Universidade de Évora

O papel das representações na resolução de problemas de Matemática:

um estudo no 1.º ano de escolaridade

Maria Elisa Calado Pinto

Orientadora: Professora Doutora Ana Paula Canavarro

Mestrado em Educação Matemática

2009

Universidade de Évora

O papel das representações na resolução de problemas de Matemática:

um estudo no 1.º ano de escolaridade

Maria Elisa Calado Pinto

Dissertação Apresentada para a Obtenção do Grau de Mestre em Educação e na Especialidade de Educação Matemática

Orientadora: Professora Doutora Ana Paula Canavarro

2009

Resumo

O papel das representações na resolução de problemas de Matemática: um estudo no 1.º ano de escolaridade

Este estudo tem como objectivo investigar o papel que as representações, construídas por alunos do 1.º ano de escolaridade, desempenham na resolução de problemas de Matemática. Mais concretamente, a presente investigação procura responder às seguintes questões: Que representações preferenciais utilizam os alunos para resolver problemas? De que forma é que as diferentes representações são influenciadas pelas estratégias de resolução de problemas utilizadas pelos alunos? Que papel têm os diferentes tipos de representação na resolução dos problemas?

Nesta investigação assume-se que a resolução de problemas constitui uma actividade muito importante na aprendizagem da Matemática no 1.º Ciclo do Ensino Básico. Os problemas devem ser variados, apelar a estratégias diversificadas de resolução e permitir diferentes representações por parte dos alunos. As representações activas, icónicas e simbólicas constituem importantes ferramentas para os alunos organizarem, registarem e comunicarem as suas ideias matemáticas, nomeadamente no âmbito da resolução de problemas, servindo igualmente de apoio à compreensão de conceitos e relações matemáticas.

A metodologia de investigação segue uma abordagem interpretativa tomando por *design* o estudo de caso. Trata-se simultaneamente de uma investigação sobre a própria prática, correspondendo os quatro estudos de caso a quatro alunos da turma de 1.º ano de escolaridade da investigadora. A recolha de dados teve lugar durante o ano lectivo 2007/2008 e recorreu à observação, à análise de documentos, a diários, a registos áudio/vídeo e ainda a conversas com os alunos. A análise de dados que, numa primeira fase, acompanhou a recolha de dados, teve como base o problema e as questões da investigação bem como o referencial teórico que serviu de suporte à investigação. Com base no referencial teórico e durante o início do processo de análise, foram definidas as categorias de análise principais, sujeitas posteriormente a um processo de adequação e refinamento no decorrer da análise e tratamento dos dados recolhidos com vista à construção dos casos em estudo.

Os resultados desta investigação apontam as representações do tipo icónico e as do tipo simbólico como as representações preferenciais dos alunos, embora sejam utilizadas de formas diferentes, com funções distintas e em contextos diversos. Os elementos simbólicos apoiam-se frequentemente em elementos icónicos, sendo estes últimos que ajudam os alunos a descompactar o problema e a interpretá-lo. Nas representações icónicas enfatiza-se o papel do diagrama, o qual constitui uma preciosa ferramenta de apoio ao raciocínio matemático. Conclui-se ainda que enquanto as representações activas dão mais apoio a estratégias de resolução que envolvem simulação, as representações icónicas e simbólicas são utilizadas com estratégias diversificadas. As representações construídas, com papéis e funções diferentes entre si, e que desempenham um papel crucial na correcta interpretação e resolução dos problemas, parecem estar directamente relacionadas com as características da tarefa proposta no que diz respeito às estruturas matemáticas envolvidas.

Palavras-chave: resolução de problemas de Matemática; representações matemáticas; estratégias de resolução de problemas; ensino e aprendizagem da Matemática no 1.º Ciclo.

Abstract

The role of representations in mathematical problem solving: an investigation with first grade students

The objective of the present study is to investigate the role of the representations constructed by 1st grade students in mathematical problem solving. More specifically, this research is oriented by the following questions: Which representations are preferably used by students to solve problems? In which way the strategies adopted by the students in problem solving influence those distinct representations? What is the role of the distinct types of representation in the problems solving process?

In this research it is assumed that the resolution of problems is a very important activity in the Mathematics learning at the first cycle of basic education. The problems must be varied, appealing to diverse strategies of resolution and allow students to construct distinct representations. The active, iconic and symbolic representations are important tools for students to organize, to record and to communicate their mathematical ideas, particularly in problem solving context, as well as supporting the understanding of mathematical concepts and relationships.

The adopted research methodology follows an interpretative approach, and was developed in the context of the researcher classroom, originating four case studies corresponding to four 1st grade students of the researcher's class. Data collection was carried out during the academic year of 2007/2008 and was based on observation, analysis of documents, diaries, audio and video records and informal conversations with students. The initial data analysis was based on the problems and issues of research, as well in the theoretical framework that supports it. The main categories of analysis were defined based on the theoretical framework, and were subjected to a process of adaptation and refining during data processing and analysis aiming the case studies construction.

The results show that student's preferential representations are the iconic and the symbolic, although these types of representations are used in different ways, with different functions and in different contexts. The symbolic elements are often supported by iconic elements, the latter helping students to unpack the problem and interpret it. In the iconic representations the role of the diagrams is emphasized, consisting in a valuable tool to support the mathematical reasoning. One can also conclude that while the active representations give more support to the resolution strategies involving simulation, the iconic and symbolic representations are preferably used with different strategies. The representations constructed with distinct roles and functions, are crucial in the proper interpretation and resolution of problems, and seem to be directly related to the characteristics of the proposed task with regard to the mathematical structures involved.

Keywords: problem solving in Mathematics; mathematical representations; strategies for solving problems; teaching and learning of Mathematics in the first grades of basic education.

À Joana e à Sara,
minhas filhas

Agradecimentos

À minha orientadora, Professora Doutora Ana Paula Canavarro, pelo apoio e incentivo constantes, pelo rigor das suas sugestões e críticas construtivas, pela compreensão e grande disponibilidade que sempre revelou.

À turma do 1.º ano de escolaridade com quem trabalhei e, mais concretamente, aos quatro alunos que participaram nesta investigação, pelo empenho e entusiasmo demonstrados. À escola onde decorreu a presente investigação pelo apoio manifestado.

Ao Paulo, pelo apoio, pela compreensão e pelo carinho sempre presentes.

Aos meus pais e irmão, que sempre me apoiaram.

Índice

Índice de tabelas

Índice de quadros

Índice de figuras

Capítulo I

Introdução

Ensinar é um exercício de imortalidade.
De alguma forma continuamos a viver naqueles cujos olhos
Aprenderam a ver o mundo pela magia da nossa palavra.
O professor, assim, não morre jamais...

Rubem Alves

O presente estudo, que tem como objectivo fundamental investigar de que forma alunos do 1.º Ciclo, num ambiente flexível de sala de aula, resolvem problemas de Matemática e exprimem as respectivas resoluções, é fruto da necessidade que sinto, cada vez mais premente, de crescer profissionalmente e me transformar num professor mais reflexivo e consciente dos complexos desafios que me são colocados e que requerem um saber profissional cada vez mais especializado e fundamentado.

À medida que a minha experiência profissional cresce, sinto-me, como professora e educadora que sou, cada vez mais consciente das responsabilidades que sobre mim recaem no domínio da educação, matemática e não só, dos alunos com que trabalho. Ser professor implica a permanente tomada de decisões que deverão ser conscientes e reflectidas. Ser professor deve implicar também um processo contínuo de formação e aprendizagem. Neste contexto, a presente investigação surgiu ainda na sequência da realização do Mestrado em Educação, variante Educação Matemática, ministrado pela Universidade de Évora.

Como professora do 1.º Ciclo do Ensino Básico, sou também professora de Matemática, e é nessa qualidade que tenho procurado proporcionar aos meus alunos experiências de aprendizagem no domínio desta área que lhes possibilitem desenvolver competências no âmbito do raciocínio, da comunicação e da resolução de problemas. Esta última capacidade referida, a resolução de problemas, tem-se revelado uma das capacidades que mais me tem cativado e que tenho procurado estimular e desenvolver no âmbito da minha prática pedagógica directamente relacionada com esta área do saber.

Ao longo da minha vida profissional, tenho visto a resolução de problemas ser perspectivada de diversas formas, muitas das quais pouco ou nada têm a ver com a verdadeira essência e dimensão desta actividade, que deverá ser transversal à aprendizagem da Matemática. Na maioria dos manuais de Matemática para o 1.º Ciclo apareciam, até há bem poucos anos, listas de exercícios para os alunos resolverem, onde estes apenas tinham de aplicar directamente um ou mais algoritmos, privilegiando-se a sua execução. No entanto, resolver problemas não é resolver meros exercícios; resolver problemas não é calcular somas e diferenças, produtos e divisões. Os procedimentos são necessários, sim, mas como meios e não como fins em si mesmos.

Além disso, a resolução de problemas admite diversas estratégias possíveis, que podem ser expressas por diferentes formas, recorrendo a representações variadas. O treino dos alunos para que organizem as suas resoluções em torno da explicitação dos dados, indicação e operação, seguida de resposta, que muitos professores praticam continuadamente é muito limitadora, não permitindo que as capacidades dos alunos se manifestem de forma natural e completa.

Perspectivo pois este trabalho como uma possibilidade de investigar sobre uma temática directamente relacionada com a minha prática profissional e na qual tenho investido, tanto intelectual, como afectivamente. Note-se que esta temática tem todo o sentido do ponto de vista curricular, pois a resolução de problemas é precisamente uma das capacidades mais valorizadas no programa de Matemática do 1.º Ciclo.

Objectivo e questões de estudo

Como já referi, este estudo tem como objectivo fundamental investigar de que forma alunos do 1.º Ciclo, num ambiente flexível de sala de aula, resolvem problemas de Matemática e exprimem as respectivas resoluções. Mais concretamente, a presente investigação pretende investigar o papel que as representações, elaboradas por alunos do 1.º ano de escolaridade, desempenham na resolução de problemas de Matemática.

Desta forma, este estudo procurará responder às seguintes questões:

a) Que representações preferenciais utilizam os alunos para resolver problemas?

b) De que forma é que as diferentes representações são influenciadas pelas estratégias de resolução de problemas utilizadas pelos alunos?

c) Que papel têm os diferentes tipos de representação na resolução dos problemas?

A pertinência do estudo

A Matemática constitui uma área do saber presente em todos os currículos, ao longo de todos os anos da escolaridade obrigatória. Porém, é no decorrer do 1.º Ciclo do Ensino Básico que a maioria das aprendizagens escolares, e podemos mesmo dizer, os alicerces do percurso escolar dos alunos, são promovidas, estimuladas e desenvolvidas.

A importância da educação matemática está bem presente na seguinte afirmação de Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999):

> A educação matemática pode contribuir, de um modo significativo e insubstituível, para ajudar os alunos a tornarem-se indivíduos não dependentes mas pelo contrário competentes, críticos e confiantes nos aspectos essenciais em que a sua vida se relaciona com a matemática (p. 17).

A forma como o ensino e a aprendizagem da Matemática eram perspectivados nos primeiros anos de escolaridade da educação básica em Portugal até há bem pouco tempo conduziram a uma educação matemática que difere, em muito, daquilo que hoje se designa por ser "matematicamente competente".

Até 1990, e após a mudança política que teve lugar em 1974, embora a resolução de problemas surgisse nos objectivos gerais dos programas de Matemática do 1.º Ciclo do Ensino Básico, o que os alunos realizavam não era resolução de problemas mas sim de exercícios, através dos quais os alunos praticavam, de modo sistemático, repetitivo e mecanizado, procedimentos de cálculo, que em nada contribuíam para o desenvolvimento de capacidades fundamentais como o raciocínio e a comunicação matemáticas. Como afirmam Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), "as tradicionais "competências de cálculo" estão longe de corresponder às exigências da nossa sociedade actual e daquilo que poderíamos considerar ser-se *matematicamente letrado*" (p. 19). Estes autores apresentam uma definição do que significa ser matematicamente competente, fornecendo ainda algumas orientações sobre o ensino e aprendizagem da Matemática nos primeiros anos de escolaridade:

> Ser-se matematicamente competente na realização de uma determinada tarefa implica ter não só os conhecimentos necessários como a capacidade de os identificar e mobilizar na situação concreta e ainda a disposição para fazê-lo efectivamente. Estes três aspectos (conhecimentos, capacidades, atitudes) são inseparáveis não só nas novas tarefas que surgem aos alunos mas, também, no próprio processo de aprendizagem. (...) No caso da Matemática elementar, de pouco servirá tentar ensinar regras práticas em situações e de maneiras que não têm qualquer significado para as crianças e em que estas não são estimuladas a usar e expressar o seu pensamento (Abrantes, Serrazina, & Oliveira, 1999, p. 21).

No âmbito da Matemática do 1.º Ciclo, valorizava-se bastante se o aluno era ou não capaz de realizar correctamente, com papel e lápis, os algoritmos das quatro operações básicas. Mas será que o aluno percebe as acções que está a realizar ao utilizar este ou aquele algoritmo, numa determinada situação, ou apenas o faz de uma forma mecanizada e memorizada? Nas nossas escolas pretendia-se, com frequência, que os alunos aprendessem rapidamente os algoritmos, muitas vezes sem grande significado para as crianças, e sem que estas tivessem desenvolvido o significado das operações. "Estes [os algoritmos] devem ir adquirindo significado à medida que vão sendo sistematizados pelos alunos a partir de actividades significativas" (Serrazina, 2002, p. 58). Caso contrário "leva a uma mecanização sem compreensão que se traduz não só em fracos desempenhos como também numa atitude de rejeição da Matemática" (Ponte, 2005). Se queremos que os nossos alunos possam utilizar as competências desenvolvidas em diferentes situações e em diferentes contextos, então é necessário que, acima de tudo, eles percebam realmente o que estão a fazer, e porque o estão a fazer.

A investigação em Educação Matemática mostra que os alunos, ao serem incentivados a desenvolver as suas próprias estratégias de cálculo e a partilhá-las e discuti-las com os seus pares e com o professor, desenvolvem um importante conjunto de aprendizagens. Neste contexto, os algoritmos tradicionais surgem na altura mais adequada e de uma forma compreensível para os alunos. "A proficiência de cálculo deve ser desenvolvida a par da compreensão do papel e significado de operações nos sistemas numéricos" (Serrazina, 2002, p. 59).

Para Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), o que é importante não é o conhecimento do cálculo, mas sim perceber qual é a operação adequada, estimar a razoabilidade do resultado ou decidir a sequência de passos necessários para resolver um problema. Segundo estes autores, aprender de uma forma isolada e mecanizada os procedimentos do cálculo não auxilia os alunos a compreender o que é a Matemática, nem desenvolve as capacidades relacionadas com o raciocínio e com a resolução de problemas. O treino da memória pelos alunos do 1.º Ciclo é muito importante, no entanto pode ser desenvolvido por meio de tarefas interessantes e criativas e não através de cálculos repetitivos e fastidiosos. Como refere Ponte (2003), "A memorização à força, sem perceber o que se diz, cria, somente, uma ilusão de conhecimento" (p. 43).

Em Portugal, a partir de 1990, surgem novas orientações programáticas para a Matemática, nas quais se começa a assistir a uma maior preocupação com o desenvolvimento de capacidades como o raciocínio, a comunicação e a resolução de problemas. Estas novas orientações programáticas são publicadas no documento *Programa do 1.º Ciclo do Ensino Básico* (ME/DGEBS, 1990), no qual o programa de Matemática se desenvolve a partir da actividade considerada fundamental: a resolução de problemas. Perspectiva-se esta actividade como promotora do desenvolvimento do raciocínio e da comunicação, a qual se deverá apoiar em materiais e linguagem gráfica que constituam uma ponte entre o real e as abstracções matemáticas. Para além da resolução de problemas também o papel das representações começa a despontar no âmbito destas novas orientações programáticas, embora só mais tarde assumam um maior protagonismo.

Também o *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais*, publicado em 2001, no qual as orientações curriculares são apresentadas com base nas competências essenciais e tipos de experiências educativas que devem ser proporcionadas a todos os alunos, organizadas por ciclo e área disciplinar (ME/DEB, 2001), em articulação com os programas do 1.º Ciclo referidos anteriormente, perspectiva de uma forma diferente o ensino e aprendizagem das diferentes áreas disciplinares, incluindo a Matemática.

Mais recentemente, em 2007, no *Programa de Matemática do Ensino Básico* (Ponte, Serrazina, Guimarães, Breda, Guimarães, Sousa, Menezes, Martins, & Oliveira, 2007), um documento que apresenta um reajustamento do programa de Matemática para os três ciclos do ensino básico, a resolução de problemas surge como capacidade transversal a toda a aprendizagem da Matemática, desenvolvida num espaço próprio e que deve funcionar como ponto de partida para o estudo de conceitos e ideias matemáticas, bem como suporte para o seu desenvolvimento e aplicação.

Neste documento mais recente, as representações no ensino e aprendizagem da Matemática surgem de forma muito precisa e estruturada, realçando-se a necessidade dos alunos conhecerem e compreenderem diferentes tipos de representações, bem como a capacidade de as utilizarem em diversas situações e de saber qual a representação mais adequada para cada uma.

A importância das representações na resolução de problemas é uma temática ainda pouco investigada, sobretudo ao nível dos primeiros anos de escolaridade. Dada a sua importância crescente, tanto ao nível da investigação nacional como internacional, e tendo igualmente em conta as novas orientações programáticas, parece-me pertinente desenvolver um estudo que contribua, de alguma forma, para aumentar o conhecimento sobre o referido assunto e, simultaneamente, contribuir de forma inovadora para as práticas pedagógicas no âmbito do ensino e aprendizagem da Matemática nos primeiros anos de escolaridade.

A presente investigação encontra-se estruturada em cinco capítulos. No presente capítulo são apresentadas algumas das motivações pessoais que originaram este estudo, o objectivo e as questões do mesmo, bem com a sua pertinência. O segundo capítulo é dedicado à revisão de literatura que forneceu o suporte teórico da investigação, enquanto que no terceiro capítulo são definidos os aspectos metodológicos essenciais que orientaram este estudo. No quarto capítulo são apresentados os quatro estudos de casos construídos e, por fim, no quinto e último capítulo, apresentam-se as conclusões da investigação.

Capítulo II

Revisão de Literatura

Este capítulo é dedicado à revisão de literatura que constitui o referencial teórico da presente investigação. A revisão de literatura desenvolve-se em torno de três grandes temas centrais: a resolução de problemas e as representações; os problemas em Matemática e as representações.

Na primeira secção deste capítulo, *A resolução de problemas e as representações*, procura-se desenvolver uma abordagem sobre a evolução do papel da resolução de problemas e das representações, primeiro a nível internacional e, seguidamente, a nível nacional, no âmbito do ensino e da aprendizagem da Matemática.

Relativamente ao segundo grande tema central, *Os problemas em Matemática*, a revisão de literatura pretende clarificar alguns conceitos directamente relacionados com a temática, tendo como base investigações realizadas. Nesta secção são ainda apresentadas algumas tipologias de problemas propostas por diferentes autores.

A última secção deste referencial teórico aborda a temática das *representações* na qual, além de se clarificarem alguns conceitos, são apresentados e descritos diferentes tipos de representações, dando-se particular ênfase às representações icónicas e suas subcategorias.

Resolução de problemas, representações e orientações curriculares – um olhar sobre a evolução

Orientações internacionais

Um marco de mudança na forma de encarar a aprendizagem da Matemática na escola surge, em 1980, quando o National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] publicou *An Agenda for Action,* onde o foco principal da aprendizagem da matemática escolar foi colocado na resolução de problemas. Neste documento sugeriam-se direcções no que respeita ao desenvolvimento curricular e quanto à ênfase a dar ao ensino na década de 80 (Lester, 1994). Foi graças a este documento que a década de 80 foi chamada de "a década da resolução de problemas" nos Estados Unidos da América. No entanto, ainda segundo Lester (1994), embora *An Agenda for Action* referisse a resolução de problemas como o foco da Matemática escolar, não fornecia quaisquer sugestões sobre a forma de colocar em prática aquela proposta.

Enquanto que *An Agenda for Action* era sobretudo um guia para os educadores matemáticos, o documento *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*, publicado em 1989 pelo NCTM e traduzido pela Associação de Professores de Matemática [APM] em 1991 como *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar* (NCTM, 1991), constituía um documento de acção educativa, no qual estava presente não só a pretensão de definir normas para o currículo e para o ensino, como também oferecer ideias mais concretas ao nível da educação matemática (Lester, 1994). Ao contrário de *An Agenda for Action*, estas *Normas* continham sugestões variadas relativamente à forma como a resolução de problemas se poderia tornar o foco da Matemática escolar (Lester, 1994).

Este conjunto de *Normas* dava ênfase à necessidade de mudar o currículo de Matemática desde o pré-escolar ao 4.º ano de escolaridade, uma vez que o mesmo, até aí, não encorajava o raciocínio, a intuição matemática, nem a resolução de problemas, existindo uma preocupação excessiva pelo cálculo e por outras destrezas tradicionais, reservando-se aos alunos a mera recepção de regras e procedimentos. Com estas *Normas* pretendeu-se atingir objectivos curriculares globais para os alunos como aprender a valorizar a Matemática, acreditar nas capacidades pessoais, tornar-se um resolvedor de problemas, aprender a comunicar matematicamente e aprender a raciocinar matematicamente (NCTM, 1991).

A primeira das treze normas curriculares previstas para os anos de escolaridade entre o pré-escolar e o 4.º ano, *A Matemática como resolução de problemas*, preconizava um ambiente de sala de aula que favorecesse a resolução de problemas no qual os alunos pudessem partilhar os seus raciocínios e abordagens, bem como aprender diferentes formas de resolver problemas, reafirmando-se a importância do próprio processo de resolução (NCTM, 1991).

Ainda durante a década de 80, surge o relatório *Mathematics Counts* elaborado pela *Committee of Inquiry into Teaching of Mathematics in Schools*, o qual, na opinião de Abrantes (1994), foi um influente documento. Segundo este autor, neste relatório afirma-se que o ensino da Matemática em todos os níveis deve incluir: exposição pelo professor, discussão dos alunos com os colegas e com o professor, trabalho prático, prática de rotinas e competências fundamentais, resolução de problemas, incluindo aplicação da Matemática a situações da vida real, e trabalho de investigação.

Dando continuidade às orientações curriculares para o ensino da Matemática que se estavam a desenvolver, o NCTM publica, em 2000, os *Principles and Standards for School Mathematics*, editados em português pela APM em 2007 (NCTM, 2007). Um dos aspectos que ressalta neste documento, em relação às anteriores *Normas* (NCTM, 1991), é a apresentação de um conjunto de seis Princípios – Equidade, Currículo, Ensino, Aprendizagem, Avaliação e Tecnologia – que pretendem enquadrar e fundamentar as novas *Normas*. Cinco destas novas *Normas* são dedicadas aos processos matemáticos: Resolução de problemas, Raciocínio e Demonstração, Comunicação, Conexões e Representação. Neste documento dá-se particular ênfase aos processos e aos conteúdos matemáticos, sublinhando que estas duas áreas devem ser trabalhadas em conjunto.

No âmbito das *Normas* para a *Resolução de problemas* são fornecidas, a todos os educadores matemáticos, orientações claras e precisas para que os programas de Matemática, desde o pré-escolar ao 12.º ano, habilitem todos os alunos para as seguintes competências:

> a) Construir novos conhecimentos matemáticos através da resolução de problemas.
> b) Resolver problemas que surgem em Matemática e noutros contextos.
> c) Aplicar e adaptar uma diversidade de estratégias adequadas para resolver problemas.
> d) Analisar e reflectir sobre o processo de resolução matemática de problemas (NCTM, 2007, p. 134).

No âmbito das *Normas* relativas à *Resolução de problemas*, entre o pré-escolar e o 2.º ano de escolaridade, é referido que a resolução de problemas deverá incluir diversos contextos, devendo os professores encorajar os alunos a usar os novos conteúdos matemáticos que estão a aprender, desenvolvendo assim diversas estratégias de resolução. Quantos mais problemas os alunos resolverem, mais hipóteses têm de aprender estratégias úteis e determinar quais as mais eficientes, flexíveis e adequadas para cada situação matemática.

Nestas *Normas* (NCTM, 2007), o papel das representações no âmbito da aprendizagem da matemática escolar surge com um protagonismo que até então não se tinha verificado. Deste modo, e no que diz respeito às *Normas* referentes à *Representação*, a Matemática que os alunos aprendem na escola, entre o pré-escolar e o 12.º ano, deverá habilitá-los para as seguintes apetências:

> a) criar e usar representações para organizar, registar e comunicar ideias matemáticas;
> b) seleccionar, aplicar e traduzir representações matemáticas para resolver problemas;
> c) usar as representações para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociais e matemáticos (NCTM, 2007, p. 160).

Ainda relativamente à *Representação,* NCTM (2007) afirma que, se os alunos utilizarem diferentes representações para exprimirem ideias matemáticas e para construírem novos conhecimentos, poderão estar a aprofundar o conhecimento e a compreensão que possuem da Matemática. Este aprofundamento e compreensão são possíveis porque os alunos conseguem, com a utilização das representações, estabelecer associações entre as ideias e as diferentes maneiras como elas podem ser expressas. Os alunos mais pequenos poderão utilizar os dedos, desenhos, esquemas, gestos e símbolos para representarem as suas ideias. Estas representações tornam as ideias matemáticas mais concretas e, além de serem a base da utilização futura dos símbolos matemáticos, permitem a tomada de conhecimento, por parte dos alunos, do que existe de comum em situações distintas, fundamental para o processo de abstracção. Estas *Normas* realçam a importância das representações afirmando ainda que este processo poderá também contribuir para organizar o raciocínio dos alunos e servir de apoio para conteúdos e/ou procedimentos que ainda não tenham sido interiorizados. Para além disto, quando os alunos conseguem perceber diferentes representações da mesma ideia, consolidam a utilização de conceitos e procedimentos matemáticos e poderão compreender que algumas representações são mais adequadas para determinados aspectos do problema ou facilitam a compreensão de certas propriedades (NCTM, 2007).

Neste documento, e continuando a fazer referência às *Normas* definidas para a *Representação,* mais concretamente para o período entre o pré-escolar e o 2.º ano de escolaridade, o papel do professor deverá ser o de analisar, questionar e interpretar as representações utilizadas pelos alunos. Com esta atitude, o professor poderá mais facilmente conhecer e perceber de que forma o raciocínio matemático dos alunos está a evoluir, permitindo que, progressivamente, consigam associar as suas linguagens à linguagem convencional da Matemática. O NCTM (2007) refere ainda que as representações ilustram a resposta e o processo utilizado e servem de orientação ao professor na formulação de questões, podendo este, desta forma, avaliar mais objectivamente a compreensão das noções matemáticas envolvidas. O professor deverá ainda criar um ambiente de aprendizagem propício à utilização de diversas representações, escutar os alunos, analisar os seus registos, reflectir sobre as implicações dessas observações e análises e encorajar os alunos a partilhar as suas representações. Para Cavalcanti (2001), propiciar a existência de um espaço de discussão deste tipo, no qual os alunos pensem sobre os problemas que vão resolver, elaborem uma estratégia e façam o registo da solução encontrada, favorece a formação do pensamento matemático.

Nesta linha de pensamento, considera-se que a partilha das representações encontradas ajuda os alunos a considerar outras perspectivas e diferentes formas de explicar o raciocínio. Durante esta partilha e confronto das diferentes representações, discute-se no fundo a sua eficácia comunicativa, ou seja, se é ou não possível que a restante turma compreenda o caminho que um determinado aluno utilizou (Cavalcanti, 2001). Esta ideia é apoiada por outros autores que referem que "A partilha proporciona aos alunos oportunidades de ouvir novas ideias, de as comparar com as suas próprias e de justificar o seu raciocínio" (NCTM, 2007, p. 137).

Segundo Cândido (2001), quanto mais as crianças tiverem oportunidade de reflectir sobre um certo assunto, falando, escrevendo ou representando, mais elas o compreendem.

Orientações nacionais

Embora se tenha assistido, até 1980, a uma pequena evolução no que diz respeito à presença da resolução de problemas nos programas oficiais do 1.º Ciclo, não há, contudo, qualquer referência nos mesmos relativamente aos processos matemáticos envolvidos, nem ao papel das representações do âmbito da aprendizagem da Matemática escolar.

Os documentos e orientações que foram sendo publicados a nível nacional, no que diz respeito à educação matemática, foram naturalmente beber alguma influência aos documentos publicados internacionalmente relacionados com o ensino e a aprendizagem da Matemática, como foram também o fruto de investigações desenvolvidas tanto dentro como fora do nosso país.

Em 1988, a APM publicou um conjunto de propostas sobre actividades a desenvolver no âmbito do processo de ensino e aprendizagem da Matemática, no qual a tónica das actividades em Matemática é colocada na resolução de problemas, realçando-se ainda as estratégias utilizadas no decorrer da sua resolução (APM, 1988).

A Lei de Bases do Sistema Educativo de 1986 (Lei n.º 46/86) e o Decreto-lei n.º 286/89 constituíram o quadro de referência que serviu de base para a elaboração, em 1990, do *Programa do 1.º Ciclo do Ensino Básico,* no âmbito da Reforma Educativa (ME/DGEBS, 1990). Com a entrada em vigor, em 2001, de documentos governamentais que estabeleciam os princípios orientadores da Organização e Gestão Curriculares do Ensino Básico, tornou-se necessário introduzir algumas alterações ao Programa do 1.º Ciclo do Ensino Básico inicialmente publicado em 1990, com a publicação do documento *Organização Curricular e Programas. Ensino Básico – 1.º Ciclo* (ME/DEB, 2004). No âmbito destas alterações, foram introduzidos itens referentes ao novo desenho curricular, nomeadamente as três áreas curriculares não disciplinares: Área de Projecto, Estudo Acompanhado e Formação Cívica. No entanto, relativamente à área da Matemática, não se verificaram quaisquer alterações relativamente ao programa delineado para o 1.º Ciclo em 1990.

No âmbito da Matemática, este programa preconiza um conjunto de Princípios Orientadores onde se afirma que as grandes finalidades do ensino da Matemática para o Ensino Básico são: "desenvolver a capacidade de raciocínio; desenvolver a capacidade de comunicação e desenvolver a capacidade de resolver problemas " (ME/DEB, 2004, p. 163)[1]. O programa de Matemática desenvolve-se a partir da actividade considerada fundamental: a resolução de problemas. Considera-se que esta actividade promove o desenvolvimento do raciocínio e da comunicação e deverá apoiar-se em materiais e linguagem gráfica que constituam uma ponte entre o real e as abstracções matemáticas. Ainda em relação ao papel da resolução de problemas, este programa do 1.º Ciclo faz a seguinte afirmação:

> A resolução de problemas coloca o aluno em atitude activa de aprendizagem, quer dando-lhe a possibilidade de construir noções como resposta às interrogações levantadas (exploração e descoberta de novos conceitos), quer

[1] ME/DEB (2004). Organização Curricular e Programas. Ensino Básico – 1.º Ciclo. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica. (Programa original publicado em 1990).

> incitando-o a utilizar as aquisições feitas e a testar a sua eficácia (ME/DEB, 2004, p. 164).

É no âmbito deste Programa do 1.º Ciclo do Ensino Básico, inicialmente publicado originalmente em 1990, que o papel das representações no âmbito da aprendizagem da Matemática começa a despontar. Assim, a *Linguagem e a Representação* são apontados como um dos suportes de aprendizagem da Matemática, sendo referido que o aluno deverá ter oportunidade de criar "sinais, desenhos e esquemas individuais" que irão constituir um suporte "para a descoberta e construção pessoal de linguagens convencionais" (ME/DEB, 2004, p. 170). Os tipos de representações enumerados neste documento são as setas, os diagramas, as tabelas, os esquemas e os gráficos. Neste programa acrescenta-se ainda, relativamente às representações que, a utilização adequada das mesmas poderá levar a que o aluno comunique e registe ideias com mais clareza e simplicidade, além de ler e interpretar informação com mais facilidade.

Surge mais tarde, em 2001, um novo documento nacional, no qual é valorizada uma lógica de ciclo, em contraponto com a prática de programas por ano de escolaridade desenvolvida até então, e onde a formulação de competências essenciais procura contribuir para uma mais adequada articulação entre os três ciclos do ensino básico. No *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais*, com o qual os programas do 1.º Ciclo, referentes às diferentes áreas curriculares, se deverão articular, as orientações curriculares são apresentadas com base nas competências essenciais e tipos de experiências educativas que devem ser proporcionadas a todos os alunos, organizadas por ciclo e área disciplinar. Este documento inclui as competências gerais a desenvolver ao longo do ensino básico, bem como as competências específicas que dizem respeito a cada área disciplinar (ME/DEB, 2001).

Relativamente à Matemática, ME/DEB (2001) aponta que ser matematicamente competente inclui, entre outros, os seguintes aspectos:

> - A predisposição para raciocinar matematicamente, isto é, para explorar situações problemáticas, procurar regularidades, fazer e testar conjecturas, formular generalizações, pensar de maneira lógica;
> - (...)
> - A aptidão para discutir com outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada à situação;
> - (...)

> - A predisposição para procurar entender a estrutura de um problema e aptidão para desenvolver processos de resolução, assim como para analisar os erros cometidos ensaiar e estratégias alternativa;
> - A aptidão para decidir sobre a razoabilidade de um resultado e de usar, consoante os casos, o cálculo mental, os algoritmos de papel e lápis ou os instrumentos tecnológicos;
> - (...) (ME/DEB, 2001, p. 57).

Os problemas são considerados situações não rotineiras, ou mesmo desafios, onde os alunos podem utilizar várias estratégias e métodos de resolução. A competência matemática desenvolve-se através de uma experiência matemática rica e diversificada. Uma das experiências de aprendizagem referidas neste documento é a resolução de problemas, a qual "constitui, em Matemática, um contexto universal de aprendizagem e deve, por isso, estar sempre presente, associada ao raciocínio e à comunicação integrada naturalmente nas diferentes actividades" (ME/DEB, 2001, p. 68). Neste documento é notória a ênfase que se dá à importância dos processos matemáticos envolvidos no desenvolvimento das competências consideradas essenciais neste campo do saber.

No *Currículo Nacional do Ensino Básico* faz-se referência a uma "cultura matemática básica" cujas componentes são as seguintes:

> A predisposição (para procurar regularidades ou para fazer e testar conjecturas), a aptidão (para comunicar ideias matemáticas ou para analisar os erros cometidos e ensaiar estratégia alternativas ou a tendência (para procurar ver a estrutura abstracta subjacente a uma situação) (ME/DEB, 2001, p. 58).

Em Julho de 2007, foi proposto e posteriormente aprovado, um documento que apresenta um reajustamento do programa de Matemática para os três ciclos do ensino básico e que tem por título *Programa de Matemática do Ensino Básico* (Ponte et al., 2007). A Resolução de problemas (juntamente com o Raciocínio matemático e a Comunicação matemática) surge como capacidade transversal a toda a aprendizagem da Matemática, desenvolvida num espaço próprio, com objectivos gerais e específicos de aprendizagem. O desenvolvimento da capacidade de resolver problemas surge como um dos objectivos gerais do ensino da Matemática presentes neste documento e preconiza que os alunos devem desenvolver as seguintes capacidades e competências:

> a) compreender problemas em contextos matemáticos e não matemáticos e de os resolver utilizando estratégias apropriadas;
> b) apreciar a plausibilidade dos resultados obtidos e a adequação ao contexto das soluções a que chega;
> c) monitorizar o seu trabalho e reflectir sobre a adequação das suas estratégias, reconhecendo situações em que podem ser utilizadas estratégias diferentes;

d) formular problemas (Ponte et al., 2007, p. 6).

Neste objectivo dá-se igualmente ênfase à necessidade de compreensão da multiplicidade de estratégias que podem ser utilizadas para resolver um problema matemático e à análise crítica dos resultados obtidos.

A resolução de problemas é considerada uma actividade fundamental no ensino e na aprendizagem da Matemática e deve funcionar como ponto de partida para o estudo de conceitos e ideias matemáticas, funcionando também como um suporte para o seu desenvolvimento e aplicação. Os alunos deverão ter a oportunidade de resolver problemas de diversos tipos, de forma a desenvolver esta capacidade transversal. Os alunos ganharão, deste modo, experiência e confiança na resolução dos problemas propostos, adquirindo flexibilidade na utilização de estratégias, as quais serão progressivamente mais formais. Estas diferentes estratégias sugeridas pelos alunos deverão ser valorizadas pelo professor e partilhadas com toda a turma (Ponte et al., 2007).

O papel das representações no ensino e aprendizagem da Matemática surge neste novo programa com um protagonismo muito forte e determinante para o desenvolvimento de diversas e fundamentais competências matemáticas. Deste modo, preconiza-se ainda que "Os alunos devem ser capazes de lidar com ideias matemáticas em diversas representações" (Ponte et al., 2007, p. 5). Mais concretamente, os alunos devem desenvolver as competências que se seguem:

> a) ler e interpretar representações simbólicas, pictóricas, tabelas e gráficos, e apresentar informação em qualquer destas formas de representação;
> b) traduzir informação apresentada numa forma de representação para outra, em particular traduzir para termos matemáticos informação apresentada em linguagem natural;
> c) elaborar e usar representações para registar, organizar e comunicar ideias matemáticas;
> d) usar representações para modelar, interpretar e reflectir sobre situações matemáticas e não matemáticas, incluindo fenómenos naturais ou sociais (Ponte et al., 2007, p. 5).

Este objectivo realça ainda a necessidade dos alunos conhecerem e compreenderem os diferentes tipos de representações, bem como a capacidade de as utilizarem em diversas situações e de saber qual a representação mais adequada para cada uma.

Síntese

Tanto a nível internacional, como a nível nacional assistiu-se, sobretudo desde 1980, a uma progressiva valorização do papel da resolução de problemas no ensino e aprendizagem da Matemática ao nível das orientações curriculares, emanadas tanto por organismos internacionais (NCTM, 1991; NCTM, 1994; NCTM, 2007), como nacionais (APM, 1988; ME/DGEBS, 1990; ME/DEB, 2001; ME/DEB, 2004; Ponte et al., 2007).

No âmbito da resolução de problemas, considerada como uma das capacidades transversais a toda a aprendizagem da Matemática, verificou-se igualmente uma valorização crescente pela diversidade de estratégias que podem ser utilizadas para resolver um problema matemático, bem como do papel das representações no desenvolvimento de variadas e importantes competências matemáticas.

Os problemas em Matemática

O que nos diz a investigação: clarificação de conceitos

No âmbito da presente investigação considerou-se fundamental clarificar, bem como reflectir, sobre alguns conceitos que constituem a essência desta investigação: problema, resolução de problemas e representações. Nesta secção é apresentada a posição de diferentes investigadores relativamente aos dois primeiros conceitos, procurando-se desenvolver, sempre que possível, uma análise comparativa. A clarificação do conceito de representação será realizada num ponto posterior desta revisão de literatura.

Exercício/Problema. Há que distinguir entre exercício e problema. Para Vale e Pimentel (2004) "só se tem um problema se não se sabe como chegar até à solução" enquanto que "se uma questão não tem surpresas e pode ser resolvida confortavelmente utilizando procedimentos rotineiros e familiares, não interessando quão complicados sejam, é um exercício" (p. 13). Para estas autoras, o conceito de problema tem evoluído podendo este ser encarado como "uma questão mais aberta que pode sugerir várias soluções" (p. 11).

Há que ter em atenção que uma determinada situação para uns alunos pode ser um problema e para outros pode ser um mero exercício. A situação "O José tem 5 balões e o Pedro tem 2 balões. Quantos balões faltam ao Pedro para ter o mesmo número de balões que o José?" pode constituir um problema para um aluno do 1.º ano de escolaridade mas é um mero exercício para um aluno do 4.º ano.

Têm surgido, nas últimas décadas, diferentes conceitos de problema. Polya, o defensor pioneiro da resolução de problemas na sala de aula, já em 1945 definia problema da seguinte forma: "Ter um problema significa procurar conscienciosamente alguma acção apropriada para atingir um objectivo claramente definido, mas não imediatamente atingível" (Vale & Pimentel, 2004, p. 13). No ano de 1974, Kantowski afirmava que "Um indivíduo está perante um problema quando se confronta com uma questão a que não pode dar resposta ou uma situação que não sabe resolver, usando o conhecimento imediatamente disponível" (Vale & Pimentel, 2004, p. 13). Um pouco mais tarde, em 1983, e no que se refere ao conceito de problema, Lester fazia a seguinte afirmação:

> Um problema é uma situação na qual um indivíduo ou grupo é chamado a executar uma tarefa para a qual não tem acesso a um algoritmo que determine completamente o método de resolução (...) A situação não pode ser considerada um problema se a realização da tarefa não for desejada pelo indivíduo ou grupo (Vale & Pimentel, 2004, p. 13).

Em 1985, um outro investigador, Mayer, afirmava que "Um problema ocorre quando se é confrontado com uma situação inicial e se pretende chegar a outra situação final, sem se conhecer um caminho óbvio para a atingir" (Vale & Pimentel, 2004, p. 13).

Também Vieira, Cebolo e Araújo (2006), reportando-se a Krulik e Rudnik, em 1993, referem que "problema é uma situação (...) com a qual se confronta um indivíduo ou grupo, na procura de uma solução, para a qual não tem prontamente resposta" (p. 39).

APM (1988) acrescenta um pouco mais ao que já foi referido, afirmando que um problema deve despertar sempre a curiosidade do aluno a quem é colocado, devendo a solução estar dentro das suas capacidades, exigindo simultaneamente trabalho, reflexão e imaginação na procura de uma estratégia apropriada para a sua resolução.

Para Schoenfeld (1996), existe uma *estética dos problemas,* que caracteriza os problemas que este autor considera "potencialmente valiosos" (p. 9), quando se pensa na sua utilização com os alunos. Assim, segundo este autor, as propriedades que caracterizam estes problemas são as seguintes:

> a) os bons problemas são (relativamente) acessíveis (...);
> b) problemas que possam ser resolvidos, ou pelo menos abordados, por vários caminhos. (...);
> c) os problemas e as suas soluções devem servir como introduções a importantes ideias matemáticas. (...);
> d) os problemas (...) devem servir, se possível, como "germens" para "honestas e boas" explorações matemáticas (...)(Schoenfeld, 1996, pp. 9-10).

Outros autores acrescentam ainda que os bons problemas integram uma variedade de temas, envolvem matemática significativa, proporcionam aos alunos a oportunidade de consolidar e ampliar os seus conhecimentos e estimulam a aprendizagem da Matemática (NCTM, 2007).

Resolução de problemas. Tal como o conceito de problema, também o conceito de resolução de problemas tem sido muito discutido e analisado nas últimas duas décadas, tanto entre professores e educadores, como entre os investigadores e os responsáveis por elaborar os currículos (Diniz, 2001).

Nos últimos vinte anos, a resolução de problemas tem sido perspectivada de diversas formas: como contexto, como capacidade ou como arte (Stanic & Kilpatrick, 1989); como uma meta, como um processo ou como uma habilidade básica (Diniz, 2001) e ainda como um processo, como uma finalidade ou como um método de ensino (Vale & Pimentel, 2004).

A perspectiva da resolução de problemas como contexto aponta cinco ideias fundamentais, assentes no pressuposto de que os problemas e a resolução de problemas são meios para atingir objectivos importantes: resolução de problemas como justificação; resolução de problemas como motivação; resolução de problemas como actividade lúdica; resolução de problemas como veículo e resolução de problemas como prática (Stanic & Kilpatrick, 1989). Segundo estes autores, a resolução de problemas como prática é, dos cinco referidos, o mais importante nos currículos de Matemática, uma vez que, nesta perspectiva, através da resolução de problemas, as capacidades e os conceitos ensinados são reforçados.

Na perspectiva da resolução de problemas como capacidade, distingue-se entre resolver problemas de rotina e problemas não rotineiros, sendo esta última considerada uma capacidade de nível elevado a ser adquirida depois da capacidade de resolução de problemas de rotina. Segundo esta perspectiva, a resolução de problemas não rotineiros não seria para todos os alunos mas apenas para aqueles que revelassem dominar os pré-requisitos, os alunos considerados "especialmente capazes" (Stanic & Kilpatrick, 1989).

A visão da resolução de problemas como arte surgiu do trabalho de George Polya. Para Polya, "resolver problemas é uma competência prática" (Polya, 2003, p. 26), que se adquire, como qualquer competência prática, por imitação e prática. Para este autor, o professor tem um papel preponderante no desenvolvimento da capacidade de resolver problemas nos seus alunos, devendo "proporcionar-lhes muitas oportunidades de imitar e de praticar" (p. 26).

Na opinião de Stanic e Kilpatrick (1989), esta perspectiva (resolução de problemas como arte) "fica reduzida à resolução de problemas como capacidade quando são feitas tentativas para implementar as ideias de Polya salientado os seus passos e colocando-os nos manuais escolares" (Stanic & Kilpatrick, 1989, p. 17).

Ainda para estes autores, das três ideias que caracterizam o papel da resolução de problemas, a perspectiva da resolução de problemas como arte é a "mais defensável, mais justa e mais prometedora" (p. 17), embora considerem que seja difícil de a pôr em prática tanto nos manuais escolares como nas salas de aula. Para Stanic e Kilpatrick (1989) o problema está em como é que os professores, que acreditam que a resolução de problemas é uma forma de arte, desenvolvem esta capacidade artística nos alunos.

Diniz (2001) reporta-se a um artigo escrito por Branca em 1980 para referir que, na perspectiva da resolução de problemas como uma meta, ensina-se Matemática para resolver problemas, reforçando os currículos deste modo a necessidade dos alunos possuírem todas as informações e conceitos envolvidos na resolução de problemas para que depois os possam resolver.

A concepção da resolução de problemas como um processo de aplicar conhecimentos previamente adquiridos a situações novas surge, segundo Diniz (2001), com os trabalhos de Polya e ganha maior relevo nos anos 70, quando os investigadores centram a sua atenção sobre os processos ou procedimentos usados pelos alunos na resolução de problemas, com o objectivo de compreender como se resolviam problemas e ensinar outros alunos a fazê-lo.

A resolução de problemas como habilidade básica, é encarada como uma competência mínima para que um indivíduo possa integrar no mundo do conhecimento e do trabalho. Segundo Diniz (2001), desde o final da década de 70 e durante os anos 80, a resolução de problemas ganha esta dimensão nos currículos. Nesta forma de encarar a resolução de problemas, tem-se em conta os problemas que abrangem o conteúdo específico, os diversos tipos de problemas e os métodos de resolução para que o aluno aprenda Matemática.

Nos anos 90, a resolução de problemas começa a ser vista como uma metodologia para o ensino da Matemática, caracterizando-se por um conjunto de estratégias para o ensino e desenvolvimento da aprendizagem da Matemática (Diniz, 2001). Para Borralho (1990), e com base em investigações anteriores, a resolução de problemas consiste nas seguintes capacidades:

> (...) usar processos básicos para resolver determinada dificuldade; reunir factos acerca da dificuldade e determinar informação adicional; inferir ou sugerir soluções alternativas e testar a sua adequação; simplificar o nível de explicação e eliminar discrepância e verificar as soluções de modo a generalizá-las (p. 72).

Ao resolver problemas, o aluno, além de aprender Matemática, desenvolve ainda procedimentos e modos de pensar, bem como capacidades básicas como são o verbalizar, ler, interpretar e produzir textos em Matemática. Adquire ainda uma maior autoconfiança nas suas capacidades e autonomia para investigar e resolver problemas (Diniz, 2001).

Para Vale e Pimentel (2004), a resolução de problemas combina a "organização da informação, o conhecimento de estratégias, as diferentes formas de representação, a tradução de linguagens, a aplicação de vários conhecimentos, a tomada de decisões, a interpretação da solução, etc., e uma gestão e controlo de todos estes elementos" (p. 11). A resolução de problemas é perspectivada como um processo quando se pretende que os alunos adquiram estratégias eficazes na resolução de problemas; é uma finalidade quando se foca a atenção em aspectos matemáticos como explorar, questionar, investigar, descobrir e usar raciocínios plausíveis; e é um método de ensino quando se utiliza a resolução de problemas para introduzir conceitos através da exploração e da descoberta (Vale & Pimentel, 2004).

Os professores devem ser bastante claros e ter a certeza quanto à Matemática que querem que os seus alunos aprendam quando estes resolvem problemas. A resolução de problemas deverá estar integrada no contexto do conteúdo curricular matemático, para que os alunos possam reconhecer a utilidade das estratégias utilizadas. Se conhecerem os interesses dos seus alunos, os professores poderão mais facilmente formular problemas que alarguem o pensamento matemático e consolidem conceitos já aprendidos. Para que a resolução de problemas confirme ou não a aquisição e compreensão dos conteúdos matemático, é fundamental que o professor solicite ao aluno reflexão, explicação e justificação para as suas respostas (NCTM, 2007).

Modelos de resolução de problemas

Da autoria de Polya, publicada pela primeira vez em 1945, *How To Solve It – A new Aspect of Mathematical Method*, esta obra pretende ensinar um método geral de resolução de problemas, sejam estes puramente matemáticos ou de engenharia, problemas da vida prática ou simples quebra-cabeças. Polya (2003) distingue quatro fases no processo de resolução de problemas:

i) compreensão do problema – é necessário identificar a incógnita, os dados e a condição, ou seja, é preciso compreender o problema;
ii) estabelecimento de um plano – é necessário descobrir a ligação entre os dados e a incógnita; o aluno poderá pensar em problemas anteriores cuja resolução seja útil; nesta fase sugere-se o uso de algumas heurísticas;
iii) execução do plano – execução do plano de resolução na qual o aluno deve verificar cada passo;
iv) verificação – o aluno deve examinar a solução obtida.

Surgiram outros modelos sobre o processo de resolução de problemas, elaborados com base no modelo de Polya, dos quais se destaca um modelo apresentado por Lester, em 1980, e que possui "uma perspectiva inovadora a nível da análise dos processos mentais envolvidos na área da resolução de Matemática" (Borralho, 1990, pp. 79-81). Este é um modelo formado por seis fases: (i) Consciencialização; (ii) Compreensão; (iii) Análise do(s) objectivo(s); (iv) Desenvolvimento do plano; (v) Implementação do plano e (vi) Avaliação dos procedimentos e da solução.

Um outro autor que dá ênfase aos processos mentais envolvidos no processo de resolução de problemas de Matemática é Schoenfeld. Segundo Borralho (1990), Schoenfeld aponta quatro categorias do conhecimento que estão envolvidas no processo de resolução de problemas de Matemática: recursos, heurísticas, controlo e *belief systems* (traduzidos como sistemas de concepções/pré-conceitos, percepções).

Em 1984, Charles e Lester apresentaram três factores que estão envolvidos nos processos mentais de resolução de problemas de Matemática: factores afectivos, factores relacionados com a experiência e factores cognitivos (Borralho, 1990). Na opinião de Borralho (1990), há um outro factor muito importante no sucesso da resolução de problemas: as estratégias metacognitivas. Para este autor, os factores apontados por Charles e Lester e os aspectos relacionados com a metacognição inter-relacionam-se.

Também para Diniz (2001) a resolução de problemas inclui o processo metacognitivo:

> (...) quando se pensa sobre o que se pensou ou fez. Isto requer uma forma mais elaborada de raciocínio, esclarece dúvidas que ficaram, aprofunda a reflexão feita e está ligado à ideia de que a aprendizagem depende da possibilidade de se estabelecerem o maior número possível de relações entre o que se sabe e o que se está aprendendo (p. 94).

Estratégias de resolução de problemas

As estratégias de resolução de problemas podem ser definidas, globalmente, como um "conjunto de técnicas que o resolvedor utiliza para abordar o problema no sentido de obter a solução" (Palhares, 1997, p. 43). Uma estratégia de resolução é, essencialmente, uma abordagem que pode ser utilizada em diversos problemas. Um mesmo problema pode ser solucionado por várias estratégias, sendo umas mais vantajosas que outras (Ponte & Serrazina, 2000).

Foi Polya quem inicialmente apresentou um método para resolver problemas baseado em heurísticas, nome utilizado para designar procedimentos destinados a resolver problemas através do uso de regras que permitam de forma rápida chegar à solução ou aproximar-se dela (Borralho, 1990).

Cavalcanti (2001) afirma que, quando incentivar os alunos a procurar diferentes caminhos para resolver os problemas propostos, poderá originar "uma reflexão mais elaborada sobre os processos de resolução, sejam eles através de algoritmos convencionais, desenhos, esquemas ou até mesmo através da oralidade" (p. 121). Para esta autora, aceitar as diversas estratégias de resolução auxilia o aluno a aprender através da reflexão e a ter mais confiança na sua capacidade de pensar matematicamente. Incentivar os alunos a procurar diferentes resoluções, propicia a que seja possível o professor observar e acompanhar a forma como os alunos pensam e registam as diferentes formas de resolução, podendo ainda o professor intervir de uma forma mais direccionada face às dificuldades reveladas pelos alunos. Quando o aluno cria uma estratégia pessoal estará provavelmente a reflectir sobre um conceito matemático, favorecendo um maior envolvimento com a situação proposta.

Cavalcanti (2001) afirma ainda que, tão importante quanto o tipo de problema a ser trabalhado, é a preocupação e a atenção que o professor deverá dar às diferentes formas pelas quais os alunos podem resolver problemas. Sobre esta atitude do professor a investigadora refere o seguinte:

> (...) este é um caminho que contribui muito para que tal acto [a resolução de problemas] seja um processo de investigação, no qual o aluno se posicione com autonomia e confiança e possa combinar seus conhecimentos para resolver a situação apresentada (p. 121).

Ainda segundo esta autora, valorizar os diferentes modos de resolução apresentados pelos alunos inibe o desenvolvimento de algumas atitudes menos adequadas em relação à resolução de problemas como, por exemplo, desistir de resolver um problema quando não se identifica a técnica envolvida, esperar que outra pessoa o resolva ou perguntar qual é a operação que o resolve.

Segundo Cândido (2001), sempre que se pede a um aluno para explicar o que fez ou porque o fez, ou quando lhe é solicitado que verbalize as estratégias adoptadas, justificando-as, ou comente o que representou ou o que escreveu, o professor está a permitir que o aluno modifique conhecimentos que já tinha adquirido anteriormente e que construa novos significados para as ideias matemáticas. A autora conclui que, com esta atitude, o professor possibilita que os alunos desenvolvam, em simultâneo, as seguintes capacidades:

> (...) os alunos reflectem sobre os conceitos e os procedimentos envolvidos na actividade proposta, apropriam-se deles, revêem o que não entenderam, ampliam o que aprenderam e, ainda, explicitam suas dúvidas e dificuldades (p. 17).

Foram vários os autores que sugeriram estratégias de resolução de problemas. No âmbito do presente estudo apresentam-se apenas algumas, dando-se uma maior ênfase às estratégias de resolução de problemas que poderão estar mais associadas ao 1.º Ciclo do Ensino Básico.

Segundo Ponte e Serrazina (2000), e no que diz respeito mais concretamente a este nível de ensino (1.º Ciclo), usar diagramas, procurar regularidades, fazer uma listagem de todas as possibilidades, experimentar casos particulares, usar a tentativa e erro e pensar de trás para a frente, constituem algumas das estratégias mais utilizadas pelos alunos na resolução de problemas.

Investigações recentes apresentam como estratégias de resolução de problemas as seguintes (Vale & Pimentel, 2004):

i) descobrir um padrão/descobrir uma regra ou lei de formação – a solução é determinada através da generalização de soluções específicas, centrando-se esta estratégia em algumas etapas do problema;

ii) fazer tentativas/fazer conjecturas – através de tentativas, o aluno procura determinar a solução, de acordo com os dados e as condições do problema;

iii) trabalhar do fim para o princípio – o aluno começa pelo fim do problema ou pelo que se quer provar;

iv) usar dedução lógica/fazer eliminação – o aluno procura chegar à solução correcta através da eliminação das hipóteses que não são viáveis;

v) reduzir a um problema mais simples/decomposição/simplificação – o aluno tenta solucionar um caso particular de um problema. Esta estratégia está usualmente ligada à estratégia de descoberta de um padrão;

vi) fazer uma simulação, uma experimentação ou uma dramatização – com esta estratégia o aluno poderá utilizar objectos, criar um modelo ou fazer uma dramatização que represente o problema em questão;

vii) fazer um desenho, diagrama, gráfico ou esquema;

viii) fazer uma lista organizada ou fazer uma tabela – pode ser usada para representar, organizar e guardar informação.

Tipologia de problemas

Palhares (1997) apresenta uma classificação de problemas segundo o procedimento utilizado pela pessoa que resolve problemas: problemas de processo, os que requerem o uso de estratégias de resolução; problemas de conteúdo, os que requerem o uso de conhecimentos matemáticos; problemas de capacidades, os que os que requerem o uso de capacidades matemáticas; problemas tipo puzzle, os que requerem alargamento do espaço de resolução; problemas de aplicação, os que requerem a recolha e tratamento de informação; problemas abertos, os que requerem "uma escolha ponderada entre vários caminhos possíveis" (p. 168) e problemas de aparato experimental, os que requerem o uso de esquemas investigativos.

Já Stancanelli (2001) faz uma categorização diferente, distinguindo entre problemas convencionais e problemas não-convencionais, nomeando os primeiros dessa forma por estarem ligados a um conteúdo específico ou técnica e terem sempre solução e uma resposta única, geralmente numérica. Um problema não-convencional é, segundo a autora, um problema que não possui pelo menos uma das características atrás enunciadas. Esta autora apresenta alguns tipos de problemas não-convencionais:

i) problemas sem solução, os quais, segundo Stancanelli (2001), rompem com a crença de que todos os problemas têm solução e que todos os dados apresentados devem ser usados na resolução, desenvolvendo deste modo o pensamento crítico nos alunos;

ii) problemas com mais de uma solução, os quais rompem com a crença de que todos os problemas têm apenas uma solução, e que há sempre uma maneira certa de resolvê-lo; para esta investigadora, o aluno ao trabalhar com problemas com duas ou mais soluções, participa activamente num processo de investigação como "ser pensante e produtor do seu próprio conhecimento" (Stancanelli, 2001, p. 109);

iii) problemas com excessos de dados, onde nem todas as informações presentes no texto são usadas na sua resolução; este tipo de problemas rompe com a crença de que um problema não pode permitir dúvidas e de que todos os dados do texto são necessários para a sua resolução. Para Stancanelli (2001), este tipo de problemas leva a que o aluno desenvolva a sua capacidade de identificar os dados relevantes para a resolução do problema;

iv) problemas de lógica que, segundo a autora, "fornecem uma proposta de resolução cuja base não é numérica" e que exigem raciocínio dedutivo. Algumas das estratégias para a resolução deste tipo de problemas são o método de tentativa e erro, o uso de tabelas, diagramas e listas. Para esta investigadora, os problemas de lógica, dadas as suas características não-convencionais, são mais apelativos e motivadores para os alunos, favorecendo a leitura e interpretação do texto.

Vale e Pimentel (2004) propõem uma tipologia de problemas, apresentada por Charles e Lester em 1986, e que as autoras consideram adequada aos alunos do 1.º Ciclo do Ensino Básico. Esta tipologia é constituída por cinco tipos de problemas (Vale & Pimentel, 2004, pp. 18-19):

a) problemas de um passo – os problemas "que podem ser resolvidos através da aplicação directa de uma das quatro operações básicas da aritmética";

b) problemas de dois ou mais passos – os problemas "que podem ser resolvidos através da aplicação directa de duas ou mais das quatro operações básicas da aritmética";

c) problemas de processo – "São os que só podem ser resolvidos através da utilização de uma ou mais estratégias de resolução. São os que não utilizam processos mecanizados ou estandardizados.";

d) problemas de aplicação – são os que "requerem a recolha de dados acerca da vida real e a tomada de decisões";

e) problemas tipo puzzle – são problemas diferentes de todos os referidos nesta tipologia, caracterizando-se pelo desafio e pelo tipo de raciocínio que pretendem suscitar no aluno.

Uma outra tipologia foi apresentada pelo projecto GIRP (Grupo de Investigação em Resolução de Problemas) onde não se associa cada problema a um só tipo de problema e não são considerados os problemas tipo puzzle (da tipologia anterior). A tipologia apresentada por este projecto é formada pelos seguintes tipos de problemas (Vale & Pimentel, 2004):

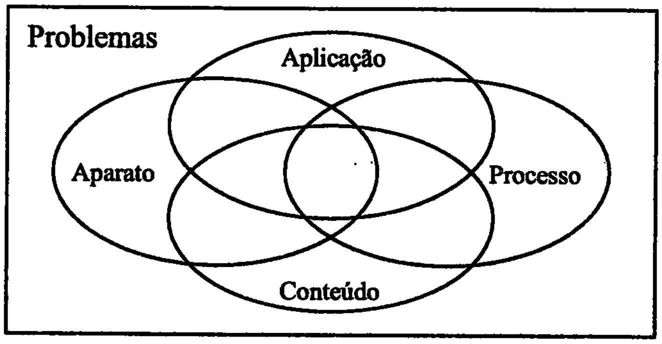
a) problemas de processo – geralmente não se resolvem pela aplicação directa de um algoritmo, requerendo a "utilização de estratégias de resolução de problemas, tais como: descobrir um padrão, trabalhar do fim para o princípio, fazer um esquema ou um desenho, fazer uma lista organizada, (...), formular e testar uma conjectura." (p. 19). Podem não estar relacionados com os conteúdos programáticos;

b) problemas de conteúdo, que requerem a utilização de conteúdos programáticos, de conceitos e definições;

c) problemas de aplicação, que utilizam dados da vida real e exigem a tomada de decisões. A sua resolução requer muitas vezes a utilização de uma ou mais estratégias de resolução, podendo admitir mais do que uma solução;

d) problemas de aparato experimental, que suscitam a utilização de métodos de investigação próprios das ciências experimentais. "Permitem desenvolver certas capacidades, tais como: planificar, organizar dados, interpretar dados, pesar, medir e contar" (p. 20).

Nesta tipologia de problemas apresentada pelo projecto GIRP um mesmo problema pode pertencer a mais do que um dos quatro tipos acima apresentados. A forma como os quatro tipos de problemas se podem relacionar encontra-se ilustrada no esquema seguinte (Vale & Pimentel, 2004, p. 21).



Esquema 1 – Tipologia de problemas pelo projecto GIRP

Síntese

Nas últimas décadas, têm sido muito discutidos e analisados, por diversos autores, o conceito de problema, o conceito de resolução de problema, bem como modelos e estratégias de resolução de problemas. Para além destes conceitos, têm também surgido variadas tipologias de problemas, umas mais adequadas ao 1.º Ciclo do que outras.

A investigação, no âmbito da resolução de problemas, aponta para a utilização de problemas, no decorrer do ensino e aprendizagem da Matemática, que apelem ao uso de estratégias diversificadas, bem como de diferentes representações por parte dos alunos. Os problemas de processo, de entre as diversas tipologias apresentadas, são os que apresentam mais potencialidades a esse nível.

As representações

Conceito de representação

No sentido mais geral, uma representação é uma configuração que pode representar uma outra coisa de alguma forma; dito de outro modo, é uma configuração que poderá, por exemplo, agir em lugar de, ser interpretada como, conectar-se, corresponder a, denotar, retratar, encarnar, codificar, evocar, rotular, ligar, significar, produzir, referir-se, assemelhar, servir como uma metáfora para, substituir, sugerir, ou simbolizar o elemento representado (Goldin, 2002).

No campo do desenvolvimento cognitivo, a representação, ou um sistema de representação, é um conjunto de regras através das quais se pode conservar aquilo que foi experimentado em diferentes situações (Bruner, 1989). A representação está relacionada com "a forma como a criança se liberta dos estímulos presentes e conserva a experiência passada num modelo", com "as regras que regem o armazenamento" e a forma de reaver a informação desse modelo (Bruner, 1999, p. 27).

A representação do mundo ou de alguma parte da nossa experiência possui determinadas características revestidas de enorme interesse. A representação de um evento é sempre selectiva. Na construção do modelo de algo não se inclui tudo o que está relacionado com ele. O princípio da selectividade é muitas vezes determinado pelo próprio objectivo da representação, isto é, aquilo a que nos propomos fazer ao representar algo (Bruner, 1989).

Num sentido mais restrito, e no domínio da educação matemática, as representações constituem ferramentas privilegiadas para organizar, registar e comunicar ideias matemáticas (NCTM, 2007). Mas para além disso, oferecem também um forte apoio à compreensão matemática dos alunos:

> As representações deverão ser tratadas como elementos essenciais no apoio à compreensão, por parte dos alunos, dos conceitos e das relações matemáticas, na comunicação de abordagens, argumentos e conhecimentos matemáticos, para si mesmos e para os outros, na identificação de conexões entre conceitos matemáticos interrelacionados, e na aplicação da matemática a problemas realistas, através da modelação (NCTM, 2007, p. 75).

As representações não são produtos estáticos, captam sim o processo de construção de um conceito ou de uma relação matemática (Woleck, 2001).

Uma representação matemática não pode ser compreendida ou interpretada isoladamente. Esta apenas faz sentido quando parte integrante de um sistema mais abrangente, estruturado, no qual diferentes representações estão relacionadas (Goldin & Shteingold, 2001).

Representar constitui um dos processos fundamentais da Matemática. A forma como os alunos representam as ideias matemáticas está intimamente ligada com a forma como os alunos as compreendem e utilizam (Ponte & Serrazina, 2000).

Sistemas internos e externos de representação

À palavra "representação" podem associar-se diversos significados. Tanto pode estar associada ao processo de representar como aos respectivos resultados (NCTM, 2007). Os processos e os produtos podem ser observáveis mas também podem não o ser, por acontecerem internamente na mente dos alunos (Ponte & Serrazina, 2000). Estes diferentes significados enquadram-se no que Goldin e Shteingold (2001) designam como sistemas internos de representação e sistemas externos de representação.

Sistemas internos de representação. Os sistemas internos de representação incluem as construções simbólicas pessoais construídas pelos alunos, bem como a atribuição de significado às notações matemáticas, e ainda a sua linguagem natural, o seu imaginário visual e representação espacial, as suas estratégias de resolução de problemas bem como heurísticas, e a sua relação com a Matemática (Goldin & Shteingold, 2001).

Os sistemas internos de representação podem ser de diversos tipos (Goldin & Shteingold, 2001):

a) sistemas verbais/sintácticos, que incluem as competências relacionadas com a linguagem natural;

b) sistemas *imagísticos* de representação que incluem configurações cognitivas visuais e espaciais ou "imagens mentais", as quais constituem um forte contributo para a compreensão matemática. Do mesmo modo, as construções internas relacionadas com o ritmo e a audição são essenciais, como quando as crianças aprendem as letras e contam sequências, batendo as palmas de forma ritmada;

c) representações formais das notações que têm origem internamente quando os alunos manipulam mentalmente os números, realizam operações aritméticas ou visualizam mentalmente os passos a seguir na resolução de uma equação algébrica;

d) estratégias e heurísticas que têm lugar nos processos de resolução de problemas que são representadas internamente à medida que os alunos desenvolvem e organizam mentalmente estratégias tais como "tentativa e erro" ou " trabalhar do fim para o princípio". Estas representações, embora altamente estruturadas, são frequentemente inconscientes, o que pode dificultar ao aluno a explicação de como resolveu o problema;

d) sistemas afectivos individuais de representação que incluem as atitudes, as crenças e os valores de cada um pela Matemática ou da respectiva relação com esta ciência.

Entre os sistemas acima mencionados estabelecem-se relações de diferentes tipos, não podendo por isso ser encarados de forma isolada mas sim em constante interacção (Goldin, 2002).

As representações internas, como o próprio nome indica, têm lugar no interior de cada aluno e, como tal, não são directamente observáveis (Goldin, 2002). Os professores fazem inferências acerca dos sistemas internos de representação dos seus alunos com base nas representações externas produzidas por estes (Goldin & Shteingold, 2001).

Sistemas externos de representação. Os sistemas externos de representação vão desde os sistemas convencionais de símbolos matemáticos (tais como a numeração base-dez, a notação algébrica formal, a recta real, a representação de coordenadas cartesianas) até ambientes de aprendizagem estruturados (por exemplo, os que envolvem materiais manipulativos concretos ou micro sistemas baseados em computadores) (Goldin & Shteingold, 2001).

Um dos principais atributos de uma representação é o de poder simbolizar, retratar ou representar algo diferente de si próprio. O número cinco poderá representar um determinado conjunto que contém cinco elementos ou poderá representar algo mais abstracto, como uma classe de equivalência de tais conjuntos. O gráfico cartesiano também é uma representação. Poderá retratar um conjunto de informações ou mesmo uma função ou até o conjunto solução de uma equação algébrica. Aquilo que é representado pode variar de acordo com o contexto ou com o próprio uso da representação. O número cinco e o gráfico cartesiano são exemplos de representações externas na Matemática uma vez que os alunos as produzem e os professores podem, a partir delas, discutir os seus significados em sala de aula (Goldin & Shteingold, 2001).

Porém, tais representações não podem ser encaradas de modo isolado. Os sistemas externos de representação encontram-se estruturados pelas convenções que lhes servem de base. Um número em particular ou um determinado gráfico não têm significado fora do sistema a que pertencem (Goldin & Shteingold, 2001).

Um outro importante aspecto que caracteriza as representações externas é a sua natureza bidireccional. Deste modo, consoante o contexto, um gráfico (por exemplo, o círculo de raio 1 centrado na origem no plano cartesiano) poderá fornecer uma representação geométrica de uma equação de duas variáveis (por exemplo, a equação

$x^2 + y^2 = 1$). Em alternativa, uma equação que relaciona x e y poderá fornecer uma simbolização algébrica de um gráfico cartesiano (Goldin & Shteingold, 2001).

Alguns sistemas externos de representação caracterizam-se sobretudo por serem formais e formados por notações matemáticas como, por exemplo, o nosso sistema de numeração, a forma como manipulamos expressões algébricas e equações, as nossas convenções para definir funções, derivadas e integrais, bem como linguagens de computador como o Logo. Outros sistemas externos estão concebidos para exibir relações espaciais, tais como gráficos baseados em coordenadas cartesianas, polares ou outro sistema de coordenadas, gráficos estatísticos, diagramas geométricos e ainda imagens de fractais geradas por computador. As palavras e as frases, ditas ou escritas, são igualmente representações externas. Estas representam ou descrevem objectos, propriedades físicas, acções e relações ou outros elementos mais abstractos.

É através das representações externas que são comunicadas as ideias abstractas que compõem a Matemática (Wong, 2004). Estas representações deverão conter as principais propriedades das ideias que estão a ser representadas (Wong, 2004).

As representações idiossincráticas

Uma vez que a presente investigação pretendeu investigar o papel que as representações, elaboradas por alunos do 1.º ano de escolaridade, desempenham na resolução de problemas de Matemática, julgou-se pertinente caracterizar as primeiras representações que as crianças constroem, pessoais e cheias de significado: as representações idiossincráticas.

As representações idiossincráticas construídas pelos alunos na resolução de problemas podem ajudá-los tanto na compreensão como na própria resolução do problema, constituindo ainda uma forma de registo do método de resolução que pode ainda possibilitar um meio de o descrever a outras pessoas. Através destas representações iniciais os professores terão mais facilmente acesso à forma como o aluno interpretou e raciocinou durante a resolução da tarefa proposta (NCTM, 2007).

As representações da criança são geralmente "representações idiossincráticas, espontâneas e imediatas, mais ou menos diferenciadas social e culturalmente, que têm mais a ver com o conhecimento do quotidiano do que com o conhecimento científico" (Santos, 1991, p. 21). As representações espontâneas da criança são perspectivadas por Santos (1991) do seguinte modo:

> (...) enquanto modo pessoal e natural de organização dos dados da percepção relativamente a um problema particular; enquanto apreensão sensível, intuitiva e imediata do objecto pelo sujeito (...); enquanto raciocínios espontâneos que conduzem a uma resposta rápida, não reflectida, considerada como evidente e cujas justificações são relativamente pouco explicitadas (Santos, 1991, pp. 21-22).

Para Santos (1991), é com estas representações idiossincráticas que a criança inicia a aprendizagem formal. Estas representações são também valorizadas por outros autores, que consideram que os alunos deverão ser encorajados a "representar as suas ideias sob formas que, para eles, façam sentido, mesmo que as suas primeiras representações não sejam as convencionais" (NCTM, 2007, p. 75).

Assim, no que diz respeito às representações idiossincráticas, embora possam apresentar pouca precisão e serem revestidas de muita particularidade, apoiam a compreensão dos conceitos e relações matemáticas, a comunicação e a aplicação das ideias matemáticas, dentro e fora da Matemática. Além destas potencialidades, este tipo de representações utilizado pelos alunos constitui uma importante forma de registo dos métodos de resolução ou mesmo da solução de um problema (Ponte & Serrazina, 2000).

Modos de representação

Existem diversos tipos de representações. Relativamente a estas representações, Jerome S. Bruner, um investigador clássico neste domínio, afirma que:

> A estrutura de qualquer domínio do conhecimento pode caracterizar-se de três maneiras: por um conjunto de acções apropriadas para alcançar certo resultado (representação activa); por um conjunto de imagens ou gráficos sumários que representam um conceito sem o definirem plenamente (representação icónica); e por um conjunto de proposições simbólicas ou lógicas extraídas de um sistema simbólico que é regido por regras ou leis para a formação e transformação de proposições (representação simbólica) (Bruner, 1999, p. 66).

Bruner (1999) exemplifica e distingue estas três formas de representar da seguinte forma:

> Podemos (...) concretizar a distinção na figura do braço da balança (...) Uma criança bastante pequena pode (...) actuar com base nos "princípios" do braço da balança e indicia-o ao ser capaz de se aguentar numa gangorra. Ela sabe que para conseguir que o seu lado desça mais tem que se afastar do centro. Uma criança um pouco mais velha consegue representar, para si própria, o braço da balança, quer através de um modelo em que se podem pendurar e equilibrar umas argolas, quer por desenho. (...) Por fim, um braço de balança pode ser descrito em linguagem, sem auxiliares diagramáticos, ou pode, (...) ser descrito matematicamente com recurso às Leis do Movimento, de Newton (...). As

> acções, as imagens e os símbolos variam em dificuldade e utilidade, consoante as idades, os antecedentes e os estilos (Bruner, 1999, p. 66).

Estes três sistemas de representação (a representação activa, a representação icónica e a representação simbólica) operam durante o desenvolvimento da inteligência humana e a interacção entre os diferentes sistemas é crucial para o desenvolvimento de cada pessoa. O desenvolvimento não implica uma sequência de etapas, mas sim um domínio progressivo destas três formas de representação. Cada um dos três sistemas pode ser especificado de uma forma muito concisa e verifica-se que cada um deles se modifica e adquire novas formas graças à sua vinculação com determinados instrumentos (Bruner, 1989):

i) representações activas: conhecemos através da acção muitas coisas, para as quais não há imagens nem palavras e que são muito difíceis de ensinar através de outra forma que não a própria prática como, por exemplo, ensinar a jogar ténis, a fazer esqui ou andar de bicicleta (Bruner, 1999). Se tomarmos como exemplo *dar um nó*, a primeira coisa a fazer é aprender a acção de *dar um nó* e quando dizemos que conhecemos aquele *nó* referimo-nos a um acto habitual que dominámos e que podemos repetir. Neste caso a representação expressa-se através da acção, tendo portanto as suas limitações, entre as quais cabe destacar o seu carácter sequencial (Bruner, 1989). "A representação activa baseia-se, ao que parece, na aprendizagem de respostas e formas de habituação" (Bruner, 1999, p. 28);

ii) representações icónicas: voltando ao exemplo dado na representação anterior, *dar um nó*, ter a imagem mental do nó, ou a imagem desenhada no papel, não é o mesmo que fazer o nó, ainda que a imagem mental possa proporcionar um esquema para organizar sequencialmente as acções. A imagem é uma analogia muito estilizada, selectiva e simultânea de uma situação vivida (Bruner, 1989). Bruner (2000) acrescenta ainda que:

> (...) as imagens não se limitam a captar a particularidade de eventos e objectos: dão origem a classes de eventos, servindo-lhes de protótipos, fornecendo pontos de referência em relação aos quais se compara exemplos que aspiram a ser membros dessas classes (Bruner, 2000, p. 202).

A representação icónica depende da organização visual ou outra organização sensorial e do recurso a imagens de resumo (Bruner, 1999).

iii) representação simbólica: é a representação por palavras ou linguagem, cuja principal característica é ser simbólica por natureza (Bruner, 1999). O significado linguístico é sobretudo arbitrário e depende do domínio de um código simbólico. Para realizar uma descrição linguística é necessário conhecer não só os referentes das palavras, mas também as regras para construir e transformar as referidas descrições. Estas regras são específicas da linguagem, como também o são as regras para a construção de imagens ou formação de hábitos (Bruner, 1989).

No seguimento do trabalho de Jerome Bruner, outras teorias sobre modos de representação foram surgindo.

Haylock, em 1984, relatou o uso de um quadro (*think-board)* dividido em quatro secções, correspondendo cada uma delas a um modo de representação: numerais e sinais (*numerals and signs*), imagens (*pictures*), objectos reais *(real things)* e histórias (*stories*) (Wong, 2004). Wong (2004) considerou estes quatro modos de representação bastante adequados para os alunos do 1.º ciclo, sendo necessário acrescentar outros modos de representação para os alunos dos ciclos posteriores.

Em 1987, Lesh, Post e Behr propuseram um modelo que incluía cinco modos de representação: modelos de manipulação (*manipulative models*), *real scripts,* comunicação oral (*spoken language),* símbolos escritos (*written symbols*) e imagens (*static pictures)* (Wong, 2004).

Wong (2004) advogou o uso de um quadro com forma hexagonal, formado por seis secções, correspondendo cada uma delas a um modo de representação, para a aprendizagem da Matemática (MMTB – *multi-modal think-board).* Cada modo de representação estaria associado a um verbo que descreve a acção predominante associada a esse mesmo modo:

- número – calcular (*number – calculate*). A maioria das pessoas associa a Matemática a números, pois este modo de representação é usado frequentemente nas aulas de Matemática, envolvendo cálculos.
- palavra – comunicar (*word – communicate*). As palavras constituem um meio essencial para pensar matematicamente e para comunicar com os outros. Como modo de representação inclui termos matemáticos e frases.
- diagrama – visualizar (*diagram – visualize*). Este modo de representação inclui ilustrações, imagens, diagramas, gráficos, tabelas e figuras. Os diagramas aparecem

em vários graus de abstracção, por exemplo, um desenho de várias maçãs *versus* vários pontos, em que cada ponto representa uma maçã.

- símbolo – operar (*symbol – manipulate*). Os currículos matemáticos de todo o mundo incluem operações com símbolos, tais como simplificar $2x + 3y - x$ ou determinar $\int x^2\, dx$. Contudo, estas operações são vistas por muito alunos como difíceis e desprovidas de significado, não sendo reconhecido o poder que os símbolos desempenham no pensamento matemático. Para Wong (2004), é fundamental que os alunos relacionem os símbolos matemáticos mais utilizados aos outros modos de representação a fim de promover a compreensão matemática.
- objecto real – fazer (*real thing – do*). Este modo de representação refere-se ao uso de materiais manipulativos. Está relacionado com o princípio do *aprender fazendo:* eu oiço e esqueço; eu vejo e recordo; eu faço e compreendo. Ao associar ideias abstractas a situações concretas, os alunos desenvolvem modelos mentais que dão sentido aos símbolos abstractos, reduzindo assim alguma ansiedade e medo pela Matemática.
- história – aplicar (*story – apply*). Este modo inclui problemas de palavras, problemas relacionados com situações da vida real, artigos de jornais, entre outros. A Matemática tem aplicações importantes nas situações do dia-a-dia. Estabelecer ligações entre estas situações reais e os manuais de Matemática não só reforça conceitos e capacidades como também aumenta a motivação na aprendizagem.

Segundo Wong (2004), o MMTB permite aos alunos uma maior compreensão das conexões que se podem estabelecer entre os diferentes modos de representação das ideias matemáticas, permitindo ainda a aquisição de um reportório maior de estratégias de aprendizagem e uma compreensão mais profunda da Matemática.

Fazendo uma comparação mais atenta entre os modelos anteriormente apresentados de modos de representação, podemos encontrar características comuns, embora por vezes, com nomenclaturas diferentes.

Nas representações activas propostas por Bruner podem-se perfeitamente enquadrar os modelos de manipulação (*manipulative models*) de Lesh, Post e Behr (Wong, 2004), os objectos reais *(real things)* de Haylock (Wong, 2004) e o objecto real – fazer (*real thing – do*) de Wong (2004). Todos estes modos de representação, embora com nomes diferentes, se referem à utilização de materiais manipulativos pelos alunos, tanto na aprendizagem da Matemática, como na resolução de problemas.

Nesta linha de pensamento, as representações icónicas propostas também por Bruner podem igualmente englobar os modos de representação propostos pelos autores posteriores, como sejam as imagens (*static pictures*) de Lesh, Post e Behr (Wong, 2004), as imagens (*pictures*) de Haylock (Wong, 2004) e o diagrama – visualizar (*diagram – visualize*) de Wong (2004). Todos estes modos de representação se referem à utilização de figuras, imagens, diagramas ou gráficos pelo aluno para representação de ideias matemáticas.

Por fim, nas representações simbólicas de Bruner podemos também englobar outros modos de representação sugeridos por autores posteriores, tais como os símbolos escritos (*written symbols*) de Lesh, Post e Behr (Wong, 2004), os numerais e sinais (*numerals and signs*) de Haylock (Wong, 2004), o número – calcular (*number – calculate*), o símbolo – utilizar (*symbol – manipulate*) e a palavra – comunicar (*word– communicate*) de Wong (2004).

No âmbito da presente investigação e com vista à categorização dos modos de representação, serão adoptados os três sistemas de representação descritos por Jerome Bruner: representações activas, representações icónicas e representações simbólicas.

Representações icónicas

Pela importância de que se revestem no 1.º Ciclo, foram abordadas mais pormenorizadamente três tipos de representações icónicas: o desenho, símbolos não convencionais (representativos do real) e o diagrama.

O desenho. Nas representações icónicas incluem-se as representações pictóricas, também elas muito importantes na actual investigação. As crianças, desde pequenas, expressam-se naturalmente através do desenho. Elas desenham por prazer, por diversão. No desenho a criança encontra um valioso recurso para comunicar e expressar os seus sentimentos, vontades e ideias. O desenho é a sua primeira escrita e representa uma linguagem para a criança, assim como o gesto ou a fala. Em Matemática, o desenho dá a possibilidade à criança de construir um significado para os novos conceitos que vai aprendendo. Segundo Cândido (2001), "Para crianças que ainda não escrevem, que têm dificuldade em expressar-se oralmente, ou que já escrevem, mas ainda não dominam a linguagem matemática, o desenho pode ser uma alternativa para que elas comuniquem o que pensam" (p. 19). Para esta investigadora, quando se pede a um aluno que registe através do desenho uma determinada actividade realizada, proporciona-se-lhe uma maior reflexão sobre o que foi feito. O desenho funciona assim como uma ferramenta para o aluno dar significado aos conceitos e às ideias matemáticas com que se vai deparando.

Ainda no contexto das representações matemáticas, para Smole e Diniz (2001), o desenho serve como recurso de interpretação do problema e como registo da estratégia de solução. Cavalcanti (2001) reporta-se a estudos publicados por Zunino em 1995, para salientar a ideia de que o desenho pode ser usado de três maneiras diferentes na resolução de problemas:

a) Para representar aspectos da situação apresentada no texto sem expressar relações que identifiquem as transformações numéricas. Na figura 1 ilustra-se a resolução de um problema no qual o aluno[2] se limitou apenas a desenhar todos os elementos do problema em questão sem, no entanto, estabelecer quaisquer relações entre os mesmos.

O voo das bruxas
20 bruxas têm de viajar em 8 vassouras para um encontro em Lisboa. Porém, nenhuma vassoura pode levar mais do que 4 bruxas nem menos do que 2. Como voarão as bruxas? (Adaptado de Woleck, 2001)

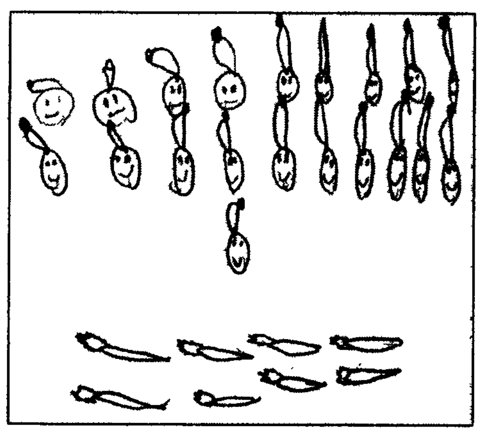


Figura 1 – Desenhos no problema "O voo das bruxas"

b) Para representar a resolução completa do problema utilizando apenas o desenho. Na figura 2 está ilustrada a resolução de um problema no qual a aluna recorreu apenas ao desenho para representar todos os elementos do problema em questão.

[2] As ilustrações das representações seguintes são, na sua maioria, da autoria de alunos da turma na qual decorreu a presente investigação. Quando a fonte for outra, será devidamente indicada.

Os rebuçados
A Rita tem 9 rebuçados que quer distribuir pelas suas três amigas, de modo a que cada amiga receba o mesmo número de rebuçados. Quantos rebuçados recebe cada amiga?
(Adaptado de Ferreira, 2003)

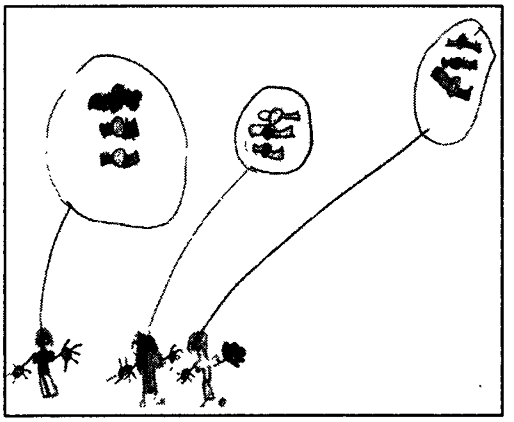


Figura 2 – O desenho no problema "Os rebuçados"

c) O aluno mistura desenhos e símbolos matemáticos. Na figura 3 encontra-se ilustrada uma resolução do problema abaixo referido em que o aluno utilizou desenhos (representativos de sabonetes) e linguagem matemática.

A higiene do elefante
Um elefante gasta dois sabonetes por dia na sua higiene. Quantos sabonetes gastará em cinco dias?
(Adaptado de Smole & Diniz, 2001)

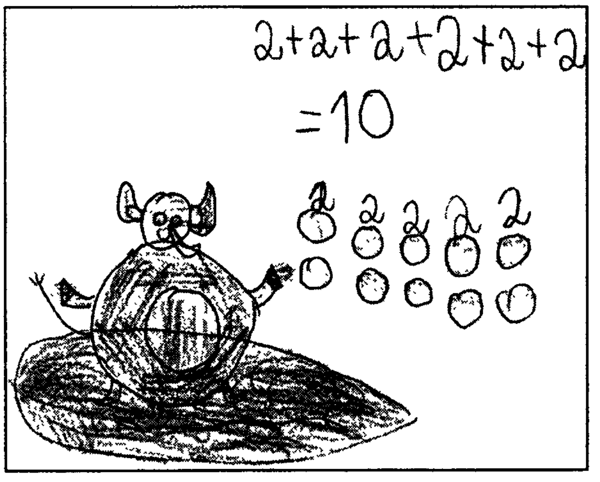


Figura 3 – Desenhos e símbolos matemáticos no problema "A higiene do elefante"

Dois factos podem decorrer desta última representação: o aluno utiliza o desenho para interpretar o texto e expressa a resolução através da linguagem matemática ou faz uma resolução numérica e utiliza o desenho para comprovar se a sua resposta está correcta (Cavalcanti, 2001).

Também Woleck (2001), na sua investigação, constatou que os desenhos eram utilizados de diferentes modos pelas crianças no âmbito da aprendizagem e comunicação matemáticas. Por vezes, os desenhos eram usados como ferramentas de suporte à resolução de problemas e ao desenvolvimento de conceitos matemáticos. Alguns dos alunos do 1.º ano que participaram no estudo realizado por Woleck utilizaram os seus desenhos como se estes fossem passíveis de manipular para serem organizados e contados para resolver o problema. Segundo a investigadora, neste ponto, estas representações pictóricas funcionaram como base de apoio aos pensamentos permitindo às crianças ultrapassar os passos intermédios da tarefa.

Por outro lado, Woleck (2001) verificou que os desenhos eram também utilizados como representações "dramáticas" que acompanhavam o pensamento matemático e comunicavam a essência do trabalho. Nesta linha de pensamento, os desenhos funcionavam como ferramenta que preparava o terreno para a escrita e que permitia às crianças reflectir e recordar o processo matemático seguido a fim de o comunicar aos outros.

Woleck (2001) afirma ainda que o recurso ao desenho pelas crianças pode constituir um precursor da sua utilização de símbolos na Matemática. As crianças inventam e usam os seus próprios símbolos nas representações matemáticas, estes símbolos fazem sentido, têm significado, são intencionais e têm um propósito.

Símbolos não convencionais (representativos do real). No âmbito da presente investigação fez-se uma distinção relativamente ao tipo de elementos icónicos construídos e utilizados pelos alunos nas representações elaboradas no decurso da resolução dos problemas propostos.

Desta forma, além do desenho considerou-se outro tipo de elemento icónico a que se atribuiu o nome de símbolo não convencional. O símbolo não convencional, tratando-se de uma representação idiossincrática, constituindo um modo muito próprio e pessoal de organização de dados (Santos, 1991), foi considerado no âmbito desta investigação como representação menos convencional. Para além das características atrás referidas, os símbolos não convencionais foram utilizados pelas crianças para representar elementos do real, surgindo sob a forma de traços verticais, traços horizontais, círculos, entre outros. Enquanto que no desenho o aluno apresenta pormenores e detalhes tal como os vê na realidade, o símbolo não convencional representa alguém ou alguma coisa, apresentando-se despido de pormenores.

Nas figuras seguintes pode ver-se um conjunto de representações diversas que surgiram no âmbito da resolução dos problemas referidos.

Os rebuçados
A Rita tem 9 rebuçados que quer distribuir pelas suas três amigas, de modo a que cada amiga receba o mesmo número de rebuçados. Quantos rebuçados recebe cada amiga?
(Adaptado de Ferreira, 2003)

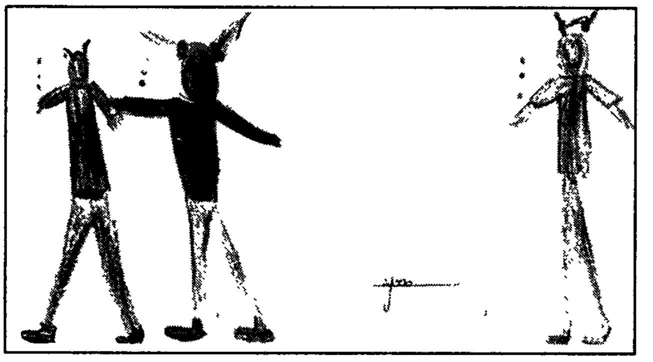


Figura 4 – Símbolos não convencionais no problema "Os rebuçados"

A higiene do elefante
Um elefante gasta dois sabonetes por dia na sua higiene. Quantos sabonetes gastará em cinco dias?
(Adaptado de Smole & Diniz, 2001)

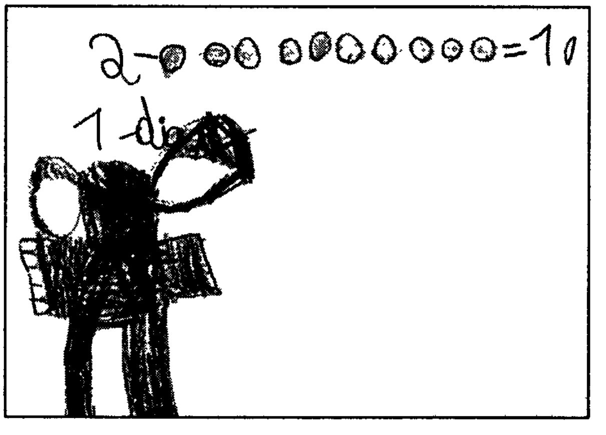


Figura 5 – Símbolos não convencionais no problema "A higiene do elefante"

O número de rodas
Quantas rodas existem em quatro bicicletas e três triciclos?
(NCTM, 2007, p. 163)

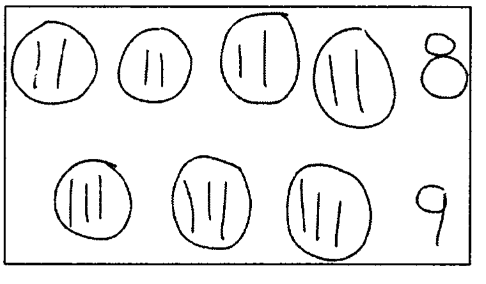


Figura 6 – Símbolos não convencionais no problema "O número de rodas" (NCTM, 2007, p. 163)

Na figura 4 o aluno representa os nove rebuçados distribuídos pelas amigas por pequenos círculos; na figura 5 os sabonetes utilizados na higiene diária pelo elefante foram representados também por círculos; por fim, na figura 6, as rodas das bicicletas e as rodas dos triciclos foram representados por traços verticais.

Diagrama. Para Wong (2004) desenhar diagramas constitui uma heurística importante no âmbito da resolução de problemas. Uma vez que os diagramas têm um papel importante no âmbito da presente investigação, considerou-se pertinente aprofundar este tipo de representação icónica.

Para Diezmann e English (2001), um diagrama é uma representação visual que apresenta informações num formato espacial. O diagrama, na resolução de problemas, pode ser útil para descompactar a estrutura do problema e lançar as bases para a sua solução. Os diagramas podem ser encarados como representações da estrutura dos problemas e podem transformar-se em verdadeiras ferramentas de apoio ao pensamento matemático. No entanto, é essencial que os alunos saibam a razão por que um diagrama pode ser utilizado na resolução de problemas, qual o diagrama apropriado para uma determinada situação e como utilizar o diagrama para resolver o problema. Estas três competências atrás referidas são o que os autores chamam de *literacia do diagrama*, a qual poderá e deverá ser desenvolvida e promovida pelos professores, tema que será desenvolvido oportunamente.

Diezmann e English (2001) reportam-se a estudos publicados em 1999 por Novick, Hurley e Francis para identificar quatro tipos de diagramas que representam relações específicas entre os dados de um problema: diagramas em rede (*networks*), matrizes (*matrices*), diagramas de hierarquias (*hierarchies*) e diagramas parte-todo (*part-whole diagrams*).

Os diagramas em rede são diagramas que consistem em conjuntos de elementos interligados por uma ou mais linhas. Este tipo de diagrama, quando formado por poucos elementos e poucas ligações entre os mesmos, é por vezes nomeado por diagrama de linhas (*line diagram*). Diezmann e English (2001) apresentam alguns exemplos de diagramas em rede:

Problema da rã
Uma rã tentava saltar para fora de um poço. Cada vez que a rã saltava, subia quatro filas de tijolos, mas como estes estavam escorregadios, descia uma fila. Quantos saltos tem a rã de dar se o poço tiver 12 filas de altura? (Diezmann & English, 2001, p. 78)

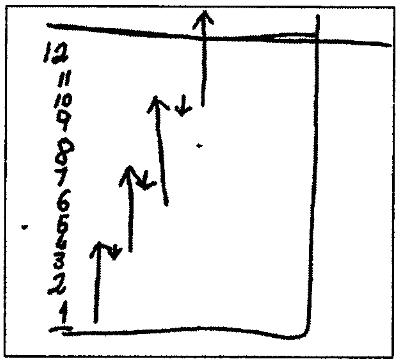


Figura 7 – Diagrama em rede na resolução do problema da rã (Diezmann & English, 2001, p. 78)

A figura 7 ilustra um diagrama em rede construído por uma aluna de dez anos. A aluna representou as filas do poço por uma linha vertical de números e indicou os movimentos ascendentes e descendentes da rã através de setas. A disposição espacial das setas permitiu-lhe facilmente coordenar e localizar os movimentos da rã durante um certo número de dias. O diagrama construído representou com clareza a estrutura do problema e forneceu as bases para a solução correcta (Diezmann & English, 2001).

O diagrama em rede ilustrado na figura 8 constitui uma representação mais complexa, uma vez que são estabelecidos dois conjuntos de relações entre os elementos que o constituem (múltiplos de 5 e múltiplos de 3):

Problema dos pássaros
Um pintarroxo (*robin*) vai comer a um comedouro de aves de 5 em 5 dias e um pardal (*sparrow*) vai comer a cada 3 dias. Hoje ambas as aves vieram ao comedouro de aves. Daqui a quantos dias estarão de novo os dois pássaros ao mesmo tempo no comedouro? (Diezmann & English, 2001, p. 79)

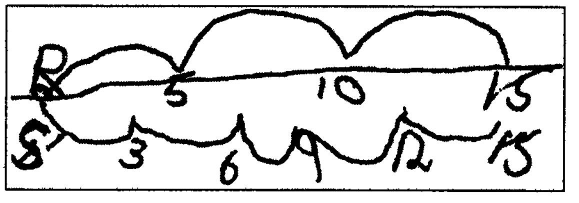


Figura 8 – Diagrama em rede na resolução do problema dos pássaros (Diezmann & English, 2001, p. 79)

Através do diagrama ilustrado na figura 8, a aluna representou as visitas dos dois pássaros ao comedouro de aves. O seu diagrama foi particularmente eficaz ao localizar com grande exactidão os dois conjuntos de múltiplos na linha numérica (Diezmann & English, 2001).

As matrizes referem-se a diagramas que utilizam duas dimensões para representar as relações que existem entre dois conjuntos de informação. São particularmente úteis em problemas que requerem pensamento dedutivo ou raciocínio combinatório.

Uma matriz é útil nos problemas que envolvem dedução porque o diagrama ajuda o aluno a localizar a informação conhecida e possibilita que a informação implícita se torne mais explícita. Este tipo de diagrama encontra-se ilustrado na figura 9.

Problema dos desportos

Quatro amigos gostam de diferentes desportos. Um gosta de ténis (*tennis*), outro de natação (*swimming*), outro de correr (*running*) e outro gosta de ginástica (*gym*). Cada pessoa gosta de apenas um desporto. Utiliza as pistas para saber de que desporto gosta cada amigo:

1. A *Sally* e o *Rick* encontraram-se quando um deles ganhou uma corrida de natação.
2. A *Tara* e o *Greg* encontraram-se quando um deles exercitava no ginásio.
3. A *Sally* não é nem nadadora nem corredora.
4. O *Greg* é amigo do irmão do(a) ginasta.

(Diezmann & English, 2001, p. 80)

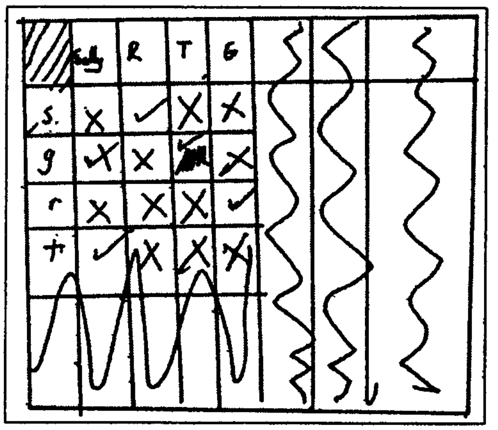


Figura 9 – Matriz elaborada na resolução do problema dos desportos (Diezmann & English, 2001, p. 80)

Na matriz desenhada por este aluno (figura 9) os quatro amigos são representados no eixo horizontal e os quatro desportos no eixo vertical. O aluno utilizou as pistas n.º 1 e n.º 3 para deduzir correctamente que *Rick* era nadador. Esta dedução foi representada através de um visto na matriz. No entanto, o raciocínio deste aluno nem sempre foi o correcto a partir das pistas fornecidas.

Nos problemas de combinatória, a matriz proporciona uma representação visual do número de combinações. Por exemplo, se o aluno pode escolher entre duas bebidas e três tipos de pratos ao almoço, as seis combinações possíveis de almoço podem ser identificadas mais facilmente através de uma matriz (Diezmann & English, 2001).

Os diagramas de hierarquias são aqueles que representam caminhos convergentes ou não entre uma série de elementos. Diagramas em árvore são um exemplo deste tipo de diagrama. O diagrama ilustrado na figura 10 é um exemplo de um diagrama de hierarquia.

Problema de voleibol
Quatro equipas disputam uma final de voleibol. A equipa A vence a equipa B e a equipa C perde para a equipa D. Quem foi o vencedor sabendo que a equipa D perdeu o jogo final?
(Diezmann & English, 2001, p. 81)

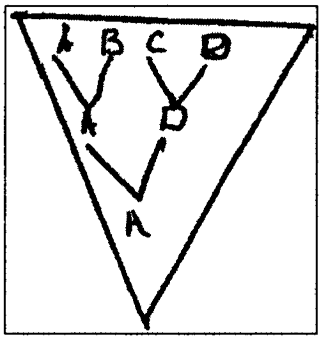


Figura 10 – Diagrama de hierarquia na resolução do problema de voleibol (Diezmann & English, 2001, p. 81)

O diagrama de hierarquia da figura 10 representou a estrutura do problema. Na primeira linha do diagrama o aluno representou as quatro equipas. Na segunda linha apenas as equipas vencedoras da primeira volta são apresentadas. Na última linha surge a equipa vencedora da competição de voleibol (Diezmann & English, 2001).

Por fim, os diagramas parte-todo representam a relação que existe entre a parte e o todo. Ao contrário dos dois tipos anteriores de diagrama referidos, os diagramas parte-todo não têm uma forma externa particular que os identifique. O diagrama ilustrado na figura 11 representa um diagrama parte-todo.

Problema do parque
A *Jane* viu algumas pessoas a passear os seus cães no parque. Ela contou as pernas e descobriu que ao todo eram 48 pernas. Quantas pessoas e quantos cães estavam no parque? Existem outras soluções?
(Diezmann & English, 2001, p. 81)

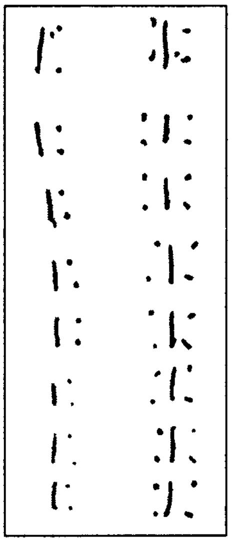


Figura 11 – Diagrama parte-todo na resolução do problema do parque (Diezmann & English, 2001, p. 81)

Neste diagrama parte-todo, a parte corresponde ao número de pernas do par pessoa-cão e o todo é o número total de pernas (48) (Diezmann & English, 2001).

Aspectos críticos na utilização dos diagramas. Os termos diagrama, figura e desenho são por vezes utilizados como sinónimos. Contudo, existe uma importante diferença entre diagramas e figuras e entre diagramas e desenhos.

O conceito de diagrama. Os diagramas são representações estruturais, os detalhes superficiais não são importantes. Por exemplo, na figura 11, as pessoas, os cães e as respectivas pernas estão representadas simplesmente por linhas e pontos (Diezmann & English, 2001). Em contraste, as figuras e os desenhos mostram geralmente pormenores e detalhes, como é o caso das representações ilustradas na figura 2, em que tanto as pessoas como os rebuçados são desenhados com bastante pormenor.

Diezmann e English (2001), reportam-se a estudos publicados em 1987 por Dufour-Janvier, Bednarz e Belanger para referir que a falta de conhecimento e de compreensão do conceito do diagrama poderá explicar a razão pela qual os alunos representam frequentemente as características superficiais, os pormenores dos problemas, em vez das características estruturais.

Diezmann e English (2001) sugerem que os professores desenvolvam a compreensão do conceito de diagrama nos alunos proporcionando-lhes oportunidades para explicarem as suas ideias acerca dos diagramas e respondendo às suas dúvidas. Os alunos deverão perceber que os diagramas são representações da estrutura dos problemas e, por isso, diferentes de figuras. Estes investigadores sugerem ainda que o professor acompanhe e registe a evolução dos alunos relativamente à compreensão dos diagramas a fim de orientar correctamente a sua prática pedagógica.

Criar um diagrama. O processo de criação do diagrama é um passo crucial para o raciocínio que se desenvolve a partir do mesmo. Diezmann e English (2001) afirmam que durante este processo os alunos têm oportunidade de reflectir sobre se o diagrama que estão a criar é ou não adequado para representar o problema dado. A reflexão como parte integrante do processo de criação do diagrama pode realçar e aumentar a compreensão dos alunos relativamente à estrutura do problema.

Diezmann e English (2001) observaram no seu trabalho que os alunos atravessam diversos níveis de sucesso na criação de diagramas apropriados para um determinado problema. Alguns alunos não conseguem sequer iniciar o processo de elaborar um diagrama. Nas representações ilustradas na figura 1 anteriormente apresentada, pode ver-se com clareza que o aluno apenas conseguiu desenhar os diferentes elementos do problema em questão mas não conseguiu representar a estrutura do problema nem as relações existentes entre os diferentes intervenientes. Outros conseguem criar diagramas mas nem sempre conseguem representar adequadamente a estrutura do problema. Ainda em relação ao problema do parque, nem todos os alunos conseguiram representar correctamente a estrutura do problema, como na representação ilustrada na figura 11. Na primeira imagem da figura 12, o aluno representou correctamente um cão e uma pessoa mas não representou o número total de pernas, ou seja, representou a parte mas não o todo; na segunda imagem, o aluno representou o total de pernas mas não as agrupou correctamente e, neste caso, o todo foi correctamente representado mas não aconteceu o mesmo com a parte (Diezmann & English, 2001).

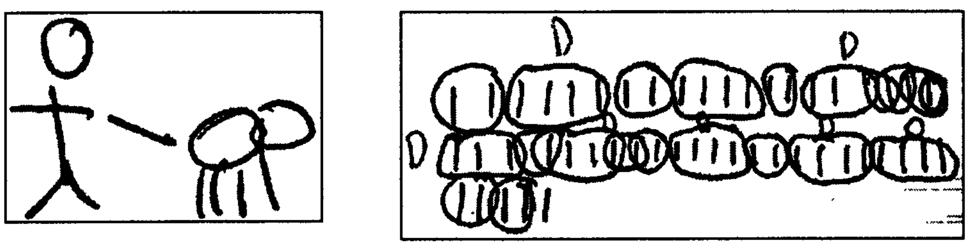


Figura 12 – Diagramas parte-todo incompletos (Diezmann & English, 2001, p. 83)

Com o objectivo de ajudar os alunos a compreender as relações existentes entre o problema e a sua representação, o professor deverá: (i) explicar a ligação que existe entre a estrutura de um problema e a sua representação através do diagrama; (ii) modelar a criação de um diagrama e explicar como os diversos componentes do problema são representados; (iii) encorajar os alunos a discutir entre si os seus diagramas bem como as semelhanças e diferenças em vários diagramas que podem representar o mesmo problema; (iv) conduzir os alunos para o estudo dos diferentes tipos de diagrama e apresentar-lhes problemas que podem ser representados por cada um deles e (v) proporcionar oportunidades aos alunos de identificar qual dos diagramas é mais apropriado para representar um determinado problema (Diezmann & English, 2001).

Raciocinar a partir de um diagrama. As dificuldades dos alunos em raciocinar a partir de diagramas estão frequentemente relacionadas com as suas inferências acerca da estrutura do problema dado. A capacidade de desenvolver inferências correctas a partir de um diagrama é aquilo que caracteriza, em primeiro lugar, a importância do raciocínio a partir deste tipo de representação. Contudo, as inferências que os alunos desenvolvem podem variar consoante o tipo de diagrama utilizado. Um dos obstáculos ao raciocínio correcto dos alunos é o facto destes não se aperceberem que um diagrama deverá produzir respostas consistentes (Diezmann & English, 2001).

A dificuldade em raciocinar a partir de um diagrama para chegar à solução correcta está bem patente na matriz da figura 9, diagrama construído para a resolução do problema dos desportos. Embora o aluno tenha criado uma matriz apropriada, o seu raciocínio dedutivo falhou porque ele não considerou todas as possibilidades.

Segundo Diezmann e English (2001), os professores poderão desenvolver o raciocínio dos alunos a partir dos diagramas de duas formas: (i) realçando a importância da precisão na localização e no movimento dos elementos num diagrama e (ii) encorajando os alunos a utilizarem estratégias de orientação quando constroem o diagrama para que o mesmo não fique demasiado confuso e a verificar o seu trabalho.

Representações simbólicas

Uma vez que também as representações simbólicas são utilizadas no decorrer do 1.º Ciclo, há que referi-las no âmbito do presente estudo.

Para Cândido (2001), a escrita constitui um importante recurso de representação das ideias dos alunos nas aulas de Matemática. Para esta investigadora, a escrita possui duas características muito próprias: (i) auxilia a recuperação da memória, uma vez que muitas discussões orais poderiam ficar perdidas sem o registo escrito e (ii) possibilita a comunicação à distância no espaço e no tempo, bem como a troca de informações com outras pessoas que, desta forma, têm acesso ao que foi pensado e vivido. Ao trabalhar estas funções da escrita na sala de aula proporciona-se ao aluno a possibilidade de "descobrir a importância da língua escrita e de seus múltiplos usos, ao mesmo tempo que as ideias matemáticas são aprendidas" (Cândido, 2001, p. 23).

Para Cavalcanti (2001), os alunos deverão ter acesso à linguagem matemática de forma gradual e equilibrada, a qual deve ser desenvolvida por "aproximações sucessivas". A linguagem escrita da Matemática aprende-se através do seu uso e, à medida que os alunos têm oportunidade de utilizar as representações que consideram válidas e de as confrontar com representações mais convencionais, descobrem as funções e as potencialidades de uma forma mais convencional de resolver problemas. Desta forma, comparando a linguagem escrita da Matemática com as representações dos alunos, estes têm a oportunidade de verificar que a escrita matemática pode permitir uma maior economia de esforço e tempo na busca da solução e, para além disso, pode ser lida e compreendida por muitas pessoas. Deve caber ao aluno a decisão de usar um desenho ou fazer uma operação matemática. Esta decisão dependerá das suas capacidades e dos seus conhecimentos, dependendo ainda do contexto ou do tipo de problema.

As representações do seu próprio conhecimento matemático construídas pelos alunos são únicas e cheias de imaginação. Mas tal como estas representações pessoais e espontâneas dos alunos são importantes, também "é igualmente importante que os alunos aprendam formas de representação convencionais, de modo a facilitar quer a sua aprendizagem da Matemática, quer a comunicação com terceiros das suas ideias matemáticas" (NCTM, 2007, p. 75).

A utilização de símbolos matemáticos deverá ser posterior a outras formas de comunicação de ideias matemáticas. Assim, será mais fácil para os alunos relacionar a sua linguagem quotidiana com a linguagem e símbolos matemáticos de forma significativa (NCTM, 2007).

Na figura 13 podemos ver uma das resoluções do problema "A higiene do elefante" na qual este aluno em particular apresentou a solução do mesmo sob a forma de representações simbólicas. O desenho construído é uma mera ilustração.

A higiene do elefante
Um elefante gasta dois sabonetes por dia na sua higiene. Quantos sabonetes gastará em cinco dias? (Adaptado de Smole & Diniz, 2001)

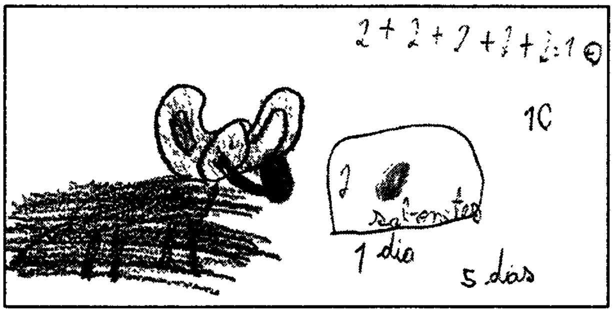


Figura 13 – Representações simbólicas no problema "A higiene do elefante"

Síntese

As representações podem ser consideradas como importantes ferramentas através das quais os alunos organizam, registam e comunicam ideias matemáticas, servindo igualmente de apoio à compreensão de conceitos e relações matemáticas.

As primeiras representações construídas pelos alunos, as representações idiossincráticas, são pouco convencionais, muito pessoais e particulares. São representações muito próprias, cheias de significado para quem as cria, e que podem fornecer ao professor pertinentes informações sobre o raciocínio dos seus autores.

Ao longo das últimas décadas, várias teorias sobre modos de representação têm surgido. No entanto, todas parecem apoiar-se no trabalho de Jerome Bruner, segundo o qual existem três tipos de representações distintas: representações activas, representações icónicas e representações simbólicas.

No campo das representações icónicas, e pela importância de que estas representações se revestem no decorrer da resolução de problemas de Matemática no 1.º Ciclo do Ensino Básico, há a destacar três tipos de elementos icónicos: o desenho, os símbolos não convencionais (representativos do real) e o diagrama.

De entre os três tipos de elementos icónicos mencionados, dá-se ainda particular destaque ao diagrama, uma vez que este pode ser encarado como uma valiosa ferramenta de apoio ao raciocínio matemático, podendo igualmente ser útil para descompactar a estrutura de um problema e lançar as bases para a sua solução.

Capítulo III

Metodologia da investigação

No presente capítulo apresentam-se e justificam-se as opções metodológicas tomadas no âmbito da presente investigação. Neste capítulo é também descrito o contexto em que decorreu a investigação bem como o seu desenvolvimento. Para além destes aspectos, são também identificados os alunos que constituíram os estudos de caso bem como os critérios que estiveram na base da sua selecção. Referem-se igualmente as técnicas utilizadas na recolha dos dados e sua análise.

Opções fundamentais e design

Este estudo baseia-se numa investigação de natureza qualitativa. Segundo Bogdan e Biklen (1994), na investigação qualitativa o investigador é o instrumento principal, sendo que o ambiente natural constitui a fonte directa de dados. Para estes autores, este tipo de investigação caracteriza-se por ser descritiva, uma vez que a "palavra escrita assume particular importância (...), tanto para o registo dos dados como para a disseminação dos resultados" (p. 49). A abordagem da investigação qualitativa requer que o investigador preste atenção a cada detalhe do ambiente que o rodeia, uma vez que tudo pode ter potencial para contribuir para uma melhor compreensão do seu objecto de estudo. Para além das características já referidas, a ênfase da investigação qualitativa encontra-se mais nos processos do que apenas nos resultados ou produtos (Bogdan & Biklen, 1994). Relativamente à análise dos dados recolhidos através deste tipo de investigação, o investigador tende a analisá-los de forma indutiva, ou seja, o investigador não recolhe "dados ou provas com o objectivo de confirmar ou infirmar hipóteses construídas previamente; ao invés disso, as abstracções são construídas à medida que os dados particulares recolhidos se vão agrupando" (p. 50). Bogdan e

Biklen (1994) comparam o processo de análise dos dados com um funil, uma vez que "as coisas estão abertas de início (ou no topo) e vão-se tornando mais fechadas e específicas no extremo" (p. 50). Uma última característica apontada por estes investigadores referente à abordagem qualitativa é a importância que o significado possui neste tipo de investigação. Os investigadores qualitativos preocupam-se e procuram certificar-se de que apreendem, na totalidade, as diferentes perspectivas dos vários intervenientes no estudo; eles procuram registar, de modo tão rigoroso quanto possível, a forma como as pessoas dão sentido e interpretam os significados.

Esta investigação, além de ser de natureza qualitativa, foi desenvolvida numa perspectiva interpretativa. De acordo com Ponte (1994), a perspectiva interpretativa é uma das perspectivas teóricas fundamentais na qual se baseia a investigação qualitativa. Segundo esta perspectiva "a actividade humana é fundamentalmente uma experiência social em que cada um vai constantemente elaborando significado *(meaning making)*" (p. 14).

Segundo Ponte (1994), a perspectiva interpretativa tem como base duas grandes correntes: a *fenomenologia*, "com a sua preocupação em compreender o sentido dos acontecimentos e interacções das pessoas ordinárias nas suas situações particulares" (p. 15) e o *interaccionismo simbólico* que se baseia na interpretação e nos significados que as pessoas conferem às experiências que vivem diariamente e com as quais interagem.

Com base em outras investigações, Ponte (1994) caracteriza a investigação de tipo interpretativo do seguinte modo:

> - Preocupa-se essencialmente com os processos e as dinâmicas.
> -Mais do que qualquer outra, depende de forma decisiva do investigador ou da equipa de investigação.
> - Procede por indução, reformulando os seus objectivos, problemáticas e instrumentos no curso do seu desenvolvimento.
> - Baseia-se em descrição grossa, que vai além dos factos e das aparências, apresentando com grande riqueza de pormenor o contexto, as emoções e as interacções sociais que ligam os diversos participantes entre si (Ponte, 1994, p. 15).

O estudo desenvolvido no âmbito da presente investigação teve como ponto de partida e desenvolveu-se a partir de uma situação e no contexto da minha prática pedagógica. Desta forma, a investigação realizada foi simultaneamente uma investigação da minha própria prática (Ponte, 2002). Segundo este investigador, a investigação sobre a prática pode, por um lado, pretender alterar algum aspecto da prática e pode, por outro lado, pretender compreender o tipo de problemas que afectam essa mesma prática com o objectivo de, futuramente, definir estratégias que os resolvam. Já outros autores, anteriormente, se tinham debruçado sobre o papel da investigação sobre a prática, nomeadamente Richardson que, em 1994, referiu que os resultados da investigação sobre a prática não têm como objectivo dar respostas a um determinado problema. Os resultados pretendem, sim, sugerir novas formas de perspectivar o contexto e o problema, bem como possibilidades de alterações na prática (Ponte, 2002).

Segundo Ponte (2002), "a investigação sobre a prática profissional, a par da sua participação no desenvolvimento curricular, constitui um elemento decisivo da identidade profissional dos professores" (p. 6). Este autor acrescenta ainda que, este tipo de investigação, pode promover o desenvolvimento profissional dos professores envolvidos e ainda gerar conhecimento bastante pertinente sobre os processos educativos. No entanto, para se realizar este tipo de investigação é fundamental que o professor adopte uma "atitude questionante e reflexiva" (Ponte, 2002, p. 15). É igualmente imprescindível que o professor invista intelectualmente e afectivamente num projecto que exige compromisso e empenhamento.

A investigação sobre a prática realizada por professores deverá obedecer a certos critérios de qualidade:

> 1. Vínculo com a prática – a investigação refere-se a um problema ou situação prática vivida pelos actores.
> 2. Autenticidade – a investigação exprime um ponto de vista próprio dos respectivos actores e a sua articulação com o contexto social, económico, político e cultural.
> 3. Novidade – a investigação contém algum elemento novo, na formulação das questões, na metodologia usada, ou na interpretação que faz dos resultados.
> 4. Qualidade metodológica – a investigação contém, de forma explícita, questões e procedimentos de recolha de dados e apresenta as conclusões com base na evidência obtida.
> 5. Qualidade dialógica – a investigação é pública e foi discutida por actores próximos e afastados da equipa (Ponte, 2002, p. 22).

Para Ponte (2002), se uma determinada investigação sobre a prática satisfaz e respeita os critérios indicados anteriormente, deverá merecer o respeito e interesse da comunidade académica, pois poderá tornar-se numa mais valia para essa mesma comunidade.

Para concretizar o meu estudo, optei pela modalidade de estudo de caso adequado à natureza dos resultados finais que se pretendem obter nesta investigação. Mais do que uma metodologia, um estudo de caso é sobretudo um *design* de investigação (Ponte, 1994). Para este autor, um estudo de caso pode ser caracterizado como um estudo de uma entidade bem definida que tem como objectivo conhecer o seu "como" e os seus "porquês", realçando a sua unidade e a sua identidade próprias. Para além disso, um estudo de caso não é experimental, uma vez que o investigador não pretende alterar a situação mas sim compreendê-la. Trata-se ainda de uma investigação de natureza empírica uma vez que tem por base trabalho de campo ou análise documental.

O estudo de caso é um tipo de investigação que estuda o que há de essencial e característico numa situação específica, inserida num determinado contexto. Ponte (1994) resume da seguinte forma o papel do estudo de caso:

> (...) os estudos de caso não se usam quando se quer conhecer propriedades gerais de toda uma população. Pelo contrário, usam-se para compreender a especificidade de uma dada situação ou fenómeno, para estudar os processos e as dinâmicas da prática, com vista à sua melhoria, ou para ajudar um dado organismo ou decisor a definir novas políticas, ou ainda para formular novas teorias (p. 17).

Na opinião de Yin (1984), o estudo de caso é o tipo de investigação apropriado para situações em que o que o nosso objecto de estudo não se pode separar do seu contexto. Ponte (1994) reporta-se a este último autor referido, bem como a estudos publicados por Merriam em 1988, para indicar em que situações o estudo de caso é uma abordagem apropriada:

> - Não se pergunta "o quê?", "quantas?", mas sim "como?", "porquê?".
> - A situação é de tal modo complexa que não permite a identificação das variáveis eventualmente relevantes.
> - Se pretende descobrir interacções entre factores significativos especificamente característicos dessa entidade.
> - Se pretende uma descrição ou uma análise profunda e global de um fenómeno a que se tem acesso directo.
> - Se quer compreender melhor a dinâmica de um dado programa ou processo (Ponte, 1994, p. 17).

Um estudo de caso é uma pesquisa com um forte cunho descritivo, uma vez que procura realizar uma descrição "factual, literal, sistemática e, tanto quanto possível completa, do seu objecto de estudo" (Ponte, 1994, pp. 7-8). Porém, um estudo de caso não tem de ser apenas descritivo, pode igualmente ser analítico, confrontando a situação com outras situações conhecidas, assim contribuindo para a criação de questões de futuras investigações.

Portanto, o estudo de caso pode ter diferentes propósitos. No que concerne à presente investigação, os estudos de caso são de natureza analítica, uma vez que, como refere Ponte (1994) reportando-se a Yin (1984), os estudos analíticos procuram problematizar o objecto de estudo bem como construir ou desenvolver nova teoria ou confrontá-la com teoria já existente. Ponte (1994) acrescenta ainda que são os estudos de natureza analítica "que proporcionam um mais significativo avanço do conhecimento" (p. 6).

É importante referir ainda algumas questões de ordem ética que devem reger as investigações desta natureza, relacionadas com o consentimento informado dos participantes no estudo, bem como com a protecção do anonimato dos mesmos. Deste modo, informei e solicitei por escrito autorização à Presidente do Conselho Executivo do Agrupamento da escola onde decorreu a investigação, informando-a sobre a finalidade da mesma, dos seus objectivos e do tipo de dados a recolher. Solicitei igualmente autorização aos pais e encarregados de educação dos quatro alunos que constituíram os estudos de caso da investigação, informando-os sobre a natureza da investigação que estava a desenvolver, a sua finalidade, bem como o tipo de dados e os processos de recolha envolvidos. Na opinião de Almeida e Freire (1997), o investigador deve ser "o mais claro e preciso possível em relação aos aspectos da investigação que possam vir a afectar os participantes. Só assim podemos assegurar o *consentimento informado* do sujeito para a sua participação" (pp. 195-196). Para além disso, procurei manter o anonimato da escola bem como dos alunos envolvidos no presente estudo, durante todo o processo que envolveu esta investigação.

O contexto da investigação

A escola

A escola na qual decorreu a presente investigação é a escola sede de um Agrupamento de Escolas e fica situada numa das freguesias de uma cidade do Alto Alentejo. Com mais de 13 000 habitantes, a freguesia em que este Agrupamento se encontra localizado apresenta uma população muito heterogénea, tanto a nível económico, como a nível social. Abrange bairros habitados por uma camada populacional de classe média-alta e outros onde coabitam pessoas de um nível sócio–económico mais baixo, diferentes etnias, culturas e hábitos sociais.

A escola onde foi desenvolvido o presente estudo foi inaugurada há pouco mais de quatro anos, tendo as aulas começado a funcionar no ano lectivo de 2004/2005. Nela está integrado o Jardim-de-infância bem como os 1.º, 2.º e 3.º Ciclos do Ensino Básico. Estruturalmente, a escola sede é um edifício próprio possuindo ainda, separado do edifício central, um Pavilhão Gimnodesportivo.

No ano lectivo em que a investigação em sala de aula se desenvolveu, a escola sede tinha 659 alunos nos diversos ciclos de escolaridade, distribuídos da seguinte forma: 3 grupos de pré-escolar; 11 turmas de 1º ciclo; 11 turmas de 2º ciclo e 6 turmas de 3º ciclo.

Para além dos grupos/turmas atrás referenciados, a escola inclui ainda respostas muito específicas para alunos com necessidades educativas especiais de carácter permanente em Unidades Especializadas, com respostas diferenciadas para alunos surdos (UAECJSE), alunos diagnosticados com perturbações do espectro do autismo (UEEA) ou com multideficiência.

A turma

Esta investigação foi desenvolvida numa turma do 1.º ano de escolaridade, composta por 20 alunos, 10 do sexo feminino e 10 do sexo masculino, na qual assumi, em simultâneo, os papéis de professora e de investigadora. Dois dos alunos da turma estavam integrados no regime educativo especial, desenvolvendo, diariamente, a sua integração em sala de aula durante um curto período de tempo. As idades dos alunos variavam entre os 6 e os 8 anos (até 31/12/2007), existindo quinze alunos com 6 anos, quatro com 7 anos e um aluno com 8 anos. Apenas um dos alunos desta turma não frequentou o Jardim-de-infância antes de entrar para o 1.º ano de escolaridade.

A maioria dos alunos é oriunda de famílias de classe média, havendo apenas três alunos que beneficiavam de auxílio económico para livros e material escolar. A escolaridade dos pais variava, maioritariamente, entre o ensino básico e o curso superior. Nove dos pais tinham o 12.º ano, oito o 2.º ou o 3.º ciclo e sete detinham curso superior. Apenas dois dos pais não completaram o 1.º ciclo. A esmagadora maioria dos pais tinha empregos no sector secundário (vinte), seguido do sector terciário, com nove dos pais. Quatro dos pais afirmaram estar desempregados.

No início do ano lectivo 2007/2008, foram sinalizados cinco alunos para a terapia da fala e um aluno para os serviços de psicologia. Do grupo de 18 alunos da turma do ensino regular, duas alunas revelavam muita dificuldade em atingir as competências delineadas para qualquer uma das áreas curriculares disciplinares do 1.º ano de escolaridade, necessitando de apoio individualizado constante para realizar aprendizagens consideradas significativas. Os restantes 16 alunos, que desempenhavam o mesmo tipo de tarefas na área da Matemática, apresentavam, na sua maioria, um bom raciocínio e poucas dificuldades na aprendizagem dos conteúdos e das competências trabalhadas. Revelaram-se um grupo muito interessado, curioso, perspicaz e com intervenções muito pertinentes.

O desenvolvimento da investigação

A presente investigação desenvolveu-se em duas fases. A primeira fase, que decorreu até Dezembro do ano lectivo de 2007/2008, correspondeu a um período de adaptação tanto da professora como dos alunos à nova etapa escolar que então se iniciava. Durante esta fase da investigação, desenvolvi uma primeira abordagem aos problemas, propondo aos alunos alguns problemas iniciais, e seleccionei também os quatro alunos que constituíram os quatro estudos de caso do presente estudo. A segunda fase desta investigação desenrolou-se durante os segundo e terceiro períodos do mesmo ano lectivo, nos quais teve lugar a investigação propriamente dita, com a recolha sistemática dos dados e a respectiva análise.

Primeira abordagem aos problemas

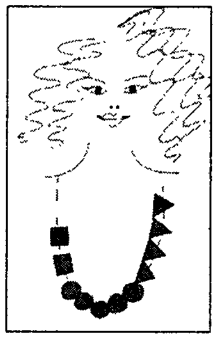
Desde o início do ano lectivo de 2007/2008, fui desenvolvendo com os alunos algumas actividades no âmbito da resolução de problemas em Matemática. Sentia sobretudo muita curiosidade e vontade de pôr em prática ideias interessantes inspiradas pela teoria no âmbito das representações e da sua importância na forma como os alunos estruturam os conhecimentos e o raciocínio matemático. Para além de familiarizar os alunos com a natureza destas novas tarefas, os problemas iniciais tiveram também como objectivo contribuir para o aumento da autoconfiança e segurança na investigação que estava a desenvolver. Além disso, esta primeira etapa com os problemas iniciais permitiu seleccionar os alunos que iriam constituir os estudos de caso da presente investigação.

Sendo alunos de um primeiro ano de escolaridade, procurei apresentar situações apelativas que lhes despertassem a vontade de descobrir a(s) soluções dos problemas propostos e em cujas resoluções surgissem potencialmente diferentes tipos de representações. Os alunos reagiram com entusiasmo e, inicialmente, com alguma insegurança, pois era a primeira vez que tal lhes era solicitado. Ao seleccionar os diversos problemas iniciais propostos, procurei que os mesmos fossem problemas de processo, uma vez que a resolução deste tipo de problemas propicia a utilização de diferentes representações, bem como de estratégias diversas. Os problemas iniciais apresentados exigiam raciocínios matemáticos de cariz diversificado, o que permitia observar o desempenho dos alunos em situações diferentes.

No decorrer da resolução de alguns problemas, os alunos tiveram acesso a material manipulável, o qual representava as personagens ou os objectos do problema em questão e que funcionaram como suporte para o raciocínio e também para a interiorização de alguns conteúdos matemáticos. Receberam sempre uma folha A_4 onde registavam a resolução de forma livre. Houve ainda o registo fotográfico das estratégias de resolução de um dos problemas colocados, cuja resolução envolveu a manipulação de objectos concretos.

Seguidamente, apresentam-se os seis problemas iniciais colocados à turma (Tabela 1), bem como as representações construídas por alguns alunos, com o objectivo de se dar a conhecer melhor o contexto inicial do estudo.

Tabela 1 – Problemas iniciais

Problema	Descrição	Referência
Os rebuçados	A Rita tem 9 rebuçados que quer distribuir pelas suas 3 amigas, de modo a que cada amiga receba o mesmo número de rebuçados. Quantos rebuçados recebe cada amiga?	Adaptado de Ferreira (2003)
Colares	Para o desfile de Carnaval combinámos levar um colar como mostra esta figura.  1. Quantas peças de cada tipo teremos de comprar para fazer um colar igual a este para 2 alunos.	Retirado de Equipa do Projecto DSN (2005)
A higiene do elefante	Um elefante gasta dois sabonetes por dia na sua higiene. Quantos sabonetes gastará em cinco dias?	Adaptado de Smole e Diniz (2001)
A roupa da Ana	A Ana comprou umas calças vermelhas, umas calças castanhas e umas calças azuis. Comprou também duas camisolas, uma com riscas e a outra com bolas. De quantas maneiras diferentes pode a Ana vestir-se?	Adaptado de Ferreira (2003)
Na capoeira	Numa capoeira existem galinhas e coelhos. Ao todo são 4 cabeças e 12 patas. Quantas são as galinhas e quantos são os coelhos?	Adaptado de APM (2002)
Os bombons	A Marta quer repartir igualmente 12 bombons pelas suas amigas Sofia e Daniela. Quantos bombons deu a Marta a cada amiga?	Adaptado de Ferreira (2003)

Relativamente ao primeiro problema inicial, "Os rebuçados", proposto oralmente à turma, obtive algumas representações que se encontram nas figuras seguintes:

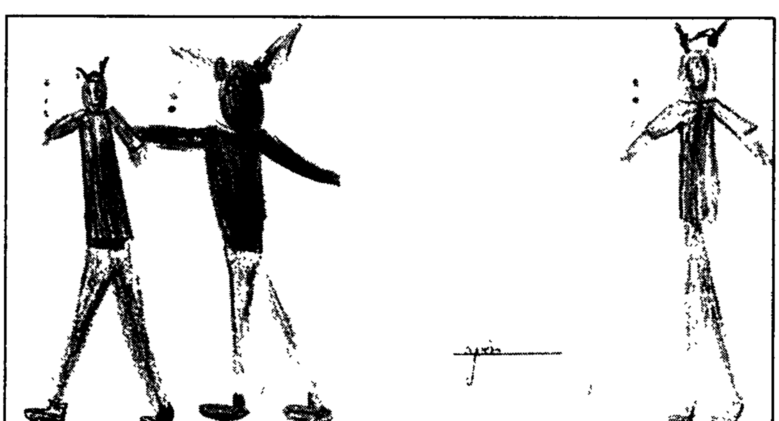


Figura 14 – Resolução 1 do problema inicial "Os rebuçados"

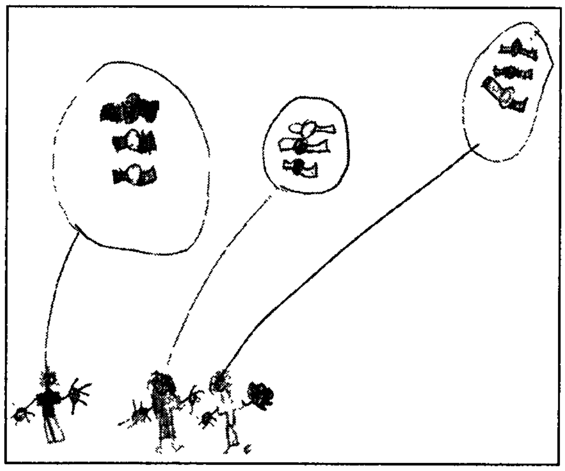


Figura 15 – Resolução 2 do problema inicial "Os rebuçados"

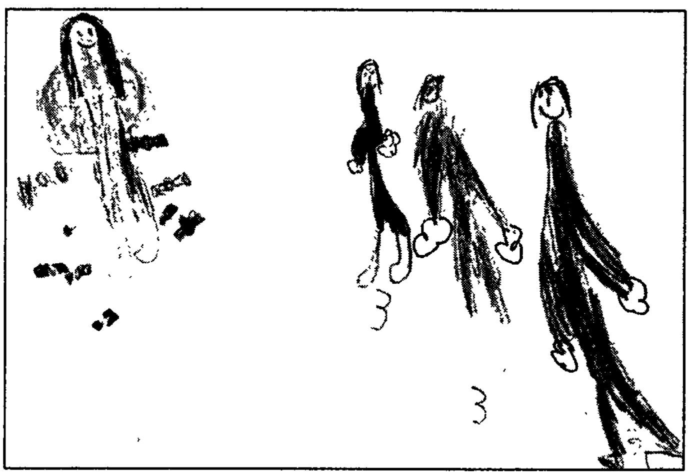


Figura 16 – Resolução 3 do problema inicial "Os rebuçados"

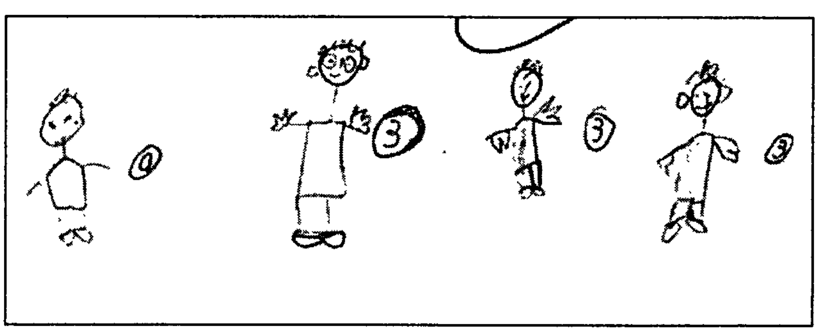


Figura 17 – Resolução 4 do problema inicial "Os rebuçados"

O desenho está presente em todas estas representações, no entanto com papéis diferentes. Em algumas representações, os alunos utilizaram apenas o desenho para representar tanto o processo de resolução, como a solução do problema (Figuras 14 e 15); noutra representação, misturaram o desenho com elementos simbólicos, os números (Figura 16). Em outra das representações, o desenho apenas representou o contexto do problema, pois a solução foi apresentada através de números (Figura 17).

No âmbito do segundo problema inicial, "Colares", desenhei um colar no quadro, composto pelas respectivas peças com formas geométricas, e desafiei os alunos a determinarem quantas peças daquele tipo existiriam em dois colares iguais. A maioria dos alunos desenhou dois colares e contou as peças desenhadas (Figuras 18), havendo ainda alguns alunos que tendo desenhado apenas um dos colares, contaram a partir daquele quantas peças existiriam em dois colares iguais (Figura 19).

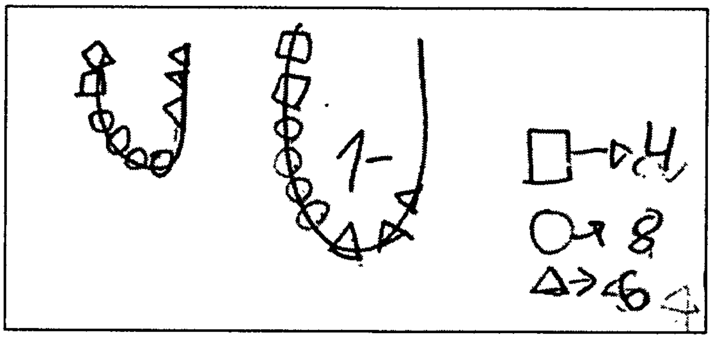


Figura 18 – Resolução 1 do problema inicial "Colares"

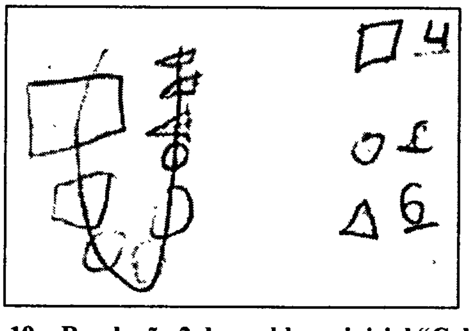


Figura 19 – Resolução 2 do problema inicial "Colares"

Ao interligar a Matemática com os conteúdos trabalhados na área de Estudo do Meio, nomeadamente com a Higiene, surgiu o terceiro problema inicial, "A higiene do elefante". Foi um problema que, por possuir uma história engraçada e por apelar ao poder imaginativo dos alunos, proporcionou uma grande motivação e empenho na sua resolução. Em algumas representações, é com base no desenho que o aluno resolve o problema (Figuras 20 e 21); noutra representação, há já uma tentativa de misturar o desenho com números (Figura 22); ainda noutra representação, com base no desenho parece surgir a solução (com algumas incorrecções) em forma de expressão matemática

(Figura 23); e, por fim, um dos alunos apresenta o processo de resolução e a solução ao problema através de uma expressão matemática (Figura 24).

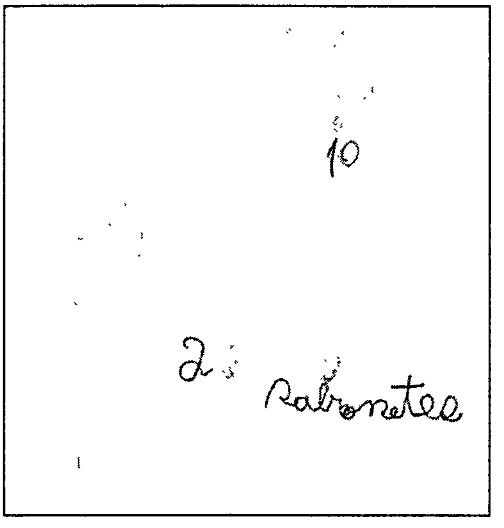


Figura 20 – Resolução 1 do problema inicial "A higiene do elefante"

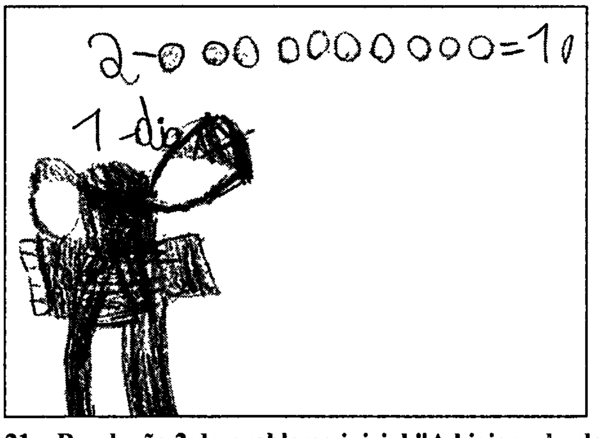


Figura 21 – Resolução 2 do problema inicial "A higiene do elefante"

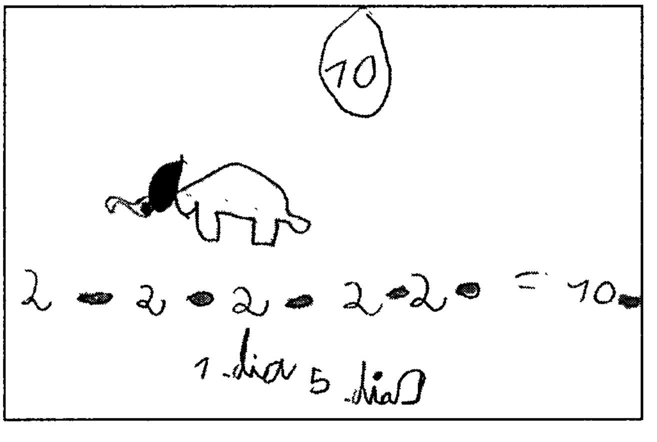


Figura 22 – Resolução 3 do problema inicial "A higiene do elefante"

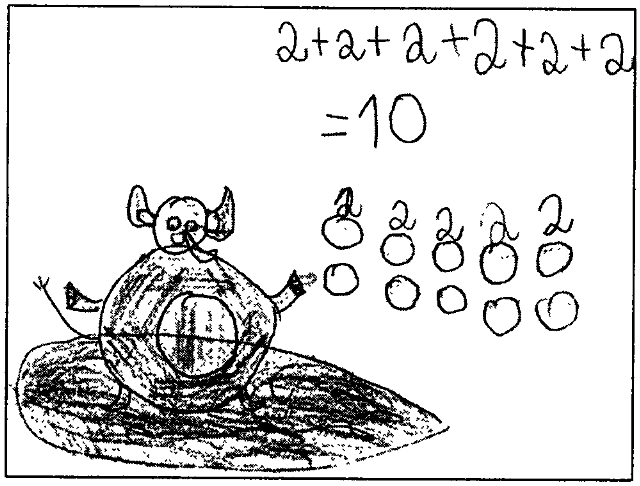


Figura 23 – Resolução 4 do problema inicial "A higiene do elefante"

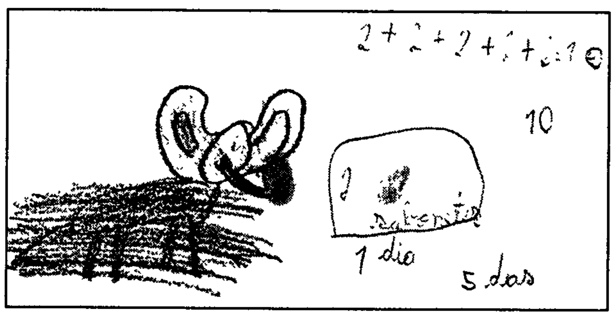


Figura 24 – Resolução 5 do problema inicial "A higiene do elefante"

No âmbito da resolução de um problema de natureza diferente dos até então propostos na sala de aula, um problema de combinatória e o quarto problema inicial, "A roupa da Ana", o desenho parece ter sido a forma mais natural de resolver a situação proposta. Um aluno desenhou as diferentes combinações (figura 25), uma a uma, tendo desenhado uma linha fechada à volta de cada uma, identificando-a com um número, de um a seis, correspondente à combinação que estava a desenhar. Outro aluno não terminou a resolução do problema (figura 26), tendo desenhado apenas quatro das combinações possíveis, com o apoio da figura humana.

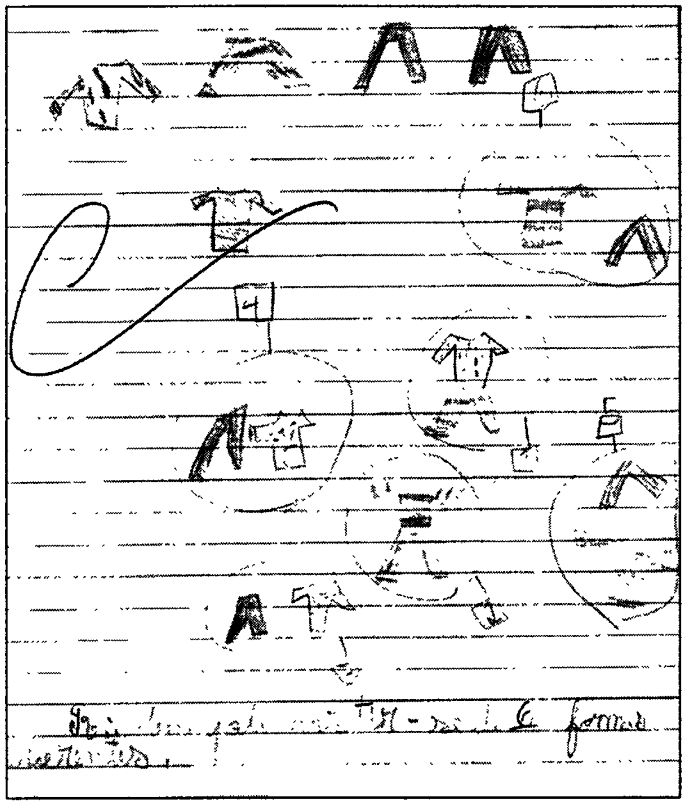


Figura 25 – Resolução 1 do problema inicial "A roupa da Ana"

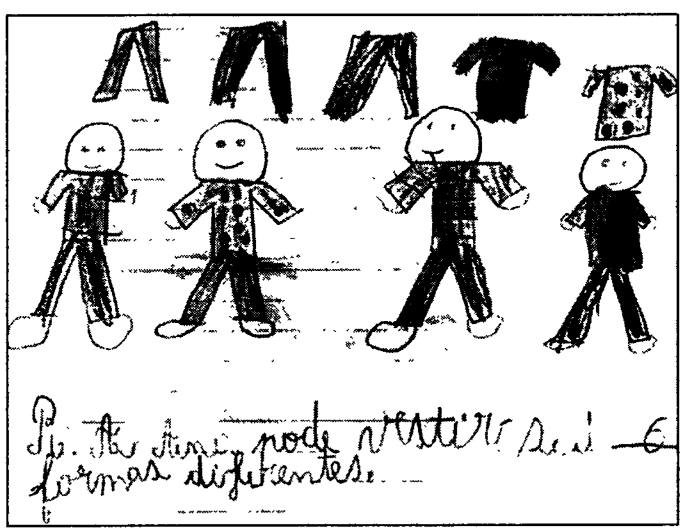


Figura 26 – Resolução 2 do problema inicial "A roupa da Ana"

O quinto problema inicial colocado foi o problema "Na capoeira" em cuja resolução encontrei representações como as seguintes:

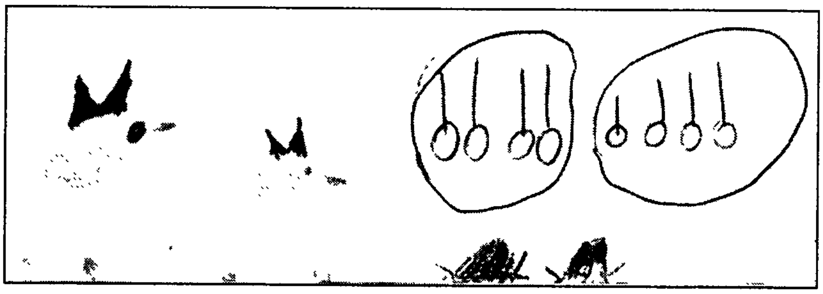


Figura 27 – Resolução 1 do problema inicial "Na capoeira"

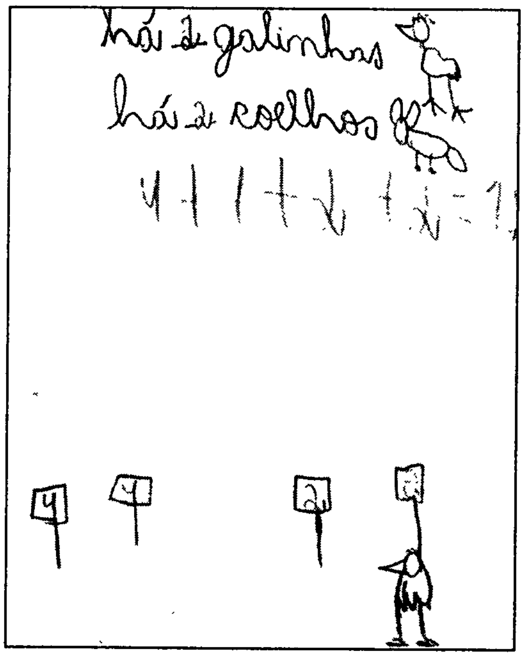


Figura 28 – Resolução 2 do problema inicial "Na capoeira"

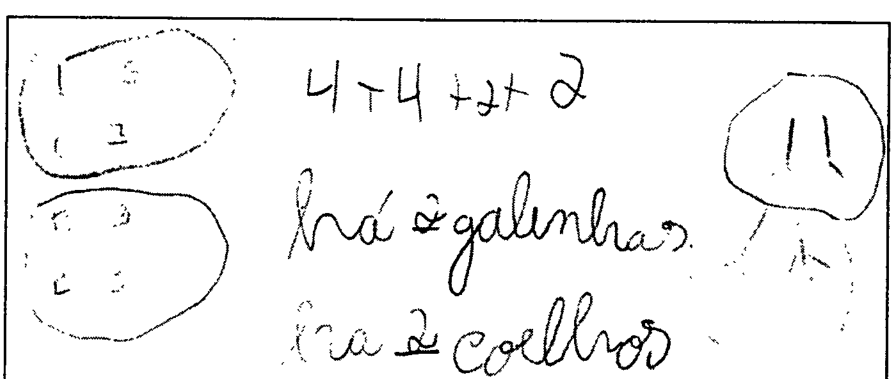


Figura 29 – Resolução 3 do problema inicial "Na capoeira"

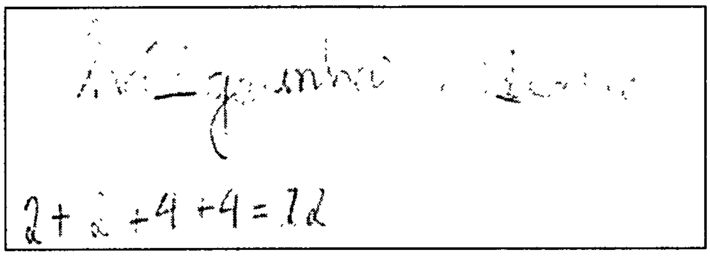
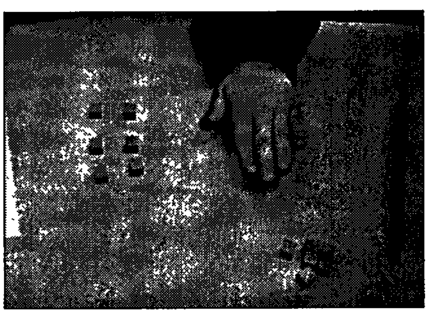
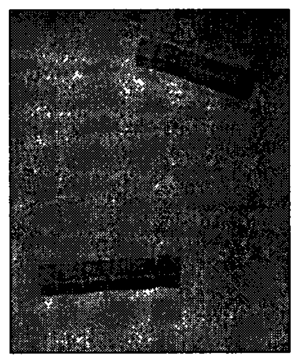
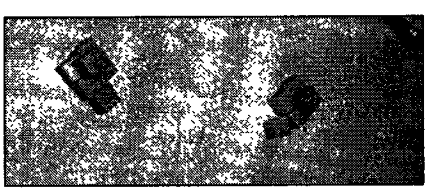
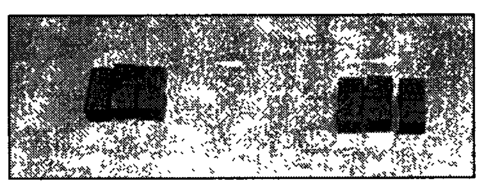


Figura 30 – Resolução 4 do problema inicial "Na capoeira"

Na representação da figura 27, não existem elementos simbólicos, o aluno recorreu ao desenho para resolver o problema. Nas representações presentes nas figuras 28 e 29 estão presentes o desenho e elementos simbólicos; na figura 30, a representação é apenas formada por elementos simbólicos.

Recorrendo a material manipulável, propus aos alunos que resolvessem o sexto problema inicial "Bombons". Seguem-se imagens de algumas das formas de resolução deste problema:

Todos os alunos receberam doze cubos, com os quais tentaram responder ao problema em questão. Cada uma das imagens anteriores mostra dois conjuntos de cubos formados pelos alunos, correspondendo cada conjunto aos rebuçados que cada amiga iria receber. Pelo que pude observar, os alunos destas imagens foram distribuindo os doze cubos, um a um, pelos dois conjuntos até os esgotarem, formando assim dois conjuntos com o mesmo número de elementos.

Assim, nesta fase da investigação pude observar a facilidade revelada pelos alunos no uso de representações, tendo este trabalho inicial contribuído igualmente para um ganho de confiança no estudo que estava a desenvolver relativamente às capacidades dos alunos no campo da resolução de problemas com recurso a diferentes representações e estratégias de resolução.

A investigação propriamente dita

Durante o segundo e o terceiro períodos lectivos, e dando continuidade ao trabalho iniciado no período lectivo anterior no âmbito desta investigação, foram propostos à turma, com uma periodicidade semanal, um conjunto de dez problemas que constituíram a base deste estudo. A ênfase recaiu sobre um determinado tipo de problemas, os problemas de processo, cuja resolução é possível através da utilização de uma ou mais estratégias de resolução de problemas e, fundamentalmente, potencia o recurso a diferentes tipos de representações. Dentro dos problemas de processo, seleccionaram-se problemas que exigissem raciocínios matemáticos de natureza diferente por parte dos alunos, possibilitando, deste modo, o surgimento de um leque diversificado de representações.

A sequência pela qual os dez problemas foram propostos aos alunos, bem como a natureza dos raciocínios matemáticos envolvidos nos mesmos, estiveram directamente relacionados e dependentes de todo o trabalho desenvolvido na sala de aula, quer ao nível de conteúdos trabalhados e de competências desenvolvidas, quer ao nível da autonomia dos alunos, tanto na área de Matemática, como na Língua Portuguesa. À medida que os problemas foram sendo colocados, houve igualmente necessidade de realizar pequenos ajustamentos em função do *feedback* recebido no decorrer da investigação. Procurou-se que o grau de complexidade dos problemas apresentados fosse aumentando, tanto ao nível de conceitos e conteúdos matemáticos envolvidos, como ao nível de raciocínio exigido.

Para cada problema foi entregue a cada aluno uma folha de registo (Anexo 1), encabeçada pelo problema proposto (Problema A, B, ..., J) e pela identificação do aluno. Essa folha encontrava-se em seguida dividida em dois grandes rectângulos, contendo o primeiro o enunciado do problema, com a origem do mesmo, e destinando-se o segundo rectângulo à resolução escrita do mesmo, no qual era solicitado ao aluno "*Explica como pensaste. Podes utilizar desenhos, palavras, esquemas ou números*".

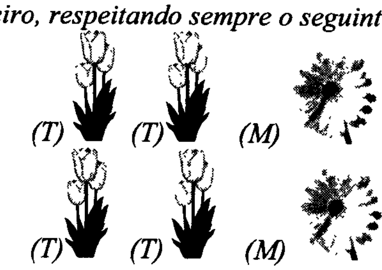
Uma vez que se tratava de uma turma do 1.º ano de escolaridade, todos os problemas foram lidos para os alunos, à medida que estes acompanhavam a leitura através da folha de registo previamente distribuída. Cada problema foi lido mais do que uma vez, sendo o seu conteúdo explicitado por outras palavras, de um modo mais pormenorizado. Após a leitura do mesmo, cada problema foi interpretado oralmente até haver alguma certeza de que, pelo menos a maioria dos alunos, tinha apreendido correctamente o seu objectivo. Em todos os problemas foi igualmente solicitado aos alunos que explicassem, oralmente e por palavras suas, o problema ouvido (ou lido, por alguns). À medida que as competências dos alunos na leitura foram melhorando, era-lhes também solicitado que lessem, silenciosamente, o enunciado do problema, embora o mesmo continuasse posteriormente a ser lido para toda a turma.

Após o esclarecimento das dúvidas existentes, os alunos dispunham do tempo que desejassem para resolverem os problemas propostos, após o que entregavam as folhas com a respectiva resolução. Todos os problemas foram apresentados à turma no decorrer do primeiro bloco da manhã, parte do dia em que a turma se revelava mais calma, atenta e concentrada. Nem todos os alunos conseguiram resolver os problemas propostos, entregando em branco a folha de registo da resolução do problema quando já não desejavam tentar ou pensar mais.

Seguidamente apresenta-se a sequência de problemas escolhida. A forma de abordar os diferentes problemas teve em comum os procedimentos atrás descritos. Descreve-se em seguida, e em relação a todos os problemas propostos, particularidades da sua abordagem à turma, a reacção dos alunos, as suas intervenções e as suas dúvidas na fase de abordagem.

Tabela 2 – Os problemas da investigação

Problema	Descrição	Calendarização
A	***Os periquitos*** *O Pedro tem 10 periquitos. Todos os dias o Pedro dá a cada 2 periquitos 3 folhas de alface. Quantas folhas de alface tem o Pedro de dar, por dia, aos seus 10 periquitos?* (Adaptado de Gave, 2001)	25/02/08
B	***As bolas de gelado*** *Na gelataria há bolas de gelado de 4 sabores diferentes:* • *Morango (M)* • *Chocolate (C)* • *Baunilha (B)* • *Amêndoa (A)* *A Rita vai comprar um gelado com dois sabores. Quantos gelados com dois sabores diferentes se conseguem fazer* (Adaptado de Gave, 2007)	04/03/08

Problema	Descrição	Calendarização
C	***As flores do canteiro*** *Os meninos da escola do Daniel estão a plantar flores num canteiro, respeitando sempre o seguinte padrão:*  *Os meninos plantaram 9 margaridas (M). Quantas tulipas plantaram?* (Adaptado de Gave, 2004)	12/03/08
D	***Os apertos de mão*** *A Rita, o Nuno, o Paulo e a Lili são amigos. Quando chegaram à escola cumprimentaram-se e cada um deu um aperto de mão aos outros. Quantos apertos de mão deram ao todo?* (Adaptado de Stancanelli, 2001)	10/04/08
E	***O voo das bruxas*** *20 bruxas têm de viajar em 8 vassouras para um encontro em Lisboa. Porém, nenhuma vassoura pode levar mais do que 4 bruxas nem menos do que 2. Como voarão as bruxas?* (Adaptado de Woleck, 2001)	14/04/08
F	***As meias das joaninhas*** *O João é um coleccionador muito estranho. Ele tem uma caixa com 5 joaninhas. Cada joaninha tem 6 patas. Se o João tivesse de comprar meias no Inverno para as suas joaninhas, quantas meias compraria?* (Adaptado de Cavalcanti, 2001)	22/04/08
G	***Fazendo colecções*** *O Mário e o Artur coleccionam calendários. O Mário tem mais 3 calendários do que o Artur e no conjunto, os dois irmãos têm 21 calendários. Quantos calendários tem o Mário?* (Retirado de PFCM/UE, 2007)	06/05/08
H	***A compra de selos*** *Uma máquina de selos automática aceita moedas de 1 ct, 2ct, 5ct, 10ct e 20 ct. Para comprar um selo que custe 49 ct, que moedas poderei usar?* (Adaptado de PFCM/UE, 2007)	16/05/08
I	***Compra de jogos*** *A escola do Monte recebeu um subsídio de 40 € para comprar jogos didácticos. Os jogos disponíveis na papelaria local eram:* *jogo A – 15 € jogo B – 20 € jogo C – 10 € jogo D – 5 €* *Que jogos se podem comprar com 40 euros? Que quantia sobra?* (Adaptado de PFCM/UE, 2007)	21/05/08
J	***Um problema de lógica*** *Cinco meninas – Ana, Rita, Paula, Dora e Eva – dividiram entre si os últimos gelados: três de morango e dois de chocolate.* *Ana e Eva comeram gelados do mesmo sabor.* *Eva e Paula comeram gelados com sabores diferentes.* *Paula e Rita também comeram gelados com sabores diferentes.* *Que gelado comeu cada menina?* (Adaptado de Diniz, 2001)	05/06/08

Após os problemas iniciais, o problema A, "Os periquitos" foi o primeiro, do conjunto de dez, a ser colocado a toda a turma. Sentia alguma apreensão na forma como os alunos iriam reagir, sobretudo os alunos que constituíram os estudos de caso desta investigação. Após uma primeira leitura do enunciado, a turma olhou-me em silêncio, expectante. Resolvi então explicar por outras palavras: "A dois periquitos dá três folhas de alface, aos outros dois dá três folhas, aos outros dois também dá três folhas de alface, e por aí adiante até ter dado de comer a todos os dez periquitos." Questionaram-me então se podiam desenhar os periquitos, ao que lhes respondi afirmativamente acrescentando que poderiam resolver o problema como o desejassem.

Na abordagem do problema B, "As bolas de gelado", um problema de natureza combinatória, procurei envolver os alunos no contexto da tarefa questionando-os acerca dos seus sabores de gelado preferidos. Um dos alunos da turma perguntou se poderiam "fazer com cores", associando uma cor a cada sabor de gelado, ideia seguida por muitos dos alunos da turma. No decorrer da interpretação deste problema houve ainda um outro aluno que me perguntou se um gelado de *morango* e *chocolate* era o mesmo que um gelado de *chocolate* e *morango,* ou seja, se contabilizava apenas um gelado, uma vez que a questão do problema se referia concretamente ao número de gelados com dois sabores diferentes que era possível fazer. Procurei que fosse o aluno a descobrir a resposta colocando-o perante a seguinte situação: se ele fosse comprar um gelado de *morango* e *chocolate* e um amigo comprasse um gelado de *chocolate* e *morango*, eram dois gelados diferentes? O aluno em questão não respondeu, permaneceu pensativo e continuou a tentar resolver o problema proposto.

O problema C, "As flores do canteiro", colocava-me expectativas acrescidas quanto à forma como os alunos o resolveriam. No decorrer das aulas tinham sido exploradas diversas sequências com desenhos, com figuras geométricas, com números, pelo que estava curiosa relativamente às representações e estratégias que iria encontrar nas resoluções dos alunos. Os alunos questionaram-me acerca do uso do desenho das flores ou das letras que representavam os respectivos nomes nas representações a utilizar para a resolução deste problema. Mais uma vez lhes respondi que poderiam resolver aquele desafio como o desejassem e como conseguissem.

O problema D, "Os apertos de mão", também de natureza combinatória mas com um nível de raciocínio matemático mais complexo que o problema B, levantou algumas dúvidas no que respeita ao número de apertos de mão dados entre dois amigos quando considerávamos os seus nomes por uma ordem diferente. Sem dar a resposta chamei quatro alunos da turma, pedindo-lhes que exemplificassem o que os amigos do problema em questão tinham feito quando chegaram à escola. A turma observou atentamente a "actuação" dos colegas após o que procurou resolver, individualmente, o problema proposto.

O problema E, "O voo das bruxas", um problema diferente dos até então colocados, envolvia o conceito de divisão respeitando algumas condições. As questões levantadas pelos alunos prenderam-se sobretudo com a natureza das representações que poderiam utilizar na resolução deste problema: se tinham de desenhar o corpo completo das bruxas ou se era suficiente desenhar a sua cara; se podiam desenhar "bolinhas" para representar as bruxas; se tinham de desenhar as vassouras. Foi um desafio resolvido com entusiasmo pelos alunos.

O problema F, "As meias das joaninhas", cuja curiosa história motivou e cativou a atenção dos alunos, envolvia o conceito de adição de parcelas iguais. Inicialmente procurei envolver os alunos no contexto do problema questionando a turma sobre o termo "coleccionador" e se faziam colecção de algum objecto. Os alunos participaram com entusiasmo falando das suas colecções e dos seus interesses. Só depois surgiu o problema em questão, em forma de uma história. Os alunos não levantaram dúvidas sobre o teor deste problema.

O problema G, "Fazendo colecções", talvez o mais complexo dos dez problemas em termos de raciocínio matemático exigido, envolvia os conceitos de adição e de subtracção. Foram poucos os alunos que o conseguiram resolver, revelando a maioria da turma muita dificuldade na compreensão das relações existentes entre os elementos envolvidos, bem como na concepção de estratégias que lhes possibilitasse determinar a solução correcta. Dois dos alunos da turma recorreram a material manipulável para resolver o problema proposto, no qual foram bem sucedidos.

O problema H, "A compra de selos", surgiu no decorrer do trabalho realizado na sala em termos de decomposição de números, cálculo mental, contagens e utilização de algumas das nossas moedas. Neste problema, os alunos não pareceram revelar dificuldade na compreensão do que se pretendia nem na concepção de estratégias para o solucionar correctamente.

Na abordagem do problema I, "Compra de jogos", de natureza semelhante ao anterior, a principal questão levantada relacionou-se com a possibilidade de poderem ou não comprar jogos iguais com a quantia indicada. À medida que os alunos se foram confrontando com mais desafios revelaram-se menos intimidados e mais empenhados em resolvê-los. Não desistiam com tanta facilidade e mesmo os alunos com mais dificuldade tentavam conceber algum tipo de estratégia.

O problema J, "Um problema de lógica", um problema de lógica e o último problema colocado no âmbito desta investigação, foi propositadamente deixado para o fim do ano lectivo uma vez que era essencial que as competências dos alunos ao nível da leitura já estivessem suficientemente desenvolvidas para que este pudessem interpretar correctamente os dados do problema, bem como as relações existentes entre eles. Aquando da interpretação do problema em questão, as três condições que os alunos teriam de respeitar para resolver o problema (*Ana e Eva comeram gelados do mesmo sabor; Eva e Paula comeram gelados com sabores diferentes e Paula e Rita também comeram gelados com sabores diferentes.*) foram nomeadas de regras. Assim, foi-lhes explicado que para resolverem correctamente este problema teriam de respeitar e cumprir todas as regras, o que lhes exigia uma leitura cuidadosa e atenta do enunciado do problema.

Após a resolução de alguns dos problemas atrás referidos, as representações e estratégias utilizadas nos mesmos foram apresentadas pelos respectivos autores à restante turma. Numa primeira fase deste trabalho de partilha, e uma vez que nem sempre é fácil para os alunos sentirem-se expostos perante os colegas, a sua participação era voluntária. Os alunos que mostravam interesse em mostrar aos outros como tinham resolvido determinado problema, levavam a folha onde tinham construído a respectiva resolução e explicavam, com representação simultânea no quadro, a forma como tinham determinado a solução. Numa segunda fase, na qual os alunos já sentiam uma maior segurança e confiança, quer no seu trabalho, quer perante a turma, era eu que também seleccionava alunos cujas representações se tinham destacado, embora outros alunos também pudessem ir, voluntariamente. Aquando da explicação das representações construídas, bem como das estratégias utilizadas, era normalmente necessário o meu apoio, através da colocação de questões que elucidassem, da melhor forma, os colegas relativamente ao raciocínio envolvido na resolução e às representações construídas.

A selecção dos casos

Na perspectiva de Yin (1993), um dos passos mais importantes na realização de estudos de caso é a definição dos casos propriamente ditos. O investigador deve especificar quais foram os critérios de selecção utilizados para a escolha dos casos estudados.

Os quatro casos desta investigação foram seleccionados no fim de Dezembro tendo em conta os seguintes critérios de selecção: a) o tipo de representações construídas no decorrer da resolução dos problemas iniciais e b) características pessoais, como autonomia e capacidade de realização completa dos trabalhos.

Do conjunto de 16 alunos que desempenhavam o mesmo tipo de tarefas na área da Matemática, foram seleccionados quatro alunos, os quais serão designados na presente investigação por Ema, André, Mariana e José. Todos os alunos seleccionados tinham seis anos aquando do início da presente investigação.

Segue-se uma breve apresentação dos quatro alunos seleccionados para estudos de caso desta investigação, tendo em conta os critérios de selecção mencionados anteriormente.

Ema é, dos quatro alunos seleccionados, a que apresentava o aproveitamento escolar mais fraco, revelando, porém, um grande interesse pelas aprendizagens escolares. No entanto, não obstante as suas dificuldades em algumas áreas, conseguiu resolver os problemas iniciais propostos recorrendo a representações muito próprias.

As representações apresentadas por Ema no decorrer dos problemas iniciais tiveram a presença constante do desenho e apenas deste. Foi apenas através do desenho que esta aluna, inicialmente, resolveu os diferentes problemas propostos e apresentou a solução. Os desenhos de Ema eram elaborados cuidadosamente, apresentavam-se recheados de pormenores e aproximavam-se ao máximo da realidade. Para além das representações expressas no papel, sempre foi uma aluna com facilidade em expressar oralmente o raciocínio seguido durante a resolução das diferentes tarefas.

André, a nível escolar, é um aluno que não revelava dificuldades em qualquer uma das áreas trabalhadas, manifestando um óptimo aproveitamento escolar. É um aluno muito interessado e ávido por aprender sempre mais. Revelou-se um aluno muito autónomo embora por vezes se disperse e pareça estar num outro "mundo".

As representações de André, ao longo da resolução dos problemas iniciais, foram formadas sobretudo por elementos simbólicos e por elementos representativos do real, despidos de pormenores. Este aluno manifestou nas suas representações, desde o início, uma tentativa de organização do raciocínio, apresentando a informação do problema e as relações existentes de uma forma estruturada. Sempre se revelou muito rápido na resolução dos problemas propostos, no entanto nem sempre lhe era fácil expressar oralmente o raciocínio matemático que esteve por detrás das representações apresentadas.

Mariana, a nível escolar, é uma aluna com um aproveitamento razoável em todas as áreas trabalhadas. Pontualmente, necessita de algum apoio, tendo revelado grandes progressos ao longo do ano lectivo. É uma aluna muito interessada e atenta.

As representações que Mariana apresentou no decorrer da resolução dos problemas iniciais apresentavam simultaneamente elementos icónicos e simbólicos, estando o desenho muito presente nessas representações. No entanto, eram desenhos com poucos pormenores, que não procuravam retratar na perfeição a realidade mas que pareciam funcionar como elementos de apoio ao raciocínio desenvolvido. Pontualmente, houve algumas tentativas para organizar e estruturar a informação presente em certos problemas.

José é um aluno que não revela dificuldades nas diferentes áreas trabalhadas, demonstrando sempre muito interesse e vontade por aprender novos temas e revelando um óptimo aproveitamento escolar.

As representações construídas por José nos problemas iniciais, revelaram evolução em termos do tipo de representação utilizada. Num dos primeiros problemas as representações surgiram sob a forma de elementos icónicos, misturando o desenho com elementos representativos do real. Posteriormente, apresentou representações em que já aliava o desenho a elementos simbólicos, como os números. Noutras representações, o desenho serviu de apoio à linguagem formal e simbólica com que apresentou a solução, havendo mesmo um dos problemas iniciais em que apresentou tanto o processo de resolução como a solução através de uma expressão matemática, puramente simbólica.

Sendo necessariamente quatro crianças diferentes, com aproveitamentos escolares também distintos e que tinham apresentado, no decorrer das representações construídas ao longo dos problemas iniciais, representações diversas, pareceram-me ser os alunos a partir dos quais poderia construir os meus quatro estudos de caso e desenvolver a investigação sobre a minha própria prática.

A recolha de dados

A recolha de dados teve lugar na minha própria sala de aula, durante o ano lectivo de 2007/2008, ou seja, entre Setembro de 2007 e Junho de 2008, e foi realizada integralmente por mim. A fase mais intensa deste momento da investigação teve lugar durante os segundo e terceiro períodos do referido ano lectivo.

Uma vez que a investigação desenvolvida recaiu sobre a minha própria prática, o meu papel como investigadora teve um papel crucial na recolha de dados. Procurei obter dados variados, numerosos e oriundos de diversas fontes o que, na opinião de Yin (1993), possibilita a triangulação de informação. Para este autor, o investigador sentir-se-á mais confiante em fazer uma determinada afirmação se o seu estudo mostrar que a informação oriunda de fontes diversificadas, aponta toda na mesma direcção.

Como refere Ponte (1994), um estudo de caso é uma investigação de natureza empírica uma vez que tem por base trabalho de campo ou análise documental. Ponte (2002) aponta a observação, a entrevista e a análise de documentos como as técnicas mais utilizadas na recolha de dados de natureza qualitativa. Uma outra técnica que, segundo este investigador, tem vindo a ser cada vez mais utilizada traduz-se no uso de "diários de bordo, onde o investigador regista os acontecimentos relevantes que vão surgindo no decurso do trabalho, bem como as ideias e preocupações que lhe vão surgindo" (Ponte, 2002, p. 18). Na presente investigação, utilizou-se a observação, a análise de documentos, os diários, os registos áudio/vídeo das explicações dos alunos sobre as representações e estratégias construídas nos diferentes problemas propostos e as conversas com os alunos como técnicas de recolha de dados.

A observação

Tratando-se de uma investigação sobre a minha própria prática, a observação dos alunos e do trabalho por eles desenvolvido, constituiu uma técnica de recolha de dados essencial e presente no quotidiano das tarefas realizadas em sala de aula.

Através da observação procurei obter informações relativas às características pessoais dos alunos que constituíram os estudos de caso desta investigação, nomeadamente, a sua autonomia, o seu interesse pelas aprendizagens escolares, bem como o seu aproveitamento escolar.

A observação permitiu-me igualmente obter dados relativamente às atitudes e reacções destes alunos face aos desafios que lhe foram sendo propostos ao longo do ano lectivo, no que diz respeito ao seu empenho, à sua persistência, à sua capacidade de questionar, bem como a sua capacidade de enfrentar e resolver situações novas.

Esta técnica de recolha de dados permitiu-me também recolher informação bastante pertinente, em combinação com outras técnicas, relativamente às capacidades destes alunos nos domínios da resolução de problemas, do raciocínio matemático e da comunicação matemática, consideradas "três grandes capacidades transversais a toda a aprendizagem da Matemática" (Ponte et al., 2007, p. 8).

A análise de documentos

Uma técnica de recolha de dados crucial e fundamental na presente investigação consistiu na análise das representações e das estratégias construídas pelos alunos durante a resolução dos dez problemas propostos, que foram registadas, como já explicado anteriormente, em folhas destinadas para o efeito.

As resoluções dos dez problemas construídas por cada um dos quatro alunos e registadas nas referidas folhas foram, posteriormente, guardadas e organizadas em suporte digital após adequado tratamento obtido através de *software* e *hardware* apropriado para o efeito.

Os diários

Um outro elemento que se veio a revelar uma óptima fonte complementar de informação, quer em relação aos comportamentos, atitudes e reacções dos alunos como em relação às minhas expectativas, ideias e preocupações, foi o diário que fui construindo e preenchendo com os acontecimentos mais relevantes que aconteciam aquando da resolução de cada problema proposto.

Neste diário registei o tipo de questões colocadas pelos alunos face a determinado problema, a forma como esclareci dúvidas, incidentes críticos pertinentes para a presente investigação, sugestões, atitudes e reacções dos alunos, o contexto em que cada problema foi apresentado, entre outras informações que se revelaram bastante pertinentes na análise e interpretação dos dados recolhidos.

Os registos áudio/vídeo e as conversas com os alunos

A fim de complementar e enriquecer os registos escritos das representações e das estratégias de cada um dos dez problemas propostos construídos pelos quatro alunos, realizei também, com o apoio de uma máquina fotográfica digital, o registo áudio e vídeo da explicação que cada um dos alunos forneceu sobre a forma como tinha elaborado cada uma das dez resoluções.

Os registos escritos não me pareciam suficientes para compreender na íntegra a forma como as representações surgiam nas diferentes resoluções. Para dar mais sentido e significado ao trabalho efectuado pelos alunos era fundamental ouvir o que eles tinham para dizer sobre o que construíram. Como refere Canavarro (2003), "O significado revela-se tanto na acção como no discurso. O fazer e o dizer são ambos faces da mesma moeda e devem ser associados para a compreensão do significado de qualquer situação" (p. 195).

Além do registo áudio, o registo vídeo também se revelou importante uma vez que, à medida que os alunos explicavam as respectivas representações apontavam para as mesmas o que contribuiu, em algumas situações, para uma maior compreensão da resolução.

Estes registos foram efectuados em sala de aula, durante o normal desenrolar das actividades lectivas e sempre que a restante turma trabalhava de um modo mais autónomo. Nem sempre foi possível fazer estes registos logo após a resolução de cada problema, havendo no entanto uma grande preocupação da minha parte em que não houvesse um grande distanciamento entre os dois momentos. A partir de certa altura, eram os próprios alunos que me diziam "*Professora, ainda não me ouviste a explicar o problema!*"

Ao apresentar a cada um dos quatro alunos a respectiva folha onde tinham registado a resolução do problema, solicitava-lhes que me explicassem como o tinham resolvido. Face ao meu pedido, os alunos apontavam para as representações construídas e explicavam a forma como as mesmas tinham surgido. À medida que o aluno explicava o seu trabalho, procurava colocar-lhe questões que me ajudassem a compreender as representações construídas e com que objectivo tinham sido elaboradas, as estratégias utilizadas, bem como os raciocínios matemáticos que estiveram na base da resolução.

Tal como as representações construídas em cada um dos problemas propostos, também estes registos áudio e vídeo foram guardados e organizados em suporte digital. Não foi feita a transcrição na íntegra de todas as explicações dos alunos mas apenas das partes consideradas pertinentes, que davam significado e que contribuíam para uma melhor e correcta interpretação das representações e estratégias elaboradas.

A análise dos dados

> A análise de dados é o processo de busca e de organização sistemático de transcrições de entrevistas, de notas de campo e de outros materiais (...) com o objectivo de aumentar a sua própria compreensão desses mesmos materiais e de lhe permitir apresentar aos outros aquilo que encontrou. A análise envolve o trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta dos aspectos importantes (...) (Bogdan & Biklen, 1994, p. 205).

A análise de dados, processo intimamente ligado à recolha de dados, desenrolou-se em duas fases durante o presente estudo. Tratou-se de um processo essencialmente descritivo e interpretativo, tendo como base o problema e as questões da investigação, a revisão de literatura realizada e os dados recolhidos.

Numa primeira fase, no início da investigação, analisei os dados recolhidos a partir da observação desenvolvida em sala de aula bem como as representações construídas nos problemas iniciais que me permitiram seleccionar os quatro estudos de caso. A análise destes dados recolhidos inicialmente contribuiu igualmente para consolidar algumas ideias que começavam entretanto a surgir sobre a investigação, para avaliar expectativas, bem como para avaliar a validade das minhas interpretações sobre a investigação que estava a pôr em prática. Durante a recolha de dados, e de uma forma dinâmica, a análise dos mesmos esteve sempre presente. Após a recolha de todas informações, teve lugar a segunda fase desta etapa da investigação, na qual a análise de dados se desenvolveu de um modo mais aprofundado.

As informações recolhidas através das diferentes técnicas utilizadas, previamente guardadas e organizadas por aluno em suporte digital, foram submetidas a diversas leituras e análises de complexidade e profundidade crescentes de forma a construir o caso específico de cada um dos quatro alunos.

Com base no referencial teórico e durante o processo de análise, defini *a priori* algumas categorias de análise principais. No entanto, essas categorias foram sujeitas a um processo de adequação e refinação no decorrer da análise e tratamento dos diferentes dados recolhidos e da construção dos casos em estudo.

Na definição das categorias definitivas de análise (tabela 3 - Anexo 2) considerei três grandes domínios:

1. Estratégias de resolução de problemas.
2. Tipos de representação utilizadas.
3. O papel das representações na resolução de problemas.

Para cada um destes domínios, defini algumas categorias, bem como subcategorias, no caso do segundo domínio anteriormente referido.

Desta forma, para o domínio *Estratégias de resolução de problemas* defini as seguintes categorias inspiradas em Vale e Pimentel (2004): i) Descobrir um padrão, regra ou lei de formação; ii) Fazer tentativas, conjecturas; iii) Trabalhar do fim para o princípio; iv) Usar dedução lógica; fazer eliminação; v) Reduzir a um problema mais simples; decomposição; simplificação; vi) Fazer uma simulação, experimentação ou dramatização; vii) Fazer um desenho, diagrama ou esquema e viii) Fazer uma listagem de algumas/todas as possibilidades.

No que diz respeito ao segundo domínio, *Tipos de representação utilizadas,* estabeleci as categorias seguintes inspiradas em Bruner (1989; 1999): Representações activas; Representações icónicas e Representações simbólicas. Cada uma destas categorias subdivide-se em unidades mais pequenas, as subcategorias. Na construção destas subcategorias adaptei a informação relativa a esta temática presente em diversas fontes, citadas no referencial teórico (Bruner, 1989, 1999, 2000; Diezmann & English, 2001; Ponte & Serrazina, 2000; Santos, 1991; Wong, 2004). As *Representações activas* têm como subcategoria a Manipulação de objectos. As *Representações icónicas* subdividem-se em Representações pictóricas (desenhos); Diagramas (em rede, de hierarquias, matriz ou parte-todo) e Símbolos não convencionais. As *Representações simbólicas* subdividem-se em Algarismos e números; Sinais de operações e sinal de igual/expressões matemáticas e Letras/palavra escrita.

Por fim, o terceiro domínio, *O papel das representações na resolução de problemas,* organiza-se num conjunto de categorias que sintetizei também a partir do quadro teórico (Cavalcanti, 2001; Diezmann & English, 2001; NCTM, 2007; Ponte et al., 2007; Smole & Diniz, 2001; Woleck, 2001): i) Organização do raciocínio matemático; ii) Apoio à comunicação matemática; iii) Apoio da compreensão de conceitos e relações matemáticas; iv) Desenvolvimento de conhecimentos matemáticos; v) Registo de ideias; vi) Expressão da solução e vii) Expressão do processo utilizado.

Com base nas categorias de análise referidas, e após a análise cuidada de todas as informações que possibilitaram a construção de cada caso, procurei desenvolver uma análise que resumisse e caracterizasse as representações e as estratégias utilizadas por cada aluno, com a qual encerrei cada estudo de caso.

Após esta caracterização e síntese, procurei desenvolver uma análise cruzada dos quatro casos em conjunto, tendo em conta as questões do estudo e com o objectivo de encontrar similitudes e diferenças que me permitissem formular conjecturas e questões com maior amplitude.

Capítulo IV

Os alunos

Neste capítulo apresentam-se os casos dos quatro alunos. Para cada um deles faz-se uma breve caracterização e, de seguida, descrevem-se e analisam-se com detalhe as representações utilizadas no decorrer da resolução de cada um dos problemas propostos, bem como as estratégias reveladas, dando particular ênfase às representações construídas. A análise das representações construídas foi apoiada pelas explicações dos alunos sempre que estas se consideraram pertinentes e relevantes para uma melhor compreensão da forma como as representações tinham sido desenvolvidas. Finaliza-se com a sistematização e categorização dos tipos de representação e de estratégias utilizadas pelo aluno.

Ema

Apresentação da aluna

A Ema é uma menina meiga, simpática e afectuosa de seis anos. Os seus grandes olhos castanhos revelam uma criança perspicaz e atenta ao que a rodeia. Acata facilmente o que lhe é pedido, sempre com um sorriso. Revela ainda alguma imaturidade em certas situações e procura com frequência a presença do adulto, demonstrando necessidade de manifestações físicas de afecto.

A sua adaptação à escola neste 1.º ano de escolaridade foi feita com normalidade. Ao nível do seu desempenho escolar é uma aluna que não revela dificuldade em desenvolver as competências previstas para a área da Matemática. No entanto, na Língua Portuguesa revela muitas dificuldades sobretudo ao nível da leitura e da escrita. É uma aluna com um ritmo de trabalho muito lento e que necessita de reforços constantes e muito apoio individualizado, sobretudo nesta última área referida. Apresenta ainda uma pequena disfunção ao nível da comunicação oral, não pronunciando correctamente alguns sons da nossa Língua. Para combater este problema, o qual contribui claramente para as dificuldades apresentadas, a aluna beneficiou de terapia da fala.

Ema foi uma aluna que sempre revelou vontade e predisposição em resolver cada desafio que lhe era apresentado, demonstrando empenho e persistência na resolução dos problemas propostos. É uma aluna que não desiste com facilidade perante as contrariedades encontradas.

Resolução dos problemas propostos

Problema A – ***Os periquitos***

O Pedro tem 10 periquitos. Todos os dias o Pedro dá a cada 2 periquitos 3 folhas de alface. Quantas folhas de alface tem o Pedro de dar, por dia, aos seus 10 periquitos?

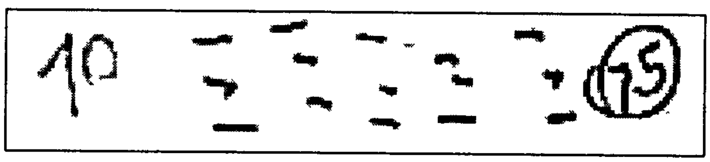


Figura 31 – Resolução do problema A (Ema)

As representações utilizadas pela aluna para resolver este problema, bem como a sua explicação do modo como as construiu, forneceram muitas informações pertinentes sobre o raciocínio e a interpretação de Ema durante a resolução do problema.

Quando lhe solicitei que me explicasse como tinha feito, olhou para as representações construídas e apesar de não ter desenhado nem periquitos nem folhas, explicou como se tais elementos estivessem realmente desenhados na folha de papel. Começou por escrever o número dez representativo do total de periquitos e explicou o raciocínio seguido: *"Comecei a dar, a cada dois periquitos, três folhas e a seguir contei quantas folhas eram."*

Ema utilizou símbolos não convencionais (neste caso tracinhos horizontais) para representar as folhas de alface que dava a cada dois periquitos. Estes símbolos muito pessoais permitiram a Ema expressar as suas ideias matemáticas, revelaram significado e permitiram-lhe comunicar aos outros como encontrou a solução para o problema proposto. A forma como a aluna organizou os tracinhos horizontais traduziu-se num diagrama o qual parece ter também funcionado como suporte ao raciocínio desenvolvido durante a resolução do problema.

Ao utilizar símbolos não convencionais representativos do real, Ema não necessitou de recorrer a representações menos formais e mais concretas. Por fim, apresentou o resultado do problema proposto através de um número (quinze) inscrito num círculo.

Ainda relativamente às representações utilizadas pela aluna na resolução do problema questionei-me como é que Ema sabia que ao fazer cinco grupos de três elementos, em que cada grupo correspondia a três folhas que ela dava a dois periquitos, alimentava todos os periquitos (dez). Questionei Ema sobre este aspecto mas ela voltou a dizer-me que as primeiras três folhas eram para dois periquitos, as outras três para outros dois periquitos, e por aí fora, até ter dado a todos os periquitos.

No decorrer das aulas de Matemática foram bastante trabalhadas as contagens de dois em dois, quer por ordem crescente, quer por ordem decrescente. Será que Ema contou mentalmente de dois em dois os periquitos a quem ia dando três folhas, até perfazer dez periquitos? Não posso responder, pois não possuo elementos suficientes para o fazer; no entanto, parece ser uma boa possibilidade tendo em conta o trabalho desenvolvido diariamente na sala de aula.

As representações utilizadas por Ema na resolução deste problema inserem-se em duas categorias: representações icónicas e representações simbólicas.

Na categoria das representações icónicas incluem-se os símbolos não convencionais criados pela aluna bem como o diagrama construído, ambos subcategorias das representações icónicas. Este diagrama, com o qual descompactou correctamente a estrutura do problema e lançou as bases para a sua solução, pode ser classificado como diagrama parte-todo, uma vez que representa a relação que existe entre a parte (três folhas para dois periquitos) e o todo (folhas para dez periquitos).

Na categoria das representações simbólicas estão os números *dez* e *quinze* (subcategoria: *algarismos e números*) utilizados pela aluna para representar o total de periquitos e a solução do problema, respectivamente.

Relativamente à estratégia utilizada pela aluna para resolver o problema A, uma vez que Ema recorreu a um diagrama para representar o processo de resolução do problema e determinar a solução do mesmo, a estratégia desenvolvida enquadra-se na categoria *Fazer um desenho, diagrama ou esquema.*

Problema B – ***As bolas de gelado***

Na gelataria há bolas de gelado de 4 sabores diferentes:

- Morango (M)
- Chocolate
- Baunilha (B)
- Amêndoa

A Rita vai comprar um gelado com dois sabores. Quantos gelados com dois sabores diferentes se conseguem fazer?

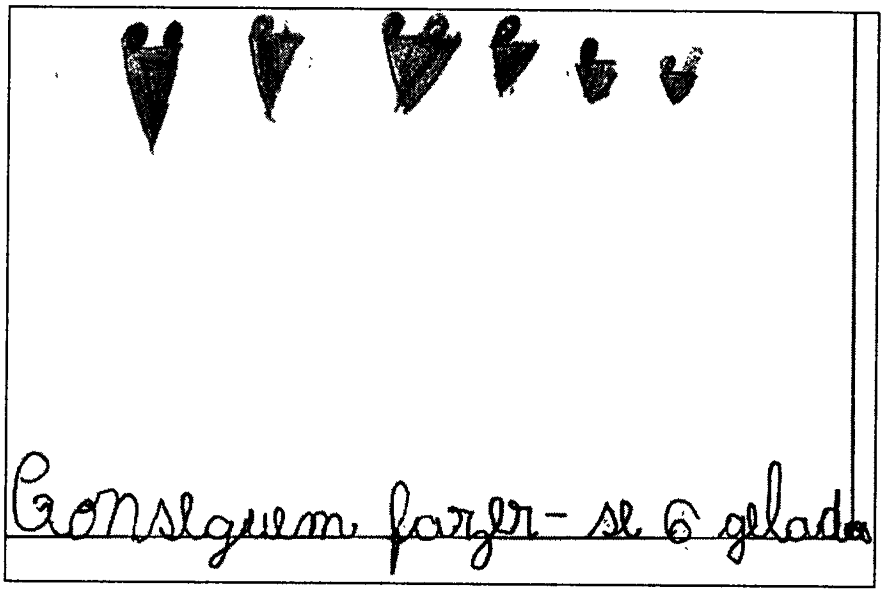


Figura 32 – Resolução do problema B (Ema)

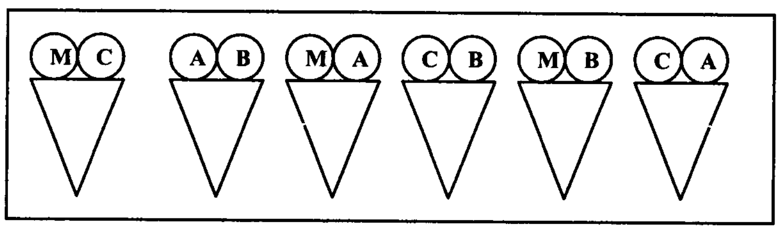


Figura 33 – Reprodução dos gelados da figura 32 substituindo as cores por letras

Ema associou a cada sabor de gelado uma cor: morango – vermelho; chocolate – castanho; baunilha – amarelo e amêndoa – cor-de-laranja. Em seguida, desenhou, um a um, os cones de gelado com duas bolas, representativas dos dois sabores possíveis que a Rita poderia comprar. As bolas de gelado foram pintadas com as cores que a aluna associou aos sabores e correspondem às seis combinações possíveis de dois sabores diferentes que se poderia obter.

Como se pode verificar pela figura 33, no primeiro cone de gelado desenhado a aluna combinou os sabores M e C, no segundo combinou os sabores A e B, no terceiro cone optou novamente pelo sabor M e combinou-o com o sabor A, no quarto cone de gelado combinou os sabores C e B, no quinto cone combinou o sabor M com o sabor B e, por fim, no sexto e último cone apresentou a última combinação possível, o sabor C com o sabor A.

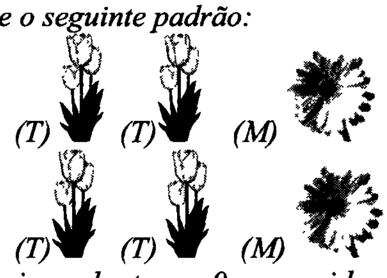
As representações utilizadas por Ema na resolução deste problema inserem-se na categoria das representações icónicas.

Como se pode facilmente constatar, foi através do desenho que a aluna interpretou o problema, representou a resolução completa do mesmo e registou a respectiva solução. O desenho (subcategoria das representações icónicas) apoiou o raciocínio matemático da aluna e permitiu que a mesma comunicasse o processo utilizado e o resultado obtido.

Relativamente às estratégias utilizadas pela aluna para resolver o problema B estas podem ser enquadradas em duas categorias: *Fazer um desenho, diagrama ou esquema* uma vez que Ema recorreu ao desenho para interpretar e representar a resolução do problema proposto e na categoria *Fazer uma listagem de algumas/todas as possibilidades,* uma vez que a aluna representou todas as combinações possíveis.

Problema C – ***As flores do canteiro***

Os meninos da escola do Daniel estão a plantar flores num canteiro, respeitando sempre o seguinte padrão:



Os meninos plantaram 9 margaridas (M). Quantas tulipas plantaram?

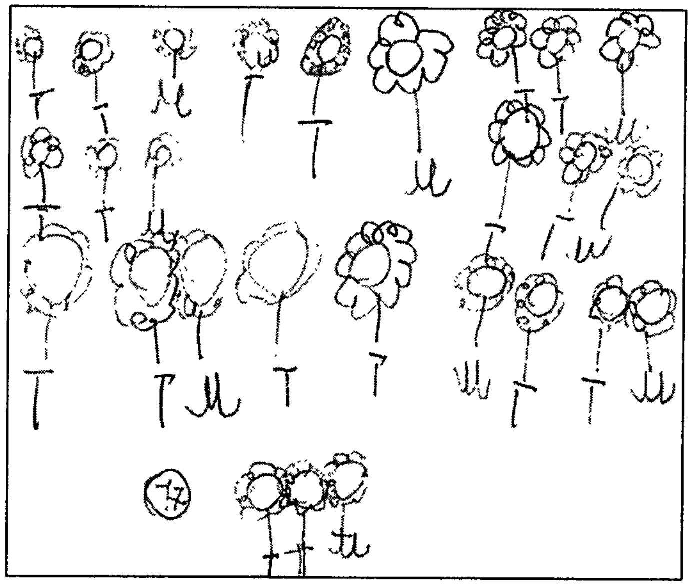


Figura 34 – Resolução do problema C (Ema)

Para resolver o problema C, a aluna recorreu novamente ao desenho. Como se pode verificar nas representações patentes na figura 34, a aluna desenhou flores para representar tanto as margaridas como as tulipas plantadas no canteiro, não parecendo existir diferenças entre elas no que diz respeito às características próprias de cada flor. Por baixo de cada flor desenhada, escreveu a inicial do nome respectivo, repetindo sempre o mesmo motivo *TTM* de forma horizontal. Como a própria aluna afirmou "*Fui pondo sempre duas tulipas e a seguir uma margarida, duas tulipas, uma margarida (….) e parei quando já tinha nove margaridas. (….) depois fui contar as tulipas.*"

Por fim representou o total de tulipas através do número dezassete, à volta do qual desenhou um pequeno círculo. Este total terá sido provavelmente fruto de um erro de contagem, uma vez que nas representações construídas estão desenhadas dezoito tulipas.

As representações utilizadas por Ema na resolução deste problema inserem-se em duas categorias: representações icónicas e representações simbólicas.

Na categoria das representações icónicas incluem-se as flores desenhadas pela aluna em representação das margaridas e das tulipas presentes no enunciado do problema em questão (desenho – subcategoria das representações icónicas).

Na categoria das representações simbólicas enquadram-se as iniciais que a aluna escreveu por baixo de cada flor (subcategoria: *letras/palavra escrita*), representativas do nome respectivo. Nesta categoria engloba-se ainda a solução apresentada pela aluna sob a forma do número dezassete (subcategoria: *algarismos e números*).

Mais uma vez, através das representações apresentadas, a aluna revelou o modo como interpretou o problema ouvido, o processo de resolução e o resultado obtido. Embora o resultado não seja o correcto, as representações utilizadas revelam que a aluna compreendeu o problema proposto e que conseguiu expor no papel a forma como o interpretou e como raciocinou para chegar à resposta.

Relativamente às estratégias utilizadas pela aluna para resolver o problema C estas podem incluir-se em duas categorias: *Fazer um desenho, diagrama ou esquema* uma vez que Ema recorreu ao desenho para interpretar e representar o processo de resolução do problema proposto e na categoria *Fazer tentativas* dado que, segundo a explicação da aluna, no decorrer da resolução do problema, Ema foi desenhando flores, respeitando o motivo *TTM,* até ao momento em que " (...) *já tinha nove margaridas".*

Problema D – ***Os apertos de mão***

A Rita, o Nuno, o Paulo e a Lili são amigos. Quando chegaram à escola cumprimentaram-se e cada um deu um aperto de mão aos outros.
Quantos apertos de mão deram ao todo?

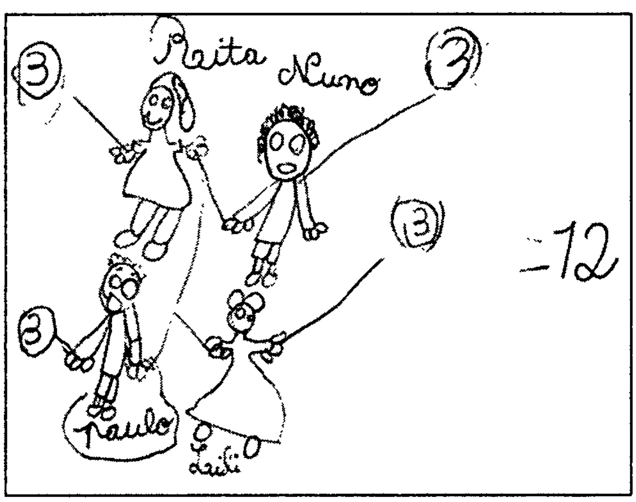


Figura 35 – Resolução do problema D (Ema)

Para representar as personagens da história em questão, Ema utilizou o desenho, rico em pormenores, como se pode observar na figura 35. Desenhou o corpo completo das crianças intervenientes e escreveu os respectivos nomes, revelando preocupação com a identificação dos participantes. Ligou as crianças através de linhas as quais representam relações existentes entre eles, neste caso, apertos de mão que deram entre si.

De cada criança desenhada sai uma linha em cujo extremo está um círculo com o número três. Perguntei a Ema o que significava aquele três ao que me respondeu que correspondia ao número de apertos de mão que cada um dos meninos dava. Quando inquirida sobre a forma como tinha chegado a esta conclusão, Ema apontou para os diferentes personagens desenhados e explicou: "*Esta* [Rita] *dava* [um aperto de mão] *a este* [Nuno] *e também dava a este* [Paulo] *e a esta* [Lili] (...)". A explicação continuou, percorrendo os quatro intervenientes, até a aluna considerar que todos se tinham cumprimentado uns aos outros, perfazendo um total de doze apertos de mão, tal como a aluna escreveu no lado direito das representações construídas.

As representações utilizadas por Ema na resolução deste problema inserem-se em duas categorias: representações icónicas e representações simbólicas.

Na categoria das representações icónicas enquadra-se claramente o desenho dos quatro intervenientes da história deste problema. As linhas que ligam as crianças entre si podem ser consideradas símbolos não convencionais (subcategoria das representações icónicas), uma vez que foi esta a forma, muito pessoal, que a aluna encontrou para representar a relação que se estabeleceu entre os quatro amigos quando os mesmos se cumprimentaram.

Na categoria das representações simbólicas incluem-se os nomes das personagens (subcategoria: *letras/palavra escrita*) bem como os números *três* e *doze* (subcategoria: *algarismos e números*).

As representações construídas serviram de suporte ao raciocínio matemático da aluna durante a interpretação do problema. Através destas, Ema procurou chegar à solução correcta do problema proposto, porém não o conseguiu, uma vez que o trabalho realizado não foi o suficiente para compreender todas as relações matemáticas envolvidas. Na explicação fornecida pela aluna acerca da forma como todos se cumprimentavam, Ema parece ter esquecido a interacção que se estabelecia entre cada dois amigos.

Relativamente às estratégias utilizadas pela aluna para resolver o problema D estas podem incluir-se em duas categorias: *Fazer um desenho, diagrama ou esquema* uma vez que Ema recorreu ao desenho para interpretar e representar o processo de resolução do problema proposto e na categoria *Fazer tentativas* dado que, segundo a explicação da aluna, esta foi explorando todas as hipóteses dos quatro amigos se cumprimentarem, relacionando cada um com todos.

Problema E – ***O voo das bruxas***

20 bruxas têm de viajar em 8 vassouras para um encontro em Lisboa.
Porém, nenhuma vassoura pode levar mais do que 4 bruxas nem menos do que 2.
Como voarão as bruxas?

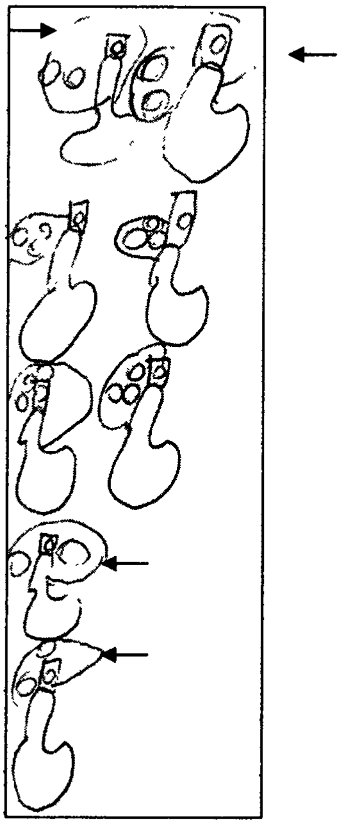


Figura 36 – Resolução do problema E (Ema)

Para resolver o problema E a aluna utilizou o desenho para representar as vassouras, mas não para representar as bruxas. Ao contrário do que aconteceu no problema anterior, Ema não elaborou um desenho dos intervenientes (neste caso bruxas) com todos os seus pormenores, em vez deste, representou as bruxas por pequenos círculos (símbolos não convencionais), facto que lhe poupou em muito o tempo de resolução do problema proposto.

No que diz respeito à forma como Ema construiu estas representações, a aluna explicou, apontando para o desenho:

> *Ema*: Comecei a pôr as bruxas em cada....uma [bruxa] em cada [vassoura] e a seguir as que sobravam comecei a pôr outra vez, e a seguir quando não havia mais...já não pus mais.

Observando com atenção as representações que Ema elaborou para resolver este problema e tendo em conta a explicação da aluna do modo como o resolveu, a aluna parece ter começado por distribuir uma bruxa por cada vassoura, e ao contá-las terá verificado que ainda faltavam muitas bruxas. Em seguida terá colocado mais uma bruxa em cada vassoura e, novamente, ao contá-las verificado que ainda não totalizavam as vinte. Por fim, e pelos círculos que se vêem apagados em quatro vassouras (assinaladas com uma seta na figura 36), deve ter desenhado um terceiro círculo. No entanto, ao contar todos os círculos verificou que já tinha mais do que vinte bruxas, pelo que eliminou as que sobejavam. Repare-se também que nenhuma vassoura leva quatro bruxas. Este último facto parece também apoiar o que foi dito anteriormente sobre a forma como Ema construiu as representações.

As representações utilizadas por Ema na resolução deste problema inserem-se na categoria das representações icónicas.

O desenho das vassouras constitui uma das subcategorias deste tipo de representações. Para além desta subcategoria, há ainda a assinalar o importante papel desempenhado pelos círculos representativos das bruxas, denominados de símbolos não convencionais, uma outra subcategoria das representações icónicas.

Como se pode depreender pelas representações utilizadas, Ema sentiu uma grande necessidade em concretizar; a aluna como que manipulou as representações que construiu, operou com elas até atingir o resultado desejado. Estes símbolos não convencionais criados por Ema revelaram-se peças fundamentais no processo de interpretação e de resolução do problema.

Relativamente às estratégias utilizadas pela aluna para resolver o problema D estas podem incluir-se em três categorias: *Fazer um desenho* uma vez que Ema recorreu ao desenho para interpretar e representar o processo de resolução do problema proposto, incluindo nele outros elementos icónicos, na categoria *Fazer tentativas* dado que, segundo a explicação da aluna, esta desenvolveu diversas tentativas para conseguir distribuir as vinte bruxas pelas oito vassouras respeitando as condições dadas no problema e ainda na categoria *Usar dedução lógica; fazer eliminação* já que para ir ao encontro das condições do problema, Ema teve igualmente de usar dedução lógica e levar a cabo algumas eliminações.

Problema F – ***As meias das joaninhas***
O João é um coleccionador muito estranho. Ele tem uma caixa com 5 joaninhas. Cada joaninha tem 6 patas. Se o João tivesse de comprar meias no Inverno para as suas joaninhas, quantas meias compraria?

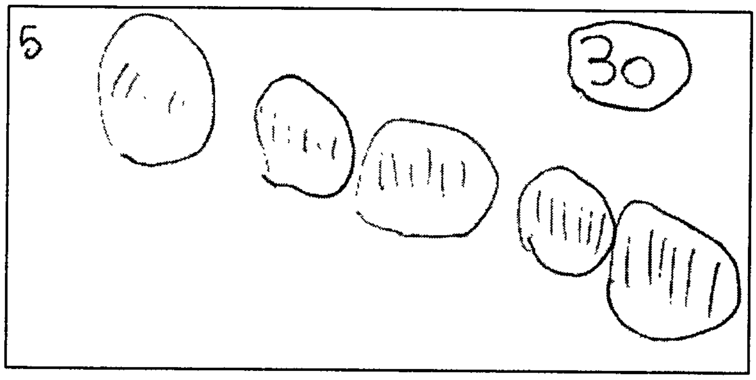


Figura 37 – Resolução do problema F (Ema)

A aluna começou por escrever o número cinco em representação do total de joaninhas envolvidas no problema. Em seguida, desenhou cinco conjuntos, delimitados por uma linha fechada, sendo cada um deles formado por seis risquinhos verticais representativos das seis patas de cada joaninha. A forma como a aluna organizou os cinco conjuntos traduziu-se num diagrama o qual parece ter também funcionado como suporte ao raciocínio desenvolvido durante a resolução do problema. Ao explicar como tinha construído estas representações, apontou em simultâneo para o primeiro conjunto que se pode ver na figura 37 e referiu que: *"Comecei a pôr riscos que eram as seis patas ...e a seguir fiz uma bolinha à volta"*; a aluna continuou o mesmo raciocínio para todos os conjuntos desenhados. Quando lhe perguntei acerca do significado daquelas "cinco bolas grandes" respondeu-me que *"eram para não se confundir* " as patas de cada joaninha. Finalizou o problema representando através do número trinta, o total de meias que seria necessário comprar para todas as joaninhas, colocando-o também dentro de um círculo.

As representações utilizadas por Ema na resolução deste problema inserem-se em duas categorias: representações icónicas e representações simbólicas.

Na categoria das representações icónicas incluem-se os símbolos não convencionais criados pela aluna (risquinhos verticais representativos das patas das joaninhas) bem como o diagrama construído, ambos subcategorias deste tipo de representações.

O diagrama construído pela aluna pode ser classificado como diagrama parte-todo, uma vez que representa a relação que existe entre a parte (seis meias para uma joaninha) e o todo (meias para cinco joaninhas). A forma como Ema construiu o diagrama não só a ajudou a comunicar aos outros a forma como raciocinou como, e principalmente, foi uma ferramenta essencial para que a aluna conseguisse resolver o problema proposto.

Na categoria das representações simbólicas estão os números *cinco* e *trinta* (subcategoria: *algarismos e números*) utilizados pela aluna para representar o total de joaninhas e a solução do problema, respectivamente.

Relativamente à estratégia utilizada pela aluna para resolver o problema F, uma vez que Ema recorreu a um diagrama para representar o processo de resolução do problema e determinar a solução do mesmo, a estratégia desenvolvida enquadra-se na categoria *Fazer um desenho, diagrama ou esquema.*

Problema G – *Fazendo colecções*

O Mário e o Artur coleccionam calendários. O Mário tem mais 3 calendários do que o Artur e no conjunto, os dois irmãos têm 21 calendários. Quantos calendários tem o Mário?

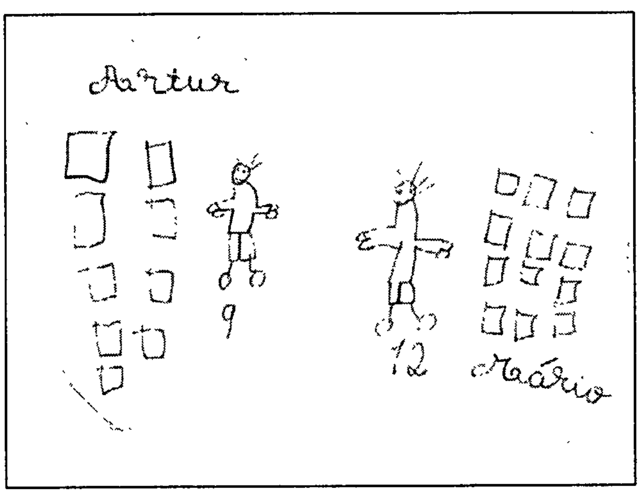


Figura 38 – Resolução do problema G (Ema) na folha de registo após ter resolvido o problema com recurso a materiais manipuláveis

Para resolver este problema Ema perguntou se poderia utilizar os "cubinhos" (material manipulável), os quais fazem parte do material multibásico e que foram usados com alguma frequência no decorrer das aulas de Matemática. Talvez devido à natureza das relações matemáticas um pouco mais complexas existentes neste problema, Ema necessitou de concretizar o seu raciocínio matemático através de materiais manipuláveis.

Após receber os "cubinhos" solicitados, Ema procurou então resolver o desafio proposto. Quando me aproximei para verificar o trabalho realizado, observei que do lado esquerdo da folha com o enunciado do problema estavam nove cubos e do lado direito doze cubos. No entanto, nada havia ainda registado. Pedi-lhe então que me explicasse aquela disposição dos "cubinhos" que, segundo a aluna, resolvia o problema proposto. À medida que ia explicando a forma como tinha feito apontava para ambos os lados da folha do problema. "*Fui começando a pôr um* [cubo] *em cada* [lado da folha, conjunto] *e a seguir os três que sobraram pus neste* [coloca a mão no conjunto da direita]". Quando lhe pergunto quantos cubos estão em cada conjunto responde-me correctamente nove (lado esquerdo da folha) e doze (lado direito). Após ter resolvido o problema com o apoio dos cubos pedi-lhe para representar e registar a solução encontrada no espaço destinado para esse efeito na folha do problema (figura 38).

Como se pode ver na figura 38, no registo da solução encontrada a aluna manteve no desenho a mesma disposição que fez no raciocínio efectuado com os cubinhos.

Após registar a solução encontrada, Ema não identificou (inicialmente) os dois meninos da história. Para me certificar se Ema tinha realmente percebido o que tinha feito pedi-lhe que identificasse o Mário. Ema apontou para o menino do conjunto onde estão desenhados os doze quadrados, após o que escreveu o nome dos dois intervenientes da história (figura 38).

As representações utilizadas por Ema na resolução deste problema inserem-se claramente na categoria das representações activas, uma vez que Ema recorreu à manipulação de objectos (subcategoria das representações activas) para resolver o desafio proposto.

Ao contrário do que se verificou na resolução do problema E em que a aluna como que manipulou as representações construídas no papel para conseguir atingir a solução do problema, neste problema, Ema não conseguiu utilizar outra representação que não a manipulação de objectos concretos.

Relativamente à estratégia utilizada pela aluna para resolver o problema G, uma vez que Ema recorreu a materiais manipuláveis para determinar a solução do mesmo, a estratégia desenvolvida enquadra-se na categoria *Fazer uma experimentação*. Através da estratégia utilizada a aluna conseguiu resolver correctamente o problema proposto, conseguindo ainda comunicar o raciocínio matemático subjacente à estratégia utilizada, facto que nem sempre aconteceu com outros alunos.

Problema H – ***A compra de selos***

Uma máquina de selos automática aceita moedas de 1ct, 2ct, 5ct, 10ct e 20 ct. Para comprar um selo que custe 49 ct, que moedas poderei usar?

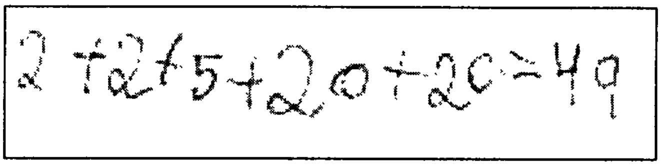


Figura 39 – Resolução do problema H (Ema)

Para resolver este problema, Ema apresentou uma única possibilidade relativamente ao tipo e quantidade de moedas que poderia usar para comprar o referido selo. Talvez influenciada pelo trabalho de composição e decomposição de números trabalhadas no decorrer das aulas de Matemática, Ema apresentou a resolução ao problema proposto sob a forma que se pode observar na figura 39.

Da solução apresentada pela aluna podemos inferir que Ema poderia usar duas moedas de 2 cêntimos, uma moeda de 5 cêntimos e duas moedas de 20 cêntimos para comprar um selo de 49 cêntimos.

Ema explicou como tinha construído a representação utilizada: "*Primeiro pus dois e a seguir pus mais dois, dava quatro. A seguir pus mais cinco; a seguir como ainda não dava quarenta e nove pus mais vinte e a seguir contei quantos eram e pus mais vinte*".

Na construção da expressão numérica apresentada, a aluna parece ter seguido a ordem de apresentação das moedas no enunciado do problema, começando pelas moedas de menor valor monetário e terminando nas de maior valor referidas.

As representações utilizadas por Ema na resolução deste problema inserem-se claramente na categoria das representações simbólicas, mais concretamente na subcategoria *algarismos e números* e na subcategoria *expressões matemáticas.*

A expressão numérica apresentada resulta de estratégias que fazem parte da categoria *Fazer tentativas, conjecturas* e da categoria *Fazer uma listagem de algumas/todas as possibilidades* das estratégias assumidas por este trabalho.

Problema I – *Compra de jogos*

A escola do Monte recebeu um subsídio de 40 € para comprar jogos didácticos. Os jogos disponíveis na papelaria local eram:

jogo A – 15 € jogo B – 20 € jogo C – 10 € jogo D – 5 €.

Que jogos se podem comprar com 40 euros? Que quantia sobra?

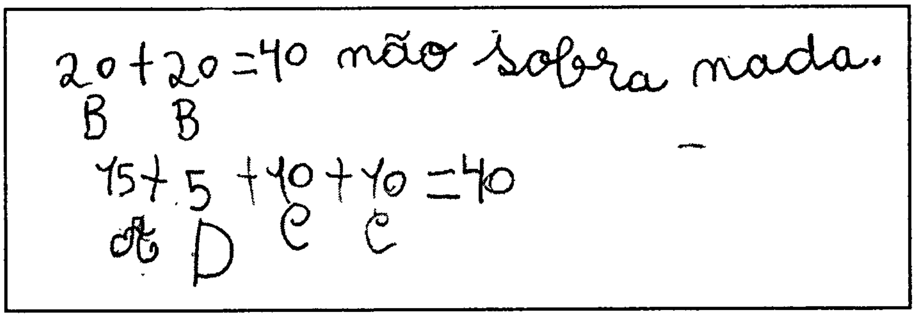


Figura 40 – Resolução do problema I (Ema)

Tal como no problema anterior, Ema apresentou a solução a este problema sob a forma de expressões numéricas nas quais, por baixo de cada valor, escreveu a letra do jogo representado. As expressões numéricas foram complementadas pelas palavras "*não sobra nada*" em resposta à segunda questão colocada no enunciado do problema.

A partir das representações utilizadas, Ema apresentou duas possibilidades de comprar jogos didácticos com quarenta euros: i) dois jogos B e ii) um jogo A, um jogo D e dois jogos C. Ema explicou como construiu as expressões numéricas:

> *Ema*: Primeiro pus 20.
> *Professora:* Que era o preço do jogo…?
> *Ema:* B.
> *Professora*: [apontando para a primeira expressão numérica] Então, com 40 euros que jogos podes comprar?
> *Ema*: Dois jogos B.
> *Professora*: E a outra maneira de gastar os 40 euros?
> *Ema*: [apontando para a segunda expressão numérica] (….) Podia comprar o [jogo] A, o [jogo] D, o [jogo] C e o [jogo] C.

Na construção da primeira expressão numérica apresentada, a aluna formulou talvez uma das possibilidades mais imediatas de gastar os 40 euros. O cálculo mental efectuado pela aluna, traduzido na referida representação, poderá ser fruto do trabalho diversificado desenvolvido em sala de aula no que diz respeito à composição e decomposição de números, nesta altura do ano lectivo até ao número 50.

Na segunda expressão numérica, Ema tenta combinar os jogos ainda não utilizados para gastar os 40 euros. Começa pelo jogo A ao qual soma o preço do jogo D, o que perfaz 20 euros. A quantia que falta para totalizar os 40 euros é dividida por dois jogos C. As representações da aluna revelam um raciocínio e cálculo mental rápidos e eficientes.

As representações utilizadas por Ema na resolução deste problema inserem-se na categoria das representações simbólicas, mais concretamente na subcategoria *algarismos e números*, na subcategoria *expressões matemáticas* e ainda na subcategoria *letras/palavra escrita.*

As expressões numéricas apresentadas resultam de estratégias que fazem parte da categoria *Fazer tentativas, conjecturas* e da categoria *Fazer uma listagem de algumas/todas as possibilidades* das estratégias assumidas por este trabalho.

Problema J – *Um problema de lógica*

Cinco meninas – Ana, Rita, Paula, Dora e Eva – dividiram entre si os últimos gelados: três de morango e dois de chocolate.
Ana e Eva comeram gelados do mesmo sabor.
Eva e Paula comeram gelados com sabores diferentes.
Paula e Rita também comeram gelados com sabores diferentes.
Que gelado comeu cada menina?

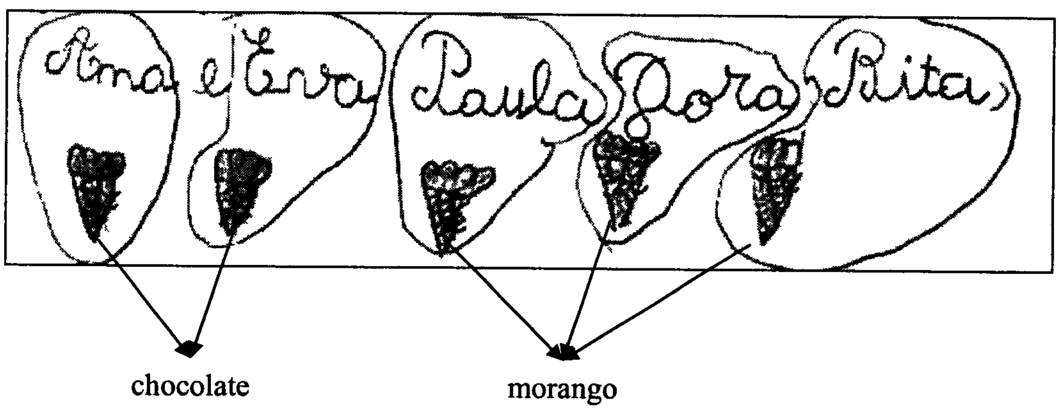


Figura 41 – Resolução do problema J (Ema)

As três frases incluídas na chaveta (ver enunciado do problema) foram intituladas de "regras", as quais os alunos teriam de seguir e de respeitar para resolverem correctamente o problema.

Nas representações construídas pela aluna pode observar-se que a mesma desenhou cinco linhas fechadas, dentro das quais escreveu o nome de cada uma das cinco meninas e, por baixo dos mesmos, desenhou o respectivo gelado.

A explicação de Ema foi fundamental para dar significado às representações construídas. Observar apenas as representações sem saber como estas tinham surgido, não fornecia a informação necessária para se perceber o raciocínio matemático da aluna durante a construção das mesmas. Assim, só depois de ouvir Ema explicar aos colegas como tinha feito é que foi possível interpretar com mais clareza as representações utilizadas para resolver o problema em questão. Apresenta-se em seguida parte do diálogo estabelecido com a aluna aquando da explicação do seu raciocínio à turma.

> *Ema*: Fui ler a frase e a seguir pintei o da Ana de chocolate, e o da Eva também de chocolate.
> *Professora*: Porquê?
> *Ema*: Porque eram de sabores iguais.
> *Professora*: E depois?
> *Ema*: A seguir o da Paula fiz diferente...
> *Professora*: Porquê?
> *Ema*: Porque só havia dois [gelados] de chocolate (...) a seguir também pus o outro de morango [Dora] e o outro de morango [Rita].
> *Professora*: Mas não leste as regras todas, pois não?
> *Ema*: Não...

Pelas explicações de Ema, percebe-se que a aluna não leu com atenção o problema até ao fim. Tal facto pode dever-se às dificuldades que ainda apresenta nas competências da leitura ou julgar que não já precisava de ler todo o enunciado. Aparentemente, Ema apenas leu o início do problema e a "primeira regra". Como existiam dois gelados de chocolate e duas amigas que tinham comido gelados com o mesmo sabor (Ana e Eva), deduziu que ambas tinham comido de chocolate. Além disso, quando lhe pergunto por que pintou o gelado da Paula de cor diferente não justifica a sua escolha com a informação da "segunda regra", mas sim com o facto de só existirem dois gelados de chocolate (e como estes já tinham sido atribuídos...). Em seguida, e como sabe que são três os gelados de morango, pinta os restantes da cor que associou a este sabor.

Como a própria aluna admite no fim da explicação, Ema não leu com atenção o problema proposto e, como tal, não apresentou a solução correcta do mesmo.

As representações utilizadas por Ema na resolução deste problema inserem-se em duas categorias: representações icónicas e representações simbólicas.

Na categoria das representações icónicas incluem-se o desenho dos gelados bem como o diagrama construído, ambos subcategorias deste tipo de representações.

O diagrama construído, através do qual a aluna tentou representar a informação de uma forma estruturada, pode ser classificado como diagrama parte-todo, uma vez que procurou representar (embora sem êxito) a relação existente entre a parte (um gelado para cada menina) e o todo (cinco gelados para cinco meninas, sendo três de morango e dois de chocolate). A aluna apenas conseguiu representar a parte do problema, atribuindo um gelado a cada aluna mas não conseguiu estabelecer a relação correcta entre parte e o todo.

Na categoria das representações simbólicas estão os nomes das cinco raparigas (subcategoria: *letras/palavra escrita*) utilizados pela aluna para identificar e associar cada uma das meninas a um determinado sabor de gelado.

Relativamente à estratégia utilizada pela aluna para resolver o problema J, uma vez que Ema recorreu a um diagrama para representar o processo de resolução do problema e determinar a solução do mesmo, a estratégia desenvolvida enquadra-se na categoria *Fazer um desenho, diagrama ou esquema.*

Caracterização das representações utilizadas nos problemas propostos

Quadro 1 – Quadro resumo com as representações utilizadas (Ema)

	Aluno: Ema		Problemas propostos									
			A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Tipo de representações	Representações activas	Manipulação de objectos							X			
	Representações icónicas	Representações pictóricas (desenhos)		X	X	X	X					X
		Diagramas	X					X				X
		Símbolos não convencionais	X			X	X	X				
	Representações simbólicas.	Algarismos e números.	X		X	X		X		X	X	
		Sinais de operações e sinal de igual/expressões matemáticas.								X	X	
		Letras/palavra escrita			X	X					X	X

Da análise do quadro 1, e após uma primeira leitura horizontal da informação aí representada, pode-se concluir que a aluna necessitou de recorrer a materiais manipulativos para resolver um dos problemas propostos, revelando neste caso o recurso a representações activas.

Verifica-se ainda que a aluna utilizou o desenho para representar diferentes elementos em metade dos problemas propostos. Muitos dos desenhos apresentados são recheados de diversos pormenores, o que pode indicar que o raciocínio matemático desta aluna está ainda muito ligado ao concreto e ao real. Verifica-se que em três dos problemas propostos representou as respectivas estruturas através de diagramas.

O elemento icónico predominante nas representações desta aluna é o desenho. Os símbolos não convencionais surgem em quatro dos problemas, embora em dois deles em simultâneo com o desenho. Ema preferiu desenhar os elementos tal como são na realidade a criar os seus próprios símbolos, neste caso símbolos não convencionais. Talvez por enquanto se sinta mais segura comunicando ideias e conceitos matemáticos através do desenho do que através de elementos menos concretos.

No campo das representações simbólicas, a aluna recorreu por diversas vezes aos algarismos e números nas representações construídas. Em vários dos problemas propostos começa por indicar em número a quantidade de elementos referidos no problema e finaliza a resolução colocando o resultado a que chegou dentro de um círculo, também representado por um número.

Apenas em dois dos problemas apresentados a aluna apresenta a respectiva resolução em forma de expressão numérica na qual utiliza uma linguagem matemática mais formal.

A palavra escrita surge também em quatro das representações apresentadas, nalgumas delas sob a forma de inicial maiúscula representativa de uma determinada palavra ou elemento.

Realizando agora uma leitura vertical do quadro 1 verifica-se que a aluna em cinco dos problemas propostos recorreu tanto a representações icónicas, como a representações simbólicas no âmbito das respectivas resoluções. Em dois dos problemas apresentados apenas utilizou representações simbólicas, noutros dois problemas apenas estão presentes representações icónicas enquanto que num outro recorreu às representações activas.

A aluna recorreu sobretudo a representações do tipo icónico para resolver os problemas propostos. Ema revela ainda uma tentativa para criar diagramas, para organizar o raciocínio e estruturar a informação presente no problema, tendo apresentado alguns no decorrer do trabalho apresentado.

As representações simbólicas têm também a sua presença, como se pode verificar no quadro 1, porém o seu papel é manifestamente diferente do papel das representações citadas atrás no que diz respeito ao processo de resolução. As representações simbólicas são sobretudo utilizadas para representar e comunicar ou a solução encontrada ou um determinado número de elementos do problema em questão. Apenas em dois dos problemas resolvidos (H e I), as representações simbólicas representam o processo de resolução além da solução do problema.

Caracterização das estratégias utilizadas nos problemas propostos

Quadro 2 – Quadro resumo com as estratégias utilizadas (Ema)

		Problemas propostos									
Aluno: Ema		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Estratégias reveladas	Descobrir um padrão, regra ou lei de formação.										
	Fazer tentativas, conjecturas.			X	X	X			X	X	
	Trabalhar do fim para o princípio.										
	Usar dedução lógica; fazer eliminação.					X					
	Reduzir a um problema mais simples; decomposição; simplificação.										
	Fazer uma simulação, experimentação ou dramatização.							X			
	Fazer um desenho, diagrama ou esquema.	X	X	X	X	X	X				X
	Fazer uma listagem de algumas/todas as possibilidades.		X						X	X	

Tendo por base uma leitura horizontal do quadro acima, pode verificar-se que as estratégias mais utilizadas por esta aluna na resolução dos dez problemas propostos foram *Fazer um desenho, diagrama ou esquema* e *Fazer tentativas, conjecturas.* A primeira categoria de estratégias referida surge em sete dos problemas resolvidos enquanto que a segunda categoria aparece em cinco dos problemas, em três dos quais em simultâneo com a primeira categoria referida. As outras estratégias utilizadas pela aluna foram *Fazer uma listagem de algumas/todas as possibilidades*, *Fazer uma simulação, experimentação ou dramatização* e *Usar dedução lógica; fazer eliminação.*

Fazendo agora uma leitura vertical do mesmo quadro constata-se que em seis dos problemas propostos a aluna recorreu, simultaneamente, a mais do que uma estratégia para determinar a solução ao problema enquanto que em quatro dos problemas apenas parece ter recorrido a um tipo de estratégia.

André

Apresentação do aluno

O André tem seis anos e revela-se uma criança tímida, meiga e com um mundo muito próprio. É uma criança muito interessada e curiosa por tudo o que a rodeia. Demonstra possuir um vocabulário rico e diversificado, bem como um conhecimento alargado sobre diversos assuntos. É uma criança sensível com alguma dificuldade em expressar os seus sentimentos. A sua entrada no 1.º ano de escolaridade caracterizou-se por alguns incidentes menos positivos provocados por outros alunos, situação que foi posteriormente resolvida.

Na área da Matemática revelava um bom raciocínio logico-dedutivo, um cálculo mental rápido, manifestando conseguir conceber diferentes estratégias de cálculo e de raciocínio em situações de cariz diferente. Adorava resolver desafios e, como tal, revelou sempre bastante entusiasmo e empenho na resolução dos diferentes problemas propostos.

Resolução dos problemas propostos

Problema A – ***Os periquitos***

O Pedro tem 10 periquitos. Todos os dias o Pedro dá a cada 2 periquitos 3 folhas de alface. Quantas folhas de alface tem o Pedro de dar, por dia, aos seus 10 periquitos?

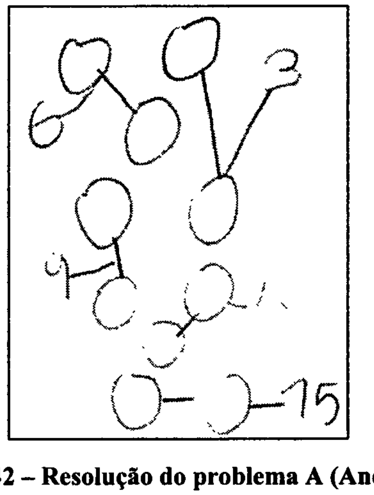


Figura 42 – Resolução do problema A (André)

Nas representações construídas com vista à resolução deste problema, o aluno representou os dez periquitos por círculos (símbolos não convencionais). Agrupou os círculos dois a dois, ligando-os entre si através de uma linha. Ao todo formou cinco grupos de dois círculos. De cada um destes cinco grupos sai uma segunda linha em cujo extremo o aluno escreveu o resultado da contagem de três em três, através dos números três, seis, nove, doze e quinze, o qual correspondia ao número de folhas de alface que ia sendo consumida pelos periquitos. Esta segunda linha pode igualmente ser considerada como símbolo não convencional, uma vez que se trata de uma representação muito pessoal utilizada para representar uma ligação ou relação.

O diagrama construído por André serviu de suporte ao raciocínio matemático e revelou a interpretação correcta que o aluno fez do problema proposto, como se pode verificar pelas suas palavras aquando da explicação do modo como tinha construído as representações apresentadas:

> *André:* Os dois periquitos comeram três [folhas] [aponta para o primeiro grupo de dois círculos, ligado ao número três]; depois aumentaram mais três [aponta para o número seis] e foram sempre aumentando mais três [aponta para o grupo do número nove], nove, doze até quinze.

As representações utilizadas por André na resolução deste problema inserem-se em duas categorias: representações icónicas e representações simbólicas.

Na categoria das representações icónicas incluem-se os símbolos não convencionais criados pelo aluno bem como o diagrama construído, ambos subcategorias das representações icónicas. Na subcategoria dos símbolos não convencionais englobam-se os círculos representativos dos periquitos e a linha que estabelece a relação entre os periquitos e o número de alfaces consumidas. A forma como organizou os círculos e traduziu a relação existente entre os diversos elementos constitui um diagrama que pode ser considerado um diagrama em rede.

Na categoria das representações simbólicas estão os números (subcategoria: *algarismos e números*) utilizados pelo aluno representativos do total de folhas de alface que ia sendo comido pelos periquitos.

As representações utilizadas por André revelam um raciocínio matemático rápido e organizado, ilustrando a solução e o processo utilizado durante a resolução do problema proposto.

Relativamente à estratégia utilizada pelo aluno para resolver o problema A, uma vez que André recorreu a um diagrama para representar o processo de resolução do problema e determinar a solução do mesmo, a estratégia desenvolvida enquadra-se na categoria *Fazer um desenho, diagrama ou esquema.*

Problema B – ***As bolas de gelado***

Na gelataria há bolas de gelado de 4 sabores diferentes:

- Morango (M)
- Chocolate (C)
- Baunilha (B)
- Amêndoa (A)

A Rita vai comprar um gelado com dois sabores. Quantos gelados com dois sabores diferentes se conseguem fazer?

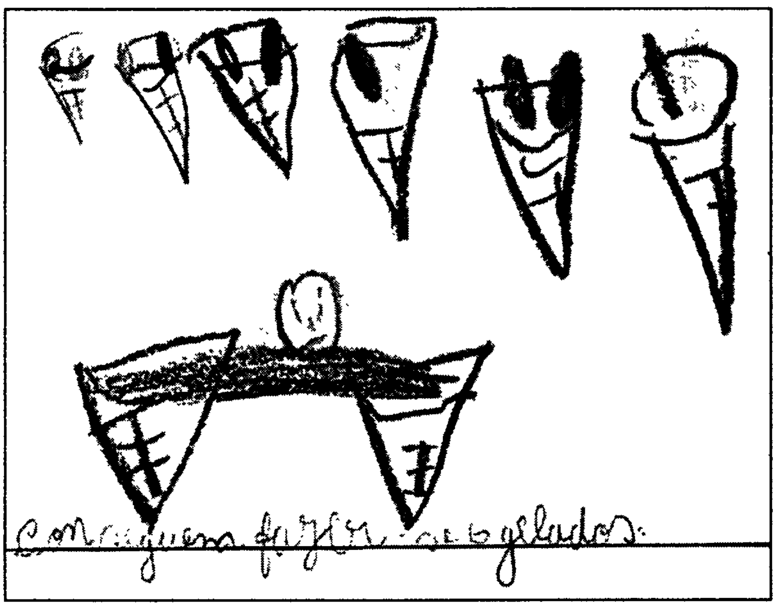


Figura 43 – Resolução do problema B (André)

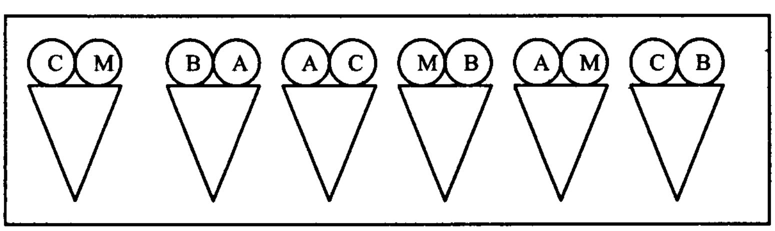


Figura 44 – Reprodução dos gelados da figura 43 substituindo as cores por letras

Tal como Ema, também André associou a cada sabor de gelado uma cor: morango e cor-de-rosa; chocolate e castanho; baunilha e amarelo; e amêndoa e cor-de-laranja. Em seguida, desenhou, um a um, os cones de gelado com duas bolas, representativas dos dois sabores possíveis que a Rita poderia comprar. As bolas de gelado foram pintadas com as cores que o aluno associou aos sabores e correspondem às seis combinações possíveis de dois sabores diferentes que se poderia obter.

Como se pode verificar pela figura 44, e no que diz respeito à ordem pela qual combinou os diferentes sabores, podemos observar que o aluno começou por combinar os sabores C e M, que correspondiam aos dois primeiros sabores na ordem apresentada no enunciado, embora em ordem invertida. Em seguida combinou os sabores B e A, os dois últimos. No terceiro cone combinou o último sabor com o segundo sabor (A e C), no quarto cone os sabores M e B, que correspondem ao primeiro e terceiros sabores, no quinto cone os sabores A e M (último e primeiros sabores) e por fim, no sexto cone, os sabores C e B (os dois sabores do meio).

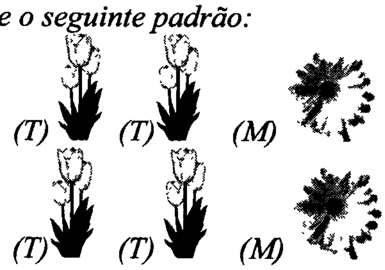
Na sua representação desenhou ainda o que parece ser um balcão, talvez da gelataria, bem como o que se assemelha a uma cabeça, provavelmente da vendedora de gelados.

As representações utilizadas por André na resolução deste problema inserem-se na categoria das representações icónicas, mais concretamente na subcategoria *Representações pictóricas (desenhos).* Como se pode facilmente constatar, foi através do desenho que o aluno interpretou o problema, representou a resolução completa do mesmo e registou a respectiva solução. Este elemento icónico apoiou o raciocínio matemático do aluno e permitiu que o mesmo comunicasse o processo utilizado e o resultado obtido.

Relativamente às estratégias utilizadas pelo aluno para resolver o problema B estas podem ser enquadradas em duas categorias: *Fazer um desenho, diagrama ou esquema,* uma vez que André recorreu ao desenho para interpretar e representar a resolução do problema proposto, e na categoria *Fazer uma listagem de algumas/todas as possibilidades* uma vez que o aluno representou todas as combinações possíveis.

Problema C – ***As flores do canteiro***

Os meninos da escola do Daniel estão a plantar flores num canteiro, respeitando sempre o seguinte padrão:



Os meninos plantaram 9 margaridas (M). Quantas tulipas plantaram?

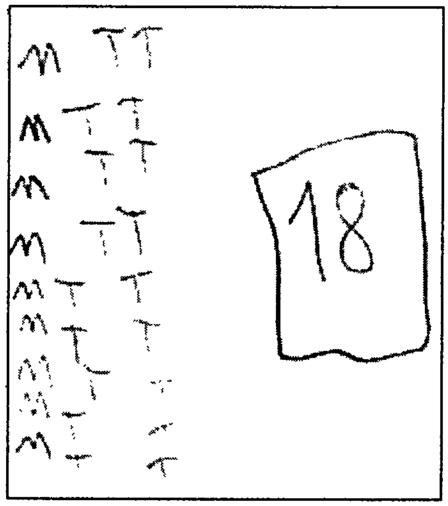


Figura 45 – Resolução do problema C (André)

André recorreu ao motivo *MTT* para representar as flores plantadas no canteiro da escola, sendo que, cada uma das letras que compõem esse motivo constitui a inicial do respectivo nome da flor.

O aluno repetiu, verticalmente, nove vezes, o motivo *MTT*. A forma como o aluno representou a estrutura do problema, estabelecendo uma relação imediata entre os elementos do mesmo, constitui um diagrama.

No enunciado do problema é referido que o padrão das flores plantadas no jardim é *TTM* e não *MTT* como foi utilizado por André. Ao analisar com atenção a representação construída por André, e tomando especial atenção ao pormenor do alinhamento das três letras (*MTT*) em cada linha, poder-se-ia afirmar que o aluno começou por escrever uma fila com nove *M* (correspondentes às nove margaridas) e só depois completou cada linha com a parte que faltava do motivo, *TT*. Talvez por esta razão o aluno tenha escrito *MTT* e não *TTM*. Esta foi a interpretação feita após analisar as representações construídas pelo aluno. Após ouvir as explicações de André esta primeira análise foi confirmada.

> *André:* Primeiro fiz nove margaridas [aponta para a fila dos nove M], e depois [aponta para os TT à frente de cada M] fui fazendo os "pulinhos do canguru" de dois em dois .... até dezoito.

Os "*pulinhos do canguru*" a que André se referiu são na realidade contagens que os alunos efectuavam frequentemente nas aulas com o objectivo de desenvolver o cálculo mental de regularidades (de dois em dois, de três em três, ...), por ordem crescente e decrescente.

As palavras de André forneceram informações complementares acerca do modo como o aluno utilizou as representações construídas para chegar ao resultado final. Após escrever *TT* à frente de cada um dos nove *M*, contou-os de dois em dois até atingir o total correcto de tulipas, escrevendo o número dezoito e assinalando-o com um rectângulo.

As representações utilizadas por André na resolução deste problema inserem-se em duas categorias: representações icónicas e representações simbólicas.

Na categoria das representações icónicas inclui-se o diagrama que o aluno construiu, o qual pode classificar-se como diagrama parte-todo uma vez que representa a relação que existe entre a parte (uma margarida e duas tulipas) e o todo (nove margaridas).

Na categoria das representações simbólicas enquadram-se as iniciais (subcategoria: *letras/palavra escrita*) que o aluno escreveu no motivo *MTT* para representar os dois tipos de flores presentes no enunciado do problema e ainda a solução do problema representado sob a forma do número dezoito (subcategoria: *algarismos e números*).

Relativamente às estratégias utilizadas pelo aluno para resolver o problema C, estas enquadram-se na categoria *Fazer um desenho, diagrama ou esquema* uma vez que André recorreu a um diagrama para interpretar e representar o processo de resolução do problema proposto.

Problema D – ***Os apertos de mão***

A Rita, o Nuno, o Paulo e a Lili são amigos. Quando chegaram à escola cumprimentaram-se e cada um deu um aperto de mão aos outros.

Quantos apertos de mão deram ao todo?

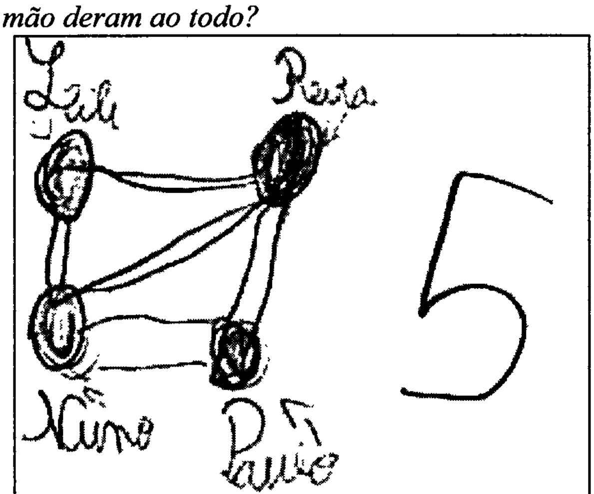


Figura 46 – Resolução do problema D (André)

O aluno começou por representar cada um dos quatro amigos por círculos. Cada círculo está identificado com o nome da respectiva criança. Todos os círculos estão ligados entre si (com excepção de dois deles) por duas linhas que estabelecem as relações entre os intervenientes e que representam, segundo o aluno, os apertos de mão entre os amigos. A forma como organizou a estrutura do problema proposto constitui um diagrama.

Questionei-o sobre a razão da existência das referidas linhas entre os círculos, ao que André me explicou que era o cumprimento que um amigo dava ao outro e vice-versa, embora o aluno apenas tenha contabilizado um aperto de mão. Ao contar todos os apertos de mão somou cinco no total, número que escreveu no lado direito do diagrama.

Com o apoio do diagrama elaborado André explicou o raciocínio seguido aquando da resolução do problema:

> *André*: Fiz quatro bolinhas que eram eles [os quatro amigos] e depois fui fazendo risquinhos que eram os cumprimentos.
> *Professora*: Então explica lá os cumprimentos que eles deram.
> *André*: [apontando para a palavra Lili] A Lili deu ao Nuno [um aperto de mão], a Lili também deu à Rita {simultaneamente segue com o dedo as linhas que ligam os amigos], [pequena pausa, observando o diagrama feito] ... esqueci-me do Paulo!

Só nesse momento André se apercebeu que Lili e Paulo não se tinham cumprimentado, uma vez que não tinha estabelecido qualquer ligação entre os dois. Caso o aluno tivesse revisto atentamente a solução encontrada e a forma como a conseguiu, poderia ter resolvido correctamente o problema proposto.

As representações utilizadas por André na resolução deste problema inserem-se em duas categorias: representações icónicas e representações simbólicas.

Na categoria das representações icónicas incluem-se os símbolos não convencionais criados pelo aluno, como são os círculos e as linhas que os unem, os quais representam respectivamente, as crianças e os cumprimentos estabelecidos entre estas. Também o diagrama construído para representar a estrutura do problema pertence a esta categoria. Este diagrama pode classificar-se como diagrama em rede, uma vez que o aluno, através de linhas, representou as relações existentes entre os diferentes elementos. Embora não tenha apresentado a resposta correcta, o diagrama construído por este aluno transmite uma enorme beleza matemática, além de um excelente raciocínio, sobretudo se pensarmos que foi feito por uma criança de seis anos.

Na categoria das representações simbólicas enquadram-se os nomes das crianças (subcategoria: *letras/palavra escrita*) e ainda a solução ao problema representado sob a forma do número cinco (subcategoria: *algarismos e números*).

No que concerne às estratégias utilizadas pelo aluno para resolver o problema D, estas enquadram-se na categoria *Fazer um desenho, diagrama ou esquema*, uma vez que André recorreu a um diagrama para interpretar e representar o processo de resolução do problema proposto.

Problema E – *O voo das bruxas*

20 bruxas têm de viajar em 8 vassouras para um encontro em Lisboa.
Porém, nenhuma vassoura pode levar mais do que 4 bruxas nem menos do que 2.
Como voarão as bruxas?

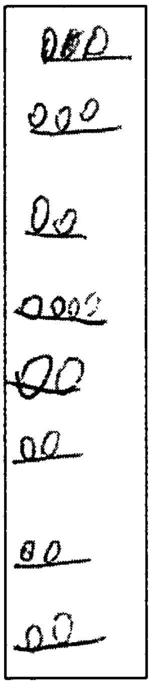


Figura 47 – Resolução do problema E (André)

Como se pode verificar pelas representações construídas pelo aluno, tanto as vassouras como as bruxas foram representadas por símbolos não convencionais, respectivamente por traços horizontais e por círculos.

A forma como o aluno representou a estrutura do problema, distribuindo as vinte bruxas pelas oito vassouras, tendo em conta as condições impostas pelo problema em questão, traduziu-se num diagrama.

Foi solicitado ao aluno que explicasse como tinha construído as representações apresentadas. No entanto, nem sempre é fácil para este aluno explicar aos outros os raciocínios que faz:

André: Eu fiz as oito vassouras e depois fui vendo quais é que cabiam até descobrir se faltava ou uma ou se estava demais ou isso ....

Professora: Como é que foste pondo as bolinhas [as bruxas nas vassouras]?

André: Fui fazendo assim: fui vendo se estava a fazer bem, um, dois, três [conta os círculos e aponta para a primeira vassoura], um, dois, três [segunda vassoura] (...) ia fazendo de maneiras diferentes que era para ver se conseguia que ficassem todas preenchidas.

Pelas representações apresentadas e pelas explicações do aluno, parece que André, em primeiro lugar, procurou preencher as vassouras com duas, três e quatro bruxas, como referido nas condições do problema; simultaneamente ia calculando mentalmente as bruxas que ia colocando nas vassouras, com o cuidado de não ultrapassar as vinte.

As representações utilizadas por André na resolução deste problema inserem-se na categoria das representações icónicas. Nesta categoria enquadram-se os símbolos não convencionais (traços horizontais e círculos) construídos pelo aluno e o diagrama cujos elementos constituintes são respectivamente esses símbolos não convencionais. O diagrama construído é um diagrama parte-todo, uma vez que representa a relação existente entre a parte (uma vassoura com duas, três ou quatro bruxas) e o todo (vinte bruxas em oito vassouras).

No que diz respeito às estratégias utilizadas pelo aluno para resolver o problema E, estas enquadram-se na categoria *Fazer um desenho, diagrama ou esquema*, uma vez que André recorreu a um diagrama para interpretar e representar o processo de resolução do problema proposto e na categoria *Fazer tentativas*.

Problema F – *As meias das joaninhas*

O João é um coleccionador muito estranho. Ele tem uma caixa com 5 joaninhas. Cada joaninha tem 6 patas. Se o João tivesse de comprar meias no Inverno para as suas joaninhas, quantas meias compraria?

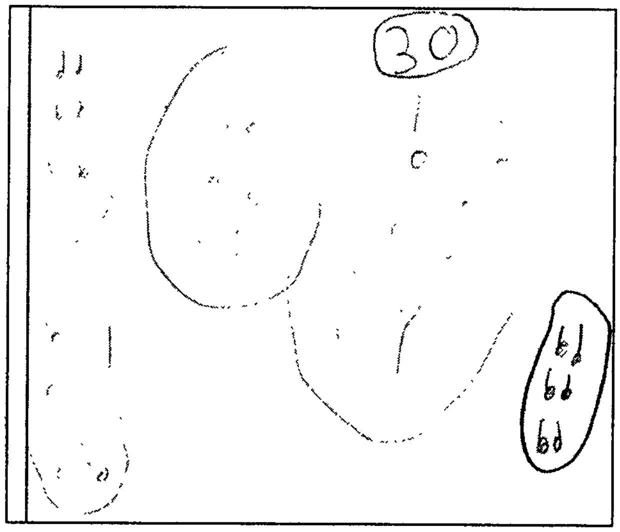


Figura 48 – Resolução do problema F (André)

O aluno, para resolver o desafio proposto, desenhou cinco conjuntos, delimitado cada um por uma linha fechada e cada um com seis elementos. Os elementos de cada conjunto representam as patas das joaninhas e, como tal, são considerados como símbolos não convencionais no âmbito da presente investigação. A forma como organizou e representou os elementos do problema estabelecendo relações entre eles, traduziu-se num diagrama.

Quando lhe perguntei sobre o significado daqueles cinco conjuntos delimitados por linhas fechadas, respondeu-me: "*Era para depois não nos enganarmos e pensarmos que ou eram sete ou eram oito* [joaninhas]". Ou seja, o aluno parece ter formado cinco conjuntos, correspondendo cada um a uma joaninha, para que não houvesse dúvidas acerca do total de joaninhas intervenientes no problema. A forma como André construiu o diagrama não só o ajudou a comunicar aos outros como raciocinou como, e principalmente, foi uma ferramenta essencial para que o aluno conseguisse resolver correctamente o problema proposto.

Finalizou o problema escrevendo, dentro de um círculo, o total de meias que seria necessário comprar para todas as joaninhas, representando-o pelo número trinta. Segundo o aluno, só depois de desenhar os símbolos representativos das patinhas associou a quantidade de meias que iria necessitar: "*Fiz as patinhas e depois fui* *contando as meias que eu ia fazendo (...) e quando acabei de as contar vi que eram trinta e pus aqui o número trinta."*

As representações utilizadas por André na resolução deste problema inserem-se em duas categorias: representações icónicas e representações simbólicas.

Na categoria das representações icónicas incluem-se os símbolos não convencionais criados pelo aluno, como são os símbolos representativos das patinhas das joaninhas. Enquadra-se ainda nesta categoria o diagrama construído pelo aluno que pode classificar-se como um diagrama parte-todo uma vez que representa a relação existente entre a parte (seis meias para uma joaninha) e o todo (meias para cinco joaninhas).

Na categoria das representações simbólicas enquadra-se a solução encontrada para o problema em questão representada sob a forma do número trinta (subcategoria: *algarismos e números*).

No que concerne às estratégias utilizadas pelo aluno para resolver o problema F, estas enquadram-se na categoria *Fazer um desenho, diagrama ou esquema*, uma vez que André recorreu a um diagrama para interpretar e representar o processo de resolução do problema proposto.

Problema G – ***Fazendo colecções***

O Mário e o Artur coleccionam calendários. O Mário tem mais 3 calendários do que o Artur e no conjunto, os dois irmãos têm 21 calendários. Quantos calendários tem o Mário?

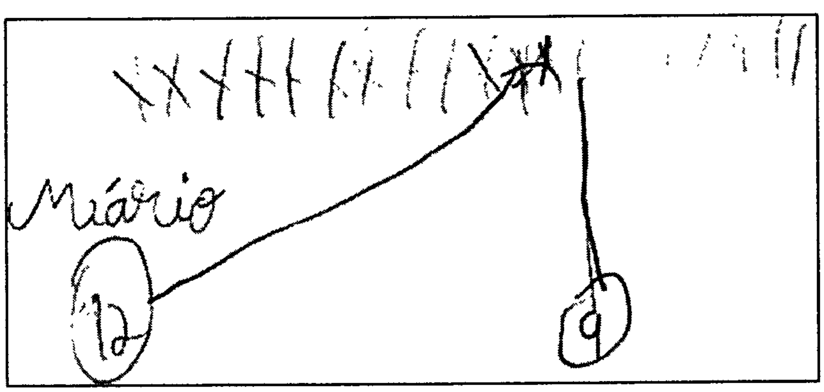


Figura 49 – Resolução do problema G (André)

Para representar os calendários dos dois amigos, André começou por desenhar vinte e um traços verticais. O que se pode observar na resolução do aluno são os primeiros doze traços, a contar do lado esquerdo, riscados com um traço oblíquo. Desses doze traços sai uma linha em cujo extremo oposto o aluno escreveu o número doze inscrito num círculo. Por cima desse círculo escreveu a palavra *Mário* indicando assim que esse amigo teria doze calendários. Aos restantes traços verticais, não riscados, o aluno fez corresponder o número nove.

Mas as representações que se podem observar na figura 49 serviram de apoio a que raciocínio matemático?

> *André*: Fiz vinte e um... calendários que eram os riscos. Depois fiz... contei-os [aponta para o conjunto dos traços riscados] a ver se eram... a ver se tinham mais três do que estes [aponta para o conjunto dos nove traços não riscados] que era o Artur. E então quando eu vi que era assim pus nesta bolinha o doze e aqui [aponta para os nove traços] contei-os e como eram nove pus aqui [no círculo] o nove.

Pela explicação, o aluno foi contando os calendários à medida que comparava os dois conjuntos, até determinar a forma de um deles ter mais três elementos do que o outro. Uma vez que este aluno revelou no decorrer das aulas, alguma facilidade ao nível do cálculo mental e das contagens, determinar a solução correcta deste problema não deverá ter levantado grandes dificuldades a André.

As representações utilizadas por André na resolução deste problema inserem-se em duas categorias: representações icónicas e representações simbólicas.

Na categoria das representações icónicas incluem-se os vinte e um traços verticais criados pelo aluno para representar os calendários dos dois amigos e que se englobam na subcategoria: *símbolos não convencionais*.

Na categoria das representações simbólicas enquadra-se o número de calendários que o aluno associou a cada amigo após a resolução do problema (subcategoria: *algarismos e números*) e ainda a palavra *Mário* (subcategoria: *letras/palavra escrita*) a qual indicou com clareza a resposta ao problema em questão.

Relativamente às estratégias utilizadas pelo aluno para resolver o problema G, estas enquadram-se na categoria *Fazer tentativas*, uma vez que André parece ter resolvido este problema depois de algumas tentativas. Pela explicação do aluno, não é possível concluir se o mesmo formulou ou não algum tipo de conjectura aquando da sua interpretação mental no decorrer da resolução do problema.

Problema H – ***A compra de selos***

Uma máquina de selos automática aceita moedas de 1ct, 2ct, 5ct, 10ct e 20 ct. Para comprar um selo que custe 49 ct, que moedas poderei usar?

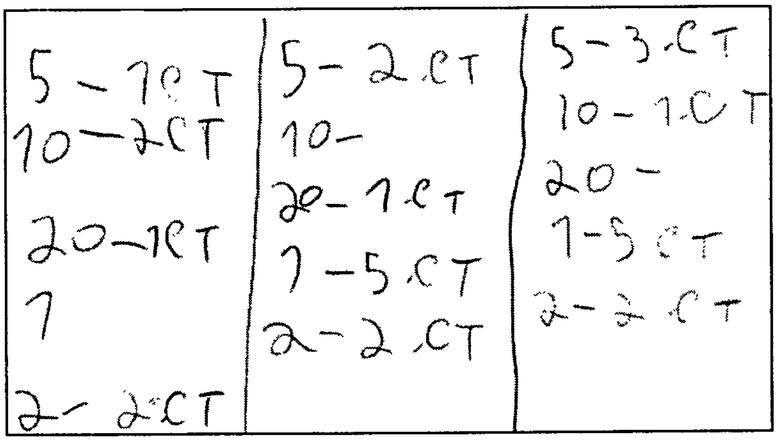


Figura 50 – Resolução do problema H (André)

O que o aluno nos apresenta é uma listagem de três possibilidades para usar determinadas moedas na compra de um selo que custa 49 ct, separadas por duas grandes linhas divisórias. Ao analisar com atenção as representações da figura 50 pode verificar-se que em todas as colunas, correspondentes a cada uma das possibilidades de combinar as moedas referidas para totalizar 49ct, o aluno escreveu verticalmente o valor das moedas que poderia utilizar (5, 10, 20, 1 e 2).

Inicialmente interpretei erradamente as representações do André, supus que este tinha escrito em primeiro o número de moedas a utilizar e à frente, separado por um traço horizontal, a moeda a que se estava a referir, representando esta última pelo seu valor monetário. O que me levou a esta incorrecta interpretação foi o facto de no final de cada linha o aluno ter escrito *ct*.

No entanto, após ouvir as palavras de André analisei com outra perspectiva as representações construídas e cheguei a outra conclusão.

> *André*: Então fiz o 5, o 10, o 20, o 1 e o 2 [aponta para estes valores na primeira coluna] … e fui juntando a ver se davam 49 [cêntimos] e os que dessem eu fazia o número [o número de vezes necessárias à frente].
>
> *Professora*: E o que significa este 5 e este 1 aqui? [aponto para a primeira linha da primeira coluna].
>
> *André*: Era o quanto eu podia fazer de 5 [cêntimos].

Esta última afirmação de André foi decisiva para que eu interpretasse correctamente as representações apresentadas pelo aluno. Deste modo, na primeira coluna, o aluno sugeriu que as moedas a usar fossem: uma de 5ct, duas de 10ct, uma de

20ct e 2 de 2ct, o que perfaz a quantia exacta de 49ct. Na segunda coluna, e como já foi referido, repetiu o valor das moedas mas alterou as quantidades, criando assim outra possibilidade: duas moedas de 5ct, uma moeda de 20ct, cinco moedas de 1 ct e duas moedas de 2ct, o que totaliza 39ct. Na última coluna, apresentou a seguinte hipótese: três moedas de 5ct, uma moeda de 10ct, cinco moedas de 1ct e duas moedas de 2ct, o que soma 34ct.

Como se pode verificar pelas três possibilidades apresentadas, apenas a primeira é correcta. Os erros cometidos pelo aluno dever-se-ão, provavelmente, a um incorrecto trabalho de cálculo mental e, no caso deste aluno, a algum excesso de confiança que o levou a não verificar os resultados obtidos.

As representações construídas por André na resolução deste problema pertencem à categoria das representações simbólicas.

Os números utilizados pelo aluno para representar, quer o valor das moedas quer a quantidade respectiva, enquadram-se na subcategoria *algarismos e números*; André utilizou ainda as letras *ct* para representar a palavra cêntimo, representação que se engloba na subcategoria *letras/palavra escrita.*

As estratégias reveladas pelo aluno no que concerne à resolução deste problema pertencem às categorias *Fazer tentativas, conjecturas* e *Fazer uma listagem de algumas/todas as possibilidades,* uma vez que para elaborar a listagem apresentada, o aluno realizou conjecturas, fez cálculos e efectuou algumas tentativas.

Problema I – ***Compra de jogos***

A escola do Monte recebeu um subsídio de 40 € para comprar jogos didácticos. Os jogos disponíveis na papelaria local eram:

jogo A – 15 €   jogo B – 20 €   jogo C – 10 €   jogo D – 5 €.

Que jogos se podem comprar com 40 euros? Que quantia sobra?

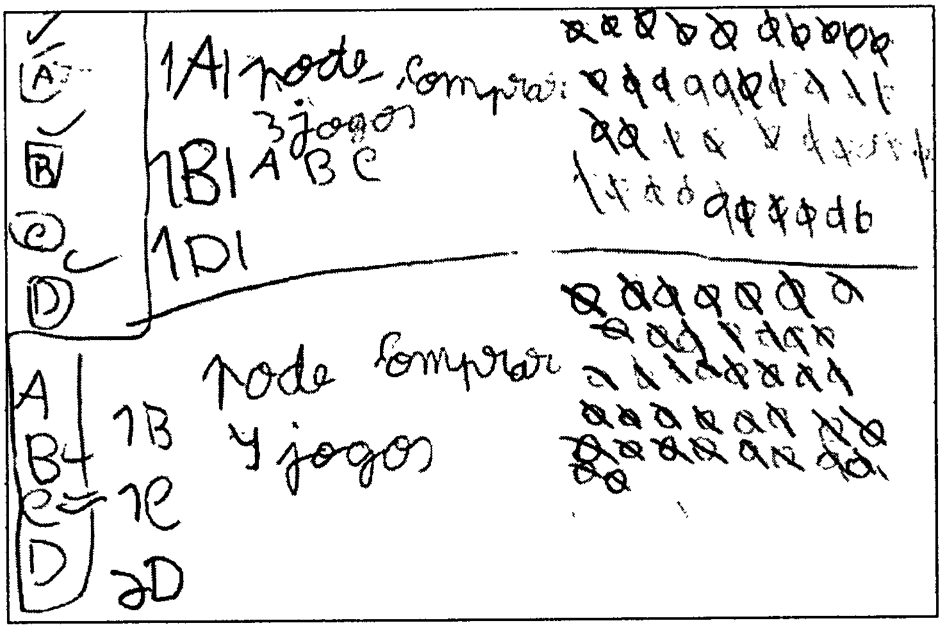


Figura 51 – Resolução do problema I (André)

A partir das representações construídas (figura 51), André apresentou duas formas de utilizar o subsídio recebido pela escola do Monte na aquisição de alguns jogos didácticos.

Na primeira forma de usar o subsídio, podemos observar que no lado esquerdo da folha de registo começou por ordenar os quatro jogos, identificando-os pelas respectivas letras tal como estavam referidos no enunciado do problema. Segundo o aluno, começou por escrever as letras dos jogos para não se esquecer (provavelmente para não se esquecer de nenhum jogo quando estivesse a verificar quais podia comprar). No lado direito da folha desenhou quatro filas de dez círculos que representavam o dinheiro que a escola tinha recebido (40 euros).

André utilizou estes quarenta círculos para efectuar as contagens e para concretizar o seu raciocínio. Ele manipulou aqueles símbolos para determinar quais os jogos que poderia comprar como se de verdadeiras moedas se tratassem.

Para chegar à primeira conclusão o aluno começou por ver o preço do jogo A: 15 € e riscou quinze dos círculos desenhados. Como o jogo B custava 20 € riscou mais vinte círculos. Verificou então que já não podia comprar o jogo C (porque só tinha 5 moedas) mas que ainda chegava para adquirir o jogo D (5€). Respondeu primeiro 1 A, 1 B e 1 D, correspondendo aos três jogos que a escola podia comprar, no entanto, na resposta mais completa respondeu incorrectamente A, B e C. Este lapso terá sido provavelmente falta de atenção, pois se observarmos na figura 34, o aluno colocou uns "certos" precisamente nos jogos A, B e D.

Na segunda forma de usar o subsídio, dispôs de forma semelhante os mesmos elementos, embora as moedas já não estejam representadas em filas de dez. Desta vez o aluno começou por um outro jogo, o B, riscando desta forma vinte moedas. Em seguida optou pelo jogo C e riscou mais dez moedas. Por fim, verificou que as moedas que sobravam chegavam para comprar dois jogos D.

Como se pode constatar, o aluno apenas apresentou duas formas de comprar os jogos com o referido subsídio, esgotando, em ambas as possibilidades, todo o dinheiro. Não terá apresentado mais possibilidades provavelmente porque não teria mais espaço para o fazer ou porque considerou não ser necessário. No entanto, as representações construídas revelam que o aluno interpretou correctamente o problema, tendo as mesmas servido de apoio ao seu raciocínio e à comunicação das conclusões a que chegou.

As representações construídas por André na resolução deste problema pertencem à categoria das representações icónicas e à categoria das representações simbólicas.

Na categoria das representações icónicas enquadram-se os círculos desenhados pelo aluno para representar os 40 euros. Os quarenta círculos desenhados em cada possibilidade podem ser considerados como símbolos não convencionais, subcategoria dos elementos icónicos.

Os números, as letras e as palavras utilizadas no decorrer da resolução do problema constituem subcategorias das representações simbólicas, pertencendo, respectivamente, à subcategoria *algarismos e números* e à subcategoria *letras/palavra escrita* deste tipo de representações.

As estratégias reveladas pelo aluno relativamente à resolução deste problema pertencem às categorias *Fazer tentativas, conjecturas* e *Fazer uma listagem de algumas/todas as possibilidades*, uma vez que para elaborar as possibilidades apresentadas, o aluno efectuou algumas tentativas, bem como cálculo mental.

Problema J – ***Um problema de lógica***

Cinco meninas – Ana, Rita, Paula, Dora e Eva – dividiram entre si os últimos gelados: três de morango e dois de chocolate.

Ana e Eva comeram gelados do mesmo sabor.
Eva e Paula comeram gelados com sabores diferentes.
Paula e Rita também comeram gelados com sabores diferentes.

Que gelado comeu cada menina?

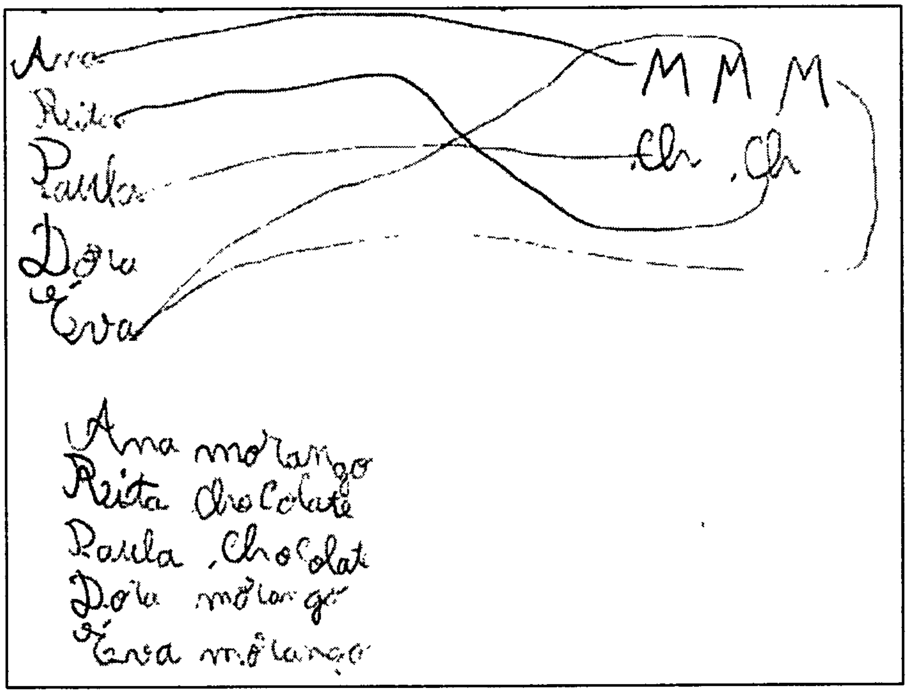


Figura 52 – Resolução do problema J (André)

As três frases incluídas na chaveta (ver enunciado do problema) foram intituladas de "regras", as quais os alunos teriam de seguir e de respeitar para resolverem correctamente o problema.

O aluno começou por escrever, verticalmente, o nome das cinco amigas. No lado direito da folha de registo, escreveu letras representativas dos sabores dos cinco gelados existentes, sendo que *M* representa os gelados de morango e *Ch* os gelados de chocolate. André escreveu três *M* e, por baixo, repetiu duas vezes *Ch*, traduzindo deste modo o número de gelados de cada um dos sabores. Seguidamente, com uma linha, uniu *Ana* ao sabor *M*, *Rita* ao sabor *Ch*, *Paula* ao sabor *Ch*, a *Dora* não está unida a nenhum sabor e *Eva* está unida a dois gelados de morango (*M*).

Por baixo da representação descrita (diagrama), o aluno procurou como que sistematizar as conclusões a que tinha chegado, escrevendo novamente o nome das cinco amigas e, à frente de cada uma delas, o gelado comido. No entanto, nesta segunda representação, o aluno associa Dora ao gelado de morango e Eva também a um gelado de morango, embora na representação anterior Dora não ter qualquer gelado associado e Eva estar unida a dois gelados de morango. Por que razão o aluno alterou a sua resposta? Talvez tenha verificado o que tinha feito na representação anterior, relativamente a Eva e a Dora e tenha tentado encontrar uma solução viável.

Analisando agora a correcção da resposta apresentada pelo aluno através da segunda representação, verifica-se que a mesma está incorrecta uma vez que, segundo o problema, *Paula e Rita também comeram gelados com sabores diferentes,* e André afirma que tanto Paula como Rita comeram gelados de chocolate.

As representações utilizadas por André na resolução deste problema inserem-se em duas categorias: representações icónicas e representações simbólicas.

Na categoria das representações icónicas inclui-se o diagrama construído pelo aluno, representativo da estrutura do problema, que pode ser classificado como um diagrama em rede, subcategoria deste tipo de representações. André estabeleceu as ligações entre os diversos elementos do diagrama através de linhas.

Na categoria das representações simbólicas estão os nomes das cinco raparigas intervenientes, as letras que representam os gelados de morango e os de chocolate bem como as palavras que representam os dois sabores existentes (subcategoria: *letras/palavra escrita*).

Relativamente às estratégias utilizadas pelo aluno para resolver o problema J, uma vez que André recorreu a um diagrama para representar o processo de resolução do problema e determinar a solução do mesmo, estas enquadram-se na categoria *Fazer um desenho, diagrama ou esquema.* O aluno revelou ainda alguma dedução lógica, embora não tenha resolvido correctamente o problema. Desta forma, as estratégias podem ainda ser integradas na categoria *Usar dedução lógica.*

Caracterização das representações utilizadas nos problemas propostos

Quadro 3 – Quadro resumo com as representações utilizadas (André)

	Aluno: André		Problemas propostos									
			A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Tipo de representações	**Representações activas**	Manipulação de objectos										
	Representações icónicas	Representações pictóricas (desenhos)		X								
		Diagramas	X		X	X	X	X				X
		Símbolos não convencionais	X			X	X	X	X		X	
	Representações simbólicas	Algarismos e números.	X		X	X		X	X	X	X	
		Sinais de operações e sinal de igual/expressões matemáticas.										
		Letras/palavra escrita			X	X			X	X	X	X

Da análise do quadro 3 verifica-se que o aluno não necessitou de recorrer a materiais manipuláveis (representações activas) para resolver qualquer um dos problemas propostos. Desta forma o aluno pareceu não ter sentido necessidade em concretizar o raciocínio matemático envolvido na resolução dos problemas propostos com objectos reais.

Da leitura horizontal do quadro acima conclui-se ainda que o diagrama (representação icónica) esteve presente na representação da estrutura de muitos dos problemas propostos, servindo ainda como suporte ao raciocínio matemático desenvolvido e como base para determinar a solução ou uma das soluções correctas.

Verifica-se igualmente que os símbolos criados pelo próprio aluno para representar diferentes elementos do real, os símbolos não convencionais, estão também presentes na maioria das representações utilizadas, enquanto que o desenho apenas surge numa das representações. André manipulou esses símbolos pessoais como se se tratassem de verdadeiros elementos com os quais raciocinou e determinou uma forma de solucionar o problema proposto.

Quanto às representações simbólicas, os algarismos e números, bem como as letras e a palavra escrita, estiveram bem patentes na maioria das representações construídas. Os algarismos e números (utilizados em quase todos os problemas) foram utilizados sobretudo para representar a solução do problema e também para representar passos intermédios no decorrer do processo de resolução. A palavra escrita surge em seis das representações apresentadas, nalgumas delas sob a forma de inicial maiúscula representativa de uma determinada palavra ou elemento.

Como se pode verificar, as expressões matemáticas não fizeram parte das representações elaboradas.

A partir de uma leitura vertical do quadro 3 verifica-se que o aluno, em sete dos problemas propostos, recorreu tanto a representações icónicas como a representações simbólicas no âmbito das respectivas resoluções. Em duas das resoluções apresentadas apenas estão presentes representações icónicas enquanto que num outro problema apenas recorreu a representações simbólicas.

O aluno utilizou sobretudo representações do tipo simbólico para resolver os problemas propostos. Embora um dos elementos icónicos, o diagrama esteja presente em quase todas as resoluções, o seu papel é o de descompactar a estrutura do problema, servindo de precioso apoio aos raciocínios matemáticos que conduzem à solução correcta. No entanto, pelo que se pode observar no trabalho deste aluno, os elementos constituintes desses diagramas são sobretudo de cariz simbólico, o que pode revelar que talvez ele tenha chegado a um nível de desenvolvimento em que já consegue "trabalhar" com objectos mais abstractos e menos concretos.

Caracterização das estratégias utilizadas nos problemas propostos

Quadro 4 – Quadro resumo com as estratégias utilizadas (André)

	Aluno: André	Problemas propostos									
		A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**
Estratégias reveladas	Descobrir um padrão, regra ou lei de formação.										
	Fazer tentativas, conjecturas.					X	X	X	X	X	
	Trabalhar do fim para o princípio.										
	Usar dedução lógica; fazer eliminação.										X
	Reduzir a um problema mais simples; decomposição; simplificação.										
	Fazer uma simulação, experimentação ou dramatização.										
	Fazer um desenho, diagrama ou esquema.	X	X	X	X	X					X
	Fazer uma listagem de algumas/todas as possibilidades.		X						X	X	

Pode verificar-se que, e tendo por base uma leitura horizontal do quadro acima, as estratégias mais utilizadas por este aluno na resolução dos dez problemas propostos foram *Fazer um desenho, diagrama ou esquema* e *Fazer tentativas, conjecturas*. A primeira categoria de estratégias referida surge em seis dos problemas resolvidos enquanto que a segunda categoria aparece em cinco dos problemas, num dos quais em simultâneo com a primeira categoria referida. As outras estratégias utilizadas pelo aluno foram *Fazer uma listagem de algumas/todas as possibilidades* e *Usar dedução lógica; fazer eliminação.*

Fazendo agora uma leitura vertical do mesmo quadro constata-se que em cinco dos problemas propostos o aluno recorreu, simultaneamente, a mais do que uma estratégia para determinar a solução ao problema enquanto que noutros cinco problemas apenas parece ter recorrido a um tipo de estratégia.

Mariana

Apresentação da aluna

A Mariana é uma menina muito doce e meiga de seis anos. Revelou-se uma criança tímida mas muito perspicaz ao que a rodeia.

A sua entrada no 1.º ano de escolaridade decorreu dentro da normalidade, revelando-se desde início muito autónoma e criando boas relações com todos os elementos da comunidade educativa.

Na área da Matemática foi uma aluna que revelou, desde o início, um raciocínio rápido na concepção de estratégias para a resolução de situações de natureza diferente e um bom cálculo mental. Nunca revelou grandes dificuldades na compreensão e aplicação dos diferentes conteúdos trabalhados.

A Mariana sempre revelou empenho e entusiasmo em resolver os problemas propostos, demonstrando bastante persistência.

Resolução dos problemas propostos

Problema A – ***Os periquitos***

O Pedro tem 10 periquitos. Todos os dias o Pedro dá a cada 2 periquitos 3 folhas de alface. Quantas folhas de alface tem o Pedro de dar, por dia, aos seus 10 periquitos?

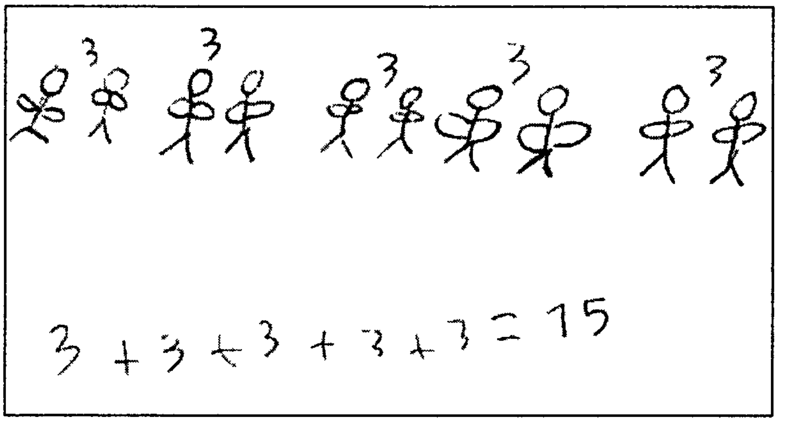


Figura 53 – Resolução do problema A (Mariana)

Inicialmente, a aluna recorreu ao desenho, muito esquemático e desprovido de pormenores, para representar os dez periquitos (horizontalmente), escrevendo o número três por cima de cada dois periquitos. O número três representa a quantidade de folhas de alface que cada um dos grupos (de dois periquitos) recebeu por dia. A forma como a aluna representou a estrutura do problema, mostrando a relação existente entre cada dois periquitos e a quantidade de folhas que cada grupo comeu, constitui um diagrama.

Esta primeira representação revela que a aluna recorreu ao diagrama para interpretar o problema em questão e para apoiar o seu raciocínio matemático, tendo já incluído neste alguma linguagem matemática (o número três). Em seguida, apresentou uma outra representação (totalmente simbólica) onde formalizou a interpretação e o raciocínio efectuados, expressando a resolução através de símbolos matemáticos formais. Nesta segunda representação, a aluna apresentou uma expressão matemática na qual adicionou cinco vezes o número três, totalizando quinze folhas de alface. Mariana explicou como construiu as representações:

> *Mariana*: Pus os dez periquitos e depois pus os três por cima deles e fui distribuindo três por cada um...
> *Professora:* Por cada um?
> *Mariana:* [hesita alguns segundos] Por cada dois... e depois fiz a conta, três mais três mais três mais três mais três, dava quinze.

As representações utilizadas por Mariana na resolução deste problema pertencem a duas categorias: representações icónicas e representações simbólicas.

A categoria das representações icónicas engloba o desenho dos dez periquitos apresentados na primeira representação, bem como o diagrama construído. Este diagrama, com o qual descompactou correctamente a estrutura do problema, pode ser classificado como diagrama parte-todo, uma vez que representa a relação que existe entre a parte (três folhas para dois periquitos) e o todo (folhas para dez periquitos).

Na categoria das representações simbólicas está o número três, com o qual a aluna representou a quantidade de folhas de alface comida por cada dois periquitos (subcategoria: *algarismos e números*) e ainda a expressão matemática (subcategoria: *sinais de operações e sinal de igual/expressões matemáticas*) através da qual a aluna traduziu numa operação de adição a relação representada anteriormente.

No que diz respeito à estratégia utilizada pela aluna para resolver o problema A, uma vez que Mariana recorreu a um diagrama para representar o processo de interpretação do problema, no qual misturou elementos icónicos e simbólicos, a estratégia desenvolvida enquadra-se na categoria *Fazer um desenho, diagrama ou esquema.*

Problema B – ***As bolas de gelado***

Na gelataria há bolas de gelado de 4 sabores diferentes:

- Morango (M)
- Chocolate (C)
- Baunilha (B)
- Amêndoa (A)

A Rita vai comprar um gelado com dois sabores. Quantos gelados com dois sabores diferentes se conseguem fazer?

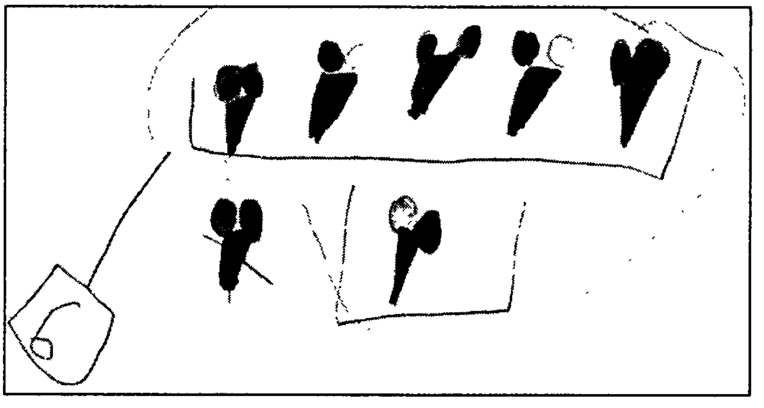


Figura 54 – Resolução do problema B (Mariana)

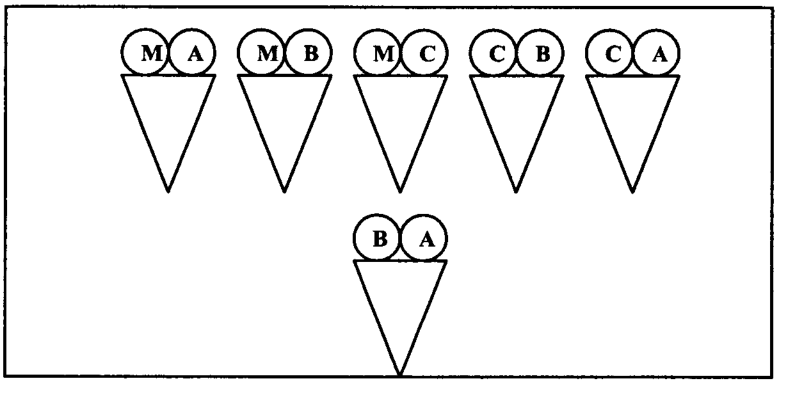


Figura 55 – Reprodução dos gelados da figura 54 substituindo as cores por letras

Mariana associou a cada sabor de gelado uma cor: morango – vermelho; chocolate – castanho; baunilha – amarelo e amêndoa – cor-de-laranja.

A aluna começou por desenhar, um a um, os cones de gelado com duas bolas, representativas dos dois sabores possíveis que a Rita poderia comprar. As bolas de gelado foram pintadas com as cores que a aluna associou aos sabores e correspondem às seis combinações possíveis de dois sabores diferentes que se poderia obter. Desenhou ainda um sétimo cone de gelado que posteriormente riscou com uma cruz, e que se encontra fora do conjunto. À volta dos seis cones de gelado considerados como a resposta correcta a aluna delineou uma linha fechada a que fez corresponder a quantidade seis (representação simbólica) a qual correspondia à resposta ao problema em questão.

A ordem pela qual a aluna combinou os diferentes sabores dos gelados e esgotou todas as possibilidades apresentou alguma organização na forma como foi eliminando as diferentes hipóteses. Mariana começou com o sabor M (o primeiro sabor da ordem apresentada) e combinou-o primeiro com o sabor A, em seguida com o sabor B e por fim com o sabor C. Passou em seguida ao segundo sabor da referida ordem (sabor C) e combinou-o com os sabores imediatamente a seguir, sabor B e sabor A. Por fim, e como já não restava outra hipótese de fazer gelados com dois sabores diferentes, combinou os sabores B e A.

As representações utilizadas por Mariana na resolução deste problema pertencem a duas categorias: representações icónicas e representações simbólicas.

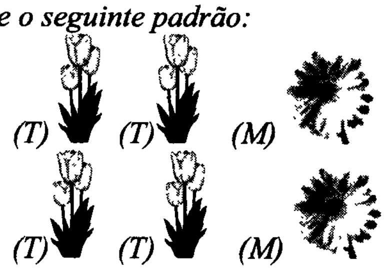
Como se pode facilmente verificar, foi através do desenho (subcategoria das representações icónicas) que a aluna interpretou o problema e representou a resolução completa do mesmo.

Através de um elemento simbólico, o número seis, a aluna indicou a solução ao problema dado (subcategoria: *algarismos e números*).

No que concerne às estratégias utilizadas pela aluna para resolver o problema B, estas podem ser enquadradas em duas categorias: *Fazer um desenho, diagrama ou esquema*, uma vez que Mariana recorreu ao desenho para interpretar e representar a resolução do problema proposto e na categoria *Fazer uma listagem de algumas/todas as possibilidades*, uma vez que a aluna representou todas as combinações possíveis.

Problema C – ***As flores do canteiro***

Os meninos da escola do Daniel estão a plantar flores num canteiro, respeitando sempre o seguinte padrão:



Os meninos plantaram 9 margaridas (M). Quantas tulipas plantaram?

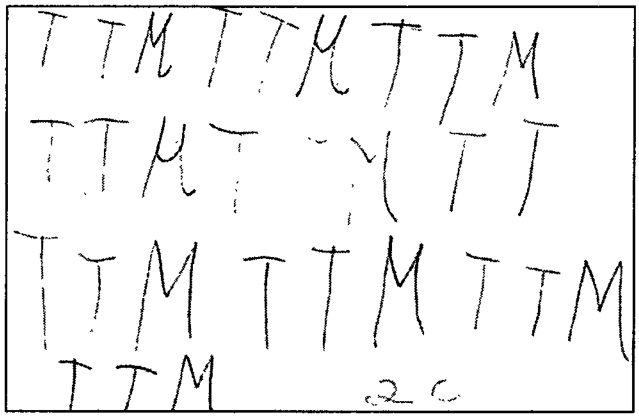


Figura 56 – Resolução do problema C (Mariana)

Mariana representou o nome das flores pela inicial respectiva e repetiu o motivo *TTM* horizontalmente. A forma como a aluna representou a estrutura do problema, estabelecendo uma relação entre os elementos do mesmo, constitui um diagrama.

No entanto, observando atentamente a representação apresentada na figura 56, pode verificar-se que o motivo *TTM* não foi repetido correctamente ao longo de toda a representação. Na segunda linha, ao último elemento do motivo falta a letra *M*, correspondente a uma das nove margaridas. Deste modo, ao acrescentar um último motivo completo (*TTM*), e perfazer as nove margaridas plantadas, indicou incorrectamente que os alunos teriam plantado vinte tulipas. Por fim, a aluna representou o total de tulipas plantadas pelo número vinte.

Mariana, para a resolução do problema C, recorreu a representações que se inserem em duas categorias: representações icónicas e representações simbólicas.

Na categoria das representações icónicas inclui-se o diagrama que a aluna construiu, o qual pode classificar-se como diagrama parte-todo uma vez que representa a relação que existe entre a parte (uma margarida e duas tulipas) e o todo (nove margaridas e dezoito tulipas).

Na categoria das representações simbólicas englobam-se as iniciais das flores (subcategoria: *letras/palavra escrita*) que a aluna utilizou no motivo *TTM* para representar os dois tipos de flores presentes no enunciado do problema e ainda a solução, incorrecta, ao problema colocado, representado sob a forma do número vinte (subcategoria: *algarismos e números*).

Na resolução do problema C, a aluna utilizou estratégias que se enquadram na categoria *Fazer um desenho, diagrama ou esquema*, uma vez que Mariana recorreu a um diagrama para interpretar e representar o processo de resolução do problema proposto.

Problema D – ***Os apertos de mão***

A Rita, o Nuno, o Paulo e a Lili são amigos. Quando chegaram à escola cumprimentaram-se e cada um deu um aperto de mão aos outros.
Quantos apertos de mão deram ao todo?

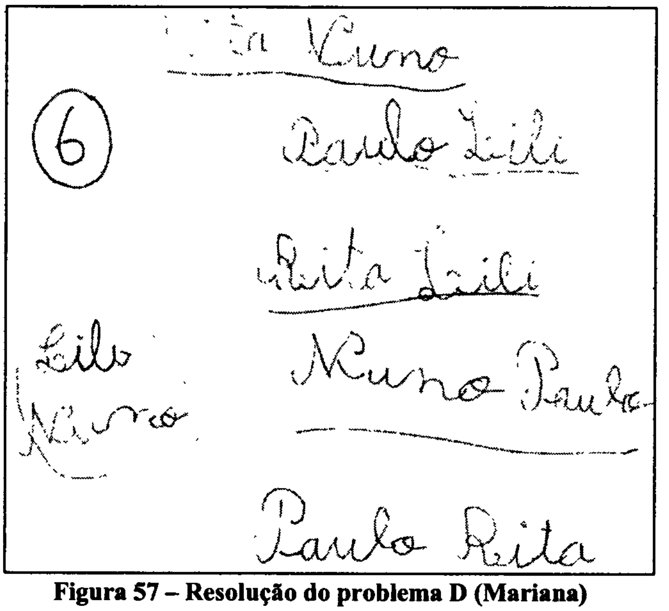


Figura 57 – Resolução do problema D (Mariana)

A aluna apresentou a resposta ao problema pedido escrevendo, a pares, os nomes dos amigos que se cumprimentavam, esgotando todas as possibilidades. Começou por combinar os dois primeiros amigos referidos no enunciado do problema e em seguida os dois últimos. Em seguida juntou o primeiro com o último amigo, seguido dos dois amigos que se encontram no meio da ordem apresentada. Por fim, a aluna combinou o primeiro com o terceiro amigo e esgotou as seis combinações possíveis, formando o par *Lili*, *Nuno* que correspondem, respectivamente, ao quarto e ao segundo amigo referidos no problema. Por fim, apresentou a solução ao problema através do número seis, colocado dentro de um círculo.

Quando lhe solicitei que me explicasse como tinha construído aquelas representações, as suas palavras foram as seguintes:

> *Mariana*: Como os amigos iam dar a mão a cada um tinha de pôr todos distribuídos por cada um e pus a Rita com o Nuno... [segue então a ordem dos pares que se pode observar na figura 57]

Como se pode verificar, as representações simbólicas dominaram a resolução deste problema de combinatória.

Na categoria deste tipo de representações enquadram-se os nomes dos quatro amigos (subcategoria: *letras/palavra escrita*) bem como a solução apresentada ao problema proposto através do número seis (subcategoria: *algarismos e números*) que representa o total de apertos de mão que os quatro amigos dariam.

Relativamente às estratégias utilizadas na resolução do problema D, estas enquadram-se na categoria *Fazer uma listagem de algumas/todas as possibilidades*, uma vez que Mariana apresentou todas as combinações possíveis.

Problema E – ***O voo das bruxas***
20 bruxas têm de viajar em 8 vassouras para um encontro em Lisboa.
Porém, nenhuma vassoura pode levar mais do que 4 bruxas nem menos do que 2.
Como voarão as bruxas?

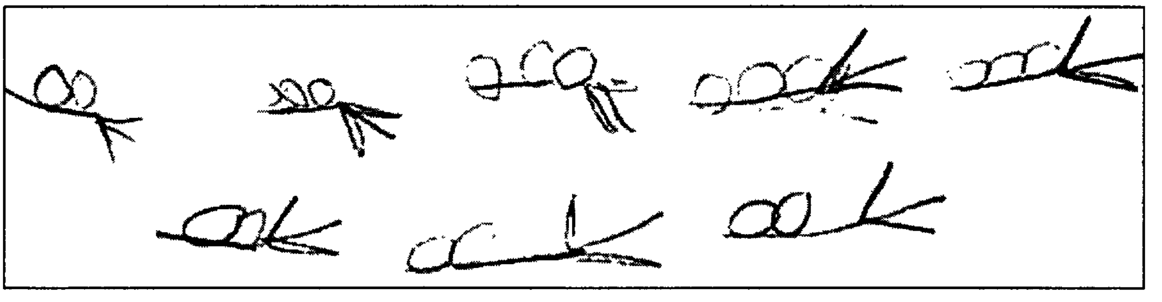


Figura 58 – Resolução do problema E (Mariana)

A aluna representou as vassouras por pequenos traços horizontais em cuja extremidade direita desenhou três segmentos e as bruxas por pequenos círculos.

Como se pode verificar pelas representações construídas pela aluna, e fazendo uma leitura horizontal das mesmas, Mariana distribuiu as bruxas pelas oito vassouras da seguinte forma: duas bruxas na primeira vassoura, três bruxas na segunda, terceira, quarta e quinta vassouras e duas bruxas nas restantes três vassouras.

A forma como a aluna representou a estrutura do problema, distribuindo as vinte bruxas pelas oito vassouras, tendo em contas as condições impostas pelo problema em questão, traduziu-se num diagrama.

Mas a sua representação serviu de apoio a que interpretação e raciocínio?

> *Mariana*: Fui pondo primeiro sempre duas… [duas bruxas] mas depois enganava-me e não conseguia pôr todas. Depois apaguei e fiz outra vez, mas também não conseguia, depois é que consegui.

Pelas palavras de Mariana, a aluna foi resolvendo o problema proposto por tentativas. Primeiro colocou dois círculos em cada uma das oito vassouras mas como não tinha as bruxas todas distribuídas voltou a tentar. Colocou um terceiro círculo em diversas vassouras tendo em seguida apagado alguns deles, ao verificar que já tinha ultrapassado as vinte bruxas. Como se pode observar na figura 58, a aluna não colocou quatro bruxas em nenhuma vassoura, o que parece apoiar a forma, referida acima, de como a aluna colocou as bruxas nas vassouras.

As representações utilizadas por Mariana na resolução deste problema pertencem à categoria das representações icónicas. Nesta categoria inserem-se os símbolos não convencionais criados pela aluna para representar as vassouras (traços horizontais) e as bruxas (círculos) e ainda o diagrama cujos elementos são respectivamente estes símbolos não convencionais. O diagrama construído é um diagrama parte-todo, uma vez que representa a relação existente entre a parte (uma vassoura com duas, três ou quatro bruxas) e o todo (vinte bruxas em oito vassouras).

Através das representações apresentadas a aluna apresentou uma das soluções correctas a este problema.

As estratégias utilizadas por Mariana no âmbito da resolução do presente problema inserem-se na categoria *Fazer um desenho, diagrama ou esquema*, uma vez que Mariana recorreu a um diagrama para interpretar e representar o processo de resolução do problema proposto e na categoria *Fazer tentativas*, uma vez que para determinar uma das soluções correctas a aluna teve necessidade de efectuar algumas tentativas.

Problema F – ***As meias das joaninhas***

O João é um coleccionador muito estranho. Ele tem uma caixa com 5 joaninhas. Cada joaninha tem 6 patas. Se o João tivesse de comprar meias no Inverno para as suas joaninhas, quantas meias compraria?

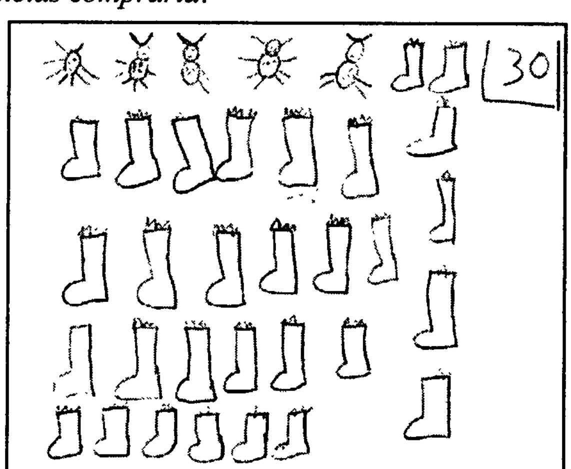


Figura 59 – Resolução do problema F (Mariana)

Para resolver este problema, a aluna começou por desenhar as cinco joaninhas referidas no enunciado do problema, cada uma com seis patas, revelando os seus corpos muitos pormenores.

Em seguida, a aluna representou as meias das joaninhas também através do desenho. Repare-se que as meias têm até um pormenor que as enfeita na parte superior.

A forma como foi desenhando as meias obedeceu a um determinado raciocínio uma vez que, como se pode observar na figura 59, a aluna começou por desenhar uma fila com seis meias, que corresponderiam a uma das joaninhas, verificando-se um raciocínio semelhante nas três filas seguintes. Até este ponto, a aluna desenhou meias para quatro joaninhas; uma vez que Mariana não tinha mais espaço, desenhou as seis meias que faltavam numa disposição vertical, no lado direito da folha de registo. Após ter desenhado todos as meias, a aluna contou-as e colocou a respectiva soma no canto superior direito da folha de registo, através do número trinta.

Esta interpretação foi apoiada pela explicação da aluna:

> *Mariana*: Se as joaninhas tinham seis patas, tínhamos de comprar sempre seis [meias] ... e depois outra vez seis... e seis .... e depois seis .... E depois comprar mais seis e depois ficavam trinta. [a aluna explicou apontando para a folha de registo]

As representações utilizadas pela aluna na resolução deste problema pertencem à categoria das representações icónicas e à categoria das representações simbólicas.

Tanto o desenho das joaninhas como o desenho das meias pertencem a uma subcategoria das representações icónicas, o desenho. A aluna recorreu ao desenho para representar a resolução completa do problema. Este elemento icónico (o desenho) foi a base de apoio à interpretação e ao raciocínio do problema em questão.

A aluna utilizou apenas um elemento simbólico, o número trinta (subcategoria *algarismos e números* das representações simbólicas), através do qual deu a resposta ao problema em questão.

As estratégias utilizadas por Mariana no âmbito da resolução do presente problema inserem-se na categoria *Fazer um desenho, diagrama ou esquema*, uma vez que Mariana recorreu ao desenho para interpretar e representar o processo de resolução do problema proposto.

Problema G – ***Fazendo colecções***

O Mário e o Artur coleccionam calendários. O Mário tem mais 3 calendários do que o Artur e no conjunto, os dois irmãos têm 21 calendários. Quantos calendários tem o Mário?

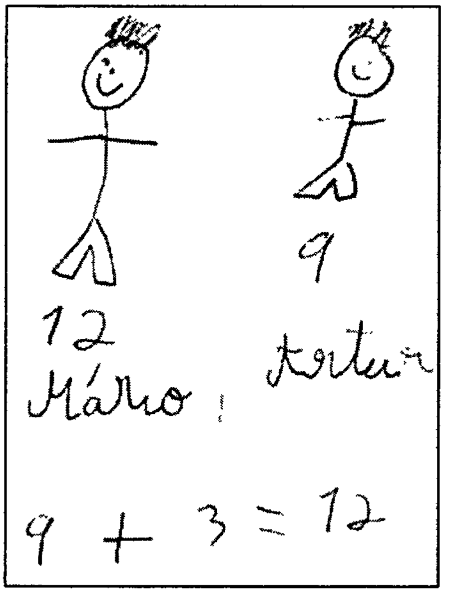


Figura 60 – Resolução do problema G (Mariana) na folha de registo após ter resolvido o problema com recurso a materiais manipuláveis

Para conseguir resolver este problema, a aluna necessitou concretizar o seu raciocínio matemático através de materiais manipuláveis. Para resolver este problema, Mariana utilizou, por sua iniciativa, "cubinhos" (material manipulável), que fazem parte do material multibásico e que foram usados com alguma frequência no decorrer das aulas de Matemática.

Após ter resolvido o problema com o apoio dos cubos, pedi-lhe para representar a solução encontrada na folha destinada para esse efeito (figura 60).

Solicitei então à aluna que me explicasse o raciocínio que tinha estado na base das representações apresentadas na folha de registo. A aluna fê-lo demonstrando com os cubos anteriormente utilizados.

> *Mariana*: Eu tinha vinte e um cubos e depois contei um, dois três... nove [começa a contar e a separar nove cubos para um lado] e depois pus outra vez nove [conta de novo e separa outros nove cubos para o outro lado] (...) e depois sobravam três... (...) e depois pus os três [que sobravam] num lado.
> *Professora*: E quantos [calendários] tem o Mário afinal?
> *Mariana:* 12.

O que Mariana parece ter feito foi determinar uma forma de ter dois conjuntos com o mesmo número de elementos de forma a sobrarem três elementos, os quais juntou posteriormente a um dos conjuntos, conjunto este que corresponderia ao número de calendários do Mário.

Na representação que apresenta na folha de registo responde correctamente à questão colocada no problema dando ainda ênfase à diferença existente entre o número de calendários dos dois amigos através da expressão $9 + 3 = 12$. Através desta expressão a aluna parece ainda querer comunicar a forma como conseguiu resolver este problema, que foi juntando os três cubos que sobravam a um dos conjuntos que tinha nove elementos.

Quanto às representações utilizadas por Mariana na resolução deste problema, estas inserem-se claramente na categoria das representações activas, uma vez que a aluna teve de recorrer à manipulação de objectos (subcategoria das representações activas) para resolver o desafio proposto.

Relativamente à estratégia utilizada pela aluna para resolver o problema G, uma vez que recorreu a materiais manipuláveis para determinar a solução do mesmo, a estratégia desenvolvida enquadra-se na categoria *Fazer uma experimentação*.

Problema H – ***A compra de selos***

Uma máquina de selos automática aceita moedas de 1ct, 2ct, 5ct, 10ct e 20 ct. Para comprar um selo que custe 49 ct, que moedas poderei usar?

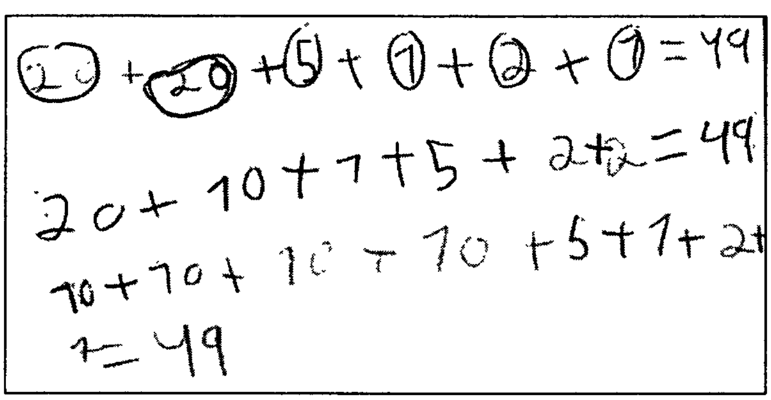


Figura 61 – Resolução do problema H (Mariana)

Ao apresentar a resolução do problema proposto na forma que se pode observar na figura 61, talvez Mariana tenha sido influenciada pelo trabalho de composição e decomposição de números trabalhadas no decorrer das aulas de Matemática.

Mariana apresentou três possibilidades relativamente ao tipo e quantidade de moedas que poderia usar para comprar o referido selo. Na primeira possibilidade colocou os valores das moedas dentro de círculos, talvez querendo representar as moedas. Nas restantes possibilidades tal já não se verificou.

Como se pode observar na figura 61, a primeira possibilidade apresentada está correcta, o que já não se verifica na segunda possibilidade, uma vez que nesta, o total das moedas apresentadas perfaz 40ct e não 49ct como indicado pela aluna. A última possibilidade volta a estar correcta, pois se a compararmos com a primeira verificamos que o que a aluna fez foi decompor as duas moedas de 20ct em quatro de 10ct, mantendo as restantes moedas iguais.

A aluna apresentou assim duas formas correctas de utilizar as moedas referidas para a aquisição de um selo de 49ct.

As representações utilizadas pela aluna na resolução deste problema inserem-se na categoria das representações simbólicas, mais concretamente na subcategoria *algarismos e números* e na subcategoria *expressões matemáticas.*

As expressões numéricas apresentadas resultam de estratégias que fazem parte da categoria *Fazer tentativas, conjecturas* e da categoria *Fazer uma listagem de algumas/todas as possibilidades* das estratégias assumidas por este trabalho.

Problema I – ***Compra de jogos***
A escola do Monte recebeu um subsídio de 40 € para comprar jogos didácticos. Os jogos disponíveis na papelaria local eram:
jogo A – 15 € *jogo B – 20 €* *jogo C – 10 €* *jogo D – 5 €.*
Que jogos se podem comprar com 40 euros? Que quantia sobra?

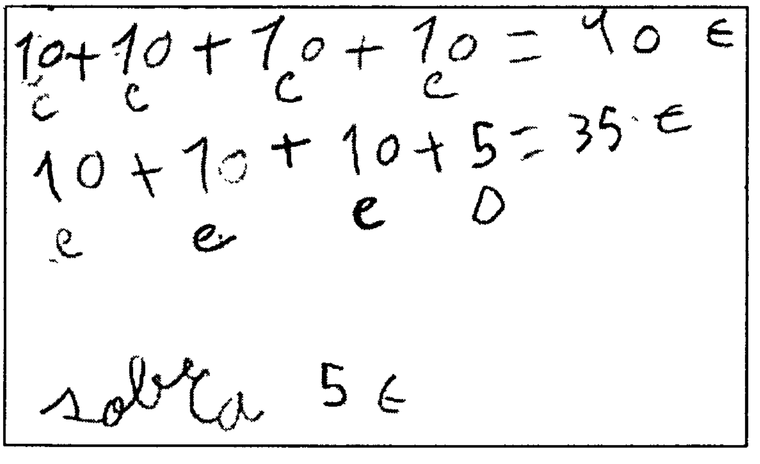


Figura 62 – Resolução do problema I (Mariana)

Através das representações construídas (figura 62), a aluna apresentou duas formas de utilizar o subsídio recebido pela escola do Monte na aquisição de alguns jogos didácticos.

Na primeira expressão apresentada, a aluna adiciona quatro vezes o número dez, escrevendo ainda por baixo de cada um deles a letra C que corresponde, naturalmente, ao jogo C. Esta primeira expressão apresenta uma das soluções a este problema na qual se verifica que uma das formas possíveis de gastar o subsídio seria adquirir quatro jogos C, não sobrando neste caso quantia alguma.

Uma segunda forma para usar o referido subsídio está expressa na segunda expressão numérica apresentada. Segundo a aluna, uma segunda hipótese, seria adquirir três jogos C e um jogo D, sobrando neste caso 5 €. Nesta segunda representação, a aluna utiliza a palavra escrita para representar e comunicar a quantia que sobra. Embora fosse possível adquirir outro jogo D com o troco, a hipótese apresentada pela aluna não deixa de estar correcta.

As representações utilizadas pela aluna na resolução deste problema inserem-se na categoria das representações simbólicas, mais concretamente na subcategoria *algarismos e números*, na subcategoria *expressões matemáticas* e ainda na subcategoria *letras/palavra escrita.*

As expressões numéricas apresentadas resultam de estratégias que fazem parte da categoria *Fazer tentativas, conjecturas* e da categoria *Fazer uma listagem de algumas/todas as possibilidades* das estratégias assumidas por este trabalho.

Problema J – ***Um problema de lógica***

Cinco meninas – Ana, Rita, Paula, Dora e Eva – dividiram entre si os últimos gelados: três de morango e dois de chocolate.

Ana e Eva comeram gelados do mesmo sabor.
Eva e Paula comeram gelados com sabores diferentes.
Paula e Rita também comeram gelados com sabores diferentes.

Que gelado comeu cada menina?

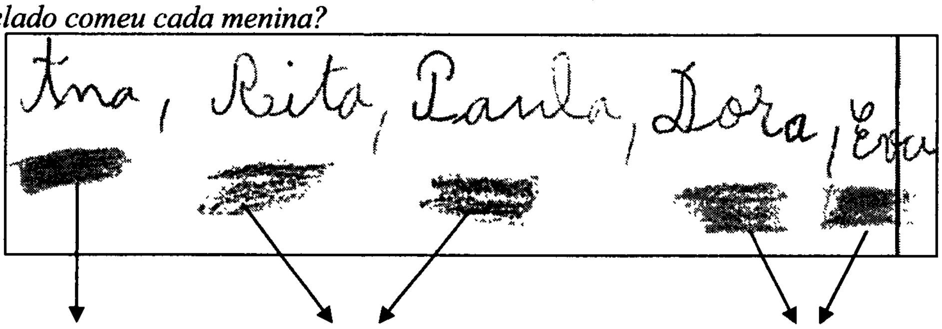


Figura 63 – Resolução do problema J (Mariana)

As três frases incluídas na chaveta (ver enunciado do problema) foram intituladas de "regras", as quais os alunos teriam de seguir e de respeitar para resolverem correctamente o problema.

Mariana começou por escrever o nome das cinco amigas, horizontalmente, separando os respectivos nomes por vírgulas. Além disso, utilizou a cor para representar os dois sabores de gelado, vermelho para o gelado de morango e castanho para o gelado de chocolate.

A forma como a aluna apresentou a informação de uma forma estruturada, estabelecendo relações entre os diferentes dados do problema, e associando um sabor de gelado a cada amiga, traduziu-se num diagrama. Desta forma, pelas representações apresentadas, a *Ana* comeu um gelado de morango, a *Rita* e a *Paula* comeram gelado de chocolate e a *Dora* e a *Eva* comeram gelado de morango.

Como se pode verificar, nem todas as condições do problema foram respeitadas pela aluna no decorrer da resolução do problema proposto, uma vez que na representação construída pela aluna, *Paula* e *Rita* comeram gelados do mesmo sabor, ao contrário do que é mencionado no enunciado do problema.

Quando explicou aos colegas como tinha resolvido o problema, embora com alguma ajuda na sua leitura, resolveu correctamente até à segunda condição do problema. No entanto, quando só já tinha a *Rita* e a *Dora* sem um gelado atribuído, e embora tivesse lido em voz alta a terceira condição, associou o gelado de morango a *Dora* porque ainda faltava um de morango e o de chocolate a *Rita*, que era a única que não tinha ainda um gelado.

As representações utilizadas por Mariana na resolução deste problema inserem-se em duas categorias: representações icónicas e representações simbólicas.

A cor associada ao sabor dos gelados foi considerada como símbolo não convencional, subcategoria das representações icónicas, uma vez que se trata de um símbolo criado pela aluna para comunicar qual o gelado associado a cada menina.

Na categoria das representações icónicas engloba-se ainda o diagrama construído pela aluna, o qual pode ser classificado como diagrama parte-todo, uma vez que representa a relação existente entre a parte (um gelado para cada menina) e o todo (cinco gelados para cinco meninas, sendo três de morango e dois de chocolate).

Na categoria das representações simbólicas estão os nomes das cinco raparigas intervenientes (subcategoria: *letras/palavra escrita*) utilizados pela aluna para identificar e associar cada uma das meninas a um determinado sabor de gelado.

Relativamente à estratégia utilizada pela aluna para resolver o problema J, uma vez que Mariana recorreu a um diagrama para representar o processo de resolução do problema e determinar a solução do mesmo, a estratégia desenvolvida enquadra-se na categoria *Fazer um desenho, diagrama ou esquema.*

Caracterização das representações utilizadas nos problemas propostos

Quadro 5 – Quadro resumo com as representações utilizadas (Mariana)

	Aluno: Mariana		Problemas propostos									
			A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Tipo de representações	Representações activas	Manipulação de objectos							X			
	Representações icónicas	Representações pictóricas (desenhos)	X	X				X				
		Diagramas	X		X		X					X
		Símbolos não convencionais					X					X
	Representações simbólicas	Algarismos e números.	X	X	X	X		X		X	X	
		Sinais de operações e sinal de igual/expressões matemáticas.	X							X	X	
		Letras/palavra escrita			X	X					X	X

Da análise do quadro anterior verifica-se que a aluna recorreu a materiais manipuláveis (representações activas) para resolver um dos problemas propostos. Neste caso, a aluna teve necessidade de concretizar com objectos reais o raciocínio matemático desenvolvido durante o processo de resolução do problema em questão.

No campo das representações icónicas, a aluna recorreu ao desenho em três dos problemas propostos representando as estruturas de quatro dos problemas trabalhados através de diagramas, o que poderá de alguma forma revelar um tentativa para um raciocínio matemático organizado e estruturado.

Mariana apenas criou símbolos não convencionais, representativos do real, em dois dos problemas apresentados. Representou a informação presente nos problemas sobretudo através de representações simbólicas. A aluna recorreu aos algarismos e números em oito das representações construídas. Estes surgem ou para representar quantidades, ou em expressões numéricas, ou ainda para indicar a solução do problema proposto.

Em três dos problemas apresentados, a aluna apresenta a respectiva resolução em forma de expressão numérica na qual utiliza uma linguagem matemática mais formal. Num dos problemas em que tal situação ocorre, a aluna recorre inicialmente a representações icónicas que parecem servir de base à construção da referida linguagem simbólica.

A palavra escrita surge também em quatro das representações apresentadas, nalgumas delas sob a forma de inicial maiúscula representativa de uma determinada palavra ou elemento. Na resolução de um dos problemas, a aluna recorre unicamente à palavra escrita para representar a solução do problema, apresentando o resultado final através de um número rodeado por um círculo.

A partir de uma leitura vertical do quadro 5, verifica-se que a aluna, em cinco dos problemas propostos, recorreu tanto a representações icónicas como a representações simbólicas no âmbito das respectivas resoluções. Em três dos problemas apresentados apenas utilizou representações simbólicas, num dos problemas apenas estão presentes representações icónicas, enquanto que num outro recorreu às representações activas.

Embora Mariana recorra com frequência às representações simbólicas, as representações icónicas parecem desempenhar um importante papel no âmbito das representações utilizadas para resolver problemas de Matemática. Também as representações activas desempenharam um importante papel uma vez que permitiram a Mariana resolver um dos problemas, que de outro modo não teria conseguido resolver.

Caracterização das estratégias utilizadas nos problemas propostos

Quadro 6 – Quadro resumo com as estratégias utilizadas (Mariana)

Aluno: Mariana		Problemas propostos									
		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Estratégias reveladas	Descobrir um padrão, regra ou lei de formação.										
	Fazer tentativas, conjecturas.					X			X	X	
	Trabalhar do fim para o princípio.										
	Usar dedução lógica; fazer eliminação.										
	Reduzir a um problema mais simples; decomposição; simplificação.										
	Fazer uma simulação, experimentação ou dramatização.							X			
	Fazer um desenho, diagrama ou esquema.	X	X	X		X	X				X
	Fazer uma listagem de algumas/todas as possibilidades.		X		X				X	X	

Realizando em primeiro lugar uma leitura horizontal do quadro acima, pode verificar-se que as estratégias mais utilizadas por esta aluna na resolução dos dez problemas propostos foram *Fazer um desenho, diagrama ou esquema* e *Fazer uma listagem de algumas/todas as possibilidades*. A primeira categoria de estratégias referida surge em seis dos problemas resolvidos enquanto que a segunda categoria está presente em quatro dos problemas, num dos quais em simultâneo com a primeira categoria referida. As outras estratégias utilizadas pela aluna foram *Fazer tentativas, conjecturas* e *Fazer uma simulação, experimentação ou dramatização.*

Tendo agora por base uma leitura vertical do mesmo quadro constata-se que em quatro dos problemas propostos a aluna recorreu, simultaneamente, a mais do que uma estratégia para determinar a solução ao problema enquanto que em seis dos problemas parece ter recorrido apenas a um tipo de estratégia.

José

Apresentação do aluno

O José, o mais velho dos quatro alunos seleccionados (quase 7 anos no início da investigação), é uma criança meiga, reservada e muito observadora. Revela possuir um bom vocabulário sobre diferentes temáticas que aplica de modo bastante contextualizado. A sua adaptação ao 1.º ano de escolaridade foi bastante positiva, revelando uma maturidade e postura diferentes das dos seus colegas mais novos. Revelou-se sempre muito autónomo e participativo.

Na área da Matemática, e tal como o André, revelou um bom raciocínio lógico-dedutivo e um cálculo mental rápido. O José manifestou, desde o início, capacidade para conceber diferentes estratégias que lhe possibilitavam resolver as diferentes situações com que se deparava. Revelou, no entanto, uma atitude diferente da do seu colega André. É uma criança mais calma, mais atenta. Conseguia alcançar os mesmos objectivos que André, mas optando por caminhos diferentes, digamos que mais sólidos e seguros. Revelou sempre bastante entusiasmo e empenho na resolução dos diferentes problemas propostos.

Resolução dos problemas propostos

Problema A – ***Os periquitos***

O Pedro tem 10 periquitos. Todos os dias o Pedro dá a cada 2 periquitos 3 folhas de alface. Quantas folhas de alface tem o Pedro de dar, por dia, aos seus 10 periquitos?

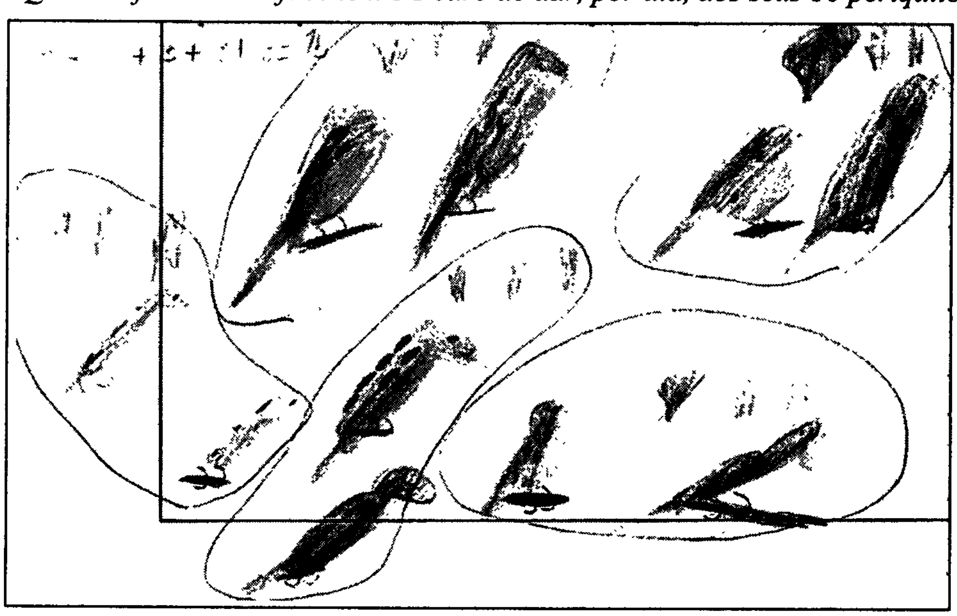


Figura 64 – Resolução do problema A (José)

O aluno começou por construir cinco conjuntos, delimitados por linhas fechadas, tendo o aluno desenhado em cada um deles, dois periquitos e três folhas de alface. Cada conjunto representa a relação que existe entre dois periquitos e o número de folhas consumido por esse grupo. Esta primeira representação construída pelo aluno constitui um diagrama.

Em seguida, apresentou uma outra representação (totalmente simbólica) onde formalizou a interpretação e o raciocínio efectuados, expressando a resolução através de símbolos matemáticos formais.

O aluno explicou o raciocínio matemático que deu origem às representações apresentadas:

> *José*: Se o Pedro em cada dia dava três folhas a dois periquitos eu fiz dois periquitos e três alfaces, três folhas, e depois fiz uma bola à volta. Fiz primeiro os dez periquitos e depois fiz as folhas e depois fiz um grupinho com os dois [periquitos e folhas de alface]. E depois pus aqui [aponta para a expressão matemática] três mais três mais três mais três mais três que eram todas as três folhas [aponta para as folhas de cada conjunto do diagrama] e depois fiz a conta e vi que eram quinze.

As representações utilizadas por José na resolução deste problema pertencem a duas categorias: representações icónicas e representações simbólicas.

Na categoria das representações icónicas inserem-se o desenho dos dez periquitos e o desenho das quinze folhas de alface. Nesta categoria enquadra-se ainda o diagrama construído com os elementos referidos anteriormente, o qual pode ser classificado como diagrama parte-todo, uma vez que representa a relação que existe entre a parte (três folhas para dois periquitos) e o todo (folhas para dez periquitos).

Na categoria das representações simbólicas enquadra-se a expressão matemática (subcategoria: *sinais de operações e sinal de igual/expressões matemáticas*) através da qual o aluno traduziu em número a quantidade de folhas que dava a cada dois periquitos, além de ter traduzido numa operação de adição a relação representada pelo diagrama.

No que diz respeito à estratégia utilizada pelo aluno para resolver o problema A, uma vez que José recorreu a um diagrama para representar o processo de interpretação do problema, formado unicamente por elementos icónicos, a estratégia desenvolvida enquadra-se na categoria *Fazer um desenho, diagrama ou esquema.*

Problema B – ***As bolas de gelado***

Na gelataria há bolas de gelado de 4 sabores diferentes:

- Morango (M)
- Chocolate (C)
- Baunilha (B)
- Amêndoa (A)

A Rita vai comprar um gelado com dois sabores. Quantos gelados com dois sabores diferentes se conseguem fazer?

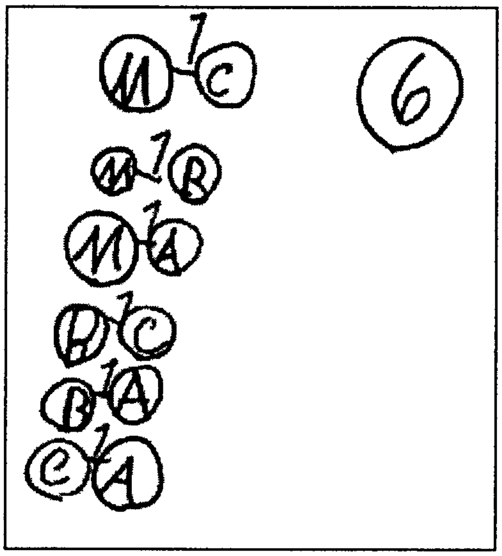


Figura 65 – Resolução do problema B (José)

Para resolver este problema, o aluno representou cada sabor de gelado pela respectiva inicial, tendo desenhado à volta da mesma um círculo. Em seguida, uniu com uma linha cada par de sabores, que correspondiam neste caso a um gelado com dois sabores diferentes. Por cima de cada linha que unia o par de sabores, escreveu o número um, para indicar que o mesmo correspondia a um gelado. A forma escolhida pelo aluno para representar as relações existentes entre os diferentes elementos constituintes traduziu-se num diagrama. Após ter combinado todos os quatro sabores, em gelados de dois sabores diferentes, contabilizou quantos era possível fazer e representou o total pelo número seis, escrevendo-o também dentro de um círculo.

A estratégia do aluno para formar os gelados apresenta alguma ordem na forma como foi combinando os diferentes sabores. Assim, como se pode ver na figura 65, o José começou com o sabor M (o primeiro sabor da ordem apresentada) e combinou-o primeiro com o sabor C (o sabor imediatamente a seguir), em seguida com o sabor B (o terceiro sabor) e por fim com o sabor A (o último sabor). Passou em seguida ao terceiro sabor da referida ordem (sabor B) e combinou-o primeiro com o sabor C (sabor imediatamente anterior) e seguidamente com o sabor A (sabor imediatamente a seguir). Por fim, e como já não restava outra hipótese de fazer gelados com dois sabores diferentes, combinou os sabores C e A.

As representações presentes na resolução deste problema pertencem a duas categorias: representações icónicas e representações simbólicas.

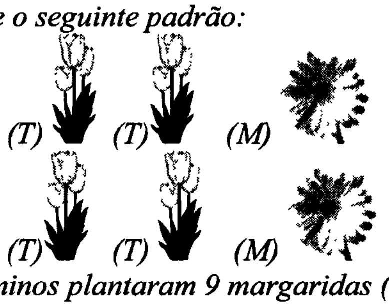
Na categoria das representações icónicas enquadra-se o diagrama construído pelo aluno que pode ser classificado como um diagrama em rede e, neste caso, um diagrama de linhas, uma vez que é formado por poucos elementos e poucas ligações entre os mesmos.

Na categoria das representações simbólicas inserem-se as letras iniciais representativas dos quatro sabores de gelados (subcategoria: *letras/palavra escrita*) e ainda o número um que o aluno escreveu por cima de cada par de sabores e o número seis com o qual José apresentou a resposta ao problema proposto (subcategoria: *algarismos e números*).

Relativamente às estratégias presentes na resolução deste problema, uma vez que o aluno recorreu a um diagrama para representar a resolução do problema e apresentou todas as combinações possíveis, estas inserem-se nas categorias *Fazer um desenho, diagrama ou esquema* e *Fazer uma listagem de algumas/todas as possibilidades*.

Problema C – ***As flores do canteiro***

Os meninos da escola do Daniel estão a plantar flores num canteiro, respeitando sempre o seguinte padrão:



Os meninos plantaram 9 margaridas (M). Quantas tulipas plantaram?

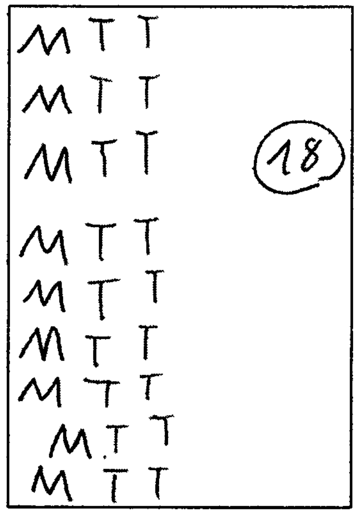


Figura 66 – Resolução do problema C (José)

O aluno representou o nome das flores pela inicial respectiva, tendo repetido verticalmente, nove vezes, o motivo *MTT*. No entanto, no enunciado do problema é referido que o motivo das flores plantadas no jardim é *TTM* e não *MTT* como foi utilizado por José.

Por que razão então utilizou o aluno este motivo? José explicou como tinha construído estas representações:

> *José*: Eu primeiro fiz as nove margaridas [aponta para a fila de nove M na folha de registo] depois fiz... como eram duas tulipas, fiz duas [T de tulipa] em frente de todas [M de margarida], depois contei quantas eram (...) vi que eram dezoito (...) por isso fiz o dezoito e uma bolinha.

As palavras de José revelaram-se cruciais para a compreensão da forma como as representações serviram de apoio ao raciocínio e interpretação do problema proposto.

Por fim, e como se pode observar na figura 66, o aluno apresentou o resultado correcto a este problema através do número dezoito, à volta do qual desenhou um círculo.

As representações utilizadas por José na resolução deste problema inserem-se em duas categorias: representações icónicas e representações simbólicas.

Na categoria das representações icónicas inclui-se o diagrama que o aluno construiu, o qual pode classificar-se como diagrama parte-todo uma vez que representa a relação que existe entre a parte (uma margarida e duas tulipas) e o todo (nove margaridas e dezoito tulipas).

Na categoria das representações simbólicas enquadram-se as iniciais (subcategoria: *letras/palavra escrita*) que o aluno escreveu no motivo *MTT* para representar os dois tipos de flores presentes no enunciado do problema e ainda a solução do problema representado sob a forma do número dezoito (subcategoria: *algarismos e números*).

Relativamente às estratégias utilizadas pelo aluno para resolver o problema C estas enquadram-se na categoria *Fazer um desenho, diagrama ou esquema*, uma vez que José recorreu a um diagrama para interpretar e representar o processo de resolução do problema proposto.

Problema D – ***Os apertos de mão***

A Rita, o Nuno, o Paulo e a Lili são amigos. Quando chegaram à escola cumprimentaram-se e cada um deu um aperto de mão aos outros.
Quantos apertos de mão deram ao todo?

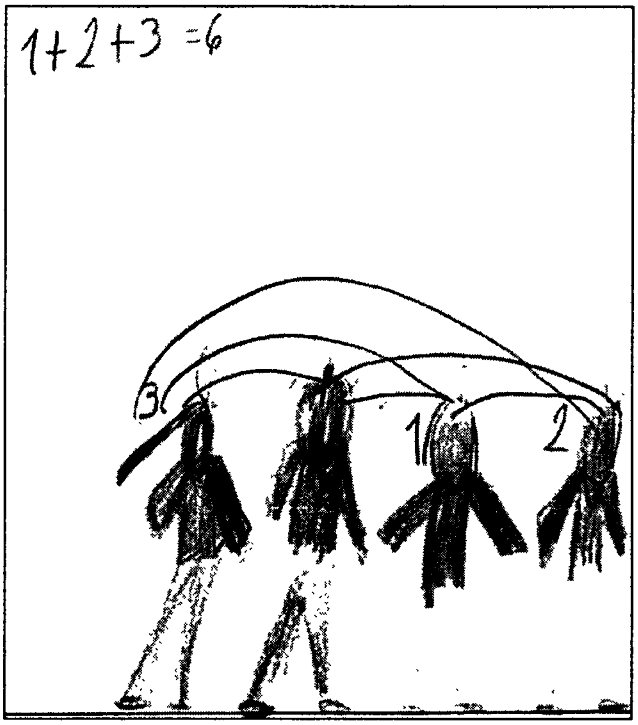


Figura 67 – Resolução do problema D (José)

O aluno começou por desenhar os quatro intervenientes citados no problema, ligando-os entre si através de linhas curvas, as quais representam os apertos de mão dados entre eles. Junto a três dos quatro amigos desenhados, mais precisamente, o primeiro, o terceiro e o quarto amigos a contar do lado esquerdo, estão escritos, respectivamente, os números três, um e dois. Como mais tarde o José explicou, estes números representam o número de apertos de mão que essas pessoas davam. Este conjunto de elementos desenhados pelo aluno e respectivas relações entre os mesmos constitui um diagrama.

Mas qual foi a ordem pela qual o aluno estabeleceu as ligações entre os amigos, construindo assim o diagrama apresentado? As palavras de José foram, mais uma vez, muito esclarecedoras:

> *José*: Este [aponta para o primeiro amigo do lado esquerdo] dava a este [aponta para o segundo amigo], já era um [aperto de mão]; mas não podia ser só com este também tinha de ser com este [terceiro amigo] e com este [quarto amigo], por isso pus uns riscos assim [aponta para as três linhas]. Este aqui [quarto amigo] como já tinha dado um aperto de mão a este [primeiro amigo]... por isso só dava mais [apertos de mão] com este [terceiro amigo] e com este [segundo amigo]. E depois este aqui [aponta o terceiro amigo] como já tinha dado a todos menos a este [segundo amigo] dá um [aperto de mão] a este.

Desta forma, a ordem pela qual estabeleceu as ligações, representativas dos apertos de mão, foi respectivamente, três apertos de mão dados pelo primeiro amigo, dois apertos de mão dados pelo quarto amigo e, por fim, um aperto de mão dado pelo terceiro amigo.

Através do diagrama o aluno interpretou o problema e apoiou o raciocínio matemático que acompanhou o processo de resolução do mesmo.

Seguidamente, apresentou uma outra representação (totalmente simbólica) onde formalizou a interpretação e o raciocínio efectuados, expressando a resolução através de símbolos matemáticos formais. Na expressão matemática apresentada, o aluno adicionou os apertos de mão dados pelos amigos e representados pelos números *um*, *dois* e *três* no diagrama, não pela ordem em que surgiram no diagrama, mas sim por ordem crescente de quantidade.

As representações utilizadas pelo aluno na resolução deste problema pertencem a duas categorias: representações icónicas e representações simbólicas.

A categoria das representações icónicas engloba o desenho dos quatro amigos apresentados na primeira representação bem como o diagrama construído. Este diagrama, que serviu de suporte ao raciocínio e interpretação do problema proposto, pode ser classificado como diagrama em rede.

Na categoria das representações simbólicas enquadra-se a expressão matemática (subcategoria: *sinais de operações e sinal de igual/expressões matemáticas*) através da qual o aluno traduziu numa operação de adição a relação representada pelo diagrama em rede, cujas três parcelas foram o número de apertos de mão representados no diagrama.

No que diz respeito à estratégia utilizada pelo aluno para resolver o problema D, uma vez que José recorreu a um diagrama para representar o processo de interpretação do problema, no qual misturou elementos icónicos e simbólicos, a estratégia desenvolvida enquadra-se na categoria *Fazer um desenho, diagrama ou esquema.*

Problema E – *O voo das bruxas*

20 bruxas têm de viajar em 8 vassouras para um encontro em Lisboa.
Porém, nenhuma vassoura pode levar mais do que 4 bruxas nem menos do que 2.
Como voarão as bruxas?

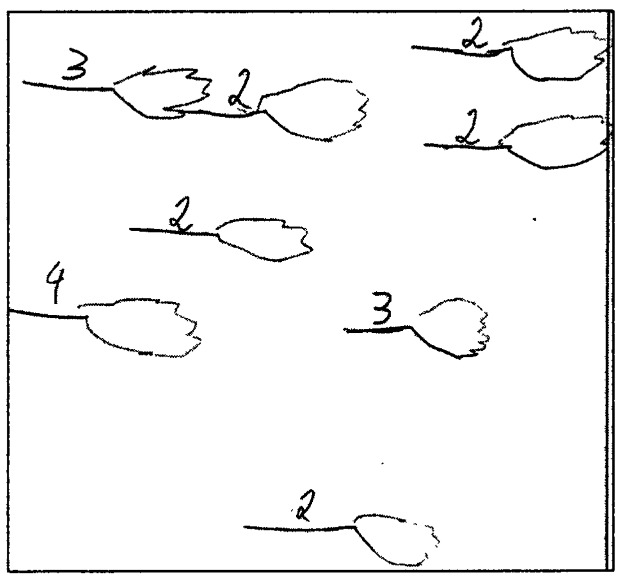


Figura 68 – Resolução do problema E (José)

O aluno recorreu ao desenho para representar as oito vassouras, no entanto recorreu ao número (representação simbólica) para representar a quantidade de bruxas que iria em cima de cada vassoura. A forma como o aluno representou a estrutura do problema, distribuindo as vinte bruxas pelas oito vassouras, tendo em conta as condições impostas pelo problema em questão, traduziu-se num diagrama.

Como se pode verificar pelas representações construídas pelo aluno, as bruxas foram distribuídas pelas oito vassouras da seguinte forma: quatro bruxas numa vassoura, três bruxas em duas das oito vassouras e duas bruxas em cinco das oito vassouras.

José explicou que começou por colocar quatro bruxas na vassoura que tem essa quantidade. Em seguida, como sabia que nenhuma vassoura podia levar nem mais do que quatro, nem menos do que duas bruxas, foi distribuindo as restantes bruxas pelas outras vassouras, fazendo algumas tentativas, até ter todas as vinte bruxas colocadas. Ao analisar com atenção a figura 51 verifica-se que o aluno apagou a quantidade que tinha inicialmente escrito em algumas das vassouras, facto que resulta das diversas tentativas efectuadas.

As representações utilizadas pelo aluno na resolução deste problema pertencem a duas categorias: representações icónicas e representações simbólicas.

Na categoria das representações icónicas incluem-se o desenho com que o aluno representou as vassouras bem como o diagrama construído com as mesmas. Este diagrama pode ser classificado como diagrama parte-todo, uma vez que representa a relação existente entre a parte (uma vassoura com duas, três ou quatro bruxas) e o todo (vinte bruxas em oito vassouras).

Através das representações apresentadas o aluno apresentou uma das soluções correctas a este problema.

Na categoria das representações simbólicas enquadram-se os números com que o aluno representou a quantidade de bruxas que iria em cima de cada uma das oito vassouras (subcategoria: *algarismos e números*).

Relativamente às estratégias utilizadas pelo aluno na resolução deste problema, estas inserem-se na categoria *Fazer um desenho, diagrama ou esquema* uma vez que José recorreu a um diagrama para interpretar e representar o processo de resolução do problema proposto e na categoria *Fazer tentativas*, uma vez que para determinar uma das soluções correctas o aluno teve necessidade de efectuar algumas tentativas.

Problema F – ***As meias das joaninhas***

O João é um coleccionador muito estranho. Ele tem uma caixa com 5 joaninhas. Cada joaninha tem 6 patas. Se o João tivesse de comprar meias no Inverno para as suas joaninhas, quantas meias compraria?

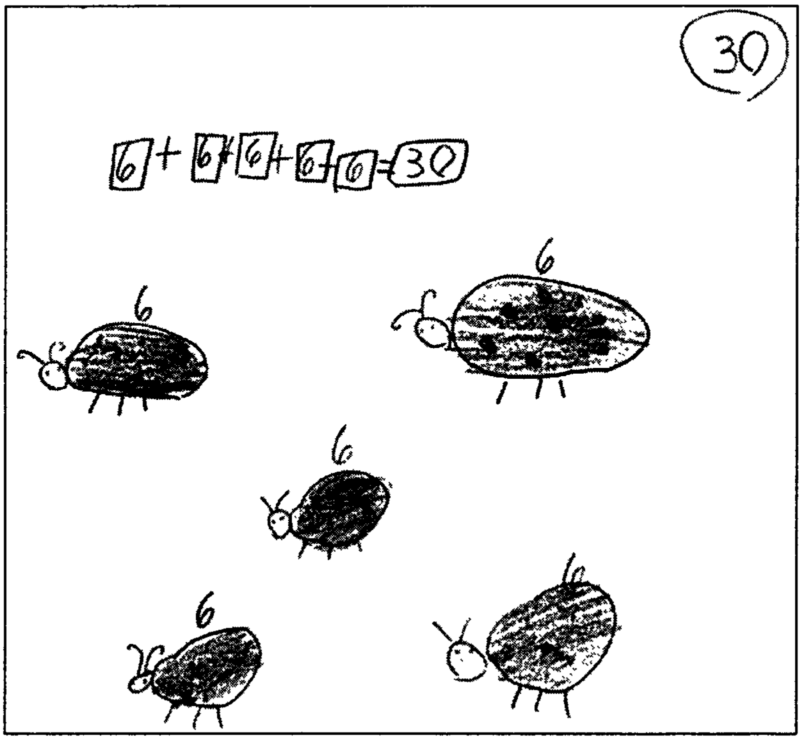


Figura 69 – Resolução do problema F (José)

O aluno começou por desenhar cinco joaninhas e por cima de cada uma delas escreveu o número seis representativo do número de patas de cada insecto desenhado, segundo a informação fornecida no enunciado do problema. É curioso que cada uma das joaninhas desenhadas apenas tem três patas o que parece corroborar a ideia de que o aluno fez o desenho apenas para representar aspectos da situação apresentada no texto do problema sem expressar qualquer tipo de relação. O desenho dos insectos serviu provavelmente para o aluno não se esquecer de quantas joaninhas falava o problema e para saber quantas vezes teria de adicionar a parcela correspondente ao número de patas de cada insecto. Como o próprio aluno refere:

> *José*: Fiz seis joaninhas e depois pus o seis... para não me enganar... para não pensar que eram oito patas. Depois pus num quadrado o seis [primeira parcela da expressão numérica] que era esta [aponta para uma das joaninhas] depois noutro quadrado era esta [aponta outra joaninha] ...... [continua o raciocínio associando cada parcela a uma joaninha].

O desenho serviu assim de apoio à construção da representação simbólica onde formalizou a interpretação e o raciocínio efectuados, expressando a resolução através de símbolos matemáticos formais. Na expressão matemática apresentada adiciona cinco vezes o número seis, respondendo correctamente que seriam necessárias trinta meias para todas as joaninhas. Além da expressão numérica, indica ainda a solução ao problema através do número trinta colocado dentro de um círculo, no canto superior direito da folha de registo.

As representações utilizadas no decorrer da resolução deste problema inserem-se em duas categorias: representações icónicas e representações simbólicas.

Na categoria das representações icónicas insere-se o desenho das joaninhas, que parece ter servido de apoio à construção da representação simbólica.

Na categoria das representações simbólicas enquadra-se a expressão matemática com que o aluno formalizou a interpretação e o raciocínio efectuados (subcategoria: *sinais de operações e sinal de igual/expressões matemáticas*) bem como o número trinta (subcategoria: *algarismos e números*) que o aluno escreveu no canto superior da folha de registo, como que para não haver dúvidas relativamente à solução do problema.

No que diz respeito às estratégias utilizadas pelo aluno para resolver este problema, estas podem ser enquadradas na categoria *Fazer um desenho, diagrama ou esquema*, uma vez que José construiu um desenho que lhe serviu de apoio para a construção da expressão matemática com que obteve a solução ao problema proposto.

Problema G – ***Fazendo colecções***

O Mário e o Artur coleccionam calendários. O Mário tem mais 3 calendários do que o Artur e no conjunto, os dois irmãos têm 21 calendários. Quantos calendários tem o Mário?

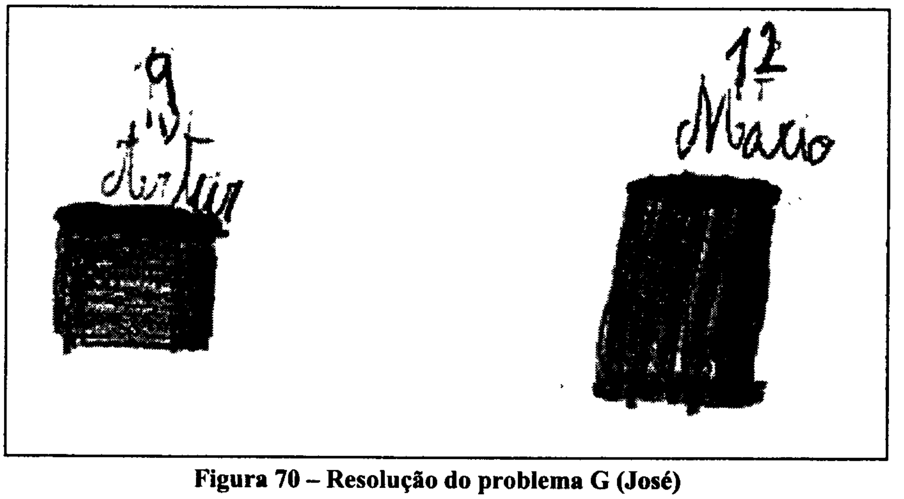


Figura 70 – Resolução do problema G (José)

O aluno começou por desenhar o que parecem ser calendários, um representando os calendários do *Artur* e outro representando os calendários do *Mário*, respectivamente identificados pelos nomes dos seus proprietários (representação simbólica). É curioso o facto do calendário do *Mário* se apresentar mais alto do que o do *Artur*, talvez pelo facto do *Mário* ter mais três calendários do que o amigo, conforme referido no problema.

Por cima de cada calendário vêem-se os números nove e doze (representações simbólicas), representando o aluno deste modo o número de calendários que o *Artur* e o *Mário* teriam respectivamente. Mas que raciocínio e interpretação deram origem a estes resultados?

> *José:* Sabendo que o Artur e o Mário tinham em conjunto vinte e um calendários e sabendo que o Mário tinha mais três ....eu não ... eu primeiro ... não se podia pôr dez [no Artur] porque se pusesse dez tinha de pôr onze [no Mário] e se eu pusesse onze só era mais um [a diferença entre os dois].

O aluno começou por experimentar os números 10 e 11, que posteriormente apagou, como ainda se pode observar na figura 70.

> *Professora*: E então, como é que fizeste?
> *José*: Por isso pus o nove.... pus o nove...
> *Professora*: E porque é que puseste o doze?
> (....) [aqui o aluno baralha-se e volta a falar no dez e no onze e na diferença entre estes dois números]
> *Professora*: Qual é a diferença entre doze e nove?
> *José*: [silêncio] Hum....
> *Professora*: Nove para doze?
> *José*: Nove para doze faltam três. Por isso se o Mário tinha mais três ... Porque ele [o Artur] tem nove depois mais três dava doze e doze mais nove também dá vinte e um.

O aluno foi deste modo realizando algumas tentativas, procurando simultaneamente que a diferença entre os dois números encontrados fosse três e cuja soma fosse vinte e um.

Por cima do calendário do Mário parece ter existido ainda uma outra tentativa, entretanto apagada, a do número treze, hipótese não aceite certamente por não respeitar as duas condições citadas no parágrafo anterior.

Desta forma interessante, o aluno determinou a solução correcta ao problema proposto.

As representações utilizadas no decorrer da resolução deste problema inserem-se em duas categorias: representações icónicas e representações simbólicas.

Na primeira categoria de representações referida enquadra-se o desenho do que parecem ser calendários, que pode ser inserido na subcategoria: *símbolos não* *convencionais*, uma vez que constituem uma representação muito pessoal e muito própria do aluno.

Na categoria das representações simbólicas enquadram-se os nomes dos dois amigos (subcategoria: *letras/palavra escrita*) bem como os números *nove* e *doze* (subcategoria: *algarismos e números*) com que o aluno representou a quantidade de calendários de cada um dos amigos.

No que diz respeito às estratégias utilizadas pelo aluno para resolver este problema, estas podem ser enquadradas na categoria *Fazer tentativas*, uma vez que José desenvolveu diversas tentativas para obter a solução ao problema proposto.

Problema H – ***A compra de selos***

Uma máquina de selos automática aceita moedas de 1ct, 2ct, 5ct, 10ct e 20 ct. Para comprar um selo que custe 49 ct, que moedas poderei usar?

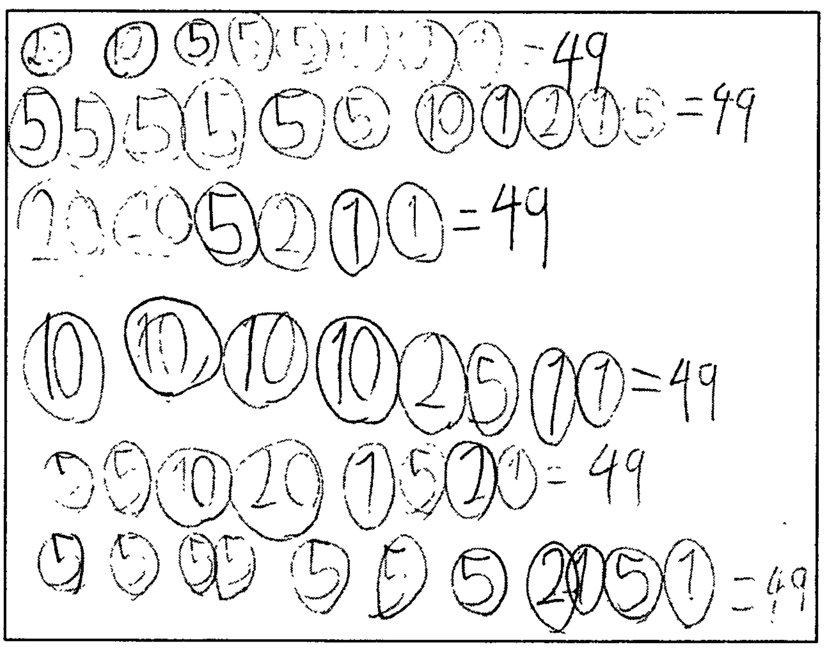


Figura 71 – Resolução do problema H (José)

O aluno representou seis possibilidades diferentes de utilizar as moedas referidas para a aquisição de um selo de 49ct. Representou as moedas através da sua forma circular e no meio escreveu o seu valor monetário.

Desenhou as moedas lado a lado e no fim de cada possibilidade representada apresentou o total dos valores monetários indicados nas moedas após o sinal de igual.

É interessante verificar que, em todas as representações, o aluno representou 9ct sempre pelas mesmas moedas, uma moeda de 5ct, uma moeda de 2ct e duas moedas de 1ct, apenas trocando a ordem de apresentação em cada possibilidade apresentada.

Segundo palavras do aluno, ele representou 9ct sempre da mesma forma, procurando sim arranjar diferentes formas de obter a quantia que faltava para os 49ct, ou seja, representando diferentes combinações de moedas que totalizassem 40 ct.

Como se pode verificar pela figura 71, apenas as cinco primeiras representações totalizam 49ct. A última possibilidade apresentada totaliza 44ct e não 49ct como é solicitado no problema em questão.

As representações utilizadas pelo aluno na resolução deste problema inserem-se em duas categorias: representações icónicas e representações simbólicas.

Na primeira categoria referida inclui-se o desenho que o aluno fez das moedas enquanto que na categoria das representações simbólicas se enquadram os números utilizados no interior das moedas e no total de cada uma das seis possibilidades representadas (subcategoria: *algarismos e números*) bem como o sinal de igual empregue em todas as representações (subcategoria: *sinais de operações e sinal de igual/expressões matemáticas*).

As seis representações apresentadas resultam de estratégias que fazem parte de duas categorias: *Fazer tentativas* e *Fazer uma listagem de algumas/todas as possibilidades*, das estratégias assumidas por este trabalho.

Problema I – ***Compra de jogos***

A escola do Monte recebeu um subsídio de 40 € para comprar jogos didácticos. Os jogos disponíveis na papelaria local eram:

jogo A – 15 € jogo B – 20 € jogo C – 10 € jogo D – 5 €.

Que jogos se podem comprar com 40 euros? Que quantia sobra?

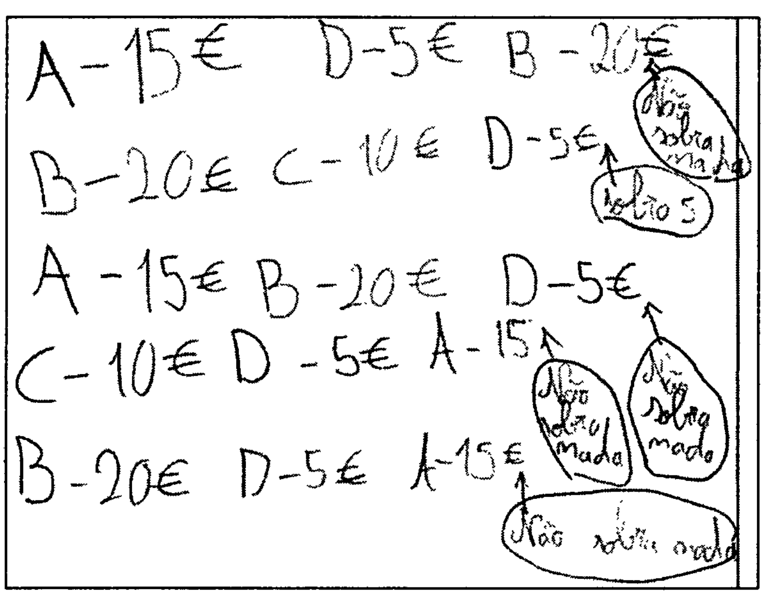


Figura 72 – Resolução do problema I (José)

O aluno apresentou uma listagem de possibilidades para gastar o subsídio de 40€ na aquisição de jogos didácticos. Na figura 72 estão representadas cinco possibilidades. No entanto, a primeira, a terceira e a quinta possibilidade referem-se à aquisição dos mesmos jogos didácticos, A, B e D, uma vez que estes apenas foram apresentados numa ordem diferente. Desta forma, o aluno apresentou três possibilidades distintas para gastar o subsídio referido.

Na possibilidade apresentada na quarta linha são apontados os jogos C, D e A, no entanto, o aluno não efectuou os cálculos correctamente pois afirma que da compra desses três jogos "*Não sobra nada*", o que não é verdade. Assim, José apenas apresentou duas formas correctas e distintas para adquirir jogos didácticos com o subsídio referido.

Para resolver este problema o aluno recorreu unicamente a representações simbólicas.

As letras que representam os jogos didácticos e as palavras utilizadas por José constituem dois dos elementos simbólicos desta categoria (subcategoria: *letras/palavra escrita*). Para além destes existem outros elementos nas representações do aluno que se enquadram nesta categoria, como são os preços dos jogos (subcategoria: *algarismos e números*).

As cinco representações apresentadas resultam de estratégias que fazem parte de duas categorias: *Fazer tentativas* e *Fazer uma listagem de algumas/todas as possibilidades* das estratégias assumidas por este trabalho.

Problema J – ***Um problema de lógica***

Cinco meninas – Ana, Rita, Paula, Dora e Eva – dividiram entre si os últimos gelados: três de morango e dois de chocolate.

Ana e Eva comeram gelados do mesmo sabor.
Eva e Paula comeram gelados com sabores diferentes.
Paula e Rita também comeram gelados com sabores diferentes.

Que gelado comeu cada menina?

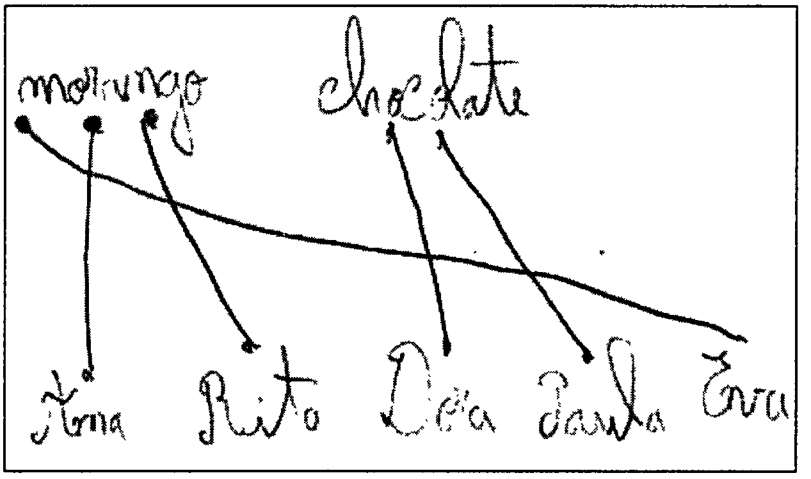


Figura 73 – Resolução do problema J (José)

A forma como o aluno representou a estrutura deste problema, estabelecendo elos de ligação entre os diferentes elementos, traduziu-se no diagrama da figura 73.

Na parte superior do diagrama construído, o aluno escreveu *morango* e *chocolate* para representar os dois sabores de gelados presentes no problema em questão. Por baixo de cada sabor de gelado fez pequenas marcas, muito próprias e pessoais, que correspondem ao número de gelados que existiam de cada sabor. Na parte inferior do diagrama escreveu o nome das quatro amigas, tendo estabelecido as ligações entre os diversos componentes do diagrama através de linhas.

Através das representações elaborados pelo aluno, reveladas com toda a nitidez e clareza na figura 73, é comunicada a solução a este problema de lógica. Através da leitura do diagrama apresentado pelo aluno chega-se à conclusão que a *Ana*, a *Rita* e a *Eva* comeram gelados de morango enquanto que a *Dora* e a *Paula* comeram gelados de chocolate. A solução apresentada pelo aluno responde correctamente à questão colocada.

As representações utilizadas por este aluno para resolver o problema inserem-se em duas categorias: representações icónicas e representações simbólicas.

Na categoria das representações icónicas incluem-se as marcas que o aluno desenhou por baixo de cada sabor e que correspondem à quantidade de gelados do respectivo sabor (subcategoria: *símbolos não convencionais*) bem como o diagrama construído. Este diagrama pode classificar-se como um diagrama em rede uma vez que consiste em dois conjuntos de elementos interligados por linhas.

Na categoria das representações simbólicas enquadram-se os nomes das quatro amigas (subcategoria: *letras/palavra escrita*) através dos quais o aluno identificou as intervenientes na história.

Relativamente às estratégias utilizadas pelo aluno para resolver o problema J, uma vez que José recorreu a um diagrama para representar o processo de resolução do problema e determinar a solução do mesmo, estas enquadram-se na categoria *Fazer um desenho, diagrama ou esquema.* Uma vez que o aluno revelou ainda dedução lógica para resolver o problema, as estratégias podem ainda ser enquadradas na categoria *Usar dedução lógica; fazer eliminação.*

Caracterização das representações utilizadas nos problemas propostos

Quadro 7 – Quadro resumo com as representações utilizadas (José)

	Aluno: José		Problemas propostos									
			A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Tipo de representações	Representações activas	Manipulação de objectos										
	Representações icónicas	Representações pictóricas (desenhos)	X			X	X	X		X		
		Diagramas	X	X	X	X	X					X
		Símbolos não convencionais							X			X
	Representações simbólicas	Algarismos e números.		X	X		X	X	X	X	X	
		Sinais de operações e sinal de igual/expressões matemáticas.	X			X		X		X		
		Letras/palavra escrita		X	X				X		X	X

Pela análise do quadro 7 constata-se que o aluno utilizou o desenho (representações icónicas) nas representações construídas no âmbito da resolução de cinco problemas propostos. Como se pode observar nas representações construídas pelo aluno, alguns dos desenhos elaborados são ricos em pormenores procurando representar a realidade o mais fielmente possível.

Ainda no campo das representações icónicas, o aluno representou as estruturas de seis dos problemas trabalhados através de diagramas, o que poderá de alguma forma revelar um raciocínio matemático organizado e estruturado. Os símbolos não convencionais surgem apenas em duas das resoluções apresentadas. O aluno recorreu preferencialmente ao desenho, aos algarismos e números ou mesmo à palavra escrita para representar as diferentes informações presentes nos problemas propostos.

Relativamente às representações simbólicas, os algarismos e números são a representação mais presente nas resoluções apresentadas. Os números apresentados nas representações não só indicam a solução ao problema em questão como também representam outras quantidades e ainda estão presentes em diversas expressões numéricas, nas quais a linguagem simbólica impera.

Da leitura do quadro acima conclui-se que um outro tipo de representação simbólica, os sinais de operações e o sinal de igual/expressões matemáticas estiveram presentes em quatro das representações apresentadas. Em três destes problemas, as representações icónicas serviram de apoio à construção das representações simbólicas, através das quais o aluno comunicou a solução através de uma linguagem matemática formal e totalmente simbólica.

Uma outra representação simbólica, a palavra escrita, surge em cinco das representações apresentadas no âmbito da resolução dos problemas propostos, nalgumas delas sob a forma de inicial maiúscula representativa de uma determinada palavra ou elemento.

Realizando uma leitura vertical do quadro 7 verifica-se que o aluno em nove dos problemas propostos recorreu tanto a representações icónicas como a representações simbólicas no âmbito das respectivas resoluções, enquanto que num dos problemas apenas utilizou representações simbólicas.

Embora as representações icónicas (desenho e diagrama) estejam presentes na maioria das representações apresentadas e tenham funcionado como precioso apoio a diversos raciocínios matemáticos, são as representações simbólicas que sobressaem das representações utilizadas pelo aluno na resolução de todos os problemas apresentados.

Caracterização das estratégias utilizadas nos problemas propostos

Quadro 8 – Quadro resumo com as estratégias utilizadas (José)

		Problemas propostos									
Aluno: José		**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**
Estratégias reveladas	Descobrir um padrão, regra ou lei de formação.										
	Fazer tentativas, conjecturas.					X		X	X	X	
	Trabalhar do fim para o princípio.										
	Usar dedução lógica; fazer eliminação.										X
	Reduzir a um problema mais simples; decomposição; simplificação.										
	Fazer uma simulação, experimentação ou dramatização.										
	Fazer um desenho, diagrama ou esquema.	X	X	X	X	X	X				X
	Fazer uma listagem de algumas/todas as possibilidades.		X						X	X	

A partir de uma primeira leitura horizontal do quadro 8, constata-se que as estratégias mais utilizadas por este aluno na resolução dos dez problemas propostos foram *Fazer um desenho, diagrama ou esquema* e *Fazer tentativas, conjecturas*. A primeira categoria de estratégias referida surge em sete dos problemas resolvidos enquanto que a segunda categoria está patente em quatro dos problemas, num dos quais em simultâneo com a primeira categoria referida. As outras estratégias utilizadas pelo aluno foram *Fazer uma listagem de algumas/todas as possibilidades* e *Usar dedução lógica; fazer eliminação.*

Numa segunda leitura do quadro 8, desta vez realizando uma análise vertical, verifica-se que em cinco dos problemas propostos o aluno recorreu, simultaneamente, a mais do que uma estratégia para determinar a solução ao problema enquanto que nos outros cinco problemas parece ter recorrido apenas a um tipo de estratégia.

Capítulo V

Conclusão

O presente capítulo pretende sistematizar as principais ideias que se destacam do trabalho desenvolvido pelos quatro alunos, Ema, André, Mariana e José, ao nível das representações e das estratégias utilizadas na resolução dos diversos problemas propostos. Não se pretende estabelecer comparações entre as quatro crianças ou sugerir generalizações, pretende-se sim compreender estes quatro casos, identificando simultaneamente pontos fundamentais e reflectindo sobre os mesmos.

As conclusões servem de apoio a algumas considerações gerais no âmbito do Ensino da Matemática, no que se refere à importância das representações na resolução de problemas nos primeiros anos de escolaridade.

Análise cruzada das representações/estratégias dos alunos

Como já foi referido anteriormente, com a presente investigação pretende-se investigar o papel que as representações, elaboradas por alunos do 1.º ano de escolaridade, desempenham na resolução de problemas de Matemática. Com este estudo procuro responder às seguintes questões:

a) Que representações preferenciais utilizam os alunos para resolver problemas?

b) De que forma é que as diferentes representações são influenciadas pelas estratégias de resolução de problemas utilizadas pelos alunos?

c) Que papel têm os diferentes tipos de representação na resolução dos problemas?

A partir das representações e das estratégias apresentadas pelos quatro alunos no decorrer da resolução dos problemas propostos, procurei desenvolver uma análise cruzada, que possibilita uma visão global e simultânea, concretizada no quadro 9.

Quadro 9 – Representações/Estratégias utilizadas pelos quatro alunos

Estratégias de resolução de problemas	Tarefa	Representações – Activas	Representações – Icónicas	Representações – Simbólicas
Fazer tentativas, conjecturas	A			
	B			
	C		*Ema*	*Ema*
	D		*Ema*	*Ema*
	E		*Ema André Mariana José*	*José*
	F		*André*	*André*
	G		*André José*	*André José*
	H		*José*	*Ema André Mariana José*
	I		*André*	*Ema André Mariana José*
	J			
Usar dedução lógica; fazer eliminação	A			
	B			
	C			
	D			
	E		*Ema*	
	F			
	G			
	H			
	I			
	J		*André José*	*André José*
Fazer uma simulação, experimentação ou dramatização	A			
	B			
	C			
	D			
	E			
	F			
	G	*Ema Mariana*		
	H			
	I			
	J			
Fazer um desenho, diagrama ou esquema	A		*Ema André Mariana José*	*Ema André Mariana José*
	B		*Ema André Mariana José*	*Mariana José*
	C		*Ema André Mariana José*	*Ema André Mariana José*
	D		*Ema André José*	*Ema André José*
	E		*Ema André Mariana José*	*José*
	F		*Ema Mariana José*	*Ema Mariana José*
	G			
	H			
	I			
	J		*Ema André Mariana José*	*Ema André Mariana José*
Fazer uma listagem de algumas/todas as possibilidades	A			
	B		*Ema André Mariana José*	*Mariana José*
	C			
	D			*Mariana*
	E			
	F			
	G			
	H		*José*	*Ema André Mariana José*
	I		*André*	*Ema André Mariana José*
	J			

Das oito categorias de *Estratégias de resolução de problemas* consideradas no âmbito da presente investigação, apenas surgem no quadro cinco estratégias, uma vez que foram estas as que se revelaram no decorrer da resolução dos problemas pelos alunos.

Ao fazer o cruzamento entre o tipo de estratégia e o tipo de representação utilizado, surgem na tabela os dez problemas propostos, bem como os alunos que optaram por essa estratégia/representação.

Da análise do quadro 9, constata-se que a estratégia mais utilizada pelos quatro alunos no âmbito da resolução dos dez problemas propostos foi a estratégia *Fazer um desenho, diagrama ou esquema.*

A partir da análise deste quadro, e numa perspectiva horizontal, verifica-se que esta categoria das estratégias se encontra associada tanto às representações do tipo icónico, como às representações simbólicas, pelos quatro alunos. Apenas em três dos problemas propostos (G, H e I), esta estratégia não foi utilizada por nenhum dos alunos.

Numa abordagem vertical, e observando as representações do tipo icónico, observa-se que em cinco dos problemas propostos (A, B, C, E e J) os quatro alunos utilizaram elementos icónicos para resolver os problemas em questão, recorrendo à estratégia *Fazer um desenho, diagrama ou esquema*, enquanto que em outros dois problemas (D e F), três dos alunos revelaram a mesma opção.

Quanto às representações simbólicas, verifica-se que nos problemas A, C e J, os quatro alunos recorreram aos elementos do tipo simbólico para resolver os problemas referidos através da estratégia *Fazer um desenho, diagrama ou esquema*, enquanto que nos restantes problemas propostos (B, D, E e F) apenas alguns dos alunos apresentaram a mesma escolha.

A segunda estratégia mais utilizada pelos alunos na resolução dos problemas foi a estratégia *Fazer tentativas, conjecturas.*

Tendo por base o quadro 9, e a partir de uma leitura horizontal, constata-se que esta estratégia, tal como a referida anteriormente, também se encontra associada a dois tipos de representações: icónico e simbólico. Apenas em três dos problemas propostos (A, B e J), esta estratégia não foi utilizada por nenhum dos alunos.

Realizando agora uma leitura numa perspectiva diferente, verifica-se que, no que diz respeito às representações icónicas, estas foram utilizadas conjuntamente com a estratégia *Fazer tentativas, conjecturas* nos problemas C, D, E, F, G, H e I. No problema E, os quatro alunos deste estudo revelaram esta opção, enquanto que nos restantes problemas referidos nem todos os alunos seguiram o mesmo caminho.

Relativamente às representações simbólicas, estas foram utilizadas simultaneamente com a estratégia *Fazer tentativas, conjecturas* nos problemas C, D, E, F, G, H e I. No problema H e I, os quatro alunos deste estudo revelaram esta associação, enquanto que nos restantes problemas referidos nem todos os alunos apresentaram a mesma opção.

A terceira estratégia mais utilizada pelos alunos desta investigação foi a estratégia *Fazer uma listagem de algumas/todas as possibilidades.*

A partir da leitura do quadro 9, verifica-se que em três dos problemas propostos (B, H e I) tanto as representações icónicas como as representações simbólicas foram utilizadas recorrendo à estratégia *Fazer uma listagem de algumas/todas as possibilidades.* No problema D, esta estratégia foi utilizada apenas em conjunto com as representações simbólicas.

No que concerne à utilização das representações icónicas através desta estratégia, todos os alunos as utilizaram no problema B, enquanto que nos problemas H e I, está presente apenas para um dos alunos.

Ainda relativamente a esta estratégia, e no que diz respeito às representações simbólicas, verifica-se que os quatro alunos recorreram a elementos simbólicos para resolver os problemas H e I. Nos problemas B e D, estão dois alunos e um aluno, respectivamente, que realizaram esta opção.

A estratégia *Usar dedução lógica; fazer eliminação* foi utilizada em dois dos problemas, E e J, associada a elementos icónicos. Dois dos alunos deste estudo recorreram a esta estratégia mas utilizando representações de natureza simbólica num dos problemas propostos (J).

Por fim, uma quinta estratégia utilizada pelos alunos foi a estratégia *Fazer uma simulação, experimentação ou dramatização* a qual foi utilizada conjuntamente com as representações activas no problema G, por dois dos alunos deste estudo.

Conclusões do estudo

Que representações preferenciais utilizam os alunos para resolver problemas?

No que diz respeito ao tipo de representações preferenciais utilizadas pelos quatro alunos no âmbito da resolução dos problemas propostos verifica-se que as mais utilizadas são as do tipo icónico e as do tipo simbólico. No entanto, estes dois tipos de representações não foram utilizados nem da mesma forma, nem com a mesma função, nem no mesmo contexto, pelos quatro alunos deste estudo.

Tanto as representações icónicas como as representações simbólicas se subdividem em algumas subcategorias. Analiso agora os elementos mais utilizados pelos quatro alunos dentro de cada uma destas categorias.

O elemento icónico predominante nas representações de Ema é o desenho. Muitos dos desenhos apresentados são recheados de diversos pormenores, o que pode indicar que o raciocínio matemático desta aluna está ainda muito ligado ao concreto e ao real. Os símbolos não convencionais surgem em poucos problemas, embora em alguns deles em simultâneo com o desenho. Ema preferiu desenhar os elementos tal como são na realidade a criar os seus próprios símbolos. Talvez por enquanto se sinta mais segura comunicando ideias e conceitos matemáticos através do desenho do que através de elementos menos concretos. No campo das representações simbólicas, a aluna recorreu por diversas vezes aos algarismos e números nas representações construídas, para indicar os elementos com que iria trabalhar e/ou para sistematizar a resposta. Esta aluna apenas em duas ocasiões apresentou a resolução em forma de expressão numérica na qual utilizou uma linguagem matemática mais formal. A palavra escrita surge nas suas representações sobretudo para identificar os elementos representados.

Relativamente a André, os elementos icónicos mais presentes nas suas representações foram os diagramas e os símbolos não convencionais, enquanto que o desenho apenas surge numa das representações. O diagrama funcionou como suporte ao raciocínio matemático desenvolvido e como base para determinar a solução ou uma das soluções correctas. Os símbolos criados pelo próprio aluno para representar diferentes elementos do real (símbolos não convencionais), foram manipulados pelo aluno como se se tratassem de verdadeiros elementos com os quais raciocinou e determinou uma forma de solucionar o problema proposto. Quanto às representações simbólicas, os algarismos e números bem como as letras e a palavra escrita estiveram bem patentes na maioria das representações construídas. Os algarismos e números foram utilizados sobretudo para representar a solução do problema e também para representar passos intermédios no decorrer do processo de resolução. A palavra escrita surge em várias das representações apresentadas, nalgumas delas sob a forma de inicial maiúscula representativa de uma determinada palavra ou elemento. As expressões matemáticas não fizeram parte das representações elaboradas.

Mariana, no campo das representações icónicas, recorreu mais ao diagrama e ao desenho, tendo criado pouquíssimos símbolos não convencionais. Representou a informação presente nos problemas sobretudo através de representações simbólicas, através de algarismos e números. Estes surgem ou para representar quantidades, ou em expressões numéricas, ou ainda para indicar a solução do problema proposto. A expressão numérica surge nas representações desta aluna, embora com pouca frequência. Numa das ocasiões em que tal se verifica, a aluna recorre inicialmente a representações icónicas que parecem servir de base à construção da referida linguagem simbólica. A palavra escrita surge também nas representações desta aluna, revelando-se mesmo o único meio pelo qual a aluna resolveu uma das situações propostas.

No caso de José, os elementos icónicos mais utilizados foram o diagrama e os desenhos. Os desenhos deste aluno mostraram-se ricos em pormenores e procuraram representar a realidade o mais fielmente possível. As estruturas da maioria das situações apresentadas foram representadas por diagramas, o que poderá de alguma forma revelar um raciocínio matemático organizado e estruturado. Os símbolos não convencionais raramente foram utilizados por José. As representações icónicas parecem ainda ter servido de apoio à construção das representações simbólicas, através das quais o aluno comunicou a solução com uma linguagem matemática formal e totalmente simbólica. No campo das representações simbólicas, os algarismos e os números são os elementos simbólicos mais presentes nas resoluções apresentadas. As expressões numéricas têm igualmente uma forte presença nas representações deste aluno. A palavra escrita surge sobretudo para representar elementos do problema.

Ema recorreu sobretudo a representações do tipo icónico para resolver os problemas propostos, embora tenha utilizado materiais manipulativos para resolver um dos problemas propostos, revelando neste caso o recurso a representações activas. Dentro das representações icónicas, Ema revelou ainda uma tentativa para criar diagramas, para organizar o raciocínio e estruturar a informação presente no problema, tendo apresentado alguns no decorrer do trabalho apresentado.

Relativamente a esta aluna, as representações simbólicas têm também a sua presença porém o seu papel é manifestamente diferente do papel das representações citadas atrás no que diz respeito ao processo de resolução. As representações simbólicas são sobretudo utilizadas para representar e comunicar ou a solução encontrada ou um determinado número de elementos do problema em questão. Apenas em dois dos problemas resolvidos a aluna recorreu apenas a representações simbólicas.

No que concerne a André, este aluno utilizou sobretudo representações do tipo simbólico para resolver os problemas propostos. Embora um importante elemento icónico, o diagrama, esteja presente em quase todas as resoluções, o seu papel é o de descompactar a estrutura do problema, servindo de precioso apoio aos raciocínios matemáticos que conduzem à solução correcta. No entanto, pelo que se pode observar no trabalho deste aluno, os elementos constituintes desses diagramas são sobretudo de cariz simbólico, o que pode revelar que este aluno talvez tenha chegado a um nível de desenvolvimento em que já consegue "trabalhar" com objectos mais abstractos e menos concretos.

No que diz respeito a Mariana, embora esta aluna recorra com frequência às representações simbólicas, as representações icónicas parecem desempenhar um importante papel para resolver os problemas. Também as representações activas desempenharam um importante papel uma vez que permitiram a Mariana resolver um dos problemas, que de outro modo não teria conseguido resolver.

No caso do José, embora as representações icónicas (desenho e diagrama) estejam presentes na maioria das representações apresentadas e tenham funcionado como precioso apoio a diversos raciocínios matemáticos, são as representações simbólicas que sobressaem nas representações utilizadas pelo aluno na resolução de todos os problemas apresentados.

De que forma é que as diferentes representações são influenciadas pelas estratégias de resolução de problemas utilizadas pelos alunos?

Pela análise dos dados recolhidos, nomeadamente os que se referem à relação que se estabelece entre o tipo ou tipos de representações utilizadas e a estratégia ou estratégias seguidas no âmbito da resolução das diferentes situações propostas, pode concluir-se que tanto as representações do tipo icónico como as representações do tipo simbólico foram elaboradas sendo associadas a diferentes estratégias. As representações activas, talvez dado o seu cariz experimental, encontram-se directamente ligadas à estratégia de simulação, quando os alunos ainda não conseguem reconstruir e simular, no papel, a situação do problema de outra forma.

Pela análise dos resultados obtidos conclui-se que a estratégia mais utilizada pelos quatro alunos no âmbito da resolução dos dez problemas propostos foi a estratégia *Fazer um desenho, diagrama ou esquema*, encontrando-se associada tanto às representações do tipo icónico como às representações simbólicas, pelos quatro alunos. Apenas em três dos problemas propostos esta estratégia não foi utilizada por nenhum dos alunos. Um destes três problemas foi resolvido por dois dos alunos através do recurso às representações activas e pelos restantes alunos através das representações icónicas mas recorrendo à estratégia *Fazer tentativas, conjecturas*. Os outros dois problemas referidos têm características semelhantes no que diz respeito ao raciocínio e modo de resolução envolvidos, verificando-se que tanto as representações icónicas como as simbólicas surgem no decorrer da sua resolução associadas, porém, às estratégias *Fazer uma listagem de algumas/todas as possibilidades* e *Fazer tentativas, conjecturas*.

Uma outra estratégia muito utilizada pelos alunos na resolução dos problemas foi a estratégia *Fazer tentativas, conjecturas* e, tal como aconteceu com a estratégia *Fazer um desenho, diagrama ou esquema*, também esta se encontra associada a dois tipos de representações: icónico e simbólico. Verificou-se que esta estratégia não foi utilizada por nenhum dos alunos em três dos problemas propostos. Na resolução destes três problemas foram construídas representações icónicas e simbólicas mas tendo por base as estratégias *Usar dedução lógica; fazer eliminação* e *Fazer um desenho, diagrama ou esquema*.

Uma terceira estratégia mais utilizada pelos alunos desta investigação foi a estratégia *Fazer uma listagem de algumas/todas as possibilidades*. Constatou-se que tanto as representações icónicas como as representações simbólicas foram utilizadas recorrendo a esta estratégia. Num dos problemas proposto, esta estratégia foi utilizada apenas em conjunto com as representações simbólicas.

Além das três estratégias atrás referidas, os alunos desta investigação recorreram ainda à estratégia, já referida, *Usar dedução lógica; fazer eliminação* a qual foi utilizada com as representações icónicas em dois dos problemas e com as representações simbólicas num dos problemas propostos.

Por fim, uma quinta estratégia utilizada pelos alunos foi a estratégia *Fazer uma simulação, experimentação ou dramatização* a qual foi utilizada conjuntamente com as representações activas num dos problemas, por dois dos alunos deste estudo.

A relação que se estabelece entre a representação e a estratégia utilizada parece estar assim muito ligada ao tipo de problema proposto, no que se refere ao tipo de raciocínio e relações matemáticas envolvidas.

Todos os problemas propostos procuraram ser problemas de processo, que requeressem o uso de diferentes estratégias de resolução de problemas e apelassem ao uso diversificado de distintos tipos de representação. Alguns dos problemas apresentados tinham mais do que uma resolução possível o que, para além de levar o aluno a envolver-se activamente num processo de descoberta, proporcionava o uso de diferentes representações com diferentes estratégias. Constatou-se igualmente que, em mais do que um dos problemas propostos, mais do que uma estratégia esteve presente na resolução, associada a um ou dois tipos de representação. No conjunto dos problemas propostos esteve presente um problema de lógica que exigia raciocínio dedutivo, caracterizando-se a resolução deste tipo de problemas por diferentes estratégias e representações, revelando-se apelativos e motivadores para os alunos.

Deste trabalho de investigação pode concluir-se que as representações construídas pelos alunos no decorrer da resolução das tarefas propostas, não dependem em exclusivo do tipo de estratégia ou estratégias desenvolvidas uma vez que, no caso da estratégia *Fazer uma simulação, experimentação ou dramatização*, são as representações activas que lhe dão sustentação e apoio. Já no caso das restantes estratégias utilizadas verifica-se a utilização tanto das representações icónicas como das representações simbólicas, parecendo essa utilização estar directamente relacionada com as características da tarefa proposta no que diz respeito às estruturas matemáticas envolvidas.

Que papel têm os diferentes tipos de representação na resolução dos problemas?

As diferentes representações utilizadas pelos quatro jovens participantes nesta investigação, no decorrer da resolução dos dez problemas propostos, caracterizaram-se por desempenhar funções semelhantes de aluno para aluno e, como tal, o papel dessas representações será apresentado de uma forma que engloba o trabalho desenvolvido pelos quatro alunos. Sempre que for necessário, será particularizado o desempenho de determinado aluno.

As representações utilizadas pelos quatro alunos no âmbito da presente investigação, englobadas em três grandes categorias – representações activas, representações icónicas e representações simbólicas – revelaram possuir papéis e funções muito distintas entre si. Uma das funções iniciais ao nível da resolução dos problemas propostos foi o de possibilitar aos alunos transpor para o papel a informação ouvida no decorrer da leitura dos enunciados dos problemas. Neste caso, as representações apoiaram a compreensão do enunciado do problema, a interpretação do mesmo, bem como das relações existentes entre os dados do problema.

As representações activas, através da manipulação de materiais concretos, tiveram um papel crucial para que duas das alunas deste estudo, a Ema e a Mariana, conseguissem resolver um dos problemas proposto. Sem o recurso a este tipo de representações, as alunas em questão não teriam conseguido resolver este problema uma vez que, embora revelassem entender as relações existentes no problema, não conseguiam concretizar o raciocínio matemático que conduziria à solução correcta. Através da acção, estas duas alunas conseguiram concretizar o raciocínio matemático que esteve subjacente à correcta resolução do problema em questão. Ao associar ideias abstractas a uma situação concreta, estas alunas poderão ter desenvolvido modelos mentais que deram sentido ao contexto do problema e as ajudou a comunicar a forma como tinham determinado a solução correcta.

No que diz respeito às representações icónicas, estas encontram-se divididas em três subcategorias: representações pictóricas (desenhos); diagramas e símbolos não convencionais. Cada uma destas subcategorias revelou possuir um papel muito próprio no âmbito da resolução dos problemas em que estiveram envolvidas, ou isoladamente ou em simultâneo com elementos igualmente icónicos ou mesmo com elementos simbólicos.

O desenho (representação icónica) desempenhou um papel fulcral nas representações de alguns dos alunos, nomeadamente no trabalho de Ema, representando diferentes elementos do problema ou chegando, em alguns casos, a representar a resolução completa do problema. Muitos dos desenhos apresentados por esta aluna são recheados de diversos pormenores, o que pode indicar que o raciocínio matemático desta aluna está ainda muito ligado ao concreto e ao real. Este elemento icónico serviu ainda, frequentemente, como recurso de interpretação do problema e como registo da solução.

Houve também situações em que o desenho foi utilizado apenas para representar aspectos da situação apresentada no texto do problema sem expressar qualquer tipo de relação. Neste caso, o desenho serviu essencialmente para o aluno (José) não se esquecer de determinada quantidade de elementos referidos no problema em questão. Este aluno recorreu preferencialmente ao desenho bem como a elementos simbólicos para representar as diferentes informações presentes nos problemas propostos.

O desenho parece ter dado a possibilidade a estes alunos de construírem um significado para as diferentes situações, muitas delas novas, que surgiam no âmbito da resolução dos problemas propostos. O desenho funcionou assim como uma ferramenta para os alunos darem significado aos conceitos e às ideias matemáticas com que se iam deparando. Através deste elemento icónico, os alunos tiveram oportunidade de reflectir sobre o que iam construindo e recordar o processo matemático seguido a fim de o comunicar aos outros. Os desenhos criados pelos alunos tinham significado, eram intencionais e apresentavam um propósito.

Uma das subcategorias das representações icónicas muito utilizada, sobretudo pelo André e pelo José, e com menor frequência pela Ema e pela Mariana, foi o diagrama. Esta representação revelou-se uma ferramenta essencial com a qual os alunos organizaram o pensamento matemático de modo a representarem a estrutura dos problemas que procuravam resolver. O diagrama serviu ainda de apoio a diferentes raciocínios matemáticos e lançou as bases para a solução dos problemas envolvidos. Através desta representação, os alunos comunicaram também o processo de resolução seguido bem como a solução encontrada. Através dos diagramas construídos, os alunos realizaram diversas inferências que os conduziu, na maioria das vezes, à resposta correcta. Como já foi referido anteriormente, mas que importa realçar neste ponto, a capacidade de desenvolver inferências correctas a partir de um diagrama é aquilo que caracteriza em primeiro lugar a importância do raciocínio a partir deste tipo de representação. Contudo, as inferências que os alunos desenvolvem podem variar consoante o tipo de diagrama utilizado.

Os símbolos criados pelos próprios alunos para representar determinado elemento do real, os símbolos não convencionais, tiveram igualmente um papel importante no âmbito da presente investigação. Com frequência, verificou-se que os símbolos não convencionais foram manipulados como se de objectos reais se tratassem. Estes símbolos permitiram aos alunos expressar as suas ideias matemáticas e comunicar aos outros como encontraram a solução para o problema proposto, além de lhes ter possibilitado uma resolução menos morosa do problema proposto. Importa ainda realçar que estes símbolos não convencionais tiveram significado e funcionaram como suporte para a descoberta e construção pessoal de linguagens convencionais e não convencionais.

André, em particular, foi o aluno que mais construiu símbolos não convencionais para representar os diferentes elementos do real com que se ia deparando nos diferentes problemas, enquanto que o desenho apenas surge numa das representações. Ema preferiu desenhar os elementos tal como são na realidade a criar os seus próprios símbolos, os símbolos não convencionais. Talvez por enquanto se sinta mais segura comunicando ideias e conceitos matemáticos através do desenho do que através de elementos menos concretos. Mariana e José criaram símbolos não convencionais, representativos do real, em dois dos problemas apresentados. Este último aluno referido recorreu preferencialmente ao desenho e a elementos simbólicos para representar as diferentes informações presentes nos problemas propostos.

Verificou-se, no decorrer das representações apresentadas, que estes alunos do 1.º ano de escolaridade usaram, desde as primeiras representações, símbolos não convencionais. Embora o desenho tenha frequentemente sido utilizado com diferentes finalidades, já referidas, na resolução de vários dos problemas propostos, os símbolos não convencionais, que se caracterizam pela sua espontaneidade, individualidade, e significado muito pessoal, foram também utilizados, mais por uns alunos dos que por outros, sempre com o objectivo de expressar ideias matemáticas e comunicar aos outros o processo de resolução que permitiu a determinação do resultado correcto.

No que concerne às representações simbólicas, estas encontram-se divididas em três subcategorias: algarismos e números; sinais de operações e sinal de igual/expressões matemáticas e letras/palavra escrita. Estas subcategorias das representações do tipo simbólico estiveram presentes desde as primeiras representações elaboradas pelos alunos. No entanto, o seu papel variou de aluno para aluno e consoante as características do problema que estava envolvido.

Nalgumas situações, as representações simbólicas foram apenas utilizadas para representar e comunicar ou a solução encontrada e/ou um determinado número de elementos do problema em questão. Noutros problemas, os elementos simbólicos foram utilizados no âmbito da resolução do problema em si, constituindo os elementos que formavam os diagramas apresentados.

Em alguns dos problemas propostos, dois dos alunos desta investigação recorreram a representações icónicas para interpretar o problema em questão e apoiar o raciocínio matemático, para em seguida, apresentarem uma outra representação (totalmente simbólica) onde formalizaram a interpretação e o raciocínio efectuados, expressando a resolução através de símbolos matemáticos formais, sob a forma de expressão matemática. Na representação simbólica, estes alunos traduziram numa expressão matemática a relação representada pela representação icónica construída previamente.

Ainda no campo das representações simbólicas, os algarismos e números bem como as letras e a palavra escrita estiveram bem patentes na maioria das representações construídas. Os algarismos e números (utilizados em quase todos os problemas) foram utilizados sobretudo para representar a solução do problema e também para representar passos intermédios no decorrer do processo de resolução. A palavra escrita surge em muitas das representações apresentadas, nalgumas delas sob a forma de inicial maiúscula representativa de uma determinada palavra ou elemento. Na resolução de um dos problemas, um dos alunos (Mariana) recorreu unicamente à palavra escrita para resolver e para representar a solução ao problema em questão, apresentando o resultado final através de um outro elemento simbólico. Relativamente às expressões matemáticas, nem todos os alunos as utilizaram no decorrer das representações construídas. A expressão matemática surge nalgumas representações como sistematização da interpretação e do raciocínio matemático efectuados com base em representações icónicas previamente construídas.

Relativamente às representações simbólicas, verificou-se que foram raras as resoluções em que os alunos apenas recorreram a elementos simbólicos para determinar a solução do problema. Constatou-se que os elementos simbólicos se apoiam nos elementos icónicos previamente construídos, e que são estes últimos que ajudam os alunos a descompactar o problema e a dar significado à interpretação do mesmo. Nestes elementos icónicos destaca-se o papel dos diagramas, na medida em que constituem ferramentas cheias de potencialidades, constituídos, muitas vezes, por elementos simbólicos, convencionais e não convencionais.

Verificou-se ainda que, mesmo quando os alunos não determinaram a solução correcta do problema proposto, as representações apresentadas revelaram se o aluno em questão tinha ou não compreendido e interpretado correctamente o problema. Como exemplo, constata-se que na resolução de um dos problemas propostos, embora o resultado obtido não seja o correcto, Ema revelou o modo como interpretou o problema ouvido, o processo de resolução e o resultado obtido através das representações apresentadas. Estas revelam que a aluna compreendeu o problema proposto e que conseguiu expor no papel a forma como o interpretou e como raciocinou para chegar à resposta. Neste caso, a solução incorrecta apresentada adveio certamente de um erro de contagem, uma vez que tanto as representações icónicas como as representações simbólicas utilizadas pela aluna ilustram um raciocínio matemático correcto, bem como a compreensão das relações matemáticas envolvidas.

As soluções incorrectas apresentadas resultaram muitas vezes da incorrecta interpretação do problema e consequente não compreensão das relações matemáticas envolvidas. Dificuldades ao nível da leitura e interpretação correctas do enunciado do problema, além de alguma precipitação, poderão ter também originado respostas incorrectas.

Algumas considerações finais

As considerações finais apresentadas enquadram-se no âmbito do ensino da Matemática, e referem-se à importância das representações na resolução de problemas nos primeiros anos de escolaridade.

Como se pode concluir do trabalho desenvolvido no âmbito da presente investigação, as representações construídas pelos alunos no decorrer da resolução de problemas desempenham um papel crucial e fundamental na correcta interpretação e resolução dos mesmos. Em particular, os diagramas utilizados pelos alunos parecem ter funcionado como preciosas ferramentas para o raciocínio matemático, sendo por isso essencial que os alunos sejam encorajados e orientados para criar diagramas como forma de melhorar a sua compreensão da estrutura do problema. Mas para que os alunos os possam criar, é fundamental que os problemas propostos sejam de uma natureza que desafie os alunos para o uso deste tipo de representação. É igualmente fundamental por parte do professor, que este acompanhe e registe as evoluções verificadas no que diz respeito às dificuldades sentidas quer na criação de diagramas para representar a estrutura de um problema, quer na interpretação e reflexão sobre as inferências obtidas a partir dos mesmos.

As representações utilizadas, além de possibilitarem aos alunos a resolução dos problemas, permitem ao professor compreender qual o raciocínio matemático que esteve subjacente à interpretação e resolução apresentadas. Mas como pode o professor ter acesso a processos que têm lugar internamente nos alunos? Precisamente através das representações externas apresentadas pelo aluno, complementadas com a sua explicação de como as construiu e utilizou. É igualmente fundamental proporcionar aos alunos espaços nos quais estes partilhem com os seus pares, e com o professor, como e porque construíram esta ou aquela representação. Esta partilha permite aos colegas terem contacto com outras formas de pensar, com outro tipo de representações, e permite aos professores adaptar a sua prática pedagógica em função do *feedback* recebido, uma vez que estes momentos de partilha providenciam indicações preciosas das diversas etapas que o aluno atravessou durante a resolução de um determinado problema. O professor poderá, desta forma, preparar o seu trabalho em função dos aspectos em que os seus alunos apresentarem mais dificuldade, potenciando outros que permitam desenvolver diferentes competências no campo da Matemática.

As representações iniciais, espontâneas e muito pessoais irão, gradualmente, transformar-se em representações mais formais, simbólicas, verificando-se que em muitas situações os dois tipos de representação, menos formais e mais formais, coexistirão sempre que o aluno de tal sentir necessidade. Esta dupla utilização não retira, de modo algum, correcção ao trabalho realizado pelo aluno, muito pelo contrário. Fornece-lhe uma maior riqueza de pormenores e um maior cunho pessoal, além de fornecer ao professor um conjunto de informações bastante pertinentes no que se refere às tarefas desenvolvidas.

O que poderá então acontecer se o professor, nos anos iniciais de escolaridade, não valorizar as representações pessoais e espontâneas dos seus alunos? E se o professor tentar impor, logo desde o início, a utilização de representações simbólicas convencionais, formais, que pouco ou nada significam para alunos? O que acontecerá se o professor não tiver em consideração que os alunos, com frequência, necessitam de concretizar o raciocínio e o pensamento matemático, quer através das representações icónicas, quer mesmo através das representações activas? Por um lado, poderá eventualmente potenciar dificuldades na estruturação do raciocínio matemático que impeçam os alunos de resolver os problemas propostos. Por outro lado, poderá originar atitudes menos positivas face a situações em que surjam dificuldades, nas quais o aluno poderá sentir que não possui as ferramentas necessárias para determinar o resultado correcto.

Os resultados deste trabalho de investigação levam a crer que, para além de outros factores intrínsecos e extrínsecos ao próprio aluno, também o tipo de problema é um factor determinante no tipo de representações construídas pelo aluno.

Com esta investigação espero ter contribuído para uma maior e melhor compreensão do papel das representações no domínio do ensino e da aprendizagem da Matemática mais concretamente, no âmbito da resolução de problemas, durante os primeiros anos de escolaridade do ensino básico. Espero igualmente que este estudo tenha conseguido fornecer instrumentos que possam ser úteis na prática pedagógica dos professores e que potenciem o trabalho desenvolvido em sala de aula com os alunos, no âmbito da resolução de problemas em Matemática.

Isto poderá ser tanto mais pertinente no actual contexto do novo programa de Matemática (Ponte et al., 2007) que atribui às representações matemáticas um papel fundamental na aprendizagem desta disciplina. Recordo que neste documento é sugerido que as representações icónicas deverão preceder as representações simbólicas, uma vez que os alunos poderão precisar de representar objectos e relações matemáticas através de representações próprias "não convencionais" (p. 10). Ora, no âmbito desta investigação, ficou bastante clara a necessidade que os alunos revelam de criar essas representações próprias e com que objectivo as usam. Julgo que podemos igualmente tirar importantes e pertinentes ilações acerca da importância, bem como do papel, dos três tipos de representações referidos no âmbito desta investigação, para o desenvolvimento de alunos matematicamente competentes.

Referências bibliográficas

Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a Matemática.* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica.* Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica (DEB).

Almeida, L. & Freire, T. (1997). *Metodologia da Investigação em Psicologia e Educação* (1ª edição). Braga: Psiquilíbrios.

APM (1988). *A renovação do currículo de Matemática.* Lisboa: APM.

APM (1998). *Matemática 2001: diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática.* Lisboa: APM.

APM, (2002). *Pasta de actividades – Materiais para o 1.º Ciclo (versão reformulada).* Lisboa: APM.

Boavida, A. (1994). Contributo para a compreensão das representações pessoais dos professores sobre resolução de problemas. In D. Fernandes, A. Borralho, & G. Amaro (Eds.), *Resolução de problemas: processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular* (pp. 181-196). Lisboa: IIE.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Borralho, A. (1990). *Aspectos metacognitivos na resolução de problemas de Matemática: proposta de um programa de intervenção* (Tese de Mestrado). Lisboa: APM.

Bruner, J. (1989). El desarrollo de los processos de representacion. In J. L. Linaza (Ed.), *Acción, pensamiento y language* (pp. 119-128). Madrid: Alianza Editorial.

Bruner, J. (1999). *Para uma Teoria da Educação.* Lisboa: Relógio D'Água.

Bruner, J. (2000). *A cultura da educação.* Lisboa: Edições 70.

Canavarro, A. P. (2003). *Práticas de ensino da Matemática: Duas professoras, dois currículos*. (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Cândido, P. T. (2001). Comunicação em Matemática. In K. Smole & M. Diniz (Eds.), *Ler, escrever e resolver problemas: Habilidades básicas para aprender matemática* (pp. 15 – 28). Porto Alegre: Artmed.

Cavalcanti, C. T. (2001). Diferentes formas de resolver problemas. In K. Smole & M. Diniz (Eds.), *Ler, escrever e resolver problemas. Habilidades básicas para aprender matemática* (pp. 121 – 149). Porto Alegre: Artmed.

Diezmann, C., & English, L. (2001). Promoting the use of diagrams as tools for thinking. In A. Cuoco, & F. Curcio (Eds.), *Roles of Representation in School Mathematics - 2001 Yearbook* (pp. 77-89). Virgínia: National Council of Teachers of Mathematics.

Diniz, M. I. (2001). Resolução de problemas e comunicação. In K. Smole & M. Diniz (Eds.), *Ler, escrever e resolver problemas: Habilidades básicas para aprender matemática* (pp. 87 – 97). Porto Alegre: Artmed.

PFCM/UE (2007). *Resolvendo problemas com adição e subtracção.* (consultado em http://www.aprendermatematica.uevora.pt/)

Equipa do Projecto DSN (2005). *Desenvolvendo o sentido do número. Materiais para o educador e professor do 1.º ciclo*. Lisboa: APM.

Fernandes, D. (1992). Resolução de problemas: Investigação, Ensino, Avaliação e Formação de Professores. In M. Brown, D. Fernandes, J. Matos, & J. Ponte (Eds.), *Educação Matemática* (pp.45-103). Lisboa: IIE.

Fernandes, D., Borralho, A., & Amaro, G. (1994). *Resolução de problemas: Processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular*. Lisboa: IIE.

Ferreira, E. (2003). *Resolver problemas – Uma actividade matemática. 1.º Ciclo do Ensino Básico*. Alfragide: Texto.

Gave (2001). *Prova de Aferição de Matemática. 4.º ano de escolaridade*. Lisboa: Ministério da Educação. (consultado em http://www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=7&fileName=pafericaomat4ano2001.pdf)

Gave (2004). *Prova de Aferição de Matemática. 4.º ano de escolaridade*. Lisboa: Ministério da Educação. (consultado em http://www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=7&fileName=pamat1ciclo2004.pdf)

Gave (2007). *Prova de Aferição de Matemática. 4.º ano de escolaridade*. Lisboa: Ministério da Educação. (consultado em http://www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=7&fileName=prova_1_ciclo_matem_tica.pdf)

Goldin, G. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 197-218). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of Representations and the Development of Mathematical Concepts. In A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), *Roles of representation in school mathematics - 2001 Yearbook* (pp. 1-23). Virgínia: National Council of Teachers of Mathematics.

Holden, B. (2007). Preparing for problem solving. *Teaching Children Mathematics, 14*(5), 290-295.

Jesus, M. (2002). Interacções em Matemática: Resolução de problemas a pares. *Educação e Matemática, 67*, 15-17.

Lessard-Hébert, M., Goyette, G., & Boutin, G. (1994). *Investigação qualitativa: Fundamentos e práticas*. Lisboa: Instituto Piaget.

Lester, F. (1994). O que aconteceu à investigação em resolução de problemas de Matemática? A Situação nos Estados Unidos. In D. Fernandes, A. Borralho & G. Amaro (Eds.), *Resolução de Problemas: Processos Cognitivos, Concepções de Professores e Desenvolvimento Curricular* (pp. 13-31). Lisboa: IIE.

ME/DEB (2001). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.

ME/DEB (2004). Organização Curricular e Programas. Ensino Básico – 1.º Ciclo. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica. (Programa original publicado em 1990).

ME/DGEBS (1990). Reforma Educativa. Ensino Básico: Programa do 1.º Ciclo. Lisboa: Ministério da Educação. Direcção Geral dos Ensinos Básicos e Secundário.

Mulligan, J., & Vergnaud, G. (2006). Research on children's early mathematical development. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, present and future* (pp. 117-146). Rotterdam: Sense.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar.* Lisboa: APM e IIE.

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da matemática.* Lisboa: APM.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar.* Lisboa: APM.

Pires, M. (1992). *Processos de resolução de problemas: Uma abordagem à construção de conhecimento matemático por crianças do ensino primário.* (Tese de Mestrado, Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia). Lisboa: APM.

Polya, G. (2003). *Como resolver problemas.* Lisboa: Gradiva.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Org.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante,* 3(1), 3-18.

Ponte, J. P. (2006). Números e Álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & A. P. Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores* (pp. 5-27). Porto: SEM/SPCE.

Ponte, J. (2003). Proibir a calculadora: Uma medida eficaz? *Educação e Matemática, 75,* 43-44.

Ponte, J. P., & Canavarro, A. P. (1994). A resolução de problemas nas concepções e práticas dos professores. In D. Fernandes, A. Borralho, & G. Amaro (Eds.), *Resolução de problemas: Processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular* (pp. 197-211). Lisboa: IIE.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M., & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: ME/DGIDC.

Ponte, J., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Santos, M. E. (1991). *Mudança Conceptual na Sala de Aula: Um desafio pedagógico*. Lisboa: Livros Horizonte.

Schoenfeld, A. (1996). Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 61-72). Lisboa: APM & Projecto MPT.

Serrazina, L. (2002). Competência matemática e competências de cálculo no 1º ciclo. *Educação e Matemática, 69*, 57-60.

Smole, K., & Diniz, M. (2001). *Ler, escrever e resolver problemas. Habilidades básicas para aprender matemática.* Porto Alegre: Artmed.

Spencer, K. (1991). Psychology of learning: improving pupil performance. Thought, culture & cognitive models. In K. A. Spencer (Ed.), *The Psychology of Educational Technology and Instructional Media* (pp. 1-10). Liverpool: Manutius Press.

Stancanelli, R. (2001). Conhecendo diferentes tipos de problemas. In K. Smole & M. Diniz (Eds.), *Ler, escrever e resolver problemas: Habilidades básicas para aprender matemática* (pp. 103 – 120). Porto Alegre: Artmed.

Stanic, G., & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R. Charles & E. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 1-22). Reston, VA: NCTM & Lawrence Erlbaum.

Vale, I., & Pimentel, T. (2004). Resolução de problemas. In P. Palhares (Ed.), *Elementos de matemática para professores do Ensino Básico* (pp. 7-51). Lisboa: Lidel.

Valério, N. (2004). *Papel das representações na construção da compreensão matemática dos alunos do 1.º Ciclo.* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa, Faculdade de Ciências). Lisboa: APM.

Veia, L. (1996). *A resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação no 1.º ciclo do ensino básico: Três estudos de caso.* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Vieira, L., Cebolo, V., & Araújo, F. (2006). Resolução de problemas. In P. Palhares & A. Gomes (Eds.), *Mat1C, desafios para um novo rumo* (pp. 39-47). Braga: IEC.

Whitin, P., & Whitin, D. (2001). Using literature to invite mathematical representations. In A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), *Roles of representation in school mathematics - 2001 Yearbook* (pp. 228-237). Virgínia: National Council of Teachers of Mathematics.

Woleck, K. (2001). Listen to their pictures: An investigation of children's mathematical drawings. In A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), *Roles of representation in school mathematics - 2001 Yearbook* (pp. 215-227). Virgínia: National Council of Teachers of Mathematics.

Wong, K. (2004). Using Multi-modal think-board to teach mathematics. In *Proceedings of ICME-10*. Copenhagen: Technical University of Denmark. (consultado em http://math.nie.edu.sg/kywong/Multi-modal%20think-board%20ICME%2010%20paper.pdf)

Yin, R. (1984). *Case study research: Design and methods*. Bevery Hills: Sage.

Yin, R. (1993). *Applications of case study research*. Thousand Oaks: Sage.

ANEXOS

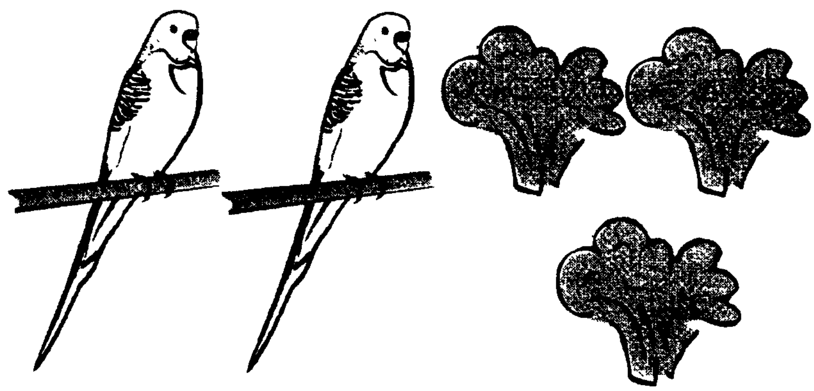
ANEXO 1

Problemas propostos aos alunos no âmbito da investigação

PROBLEMA A

Nome: ____ Ano/Turma ____________

Data: __________________________



Os periquitos

O Pedro tem 10 periquitos. Todos os dias o Pedro dá a cada 2 periquitos 3 folhas de alface. Quantas folhas de alface tem o Pedro de dar, por dia, aos seus 10 periquitos?

(Adaptado de Gave, 2001)

Explica como pensaste. Podes utilizar desenhos, palavras, esquemas ou números.

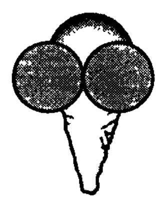
PROBLEMA B

Nome: ______________________________________ Ano/Turma ____________

Data: ________________________

As bolas de gelado

Na gelataria há bolas de gelado de 4 sabores diferentes:



- Morango (M)
- Chocolate (C)
- Baunilha (B)
- Amêndoa (A)

A Rita vai comprar um gelado com dois sabores. Quantos gelados com dois sabores diferentes se conseguem fazer?

(Adaptado de Gave, 2007)

Explica como pensaste. Podes utilizar desenhos, palavras, esquemas ou números.

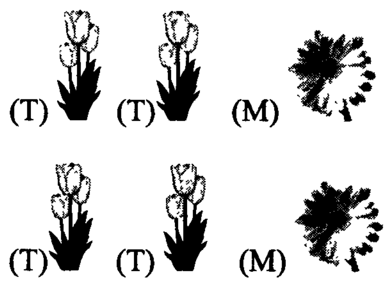
PROBLEMA C

Nome: ______________________________________ Ano/Turma ____________

Data: ________________________

As flores do canteiro

Os meninos da escola do Daniel estão a plantar flores num canteiro, respeitando sempre o seguinte padrão:



Os meninos plantaram 9 margaridas (M).

Quantas tulipas plantaram?

(Adaptado de Gave, 2004)

Flores
(T) - tulipa
(M) - margarida

Explica como pensaste. Podes utilizar desenhos, palavras, esquemas ou números.

PROBLEMA D

Nome: ______________________________________ Ano/Turma ____________

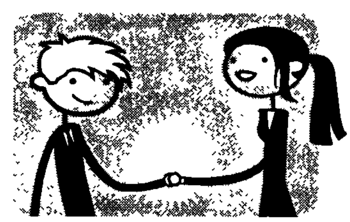
Data: ________________________

Os apertos de mão

A Rita, o Nuno, o Paulo e a Lili são amigos. Quando chegaram à escola cumprimentaram-se e cada um deu um aperto de mão aos outros.

Quantos apertos de mão deram ao todo?

(Adaptado de Stancanelli, 2001)



Explica como pensaste. Podes utilizar desenhos, palavras, esquemas ou números.

PROBLEMA E

Nome: ______________________________Ano/Turma __________

Data: ____________________

O voo das bruxas

20 bruxas têm de viajar em 8 vassouras para um encontro em Lisboa.

Porém, nenhuma vassoura pode levar mais do que 4 bruxas nem menos do que 2.

Como voarão as bruxas?

(Adaptado de Woleck, 2001)

Explica como pensaste. Podes utilizar desenhos, palavras, esquemas ou números.

PROBLEMA F

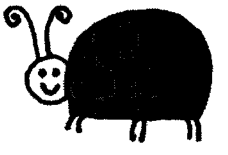
Nome: ____ Ano/Turma ____________

Data: ________________________

As meias das joaninhas

O João é um coleccionador muito estranho. Ele tem uma caixa com 5 joaninhas. Cada joaninha tem 6 patas. Se o João tivesse de comprar meias no Inverno para as suas joaninhas, quantas meias compraria?

(Adaptado de Cavalcanti, 2001)



Explica como pensaste. Podes utilizar desenhos, palavras, esquemas ou números.

PROBLEMA G

Nome: ____Ano/Turma ____________

Data: _________________________

Fazendo colecções

O Mário e o Artur coleccionam calendários. O Mário tem mais 3 calendários do que o Artur e no conjunto, os dois irmãos têm 21 calendários. Quantos calendários tem o Mário?

(Retirado de PFCM/UE, 2007)

Explica como pensaste. Podes utilizar desenhos, palavras, esquemas ou números.

PROBLEMA H

Nome: ______________________________________Ano/Turma ____________

Data: ________________________

A compra de selos

Uma máquina de selos automática aceita moedas de 1ct, 2ct, 5ct, 10ct e 20 ct.

Para comprar um selo que custe 49 ct, que moedas poderei usar?

(Adaptado de PFCM/UE, 2007)

Explica como pensaste. Podes utilizar desenhos, palavras, esquemas ou números.

PROBLEMA I

Nome: ______________________________ Ano/Turma __________

Data: ____________________

Compra de jogos

A escola do Monte recebeu um subsídio de 40 € para comprar jogos didácticos.

Os jogos disponíveis na papelaria local eram:

jogo A – 15 € jogo B – 20 € jogo C – 10 € jogo D – 5 €.

Que jogos se podem comprar com 40 euros? Que quantia sobra?

(Adaptado de PFCM/UE, 2007)

Explica como pensaste. Podes utilizar desenhos, palavras, esquemas ou números.

PROBLEMA J

Nome: ______________________________________ Ano/Turma ____________

Data: ________________________

Um problema de lógica

Cinco meninas – Ana, Rita, Paula, Dora e Eva – dividiram entre si os últimos gelados: três de morango e dois de chocolate.

Ana e Eva comeram gelados do mesmo sabor.

Eva e Paula comeram gelados com sabores diferentes.

Paula e Rita também comeram gelados com sabores diferentes.

Que gelado comeu cada menina?

(Adaptado de Diniz, 2001)

Explica como pensaste. Podes utilizar desenhos, palavras, esquemas ou números.

ANEXO 2

As categorias de análise

Tabela 3 – As categorias de análise

Domínios	Categorias	Subcategorias	
Estratégias de resolução de problemas	1. Descobrir um padrão, regra ou lei de formação.		
	2. Fazer tentativas, conjecturas.		
	3. Trabalhar do fim para o princípio.		
	4. Usar dedução lógica; fazer eliminação.		
	5. Reduzir a um problema mais simples; decomposição; simplificação.		
	6. Fazer uma simulação, experimentação ou dramatização.		
	7. Fazer um desenho, diagrama ou esquema.		
	8. Fazer uma listagem de algumas/todas as possibilidades.		
Tipos de representação utilizadas	1. Representações activas.	1.1. Manipulação de objectos.	
	2. Representações icónicas.	2.1. Representações pictóricas (desenhos).	
		2.2. Diagramas.	Diagramas em rede
			Diagramas de hierarquias
			Matriz
			Diagramas parte-todo

Domínios	Categorias	Subcategorias
		2.3. Símbolos não convencionais.
	3. Representações simbólicas.	3.1. Algarismos e números.
		3.2. Sinais de operações e sinal de igual/expressões matemáticas.
		3.3. Letras/palavra escrita.
O papel das representações na resolução de problemas	1.1. Organização do raciocínio matemático. 1.2. Apoio à comunicação matemática. 1.3. Apoio da compreensão de conceitos e relações matemáticas. 1.4. Desenvolvimento de conhecimentos matemáticos. 1.5. Registo de ideias. 1.6. Expressão da solução. 1.7. Expressão do processo utilizado.	