



# PROBLEMAS CONVEXOS E NÃO-CONVEXOS DO CÁLCULO DAS VARIACIONES

*Sílvia Alexandra Carrapato Chá*

Tese apresentada à Universidade de Évora  
para obtenção do Grau de Doutor em Matemática  
Especialidade: Matemática e Aplicações

ORIENTADORES: *Maria Clara da Palma Carlota*  
*António Costa de Ornelas Gonçalves*

ÉVORA, AGOSTO 2014



Universidade de Évora

PROBLEMAS CONVEXOS  
E NÃO-CONVEXOS  
DO CÁLCULO DAS VARIACÕES

Sílvia Alexandra Carrapato Chá

Tese apresentada à Universidade de Évora  
para obtenção do Grau de Doutor em Matemática  
Especialidade: Matemática e Aplicações

ORIENTADORES: Maria Clara da Palma Carlota  
(Professora Auxiliar)

António Costa de Ornelas Gonçalves  
(Professor Associado com Agregação)

ÉVORA, AGOSTO 2014

INSTITUTO DE INVESTIGAÇÃO E FORMAÇÃO AVANÇADA



Esta tese não foi escrita ao abrigo do novo Acordo Ortográfico



# PROBLEMAS CONVEXOS E NÃO-CONVEXOS DO CÁLCULO DAS VARIAÇÕES

## Resumo

Nas aplicações do Cálculo das Variações, Controlo Ótimo & Inclusões Diferenciais, muitos problemas importantes da vida real são vectoriais não-convexos e sujeitos a restrições pontuais.

O teorema clássico da convexidade de Liapunov é uma ferramenta crucial para resolver problemas vectoriais não-convexos envolvendo integrais simples. No entanto, a possibilidade da extensão deste teorema para lidar com restrições pontuais manteve-se um problema em aberto durante duas décadas, no caso mais realista usando controlos vectoriais variáveis.

Nesta tese apresentamos condições necessárias e condições suficientes para a resolução deste problema.

*Palavras chave:* teorema da convexidade de Liapunov para integrais simples, convexidade da imagem de medidas vectoriais, restrições pontuais, inclusões diferenciais lineares ordinárias não-convexas, controlo poliédrico dominado, cálculo das variações, controlo ótimo linear.



# CONVEX AND NONCONVEX PROBLEMS OF THE CALCULUS OF VARIATIONS

## Abstract

In applications of the Calculus of Variations, Optimal Control & Differential Inclusions, very important real-life problems are nonconvex vectorial and subject to pointwise constraints.

The classical Liapunov convexity theorem is a crucial tool allowing researchers to solve nonconvex vectorial problems involving single integrals. However, the possibility of extending such theorem so as to deal with pointwise constraints has remained an open problem for two decades, in the more realistic case using variable vectorial controls.

In this thesis we present necessary conditions and sufficient conditions for solvability of such problem.

*Key words:* Liapunov convexity theorem for single integrals, convexity of the range of vector measures, pointwise constraints, nonconvex ordinary linear differential inclusions, dominated polyhedral control, calculus of variations, linear optimal control.



# Agradecimentos

Começo por agradecer aos meus orientadores, Professora Clara Carlota e Professor António Ornelas, por terem aceite orientar-me, pela sua disponibilidade, pela sua paciência, pela sua compreensão, pelo seu incansável apoio, pelos seus ensinamentos e pela sua amizade.

Em seguida, agradeço aos meus pais, Ana e Pedro, pelo seu carinho, pelo seu apoio e pela sua compreensão, desde sempre.

Agradeço ao João, pelo seu indescritível apoio, pela sua existência e pelo seu incentivo, nesta caminhada.

Agradeço também à Carla, ao Jorge, ao Armindo e ao Sérgio, pela sua constante amizade e pelo seu apoio.

Finalmente, agradeço às pessoas amigas que estiveram presentes neste período.

A todos eles o meu Muito Obrigada.



À memória dos meus avós



# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Esboço histórico do cálculo das variações . . . . .	1
1.2	Motivação para estudar o problema vectorial de controlo poliédrico $\omega$ -dominado	12
1.3	Estrutura da tese . . . . .	17
<b>2</b>	<b>O problema geral vectorial do controlo poliédrico <math>\omega</math>-dominado</b>	<b>19</b>
<b>3</b>	<b>Existência de soluções <math>b</math>-fracas bang-bang <math>\omega</math>-extremais no caso <math>p = 1</math></b>	<b>25</b>
<b>4</b>	<b>Existência de soluções <math>b</math>-fortes bang-bang <math>\omega</math>-dominadas no caso <math>p = 1</math></b>	<b>33</b>
<b>5</b>	<b>O caso mais simples: a derivada no plano guiada por dois controlos</b>	<b>45</b>
5.1	Motivação pragmática para aprofundar o estudo deste caso mais simples . . . . .	45
5.2	Condição necessária e suficiente para existência de soluções relaxadas estritamente $\omega$ -dominadas . . . . .	46
5.3	Condições suficientes parciais para existência de soluções relaxadas estritamente $\omega$ -dominadas . . . . .	47
5.4	Condição suficiente para a existência de soluções $b$ -fortes bang-bang $\omega$ -dominadas	52
5.5	Exemplos de aplicação . . . . .	56
<b>A</b>	<b>Notação</b>	<b>59</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>63</b>



# Capítulo 1

## Introdução

O objectivo principal desta tese consistiu em desenvolver algumas ferramentas adequadas para resolver problemas não-convexos do cálculo das variações. Assim, começamos esta introdução por um esboço histórico acerca da evolução do cálculo das variações desde o final do século XVII: métodos indirectos, métodos directos, controlo óptimo, problemas não-convexos, método de penalização.

Por outro lado, posteriormente generalizámos tais ferramentas para resolver problemas não-convexos daquilo a que chamamos controlo poliédrico dominado. Assim, a secção 1.2 desta Introdução é dedicada a explicar o que pretendemos dizer com isto.

Finalmente, na secção 1.3 descrevemos a estrutura desta tese.

### 1.1 Esboço histórico do cálculo das variações

Começemos então pelo cálculo das variações, que se dedica a encontrar funções óptimas segundo certo critério, e a descrever as propriedades essenciais de tais soluções. Também na vida quotidiana somos confrontados com questões deste tipo: qual a melhor solução para certo problema; quais as soluções que satisfazem uma determinada propriedade; qual é a estratégia ideal para alcançar determinado objectivo. Por exemplo, qual é o caminho mais curto entre dois pontos; ou qual o modo mais rápido para ir de um ponto a outro. Os problemas do cálculo das variações sempre se têm revelado muitíssimo mais difíceis de resolver do que de formular; e assim sempre têm dado um grande contributo para o desenvolvimento da análise matemática e da geometria diferencial. Receberam por outro lado, um grande estímulo por parte da mecânica e doutras grandes áreas da física, e muito contribuíram por isso para o desenvolvimento destas ciências, desde Newton, pai tanto do cálculo das variações como da matematização da física.

Consideremos o problema clássico do cálculo das variações: minimizar o integral

$$I(x(\cdot)) := \int_a^b L(t, x(t), x'(t)) dt \quad \text{em } \mathcal{C}, \quad (1.1)$$

onde:

- $\mathcal{C}$  é a classe das funções  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$  absolutamente contínuas (AC) que satisfazem as condições de fronteira  $x(a) = A$ ,  $x(b) = B$  (com  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ );
- $L : [a, b] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow (-\infty, \infty]$ ,  $(t, s, v) \mapsto L(t, s, v)$  é uma função (denominada integrando ou lagrangiano), que verifica determinadas propriedades, e cujas variáveis  $t$ ,  $s$ ,  $v$  são o tempo, o estado e a velocidade, respectivamente.

Assim, no cálculo das variações pretende-se solucionar aquilo que podemos chamar problemas de minimização funcional, i.e. queremos saber se

$$\exists x_0(\cdot) \in \mathcal{C} : I(x_0(\cdot)) \leq I(x(\cdot)) \quad \forall x(\cdot) \in \mathcal{C}.$$

A um tal  $x_0(\cdot)$  chamamos minimizante (global). Também podemos estudar problemas de maximização, mas basta observar que o problema de maximizar  $I(\cdot)$  é equivalente ao problema de minimizar  $-I(\cdot)$ .

A existência de minimizante actualmente mostra-se, em geral, através do “método directo” criado por Tonelli há quase 100 anos, e depois desenvolvido por tantos outros matemáticos. Explicaremos este método adiante.

Pelo contrário, ao longo dos dois primeiros séculos da história do cálculo das variações, a abordagem aos problemas de minimização era feita através dos agora chamados “métodos indirectos clássicos”. Estes métodos eram muito optimistas e um tanto ingénuos, uma vez que pressupunham a existência de soluções suficientemente diferenciáveis para todos os problemas de minimização funcional. O problema consistia então em saber como era essa solução. Para determiná-la, utilizava-se liberalmente o princípio de Fermat, ou seja: se o integral  $I : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  é minimizado por algum  $x_0(\cdot) \in \mathcal{C}$ , então  $I'(x_0(\cdot)) = 0$ . Assumindo, implicitamente, que  $L(\cdot)$  e  $x_0(\cdot)$  seriam suficientemente diferenciáveis e, derivando sob o sinal de integral, os matemáticos de então obtinham uma equação diferencial, a chamada equação de Euler-Lagrange (E-L):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v}(t, x(t), x'(t)) = \frac{\partial L}{\partial s}(t, x(t), x'(t)) \quad \text{em } [a, b].$$

Consideravam, também implicitamente, que o facto de  $x_0(\cdot)$  ser solução da equação de E-L seria o mesmo que ser minimizante, sem uma justificação adequada.

No entanto, este raciocínio tem problemas: a equação de E-L é uma condição necessária (supondo condições adequadas), mas não é suficiente, pois se  $x_0(\cdot)$  a verificar, isso não significa que seja um minimizante global (poderá ser, por exemplo, apenas um minimizante local, ou um maximizante, ou um ponto-sela).

Assim, as condições necessárias apenas nos dizem como são os minimizantes, se existirem; mas se não existirem não faz sentido procurar saber como são.

Na realidade, a análise das condições necessárias permite que se eliminem muitos candidatos e, eventualmente, identifica uma solução única. Mas, esta solução pode não ser um minimizante, ou o problema de minimização do integral  $I(\cdot)$  pode não ter solução. Por outras palavras, primeiro temos de provar a existência de minimizante, antes de concluir que a única solução da equação de E-L, satisfazendo as restrições requeridas, é um minimizante; ou então, temos de provar directamente que o valor que essa solução dá ao integral é realmente menor do que o valor do integral para qualquer outra função em competição (o que poderá ser fácil, por exemplo se  $I(\cdot) \geq 0$  e  $I(x_0(\cdot)) = 0$ ).

Além disso, pode acontecer a equação de E-L não ter nenhuma solução, pelo que pode dar-se o caso de existir um minimizante que não satisfaz a equação de E-L.

Os métodos atrás referidos chamam-se indirectos, por fazerem um desvio pela equação de E-L antes de voltarem ao problema de minimização original; e constituíram a primeira fase do cálculo das variações, iniciada por Newton, no final do século XVII e prosseguida pelos Bernoulli, Euler, Lagrange, etc.

Quanto aos mais recentes “métodos directos”, surgidos já no século XX, eles caracterizam-se por abordarem directamente, logo de início, o problema da existência de minimizante. Isto correspondeu à tomada de consciência, por parte dos melhores matemáticos, de que só fazia sentido procurarem saber — através da equação de E-L e doutras condições necessárias que a complementam — como seriam os minimizantes após terem a certeza de que realmente eles existiam. Tais métodos directos começaram com os estudos de Gauss, Kelvin, Dirichlet e Riemann sobre problemas, com valores na fronteira, para a equação do potencial  $\Delta u = 0$ . Aqui  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é, em dimensão 2, uma função suficientemente diferenciável num aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , enquanto que  $\Delta u = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2}$ , onde e.g.  $u_{x_1 x_1}$  é a derivada parcial de  $u$  em ordem a  $x_1$  duas vezes.

Também Hilbert e Lebesgue se interessaram pelos métodos directos. Ambos se dedicaram ao estudo do princípio de Dirichlet (enunciado por Riemann): existe uma única função  $u_0(\cdot)$  que minimiza, na classe das funções  $u(\cdot) \in C^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  assumindo valores fixados na

fronteira  $\partial \Omega$ , o integral de Dirichlet

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx;$$

e esta função é harmónica em  $\Omega$  (i.e. é solução da correspondente equação de E-L  $\Delta u = 0$ ).

Anos mais tarde, Leonida Tonelli criou um dos instrumentos mais importantes do cálculo das variações: o chamado “método directo de Tonelli”, baseado na semicontinuidade inferior dos integrais. Foi ele o primeiro a perceber que o teorema da compacidade de Ascoli-Arzelà, e o conceito de semicontinuidade, introduzido por Baire, concebidos para funções reais definidas em  $\mathbb{R}^d$ , poderiam ser transferidos para as funções reais definidas em espaços de dimensão infinita (e.g. definidas em espaços de funções através de integrais), e que eram os instrumentos ideais para demonstrar, directamente, a existência de minimizantes de integrais. O próprio Tonelli formalizou, explorou e popularizou a ideia do método directo, numa série de artigos, seminários e monografias, durante cerca de 3 décadas. As suas ideias são, hoje em dia, uma parte muito importante da nossa cultura matemática e muitas delas podem até parecer óbvias, mas não o eram no início do século XX. Por outro lado, a sua aplicação aos problemas de minimização de integrais não é de modo algum trivial.

O método directo de Tonelli, que é o método actualmente usado, em geral, para provar existência de minimizante consiste, grosso modo, na aplicação da seguinte generalização do teorema de Weierstrass para funções reais com domínio em  $\mathbb{R}^d$ .

**Teorema 1.1** *Seja  $I : \mathcal{C} \rightarrow (-\infty, \infty]$  um funcional limitado inferiormente, onde:  $\mathcal{C}$  é um conjunto não-vazio equipado com uma noção de convergência relativamente à qual é sequencialmente compacto; e  $I(\cdot)$  é sequencialmente semicontínuo inferiormente. Então existe um minimizante (global)  $x_0(\cdot)$  de  $I(\cdot)$  em  $\mathcal{C}$ .*

De facto, dado um tal  $I : \mathcal{C} \rightarrow (-\infty, \infty]$ , o raciocínio é o seguinte:

- (i) Claro que, por definição de ínfimo, existe sempre uma sucessão minimizante  $((I(x_k(\cdot))) \rightarrow i := \inf_{x(\cdot) \in \mathcal{C}} I(x(\cdot)))$ , e podemos supor  $-\infty < i < \infty$ , pois  $I(\cdot)$  é limitado inferiormente e no caso  $i = \infty$  evidentemente existe  $x_0(\cdot)$  conforme pretendido.
- (ii) Em segundo lugar fixa-se uma noção de convergência em  $\mathcal{C}$ , denotada por  $(x_k(\cdot)) \rightarrow x(\cdot)$ , relativamente à qual conseguimos mostrar que:
  - (ii.a)  $I(\cdot)$  é sequencialmente semicontínuo inferiormente em  $\mathcal{C}$ , ou seja

$$I(x(\cdot)) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} I(x_k(\cdot)) \quad \text{sempre que} \quad (x_k(\cdot)) \rightarrow x(\cdot),$$

- (ii.b)  $\mathcal{C}$  é sequencialmente compacto ou, mais geralmente,  
(ii.c) qualquer sucessão minimizante  $(x_k(\cdot))$  contém uma subsucessão  $(x_{k_n}(\cdot))$  convergente para algum  $x_0(\cdot)$  em  $\mathcal{C}$ .

Tem-se então

$$\inf_{x(\cdot) \in \mathcal{C}} I(x(\cdot)) \leq I(x_0(\cdot)) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} I(x_{k_n}(\cdot)) \leq \inf_{x(\cdot) \in \mathcal{C}} I(x(\cdot)),$$

pelo que

$$I(x_0(\cdot)) = \inf_{x(\cdot) \in \mathcal{C}} I(x(\cdot)) = \min_{x(\cdot) \in \mathcal{C}} I(x(\cdot)),$$

i.e.  $x_0(\cdot)$  é um minimizante global de  $I(\cdot)$ .

Por exemplo, consideremos o funcional  $I(\cdot)$  em (1.1) e suponhamos que  $L(\cdot)$  é semi-contínua inferiormente com crescimento superlinear, i.e.

$$\frac{\inf L([a, b], \mathbb{R}^d, v)}{|v|} \rightarrow \infty \quad \text{quando } |v| \rightarrow \infty,$$

e que  $v \mapsto L(t, s, v)$  é convexa. Então existe um minimizante global de  $I(\cdot)$  em  $\mathcal{C}$ . De facto,  $I(\cdot)$  é limitado inferiormente e, considerando a topologia fraca de  $\mathcal{C}$ , a semicontinuidade inferior de  $L(\cdot)$  conjuntamente com a convexidade de  $L(t, s, \cdot)$  garantem (ii.a); enquanto que o crescimento superlinear garante (ii.c).

Embora o método directo de Tonelli seja a principal ferramenta para demonstrar a existência de minimizantes para problemas convexos, ele não é directamente aplicável a problemas não-convexos. E, em geral, são estes últimos que mais interessam às aplicações. Para demonstrar a existência de minimizante para problemas não-convexos, pode usar-se o seguinte método:

- (a) Consideremos e.g. o problema não-convexo de minimizar o integral

$$\int_a^b L(t, x(t), x'(t)) dt \quad \text{em } \mathcal{C}, \quad (1.2)$$

onde:

- $\mathcal{C}$  é a classe das funções  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$  absolutamente contínuas que satisfazem as condições de fronteira  $x(a) = A, x(b) = B$  (com  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ );

- $L : [a, b] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow (-\infty, \infty]$  é um lagrangiano, limitado inferiormente, satisfazendo certas propriedades; com  $L(t, s, \cdot)$  não-convexa.

Note-se que o lagrangiano pode aqui assumir livremente o valor  $\infty$ ; o que constitui uma das características do trabalho de investigação de António Ornelas e Clara Carlota neste século (ver e.g. [58], [59], [60], [61], [20], [21]). A razão para este uso do valor  $\infty$  consiste em simplificar o tratamento dos problemas do cálculo das variações envolvendo restrições pontuais no estado e/ou na velocidade das funções em competição, através do chamado método de penalização. Este método consiste em reformular tais problemas, transformando-os em problemas mais gerais, em que as restrições não aparecem como um ingrediente extra mas são antes incorporadas directamente no próprio lagrangiano, dando assim origem a um novo, o chamado lagrangiano penalizado. Este tomará o valor  $\infty$  sempre que as restrições sejam violadas.

Assim, se no problema de minimizar o integral (1.2) quisermos obrigar  $(t, x(t), x'(t))$  a estar, quase sempre, num conjunto  $R$ , então, em vez do lagrangiano  $L(t, s, v)$ , definimos um novo lagrangiano penalizado por

$$\tilde{L}(t, s, v) := \begin{cases} L(t, s, v) & \text{se } (t, s, v) \in R \\ \infty & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Consequentemente, se alguma das funções em competição  $x(\cdot)$  não verificar a restrição — i.e. se existir um conjunto  $P_x$  com medida positiva onde  $(t, x(t), x'(t)) \notin R$  para qualquer  $t \in P_x$  — ela será penalizada, ou seja, o valor  $\tilde{L}(t, x(t), x'(t))$  do lagrangiano penalizado correspondente a esse  $x(\cdot)$  será  $\infty$  para cada  $t$  em  $P_x$ , dando assim ao integral penalizado

$$\int_a^b \tilde{L}(t, x(t), x'(t)) dt \tag{1.3}$$

o valor  $\infty$  e impedindo um tal  $x(\cdot)$  de vencer a competição para a minimização deste integral penalizado. Ou seja, existindo pelo menos um  $x(\cdot) \in \mathcal{C}$  com  $(t, x(t), x'(t)) \in R$  q.s. em  $[a, b]$  e para o qual  $\int_a^b L(t, x(t), x'(t)) dt < \infty$ , então os problemas

$$\text{minimizar} \quad \int_a^b L(t, x(t), x'(t)) dt \quad \text{em } \mathcal{C}$$

$$\text{com a restrição} \quad (t, x(t), x'(t)) \in R \text{ q.s. em } [a, b]$$

e

$$\text{minimizar} \quad \int_a^b \tilde{L}(t, x(t), x'(t)) dt \quad \text{em } \mathcal{C}$$

serão equivalentes, no sentido em que  $x_0(\cdot)$  é solução de um dos problemas se e somente se também é solução do outro.

Este método de penalização permite não só tratar de forma mais directa problemas de minimização de integrais do cálculo das variações incluindo restrições pontuais no estado e na velocidade; mas permite também tratar, na mesma forma unificada, problemas do controlo óptimo, visto que uma equação (ou inclusão) diferencial é uma restrição pontual imposta aos pares  $(x(t), x'(t))$  que consideramos admissíveis.

Para explicar mais precisamente como é que — para efeitos de demonstrar a existência de soluções — o controlo óptimo pode ser considerado como um caso particular do cálculo das variações penalizado, comecemos por uma breve panorâmica. O controlo óptimo começou a ser desenvolvido a meio do século XX, como resposta a problemas surgidos no controlo à distância de naves espaciais teleguiadas, assim como noutras áreas da engenharia e da economia. De facto, nestas áreas surgiu a necessidade de controlar, da melhor forma possível, o estado dum sistema que evolui segundo uma certa dinâmica, está sujeito a restrições e tem um objectivo ou estado-alvo a atingir. Mais precisamente, os problemas de controlo óptimo consistem, no fundo, em minimizar integrais nos quais as funções em competição estão sujeitas a restrições pontuais. De facto, consideremos e.g. o problema de controlo óptimo (de Lagrange) de minimizar o integral

$$\int_a^b f_0(t, x(t), u(t)) dt \quad em \mathcal{D},$$

onde:

- $\mathcal{D}$  é a classe dos pares de funções  $(x(\cdot), u(\cdot))$ , com  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$  absolutamente contínua (o estado) e  $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^q$  mensurável (o controlo) ( $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ) satisfazendo

$$\begin{cases} x(a) = A, x(b) = B \\ x(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^d \quad \forall t \in [a, b] \\ u(t) \in U(t, x(t)) \subset \mathbb{R}^q \quad p.q.t. \quad t \in [a, b] \\ x'(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad p.q.t. \quad t \in [a, b]; \end{cases}$$

- onde:

- $U : [a, b] \times \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^q$  é uma multifunção;

- $f_0 : graf U \rightarrow \mathbb{R}$ , com

$$graf U := \{(t, s, u) : (t, s) \in [a, b] \times \Omega, u \in U(t, s)\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^q;$$

- $f_0(\cdot, x(\cdot), u(\cdot))$  é Lebesgue integrável em  $[a, b] \quad \forall (x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{D}$ ;

- $f : graf U \rightarrow \mathbb{R}^d$ .

Este problema bastante geral do controlo óptimo pode ser reescrito como um problema do cálculo das variações penalizado, da seguinte forma. Para cada  $(t, s) \in [a, b] \times \Omega$ , definimos os conjuntos

$$R(t, s) := \{v : v = f(t, s, u), u \in U(t, s)\} \subset \mathbb{R}^d$$

$$\tilde{R}(t, s) := \{(v_0, v) : v_0 \geq f_0(t, s, u), v = f(t, s, u), u \in U(t, s)\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$$

e o lagrangiano associado ao problema de controlo óptimo

$$L_0(t, s, v) := \inf \left\{ v_0 : (v_0, v) \in \tilde{R}(t, s) \right\},$$

de modo que, sob hipóteses adequadas, temos

$$\begin{cases} L_0(t, s, v) \in \mathbb{R} & \text{se } v \in R(t, s) \\ L_0(t, s, v) = \infty & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e o estudo do problema de controlo óptimo é equivalente ao estudo do problema do cálculo das variações que consiste em minimizar o integral

$$\int_a^b L_0(t, x(t), x'(t)) dt \quad \text{em } \mathcal{C}.$$

(b) Depois desta longa explicação, evidenciando de que modo o problema não-convexo de minimizar o integral (1.2) inclui implicitamente não só restrições pontuais nos estados e nas velocidades mas também um problema bastante geral do controlo óptimo, vamos agora retomar a explicação — iniciada em (1.2) — sobre como provamos a existência de solução para este problema tão geral. Começamos por considerar o correspondente problema relaxado, ou convexificado, de minimizar o integral

$$\int_a^b L^{**}(t, x(t), x'(t)) dt \quad \text{em } \mathcal{C}, \quad (1.4)$$

onde  $L^{**}(\cdot)$  é a bipolar de  $L(t, s, \cdot)$  (definida por  $\text{epi } L^{**}(t, s, \cdot) := \overline{\text{epi } L(t, s, \cdot)} \forall t \forall s$ , nomeadamente é o fecho do invólucro convexo do epigráfico de  $L(t, s, \cdot)$ , que é a região acima do gráfico desta função).

(c) Em seguida supomos, por exemplo, que  $L(\cdot)$  é superlinear e  $L^{**}(\cdot, \cdot, \cdot)$  é conjuntamente semicontínua inferiormente, de modo a podermos aplicar o método directo para provar que

existe um minimizante relaxado  $y_c(\cdot)$ , ou seja um minimizante do integral convexificado (1.4).

(d) Por último, transforma-se  $y_c(\cdot)$  num novo e aprimorado minimizante relaxado  $y(\cdot)$ , para o qual  $L^{**}(t, y(t), y'(t)) = L(t, y(t), y'(t))$  q.s. em  $[a, b]$ ; de modo que  $y(\cdot)$  será também minimizante verdadeiro, i.e. minimizará também o integral não-convexo (1.2). Note-se que é usual na teoria do controlo falar de “solução bang-bang”, em lugar de “minimizante verdadeiro”, sempre que temos uma solução correspondente a um “controlo bang-bang”, i.e. a um controlo  $u(\cdot)$  tal que  $u(t)$  pertence, para quase todo o  $t$ , ao conjunto dos pontos extremos de  $U(t, x(t))$ .

É neste último passo (d) que se concentra o essencial do trabalho de investigação que tem sido desenvolvido por António Ornelas e Clara Carlota, na sequência do trabalho pioneiro de Arrigo Cellina. Existem dois métodos principais para resolver estes problemas, de passar de minimizantes relaxados para minimizantes verdadeiros de problemas não-convexos. O primeiro, e mais antigo, baseia-se no teorema de Liapunov acerca da convexidade da imagem de medidas vectoriais não-atómicas, em [49]. Uma versão deste teorema, adaptada ao caso em que a medida é dada pelo integral simples de uma função vectorial, pode ser encontrada por exemplo no livro de Cesari [30]. Mas foi Neustadt o primeiro a perceber que poderia utilizar o resultado de Liapunov para demonstrar teoremas de existência, em problemas de controlo óptimo, com lagrangiano linear na variável estado e controlo num compacto, e sem nenhuma hipótese de convexidade (ver [55]). Enquanto que Cesari, em [29], obteve resultados de existência, com controlo possivelmente ilimitado. Em [30] o teorema de Liapunov é aplicado também a problemas do cálculo das variações, com lagrangiano linear na variável estado, sem nenhuma hipótese de convexidade.

Mais tarde, este primeiro método, baseado no teorema de Liapunov, foi desenvolvido para inclusões diferenciais, cálculo das variações e controlo óptimo, por Arrigo Cellina e colaboradores (ver [4], [8], [23], [53], [2], [25], [3], [27], [28], [13], [42], [43], [26]). António Ornelas também utilizou o resultado de Liapunov, a partir de 1986 para inclusões diferenciais e mais tarde para o cálculo das variações, e.g. em [57], [58], e, com Clara Carlota, em [20].

Note-se que foram efectuadas várias demonstrações e generalizações do teorema de Liapunov [49], em artigos e livros, alguns dos quais aparecem na bibliografia, nomeadamente [47], [52], [66], [39], [30], [45], [24], [11], [5], [56], [10], [2], [3], [27], [28], [42].

O segundo dos principais métodos usualmente aplicados para provar existência de soluções verdadeiras — para problemas não-convexos de inclusões diferenciais e do cálculo das variações — é o da categoria de Baire, de cuja aplicação foi pioneiro Arrigo Cellina, para inclusões diferenciais ordinárias (ver [22]). Tal aplicação foi depois desenvolvida por DeBlasi & Pianigiani (ver [37] e os artigos anteriores lá citados). Mais tarde a categoria de Baire

foi aplicada também às inclusões diferenciais parciais e ao cálculo das variações por Bressan & Flores [12], [13], Monteiro Marques & Ornelas [54], Goncharov & Ornelas [46], Dacorogna & Marcellini [33], [34], [35], assim como por outros autores.

Uma vez que esta tese está essencialmente centrada no teorema de Liapunov, é conveniente começar por explicar para que serve este resultado, ou melhor, como se aplica para demonstrar a existência de minimizantes para integrais não-convexos.

Começemos por recordar a forma do teorema de Liapunov adaptada ao caso em que a medida é obtida através de integrais simples de funções vectoriais:

**Teorema 1.2 (Liapunov)** *Sejam  $f^j : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $j = 1, \dots, m$ , funções integráveis em  $[a, b]$ . Consideremos também  $m$  funções mensuráveis  $p^j : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $0 \leq p^j(t) \leq 1$  q.s.,  $j = 1, \dots, m$ , e  $\sum_{j=1}^m p^j(t) = 1$  q.s.. Então existem subconjuntos  $E^1, \dots, E^m \subset [a, b]$  mensuráveis e disjuntos dois a dois tais que  $\cup_{j=1}^m E^j = [a, b]$  e*

$$\int_a^b \sum_{j=1}^m p^j(t) f^j(t) dt = \int_a^b \sum_{j=1}^m \chi_{E^j}(t) f^j(t) dt,$$

onde  $\chi_E(\cdot)$  é a função característica do conjunto  $E$  ( $:= 1$  em  $E$  &  $0$  fora).

O teorema de Liapunov é utilizado para efectuar o passo (d) acima, nos casos particulares em que  $L^{**}(\cdot)$  não depende explicitamente do tempo  $t$ , ou da posição  $s$ , como segue:

(d<sub>1</sub>) Consideremos o minimizante relaxado  $y_c(\cdot)$  (obtido em (c)).

(d<sub>2</sub>) Relacionados com  $y_c(\cdot)$ , existem: um intervalo  $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ , uma sucessão de subconjuntos mensuráveis  $(A_n)$  de  $[\alpha, \beta]$ , disjuntos dois a dois e cuja união é  $[\alpha, \beta]$ , uma função  $g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^q$ , integrável em  $A_n \forall n \in \mathbb{N}$ ,  $m$  pesos mensuráveis  $p^j : [\alpha, \beta] \rightarrow [0, 1]$  e  $m$  funções  $f^1(\cdot), \dots, f^m(\cdot) : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^q$ , integráveis em  $A_n \forall n \in \mathbb{N}$ , tais que

$$\int_{A_n} g(t) dt = \int_{A_n} \sum_{j=1}^m p^j(t) f^j(t) dt.$$

(d<sub>3</sub>) Seguidamente, por aplicação do teorema de Liapunov, podemos decompor cada  $A_n$  em  $m$  subconjuntos mensuráveis  $E_n^1, \dots, E_n^m$  tais que

$$\int_{A_n} \sum_{j=1}^m p^j(t) f^j(t) dt = \int_{A_n} \sum_{j=1}^m \chi_{E_n^j}(t) f^j(t) dt.$$

Definindo então

$$E^j := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^j, \quad j = 1, \dots, m,$$

e

$$\sigma(t) := \sum_{j=1}^m \chi_{E^j}(t) f^j(t),$$

obtemos uma nova função absolutamente contínua  $h : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^q$ , cuja derivada  $h'(\cdot) := \sigma(\cdot)$  se escreve, quase sempre, como combinação convexa das  $m$  funções em  $(d_2)$ ; mas cujos pesos são as funções características de subconjuntos mensuráveis de  $[\alpha, \beta]$ , disjuntos dois a dois e cuja união é  $[\alpha, \beta]$ .

$(d_4)$  Finalmente, o novo (e verdadeiro) minimizante  $y(\cdot)$  será construído com base na função  $h(\cdot)$ .

Sendo assim, podemos afirmar que o teorema de Liapunov é uma ferramenta muito importante para encontrar solução para problemas não-convexos do cálculo das variações e do controlo óptimo envolvendo integrais simples. Além disso, também para problemas envolvendo integrais múltiplos o teorema de Liapunov é aplicável, por exemplo quando existe simetria radial no lagrangiano. Na verdade, foi a insuficiência das versões existentes do teorema de Liapunov para satisfazer as necessidades sentidas ao lidar com integrais múltiplos a grande motivação para desenvolvermos a investigação apresentada nesta tese.

## 1.2 Motivação para estudar o problema vectorial de controlo poliédrico $\omega$ -dominado

Depois de termos desenvolvido, no artigo [16], a nossa nova versão do teorema de Liapunov aplicável a problemas não-convexos do cálculo das variações com restrições pontuais, incluindo o controlo óptimo, continuámos essa investigação, no artigo [19], no sentido de a aplicar também àquilo a que aqui chamamos problemas vectoriais de controlo “poliédrico” “dominado”.

Um exemplo simples de tais problemas é o seguinte problema, envolvendo derivadas ordinárias de  $2^a$  ordem, estudado por Cerf & Mariconda em [27]. Sejam  $u_1(\cdot), u_2(\cdot) \in L^1(a, b)$  (com  $u_1(\cdot) \leq u_2(\cdot)$ ),  $a_0(\cdot), a_1(\cdot) \in L^1(a, b)$  e  $(x_a, v_a, x_b, v_b) \in \mathbb{R}^4$ . Fixemos uma qualquer solução  $\bar{x}(\cdot) \in W^{2,1}([a, b])$  do problema convexo de controlo

$$\begin{aligned} x''(t) + a_1(t) x'(t) + a_0(t) x(t) &:= u(t) \in U(t) := [u_1(t), u_2(t)] \\ (x(a), x'(a), x(b), x'(b)) &= (x_a, v_a, x_b, v_b). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Pretende-se demonstrar a existência de correspondentes soluções do tipo bang-bang  $x(\cdot)$  dominadas por  $\bar{x}(\cdot)$ , i.e. soluções (verdadeiras) do correspondente problema não-convexo de controlo

$$\begin{aligned} x''(t) + a_1(t) x'(t) + a_0(t) x(t) &:= u(t) \in \{u_1(t), u_2(t)\} \\ (x(a), x'(a), x(b), x'(b)) &= (x_a, v_a, x_b, v_b), \end{aligned} \quad (1.6)$$

que satisfaçam, além disso, a desigualdade

$$x(\cdot) \leq \bar{x}(\cdot). \quad (1.7)$$

A justificação para lhe chamarmos “poliédrico” — a este problema de controlo — provém da sua generalização, abaixo exposta, envolvendo  $m$  controlos

$$u^1(\cdot), \dots, u^m(\cdot) \in L^1([a, b], \mathbb{R}^d), \quad (1.8)$$

aos quais poderemos chamar os “vértices” do nosso problema de controlo “poliédrico”, “dominado” por  $\bar{x}(\cdot)$  através duma desigualdade generalizando (1.7).

Enquanto no capítulo 2 expomos formalmente a versão mais geral possível deste problema, a qual envolve um sistema de  $d \in \mathbb{N}$  equações diferenciais ordinárias lineares de ordem  $p \in \mathbb{N}$ , no restante desta tese apenas lidaremos com o caso particular do controlo de primeira ordem,  $p = 1$ ; mas, ao contrário do que aconteceu com Cerf & Mariconda — que consideraram  $p \geq 2$ , um estado escalar e um par de controlos escalares — o foco desta tese é sobre o caso geral envolvendo estados vectoriais e controlos vectoriais poliédricos.

O objectivo principal desta secção é justificar — através dum exemplo simples em dimensão dois — porque é que os problemas vectoriais de controlo poliédrico dominado não são uma simples extensão dos correspondentes problemas escalares, mostrando que, pelo contrário, basta a adição de uma nova dimensão ao estado para complicar gravemente tais problemas.

Mas antes de apresentar tal exemplo, vamos primeiro explicar como é que o teorema clássico de Liapunov — sobre a convexidade das medidas vectoriais não-atómicas — pode ser aplicado para demonstrar a existência de solução bang-bang para problemas vectoriais não-convexos de controlo poliédrico (não-dominado) de 1ª ordem. Assim, em vez de inclusões diferenciais de 2ª ordem como em (1.5) & (1.6), no restante desta secção lidaremos apenas com o seguinte problema de 1ª ordem.

Dada qualquer solução  $\bar{x} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$  da inclusão diferencial convexa

$$\mathcal{L}^1 x(t) := x'(t) + A^0(t) x(t) \in \text{co} \{u^1(t), \dots, u^m(t)\} \quad q.s. \text{ em } [a, b], \quad (1.9)$$

sendo dados os  $m$  controlos (1.8) e uma matriz  $A^0(\cdot) \in L^1([a, b], \mathbb{R}^{d \times d})$ , o teorema de Liapunov acima exposto pode ser usado para garantir a existência de solução bang-bang, i.e. solução para a correspondente inclusão diferencial não-convexa

$$\mathcal{L}^1 x(t) \in \{u^1(t), \dots, u^m(t)\} \quad q.s., \quad x(a) = \bar{x}(a), \quad x(b) = \bar{x}(b) \quad (1.10)$$

da seguinte forma. Suponhamos que  $d = 1$ , pois a demonstração para o caso geral é semelhante.

Como, por uma óbvia consequência da definição de invólucro convexo,

$$\begin{aligned} \exists \bar{\lambda}^j : [a, b] \rightarrow [0, 1] \text{ mensuráveis, } j = 1, \dots, m, \text{ com } \sum_{j=1}^m \bar{\lambda}^j(t) = 1 \text{ tais que} \\ \mathcal{L}^1 \bar{x}(t) = \sum_{j=1}^m \bar{\lambda}^j(t) u^j(t) \quad q.s., \end{aligned}$$

o teorema de Liapunov fornece-nos uma decomposição  $E^1, \dots, E^m$  de  $[a, b]$  para a qual

$$\int_a^b e^{\eta_A^0(t)} \mathcal{L}^1 \bar{x}(t) dt = \int_a^b \sum_{j=1}^m \bar{\lambda}^j(t) e^{\eta_A^0(t)} u^j(t) dt = \int_a^b \sum_{j=1}^m \chi_{E^j}(t) e^{\eta_A^0(t)} u^j(t) dt,$$

onde, para cada  $t \in [a, b]$ ,  $\eta_A^0(t) := \int_a^t A^0(r) dr$ . Então

$$\hat{x}(t) := e^{-\eta_A^0(t)} \left[ \bar{x}(a) + \int_a^t e^{\eta_A^0(\tau)} \sum_{j=1}^m \chi_{E^j}(\tau) u^j(\tau) d\tau \right]$$

satisfaz

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1 \hat{x}(t) &= \sum_{j=1}^m \chi_{E^j}(t) u^j(t) \in \{u^1(t), \dots, u^m(t)\} \text{ q.s.} \\ \hat{x}(a) &= \bar{x}(a), \quad \hat{x}(b) = \bar{x}(b). \end{aligned}$$

Note-se que a aplicação referida no final da secção anterior — do teorema de Liapunov ao cálculo das variações penalizado não-convexo — corresponde ao caso particular de (1.9) em que  $A^0(\cdot) \equiv 0$ .

O objectivo mais geral desta tese é estudar o problema que consiste em encontrar uma solução (bang-bang)  $x(\cdot)$  para a inclusão diferencial não-convexa (1.10), que seja  $\omega$ -dominada por uma solução relaxada  $\bar{x}(\cdot)$  fixada. Mais precisamente, fixada qualquer solução  $\bar{x}(\cdot)$  da inclusão diferencial convexificada (1.9), e fixada qualquer direcção  $\omega \in \mathbb{R}^d$ , a designação “ $\omega$ -dominada” (por  $\bar{x}(\cdot)$ ) refere-se ao facto de se pretender encontrar um  $x(\cdot)$  inferior a  $\bar{x}(\cdot)$  na direcção  $\omega$ , i.e. satisfazendo a desigualdade

$$\langle x(t), \omega \rangle \leq \langle \bar{x}(t), \omega \rangle \quad \forall t \in [a, b]. \quad (1.11)$$

Este problema (1.10) & (1.11) foi estudado há cerca de duas décadas atrás por: Amar & Cellina [2, lemma 3.4] (no caso  $d = 1$ ,  $m = 2$  e  $A^0(\cdot) \equiv 0$ ); Amar & Mariconda [3] (no caso  $d > 1$  com  $A^0(\cdot) \equiv 0$  e controlos  $u^j(\cdot)$  constantes); Cerf & Mariconda em [27] (no caso (1.6)), depois generalizado, em [28], para derivadas de ordem  $p > 2$ , considerando coeficientes regulares  $a_{ij}^k(\cdot) \in C^{p-2}([a, b])$  (e usando, mais precisamente, a versão escalar  $d = 1$  do operador diferencial abaixo definido, em (2.5)).

Nesta tese aprofundamos, duas décadas depois, os resultados de Amar & Cellina, de Amar & Mariconda e, parcialmente, também os de Cerf & Mariconda. De facto, tratamos o problema de Liapunov dominado com velocidades vectoriais (enquanto em Amar & Cellina as velocidades eram escalares), variáveis (enquanto em Amar & Mariconda as velocidades, vectoriais, eram sempre constantes). E, por outro lado, no caso do controlo poliédrico dominado, consideramos velocidades vectoriais e controlos vectoriais (enquanto em Cerf & Mariconda tanto as velocidades como os controlos eram escalares); contudo, tratamos apenas, aqui nesta tese, o caso com derivadas de primeira ordem (enquanto Cerf & Mariconda consideraram derivadas de ordem  $p = 2$  primeiro, e de ordem superior depois). Podemos assim dizer que Cerf & Mariconda trataram equações diferenciais escalares lineares de qualquer ordem  $p \geq 2$ ; enquanto nós lidamos com sistemas de tais equações, mas apenas, aqui, de primeira ordem, i.e.  $p = 1$ .



i.e.

$$\begin{cases} x_1'(t) = \lambda(t) \in [0, 1] & q.s. \\ x_2'(t) = 2t x_1'(t) & q.s. \end{cases}$$

Portanto, para qualquer  $t$  onde

$$x_1(t) = \bar{x}_1(t),$$

temos

$$\int_0^t (\bar{x}_1 - x_1)(\tau) d\tau = \int_0^t \tau (x_1 - \bar{x}_1)'(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t (x_2 - \bar{x}_2)'(\tau) d\tau = \frac{x_2(t) - \bar{x}_2(t)}{2}, \quad (1.13)$$

logo

$$\int_0^1 (\bar{x}_1 - x_1)(t) dt = \frac{x_2(1) - \bar{x}_2(1)}{2} = 0 \quad \implies \quad x_1(\cdot) = \bar{x}_1(\cdot)$$

uma vez que  $x_1(\cdot) \leq \bar{x}_1(\cdot)$ . Então, por (1.13),  $x_2(\cdot) = \bar{x}_2(\cdot)$ , o que prova (1.12).

Desta unicidade — ou seja, do facto de o problema convexo ter apenas a solução  $\bar{x}(\cdot)$  — segue que o problema não-convexo só pode ter solução trivialmente, i.e. se por sorte o próprio  $\bar{x}(\cdot)$  o resolver. Por exemplo:

(i) Se  $\bar{x}(t) = (1, t)^{\frac{t}{2}}$ , então não existem soluções verdadeiras satisfazendo a restrição, uma vez que a derivada de  $\bar{x}(\cdot)$  é dada por

$$\bar{x}'(t) = \frac{1}{2}(1, 2t) = \frac{1}{2}u^2(t) \quad q.s.$$

e portanto

$\bar{x}(\cdot)$  não é uma solução verdadeira.

(ii) Pelo contrário, se

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} (0, 0) & \text{para } t \in [0, \frac{1}{4}] \\ (t - \frac{1}{4}, t^2 - \frac{1}{16}) & \text{para } t \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}], \\ (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & \text{para } t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

então  $\bar{x}(\cdot)$  é a única solução verdadeira satisfazendo a restrição, o que podemos verificar calculando a sua derivada:

$$(\bar{x}'_1(t), \bar{x}'_2(t)) = \begin{cases} (1, 2t) & \text{para } t \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \\ (0, 0) & \text{para outros } t \end{cases} = \begin{cases} u^2(t) & \text{para } t \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \\ u^1(t) & \text{para outros } t \end{cases} \quad q.s..$$

Este exemplo — abaixo generalizado, em (5.1) & (5.2) — mostra que, no caso vectorial, para garantirmos a existência de soluções verdadeiras  $\omega$ -dominadas, i.e. satisfazendo (1.11), teremos de impor algumas hipóteses extra ...

## 1.3 Estrutura da tese

Após esta introdução, no capítulo 2 expomos formalmente o problema geral do controlo poliédrico  $\omega$ -dominado, incluindo notações, definições e resultados preliminares usados ao longo de todo o manuscrito.

Depois, no capítulo 3, apresentamos a interpretação geométrica do problema em estudo e um resultado que garante a existência de soluções  $b$ -fracas bang-bang  $\omega$ -extremais, i.e. soluções do problema de controlo poliédrico dominado vectorial enfraquecido

$$\mathcal{L}^1 x(t) \in \{u^1(t), \dots, u^m(t)\} \quad q.s., \quad x(a) = \bar{x}(a), \quad \langle x(b), \omega \rangle = \langle \bar{x}(b), \omega \rangle,$$

que não só são  $\omega$ -dominadas (i.e. satisfazem a desigualdade (1.11)), mas são mesmo, num sentido a precisar, extremais na direcção  $\omega$ . Chamamos-lhes soluções  $b$ -fracas para enfatizar que a igualdade entre  $x(\cdot)$  e  $\bar{x}(\cdot)$  no ponto final  $b$  apenas é satisfeita de forma fraca, i.e. apenas escalarmente, na coordenada dada pelo produto interno por  $\omega$ . Este capítulo 3 demonstra que toda a dificuldade — introduzida no problema de controlo poliédrico dominado, ao passar do caso escalar ao vectorial — se concentra na satisfação da condição vectorial  $x(b) = \bar{x}(b)$  no instante final  $t = b$ .

Pelo contrário, o capítulo 4 é dedicado ao estudo da existência de soluções  $b$ -fortes bang-bang  $\omega$ -dominadas, i.e. verificando (1.10) & (1.11). Apresentamos, em particular, uma condição necessária e suficiente para a sua existência. É este o capítulo central da tese, onde se concentram as verdadeiras dificuldades do controlo poliédrico dominado vectorial, que foram imensamente suavizadas no capítulo anterior através do enfraquecimento escalar da condição a satisfazer em  $t = b$ . E consideramos notável o facto de termos neste capítulo 4 conseguido obter uma condição necessária e suficiente, ainda por cima tão simples, a (4.6).

Quanto ao capítulo 5, note-se que só é possível aplicar os resultados expostos no capítulo 4 quando uma certa classe de funções é não-vazia; não sendo no entanto claro, a priori, se essa classe é, ou não, vazia, em exemplos específicos. Assim, o capítulo 5 é dedicado a esclarecer esta questão no caso mais simples em que  $A^0(\cdot) \equiv 0$  em (1.9) e a evolução se dá no plano  $\mathbb{R}^2$  guiada por dois controlos apenas.



## Capítulo 2

# O problema geral vectorial do controlo poliédrico $\omega$ -dominado

Conforme atrás referido, vamos agora descrever formalmente, introduzindo as notações e definições convenientes, o problema geral do controlo poliédrico  $\omega$ -dominado, em dimensão  $d \in \mathbb{N}$  com  $m \in \mathbb{N}$  controlos e com derivadas de ordem  $p \in \mathbb{N}$ .

Consideremos o espaço de Sobolev

$$\mathcal{X}^{p,d} := W^{p,1}([a, b], \mathbb{R}^d) \quad (2.1)$$

e fixemos  $m$  controlos integráveis (i.e., os “vértices” do nosso poliedro móvel)

$$u^1(\cdot), \dots, u^m(\cdot) \in L^1([a, b], \mathbb{R}^d), \quad (2.2)$$

os quais definem o conjunto dos valores que os controlos bang-bang podem assumir e o correspondente conjunto para os controlos relaxados,

$$U^{bb}(t) := \{u^1(t), \dots, u^m(t)\} \quad \& \quad U^{co}(t) := co U^{bb}(t), \quad (2.3)$$

onde  $co$  é o invólucro convexo, de modo que  $U^{co}(\cdot)$  representa um poliedro móvel de controlos.

Dadas  $p$

$$\begin{aligned} \text{matrizes } A^k(\cdot), \text{ de dimensão } d \times d, \text{ com entradas } a_{ij}^k(\cdot) \in L^1(a, b) \\ (k = 0, 1, \dots, p-1), \end{aligned} \quad (2.4)$$

definem-se o operador diferencial ordinário linear de ordem  $p$  vectorial

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^p x(t) &:= \\ &:= x^{(p)}(t) + A^{p-1}(t) x^{(p-1)}(t) + \dots + A^1(t) x'(t) + A^0(t) x(t), \end{aligned} \quad (2.5)$$

e os correspondentes espaços de soluções para as inclusões diferenciais vectoriais convexa e não-convexa

$$\mathcal{X}^{co} := \{x(\cdot) \in \mathcal{X}^{p,d} : \mathcal{L}^p x(\cdot) \in U^{co}(\cdot) \text{ q.s. em } [a, b]\} \quad (2.6)$$

$$\mathcal{X}^{bb} := \{x(\cdot) \in \mathcal{X}^{co} : \mathcal{L}^p x(\cdot) \in U^{bb}(\cdot) \text{ q.s. em } [a, b]\}. \quad (2.7)$$

Dada uma solução relaxada de referência, i.e. uma função

$$\bar{x}(\cdot) \in \mathcal{X}^{co}, \quad (2.8)$$

definam-se ainda as classes de funções

$$\bar{\mathcal{X}}_a := \{x(\cdot) \in \mathcal{X}^{p,d} : x^{(k)}(a) = \bar{x}^{(k)}(a) \text{ para } k = 0, 1, \dots, p-1\} \quad (2.9)$$

$$\bar{\mathcal{X}}_b := \{x(\cdot) \in \mathcal{X}^{p,d} : x^{(k)}(b) = \bar{x}^{(k)}(b) \text{ para } k = 0, 1, \dots, p-1\} \quad (2.10)$$

$$\bar{\mathcal{X}} := \bar{\mathcal{X}}_a \cap \bar{\mathcal{X}}_b. \quad (2.11)$$

**Definição 2.1 (Solução relaxada)** Diremos que  $x(\cdot) \in \mathcal{X}^{p,d}$  é uma solução relaxada se é solução da inclusão diferencial convexificada, ou relaxada, e é  $p$ -tangente a  $\bar{x}(\cdot)$  nos pontos fronteira  $a$  &  $b$ , i.e.

$$x(\cdot) \in \bar{\mathcal{X}}^{co} := \mathcal{X}^{co} \cap \bar{\mathcal{X}}. \quad (2.12)$$

**Definição 2.2 (Solução bang-bang)** Diremos que  $x(\cdot) \in \mathcal{X}^{p,d}$  é uma solução bang-bang se é solução da inclusão diferencial não-convexa e é  $p$ -tangente a  $\bar{x}(\cdot)$  nos pontos fronteira  $a$  &  $b$ , i.e.

$$x(\cdot) \in \bar{\mathcal{X}}^{bb} := \mathcal{X}^{bb} \cap \bar{\mathcal{X}}. \quad (2.13)$$

Por outro lado, fixando uma direcção  $\omega \in \mathbb{R}^d$ , e.g.  $\omega = (1, 0, \dots, 0)$ , e usando o produto interno canónico em  $\mathbb{R}^d$ , denotado por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , defina-se a classe das funções  $\omega$ -dominadas (por  $\bar{x}(\cdot)$ ):

$$\bar{\mathcal{X}}_- := \{x(\cdot) \in \bar{\mathcal{X}} : \langle x(t), \omega \rangle \leq \langle \bar{x}(t), \omega \rangle \quad \forall t \in [a, b]\}. \quad (2.14)$$

**Definição 2.3 (Solução relaxada  $\omega$ -dominada)** Diremos que  $x(\cdot) \in \mathcal{X}^{p,d}$  é uma solução relaxada  $\omega$ -dominada (pelo  $\bar{x}(\cdot)$  fixado) se

$$x(\cdot) \in \bar{\mathcal{X}}_-^{co} := \mathcal{X}^{co} \cap \bar{\mathcal{X}}_- . \quad (2.15)$$

**Definição 2.4 (Solução bang-bang  $\omega$ -dominada)** Diremos que  $x(\cdot) \in \mathcal{X}^{p,d}$  é uma solução bang-bang  $\omega$ -dominada (pelo  $\bar{x}(\cdot)$  fixado) se

$$x(\cdot) \in \bar{\mathcal{X}}_-^{bb} := \mathcal{X}^{bb} \cap \bar{\mathcal{X}}_- . \quad (2.16)$$

O nosso objectivo é então encontrar hipóteses simples — e a sua indispensabilidade já foi exibida em (1.12) e linhas seguintes — garantindo que, para cada solução relaxada  $\bar{x}(\cdot) \in \mathcal{X}^{co}$  dada, existe sempre pelo menos uma solução bang-bang (ou verdadeira)  $\hat{x}(\cdot)$   $\omega$ -dominada (por este  $\bar{x}(\cdot)$  seleccionado). Ou seja, hipóteses implicando que

$$\text{para cada } \bar{x}(\cdot) \in \mathcal{X}^{co} \quad \text{temos} \quad \bar{\mathcal{X}}_-^{bb} \text{ não-vazio} . \quad (2.17)$$

A principal tal hipótese será a seguinte RESTRIÇÃO GEOMÉTRICA imposta às matrizes em (2.4): as suas transpostas deverão ter uma direcção própria constante, nomeadamente a direcção constante

$$\begin{aligned} \omega \text{ em (2.14) tem de ser uma direcção própria para cada} \\ \text{matriz transposta } A^k(\cdot)^T \quad (k = 0, 1, \dots, p-1) : \\ \exists \mu_A^k(\cdot) \in L^1(a, b) : \quad A^k(t)^T \omega = \mu_A^k(t) \omega \quad p.q.t. \quad t \in [a, b] . \end{aligned} \quad (2.18)$$

Evidentemente, no caso em que  $\mathcal{L}^p x(\cdot) = x'(\cdot)$  (isto é  $p = 1$  &  $A^0(\cdot) \equiv 0$  em (2.5)), esta condição é trivialmente satisfeita com  $\mu_A^0(\cdot) \equiv 0$ . Igualmente, no caso escalar  $d = 1$  esta condição é também trivialmente satisfeita.

No caso geral vectorial, esta hipótese tem a grande vantagem de dar origem a uma EDO (equação diferencial ordinária) linear escalar — semelhante à EDO vectorial que  $x(\cdot)$  satisfaz — obrigatoriamente satisfeita pela coordenada  $y(\cdot) := \langle x(\cdot), \omega \rangle$ , o que muitíssimo simplifica o tratamento deste complexo problema.

De facto, assumindo (2.18) e considerando as  $\omega$ -projecções (relembremos (2.16), (2.15), (2.3) & (2.5))

$$\bar{\mathcal{Y}}_{\omega-}^{bb} := \left\langle \bar{\mathcal{X}}_-^{bb}, \omega \right\rangle := \left\{ y(\cdot) := \langle x(\cdot), \omega \rangle : x(\cdot) \in \bar{\mathcal{X}}_-^{bb} \right\} \quad (2.19)$$

$$\bar{\mathcal{Y}}_{\omega-}^{\text{co}} := \langle \bar{\mathcal{X}}_{-}^{\text{co}}, \omega \rangle \quad (2.20)$$

$$U_{\omega}^{\text{co}}(t) := \langle U^{\text{co}}(t), \omega \rangle := \{\rho(t) := \langle u, \omega \rangle : u \in U^{\text{co}}(t)\} \quad (2.21)$$

$$U_{\omega}^{\text{bb}}(t) := \langle U^{\text{bb}}(t), \omega \rangle; \quad (2.22)$$

e definindo, para  $y(\cdot) \in W^{p,1}([a, b])$ , o operador diferencial ordinário linear de ordem  $p$  escalar

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\omega}^p y(t) &:= \\ &:= y^{(p)}(t) + \mu_A^{p-1}(t) y^{(p-1)}(t) + \dots + \mu_A^1(t) y'(t) + \mu_A^0(t) y(t), \end{aligned} \quad (2.23)$$

temos que

$$y(\cdot) \in \bar{\mathcal{Y}}_{\omega-}^{\text{co}} \Rightarrow y(\cdot) \text{ satisfaz a inclusão} \quad (2.24)$$

$$\mathcal{L}_{\omega}^p y(t) =: \rho(t) \in U_{\omega}^{\text{co}}(t) \quad p.q.t. \quad t \in [a, b]; \quad (2.25)$$

e, analogamente,

$$y(\cdot) \in \bar{\mathcal{Y}}_{\omega-}^{\text{bb}} \Rightarrow y(\cdot) \text{ satisfaz a inclusão} \quad (2.26)$$

$$\mathcal{L}_{\omega}^p y(t) =: \rho(t) \in U_{\omega}^{\text{bb}}(t) \quad p.q.t. \quad t \in [a, b], \quad (2.27)$$

uma vez que

$$\begin{aligned} x(\cdot) \in \mathcal{X}^{p,d} &\Rightarrow \langle \mathcal{L}^p x(\cdot), \omega \rangle = \mathcal{L}_{\omega}^p y(\cdot), \quad \text{sendo} \\ &y(\cdot) := \langle x(\cdot), \omega \rangle. \end{aligned} \quad (2.28)$$

A situação mais simples do problema em estudo é o caso  $p = 1 = d$ , o qual dá origem à EDO escalar de 1ª ordem

$$y'(t) + \mu_A^0(t) y(t) = \rho(t) \quad q.s. \quad \& \quad y(a) = \bar{y}(a), \quad (2.29)$$

facilmente resolvida usando a função exponencial. De facto, primitivando o valor próprio  $\mu_A^0(\cdot)$  em (2.18),

$$\eta_A^0(t) := \int_a^t \mu_A^0(r) dr \quad \text{para } t \in [a, b], \quad (2.30)$$

então a solução de (2.29) é dada explicitamente pela chamada fórmula de variação das constantes:

$$y(t) = e^{-\eta_A^0(t)} \left[ \bar{y}(a) + \int_a^t e^{\eta_A^0(\tau)} \rho(\tau) d\tau \right]. \quad (2.31)$$

No caso geral dum operador diferencial vectorial  $\mathcal{L}^p$  (como em (2.5)), de ordem arbitrária  $p \in \mathbb{N}$  e dimensão arbitrária  $d \in \mathbb{N}$ , pode obter-se um operador resolvente  $\mathcal{S}_a(\cdot)$ , com propriedades semelhantes às da exponencial, como segue.

Partindo da EDO linear não-homogénea

$$x^{(p)}(t) + A^{p-1}(t)x^{(p-1)}(t) + \dots + A^1(t)x'(t) + A^0(t)x(t) = u(t), \quad (2.32)$$

$$\text{com } x^{(k)}(t) \in \mathbb{R}^d \quad \& \quad A^k(t) \in \mathbb{R}^{d \times d} \quad (k = 0, 1, \dots, p-1), \quad (2.33)$$

e introduzindo novas variáveis

$$z^k(t) := x^{(k)}(t) \in \mathbb{R}^d \quad (k = 0, 1, \dots, p-1) \quad (2.34)$$

então é um exercício elementar mostrar a equivalência entre a EDO linear de ordem  $p$  e dimensão  $d$  (em (2.32)) e a EDO linear de primeira ordem e dimensão  $pd$ , dada por:

$$\begin{pmatrix} z^0 \\ z^1 \\ \vdots \\ z^{p-2} \\ \text{---} \\ z^{p-1} \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} 0^{d \times d} & -Id^{d \times d} & 0^{d \times d} & \dots & 0^{d \times d} \\ 0^{d \times d} & 0^{d \times d} & -Id^{d \times d} & \dots & 0^{d \times d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0^{d \times d} & 0^{d \times d} & 0^{d \times d} & \dots & -Id^{d \times d} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ A^0 & A^1 & A^2 & \dots & A^{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^0 \\ z^1 \\ z^2 \\ \vdots \\ \text{---} \\ z^{p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0^d \\ 0^d \\ \vdots \\ 0^d \\ \text{---} \\ u \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} \text{onde } 0^{d \times d} & \text{ é a } d \times d \text{ - matriz nula} \\ Id^{d \times d} & \text{ é a } d \times d \text{ - matriz identidade} \\ \& \quad 0^d \in \mathbb{R}^d & \text{ é o vector nulo.} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Escrevendo esta EDO de primeira ordem na sua forma condensada

$$z'(t) + A(t)z(t) = v(t), \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \text{com } z(t) & := (z^0(t), \dots, z^{p-1}(t)) \in \mathbb{R}^{pd} \\ v(t) & := (0^d, \dots, 0^d, u(t)) \in \mathbb{R}^{pd} \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\& \quad A(t) \text{ a } pd \times pd \text{ - matriz em (2.35),}$$

podemos então finalmente definir (de forma única) o

$$\text{operador solução } \mathcal{S}_a(\cdot), \text{ i.e. a função matricial } pd \times pd \text{ satisfazendo :} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_a(a) & = Id^{pd \times pd}, \\ \mathcal{S}_a(t) & = [\mathcal{S}_a^1(t) \ \dots \ \mathcal{S}_a^{pd}(t)], \text{ cada coluna } \mathcal{S}_a^\nu(t) \end{aligned} \quad (2.40)$$

sendo solução da EDO linear homogénea

$$\mathcal{S}_a^{\nu'}(t) + A(t) \mathcal{S}_a^{\nu}(t) = 0, \quad \mathcal{S}_a^{\nu}(\cdot) \in W^{1,1}([a, b], \mathbb{R}^{pd}). \quad (2.41)$$

Então, pela fórmula de Jacobi,

$$\mathcal{S}_a(t) \text{ tem inversa } \mathcal{S}_a^{-1}(t) \quad (\text{i.e. } \mathcal{S}_a(t) \mathcal{S}_a^{-1}(t) \equiv Id^{pd \times pd}) \quad (2.42)$$

com determinante (wronskiano)

$$\Delta_a(t) := \det \mathcal{S}_a^{-1}(t) = e^{Tr_a A^{p-1}(t)} > 0, \quad (2.43)$$

$$\Delta_a(\cdot) \in W^{1,1}([a, b]),$$

$$\text{sendo } Tr_a A^{p-1}(t) := \int_a^t \text{traço } A^{p-1}(\tau) d\tau \quad (2.44)$$

$$\text{e } \text{traço } A^{p-1}(t) := A_{11}^{p-1}(t) + \dots + A_{dd}^{p-1}(t) = \text{traço } A(t).$$

Por forma a usarmos este operador  $\mathcal{S}_a(t)$  para escrever soluções explícitas da EDO linear não-homogénea (2.37), consideremos:

$$\text{o vector dos dados iniciais } \bar{z}_a \in \mathbb{R}^{pd}; \quad (2.45)$$

$$\text{a última } d\text{-coluna, } (\mathcal{S}_a^{-1})^p(t), \text{ da } p \times p\text{-matriz } \mathcal{S}_a^{-1}(t), \quad (2.46)$$

i.e. consideremos  $\mathcal{S}_a^{-1}(t)$  como uma “matriz” de “dimensão”  $p \times p$ , cujas “entradas” são elas próprias matrizes com dimensão  $d \times d$ , pelo que a última  $d$ -coluna em (2.46) é formada pelas  $d$  últimas colunas de  $\mathcal{S}_a^{-1}(t)$  vista como matriz de dimensão  $pd \times pd$ ; e consideremos também o produto

$$\sigma_a(\cdot) \in W^{1,1}([a, b], \mathbb{R}^{pd \times d}), \quad \sigma_a(t) := \Delta_a(t)^{-1} (\mathcal{S}_a^{-1})^p(t). \quad (2.47)$$

Então, usando estes ingredientes, a solução (única) da EDO linear não-homogénea

$$z'(t) + A(t) z(t) = v(t) \quad \& \quad z(a) = \bar{z}_a \quad (2.48)$$

pode ser escrita, explicitamente, da seguinte forma:

$$z(t) = \mathcal{S}_a(t) \left[ \bar{z}_a + \int_a^t \sigma_a(\tau) \Delta_a(\tau) u(\tau) d\tau \right], \quad (2.49)$$

como é fácil de verificar usando (2.38). De facto,

$$z(a) = \mathcal{S}_a(a) \bar{z}_a = \bar{z}_a \quad (2.50)$$

e

$$\begin{aligned} z'(t) &= \\ &= \mathcal{S}_a'(t) \left[ \bar{z}_a + \int_a^t \sigma_a(\tau) \Delta_a(\tau) u(\tau) d\tau \right] + \mathcal{S}_a(t) \sigma_a(t) \Delta_a(t) u(t) = \\ &= -A(t) z(t) + \mathcal{S}_a(\mathcal{S}_a^{-1})^p(t) u(t) = -A(t) z(t) + v(t). \end{aligned}$$

# Capítulo 3

## Existência de soluções $b$ -fracas bang-bang $\omega$ -extremais no caso $p = 1$

Neste capítulo 3 — e no seguinte — consideramos a versão vectorial com derivadas de primeira ordem, i.e. com  $p = 1$ , do problema geral vectorial de ordem  $p \in \mathbb{N}$  exposto no capítulo 2.

É útil, para obter uma visão mais intuitiva do problema de controlo que estamos a considerar, encará-lo sob um ponto de vista geométrico. De facto, consideremos uma direcção unitária  $\omega$ , i.e.  $|\omega| = 1$ , e um factor  $\bar{y}(\cdot) \in W^{1,1}([a, b])$ . Fica então definido um hiperplano  $\bar{H}(t)$  ortogonal a  $\omega$ ,

$$\bar{H}(t) := \{S \in \mathbb{R}^d : \langle S - \omega \bar{y}(t), \omega \rangle = 0\}, \quad t \in [a, b],$$

movendo-se ao longo da direcção  $\omega$  usando controlos relaxados, i.e. satisfazendo a inclusão diferencial linear escalar convexa

$$\mathcal{L}_\omega^p \bar{y}(t) \in U_\omega^{\text{co}}(t) \quad \text{q.s. em } [a, b].$$

Consideremos também um ponto AC  $\bar{x}(t) \in \bar{H}(t)$  movendo-se dentro desse hiperplano usando controlos relaxados, i.e.

$$\mathcal{L}^p \bar{x}(t) \in U^{\text{co}}(t) \quad \text{q.s. em } [a, b],$$

pelo que  $\bar{x}(\cdot) \in \mathcal{X}^{\text{co}}$ . O nosso objectivo é encontrar um outro ponto AC  $\hat{x}(t)$  satisfazendo  $\hat{x}(\cdot) \in \bar{\mathcal{X}}_-^{\text{bb}}$ , nomeadamente: que comece  $p$ -tangencialmente do mesmo ponto (i.e.  $\hat{x}^{(k)}(a) = \bar{x}^{(k)}(a)$  para  $k = 0, 1, \dots, p-1$ ) usando controlos bang-bang,

$$\mathcal{L}^p \hat{x}(t) \in U^{\text{bb}}(t) \quad \text{q.s. em } [a, b];$$

e que alcance  $p$ -tangencialmente exactamente o mesmo destino final  $\bar{x}(b) \in \bar{H}(b)$  (i.e.  $\hat{x}^{(k)}(b) = \bar{x}^{(k)}(b)$  para  $k = 0, 1, \dots, p-1$ ) sujeito, contudo, à restrição de (tocar à vontade, mas) nunca atravessar o hiperplano dado  $\bar{H}(t)$ .

Neste capítulo provamos um resultado que é a generalização directa ao caso vectorial  $d > 1$  de [2, lemma 3.4]. No entanto é apenas um resultado parcial. Geometricamente, afirma que o hiperplano final  $\bar{H}(b)$  é sempre alcançado, porém o ponto  $\bar{x}(b)$  em  $\bar{H}(b)$  não é necessariamente atingido. Nomeadamente, definindo a classe — mais ampla — das soluções  $b$ -fracas, dada por

$$\bar{\mathcal{X}}_{\omega b w}^{co} := \left\{ x(\cdot) \in \mathcal{X}^{co} \cap \bar{\mathcal{X}}_a : \begin{array}{l} \langle x^{(k)}(b), \omega \rangle = \langle \bar{x}^{(k)}(b), \omega \rangle \\ \text{para } k = 0, 1, \dots, p-1 \end{array} \right\} \quad (3.1)$$

$$\bar{\mathcal{X}}_{\omega b w}^{bb} := \mathcal{X}^{bb} \cap \bar{\mathcal{X}}_{\omega b w}^{co}, \quad (3.2)$$

então, assumindo a hipótese geométrica (2.18), no caso  $p = 1$  temos, mais precisamente, que contentando-nos em atingir o hiperplano  $\bar{H}(b)$  — e prescindindo de chegar exactamente ao ponto  $\bar{x}(b)$  — conseguimos sempre uma solução  $b$ -fraca minimal bang-bang e uma solução  $b$ -fraca maximal bang-bang. Ou, ainda mais precisamente, vale o seguinte

**Teorema 3.1** (*Existência de soluções  $b$ -fracas bang-bang  $\omega$ -extremais*)

Suponhamos que a hipótese (2.18) é satisfeita e que  $p = 1$ . Então

$$\begin{aligned} \forall \bar{x}(\cdot) \in \mathcal{X}^{co} \quad \exists \bar{x}_{\omega b w}^{\min}(\cdot) \in \bar{\mathcal{X}}_{\omega b w}^{bb} \quad \exists \bar{x}_{\omega b w}^{\max}(\cdot) \in \bar{\mathcal{X}}_{\omega b w}^{bb} : \\ \text{definindo } \bar{y}_{\omega b w}^{\min}(\cdot) := \langle \bar{x}_{\omega b w}^{\min}(\cdot), \omega \rangle \quad \& \quad \bar{y}_{\omega b w}^{\max}(\cdot) := \langle \bar{x}_{\omega b w}^{\max}(\cdot), \omega \rangle, \\ \bar{y}_{\omega b w}^{\min}(\cdot) \leq y(\cdot) := \langle x(\cdot), \omega \rangle \leq \bar{y}_{\omega b w}^{\max}(\cdot) \quad \forall x(\cdot) \in \bar{\mathcal{X}}_{\omega b w}^{co}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

E como “ $b$ -fracas” nada significa em dimensão  $d = 1$ , naturalmente segue o

**Corolário 3.2** (*Caso escalar: se  $d = 1$  então existem sempre soluções bang-bang*)

$$p = 1 \quad \& \quad d = 1 \quad \Rightarrow \quad (2.17). \quad (3.4)$$

**Demonstração :** Consideremos os seguintes subconjuntos mensuráveis de  $[a, b]$  :

$$\begin{aligned}
& E_+^0, E_+^1, \dots, E_+^m \quad \& \quad E_-^0, E_-^1, \dots, E_-^m, \quad \text{por :} \\
& E_+^0 := E_-^0 := \emptyset; \quad e, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, m, \\
& \quad \overline{E}_+^{j-1} := [a, b] \setminus E_+^0 \setminus E_+^1 \setminus \dots \setminus E_+^{j-1}, \\
& \quad \overline{E}_-^{j-1} := [a, b] \setminus E_-^0 \setminus E_-^1 \setminus \dots \setminus E_-^{j-1}, \\
& E_+^j := \left\{ t \in \overline{E}_+^{j-1} : \langle u^j(t), \omega \rangle \geq \langle u^k(t), \omega \rangle \quad \forall k \in \{1, \dots, m\} \right\}, \\
& E_-^j := \left\{ t \in \overline{E}_-^{j-1} : \langle u^j(t), \omega \rangle \leq \langle u^k(t), \omega \rangle \quad \forall k \in \{1, \dots, m\} \right\}.
\end{aligned}$$

Usando estes conjuntos  $E_+^j$  &  $E_-^j$ , e as suas funções características  $\chi_{E_+^j}(\cdot)$ ,  $\chi_{E_-^j}(\cdot)$ , começamos por definir o controlo  $\omega$ -minimal (resp.  $\omega$ -maximal), nomeadamente o controlo em

$$\mathcal{U}^{\text{co}} := \left\{ u(\cdot) \in L^1([a, b], \mathbb{R}^d) : u(t) \in U^{\text{co}}(t) \quad p.q.t. \quad t \in [a, b] \right\} \quad (3.5)$$

(ver (3.5) & (2.3)), que é minimal (resp. maximal) ao longo da direcção  $\omega$  :

$$u_\omega^-(t) := \sum_{j=1}^m \chi_{E_-^j}(t) u^j(t) \quad \& \quad u_\omega^+(t) := \sum_{j=1}^m \chi_{E_+^j}(t) u^j(t). \quad (3.6)$$

Sendo

$$\rho_\omega^-(t) := \langle u_\omega^-(t), \omega \rangle \quad \& \quad \rho_\omega^+(t) := \langle u_\omega^+(t), \omega \rangle, \quad (3.7)$$

obtemos então a desigualdade

$$\rho_\omega^-(t) \leq \rho(t) \leq \rho_\omega^+(t) \quad q.s. \quad \forall \rho(\cdot) := \langle u(\cdot), \omega \rangle \in \mathcal{U}_\omega^{\text{co}}, \quad (3.8)$$

onde

$$\mathcal{U}_\omega^{\text{co}} := \langle \mathcal{U}^{\text{co}}, \omega \rangle. \quad (3.9)$$

Em particular, certamente

$$\forall x(\cdot) \in \overline{\mathcal{X}}_{\omega b \omega}^{\text{co}} \quad \exists \lambda(\cdot) \in \Lambda := \{ \lambda(\cdot) \in L^\infty(a, b) : \lambda(t) \in [0, 1] \quad q.s. \} \quad (3.10)$$

tal que,  $p.q.t. \quad t \in [a, b]$ ,

$$\langle \mathcal{L}^p x(t), \omega \rangle = (1 - \lambda)(t) \rho_\omega^-(t) + \lambda(t) \rho_\omega^+(t). \quad (3.11)$$

Sejam

$$\bar{\mathcal{X}}_a^{co} := \mathcal{X}^{co} \cap \bar{\mathcal{X}}_a \quad (\text{ver (2.6), (2.9) \& (2.1)}) \quad (3.12)$$

$$\bar{\mathcal{Y}}_{\omega a}^{co} := \langle \bar{\mathcal{X}}_a^{co}, \omega \rangle \quad \& \quad \bar{Y}_{\omega a}^{co}(t) := \{y(t) : y(\cdot) \in \bar{\mathcal{Y}}_{\omega a}^{co}\} \quad (3.13)$$

$$y_{\omega a}^{\min}(\cdot) := \text{o \acute{u}nico elemento de } \bar{\mathcal{Y}}_{\omega a}^{co} \text{ que satisfaz} \\ \mathcal{L}_{\omega}^p y_{\omega a}^{\min}(\cdot) = \rho_{\omega}^{-}(\cdot) \text{ q.s.} \quad (3.14)$$

$$y_{\omega a}^{\max}(\cdot) := \text{o \acute{u}nico elemento de } \bar{\mathcal{Y}}_{\omega a}^{co} \text{ que satisfaz} \\ \mathcal{L}_{\omega}^p y_{\omega a}^{\max}(\cdot) = \rho_{\omega}^{+}(\cdot) \text{ q.s..} \quad (3.15)$$

As funções  $y_{\omega a}^{\min}(\cdot)$  &  $y_{\omega a}^{\max}(\cdot)$  pertencem a  $W^{1,1}([a, b])$ ; e a nossa primeira afirmação é:

$$y_{\omega a}^{\min}(t) = \min \bar{Y}_{\omega a}^{co}(t) \quad \& \quad y_{\omega a}^{\max}(t) = \max \bar{Y}_{\omega a}^{co}(t). \quad (3.16)$$

Para provar e.g. o lado esquerdo de (3.16), definimos

$$\bar{y}(a) := \langle \bar{x}(a), \omega \rangle \quad (3.17)$$

e consideramos  $t \in [a, b]$  &  $y(t) \in \bar{Y}_{\omega a}^{co}(t)$ . Então, para algum  $x(\cdot) \in \bar{\mathcal{X}}_a^{co}$ ,

$$y(t) = e^{-\eta_A^0(t)} \left[ \bar{y}(a) + \int_a^t e^{\eta_A^0(\tau)} \langle \mathcal{L}^p x(\tau), \omega \rangle d\tau \right] \geq \\ \geq e^{-\eta_A^0(t)} \left[ \bar{y}(a) + \int_a^t e^{\eta_A^0(\tau)} \rho_{\omega}^{-}(\tau) d\tau \right] = \\ = y_{\omega a}^{\min}(t),$$

por (2.31) & (3.8). O que, juntamente com  $y_{\omega a}^{\min}(t) \in \bar{Y}_{\omega a}^{co}(t) \quad \forall t$ , garante a validade da nossa afirmação acima.

Analogamente, definimos (recordando (2.6))

$$\bar{\mathcal{X}}_b^{co} := \{x(\cdot) \in \mathcal{X}^{co} : \langle x(b), \omega \rangle = \langle \bar{x}(b), \omega \rangle\} \quad (3.18)$$

$$\bar{\mathcal{Y}}_{\omega b}^{co} := \langle \bar{\mathcal{X}}_b^{co}, \omega \rangle \quad \& \quad \bar{Y}_{\omega b}^{co}(t) := \{y(t) : y(\cdot) \in \bar{\mathcal{Y}}_{\omega b}^{co}\} \quad (3.19)$$

$$y_{\omega b}^{\min}(\cdot) := \text{o \acute{u}nico elemento de } \bar{\mathcal{Y}}_{\omega b}^{co} \text{ que satisfaz} \\ \mathcal{L}_{\omega}^p y_{\omega b}^{\min}(\cdot) = \rho_{\omega}^{+}(\cdot) \text{ q.s.} \quad (3.20)$$

$$y_{\omega b}^{\max}(\cdot) := \text{o \acute{u}nico elemento de } \bar{\mathcal{Y}}_{\omega b}^{co} \text{ que satisfaz} \\ \mathcal{L}_{\omega}^p y_{\omega b}^{\max}(\cdot) = \rho_{\omega}^{-}(\cdot) \text{ q.s.,} \quad (3.21)$$

e provamos que

$$y_{\omega b}^{\min}(t) = \min \bar{Y}_{\omega b}^{co}(t) \quad \& \quad y_{\omega b}^{\max}(t) = \max \bar{Y}_{\omega b}^{co}(t). \quad (3.22)$$

Como, para qualquer

$$y(\cdot) \in \bar{\mathcal{Y}}_{\omega b \omega}^{co} := \langle \bar{\mathcal{X}}_{\omega b \omega}^{co}, \omega \rangle, \quad (3.23)$$

$$y(t) \in \bar{Y}_{\omega a}^{co}(t) \cap \bar{Y}_{\omega b}^{co}(t) = [y_{\omega a}^{\min}(t), y_{\omega a}^{\max}(t)] \cap [y_{\omega b}^{\min}(t), y_{\omega b}^{\max}(t)], \quad (3.24)$$

por (3.16), (3.13), (3.22) & (3.19), em particular, definindo

$$\bar{y}(b) := \langle \bar{x}(b), \omega \rangle, \quad (3.25)$$

obtemos

$$y_{\omega b}^{\min}(a) \leq y_{\omega a}^{\min}(a) = \bar{y}(a) = y_{\omega a}^{\max}(a) \leq y_{\omega b}^{\max}(a) \quad (3.26)$$

$$y_{\omega a}^{\min}(b) \leq y_{\omega b}^{\min}(b) = \bar{y}(b) = y_{\omega b}^{\max}(b) \leq y_{\omega a}^{\max}(b). \quad (3.27)$$

Consideremos as novas funções

$$\bar{y}_{\omega b \omega}^{\min}(t) := \max \{y_{\omega a}^{\min}(t), y_{\omega b}^{\min}(t)\} \quad \& \quad (3.28)$$

$$\bar{y}_{\omega b \omega}^{\max}(t) := \min \{y_{\omega a}^{\max}(t), y_{\omega b}^{\max}(t)\}. \quad (3.29)$$

Temos  $\bar{y}_{\omega b \omega}^{\min}(\cdot) \in W^{1,1}([a, b])$ ,  $\bar{y}_{\omega b \omega}^{\max}(\cdot) \in W^{1,1}([a, b])$  e, por (3.24),  $y(t) \in [\bar{y}_{\omega b \omega}^{\min}(t), \bar{y}_{\omega b \omega}^{\max}(t)]$ , i.e.

$$\bar{y}_{\omega b \omega}^{\min}(t) \leq y(t) \leq \bar{y}_{\omega b \omega}^{\max}(t) \quad \forall t \in [a, b] \quad \forall y(\cdot) \in \bar{\mathcal{Y}}_{\omega b \omega}^{co}; \quad (3.30)$$

além disso, por (3.26) & (3.27),

$$\bar{y}_{\omega b \omega}^{\min}(a) = \bar{y}(a) = \bar{y}_{\omega b \omega}^{\max}(a) \quad \& \quad \bar{y}_{\omega b \omega}^{\min}(b) = \bar{y}(b) = \bar{y}_{\omega b \omega}^{\max}(b). \quad (3.31)$$

Recordando (3.28), (3.29) & (3.7), definimos

$$\chi^{\min}(t) := \begin{cases} 1 & \text{para os } t \in [a, b] \text{ onde } \bar{y}_{\omega b \omega}^{\min}(t) = y_{\omega b}^{\min}(t) \\ 0 & \text{para os outros } t \in [a, b] \end{cases} \quad (3.32)$$

$$\chi^{\max}(t) := \begin{cases} 1 & \text{para os } t \in [a, b] \text{ onde } \bar{y}_{\omega b \omega}^{\max}(t) = y_{\omega b}^{\max}(t) \\ 0 & \text{para os outros } t \in [a, b] \end{cases} \quad (3.33)$$

$$\rho_{\omega b w}^{\min}(\cdot) := (1 - \chi^{\min}) \cdot \rho_{\omega}^{-}(\cdot) + \chi^{\min} \cdot \rho_{\omega}^{+}(\cdot) \quad (3.34)$$

$$\rho_{\omega b w}^{\max}(\cdot) := (1 - \chi^{\max}) \cdot \rho_{\omega}^{+}(\cdot) + \chi^{\max} \cdot \rho_{\omega}^{-}(\cdot), \quad (3.35)$$

pelo que

$$\bar{y}_{\omega b w}^{\min}(t) = (1 - \chi^{\min}) \cdot y_{\omega a}^{\min}(t) + \chi^{\min} \cdot y_{\omega b}^{\min}(t) \quad (3.36)$$

$$\bar{y}_{\omega b w}^{\max}(t) = (1 - \chi^{\max}) \cdot y_{\omega a}^{\max}(t) + \chi^{\max} \cdot y_{\omega b}^{\max}(t) \quad (3.37)$$

e

$$\rho_{\omega b w}^{\min}(t) = \mathcal{L}_{\omega}^p \bar{y}_{\omega b w}^{\min}(t) \quad q.s. \quad (3.38)$$

$$\rho_{\omega b w}^{\max}(t) = \mathcal{L}_{\omega}^p \bar{y}_{\omega b w}^{\max}(t) \quad q.s.. \quad (3.39)$$

E então, lembrando (3.6), definimos as novas funções

$$u_{\omega b w}^{\min}(\cdot) := (1 - \chi^{\min}) \cdot u_{\omega}^{-}(\cdot) + \chi^{\min} \cdot u_{\omega}^{+}(\cdot) \quad (3.40)$$

$$u_{\omega b w}^{\max}(\cdot) := (1 - \chi^{\max}) \cdot u_{\omega}^{+}(\cdot) + \chi^{\max} \cdot u_{\omega}^{-}(\cdot) \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \bar{x}_{\omega b w}^{\min}(\cdot) &:= \text{o \acute{u}nico elemento de } \bar{\mathcal{X}}_a^{co} \text{ que satisfaz} \\ \mathcal{L}^p \bar{x}_{\omega b w}^{\min}(\cdot) &= u_{\omega b w}^{\min}(\cdot) \quad q.s. \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \bar{x}_{\omega b w}^{\max}(\cdot) &:= \text{o \acute{u}nico elemento de } \bar{\mathcal{X}}_a^{co} \text{ que satisfaz} \\ \mathcal{L}^p \bar{x}_{\omega b w}^{\max}(\cdot) &= u_{\omega b w}^{\max}(\cdot) \quad q.s.. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Vamos mostrar que (3.3) é verdade. De facto, por (3.31) & (3.30), basta verificar que

$$y_3(t) := \langle \bar{x}_{\omega b w}^{\min}(t), \omega \rangle \quad \Rightarrow \quad y_3(t) = \bar{y}_{\omega b w}^{\min}(t), \quad \forall t \in [a, b] \quad (3.44)$$

$$y_4(t) := \langle \bar{x}_{\omega b w}^{\max}(t), \omega \rangle \quad \Rightarrow \quad y_4(t) = \bar{y}_{\omega b w}^{\max}(t), \quad \forall t \in [a, b]. \quad (3.45)$$

Mas, por (3.42), (3.40) & (3.38), *p.q.t.*  $t \in [a, b]$ ,

$$\mathcal{L}_{\omega}^p y_3(t) = \langle \mathcal{L}^p \bar{x}_{\omega b w}^{\min}(t), \omega \rangle = \langle u_{\omega b w}^{\min}(t), \omega \rangle = \rho_{\omega b w}^{\min}(t);$$

e como também  $\mathcal{L}_{\omega}^p \bar{y}_{\omega b w}^{\min}(t) = \rho_{\omega b w}^{\min}(t)$  *p.q.t.*  $t \in [a, b]$ , a unicidade de solução garante (3.44). A demonstração de (3.45) é semelhante.  $\square$

Apresentamos a seguir outra demonstração deste teorema 3.1.

**Demonstração :** Usando (3.6) & (3.7) definimos

$$h(t) := e^{\eta_A^0(t)} (\rho_\omega^+(t) - \rho_\omega^-(t)), \quad (3.46)$$

pelo que, por (3.8),

$$h(t) \geq 0 \quad q.s. \text{ em } [a, b]. \quad (3.47)$$

Temos (recorde-se (3.10) & (3.11))

$$\begin{aligned} \forall x(\cdot) \in \overline{\mathcal{X}}_{\omega b w}^{co} \quad \exists \lambda(\cdot) \in \Lambda : \\ \langle \mathcal{L}^p x(t), \omega \rangle &= (1 - \lambda)(t) \rho_\omega^-(t) + \lambda(t) \rho_\omega^+(t) = \\ &= \rho_\omega^-(t) + \lambda(t) (\rho_\omega^+(t) - \rho_\omega^-(t)) \quad q.s.. \end{aligned} \quad (3.48)$$

O nosso primeiro objectivo é definir, para  $t \in [a, b]$ ,

$$\begin{aligned} \bar{x}_{\omega b w}^{\min}(t) := \\ := \mathcal{S}_a(t) \left[ \bar{x}(a) + \int_a^t \sigma_a(\tau) \Delta_a(\tau) \left( (1 - \mathcal{X}_{E_-})(\tau) u_\omega^-(\tau) + \mathcal{X}_{E_-}(\tau) u_\omega^+(\tau) \right) d\tau \right], \end{aligned} \quad (3.49)$$

onde  $E_-$  é o subconjunto de  $[a, b]$  a ser construído como se segue.

Para começar, definimos para  $t \in [a, b]$ , usando (3.47), a função

$$H(t) := \int_t^b h(\tau) d\tau - \int_a^b h(\tau) \lambda(\tau) d\tau, \quad (3.50)$$

obtendo, por (3.50),

$$H(b) = - \int_a^b h(\tau) \lambda(\tau) d\tau \leq 0 \leq H(a) = \int_a^b h(\tau) (1 - \lambda)(\tau) d\tau,$$

então  $0 \in co\{H(a), H(b)\} \subset H([a, b])$  de modo que, sendo

$$E_- := [c_-, b], \quad \text{com } c_- := \max\{t \in [a, b] : H(t) = 0\},$$

temos

$$\int_{c_-}^b h(\tau) d\tau = \int_a^b h(\tau) \mathcal{X}_{E_-}(\tau) d\tau = \int_a^b h(\tau) \lambda(\tau) d\tau. \quad (3.51)$$

Afirmamos que, para  $t \in [a, b]$ , com igualdade em  $t = b$ ,

$$\int_a^t h(\tau) \mathcal{X}_{E_-}(\tau) d\tau \leq \int_a^t h(\tau) \lambda(\tau) d\tau. \quad (3.52)$$

De facto, a igualdade em  $t = b$  aparece em (3.51); enquanto que para  $t \in [a, c_-]$

$$\int_a^t h(\tau) \mathcal{X}_{E_-}(\tau) d\tau = 0 \leq \int_a^t h(\tau) \lambda(\tau) d\tau;$$

e, para completar a demonstração de (3.52), para  $t \in [c_-, b]$  temos

$$\begin{aligned} \int_a^t h(\tau) \mathcal{X}_{E_-}(\tau) d\tau &= \int_{c_-}^t h(\tau) d\tau = \int_a^b h(\tau) \lambda(\tau) d\tau - \int_t^b h(\tau) d\tau \leq \\ &\leq \int_a^b h(\tau) \lambda(\tau) d\tau - \int_t^b h(\tau) \lambda(\tau) d\tau = \int_a^t h(\tau) \lambda(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Finalmente, por (3.49), (3.47), (3.52) & (3.48), obtemos  $\bar{x}_{\omega b w}^{\min}(a) = \bar{x}(a)$  e

$$\begin{aligned} \langle \bar{x}_{\omega b w}^{\min}(t), \omega \rangle &= \\ &= e^{-\eta_A^0(t)} \left[ \langle \bar{x}(a), \omega \rangle + \int_a^t e^{\eta_A^0(\tau)} \langle (1 - \mathcal{X}_{E_-})(\tau) u_{\omega}^-(\tau) + \mathcal{X}_{E_-}(\tau) u_{\omega}^+(\tau), \omega \rangle d\tau \right] = \\ &= e^{-\eta_A^0(t)} \left[ \langle \bar{x}(a), \omega \rangle + \int_a^t e^{\eta_A^0(\tau)} \rho_{\omega}^-(\tau) d\tau + \int_a^t h(\tau) \mathcal{X}_{E_-}(\tau) d\tau \right] \leq \\ &\leq e^{-\eta_A^0(t)} \left[ \langle \bar{x}(a), \omega \rangle + \int_a^t e^{\eta_A^0(\tau)} \rho_{\omega}^-(\tau) d\tau + \int_a^t h(\tau) \lambda(\tau) d\tau \right] = \\ &= e^{-\eta_A^0(t)} \left[ \langle \bar{x}(a), \omega \rangle + \int_a^t e^{\eta_A^0(\tau)} \rho_{\omega}^-(\tau) d\tau + \int_a^t e^{\eta_A^0(\tau)} (\rho_{\omega}^+(\tau) - \rho_{\omega}^-(\tau)) \lambda(\tau) d\tau \right] = \\ &= e^{-\eta_A^0(t)} \left[ \langle \bar{x}(a), \omega \rangle + \int_a^t e^{\eta_A^0(\tau)} (\rho_{\omega}^-(\tau) + \lambda(\tau) (\rho_{\omega}^+(\tau) - \rho_{\omega}^-(\tau))) d\tau \right] = \\ &= e^{-\eta_A^0(t)} \left[ \langle \bar{x}(a), \omega \rangle + \int_a^t e^{\eta_A^0(\tau)} \langle \mathcal{L}^p x(\tau), \omega \rangle d\tau \right] = \langle x(t), \omega \rangle, \end{aligned}$$

com igualdade em  $t = b$ , e assim mostramos (3.3) para  $\bar{x}_{\omega b w}^{\min}(\cdot)$ .

Analogamente podemos construir  $E_+ \subset [a, b]$  por forma a que, definindo

$$\begin{aligned} \bar{x}_{\omega b w}^{\max}(t) &:= \\ &:= \mathcal{S}_a(t) \left[ \bar{x}(a) + \int_a^t \sigma_a(\tau) \Delta_a(\tau) \left( (1 - \mathcal{X}_{E_+})(\tau) u_{\omega}^-(\tau) + \mathcal{X}_{E_+}(\tau) u_{\omega}^+(\tau) \right) d\tau \right], \end{aligned} \quad (3.53)$$

temos  $\bar{x}_{\omega b w}^{\max}(\cdot) \in \bar{\mathcal{X}}_{\omega b w}^{bb}$  e  $\langle x(t), \omega \rangle \leq \langle \bar{x}_{\omega b w}^{\max}(t), \omega \rangle \forall t \in [a, b]$ .  $\square$

Para mais tarde recordar, deixamos aqui assinalado o facto de que a demonstração do teorema 3.1 define  $\bar{x}_{\omega b w}^{\min}(\cdot)$  &  $\bar{x}_{\omega b w}^{\max}(\cdot)$  de tal forma que

$$\bar{x}_{\omega b w}^{\min}(\cdot) \in \mathcal{X}_{\omega}^{ext} \quad \& \quad \bar{x}_{\omega b w}^{\max}(\cdot) \in \mathcal{X}_{\omega}^{ext} \quad (\text{ver (3.49) \& (3.53)}),$$

onde o espaço

$$\mathcal{X}_{\omega}^{ext} := \{x(\cdot) \in \mathcal{X}^{p,d} : \mathcal{L}^p x(t) \in \{u_{\omega}^-(t), u_{\omega}^+(t)\} \text{ q.s.}\} \quad (3.54)$$

depende dos

$$\text{controlos } \omega\text{-extremais} \quad u_{\omega}^-(\cdot) \quad \& \quad u_{\omega}^+(\cdot) \quad (\text{ver (3.6)}). \quad (3.55)$$

# Capítulo 4

## Existência de soluções $b$ -fortes bang-bang $\omega$ -dominadas no caso $p = 1$

Conforme referido na secção 1.3, é neste capítulo que finalmente atacamos o núcleo duro do nosso problema, nomeadamente sem recorrer à facilitação fornecida pelo conceito de solução  $b$ -fraca. Assim, de aqui em diante abandonamos esta muleta — que nos permitiu atingir os melhores resultados expectáveis — e concentramos-nos no problema bem mais difícil de obter soluções  $x(\cdot)$   $b$ -fortes, i.e. tais que a condição terminal  $x(b) = \bar{x}(b)$  é mesmo satisfeita em todas as coordenadas, no caso das derivadas de primeira ordem, i.e.  $p = 1$  em (2.5).

Por forma a garantirmos que o ponto terminal  $\bar{x}(b)$  é efectivamente atingido em toda a sua plenitude — ao contrário do que acontece no capítulo anterior — neste capítulo associamos a cada  $x(\cdot)$  de  $\bar{\mathcal{X}}_-^{co}$  (definido em (2.15)) o aberto

$$\mathcal{O}_x := \{t \in (a, b) : \langle x(t), \omega \rangle < \langle \bar{x}(t), \omega \rangle\} \quad (4.1)$$

e focamos a nossa atenção no

$$\textit{caso não-singular} \quad \textit{tendo} \quad \mathcal{O}_x \textit{ não-vazio} \quad \textit{para algum } x(\cdot) \in \bar{\mathcal{X}}_-^{co}. \quad (4.2)$$

Note-se que — para aquilo que nos interessa — é indiferente definir o aberto  $\mathcal{O}_x$  a menos dum conjunto de medida nula, e é útil. Assim diremos, por exemplo, que  $\mathcal{O}_x = (a, b)$  sempre que  $\langle x(t), \omega \rangle < \langle \bar{x}(t), \omega \rangle$  *p.q.t.*  $t \in (a, b)$ , mesmo quando a fronteira  $\partial \mathcal{O}_x$ , onde  $\langle x(t), \omega \rangle = \langle \bar{x}(t), \omega \rangle$ , é não-numerável (mas tem medida nula).

O objectivo de (4.2) é excluir das nossas considerações trivialidades como a situação  $\bar{\mathcal{X}}_-^{co} = \{\bar{x}(\cdot)\}$  exemplificada depois de (1.12), em que o nosso problema se esvazia de sentido. De facto, mais geralmente, sempre que estamos no

$$\textit{caso singular} \quad \langle x(t), \omega \rangle = \langle \bar{x}(t), \omega \rangle \quad \forall t \in [a, b] \quad \forall x(\cdot) \in \bar{\mathcal{X}}_-^{co} \quad (4.3)$$

é obviamente impossível corrigir esta coordenada — para tornar  $x(\cdot)$  bang-bang — pelo que o problema será, ou não, solúvel conforme a nossa sorte.

Por isso apenas nos interessa o caso não-singular (4.2), e refinamos os conjuntos  $\overline{\mathcal{X}}_-^{bb}$  e  $\overline{\mathcal{X}}_-^{co}$  (definidos em (2.16) & (2.15)) para

$$\overline{\mathcal{X}}_{--}^{bb} := \left\{ x(\cdot) \in \overline{\mathcal{X}}_-^{bb} : \mathcal{O}_x \text{ é não-vazio} \right\} \quad (4.4)$$

$$\overline{\mathcal{X}}_{--}^{co} := \left\{ \begin{array}{l} x(\cdot) \in \overline{\mathcal{X}}_-^{co} : \mathcal{O}_x \text{ é não-vazio} \ \& \\ \exists \mathcal{L}^p x(t) \in \{u^1(t), \dots, u^m(t)\} \text{ p.q.t. } t \in [a, b] \setminus \mathcal{O}_x \end{array} \right\}. \quad (4.5)$$

Em particular,  $\overline{\mathcal{X}}_{--}^{co}$  consistirá nas funções  $x(\cdot) \in \overline{\mathcal{X}}_-^{co}$  que, além de serem sempre menores do que  $\bar{x}(\cdot)$  (nomeadamente  $\langle x(t), \omega \rangle \leq \langle \bar{x}(t), \omega \rangle \ \forall t \in [a, b]$ ), são também estritamente menores do que  $\bar{x}(\cdot)$  (i.e.  $\langle x(t), \omega \rangle < \langle \bar{x}(t), \omega \rangle$ ) ao longo do aberto  $\mathcal{O}_x$  que terá de ser não-vazio e conter os pontos  $t$  onde o operador diferencial  $\mathcal{L}^p x(t)$  (e.g.  $x'(t)$ ) não é extremal. A forma mais simples de mostrar, numa situação concreta, que  $\overline{\mathcal{X}}_{--}^{co} \neq \emptyset$  é, obviamente, se pudermos tomar  $\mathcal{O}_x = (a, b)$ ; ou seja, se existir algum  $x(\cdot) \in \overline{\mathcal{X}}_-^{co}$  para o qual  $\langle x(t), \omega \rangle < \langle \bar{x}(t), \omega \rangle$  p.q.t.  $t \in (a, b)$ .

Usando estes ingredientes, para os problemas de primeira ordem (i.e. com  $p = 1$  em (2.5)) estudados nesta tese, assumindo a hipótese (2.18) sobre a matriz  $A^0(\cdot)$  e o vector  $\omega$  (que é óbvia no caso  $\mathcal{L}^p x(\cdot) = x'(\cdot)$ ), eis o resultado que consideramos como sendo o principal desta tese:

**Teorema 4.1** (*Condição necessária e suficiente para soluções  $b$ -fortes bang-bang  $\omega$ -dominadas*) *Seja  $p = 1$  e suponhamos que vale (2.18). Então (usando as definições (4.4) & (4.5)) vale a caracterização*

$$\overline{\mathcal{X}}_{--}^{bb} \text{ não-vazio} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\mathcal{X}}_{--}^{co} \text{ não-vazio}. \quad (4.6)$$

**Demonstração:** Por um lado, a implicação  $\Rightarrow$  em (4.6) é óbvia, por ser  $\overline{\mathcal{X}}_{--}^{bb} \subset \overline{\mathcal{X}}_{--}^{co}$ ; e por outro lado a implicação oposta,  $\Leftarrow$ , é um caso particular do próximo teorema (ver (4.13)).  $\square$

**Observação 4.2** *Na realidade inventámos quatro definições diferentes para  $\overline{\mathcal{X}}_{--}^{co}$ , tendo cada uma vantagens e inconvenientes.*

*Todas elas permitem demonstrar a implicação  $\Leftarrow$  em (4.6); contudo, não conseguimos provar a implicação oposta  $\Rightarrow$ , logo a equivalência em (4.6), usando nenhuma das 3 próximas*

definições alternativas à (4.5). Em compensação, porém, as 3 próximas definições para  $\overline{\mathcal{X}}_{--}^{co}$  permitem-nos aproximar uniformemente  $\bar{x}(\cdot)$  por uma sucessão  $\omega$ -crescente de soluções bang-bang (conforme veremos em (4.14)), enquanto que a (4.5) não o permite.

Começamos pelas duas mais simples definições alternativas à (4.5):

$$\overline{\mathcal{X}}_{--}^{co} := \left\{ \begin{array}{l} x(\cdot) \in \overline{\mathcal{X}}_{-}^{co} : \mathcal{O}_x \text{ é não-vazio} \quad \& \\ \mathcal{O}_x \supset \{t \in (a, b) : x(t) \neq \bar{x}_{\omega b \omega}^{\min}(t) \quad \& \quad x(t) \neq \bar{x}_{\omega b \omega}^{\max}(t)\} \end{array} \right\} \quad (4.7)$$

(ver (3.49) & (3.53))

$$\overline{\mathcal{X}}_{--}^{co} := \left\{ \begin{array}{l} x(\cdot) \in \overline{\mathcal{X}}_{-}^{co} : \mathcal{O}_x \text{ é não-vazio} \quad \& \\ \mathcal{O}_x \supset \{t \in (a, b) : x(t) \neq \check{x}(t)\} \text{ para algum } \check{x}(\cdot) \in \mathcal{X}_{\omega}^{ext} \end{array} \right\} \quad (4.8)$$

(ver (3.54)).

A terceira definição alternativa à (4.5),

$$\overline{\mathcal{X}}_{--}^{co} := \left\{ \begin{array}{l} x(\cdot) \in \overline{\mathcal{X}}_{-}^{co} : \mathcal{O}_x \text{ é não-vazio} \quad \& \\ \mathcal{O}_x \supset \{t \in (a, b) : \langle \bar{x}_{\omega b \omega}^{\min}(t), \omega \rangle < \langle x(t), \omega \rangle < \langle \bar{x}_{\omega b \omega}^{\max}(t), \omega \rangle\} \end{array} \right\}, \quad (4.9)$$

é um pouco mais complicada, na medida em que só funciona na presença duma hipótese geométrica extra: “a fronteira (relativa) do poliedro de controlo

$$\partial_{rel} \text{ co } \{u^1(t), \dots, u^m(t)\} \quad (\text{ver (2.2)}) \quad (4.10)$$

não pode conter faces (com mais de um ponto) que sejam ortogonais a  $\omega$ ”; i.e., mais precisamente (ver (3.55)),

$$\langle u^j(t), \omega \rangle = \langle u_{\omega}^{-}(t), \omega \rangle = \langle u^k(t), \omega \rangle \Rightarrow u^j(t) = u^k(t), \quad (4.11)$$

$$\langle u^j(t), \omega \rangle = \langle u_{\omega}^{+}(t), \omega \rangle = \langle u^k(t), \omega \rangle \Rightarrow u^j(t) = u^k(t). \quad (4.12)$$

Note-se que, nas definições (4.5), (4.7), (4.8), (4.9), o aberto  $\mathcal{O}_x$  não tem de ser como definido — a menos dum conjunto de medida nula — em (4.1). De facto qualquer aberto q.t. contido no aberto (4.1) serve para  $\mathcal{O}_x$ , em qualquer destas definições para  $\overline{\mathcal{X}}_{--}^{co}$ , desde que, naturalmente, seja satisfeita a inclusão expressa na respectiva segunda linha (i.e. de (4.5), (4.7), (4.8), (4.9) respectivamente). Por isso, uma possível redacção alternativa para cada uma destas definições poderia ter a sua segunda linha idêntica e a sua primeira linha substituída por:

“ $x(\cdot) \in \overline{\mathcal{X}}_{-}^{co} : \exists$  aberto  $\mathcal{O}_x$  não-vazio, onde  $\langle x(t), \omega \rangle < \langle \bar{x}(t), \omega \rangle$  q.s., para o qual”.

Em seguida apresentamos dois resultados utilizando estas definições alternativas para  $\overline{\mathcal{X}}_{--}^{co}$ .

**Teorema 4.3 (Condição suficiente alternativa para soluções  $b$ -fortes bang-bang  $\omega$ -dominadas)** *Suponhamos que a hipótese (2.18) é satisfeita e que  $p = 1$ . Seja  $\overline{\mathcal{X}}_{--}^{co}$  definido como em (4.5) ou (4.7) ou (4.8) (ou mesmo (4.9) desde que exista algum  $x(\cdot) \in \overline{\mathcal{X}}_{--}^{co}$  tal que (4.11) & (4.12) sejam satisfeitas p.q.t.  $t \in [a, b] \setminus \mathcal{O}_x$ ).*

Então

$$\overline{\mathcal{X}}_{--}^{co} \text{ não-vazio} \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathcal{X}}_{--}^{bb} \text{ não-vazio.} \quad (4.13)$$

**Teorema 4.4 (Sucessão  $\omega$ -crescente para  $\bar{x}(\cdot)$  de soluções  $b$ -fortes bang-bang)** *Seja  $p = 1$  e suponhamos que vale (2.18).*

*Se existir algum  $x(\cdot) \in \overline{\mathcal{X}}_{--}^{co}$  tal que a hipótese geométrica (4.11) & (4.12) é satisfeita p.q.t.  $t \in [a, b] \setminus \mathcal{O}_x$ , sendo  $\overline{\mathcal{X}}_{--}^{co}$  definido (não como em (4.5) mas sim) como em (4.7) ou (4.8) ou (4.9), então  $\bar{x}(\cdot)$  pode ser uniformemente aproximada por uma sucessão  $\omega$ -crescente de soluções  $b$ -fortes bang-bang, i.e.*

$$\begin{aligned} \exists (\hat{x}^h(\cdot)) \subset \overline{\mathcal{X}}^{bb} : \quad (\hat{x}^h(\cdot)) \rightarrow \bar{x}(\cdot) \quad & \& \\ (\langle \hat{x}^h(\cdot), \omega \rangle) \nearrow \langle \bar{x}(\cdot), \omega \rangle, \quad & \text{uniformemente.} \end{aligned} \quad (4.14)$$

**Demonstração (dos teoremas 4.3 e 4.4):** (a) Sejam (ver (2.8), (2.2), (3.49) & (3.53))

$$\bar{y}(\cdot) := \langle \bar{x}(\cdot), \omega \rangle \quad (4.15)$$

$$\rho^j(\cdot) := \langle u^j(\cdot), \omega \rangle, \quad j = 1, \dots, m \quad (4.16)$$

$$\bar{y}_{\omega b w}^{\min}(\cdot) := \langle \bar{x}_{\omega b w}^{\min}(\cdot), \omega \rangle, \quad \bar{y}_{\omega b w}^{\max}(\cdot) := \langle \bar{x}_{\omega b w}^{\max}(\cdot), \omega \rangle. \quad (4.17)$$

Utilizando (3.10) para definir o produto cartesiano  $\Lambda^m := \Lambda \times \dots \times \Lambda$  e a sua restrição

$$\Lambda_m := \left\{ (\lambda^1, \dots, \lambda^m)(\cdot) \in \Lambda^m : \sum_{j=1}^m \lambda^j(t) = 1 \text{ q.s.} \right\},$$

$$\begin{aligned} \text{fixando } \tilde{x}(\cdot) \in \overline{\mathcal{X}}_{--}^{co} \quad & \text{e } \quad \text{pondo} \\ \mathcal{O} := \mathcal{O}_{\tilde{x}} \text{ (como em (4.1)),} \quad & \tilde{y}(\cdot) := \langle \tilde{x}(\cdot), \omega \rangle \end{aligned} \quad (4.18)$$

então claramente

$$\exists \left( \tilde{\lambda}^1, \dots, \tilde{\lambda}^m \right) (\cdot) \in \Lambda_m : \quad \mathcal{L}^p \tilde{x}(t) = \sum_{j=1}^m \tilde{\lambda}^j(t) u^j(t) \quad q.s., \quad (4.19)$$

$$\text{logo} \quad \langle \mathcal{L}^p \tilde{x}(t), \omega \rangle = \mathcal{L}_\omega^p \tilde{y}(t) = \sum_{j=1}^m \tilde{\lambda}^j(t) \rho^j(t) \quad p.q.t. \quad t \in [a, b].$$

Considerando a situação de (4.9) temos, por (3.3),

$$\tilde{y}(t) \in \{ \bar{y}_{\omega b \omega}^{\min}(t), \bar{y}_{\omega b \omega}^{\max}(t) \} \quad \forall t \in [a, b] \setminus \mathcal{O},$$

de modo que, por (3.49), (3.53), (3.6) & (2.3),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\omega^p \tilde{y}(t) &\in \{ \mathcal{L}_\omega^p \bar{y}_{\omega b \omega}^{\min}(t), \mathcal{L}_\omega^p \bar{y}_{\omega b \omega}^{\max}(t) \} \subset \\ &\subset \{ \rho^1(t), \dots, \rho^m(t) \} \quad q.s. \text{ em } [a, b] \setminus \mathcal{O}; \end{aligned}$$

o que implica, por (4.19), (4.11) & (4.12),

$$\mathcal{L}^p \tilde{x}(t) \in U^{bb}(t) \quad p.q.t. \quad t \in [a, b] \setminus \mathcal{O}, \quad (4.20)$$

sempre que  $\mathcal{O}$  é definido como em (4.18) e  $\bar{\mathcal{X}}_{--}^{co}$  como em (4.9).

Assim, de forma a termos um  $\hat{x}(\cdot) \in \bar{\mathcal{X}}_{-}^{bb}$  conforme pretendido em (4.13), usando (4.9), basta definir

$$\hat{x}(t) := \tilde{x}(t) \quad \text{em cada } t \in [a, b] \setminus \mathcal{O} \quad (4.21)$$

para obter, por (4.20),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^p \hat{x}(t) &\in U^{bb}(t) \quad p.q.t. \quad t \in [a, b] \setminus \mathcal{O}, \\ \hat{y}(t) := \langle \hat{x}(t), \omega \rangle &\leq \bar{y}(t) \quad \forall t \in [a, b] \setminus \mathcal{O}; \end{aligned} \quad (4.22)$$

e então basta em seguida (recordando (2.13) & (2.16))

$$\begin{aligned} &\text{estender este } \hat{x}(\cdot) \text{ a } \mathcal{O} \quad \text{de modo a satisfazer :} \\ \mathcal{L}^p \hat{x}(t) &\in U^{bb}(t) \quad p.q.t. \quad t \in \mathcal{O}, \\ \hat{y}(t) &\leq \bar{y}(t) \quad \forall t \in \mathcal{O}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

usando a hipótese no lado direito de (4.13), nomeadamente, por (4.18) & (4.1),

$$\tilde{y}(t) < \bar{y}(t) \quad p.q.t. \quad t \in \mathcal{O}. \quad (4.24)$$

Por outro lado, usando, em (4.21),  $\mathcal{O} := \mathcal{O}_{\tilde{x}}$  definido como em (4.18) e  $\overline{\mathcal{X}}_{--}^{co}$  como em (4.5) ou (4.7), obviamente (4.22) é de novo verdade. Portanto, mais uma vez, só precisamos de (4.23) aplicando (4.24). E se quisermos usar, em vez de (4.7), a definição (4.8) para  $\overline{\mathcal{X}}_{--}^{co}$ , então evidentemente temos

$$\mathcal{L}^p \tilde{x}(t) = \mathcal{L}^p \tilde{x}(t) \in U^{bb}(t) \quad p.q.t. \quad t \in [a, b] \setminus \mathcal{O},$$

de modo que, usando (4.21), novamente (4.22) nos conduz a (4.23) utilizando (4.24).

(b) Esta parte é dedicada a provar, finalmente, que

$$(4.24) \quad \text{ implica que é possível } \quad (4.23). \quad (4.25)$$

Para simplificar a notação suponhamos, sem perda de generalidade, que

$$\mathcal{O} = (a, b) \quad \text{em } (4.24). \quad (4.26)$$

De facto, uma vez mostrado (4.23) para este caso especial  $\mathcal{O} = (a, b)$ , então o caso geral de qualquer conjunto aberto  $\mathcal{O}$  pode ser provado de forma semelhante: basta aplicar a mesma receita a cada um dos intervalos maximais  $(a_i, b_i)$  que formam  $\mathcal{O}$ .

Comecemos então a demonstração de (4.25) considerando (4.26). Tal como em (4.19),

$$\exists \left( \bar{\lambda}^1, \dots, \bar{\lambda}^m \right) (\cdot) \in \Lambda_m : \quad \mathcal{L}^p \bar{x}(t) = \sum_{j=1}^m \bar{\lambda}^j(t) u^j(t) \quad q.s..$$

Recordando (3.7) & (3.8) então claramente, para quase todo  $t \in [a, b]$ ,

$$g(t) := \rho_{\omega}^+(t) - \rho_{\omega}^-(t) \geq 0; \quad (4.27)$$

e usando este  $g(\cdot)$  definimos o funcional linear

$$G : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(\lambda(\cdot)) := \int_a^b e^{\eta_A^0(t)} g(t) \lambda(t) dt \quad (\text{ver } (3.10)). \quad (4.28)$$

Por (3.48) & (4.27),

$$\exists \bar{\lambda}(\cdot) \in \Lambda : \quad \mathcal{L}_{\omega}^p \bar{y}(t) = \rho_{\omega}^-(t) + \bar{\lambda}(t) g(t) \quad p.q.t. \quad t \in [a, b]; \quad (4.29)$$

e, usando (4.28), a cada  $x(\cdot) \in \overline{\mathcal{X}}^{co}$  corresponde um único

$$\lambda(\cdot) \in \bar{\Lambda} := \{ \lambda(\cdot) \in \Lambda : \quad G(\lambda(\cdot)) = G(\bar{\lambda}(\cdot)) \}. \quad (4.30)$$

De facto, analogamente a (4.29), de novo (3.48) garante a existência de um  $\lambda(\cdot) \in \Lambda$  para o qual

$$\langle \mathcal{L}^p x(t), \omega \rangle = \rho_\omega^-(t) + \lambda(t) g(t) \quad p.q.t. \quad t \in [a, b], \quad (4.31)$$

este  $\lambda(\cdot)$  está em  $\bar{\Lambda}$ , por (4.30), (4.28) & (2.11), e definimos  $\lambda(\cdot) := 1$  onde  $g(\cdot) = 0$ . Podemos então definir a função linear

$$\Gamma : \bar{\mathcal{X}}^{co} \rightarrow \bar{\Lambda}, \quad \Gamma(x(\cdot)) := \lambda(\cdot) \quad \text{satisfazendo (4.31)}. \quad (4.32)$$

Defina-se

$$\tilde{\lambda}(\cdot) := \Gamma(\tilde{x}(\cdot)). \quad (4.33)$$

Considerando o conjunto aberto

$$\tilde{\mathcal{O}} := \{t \in (a, b) : \tilde{y}(t) < \bar{y}(t)\} \quad \text{então} \quad (4.34)$$

$$(4.18), (4.26) \text{ \& } (4.5) \quad \text{dão} \quad \left| \tilde{\mathcal{O}} \right| = b - a. \quad (4.35)$$

Para atingirmos o nosso objectivo (4.23) em (4.25), vamos então construir um  $\hat{x}(\cdot) \in \bar{\mathcal{X}}_-^{bb}$  (lembramos (2.1) & (2.16)), nomeadamente um

$$\begin{aligned} \hat{x}(\cdot) \in \mathcal{X}^{p,d} : \quad \hat{x}(a) = \bar{x}(a) \quad \& \quad \hat{x}(b) = \bar{x}(b) \quad \& \\ \mathcal{L}^p \hat{x}(t) \in U^{bb}(t) \quad \& \quad \hat{y}(t) < \bar{y}(t), \quad q.s. \text{ em } (a, b). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Para simplificar ainda mais a notação (além de (4.26)), novamente sem perda de generalidade vamos supor que

$$\tilde{\mathcal{O}} = (a, b) \quad \text{em (4.34) \& (4.35)}. \quad (4.37)$$

De facto, uma vez construído  $\hat{x}(\cdot)$  em  $(a, b)$ , supondo (4.37), para tratar um qualquer conjunto aberto  $\tilde{\mathcal{O}}$  satisfazendo (4.35), começamos por definir

$$\hat{x}(\cdot) := \tilde{x}(\cdot) \quad \text{no conjunto fechado nulo } [a, b] \setminus \tilde{\mathcal{O}};$$

e então tal construção em  $(a, b)$  pode ser facilmente adaptada para, de forma análoga, construir  $\hat{x}(\cdot)$  em cada um dos intervalos maximais  $(a_i, b_i)$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , que constituem  $\tilde{\mathcal{O}}$ .

Para construir  $\hat{x}(\cdot)$ , começamos por decompor o intervalo aberto  $(a, b)$  onde, por (4.37), a desigualdade estrita em (4.34) se verifica, i.e.

$$\tilde{y}(t) < \bar{y}(t) \quad \forall t \in (a, b), \quad (4.38)$$

numa quantidade enumerável de subintervalos  $(a_k, b_k)$  definidos por

$$\begin{aligned} a_1 := b_1 := \frac{a+b}{2} \quad e, \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, \\ a_{k+1} := \frac{a+a_k}{2} \quad \& \quad b_{k+1} := \frac{b_k+b}{2}. \end{aligned}$$

Obtemos assim sucessões convergentes estritamente monótonas

$$\begin{aligned} (a_k) \searrow a \quad \& \quad (b_k) \nearrow b, \quad \text{com} \\ \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_{k+1}, a_k] = \left( a, \frac{a+b}{2} \right), \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} (b_k, b_{k+1}] = \left( \frac{a+b}{2}, b \right). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Afirmamos primeiro que

$$\begin{aligned} \exists x^1(\cdot) \in \mathcal{X}^{p,d} : \quad x^1(\cdot) := \tilde{x}(\cdot) \quad \text{em } [a, b] \setminus (b_1, b_2), \\ \mathcal{L}^p x^1(t) \in U^{bb}(t) \quad q.s. \quad \text{em } (b_1, b_2), \\ y^1(t) := \langle x^1(t), \omega \rangle < \bar{y}(t) \quad \forall t \in (a, b). \end{aligned} \quad (4.40)$$

De facto, construímos um tal  $x^1(\cdot)$  começando por definir  $x^1(\cdot)$  como na primeira linha de (4.40). Depois decomponemos o subintervalo  $[b_1, b_2]$  em  $N$  subsubintervalos de igual comprimento, usando os pontos

$$b_1^\ell := b_1 + \ell \frac{b_2 - b_1}{N}, \quad \ell = 0, 1, \dots, N,$$

onde  $N \in \mathbb{N}$  é escolhido suficientemente grande por forma a termos, por (4.27) & (4.38),

$$0 \leq \int_I e^{\eta_A^0(t)} g(t) dt < \min_{t \in [b_1, b_2]} \left( e^{\eta_A^0(t)} (\bar{y} - \tilde{y})(t) \right) \quad (4.41)$$

$$\forall I \subset [b_1, b_2] : \quad |I| \leq \frac{b_2 - b_1}{N};$$

e afirmamos que, para  $\ell = 1, 2, \dots, N$ ,

$$\begin{aligned} \exists x^{1\ell}(\cdot) \in \mathcal{X}^{p,d} : \quad x^{1\ell}(\cdot) := \tilde{x}(\cdot) \quad \text{em } [a, b] \setminus (b_1^{\ell-1}, b_1^\ell), \\ \mathcal{L}^p x^{1\ell}(t) \in U^{bb}(t) \quad q.s. \quad \text{em } (b_1^{\ell-1}, b_1^\ell), \\ y^{1\ell}(t) := \langle x^{1\ell}(t), \omega \rangle < \bar{y}(t) \quad \forall t \in (a, b). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Com efeito, consideremos primeiro o caso  $\ell = 1$ ; e construamos um tal  $x^{11}(\cdot)$ , começando por defini-lo como na primeira linha de (4.42) para  $\ell = 1$ ; em seguida aplicamos o teorema de

Liapunov 1.2 por forma a obtermos conjuntos mensuráveis  $E_{11}^1, \dots, E_{11}^m \subset [b_1^0, b_1^1]$ , com funções características  $\lambda_{11}^1(\cdot) := \mathcal{X}_{E_{11}^1}(\cdot), \dots, \lambda_{11}^m(\cdot) := \mathcal{X}_{E_{11}^m}(\cdot)$ , satisfazendo (ver (2.49) & (4.19))

$$\int_{b_1^0}^{b_1^1} \sum_{j=1}^m \lambda_{11}^j(t) \sigma_{b_1^0}(t) \Delta_{b_1^0}(t) u^j(t) dt = \int_{b_1^0}^{b_1^1} \sum_{j=1}^m \tilde{\lambda}^j(t) \sigma_{b_1^0}(t) \Delta_{b_1^0}(t) u^j(t) dt;$$

e finalmente definimos, em  $[b_1^0, b_1^1]$  (ver (2.49))

$$x^{11}(t) := \mathcal{S}_{b_1^0}(t) \left[ \tilde{x}(b_1^0) + \int_{b_1^0}^t \sigma_{b_1^0}(\tau) \Delta_{b_1^0}(\tau) \sum_{j=1}^m \lambda_{11}^j(\tau) u^j(\tau) d\tau \right]$$

e

$$y^{11}(t) := \langle x^{11}(t), \omega \rangle.$$

Usando (4.32), seja  $\lambda^{11}(\cdot) := \Gamma(x^{11}(\cdot))$ . Então, por (4.27) & (4.41), para  $t \in [b_1^0, b_1^1]$ ,

$$\begin{aligned} & e^{\eta_A^0(t)} (y^{11}(t) - \bar{y}(t)) = \\ &= \int_{b_1^0}^t e^{\eta_A^0(\tau)} g(\tau) \lambda^{11}(\tau) d\tau + \int_a^{b_1^0} e^{\eta_A^0(\tau)} g(\tau) \tilde{\lambda}(\tau) d\tau - \int_a^t e^{\eta_A^0(\tau)} g(\tau) \bar{\lambda}(\tau) d\tau < \\ &< \min_{t \in [b_1, b_2]} \left( e^{\eta_A^0(t)} (\bar{y} - \tilde{y})(t) \right) - \int_a^{b_1^0} e^{\eta_A^0(\tau)} g(\tau) (\bar{\lambda} - \tilde{\lambda})(\tau) d\tau \leq 0, \end{aligned}$$

$$i.e. \quad y^{11}(t) < \bar{y}(t) \quad \forall t \in [b_1^0, b_1^1].$$

Mostrámos então o caso especial  $\ell = 1$  de (4.42). Para  $\ell = 2, \dots, N$  a prova é análoga, pelo que está completa a demonstração de (4.42).

Afirmamos agora que, para  $k = 1, 2, \dots$ ,

$$\begin{aligned} & \exists x^k(\cdot) \in \mathcal{X}^{p,d} : x^k(\cdot) := \tilde{x}(\cdot) \text{ em } [a, b] \setminus (b_k, b_{k+1}), \\ & \mathcal{L}^p x^k(t) \in U^{bb}(t) \text{ q.s. em } (b_k, b_{k+1}), \\ & y^k(t) := \langle x^k(t), \omega \rangle < \bar{y}(t) \quad \forall t \in (a, b). \end{aligned} \tag{4.43}$$

De facto, para  $k = 1$ , após definirmos  $x^1(\cdot)$  como na primeira linha de (4.40), basta definir

$$x^1(t) := x^{1\ell}(t) \quad \text{para } t \in [b_1^{\ell-1}, b_1^\ell], \quad \ell = 1, 2, \dots, N,$$

e usar (4.42); enquanto que para  $k = 2, 3, \dots$  o raciocínio é semelhante. O caso especial  $k = 1$  de (4.43) é o nosso inicial (4.40), o qual já mostrámos.

Afirmamos agora que, para  $k = 1, 2, \dots$ ,

$$\begin{aligned} \exists x^{-k}(\cdot) \in \mathcal{X}^{p,d} : x^{-k}(\cdot) &:= \tilde{x}(\cdot) \text{ em } [a, b] \setminus (a_{k+1}, a_k), \\ \mathcal{L}^p x^{-k}(t) \in U^{bb}(t) \text{ q.s. em } &(a_{k+1}, a_k), \\ y^{-k}(t) := \langle x^{-k}(t), \omega \rangle &< \bar{y}(t) \quad \forall t \in (a, b). \end{aligned} \tag{4.44}$$

De facto, a estratégia é a mesma que foi utilizada para mostrar (4.43), depois de provar uma afirmação semelhante a (4.42) com  $(a_1^\ell, a_1^{\ell-1})$  em vez de  $(b_1^{\ell-1}, b_1^\ell)$ .

Finalmente, para demonstrarmos (4.36), “colamos” as funções em (4.43) & (4.44) (usando (4.39)) através da definição:

$$\hat{x}(t) := \begin{cases} x^k(t) & \text{para } t \in [b_k, b_{k+1}], \quad k = 1, 2, \dots \\ x^{-k}(t) & \text{para } t \in [a_{k+1}, a_k], \quad k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Consequentemente, mostrámos (4.36) e (4.25).

(c) Para provarmos (4.14) basta considerar a sucessão

$$\tilde{x}^h(\cdot) := \left(1 - \frac{1}{h}\right) \bar{x}(\cdot) + \frac{1}{h} \tilde{x}(\cdot).$$

De facto, considerando a construção anterior para  $\tilde{x}(\cdot)$ , e adaptando-a a

$$\tilde{x}^h(\cdot) \quad \text{para } h = 1, 2, 3, \dots,$$

obtemos, usando (4.11) & (4.12), uma sucessão

$$(\hat{x}^h(\cdot)) \rightarrow \bar{x}(\cdot), \quad \text{com } (\langle \hat{x}^h(\cdot), \omega \rangle) \nearrow \langle \bar{x}(\cdot), \omega \rangle, \quad \text{uniformemente. } \square$$

Finalmente, o último resultado deste capítulo dá-nos uma melhor aproximação, desde que assumamos uma hipótese adicional mais forte: a possibilidade de encontrar uma “reordenação produto” dos controlos  $u^j(\cdot)$  em (2.2), ou seja, assumindo que é possível, reordenando os controlos, escrevê-los na forma ordenada

$$\begin{aligned} u^1(t) \leq u^2(t) \leq \dots \leq u^m(t) \quad \text{q.s., no sentido que} & \tag{4.45} \\ u_i^1(t) \leq u_i^2(t) \leq \dots \leq u_i^m(t) \quad \text{q.s. } \quad \forall i \in \{1, \dots, d\}. & \end{aligned}$$

Neste caso, redefinimos (2.15) pondo

$$\bar{\mathcal{X}}_-^{co} := \{x(\cdot) \in \bar{\mathcal{X}}^{co} : x(t) \leq \bar{x}(t) \quad \forall t \in [a, b]\},$$

usando a mesma definição de  $\leq$  que em (4.45), e redefinimos (3.54) & (4.1) da seguinte forma:

$$\mathcal{X}^{ext} := \{x(\cdot) \in \mathcal{X}^{p,d} : \mathcal{L}^p x(t) \in \{u^1(t), u^m(t)\} \quad q.s.\}$$

$$\mathcal{O}_x := \{t \in (a, b) : x(t) < \bar{x}(t)\},$$

onde  $x(t) < \bar{x}(t)$  significa  $x_i(t) < \bar{x}_i(t) \quad \forall i \in \{1, \dots, d\}$ . Além disso, adicionamos uma hipótese extra à (4.45):

$$\text{ou} \quad u^1(t) < u^j(t) \quad \text{ou então} \quad u^1(t) = u^j(t), \quad (4.46)$$

$$\text{ou} \quad u^j(t) < u^m(t) \quad \text{ou então} \quad u^j(t) = u^m(t). \quad (4.47)$$

**Teorema 4.5 (Sucessão produto–crescente para  $\bar{x}(\cdot)$  de soluções b–fortes bang–bang)** Admitamos que a hipótese (2.18) é satisfeita para qualquer elemento  $\omega$  da base canónica de  $\mathbb{R}^d$  e seja  $p = 1$ . Suponhamos ainda que existe algum  $x(\cdot) \in \bar{\mathcal{X}}_-^{co}$  (definido como em (4.8)) tal que (4.46) & (4.47) são satisfeitas p.q.t.  $t \in [a, b] \setminus \mathcal{O}_x$  &  $\forall j \in \{1, \dots, m\}$ .

Então  $\bar{x}(\cdot)$  pode ser uniformemente aproximada por uma sucessão produto–crescente de soluções b–fortes bang–bang:

$$\exists (\hat{x}^h(\cdot)) \subset \bar{\mathcal{X}}^{bb} : \quad (\hat{x}^h(\cdot)) \nearrow \bar{x}(\cdot) \quad \text{uniformemente.} \quad (4.48)$$

(Nota: A hipótese (4.46) & (4.47) só faz falta para construir  $\hat{x}^h(\cdot)$  com  $h > 1$ .)

(Em (4.48)  $\nearrow$  significa que a sucessão  $(\hat{x}^h(\cdot))$  — além de convergir — cresce pontualmente no sentido (4.45).)

**Demonstração:** A demonstração deste teorema é semelhante à do teorema 4.4.  $\square$



# Capítulo 5

## O caso mais simples : a derivada no plano guiada por dois controlos

### 5.1 Motivação pragmática para aprofundar o estudo deste caso mais simples

É claro que os resultados do capítulo anterior só podem ser aplicados nos casos em que a classe  $\bar{\mathcal{X}}_{--}^{co}$  — recordemos (4.6) & (4.5) — é não-vazia. Porém, dados quaisquer controlos específicos (como em (2.2)), não é claro, a priori, se a classe  $\bar{\mathcal{X}}_{--}^{co}$  é, ou não é, vazia. O objectivo deste capítulo é clarificar esta questão, apresentando condições necessárias, e condições suficientes, para a aplicação da nossa versão (4.6) do teorema de Liapunov no caso mais simples não-trivial, nomeadamente no caso em que

$$\mathcal{L}^p x(\cdot) = x'(\cdot) \text{ em } (2.5) \quad (5.1)$$

$$\text{e em (2.2) temos apenas } m = 2 \text{ controlos no plano } \mathbb{R}^2, \quad (5.2)$$

$$\text{sendo } \omega = (1, 0) \text{ e } \mathcal{O}_x = (a, b) \text{ na definição de } \bar{\mathcal{X}}_{--}^{co} \text{ em (4.5)}. \quad (5.3)$$

Além disso, apenas admitimos, em (5.2), pares  $u^1(\cdot), u^2(\cdot) \in L^1([a, b], \mathbb{R}^2)$ , de controlos cuja diferença  $(u^2 - u^1)(\cdot)$  tenha segunda coordenada igual à primeira multiplicada por um factor integrável; ou seja, exigimos que o vector definido pela aresta do nosso “poliedro” de controlo (agora degenerado num segmento de recta) satisfaça a condição de integrabilidade

$$(u^2 - u^1)(t) = u(t)(1, f(t)) \text{ q.s.}, \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} & \text{para algum } u(\cdot) \geq 0 \text{ q.s. em } L^1(a, b) \quad \& \quad \text{algum } f(\cdot) \text{ em} \\ & \mathcal{F} := \{f(\cdot) \in L^1(a, b) : (f \cdot u)(\cdot) \in L^1(a, b)\}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Além disso, associamos a cada  $f(\cdot) \in \mathcal{F}$  (como em (5.5)) a nova classe de funções

$$\mathcal{G}_f := \{g(\cdot) \in W_0^{1,1}([a, b]) : g(\cdot) \not\equiv 0 \ \& \ (f \cdot g')(\cdot) \in L^1(a, b)\}. \quad (5.6)$$

## 5.2 Condição necessária e suficiente para existência de soluções relaxadas estritamente $\omega$ -dominadas

**Teorema 5.1** (*Condição necessária & suficiente e contra-exemplo*) Dadas  $f(\cdot)$  &  $\bar{x}(\cdot)$ , como em (5.4), (5.5), (2.8) & (2.6), pelo que

$$\begin{aligned} & \exists \bar{\lambda}(\cdot) \in L^\infty(a, b) : \bar{\lambda}(t) \in [0, 1] \text{ q.s.} \ \& \\ & \bar{x}'(t) = u^1(t) + \bar{\lambda}(t) u(t) \cdot (1, f(t)) \text{ q.s.}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

acontece que a classe

$$\bar{\mathcal{X}}_-^{\text{co}} \setminus \{\bar{x}(\cdot)\} \quad (\text{resp. } \bar{\mathcal{X}}_{--}^{\text{co}}) \quad \text{é não-vazia} \quad \text{se e só se} \quad (5.8)$$

$$\exists \bar{g}_f(\cdot) \in \mathcal{G}_f : \quad \bar{g}_f(\cdot) \geq 0 \quad \left( \text{resp. } \bar{g}_f(\cdot) > 0 \text{ q.s.} \right) \ \& \quad (5.9)$$

$$\int_a^b f(t) \bar{g}_f'(t) dt = 0 \ \& \ -[u \cdot (1 - \bar{\lambda})](t) \leq \bar{g}_f'(t) \leq [u \cdot \bar{\lambda}](t) \text{ q.s.} \quad (5.10)$$

Em particular, da condição necessária segue um contra-exemplo (independente de  $\bar{x}(\cdot)$ ) envolvendo essencialmente as funções monótonas  $f(\cdot) \in \mathcal{F}$ :

$$f(\cdot) \text{ monótona q.s.} \ \& \ \int_a^b |f'(t)| dt > 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathcal{X}}_{--}^{\text{co}} = \emptyset \quad (\text{ver (4.5)}) \quad (5.11)$$

(ou, mais precisamente,  $\exists$  uma função monótona  $\check{f}(\cdot) = f(\cdot)$  q.s. &  $\int_a^b |\check{f}'(t)| dt > 0$ );

$$f(\cdot) \text{ estritamente monótona q.s.} \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathcal{X}}_-^{\text{co}} \setminus \{\bar{x}(\cdot)\} = \emptyset \quad (\text{ver (2.15)}). \quad (5.12)$$

**Demonstração :** Consideramos qualquer

$$\tilde{x}(\cdot) \in \overline{\mathcal{X}}_-^{co} \setminus \{\bar{x}(\cdot)\} \quad (\text{ver (2.15)}), \quad \text{de modo que} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \exists \tilde{\lambda}(\cdot) \in L^\infty(a, b) : \quad & \tilde{\lambda}(t) \in [0, 1] \quad q.s. \quad \& \\ \tilde{x}'(t) = u^1(t) + \tilde{\lambda}(t) u(t) \cdot (1, f(t)) \quad & q.s.. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Subtraímos  $\tilde{\lambda}(t) u(t) = \tilde{x}'_1(t) - u_1^1(t)$  de  $\bar{\lambda}(t) u(t) = \bar{x}'_1(t) - u_1^1(t)$  e obtemos

$$g(t) := \int_a^t (\bar{x}'_1 - \tilde{x}'_1)(\tau) d\tau = \int_a^t (\bar{\lambda} - \tilde{\lambda})(\tau) u(\tau) d\tau. \quad (5.15)$$

Em seguida subtraímos  $\tilde{x}'_2(t) = u_2^1(t) - f(t) u_1^1(t) + f(t) \tilde{x}'_1(t)$  de  $\bar{x}'_2(t) = u_2^1(t) - f(t) u_1^1(t) + f(t) \bar{x}'_1(t)$  e integramos de  $a$  a  $b$  para termos (5.9) & (5.10), uma vez que  $\tilde{\lambda}(t) \in [0, 1]$ . Assim provamos (5.8).  $\square$

### 5.3 Condições suficientes parciais para existência de soluções relaxadas estritamente $\omega$ -dominadas

A igualdade no lado esquerdo de (5.10) conduz-nos às seguintes definições

$$\mathcal{F}^+ := \left\{ f(\cdot) \in \mathcal{F} : \quad \begin{array}{l} \exists g_f(\cdot) \in \mathcal{G}_f \quad \text{com} \quad g_f(\cdot) \geq 0 \\ \& \int_a^b f(t) g_f'(t) dt = 0 \end{array} \right\} \quad (5.16)$$

$$\mathcal{F}^{++} := \left\{ f(\cdot) \in \mathcal{F} : \quad \begin{array}{l} \exists g_f(\cdot) \in \mathcal{G}_f \quad \text{com} \quad g_f(\cdot) > 0 \quad q.s. \\ \& \int_a^b f(t) g_f'(t) dt = 0 \end{array} \right\}. \quad (5.17)$$

Note-se que, relativamente a (5.11), o que se prova é que, mais precisamente,

$$f(\cdot) \text{ monótona } q.s. \quad \& \quad \int_a^b |f'(t)| dt > 0 \quad \Rightarrow \quad f(\cdot) \notin \mathcal{F}^{++}; \quad (5.18)$$

e o próximo resultado é uma espécie de “recíproca” de (5.18):

**Proposição 5.2** (*Densidade de  $\mathcal{F}^{++}$  em  $\mathcal{F}$* )

$$\mathcal{F}^{++} \quad \text{é um subconjunto denso de} \quad \mathcal{F} \quad (5.19)$$

ou, mais precisamente, a subclasse  $\mathcal{F}_{pc}$  das funções em  $\mathcal{F}$  seccionalmente constantes q.s. (ver (5.5)) satisfaz:

$$\mathcal{F}_{pc} \subset \mathcal{F}^{++} \quad \& \quad \mathcal{F}_{pc} \quad \text{é denso em} \quad \mathcal{F}. \quad (5.20)$$

**Demonstração:** Seja  $f(\cdot) \in \mathcal{F}_{pc}$  e

$$f^{pc}(\cdot) \quad \text{seccionalmente constante} \quad \text{com} \quad f(\cdot) = f^{pc}(\cdot) \quad \text{q.s.} \quad (5.21)$$

Então, considerando a união  $\mathcal{O}$  dos interiores  $(a_i, b_i)$ ,  $i \in I$ , dos intervalos onde  $f^{pc}(\cdot)$  é constante, definimos

$$g(t) := \begin{cases} (b_i - t)(t - a_i) & \text{para } t \in (a_i, b_i) \quad \& \quad i \in I \\ 0 & \text{para } t \in [a, b] \setminus \mathcal{O}; \end{cases} \quad (5.22)$$

e obtemos

$$\int_a^b f(t) g'(t) dt = \sum_{i \in I} c_i [g(b_i) - g(a_i)] = 0. \quad \square \quad (5.23)$$

Nas seguintes proposições apresentamos algumas condições suficientes parciais para a existência de soluções relaxadas estritamente  $\omega$ -dominadas. São parciais no sentido em que apenas garantem que se verificam (5.9) e o lado esquerdo de (5.10).

**Proposição 5.3** (*Condição suficiente parcial*)

$$f(\cdot) \in \mathcal{F} \quad \& \quad \int_a^b f(t) \cdot t dt = \int_a^b f(t) \frac{a+b}{2} dt \quad \Rightarrow \quad f(\cdot) \in \mathcal{F}^{++}. \quad (5.24)$$

(Exigência em  $f(\cdot)$ : o factor  $t$  deve poder ser substituído pela média  $\frac{a+b}{2}$ .)

**Demonstração:** Basta definir  $g(t) := (b-t)(t-a)$ .  $\square$

**Proposição 5.4 (Condição suficiente parcial)**

Seja  $h(\cdot)$  uma qualquer função lipschitziana não-negativa satisfazendo  $h(s) = 0 \Leftrightarrow s = 0$ .

Temos

$$f(\cdot) \in W^{1,1}([a, b]) \Rightarrow \int_a^b f(t) (h(f^0(t)))' dt = [f(a) - f(b)] \cdot \overline{h(f^0)}, \quad (5.25)$$

$$\text{em particular} \quad f(a) = f(b) \neq f(\cdot) \Rightarrow f(\cdot) \in \mathcal{F}^+ \quad (5.26)$$

$$\text{e} \quad f(a) = f(b) \neq f(t) \text{ p.q.t. } t \in (a, b) \Rightarrow f(\cdot) \in \mathcal{F}^{++}, \quad (5.27)$$

$$\text{onde} \quad f^0(t) := f(t) - f^{af}(t) - f(a) \quad (\neq 0 \text{ q.s. no caso (5.27)}) \quad (5.28)$$

$$\text{com} \quad f^{af}(t) := \frac{t-a}{b-a} [f(b) - f(a)] \quad \& \quad \overline{h(f^0)} := \frac{1}{b-a} \int_a^b h(f^0(t)) dt. \quad (5.29)$$

Além disso, o valor do integral em (5.25) não muda quando adicionamos a  $f(\cdot)$  qualquer

$$f^{pc}(t) := c_i \text{ para } t \in (a_i, b_i), \quad \forall i \in I, \text{ com } (c_i) \text{ limitada } \subset \mathbb{R}, \quad (5.30)$$

$$\text{onde} \quad \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i) = \mathcal{O} := \{t \in (a, b) : h(f^0(t)) > 0\}. \quad (5.31)$$

De facto,

$$\int_a^b (f + f^{pc})(t) \cdot (h(f^0(t)))' dt = [f(a) - f(b)] \cdot \overline{h(f^0)}, \quad (5.32)$$

$$\text{em particular} \quad f(a) = f(b) \neq f(t) \text{ q.s.} \Rightarrow (f + f^{pc})(\cdot) \in \mathcal{F}^{++}. \quad (5.33)$$

**Demonstração :** Definimos

$$g(\cdot) := h(f^0(\cdot)) \quad (> 0 \text{ q.s. no caso (5.27)})$$

e obtemos :

$$g(\cdot) \in W_0^{1,1}([a, b]) \quad \& \quad f(\cdot) = f(a) + f^{af}(\cdot) + f^0(\cdot)$$

$$f^{af}(a) = 0 \quad \& \quad f^{af}(b) = f(b) - f(a) \quad \& \quad f^0(a) = 0 = f^0(b)$$

$$|\mathcal{O}| = b - a \quad \text{no caso (5.27)}$$

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(t) g'(t) dt = \\ & = \int_a^b f(a) g'(t) dt + \int_a^b f^{af}(t) g'(t) dt + \int_a^b f^0(t) g'(t) dt = \\ & = 0 + [f(a) - f(b)] \cdot \overline{h(f^0)} + 0, \end{aligned}$$

o que mostra (5.25) e conseqüentemente (5.26) & (5.27). Por outro lado,

$$\begin{aligned} & \int_a^b f^{pc}(t) \cdot (h(f^0(t)))' dt = \sum_{i \in I} \int_{a_i}^{b_i} c_i \cdot (h(f^0(t)))' dt = \\ & = \sum_{i \in I} c_i \cdot [h(f^0(b_i)) - h(f^0(a_i))] = 0, \end{aligned}$$

pelo que obtemos (5.32).  $\square$

A seguinte proposição é um caso particular da anterior.

### Proposição 5.5

$$f(\cdot) \in W^{1,1}([a, b]) \Rightarrow \int_a^b f(t) |f^0|'(t) dt = [f(a) - f(b)] \cdot \overline{|f^0|}, \quad (5.34)$$

$$\text{em particular} \quad f(a) = f(b) \neq f(\cdot) \Rightarrow f(\cdot) \in \mathcal{F}^+ \quad (5.35)$$

$$\text{e} \quad f(a) = f(b) \neq f(t) \text{ p.q.t. } t \in (a, b) \Rightarrow f(\cdot) \in \mathcal{F}^{++}, \quad (5.36)$$

$$\text{onde } f^0(t) := f(t) - f^{af}(t) - f(a) \quad (\neq 0 \text{ q.s. no caso (5.36)}) \quad (5.37)$$

$$\text{com } f^{af}(t) := \frac{t-a}{b-a} [f(b) - f(a)] \quad \& \quad \overline{|f^0|} := \frac{1}{b-a} \int_a^b |f^0(t)| dt. \quad (5.38)$$

Além disso, o valor do integral em (5.34) não muda quando adicionamos a  $f(\cdot)$  qualquer

$$f^{pc}(t) := c_i \text{ para } t \in (a_i, b_i), \quad \forall i \in I, \text{ com } (c_i) \text{ limitada } \subset \mathbb{R}, \quad (5.39)$$

$$\text{onde} \quad \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i) = \mathcal{O} := \{t \in (a, b) : |f^0(t)| > 0\}. \quad (5.40)$$

De facto,

$$\int_a^b (f + f^{pc})(t) \cdot |f^0|'(t) dt = [f(a) - f(b)] \cdot \overline{|f^0|}, \quad (5.41)$$

$$\text{em particular} \quad f(a) = f(b) \neq f(t) \text{ q.s.} \Rightarrow (f + f^{pc})(\cdot) \in \mathcal{F}^{++}. \quad (5.42)$$

**Demonstração :** Apesar de evidentemente podermos seguir a demonstração da proposição 5.4, apresentamos a seguir uma outra demonstração válida neste caso particular.

Definimos

$$f^{0+}(\cdot) := \max \{f^0(\cdot), 0\} \quad \& \quad f^{0-}(\cdot) := \max \{-f^0(\cdot), 0\}, \quad (5.43)$$

$$g(\cdot) := f^{0+}(\cdot) + f^{0-}(\cdot) = |f^0(\cdot)| \quad (> 0 \text{ q.s. no caso (5.36)}) \quad (5.44)$$

$$\mathcal{O}^+ := \{t \in (a, b) : f^{0+}(t) > 0\} = \bigcup_{i \in I^+} (a_i^+, b_i^+) \quad (5.45)$$

$$\mathcal{O}^- := \{t \in (a, b) : -f^{0-}(t) < 0\} = \bigcup_{i \in I^-} (a_i^-, b_i^-), \quad (5.46)$$

e obtemos:

$$g(\cdot) \in W_0^{1,1}([a, b]) \quad \& \quad f(\cdot) = f(a) + f^{af}(\cdot) + f^{0+}(\cdot) - f^{0-}(\cdot) \quad (5.47)$$

$$f^0(\cdot) = f^{0+}(\cdot) - f^{0-}(\cdot) \quad \& \quad f^{0+}(\cdot) f^{0-}(\cdot) = 0 \quad (5.48)$$

$$f^{af}(a) = 0 \quad \& \quad f^{af}(b) = f(b) - f(a) \quad (5.49)$$

$$\& \quad f^{0+}(a) = f^{0-}(a) = 0 = f^{0+}(b) = f^{0-}(b)$$

$$\mathcal{O}^+ \cap \mathcal{O}^- = \emptyset \quad \& \quad |\mathcal{O}^+ \cup \mathcal{O}^-| = b - a \quad \text{no caso (5.36)} \quad (5.50)$$

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(t) g'(t) dt = \\ & = \int_a^b f(a) g'(t) dt + \int_a^b f^{af}(t) g'(t) dt + \\ & \quad + \int_{\mathcal{O}^+} f^{0+}(t) f^{0+'}(t) dt - \int_{\mathcal{O}^-} f^{0-}(t) f^{0-'}(t) dt = \\ & = 0 + [f(a) - f(b)] \cdot \overline{|f^0|} + \\ & \quad + \sum_{i \in I^+} \int_{a_i^+}^{b_i^+} \frac{d}{dt} \frac{f^{0+}(t)^2}{2} dt - \sum_{i \in I^-} \int_{a_i^-}^{b_i^-} \frac{d}{dt} \frac{f^{0-}(t)^2}{2} dt = \\ & = 0 + [f(a) - f(b)] \cdot \overline{|f^0|} + 0 - 0, \end{aligned}$$

mostrando (5.34) e consequentemente (5.35) & (5.36). Finalmente, como

$$\begin{aligned} & \int_a^b f^{pc}(t) \cdot |f^0|'(t) dt = \sum_{i \in I} \int_{a_i}^{b_i} c_i \cdot |f^0|'(t) dt = \\ & = \sum_{i \in I} c_i \cdot [ |f^0(b_i)| - |f^0(a_i)| ] = 0, \end{aligned}$$

vale (5.41).  $\square$

## 5.4 Condição suficiente para a existência de soluções $b$ -fortes bang-bang $\omega$ -dominadas

Nesta secção apresentamos o principal resultado deste capítulo, nomeadamente generalizamos a proposição 5.3 para polinómios  $g(\cdot) \in \mathcal{G}_f$  de grau  $2\gamma$ . Para tal, a cada  $\gamma \in \{1, 2, \dots\}$  e a cada  $f(\cdot) \in \mathcal{F}$  associamos a

$$\gamma \times \gamma - \text{matriz simétrica} \quad M_f^\gamma \quad (5.51)$$

cujas entradas, com  $k := i + \nu$  e  $i \ \& \ \nu \in \{0, 1, \dots, \gamma - 1\}$ ,

$$M_f^{i\nu} := (-1)^k \frac{(k+1)!}{i! \nu!} \left[ (k+2) f^{(-k-2)}(b) - (b-a) f^{(-k-1)}(b) \right] \quad (5.52)$$

são combinações lineares de pares de integrais indefinidos iterados de  $f(\cdot)$ :

$$f^{(0)}(t) := f(t) \quad e \quad f^{(-k-1)}(t) := \int_a^t f^{(-k)}(\tau) d\tau \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.53)$$

Então, neste caso especial  $2 \times 2$  — como em (5.2) — eis o resultado principal:

**Teorema 5.6** (*Condição suficiente para existência de soluções  $b$ -fortes bang-bang  $\omega$ -dominadas*) Consideremos (5.2), (2.8), (2.6), (5.3), (5.4), (5.5) & (5.7) e suponhamos que:

$$M_f^\gamma \text{ satisfaz, para algum } i \in \{1, 2, \dots\}, \quad M_f^{ii} \cdot M_f^{00} \leq 0 \quad (5.54)$$

$$\text{(ou, mais geralmente, } M_f^{ii} \cdot M_f^{00} \leq (M_f^{0i})^2) \quad (5.55)$$

$$\text{(ou, ainda mais em geral, } M_f^\gamma \text{ tem valores próprios } \beta_-, \beta_+ \text{ com } \beta_- \cdot \beta_+ \leq 0). \quad (5.56)$$

Além disso, admitamos que valem as seguintes desigualdades: (ver (5.5) & (5.7))

$$-ess \inf [u \cdot (1 - \bar{\lambda})]([a, b]) < 0 < ess \inf [u \cdot \bar{\lambda}]([a, b]). \quad (5.57)$$

Então

$$\bar{\mathcal{X}}_{--}^{co} \neq \emptyset,$$

e portanto (4.6) é aplicável por forma a garantir que  $\bar{\mathcal{X}}_-^{bb} \neq \emptyset$ .

**Demonstração:** (a) Seja  $g(\cdot)$  um polinómio de grau  $2\gamma$  com  $g(\cdot) > 0$  *q.s.* e  $g(a) = 0 = g(b)$ .

Então, usando os integrais indefinidos iterados de  $f(\cdot)$  dados por (5.53), temos

$$f(t) g'(t) = \frac{d}{dt} \int f(t) g'(t) = \frac{d}{dt} \int f^{(-1)'}(t) g'(t)$$

donde resulta

$$f(t) g'(t) = \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k f^{(-k-1)}(t) g^{(k+1)}(t)$$

$$\int_a^b f(t) g'(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k f^{(-k-1)}(b) g^{(k+1)}(b).$$

Procurando, em particular, um polinómio  $g(\cdot)$  da forma

$$g(t) := \xi(t) \cdot \varphi(t) \cdot \varphi(t), \quad \text{com} \quad \xi(t) := (b-t)(t-a), \quad (5.58)$$

obtemos

$$g^{(k+1)}(t) = \xi(t) (\varphi \varphi)^{(k+1)}(t) +$$

$$+ (k+1) \xi'(t) (\varphi \varphi)^{(k)}(t) + k \frac{k+1}{2} \xi''(t) (\varphi \varphi)^{(k-1)}(t)$$

$$g^{(k+1)}(b) = -(b-a)(k+1) (\varphi \varphi)^{(k)}(b) - k(k+1) (\varphi \varphi)^{(k-1)}(b)$$

$$\int_a^b f(t) g'(t) dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} (k+1)(b-a) f^{(-k-1)}(b) (\varphi \varphi)^{(k)}(b) +$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell+1} \ell(\ell+1) f^{(-\ell-1)}(b) (\varphi \varphi)^{(\ell-1)}(b) \quad (5.59)$$

$$\int_a^b f(t) g'(t) dt = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{\nu} M_f^{i\nu}, \quad (5.60)$$

usando (5.52) e o polinómio geral

$$\varphi(t) := \sum_{k=0}^{\gamma-1} \frac{(t-b)^k}{k!} \alpha_k, \quad \text{onde} \quad \alpha_k := \varphi^{(k)}(b) \quad \& \quad \alpha_0 := \varphi(b), \quad (5.61)$$

de modo que podemos substituir em (5.59) as derivadas iteradas

$$(\varphi \varphi)^{(k)}(b) = \sum_{\substack{i, \nu=0 \\ i+\nu=k}}^{\gamma-1} \frac{k!}{i! \nu!} \alpha_i \alpha_\nu.$$

Mas, usando (5.51), o lado direito de (5.60) pode ser escrito como

$$\int_a^b f(t) g'(t) dt = \alpha^T \cdot M_f^\gamma \cdot \alpha, \quad (5.62)$$

onde  $\alpha^T$  é a transposta de  $\alpha := (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{\gamma-1})$ .

Claramente a matriz  $M_f^\gamma$  tem  $\gamma$  valores próprios reais; e existe uma solução  $\alpha \neq 0$  para

$$\alpha^T \cdot M_f^\gamma \cdot \alpha = 0 \quad (5.63)$$

se e só se (5.56) é verdade, como é fácil de verificar.

(b) Vamos agora mostrar que a equação matricial (5.63) tem uma solução  $\alpha \neq 0$  sempre que se tem, simplesmente, (5.54). De facto, considerando

$$\gamma := i + 1 \quad \& \quad \alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{\gamma-1}) = (\alpha_0, 0, \dots, 0, \alpha_i),$$

o caso  $M_f^{ii} \cdot M_f^{00} = 0$  é trivialmente resolvido (com  $\alpha_0 \alpha_i = 0$ ), enquanto que no caso  $M_f^{ii} \cdot M_f^{00} < 0$  definimos

$$\alpha_i := 1 \quad \& \quad \alpha_0 := \frac{\sqrt{(M_f^{0i})^2 - M_f^{ii} M_f^{00}} - M_f^{0i}}{M_f^{00}}, \quad (5.64)$$

para obtermos, com  $\theta := \sqrt{(M_f^{0i})^2 - M_f^{ii} M_f^{00}}$ ,

$$\begin{aligned} \alpha^T \cdot M_f^\gamma \cdot \alpha &= \alpha_0 (M_f^{00} \alpha_0 + 2 M_f^{0i}) + M_f^{ii} = \\ &= \frac{\theta - M_f^{0i}}{M_f^{00}} (\theta + M_f^{0i}) + M_f^{ii} = \frac{-M_f^{ii} \cdot M_f^{00}}{M_f^{00}} + M_f^{ii} = 0. \end{aligned}$$

Mostrámos assim que

$$(5.54) \quad \Rightarrow \quad \exists \alpha \neq 0 \text{ satisfazendo } (5.63).$$

(c) Demonstrámos que  $f(\cdot) \in \mathcal{F}^{++}$  (ver (5.17)), com um polinómio  $g(\cdot)$  de grau  $2\gamma$  satisfazendo  $g(\cdot) > 0$  q.s.,  $g(a) = 0 = g(b)$  e (5.10). Então, definindo

$$\tilde{x}'(\cdot) := \bar{x}'(\cdot) - g'(\cdot)(1, f(\cdot)), \quad (5.65)$$

temos

$$\tilde{x}(\cdot) \in \overline{\mathcal{X}}_{--}^{co}. \quad \square$$

**Observação 5.7** Para clarificar condições sob as quais vale a hipótese (5.55) do teorema 5.6, i.e.

$$M_f^{ii} \cdot M_f^{00} \leq (M_f^{0i})^2,$$

começamos por, usando o valor-médio

$$m_f := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt,$$

definir as classes

$$\mathcal{F}_r^i := \{f(\cdot) \in \mathcal{F} : m_f = 0 \ \& \ M_f^{ii} = r\}. \quad (5.66)$$

Note-se que no caso especial  $M_f^{00} = 0$  temos a inclusão

$$\mathcal{F}_0^0 \subset \mathcal{F}^{++}. \quad (5.67)$$

Finalmente, mostramos que

$$\begin{aligned} f(\cdot) \in \mathcal{F} &\Leftrightarrow \exists \tilde{f}(\cdot) \in \mathcal{F}_0^0 \cup \mathcal{F}_1^0 \quad \exists q_f \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \\ &f(\cdot) = m_f + q_f \cdot \tilde{f}(\cdot), \end{aligned} \quad (5.68)$$

o que conduz, juntamente com (5.67), à seguinte simplificação: como

$$\int_a^b f(t) g'(t) dt = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^b \tilde{f}(t) g'(t) dt = 0, \quad \forall g(\cdot) \in \mathcal{G}_f,$$

então, para garantirmos a existência de  $g(\cdot)$ , podemos, em vez de todo o  $\mathcal{F}$ , focar a atenção apenas em  $\mathcal{F}_1^0$ .

Para provar (5.68), basta definir

$$\tilde{f}(\cdot) := \frac{f(\cdot) - m_f}{q_f}, \quad q_f := \begin{cases} 1, & \text{se } M_f^{00} = 0 \\ M_f^{00}, & \text{se } M_f^{00} \neq 0, \end{cases}$$

obtendo-se  $m_{\tilde{f}} = 0$  &  $M_{\tilde{f}}^{00} \in \{0, 1\}$  e consequentemente  $\tilde{f}(\cdot) \in \mathcal{F}_0^0 \cup \mathcal{F}_1^0$ .

**Observação 5.8** *No que respeita às desigualdades em (5.57), o que realmente faz falta é que*

$$- [u \cdot (1 - \bar{\lambda})] (t) \leq g'(t) \leq [u \cdot \bar{\lambda}] (t) \quad p.q.t. \ t \in [a, b] \quad (5.69)$$

(ver (5.10)) ou, mais precisamente, a possibilidade de encontrar um polinómio não-constante  $\varphi(\cdot)$  de grau  $\gamma - 1$  tal que, definindo

$$g(t) := \xi(t) \cdot \varphi(t) \cdot \varphi(t), \quad \text{com} \quad \xi(t) := (b - t)(t - a),$$

então  $g'(\cdot)$  satisfaz (5.69) e o vector não-nulo  $\alpha$  formado pelos coeficientes de Taylor de  $\varphi(\cdot)$  (como em (5.61)) é solução da equação matricial bilinear

$$\alpha^T \cdot M_f^\gamma \cdot \alpha = 0.$$

Finalmente, usando (5.4), (5.5) & (5.17) para definir a nova classe

$$\mathcal{F}_{<}^{++} := \{f(\cdot) \in \mathcal{F}^{++} : \text{verifica-se (5.57) ou (5.69)}\}, \quad (5.70)$$

obtemos, devido a (5.8), (5.9), (5.10) & (4.6),

$$\mathcal{F}_{<}^{++} \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\mathcal{X}}_{--}^{co} \neq \emptyset \quad (\text{ver (4.5)}) \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathcal{X}}_{-}^{bb} \neq \emptyset. \quad (5.71)$$

## 5.5 Exemplos de aplicação

Nesta secção começamos por mostrar que podemos sempre, subtraindo uma função afim a qualquer  $f(\cdot) \in \mathcal{F}$ , transformá-la numa função

$$\tilde{f}_0(\cdot) \in \mathcal{F}_0^0 \subset \mathcal{F}^{++} \quad \text{ou} \quad \tilde{f}_1(\cdot) \in \mathcal{F}_1^0 \quad \text{ou} \quad \tilde{f}_{-1}(\cdot) \in \mathcal{F}_{-1}^0. \quad (5.72)$$

Para terminar a secção — e a própria tese — apresentaremos alguns exemplos de funções polinomiais que não satisfazem (5.54) mas que verificam (5.55). Assim como um exemplo no qual (5.55) é falsa mas vale (5.56).

Para mostrar (5.72), temos, usando (5.66),

$$f(\cdot) \in \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad \tilde{f}_0(\cdot) := f(\cdot) - m_f - M_f^{00} \cdot \psi(\cdot) \in \mathcal{F}_0^0 \subset \mathcal{F}^{++},$$

$$\text{onde} \quad \psi(t) := \frac{3!}{(b-a)^3} \left( \frac{a+b}{2} - t \right) \in \mathcal{F}_1^0;$$

$$\tilde{f}_1(\cdot) := f(\cdot) - m_f - (M_f^{00} - 1) \cdot \psi(\cdot) \in \mathcal{F}_1^0$$

$$\text{e} \quad \tilde{f}_{-1}(\cdot) := f(\cdot) - m_f - (M_f^{00} + 1) \cdot \psi(\cdot) \in \mathcal{F}_{-1}^0.$$

De facto, claramente  $M_1^{i\nu} = 0$ ; enquanto que

$$M_\psi^{i\nu} = \frac{(-1)^{i+\nu} (b-a)^{i+\nu}}{(i+\nu+2)(i+\nu+3)} \frac{3!}{i!\nu!}$$

$$\text{pois} \quad \psi^{(-k)}(t) = 3 \frac{(t-a)^k}{(b-a)^3} \frac{(k-1)(b-a) + 2(b-t)}{(k+1)!},$$

$$\text{em particular} \quad \left( \frac{(b-a)^i}{(i+1)!} \right)^2 \leq M_\psi^{ii} \leq \left( \frac{(b-a)^i}{i!} \right)^2,$$

como é fácil de verificar derivando.

Notamos também que a função  $\xi(\cdot)$  em (5.58) verifica  $M_\xi^{00} = 0$ , uma vez que

$$\xi^{(-k)}(t) = \frac{(t-a)^{k+1}}{(k+1)!} \frac{k(b-a) + 2(b-t)}{k+2} \quad \& \quad \xi^{(-k)}(b) = k \frac{(b-a)^{k+2}}{(k+2)!}.$$

Finalmente, para  $r \in \{2, 3, \dots, 8\}$ , com uma constante adequada  $c_r$ , a função

$$f_r(t) := -\xi(t) \frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{(r-1)(b-a)^{r+3}} (t-a)^{r-1} - c_r$$

não satisfaz (5.54). No entanto (5.55) é satisfeita, o que garante, devido a (5.64), existência de uma solução  $\alpha^r = (\alpha_0^r, \alpha_1^r) \neq 0$  para (5.63). Então, para  $r \in \{2, 3, \dots, 8\}$ ,  $f_r(\cdot) \in \mathcal{F}_1^0 \cap \mathcal{F}^{++}$ . Com efeito, usando  $c_r^k(t) := c_r \cdot (t-a)^k \cdot (k!)^{-1}$ ,

$$f_r^{(-k)}(t) = \frac{-(r+3)!}{(b-a)^{r+3}} \frac{(t-a)^{k+r}}{(k+r)!} \frac{(r+1)(b-t) + k(b-a)}{(r-1)(k+r+1)} - c_r^k(t)$$

$$M_{f_r}^{i\nu} = \frac{(-1)^{i+\nu} (i+\nu+1)! (b-a)^{i+\nu} (r+3)! [r(i+\nu+1) - 1]}{i!\nu! (i+\nu+r+3)! (r-1)}$$

$$M_{f_r}^{01} = -2 \frac{b-a}{r+4} \frac{2r-1}{r-1} \quad \& \quad M_{f_r}^{11} = \frac{6(b-a)^2(3r-1)}{(r-1)(r+4)(r+5)}$$

$$\frac{M_{f_r}^{11}}{(M_{f_r}^{01})^2} = \frac{3}{2} \frac{r-1}{(2r-1)^2} \frac{(r+4)(3r-1)}{r+5} < 1, \quad \text{para } 2 \leq r \leq 8. \quad (5.73)$$

Para  $r > 8$  o quociente em (5.73) é  $> 1$ , não apenas para  $i = 1$  mas também para qualquer  $i$ . Em particular (5.55) nunca é satisfeita por  $f_9(\cdot)$ ; enquanto que de certeza (5.56) é verificada por  $f_9(\cdot)$  com  $\gamma = 5$ , e  $f_9(\cdot) \in \mathcal{F}^{++}$  (ver (5.70), (5.71) & (5.17)).

# Anexo A

## Notação

Este anexo é dedicado à notação utilizada na tese.

- O símbolo  $\forall$  significa “para cada” ou “para todos”.
- O símbolo  $\exists$  significa “para algum(a)” ou “existe pelo menos um(a)”.
- O símbolo  $\&$  significa “e”.
- *q.s.* significa “quase sempre”.
- *q.t.* significa “quase todo”.
- *p.q.t.* significa “para quase todo”.
- *i.e.* significa “isto é”.
- *e.g.* significa “por exemplo”.
- AC significa “absolutamente contínua”.
- EDO significa “equação diferencial ordinária”.
- $:=$  significa uma definição; às vezes usamos  $=:$  para denotar que é o lado direito que está a ser definido.
- $\equiv$  significa uma função constante.
- Usa-se  $\infty$  em vez de  $+\infty$ ; e define-se  $\infty \times 0 := 0 =: 0 \times \infty$ .

- Sejam  $(a_k)$ ,  $(b_k)$  duas sucessões de números reais, e sejam  $a, b \in \mathbb{R}$ . A notação  $(a_k) \searrow a$  significa que  $(a_k)$  é decrescente e converge para  $a$ ; analogamente  $(b_k) \nearrow b$  significa que  $(b_k)$  é crescente e converge para  $b$ .
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$  designa o produto interno canónico em  $\mathbb{R}^d$ .
- Dado  $\omega \in \mathbb{R}^d$ , denota-se por  $|\omega|$  a norma euclidiana de  $\omega$ .
- Dada uma  $d \times d$ -matriz  $M$ , isto é uma matriz com dimensão  $d \times d$ , denota-se por :
  - $\det M$  o determinante da matriz  $M$ ;
  - $M^{-1}$  a inversa de  $M$ ;
  - $M^T$  a transposta de  $M$ .
- $\emptyset$  designa o conjunto vazio.
- Dado um subconjunto Lebesgue mensurável  $A$  de  $\mathbb{R}^d$ , denota-se por  $|A|$  a medida de Lebesgue de  $A$ .
- Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ :
  - $A \setminus B := \{s : s \in A \text{ e } s \notin B\}$ ;
  - $A \times B := \{(s_1, s_2) : s_1 \in A \text{ e } s_2 \in B\}$ ;
  - $A \subset B$  (assim como  $B \supset A$ ) significa que cada elemento de  $A$  é elemento de  $B$ .
- Dado um subconjunto  $A$  de  $\mathbb{R}^d$ ,
  - $\partial_{rel} A$  é a fronteira relativa de  $A$ ;
  - $co A$  é o invólucro convexo de  $A$ ;
  - $\bar{co} A$  é o invólucro convexo fechado de  $A$ .
- Dado um subconjunto  $A$  de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\chi_A : A \rightarrow \mathbb{R}$  é a função característica de  $A$  definida por

$$\chi_A(s) := \begin{cases} 1 & \text{se } s \in A \\ 0 & \text{se } s \notin A. \end{cases}$$

- Dada uma função  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow (-\infty, \infty]$ , define-se o seu epigráfico  $\text{epi } f$  por

$$\text{epi } f := \{(v, \alpha) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : f(v) \leq \alpha\}.$$

- Dados dois conjuntos  $X$  e  $Y$  não-vazios:

- a multifunção que a cada  $x \in X$  faz corresponder um subconjunto  $F(x)$  de  $Y$  é denotada por  $F : X \rightrightarrows Y$ ;
- o gráfico da multifunção  $F$  é o conjunto definido por

$$\text{graf } F := \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}.$$

- Dado um subconjunto aberto  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$ ,

- $\partial \Omega$  é a fronteira de  $\Omega$ ;
- $\bar{\Omega}$  é o fecho de  $\Omega$ ;
- $C^k(\Omega)$  é o conjunto das funções reais  $k$  vezes continuamente diferenciáveis definidas em  $\Omega$ , com  $k \geq 0$ ;
- $C^0(\bar{\Omega})$  é o conjunto das funções reais uniformemente contínuas definidas em  $\Omega$ ;
- se, no ponto  $c \in \Omega$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  admite derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(c)$ ,  $i = 1, \dots, d$ , então o gradiente de  $f(\cdot)$  no ponto  $c$  é  $\nabla f(c) := \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(c), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_d}(c) \right)$ .

- Dado um intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ,

- $L^1(a, b)$  é o espaço de Lebesgue usual das (classes de equivalência das) funções  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Lebesgue integráveis;
- $L^1([a, b], \mathbb{R}^d)$  é o espaço das funções  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , cujas componentes  $f_i(\cdot) \in L^1(a, b)$ ,  $i = 1, \dots, d$ ;
- $L^\infty(a, b)$  é o espaço de Lebesgue usual das (classes de equivalência das) funções  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  essencialmente limitadas;
- $W^{1,1}([a, b])$  é o espaço de Sobolev usual das funções  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  que estão em  $L^1(a, b)$  e cuja derivada fraca  $f'(\cdot)$  está em  $L^1(a, b)$ ;

- $W^{p,1}([a,b])$  é o espaço, definido por recorrência, das funções  $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  que estão em  $L^1(a,b)$  e cuja derivada (fraca) está em  $W^{p-1,1}([a,b])$ ,  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq 2$ ;
- $W^{p,1}([a,b], \mathbb{R}^d)$  é o espaço das funções  $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^d$  cujas componentes  $f_i(\cdot) \in W^{p,1}([a,b])$ ,  $i \in \{1, \dots, d\}$ ,  $p \in \mathbb{N}$ ;
- $W_0^{1,1}([a,b])$  é o espaço das funções absolutamente contínuas  $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  que verificam  $f(a) = 0 = f(b)$ .

# Bibliografia

- [1] V. Alexéev, V. Tikhomirov, S. Fomine, *Commande optimale*, Mir, Moscou, 1982.
- [2] M. Amar, A. Cellina, *On passing to the limit for non-convex variational problems*, Asymptot. Anal. **9** (1994), 135–148.
- [3] M. Amar, C. Mariconda, *A nonconvex variational problem with constraints*, SIAM J. Control Optim. **33** (1995), 299–307.
- [4] H. A. Antosiewicz, A. Cellina, *Continuous selections and differential relations*, J. Differential Equations **19** (1975), 386–398.
- [5] Z. Artstein, *Yet another proof of the Lyapunov convexity theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **108** (1990), 89–91.
- [6] J. P. Aubin, H. Frankowska, *Set-valued analysis*, Birkhäuser, 1990.
- [7] V. I. Bogachev, *Measure theory*, vol. I & II, Springer, 2007.
- [8] A. Bressan, *On differential relations with lower continuous right-hand side. An existence theorem*, J. Differential Equations **37** (1980), 89–97.
- [9] A. Bressan, *The most likely path of a differential inclusion*, J. Differential Equations **88** (1990), 155–174.
- [10] A. Bressan, *A multidimensional Lyapunov type theorem*, Studia Math. **106** (1993), 121–128.
- [11] A. Bressan, G. Colombo, *Extensions and selections of maps with decomposable values*, Studia Math. **90** (1988), 69–86.
- [12] A. Bressan, F. Flores, *On total differential inclusions*, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova **92** (1994), 9–16.

- [13] A. Bressan, F. Flores, *Multivariable Aumann integrals and controlled wave equations*, J. Math. Anal. Appl. **189** (1995), 315–334.
- [14] H. Brézis, *Análisis funcional - teoría y aplicaciones*, Alianza Editorial, Madrid, 1984.
- [15] G. Buttazzo, M. Giaquinta, S. Hildebrandt, *One-dimensional variational problems - an introduction*, Oxford Science Publications, 1998.
- [16] C. Carlota, S. Chá, A. Ornelas, *A pointwise constrained version of the Liapunov convexity theorem for single integrals*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. **20** (2013), 273-293.
- [17] C. Carlota, S. Chá, A. Ornelas, *Erratum to: A pointwise constrained version of the Liapunov convexity theorem for single integrals*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. **20** (2013), 1409.
- [18] C. Carlota, S. Chá, A. Ornelas, *Overview on the pointwise constrained Liapunov vectorial convexity theorem*, Hindawi Publishing Corporation, Conference Papers in Mathematics, Volume 2013, Article ID353460 (2013) 4 pages.
- [19] C. Carlota, S. Chá, A. Ornelas, *A pointwise constrained version of the Liapunov convexity theorem for linear optimal control with single integrals*, preprint.
- [20] C. Carlota, A. Ornelas, *Existence of vector minimizers for nonconvex 1-dim integrals with almost convex Lagrangian*, J. Differential Equations **243** (2007), 414–426.
- [21] C. Carlota, A. Ornelas, *The DuBois-Reymond differential inclusion for autonomous optimal control problems with pointwise-constrained derivatives*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **29** (2011), 467-484.
- [22] A. Cellina, *On the differential inclusion  $x' \in [-1, +1]$* , Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) **69** (1980), 1-6.
- [23] A. Cellina, G. Colombo, *On a classical problem of the calculus of variations without convexity assumptions*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **7** (1990), 97–106.
- [24] A. Cellina, G. Colombo, A. Fonda, *A continuous version of Liapunov's convexity theorem*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **5** (1988), 23–36.
- [25] A. Cellina, C. Mariconda, *The existence question in the calculus of variations: a density result*, Proc. Amer. Math. Soc. **120** (1994), 1145–1150.
- [26] A. Cellina, A. Ornelas, *Existence of solutions to differential inclusions and to time optimal control problems in the autonomous case*, SIAM J. Control Optim. **42** (2003), 260–265.

- [27] R. Cerf, C. Mariconda, *On bang-bang constrained solutions of a control system*, SIAM J. Control Optim. **33** (1995), 554–567.
- [28] R. Cerf, C. Mariconda, *Oriented measures with continuous densities and the bang-bang principle*, J. Funct. Anal. **126** (1994), 476–505.
- [29] L. Cesari, *An existence theorem without convexity conditions*, SIAM J. Control **12** (1974), 319–331.
- [30] L. Cesari, *Optimization - theory and applications*, Springer, 1983.
- [31] G. Choquet, *Topology*, Academic Press, 1966.
- [32] D. L. Cohn, *Measure theory*, Birkhäuser, 1980.
- [33] B. Dacorogna, P. Marcellini, *Implicit second order partial differential equations*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (4) **25** (1997), 299–328.
- [34] B. Dacorogna, P. Marcellini, *Cauchy-Dirichlet problem for first order nonlinear systems*, J. Funct. Anal. **152** (1998), 404–446.
- [35] B. Dacorogna, P. Marcellini, *Implicit partial differential equations*, Birkhäuser, 1999.
- [36] F. S. De Blasi, G. Pianigiani, *On the Dirichlet problem for first order partial differential equations. A Baire category approach*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. **6** (1999), 13–34.
- [37] F. S. De Blasi, G. Pianigiani, *Baire category and boundary value problems for ordinary and partial differential inclusions under Carathéodory assumptions*, J. Differential Equations **243** (2007), 558–577.
- [38] L. Debnath, P. Mikusinski, *Introduction to Hilbert spaces with applications*, Academic Press, 1990.
- [39] J. Diestel, J. J. Uhl Jr., *Vector measures*, Amer. Math. Soc., 1977.
- [40] N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear operators - part I: general theory*, Interscience Publishers, 1976.
- [41] I. Ekeland, R. Temam, *Convex analysis and variational problems*, North Holland, Amsterdam, 1976.
- [42] F. Flores-Bazán, S. Perrotta, *Nonconvex variational problems related to a hyperbolic equation*, SIAM J. Control Optim. **37** (1999), 1751–1766.

- [43] F. Flores-Bazán, J. P. Raymond, *A variational problem related to a continuous-time allocation process for a continuum of traders*, J. Math. Anal. Appl. **261** (2001), 448–460.
- [44] I. Fonseca, G. Leoni, *Modern methods in the calculus of variations:  $L^p$  spaces*, Springer, 2007.
- [45] A. Fryszkowski, *Continuous selections for a class of non-convex multivalued maps*, Studia Math. **76** (1983), 163–174.
- [46] V. V. Goncharov, A. Ornelas, *On minima of a functional of the gradient: a continuous selection*, Nonlinear Anal. **27** (1996), 1137–1146.
- [47] P. R. Halmos, *The range of a vector measure*, Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), 416–421.
- [48] G. Leoni, *A first course in Sobolev spaces*, Amer. Math. Soc., 2009.
- [49] A. A. Liapounoff, *Sur les fonctions-vecteurs complètement additives*, Izv. Akad. Nauk SSSR **4** (1940), 465–478.
- [50] E. L. Lima, *Curso de análise*, vol. 1, IMPA, Brasília, 1995.
- [51] E. L. Lima, *Curso de análise*, vol. 2, IMPA, Brasília, 1995.
- [52] J. Lindenstrauss, *A short proof of Liapounoff's convexity theorem*, J. Math. Mech. **15** (1966), 971–972.
- [53] C. Mariconda, *A generalization of the Cellina-Colombo theorem for a class of nonconvex variational problems*, J. Math. Anal. Appl. **175** (1993), 514–522.
- [54] M. D. P. Monteiro Marques, A. Ornelas, *Genericity and existence of a minimum for scalar integral functionals*, J. Optim. Theory Appl. **86** (1995), 421–431.
- [55] L. W. Neustadt, *The existence of optimal controls in the absence of convexity conditions*, J. Math. Anal. Appl. **7** (1963), 110–117.
- [56] C. Olech, *The Lyapunov theorem: its extensions and applications*, Methods of nonconvex analysis (Varenna, 1989), 84–103, Lecture Notes in Math. **1446**, Springer, 1990.
- [57] A. Ornelas, *Existence of scalar minimizers for nonconvex simple integrals of sum type*, J. Math. Anal. Appl. **221** (1998), 559–573.
- [58] A. Ornelas, *Existence and regularity for scalar minimizers of affine nonconvex simple integrals*, Nonlinear Anal. **53** (2003), 441–451.

- 
- [59] A. Ornelas, *Lipschitz and piecewise- $C^1$  regularity for scalar minimizers of affine simple integrals*, J. Math. Anal. Appl. **296** (2004), 21-31.
- [60] A. Ornelas, *Lipschitz regularity for scalar minimizers of autonomous simple integrals*, J. Math. Anal. Appl. **300** (2004), 285-296.
- [61] A. Ornelas, *Existence of scalar minimizers for simple convex integrals with autonomous Lagrangian measurable on the state variable*, Nonlinear Anal. **67** (2007), 2485-2496.
- [62] R. T. Rockafellar, *Convex analysis*, Princeton University Press, 1970.
- [63] R. T. Rockafellar, *Integral functionals, normal integrands and measurable selections*, Non-linear operators and the calculus of variations (Brussels, 1975), 157-207, Lecture Notes in Math. **543**, Springer, 1976.
- [64] R. Rockafellar, R. Wets, *Variational analysis*, Springer, 1998.
- [65] J. Yeh, *Real analysis - theory of measure and integration*, World Scientific, Singapore, 2006.
- [66] J. A. Yorke, *Another proof of the Liapunov convexity theorem*, SIAM J. Control **9** (1971), 351-353.



---

**Contactos:**

Universidade de Évora  
**Instituto de Investigação e Formação Avançada - IIFA**  
Palácio do Vimioso | Largo Marquês de Marialva, Apart. 94  
7002-554 Évora | Portugal  
Tel: (+351) 266 706 581  
Fax: (+351) 266 744 677  
email: [iifa@uevora.pt](mailto:iifa@uevora.pt)