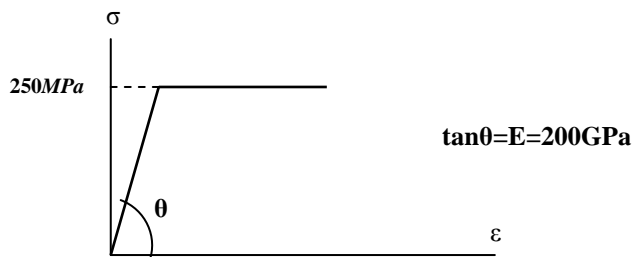
- Os esforços nas barras verticais. Sugere-se o método dos deslocamentos.
- Ordem de cedência das barras;
- O valor da carga P correspondente ao momento em que se dá a cedência da primeira barra;
- O deslocamento vertical da barra rígida, nas condições da alínea anterior;
- A carga de cedência da estrutura;
- O deslocamento vertical da barra rígida, nas condições da alínea anterior.

Solução: a) $N_1=N_3= 0.326P$; $N_2=0.435P$; c) $P_c=95.62kN$; d) $\Delta l_{2,3}=1.175mm$; e) $P_c=113.64kN$; f) $\delta_c=1.567mm$

12) A figura mostra uma estrutura plana formada por uma **barra rígida** AB, suportada por duas bielas 1 e 2, com a mesma secção de $3.2cm^2$.



As bielas são feitas do mesmo material, com comportamento elástico perfeitamente plástico, com tensão de cedência (idêntica em tracção e compressão) indicada na figura seguinte:



Utilizando a análise elásto-plástica e ignorando a encurvadura por efeito de compressão, determine:

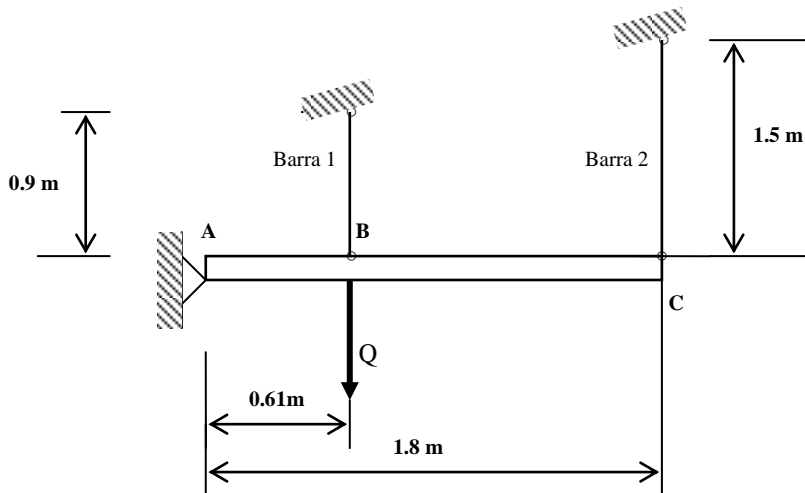
- Ordem de cedência das barras;
- O valor da **carga limite para a fase elástica da estrutura**;
- O deslocamento vertical da barra rígida, **em B**, nas condições da alínea anterior;
- A **carga de cedência da estrutura**;
- O deslocamento vertical da barra rígida, **em B**, nas condições da alínea anterior;
- Trace o gráfico da carga na estrutura (Q) em função do deslocamento vertical (δ) do ponto **B**, identificando a fase elástica, elásto-plástica e de colapso da estrutura.

Solução: b) $Q_e=191.11kN$; c) $\Delta_B=1.25mm$; d) $Q_c=213.33kN$; e) $\delta_B=1.5mm$

13) Considere a seguinte estrutura onde a barra ABC pode ser considerada como indeformável.

Admita que a secção das barras 1 e 2 é rectangular de $6.35\text{ mm} \times 38.1\text{ mm}$;

As barras 1 e 2 são feitas de material com comportamento elástico perfeitamente plástico com $E = 200\text{ GPa}$ e tensão de cedência igual a 250 MPa .



Utilizando a análise elasto-plástica, determine:

- Os esforços nas barras 1; 2. Sugere-se o método dos deslocamentos.
- Ordem de cedência das barras;
- O valor da **carga limite para a fase elástica da estrutura**;
- O deslocamento vertical do ponto **C**, nas condições da alínea anterior;
- A **carga de cedência da estrutura**;
- O deslocamento vertical do ponto **C**, nas condições da alínea anterior;
- Trace o gráfico da carga na estrutura (Q) em função do deslocamento vertical (δ), do ponto **C**, identificando as fases elástica, elasto-plástica e de colapso da estrutura.

Solução: a) $N_1=0.161Q$; $N_2=0.284Q$; c) $Q_e=212.97kN$; d) $\Delta_c=1.87mm$; e) $Q_c=238.95kN$; f) $\delta_c=3.32mm$

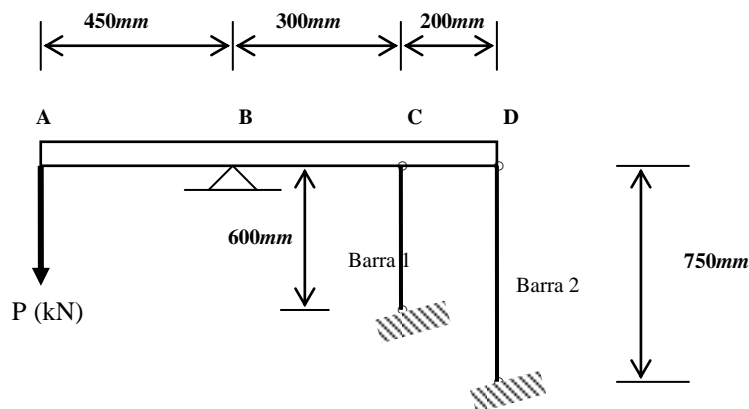
14) Considere a seguinte estrutura onde a barra ABCD pode ser considerada como indeformável.

Admita que a secção das barras 1 e 2 é circular:

Diâmetro da barra 1 = 10mm

Diâmetro da barra 2 = 15mm

As barras 1 e 2 são feitas de material com comportamento elástico perfeitamente plástico com $E = 200GPa$ e tensão de cedência igual a $250MPa$.



Utilizando a análise elasto-plástica, determine:

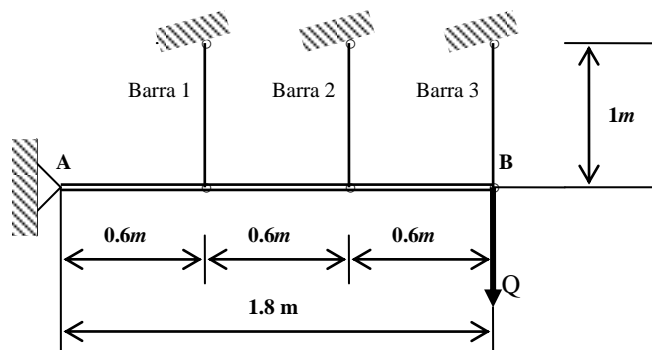
- Os esforços nas barras 1; 2. Sugere-se o método dos deslocamentos;
- Ordem de cedência das barras;
- O valor da **carga limite para a fase elástica da estrutura**;
- O deslocamento vertical do ponto A, nas condições da alínea anterior;
- A **carga de cedência da estrutura**;
- O deslocamento vertical do ponto A, nas condições da alínea anterior;
- Trace o gráfico da carga na estrutura (P) em função do deslocamento vertical (δ), do ponto A, identificando as fases elástica, elasto-plástica e de colapso da estrutura.

Solução: a) $N_1=0.25P$; $N_2=0.75P$; c) $P_e=58.91kN$; d) $\Delta_A=0.844mm$; e) $P_c=62.18kN$; f) $\delta_c=1.125mm$

15) Considere a seguinte estrutura onde a barra AB é considerada como indeformável e as barras 1, 2 e 3 estão articuladas em ambas as extremidades.

Admita que a secção das barras 1, 2 e 3 é rectangular de $6mm \times 40mm$;

As barras 1, 2 e 3 são feitas do mesmo material com $E = 200GPa$ e tensão de cedência igual a $250MPa$.



- Determine os esforços nas barras 1; 2 e 3. Sugere-se o método dos deslocamentos;
- Determine a barra que primeiro atinge a tensão de cedência;
- O valor da **carga limite para a fase elástica da estrutura**;

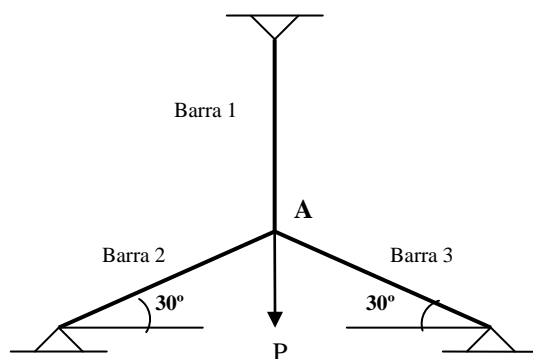
- d) O deslocamento vertical do ponto B, nas condições da alínea anterior;
 e) A **carga de cedência da estrutura**.

Solução: a) $N_1=0.2143Q$; $N_2=0.4286Q$; $N_3=0.6429Q$; $V_A=0.2857Q$; c) $Q_c=93.33kN$; d) $\Delta_c=1.25mm$; e) $Q_c=120kN$

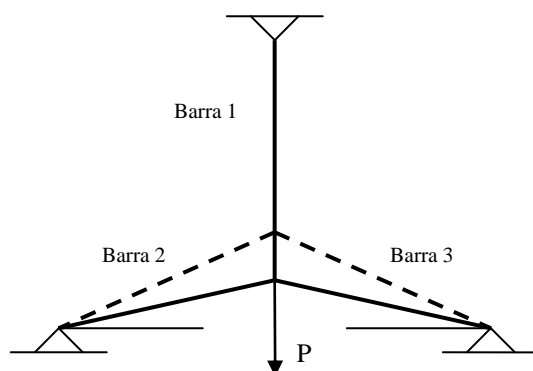
16) Considere a seguinte estrutura de 3 barra articuladas, as quais são feitas de material com comportamento elástico perfeitamente plástico como mostra a figura seguinte:



com 235 MPa de tensão de cedência e 200 GPa de módulo de elasticidade. Admita que as barras são iguais, tendo comprimento = 2 m e secção = 10 cm².



- a) Calcule a força em cada uma das barras provocadas pelo carregamento P.
 Sugestão - utilize o método dos deslocamentos, admitindo a seguinte figura em que foram exageradamente acentuadas as deformações da estrutura:



Utilizando a análise elasto-plástica, determine:

- b) Ordem de cedência das barras;
 c) O valor da **carga limite para a fase elástica da estrutura**;
 d) O deslocamento do ponto A nas condições da alínea anterior;
 e) A **carga de cedência da estrutura**;
 f) O deslocamento do ponto A nas condições da alínea anterior;

g) Trace o gráfico da carga na estrutura (P) em função do deslocamento vertical (δ), referindo a fase elástica, elasto-plástica e de colapso da estrutura.

Solução: a) $N_1=N_3=1/3P$; $N_2=2/3P$; b) Barra 1 cede em 1º lugar; c) $P_c=352.5kN$; d) $\delta'=\Delta l_1=2.35mm$;
e) $P_c=470kN$; f) $\delta_c=4.7mm$

Referências

Dias da Silva, V. – *Mecânica e Resistência dos Materiais*, capítulo VI – Esforço axial. 2ª Edição. Edição: ZUARI – Edição de Livros Técnicos, Lda. 1999. ISBN: 972-98155-0-X.

William Nash – *Resistência de Materiais*, capítulo I – Tracção e compressão e capítulo II – Estruturas estaticamente indeterminadas em tracção e compressão. Edição: McGraw-Hill . 2001. ISBN: 972-773-090-6.