# Universidade de Évora


Mestrado em Matemática Aplicada
Biénio 2004/2006

# *Problemas não-convexos e não-coercivos do Cálculo das Variações*


Dissertação apresentada por
**Sílvia Alexandra Carrapato Chá**


**Orientador:** Professor Doutor António da Costa Ornelas Gonçalves
(Professor Associado com Agregação)

"Esta dissertação não inclui as críticas a as sugestões feitas pelo júri."

## Évora

**2006**

# Universidade de Évora

Mestrado em Matemática Aplicada
Biénio 2004/2006

# *Problemas não-convexos e não-coercivos do Cálculo das Variações*

Dissertação apresentada por
**Sílvia Alexandra Carrapato Chá**



**Orientador:** Professor Doutor António da Costa Ornelas Gonçalves
(Professor Associado com Agregação)

"Esta dissertação não inclui as críticas a as sugestões feitas pelo júri."

**Évora**

**2006**

# Agradecimentos

Para a elaboração desta dissertação agradeço a várias pessoas sem as quais não teria sido possível a sua concretização.

Começo por agradecer ao meu orientador o Professor Doutor António Ornelas, pela sua disponibilidade e pela sua preocupação demonstradas na realização do meu trabalho.

Seguidamente, agradeço à Doutora Clara Carlota por todo o seu apoio ao longo deste último ano e acima de tudo pela sua amizade, pela sua compreensão e pelo seu incentivo para comigo.

Agradeço ainda aos meus pais, aos meus avós e ao meu namorado por me apoiarem e me incentivarem na concretização de mais uma etapa. E claro, pela sua compreensão e pela sua paciência manifestadas durante este período.

A todos eles o meu Muito Obrigada!

**Nonconvex and noncoercive problems in the calculus of variations**

# Abstract:

This dissertation analises in detail the paper "An indirect Method in the calculus of variations" by F. H. Clarke in which a new method is presented to prove existence of minimizers for the simplest problem of the calculus of variations (i.e. in which the functions in competition are vectorial fields of one real variable), without superlinear growth. The technique used consists in obtaining minimizers for aproximating problems, and passing to the limit using a value function which is shown to be eventually constant, using tecniques of proximal analisis.

# Breve resumo da dissertação:

Nesta dissertaçao analisa-se em detalhe um artigo de F. H. Clarke "An indirect Method in the calculus of variations" no qual é apresentado um novo método para demonstrar existência de minimizantes para o problema mais simples do cálculo das variações (isto é em que as funções em competição são funções vectoriais de variável real), sem hipótese de crescimento superlinear. A técnica usada consiste em obter minimizantes para problemas aproximantes, e passar ao limite usando uma função valor que se mostra ser finalmente constante, usando técnicas de análise proximal.

# Índice


## I Introdução 3

## II Análise detalhada do artigo: um método indirecto no cálculo das variações 4

1 Apresentação do problema . . . 4
2 Um resultado de optimização não-suave . . . 5
  2.1 A condição necessária intermédia . . . 5
  2.2 Continuidade da derivada no caso especial $n = 1$ . . . 51
  2.3 Alguns resultados auxiliares . . . 63
3 Um resultado de análise proximal . . . 93
  3.1 Constância das funções com subgradiente proximal contendo zero . . . 93
  3.2 Um resultado auxiliar . . . 103
4 O problema autónomo . . . 104
  4.1 Hipóteses básicas . . . 104
  4.2 Hipóteses extra . . . 104
  4.3 O problema $(\mathcal{P}_\theta)$ . . . 105
  4.4 Lemas auxiliares . . . 105
  4.5 O teorema 2 do artigo: enunciado e demonstração . . . 124
  4.6 Um caso particular: o crescimento coercivo . . . 129
  4.7 Exemplos do caso autónomo . . . 136
    4.7.1 Crescimento linear . . . 136
    4.7.2 Exemplos sem crescimento linear . . . 145
    4.7.3 $K$ tem de ser um cone . . . 151
5 O problema não-autónomo . . . 155
  5.1 Hipóteses básicas . . . 155
  5.2 Hipóteses extra . . . 155
  5.3 O teorema 3 do artigo: enunciado e demonstração . . . 156
  5.4 Exemplo do caso não-autónomo . . . 166
  5.5 O caso $n = 1$ . . . 169
  5.6 Exemplo do caso $n = 1$ . . . 170

## III Apêndice: conceitos e resultados básicos 173

6 Espaços topológicos . . . 173
  6.1 Definições e propriedades elementares . . . 173
  6.2 Continuidade e sci nos espaços topológicos . . . 174
7 Espaços métricos . . . 175
8 Espaços vectoriais . . . 176
9 Espaços normados . . . 176
10 Espaços mensuráveis . . . 178
  10.1 Definições e propriedades elementares . . . 178
  10.2 Funções mensuráveis . . . 180
11 O integral de Lebesgue . . . 181
12 Topologias fracas . . . 184
  12.1 Definições e propriedades fundamentais . . . 184
  12.2 A topologia fraca $\sigma(E, E')$ . . . 185
  12.3 A topologia fraca $* \ \sigma(E', E)$ . . . 185
  12.4 Espaços reflexivos . . . 187
  12.5 Espaços separáveis . . . 188

13 Os espaços $L^p$ . . . 188
13.1 Conceitos preliminares . . . 188
13.2 Notações importantes . . . 189
13.3 O espaço $L^1$ . . . 189
13.4 O espaço $L^p$ $(1 < p < \infty)$ . . . 190
13.5 O espaço $L^\infty$ . . . 190
13.6 Convergência nos espaços $L^p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ . . . 191
13.7 Compacidade fraca em $L^1$ . . . 193
14 Outros resultados de sci . . . 194
15 Os espaços de Sobolev . . . 195
15.1 O espaço $W^{1,p}$ $(1 \leq p \leq \infty)$ . . . 195
15.2 Compacidade nos espaços de Sobolev . . . 196
16 Continuidade em $\mathbb{R}$ . . . 196
17 Continuidade em $\mathbb{R}^n$ . . . 197
18 Funções absolutamente contínuas . . . 198
19 Análise convexa . . . 200
19.1 Conjuntos afins . . . 200
19.2 Conjuntos convexos e cones . . . 201
19.3 Hiperplanos e Separação de Conjuntos Convexos . . . 203
19.4 Interior relativo e fronteira relativa de conjuntos convexos . . . 203
19.5 Funções convexas . . . 204
19.6 Continuidade de funções convexas . . . 206
19.7 Conjugadas de funções convexas . . . 207
19.8 Subdiferenciabilidade . . . 208
20 Multifunções . . . 209
21 Integrandos normais . . . 210
22 Análise não-suave . . . 211
22.1 Definições e propriedades elementares . . . 211
22.2 Cálculo básico . . . 214
23 Análise proximal . . . 215
24 Outros resultados . . . 217

**IV Bibliografia 218**

# Capítulo I
# Introdução

Neste trabalho é estudado em pormenor o artigo [10] (ver bibliografia no final), onde se apresenta um novo método para demonstrar a existência de minimizantes para o problema mais simples do cálculo das variações (isto é em que as funções em competição são funções vectoriais de variável real), sem a hipótese de crescimento superlinear. A técnica usada consiste em obter minimizantes para problemas aproximantes, e passar ao limite usando uma função valor que se mostra ser finalmente constante, usando técnicas de análise proximal.

No próximo capítulo apresenta-se o conteúdo deste artigo.

Quanto aos conceitos e resultados básicos preliminares, eles são apresentados no capítulo III.

## Capítulo II

# Análise detalhada do artigo: um método indirecto no cálculo das variações

### 1. Apresentação do problema

Consideramos o seguinte problema $(\mathcal{P})$ do cálculo das variações : minimizar o integral

$$\Lambda(x(\cdot)) := \int_0^T L(t, x(t), x'(t))\ dt \tag{$\mathcal{P}$}$$

na classe $X$ das funções $x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ AC (absolutamente contínuas) que satisfazem as condições de fronteira

$$x(0) = x_0,\ x(T) = x_T \tag{1.1}$$

e as restrições

$$(x_0, x_T) \in C,\ x(t) \in \Omega\ \forall\, t \in [0,T],\ x'(t) \in K \text{ qs}, \tag{1.2}$$

onde $C$, $\Omega$, $K$ e a função $L : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ são dados obedecendo às hipóteses que serão referidas ao longo das próximas secções. As funções da classe $X$ dizem-se **admissíveis** para o problema $(\mathcal{P})$. (Como é habitual, o símbolo qs significa quase sempre, ou seja, excepto para $t$ num conjunto de medida nula.)

Como em qualquer problema de optimização, a primeira questão é saber sob que condições existe solução. Leonida Tonelli foi um dos matemáticos que deu um contributo importante no cálculo das variações ao criar o método directo, o qual consiste no seguinte : extrai-se de uma qualquer sucessão minimizante uma subsucessão convergente e mostra-se que o seu limite é uma solução para o problema a estudar. Essencialmente o que está envolvido é uma propriedade de compacidade dos conjuntos de subnível do funcional $\Lambda(\cdot)$. Neste capítulo é feito o estudo do artigo [10] (ver bibliografia no final), que apresenta um novo método, indirecto, para obter existência, no qual um passo intermédio é a obtenção de condições necessárias (as da secção 2).

Neste artigo, a hipótese de coercividade, que implica a compacidade dos conjuntos de subnível do funcional $\Lambda(\cdot)$, é substituída por uma condição mais fraca, que permite obter minimizantes para problemas aproximantes, nomeadamente : existe $k > 0$ tal que qualquer função admissível $x(\cdot)$ verifica

$$\inf_{0 \le t \le T} ess\, |x'(t)| < k.$$

A ideia principal da demonstração é mostrar que qualquer minimizante dos problemas aproximantes satisfaz uma condição necessária. Para mostrar a existência de solução recorre-se a uma certa função valor ( não--diferenciável ). Mostra-se que essa função é finalmente constante usando técnicas de análise proximal (as da secção 3).

Nas próximas duas secções apresentam-se resultados que são ferramentas chave para a demonstração dos resultados principais do artigo (estes últimos são apresentados nas secções 4 e 5). Exemplos de aplicação dos resultados principais aparecem nas subsecções 4.7, 5.4 e 5.6.

## 2. Um resultado de optimização não-suave

Fixada uma **função de Nagumo** $\theta(\cdot)$ (ou seja, $\theta(\cdot) \in C^1([0,+\infty),\mathbb{R})$ é estritamente convexa, estritamente crescente e satisfaz

$$\lim_{\gamma \to +\infty} \frac{\theta(\gamma)}{\gamma} = +\infty \text{ )},$$

definimos o espaço

$$\mathbf{AC}_\theta([0,T],\mathbb{R}^n) := \{x(\cdot) \in AC([0,T],\mathbb{R}^n) : \Lambda_\theta(x(\cdot)) < +\infty\},$$

onde

$$\Lambda_\theta(x(\cdot)) := \int_0^T \theta(|x'(t)|)\ dt.$$

### 2.1. A condição necessária intermédia

Seja $L : [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^n \to (-\infty,+\infty]$ uma função satisfazendo o seguinte :

**Hipóteses básicas :**

$(i)$ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (ver (1.2)) é fechado;

$(ii)$ $C \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ é fechado e é um conjunto compacto pelo menos uma das projecções

$$C_x := \{x \in \mathbb{R}^n : (x,y) \in C \text{ para algum } y \in \mathbb{R}^n\},$$

$$C_y := \{y \in \mathbb{R}^n : (x,y) \in C \text{ para algum } x \in \mathbb{R}^n\};$$

$(iii)$ $K \subset \mathbb{R}^n$ é um cone convexo fechado;

$(iv)$ a função $(s,v) \mapsto L(t,s,v)$ é sci (semicontínua inferiormente) $\forall\ t \in [0,T]$;

$(v)$ para cada $s \in \Omega$ :

$(v_1)$ a função $L(t,s,\cdot)$ é convexa $\forall\ t \in [0,T]$;

$(v_2)$ o domínio $dom\ L(t,s,\cdot)$ é um conjunto aberto, convexo e não-vazio, independente de $t$, designado por $dom\ L(s,\cdot)$;

$(vi)$ para cada $s \in \Omega$ e $v \in dom\ L(s,\cdot)$, a função
$t \longmapsto L(t,s,v)$ é lipschitziana;

$(vii)$ existem constantes não-negativas $\lambda$ e $\eta$ tais que :

$$|L_t(t,s,v)| \leq \lambda\ L(t,s,v) + \eta \text{ qs em } [0,T] \qquad \forall\ s \in \Omega \qquad \forall\ v \in dom\ L(s,\cdot); \tag{2.1}$$

$(viii)$ existe uma função $l(\cdot)$ localmente limitada inferiormente tal que

$$L(t,s,v) \geq l(s) \qquad \forall\ t \in [0,T] \qquad \forall\ s \in \Omega \qquad \forall\ v;$$

$(ix)$ existe uma função lipschitziana $\overline{x}(\cdot) \in X$ para a qual $\Lambda(\overline{x}(\cdot))$ é finito (ver $(\mathcal{P})$).

No que segue consideraremos o conjunto de subnível

$$\Gamma(\overline{x}(\cdot)) := \{x(\cdot) \in X : \Lambda(x(\cdot)) \leq \Lambda(\overline{x}(\cdot))\}$$

e o seu subconjunto

$$\Gamma_\theta(\overline{x}(\cdot)) := \Gamma(\overline{x}(\cdot)) \cap AC_\theta([0,T], \mathbb{R}^n).$$

Fixadas constantes $r \geq 0$ e $\sigma > 0$, defina-se um novo funcional $f(\cdot)$ em $AC_\theta([0,T], \mathbb{R}^n)$ por

$$f(x(\cdot)) := \Lambda(x(\cdot)) + r\ \Lambda_\theta(x(\cdot)) + \sigma\left|\Lambda_\theta(x(\cdot)) - \Lambda_\theta(z(\cdot))\right|^2,$$

para algum $z(\cdot) \in \Gamma_\theta(\overline{x}(\cdot))$.

**Teorema 2.1.** *Sob as hipóteses básicas acima, suponhamos que para algum $z(\cdot) \in \Gamma_\theta(\overline{x}(\cdot))$ existem constantes $r \geq 0$, $\sigma > 0$ tais que :*

$$f(x(\cdot)) \geq f(z(\cdot))$$

*sempre que $x(\cdot) \in AC_\theta([0,T], \mathbb{R}^n)$ é admissível para $(\mathcal{P})$ e tem $\Lambda_\theta(x(\cdot))$ suficientemente próximo de $\Lambda_\theta(z(\cdot))$.*

*Então existe uma função integrável $\xi(\cdot)$ tal que*

$$\xi(t) \in \partial_t L(t, z(t), z'(t)) \ \text{ qs em } \ [0,T];$$

*e existem uma constante $c$ e uma função mensurável $p(\cdot)$ com $p(t) \in \partial_v L(t, z(t), z'(t))$ qs em $[0,T]$, tais que*

$$L(t, z(t), z'(t)) - \langle z'(t), p(t)\rangle + r\ \theta(|z'(t)|) - r\ |z'(t)|\ \theta'(|z'(t)|) = c + \int_0^t \xi(\tau)\ d\tau \ \text{ qs em } \ [0,T]. \tag{2.2}$$

**Demonstração :**

**(Parte 1 da demonstração do teorema 2.1 : a transformação de Erdmann)**

Seja $u : [0,T] \to [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ uma função mensurável, com $\int_0^T u(t)\ dt = 0$, sendo $0 < \varepsilon_0 < 1$. Usamos $u(\cdot)$ para definir uma transformação de $[0,T]$ para $[0,T]$ :

$$t = \tau + \int_0^\tau u(s)\ ds.$$

Mostremos que esta transformação é invertível. Seja $\varphi : [0,T] \to [0,T]$ a função dada por

$$\varphi(\tau) := \tau + \int_0^\tau u(s)\ ds,$$

com $\varphi(0) = 0$, $\varphi(T) = T$. Seja também $\varphi_1 : [0,T] \to [0,T]$ a função identidade

$$\varphi_1(\tau) := \tau.$$

Como $\varphi_1(\cdot)$ é lipschitziana, então $\varphi_1(\cdot)$ é AC, pela nota 18.6. Seja $\varphi_2 : [0,T] \to [0,T]$ a função dada por

$$\varphi_2(\tau) := \int_0^\tau u(s)\ ds.$$

Como $u(\cdot)$ é mensurável e

$$\int_0^T |u(s)| \; ds \le \varepsilon_0 \; T < \infty$$

(pois $u(\cdot)$ tem valores em $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$), então $u(\cdot) \in L^1([0,T], \mathbb{R})$. Logo, $\varphi_2(\cdot)$ é AC e $\varphi_2'(\tau) = u(\tau)$ qs em $(0,T)$, pela proposição 18.7, com $(a,b) = (0,T)$, $f(\cdot) = \varphi_2(\cdot)$, $g(\cdot) = u(\cdot)$, $x = \tau$ e $t = s$. Consequentemente, $\varphi(\cdot) := \varphi_1(\cdot) + \varphi_2(\cdot)$ é AC [1] pela proposição 18.8, com $\Delta = X = [0,T]$, $x_1(\cdot) = \varphi_1(\cdot)$, $x_2(\cdot) = \varphi_2(\cdot)$, $c_1 = c_2 = 1$. Temos também que $\varphi'(\tau) := \varphi_1'(\tau) + \varphi_2'(\tau) = 1 + u(\tau)$ qs em $[0,T]$. Além disso, como $u(\tau) \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \subset (-1,1)$ para qualquer $\tau \in [0,T]$, temos $\varphi'(\tau) = 1 + u(\tau) > 0$ qs em $[0,T]$. Então para quaisquer $t_1$, $t_2 \in [0,T]$ com $t_1 < t_2$ e como $\varphi(\cdot)$ é AC, pelo teorema 18.4 (com $(a,b) = (0,T)$, $u(\cdot) = \varphi(\cdot)$, $x = t_1$, $x = t_2$, $y = 0$), vem

$$\begin{aligned} \varphi(t_1) - \varphi(t_2) &= \int_0^{t_1} \varphi'(t) \; dt - \int_0^{t_2} \varphi'(t) \; dt = -\int_{t_1}^{0} \varphi'(t) \; dt - \int_0^{t_2} \varphi'(t) \; dt \\ &= -\int_{t_1}^{t_2} \varphi'(t) \; dt \le 0 \end{aligned}$$

(pois $\varphi'(\tau) > 0$ qs em $[0,T]$). Logo, $\varphi(\cdot)$ é crescente em $[0,T]$. E portanto, pela proposição 18.10, com $s(\cdot) = \varphi(\cdot)$, $[a,b] = [c,d] = [0,T]$, temos que a função inversa $\varphi^{-1}(t) = \tau$ de $t = \varphi(\tau)$ existe e é AC em $[0,T]$.

Isto induz, por reparametrição, uma nova função $x(\cdot)$ :

$$x(t) := z\left(\varphi^{-1}(t)\right) = z(\tau).$$

Esta é a chamada transformação de Erdmann. Notemos que

$$\begin{aligned} & \varphi^{-1}(t) = \tau \quad \Leftrightarrow \quad \varphi^{-1}(\varphi(\tau)) = \tau \quad \Leftrightarrow \quad \left(\varphi^{-1} \circ \varphi\right)(\tau) = \tau \\ \Rightarrow \quad & \left(\varphi^{-1} \circ \varphi\right)'(\tau) = 1 \text{ qs em } [0,T] \\ \Leftrightarrow \quad & \left(\varphi^{-1}(\varphi(\tau))\right)' \varphi'(\tau) = 1 \text{ qs em } [0,T] \\ \Leftrightarrow \quad & \left(\varphi^{-1}(t)\right)' = \tfrac{1}{\varphi'(\tau)} \text{ qs em } [0,T], \end{aligned}$$

pela proposição 18.11, com $[a,b] = [c,d] = [0,T]$, $u(\cdot) = \varphi^{-1}(\cdot)$, $v(\cdot) = \varphi(\cdot)$. Como

$$\left(\varphi^{-1}(t)\right)' = \frac{1}{\varphi'(\tau)} = \frac{1}{1 + u(\tau)} > 0 \text{ qs em } [0,T]$$

e $\varphi^{-1}(\cdot)$ é AC, então $\varphi^{-1}(\cdot)$ é crescente em $[0,T]$. De facto (analogamente ao que foi feito para $\varphi(\cdot)$), sejam $t_1$, $t_2 \in [0,T]$ quaisquer com $t_1 < t_2$, e como $\varphi^{-1}(\cdot)$ é AC, pelo teorema 18.4 (com $(a,b) = (0,T)$, $u(\cdot) = \varphi^{-1}(\cdot)$, $x = t_1$, $x = t_2$, $y = 0$), vem

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(t_1) - \varphi^{-1}(t_2) &= \int_0^{t_1} \left(\varphi^{-1}(t)\right)' \; dt - \int_0^{t_2} \left(\varphi^{-1}(t)\right)' \; dt = -\int_{t_1}^{0} \left(\varphi^{-1}(t)\right)' \; dt - \int_0^{t_2} \left(\varphi^{-1}(t)\right)' \; dt \\ &= -\int_{t_1}^{t_2} \left(\varphi^{-1}(t)\right)' \; dt \le 0 \end{aligned}$$

(pois $\left(\varphi^{-1}(t)\right)' > 0$ qs em $[0,T]$). Logo, $x(\cdot)$ é AC, pela proposição 18.12, com $[a,b] = [c,d] = [0,T]$, $u(\cdot) = z(\cdot)$, $v(\cdot) = \varphi^{-1}(\cdot)$.

[1] Podemos mostrar que $\varphi(\cdot)$ é AC de forma mais simples : como $1 + u(\cdot)$ é mensurável (pelo teorema 10.22, com $D = [0,T]$, $f(\cdot) = u(\cdot)$, $g(\cdot)$ é a função $t \mapsto 1$ e o domínio de definição de $f(\cdot) + g(\cdot)$ é igual a $[0,T]$) e

$$\int_0^T |1 + u(\tau)| \; d\tau \le \int_0^T 1 \; d\tau + \int_0^T |u(\tau)| \; d\tau \le T + \varepsilon_0 \; T = (1 + \varepsilon_0) T < \infty$$

(pois $u(\cdot)$ tem valores em $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$), temos que $1 + u(\cdot) \in L^1(0,T)$, e portanto $\varphi(\cdot)$ é AC, pela proposição 18.7, com $(a,b) = (0,T)$, $f(\cdot) = \varphi(\cdot)$, $g(\cdot) = 1 + u(\cdot)$, $x = \tau$, $t = s$.

Calculemos agora $x'(t)$ : pela proposição 18.11, com $[a,b]=[c,d]=[0,T]$, $u(\cdot)=z(\cdot)$, $v(\cdot)=\varphi^{-1}(\cdot)$, vem

$$x'(t)=\left(z\circ\varphi^{-1}\right)'(t)=z'\left(\varphi^{-1}(t)\right)\left(\varphi^{-1}(t)\right)'=z'(\tau)\cdot\frac{1}{1+u(\tau)}=\frac{z'(\tau)}{1+u(\tau)}\text{ qs em }[0,T].$$

Esta transformação de Erdmann deixa $X$ invariante : como $z(\cdot)\in\Gamma(\overline{x}(\cdot))\subset X$, então $z'(\tau)\in K$ qs, e como $\frac{1}{1+u(\tau)}>0$, logo $x'(t)=\frac{z'(\tau)}{1+u(\tau)}\in K$ qs, visto $K$ ser cone. O mesmo acontece para as outras restrições de $X$, isto é, $(x(0),x(T))=(z(0),z(T))\in C$, $x(t)=z(\tau)\in\Omega$ para qualquer $t\in[0,T]$.

Para qualquer $\varepsilon>0$ existe, para qt $\tau$, um número positivo $\gamma(\tau)$ tal que

$$|u(\tau)|\leq\gamma(\tau)\quad\Rightarrow\quad\left|\theta\left(\frac{|z'(\tau)|}{1+u(\tau)}\right)(1+u(\tau))-\theta(|z'(\tau)|)\right|<\frac{\varepsilon}{T}\,. \tag{2.3}$$

Iremos limitar a escolha de $u$ desta maneira. Recorde-se que $x'(t)=\frac{z'(\tau)}{1+u(\tau)}$. Vamos mostrar que a função $\gamma(\cdot)$ pode ser considerada mensurável, e tal que para $t$ qs, $x'(t)\in int\,(dom\ L(t,x(t),\cdot))$. Fixemos $\varepsilon>0$, então pela proposição 2.16, vem

$$\begin{gathered}\exists\text{ uma função mensurável }\gamma_1(\cdot):[0,T]\to(0,+\infty)\text{ tal que}\\|u(\tau)|\leq\gamma_1(\tau)\quad\Rightarrow\quad\left|\theta\left(\frac{|z'(\tau)|}{1+u(\tau)}\right)(1+u(\tau))-\theta(|z'(\tau)|)\right|\leq\frac{\varepsilon}{T}\text{ qs em }[0,T];\end{gathered} \tag{2.4}$$

e

$$\begin{gathered}\exists\text{ uma função mensurável }\gamma_2(\cdot):[0,T]\to(0,+\infty)\text{ tal que}\\|u(\tau)|\leq\gamma_2(\tau)\quad\Rightarrow\quad L\left(\varphi(\tau),z(\tau),\frac{z'(\tau)}{1+u(\tau)}\right)\in\mathbb{R}\text{ qs em }[0,T].\end{gathered} \tag{2.5}$$

Notemos que

$$L\left(\varphi(\tau),z(\tau),\frac{z'(\tau)}{1+u(\tau)}\right)\in\mathbb{R}\quad\Leftrightarrow\quad L(t,x(t),x'(t))\in\mathbb{R} \tag{2.6}$$

$$\Leftrightarrow\quad x'(t)\in dom\ L(t,x(t),\cdot)=int\,(dom\ L(t,x(t),\cdot)),$$

pela hipótese básica $(v_2)$. De (2.5) e (2.6), concluímos que

$$\begin{gathered}\exists\text{ uma função mensurável }\gamma_2(\cdot):[0,T]\to(0,+\infty)\text{ tal que}\\|u(\tau)|\leq\gamma_2(\tau)\quad\Rightarrow\quad x'(t)\in int\,(dom\ L(t,x(t),\cdot))\text{ qs em }[0,T].\end{gathered} \tag{2.7}$$

Note-se que

$$u(\tau)\in[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]\quad\Leftrightarrow\quad|u(\tau)|\leq\varepsilon_0. \tag{2.8}$$

E portanto, juntando (2.4), (2.7) e (2.8), resulta que a função $\gamma(\cdot)$ que verifica o pretendido é a função $\gamma(\cdot):[0,T]\to(0,+\infty)$ dada por

$$\gamma(\tau):=\min\{\gamma_1(\tau),\gamma_2(\tau),\varepsilon_0\}.$$

Calculemos $\Lambda_\theta(x(\cdot))$ :

$$\Lambda_\theta(x(\cdot))=\int_0^T\theta(|x'(t)|)\ dt=\int_0^T\theta\left(\frac{|z'(\tau)|}{1+u(\tau)}\right)(1+u(\tau))\ d\tau,$$

pelo lema 18.14, onde $t=\varphi(\tau)$, $\psi(t)=\theta(|x'(t)|)$, $\varphi(a)=\varphi(0)=0$, $\varphi(b)=\varphi(T)=T$, $a=0$, $b=T$, $\psi(\varphi(\tau))=\theta(|x'(\varphi(\tau))|)=\theta(|x'(t)|)=\theta\left(\frac{|z'(\tau)|}{1+u(\tau)}\right)$, $\varphi'(\tau)=1+u(\tau)$. Para isso $\varphi(\cdot)$ tem de ser monótona e o integral $\int_0^T \theta(|x'(t)|)\ dt$ tem de existir. De facto, $\varphi(\cdot)$ é crescente e o integral $\int_0^T \theta(|x'(t)|)\ dt$ existe se $\int_0^T \theta^-(|x'(t)|)\ dt$ ou $\int_0^T \theta^+(|x'(t)|)\ dt \in \mathbb{R}$, onde

$$\theta(|x'(\cdot)|) = \theta^+(|x'(\cdot)|) - \theta^-(|x'(\cdot)|),$$

sendo

$$\theta^+(|x'(\cdot)|) = \max\{\theta(|x'(\cdot)|), 0\}$$

e

$$\theta^-(|x'(\cdot)|) = -\min\{\theta(|x'(\cdot)|), 0\}.$$

Por hipótese, $\theta(\cdot) \in C^1([0,+\infty))$ e é crescente, então fixando $\alpha \in [0,+\infty)$, existe $k = \theta(0) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\theta(\alpha) \geq \theta(0) = k,$$

o que mostra que $\theta(\cdot)$ é limitada inferiormente. Isto é,

$$\exists\ k \in \mathbb{R} : \theta(\alpha) \geq k,\ \forall\ \alpha \in [0,+\infty).$$

Em particular, para quase todo $t \in [0,T]$, substituindo $\alpha$ por $|x'(t)|$,

$$\exists\ k \in \mathbb{R} : \theta(|x'(t)|) \geq k, \text{ qs em } [0,T].$$

Isto é,

$$\exists\ k \in \mathbb{R} : \theta(|x'(t)|) - k \geq 0, \text{ qs em } [0,T].$$

Consideremos a função $\theta_1 : [0,T] \to [0,+\infty)$ dada por

$$\theta_1(t) := \theta(|x'(t)|) - k, \text{ qs em } [0,T].$$

Mostremos que o integral

$$\int_0^T \theta_1(t)\ dt$$

existe. Para isso, vamos usar a nota 11.7, com $D = [0,T]$, $f(\cdot) = \theta_1(\cdot)$, $f^+(\cdot) = \theta_1^+(\cdot)$, $f^-(\cdot) = \theta_1^-(\cdot)$. Como

$$\theta_1^+(t) = \max\{\theta_1(t), 0\} = \theta_1(t) \geq 0$$

e

$$\theta_1^-(t) = -\min\{\theta_1(t), 0\} = 0,$$

então

$$\int_0^T \theta_1^+(t)\ dt \quad \text{e} \quad \int_0^T \theta_1^-(t)\ dt$$

existem em $[0,\infty]$. Logo,

$$\int_0^T \theta_1^+(t)\ dt \geq \int_0^T 0\ dt = 0$$

e

$$\int_0^T \theta_1^-(t)\ dt \geq \int_0^T 0\ dt = 0,$$

pelo lema 11.12, com $D = [0,T]$, $f(\cdot) = 0$, $g(\cdot) = \theta_1^+(\cdot)$, $g(\cdot) = \theta_1^-(\cdot)$. Além disso, o integral

$$\int_0^T \theta_1(t)\ dt = \int_0^T \theta_1^+(t)\ dt - \int_0^T \theta_1^-(t)\ dt = \int_0^T \theta_1^+(t)\ dt - \int_0^T 0\ dt = \int_0^T \theta_1^+(t)\ dt \geq 0$$

existe em $[0,\infty]$. Notemos agora que

$$\theta_1(t) = \theta(|x'(t)|) - k \Leftrightarrow \theta(|x'(t)|) = \theta_1(t) + k.$$

E temos

$$\begin{aligned} k_1 &\le \theta^+(|x'(t)|) = \max\{\theta(|x'(t)|), 0\} = \max\{\theta_1(t) + k, 0\} \\ &\le \max\{\theta_1(t), 0\} + \max\{k, 0\} = \theta_1(t) + \max\{k, 0\}, \end{aligned}$$

para algum $k_1 \in \mathbb{R}$ (pela proposição 11.14 , com $a = \theta_1(\cdot)$, $b = 0$), logo

$$k_1\ T \le \int_0^T \theta^+(|x'(t)|)\ dt \le \int_0^T \theta_1(t)\ dt + \int_0^T \max\{k,0\}\ dt = \int_0^T \theta_1(t)\ dt + T\ \max\{k,0\}$$

(pelo lema 11.12, com $D = [0,T]$, $f(\cdot) = k_1$, $g(\cdot) = \theta^+(|x'(\cdot)|)$ na primeira desigualdade e $f(\cdot) = \theta^+(|x'(\cdot)|)$, $g(\cdot) = \theta_1(\cdot) + \max\{k,0\}$ na segunda desigualdade). E como $\int_0^T \theta_1(t)\ dt$ existe em $[0,\infty]$, não podemos garantir que $\int_0^T \theta^+(|x'(t)|)\ dt \in \mathbb{R}$, nem que $\theta^+(|x'(\cdot)|) \in L^1([0,T], \mathbb{R}^n)$. Temos também

$$\begin{aligned} k_2 &\le \theta^-(|x'(t)|) = -\min\{\theta(|x'(t)|), 0\} = -\min\{\theta_1(t) + k, 0\} \\ &\le -\min\{\theta_1(t), 0\} - \min\{k, 0\} = 0 - \min\{k,0\} = -\min\{k,0\} \end{aligned}$$

para algum $k_2 \in \mathbb{R}$ (pela proposição 2.17 , com $a = \theta_1(\cdot)$, $b = 0$), então

$$k_2\ T \le \int_0^T \theta^-(|x'(t)|)\ dt \le \int_0^T [-\min\{k,0\}]\ dt = -T\ \min\{k,0\} < \infty$$

(pelo lema 11.12, com $D = [0,T]$, $f(\cdot) = k_2$, $g(\cdot) = \theta^-(|x'(\cdot)|)$ na primeira desigualdade e $f(\cdot) = \theta^-(|x'(\cdot)|)$, $g(\cdot) = -\min\{k,0\}$ na segunda desigualdade). Logo $\int_0^T \theta^-(|x'(t)|)\ dt \in \mathbb{R}$. E portanto, o integral $\int_0^T \theta(|x'(t)|)\ dt$ existe como pretendido.

Para $\varepsilon$ suficientemente pequeno, temos por hipótese $f(x(\cdot)) \ge f(z(\cdot))$. De facto, por (2.3), $x(\cdot) \in AC_\theta([0,T], \mathbb{R}^n)$, pois

$$\begin{aligned} \Lambda_\theta(x(\cdot)) &= \int_0^T \theta(|x'(t)|)\ dt = \int_0^T \theta\left(\frac{|z'(\tau)|}{1+u(\tau)}\right)(1+u(\tau))\ d\tau \\ &= \int_0^T \left[\theta\left(\frac{|z'(\tau)|}{1+u(\tau)}\right)(1+u(\tau)) - \theta(|z'(t)|)\right] d\tau + \int_0^T \theta(|z'(t)|)\ dt \\ &\le \int_0^T \frac{\varepsilon}{T}\ dt + \int_0^T \theta(|z'(t)|)\ dt \\ &\le \varepsilon + \int_0^T \theta(|z'(t)|)\ dt < \infty \text{ (pois } z(\cdot) \in AC_\theta([0,T], \mathbb{R}^n)\text{)}. \end{aligned}$$

Além disso, por (2.3), vem

$$\begin{aligned} \left|\Lambda_\theta(x(\cdot)) - \Lambda_\theta(z(\cdot))\right| &= \left|\int_0^T \theta\left(\frac{|z'(\tau)|}{1+u(\tau)}\right)(1+u(\tau))\, d\tau - \int_0^T \theta(|z'(t)|)\, d\tau\right| \\ &\le \int_0^T \left|\theta\left(\frac{|z'(\tau)|}{1+u(\tau)}\right)(1+u(\tau)) - \theta(|z'(t)|)\right| d\tau \\ &< \frac{\varepsilon}{T}\cdot T = \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, para $\varepsilon$ suficientemente pequeno, $\Lambda_\theta(x(\cdot))$ está suficientemente perto de $\Lambda_\theta(z(\cdot))$. Então, por hipótese, $f(x(\cdot)) \ge f(z(\cdot))$ para qualquer $x(\cdot)$ $AC$ admissível para $(\mathcal{P})$.

**(Parte 2 da demonstração do teorema 2.1 : o problema de controlo óptimo)**

Consideremos um problema de controlo óptimo (associado àquilo que foi dito anteriormente) cujo estado é $x(\cdot) = (s(\cdot), y(\cdot)) \in \mathbb{R}^2$ e cuja dinâmica é

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= 1 + u(t), \\ \frac{dy}{dt} &= \theta\left(\frac{|z'(t)|}{1+u(t)}\right)(1+u(t)). \end{aligned}$$

O controlo $u$ está sujeito a $|u(t)| \le \gamma(t)$ qs, e as condições de fronteira são $s(0)=0$, $s(T)=T$, $y(0)=0$. O problema de controlo óptimo referido é :

$$(P_c) \qquad \text{minimizar} \qquad \psi(s(T), y(T)) + \int_0^T \widetilde{L}(t, (s(t), y(t)), u(t))\, dt =: j((s(\cdot), y(\cdot)), u(\cdot))$$

com as restrições

$$\begin{aligned} u(t) &\in U(t) \text{ qs em } [0,T], \\ (s'(t), y'(t)) &= \phi(t, (s(t), y(t)), u(t)) \text{ qs em } [0,T], \\ (s(0), y(0)) &\in C_0, \ (s(T), y(T)) \in C_1, \end{aligned}$$

onde :

(a) $x : [0,T] \to \mathbb{R}^2$ com $x(t) = (s(t), y(t))$ é AC;
(b) $u : [0,T] \to \mathbb{R}$ é mensurável;
(c) $U : [0,T] \to \mathbb{R}$ é a multifunção dada por $U(t) := [-\gamma(t), \gamma(t)]$;
(d) $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é dada por $\psi(s,y) \equiv \psi(y) := \sigma\,|y - \Lambda_\theta(z(\cdot))|^2$;

(e) $\widetilde{L} : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $\widetilde{L}(t,(s,y),u) \equiv \widetilde{L}(t,s,u)$ é dada por

$$\widetilde{L}(t,s,u) := \begin{cases} L\left(s, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u) + r\,\theta\left(\frac{|z'(t)|}{1+u}\right)(1+u) & \text{se } \begin{cases} t \in [0,T] \backslash N \\ u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \\ \frac{z'(t)}{1+u} \in dom\ L(s, z(t), \cdot) \\ s \in [0,T] \end{cases} \\ \widetilde{L}(t,0,u) & \text{se } \begin{cases} t \in [0,T] \backslash N \\ u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \\ \frac{z'(t)}{1+u} \in dom\ L(s, z(t), \cdot) \\ s < 0 \end{cases} \\ \widetilde{L}(t,T,u) & \text{se } \begin{cases} t \in [0,T] \backslash N \\ u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \\ \frac{z'(t)}{1+u} \in dom\ L(s, z(t), \cdot) \\ s > T \end{cases} \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

com

$$N := \{t \in [0,T] : z'(t) \text{ não existe ou } z'(t) \notin dom\ L(t, z(t), \cdot)\};$$

(f) $\phi : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $\phi(t,(s,y),u) \equiv \phi(t,u)$ é dada por

$$\phi(t,u) := \begin{cases} \left(1+u, \theta\left(\frac{|z'(t)|}{1+u}\right)(1+u)\right) & \text{se } \begin{cases} t \in [0,T] \backslash N \\ u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \end{cases} \\ (0,0) & \text{caso contrário;} \end{cases} .$$

(g) $C_0 := \{(0,0)\}$ e $C_1 := \{T\} \times \mathbb{R}$.

O nosso objectivo é aplicar as condições necessárias do teorema 2.3, cujas hipóteses temos de verificar.

**(Parte 3 da demonstração do teorema 2.1 : admissibilidade das funções $\mathbf{u_0}(\cdot)$, $\mathbf{s_0}(\cdot)$ e $\mathbf{y_0}(\cdot)$)**

Consideremos as funções $u_0$, $s_0$, $y_0 : [0,T] \to \mathbb{R}$ definidas por

$$u_0(t) := 0,$$

$$s_0(t) := t,$$

$$y_0(t) := \int_0^t \theta(|z'(\tau)|)\ d\tau,$$

respectivamente, pelo que $(s_0(\cdot), y_0(\cdot))$ é o estado correspondente ao controlo $u_0(\cdot)$.

Notemos que as soluções das equações diferenciais

$$\frac{ds}{dt} = 1 + u(t), \tag{2.9}$$

$$\frac{dy}{dt} = \theta\left(\frac{|z'(t)|}{1+u(t)}\right)(1+u(t)) \tag{2.10}$$

são, respectivamente, da forma :

$$s(t) = s(0) + \int_0^t [1+u(\tau)]\ d\tau = \int_0^t [1+u(\tau)]\ d\tau = t + \int_0^t u(\tau)\ d\tau$$

e

$$y(t) = y(0) + \int_0^t \theta\left(\frac{|z'(\tau)|}{1+u(\tau)}\right)(1+u(\tau))\ d\tau = \int_0^t \theta\left(\frac{|z'(\tau)|}{1+u(\tau)}\right)(1+u(\tau))\ d\tau.$$

Comecemos por mostrar que qualquer solução da equação diferencial (2.9) é absolutamente contínua. De facto, como $s(\cdot) = \varphi(\cdot)$ e $\varphi(\cdot)$ é AC então $s(\cdot)$ é AC. Mostremos agora que qualquer solução da equação diferencial (2.10) é absolutamente contínua. De facto, de (2.3), vem

$$\Lambda_\theta(z(\cdot)) - \varepsilon < \int_0^T \theta\left(\frac{|z'(\tau)|}{1+u(\tau)}\right)(1+u(\tau))\ d\tau < \Lambda_\theta(z(\cdot)) + \varepsilon,$$

donde

$$\int_0^T \theta\left(\frac{|z'(\tau)|}{1+u(\tau)}\right)(1+u(\tau))\ d\tau \in \mathbb{R}$$

(pois $z(\cdot) \in AC_\theta([0,T], \mathbb{R}^n)$) e a função

$$t \longmapsto \theta\left(\frac{|z'(t)|}{1+u(t)}\right)(1+u(t))$$

está em $L^1([0,T], \mathbb{R}^n)$; logo pela proposição 18.7 (com $(a,b) = (0,T)$, $f(\cdot) = y(\cdot)$, $x = t$, $t = \tau$ e $g(\cdot)$ como sendo a função $t \longmapsto \theta\left(\frac{|z'(t)|}{1+u(t)}\right)(1+u(t))$) temos que a função $y(\cdot)$ é AC. Assim as soluções das equações diferenciais (2.9) e (2.10) são AC. Como $s_0(t) := t + \int_0^t u_0(\tau)\ d\tau$ é solução da equação diferencial

$$\frac{ds}{dt} = 1 + u_0(t)$$

e $y_0(t) := \int_0^t \theta\left(\frac{|z'(\tau)|}{1+u_0(\tau)}\right)(1+u_0(\tau))\ d\tau$ é solução da equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \theta\left(\frac{|z'(\tau)|}{1+u_0(\tau)}\right)(1+u_0(\tau)),$$

$s_0(\cdot)$ e $y_0(\cdot)$ são AC. Além disso, verificam-se as condições de fronteira : $s_0(0) = 0$, $s_0(T) = T$ e $y_0(0) = 0$.

Também, temos as restrições :

$$u_0(t) = 0 \in U(t) := [-\gamma(t), \gamma(t)], \text{ pois } \gamma(t) > 0 \text{ qs em } [0,T];$$

$$(s_0'(t), y_0'(t)) = (1, \theta(|z'(t)|)) = \phi(t, (s_0(t), y_0(t)), u(t)) \text{ qs em } [0,T];$$

$$(s_0(0), y_0(0)) \in C_0, \qquad (s_0(T), y_0(T)) = \left(T, \int_0^T \theta(|z'(\tau)|)\ d\tau\right) = (T, \Lambda_\theta(z(\cdot))) \in C_1.$$

Verifiquemos que o controlo $u_0(\cdot)$ e o seu correspondente estado $(s_0(\cdot), y_0(\cdot))$ resolvem o problema $(P_c)$. Consideremos um controlo qualquer $u(t) \in U(t)$ qs em $[0,T]$, e o seu estado correspondente $(s(\cdot), y(\cdot))$. Então

$s(\cdot)$, $y(\cdot)$ são AC, $|u(t)| \leq \gamma(t)$ qs em $[0,T]$, $s(t) = t + \int_0^t u(\tau)\ d\tau$, $y(t) = \int_0^t \theta\left(\frac{|z'(\tau)|}{1+u(\tau)}\right) d\tau$, $s(0) = 0$, $s(T) = T$, $y(0) = 0$ e $((s(\cdot), y(\cdot)), u(\cdot))$ verifica as restrições do problema $(P_c)$. Logo,

$$\begin{aligned}
j((s_0(\cdot), y_0(\cdot)), u_0(\cdot)) &= \psi(s_0(T), y_0(T)) + \int_0^T \widetilde{L}(t, (s_0(t), y_0(t)), u_0(t))\ dt \\
&= \sigma\ |y_0(T) - \Lambda_\theta(z(\cdot))|^2 + \int_0^T [L(s_0(t), z(t), z'(t)) + r\ \theta(|z'(t)|)]\ dt \\
&= \sigma\left|\int_0^T \theta(|z'(\tau)|)\ d\tau - \Lambda_\theta(z(\cdot))\right|^2 + \\
&\quad + \int_0^T L(s_0(t), z(t), z'(t))\ dt + r\int_0^T \theta(|z'(t)|)\ dt \\
&= \sigma\ |\Lambda_\theta(z(\cdot)) - \Lambda_\theta(z(\cdot))|^2 + \int_0^T L(t, z(t), z'(t))\ dt + r\ \Lambda_\theta(z(\cdot)) \\
&= \Lambda(z(\cdot)) + r\ \Lambda_\theta(z(\cdot)) \\
&= f(z(\cdot))
\end{aligned}$$

e por hipótese

$$f(x(\cdot)) \geq f(z(\cdot))\ \forall\ x(\cdot)\ AC_\theta([0,T], \mathbb{R}^n) \text{ admissível para } (\mathcal{P}),$$

donde

$$\begin{aligned}
j((s_0(\cdot), y_0(\cdot)), u_0(\cdot)) &= f(z(\cdot)) \leq f(x(\cdot)) \qquad (2.11)\\
&= \Lambda(x(\cdot)) + r\ \Lambda_\theta(x(\cdot)) + \sigma\ |\Lambda_\theta(x(\cdot)) - \Lambda_\theta(z(\cdot))|^2 \\
&= \int_0^T L(t, x(t), x'(t))\ dt + r\int_0^T \theta(|x'(t)|)\ dt + \\
&\quad + \sigma\left|\int_0^T \theta(|x'(t)|)\ dt - \int_0^T \theta(|z'(\tau)|)\ d\tau\right|^2 \\
&= \int_0^T L\left(\tau + \int_0^\tau u(s)\ ds, z(\tau), \frac{z'(\tau)}{1+u(\tau)}\right)(1+u(\tau))\ d\tau + \\
&\quad + r\int_0^T \theta\left(\frac{|z'(\tau)|}{1+u(\tau)}\right)(1+u(\tau))\ d\tau + \\
&\quad + \sigma\left|\int_0^T \theta\left(\frac{|z'(\tau)|}{1+u(\tau)}\right) d\tau - \Lambda_\theta(z(\cdot))\right|^2.
\end{aligned}$$

Vamos aplicar o lema 18.14 para provar a igualdade

$$\int_0^T L(t, x(t), x'(t))\ dt = \int_0^T L\left(\tau + \int_0^\tau u(s)\ ds, z(\tau), \frac{z'(\tau)}{1+u(\tau)}\right)(1+u(\tau))\ d\tau,$$

onde $t = \varphi(\tau)$, $\psi(t) = L(t, x(t), x'(t))$, $\varphi(a) = \varphi(0) = 0$, $\varphi(b) = \varphi(T) = T$, $a = 0$, $b = T$, $\psi(\varphi(\tau)) = L(\varphi(\tau), x(\varphi(\tau)), x'(\varphi(\tau)))$, $\varphi'(\tau) = 1 + u(\tau)$. Para isso $\varphi(\cdot)$ tem de ser monótona e o integral $\int_0^T L(t, x(t), x'(t))\ dt$ tem de existir. De facto, $\varphi(\cdot)$ é crescente e o integral $\int_0^T L(t, x(t), x'(t))\ dt$ existe se $\int_0^T L^-(t, x(t), x'(t))\ dt$ ou $\int_0^T L^+(t, x(t), x'(t))\ dt \in \mathbb{R}$, onde

$$L(\cdot, x(\cdot), x'(\cdot)) = L^+(\cdot, x(\cdot), x'(\cdot)) - L^-(\cdot, x(\cdot), x'(\cdot)),$$

sendo

$$L^+(\cdot, x(\cdot), x'(\cdot)) = \max\{L(\cdot, x(\cdot), x'(\cdot)), 0\}$$

e

$$L^-(\cdot, x(\cdot), x'(\cdot)) = -\min\{L(\cdot, x(\cdot), x'(\cdot)), 0\}.$$

Por hipótese,

$$L(t, s, v) \geq l(s),$$

para alguma função $l(\cdot)$ localmente limitada inferiormente. Ou seja, para cada $\overline{s} \in \Omega$, $\exists\, a \in \mathbb{R}$, $\exists\, \eta > 0$ :

$$l(s) \geq a,\ \forall\ s \in A := \overline{s} + \eta B.$$

Assim,

$$\exists\, a \in \mathbb{R} : L(t, s, v) \geq a,\ \forall\ t \in [0, T],\ \forall\ s \in A,\ \forall\ v \in \mathbb{R}^n.$$

Em particular, para quase todo $t \in [0, T]$, substituindo $s$ por $x(t)$, $v$ por $x'(t)$,

$$\exists\, a \in \mathbb{R} : L(t, x(t), x'(t)) \geq a, \text{ qs em } [0, T].$$

Isto é,

$$\exists\, a \in \mathbb{R} : L(t, x(t), x'(t)) - a \geq 0, \text{ qs em } [0, T].$$

Consideremos a função $L_1 : [0, T] \to [0, +\infty]$ dada por

$$L_1(t) := L(t, x(t), x'(t)) - a, \text{ qs em } [0, T].$$

Mostremos que o integral

$$\int_0^T L_1(t)\ dt$$

existe. Para isso, vamos usar a nota 11.7, com $D = [0, T]$, $f(\cdot) = L_1(\cdot)$, $f^+(\cdot) = L_1^+(\cdot)$, $f^-(\cdot) = L_1^-(\cdot)$. Como

$$L_1^+(t) = \max\{L_1(t), 0\} = L_1(t) \geq 0$$

e

$$L_1^-(t) = -\min\{L_1(t), 0\} = 0,$$

então

$$\int_0^T L_1^+(t)\ dt \quad \text{e} \quad \int_0^T L_1^-(t)\ dt$$

existem em $[0, \infty]$. Logo,

$$\int_0^T L_1^+(t)\ dt \geq \int_0^T 0\ dt = 0$$

e

$$\int_0^T L_1^-(t)\ dt \geq \int_0^T 0\ dt = 0,$$

pelo lema 11.12, com $D = [0, T]$, $f(\cdot) = 0$, $g(\cdot) = L_1^+(\cdot)$, $g(\cdot) = L_1^-(\cdot)$. Além disso, o integral

$$\int_0^T L_1(t)\ dt = \int_0^T L_1^+(t)\ dt - \int_0^T L_1^-(t)\ dt = \int_0^T L_1^+(t)\ dt - \int_0^T 0\ dt = \int_0^T L_1^+(t)\ dt \geq 0$$

existe em $[0,\infty]$. Notemos agora que

$$L_1(t) = L(t, x(t), x'(t)) - a \Leftrightarrow L(t, x(t), x'(t)) = L_1(t) + a.$$

E temos

$$\begin{aligned} a_1 &\leq L^+(t, x(t), x'(t)) = \max\{L(t, x(t), x'(t)), 0\} = \max\{L_1(t) + a, 0\} \\ &\leq \max\{L_1(t), 0\} + \max\{a, 0\} = L_1(t) + \max\{a, 0\}, \end{aligned}$$

para algum $a_1 \in \mathbb{R}$ (pela proposição 11.14 , com $a = L_1(\cdot)$, $b = 0$), logo

$$a_1\, T \leq \int_0^T L^+(t, x(t), x'(t))\ dt \leq \int_0^T L_1(t)\ dt + \int_0^T \max\{a, 0\}\ dt = \int_0^T L_1(t)\ dt + T\ \max\{a, 0\}$$

(pelo lema 11.12, com $D = [0,T]$, $f(\cdot) = a_1$, $g(\cdot) = L^+(\cdot, x(\cdot), x'(\cdot))$ na primeira desigualdade e $f(\cdot) = L^+(\cdot, x(\cdot), x'(\cdot))$, $g(\cdot) = L_1(\cdot) + \max\{a, 0\}$ na segunda desigualdade). E como $\int_0^T L_1(t)\ dt$ existe em $[0,\infty]$, não podemos garantir que $\int_0^T L^+(t, x(t), x'(t))\ dt \in \mathbb{R}$, nem que $L^+(\cdot, x(\cdot), x'(\cdot)) \in L^1([0,T], \mathbb{R}^n)$. Temos também

$$\begin{aligned} a_2 &\leq L^-(t, x(t), x'(t)) = -\min\{L(t, x(t), x'(t)), 0\} = -\min\{L_1(t) + a, 0\} \\ &\leq -\min\{L_1(t), 0\} - \min\{a, 0\} = 0 - \min\{a, 0\} = -\min\{a, 0\}, \end{aligned}$$

para algum $a_2 \in \mathbb{R}$ (pela proposição 2.17 , com $a = L_1(\cdot)$, $b = 0$), então

$$a_2\, T \leq \int_0^T L^-(t, x(t), x'(t))\ dt \leq \int_0^T [-\min\{a, 0\}]\ dt = -T\ \min\{a, 0\} < \infty$$

(pelo lema 11.12, com $D = [0,T]$, $f(\cdot) = a_2$, $g(\cdot) = L^-(\cdot, x(\cdot), x'(\cdot))$ na primeira desigualdade e $f(\cdot) = L^-(\cdot, x(\cdot), x'(\cdot))$, $g(\cdot) = -\min\{a, 0\}$ na segunda desigualdade). Logo, $\int_0^T L^-(t, x(t), x'(t))\ dt \in \mathbb{R}$. E portanto, o integral $\int_0^T L(t, x(t), x'(t))\ dt$ existe como queríamos mostrar. Logo o lado direito da desigualdade (2.11) é igual a :

$$\begin{aligned} &\int_0^T L\left(s(\tau), z(\tau), \frac{z'(\tau)}{1+u(\tau)}\right)(1+u(\tau))\ d\tau + r\ \int_0^T \theta\left(\frac{|z'(\tau)|}{1+u(\tau)}\right)(1+u(\tau))\ d\tau + \\ &+\sigma\ |y(T) - \Lambda_\theta(z(\cdot))|^2 \\ =\ &\int_0^T \left[L\left(s(\tau), z(\tau), \frac{z'(\tau)}{1+u(\tau)}\right)(1+u(\tau)) + r\ \theta\left(\frac{|z'(\tau)|}{1+u(\tau)}\right)(1+u(\tau))\right]\ d\tau + \\ &+\sigma\ |y(T) - \Lambda_\theta(z(\cdot))|^2 \\ =\ &\int_0^T \widetilde{L}(\tau, (s(\tau), y(\tau)), u(\tau))\ d\tau + \psi(s(T), y(T)) \\ =\ &j((s(\cdot), y(\cdot)), u(\cdot)). \end{aligned}$$

Então, $((s_0(\cdot), y_0(\cdot)), u_0(\cdot))$ resolve o problema $(P_c)$.

(**Nota :** para podermos aplicar o princípio do máximo (teorema 2.3 abaixo), as partes 4 a 18 da demonstração consistem na verificação da validade das suas hipóteses.)

**(Parte 4 da demonstração do teorema 2.1 : verificação da hipótese $(i)$ do teorema 2.3)**

Comecemos por verificar que : existe $\delta > 0$ tal que

$$x(t) = (s(t), y(t)) \in \Sigma_t := B((s_0(t), y_0(t)), \delta), \ \forall\, t \in [0, T],$$

para qualquer $x(\cdot) = (s(\cdot), y(\cdot))$ admissível e respectivo controlo $u(\cdot)$. Sabemos que, para cada $t \in [0, T]$,

$$B((s_0(t), y_0(t)), \delta) = \{(s(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : |(s(t), y(t)) - (s_0(t), y_0(t))| < \delta\}.$$

De facto, existe $\delta = \varepsilon_0\, T + \varepsilon$ tal que para qualquer controlo $u(\cdot)$ e correspondente estado $(s(\cdot), y(\cdot))$ vem :

$$\begin{aligned}
|(s(t), y(t)) - (s_0(t), y_0(t))| &= |(s(t) - s_0(t), y(t) - y_0(t))| \\
&= |s(t) - s_0(t)| + |y(t) - y_0(t)| \text{ (aplicando a norma da soma)} \\
&= \left| t + \int_0^t u(\tau)\, d\tau - t \right| + \\
&\quad + \left| \int_0^t \theta\left( \frac{|z'(\tau)|}{1 + u(\tau)} \right)(1 + u(\tau))\, d\tau - \int_0^t \theta(|z'(\tau)|)\, d\tau \right| \\
&\leq \int_0^t |u(\tau)|\, d\tau + \int_0^t \left| \theta\left( \frac{|z'(\tau)|}{1 + u(\tau)} \right)(1 + u(\tau))\, d\tau - \theta(|z'(\tau)|) \right| d\tau \\
&\leq \int_0^T |u(\tau)|\, d\tau + \int_0^T \left| \theta\left( \frac{|z'(\tau)|}{1 + u(\tau)} \right)(1 + u(\tau))\, d\tau - \theta(|z'(\tau)|) \right| d\tau \\
&< \int_0^T \varepsilon_0\, d\tau + \int_0^T \frac{\varepsilon}{T}\, d\tau \text{ (por (2.8) e (2.3))} \\
&= \varepsilon_0\, T + \varepsilon = \delta, \ \forall\, t \in [0, T],
\end{aligned}$$

isto é,

$$|(s(t), y(t)) - (s_0(t), y_0(t))| < \delta, \ \forall\, t \in [0, T].$$

Notemos que $\Sigma_t$ é a projecção do gráfico de um tubo $\Sigma$, pela definição 2.4, com

$$S := \{t : (t, (s, y)) \in \Sigma \text{ para algum } (s, y) \in \mathbb{R}^2\} = [0, T],$$

$$\Sigma_t := \{(s, y) : (t, (s, y)) \in \Sigma\} = B((s_0(t), y_0(t)), \delta) \ \forall t \in [0, T]$$

e

$$\Sigma := Graf(\Sigma_t) = Graf(B((s_0(t), y_0(t)), \delta)) = \{(t, b) : t \in [0, T], b \in B((s_0(t), y_0(t)), \delta)\}.$$

**(Parte 5 da demonstração do teorema 2.1 : verificação da hipótese $(ii)$ do teorema 2.3)**

Verifiquemos que : $U(\cdot)$ tem valores não-vazios e o seu gráfico,

$$Graf(U) := \{(t, u) \in [0, T] \times \mathbb{R} : t \in [0, T],\ u \in U(t)\}$$

é $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}$-mensurável. Pela construcção do problema $(P_c)$, $U : [0,T] \to \mathbb{R}$ é a multifunção dada por $U(t) := [-\gamma(t), \gamma(t)]$, mas

$$\begin{aligned} U(t) &= [-\gamma(t), \gamma(t)] = \{v \in \mathbb{R} : v \leq \gamma(t)\} \cap \{v \in \mathbb{R} : -v \leq \gamma(t)\} \\ &= \{v \in \mathbb{R} : h_1(t,v) = v \leq \gamma(t)\} \cap \{v \in \mathbb{R} : h_2(t,v) = -v \leq \gamma(t)\} \\ &= U_1(t) \cap U_2(t), \end{aligned}$$

para as multifunções $U_1$, $U_2 : [0,T] \to \mathbb{R}$ dadas por $U_1(t) := (-\infty, \gamma(t)]$ e $U_2(t) := [\gamma(t), +\infty)$, e para algumas funções carathéodory $h_1$, $h_2 : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$h_1(t,v) \equiv h_1(v) = v$$

e

$$h_2(t,v) \equiv h_2(v) = -v.$$

De facto, $h_1(\cdot)$ não depende de $t$, então $h_1(\cdot, v)$ é mensurável para cada $v \in \mathbb{R}$ e $h_1(t, \cdot)$ é contínua para cada $t \in [0,T]$ (pois $h_1(t,\cdot)$ é uma função linear). Analogamente, como $h_2(\cdot)$ não depende de $t$, então $h_2(\cdot, v)$ é mensurável para cada $v \in \mathbb{R}$ e $h_2(t,\cdot)$ é contínua para cada $t \in [0,T]$ (pois $h_2(t,\cdot)$ é uma função linear). Logo, $h_1(\cdot)$ e $h_2(\cdot)$ são funções carathéodory, pela definição 21.9, com $T = [0,T]$, $f(\cdot) = h_1(\cdot)$, $f(\cdot) = h_2(\cdot)$, $x = v$. E consequentemente, $h_1(\cdot)$ e $h_2(\cdot)$ são integrandos normais pela proposição 21.10. Então, como $\gamma(\cdot)$ é mensurável qs em $[0,T]$, temos que $U_1(\cdot)$ e $U_2(\cdot)$ são mensuráveis e têm valores fechados, pela proposição 21.6, com $S = [0,T]$, $n = 1$, $f(\cdot) = h_1(\cdot)$, $f(\cdot) = h_2(\cdot)$, $\alpha = \gamma(\cdot)$, $s = t$, $x = v$, $\Gamma(\cdot) = U_1(\cdot)$, $\Gamma(\cdot) = U_2(\cdot)$. Logo, $U(\cdot)$ é mensurável e tem valores fechados, pelo teorema 20.13, com $S = [0,T]$, $n = 1$, $\Gamma_1(\cdot) = U_1(\cdot)$, $\Gamma_2(\cdot) = U_2(\cdot)$, $\Gamma(\cdot) = U(\cdot)$. Finalmente,

$$\begin{aligned} Graf(U) &= \{(t,u) \in [0,T] \times \mathbb{R} : u \in U(t)\} \\ &= \{(t,u) \in [0,T] \times \mathbb{R} : u \in [-\gamma(t), \gamma(t)]\} \\ &= \bigcup_{t\in[0,T]} \{t\} \times [-\gamma(t), \gamma(t)] \end{aligned}$$

é $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}$-mensurável, pelo teorema 21.7, com $T = [0,T]$, $F(\cdot) = U(\cdot)$, $n = 1$. Evidentemente $u_0(\cdot)$ é uma selecção mensurável de $U(\cdot)$.

**(Parte 6 da demonstração do teorema 2.1 : verificação da hipótese $(iii)$ do teorema 2.3)**

Verifiquemos agora que : $\psi(\cdot)$ é localmente lipschitziana. Ou seja, pela definição 22.1, queremos mostrar que para cada $(s^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$, existem $\overline{\varepsilon} > 0$ e $L > 0$ tais que

$$|\psi(s_1, y_1) - \psi(s_2, y_2)| \leq L \; |(s_1, y_1) - (s_2, y_2)|, \; \forall \; (s_1, y_1), \; (s_2, y_2) \in B((s^*, y^*), \overline{\varepsilon}).$$

Mas como $\psi(\cdot)$ não depende de $s$, basta mostrar (ver proposição 2.14) que, para cada $y^* \in \mathbb{R}$, existem $\overline{\varepsilon} > 0$ e $L > 0$ tais que

$$|\psi(y_1) - \psi(y_2)| \leq L \; |y_1 - y_2|, \; \forall \; y_1, \; y_2 \in B(y^*, \overline{\varepsilon}).$$

De facto, fixado $y^* \in \mathbb{R}$, existem $\overline{\varepsilon} = 1$ e $L = 2\,\sigma\,(|y^*| + 1 + |\Lambda_\theta(z(\cdot))|)$ tais que para quaisquer $y_1, y_2 \in B(y^*, \varepsilon)$, temos :

$$\begin{aligned}
|\psi(y_1)-\psi(y_2)| &= \left|\sigma\ |y_1-\Lambda_\theta(z(\cdot))|^2-\sigma\ |y_2-\Lambda_\theta(z(\cdot))|^2\right| \\
&= \left|\sigma\ (y_1-\Lambda_\theta(z(\cdot)))^2-\sigma\ (y_2-\Lambda_\theta(z(\cdot)))^2\right| \\
&= \left|\sigma\ \left[y_1^2-2\ y_1\ \Lambda_\theta(z(\cdot))+(\Lambda_\theta(z(\cdot)))^2-y_2^2+2\ y_2\ \Lambda_\theta(z(\cdot))-(\Lambda_\theta(z(\cdot)))^2\right]\right| \\
&= |\sigma|\left|y_1^2-y_2^2-2\ \Lambda_\theta(z(\cdot))(y_1-y_2)\right| \\
&= \sigma\ |(y_1+y_2)(y_1-y_2)-2\ \Lambda_\theta(z(\cdot))(y_1-y_2)|\ \text{(pois } \sigma>0) \\
&= \sigma\ |(y_1+y_2-2\ \Lambda_\theta(z(\cdot)))(y_1-y_2)| \\
&\le \sigma\ (|y_1|+|y_2|+2\ |\Lambda_\theta(z(\cdot))|)\,|y_1-y_2| \\
&\le \sigma\ (|y^*|+\bar{\varepsilon}+|y^*|+\bar{\varepsilon}+2\ |\Lambda_\theta(z(\cdot))|)\,|y_1-y_2| \\
&= 2\ \sigma\ (|y^*|+\bar{\varepsilon}+|\Lambda_\theta(z(\cdot))|)\,|y_1-y_2| \\
&= 2\ \sigma\ (|y^*|+1+|\Lambda_\theta(z(\cdot))|)\,|y_1-y_2| \\
&= L\ |y_1-y_2|.
\end{aligned}$$

(Isto deve-se ao facto de $y_1$, $y_2 \in B(y^*, \bar{\varepsilon})$, pois assim vem

$$|y_1|-|y^*| \le |y_1-y^*| < \bar{\varepsilon} \Rightarrow |y_1| \le |y^*|+\bar{\varepsilon}$$

e

$$|y_2|-|y^*| \le |y_2-y^*| < \bar{\varepsilon} \Rightarrow |y_2| \le |y^*|+\bar{\varepsilon}.)$$

**(Parte 7 da demonstração do teorema 2.1 : verificação da hipótese $(v_1)$ do teorema 2.3)**

Mostremos que : para cada $x(\cdot)=(s(\cdot),y(\cdot))\in\mathbb{R}^2$, a função $\widetilde{L}(\cdot,x,\cdot)$ é $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}$-mensurável. Como $\widetilde{L}(\cdot)$ não depende de $y$, vamos mostrar que, para cada $s\in\mathbb{R}$, a função $\widetilde{L}(\cdot,s,\cdot)$ é $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}$-mensurável. Consideremos novamente o conjunto

$$N := \{t\in[0,T] : z'(t) \text{ não existe ou } z'(t) \notin dom\ L(t,z(t),\cdot)\},$$

o qual tem medida nula, pois $z'(t)$ existe qs em $[0,T]$ ou $z'(t)\notin dom\ L(t,z(t),\cdot)$ qs em $[0,T]$.

Fixemos $s\in[0,T]$. E consideremos as funções $g_1:[0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$g_1(t,u) := \begin{cases} L\left(s,z(t),\frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u) & \text{se } \begin{cases} t\in[0,T]\backslash N \\ u\in[-\varepsilon_0,\varepsilon_0] \\ \frac{z'(t)}{1+u}\in dom\ L(s,z(t),\cdot) \end{cases} \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e $g_2 : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g_2(t,u) := \begin{cases} r\,\theta\left(\frac{|z'(t)|}{1+u}\right)(1+u) & \text{se } \begin{cases} t \in [0,T] \setminus N \\ u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \end{cases} \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

Comecemos por mostrar que $g_1(\cdot)$ é $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensurável. Seja $f_s^1 : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ definida por

$$f_s^1(t,\zeta) := L(s, z(t), \zeta).$$

Por hipótese $L(\cdot)$ é própria e pela hipótese básica $(iv)$, a função $(s,v) \mapsto L(t,s,v)$ é sci, então pela nota 2.11, a função $v \mapsto L(t,s,v)$ é própria e sci (onde $f(\cdot)$ será a função $(s,v) \mapsto L(t,s,v)$ e $h_x(\cdot)$ será a função $v \mapsto L(t,s,v)$, $x = s$, $y = v$). Pela hipótese básica $(v)$, para cada $(t,s) \in [0,T] \times \Omega$, a função $L(t,s,\cdot)$ é convexa e o domínio $dom\ L(t,s,\cdot)$ é um conjunto aberto, convexo e não-vazio. Também, por hipótese, $z(\cdot) \in \Gamma(\overline{x}(\cdot))$, logo $z(t) \in \Omega$ para qualquer $t \in [0,T]$. Então (substituindo em $L(t,s,v)$, $t$ por $s$, $s$ por $z(t)$ e $v$ por $\zeta$) para cada $t \in [0,T]$ fixado, $f_s^1(t,\cdot)$ é própria, convexa, sci, o domínio é um conjunto aberto não-vazio, e seja qualquer $\zeta \in dom\ f_s^1(t,\cdot) = int\left(dom\ f_s^1(t,\cdot)\right)$. Fixemos $t \in [0,T]$ e definemos $f_{s,t}^1 : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ por

$$f_{s,t}^1(\zeta) := f_s^1(t,\zeta),$$

a qual, pelo que acabámos de referir, é própria, convexa, sci, o domínio é um conjunto aberto não-vazio e $\zeta \in int\left(dom\ f_{s,t}^1\right)$. Então a função $f_{s,t,\zeta}^1 : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ dada por

$$f_{s,t,\zeta}^1(u) := \begin{cases} f_{s,t}^1\left(\frac{\zeta}{1+u}\right)(1+u) & \text{se } u > -1 \\ \lim\limits_{u \searrow -1} f_{s,t}^1\left(\frac{\zeta}{1+u}\right)(1+u) & \text{se } u = -1 \\ +\infty & \text{se } u < -1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} L\left(s, z(t), \frac{\zeta}{1+u}\right)(1+u) & \text{se } u > -1 \\ \lim\limits_{u \searrow -1} L\left(s, z(t), \frac{\zeta}{1+u}\right)(1+u) & \text{se } u = -1 \\ +\infty & \text{se } u < -1 \end{cases}$$

é própria, convexa, sci, pela proposição 2.12, com $f(\cdot) = f_{s,t}^1(\cdot)$, $x = \zeta$, $\widetilde{f}_x(\cdot) = f_{s,t,\zeta}^1(\cdot)$. Além disso, pela mesma proposição, como $\zeta \in int\left(dom\ f_{s,t}^1\right)$, então $0 \in int\left(dom\ f_{s,t,\zeta}^1\right)$. Em particular, para cada $t \in [0,T] \setminus N$, substituindo $\zeta$ por $z'(t)$, temos que a função $f_{s,t,z'(t)}^1 : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ dada por

$$f_{s,t,z'(t)}^1(u) := \begin{cases} L\left(s, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u) & \text{se } u > -1 \\ \lim\limits_{u \searrow -1} L\left(s, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u) & \text{se } u = -1 \\ +\infty & \text{se } u < -1 \end{cases}$$

é própria, convexa, sci e $0 \in int\left(dom\ f_{s,t,z'(t)}^1\right)$. De facto, isso acontece, pois, por hipótese, $z(\cdot) \in \Gamma(\overline{x}(\cdot))$, então $\int_0^T L(t, z(t), z'(t))\, dt = \Lambda(z(\cdot)) \leq \Lambda(\overline{x}(\cdot)) \in \mathbb{R}$, para alguma função lipschitziana $\overline{x}(\cdot)$. Donde, pela nota 11.10, $L(t, z(t), z'(t)) \in \mathbb{R}$ qs (onde $f(\cdot)$ é a função $t \mapsto L(t, z(t), z'(t))$, $D = [0, T]$). O que significa que $z'(\cdot) \in dom\ L(t, z(t), \cdot)$ qs. Em particular, para $s \in [0, T]$ fixado, $z'(\cdot) \in dom\ L(s, z(t), \cdot)$ qs. Desta maneira, como $dom\ f^1_{s,t} = dom\ f^1_s(t, \cdot) = dom\ L(s, z(t), \cdot)$ é aberto, isto é, $dom\ f^1_{s,t} = int\left(dom\ f^1_{s,t}\right)$, e como, para cada $t \in [0, T] \backslash N$, $z'(t) \in dom\ f^1_{s,t} = int\left(dom\ f^1_{s,t}\right)$, então $0 \in int\left(dom\ f^1_{s,t,z'(t)}\right)$. Segue que a função $\widetilde{f}^1_{s,t,z'(t)} : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ dada por

$$\widetilde{f}^1_{s,t,z'(t)}(u) := \begin{cases} L\left(s, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u) & \text{se } u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \\ +\infty & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é própria, convexa, sci e $0 \in int\left(dom\ \widetilde{f}^1_{s,t,z'(t)}\right)$, uma vez que $0 < \varepsilon_0 < 1$, por hipótese. Seja $f^2_s : [0, T] \times \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ dada por

$$f^2_s(t, u) := \begin{cases} L\left(s, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u) & \text{se } \begin{cases} t \in [0, T] \backslash N \\ u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \end{cases} \\ 0 & \text{se } \begin{cases} t \in N \\ u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \end{cases} \\ +\infty & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Fixamos $t \in [0, T]$, que está em $N$ ou não. Se $t \in N$, então

$$f^2_s(t, u) = \begin{cases} 0 & \text{se } u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \\ +\infty & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo, $f^2_s(t, \cdot)$ é própria, convexa, sci e $int\left(dom\ f^2_s(t, \cdot)\right) = (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \neq \varnothing$. Se $t \notin N$, então

$$f^2_s(t, u) = \begin{cases} L\left(s, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u) & \text{se } u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \\ +\infty & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

E como $f^2_s(t, \cdot) = \widetilde{f}^1_{s,t,z'(t)}(\cdot)$, se $t \notin N$, temos que $f^2_s(t, \cdot)$ é própria, convexa, sci e $0 \in int\left(dom\ \widetilde{f}^1_{s,t,z'(t)}\right) = int\left(dom\ f^2_s(t, \cdot)\right)$. Portanto, para cada $t \in [0, T]$, $f^2_s(t, \cdot)$ é própria, convexa, sci e $int\left(dom\ f^2_s(t, \cdot)\right) \neq \varnothing$. Fixemos $u \in \mathbb{R}$. Então $u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ ou não. Se $u \notin [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, então

$$f^2_s(t, u) = +\infty,\ \forall\ t \in [0, T].$$

Neste caso, como $f^2_s(t, u)$ não depende de $t$, temos que $f^2_s(\cdot, u)$ é mensurável, para cada $u \in \mathbb{R} \backslash [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$. Fixemos $u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, então

$$f^2_s(t, u) = \begin{cases} L\left(s, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u) & \text{se } t \in [0, T] \backslash N \\ 0 & \text{se } t \in N, \end{cases}$$

isto é,

$$f^2_s(t, u) = L\left(s, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u) \ \text{ qs em } [0, T].$$

A função

$$t \mapsto L\left(s, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u)$$

é mensurável. Mostremos que, de facto, assim é. Definamos a função $\widetilde{f}_1 : [0,T] \times \mathbb{R}^{2n} \to (-\infty, +\infty]$ por

$$\widetilde{f}_1(t, \zeta_1, \zeta_2) := L(s, \zeta_1, \zeta_2).$$

Como, por hipótese, $L(\cdot)$ é sci nas $2^a$ e $3^a$ variáveis, então $L(s, \cdot, \cdot)$ é sci. Logo, $\widetilde{f}_1(\cdot)$ é um integrando normal, pela nota 21.2, com $f(\cdot) = \widetilde{f}_1(\cdot)$, $\Phi(\cdot) = L(s, \cdot, \cdot)$, $x = (\zeta_1, \zeta_2)$, $s = t$, $S = [0,T]$. Como $z(\cdot)$ é AC, então a função $\widetilde{x}_1 : [0,T] \to \mathbb{R}^{2n}$ dada por

$$\widetilde{x}_1(t) := \left(z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)$$

é mensurável. Fazendo a composta, temos que a função

$$t \mapsto \widetilde{f}_1(t, \widetilde{x}_1(t)) = \widetilde{f}_1\left(t, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right) = L\left(s, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)$$

é mensurável, pelo corolário 21.4, com $S = [0,T]$, $f(\cdot) = \widetilde{f}_1(\cdot)$, $x(\cdot) = \widetilde{x}_1(\cdot)$, $s = t$. Além disso, pelo teorema 10.21, com $D = [0,T]$, $f(\cdot)$ a função $t \mapsto L\left(s, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)$, $c = 1+u$, domínio de definição de $c\ f = [0,T]$, resulta que a função

$$t \mapsto L\left(s, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u)$$

é mensurável. Logo, pela observação 10.24, com $D = [0,T]$, $f(\cdot)$ a função $t \mapsto L\left(s, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u)$, $g(\cdot) = f_s^2(\cdot, u)$, resulta que $f_s^2(\cdot, u)$ é mensurável, para cada $u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$. Portanto, para cada $u \in \mathbb{R}$, $f_s^2(\cdot, u)$ é mensurável. Logo $f_s^2(\cdot)$ é um integrando normal, pelo corolário 21.5, com $S = [0,T]$, $n = 1$, $f(\cdot) = f_s^2(\cdot)$, $s = t$, $x = u$. Então $f_s^2(\cdot)$ é $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensurável, pelo teorema 21.3, com $S = [0,T]$, $n = 1$, $f(\cdot) = f_s^2(\cdot)$, $s = t$, $x = u$. Consequentemente, o conjunto

$$\begin{aligned} A_1 &:= \left\{(t,u) \in [0,T] \times \mathbb{R} : f_s^2(t,u) < +\infty\right\} \\ &= \left\{(t,u) \in [0,T] \times \mathbb{R} : f_s^2(t,u) \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{(t,u) \in ([0,T] \setminus N) \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] : \tfrac{z'(t)}{1+u} \in \mathit{dom}\ L(s, z(t), \cdot)\right\} \cup N \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \end{aligned}$$

é $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensurável, pelo corolário 10.18 (alínea (b)), com $D = [0,T] \times \mathbb{R}$, $f(\cdot) = f_s^2(\cdot)$, $x = (t,u)$. Então, a função $\widetilde{f_s^2} : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\widetilde{f_s^2}(t,u) \quad := \quad f_s^2(t,u)\,\chi_{A_1}(t,u) \quad = \quad \begin{cases} f_s^2(t,u) & \text{se } (t,u) \in A_1 \\ 0 & \text{se } (t,u) \notin A_1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \begin{cases} L\left(s, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u) & \text{se } \begin{cases} t \in [0,T] \setminus N \\ u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \\ \frac{z'(t)}{1+u} \in dom\ L(s, z(t), \cdot) \end{cases} \\ 0 & \text{se } \begin{cases} t \in N \\ u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \end{cases} \end{cases} \\ 0 \quad \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} L\left(s, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u) & \text{se } \begin{cases} t \in [0,T] \setminus N \\ u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \\ \frac{z'(t)}{1+u} \in dom\ L(s, z(t), \cdot) \end{cases} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensurável em $[0,T] \times \mathbb{R}$, pelo lema 2.6, com $f(\cdot) = f_s^2(\cdot)$, $D = [0,T] \times \mathbb{R}$, $D_0 = A_1$, $t = (t,u)$, $g(\cdot) = \widetilde{f_s^2}(\cdot)$. Mas $\widetilde{f_s^2}(\cdot) = g_1(\cdot)$, então pela nota 10.24, com $f(\cdot) = \widetilde{f_s^2}(\cdot)$, $g(\cdot) = g_1(\cdot)$ e $D = [0,T] \times \mathbb{R}$, temos que $g_1(\cdot)$ é $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensurável em $[0,T] \times \mathbb{R}$.

Agora vamos mostrar que $g_2(\cdot)$ é $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensurável. Por hipótese, $\theta(\cdot) \in C^1([0,+\infty), \mathbb{R})$ é estritamente convexa e estritamente crescente, então $\theta(\cdot)$ é contínua em todos os pontos de $[0,+\infty)$, pela proposição 16.2, com $X = [0,+\infty)$ e $f(\cdot) = \theta(\cdot)$. Logo, $\theta(\cdot)$ é sci, pela nota 6.27, com $E = [0,+\infty)$ e $f(\cdot) = \theta(\cdot)$. Definemos a função $h_s^1 : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to (-\infty,+\infty]$ por

$$h_s^1(t,\zeta) := r\ \theta(|\zeta|)\text{, onde } r \geq 0 \text{ é a constante do enunciado.}$$

Para cada $t \in [0,T]$ fixado, $h_s^1(t,\cdot)$ é própria, convexa, sci e o seu domínio $dom\ h_s^1(t,\cdot) = \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto não-vazio (pois é a composição das funções $\zeta \mapsto |\zeta|$ e $\zeta_1 \mapsto r\ \theta(\zeta_1)$). Seja qualquer $\zeta \in dom\ h_s^1(t,\cdot) = int\left(dom\ h_s^1(t,\cdot)\right) = \mathbb{R}^n$. Fixemos $t \in [0,T]$ e definemos $h_{s,t}^1 : \mathbb{R}^n \to (-\infty,+\infty]$ por

$$h_{s,t}^1(\zeta) := h_s^1(t,\zeta),$$

a qual, pelo que acabámos de dizer, é própria, convexa, sci, e $\zeta \in int\left(dom\ h_{s,t}^1\right) = dom\ h_{s,t}^1 = dom\ h_s^1(t,\cdot) = \mathbb{R}^n$ (isto é, o seu domínio é um conjunto aberto não-vazio). Então a função

$h^1_{s,t,\zeta} : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ dada por

$$h^1_{s,t,\zeta}(u) := \begin{cases} h^1_{s,t}\left(\frac{\zeta}{1+u}\right)(1+u) & \text{se } u > -1 \\ \lim\limits_{u \searrow -1} h^1_{s,t}\left(\frac{\zeta}{1+u}\right)(1+u) & \text{se } u = -1 \\ +\infty & \text{se } u < -1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} r\,\theta\left(\left|\frac{\zeta}{1+u}\right|\right)(1+u) & \text{se } u > -1 \\ \lim\limits_{u \searrow -1} r\,\theta\left(\left|\frac{\zeta}{1+u}\right|\right)(1+u) & \text{se } u = -1 \\ +\infty & \text{se } u < -1 \end{cases}$$

é própria, convexa, sci, pela proposição 2.12, com $f(\cdot) = h^1_{s,t}(\cdot)$, $x = \zeta$, $\widetilde{f}_x(\cdot) = h^1_{s,t,\zeta}(\cdot)$. Além disso, pela mesma proposição, como $\zeta \in int\left(dom\ h^1_{s,t}\right)$, então $0 \in int\left(dom\ h^1_{s,t,\zeta}\right)$. Em particular, para cada $t \in [0,T] \setminus N$, substituindo $\zeta$ por $z'(t)$, temos que a função $h^1_{s,t,z'(t)} : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ dada por

$$h^1_{s,t,z'(t)}(u) := \begin{cases} r\,\theta\left(\left|\frac{z'(t)}{1+u}\right|\right)(1+u) & \text{se } u > -1 \\ \lim\limits_{u \searrow -1} r\,\theta\left(\left|\frac{z'(t)}{1+u}\right|\right)(1+u) & \text{se } u = -1 \\ +\infty & \text{se } u < -1 \end{cases}$$

é própria, convexa, sci e $0 \in int\left(dom\ h^1_{s,t,z'(t)}\right)$. De facto, isso acontece, pois, por hipótese, $z(\cdot) \in AC_\theta([0,T], \mathbb{R}^n)$, então $\int_0^T \theta(|z'(t)|)\,dt < +\infty$. Donde, pela nota 11.10, $\theta(|z'(t)|) \in \mathbb{R}$ qs (onde $f(\cdot)$ é a função $t \mapsto \theta(|z'(t)|)$, $D = [0,T]$). O que significa que $z'(t) \in dom\ \theta(|\cdot|)$ qs. Desta maneira, como $dom\ h^1_{s,t} = dom\ h^1_s(t,\cdot) = dom\ \theta(|\cdot|) = \mathbb{R}^n$ é aberto, isto é, $dom\ h^1_{s,t} = int\left(dom\ h^1_{s,t}\right)$, e como, para cada $t \in [0,T] \setminus N$, $z'(t) \in dom\ h^1_{s,t} = int\left(dom\ h^1_{s,t}\right)$, então $0 \in int\left(dom\ h^1_{s,t,z'(t)}\right)$. O que implica que a função $\widetilde{h}^1_{s,t,z'(t)} : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ dada por

$$\widetilde{h}^1_{s,t,z'(t)}(u) := \begin{cases} r\,\theta\left(\left|\frac{z'(t)}{1+u}\right|\right)(1+u) & \text{se } u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \\ +\infty & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é própria, convexa, sci e $0 \in int\left(dom\ \widetilde{h}^1_{s,t,z'(t)}\right)$, uma vez que $0 < \varepsilon_0 < 1$, por hipótese. Seja

$h_s^2 : [0,T] \times \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ dada por

$$h_s^2(t,u) := \begin{cases} r\ \theta\left(\left|\frac{z'(t)}{1+u}\right|\right)(1+u) & \text{se } \begin{cases} t \in [0,T] \backslash N \\ u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \end{cases} \\ 0 & \text{se } \begin{cases} t \in N \\ u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \end{cases} \\ +\infty & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Fixamos $t \in [0,T]$, que está em $N$ ou não. Se $t \in N$, então

$$h_s^2(t,u) = \begin{cases} 0 & \text{se } u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \\ +\infty & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo, $h_s^2(t,\cdot)$ é própria, convexa, sci e $int\left(dom\ h_s^2(t,\cdot)\right) = (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \neq \varnothing$. Se $t \notin N$, então

$$h_s^2(t,u) = \begin{cases} r\ \theta\left(\left|\frac{z'(t)}{1+u}\right|\right)(1+u) & \text{se } u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \\ +\infty & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

E como $h_s^2(t,\cdot) = \widetilde{h}^1_{s,t,z'(t)}(\cdot)$, se $t \notin N$, temos que $h_s^2(t,\cdot)$ é própria, convexa, sci e $0 \in int\left(dom\ \widetilde{h}^1_{s,t,z'(t)}\right) = int\left(dom\ h_s^2(t,\cdot)\right)$. Portanto, para cada $t \in [0,T]$, $h_s^2(t,\cdot)$ é própria, convexa, sci e $int\left(dom\ h_s^2(t,\cdot)\right) \neq \varnothing$. Fixemos $u \in \mathbb{R}$. Então $u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ ou não. Se $u \notin [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, então

$$h_s^2(t,u) = +\infty,\ \forall\ t \in [0,T].$$

Neste caso, como $h_s^2(t,u)$ não depende de $t$, temos que $h_s^2(\cdot,u)$ é mensurável, para cada $u \in \mathbb{R} \backslash [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$. Fixemos $u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, então

$$h_s^2(t,u) = \begin{cases} r\ \theta\left(\left|\frac{z'(t)}{1+u}\right|\right)(1+u) & \text{se } t \in [0,T] \backslash N \\ 0 & \text{se } t \in N, \end{cases}$$

isto é,

$$h_s^2(t,u) = r\ \theta\left(\left|\frac{z'(t)}{1+u}\right|\right)(1+u) \ \text{ qs em} [0,T].$$

A função

$$t \mapsto r\ \theta\left(\left|\frac{z'(t)}{1+u}\right|\right)(1+u)$$

é mensurável. Mostremos que, de facto, assim é. Relembremos a função $h_s^1 : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ dada por

$$h_s^1(t,\zeta) := r\ \theta(|\zeta|)\,, \text{ onde } r \geq 0 \text{ é a constante do enunciado.}$$

Como $\zeta \mapsto r\ \theta(|\zeta|)$ é contínua, pois é o produto entre a composição de duas funções contínuas ($\zeta \mapsto |\zeta|$ e $\zeta_1 \mapsto r\ \theta(\zeta_1)$) e uma constante, então é sci. E portanto, $r\ \theta(|\cdot|)$ é sci. Logo, $h_s^1(\cdot)$ é um integrando normal, pela nota 21.2, com $f(\cdot) = h_s^1(\cdot)$, $\Phi(\cdot) = r\ \theta(|\cdot|)$, $x = \zeta$, $s = t$, $S = [0,T]$. Como $z(\cdot)$ é AC, então a função $\widetilde{y} : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$\widetilde{y}(t) := \frac{z'(t)}{1+u}$$

é mensurável. Fazendo a composta, temos que a função

$$t \mapsto h_s^1(t, \widetilde{y}(t)) = h_s^1\left(t, \frac{z'(t)}{1+u}\right) = r\ \theta\left(\left|\frac{z'(t)}{1+u}\right|\right)$$

é mensurável, pelo corolário 21.4, com $S = [0,T]$, $f(\cdot) = h_s^1(\cdot)$, $x(\cdot) = \widetilde{y}(\cdot)$, $s = t$. Além disso, pelo teorema 10.21, com $D = [0,T]$, $f(\cdot)$ a função $t \mapsto r\ \theta\left(\left|\frac{z'(t)}{1+u}\right|\right)$, $c = 1+u$, domínio de definição de $c\ f = [0,T]$, resulta que a função

$$t \mapsto r\ \theta\left(\left|\frac{z'(t)}{1+u}\right|\right)(1+u)$$

é mensurável. Logo, pela observação 10.24, com $D = [0,T]$, $f(\cdot)$ a função $t \mapsto r\ \theta\left(\left|\frac{z'(t)}{1+u}\right|\right)(1+u)$, $g(\cdot) = h_s^2(\cdot, u)$, resulta que $h_s^2(\cdot, u)$ é mensurável, para cada $u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$. Portanto, para cada $u \in \mathbb{R}$, $h_s^2(\cdot, u)$ é mensurável. Logo $h_s^2(\cdot)$ é um integrando normal, pelo corolário 21.5, com $S = [0,T]$, $n = 1$, $f(\cdot) = h_s^2(\cdot)$, $s = t$, $x = u$. Então $h_s^2(\cdot)$ é $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensurável, pelo teorema 21.3, com $S = [0,T]$, $n = 1$, $f(\cdot) = h_s^2(\cdot)$, $s = t$, $x = u$. Além disso, o conjunto

$$\begin{aligned}
B_1 &:= \left\{(t,u) \in [0,T] \times \mathbb{R} : h_s^2(t,s) < +\infty\right\} \\
&= \left\{(t,u) \in [0,T] \times \mathbb{R} : h_s^2(t,s) \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left(([0,T] \backslash N) \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]\right) \cup \left(N \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]\right) \\
&= [0,T] \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]
\end{aligned}$$

é $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensurável, pelo corolário 10.18 (alínea (b)), com $D = [0,T] \times \mathbb{R}$, $f(\cdot) = h_s^2(\cdot)$, $x = (t,u)$. Então, a função $\widetilde{h}_s^2 : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\widetilde{h}_s^2(t,u) := h_s^2(t,u)\,\chi_{B_1}(t,u) = \begin{cases} h_s^2(t,u) & \text{se } (t,u) \in B_1 \\ 0 & \text{se } (t,u) \notin B_1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \begin{cases} r\ \theta\left(\left|\frac{z'(t)}{1+u}\right|\right)(1+u) & \text{se } \begin{cases} t \in [0,T] \backslash N \\ u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \end{cases} \\ 0 & \text{se } \begin{cases} t \in N \\ u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \end{cases} \end{cases} \\ 0 \quad \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} r\ \theta\left(\left|\frac{z'(t)}{1+u}\right|\right)(1+u) & \text{se } \begin{cases} t \in [0,T] \backslash N \\ u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \end{cases} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensurável em $[0,T] \times \mathbb{R}$, pelo lema 2.6, com $f(\cdot) = h_s^2(\cdot)$, $D = [0,T] \times \mathbb{R}$, $D_0 = B_1$, $t = (t,u)$, $g(\cdot) = \widetilde{h}_s^2(\cdot)$. Mas $\widetilde{h}_s^2(\cdot) = g_2(\cdot)$, então pela nota 10.24, com $f(\cdot) = \widetilde{h}_s^2(\cdot)$, $g(\cdot) = g_2(\cdot)$ e $D = [0,T] \times \mathbb{R}$, temos que $g_2(\cdot)$ é $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensurável em $[0,T] \times \mathbb{R}$.

Assim, como $g_1(\cdot)$ e $g_2(\cdot)$ são $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}$-mensuráveis em $[0,T]\times\mathbb{R}$, então $g_1(\cdot)+g_2(\cdot)$ é $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}$-mensurável em $[0,T]\times\mathbb{R}$, para cada $s\in[0,T]$ fixado, pelo teorema 10.22, com $f(\cdot)=g_1(\cdot)$, $g(\cdot)=g_2(\cdot)$, $D=[0,T]\times\mathbb{R}$. Isto é, a função

$$(t,u)\mapsto L\left(s,z(t),\frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u)+r\,\theta\left(\frac{|z'(t)|}{1+u}\right)(1+u)$$

é $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}$-mensurável se $t\in[0,T]\setminus N$, $u\in[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]$, $\frac{z'(t)}{1+u}\in dom\ L(s,z(t),\cdot)$, $s\in[0,T]$. E portanto, para cada $s\in[0,T]$, $\widetilde{L}(\cdot,s,\cdot)$ é $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}$-mensurável.

Fixemos $s<0$, então $\widetilde{L}(t,s,u)=\widetilde{L}(t,0,u)$, se $t\in[0,T]\setminus N$, $u\in[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]$, $\frac{z'(t)}{1+u}\in dom\ L(s,z(t),\cdot)$. E como $s=0\in[0,T]$ e já provámos que $\widetilde{L}(\cdot,s,\cdot)$ é $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}$-mensurável para cada $s\in[0,T]$, em particular $\widetilde{L}(\cdot,0,\cdot)$ é $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}$-mensurável. Isto é, $\widetilde{L}(\cdot,s,\cdot)$ é $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}$-mensurável se $s<0$.

Fixemos $s>T$, então $\widetilde{L}(t,s,u)=\widetilde{L}(t,T,u)$, se $t\in[0,T]\setminus N$, $u\in[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]$, $\frac{z'(t)}{1+u}\in dom\ L(s,z(t),\cdot)$. E como $s=T\in[0,T]$ e já provámos que $\widetilde{L}(\cdot,s,\cdot)$ é $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}$-mensurável para cada $s\in[0,T]$, em particular $\widetilde{L}(\cdot,T,\cdot)$ é $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}$-mensurável. Isto é, $\widetilde{L}(\cdot,s,\cdot)$ é $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}$-mensurável se $s>T$.

Logo, para cada $s\in\mathbb{R}$, a função $\widetilde{L}(\cdot,s,\cdot)$ é $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}$-mensurável.

**(Parte 8 da demonstração do teorema 2.1 : verificação da hipótese $(v_2)$ do teorema 2.3)**

Mostremos que : existe $k(\cdot):\{(t,u):t\in[0,T],u\in[-\gamma(t),\gamma(t)]\}\to(0,+\infty)$ $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}$-mensurável tal que para cada $(t,u)\in\{(t,u):t\in[0,T],u\in[-\gamma(t),\gamma(t)]\}$, $\widetilde{L}(t,\cdot,u)$ é lipschitziana em $\Sigma_t$, isto é,

$$\left|\widetilde{L}(t,(s_1,y_1),u)-\widetilde{L}(t,(s_2,y_2),u)\right|\leq k(t,u)\ \ |(s_1,y_1)-(s_2,y_2)|,$$

para quaisquer $(s_1,y_1)$, $(s_2,y_2)\in\Sigma_t:=B((s_0(t),y_0(t)),\delta)$. Mas como $\widetilde{L}(\cdot)$ não depende de $y$, basta mostrar (ver proposição 2.14) que existe $k(\cdot):\{(t,u):t\in[0,T],u\in[-\gamma(t),\gamma(t)]\}\to(0,+\infty)$ $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}$-mensurável tal que para cada $(t,u)\in\{(t,u):t\in[0,T],u\in[-\gamma(t),\gamma(t)]\}$, $\widetilde{L}(t,\cdot,u)$ é lipschitziana em $\widetilde{\Sigma}_t:=B(s_0(t),\delta)=B(t,\delta)$, isto é,

$$\left|\widetilde{L}(t,s_1,u)-\widetilde{L}(t,s_2,u)\right|\leq k(t,u)\ \ |s_1-s_2|,\ \forall s_1,\ s_2\in\widetilde{\Sigma}_t:=B(s_0(t),\delta)=B(t,\delta).$$

De facto, para cada $(t,u)$ em $\{(t,u):t\in[0,T],u\in[-\gamma(t),\gamma(t)]\}$, existe $k(\cdot):\{(t,u):t\in[0,T],u\in[-\gamma(t),\gamma(t)]\}\to(0,+\infty)$ $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}$-mensurável dada por

$$k(t,u):=\begin{cases} c_0'\ \left|L\left(t,z(t),\frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u)\right|+c_1'\ |1+u| & \text{se } \begin{cases} t\in[0,T]\setminus N\\ u\in[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]\\ \frac{z'(t)}{1+u}\in dom\ L(t,z(t),\cdot)\end{cases}\\ 1 & \text{caso contrário,}\end{cases}$$

para alguns $c_0'$, $c_1'\in\mathbb{R}^+$ tal que para quaisquer $s_1$, $s_2\in\widetilde{\Sigma}_t:=B(t,\delta)$, temos :

$$\left|\widetilde{L}(t,s_1,u)-\widetilde{L}(t,s_2,u)\right|\leq k(t,u)\ \ |s_1-s_2|.$$

Mostremos que, na verdade, isso acontece. Notemos que $u\in[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]$, pois $[-\gamma(t),\gamma(t)]\subset[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]$. Fixemos primeiro $t\in[0,T]\setminus N$ e $u\in[-\gamma(t),\gamma(t)]$. Então, pela proposição 2.16 (ver (2.48)),

$$\frac{z'(t)}{1+u}\in dom\ L(t,z(t),\cdot).$$

E sejam então $s_1$, $s_2 \in [0,T]$ quaisquer, $\frac{z'(t)}{1+u} \in dom\ L(s_1, z(t), \cdot)$, $\frac{z'(t)}{1+u} \in dom\ L(s_2, z(t), \cdot)$, logo

$$\begin{aligned}
\left|\widetilde{L}(t,s_1,u) - \widetilde{L}(t,s_2,u)\right| &= \left|L\left(s_1, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u) + r\,\theta\left(\frac{|z'(t)|}{1+u}\right)(1+u) + \right. \\
&\quad \left. -L\left(s_2, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u) - r\,\theta\left(\frac{|z'(t)|}{1+u}\right)(1+u)\right| \\
&= \left|L\left(s_1, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right) - L\left(s_2, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)\right| \ |1+u| \\
&\leq \left(c_0' \left|L\left(t, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)\right| + c_1'\right) \ |s_1 - s_2| \ |1+u| \\
&= \left(c_0' \left|L\left(t, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right) \ |1+u|\right| + c_1' \ |1+u|\right) \ |s_1 - s_2| \\
&\leq k(t,u) \ |s_1 - s_2| .
\end{aligned}$$

(Isto acontece para qualquer $t$ com $\frac{z'(t)}{1+u} \in dom\ L(t, z(t), \cdot)$, pelo lema 2.13, com $t_0 = t$, $s = z(t)$, $v = \frac{z'(t)}{1+u}$, $\tau_1 = s_1$, $\tau_2 = s_2$.) Fixemos agora $t \in N$ e $u \in [-\gamma(t), \gamma(t)]$, então $\widetilde{L}(t,\cdot,u) \equiv 0$ é trivialmente lipschitziana em $\widetilde{\Sigma}_t$ para qualquer constante de Lipschitz, em particular é lipschitziana para $k(t,u) = 1$. Mostrámos portanto que, para cada $(t,u) \in Graf\ (U)$,

$$\left|\widetilde{L}(t,s_1,u) - \widetilde{L}(t,s_2,u)\right| \leq k(t,u) \ |s_1 - s_2|, \forall\ s_1,\ s_2 \in [0,T].$$

Isto é, $\widetilde{L}(t,\cdot,u)$ é lipschitziana em $[0,T]$. Se $s < 0$, então $\widetilde{L}(t,s,u) = \widetilde{L}(t,0,u)$, e como $s = 0 \in [0,T]$, temos que $\widetilde{L}(t,\cdot,u)$ é lipschitziana em $(-\delta, 0)$. Se $s > T$, então $\widetilde{L}(t,s,u) = \widetilde{L}(t,T,u)$, e como $s = T \in [0,T]$, temos que $\widetilde{L}(t,\cdot,u)$ é lipschitziana em $(T, T+\delta)$. Consequentemente, $\widetilde{L}(t,\cdot,u)$ é lipschitziana em $(-\delta, T+\delta)$ e em particular $\widetilde{L}(t,\cdot,u)$ é lipschitziana em $\widetilde{\Sigma}_t$.

Falta mostrar que $k(\cdot)$ é $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensurável. Consideremos as funções $k_1(\cdot) : [0,T] \times \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ dada por

$$k_1(t,u) := \begin{cases} c_0' \left|L\left(t, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u)\right| & \text{se } \begin{cases} t \in [0,T] \backslash N \\ u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \\ \frac{z'(t)}{1+u} \in dom\ L(t, z(t), \cdot) \end{cases} \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e $k_2(\cdot) : [0,T] \times \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ dada por

$$k_2(t,u) := \begin{cases} c_1' \ |1+u| & \text{se } \begin{cases} t \in [0,T] \backslash N \\ u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \end{cases} \\ 1 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Comecemos por mostrar que $k_1(\cdot)$ é $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensurável. Seja $a^1 : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ definida por

$$a^1(t,\zeta) := L(t, z(t), \zeta).$$

Por hipótese $L(\cdot)$ é própria e pela hipótese básica $(iv)$, a função $(s,v) \mapsto L(t,s,v)$ é sci, então pela nota 2.11, a função $v \mapsto L(t,s,v)$ é própria e sci (onde $f(\cdot)$ será a função $(s,v) \mapsto L(t,s,v)$ e $h_x(\cdot)$ será a função

$v \mapsto L(t,s,v)$, $x = s$, $y = v$). Pela hipótese básica (v), para cada $(t,s) \in [0,T] \times \Omega$, a função $L(t,s,\cdot)$ é convexa e o domínio *dom* $L(t,s,\cdot)$ é um conjunto aberto, convexo e não-vazio. Também, por hipótese, $z(\cdot) \in \Gamma(\overline{x}(\cdot))$, logo $z(t) \in \Omega$ para qualquer $t \in [0,T]$. Então (substituindo em $L(t,s,v)$, $s$ por $z(t)$ e $v$ por $\zeta$) para cada $t \in [0,T]$ fixado, $a^1(t,\cdot)$ é própria, convexa, sci, o domínio é um conjunto aberto não-vazio, e seja qualquer $\zeta \in int\left(dom\ a^1(t,\cdot)\right)$. Fixemos $t \in [0,T]$ e definemos $a_t^1 : \mathbb{R}^n \to (-\infty,+\infty]$ por

$$a_t^1(\zeta) := a^1(t,\zeta),$$

a qual, pelo que acabámos de referir, é própria, convexa, sci, o domínio é um conjunto aberto não-vazio e $\zeta \in int\left(dom\ a^1\right)$. Então a função $a_{t,\zeta}^1 : \mathbb{R} \to (-\infty,+\infty]$ dada por

$$a_{t,\zeta}^1(u) := \begin{cases} a_t^1\left(\frac{\zeta}{1+u}\right)(1+u) & \text{se } u > -1 \\ \lim\limits_{u \searrow -1} a_t^1\left(\frac{\zeta}{1+u}\right)(1+u) & \text{se } u = -1 \\ +\infty & \text{se } u < -1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} L\left(t, z(t), \frac{\zeta}{1+u}\right)(1+u) & \text{se } u > -1 \\ \lim\limits_{u \searrow -1} L\left(t, z(t), \frac{\zeta}{1+u}\right)(1+u) & \text{se } u = -1 \\ +\infty & \text{se } u < -1 \end{cases}$$

é própria, convexa, sci, pela proposição 2.12, com $f(\cdot) = a_t^1(\cdot)$, $x = \zeta$, $\widetilde{f}_x(\cdot) = a_{t,\zeta}^1(\cdot)$. Além disso, pela mesma proposição, como $\zeta \in int\left(dom\ a_t^1\right)$, então $0 \in int\left(dom\ a_{t,\zeta}^1\right)$. Em particular, para cada $t \in [0,T]\backslash N$, substituindo $\zeta$ por $z'(t)$, temos que a função $a_{t,z'(t)}^1 : \mathbb{R} \to (-\infty,+\infty]$ dada por

$$a_{t,z'(t)}^1(u) := \begin{cases} L\left(t, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u) & \text{se } u > -1 \\ \lim\limits_{u \searrow -1} L\left(t, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u) & \text{se } u = -1 \\ +\infty & \text{se } u < -1 \end{cases}$$

é própria, convexa, sci e $0 \in int\left(dom\ a_{t,z'(t)}^1\right)$. De facto, isso acontece, pois, por hipótese, $z(\cdot) \in \Gamma(\overline{x}(\cdot))$, então $\int_0^T L(t,z(t),z'(t))\,dt = \Lambda(z(\cdot)) \leq \Lambda(\overline{x}(\cdot)) \in \mathbb{R}$, para alguma função lipschitziana $\overline{x}(\cdot)$. Donde, pela nota 11.10, $L(t,z(t),z'(t)) \in \mathbb{R}$ qs (onde $f(\cdot)$ é a função $t \mapsto L(t,z(t),z'(t))$, $D = [0,T]$). O que significa que $z'(\cdot) \in dom\ L(t,z(t),\cdot)$ qs. Desta maneira, como $dom\ a_t^1 = dom\ a^1(t,\cdot) = dom\ L(t,z(t),\cdot)$ é aberto, isto é, $dom\ a_t^1 = int\left(dom\ a_t^1\right)$, e como, para cada $t \in [0,T]\backslash N$, $z'(t) \in dom\ a_t^1 = int\left(dom\ a_t^1\right)$, então $0 \in int\left(dom\ a_{t,z'(t)}^1\right)$. Segue que a função $\widetilde{a}_{t,z'(t)}^1 : \mathbb{R} \to (-\infty,+\infty]$ dada por

$$\widetilde{a}_{t,z'(t)}^1(u) := \begin{cases} L\left(t, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u) & \text{se } u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \\ +\infty & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é própria, convexa, sci e $0 \in int\left(dom\ \widetilde{a}_{t,z'(t)}^1\right)$, uma vez que $0 < \varepsilon_0 < 1$, por hipótese. Seja

$a^2 : [0,T] \times \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ dada por

$$a^2(t,u) := \begin{cases} L\left(t, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u) & \text{se } \begin{cases} t \in [0,T] \setminus N \\ u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \end{cases} \\ 0 & \text{se } \begin{cases} t \in N \\ u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \end{cases} \\ +\infty & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Fixamos $t \in [0,T]$, que está em $N$ ou não. Se $t \in N$, então

$$a^2(t,u) = \begin{cases} 0 & \text{se } u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \\ +\infty & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo, $a^2(t,\cdot)$ é própria, convexa, sci e $int\left(dom\ a^2(t,\cdot)\right) = (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \neq \varnothing$. Se $t \notin N$, então

$$a^2(t,u) = \begin{cases} L\left(t, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u) & \text{se } u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \\ +\infty & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

E como $a^2(t,\cdot) = \widetilde{a}^1_{t,z'(t)}(\cdot)$, se $t \notin N$, temos que $a^2(t,\cdot)$ é própria, convexa, sci e $0 \in int\left(dom\ \widetilde{a}^1_{t,z'(t)}\right) = int\left(dom\ a^2(t,\cdot)\right)$. Portanto, para cada $t \in [0,T]$, $a^2(t,\cdot)$ é própria, convexa, sci e $int\left(dom\ a^2(t,\cdot)\right) \neq \varnothing$. Fixemos $u \in \mathbb{R}$. Então $u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ ou não. Se $u \notin [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, então

$$a^2(t,u) = +\infty, \ \forall\, t \in [0,T].$$

Neste caso, como $a^2(t,u)$ não depende de $t$, temos que $a^2(\cdot,u)$ é mensurável, para cada $u \in \mathbb{R} \setminus [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$. Fixemos $u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, então

$$a^2(t,u) = \begin{cases} L\left(t, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u) & \text{se } t \in [0,T] \setminus N \\ 0 & \text{se } t \in N, \end{cases}$$

isto é,

$$a^2(t,u) = L\left(t, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u) \ \text{qs em}\, [0,T].$$

A função

$$t \mapsto L\left(t, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u)$$

é mensurável. Mostremos que, de facto, assim é. Definamos a função $\widetilde{a}_1 : [0,T] \times \mathbb{R}^{2n} \to (-\infty, +\infty]$ por

$$\widetilde{a}_1(\tau, \zeta_1, \zeta_2) := L(t, \zeta_1, \zeta_2).$$

Como, por hipótese, $L(\cdot)$ é sci nas $2^a$ e $3^a$ variáveis, então $L(t,\cdot,\cdot)$ é sci. Logo, $\widetilde{a}_1(\cdot)$ é um integrando normal, pela nota 21.2, com $f(\cdot) = \widetilde{a}_1(\cdot)$, $\Phi(\cdot) = L(t,\cdot,\cdot)$, $x = (\zeta_1, \zeta_2)$, $s = t$, $S = [0,T]$. Como $z(\cdot)$ é AC, então a função $\widetilde{x}_1 : [0,T] \to \mathbb{R}^{2n}$ dada por

$$\widetilde{x}_1(t) := \left(z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)$$

é mensurável. Fazendo a composta, temos que a função

$$t \mapsto \widetilde{a}_1\left(t, \widetilde{x}_1(t)\right) = \widetilde{a}_1\left(t, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right) = L\left(t, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)$$

é mensurável, pelo corolário 21.4, com $S = [0,T]$, $f(\cdot) = \widetilde{a}_1(\cdot)$, $x(\cdot) = \widetilde{x}_1(\cdot)$, $s = t$. Além disso, pelo teorema 10.21, com $D = [0,T]$, $f(\cdot)$ a função $t \mapsto L\left(t, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)$, $c = 1+u$, domínio de definição de $c\, f = [0,T]$, resulta que a função

$$t \mapsto L\left(t, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u)$$

é mensurável. Logo, pela observação 10.24, com $D = [0,T]$, $f(\cdot)$ a função $t \mapsto L\left(t, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u)$, $g(\cdot) = a^2(\cdot, u)$, resulta que $a^2(\cdot, u)$ é mensurável, para cada $u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$. Portanto, para cada $u \in \mathbb{R}$, $a^2(\cdot, u)$ é mensurável. Logo $a^2(\cdot)$ é um integrando normal, pelo corolário 21.5, com $S = [0,T]$, $n = 1$, $f(\cdot) = a^2(\cdot)$, $s = t$, $x = u$. Então $a^2(\cdot)$ é $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensurável, pelo teorema 21.3, com $S = [0,T]$, $n = 1$, $f(\cdot) = a^2(\cdot)$, $s = t$, $x = u$. Consequentemente, o conjunto

$$\begin{aligned}
\widetilde{A}_1 &:= \left\{(t,u) \in [0,T] \times \mathbb{R} : a^2(t,u) < +\infty\right\} \\
&= \left\{(t,u) \in [0,T] \times \mathbb{R} : a^2(t,u) \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{(t,u) \in ([0,T] \backslash N) \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] : \tfrac{z'(t)}{1+u} \in dom\ L(t, z(t), \cdot)\right\} \cup N \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]
\end{aligned}$$

é $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensurável, pelo corolário 10.18 (alínea (b)), com $D = [0,T] \times \mathbb{R}$, $f(\cdot) = a^2(\cdot)$, $x = (t,u)$. Então, a função $\widetilde{a}^2 : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\widetilde{a}^2(t,u) := a^2(t,u)\chi_{\widetilde{A}_1}(t,u) = \begin{cases} a^2(t,u) & \text{se } (t,u) \in \widetilde{A}_1 \\ 0 & \text{se } (t,u) \notin \widetilde{A}_1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \begin{cases} L\left(t, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u) & \text{se } \begin{cases} t \in [0,T] \backslash N \\ u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \\ \frac{z'(t)}{1+u} \in dom\ L(t, z(t), \cdot) \end{cases} \\ 0 & \text{se } \begin{cases} t \in N \\ u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \end{cases} \end{cases} \\ 0 \quad \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} L\left(t, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u) & \text{se } \begin{cases} t \in [0,T] \backslash N \\ u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \\ \frac{z'(t)}{1+u} \in dom\ L(t, z(t), \cdot) \end{cases} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensurável em $[0,T] \times \mathbb{R}$, pelo lema 2.6, com $f(\cdot) = a^2(\cdot)$, $D = [0,T] \times \mathbb{R}$, $D_0 = \widetilde{A}_1$, $t = (t,u)$, $g(\cdot) = \widetilde{a}^2(\cdot)$. Logo, a função $a^3 : [0,T] \times \mathbb{R} \rightarrow [0,+\infty)$ dada por

$$a^3(t,u) := \left|\widetilde{a}^2(t,u)\right| = \begin{cases} \left|L\left(t, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u)\right| & \text{se } \begin{cases} t \in [0,T] \setminus N \\ u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \\ \frac{z'(t)}{1+u} \in dom\ L(t, z(t), \cdot) \end{cases} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensurável em $[0,T] \times \mathbb{R}$, pela proposição 10.26, com $D = [0,T] \times \mathbb{R}$, $f(\cdot) = \widetilde{a}^2(\cdot)$. Donde, a função $a^4 : [0,T] \times \mathbb{R} \rightarrow [0,+\infty)$ dada por

$$a^4(t,u) := c_0'\ a^3(t,u) = \begin{cases} c_0'\ \left|L\left(t, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u)\right| & \text{se } \begin{cases} t \in [0,T] \setminus N \\ u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \\ \frac{z'(t)}{1+u} \in dom\ L(t, z(t), \cdot) \end{cases} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensurável em $[0,T] \times \mathbb{R}$, pelo teorema 10.21, com $D = [0,T] \times \mathbb{R}$, $f(\cdot) = a^3(\cdot)$, $c = c_0'$, e o domínio de definição de $c\ f$ é $[0,T] \times \mathbb{R}$. Como $k_1(\cdot) = a^4(\cdot)$, então pela nota 10.24, com $f(\cdot) = a^4(\cdot)$, $g(\cdot) = k_1(\cdot)$ e $D = [0,T] \times \mathbb{R}$, temos que $k_1(\cdot)$ é $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensurável em $[0,T] \times \mathbb{R}$.

Mostremos agora que $k_2(\cdot)$ é $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensurável. Fixemos $t \in [0,T]$, que está em $N$ ou não. Se $t \in N$, então

$$k_2(t,u) = 1,\ \forall\ u \in \mathbb{R}.$$

Logo, $k_2(t,\cdot)$ é própria, convexa, sci e $int\,(dom\ k_2(t,\cdot)) \neq \varnothing$. Se $t \notin N$, então

$$k_2(t,u) = \begin{cases} c_1'\ |1+u| & \text{se } u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \\ 1 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo, $k_2(t,\cdot)$ é própria, convexa, sci e $int\,(dom\ k_2(t,\cdot)) \neq \varnothing$, pois quando $u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, $k_2(t,u) = c_1'\ |1+u|$ é o produto entre uma constante $(c_1')$ e o módulo de uma função linear $(1+u)$, e quando $u \notin [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, $k_2(t,u) = 1$ é uma função constante. E portanto, para cada $t \in [0,T]$, $k_2(t,\cdot)$ é própria, convexa, sci e $int\,(dom\ k_2(t,\cdot)) \neq \varnothing$.
Fixemos $u \in \mathbb{R}$. Então $u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ ou não. Se $u \notin [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, então

$$k_2(t,u) = 1,\ \forall\ t \in [0,T].$$

Como $k_2(t,u)$ não depende de $t$, neste caso, $k_2(\cdot,u)$ é mensurável, para cada $u \in \mathbb{R} \setminus [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$. Se $u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, então

$$k_2(t,u) = \begin{cases} c_1'\,|1+u| & \text{se } [0,T] \setminus N \\ 0 & \text{se } t \in N \end{cases}$$

Como $k_2(t,u)$ não depende de $t$, neste caso, $k_2(\cdot,u)$ é mensurável, para cada $u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$. Portanto, para cada $u \in \mathbb{R}$, $k_2(\cdot,u)$ é mensurável. Logo $k_2(\cdot)$ é um integrando normal, pelo corolário 21.5, com $S = [0,T]$, $n = 1$, $f(\cdot) = k_2(\cdot)$, $s = t$, $x = u$. Então $k_2(\cdot)$ é $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensurável, pelo teorema 21.3, com $S = [0,T]$, $n = 1$, $f(\cdot) = k_2(\cdot)$, $s = t$, $x = u$.

Assim, a função $k_3 : [0,T] \times \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ dada por

$$k_3(t,u) := k_1(t,u) + k_2(t,u) = \begin{cases} c_0' \left| L\left(t, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u) \right| + c_1' \, |1+u| & \text{se } \begin{cases} t \in [0,T] \setminus N \\ u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \\ \frac{z'(t)}{1+u} \in dom\ L(t, z(t), \cdot) \end{cases} \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensurável em $[0,T] \times \mathbb{R}$, pelo teorema 10.22, com $f(\cdot) = k_1(\cdot)$, $g(\cdot) = k_2(\cdot)$, $D = [0,T] \times \mathbb{R}$ e o domínio de definição de $(f+g)$ é $[0,T] \times \mathbb{R}$. Finalmente, a função $k_3 \,|_{Graf(U)}$: $Graf(U) \to (0,+\infty)$ dada por

$$k_3 \,|_{Graf(U)}(t,u) := \begin{cases} c_0' \left| L\left(t, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u) \right| + c_1' \, |1+u| & \text{se } \begin{cases} t \in [0,T] \setminus N \\ u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \\ \frac{z'(t)}{1+u} \in dom\ L(t, z(t), \cdot) \end{cases} \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensurável em $Graf(U)$, pelo lema 10.19 (alínea (a)), $f(\cdot) = k_3(\cdot)$, $D = [0,T] \times \mathbb{R}$ e $D_0 = Graf(U)$. Finalmente, como $k_3 \,|_{Graf(U)}(\cdot) = k(\cdot)$, então pela nota 10.24, com $f(\cdot) = k_3 \,|_{Graf(U)}(\cdot)$, $g(\cdot) = k(\cdot)$ e $D = Graf(U)$, temos que $k(\cdot)$ é $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensurável.

**(Parte 9 da demonstração do teorema 2.1 : verificação da hipótese $(v_3)$ do teorema 2.3)**

Além disso, função $t \mapsto k(t, u_0(t))$ é integrável. De facto, com $u = u_0(t) := 0$, vamos definir a função $k_0 : [0,T] \to (0,+\infty)$ por

$$k_0(t) := k(t, u_0(t)) = k(t,0) = \begin{cases} c_0' \, |L(t, z(t), z'(t))| + c_1' & \text{se } \begin{cases} t \in [0,T] \setminus N \\ u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \\ \frac{z'(t)}{1+u} \in dom\ L(t, z(t), \cdot) \end{cases} \\ 1 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como $z(\cdot) \in \Gamma_\theta(\overline{x}(\cdot)) := \Gamma(\overline{x}(\cdot)) \cap AC_\theta([0,T], \mathbb{R}^n)$, então a função $t \mapsto L(t, z(t), z'(t))$ pertence a $L^1([0,T])$, logo a função $k_0(\cdot)$ pertence a $L^1([0,T])$.

$\phi(\cdot)$ verifica as mesmas hipóteses que $\widetilde{L}(\cdot)$.

**(Parte 10 da demonstração do teorema 2.1 : verificação da hipótese $(iv_1)$ do teorema 2.3)**

Mostremos que : para cada $x(\cdot) = (s(\cdot), y(\cdot)) \in \mathbb{R}^2$, a função $\phi(\cdot, x, \cdot)$ é $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensurável. Como $\phi(\cdot)$ não depende de $s$, nem de $y$, vamos mostrar que $\phi(\cdot)$ é $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensurável. Assim, a função $\phi : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ é dada por

$$\phi(t,u) = (\phi_1(t,u), \phi_2(t,u)),$$

com $\phi_1 : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi_1(t,u) := \begin{cases} 1+u & \text{se } \begin{cases} t \in [0,T] \setminus N \\ u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \end{cases} \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e $\phi_2 : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi_2(t,u) := \begin{cases} \theta\left(\frac{|z'(t)|}{1+u}\right)(1+u) & \text{se } \begin{cases} t \in [0,T] \backslash N \\ u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \end{cases} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Mostremos primeiro que $\phi_1(\cdot)$ é $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensurável. Fixemos $t \in [0,T]$, que está em $N$ ou não. Se $t \in N$, então

$$\phi_1(t,u) = 0, \ \forall\ u \in \mathbb{R}.$$

Logo, $\phi_1(t,\cdot)$ é própria, convexa, sci e $int\,(dom\ \phi_1(t,\cdot)) \neq \varnothing$. Se $t \notin N$, então

$$\phi_1(t,u) = \begin{cases} 1+u & \text{se } u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo, $\phi_1(t,\cdot)$ é própria, convexa, sci e $int\,(dom\ \phi_1(t,\cdot)) \neq \varnothing$, pois quando $u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, $\phi_1(t,u) = 1+u$ é uma função linear, e quando $u \notin [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, $\phi_1(t,u) = 0$ é uma função constante. E portanto, para cada $t \in [0,T]$, $\phi_1(t,\cdot)$ é própria, convexa, sci e $int\,(dom\ \phi_1(t,\cdot)) \neq \varnothing$. Fixemos $u \in \mathbb{R}$. Então $u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ ou não. Se $u \notin [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, então

$$\phi_1(t,u) = 0, \ \forall\ t \in [0,T].$$

Como $\phi_1(t,u)$ não depende de $t$, neste caso, $\phi_1(\cdot,u)$ é mensurável, para cada $u \in \mathbb{R} \backslash [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$. Se $u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, então

$$\phi_1(t,u) = \begin{cases} 1+u & \text{se } t \in [0,T] \backslash N \\ 0 & \text{se } t \in N \end{cases}$$

Como $\phi_1(t,u)$ não depende de $t$, neste caso, $\phi_1(\cdot,u)$ é mensurável, para cada $u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$. Portanto, para cada $u \in \mathbb{R}$, $\phi_1(\cdot,u)$ é mensurável. Logo $\phi_1(\cdot)$ é um integrando normal, pelo corolário 21.5, com $S = [0,T]$, $n = 1$, $f(\cdot) = \phi_1(\cdot)$, $s = t$, $x = u$. Então $\phi_1(\cdot)$ é $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensurável, pelo teorema 21.3, com $S = [0,T]$, $n = 1$, $f(\cdot) = \phi_1(\cdot)$, $s = t$, $x = u$.

Vamos mostrar agora que $\phi_2(\cdot)$ é $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensurável. Por hipótese, $\theta(\cdot) \in C^1([0,+\infty), \mathbb{R})$ é estritamente convexa e estritamente crescente, então $\theta(\cdot)$ é contínua em todos os pontos de $[0,+\infty)$, pela proposição 16.2, com $X = [0,+\infty)$ e $f(\cdot) = \theta(\cdot)$. Logo, $\theta(\cdot)$ é sci, pela proposição 6.27, com $E = [0,+\infty)$ e $f(\cdot) = \theta(\cdot)$. Definemos a função $e^1 : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to (-\infty,+\infty]$ por

$$e^1(t,\zeta) := \theta(|\zeta|).$$

Para cada $t \in [0,T]$ fixado, $e^1(t,\cdot)$ é própria, convexa, sci e o seu domínio é um conjunto aberto não-vazio (pois é a composição das funções $\zeta \mapsto |\zeta|$ e $\zeta_1 \mapsto \theta(\zeta_1)$). Seja qualquer $\zeta \in dom\ e^1(t,\cdot) = int\left(dom\ e^1(t,\cdot)\right) = \mathbb{R}^n$. Fixemos $t \in [0,T]$ e definemos $e^1_t : \mathbb{R}^n \to (-\infty,+\infty]$ por

$$e^1_t(\zeta) := e^1(t,\zeta),$$

a qual, pelo que acabámos de dizer, é própria, convexa, sci, e $\zeta \in int\left(dom\ e^1_t\right) = dom\ e^1_t = dom\ e^1(t,\cdot) = \mathbb{R}^n$

(isto é, o seu domínio é um conjunto aberto não-vazio). Então a função $e^1_{t,\zeta} : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ dada por

$$e^1_{t,\zeta}(u) \quad := \quad \begin{cases} e^1_t\left(\frac{\zeta}{1+u}\right)(1+u) & \text{se } u > -1 \\ \lim\limits_{u \searrow -1} e^1_t\left(\frac{\zeta}{1+u}\right)(1+u) & \text{se } u = -1 \\ +\infty & \text{se } u < -1 \end{cases}$$

$$= \quad \begin{cases} \theta\left(\left|\frac{\zeta}{1+u}\right|\right)(1+u) & \text{se } u > -1 \\ \lim\limits_{u \searrow -1} \theta\left(\left|\frac{\zeta}{1+u}\right|\right)(1+u) & \text{se } u = -1 \\ +\infty & \text{se } u < -1 \end{cases}$$

é própria, convexa, sci, pela proposição 2.12, com $f(\cdot) = e^1_t(\cdot)$, $x = \zeta$, $\widetilde{f}_x(\cdot) = e^1_{t,\zeta}(\cdot)$. Além disso, pela mesma proposição, como $\zeta \in int\,(dom\ e^1_t)$, então $0 \in int\left(dom\ e^1_{t,\zeta}\right)$. Em particular, para cada $t \in [0,T] \setminus N$, substituindo $\zeta$ por $z'(t)$, temos que a função $e^1_{t,z'(t)} : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ dada por

$$e^1_{t,z'(t)}(u) := \begin{cases} \theta\left(\left|\frac{z'(t)}{1+u}\right|\right)(1+u) & \text{se } u > -1 \\ \lim\limits_{u \searrow -1} \theta\left(\left|\frac{z'(t)}{1+u}\right|\right)(1+u) & \text{se } u = -1 \\ +\infty & \text{se } u < -1 \end{cases}$$

é própria, convexa, sci e $0 \in int\left(dom\ e^1_{t,z'(t)}\right)$. De facto, isso acontece, pois, por hipótese, $z(\cdot) \in AC_\theta([0,T], \mathbb{R}^n)$, então $\int_0^T \theta(|z'(t)|)\, dt < +\infty$. Donde, pela nota 11.10, $\theta(|z'(t)|) \in \mathbb{R}$ qs (onde $f(\cdot)$ é a função $t \mapsto \theta(|z'(t)|)$, $D = [0,T]$). O que significa que $z'(t) \in dom\ \theta(|\cdot|)$ qs. Desta maneira, como $dom\ e^1_t = dom\ e^1(t,\cdot) = dom\ \theta(|\cdot|) = \mathbb{R}^n$ é aberto, isto é, $dom\ e^1_t = int\,(dom\ e^1_t)$, e como, para cada $t \in [0,T] \setminus N$, $z'(t) \in dom\ e^1_t = int\,(dom\ e^1_t)$, então $0 \in int\left(dom\ e^1_{t,z'(t)}\right)$. O que implica que a função $\widetilde{e}^1_{t,z'(t)} : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ dada por

$$\widetilde{e}^1_{t,z'(t)}(u) := \begin{cases} \theta\left(\left|\frac{z'(t)}{1+u}\right|\right)(1+u) & \text{se } u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \\ +\infty & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é própria, convexa, sci e $0 \in int\left(dom\ \widetilde{e}^1_{t,z'(t)}\right)$, uma vez que $0 < \varepsilon_0 < 1$, por hipótese. Seja $e^2 : [0,T] \times \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ dada por

$$e^2(t,u) := \begin{cases} \theta\left(\left|\frac{z'(t)}{1+u}\right|\right)(1+u) & \text{se } \begin{cases} t \in [0,T] \setminus N \\ u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \end{cases} \\ 0 & \text{se } \begin{cases} t \in N \\ u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \end{cases} \\ +\infty & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Fixamos $t \in [0,T]$, que está em $N$ ou não. Se $t \in N$, então

$$e^2(t,u) = \begin{cases} 0 & \text{se } u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \\ +\infty & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo, $e^2(t,\cdot)$ é própria, convexa, sci e $int\left(dom\ e^2(t,\cdot)\right) = (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \neq \varnothing$. Se $t \notin N$, então

$$e^2(t,u) = \begin{cases} \theta\left(\left|\frac{z'(t)}{1+u}\right|\right)(1+u) & \text{se } u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \\ +\infty & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

E como $e^2(t,\cdot) = \widetilde{e}^1_{t,z'(t)}(\cdot)$, se $t \notin N$, temos que $e^2(t,\cdot)$ é própria, convexa, sci e $0 \in int\left(dom\ \widetilde{e}^1_{t,z'(t)}\right) = int\left(dom\ e^2(t,\cdot)\right)$. Portanto, para cada $t \in [0,T]$, $e^2(t,\cdot)$ é própria, convexa, sci e $int\left(dom\ e^2(t,\cdot)\right) \neq \varnothing$. Fixemos $u \in \mathbb{R}$. Então $u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ ou não. Se $u \notin [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, então

$$e^2(t,u) = +\infty, \ \forall\ t \in [0,T].$$

Neste caso, como $e^2(t,u)$ não depende de $t$, temos que $e^2(\cdot,u)$ é mensurável, para cada $u \in \mathbb{R}\backslash[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$. Fixemos $u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, então

$$e^2(t,u) = \begin{cases} \theta\left(\left|\frac{z'(t)}{1+u}\right|\right)(1+u) & \text{se } t \in [0,T]\backslash N \\ 0 & \text{se } t \in N, \end{cases}$$

isto é,

$$e^2(t,u) = \theta\left(\left|\frac{z'(t)}{1+u}\right|\right)(1+u) \ \text{ qs em } [0,T].$$

A função

$$t \mapsto \theta\left(\left|\frac{z'(t)}{1+u}\right|\right)(1+u)$$

é mensurável. Mostremos que, de facto, assim é. Relembremos a função $e^1 : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ dada por

$$e^1(t,\zeta) := \theta(|\zeta|).$$

Como $\zeta \mapsto \theta(|\zeta|)$ é contínua, pois é a composição de duas funções contínuas ($\zeta \mapsto |\zeta|$ e $\zeta_1 \mapsto \theta(\zeta_1)$), então é sci. E portanto, $\theta(|\cdot|)$ é sci. Logo, $e^1(\cdot)$ é um integrando normal, pela nota 21.2, com $f(\cdot) = e^1(\cdot)$, $\Phi(\cdot) = \theta(|\cdot|)$, $x = \zeta$, $s = t$, $S = [0,T]$. Como $z(\cdot)$ é AC, então a função $\widetilde{y} : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$\widetilde{y}(t) := \frac{z'(t)}{1+u}$$

é mensurável. Fazendo a composta, temos que a função

$$t \mapsto e^1(t, \widetilde{y}(t)) = e^1\left(t, \frac{z'(t)}{1+u}\right) = \theta\left(\left|\frac{z'(t)}{1+u}\right|\right)$$

é mensurável, pelo corolário 21.4, com $S = [0,T]$, $f(\cdot) = e^1(\cdot)$, $x(\cdot) = \widetilde{y}(\cdot)$, $s = t$. Além disso, pelo teorema 10.21, com $D = [0,T]$, $f(\cdot)$ a função $t \mapsto \theta\left(\left|\frac{z'(t)}{1+u}\right|\right)$, $c = 1+u$, domínio de definição de $c\ f = [0,T]$, resulta que a função

$$t \mapsto \theta\left(\left|\frac{z'(t)}{1+u}\right|\right)(1+u)$$

é mensurável. Logo, pela observação 10.24, com $D = [0,T]$, $f(\cdot)$ a função $t \mapsto \theta\left(\left|\frac{z'(t)}{1+u}\right|\right)(1+u)$, $g = e^2(\cdot,u)$, resulta que $e^2(\cdot,u)$ é mensurável, para cada $u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$. Portanto, para cada $u \in \mathbb{R}$, $e^2(\cdot,u)$ é mensurável. Logo $e^2(\cdot)$ é um integrando normal, pelo corolário 21.5, com $S = [0,T]$, $n = 1$, $f(\cdot) = e^2(\cdot)$, $s = t$, $x = u$. Então $e^2(\cdot)$ é $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensurável, pelo teorema 21.3, com $S = [0,T]$, $n = 1$, $f(\cdot) = e^2(\cdot)$, $s = t$, $x = u$. Além disso, o conjunto

$$\begin{aligned} F_1 &:= \left\{(t,u) \in [0,T] \times \mathbb{R} : e^2(t,u) < +\infty\right\} \\ &= \left\{(t,u) \in [0,T] \times \mathbb{R} : e^2(t,u) \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left(\left([0,T] \backslash N\right) \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]\right) \cup \left(N \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]\right) \\ &= [0,T] \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \end{aligned}$$

é $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensurável, pelo corolário 10.18 (alínea (b)), com $D = [0,T] \times \mathbb{R}$, $f(\cdot) = e^2(\cdot)$, $x = (t,u)$. Então, a função $\widetilde{e^2} : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\widetilde{e^2}(t,u) := e^2(t,u)\,\chi_{F_1}(t,u) = \begin{cases} e^2(t,u) & \text{se } (t,u) \in F_1 \\ 0 & \text{se } (t,u) \notin F_1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \begin{cases} \theta\left(\left|\frac{z'(t)}{1+u}\right|\right)(1+u) & \text{se } \begin{cases} t \in [0,T] \backslash N \\ u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \end{cases} \\ 0 & \text{se } \begin{cases} t \in N \\ u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \end{cases} \end{cases} \\ 0 \quad \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \theta\left(\left|\frac{z'(t)}{1+u}\right|\right)(1+u) & \text{se } \begin{cases} t \in [0,T] \backslash N \\ u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \end{cases} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensurável em $[0,T] \times \mathbb{R}$, pelo lema 2.6, com $f(\cdot) = e^2(\cdot)$, $D = [0,T] \times \mathbb{R}$, $D_0 = F_1$, $t = (t,u)$, $g(\cdot) = \widetilde{e^2}(\cdot)$. Mas $\widetilde{e^2}(\cdot) = \phi_2(\cdot)$, então pela nota 10.24, com $f(\cdot) = \widetilde{e^2}(\cdot)$, $g(\cdot) = \phi_2(\cdot)$ e $D = [0,T] \times \mathbb{R}$, temos que $\phi_2(\cdot)$ é $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensurável em $[0,T] \times \mathbb{R}$.

Assim, como $\phi_1(\cdot)$ e $\phi_2(\cdot)$ são $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensuráveis em $[0,T] \times \mathbb{R}$, então $\phi(\cdot)$ é $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensurável em $[0,T] \times \mathbb{R}$, pela proposição 21.8 (alínea (d)), com $T = [0,T] \times \mathbb{R}$, $t = (t,u)$, $S_1(\cdot) = \phi_1(\cdot)$, $S_2(\cdot) = \phi_2(\cdot)$.

**(Parte 11 da demonstração do teorema 2.1 : verificação da hipótese $(iv_2)$ do teorema 2.3)**

Mostremos que : existe $k(\cdot) : \{(t,u) : t \in [0,T], u \in [-\gamma(t), \gamma(t)]\} \to (0,+\infty)$ $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensurável tal que para cada $(t,u) \in \{(t,u) : t \in [0,T], u \in [-\gamma(t), \gamma(t)]\}$,

$$|\phi(t,(s_1,y_1),u) - \phi(t,(s_2,y_2),u)| \leq k(t,u) \quad |(s_1,y_1) - (s_2,y_2)|,$$

para quaisquer $(s_1, y_1)$, $(s_2, y_2) \in \Sigma_t := B((s_0(t), y_0(t)), \delta)$. Como $\phi(\cdot)$ não depende de $(s, y)$, então $\phi(t, \cdot, u)$ é trivialmente lipschitziana em $\Sigma_t$, com qualquer constante de Lipschitz $k(t, u) > 0$, em particular $\phi(t, \cdot, u)$ é lipschitziana em $\Sigma_t$, com a constante de Lipschit $k(t, u) > 0$ encontrada para $\widetilde{L}(t, \cdot, u)$.

**(Parte 12 da demonstração do teorema 2.1 : verificação da hipótese $(iv_3)$ do teorema 2.3)**

Notemos que a função $t \mapsto k(t, u_0(t))$ integrável é a mesma para $\phi(t, \cdot, u)$ e para $\widetilde{L}(t, \cdot, u)$, quando $(t, u) \in Graf(U)$.

**(Parte 13 da demonstração do teorema 2.1 : verificação da hipótese $(vi)$ do teorema 2.3)**

Tenhamos ainda em atenção que os conjuntos $C_0 := \{(0,0)\}$ e $C_1 := \{T\} \times \mathbb{R}$ são fechados. De facto, seja $(x_n, y_n) \subset C_0$ uma qualquer sucessão tal que $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$. Isto é, por definição de $C_0$, $(x_n, y_n) = (0,0) \to (x_0, y_0)$. Como $C_0$ é um conjunto formado apenas pelo ponto $(0,0)$, temos que $(x_n, y_n) = (0,0) \to (0,0)$. Logo, $(x_0, y_0) = (0,0) \in C_0 := \{(0,0)\}$. Analogamente, seja $(x_n, y_n) \subset C_1$ uma qualquer sucessão tal que $(x_n, y_n) \to (x_1, y_1)$. Isto é, por definição de $C_1$, $(x_n, y_n) = (T, c) \to (x_1, y_1)$, $c \in \mathbb{R}$. Como $C_1$ é um conjunto formado por pontos da forma $(T, c)$, $c \in \mathbb{R}$, temos que $(x_n, y_n) = (T, c) \to (T, c)$, $c \in \mathbb{R}$. Logo,
$(x_1, y_1) = (T, c) \in C_1 := \{T\} \times \mathbb{R}$.

**(Parte 14 da demonstração do teorema 2.1 : aplicação do teorema 2.3)**

Consideremos o Hamiltoniano $H : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por

$$\begin{aligned} H(t, (s, y), (p_1, p_2), u, \lambda) &\equiv H(t, s, (p_1, p_2), u, \lambda) := \langle (p_1, p_2), \phi(t, (s, y), u) \rangle - \lambda\, \widetilde{L}(t, (s, y), u) \\ &= \langle (p_1, p_2), \phi(t, u) \rangle - \lambda\, \widetilde{L}(t, s, u). \end{aligned}$$

Então, pelo teorema 2.3, existe um escalar $\lambda \in \{0, 1\}$, uma função $\overline{p} : [0, T] \to \mathbb{R}^2$ AC tais que :

$(I)$ $\overline{p}(\cdot) = (p_1(\cdot), p_2(\cdot))$ satisfaz a equação adjunta

$$-(p_1'(t), p_2'(t)) \in \partial_{(s,y)} H(t, s_0(t), (p_1(t), p_2(t)), u_0(t), \lambda) \text{ qs em } [0, T];$$

$(II)$ $H(t, s_0(t), (p_1(t), p_2(t)), \cdot, \lambda)$ é maximizado em $u_0(t)$ :

$$\max\{H(t, s_0(t), (p_1(t), p_2(t)), w, \lambda) : w \in U(t)\} = H(t, s_0(t), (p_1(t), p_2(t)), u_0(t), \lambda) \text{ qs em } [0, T];$$

$(III)$ valem as seguintes condições de transversalidade :

$$(p_1(0), p_2(0)) \in N_{C_0}(s_0(0), y_0(0));$$

$$-\lambda(\zeta_1, \zeta_2) - (p_1(T), p_2(T)) \in N_{C_1}(s_0(T), y_0(T)), \text{ para algum } \zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in \partial\psi(s_0(T), y_0(T));$$

$(IV)$

$$\max_{t \in [0,T]} |(p_1(t), p_2(t))| + \lambda > 0.$$

**(Parte 15 da demonstração do teorema 2.1 : aplicação do ponto $(I)$ do teorema 2.3)**

$(I)$ $\overline{p}(\cdot) = (p_1(\cdot), p_2(\cdot))$ satisfaz a equação adjunta

$$-(p_1'(t), p_2'(t)) \in \partial_{(s,y)} H(t, s_0(t), (p_1(t), p_2(t)), u_0(t), \lambda) \text{ qs em } [0, T].$$

Se $t \in [0,T] \backslash N$, $u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, $\frac{z'(t)}{1+u} \in dom\ L(s, z(t), \cdot)$, $s \in [0,T]$, então

$$\begin{aligned}
H(t,s,(p_1,p_2),u,\lambda) &:= \langle (p_1,p_2), \phi(t,u)\rangle - \lambda\ \widetilde{L}(t,s,u) \\
&= \left\langle (p_1,p_2), \left(1+u, \theta\left(\tfrac{|z'(t)|}{1+u}\right)(1+u)\right)\right\rangle - \lambda\ \left[L\left(s, z(t), \tfrac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u) + r\ \theta\left(\tfrac{|z'(t)|}{1+u}\right)(1+u)\right] \\
&= p_1(1+u) + p_2\ \theta\left(\tfrac{|z'(t)|}{1+u}\right)(1+u) - \lambda\ L\left(s, z(t), \tfrac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u) - \lambda\ r\ \theta\left(\tfrac{|z'(t)|}{1+u}\right)(1+u) \\
&= \left[p_1(1+u) + p_2\ \theta\left(\tfrac{|z'(t)|}{1+u}\right)(1+u) - \lambda\ r\ \theta\left(\tfrac{|z'(t)|}{1+u}\right)(1+u)\right] - \lambda\ (1+u)\ L\left(s, z(t), \tfrac{z'(t)}{1+u}\right).
\end{aligned}$$

Consideremos as funções $f_1$, $f_2 : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f_1(s,y) := 1,$$

$$f_2(s,y) \equiv f_2(s) := L\left(s, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right).$$

Fixemos $(s,y) \in [0,T] \times \mathbb{R}$. Vamos mostrar que $f_2(\cdot)$ é localmente lipschitziana em $(s,y)$. Por aplicação do lema 2.13, com $t_0 = t$, $s = z(t)$, $v = \frac{z'(t)}{1+u}$, temos que

$$\left|L\left(s_1, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right) - L\left(s_2, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)\right| \leq \left(c_0'\ \left|L\left(t, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)\right| + c_1'\right)\ |s_1 - s_2|, \forall\ s_1,\ s_2 \in [0,T].$$

Isto é, $L\left(\cdot, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)$ é lipschitziana. Em particular, a função $f_2(\cdot) := L\left(\cdot, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)$ é localmente lipschitziana em $s$, logo $f_2(\cdot)$ é localmente lipschitziana em $(s,y)$, pela proposição 2.14, com $h(\cdot) = f_2(\cdot)$, $g(\cdot) = f_2(\cdot)$, $x_1 = s$, $x_2 = y$. Por outro lado, $f_1(\cdot)$ é continuamente diferenciável, em particular é continuamente diferenciável em $(s,y)$, então é estritamente diferenciável em $(s,y)$ e localmente lipschitziana em $(s,y)$, pelo corolário 22.11, com $X = [0,T] \times \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$, $F(\cdot) = f_1(\cdot)$, $x = (s,y)$. E como $f_1(\cdot)$, $f_2(\cdot)$ são localmente lipschitzianas em $(s,y)$ e $f_1(\cdot)$ é estritamente diferenciável em $(s,y)$, pelo corolário 22.22, com $X = [0,T] \times \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$, $n = 2$, $x = (s,y)$, $s_1 = p_1(1+u) + p_2\ \theta\left(\frac{|z'(t)|}{1+u}\right)(1+u) - \lambda\ r\ \theta\left(\frac{|z'(t)|}{1+u}\right)(1+u)$, $s_2 = -\lambda\ (1+u)$, temos que

$$\begin{aligned}
&\partial_{(s,y)} H(t,s,(p_1,p_2),u,\lambda) = \\
&= \partial_{(s,y)}\left(\left[p_1(1+u) + p_2\ \theta\left(\tfrac{|z'(t)|}{1+u}\right)(1+u) - \lambda\ r\ \theta\left(\tfrac{|z'(t)|}{1+u}\right)(1+u)\right] - \lambda\ (1+u)\ L\left(s, z(t), \tfrac{z'(t)}{1+u}\right)\right) \\
&= \left[p_1(1+u) + p_2\ \theta\left(\tfrac{|z'(t)|}{1+u}\right)(1+u) - \lambda\ r\ \theta\left(\tfrac{|z'(t)|}{1+u}\right)(1+u)\right]\ \partial_{(s,y)}(1) - \lambda\ (1+u)\ \partial_{(s,y)} L\left(s, z(t), \tfrac{z'(t)}{1+u}\right).
\end{aligned}$$

Além disso, como $f_1(\cdot)$ é estritamente diferenciável em $(s,y)$, então

$$\partial_{(s,y)} f_1(s,y) = \{\nabla f_1(s,y)\} = \left\{\left(\frac{\partial}{\partial s} f_1(s,y), \frac{\partial}{\partial y} f_1(s,y)\right)\right\} = \left\{\left(\frac{\partial}{\partial s} f_1(1), \frac{\partial}{\partial y} f_1(1)\right)\right\} = \{(0,0)\},$$

pela proposição 22.12, com $f(\cdot) = f_1(\cdot)$, $x = (s,y)$. Como $f_2(\cdot)$ é localmente lipschitziana em $s$ e em $(s,y)$, então

$$\partial_{(s,y)} L\left(s, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right) = \partial_{(s,y)} f_2(s,y) = \partial_s f_2(s) \times \{0\} = \partial_s L\left(s, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right) \times \{0\},$$

pela proposição 2.14, com $h(\cdot) = f_2(\cdot)$, $g(\cdot) = f_2(\cdot)$, $x_1 = s$, $x_2 = y$. Logo,

$$\begin{aligned}
\partial_{(s,y)} H(t, s, (p_1, p_2), u, \lambda) &= \left[p_1(1+u) + p_2\,\theta\left(\frac{|z'(t)|}{1+u}\right)(1+u) - \lambda\, r\,\theta\left(\frac{|z'(t)|}{1+u}\right)(1+u)\right] \{(0,0)\} \\
&\quad -\lambda\ (1+u)\ \partial_s L\left(s, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right) \times \{0\} \\
&= -\lambda\ (1+u)\ \partial_s L\left(s, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right) \times \{0\}.
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
H(t, s_0(t), (p_1(t), p_2(t)), u_0(t), \lambda) &= H(t, t, (p_1(t), p_2(t)), 0, \lambda) \\
&= [p_1 + p_2\,\theta(|z'(t)|) - \lambda\, r\,\theta(|z'(t)|)] - \lambda\ L(t, z(t), z'(t)) \text{ qs em } [0,T].
\end{aligned}$$

E portanto,

$$\begin{aligned}
& -(p_1'(t), p_2'(t)) \in \partial_{(s,y)} H(t, s_0(t), (p_1(t), p_2(t)), u_0(t), \lambda) \text{ qs em } [0,T] \\
\Leftrightarrow\ & -(p_1'(t), p_2'(t)) \in -\lambda\ \partial_t L(t, z(t), z'(t)) \times \{0\} \text{ qs em } [0,T] \\
\Leftrightarrow\ & (p_1'(t), p_2'(t)) \in \lambda\ \partial_t L(t, z(t), z'(t)) \times \{0\} \text{ qs em } [0,T] \\
\Leftrightarrow\ & \left\{\begin{array}{l} p_1'(t) \in \lambda\ \partial_t L(t, z(t), z'(t)) \\ p_2'(t) = 0 \end{array}\right. \quad \text{qs em } [0,T].
\end{aligned}$$

Como $p_2'(t) = 0$ qs em $[0,T] \Rightarrow p_2(t) = c$, $c \in \mathbb{R}$ qs em $[0,T]$, e como $p_2(\cdot)$ é AC, em particular é contínua, então $p_2(t) = c$, $\forall\, t \in [0,T]$. Logo,

$$p_1'(t) \in \lambda \partial_t L(t, z(t), z'(t)) \text{ qs em } [0,T] \text{ e } p_2(t) = c,\ \forall\, t \in [0,T].$$

**(Parte 16 da demonstração do teorema 2.1 : aplicação do ponto $(II)$ do teorema 2.3)**

$(II)$ $H(t, s_0(t), (p_1(t), p_2(t)), \cdot, \lambda)$ é maximizado em $u_0(t)$ :

$$\max\{H(t, s_0(t), (p_1(t), p_2(t)), w, \lambda) : w \in U(t)\} = H(t, s_0(t), (p_1(t), p_2(t)), u_0(t), \lambda) \text{ qs em } [0,T]$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\max_{-\gamma(t) \leq w \leq -\gamma(t)} H(t, t, (p_1(t), p_2(t)), w, \lambda) = H(t, t, (p_1(t), p_2(t)), 0, \lambda) \text{ qs em } [0,T]$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\max_{-\gamma(t) \leq w \leq -\gamma(t)} \left\{p_1(t)(1+w) + p_2(t)\ \theta\left(\tfrac{|z'(t)|}{1+w}\right)(1+w) - \lambda\ L\left(t, z(t), \tfrac{z'(t)}{1+w}\right)(1+w) - \lambda\, r\,\theta\left(\tfrac{|z'(t)|}{1+w}\right)(1+w)\right\}$$

$$= p_1(t) + p_2(t)\ \theta(|z'(t)|) - \lambda\ L(t, z(t), z'(t)) - \lambda\, r\,\theta(|z'(t)|) \text{ qs em } [0,T].$$

**(Parte 17 da demonstração do teorema 2.1 : aplicação do ponto $(III)$ do teorema 2.3)**

$(III)$ Valem as seguintes condições de transversalidade :

$$(p_1(0), p_2(0)) \in N_{C_0}(s_0(0), y_0(0));$$

$$-\lambda(\zeta_1, \zeta_2) - (p_1(T), p_2(T)) \in N_{C_1}(s_0(T), y_0(T)), \text{ para algum } \zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in \partial\psi(s_0(T), y_0(T)).$$

Determinemos $N_{C_0}(s_0(0), y_0(0))$. $C_0 = \{(0,0)\}$ é convexo, pois para quaisquer $(s_1, y_1) = (0,0)$ e $(s_2, y_2) = (0,0) \in C_0$ e $0 \leq \lambda \leq 1$, temos

$$\lambda\ (s_1, y_1) + (1-\lambda)\ (s_2, y_2) = \lambda\ (0,0) + (1-\lambda)\ (0,0) = (0,0) \in C_0.$$

Então, pela proposição 22.18, com $C = C_0$, $x = (s_0(0), y_0(0))$, resulta que $N_{C_0}(s_0(0), y_0(0))$ coincide com o cone normal no sentido da análise convexa, logo

$$\begin{aligned} N_{C_0}(s_0(0), y_0(0)) &= N_{C_0}(0,0) \\ &= \left\{(s', y') \in \mathbb{R}^2 : \langle (s,y) - (0,0), (s',y')\rangle \leq 0, \forall\ (s,y) \in C_0\right\} \\ &= \left\{(s', y') \in \mathbb{R}^2 : \langle (0,0) - (0,0), (s',y')\rangle \leq 0\right\} \\ &= \left\{(s', y') \in \mathbb{R}^2 : \langle (0,0), (s',y')\rangle \leq 0\right\} \\ &= \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Determinemos agora $N_{C_1}(s_0(T), y_0(T))$. $C_1 = \{T\} \times \mathbb{R}$ é convexo, pois para quaisquer $(s_1, y_1) = (T, k_1)$ e $(s_2, y_2) = (T, k_2) \in C_1$ com $k_1$, $k_2 \in \mathbb{R}$ e $0 \leq \lambda \leq 1$, temos

$$\lambda\ (s_1, y_1) + (1-\lambda)\ (s_2, y_2) = \lambda\ (T, k_1) + (1-\lambda)\ (T, k_2) = (T, \lambda\ k_1 + (1-\lambda)\ k_2) \in C_1.$$

Logo, pela proposição 22.18, com $C = C_1$, $x = (s_0(T), y_0(T))$, resulta que $N_{C_1}(s_0(T), y_0(T))$ coincide com o cone normal no sentido da análise convexa, então

$$\begin{aligned} N_{C_1}(s_0(T), y_0(T)) &= N_{C_1}(T, \Lambda_\theta(z(\cdot))) \\ &= \left\{(s', y') \in \mathbb{R}^2 : \langle (s,y) - (T, \Lambda_\theta(z(\cdot))), (s',y')\rangle \leq 0, \forall\ (s,y) \in C_1\right\} \\ &= \left\{(s', y') \in \mathbb{R}^2 : \langle (T,c) - (T, \Lambda_\theta(z(\cdot))), (s',y')\rangle \leq 0, \forall\ c \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{(s', y') \in \mathbb{R}^2 : \langle (0, c - \Lambda_\theta(z(\cdot))), (s',y')\rangle \leq 0, \forall\ c \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{(s', y') \in \mathbb{R}^2 : y'\ (c - \Lambda_\theta(z(\cdot))) \leq 0, \forall\ c \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \mathbb{R} \times \{0\}. \end{aligned}$$

Determinemos $\partial\psi(s_0(T), y_0(T))$! Mostremos que a função $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\psi(s,y) \equiv \psi(y) := \sigma\ |y - \Lambda_\theta(z(\cdot))|^2$$

é continuamente diferenciável. Para tal, vamos usar a definição 17.2. Fixemos $(s,y) \in \mathbb{R}^2$. Então

$$\frac{\partial}{\partial s}\psi(s,y) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\psi(s,y) = 2\,\sigma\,\left|y - \Lambda_\theta(z(\cdot))\right|.$$

Além disso, a função $\frac{\partial\psi}{\partial s} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\frac{\partial}{\partial s}\psi(s,y) = 0$$

é contínua, pois é uma função constante igual a zero, e a função $\frac{\partial\psi}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\frac{\partial}{\partial y}\psi(s,y) = 2\,\sigma\,\left|y - \Lambda_\theta(z(\cdot))\right|$$

é contínua, pois é o produto de uma constante pela função módulo. E portanto, $\psi(\cdot)$ é continuamente diferenciável em $(s,y)$. Logo, $\psi(\cdot)$ é estritamente diferenciável em $(s,y)$, pelo corolário 22.11, com $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$, $F(\cdot) = \psi(\cdot)$, $x = (s,y)$. Então, pela proposição 22.12, com $f(\cdot) = \psi(\cdot)$, $x = (s,y)$, resulta que

$$\begin{aligned}\partial\psi(s,y) &= \{\nabla\psi(s,y)\} = \left\{\left(\frac{\partial}{\partial s}\psi(s,y), \frac{\partial}{\partial y}\psi(s,y)\right)\right\} = \{(0, 2\,\sigma\,\left|y - \Lambda_\theta(z(\cdot))\right|)\} \\ &= \{0\} \times \{2\,\sigma\,\left|y - \Lambda_\theta(z(\cdot))\right|\}.\end{aligned}$$

E portanto,

$$\begin{aligned}\partial\psi(s_0(T), y_0(T)) &= \partial\psi(T, \Lambda_\theta(z(\cdot))) = \{0\} \times \{2\,\sigma\,\left|\Lambda_\theta(z(\cdot)) - \Lambda_\theta(z(\cdot))\right|\} = \{0\} \times \{0\} \\ &= \{(0,0)\}.\end{aligned}$$

Então

$$\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in \partial\psi(s_0(T), y_0(T)) = \{(0,0)\} \Leftrightarrow \zeta = (0,0).$$

Assim, reescrevendo as condições de transversalidade, temos :

$$(p_1(0), p_2(0)) \in \mathbb{R}^2$$

e

$$-(p_1(T), p_2(T)) \in \mathbb{R} \times \{0\}.$$

Logo, $p_1(0) = k_1$, $p_2(0) = k_2$, $p_1(T) = -k_3$, $k_1$, $k_2$, $k_3 \in \mathbb{R}$ e $p_2(T) = 0$. No entanto, já sabíamos que

$$p_2(t) = c, \; \forall\, t \in [0,T],$$

e como $p_2(T) = 0$ e $p_2(0) = k_2$, $k_2 \in \mathbb{R}$, vem

$$p_2(t) = 0, \; \forall\, t \in [0,T].$$

Ou seja, temos

$$p_1(0) = k_1, \; p_1(T) = k_4, \; k_1, \; k_4 \in \mathbb{R} \;\; (k_4 = -k_3)$$

e

$$p_2(t) = 0, \; \forall\, t \in [0,T].$$

**(Parte 18 da demonstração do teorema 2.1 : aplicação do ponto $(IV)$ do teorema 2.3)**

$(IV)$

$$\max_{t\in[0,T]} |(p_1(t), p_2(t))| + \lambda > 0.$$

Notemos que, de facto, $\max_{t\in[0,T]} |(p_1(t), p_2(t))|$ existe, pois $\overline{p}(\cdot) = (p_1(\cdot), p_2(\cdot))$ é AC, em particular é contínua e está definida no intervalo fechado e limitado $[0,T]$. Como $p_2(t) = 0$ para qualquer $t \in [0,T]$ vem

$$\max_{t\in[0,T]} |(p_1(t), 0)| + \lambda > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \max_{t\in[0,T]} (|p_1(t)| + |0|) + \lambda > 0 \text{ (aplicando a norma da soma)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \max_{t\in[0,T]} |p_1(t)| + \lambda > 0.$$

**(Parte 19 da demonstração do teorema 2.1 : final da demonstração)**

Vamos supor que $\lambda = 0$, então

$$\max_{t\in[0,T]} |p_1(t)| > 0,$$

logo não podemos ter $p_1(t) = 0$ para qualquer $t \in [0,T]$. Contudo, de considerarmos $\lambda = 0$ em

$$p_1'(t) \in \lambda\ \partial_t L(t, z(t), z'(t)) \text{ qs em } [0,T],$$

temos

$$p_1'(t) = 0 \text{ qs em } [0,T] \Rightarrow p_1(t) = c \text{ qs em } [0,T],\ c \in \mathbb{R}.$$

E como $p_1(\cdot)$ é AC, em particular é contínua, donde

$$p_1(t) = c,\ \forall\ t \in [0,T],\ c \in \mathbb{R}.$$

Voltando à condição de máximo $(II)$ e substituindo $p_2(t) = 0$ e $\lambda = 0$ vem

$$\max_{-\gamma(t)\leq w\leq -\gamma(t)} \{p_1(t)(1+w)\} = p_1(t) \text{ qs em } [0,T],$$

então

$$p_1(t)(1+w) \leq p_1(t) \text{ qs em } [0,T],\ \forall\ w \in [-\gamma(t), \gamma(t)],$$

e juntando a condição

$$p_1(t) = c,\ \forall\ t \in [0,T],\ c \in \mathbb{R},$$

temos

$$p_1(t) = 0 \text{ qs em } [0,T].$$

E como $p_1(\cdot)$ é AC, em particular é contínua, vem

$$p_1(t) = 0,\ \forall\ t \in [0,T],$$

o que não pode acontecer por $(IV)$. Portanto, não podemos ter $\lambda = 0$, mas sim $\lambda = 1$.

Se considerarmos $\lambda = 1$ em

$$p_1'(t) \in \lambda\ \partial_t L(t, z(t), z'(t)) \text{ qs em } [0,T],$$

fica

$$p_1'(t) \in \partial_t L(t, z(t), z'(t)) \text{ qs em } [0,T].$$

Como $p_1(\cdot)$ é AC, então $p_1'(\cdot) \in L^1([0,T], \mathbb{R}^n)$, pelo teorema 18.4, com $(a,b) = (0,T)$, $u(\cdot) = p_1(\cdot)$. E portanto, $p_1'(\cdot)$ é uma selecção integrável de $\partial_t L(t, z(t), z'(t))$. Pelo enunciado do teorema (que estamos a demonstrar), existe uma função integrável $\xi(\cdot)$ tal que $\xi(t) \in \partial_t L(t, z(t), z'(t))$ qs em $[0,T]$, e vamos definir $\xi : [0,T] \to \mathbb{R}$ por

$$\xi(t) := p_1'(t) \text{ qs em } [0,T].$$

Logo, pelo teorema 18.4, com $(a,b) = (0,T)$, $u(\cdot) = p_1(\cdot)$, $x = t$, $y = 0$, $t = \tau$, temos

$$p_1(t) - p_1(0) = \int_0^t p_1'(\tau)\, d\tau, \ \forall\, t \in [0,T]$$

$$\Leftrightarrow p_1(t) = p_1(0) + \int_0^t p_1'(\tau)\, d\tau, \ \forall\, t \in [0,T]$$

$$\Leftrightarrow p_1(t) = p_1(0) + \int_0^t \xi(\tau)\, d\tau, \ \forall\, t \in [0,T].$$

Voltando novamente à condição de máximo $(II)$ e substituindo $p_2(t) = 0$ e $\lambda = 1$ vem

$$\max_{-\gamma(t) \le w \le -\gamma(t)} H(t, t, (p_1(t), 0), w, 1) = H(t, t, (p_1(t), 0), 0, 1) \text{ qs em } [0,T]$$

$$\Leftrightarrow \max_{-\gamma(t) \le w \le -\gamma(t)} \left\{ p_1(t)(1+w) - L\left(t, z(t), \tfrac{z'(t)}{1+w}\right)(1+w) - r\,\theta\left(\tfrac{|z'(t)|}{1+w}\right)(1+w) \right\}$$

$$= p_1(t) - L(t, z(t), z'(t)) - r\,\theta(|z'(t)|) \text{ qs em } [0,T].$$

Definamos a função $q : U(t) \to (0, +\infty)$ por

$$q(w) := 1 + w.$$

Por hipótese,

$$L(t, s, v) \ge l(s),$$

para alguma função $l(\cdot)$ localmente limitada inferiormente. Dizer que $l(\cdot)$ é localmente limitada inferiormente, significa que para qualquer $\overline{s} \in \Omega$,

$$\exists\, a \in \mathbb{R} : l(s) \ge a, \ \forall\, s \in \overline{s} + \eta B =: A,$$

para algum $\eta > 0$. Desta maneira,

$$\exists\, a \in \mathbb{R} : L(t, s, v) \ge a, \ \forall\, t \in [0,T], \ \forall\, s \in A, \ \forall\, v \in \mathbb{R}^n.$$

Isto é,

$$\exists\, a \in \mathbb{R} : L(t, s, v) - a \ge 0, \ \forall\, t \in [0,T], \ \forall\, s \in A, \ \forall\, v \in \mathbb{R}^n.$$

Em particular, para quase todo $t \in [0,T]$, substituindo $s$ por $z(t)$,

$$\exists\, a \in \mathbb{R} : L(t, z(t), v) - a \ge 0, \ \forall\, v \in \mathbb{R}^n.$$

Seja $H^1 : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ dada por

$$H^1(t, \alpha) := L(t, z(t), \alpha) - a.$$

Por hipótese $L(\cdot)$ é própria e pela hipótese básica $(iv)$, a função $(s,v) \mapsto L(t,s,v)$ é sci, então pela nota 2.11, a função $v \mapsto L(t,s,v)$ é própria e sci (onde $f(\cdot)$ será a função $(s,v) \mapsto L(t,s,v)$ e $h_x(\cdot)$ será a função $v \mapsto L(t,s,v)$, $x = s$, $y = v$). Pela hipótese básica $(v)$, para cada $(t,s) \in [0,T] \times \Omega$, a função $L(t,s,\cdot)$ é convexa e o domínio *dom* $L(t,s,\cdot)$ é um conjunto aberto, convexo e não-vazio. Também, por hipótese, $z(\cdot) \in \Gamma(\overline{x}(\cdot))$, logo $z(t) \in \Omega$ para qualquer $t \in [0,T]$. Então para cada $t \in [0,T]$ fixado, $H^1(t,\cdot)$ é própria, convexa, sci, o seu domínio é um conjunto aberto não-vazio e seja qualquer $\alpha \in int\left(dom\ H^1(t,\cdot)\right) = dom\ H^1(t,\cdot)$. Fixemos $t \in [0,T]$ e definemos $H_t^1 : \mathbb{R}^n \to [0,+\infty]$ dada por

$$H_t^1(\alpha) := H^1(t,\alpha),$$

a qual, pelo que acabámos de referir, é própria, convexa, sci, o seu domínio é um conjunto aberto não-vazio e $\alpha \in int\left(dom\ H_t^1\right) = dom\ H_t^1$. Logo, a função $H_{t,\alpha}^1 : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$H_{t,\alpha}^1(\beta) := L\left(t, z(t), \frac{\alpha}{\beta}\right)\beta - a\,\beta$$

é própria, convexa, sci e $1 \in int\left(dom\ H_{t,\alpha}^1\right)$ e

$$\partial H_{t,\alpha}^1(1) = \{L(t,z(t),\alpha) - a\} - \langle \alpha, \partial_v (L(t,z(t),\alpha) - a)\rangle,$$

pelo lema 2.15, com $f(\cdot) = H_t^1(\cdot)$, $w = \alpha$, $\varphi_\omega(\cdot) = H_{t,\alpha}^1(\cdot)$. Em particular, para $t \in [0,T]\backslash N$, substituindo $\alpha$ por $z'(t)$, temos que a função $H_{t,z'(t)}^1 : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$H_{t,z'(t)}^1(\beta) := L\left(t, z(t), \frac{z'(t)}{\beta}\right)\beta - a\,\beta$$

é própria, convexa, sci e $1 \in int\left(dom\ H_{t,z'(t)}^1\right)$ e

$$\partial H_{t,z'(t)}^1(1) = \{L(t,z(t),z'(t)) - a\} - \langle z'(t), \partial_v (L(t,z(t),z'(t)) - a)\rangle. \tag{2.12}$$

(De facto, isso acontece, pois, por hipótese, $z(\cdot) \in \Gamma(\overline{x}(\cdot))$, então $\int_0^T L(t,z(t),z'(t))\,dt = \Lambda(z(\cdot)) \leq \Lambda(\overline{x}(\cdot)) \in \mathbb{R}$, para alguma função lipschitziana $\overline{x}(\cdot)$. Donde, pela nota 11.10, $L(t,z(t),z'(t)) \in \mathbb{R}$ qs (onde $f(\cdot)$ é a função $t \mapsto L(t,z(t),z'(t))$, $D = [0,T]$). O que significa que $z'(\cdot) \in dom\ L(t,z(t),\cdot)$ qs. Desta maneira, como $dom\ H_t^1 = dom\ H^1(t,\cdot) = dom\ L(t,z(t),\cdot)$ é aberto, isto é, $dom\ H_t^1 = int\left(dom\ H_t^1\right)$, então, para cada $t \in [0,T]\backslash N$, $z'(t) \in dom\ H_t^1 = int\left(dom\ H_t^1\right)$). E observamos que, para qualquer $w \in U(t)$ vem

$$\left(H_{t,z'(t)}^1 \circ q\right)(w) = H_{t,z'(t)}^1(q(w)) = H_{t,z'(t)}^1(1+w) = L\left(t, z(t), \frac{z'(t)}{1+w}\right)(1+w) - a(1+w).$$

Assim vamos definir uma nova função : $W_{t,z'(t)}^1 \equiv H_{t,z'(t)}^1 \circ q : U(t) \to \mathbb{R}$ dada por

$$W_{t,z'(t)}^1(w) := L\left(t, z(t), \frac{z'(t)}{1+w}\right)(1+w) - a(1+w).$$

Utilizemos um raciocínio análogo para $\theta(\cdot)$. Por hipótese, $\theta(\cdot) \in C^1([0,+\infty),\mathbb{R})$ é estritamente convexa e estritamente crescente, então é limitada inferiormente, isto é,

$$\exists\, k \in \mathbb{R} : \theta(\alpha_1) \geq k,\ \forall\, \alpha_1 \in [0,+\infty) \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{R} : \theta(\alpha_1) - k \geq 0,\ \forall\, \alpha_1 \in [0,+\infty).$$

Definemos $H^2 : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ dada por

$$H^2(t,\alpha) := \theta(|\alpha|) - k.$$

Para cada $t \in [0,T]$ fixado, $H^2(t,\cdot)$ é própria, convexa, sci e seja qualquer $\alpha \in dom\ H^2(t,\cdot) = int\left(domH^2(t,\cdot)\right) = \mathbb{R}^n$ (isto é, o seu domínio é um conjunto aberto não-vazio), pois é a soma entre uma constante $-c$ e a composição das funções $\alpha \mapsto |\alpha|$ e $\alpha_1 \mapsto \theta(\alpha_1)$. Fixemos $t \in [0,T]$ e definemos $H_t^2 : \mathbb{R}^n \to [0,+\infty]$ por

$$H_t^2(\alpha) := H^2(t,\alpha),$$

a qual, pelo que acabámos de referir, é própria, convexa, sci, o seu domínio é um conjunto aberto não-vazio e $\alpha \in int\left(dom\ H_t^2\right) = \mathbb{R}^n$. Logo, a função $H_{t,\alpha}^2 : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$H_{t,\alpha}^2(\beta) := \theta\left(\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|\right)\beta - k\,\beta$$

é própria, convexa, sci e $1 \in int\left(dom\ H_{t,\alpha}^2\right)$ e

$$\partial H_{t,\alpha}^2(1) = \{\theta(|\alpha|) - k\} - \langle \alpha, \partial(\theta(|\alpha|) - k)\rangle,$$

pelo lema 2.15, com $f(\cdot) = H_t^2(\cdot)$, $w = \alpha$, $\varphi_w(\cdot) = H_{t,\alpha}^2(\cdot)$. Em particular, para $t \in [0,T]\setminus N$, substituindo $\alpha$ por $z'(t)$, temos que a função $H_{t,z'(t)}^2 : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$H_{t,z'(t)}^2(\beta) := \theta\left(\left|\frac{z'(t)}{\beta}\right|\right)\beta - k\,\beta$$

é própria, convexa, sci e $1 \in int\left(dom\ H_{t,z'(t)}^2\right)$ e

$$\partial H_{t,z'(t)}^2(1) = \{\theta(|z'(t)|) - k\} - \langle z'(t), \partial(\theta(|z'(t)|) - k)\rangle. \tag{2.13}$$

De facto, isso acontece, pois, por hipótese, $z(\cdot) \in AC_\theta([0,T],\mathbb{R}^n)$, então $\int_0^T \theta(|z'(t)|)\,dt < +\infty$. Donde, pela nota 11.10, $\theta(|z'(t)|) \in \mathbb{R}$ qs (onde $f(\cdot)$ é a função $t \mapsto \theta(|z'(t)|)$, $D = [0,T]$). O que significa que $z'(t) \in dom\ \theta(|\cdot|)$ qs. Desta maneira, como $dom\ H_t^2 = dom\ H^2(t,\cdot) = dom\ \theta(|\cdot|) = \mathbb{R}^n$ é aberto, isto é, $dom\ H_t^2 = int\left(dom\ H_t^2\right)$, então, para cada $t \in [0,T]\setminus N$, $z'(t) \in dom\ H_t^2 = int\left(dom\ H_t^2\right)$. E observamos que, para qualquer $w \in U(t)$ vem

$$\left(H_{t,z'(t)}^2 \circ q\right)(w) = H_{t,z'(t)}^2(q(w)) = H_{t,z'(t)}^2(1+w) = \theta\left(\left|\frac{z'(t)}{1+w}\right|\right)(1+w) - k(1+w).$$

Assim vamos definir uma nova função : $W_{t,z'(t)}^2 \equiv H_{t,z'(t)}^2 \circ q : U(t) \to \mathbb{R}$ dada por

$$W_{t,z'(t)}^2(w) := \theta\left(\left|\frac{z'(t)}{1+w}\right|\right)(1+w) - k(1+w).$$

Mostremos agora que a função $\widetilde{H} : U(t) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\widetilde{H}(w) := -p_1(t)(1+w) + L\left(t, z(t), \frac{z'(t)}{1+w}\right)(1+w) - a(1+w) + r\left[\theta\left(\frac{|z'(t)|}{1+w}\right)(1+w) - k(1+w)\right],$$

é convexa. Comecemos por mostrar que a função $W^3 : U(t) \to (0,+\infty)$ dada por

$$W^3(w) := -p_1(t)\ q(w)$$

é convexa. Como $q(\cdot)$ é uma função linear e $-p_1(t)$ é constante em relação a $w$, então a função $W^3(\cdot)$ é linear. Em particular, pela definição 19.58, $W^3(\cdot)$ é convexa e própria. Agora vamos mostrar que a função $W_{t,z'(t)}^1(\cdot)$ é convexa. Já sabemos que $H_{t,z'(t)}^1(\cdot)$ é própria, convexa e sci e que $q(\cdot)$ é uma função afim. Além disso,

$$\mathrm{Im}\ q \cap dom\ H_{t,z'(t)}^1 \neq \varnothing.$$

De facto, se $\beta = 1$, então

$$H_{t,z'(t)}^1(1) = L(t, z(t), z'(t)) - a < \infty,$$

pois $z'(t) \in dom\ L(t, z(t), \cdot)$, donde

$$1 \in dom\ H_{t,z'(t)}^1$$

e se $w = 0$, então
$$q(0) = 1 \in \text{Im } q.$$
Logo,
$$\exists\ \beta_1 = 1 : \beta_1 \in \text{Im } q \text{ e } \beta_1 \in dom\ H^1_{t,z'(t)},$$
e portanto
$$\text{Im } q \cap dom\ H^1_{t,z'(t)} \neq \varnothing.$$
Consequentemente, a função $W^1_{t,z'(t)}(\cdot) \equiv \left(H^1_{t,z'(t)} \circ q\right)(\cdot)$ é própria, convexa, sci, pela proposição 19.66, com $m = n = 1$, $A(\cdot) = q(\cdot)$, $f(\cdot) = H^1_{t,z'(t)}(\cdot)$, $(f \circ A)(\cdot) = W^1_{t,z'(t)}(\cdot)$. Finalmente, mostremos que a função $W^2_{t,z'(t)}(\cdot)$ é convexa. Já sabemos que $H^2_{t,z'(t)}(\cdot)$ é própria, convexa e sci e que $q(\cdot)$ é uma função afim. Além disso,
$$\text{Im } q \cap dom\ H^2_{t,z'(t)} \neq \varnothing.$$
De facto, se $\beta = 1$, então
$$H^2_{t,z'(t)}(1) = \theta(|z'(t)|) - k < \infty,$$
pois $z'(t) \in dom\ \theta(|\cdot|)$, donde
$$1 \in dom\ H^2_{t,z'(t)}$$
e se $w = 0$, então
$$q(0) = 1 \in \text{Im } q.$$
Logo,
$$\exists\ \beta_1 = 1 : \beta_1 \in \text{Im } q \text{ e } \beta_1 \in dom\ H^2_{t,z'(t)},$$
e portanto
$$\text{Im } q \cap dom\ H^2_{t,z'(t)} \neq \varnothing.$$
Consequentemente, a função $W^2_{t,z'(t)}(\cdot) \equiv \left(H^2_{t,z'(t)} \circ q\right)(\cdot)$ é própria, convexa, sci, pela proposição 19.66, com $m = n = 1$, $A(\cdot) = q(\cdot)$, $f(\cdot) = H^2_{t,z'(t)}(\cdot)$, $(f \circ A)(\cdot) = W^2_{t,z'(t)}(\cdot)$. E como $W^2_{t,z'(t)}(\cdot)$ é própria, convexa e $r \geq 0$, então a função $W^4 : U(t) \to \mathbb{R}$ dada por
$$W^4(w) := r\ W^2_{t,z'(t)}(w)$$
é uma função própria e convexa, pela definição 19.67, com $f(\cdot) = W^2_{t,z'(t)}(\cdot)$, $\lambda = r$, $\alpha = 0$. Logo,
$$\widetilde{H}(\cdot) = W^3(\cdot) + W^1_{t,z'(t)}(\cdot) + W^4(\cdot).$$
E portanto, como $W^3(\cdot)$, $W^1_{t,z'(t)}(\cdot)$ e $W^4(\cdot)$ são próprias e convexas, então $\widetilde{H}(\cdot)$ é própria e convexa pelo teorema 19.68 (aplicado duas vezes), com $n = 1$, $f_1(\cdot) = W^3(\cdot)$, $f_2(\cdot) = W^1_{t,z'(t)}(\cdot)$, na 1ª aplicação do teorema e com $n = 1$, $f_1 = W^3(\cdot) + W^1_{t,z'(t)}(\cdot)$, $f_2 = W^4(\cdot)$, na 2ª aplicação do teorema.

E como
$$u_0(t) := 0 \in int\left(dom\ \widetilde{H}(\cdot)\right) = int\left[-\gamma(t), \gamma(t)\right],$$
logo $\widetilde{H}(\cdot)$ é localmente lipschitziana em $u_0(t) := 0$, pelo teorema 19.71, com $f(\cdot) = \widetilde{H}(\cdot)$, $n = 1$, $S = \{u_0(t)\}$. Consequentemente, como $\widetilde{H}(\cdot)$ atinge um mínimo local em $w = 0$, vem
$$0 \in \partial\widetilde{H}(0) \text{ qs em } [0, T],$$

pela proposição 22.20, com $f(\cdot) = \widetilde{H}(\cdot)$, $x = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \partial \widetilde{H}(0) &= \\ &= \partial_w \left[ -p_1(t)(1+w) + L\left(t, z(t), \tfrac{z'(t)}{1+w}\right)(1+w) - a(1+w) + r\,\theta\left(\tfrac{|z'(t)|}{1+w}\right)(1+w) - k(1+w) \right] |_{w=0} \\ &= \partial_w \left[ -p_1(t)\ q(w) + W^1_{t,z'(t)}(w) + r\ W^2_{t,z'(t)}(w) \right] |_{w=0}. \end{aligned}$$

Temos também que $q(\cdot)$, $W^1_{t,z'(t)}(\cdot)$, $W^2_{t,z'(t)}(\cdot)$ são convexas, próprias e

$$0 \in int\,(dom\ q) = int\left(dom\ W^1_{t,z'(t)}\right) = int\left(dom\ W^2_{t,z'(t)}\right) = int\,[-\gamma(t), \gamma(t)],$$

então $q(\cdot)$, $W^1_{t,z'(t)}(\cdot)$, $W^2_{t,z'(t)}(\cdot)$ são lipschitzianas no ponto $w = 0$, pela proposição 19.71, com $n = 1$, $S = int\,(dom\ q) = int\left(dom\ W^1_{t,z'(t)}\right) = int\left(dom\ W^2_{t,z'(t)}\right)$, $f(\cdot) = q(\cdot)$, $f(\cdot) = W^1_{t,z'(t)}(\cdot)$, $f(\cdot) = W^2_{t,z'(t)}(\cdot)$. Em particular, $q(\cdot)$, $W^1_{t,z'(t)}(\cdot)$, $W^2_{t,z'(t)}(\cdot)$ são localmente lipschitzianas no ponto $w = 0$. E como $q(\cdot)$ é uma função linear, então é continuamente diferenciável, em particular é continuamente diferenciável no ponto $w = 0$. Logo, $q(\cdot)$ é estritamente diferenciável em $w = 0$, pelo corolário 22.11, com $X = U(t)$, $Y = (0, +\infty)$, $F(\cdot) = q(\cdot)$, $x = 0$. Além disso, como $W^2_{t,z'(t)}(\cdot)$ é a soma entre uma função linear e a composição de funções $C^1$, então é continuamente diferenciável, em particular é continuamente diferenciável no ponto $w = 0$. Logo, $W^2_{t,z'(t)}(\cdot)$ é estritamente diferenciável no ponto $w = 0$, pelo corolário 22.11, com $X = U(t)$, $Y = \mathbb{R}$, $F(\cdot) = W^2_{t,z'(t)}(\cdot)$, $x = 0$. E portanto,

$$\begin{aligned} \partial \widetilde{H}(0) &= \partial_w \left[ -p_1(t)\ q(w) + W^1_{t,z'(t)}(w) + r\ W^2_{t,z'(t)}(w) \right] |_{w=0} \\ &= -p_1(t)\ \partial_w [q(w)] |_{w=0} + \partial_w \left[ W^1_{t,z'(t)}(w) \right] |_{w=0} + r\ \partial_w \left[ W^2_{t,z'(t)}(w) \right] |_{w=0}, \end{aligned}$$

pelo corolário 22.22, com $X = U(t)$, $Y = \mathbb{R}$, $f_1(\cdot) = q(\cdot)$, $f_2(\cdot) = W^1_{t,z'(t)}(\cdot)$, $f_3(\cdot) = W^2_{t,z'(t)}(\cdot)$, $s_1 = -p_1(t)$, $s_2 = 1$, $s_3 = r$, $x = 0$.

Tendo em atenção, novamente, que a função $q(\cdot)$ é linear, temos que $q(\cdot)$ é continuamente diferenciável, em particular é continuamente diferenciável em qualquer ponto $w \in U(t)$. Logo, $q(\cdot)$ é estritamente diferenciável em qualquer ponto $w \in U(t)$, pelo corolário 22.11, com $X = U(t)$, $Y = (0, +\infty)$, $F(\cdot) = q(\cdot)$, $x = w$. E portanto,

$$\partial_w [q(w)] |_{w=0} = \{q'(w)\} |_{w=0} = \{1\} |_{w=0} = \{1\},$$

pela proposição 22.12, com $f(\cdot) = q(\cdot)$, $x = w$.

Além disso,

$$\begin{aligned} \partial_w \left[ W^1_{t,z'(t)}(w) \right] |_{w=0} &= \partial_w \left[ H^1_{t,z'(t)} \circ q(0) \right] = 1\ \partial_w H^1_{t,z'(t)}(q(0)) = \partial_w H^1_{t,z'(t)}(1) \\ &= \{L(t, z(t), z'(t)) - a\} - \langle z'(t), \partial_v (L(t, z(t), z'(t)) - a) \rangle, \end{aligned}$$

(por aplicação do teorema 19.85, com $n = m = 1$, $A(\cdot) = q(\cdot)$, $A_0 = 1$, $b = 1$, $g(\cdot) = H^1_{t,z'(t)}(\cdot)$, $A_0^* = 1$, $x = 0$, e por (2.12)). Determinemos $\partial_v (L(t, z(t), z'(t)) - a)$.

$$\partial_v (L(t, z(t), z'(t)) - a) = \partial_v L(t, z(t), z'(t)),$$

por definição de subdiferencial no sentido da análise convexa. Logo,

$$\partial_w \left[ W^1_{t,z'(t)}(w) \right] |_{w=0} = \{L(t, z(t), z'(t)) - a\} - \langle z'(t), \partial_v L(t, z(t), z'(t)) \rangle.$$

Por fim,

$$\partial_w \left[W^2_{t,z'(t)}(w)\right]|_{w=0} = \partial_w \left[H^2_{t,z'(t)} \circ q(0)\right] = 1\ \partial_w H^2_{t,z'(t)}(q(0)) = \partial_w H^2_{t,z'(t)}(1)$$

$$= \{\theta(|z'(t)|) - k\} - \langle z'(t), \partial(\theta(|z'(t)|) - k)\rangle,$$

(por aplicação do teorema 19.85, com $n = m = 1$, $A(\cdot) = q(\cdot)$, $A_0 = 1$, $b = 1$, $g(\cdot) = H^2_{t,z'(t)}(\cdot)$, $A_0^* = 1$, $x = 0$, e por (2.13)). Determinemos $\partial(\theta(|z'(t)|) - k)$.

$$\partial(\theta(|z'(t)|) - k) = \partial\theta(|z'(t)|),$$

por definição de subdiferencial no sentido da análise convexa. Como $\theta(\cdot) \in C^1([0, +\infty))$ e é convexa, para $\alpha \in dom\ \theta(|\cdot|)$ temos

$$\partial\theta(|\alpha|) = \{(\theta(|\alpha|))'\},$$

pelo teorema 19.84, com $f(\cdot) = \theta(|\cdot|)$, $x = \alpha$. E como

$$(\theta(|\alpha|))' = \theta'(|\alpha|)\,|\alpha|' = \theta'(|\alpha|)\,\frac{\alpha}{|\alpha|},\ \text{para } \alpha \neq 0$$

(considerando a norma euclidiana), então

$$\partial\theta(|\alpha|) = \left\{\theta'(|\alpha|)\,\frac{\alpha}{|\alpha|}\right\}.$$

Em particular, para $t \in [0, T]\backslash N$, substituindo $\alpha$ por $z'(t)$ (já vimos que $z'(t) \in dom\ \theta(|\cdot|)$), temos

$$\partial\theta(|z'(t)|) = \left\{\theta'(|z'(t)|)\,\frac{z'(t)}{|z'(t)|}\right\}.$$

Logo,

$$\partial_w \left[W^2_{t,z'(t)}(w)\right]|_{w=0} = \{\theta(|z'(t)|) - k\} - z'(t)\ \left\{\theta'(|z'(t)|)\,\tfrac{z'(t)}{|z'(t)|}\right\}$$

$$= \left\{\theta(|z'(t)|) - k - z'(t)\,\tfrac{z'(t)}{|z'(t)|}\ \theta'(|z'(t)|)\right\}$$

$$= \left\{\theta(|z'(t)|) - k - \tfrac{|z'(t)|^2}{|z'(t)|}\ \theta'(|z'(t)|)\right\}$$

$$= \left\{\theta(|z'(t)|) - k - |z'(t)|\ \theta'(|z'(t)|)\right\}.$$

Assim,

$$\partial\widetilde{H}(0) =$$

$$= -p_1(t)\ \{1\} + \{L(t, z(t), z'(t)) - a\} - \langle z'(t), \partial_v L(t, z(t), z'(t))\rangle + r\ \left\{\theta(|z'(t)|) - k - |z'(t)|\ \theta'(|z'(t)|)\right\}.$$

Logo,

$$0 \in \partial\widetilde{H}(0) \text{ qs em } [0, T]$$

$$\Leftrightarrow 0 \in -p_1(t)\ \{1\} + \{L(t, z(t), z'(t)) - a\} - \langle z'(t), \partial_v L(t, z(t), z'(t))\rangle +$$

$$+r\ \left\{\theta(|z'(t)|) - k - |z'(t)|\ \theta'(|z'(t)|)\right\} \text{ qs em } [0, T].$$

Como por hipótese do enunciado, existe uma função $p(\cdot)$ mensurável com $p(t) \in \partial_v L(t, z(t), z'(t))$ qs em $[0,T]$ temos que

$$0 = -p_1(t) + L(t, z(t), z'(t)) - a - \langle z'(t), p(t)\rangle + r\ \theta(|z'(t)|) - r\ k - r\ |z'(t)|\ \theta'(|z'(t)|) \text{ qs em } [0,T]$$
$$\Leftrightarrow$$
$$p_1(t) = L(t, z(t), z'(t)) - a - \langle z'(t), p(t)\rangle + r\ \theta(|z'(t)|) - r\ k - r\ |z'(t)|\ \theta'(|z'(t)|) \text{ qs em } [0,T].$$

E portanto, como

$$p_1(t) = p_1(0) + \int_0^t \xi(\tau)\ d\tau,\ \forall\ t \in [0,T],$$

vem

$$p_1(0) + \textstyle\int_0^t \xi(\tau)\ d\tau = L(t, z(t), z'(t)) - a - \langle z'(t), p(t)\rangle + r\ \theta(|z'(t)|) - r\ k +$$
$$-r\ |z'(t)|\ \theta'(|z'(t)|) \text{ qs em } [0,T]$$
$$\Leftrightarrow L(t, z(t), z'(t)) - \langle z'(t), p(t)\rangle + r\ \theta(|z'(t)|) - r\ |z'(t)|\ \theta'(|z'(t)|) = c +$$
$$+ \textstyle\int_0^t \xi(\tau)\ d\tau \text{ qs em } [0,T],$$

para $c = p_1(0) + a + r\ k$.

$\therefore$ Provámos que : existe $\xi(\cdot) : [0,T] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\xi(t) := p_1'(t) \text{ qs em } [0,T]$$

integrável tal que

$$\xi(t) \in \partial_t L(t, z(t), z'(t)) \text{ qs em } [0,T];$$

existe $p(\cdot) : [0,T] \to \mathbb{R}$ dada por

$$p_1(t) := p_1(0) + \int_0^t \xi(\tau)\ d\tau$$

com $p(t) \in \partial_v L(t, z(t), z'(t))$ qs em $[0,T]$; e existe $c = p_1(0) + a + r\ k \in \mathbb{R}$ tais que

$$L(t, z(t), z'(t)) - \langle z'(t), p(t)\rangle + r\theta(|z'(t)|) - r\,|z'(t)|\,\theta'(|z'(t)|) = c + \int_0^t \xi(\tau)\,d\tau \text{ qs em } [0,T].\ \blacksquare$$

## 2.2. Continuidade da derivada no caso especial $n = 1$

**Corolário 2.2.** *Suponhamos, além das hipóteses do teorema 2.1, que $n = 1$ e valem as seguintes hipóteses extra :*

*(A) $x(t) \in int\ \Omega\ \forall\ t \in [0,T]$ para qualquer $x(\cdot)$ em $\Gamma(\overline{x}(\cdot))$;*

*(B) $L(\cdot)$ é localmente lipschitziana em $(t,s,v)$ e, existem constantes $k_0$ e $c_0$ tais que*

$$|\partial_s L(t,s,v)| \leq k_0\ |L(t,s,v)| + c_0,\ \forall\ (t,s,v) \in [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^n;$$

$$(HE_2)'' \left\{ \begin{array}{l} \text{para algum } k > k_0 := \sup\left\{\frac{|x_2 - x_1|}{T} : (x_1,x_2) \in C\right\}, \text{ vale} \\ (*)' \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{\beta\to\infty} \sup\limits_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K, |v|>\beta,\\ t\in[0,T]}} \{L(t,s,v) - \langle v, \partial_v L(t,s,v)\rangle\} + \{\lambda\ \Lambda(\overline{x}(\cdot)) + \eta\ T\} < \\ \qquad < \inf\limits_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K, |v|<k,\\ t\in[0,T]}} \{L(t,s,v) - \langle v, \partial_v L(t,s,v)\rangle\}. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

*Então, além das conclusões do teorema 2.1 em particular (2.2), $z(\cdot)$ é $C^1$.*

**Demonstração :**

No contexto descrito na demonstração do teorema 2.1, vamos agora procurar aplicar as condições necessárias do teorema 2.3 directamente ao problema, sem o reduzir a um problema de dimensão 1, através da transformação de Erdmann. Comecemos por mostrar que $z'(\cdot)$ é essencialmente limitada (com a presença de $(*)'$), isto é, que

$$\exists\ R > 0 : |z'(t)| \leq R \text{ qs em } [0,T].$$

Pelo teorema 2.1, a equação (2.2) é válida para qualquer $n$, em particular vale para $n = 1$. Como

$$L(t,x(t),x'(t)) - z'(t) \cdot \partial_v L(t,x(t),x'(t)) \leq L(t,z(t),0),$$

vem, para quase todo o $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned} c + \int_0^t \xi(\tau)\ d\tau &= L(t,z(t),z'(t)) - z'(t) \cdot \partial_v L(t,x(t),x'(t)) + r\left[\theta(|z'(t)|) - |z'(t)|\ \theta'(|z'(t)|)\right] \\ &\leq L(t,z(t),0) + r\left[\theta(|z'(t)|) - |z'(t)|\ \theta'(|z'(t)|)\right]. \end{aligned}$$

Então

$$r\left[\theta(|z'(t)|) - |z'(t)|\ \theta'(|z'(t)|)\right] \geq c + \int_0^t \xi(\tau)\ d\tau - L(t,z(t),0) \geq c. \tag{2.14}$$

Como $L(t,z(t),0)$ é limitada superiormente, logo

$$\exists\ c_1 \in \mathbb{R} : L(t,z(t),0) \leq c_1.$$

Com

$$q(r) := \theta(r) - r\ \theta'(r),$$

a desigualdade (2.14) é equivalente a

$$q(|z'(t)|) \geq \frac{1}{r}\left[c + \int_0^t \xi(\tau)\ d\tau - c_1\right]\ (r > 0).$$

Então, usando a inversa $\rho(\cdot)$ de $q(\cdot)$, isto é

$$s = q(r) \Leftrightarrow r = \rho(q),$$

vem

$$|z'(t)| \leq \rho\left(\frac{1}{r}\left[c + \int_0^t \xi(\tau)\ d\tau - c_1\right]\right)$$

(Nota : troca o sinal das desigualdades porque $q(\cdot)$, logo $\rho(\cdot)$, édecrescente)

e como o lado direito está em $L^\infty([0,T],\mathbb{R})$, também o lado esquerdo, isto é, $z'(\cdot) \in L^\infty([0,T],\mathbb{R})$.

Consideremos o problema de controlo óptimo, cujo estado é $x(\cdot) \in \mathbb{R}$ e cuja dinâmica é

$$\frac{dx}{dt} = \theta(|v(t)|).$$

O controlo $v$ está sujeito a $|v(t)| \leq R$ qs ($R$ é a constante escolhida para $z'(\cdot)$ essencialmente limitada), e a condição de fronteira é $x(0) = 0$. Consideremos então o problema :

$$(P_1)\ \text{minimizar}\ \overline{\psi}(x(T)) + \int_0^T \overline{L}(t, x(t), v(t))\ dt =: \overline{j}(x(\cdot), v(\cdot))$$

com as restrições

$$v(t) \in U(t)\ \text{ qs em } [0,T],$$
$$x'(t) = \phi(t, x(t), v(t))\ \text{ qs em } [0,T],$$
$$x(0) \in \overline{C}_0, \qquad x(T) \in \overline{C}_1,$$

onde :

($a_1$) $x : [0,T] \to \mathbb{R}$ é AC;
($b_1$) $v : [0,T] \to \mathbb{R}$ é mensurável;
($c_1$) $U : [0,T] \to 2^{\mathbb{R}}$ é a multifunção tal que $v(t) \in K \cap [-R, R]$;
($d_1$) $\overline{\psi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $\overline{\psi}(x) := \sigma\ |x - \Lambda_\theta(z(\cdot))|^2$;
($e_1$) $\overline{L} : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $\overline{L}(t,x,v) \equiv \overline{L}(t,v)$ é dada por

$$\overline{L}(t,x,v) := \begin{cases} L(t, z(t), v) + r\ \theta(|v|) & \text{se } \begin{cases} t \in [0,T] \backslash N \\ v \in dom\ L(t, z(t), \cdot) \\ |v| \leq R \end{cases} \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

(relembremos que

$$N := \{t \in [0,T] : z'(t) \text{ não existe ou } z'(t) \notin dom\ L(t, z(t), \cdot)\}\ );$$

($f_1$) $\overline{\phi} : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $\overline{\phi}(t,x,v) \equiv \overline{\phi}(v)$ é dada por

$$\phi(t,v) := \begin{cases} v & \text{se } \begin{cases} t \in [0,T] \backslash N \\ |v| \leq R \end{cases} \\ 0 & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

($g_1$) $\overline{C}_0 := \{0\}$ e $\overline{C}_1 := \mathbb{R}$.

Consideremos as funções $\overline{\overline{v}}, \overline{\overline{x}} : [0,T] \to \mathbb{R}$ dadas por

$$\overline{\overline{v}}(t) := z'(t),$$

$$\overline{\overline{x}}(t) := \int_0^t \theta(|z'(\tau)|)\ d\tau,$$

respectivamente, pelo que $\overline{\overline{x}}(\cdot)$ é o estado correspondente ao controlo $\overline{\overline{v}}(\cdot)$.

Vamos ver que as funções $\overline{\overline{v}}(\cdot)$, $\overline{\overline{x}}(\cdot)$ são admissíveis. Notemos que as soluções da equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \theta(|v(t)|)$$

são da forma :

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \theta(|v(\tau)|)\ d\tau = \int_0^t \theta(|v(\tau)|)\ d\tau.$$

Verifica-se a condição de fronteira : $\overline{\overline{x}}(0) = 0$.

Também, temos as restrições :

$$\overline{\overline{v}}(t) = z'(t) \in K \cap [-R,R] \text{ qs em } [0,T];$$

$$\overline{\overline{x}}'(t) = \theta(|z'(t)|) = \overline{\phi}(t, \overline{\overline{x}}(t), \overline{\overline{v}}(t)) = \overline{\phi}(\overline{\overline{v}}(t)) \text{ qs em } [0,T];$$

$$\overline{\overline{x}}(0) = 0 \in \overline{C}_0, \qquad \overline{\overline{x}}(T) = \int_0^T \theta(|z'(\tau)|)\ d\tau \in \overline{C}_1.$$

Verifiquemos que o controlo $\overline{\overline{v}}(\cdot)$ e o seu correspondente estado $\overline{\overline{x}}(\cdot)$ resolvem o problema $(P_1)$. Sejam $v(t) \in K \cap [-R,R]$ qs em $[0,T]$ um qualquer controlo e o seu estado correspondente $x(\cdot)$. Então temos que $x(\cdot)$ é AC, $|v(t)| \le R$ qs em $[0,T]$, $x(t) = \int_0^t \theta(|v(\tau)|)\ d\tau$, $x(0) = 0$ e $(x(\cdot), v(\cdot))$ verifica as restrições do problema $(P_1)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\overline{J}(\overline{\overline{x}}(\cdot), \overline{\overline{v}}(\cdot)) &= \overline{\psi}(\overline{\overline{x}}(T)) + \int_0^T \overline{L}(t, \overline{\overline{x}}(t), \overline{\overline{v}}(t))\ dt \\
&= \sigma \left| \int_0^T \theta(|z'(\tau)|)\ d\tau - \int_0^T \theta(|z'(\tau)|)\ d\tau \right|^2 + \\
&\quad + \int_0^T \left[ L(t, z(t), \overline{\overline{v}}(t)) + r\ \theta\left(\left|\overline{\overline{v}}(t)\right|\right) \right] dt \\
&= \int_0^T L(t, z(t), \overline{\overline{v}}(t))\ dt + r \int_0^T \theta\left(\left|\overline{\overline{v}}(t)\right|\right)\ dt \\
&= \int_0^T L(t, z(t), z'(t))\ dt + r \int_0^T \theta(|z'(t)|)\ dt \ (\text{pois } \overline{\overline{v}}(t) = z'(t)) \\
&= \Lambda(z(\cdot)) + r\ \Lambda_\theta(z(\cdot)) \\
&= f(z(\cdot))
\end{aligned}$$

e por hipótese

$$f(x(\cdot)) \ge f(z(\cdot)) \ \forall\ x(\cdot) \in \Gamma(\overline{x}(\cdot)),$$

donde

$$\begin{aligned}
\overline{j}\left(\overline{\overline{x}}(\cdot),\overline{v}(\cdot)\right) &= f(z(\cdot)) \le f(x(\cdot)) \\
&= \Lambda(x(\cdot)) + r\ \Lambda_\theta(x(\cdot)) + \sigma\ \left|\Lambda_\theta(x(\cdot)) - \Lambda_\theta(z(\cdot))\right|^2 \\
&= \int_0^T L(t, x(t), x'(t))\ dt + r \int_0^T \theta(|x'(t)|)\ dt + \\
&\quad + \sigma \left| \int_0^T \theta(|x'(t)|)\ dt - \int_0^T \theta(|z'(\tau)|)\ d\tau \right|^2 \\
&= \int_0^T L(t, x(t), v(t))\ dt + r \int_0^T \theta(|v(t)|)\ dt + \\
&\quad + \sigma\ |x(T) - \Lambda_\theta(z(\cdot))|^2 \\
\text{(isto era verdade se } x'(t) &= v(t), \text{ o que não é o caso)} \\
&= \overline{j}(x(\cdot), v(\cdot)).
\end{aligned}$$

Outra possibilidade era considerar o problema :

$$(P_1)\ \text{minimizar } \overline{\psi}(x(T)) + \int_0^T \overline{L}(t, x(t), v(t))\ dt =: \overline{j}(x(\cdot), v(\cdot)) = \overline{j}((x_1(\cdot), x_2(\cdot)), v(\cdot))$$

com as restrições

$$v(t) \in U(t) \text{ qs em } [0,T],$$
$$(x_1'(t), x_2'(t)) = \phi(t, x(t), v(t)) \text{ qs em } [0,T],$$
$$(x_1(0), x_2(0)) = x(0) \in \overline{C}_0, \qquad (x_1(T), x_2(T)) = x(T) \in \overline{C}_1,$$

onde :

(a$_1$) $x : [0,T] \to \mathbb{R}^2$ é AC;
(b$_1$) $v : [0,T] \to \mathbb{R}$ é mensurável;
(c$_1$) $U : [0,T] \to 2^{\mathbb{R}}$ é a multifunção tal que $v(t) \in K \cap [-R, R]$;
(d$_1$) $\overline{\psi} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é dada por $\overline{\psi}(x) = \overline{\psi}(x_1, x_2) \equiv \overline{\psi}(x_2) := \sigma\ |x_2 - \Lambda_\theta(z(\cdot))|^2$;
(e$_1$) $\overline{L} : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $\overline{L}(t, x, v) = \overline{L}(t, (x_1, x_2), v) \equiv \overline{L}(t, x_1, v)$ é dada por

$$\overline{L}(t, x_1, v) := \begin{cases} L(t, x_1, v) + r\ \theta(|v|) & \text{se } \begin{cases} t \in [0,T] \backslash N \\ v \in dom\ L(t, x_1, \cdot) \\ |v| \le R \end{cases} \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

(relembremos que

$$N := \{t \in [0,T] : z'(t) \text{ não existe ou } z'(t) \notin dom\ L(t, z(t), \cdot)\}\ ) ;$$

(f$_1$) $\overline{\phi} : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ com $\overline{\phi}(t, x, v) \equiv \overline{\phi}(v)$ é dada por

$$\phi(t, v) := \begin{cases} (v, \theta(|v|)) & \text{se } \begin{cases} t \in [0,T] \backslash N \\ |v| \le R \end{cases} \\ (0,0) & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

(g$_1$) $\overline{C}_0 := \{(0,0)\}$ e $\overline{C}_1 := \{T\} \times \mathbb{R}$.

Assim, o funcional a minimizar é :

$$\begin{aligned}
\overline{J}(x(\cdot), v(\cdot)) &= \overline{J}((x_1(\cdot), x_2(\cdot)), v(\cdot)) \\
&= \overline{\psi}((x_1(T), x_2(T))) + \int_0^T \overline{L}(t, (x_1(t), x_2(t)), v(t))\ dt \\
&= \overline{\psi}(x_2(T)) + \int_0^T \overline{L}(t, x_1(t), v(t))\ dt \\
&= \sigma\ |x_2(T) - \Lambda_\theta(z(\cdot))|^2 + \\
&\quad + \int_0^T [L(t, x_1(t), v(t)) + r\ \theta(|v(t)|)]\ dt,
\end{aligned}$$

com as restrições :

$$x_1'(t) = v(t), \qquad x_2'(t) = \theta(|v(t)|);$$
$$x_1(0) = z(0) = x_0, \qquad x_1(T) = z(T) = x_T, \qquad x_2(0) = 0.$$

Consideremos as funções $\overline{\overline{v}}$, $\overline{\overline{x}}_1$, $\overline{\overline{x}}_2 : [0,T] \to \mathbb{R}$ dadas por

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{v}}(t) &:= z'(t), \\
\overline{\overline{x}}_1(t) &:= z(t), \\
\overline{\overline{x}}_2(t) &:= \int_0^t \theta(|z'(\tau)|)\ d\tau,
\end{aligned}$$

respectivamente, pelo que $\overline{\overline{x}}(\cdot) = \left(\overline{\overline{x}}_1(\cdot), \overline{\overline{x}}_2(\cdot)\right)$ é o estado correspondente ao controlo $\overline{\overline{v}}(\cdot)$.

Vamos ver que $\left(\overline{\overline{x}}(\cdot), \overline{\overline{v}}(\cdot)\right) = \left(\left(\overline{\overline{x}}_1(\cdot), \overline{\overline{x}}_2(\cdot)\right), \overline{\overline{v}}(\cdot)\right)$ é solução para $(P_1)$. Notemos que as soluções das equações diferenciais $x_1'(t) = v(t)$ e $x_2'(t) = \theta(|v(t)|)$ são da forma :

$$x_1(t) = x_1(0) + \int_0^t x_1'(\tau)\ d\tau = z(0) + \int_0^t v(\tau)\ d\tau,$$

$$x_2(t) = x_2(0) + \int_0^t x_2'(\tau)\ d\tau = \int_0^t \theta(|v(t)|)\ d\tau,$$

respectivamente.

Também, temos as restrições :

$$\overline{\overline{v}}(t) = z'(t) \in K \cap [-R, R] \text{ qs em } [0,T];$$

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{x}}'(t) &= \left(\overline{\overline{x}}_1'(t), \overline{\overline{x}}_2'(t)\right) = (z'(t), \theta(|z'(t)|)) = \left(\overline{\overline{v}}(t), \theta\left(\left|\overline{\overline{v}}(t)\right|\right)\right) \\
&= \overline{\phi}\left(t, \left(\overline{\overline{x}}_1(t), \overline{\overline{x}}_2(t)\right), \overline{\overline{v}}(t)\right) = \overline{\phi}\left(\overline{\overline{v}}(t)\right) \text{ qs em } [0,T].
\end{aligned}$$

Verifiquemos que o controlo $\overline{\overline{v}}(\cdot)$ e o seu correspondente estado $\overline{\overline{x}}(\cdot) = \left(\overline{\overline{x}}_1(\cdot), \overline{\overline{x}}_2(\cdot)\right)$ resolvem o problema $(P_1)$. Sejam $v(t) \in K \cap [-R, R]$ qs em $[0,T]$ um qualquer controlo e o seu estado correspondente $x(\cdot) = (x_1(\cdot), x_2(\cdot))$. Então temos que $x(\cdot)$ é AC, $|v(t)| \leq R$ qs em $[0,T]$, $x_1(t) = z(0) + \int_0^t v(\tau)\ d\tau$,

$x_2(t) = \int_0^t \theta(|v(\tau)|)\, d\tau$, $x_1(0) = z(0)$, $x_1(T) = z(T)$, $x_2(0) = 0$. No entanto, com as restrições do funcional $\bar{\jmath}(x(\cdot), v(\cdot))$ vem

$$\bar{\jmath}(x(\cdot), v(\cdot)) = \sigma \left| \int_0^t \theta(|x_1'(\tau)|)\, d\tau - \Lambda_\theta(z(\cdot)) \right|^2 + \int_0^T [L(t, x_1(t), v(t)) + r\ \theta(|v(t)|)]\ dt,$$

e portanto, depende apenas da função coordenada $x_1(\cdot)$. Quando verificamos as restrições do problema $(\mathcal{P})$, temos :

$$x_1'(t) = v(t) \in K \text{ qs (pois } v(t) \in K \cap [-R, R]\text{)};$$

$$(x_1(0), x_1(T)) = (x_0, x_T) \in C.$$

O nosso objectivo é aplicar as condições necessárias do teorema 2.3, cujas hipóteses temos de verificar. E consequentemente podemos deduzir a existência de uma função $p(\cdot)$ tal que para $t$ qs, o máximo

$$\max_{v\in K} \{p(t) \cdot v - \lambda_0\ L(t, z(t), v) - \lambda_0\ r\ \theta(|v|)\}$$

ocorre em $v = z'(t)$, onde $\lambda_0 \in \{0, 1\}$, e onde $p$ não é zero se $\lambda_0 = 0$. A função $p(\cdot)$ também satisfaz a equação adjunta

$$p'(t) \in \lambda_0\ \partial_x L(t, z(t), z'(t)) \text{ qs.}$$

Mostremos que, de facto, isso acontece. Para tal definimos o Hamiltoniano $H : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$H(t, x, p, v, \lambda_0) := p \cdot v - \lambda_0\ [L(t, z(t), v) + r\ \theta(|v|)].$$

Então, pelo teorema 2.3, existe um escalar $\lambda_0 \in \{0, 1\}$, uma função $p : [0, T] \to \mathbb{R}$ AC tais que $H(t, \bar{x}(t), p(t), \cdot, \lambda_0)$ é maximizado em $v = z'(t)$, isto é,

$$\begin{aligned} \max_{v\in K} \{H(t, \bar{x}(t), p(t), v, \lambda_0) : v \in U(t)\} &= H(t, \bar{x}(t), p(t), z'(t), \lambda_0) \text{ qs em } [0, T] \\ &\Leftrightarrow \\ \max_{v\in K} \{p(t) \cdot v - \lambda_0\ L(t, z(t), v) - \lambda_0\ r\ \theta(|v|)\} &= p(t) \cdot z'(t) - \lambda_0\ L(t, z(t), z'(t)) - \lambda_0\ r\ \theta(|z'(t)|) \\ &\quad \text{qs em } [0, T]. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Se $\lambda_0 = 0$ vem

$$\max_{v\in K} \{p(t) \cdot v\} = p(t) \cdot z'(t) \text{ qs em } [0, T],$$

então

$$p(t) \cdot v \leq p(t) \cdot z'(t) \text{ qs em } [0, T], \forall\ v \in K. \tag{2.16}$$

Também, pelo teorema 2.3, vem :

$$\max_{t\in[0,T]} |p(t)| + \lambda_0 > 0.$$

Notemos que, de facto, $\max_{t\in[0,T]} |p(t)|$ existe, pois $p(\cdot)$ é AC, em particular é contínua e está definida num intervalo fechado e limitado $[0, T]$. Se $\lambda_0 = 0$, então

$$\max_{t\in[0,T]} |p(t)| > 0,$$

logo não podemos ter $p(t) = 0$ para qualquer $t \in [0, T]$. Além disso, pelo teorema 2.3, temos que $p(\cdot)$ satisfaz a equação adjunta

$$-p'(t) \in \partial_x H(t, \bar{x}(t), p(t), z'(t), \lambda_0) \text{ qs em } [0, T]$$

$$\Leftrightarrow \quad -p'(t) \in -\lambda_0\ \partial_x L(t, z(t), z'(t)) \text{ qs em } [0, T]$$

$$\Leftrightarrow \quad p'(t) \in \lambda_0\ \partial_x L(t, z(t), z'(t)) \text{ qs em } [0, T].$$

Então

$$\lambda_0 = 0 \Rightarrow p'(t) = 0 \text{ qs em } [0,T] \Rightarrow p(t) = c \text{ qs em } [0,T],\ c \in \mathbb{R}.$$

E como $p(\cdot)$ é AC, em particular é contínua, donde

$$p(t) = c,\ \forall\ t \in [0,T],\ c \in \mathbb{R}. \tag{2.17}$$

Logo, juntando (2.16) e (2.17) temos

$$p(t) = 0 \text{ qs em } [0,T].$$

E como $p(\cdot)$ é AC, em particular é contínua, então

$$p(t) = 0,\ \forall\ t \in [0,T],$$

o que não pode acontecer, pois já vimos que não podemos ter $p(t) = 0$ para qualquer $t \in [0,T]$.

Suponhamos primeiro que $\lambda_0 = 0$. Então segue do que está acima que $p(t) \equiv p_0 \neq 0$, $p_0 \in \mathbb{R}$. Atendendo à condição de máximo, podemos agora assegurar que $z'(t) = 0$ qs, dado que o único ponto num cone $K$ em $\mathbb{R}$ que admite um vector normal não-nulo é a origem. De facto, notando que

$$\max_{v\in K}\{p(t)\cdot v\} = p(t)\cdot z'(t) \text{ qs em } [0,T] \Leftrightarrow \max_{v\in K}\{p_0\cdot v\} = p_0\cdot z'(t) \text{ qs em } [0,T],$$

logo,

$$p_0\cdot v \leq p_0\cdot z'(t) \text{ qs em } [0,T],\ \forall\ v \in K,\ p_0 \neq 0,$$

isto é,

$$(v - z'(t))\cdot p_0 \leq 0 \text{ qs em } [0,T],\ \forall\ v \in K,\ p_0 \neq 0. \tag{2.18}$$

Como $K$ é convexo, o cone normal de Clarke de $K$ num ponto coincide com o cone normal no sentido da análise convexa, pela proposição 22.18, com $C = K$. Além disso, o único ponto num cone $K$ em $\mathbb{R}$ que admite vector normal não-nulo é a origem, então de (2.18) temos que

$$z'(t) = 0 \text{ qs em } [0,T].$$

Logo,

$$z(t) = c \text{ qs em } [0,T],\ c \in \mathbb{R}.$$

E como $z(\cdot)$ é AC, em particular é contínua, vem

$$z(t) = c,\ \forall\ t \in [0,T],\ c \in \mathbb{R}.$$

Consequentemente,

$$z'(t) = 0,\ \forall\ t \in [0,T].$$

Então, $z'(\cdot)$ é contínua. E portanto, $z(\cdot)$ é $C^1$.

Vamos agora examinar o caso $\lambda_0 = 1$. Seja $g : [0,T] \times \mathbb{R} \rightarrow (-\infty,+\infty]$ a função dada por

$$g(t,v) := \begin{cases} L(t,z(t),v) + r\ \theta(|v|) & \text{se } v \in K \\ +\infty & \text{se } v \notin K. \end{cases}$$

Comecemos por mostrar que $g(t,\cdot)$ é estritamente convexa. Por hipótese, para cada $s \in \Omega$, a função $L(t,s,\cdot)$ é convexa, $\forall\ t \in [0,T]$. Então, para cada $z(t) \in \Omega$,

$$L(t,z(t),\lambda\, v_1 + (1-\lambda)\ v_2) \leq \lambda\ L(t,z(t),v_1) + (1-\lambda)\ L(t,z(t),v_2),\ \forall\ v_1, v_2 \in K,\ \forall\ \lambda \in (0,1), \tag{2.19}$$

para qualquer $t \in [0,T]$. Também, por hipótese, $\theta(\cdot)$ é estritamente convexa, logo

$$\theta(\lambda\, v_1 + (1-\lambda)\; v_2) < \lambda\, \theta(v_1) + (1-\lambda)\; \theta(v_2)\,, \forall\, v_1,\, v_2 \in K, \forall\, \lambda \in (0,1)\,. \tag{2.20}$$

E como $|\cdot|$ é a norma em $\mathbb{R}$, verifica a propriedade de homogeneidade e a desigualdade triangular, então

$$|\lambda\, v_1 + (1-\lambda)\; v_2| \leq \lambda\; |v_1| + (1-\lambda)\; |v_2|\,, \forall\, v_1,\, v_2 \in K, \forall\, \lambda \in (0,1)\,. \tag{2.21}$$

Sejam $v_1,\, v_2 \in K$ e $\lambda \in (0,1)$ quaisquer, então

$$\begin{aligned}
g(t, \lambda\, v_1 + (1-\lambda)\; v_2) &= L(t, z(t), \lambda\, v_1 + (1-\lambda)\; v_2) + r\; \theta(|\lambda\, v_1 + (1-\lambda)\; v_2|) \\
&\leq \lambda\; L(t, z(t), v_1) + (1-\lambda)\; L(t, z(t), v_2) + \\
&\quad + r\; \theta(\lambda\; |v_1| + (1-\lambda)\; |v_2|) \text{ (por (2.19)) e por (2.21)} \\
&< \lambda\; L(t, z(t), v_1) + (1-\lambda)\; L(t, z(t), v_2) + \\
&\quad + r\; (\lambda\; \theta(|v_1|) + (1-\lambda)\; \theta(|v_2|)) \text{ (por (2.20))} \\
&= \lambda\; [L(t, z(t), v_1) + r\; \theta(|v_1|)] + (1-\lambda)\; [L(t, z(t), v_2) + r\; \theta(|v_2|)] \\
&= \lambda\; g(t, v_1) + (1-\lambda)\; g(t, v_2)\,.
\end{aligned}$$

E portanto,

$$g(t, \lambda\, v_1 + (1-\lambda)\; v_2) < \lambda\; g(t, v_1) + (1-\lambda)\; g(t, v_2)\,, \forall\, v_1,\, v_2 \in K, \forall\, \lambda \in (0,1)\,,$$

como pretendido.

Se substituirmos $\lambda_0 = 1$ na condição de máximo (2.15) temos

$$\begin{aligned}
\max_{v \in K} \{p(t) \cdot v - L(t, z(t), v) - r\; \theta(|v|)\} &= p(t) \cdot z'(t) - L(t, z(t), z'(t)) - r\; \theta(|z'(t)|) \text{ qs em } [0,T] \\
&\Leftrightarrow \\
\max_{v \in K} \{p(t) \cdot v - g(t, v)\} &= p(t) \cdot z'(t) - g(t, z'(t)) \text{ qs em } [0,T]\,.
\end{aligned}$$

Então,

$$p(t) \cdot v - g(t, v) \leq p(t) \cdot z'(t) - g(t, z'(t)) \text{ qs em } [0,T] \;\forall\, v \in K,$$

isto é,

$$g(t, v) \geq g(t, z'(t)) + p(t) \cdot (v - z'(t)) \text{ qs em } [0,T] \;\forall\, v \in K,$$

logo

$$p(t) \in \partial_v g(t, z'(t)) \text{ qs em } [0,T]\,, \tag{2.22}$$

uma vez que $g(t, \cdot)$ é estritamente convexa. Finalmente, a convexidade estrita de $g(t, \cdot)$ implica a continuidade de $z'(\cdot)$; o argumento é dado em [[14], p. 86]. Mostremos que, de facto, isso acontece. De (2.22) e por aplicação do teorema 19.83, com $x^* = p(t)$, $f(\cdot) = g(t, \cdot)$, $x = z'(t)$, $z = v$, resulta que para cada $v \in K$, a função

$$v \longmapsto p(t) \cdot v - g(t, v)$$

atinge o seu supremo em $v = z'(t)$ qs. Mais ainda, como a função $v \longmapsto -p(t) \cdot v$ é afim, então é convexa, e como $g(t, \cdot)$ é estritamente convexa resulta que a função

$$v \longmapsto -p(t) \cdot v + g(t, v)$$

é estritamente convexa, pela proposição 2.18, com $g(\cdot) = g(t, \cdot)$ e $f$ igual à função $v \longmapsto -p(t) \cdot v$. E portanto, a função

$$v \longmapsto p(t) \cdot v - g(t, v)$$

é estritamente côncava, pela nota 19.57. Consequentemente,

$$\max_{v \in K} \{p(t) \cdot v - g(t, v)\} = p(t) \cdot z'(t) - g(t, z'(t)) \text{ qs em } [0, T].$$

Suponhamos que $z'(\cdot)$ tem outro tipo de descontinuidades removíveis, então, tendo em conta a proposição 16.5, com $f(\cdot) = z'(\cdot)$, podemos encontrar duas sucessões $(c_j)$, $(d_j)$ em $[0, T]$ tais que :

$$\lim_{j \to \infty} c_j = \overline{r} = \lim_{j \to \infty} d_j;$$

$$p(c_j) \in \partial_v g(c_j, z'(c_j)) \text{ qs em } [0, T];$$
$$p(d_j) \in \partial_v g(d_j, z'(d_j)) \text{ qs em } [0, T];$$
$$\lim_{j \to \infty} z'(c_j) =: \alpha \neq \beta := \lim_{j \to \infty} z'(d_j). \tag{2.23}$$

Seja $v$ um qualquer ponto tal que $v \in K$. Então escrevemos

$$p(c_j) \cdot v - g(c_j, v) \leq p(c_j) \cdot z'(c_j) - g(c_j, z'(c_j)), \ \forall\, v \in K, \text{ com } z'(c_j) \in K \tag{2.24}$$

e

$$p(d_j) \cdot v - g(d_j, v) \leq p(d_j) \cdot z'(d_j) - g(d_j, z'(d_j)), \ \forall\, v \in K, \text{ com } z'(d_j) \in K. \tag{2.25}$$

Mostremos que a sucessão $g(c_j, z'(c_j))$ tem o mesmo limite que a sucessão $g(c_j, \alpha)$ denominado por $g(\overline{r}, \alpha)$. Primeiro vamos mostrar que

$$\lim_{j \to \infty} g(c_j, \alpha) = g(\overline{r}, \alpha),$$

isto é,

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, M > 0, \forall\, j \in \mathbb{N} : j > M \Rightarrow |g(c_j, \alpha) - g(\overline{r}, \alpha)| < \varepsilon.$$

Pela hipótese extra $(B)$, $L(\cdot)$ é localmente lipschitziana em $(t, s, v)$, então $L(\cdot)$ é localmente lipschitziana em $(t, s)$, pela proposição 2.19, com $h(\cdot) = L(\cdot)$, $g(\cdot) = L(\cdot, \cdot, v)$, $x_1 = t$, $x_2 = s$, $x_3 = v$. Logo, existem $\delta > 0$, $k > 0$ tais que

$$|L(t_1, s_1, v) - L(t_2, s_2, v)| \leq k\, |(t_1, s_1) - (t_2, s_2)|,$$

para quaisquer $(t_1, s_1)$, $(t_2, s_2) \in (t, s) + \delta B$. E portanto,

$$\begin{gathered} \exists\, \delta > 0, \exists\, k > 0 : |L(c_j, z(c_j), \alpha) - L(\overline{r}, z(\overline{r}), \alpha)| \leq k\, |(c_j, z(c_j)) - (\overline{r}, z(\overline{r}))|, \\ \forall\ (c_j, z(c_j)),\ (\overline{r}, z(\overline{r})) \in (t, z(t)) + \delta B. \end{gathered} \tag{2.26}$$

Além disso,

$$\lim_{j \to \infty} c_j = \overline{r},$$

isto é,

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, M_1 > 0, \forall\, j \in \mathbb{N} : j > M_1 \Rightarrow |c_j - \overline{r}| < \frac{\varepsilon}{2k}. \tag{2.27}$$

Então, como $z(\cdot)$ é AC, em particular é contínua e temos

$$\lim_{j \to \infty} z(c_j) = z(\overline{r}),$$

ou seja,

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, M_2 > 0, \forall\, j \in \mathbb{N} : j > M_2 \Rightarrow |z(c_j) - z(\overline{r})| < \frac{\varepsilon}{2k}. \tag{2.28}$$

Assim, fixado $\varepsilon > 0$, existe $M = \min\{M_1, M_2\}$ tais que para quaisquer $(c_j, z(c_j))$, $(\overline{r}, z(\overline{r})) \in (t, z(t)) + \delta B$, para $\delta > 0$, temos :

$$\begin{aligned}
|g(c_j,\alpha) - g(\overline{r},\alpha)| &= |[L(c_j, z(c_j), \alpha) + r\ \theta(|\alpha|)] - [L(\overline{r}, z(\overline{r}), \alpha) + r\ \theta(|\alpha|)]| \\
&= |L(c_j, z(c_j), \alpha) - L(\overline{r}, z(\overline{r}), \alpha)| \\
&\leq k\,|(c_j, z(c_j)) - (\overline{r}, z(\overline{r}))| \text{ (por (2.26))} \\
&= k\,|c_j - \overline{r}| + k\,|z(c_j) - z(\overline{r})| \text{ (pela norma da soma)} \\
&\leq k\frac{\varepsilon}{2k} + k\frac{\varepsilon}{2k} = \varepsilon \text{ (por (2.27) e (2.28)).}
\end{aligned}$$

E temos o pretendido. Agora vamos mostrar que

$$\lim_{j\to\infty} g(c_j, z'(c_j)) = g(\overline{r}, \alpha), \tag{2.29}$$

isto é,

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ N > 0,\ \forall\ j \in \mathbb{N} : j > N \Rightarrow |g(c_j, z'(c_j)) - g(\overline{r}, v)| < \varepsilon.$$

Sabemos que

$$\lim_{j\to\infty} g(c_j, \alpha) = g(\overline{r}, \alpha),$$

isto é,

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ N_1 > 0,\ \forall\ j \in \mathbb{N} : j > N_1 \Rightarrow |g(c_j,\alpha) - g(\overline{r},\alpha)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.30}$$

Por hipótese, $\theta(\cdot) \in C^1([0, +\infty), \mathbb{R})$ e $|\cdot|$ é contínua, logo $\theta(|\cdot|)$ é contínua, pois é a composição de duas funções contínuas. E como $\lim_{j\to\infty} z'(c_j) = \alpha$, então

$$\lim_{j\to\infty} \theta(|z'(c_j)|) = \theta(|\alpha|),$$

isto é,

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ N_2 > 0,\ \forall\ j \in \mathbb{N} : j > N_2 \Rightarrow |\theta(|z'(c_j)|) - \theta(|\alpha|)| < \frac{\varepsilon}{3r}. \tag{2.31}$$

Também, por hipótese, para cada $s \in \Omega$, a função $L(t, s, \cdot)$ é convexa e o domínio *dom* $L(t, s, \cdot)$ é um conjunto aberto, convexo e não-vazio, para qualquer $t \in [0, T]$. Então, para cada $z(t) \in \Omega$, a função $L(t, z(t), \cdot)$ é convexa e o domínio *dom* $L(t, z(t), \cdot)$ é um conjunto aberto, convexo e não-vazio, para qualquer $t \in [0, T]$. E como $K \subset$ *dom* $L(t, z(t), \cdot)$, então a função $L(t, z(t), \cdot)$ é contínua em $K$, pelo teorema 19.70, com $n = 1$, $f(\cdot) = L(t, z(t), \cdot)$, $C = K$. Temos também $\lim_{j\to\infty} z'(c_j) = \alpha$, então

$$\lim_{j\to\infty} L(c_j, z(c_j), z'(c_j)) = L(c_j, z(c_j), \alpha),$$

isto é,

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ N_3 > 0,\ \forall\ j \in \mathbb{N} : j > N_3 \Rightarrow |L(c_j, z(c_j), z'(c_j)) - L(c_j, z(c_j), \alpha)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.32}$$

Assim, fixemos $\varepsilon > 0$, para o qual existe $N = \min\{N_1, N_2, N_3\} > 0$. Então, para qualquer $j \in \mathbb{N}$ tal que $j > N$, temos :

$$\begin{aligned}
|g(c_j, z'(c_j)) - g(\overline{r}, \alpha)| &\leq |g(c_j, z'(c_j)) - g(c_j, \alpha)| + |g(c_j, \alpha) - g(\overline{r}, \alpha)| \\
&\leq |[L(c_j, z(c_j), z'(c_j)) + r\,\theta(|z'(c_j)|)] - [L(c_j, z(c_j), \alpha) + r\,\theta(|\alpha|)]| + \\
&\quad + |g(c_j, \alpha) - g(\overline{r}, \alpha)| \\
&\leq |L(c_j, z(c_j), z'(c_j)) - L(c_j, z(c_j), \alpha)| + r\,|\theta(|z'(c_j)|) - \theta(|\alpha|)| + \\
&\quad + |g(c_j, \alpha) - g(\overline{r}, \alpha)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + r\frac{\varepsilon}{3r} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \text{ (por (2.30), (2.31) e (2.32)).}
\end{aligned}$$

E temos o pretendido. Analogamente,

$$\lim_{j\to\infty} g(c_j, v) = g(\overline{r}, v). \tag{2.33}$$

Considerando o limite em (2.24) vem

$$\lim_{j\to\infty} [p(c_j) \cdot v - g(c_j, v)] \leq \lim_{j\to\infty} [p(c_j) \cdot z'(c_j) - g(c_j, z'(c_j))], \forall\, v \in K$$

$$\Leftrightarrow p(\overline{r}) \cdot v - g(\overline{r}, v) \leq p(\overline{r}) \cdot \alpha - g(\overline{r}, \alpha), \forall\, v \in K,$$

(esta equivalência acontece por (2.29), (2.33), (2.23) e porque

$$\lim_{j\to\infty} c_j = \overline{r} \Rightarrow \lim_{j\to\infty} p(c_j) = p(\overline{r}),$$

pois $p(\cdot)$ é AC, em particular é contínua). E como $v$ é qualquer, então $\alpha$ maximiza a função estritamente côncava

$$v \mapsto p(\overline{r}) \cdot v - g(\overline{r}, v).$$

Como $z'(c_j) \in K$ e $K$ é fechado, então $\alpha := \lim_{j\to\infty} z'(c_j) \in K$. E portanto,

$$\max_{v\in K} \{p(\overline{r}) \cdot v - g(\overline{r}, v)\} = p(\overline{r}) \cdot \alpha - g(\overline{r}, \alpha) \text{ qs em } [0, T].$$

Fazendo um raciocínio análogo ao anterior, conclui-se que

$$\lim_{j\to\infty} g(d_j, \beta) = g(\overline{r}, \beta),$$

$$\lim_{j\to\infty} g(d_j, z'(d_j)) = g(\overline{r}, \beta),$$

$$\lim_{j\to\infty} g(d_j, v) = g(\overline{r}, v)$$

e

$$\lim_{j\to\infty} [p(d_j) \cdot v - g(d_j, v)] \leq \lim_{j\to\infty} [p(d_j) \cdot z'(d_j) - g(d_j, z'(d_j))], \forall\, v \in K$$

$$\Leftrightarrow p(\overline{r}) \cdot v - g(\overline{r}, v) \leq p(\overline{r}) \cdot \beta - g(\overline{r}, \beta), \forall\, v \in K$$

(considerando o limite em (2.25)). E como $v$ é qualquer, então $\beta$ maximiza a função estritamente côncava

$$v \mapsto p(\overline{r}) \cdot v - g(\overline{r}, v).$$

Como $z'(d_j) \in K$ e $K$ é fechado, então $\beta := \lim_{j\to\infty} z'(d_j) \in K$. E portanto,

$$\max_{v\in K} \{p(\overline{r}) \cdot v - g(\overline{r}, v)\} = p(\overline{r}) \cdot \beta - g(\overline{r}, \beta) \text{ qs em } [0, T].$$

Deste modo, conclui-se que $\alpha$ e $\beta$ são máximos globais para a função

$$v \mapsto p(\overline{r}) \cdot v - g(\overline{r}, v).$$

Mas como $\alpha \neq \beta$ e não podemos ter dois máximos globais para a mesma função, obtemos uma contradição. Então $z'(\cdot)$ só tem descontinuidades removíveis. Ou seja, até agora $z'(\cdot)$ é essencialmente contínua em $[0,T]$. Mostremos, em seguida, que $z'(\cdot)$ é contínua em $[0,T]$. Por hipótese, $z(\cdot) \in AC([0,T], \mathbb{R})$, então

$$z(t) = z(0) + \int_0^t z'(\tau)\ d\tau,$$

pelo teorema 18.2, com $f(\cdot) = z(\cdot)$, $[a,b] = [0,T]$, $x = t$. $z'(\cdot)$ é essencialmente contínua em $[0,T]$, isto é, $z'(\cdot)$ é contínua qs em $[0,T]$ e só tem pontos de descontinuidade removíveis. Então o conjunto dos pontos de descontinuidade de $z'(\cdot)$ é enumerável, pelo teorema 16.4, com $f(\cdot) = z'(\cdot)$, $X = [0,T]$. Logo, o conjunto dos pontos de descontinuidade tem medida nula, pelo lema 10.14. Assim, $z'(\cdot)$ é igual qs a alguma função $v(\cdot)$ contínua. Usando a proposição 16.5, com $f(\cdot) = z'(\cdot)$, vamos definir a função contínua $v : [0,T] \to \mathbb{R}$ por

$$v(t) := \begin{cases} z'(t)\,, \text{ nos pontos de continuidade de } z'(\cdot) \\[2ex] v(0) = \lim\limits_{t \searrow 0} z'(t) \\[2ex] v(t_i) = \lim\limits_{t \to t_i} z'(t) \\[2ex] v(T) = \lim\limits_{t \nearrow T} z'(t)\,, \end{cases}$$

onde $t_i$ são os pontos de descontinuidade de $z'(\cdot)$. Além disso, verificam-se as seguintes condições :

$c_1$) $v(t)$ existe qs em $[0,T]$, pois $v(\cdot) = z'(\cdot)$ qs.

$c_2$) $v(\cdot)$ é Lebesgue mensurável e Lebesgue integrável, pois $v(\cdot)$ é contínua e está definida num compacto, pelo teorema 11.16 e pelo teorema 11.17.

$c_3$) $\widetilde{z}(t) = z(0) + \int_0^t v(\tau)\ d\tau$, pois $v(\cdot)$ é Lebesgue mensurável, pelo lema 11.19.

Consequentemente, pelo teorema 18.2, $\widetilde{z}(\cdot)$ é AC e tem derivada contínua (pois $v(\cdot)$ é a derivada de $\widetilde{z}(\cdot)$ e $v(\cdot)$ é contínua). Mostremos que $\widetilde{z}(\cdot) = z(\cdot)$. Como $v(t) = z'(t)$ qs em $[0,T]$ e $v(\cdot)$ é integrável, então, para cada $t \in [0,T]$ fixado temos

$$\int_0^t z'(\tau)\ d\tau = \int_0^t v(\tau)\ d\tau,$$

pelo lema 11.13. Logo, $\widetilde{z}(\cdot) = z(\cdot)$. Consequentemente, como a função contínua $v(\cdot)$ é a derivada de $\widetilde{z}(\cdot)$, então $v(\cdot)$ também é a derivada de $z(\cdot)$. E como a derivada de uma função é única, temos que

$$z'(t) = v(t)\,,\ \forall\ t \in [0,T]\,.$$

Logo, $z'(\cdot)$ é contínua. E portanto, $z(\cdot)$ é $C^1$. ■

**2.3. Alguns resultados auxiliares**

**Teorema 2.3 (Princípio do máximo).** *Consideremos o problema :*

$$(P) \qquad \text{minimizar} \qquad f(x(b)) + \int_a^b F(t, x(t), u(t))\ dt$$

*com as restrições*

$$u(t) \in U(t) \text{ qs em } [a,b], \qquad x'(t) = \phi(t, x(t), u(t)) \text{ qs em } [a,b], \qquad x(a) \in C_0,\ x(b) \in C_1,$$

*onde :*

*(a)* $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *é AC;*
*(b)* $u : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ *é mensurável;*
*(c)* $U : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ *é uma multifunção;*
*(d)* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*;*
*(e)* $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$*;*
*(f)* $\phi : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$*;*
*(g)* $C_0,\ C_1 \subset \mathbb{R}^n$.

*Suponhamos que* $(\overline{x}, \overline{u})$ *resolve* $(P)$ *e admitamos ainda que :*

$(i)$ *existem funções contínuas* $w(\cdot)$ *e* $\varepsilon(\cdot) > 0$ *tais que qualquer função AC* $x(\cdot)$ *satisfazendo as restrições do problema* $(P)$ *verifica também*

$$x(t) \in \Omega_t := B(w(t), \varepsilon(t)),\ \forall\ t \in [a,b];$$

$(ii)$ $U(\cdot)$ *tem valores não-vazios e o seu gráfico,*

$$Graf(U) := \{(t,u) \in [a,b] \times \mathbb{R}^m : t \in [a,b], u \in U(t)\}$$

*é* $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}_m$*-mensurável;*

$(iii)$ $f(\cdot)$ *é localmente lipschitziana;*

$(iv)$ $\phi(\cdot)$ *verifica :*

$(iv_1)$ *para cada* $x \in \mathbb{R}^n$, *a função* $\phi(\cdot, x, \cdot)$ *é* $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}_m$*-mensurável;*

$(iv_2)$ *existe uma função real* $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}_m$*-mensurável* $k(\cdot) > 0$ *definida no* $Graf(U)$ *tal que para cada* $(t,u) \in Graf(U)$, *a função* $\phi(t, \cdot, u)$ *é lipschitziana em* $\Omega_t$ *com constante de Lipschitz* $k(t,u)$*;*

$(iv_3)$ *a função* $t \mapsto k(t, \overline{u}(t))$ *é integrável;*

$(v)$ $F(\cdot)$ *verifica as mesmas hipóteses que* $\phi(\cdot)$, *isto é,* $(iv)$*;*

$(vi)$ $C_0,\ C_1 \subset \mathbb{R}^n$ *são fechados.*

*Consideremos o Hamiltoniano* $H : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definido por*

$$H(t,x,p,u,\lambda) := \langle p, \phi(t,x,u)\rangle - \lambda\ F(t,x,u).$$

*Então, existe um escalar* $\lambda \in \{0,1\}$, *uma função* $p : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *AC tais que :*

$(I)$ $p(\cdot)$ *satisfaz a equação adjunta*

$$-p'(t) \in \partial_x H(t, \overline{x}(t), p(t), \overline{u}(t), \lambda) \text{ qs em } [a,b];$$

$(II)$ $H(t, \overline{x}(t), p(t), \cdot, \lambda)$ *é maximizado em* $\overline{u}(t)$ *:*

$$\max\{H(t, \overline{x}(t), p(t), w, \lambda) : w \in U(t)\} = H(t, \overline{x}(t), p(t), \overline{u}(t), \lambda) \text{ qs em } [a,b];$$

$(III)$ *para algum* $\xi \in \partial f(\overline{x}(b))$ *valem as seguintes condições de transversalidade :*

$$p(a) \in N_{C_0}(\overline{x}(a)), \qquad -\lambda\xi - p(b) \in N_{C_1}(\overline{x}(b));$$

$(IV)$ $\max_{t \in [a,b]} |p(t)| + \lambda > 0.$

*(Ver teorema e respectiva demonstração em [12], p. 211.)*

**Definição 2.4.** *Sejam $S$, $\Sigma_t$ os conjuntos definidos por*

$$S := \{t : (t,x) \in \Sigma \text{ para algum } x \in \mathbb{R}^n\}$$

*e*

$$\Sigma_t := \{x : (t,x) \in \Sigma\}.$$

*$\Sigma$ diz-se um **tubo**, desde que $S$ seja um intervalo (por exemplo $[a,b]$) e existam uma função contínua $\omega(\cdot)$ e uma função contínua positiva $\varepsilon(\cdot)$ em $[a,b]$ tais que*

$$\Sigma_t = B(\omega(t), \varepsilon(t)),\ \forall\, t \in [a,b].$$

*Um tal tubo $\Sigma$ diz-se um **tubo em** $[a,b]$.*
*(Ver [12], p. 113.)*

**Nota 2.5.** *Daqui em diante, convencionamos que*

$$(-\infty) \times 0 = 0 \times (-\infty) = 0 \times (+\infty) = (+\infty) \times 0 = 0.$$

**Lema 2.6.** *Sejam $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável, $D \in \mathcal{M}$ e $f : D \to [-\infty, +\infty]$ uma função mensurável. Então, para cada $D_0 \subset D$ tal que $D_0 \in \mathcal{M}$, a função $g : D \to [-\infty, +\infty]$ dada por*

$$g(t) := f(t)\,\chi_{D_0}(t)$$

*é mensurável em $D$.*

**Demonstração :**
Sejam $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável, $D$ um conjunto mensurável e $f : D \to [-\infty, +\infty]$ uma função mensurável. Consideremos um qualquer conjunto $D_0 \subset D$ tal que é mensurável. Logo, pelo lema 10.19 (alínea (a)), $f\,|_{D_0}(\cdot)$ é mensurável em $D_0$. O conjunto $D \backslash D_0$ é mensurável, pelo lema 10.2 (alínea (e)), com $A = D$ e $B = D_0$. Então, pela nota 10.20, a função

$$D \backslash D_0 \ni t \mapsto 0$$

é mensurável em $D \backslash D_0$, com $A = D \backslash D_0$ e $\alpha = 0$. Logo, pelo lema 10.19 (alínea (b)), com $D = D_0 \cup (D \backslash D_0)$, temos que a função $g : D \to [-\infty, +\infty]$ dada por

$$\begin{aligned} g(t) \quad &:= \quad \begin{cases} f\,|_{D_0}(t) & \text{se } t \in D_0 \\ 0 & \text{se } t \notin D_0 \text{ (isto é, se } t \in D \backslash D_0) \end{cases} \\ &= \quad f(t)\,\chi_{D_0}(t) \end{aligned}$$

é mensurável em $D$. ■

**Proposição 2.7.** *Sejam $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ um integrando normal convexo, sci e $u \in W^{1,1}(\Omega; \mathbb{R}^n)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}$ é um qualquer conjunto mensurável não-vazio. Assumimos que*

$$u'(t) \in int\,(dom\, f(t,\cdot)) \text{ qs em } \Omega.$$

*Sejam $\mathbb{Q}^n$ o conjunto dos $x \in \mathbb{R}^n$ com coordenadas racionais, $k \in \mathbb{N}$ qualquer, e $m_k : \Omega \to [0, +\infty]$ a função dada por*

$$m_k(t) := \sup\left\{ |f(t,z) - f(t,u'(t))| : z \in \mathbb{Q}^n \text{ e } |z - u'(t)| \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

*Então, para cada $k \in \mathbb{N}$, a função $m_k(\cdot)$ é mensurável.*

**Demonstração :**
Para cada $z \in \mathbb{Q}^n$ fixado, seja $f_z^1 : \Omega \to (-\infty, +\infty]$ a função dada por

$$f_z^1(t) := f(t,z).$$

Como $f(\cdot)$ é um integrando normal, então pelo teorema 21.3, com $S = \Omega$ , $x = z$, $s = t$ e $f(\cdot) = f(\cdot)$ é $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensurável. Logo, pela proposição 10.28, com $X = \Omega$, $Y = \mathbb{R}^n$, $f(\cdot) = f(\cdot)$, $x = t$, $y = z$, resulta que $f_z^1(t) := f(t,z)$ é $\mathcal{L}$-mensurável em $\Omega$.

Seja $f_1 : \Omega \to (-\infty, +\infty]$ a função dada por

$$f_1(t) := f(t, u'(t)).$$

Como $u \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, então a função $u' : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é mensurável e como $f(\cdot)$ é um integrando normal, pelo corolário 21.4, com $S = \Omega$, $f(\cdot) = f(\cdot)$, $x = u'$, $s = t$, temos que a função

$$\Omega \ni t \mapsto f(t, u'(t)) =: f_1(t) \in (-\infty, +\infty]$$

é mensurável. Isto é, $f_1(\cdot)$ é $\mathcal{L}$-mensurável em $\Omega$.

Consideremos o conjunto

$$N := \{t \in \Omega : u'(t) \text{ não existe ou } u'(t) \notin dom\, f(t, \cdot)\},$$

o qual tem medida nula e é mensurável, pela nota 10.23, com $f(\cdot) = f_1(\cdot)$.

Note-se que se $D_0 := \Omega \backslash N$ então

$$f_1(t) := f(t, u'(t)) \in \mathbb{R}, \forall\, t \in D_0.$$

Então, pelo lema 2.6, com $f(\cdot) = f_1(\cdot)$, $D = \Omega$, $D_0 = \Omega \backslash N$ e $g = f_2(\cdot)$, temos que a função $f_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ é dada por

$$f_2(t) := f_1(t)\, \chi_{D_0}(t) = \begin{cases} f_1(t) & \text{se } t \in D_0 \\ 0 & \text{se } t \notin D_0 \end{cases} = \begin{cases} f(t, u'(t)) & \text{se } t \in \Omega \backslash N \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é $\mathcal{L}$-mensurável em $\Omega$.

Seja $f_3 : \Omega \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f_3(t) := -f_2(t) = \begin{cases} -f(t, u'(t)) & \text{se } t \in \Omega \backslash N \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$f_3(\cdot)$ é $\mathcal{L}$-mensurável em $\Omega$, pelo teorema 10.21, onde $c = -1 \in \mathbb{R}$, $f(\cdot) = f_2(\cdot)$, $D = \Omega$ e o domínio de definição é o conjunto $\Omega$.

Seja $f_z^2 : \Omega \to (-\infty, +\infty]$ a função dada por

$$f_z^2(t) := f_z^1(t) + f_3(t) = \begin{cases} f(t,z) - f(t, u'(t)) & \text{se } t \in \Omega \backslash N \\ f(t,z) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$f_z^2(\cdot)$ é $\mathcal{L}$-mensurável em $\Omega$, pelo teorema 10.22, onde $f(\cdot) = f_z^1(\cdot)$, $g = f_3(\cdot)$, $D = \Omega$ e o domínio de definição é o conjunto $\Omega$. E portanto,

$$f_z^2(t) = f(t,z) - f(t, u'(t)) \text{ qs em } \Omega.$$

Seja $f_z^3 : \Omega \to [0, +\infty]$ a função dada por

$$f_z^3(t) := \left|f_z^2(t)\right| = \begin{cases} |f(t,z) - f(t, u'(t))| & \text{se } t \in \Omega \backslash N \\ |f(t,z)| & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$f_z^3(\cdot)$ é $\mathcal{L}$-mensurável em $\Omega$, pela proposição 10.26, com $f(\cdot) = f_z^2(\cdot)$, $|f|(\cdot) = f_z^3(\cdot)$ e $D = \Omega$. E portanto,

$$f_z^3(t) = |f(t,z) - f(t,u'(t))| \text{ qs em } \Omega.$$

Seja $f_z^4 : \Omega \to [0, +\infty]$ a função dada por

$$f_z^4(t) := \sup_{z \in \mathbb{Q}^n} f_z^3(t) = \begin{cases} \sup\limits_{z \in \mathbb{Q}^n} |f(t,z) - f(t,u'(t))| & \text{se } t \in \Omega \backslash N \\ \\ \sup\limits_{z \in \mathbb{Q}^n} |f(t,z)| & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$f_z^4(\cdot)$ é $\mathcal{L}$-mensurável em $\Omega$, pelo teorema 10.25 (alínea (a)), com $g_n(\cdot) = f_z^3(\cdot)$ (pois para cada $z \in \mathbb{Q}^n$ fixado, temos uma função $f_z^3(\cdot)$) e $D = \Omega$. Note-se que

$$f_z^4(t) = \sup_{z \in \mathbb{Q}^n} |f(t,z) - f(t,u'(t))| \text{ qs em } \Omega.$$

Note-se também que o conjunto

$$A_z := \left\{ t \in \Omega \backslash N : |z - u'(t)| \leq \frac{1}{k} \right\}$$

é $\mathcal{L}$-mensurável (pois $u(\cdot) \in W^{1,1}(\Omega; \mathbb{R}^n) \Rightarrow u'(\cdot)$ é $\mathcal{L}$-mensurável). Logo, pelo lema 2.6, com $f(\cdot) = f_z^3(\cdot)$, $D = \Omega$, $D_0 = A_z$ e $g = f_z^5(\cdot)$, temos que a função $f_z^5 : \Omega \to [0, +\infty]$ dada por

$$\begin{aligned} f_z^5(t) &:= f_z^3(t)\chi_{A_z}(t) = \begin{cases} f_z^3(t) & \text{se } t \in A_z \\ 0 & \text{se } t \notin A_z \end{cases} \\ &= \begin{cases} |f(t,z) - f(t,u'(t))| & \text{se } t \in A_z \\ 0 & \text{se } t \notin A_z \end{cases} \\ &= \begin{cases} |f(t,z) - f(t,u'(t))| & \text{se } \begin{cases} t \in \Omega \backslash N \\ |z - u'(t)| \leq \frac{1}{k} \end{cases} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \end{aligned}$$

é $\mathcal{L}$-mensurável em $\Omega$. Repare-se que, para cada $z \in \mathbb{Q}^n$ tal que $|z - u'(t)| \leq \frac{1}{k}$,

$$f_z^5(t) = |f(t,z) - f(t,u'(t))| \text{ qs em } \Omega.$$

Consequentemente, a função $f_z^6 : \Omega \to [0, +\infty]$ dada por

$$\begin{aligned} f_z^6(t) &:= \sup\nolimits_{z \in \mathbb{Q}^n} f_z^5(t) = \begin{cases} \sup\limits_{z \in \mathbb{Q}^n} |f(t,z) - f(t,u'(t))| & \text{se } \begin{cases} t \in \Omega \backslash N \\ |z - u'(t)| \leq \frac{1}{k} \end{cases} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= \begin{cases} f_z^4|_{A_z}(t) & \text{se } t \in A_z \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \end{aligned}$$

é $\mathcal{L}$-mensurável em $\Omega$, pelo teorema 10.25 (alínea (a)), com $g_n(\cdot) = f_z^5(\cdot)$ (pois para cada $z \in \mathbb{Q}^n$ fixado, temos uma função $f_z^5(\cdot)$) e $D = \Omega$. E portanto,

$$\begin{aligned} f_z^6(t) &= \sup\left\{|f(t,z) - f(t,u'(t))| : z \in \mathbb{Q}^n \text{ e } |z - u'(t)| \le \tfrac{1}{k}\right\} \\ &=: m_k(t) \text{ qs em } \Omega. \end{aligned}$$

Logo, pela nota 10.24, com $f(\cdot) = f_z^6(\cdot)$, $g(\cdot) = m_k(\cdot)$ e $D = \Omega$, temos que $m_k(\cdot)$ é mensurável em $\Omega$.

$\therefore$ Para cada $k \in \mathbb{N}$, a função $m_k(\cdot)$ é mensurável em $\Omega$. ■

**Definição 2.8.** *Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo não vazio. O conjunto de todos os vectores $y \in \mathbb{R}^n$ que satisfazem a condição*

$$x + \lambda\, y \in C, \qquad \forall\, \lambda \ge 0, \qquad \forall\, x \in C,$$

*chama-se* **cone recessão** *de $C$ e é denotado por $O^+(C)$.*

*(Ver [30], p. 61.)*

**Definição 2.9.** *Seja $f$ é uma qualquer função convexa definida em $\mathbb{R}^n$ não identicamente $+\infty$. Chamamos* **função recessão** *de $f$ à função $f_0^+$ cujo epigráfico é igual ao cone de recessão do epigráfico de $f$, isto é*

$$epi\left(f_0^+\right) = O^+\left(epi\ f\right).$$

*(Ver [30], p. 65, 66.)*

**Proposição 2.10.** *Seja $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ uma função convexa, própria, sci. Então a função $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ dada por*

$$g(\lambda, x) := \begin{cases} f\left(\frac{x}{\lambda}\right)\lambda & \text{se } \lambda > 0 \\ \left(f_0^+\right)(x) & \text{se } \lambda = 0 \\ +\infty & \text{se } \lambda < 0 \end{cases}$$

*é convexa, própria, sci, onde $f_0^+$ é a função recessão de $f$. Além disso, para cada $x \in dom\ f$ tem-se*

$$g(\lambda, x) := \begin{cases} f\left(\frac{x}{\lambda}\right)\lambda & \text{se } \lambda > 0 \\ \lim\limits_{\lambda \searrow 0} f\left(\frac{x}{\lambda}\right)\lambda & \text{se } \lambda = 0 \\ +\infty & \text{se } \lambda < 0 \end{cases}$$

*(Ver [30], p. 67, 35.)*

*Portanto, fixado $x \in dom\ f$, a função $f_x : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ dada por*

$$f_x(\lambda) := g(\lambda, x) = \begin{cases} f\left(\frac{x}{\lambda}\right)\lambda & \text{se } \lambda > 0 \\ \lim\limits_{\lambda \searrow 0} f\left(\frac{x}{\lambda}\right)\lambda & \text{se } \lambda = 0 \\ +\infty & \text{se } \lambda < 0 \end{cases}$$

*é uma função convexa, própria, sci.*

**Nota 2.11.** *Seja $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to (-\infty, +\infty]$ uma função convexa, própria, sci, então para cada $x \in \mathbb{R}^n$ fixado a função $h_x : \mathbb{R}^m \to (-\infty, +\infty]$ dada por*

$$h_x(y) := f(x, y)$$

*é convexa, própria, sci.*

*De facto :*

*(i) $h_x(\cdot)$ é convexa :*

*Fixemos $x \in \mathbb{R}^n$. Como $f(\cdot)$, enquanto função de duas variáveis, é convexa, em particular, para $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x, \cdot)$ é convexa. Isto é, sejam $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^m$ quaisquer e $\alpha \in (0,1)$ qualquer, então*

$$\begin{aligned} h_x(\alpha\, y_1 + (1-\alpha)\, y_2) &= f(x, \alpha\, y_1 + (1-\alpha)\, y_2) \\ &\leq \alpha\, f(x, y_1) + (1-\alpha)\, f(x, y_2) \\ &= \alpha\, h_x(y_1) + (1-\alpha)\, h_x(y_2)\,. \end{aligned}$$

*Logo, $h_x(\cdot)$ é convexa.*

*(ii) $h_x(\cdot)$ é própria :*

*Fixemos $x \in \mathbb{R}^n$. Como $f(\cdot)$, enquanto função de duas variáveis, é própria, em particular, para $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x, \cdot)$ é própria. Como $\exists\, y \in \mathbb{R}^m$ tal que*

$$h_x(y) = f(x, y) < +\infty$$

*e como para qualquer $y \in \mathbb{R}^m$ temos*

$$h_x(y) = f(x, y) \neq -\infty,$$

*então, $h_x(\cdot)$ é própria.*

*(iii) $h_x(\cdot)$ é sci :*

*Fixemos $x \in \mathbb{R}^n$. Como $f(\cdot)$, enquanto função de duas variáveis, é sci, em particular, para $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x, \cdot)$ é sci (ou seja, para $\overline{y} \in \mathbb{R}^m$ temos*

$$\forall\, \lambda < f(x, \overline{y})\,,\ \exists\, \delta > 0,\ \forall\, y : |y - \overline{y}| < \delta \Rightarrow \lambda < f(x, y)\,),$$

*e portanto, $h_x(\cdot)$ é sci (para o mesmo $\delta$ que para $f(x, \cdot)$). Isto é, seja $\overline{y} \in \mathbb{R}^m$ e para qualquer $\lambda < h_x(\overline{y})$, para algum $\delta > 0$ (o mesmo para $f(x, \cdot)$) e $y$ qualquer tal que $|y - \overline{y}| < \delta$ vem*

$$h_x(y) = f(x, y) > \lambda.$$

*Logo, $h_x(\cdot)$ é sci.*

*$\therefore$ $h_x(\cdot)$ é convexa, própria, sci, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ fixado.* ■

Nas mesmas condições da proposição 2.10, temos a seguinte proposição :

**Proposição 2.12.** *Seja $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ uma função convexa, própria, sci. Então, para cada $x \in dom\ f$ fixado, a função $\widetilde{f}_x : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ dada por*

$$\widetilde{f}_x(u) := \begin{cases} f\left(\frac{x}{1+u}\right)(1+u) & se\ u > -1 \\ \lim\limits_{u \searrow -1} f\left(\frac{x}{1+u}\right)(1+u) & se\ u = -1 \\ +\infty & se\ u < -1 \end{cases}$$

*é convexa, própria, sci.*

*Além disso, se $x \in int\,(dom\ f)$, então $0 \in int\left(dom\ \widetilde{f}_x\right)$.*

**Demonstração :**
Fixemos $x \in dom\ f$. E consideremos a função afim $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$A(u) := 1 + u$$

e a função $f_x : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ dada por

$$f_x(\lambda) := \begin{cases} f\left(\frac{x}{\lambda}\right)\lambda & \text{se } \lambda > 0 \\ \lim\limits_{\lambda \searrow 0} f\left(\frac{x}{\lambda}\right)\lambda & \text{se } \lambda = 0 \\ +\infty & \text{se } \lambda < 0, \end{cases}$$

a qual, pela proposição 2.10, é convexa, própria, sci para cada $x \in dom\ f$.

Além disso, $\text{Im } A \cap dom\ f_x \neq \varnothing$. De facto, se $\lambda = 1$, então $f_x(1) = f\left(\frac{x}{1}\right)1 = f(x) < \infty$ (pois $x \in dom\ f$) donde $1 \in dom\ f_x$, e se $u = 0$, então $A(0) = 1 + 0 = 1 \in \text{Im } A$. Logo,

$$\exists\ \alpha = 1 : \alpha \in \text{Im } A \text{ e } \alpha \in dom\ f_x,$$

e portanto $\text{Im } A \cap dom\ f_x \neq \varnothing$.

Consequentemente, a função que resulta da composição de $f_x(\cdot)$ com $A(\cdot)$, para cada $x \in dom\ f$, é $f_x \circ A : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ dada por

$$\begin{aligned}
(f_x \circ A)(u) &= f_x(A(u)) = f_x(1+u) = \\
&= \begin{cases} f\left(\frac{x}{1+u}\right)(1+u) & \text{se } u+1 > 0 \\ \lim\limits_{(u+1) \searrow 0} f\left(\frac{x}{1+u}\right)(1+u) & \text{se } u+1 = 0 \\ +\infty & \text{se } u+1 < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} f\left(\frac{x}{1+u}\right)(1+u) & \text{se } u > -1 \\ \lim\limits_{u \searrow -1} f\left(\frac{x}{1+u}\right)(1+u) & \text{se } u = -1 \\ +\infty & \text{se } u < -1. \end{cases}
\end{aligned}$$

E portanto, $(f_x \circ A)(\cdot) = \widetilde{f_x}(\cdot)$.

Logo, a função $(f_x \circ A)(\cdot) = \widetilde{f_x}(\cdot)$ é convexa, própria, sci, pela proposição 19.66, com $m = n = 1$, $A(\cdot) = A(\cdot)$, $f(\cdot) = f_x(\cdot)$, $(f \circ A)(\cdot) = \widetilde{f_x}(\cdot)$.

Mostremos agora que se $x \in int\,(dom\ f)$, então $0 \in int\left(dom\ \widetilde{f_x}\right)$. Como $\widetilde{f_x}(0) = f(x)$ e, por hipótese, $x \in int\,(dom\ f)$, então $f(x) < +\infty$, donde $\widetilde{f_x}(0) < +\infty$, logo $0 \in dom\ \widetilde{f_x}$. Se $0 = x \in int\,(dom\ f)$, então

$$\widetilde{f_0}(u) := \begin{cases} f(0)(1+u) & \text{se } u > -1 \\ \lim\limits_{u \searrow -1} f(0)(1+u) & \text{se } u = -1 \\ +\infty & \text{se } u < -1, \end{cases}$$

logo $dom\ \widetilde{f}_0 = [-1, +\infty)$, e portanto, $0 \in int\left(dom\ \widetilde{f}_0\right)$. Suponhamos que $0 \neq x \in int\,(dom\ f)$. E seja $\varepsilon > 0$ tal que

$$\forall\, x_1 \in \mathbb{R}^n : |x_1 - x| < \varepsilon \Rightarrow f(x_1) < +\infty. \tag{2.34}$$

Seja $\delta = \frac{\varepsilon}{2|x|+\varepsilon}$. Então

$$\begin{aligned}
|u| < \delta &\Leftrightarrow -\tfrac{\varepsilon}{2|x|+\varepsilon} < u < \tfrac{\varepsilon}{2|x|+\varepsilon} \\
&\Leftrightarrow 1 - \tfrac{\varepsilon}{2|x|+\varepsilon} < 1 + u < 1 + \tfrac{\varepsilon}{2|x|+\varepsilon} \\
&\Leftrightarrow \tfrac{2|x|}{2|x|+\varepsilon} < 1 + u < \tfrac{2|x|+2\varepsilon}{2|x|+\varepsilon} \\
&\Rightarrow \tfrac{2|x|+\varepsilon}{2|x|+2\varepsilon} < \tfrac{1}{1+u} < \tfrac{2|x|+\varepsilon}{2|x|} \\
&\Leftrightarrow 1 - \tfrac{\varepsilon}{2|x|+2\varepsilon} < \tfrac{1}{1+u} < 1 + \tfrac{\varepsilon}{2|x|} \\
&\Leftrightarrow -\tfrac{\varepsilon}{2|x|+2\varepsilon} < \tfrac{1}{1+u} - 1 < \tfrac{\varepsilon}{2|x|}.
\end{aligned}$$

Como

$$2|x| > |x| \Rightarrow \frac{1}{2|x|} < \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow \frac{\varepsilon}{2|x|} < \frac{\varepsilon}{|x|}$$

e

$$2|x| + 2\varepsilon > |x| \Rightarrow \frac{1}{2|x| + 2\varepsilon} < \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow \frac{\varepsilon}{2|x| + 2\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{\varepsilon}{|x|} < -\frac{\varepsilon}{2|x| + 2\varepsilon},$$

temos

$$-\frac{\varepsilon}{|x|} < \frac{1}{1+u} - 1 < \frac{\varepsilon}{|x|} \Leftrightarrow \left|\frac{1}{1+u} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{|x|}.$$

Provámos que

$$|u| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{1+u} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{|x|},$$

para $\delta = \frac{\varepsilon}{2|x|+\varepsilon}$. Donde

$$\left|\frac{x}{1+u} - x\right| = |x| \left|\frac{1}{1+u} - 1\right| < |x| \frac{\varepsilon}{|x|} = \varepsilon.$$

Logo, por (2.34), $f\left(\frac{x}{1+u}\right) < +\infty$, então

$$\widetilde{f}_x(u) = f\left(\frac{x}{1+u}\right)(1+u) < +\infty,$$

para qualquer $u$ tal que $|u| < \delta$. O que mostra que $0 \in int\left(dom\ \widetilde{f}_x\right)$. Se considerarmos $\delta = \frac{\varepsilon}{|x|+\varepsilon}$ também temos o pretendido, pois

$$\begin{aligned}
|u|<\delta &\Leftrightarrow -\tfrac{\varepsilon}{|x|+\varepsilon}<u<\tfrac{\varepsilon}{|x|+\varepsilon}\\
&\Leftrightarrow 1-\tfrac{\varepsilon}{|x|+\varepsilon}<1+u<1+\tfrac{\varepsilon}{|x|+\varepsilon}\\
&\Leftrightarrow \tfrac{|x|}{|x|+\varepsilon}<1+u<\tfrac{|x|+2\varepsilon}{|x|+\varepsilon}\\
&\Rightarrow \tfrac{|x|+\varepsilon}{|x|+2\varepsilon}<\tfrac{1}{1+u}<\tfrac{|x|+\varepsilon}{|x|}\\
&\Leftrightarrow 1-\tfrac{\varepsilon}{|x|+2\varepsilon}<\tfrac{1}{1+u}<1+\tfrac{\varepsilon}{|x|}\\
&\Leftrightarrow -\tfrac{\varepsilon}{|x|+2\varepsilon}<\tfrac{1}{1+u}-1<\tfrac{\varepsilon}{|x|}.
\end{aligned}$$

Como

$$|x|+2\varepsilon>|x|\Rightarrow\frac{1}{|x|+2\varepsilon}<\frac{1}{|x|}\Leftrightarrow-\frac{1}{|x|}<-\frac{1}{|x|+2\varepsilon}\Leftrightarrow-\frac{\varepsilon}{|x|}<-\frac{\varepsilon}{|x|+2\varepsilon},$$

vem

$$-\frac{\varepsilon}{|x|}<\frac{1}{1+u}-1<\frac{\varepsilon}{|x|}\Leftrightarrow\left|\frac{1}{1+u}-1\right|<\frac{\varepsilon}{|x|},$$

como já tínhamos visto. E da mesma forma concluímos que $0\in int\left(dom\ \widetilde{f}_x\right)$. ■

**Lema 2.13.** *Seja $L:[0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^n\to(-\infty,+\infty]$ uma função verificando o seguinte :*

*$(i)$ $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ (ver (1.2)) é fechado;*

*$(ii)$ para cada $s\in\Omega$ :*

*$(ii_1)$ a função $L(t,s,\cdot)$ é convexa $\forall\ t\in[0,T]$;*

*$(ii_2)$ o domínio $dom\ L(t,s,\cdot)$ é um conjunto aberto, convexo e não-vazio, independente de $t$, designado por $dom\ L(s,\cdot)$;*

*$(iii)$ para cada $s\in\Omega$ e $v\in dom\ L(s,\cdot)$, a função $t\longmapsto L(t,s,v)$ é lipschitziana;*

*$(iv)$ existem constantes não-negativas $\lambda$ e $\eta$ tais que :*

$$|L_t(t,s,v)|\le\lambda\ L(t,s,v)+\eta\ qs\ em\ [0,T]\qquad\forall\ s\in\Omega\qquad\forall\ v\in dom\ L(s,\cdot).$$

*Então, existem constantes não-negativas $c_0$ e $c_1$ tais que, para quaisquer $(t_0,s)\in[0,T]\times\Omega$ e $v\in dom\ L(t_0,s,\cdot)$,*

$$|L(\tau_1,s,v)-L(\tau_2,s,v)|\le(c_0\,|L(t,s,v)|+c_1)\ \ |\tau_1-\tau_2|,\ \forall\ t,\ \tau_1,\ \tau_2\in[0,T].$$

*Em particular, se $z(\cdot)\in W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n)$ e se a função $t\mapsto L(t,z(t),z'(t))$ pertence a $L^1([0,T],\mathbb{R}^n)$, então existe $k_0(\cdot)>0$, $k_0(\cdot)\in L^1([0,T],\mathbb{R}^n)$ tal que, para qualquer $t$ com $z'(t)\in dom\ L(t,z(t),\cdot)$,*

$$|L(\tau_1,z(t),z'(t))-L(\tau_2,z(t),z'(t))|\le k_0(t)\ \ |\tau_1-\tau_2|,\ \forall\ \tau_1,\ \tau_2\in[0,T].$$

**Demonstração :**

Fixemos $(t_0, s) \in [0,T] \times \Omega$ e $v \in dom\ L(t_0, s, \cdot)$. Fixemos também $t_1 \in [0,T]$, $(t_2, s) \in [0,T] \times \Omega$ e $v \in dom\ L(t_2, s, \cdot)$ e definemos a função $\beta : [0,1] \to [0, +\infty)$ por

$$\beta(\rho) := \left|L\left(t_2 + \rho\, \overline{d}, s, v\right) - L(t_2, s, v)\right|, \forall\ \rho \in [0,1],$$

onde $\overline{d} = t_1 - t_2$. (Além disso, $L\left(t_2 + \rho\, \overline{d}, s, v\right) \in \mathbb{R}$, pois para cada $t_2 + \rho\, \overline{d} \in [0,T]$ $[t_1,\, t_2 \in [0,T],\ \rho \in [0,1]$,

$$t_2 + \rho\, \overline{d} = t_2 + \rho\ (t_1 - t_2) = \rho\ t_1 + (1 - \rho)\ t_2 \in [0,T]\,],$$

$s \in \Omega$, temos $v \in dom\ L\left(t_2 + \rho\, \overline{d}, s, \cdot\right)$.)

Comecemos por mostrar que $\beta(\cdot)$ é AC. Como, por hipótese, a função $t \mapsto i(t) := L(t, s, v)\ \forall\ t \in [0,T]$, é lipschitziana, então $\exists\ c(t_0, s, v) > 0$ tal que

$$|L(\tau_1, s, v) - L(\tau_2, s, v)| \leq c(t_0, s, v)\ \ |\tau_1 - \tau_2|, \forall\ \tau_1,\, \tau_2 \in [0,T].$$

E como $t_2 + \rho\, \overline{d} \in [0,T]$ para qualquer $\rho \in [0,1]$, então $t_2 + \rho_1\, \overline{d},\ t_2 + \rho_2\, \overline{d} \in [0,T]$, para quaisquer $\rho_1,\, \rho_2 \in [0,1]$ e vem

$$\begin{aligned}
\left|L\left(t_2 + \rho_2\, \overline{d}, s, v\right) - L\left(t_2 + \rho_1\, \overline{d}, s, v\right)\right| &\leq c(t_0, s, v)\ \ \left|\left(t_2 + \rho_2\, \overline{d}\right) - \left(t_2 + \rho_1\, \overline{d}\right)\right| \\
&= c(t_0, s, v)\ \ \left|\overline{d}\ (\rho_2 - \rho_1)\right| \\
&= c(t_0, s, v)\ \ \left|\overline{d}\right|\ \ |\rho_2 - \rho_1|, \forall\ \rho_1,\, \rho_2 \in [0,1].
\end{aligned}$$

Então, temos que

$$\begin{aligned}
|\beta(\rho_2) - \beta(\rho_1)| &= \left|\left|L\left(t_2 + \rho_2\, \overline{d}, s, v\right) - L(t_2, s, v)\right| - \left|L\left(t_2 + \rho_1\, \overline{d}, s, v\right) - L(t_2, s, v)\right|\right| \\
&\leq \left|\left(L\left(t_2 + \rho_2\, \overline{d}, s, v\right) - L(t_2, s, v)\right) - \left(L\left(t_2 + \rho_1\, \overline{d}, s, v\right) - L(t_2, s, v)\right)\right| \\
(\text{pois } ||x| - |y|| &\leq |x - y|, \text{ para } x,\, y \text{ elementos arbitrários de um corpo ordenado } \mathbb{K}) \\
&= \left|L\left(t_2 + \rho_2\, \overline{d}, s, v\right) - L\left(t_2 + \rho_1\, \overline{d}, s, v\right)\right| \\
&\leq c(t_0, s, v)\ \ \left|\overline{d}\right|\ \ |\rho_2 - \rho_1|, \forall\ \rho_1,\, \rho_2 \in [0,1].
\end{aligned}$$

Logo, as funções

$$\rho \mapsto \alpha(\rho) := L\left(t_2 + \rho\, \overline{d}, s, v\right), \forall\ \rho \in [0,1]$$

e

$$\rho \mapsto \beta(\rho) := \left|L\left(t_2 + \rho\, \overline{d}, s, v\right) - L(t_2, s, v)\right|, \forall\ \rho \in [0,1]$$

são lipschitzianas com a mesma constante de Lipschitz $c = c(t_0, s, v)\left|\overline{d}\right| > 0$. Em particular, as funções $i(\cdot)$, $\alpha(\cdot)$ e $\beta(\cdot)$ são AC, pelo corolário 18.5 e pela nota 18.6 (com $(a, b) = (0, T)$ e $(0,1)$, $u$ igual a $i(\cdot)$, $\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$). E portanto, existem $i'(\cdot)$ qs em $[0,T]$, $\alpha'(\cdot)$ e $\beta'(\cdot)$ em $[0,1]$. Então, para qt $\rho \in [0,1]$ temos

$$\begin{aligned}
\beta'(\rho) &= \frac{d}{d\rho}\left|L\left(t_2 + \rho\, \overline{d}, s, v\right) - L(t_2, s, v)\right| \\
&= \frac{d}{d\rho}\left|i\left(t_2 + \rho\, \overline{d}\right) - i(t_2)\right| \\
&= \left|\overline{d}\right|\left|i'\left(t_2 + \rho\, \overline{d}\right)\right| \\
&= \left|\overline{d}\right|\left|L_t\left(t_2 + \rho\, \overline{d}, s, v\right)\right|,
\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}
\beta'(\rho) &\leq \left|\beta'(\rho)\right| = \left|\left|\overline{d}\right| \left|L_t\left(t_2+\rho\,\overline{d},s,v\right)\right|\right| \\
&= \left|\overline{d}\right| \left|L_t\left(t_2+\rho\,\overline{d},s,v\right)\right| \\
&\leq \left|\overline{d}\right| \left|\lambda\ L\left(t_2+\rho\,\overline{d},s,v\right)+\eta\right| \text{ (pela hipótese } (iv)) \\
&\leq \left|\overline{d}\right| \left[\lambda\ \left|L\left(t_2+\rho\,\overline{d},s,v\right)\right|+\eta\right] \text{ (pois } \lambda,\ \eta>0) \\
&= \left|\overline{d}\right| \left[\lambda\ \left|L\left(t_2+\rho\,\overline{d},s,v\right)-L\left(t_2,s,v\right)+L\left(t_2,s,v\right)\right|+\eta\right] \\
&\leq \left|\overline{d}\right| \left[\lambda\ \left|L\left(t_2+\rho\,\overline{d},s,v\right)-L\left(t_2,s,v\right)\right|+\lambda\ \left|L\left(t_2,s,v\right)\right|+\eta\right] \\
&= \left|\overline{d}\right| \left[\lambda\ \beta(\rho)+\lambda\ \left|L\left(t_2,s,v\right)\right|+\eta\right] \text{ pqt } \rho\in[0,1].
\end{aligned}$$

Como $\beta(\cdot)$ é AC, então pelo teorema 18.4, com $(a,b)=(0,1)$, $u=\beta(\cdot)$, $y=0$, $x=\rho$, $t=\tau$, resulta que

$$\beta(\rho)-\beta(0)=\int_0^{\rho}\beta'(\tau)\,d\tau,\ \forall\ \rho\in[0,1].$$

Então, tendo em atenção que

$$\beta(0):=\left|L\left(t_2+0\,\overline{d},s,v\right)-L\left(t_2,s,v\right)\right|=\left|L\left(t_2,s,v\right)-L\left(t_2,s,v\right)\right|=0,$$

vem, para cada $\rho\in[0,1]$,

$$\begin{aligned}
\beta(\rho) &= \beta(\rho)-\beta(0)=\int_0^{\rho}\beta'(\tau)\,d\tau \\
&\leq \int_0^{\rho}\left|\overline{d}\right|\left[\lambda\ \beta(\rho)+\lambda\ \left|L\left(t_2,s,v\right)\right|+\eta\right]d\tau \\
&= \int_0^{\rho}\left|\overline{d}\right|\lambda\ \beta(\rho)\,d\tau+\int_0^{\rho}\left|\overline{d}\right|\left[\lambda\ \left|L\left(t_2,s,v\right)\right|+\eta\right]d\tau \\
&\leq \int_0^{\rho}\left|\overline{d}\right|\lambda\ \beta(\rho)\,d\tau+\int_0^{1}\left|\overline{d}\right|\left[\lambda\ \left|L\left(t_2,s,v\right)\right|+\eta\right]d\tau \text{ (pois } \left|\overline{d}\right|\left[\lambda\ \left|L\left(t_2,s,v\right)\right|+\eta\right]\geq 0) \\
&= \int_0^{\rho}\left|\overline{d}\right|\lambda\ \beta(\rho)\,d\tau+\left|\overline{d}\right|\left[\lambda\ \left|L\left(t_2,s,v\right)\right|+\eta\right],
\end{aligned}$$

e portanto,

$$\beta(\rho)\leq\left|\overline{d}\right|\left[\lambda\ \left|L\left(t_2,s,v\right)\right|+\eta\right]+\int_0^{\rho}\left|\overline{d}\right|\lambda\ \beta(\rho)\,d\tau,\ \forall\ \rho\in[0,1].$$

Aplicamos o lema 18.13 (isto é, a desigualdade de Gronwall) à função AC $\beta(\cdot)>0$, com $f(t)=\left|\overline{d}\right|\left[\lambda\ \left|L\left(t_2,s,v\right)\right|+\eta\right]$, $g(t)=\left|\overline{d}\right|\lambda$ e $[a,b]=[0,1]$, e obtemos

$$\begin{aligned}
\beta(\rho) &\leq \left|\overline{d}\right|\left[\lambda\ \left|L\left(t_2,s,v\right)\right|+\eta\right]e^{\int_0^{\rho}\left|\overline{d}\right|\lambda\ ds},\ \forall\ \rho\in[0,1] \\
&= \left|\overline{d}\right|\left[\lambda\ \left|L\left(t_2,s,v\right)\right|+\eta\right]e^{\left|\overline{d}\right|\lambda\rho},\ \forall\ \rho\in[0,1] \\
&\leq \left|\overline{d}\right|\left[\lambda\ \left|L\left(t_2,s,v\right)\right|+\eta\right]e^{\left|\overline{d}\right|\lambda} \text{ (pois } \rho\in[0,1])
\end{aligned}$$

e fazendo $\rho=1$ e $\overline{d}=t_1-t_2$ vem

$$\begin{aligned}
\left|L\left(t_1,s,v\right)-L\left(t_2,s,v\right)\right| &= \beta(1)\leq \\
&\leq \left|t_1-t_2\right|e^{\lambda\,\left|t_1-t_2\right|}\left[\lambda\ \left|L\left(t_2,s,v\right)\right|+\eta\right] \\
&\leq \left|t_1-t_2\right|e^{\lambda T}\left[\lambda\ \left|L\left(t_2,s,v\right)\right|+\eta\right].
\end{aligned}$$

Isto é,

$$\left|L\left(t_1,s,v\right)-L\left(t_2,s,v\right)\right|\leq\left|t_1-t_2\right|e^{\lambda T}\left[\lambda\ \left|L\left(t_2,s,v\right)\right|+\eta\right]. \tag{2.35}$$

Esta desigualdade, com $t_1 = \tau_2$ e $t_2 = t$, fica

$$|L(\tau_2, s, v) - L(t, s, v)| \leq |\tau_2 - t| \, e^{\lambda T} [\lambda \; |L(t, s, v)| + \eta], \tag{2.36}$$

o que implica que

$$\begin{aligned}
|L(\tau_2, s, v)| &= |L(\tau_2, s, v) - L(t, s, v) + L(t, s, v)| \\
&\leq |L(\tau_2, s, v) - L(t, s, v)| + |L(t, s, v)| \\
&\leq |\tau_2 - t| \, e^{\lambda T} [\lambda \; |L(t, s, v)| + \eta] + |L(t, s, v)| \text{ (por (2.36))} \\
&\leq Te^{\lambda T} [\lambda \; |L(t, s, v)| + \eta] + |L(t, s, v)| \\
&= \left(1 + \lambda T e^{\lambda T}\right) |L(t, s, v)| + \eta T e^{\lambda T},
\end{aligned}$$

logo,

$$|L(\tau_2, s, v)| \leq \left(1 + \lambda T e^{\lambda T}\right) |L(t, s, v)| + \eta T e^{\lambda T}. \tag{2.37}$$

Por (2.35) com $t_1 = \tau_1$ e $t_2 = \tau_2$, e por (2.37) vem

$$\begin{aligned}
|L(\tau_1, s, v) - L(\tau_2, s, v)| &\leq |\tau_1 - \tau_2| \, e^{\lambda T} [\lambda \; |L(\tau_2, s, v)| + \eta] \\
&\leq |\tau_1 - \tau_2| \, e^{\lambda T} \left[\lambda \; \left(\left(1 + \lambda T e^{\lambda T}\right) |L(t, s, v)| + \eta T e^{\lambda T}\right) + \eta\right] \\
&= |\tau_1 - \tau_2| \left[\lambda e^{\lambda T} \left(1 + \lambda T e^{\lambda T}\right) |L(t, s, v)| + \eta e^{\lambda T} \left(1 + \lambda T e^{\lambda T}\right)\right].
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$|L(\tau_1, s, v) - L(\tau_2, s, v)| \leq (c_0 \, |L(t, s, v)| + c_1) \, |\tau_1 - \tau_2|, \; \forall \; t, \; \tau_1, \; \tau_2 \in [0, T],$$

onde

$$c_0 := \lambda e^{\lambda T} \left(1 + \lambda T e^{\lambda T}\right) \text{ e } c_1 := \eta e^{\lambda T} \left(1 + \lambda T e^{\lambda T}\right).$$

Finalmente, como a função $t \mapsto L(t, z(t), z'(t))$ pertence a $L^1([0, T], \mathbb{R}^n)$, por hipótese, então a função $k_0 : [0, T] \to (0, +\infty)$ dada por

$$k_0(t) := c_0 \, |L(t, z(t), z'(t))| + c_1,$$

para algumas constantes não-negativas $c_0$, $c_1$, pertence a $L^1([0, T], \mathbb{R}^n)$. Além disso, como a função $t \mapsto L(t, z(t), z'(t))$ pertence a $L^1([0, T], \mathbb{R}^n)$, temos também que $L(t, z(t), z'(t)) \in \mathbb{R}$ qs, pela nota 11.10, com $D = [0, T]$ e $f$ a função $t \mapsto L(t, z(t), z'(t))$. Logo, para qualquer $t$ com $z'(t) \in$ *dom* $L(t, z(t), \cdot)$, resulta que

$$|L(\tau_1, z(t), z'(t)) - L(\tau_2, z(t), z'(t))| \leq k_0(t) \; |\tau_1 - \tau_2|, \; \forall \; \tau_1, \; \tau_2 \in [0, T]. \; \blacksquare$$

**Proposição 2.14.** *Seja $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função localmente lipschitziana e defina-se uma nova função $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por*

$$g(x_1, x_2) := h(x_1)$$

*(ou seja $x_2 \mapsto g(x_1, x_2)$ é constante). Então $g(\cdot)$ é localmente lipschitziana, e tem-se*

$$\partial_{(x_1, x_2)} g(x_1, x_2) = \partial h(x_1) \times \{0\},$$

*para quaisquer $x_1$, $x_2 \in \mathbb{R}^n$.*

**Demonstração :**

Por hipótese, $h(\cdot)$ é uma função localmente lipschitziana, então $h(\cdot)$ é localmente lipschitziana em qualquer $x_1 \in \mathbb{R}^n$, isto é, pela definição 22.1, existem $\varepsilon > 0$ e $k > 0$ tais que

$$\left|h(\overline{x}_1) - h\left(\overline{\overline{x}}_1\right)\right| \leq k\left|\overline{x}_1 - \overline{\overline{x}}_1\right|,$$

para quaisquer $\overline{x}_1$, $\overline{\overline{x}}_1 \in x_1 + \varepsilon B$.

Fixemos $\varepsilon > 0$ e $k > 0$.

Comecemos por mostrar que $g(\cdot)$ é localmente lipschitziana em $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{2n}$ para qualquer $x_2 \in \mathbb{R}^n$, isto é, que existem $\widetilde{\varepsilon} > 0$ e $\widetilde{k} > 0$ tais que

$$\left|g(\overline{x}_1, \overline{x}_2) - g\left(\overline{\overline{x}}_1, \overline{\overline{x}}_2\right)\right| \leq \widetilde{k}\left|(\overline{x}_1, \overline{x}_2) - \left(\overline{\overline{x}}_1, \overline{\overline{x}}_2\right)\right|,$$

para quaisquer $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$, $\left(\overline{\overline{x}}_1, \overline{\overline{x}}_2\right) \in (x_1, x_2) + \widetilde{\varepsilon}B$. Sendo $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$, $\left(\overline{\overline{x}}_1, \overline{\overline{x}}_2\right) \in (x_1, x_2) + \varepsilon B$ então

$$\begin{aligned}
\left|g(\overline{x}_1, \overline{x}_2) - g\left(\overline{\overline{x}}_1, \overline{\overline{x}}_2\right)\right| &= \left|h(\overline{x}_1) - h\left(\overline{\overline{x}}_1\right)\right| \\
&\leq k\left|\overline{x}_1 - \overline{\overline{x}}_1\right| \\
&\leq k\left(\left|\overline{x}_1 - \overline{\overline{x}}_1\right| + \left|\overline{x}_2 - \overline{\overline{x}}_2\right|\right) \\
&= k\left|\left(\overline{x}_1 - \overline{\overline{x}}_1, \overline{x}_2 - \overline{\overline{x}}_2\right)\right| \\
&\leq k\left|(\overline{x}_1, \overline{x}_2) - \left(\overline{\overline{x}}_1, \overline{\overline{x}}_2\right)\right|.
\end{aligned}$$

Logo existem $\widetilde{\varepsilon} = \varepsilon > 0$ e $\widetilde{k} = k > 0$ tais que

$$\left|g(\overline{x}_1, \overline{x}_2) - g\left(\overline{\overline{x}}_1, \overline{\overline{x}}_2\right)\right| \leq k\left|(\overline{x}_1, \overline{x}_2) - \left(\overline{\overline{x}}_1, \overline{\overline{x}}_2\right)\right|,$$

para quaisquer $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$, $\left(\overline{\overline{x}}_1, \overline{\overline{x}}_2\right) \in (x_1, x_2) + \varepsilon B$. Isto é, $g(\cdot)$ é localmente lipschitziana, para qualquer $x_2 \in \mathbb{R}^n$.

Como $g(\cdot)$ e $h(\cdot)$ são localmente lipschitzianas em $(x_1, x_2)$ e $x_1$ respectivamente, vamos usar a definição de subdiferencial generalizado de Clarke, isto é,

$$\partial g(x) = \left\{\varphi \in \mathbb{R}^{2n} : g^\circ(x; v) \geq \langle \varphi, v\rangle, \forall\, v \in \mathbb{R}^{2n}\right\},$$

onde $x = (x_1, x_2)$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, $v = (v_1, v_2)$, e

$$\partial h(x_1) = \{\varphi_1 \in \mathbb{R}^n : h^\circ(x_1; v_1) \geq \langle \varphi_1, v_1\rangle, \forall\, v_1 \in \mathbb{R}^n\}.$$

De $g(x_1, x_2) := h(x_1)$ resulta que

$$\begin{aligned}
g^\circ((x_1, x_2); (v_1, v_2)) &= \limsup_{\substack{(y_1, y_2) \to (x_1, x_2) \\ t \searrow 0}} \frac{g((y_1, y_2) + t(v_1, v_2)) - g(y_1, y_2)}{t} \\
&= \limsup_{\substack{(y_1, y_2) \to (x_1, x_2) \\ t \searrow 0}} \frac{g(y_1 + tv_1, y_2 + tv_2) - g(y_1, y_2)}{t} \\
&= \limsup_{\substack{y_1 \to x_1 \\ t \searrow 0}} \frac{h(y_1 + tv_1) - h(y_1)}{t} \\
&= h^\circ(x_1; v_1),
\end{aligned}$$

para quaisquer $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^{2n}$, $(x_1, x_2)$, $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Mostremos agora que

$$\partial_{(x_1, x_2)} g(x_1, x_2) = \partial h(x_1) \times \{0\}.$$

Para isso, temos de mostrar duas inclusões :

$$(i)\ \partial_{(x_1,x_2)} g(x_1,x_2) \subseteq \partial h(x_1) \times \{0\};$$

$$(ii)\ \partial h(x_1) \times \{0\} \subseteq \partial_{(x_1,x_2)} g(x_1,x_2).$$

Demonstremos primeiro :

$$(i)\ \partial_{(x_1,x_2)} g(x_1,x_2) \subseteq \partial h(x_1) \times \{0\}.$$

Queremos mostrar que :

$$\forall\ (\varphi_1,\varphi_2),\ (\varphi_1,\varphi_2) \in \partial_{(x_1,x_2)} g(x_1,x_2) \Rightarrow (\varphi_1,\varphi_2) \in \partial h(x_1) \times \{0\} \Leftrightarrow \varphi_1 \in \partial h(x_1) \text{ e } \varphi_2 = 0.$$

Seja $(\varphi_1,\varphi_2) \in \partial_{(x_1,x_2)} g(x_1,x_2)$ qualquer, então $(\varphi_1,\varphi_2) \in \mathbb{R}^{2n}$ tal que

$$\begin{aligned} h^\circ(x_1;v_1) &= g^\circ((x_1,x_2);(v_1,v_2)) \\ &\geq \langle(\varphi_1,\varphi_2),(v_1,v_2)\rangle \\ &= \langle\varphi_1,v_1\rangle + \langle\varphi_2,v_2\rangle,\ \forall\ (v_1,v_2) \in \mathbb{R}^{2n}. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Se $v_2 = 0 \Rightarrow h^\circ(x_1;v_1) \geq \langle\varphi_1,v_1\rangle\ \forall\ v_1 \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \varphi_1 \in \partial h(x_1)$. Além disso, queremos mostrar que $\varphi_2 = 0$. Suponhamos $\varphi_2 \neq 0$. Então $\exists\ j \in \{1,...,n\}$ tal que $\varphi_2^j \neq 0$. Suponhamos primeiro $\varphi_2^j > 0$. E sejam $v_2^i = 0$ $\forall\ i \in \{1,...,n\} \setminus \{j\}$ e $v_2^j = \frac{-\langle\varphi_1,v_1\rangle + h^\circ(x_1;v_1)}{\varphi_2^j} + 1$. Então, substituindo em (2.38) vem

$$\begin{aligned} h^\circ(x_1;v_1) &\geq \langle\varphi_1,v_1\rangle + \langle\varphi_2,v_2\rangle \\ &= \langle\varphi_1,v_1\rangle + \varphi_2^j\, v_2^j \\ &= \langle\varphi_1,v_1\rangle + \varphi_2^j\left(\frac{-\langle\varphi_1,v_1\rangle + h^\circ(x_1;v_1)}{\varphi_2^j} + 1\right) \\ &= \langle\varphi_1,v_1\rangle - \langle\varphi_1,v_1\rangle + h^\circ(x_1;v_1) + \varphi_2^j \\ &> h^\circ(x_1;v_1)\ \ (\text{pois } \varphi_2^j > 0). \end{aligned}$$

O que é absurdo. Logo, não podemos ter $\varphi_2^j > 0$. Suponhamos agora $\varphi_2^j < 0$. E sejam $v_2^i = 0\ \forall\ i \in \{1,...,n\} \setminus \{j\}$ e $v_2^j = \frac{-\langle\varphi_1,v_1\rangle + h^\circ(x_1;v_1)}{\varphi_2^j} - 1$. Então, substituindo em (2.38) vem

$$\begin{aligned} h^\circ(x_1;v_1) &\geq \langle\varphi_1,v_1\rangle + \langle\varphi_2,v_2\rangle \\ &= \langle\varphi_1,v_1\rangle + \varphi_2^j\, v_2^j \\ &= \langle\varphi_1,v_1\rangle + \varphi_2^j\left(\frac{-\langle\varphi_1,v_1\rangle + h^\circ(x_1;v_1)}{\varphi_2^j} - 1\right) \\ &= \langle\varphi_1,v_1\rangle - \langle\varphi_1,v_1\rangle + h^\circ(x_1;v_1) - \varphi_2^j \\ &> h^\circ(x_1;v_1)\ \ (\text{pois } \varphi_2^j < 0 \Rightarrow -\varphi_2^j > 0). \end{aligned}$$

O que é absurdo. Logo, não podemos ter $\varphi_2^j < 0$. E portanto, não podemos ter $\varphi_2 \neq 0$. Donde $\varphi_2 = 0$.
$\therefore \partial_{(x_1,x_2)} g(x_1,x_2) \subseteq \partial h(x_1) \times \{0\}$.

Agora demonstremos :

$$(ii)\ \partial h(x_1) \times \{0\} \subseteq \partial_{(x_1,x_2)} g(x_1,x_2).$$

Queremos mostrar que :

$$\forall\ (\varphi_1,\varphi_2),\ (\varphi_1,\varphi_2) \in \partial h(x_1) \times \{0\} \Leftrightarrow \varphi_1 \in \partial h(x_1) \text{ e } \varphi_2 = 0 \Rightarrow (\varphi_1,0) \in \partial_{(x_1,x_2)} g(x_1,x_2).$$

Seja $(\varphi_1, \varphi_2) \in \partial h(x_1) \times \{0\}$ qualquer. Então $\varphi_1 \in \partial h(x_1)$ e $\varphi_2 = 0$. Logo,

$$h^\circ(x_1; v_1) \geq \langle \varphi_1, v_1 \rangle, \ \forall \ v_1 \in \mathbb{R}^n \text{ e } \varphi_2 = 0.$$

E consequentemente,

$$\begin{aligned} h^\circ(x_1; v_1) &= g^\circ((x_1, x_2); (v_1, v_2)) \\ &\geq \langle \varphi_1, v_1 \rangle + \langle 0, v_2 \rangle \\ &= \langle (\varphi_1, 0), (v_1, v_2) \rangle, \ \forall \ (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^{2n}. \end{aligned}$$

Isto é,

$$g^\circ((x_1, x_2); (v_1, v_2)) \geq \langle (\varphi_1, 0), (v_1, v_2) \rangle, \ \forall \ (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Donde,

$$(\varphi_1, 0) \in \partial_{(x_1, x_2)} g(x_1, x_2).$$

$\therefore \partial h(x_1) \times \{0\} \subseteq \partial_{(x_1,x_2)} g(x_1, x_2)$.

$\therefore$ Por $(i)$ e $(ii)$, $\partial_{(x_1,x_2)} g(x_1, x_2) = \partial h(x_1) \times \{0\}$. ■

**Lema 2.15.** *Seja $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ uma função convexa, própria, sci e seja $\omega \in int(dom\ f)$. Defina-se*

$$\varphi_\omega(t) := \begin{cases} f\left(\frac{\omega}{t}\right) t & \text{se } t > 0 \\ \liminf\limits_{t \searrow 0} f\left(\frac{\omega}{t}\right) t & \text{se } t = 0 \\ +\infty & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

*Então $\varphi_\omega(\cdot)$ é uma função convexa, própria, sci com $1 \in int(dom\ \varphi_\omega)$ e*

$$\partial \varphi_\omega(1) = \{f(\omega)\} - \langle \omega, \partial f(\omega) \rangle.$$

**Demonstração :**

Como, por hipótese, $f(\cdot)$ é convexa, própria, sci e $\omega \in int(dom\ f)$, então a função $\varphi_\omega : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ dada por

$$\varphi_\omega(t) := \begin{cases} f\left(\frac{\omega}{t}\right) t & \text{se } t > 0 \\ \lim\limits_{t \searrow 0} f\left(\frac{\omega}{t}\right) t & \text{se } t = 0 \\ +\infty & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

é uma função convexa, própria, sci, pela proposição 2.10, com $f(\cdot) = f(\cdot)$, $x = \omega$, $f_x(\cdot) = \varphi_\omega(\cdot)$, $\lambda = t$. Em particular, por definição de limite, a função $\varphi_\omega : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ dada por

$$\varphi_\omega(t) := \begin{cases} f\left(\frac{\omega}{t}\right) t & \text{se } t > 0 \\ \liminf\limits_{t \searrow 0} f\left(\frac{\omega}{t}\right) t & \text{se } t = 0 \\ +\infty & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

é convexa, própria, sci.

Mostremos agora que se $\omega \in int(dom\ f)$, então $1 \in int(dom\ \varphi_\omega)$. Como $\varphi_\omega(1) = f(\omega)$ e, por hipótese, $\omega \in int(dom\ f)$, então $f(\omega) < +\infty$, donde $\varphi_\omega(1) < +\infty$, logo $1 \in dom\ \varphi_\omega$. Se $0 = \omega \in int(dom\ f)$, então

$$\varphi_0(t) := \begin{cases} f(0)\, t & \text{se } t > 0 \\ \liminf\limits_{t \searrow 0} f(0)\, t & \text{se } t = 0 \\ +\infty & \text{se } t < 0, \end{cases}$$

logo $dom\ \varphi_0 = [0, +\infty)$, e portanto, $1 \in int\,(dom\ \varphi_0)$. Suponhamos que $0 \neq \omega \in int\,(dom\ f)$. E seja $\varepsilon > 0$ tal que

$$\forall\, \omega_1 \in \mathbb{R}^n : |\omega_1 - \omega| < \varepsilon \Rightarrow f(\omega_1) < +\infty. \tag{2.39}$$

Seja $\delta = \frac{\varepsilon}{|\omega|+\varepsilon}$. Então

$$\begin{aligned}
|t-1| < \delta \quad &\Leftrightarrow \quad -\tfrac{\varepsilon}{|\omega|+\varepsilon} < t-1 < \tfrac{\varepsilon}{|\omega|+\varepsilon} \\
&\Leftrightarrow \quad 1 - \tfrac{\varepsilon}{|\omega|+\varepsilon} < t < 1 + \tfrac{\varepsilon}{|\omega|+\varepsilon} \\
&\Leftrightarrow \quad \tfrac{|\omega|}{|\omega|+\varepsilon} < t < \tfrac{|\omega|+2\varepsilon}{|\omega|+\varepsilon} \\
&\Rightarrow \quad \tfrac{|\omega|+\varepsilon}{|\omega|+2\varepsilon} < \tfrac{1}{t} < \tfrac{|\omega|+\varepsilon}{|\omega|} \\
&\Leftrightarrow \quad 1 - \tfrac{\varepsilon}{|\omega|+2\varepsilon} < \tfrac{1}{t} < 1 + \tfrac{\varepsilon}{|\omega|} \\
&\Leftrightarrow \quad -\tfrac{\varepsilon}{|\omega|+2\varepsilon} < \tfrac{1}{t} - 1 < \tfrac{\varepsilon}{|\omega|}.
\end{aligned}$$

Como

$$|\omega| + 2\varepsilon > |\omega| \Rightarrow \frac{1}{|\omega|+2\varepsilon} < \frac{1}{|\omega|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|\omega|} < -\frac{1}{|\omega|+2\varepsilon} \Leftrightarrow -\frac{\varepsilon}{|\omega|} < -\frac{\varepsilon}{|\omega|+2\varepsilon},$$

vem

$$-\frac{\varepsilon}{|\omega|} < \frac{1}{t} - 1 < \frac{\varepsilon}{|\omega|} \Leftrightarrow \left|\frac{1}{t} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{|\omega|}.$$

Provámos que

$$|t-1| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{t} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{|\omega|},$$

para $\delta = \frac{\varepsilon}{|\omega|+\varepsilon}$. Donde

$$\left|\frac{\omega}{t} - \omega\right| = |\omega| \left|\frac{1}{t} - 1\right| < |\omega| \frac{\varepsilon}{|\omega|} = \varepsilon.$$

Logo, por (2.39), $f\left(\frac{\omega}{t}\right) < +\infty$, então

$$\varphi_\omega(t) = f\left(\frac{\omega}{t}\right) t < +\infty,$$

para qualquer $t$ tal que $|t-1| < \delta$. O que mostra que $1 \in int\,(dom\ \varphi_\omega)$.

Finalmente, vamos mostrar que

$$\partial\varphi_\omega(1) = \{f(\omega)\} - \langle \omega, \partial f(\omega) \rangle,$$

para qualquer $\omega \in int\,(dom\ f)$. Para tal, seja $\omega \in int\,(dom\ f)$ e consideremos as funções $f_1 : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ e $f_2 : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f_1(t) = \frac{\omega}{t} \qquad \text{e} \qquad f_2(t) = t,$$

respectivamente. Como

$$f_1'(t) = -\frac{\omega}{t^2},$$

então $f_1'(\cdot)$ é uma função contínua em $(0, +\infty)$. Isto é, $f_1(\cdot)$ é continuamente diferenciável em $(0, +\infty)$. Isto é, $f_1(\cdot)$ é continuamente diferenciável em $t_0$, para qualquer $t_0 > 0$. Então, $f_1(\cdot)$ é estritamente diferenciável em

$t_0$, para qualquer $t_0 > 0$, pelo corolário 22.11, com $X = (0, +\infty)$, $Y = \mathbb{R}^n$, $F(\cdot) = f_1(\cdot)$, $x = t_0$. Tendo em conta a definição 22.10, sendo $D_s f_1(t_0)$ a derivada estrita de $f_1(\cdot)$ em $t_0$, para qualquer $t_0 \in (0, +\infty)$, temos

$$\begin{aligned} \langle D_s f_1(t_0), v \rangle &= \lim_{\substack{t \to t_0 \\ \lambda \searrow 0}} \frac{f_1(t + \lambda v) - f_1(t)}{\lambda} = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ \lambda \searrow 0}} \frac{\frac{\omega}{t+\lambda v} - \frac{\omega}{t}}{\lambda} = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ \lambda \searrow 0}} \frac{-\omega v}{t(t + \lambda v)} = -\frac{\omega v}{t_0^2} \\ &= \left\langle -\frac{\omega}{t_0^2}, v \right\rangle. \end{aligned}$$

Então

$$D_s f_1(t_0) = -\frac{\omega}{t_0^2}, \forall\, t_0 \in (0, +\infty),$$

logo,

$$\partial f_1(t) = \{D_s f_1(t)\} = \{f_1'(t)\} = \left\{-\frac{\omega}{t^2}\right\}, \forall\, t \in (0, +\infty),$$

pela proposição 22.12, com $X = (0, +\infty)$, $f(\cdot) = f_1(\cdot)$, $x = t$, e pela nota 22.7, com $f(\cdot) = f_1(\cdot)$. Então, como $f_1(\cdot)$ é estritamente diferenciável para qualquer $t \in (0, +\infty)$, em particular $f_1(\cdot)$ é estritamente diferenciável em $t = 1$ e

$$D_s f_1(1) = -\omega.$$

Além disso, por hipótese, $f(\cdot)$ está definida em $\mathbb{R}^n$ e é convexa, então $f(\cdot)$ é lipschitziana numa vizinhança de $f_1(1) = \omega \in int(dom\ f)$, pelo teorema 19.72, com $f(\cdot) = f(\cdot)$, $x_0 = f_1(1) = \omega$. E como $f(\cdot)$ é convexa, temos também que é regular em $f_1(1)$, pela proposição 22.17 (alínea (b)), com $X = \mathbb{R}^n$, $f(\cdot) = f(\cdot)$ e $x = f_1(1)$. Logo, a função $F : (0, +\infty) \to [0, +\infty]$ dada por

$$F(t) = (f \circ f_1)(t) = f(f_1(t)) = f\left(\frac{\omega}{t}\right)$$

é lipschitziana numa vizinhança de $t = 1$, temos

$$\begin{aligned} \partial F(1) &= \langle \partial f(f_1(1)), D_s f_1(1) \rangle \\ &= \langle \partial f(\omega), (-\omega) \rangle \\ &= -\langle \partial f(\omega), \omega \rangle \end{aligned}$$

e $F$ é regular em $t = 1$, pelo teorema 22.23, com $X = (0, +\infty)$, $Y = \mathbb{R}^n$, $F(\cdot) = f_1(\cdot)$, $g(\cdot) = f(\cdot)$, $x = t = 1$, $f = F(\cdot)$, e pela nota 22.25, com $X = \mathbb{R}^n$, $f(\cdot) = F(\cdot)$, $x = f_1(1) = \omega$. Por outro lado, como $f_2'(t) = 1$, então $f_2'(\cdot)$ é uma função contínua, logo $f_2(\cdot)$ é continuamente diferenciável em $t = 1$, então $f_2(\cdot)$ é estritamente diferenciável em $t = 1$ e lipschitziana numa vizinhança de $t = 1$, pelo corolário 22.11, com $X = (0, +\infty)$, $Y = \mathbb{R}$, $F(\cdot) = f_2(\cdot)$, $x = t = 1$. Logo, como $f_2'(t) = 1$, temos que

$$\partial f_2(1) = \{f_2'(1)\} = \{1\},$$

pela proposição 22.12, com $X = (0, +\infty)$, $f(\cdot) = f_2(\cdot)$, $x = t = 1$. Por outro lado, como $f_2(\cdot)$ é estritamente diferenciável em $t = 1$ e localmente lipschitziana numa vizinhança de $t = 1$, então $f_2(\cdot)$ é regular em $t = 1$, pela proposição 22.17 (alínea (a)), com $X = (0, +\infty)$, $f(\cdot) = f_2(\cdot)$, $x = t = 1$. Além disso,

$$F(1) = (f \circ f_1)(1) = f(f_1(1)) = f(\omega) \geq 0$$

(pois $f(\cdot)$ toma valores em $[0, +\infty]$) e

$$f_2(1) = 1 \geq 0.$$

Logo, pela proposição 22.24, com $X = (0, +\infty)$, $f_1(\cdot) = F(\cdot)$, $f_2(\cdot) = f_2(\cdot)$, $x = 1$, e como $\varphi_\omega(\cdot) = F(\cdot)\ f_2(\cdot)$, resulta que

$$\begin{aligned} \partial\varphi_\omega(1) &= \partial(F\ f_2)(1) = f_2(1)\ \partial F(1) + F(1)\ \partial f_2(1) \\ &= 1\ [-\langle \partial f(\omega), \omega \rangle] + f(\omega)\ \{1\} \\ &= \{f(\omega)\} - \langle \omega, \partial f(\omega) \rangle. \ \blacksquare \end{aligned}$$

**Proposição 2.16.** *Sejam* $\theta : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ *uma função de Nagumo e* $L : [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^n \to (-\infty,+\infty]$ *uma função satisfazendo o seguinte :*

*(i)* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *(ver (1.2)) é fechado;*

*(ii) a função* $(s,v) \mapsto L(t,s,v)$ *é sci (semicontínua inferiormente);*

*(iii) para cada* $s \in \Omega$ *:*

*(iii₁) a função* $L(t,s,\cdot)$ *é convexa* $\forall\, t \in [0,T]$*;*

*(iii₂) o domínio dom* $L(t,s,\cdot)$ *é um conjunto aberto, convexo e não-vazio, independente de* $t$*, designado por dom* $L(s,\cdot)$*;*

*(iv) para cada* $s \in \Omega$ *e* $v \in$ *dom* $L(s,\cdot)$ *a função*

$t \longmapsto L(t,s,v)$ *é lipschitziana;*

*(v) existem constantes não-negativas* $\lambda$ *e* $\eta$ *tais que :*

$$|L_t(t,s,v)| \leq \lambda\, L(t,s,v) + \eta \text{ qs em } [0,T] \qquad \forall\, s \in \Omega \qquad \forall\, v \in \text{dom } L(s,\cdot).$$

*Sejam também* $z(\cdot) \in AC_\theta([0,T],\mathbb{R}^n)$ *tal que* $\Lambda(z(\cdot)) \in \mathbb{R}$*, e* $u : [0,T] \to [-\varepsilon_0,\varepsilon_0]$ *uma função mensurável, com* $\int_0^T u(t)\, dt = 0$*, sendo* $0 < \varepsilon_0 < 1$*. Então, para qualquer* $\varepsilon > 0$*,*

*(a) existe uma função mensurável* $\gamma_1(\cdot) : [0,T] \to (0,+\infty)$ *tal que*

$$|u(\tau)| \leq \gamma_1(\tau) \quad \Rightarrow \quad \left|\theta\left(\left|\frac{z'(\tau)}{1+u(\tau)}\right|\right)(1+u(\tau)) - \theta(|z'(\tau)|)\right| \leq \frac{\varepsilon}{T} \text{ qs em } [0,T];$$

*(b) existe uma função mensurável* $\gamma_2(\cdot) : [0,T] \to (0,+\infty)$ *tal que*

$$|u(\tau)| \leq \gamma_2(\tau) \quad \Rightarrow \quad L\left(\varphi(\tau), z(\tau), \frac{z'(\tau)}{1+u(\tau)}\right) \in \mathbb{R} \text{ qs em } [0,T],$$

*onde* $\varphi : [0,T] \to [0,T]$ *é dada por*

$$\varphi(\tau) := \tau + \int_0^\tau u(s)\, ds.$$

**Demonstração :**

Sejam $\varepsilon > 0$ e consideremos o conjunto de medida nula

$$N := \{t \in [0,T] : z'(t) \text{ não existe ou } z'(t) \notin \text{dom } L(t,z(t),\cdot)\}.$$

(a) Comecemos por mostrar que

$$\begin{cases} \text{dado } \varepsilon > 0 \text{ existe uma função mensurável } \gamma_1(\cdot) : [0,T] \to (0,+\infty) \text{ tal que} \\[2ex] |u(\tau)| \leq \gamma_1(\tau) \quad \Rightarrow \quad \left|\theta\left(\left|\frac{z'(\tau)}{1+u(\tau)}\right|\right)(1+u(\tau)) - \theta(|z'(\tau)|)\right| \leq \frac{\varepsilon}{T} \text{ qs em } [0,T]. \end{cases}$$

Seja $g : [0,T] \times \mathbb{R} \to (-\infty,+\infty]$ a função dada por

$$g(\tau,\omega) := \begin{cases} \theta\left(\left|\frac{z'(\tau)}{1+\omega}\right|\right)(1+\omega) & \text{se } \begin{cases} \tau \in [0,T]\backslash N \\ \omega \in [-\varepsilon_0,\varepsilon_0] \end{cases} \\[3ex] 0 & \text{se } \begin{cases} \tau \in N \\ \omega \in [-\varepsilon_0,\varepsilon_0] \end{cases} \\[3ex] +\infty & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como $g(\cdot) = h_s^2(\cdot)$ quando $r = 1$, $t = \tau$, $u = \omega$ e $h_s^2(\cdot)$ é um integrando normal, convexo, sci e *int* $(\text{dom } h_s^2(t,\cdot)) \neq \varnothing$ (onde $h_s^2(\cdot)$ é um integrando que é definido na demonstração do teorema 2.1), então $g(\cdot)$

é um integrando normal, convexo, sci e $int\,(dom\ g(\tau,\cdot)) \neq \varnothing$. Além disso, como $dom\ g(\tau,\cdot) = [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, então $0 \in int\,(dom\ g(\tau,\cdot)) = (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$.

Sejam também o conjunto $\mathbb{Q}$, $k \in \mathbb{N}$ qualquer e $m_k : [0,T] \to [0,+\infty]$ a função dada por

$$m_k(\tau) := \sup\left\{ |g(\tau,\omega) - g(\tau,0)| : \omega \in \mathbb{Q} \text{ e } |\omega| \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, a função $m_k(\cdot)$ é mensurável, pela proposição 2.7, com $f(\cdot) = g(\cdot)$, $\Omega = [0,T]$, $u'(t) = 0$, $t = \tau$, $z = \omega$.

Fixemos $\tau \in [0,T] \setminus N$ e $\omega \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$. Então

$$g(\tau,\omega) := \theta\left(\frac{|z'(\tau)|}{1+\omega}\right)(1+\omega) \text{ qs em } [0,T].$$

Para $\omega = 0$ temos

$$g(\tau,0) := \theta(|z'(\tau)|).$$

Como, por hipótese, $\theta(\cdot)$ é contínua (e $|z'(\tau)|$ é constante em relação à variável $\omega$) então $g(\tau,\cdot)$ é contínua em $\omega = 0$, pqt $\tau \in [0,T]$. Ou seja,

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \lambda_\varepsilon(\tau) > 0,\ \forall\, \omega \in \mathbb{R} : |\omega| < \lambda_\varepsilon(\tau) \Rightarrow |g(\tau,\omega) - g(\tau,0)| < \varepsilon \text{ qs em } [0,T].$$

Mostremos que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $(m_k(\cdot))$ decresce para zero, quase sempre em $[0,T]$. Isto é, vamos mostrar que, para cada $k \in \mathbb{N}$, e para quase todo $\tau \in [0,T]$, $(m_k(\cdot))$ é decrescente e $\lim\limits_{k\to+\infty} m_k(\tau) = 0$. Para $(m_k(\cdot))$ ser decrescente, deverá ser

$$k_1 < k_2 \Rightarrow m_{k_1}(\tau) \geq m_{k_2}(\tau),$$

para quase todo $\tau \in [0,T]$, e para cada $k \in \mathbb{N}$. Mas temos

$$\begin{aligned}
k_1 < k_2 \quad &\Rightarrow \quad \tfrac{1}{k_2} < \tfrac{1}{k_1} \\
&\Rightarrow \quad \left\{\omega \in \mathbb{Q} : |\omega| \leq \tfrac{1}{k_2}\right\} \subseteq \left\{\omega \in \mathbb{Q} : |\omega| \leq \tfrac{1}{k_1}\right\} \\
&\Rightarrow \quad \sup\left\{|g(\tau,\omega) - g(\tau,0)| : \omega \in \mathbb{Q} \text{ e } |\omega| \leq \tfrac{1}{k_2}\right\} \leq \sup\left\{|g(\tau,\omega) - g(\tau,0)| : \omega \in \mathbb{Q} \text{ e } |\omega| \leq \tfrac{1}{k_1}\right\} \\
&\Leftrightarrow \quad m_{k_2}(\tau) \leq m_{k_1}(\tau).
\end{aligned}$$

Além disso, para ser

$$\lim_{k\to+\infty} m_k(\tau) = 0 \text{ qs em } [0,T]$$

devemos ter

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, M_\varepsilon(\tau) > 0,\ \forall\, k \in \mathbb{N} : k > M_\varepsilon(\tau) \Rightarrow |m_k(\tau)| < \varepsilon,$$

para quase todo $\tau \in [0,T]$. Seja

$$M_\varepsilon(\tau) := \frac{1}{\lambda_\varepsilon(\tau)} > 0$$

(para o $\lambda_\varepsilon(\tau) > 0$ referido na definição de continuidade de $g(\tau,\cdot)$ em $\omega = 0$, para quase todo $\tau \in [0,T]$ tal que $k > M_\varepsilon(\tau)$). Então,

$$k > M_\varepsilon(\tau) \Rightarrow \frac{1}{k} < \frac{1}{M_\varepsilon(\tau)} = \lambda_\varepsilon(\tau),$$

logo

$$\left\{\omega \in \mathbb{Q} : |\omega| \leq \frac{1}{k}\right\} \subseteq \{\omega \in \mathbb{Q} : |\omega| \leq \lambda_\varepsilon(\tau)\}.$$

E portanto, se $\omega \in \left\{\omega \in \mathbb{Q} : |\omega| \leq \frac{1}{k}\right\}$, então $\omega \in \{\omega \in \mathbb{Q} : |\omega| \leq \lambda_\varepsilon(\tau)\}$. Logo,

$$\forall\ k \in \mathbb{N} : k > M_\varepsilon(\tau),\ \forall\ \omega \in \mathbb{Q} : |\omega| \leq \frac{1}{k} \Rightarrow |g(\tau,\omega) - g(\tau,0)| < \varepsilon,$$

pela definição de continuidade de $g(\tau,\cdot)$ em $\omega = 0$ para quase todo $\tau \in [0,T]$. Em particular,

$$\sup\left\{|g(\tau,\omega) - g(\tau,0)| : \omega \in \mathbb{Q} \text{ e } |\omega| \leq \frac{1}{k}\right\} < \varepsilon,$$

$\forall\ k \in \mathbb{N}$ tal que $k > M_\varepsilon(\tau)$. Logo,

$$\left|\sup\left\{|g(\tau,\omega) - g(\tau,0)| : \omega \in \mathbb{Q} \text{ e } |\omega| \leq \frac{1}{k}\right\}\right| < \varepsilon,$$

$\forall\ k \in \mathbb{N}$ tal que $k > M_\varepsilon(\tau)$. Provámos então que, para quase todo $\tau \in [0,T]$,

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ M_\varepsilon(\tau) := \frac{1}{\lambda_\varepsilon(\tau)} > 0,\ \forall\ k \in \mathbb{N} : k > M_\varepsilon(\tau) \Rightarrow |m_k(\tau)| < \varepsilon.$$

Isto é,

$$\lim_{k \to +\infty} m_k(\tau) = 0 \text{ qs em } [0,T].$$

Para $\varepsilon > 0$ fixado, consideremos os conjuntos

$$E_1 := \left\{\tau \in [0,T] : m_1(\tau) \leq \frac{\varepsilon}{T}\right\},$$

$$E_k := \left\{\tau \in [0,T] : m_k(\tau) \leq \frac{\varepsilon}{T} < m_{k-1}(\tau)\right\},$$

para $k = 2, 3, \ldots$ . E vamos mostrar que esses conjuntos são mensuráveis. Como $m_1(\cdot)$ é mensurável, então pela definição 10.15, com $f(\cdot) = m_1(\cdot)$, $D = [0,T]$ e $\alpha = \frac{\varepsilon}{T}$, temos que o conjunto $E_1$ é mensurável. Notemos que

$$\begin{aligned} E_k &:= \left\{\tau \in [0,T] : m_k(\tau) \leq \tfrac{\varepsilon}{T} < m_{k-1}(\tau)\right\} \\ &= \left\{\tau \in [0,T] : m_k(\tau) \leq \tfrac{\varepsilon}{T}\right\} \cap \left\{\tau \in [0,T] : m_{k-1}(\tau) > \tfrac{\varepsilon}{T}\right\} \\ &=: E_k^1 \cap E_k^2. \end{aligned}$$

Como $m_k(\cdot)$ é mensurável para $k = 1, 2, 3, \ldots$, então pela definição 10.15, com $f(\cdot) = m_k(\cdot)$, $k = 2, 3, \ldots$, $D = [0,T]$ e $\alpha = \frac{\varepsilon}{T}$, temos que o conjunto $E_k^1$ é mensurável. E como $m_{k-1}(\cdot)$ é mensurável para $k = 2, 3, \ldots$, então pela definição 10.15 e pelo lema 10.17, com $f(\cdot) = m_{k-1}(\cdot)$, $k = 2, 3, \ldots$, $D = [0,T]$ e $\alpha = \frac{\varepsilon}{T}$, temos que o conjunto $E_k^2$ é mensurável. Logo, pelo lema 10.2 (alínea (c)), com $A = E_k^1$ e $B = E_k^2$, vem que o conjunto $E_k := E_k^1 \cap E_k^2$ é mensurável, para $k = 2, 3, \ldots$ .

Seja

$$\gamma_1(\tau) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\, \chi_{E_k}(\tau),$$

onde

$$\chi_{E_k}(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{se } \tau \in E_k \\ 0 & \text{se } \tau \notin E_k, \end{cases}$$

para qualquer $k \in \mathbb{N}$.

Mostremos que $\gamma_1(\tau) > 0$ quase sempre em $[0,T]$. Isto é, que quase todo o $\tau \in [0,T]$ pertence a pelo menos um dos conjuntos $E_k$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Suponhamos que isso não acontece, isto é, que existe um conjunto $P \subset [0,T]$ com medida positiva e tal que para cada $\tau \in P$, temos $\tau \notin E_k$, para qualquer $k \in \mathbb{N}$. Ou seja, $\tau \notin E_1$ e $\tau \notin E_k$, para qualquer $k = 2, 3, \ldots$ . Então, por definição de $E_1$ e $E_k$, para $k = 2, 3, \ldots$, temos que

$$m_1(\tau) > \tfrac{\varepsilon}{T} \quad \wedge \quad \left[m_k(\tau) > \tfrac{\varepsilon}{T} \vee m_{k-1}(\tau) \leq \tfrac{\varepsilon}{T}\right], \qquad \forall\, k = 2, 3, \ldots$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[m_1(\tau) > \tfrac{\varepsilon}{T} \wedge m_k(\tau) > \tfrac{\varepsilon}{T}\right] \quad \vee \quad \left[m_1(\tau) > \tfrac{\varepsilon}{T} \wedge m_{k-1}(\tau) \leq \tfrac{\varepsilon}{T}\right], \qquad \forall\, k = 2, 3, \ldots$$

$$\Leftrightarrow \quad m_k(\tau) > \tfrac{\varepsilon}{T}\ \forall\, k \in \mathbb{N} \quad \vee \quad m_{k-1}(\tau) \leq \tfrac{\varepsilon}{T} < m_1(\tau), \qquad \forall\, k = 2, 3, \ldots\ .$$

Se $m_k(\tau) > \frac{\varepsilon}{T} > 0$, para qualquer $k \in \mathbb{N}$, temos um absurdo, porque já provámos que $\lim\limits_{k \to +\infty} m_k(\tau) = 0$. Se $m_{k-1}(\tau) \leq \frac{\varepsilon}{T} < m_1(\tau)$, para $k = 2, 3, \ldots$, então quando $k = 2$ temos $m_1(\tau) \leq \frac{\varepsilon}{T} < m_1(\tau)$, o que é absurdo. Logo, $\gamma_1(\tau) > 0$ qs em $[0,T]$.

Provemos agora

$$\gamma_1(\tau) \in \mathbb{R} \text{ qs em } [0,T].$$

Já mostrámos que $\gamma_1(\tau) > 0$ qs em $[0,T]$. Isto é, quase todo $\tau \in [0,T]$ pertence a pelo menos um dos conjuntos $E_k$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Mas pertencerá quase todo $\tau \in [0,T]$ a mais do que um conjunto $E_k$, para algum $k \in \mathbb{N}$? Suponhamos que quase todo $\tau \in [0,T]$ pertence a $E_{k_1}$ e a $E_{k_2}$, para alguns $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, com $k_1 \neq k_2$. Isto é,

$$\exists\, k_1, k_2 \in \mathbb{N},\ k_1 \neq k_2 : \tau \in E_{k_1} \text{ e } \tau \in E_{k_2}.$$

Se $k_1 = 1$ e $k_2 \geq 2$, temos

$$m_1(\tau) \leq \frac{\varepsilon}{T} \qquad \text{e} \qquad m_{k_2}(\tau) \leq \frac{\varepsilon}{T} < m_{k_2-1}(\tau).$$

Como $k_2 \geq 2 \Leftrightarrow k_2 - 1 \geq 1 = k_1$ e $(m_k(\cdot))$ é decrescente, então $m_{k_2-1}(\tau) \leq m_1(\tau)$. Logo,

$$m_{k_2}(\tau) \leq \frac{\varepsilon}{T} < m_{k_2-1}(\tau) \leq m_1(\tau) \leq \frac{\varepsilon}{T},$$

o que é absurdo. Se $k_1, k_2 \geq 2$, vem

$$m_{k_1}(\tau) \leq \frac{\varepsilon}{T} < m_{k_1-1}(\tau) \qquad \text{e} \qquad m_{k_2}(\tau) \leq \frac{\varepsilon}{T} < m_{k_2-1}(\tau).$$

Suponhamos que $k_1 < k_2$, então temos

$$k_1 = k_2 - 1 \qquad \text{ou} \qquad k_1 < k_2 - 1.$$

Se $k_1 = k_2 - 1$, então

$$m_{k_2-1}(\tau) \leq \frac{\varepsilon}{T} < m_{(k_2-1)-1}(\tau) \qquad \text{e} \qquad m_{k_2}(\tau) \leq \frac{\varepsilon}{T} < m_{k_2-1}(\tau),$$

logo

$$m_{k_2}(\tau) \leq \frac{\varepsilon}{T} < m_{k_2-1}(\tau) \leq \frac{\varepsilon}{T},$$

o que é absurdo. Se $k_1 < k_2 - 1$, então

$$m_{k_1}(\tau) \geq m_{k_2-1}(\tau),$$

pois $(m_k(\cdot))$ é decrescente, e consequentemente,

$$m_{k_2}(\tau) \leq \frac{\varepsilon}{T} < m_{k_2-1}(\tau) \leq m_{k_1}(\tau) \leq \frac{\varepsilon}{T},$$

o que é absurdo. Provámos então que quase todo $\tau \in [0,T]$ pertence a um único $E_k$, com $k \in \mathbb{N}$. Isto é,

$$\text{pqt } \tau \in [0,T]\ \exists^1\, k \in \mathbb{N} : \tau \in E_k.$$

Logo, $\gamma_1(\tau) = \frac{1}{k} \in \mathbb{R}$ qs em $[0,T]$.

$\therefore \gamma_1(\tau) \in \mathbb{R}^+$ qs em $[0,T]$.

Agora vamos provar que $\gamma_1(\cdot)$ é mensurável. Como, para cada $k \in \mathbb{N}$, o conjunto $E_k$ é mensurável, então pela nota 10.16, com $E = E_k$, temos que $\chi_{E_k}(\cdot)$ é mensurável, para cada $k \in \mathbb{N}$. Logo, pelo teorema 10.21, com $c = \frac{1}{k} \in \mathbb{R}$, $f(\cdot) = \chi_{E_k}(\cdot)$, $D = [0,T]$ e o domínio de definição de $cf$ é igual a $[0,T]$, sabemos que $\frac{1}{k}\chi_{E_k}(\cdot)$ é mensurável, para cada $k \in \mathbb{N}$. Note-se que

$$\gamma_1(\tau) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\chi_{E_k}(\tau) = \lim_{i\to\infty}\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{k}\chi_{E_k}(\tau),$$

para qualquer $i \in \mathbb{N}$ fixado. Então, pelo teorema 10.22 (aplicado $i-1$ vezes), com $f(\cdot) = \frac{1}{k}\chi_{E_k}(\cdot)$, $g(\cdot) = \frac{1}{k+1}\chi_{E_{k+1}}(\cdot)$, $D = [0,T]$ e o domínio de definição de $f+g$ é igual a $[0,T]$, sabemos que $\sum\limits_{k=1}^{i}\frac{1}{k}\chi_{E_k}(\cdot)$ é mensurável, para cada $k \in \mathbb{N}$. Logo, pelo teorema 10.25 (alínea (b)), com $g_n(\cdot) = \sum\limits_{k=1}^{i}\frac{1}{k}\chi_{E_k}(\cdot)$, $D = [0,T]$ e $D_e = \left\{[0,T] : \lim\limits_{i\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{i}\frac{1}{k}\chi_{E_k}(\tau) \in \mathbb{R}\right\}$, temos que $\gamma_1(\cdot)$ é mensurável. Como para quase todo $\tau \in [0,T]$, existe um único $k \in \mathbb{N}$ tal que $\tau \in E_k$, temos

$$\gamma_1(\tau) = \frac{1}{k}.$$

Além disso, $m_k(\tau) \le \frac{\varepsilon}{T}$, para cada $k \in \mathbb{N}$.

Fixemos $\omega \in \mathbb{Q}$ tal que

$$|\omega| \le \frac{1}{k} = \gamma_1(\tau), \tag{2.40}$$

então

$$\begin{aligned} |g(\tau,\omega) - g(\tau,0)| &\le \sup\left\{|g(\tau,\omega) - g(\tau,0)| : \omega \in \mathbb{Q} \text{ e } |\omega| \le \frac{1}{k}\right\} \\ &= m_k(\tau) \le \frac{\varepsilon}{T}, \end{aligned}$$

por definição de $E_1$ e de $E_k$, para $k = 2, 3, \ldots$ . Logo,

$$|g(\tau,\omega) - g(\tau,0)| \le \frac{\varepsilon}{T}.$$

$$\therefore \forall\, \omega \in \mathbb{Q} : |\omega| \le \gamma_1(\tau) \Rightarrow |g(\tau,\omega) - g(\tau,0)| \le \frac{\varepsilon}{T} \text{ qs em } [0,T]. \tag{2.41}$$

Fixemos $\omega \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ tal que

$$|\omega| \le \frac{1}{k} = \gamma_1(\tau).$$

Como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, então existe uma sucessão $(\omega_j) \subset \mathbb{Q}$ tal que $(\omega_j) \to \omega$, com $\omega \in \mathbb{R}$. Assim, de (2.40), temos

$$\exists\, N_1 \in \mathbb{N} : j \ge N_1 \Rightarrow |\omega_j| \le \frac{1}{k} = \gamma_1(\tau).$$

Logo, de (2.41), vem

$$|g(\tau,\omega_j) - g(\tau,0)| \le \frac{\varepsilon}{T}, \ \forall\, j \ge N_1, \text{ para algum } N_1 \in \mathbb{N}.$$

Por hipótese, $g(\tau,\cdot)$ é contínua em $int\,(dom\; g(\tau,\cdot))$, para quase todo $\tau\in[0,T]$. Então, passando ao limite vem, pqt $\tau\in[0,T]$,

$$\lim_{j\to+\infty}|g(\tau,\omega_j)-g(\tau,0)|\leq\tfrac{\varepsilon}{T},\ \forall\, j\geq N_1,\text{ para algum } N_1\in\mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow\left|\lim_{j\to+\infty}g(\tau,\omega_j)-g(\tau,0)\right|\leq\tfrac{\varepsilon}{T},\ \forall\, j\geq N_1,\text{ para algum } N_1\in\mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow|g(\tau,\omega)-g(\tau,0)|\leq\tfrac{\varepsilon}{T}.$$

$$\therefore\forall\,\omega\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}:|\omega|\leq\gamma_1(\tau)\Rightarrow|g(\tau,\omega)-g(\tau,0)|\leq\frac{\varepsilon}{T}\text{ qs em }[0,T].\tag{2.42}$$

E portanto, de (2.41) e de (2.42), temos

$$\therefore\forall\,\omega\in\mathbb{R}:|\omega|\leq\gamma_1(\tau)\Rightarrow|g(\tau,\omega)-g(\tau,0)|\leq\frac{\varepsilon}{T}\text{ qs em }[0,T].$$

$\therefore\forall\,\varepsilon>0$ existe uma função mensurável $\gamma_1(\cdot):[0,T]\to(0,+\infty)$ tal que

$$\omega\in[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]\ \wedge\ |\omega|\leq\gamma_1(\tau)\ \Rightarrow\left\{\begin{array}{c}|g(\tau,\omega)-g(\tau,0)|\leq\frac{\varepsilon}{T}\text{ qs em }[0,T]\\ \Leftrightarrow\\ \left|\theta\left(\left|\frac{z'(\tau)}{1+\omega}\right|\right)(1+\omega)-\theta(|z'(\tau)|)\right|\leq\frac{\varepsilon}{T}\text{ qs em }[0,T].\end{array}\right.$$

E portanto, provámos a alínea (a).

(b) Mostremos primeiro que

$$\left\{\begin{array}{l}\text{dado }\varepsilon>0\text{ existe uma função mensurável }\gamma_2(\cdot):[0,T]\to(0,+\infty)\text{ tal que}\\ |u(\tau)|\leq\gamma_2(\tau)\ \Rightarrow\ \left|L\left(\tau,z(\tau),\frac{z'(\tau)}{1+u(\tau)}\right)(1+u(\tau))-L(\tau,z(\tau),z'(\tau))\right|<\varepsilon\text{ qs em }[0,T].\end{array}\right.\tag{2.43}$$

Seja $h:[0,T]\times\mathbb{R}\to(-\infty,+\infty]$ a função dada por

$$h(\tau,\omega):=\left\{\begin{array}{ll}L\left(\tau,z(\tau),\frac{z'(\tau)}{1+\omega}\right)(1+\omega) & \text{se }\left\{\begin{array}{l}\tau\in[0,T]\backslash N\\ \omega\in[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]\end{array}\right.\\ 0 & \text{se }\left\{\begin{array}{l}\tau\in N\\ \omega\in[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]\end{array}\right.\\ +\infty & \text{caso contrário.}\end{array}\right.$$

Como $h(\cdot)=f_s^2(\cdot)$ quando $s=\tau$ $(\in[0,T])$, $t=\tau$, $u=\omega$ e $f_s^2(\cdot)$ é um integrando normal, convexo, sci e $int\,(dom\; f_s^2(t,\cdot))\neq\varnothing$ (onde $f_s^2(\cdot)$ é um integrando que é definido na demonstração do teorema 2.1), então $h(\cdot)$ é um integrando normal, convexo, sci e $int\,(dom\; h(\tau,\cdot))\neq\varnothing$. Além disso, como $dom\; h(\tau,\cdot)=[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]$, então $0\in int\,(dom\; h(\tau,\cdot))=(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$.

Sejam também o conjunto $\mathbb{Q}$, $k\in\mathbb{N}$ qualquer e $\overline{m}_k:[0,T]\to[0,+\infty]$ a função dada por

$$\overline{m}_k(\tau):=\sup\left\{|h(\tau,\omega)-h(\tau,0)|:\omega\in\mathbb{Q}\text{ e }|\omega|\leq\frac{1}{k}\right\}.$$

Para cada $k\in\mathbb{N}$, a função $\overline{m}_k(\cdot)$ é mensurável, pela proposição 2.7, com $m_k(\cdot)=\overline{m}_k(\cdot)$, $f(\cdot)=h(\cdot)$, $\Omega=[0,T]$, $u'(t)=0$, $t=\tau$, $z=\omega$.

Fixemos $\tau \in [0,T] \backslash N$ e $\omega \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$. Então

$$h(\tau,\omega) := L\left(\tau, z(\tau), \frac{z'(\tau)}{1+\omega}\right)(1+\omega) \text{ qs em } [0,T].$$

Como, por hipótese, $h(\cdot)$ é um integrando convexo, então, pela definição 21.1, com $S = [0,T]$, $s = t$ e $f(\cdot) = h(\cdot)$, temos que $h(\tau,\cdot)$ é convexa para cada $\tau \in [0,T]$. Além disso, como $int(dom\ h(\tau,\cdot)) \neq \varnothing$, $dom\ h(\tau,\cdot) \subset \mathbb{R}$ e $dom\ h(\tau,\cdot)$ é convexo, pois $h(\tau,\cdot)$ é convexa, então $aff(dom\ h(\tau,\cdot)) = \mathbb{R}$, pela nota 19.44, com $C = dom\ h(\tau,\cdot)$. Consequentemente, $ri(dom\ h(\tau,\cdot)) = int(dom\ h(\tau,\cdot))$, pela nota 19.45, com $C = dom\ h(\tau,\cdot)$. Logo, por aplicação do teorema 19.70, com $f(\cdot) = h(\tau,\cdot)$ e $ri(dom\ f) = int(dom\ h(\tau,\cdot))$, temos que a função $h(\tau,\cdot)$ é contínua no interior do seu domínio. Em particular, $h(\tau,\cdot)$ é contínua em $0 \in int(dom\ h(\tau,\cdot))$. Ou seja,

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \overline{\lambda}_\varepsilon(\tau) > 0,\ \forall\, \omega \in \mathbb{R} : |\omega| < \overline{\lambda}_\varepsilon(\tau) \Rightarrow |h(\tau,\omega) - h(\tau,0)| < \varepsilon \text{ qs em } [0,T].$$

Mostremos que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $(\overline{m}_k(\cdot))$ decresce para zero, quase sempre em $[0,T]$. Isto é, vamos mostrar que, para cada $k \in \mathbb{N}$, e para quase todo $\tau \in [0,T]$, $(\overline{m}_k(\cdot))$ é decrescente e $\lim\limits_{k\to+\infty} \overline{m}_k(\tau) = 0$. Para termos $(\overline{m}_k(\cdot))$ decrescente deverá ser

$$k_1 < k_2 \Rightarrow \overline{m}_{k_1}(\tau) \geq \overline{m}_{k_2}(\tau),$$

para quase todo $\tau \in [0,T]$, e para cada $k \in \mathbb{N}$. De facto,

$$\begin{aligned}
& k_1 < k_2 \quad\Rightarrow\quad \tfrac{1}{k_2} < \tfrac{1}{k_1} \\
& \Rightarrow\quad \left\{\omega \in \mathbb{Q} : |\omega| \leq \tfrac{1}{k_2}\right\} \subseteq \left\{\omega \in \mathbb{Q} : |\omega| \leq \tfrac{1}{k_1}\right\} \\
& \Rightarrow\quad \sup\left\{|h(\tau,\omega) - h(\tau,0)| : \omega \in \mathbb{Q} \text{ e } |\omega| \leq \tfrac{1}{k_2}\right\} \leq \sup\left\{|h(\tau,\omega) - h(\tau,0)| : \omega \in \mathbb{Q} \text{ e } |\omega| \leq \tfrac{1}{k_1}\right\} \\
& \Leftrightarrow\quad \overline{m}_{k_2}(\tau) \leq \overline{m}_{k_1}(\tau).
\end{aligned}$$

Além disso, para ser

$$\lim_{k\to+\infty} \overline{m}_k(\tau) = 0 \text{ qs em } [0,T]$$

é o mesmo que provar que

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \overline{M}_\varepsilon(\tau) > 0,\ \forall\, k \in \mathbb{N} : k > \overline{M}_\varepsilon(\tau) \Rightarrow |\overline{m}_k(\tau)| < \varepsilon,$$

para quase todo $\tau \in [0,T]$. Seja

$$\overline{M}_\varepsilon(\tau) := \frac{1}{\overline{\lambda}_\varepsilon(\tau)} > 0$$

(para o $\overline{\lambda}_\varepsilon(\tau) > 0$ referido na definição de continuidade de $h(\tau,\cdot)$ em $\omega = 0$, para quase todo $\tau \in [0,T]$ tal que $k > \overline{M}_\varepsilon(\tau)$). Então

$$k > \overline{M}_\varepsilon(\tau) \Rightarrow \frac{1}{k} < \frac{1}{\overline{M}_\varepsilon(\tau)} = \overline{\lambda}_\varepsilon(\tau),$$

logo

$$\left\{\omega \in \mathbb{Q} : |\omega| \leq \frac{1}{k}\right\} \subseteq \left\{\omega \in \mathbb{Q} : |\omega| \leq \overline{\lambda}_\varepsilon(\tau)\right\}.$$

E portanto, se $\omega \in \left\{\omega \in \mathbb{Q} : |\omega| \leq \frac{1}{k}\right\}$, então $\omega \in \left\{\omega \in \mathbb{Q} : |\omega| \leq \overline{\lambda}_\varepsilon(\tau)\right\}$. Logo,

$$\forall\, k \in \mathbb{N} : k > \overline{M}_\varepsilon(\tau),\ \forall\, \omega \in \mathbb{Q} : |\omega| \leq \frac{1}{k} \Rightarrow |h(\tau,\omega) - h(\tau,0)| < \varepsilon,$$

pela definição de continuidade de $h(\tau,\cdot)$ em $\omega = 0$, para quase todo $\tau \in [0,T]$. Em particular,

$$\sup\left\{|h(\tau,\omega) - h(\tau,0)| : \omega \in \mathbb{Q} \text{ e } |\omega| \leq \frac{1}{k}\right\} < \varepsilon,$$

$\forall\, k \in \mathbb{N}$ tal que $k > \overline{M}_\varepsilon(\tau)$. Logo,

$$\left|\sup\left\{|h(\tau,\omega) - h(\tau,0)| : \omega \in \mathbb{Q} \text{ e } |\omega| \leq \frac{1}{k}\right\}\right| < \varepsilon,$$

$\forall\, k \in \mathbb{N}$ tal que $k > \overline{M}_\varepsilon(\tau)$. Provámos então que, para quase todo $\tau \in [0,T]$,

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \overline{M}_\varepsilon(\tau) := \frac{1}{\overline{\lambda}_\varepsilon(\tau)} > 0,\ \forall\, k \in \mathbb{N} : k > \overline{M}_\varepsilon(\tau) \Rightarrow |\overline{m}_k(\tau)| < \varepsilon.$$

Isto é,

$$\lim_{k\to+\infty} \overline{m}_k(\tau) = 0 \text{ qs em } [0,T].$$

Para $\varepsilon > 0$ fixado, consideremos os conjuntos

$$\overline{E}_1 := \left\{\tau \in [0,T] : \overline{m}_1(\tau) \leq \frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

$$\overline{E}_k := \left\{\tau \in [0,T] : \overline{m}_k(\tau) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \overline{m}_{k-1}(\tau)\right\},$$

para $k = 2, 3, \ldots$ . E vamos mostrar que esses conjuntos são mensuráveis. Como $\overline{m}_1(\cdot)$ é mensurável, então pela definição 10.15, com $f(\cdot) = \overline{m}_1(\cdot)$, $D = [0,T]$ e $\alpha = \frac{\varepsilon}{2}$, temos que o conjunto $\overline{E}_1$ é mensurável. Notemos que

$$\begin{aligned}
\overline{E}_k &:= \left\{\tau \in [0,T] : \overline{m}_k(\tau) \leq \tfrac{\varepsilon}{2} < \overline{m}_{k-1}(\tau)\right\} \\
&= \left\{\tau \in [0,T] : \overline{m}_k(\tau) \leq \tfrac{\varepsilon}{2}\right\} \cap \left\{\tau \in [0,T] : \overline{m}_{k-1}(\tau) > \tfrac{\varepsilon}{2}\right\} \\
&=: \overline{E}_k^1 \cap \overline{E}_k^2.
\end{aligned}$$

Como $\overline{m}_k(\cdot)$ é mensurável para $k = 1, 2, 3, \ldots$, então pela definição 10.15, com $f(\cdot) = \overline{m}_k(\cdot)$, $k = 2, 3, \ldots$, $D = [0,T]$ e $\alpha = \frac{\varepsilon}{2}$, temos que o conjunto $\overline{E}_k^1$ é mensurável. E como $\overline{m}_{k-1}(\cdot)$ é mensurável para $k = 2, 3, \ldots$, então pela definição 10.15 e pelo lema 10.17, com $f(\cdot) = \overline{m}_{k-1}(\cdot)$, $k = 2, 3, \ldots$, $D = [0,T]$ e $\alpha = \frac{\varepsilon}{2}$, temos que o conjunto $\overline{E}_k^2$ é mensurável. Logo, pelo lema 10.2 (alínea (c)), com $A = \overline{E}_k^1$ e $B = \overline{E}_k^2$, vem que o conjunto $\overline{E}_k := \overline{E}_k^1 \cap \overline{E}_k^2$ é mensurável, para $k = 2, 3, \ldots$ .

Seja

$$\gamma_2(\tau) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\, \chi_{\overline{E}_k}(\tau),$$

onde

$$\chi_{\overline{E}_k}(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{se } \tau \in \overline{E}_k \\ 0 & \text{se } \tau \notin \overline{E}_k, \end{cases}$$

para qualquer $k \in \mathbb{N}$.

Mostremos que $\gamma_2(\tau) > 0$ quase sempre em $[0,T]$. Isto é, que quase todo o $\tau \in [0,T]$ pertence a pelo menos um dos conjuntos $\overline{E}_k$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Suponhamos que isso não acontece, isto é, que existe um conjunto

$\overline{P} \subset [0,T]$ com medida positiva e tal que para cada $\tau \in \overline{P}$, temos $\tau \notin \overline{E}_k$, para qualquer $k \in \mathbb{N}$. Ou seja, $\tau \notin \overline{E}_1$ e $\tau \notin \overline{E}_k$, para qualquer $k = 2, 3, \ldots$. Então, por definição de $\overline{E}_1$ e $\overline{E}_k$, para $k = 2, 3, \ldots$, temos que

$$\overline{m}_1(\tau) > \tfrac{\varepsilon}{2} \quad \wedge \quad \left[\overline{m}_k(\tau) > \tfrac{\varepsilon}{2} \vee \overline{m}_{k-1}(\tau) \leq \tfrac{\varepsilon}{2}\right], \qquad \forall\, k = 2, 3, \ldots$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\overline{m}_1(\tau) > \tfrac{\varepsilon}{2} \wedge \overline{m}_k(\tau) > \tfrac{\varepsilon}{2}\right] \quad \vee \quad \left[\overline{m}_1(\tau) > \tfrac{\varepsilon}{2} \wedge \overline{m}_{k-1}(\tau) \leq \tfrac{\varepsilon}{2}\right], \qquad \forall\, k = 2, 3, \ldots$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{m}_k(\tau) > \tfrac{\varepsilon}{2}\ \forall\, k \in \mathbb{N} \qquad \vee \qquad \overline{m}_{k-1}(\tau) \leq \tfrac{\varepsilon}{2} < \overline{m}_1(\tau), \qquad \forall\, k = 2, 3, \ldots .$$

Se $\overline{m}_k(\tau) > \frac{\varepsilon}{2} > 0$, para qualquer $k \in \mathbb{N}$, temos um absurdo, porque já provámos que $\lim\limits_{k\to+\infty} \overline{m}_k(\tau) = 0$. Se $\overline{m}_{k-1}(\tau) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \overline{m}_1(\tau)$, para $k = 2, 3, \ldots$, então quando $k = 2$ temos $\overline{m}_1(\tau) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \overline{m}_1(\tau)$, o que é absurdo. Logo, $\gamma_2(\tau) > 0$ qs em $[0,T]$.

Provemos agora que

$$\gamma_2(\tau) \in \mathbb{R} \text{ qs em } [0,T].$$

Já mostrámos que $\gamma_2(\tau) > 0$ qs em $[0,T]$. Isto é, que quase todo $\tau \in [0,T]$ pertence a pelo menos um dos conjuntos $\overline{E}_k$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Mas será que quase todo $\tau \in [0,T]$ pertence a mais do que um conjunto $\overline{E}_k$, para algum $k \in \mathbb{N}$? Suponhamos que quase todo $\tau \in [0,T]$ pertence a $\overline{E}_{k_1}$ e a $\overline{E}_{k_2}$, para alguns $k_1$, $k_2 \in \mathbb{N}$, com $k_1 \neq k_2$. Isto é,

$$\exists\, k_1, k_2 \in \mathbb{N},\ k_1 \neq k_2 : \tau \in \overline{E}_{k_1} \text{ e } \tau \in \overline{E}_{k_2}.$$

Se $k_1 = 1$ e $k_2 \geq 2$, temos

$$\overline{m}_1(\tau) \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{e} \qquad \overline{m}_{k_2}(\tau) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \overline{m}_{k_2-1}(\tau).$$

Como $k_2 \geq 2 \Leftrightarrow k_2 - 1 \geq 1 = k_1$ e $(\overline{m}_k(\cdot))$ é decrescente, então $\overline{m}_{k_2-1}(\tau) \leq \overline{m}_1(\tau)$. Logo,

$$\overline{m}_{k_2}(\tau) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \overline{m}_{k_2-1}(\tau) \leq \overline{m}_1(\tau) \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

o que é absurdo. Se $k_1$, $k_2 \geq 2$, vem

$$\overline{m}_{k_1}(\tau) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \overline{m}_{k_1-1}(\tau) \qquad \text{e} \qquad \overline{m}_{k_2}(\tau) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \overline{m}_{k_2-1}(\tau).$$

Suponhamos que $k_1 < k_2$, então temos

$$k_1 = k_2 - 1 \qquad \text{ou} \qquad k_1 < k_2 - 1.$$

Se $k_1 = k_2 - 1$, então

$$\overline{m}_{k_2-1}(\tau) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \overline{m}_{(k_2-1)-1}(\tau) \qquad \text{e} \qquad \overline{m}_{k_2}(\tau) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \overline{m}_{k_2-1}(\tau),$$

logo

$$\overline{m}_{k_2}(\tau) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \overline{m}_{k_2-1}(\tau) \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

o que é absurdo. Se $k_1 < k_2 - 1$, então

$$\overline{m}_{k_1}(\tau) \geq \overline{m}_{k_2-1}(\tau),$$

pois $(\overline{m}_k(\cdot))$ é decrescente, e consequentemente,

$$\overline{m}_{k_2}(\tau) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \overline{m}_{k_2-1}(\tau) \leq \overline{m}_{k_1}(\tau) \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

o que é absurdo. Provámos então que quase todo $\tau \in [0,T]$ pertence a um único $\overline{E}_k$, com $k \in \mathbb{N}$. Isto é,

$$\text{pqt } \tau \in [0,T]\ \exists^1\, k \in \mathbb{N} : \tau \in \overline{E}_k.$$

Logo, $\gamma_2(\tau) = \frac{1}{k} \in \mathbb{R}$ qs em $[0,T]$.

$\therefore \gamma_2(\tau) \in \mathbb{R}^+$ qs em $[0,T]$.

Agora vamos provar que $\gamma_2(\cdot)$ é mensurável. Como, para cada $k \in \mathbb{N}$, o conjunto $\overline{E}_k$ é mensurável, então pela nota 10.16, com $E = \overline{E}_k$, temos que $\chi_{\overline{E}_k}(\cdot)$ é mensurável, para cada $k \in \mathbb{N}$. Logo, pelo teorema 10.21, com $c = \frac{1}{k} \in \mathbb{R}$, $f(\cdot) = \chi_{\overline{E}_k}(\cdot)$, $D = [0,T]$ e o domínio de definição de $cf$ é igual a $[0,T]$, sabemos que $\frac{1}{k}\, \chi_{\overline{E}_k}(\cdot)$ é mensurável, para cada $k \in \mathbb{N}$. Note-se que

$$\gamma_2(\tau) := \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{k}\, \chi_{\overline{E}_k}(\tau) = \lim_{i\to\infty} \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{k}\, \chi_{\overline{E}_k}(\tau),$$

para qualquer $i \in \mathbb{N}$ fixado. Então, pelo teorema 10.22 (aplicado $i-1$ vezes), com $f(\cdot) = \frac{1}{k}\, \chi_{\overline{E}_k}(\cdot)$, $g(\cdot) = \frac{1}{k+1}\, \chi_{\overline{E}_{k+1}}(\cdot)$, $D = [0,T]$ e o domínio de definição de $f+g$ é igual a $[0,T]$, sabemos que $\sum\limits_{k=1}^{i} \frac{1}{k}\, \chi_{\overline{E}_k}(\cdot)$ é mensurável, para cada $k \in \mathbb{N}$. Logo, pelo teorema 10.25 (alínea (b)), com $g_n(\cdot) = \sum\limits_{k=1}^{i} \frac{1}{k}\, \chi_{\overline{E}_k}(\cdot)$, $D = [0,T]$ e $D_e = \left\{ [0,T] : \lim\limits_{i\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{i} \frac{1}{k}\, \chi_{\overline{E}_k}(\tau) \in \mathbb{R} \right\}$, temos que $\gamma_2(\cdot)$ é mensurável. Como para quase todo $\tau \in [0,T]$, existe um único $k \in \mathbb{N}$ tal que $\tau \in \overline{E}_k$, temos

$$\gamma_2(\tau) = \frac{1}{k}.$$

Além disso, $\overline{m}_k(\tau) \le \frac{\varepsilon}{2}$, para cada $k \in \mathbb{N}$.

Fixemos $\omega \in \mathbb{Q}$ tal que

$$|\omega| \le \frac{1}{k} = \gamma_2(\tau), \tag{2.44}$$

então

$$\begin{aligned} |h(\tau,\omega) - h(\tau,0)| &\le \sup\left\{ |h(\tau,\omega) - h(\tau,0)| : \omega \in \mathbb{Q} \text{ e } |\omega| \le \frac{1}{k} \right\} \\ &= \overline{m}_k(\tau) \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \end{aligned}$$

por definição de $\overline{E}_1$ e de $\overline{E}_k$, para $k = 2, 3, \ldots$ . Logo,

$$|h(\tau,\omega) - h(\tau,0)| < \varepsilon.$$

$$\therefore \forall\, \omega \in \mathbb{Q} : |\omega| \le \gamma_2(\tau) \Rightarrow |h(\tau,\omega) - h(\tau,0)| < \varepsilon \text{ qs em } [0,T]. \tag{2.45}$$

Fixemos $\omega \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ tal que

$$|\omega| \le \frac{1}{k} = \gamma_2(\tau).$$

Como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, então existe uma sucessão $(\overline{\omega}_j) \subset \mathbb{Q}$ tal que $(\overline{\omega}_j) \to \omega$, com $\omega \in \mathbb{R}$. Assim, de (2.44), temos

$$\exists\, \overline{N}_1 \in \mathbb{N} : j \ge \overline{N}_1 \Rightarrow |\overline{\omega}_j| \le \frac{1}{k} = \gamma_2(\tau).$$

Logo, de (2.45), vem

$$|h(\tau,\overline{\omega}_j) - h(\tau,0)| < \varepsilon,\ \forall\, j \ge \overline{N}_1, \text{ para algum } \overline{N}_1 \in \mathbb{N}.$$

Como $h(\tau,\cdot)$ é contínua em $int(dom\ h(\tau,\cdot))$ para quase todo $\tau \in [0,T]$, então, passando ao limite vem, pqt $\tau \in [0,T]$,

$$\lim_{j\to+\infty} |h(\tau,\overline{\omega}_j) - h(\tau,0)| < \varepsilon,\ \forall\, j \ge \overline{N}_1, \text{ para algum } \overline{N}_1 \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \left| \lim_{j\to+\infty} h(\tau,\overline{\omega}_j) - h(\tau,0) \right| < \varepsilon,\ \forall\, j \ge \overline{N}_1, \text{ para algum } \overline{N}_1 \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow |h(\tau,\omega) - h(\tau,0)| < \varepsilon.$$

$$\therefore \forall\, \omega \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} : |\omega| \leq \gamma_2(\tau) \Rightarrow |h(\tau,\omega) - h(\tau,0)| < \varepsilon \text{ qs em } [0,T]. \tag{2.46}$$

E portanto, de (2.45) e de (2.46), temos

$$\therefore \forall\, \omega \in \mathbb{R} : |\omega| \leq \gamma_2(\tau) \Rightarrow |h(\tau,\omega) - h(\tau,0)| < \varepsilon \text{ qs em } [0,T].$$

$\therefore \forall\, \varepsilon > 0$ existe uma função mensurável $\gamma_2(\cdot) : [0,T] \to (0,+\infty)$ tal que

$$\omega \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \ \wedge \ |\omega| \leq \gamma_2(\tau) \ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} |h(\tau,\omega) - h(\tau,0)| < \varepsilon \text{ qs em } [0,T] \\ \Leftrightarrow \\ \left| L\left(\tau, z(\tau), \frac{z'(\tau)}{1+\omega}\right)(1+\omega) - L(\tau, z(\tau), z'(\tau)) \right| < \varepsilon \text{ qs em } [0,T]. \end{array} \right.$$

E portanto temos (2.43), como pretendíamos.
Seguidamente, vamos provar que

$$|u(\tau)| \leq \gamma_2(\tau) \Rightarrow L\left(\varphi(\tau), z(\tau), \frac{z'(\tau)}{1+u(\tau)}\right) \in \mathbb{R} \text{ qs em } [0,T].$$

Por hipótese, $z(\cdot) \in AC_\theta([0,T], \mathbb{R}^n)$ tal que $\Lambda(x(\cdot)) \in \mathbb{R}$. Então, a função $\tau \mapsto L(\tau, z(t), z'(\tau))$ é Lebesgue integrável, pela definição 11.8 (com $D = [0,T]$ e $f$ é a função $\tau \mapsto L(\tau, z(t), z'(\tau))$). Donde, pela nota 11.10 (com $D = [0,T]$ e $f$ é a função $\tau \mapsto L(\tau, z(t), z'(\tau))$), $L(\tau, z(t), z'(\tau)) \in \mathbb{R}$ qs. O que significa que $z'(\tau) \in dom\ L(\tau, z(\tau), \cdot)$ qs. Também, por hipótese, para cada $(t,s) \in [0,T] \times \Omega$ fixado, $dom\ L(t,s,\cdot)$ é aberto. Então, fixando $\tau \in [0,T] \backslash N$ temos $z'(\tau) \in dom\ L(\tau, z(\tau), \cdot) = int(dom\ L(\tau, z(\tau), \cdot))$, logo

$$L(\tau, z(\tau), z'(\tau)) \in \mathbb{R}. \tag{2.47}$$

Assim (2.43) e (2.47) implicam que

$$L\left(\tau, z(\tau), \frac{z'(\tau)}{1+u(\tau)}\right)(1+u(\tau)) \in \mathbb{R}.$$

E como $u(\tau) \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, então $1 + u(\tau) \in \mathbb{R}$. Logo,

$$L\left(\tau, z(\tau), \frac{z'(\tau)}{1+u(\tau)}\right) \in \mathbb{R}. \tag{2.48}$$

E portanto, $\frac{z'(\tau)}{1+u(\tau)} \in dom\ L(\tau, z(\tau), \cdot)$. Além disso, por hipótese, para cada $s \in \Omega$ e $v \in dom\ L(s,\cdot)$, a função $t \longmapsto L(t,s,v)$ é lipschitziana. Então, a função $\tau_1 \longmapsto L\left(\tau_1, z(\tau), \frac{z'(\tau)}{1+u(\tau)}\right)$ é lipschitziana, para cada $\tau \in [0,T] \backslash N$, $z(\tau) \in \Omega$ e $\frac{z'(\tau)}{1+u(\tau)} \in dom\ L(\tau, z(\tau), \cdot)$. Logo, existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \left| L\left(\varphi(\tau), z(\tau), \frac{z'(\tau)}{1+u(\tau)}\right) - L\left(\tau, z(\tau), \frac{z'(\tau)}{1+u(\tau)}\right) \right| &\leq C\,|\varphi(\tau) - \tau| = C \left| \left(\tau + \int_0^\tau u(s)\ ds\right) - \tau \right| \\ &\leq C \int_0^\tau |u(s)|\ ds \leq C \int_0^T |u(s)|\ ds \\ &\leq C \int_0^T \varepsilon_0\ ds = C\ \varepsilon_0\ T, \end{aligned}$$

pois $|u(s)| > 0$ e $u(s) \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ para qualquer $s \in [0,T]$. Ou seja,

$$\left| L\left(\varphi(\tau), z(\tau), \frac{z'(\tau)}{1+u(\tau)}\right) - L\left(\tau, z(\tau), \frac{z'(\tau)}{1+u(\tau)}\right) \right| \leq C\ \varepsilon_0\ T. \tag{2.49}$$

Assim, de (2.48) e (2.49) resulta que

$$L\left(\varphi(\tau), z(\tau), \frac{z'(\tau)}{1+u(\tau)}\right) \in \mathbb{R}.$$

$\therefore \forall\, \varepsilon > 0$ existe uma função mensurável $\gamma_2(\cdot) : [0,T] \to (0,+\infty)$ tal que

$$|u(\tau)| \leq \gamma_2(\tau) \quad \Rightarrow \quad L\left(\varphi(\tau), z(\tau), \tfrac{z'(\tau)}{1+u(\tau)}\right) \in \mathbb{R} \text{ qs em } [0,T].$$

E portanto provámos a alínea (b). ■

**Proposição 2.17.** *Sejam $a$, $b \in [-\infty,+\infty]$ tais que $a+b$ existe em $[-\infty,+\infty]$. Então*

$$\min\{a,0\} + \min\{b,0\} \leq \min\{a+b,0\}.$$

**Demonstração :**
Se $a<0$ e $b<0$, então

$$\min\{a,0\} + \min\{b,0\} = a+b = \min\{a+b,0\}.$$

Se apenas um entre $a$ e $b$ é negativo, por exemplo, $a<0$ e $b \geq 0$ , então

$$\min\{a,0\} + \min\{b,0\} = \min\{a,0\} + 0 = \min\{a,0\} \leq \min\{a+b,0\}.$$

Se $a \geq 0$ e $b \geq 0$, então

$$\min\{a,0\} + \min\{b,0\} = 0+0 = 0 = \min\{a+b,0\}.$$

$\therefore$ Em qualquer dos casos temos

$$\min\{a,0\} + \min\{b,0\} \leq \min\{a+b,0\}. \ ■$$

**Proposição 2.18.** *Sejam $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo, $f : C \to (-\infty,+\infty]$ uma função convexa e $g : C \to (-\infty,+\infty]$ uma função estritamente convexa. Então $f+g : C \to (-\infty,+\infty]$ é uma função estritamente convexa.*

**Demonstração :**
Por hipótese, $f(\cdot)$ é convexa, então,

$$f(\lambda\, x_1 + (1-\lambda)\ x_2) \leq \lambda\, f(x_1) + (1-\lambda)\ f(x_2),\ \forall\, x_1,\, x_2 \in C,\ \forall\, \lambda \in (0,1). \tag{2.50}$$

Também, por hipótese, $g(\cdot)$ é estritamente convexa, logo

$$g(\lambda\, x_1 + (1-\lambda)\ x_2) < \lambda\, g(x_1) + (1-\lambda)\ g(x_2),\ \forall\, x_1,\, x_2 \in C,\ \forall\, \lambda \in (0,1). \tag{2.51}$$

E queremos mostrar que

$$(f+g)(\lambda\, x_1 + (1-\lambda)\ x_2) < \lambda\ (f+g)(x_1) + (1-\lambda)\ \ (f+g)(x_2),\ \forall\, x_1,\, x_2 \in C,\ \forall\, \lambda \in (0,1).$$

Sejam $x_1$, $x_2 \in C$ e $\lambda \in (0,1)$ quaisquer, então

$$\begin{aligned}
(f+g)(\lambda\, x_1 + (1-\lambda)\ x_2) &= f(\lambda\, x_1 + (1-\lambda)\ x_2) + g(\lambda\, x_1 + (1-\lambda)\ x_2) \\
&\leq \lambda\, f(x_1) + (1-\lambda)\ f(x_2) + g(\lambda\, x_1 + (1-\lambda)\ x_2) \ \text{(por (2.50))} \\
&< \lambda\, f(x_1) + (1-\lambda)\ f(x_2) + \lambda\, g(x_1) + (1-\lambda)\ g(x_2) \ \text{(por (2.51))} \\
&= \lambda\ (f(x_1) + g(x_1)) + (1-\lambda)\ \ (f(x_2) + g(x_2)) \\
&= \lambda\ (f+g)(x_1) + (1-\lambda)\ \ (f+g)(x_2).
\end{aligned}$$

E portanto,

$$(f+g)(\lambda\ x_1+(1-\lambda)\ x_2) < \lambda\ (f+g)(x_1)+(1-\lambda)\ \ (f+g)(x_2)\,,\,\forall\, x_1,\, x_2\in C,\, \forall\, \lambda\in(0,1)\,,$$

como pretendido. ■

**Proposição 2.19.** *Seja $h:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ uma função localmente lipschitziana. Então, para cada $x_3\in\mathbb{R}^n$ fixado, a função $g:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ dada por*

$$g(x_1,x_2):=h(x_1,x_2,x_3)$$

*é localmente lipschitziana.*

**Demonstração :**

Por hipótese, $h(\cdot)$ é uma função localmente lipschitziana, então $h(\cdot)$ é localmente lipschitziana em qualquer $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^{3n}$, isto é, pela definição 22.1, existem $\varepsilon>0$ e $k>0$ tais que

$$\left|h(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\overline{x}_3)-h\left(\overline{\overline{x}}_1,\overline{\overline{x}}_2,\overline{\overline{x}}_3\right)\right|\le k\left|(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\overline{x}_3)-\left(\overline{\overline{x}}_1,\overline{\overline{x}}_2,\overline{\overline{x}}_3\right)\right|,$$

para quaisquer $(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\overline{x}_3)$, $\left(\overline{\overline{x}}_1,\overline{\overline{x}}_2,\overline{\overline{x}}_3\right)\in(x_1,x_2,x_3)+\varepsilon B$.

Fixemos $\varepsilon>0$ e $k>0$.

Mostremos que $g(\cdot)$ é localmente lipschitziana em $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^{2n}$, isto é, que existem $\widetilde{\varepsilon}>0$ e $\widetilde{k}>0$ tais que

$$\left|g(\overline{x}_1,\overline{x}_2)-g\left(\overline{\overline{x}}_1,\overline{\overline{x}}_2\right)\right|\le\widetilde{k}\left|(\overline{x}_1,\overline{x}_2)-\left(\overline{\overline{x}}_1,\overline{\overline{x}}_2\right)\right|,$$

para quaisquer $(\overline{x}_1,\overline{x}_2)$, $\left(\overline{\overline{x}}_1,\overline{\overline{x}}_2\right)\in(x_1,x_2)+\widetilde{\varepsilon}B$.

Fixemos também $x_3\in\mathbb{R}^n$. Sendo $(\overline{x}_1,\overline{x}_2)$, $\left(\overline{\overline{x}}_1,\overline{\overline{x}}_2\right)\in(x_1,x_2)+\varepsilon B$, então

$$\begin{aligned}
\left|g(\overline{x}_1,\overline{x}_2)-g\left(\overline{\overline{x}}_1,\overline{\overline{x}}_2\right)\right| &= \left|h(\overline{x}_1,\overline{x}_2,x_3)-h\left(\overline{\overline{x}}_1,\overline{\overline{x}}_2,x_3\right)\right|\\
&\le k\left|(\overline{x}_1,\overline{x}_2,x_3)-\left(\overline{\overline{x}}_1,\overline{\overline{x}}_2,x_3\right)\right|\\
&\le k\left|\left(\overline{x}_1-\overline{\overline{x}}_1,\overline{x}_2-\overline{\overline{x}}_2,x_3-x_3\right)\right|\\
&\le k\left(\left|\overline{x}_1-\overline{\overline{x}}_1\right|+\left|\overline{x}_2-\overline{\overline{x}}_2\right|+|0|\right)\\
&= k\left|\left(\overline{x}_1-\overline{\overline{x}}_1,\overline{x}_2-\overline{\overline{x}}_2\right)\right|\\
&\le k\left|(\overline{x}_1,\overline{x}_2)-\left(\overline{\overline{x}}_1,\overline{\overline{x}}_2\right)\right|.
\end{aligned}$$

Logo, existem $\widetilde{\varepsilon}=\varepsilon>0$ e $\widetilde{k}=k>0$ tais que

$$\left|g(\overline{x}_1,\overline{x}_2)-g\left(\overline{\overline{x}}_1,\overline{\overline{x}}_2\right)\right|\le k\left|(\overline{x}_1,\overline{x}_2)-\left(\overline{\overline{x}}_1,\overline{\overline{x}}_2\right)\right|,$$

para quaisquer $(\overline{x}_1,\overline{x}_2)$, $\left(\overline{\overline{x}}_1,\overline{\overline{x}}_2\right)\in(x_1,x_2)+\varepsilon B$. Isto é, $g(\cdot)$ é localmente lipschitziana, para qualquer $x_3\in\mathbb{R}^n$ fixado. ■

# 3. Um resultado de análise proximal

## 3.1. Constância das funções com subgradiente proximal contendo zero

O seguinte resultado de análise não-suave será usado a seguir.

**Proposição 3.1.** *Seja $U$ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, e seja $f : U \to (-\infty, \infty]$ uma função sci. Suponhamos que sempre que $\zeta$ é um subgradiente proximal de $f(\cdot)$, em qualquer ponto $x$ de $U$, tem de ser $\zeta = 0$. Então $f(\cdot)$ é localmente constante em $U$.*

**Demonstração:**

Seja $x_0$ um ponto em $U$ no qual $f(\cdot)$ é finita, isto é, $x_0 \in dom\, f$. (Não há nada a provar se não existir nenhum ponto no domínio de $f(\cdot)$, ou seja, se $f \equiv +\infty$, temos que $f(\cdot)$ é constante em $U$. Além disso, os subgradientes proximais de uma função existem apenas para pontos do seu domínio, logo não faz sentido considerar pontos fora dele.)

E escolhemos $\varepsilon > 0$ tal que a bola centrada em $x_0$ de raio $\varepsilon$ está contida em $U$ e tal que $f(\cdot)$ é limitada inferiormente no conjunto $x_0 + \varepsilon B$. Mostremos que, de facto, existe $\varepsilon > 0$ tal que :

- $x_0 + \varepsilon B \subset U$;
- $f(\cdot)$ é limitada inferiormente em $x_0 + \varepsilon B$, isto é,

$$\exists\, M \in \mathbb{R} : f(y) > M, \forall\, y \in x_0 + \varepsilon B.$$

Por hipótese, $U \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, ou seja,

$$\forall\, y \in U, \exists\, \tilde{\varepsilon} > 0 : y + \tilde{\varepsilon} B \subset U,$$

então, como $x_0 \in U$,

$$\exists\, \varepsilon_1 > 0 : x_0 + \varepsilon_1 B \subset U. \tag{3.1}$$

Também, por hipótese, $f(\cdot)$ é sci, logo $f(\cdot)$ é sci em $x_0$, isto é,

$$\forall\, \lambda < f(x_0), \exists\, \varepsilon_2 > 0, \forall\, y : |y - x_0| < \varepsilon_2 \Rightarrow \lambda < f(y). \tag{3.2}$$

Fixemos $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0$. Então, de (3.1), temos

$$x_0 + \varepsilon B \subset U.$$

Fixemos também $M = \lambda \in \mathbb{R}$, e seja $y \in x_0 + \varepsilon B$ qualquer, logo

$$f(y) > \lambda = M$$

(esta desigualdade deve-se a (3.2)). E portanto, escolhendo $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, temos o pretendido.

Seja $x$ um qualquer ponto em $x_0 + \varepsilon B$.

Comecemos por mostrar que $f(x) \geq f(x_0)$. Assumimos primeiro que $f(x) = +\infty$, e como $f(x_0) \in \mathbb{R}$, vem $f(x) \geq f(x_0)$. Então podemos assumir que $f(x) \in \mathbb{R}$. Suponhamos que tínhamos $f(x) < f(x_0)$, e vamos deduzir uma contradição. Para tal, consideremos a função $g : x_0 + \varepsilon B \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(\omega) := \frac{\delta}{\varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2},$$

para algum

$$\delta := \frac{(f(x_0) - f(x))\, \varepsilon^2 \left(\varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2\right)}{2\,|x - x_0|^2} > 0.$$

e que verifica o seguinte :

$(i)$ é continuamente diferenciável em $x_0 + \varepsilon B$;
$(ii)$ tem um único mínimo global no ponto $x_0$, isto é,

$$g(x_0) < g(\omega), \forall \omega \in x_0 + \varepsilon B;$$

$(iii)$ a sua derivada anula-se apenas no ponto $x_0$, isto é,

$$\nabla g(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla g(\omega) \neq 0, \forall \omega \in x_0 + \varepsilon B; \tag{3.3}$$

$(iv)$ $g(\omega) \to +\infty$ e $|\nabla g(\omega)| \to +\infty$ quando $\omega$ se aproxima da fronteira de $x_0+\varepsilon B$, isto é, quando $|\omega - x_0| \to \varepsilon$;
$(v)$ $g(x) - g(x_0) < f(x_0) - f(x)$.

Mostremos que, de facto, isso acontece. Considerando a norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$, $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$, $x_0 = (x_0^1, ..., x_0^n)$, temos :

$$|\omega - x_0|^2 = \langle \omega - x_0, \omega - x_0 \rangle = (\omega_1 - x_0^1)^2 + ... + (\omega_n - x_0^n)^2 = \sum_{i=1}^{n} (\omega_i - x_0^i)^2;$$

$$\nabla g(\omega) = \left( \frac{\partial g}{\partial \omega_1}(\omega), ..., \frac{\partial g}{\partial \omega_n}(\omega) \right),$$

onde, para cada $i = 1, ..., n$, $\frac{\partial g}{\partial \omega_i} : U \to \mathbb{R}$ é uma função dada por

$$\frac{\partial g}{\partial \omega_i}(\omega) = \frac{2\delta(\omega_i - x_0^i)}{\left(\varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2\right)^2}, \forall i \in \mathbb{N};$$

$$|\nabla g(\omega)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial g}{\partial \omega_i}(\omega) \right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left( \frac{2\delta(\omega_i - x_0^i)}{\left(\varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2\right)^2} \right)^2} = 2\delta \sqrt{\frac{|\omega - x_0|^2}{\left[\varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2\right]^4}}.$$

E verifiquemos os pontos $(i)$, $(ii)$, $(iii)$, $(iv)$, $(v)$.

$(i)$ $g(\cdot)$ é continuamente diferenciável em $x_0 + \varepsilon B$. De facto, para cada $i = 1, ..., n$, existe $\frac{\partial g}{\partial \omega_i}(\cdot)$ e é uma função contínua, porque :

- $\omega \mapsto |\omega - x_0|$ é uma função contínua, pois a norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$ é uma função contínua;
- $\omega \mapsto |\omega - x_0|^2$ é uma função contínua, pela proposição 17.3, pois é o produto da função contínua $\omega \mapsto |\omega - x_0|$ por ela própria;
- $\omega \mapsto -|\omega - x_0|^2$ é uma função contínua, pela proposição 17.3, pois é o produto das funções contínuas $\omega \mapsto -1$ e $\omega \mapsto |\omega - x_0|^2$;
- $\omega \mapsto \varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2$ é uma função contínua, pela proposição 17.3, pois é a soma das funções contínuas $\omega \mapsto \varepsilon^2$ e $\omega \mapsto -|\omega - x_0|^2$;
- $\omega \mapsto \left[\varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2\right]^2$ é uma função contínua, pela proposição 17.3, pois é o produto da função contínua $\omega \mapsto \varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2$ por ela por ela própria;
- $\omega \mapsto \frac{1}{\left[\varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2\right]^2}$ é uma função contínua, pela proposição 17.3, pois é o quociente das funções contínuas $\omega \mapsto 1$ e $\omega \mapsto \left[\varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2\right]^2$, e a última nunca se anula nos pontos do seu domínio;
- $\omega \mapsto \omega_i - x_0^i$ é uma função contínua para cada $i \in \mathbb{N}$, pois é uma função afim em $\mathbb{R}$ para cada $i \in \mathbb{N}$;
- $\omega \mapsto 2\delta(\omega_i - x_0^i)$ é uma função contínua para cada $i \in \mathbb{N}$, pela proposição 17.3, pois é o produto das funções contínuas $\omega \mapsto 2\delta$ e $\omega \mapsto \omega_i - x_0^i$ para cada $i \in \mathbb{N}$;
- $\omega \mapsto \frac{2\delta(\omega_i - x_0^i)}{\left[\varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2\right]^2}$ é uma função contínua para cada $i \in \mathbb{N}$, pela proposição 17.3, pois é o quociente das funções contínuas $\omega \mapsto 2\delta(\omega_i - x_0^i)$ e $\omega \mapsto \frac{1}{\left[\varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2\right]^2}$.

(*ii*) $g(\cdot)$ tem um único mínimo global no ponto $x_0$, isto é,

$$g(x_0) < g(\omega), \forall\, \omega \in x_0 + \varepsilon B.$$

De facto, para qualquer $\omega \in x_0 + \varepsilon B$ temos

$$g(\omega) = \frac{\delta}{\varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2} > \frac{\delta}{\varepsilon^2} = g(x_0),$$

dado que

$$\varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2} > \frac{1}{\varepsilon^2} \Leftrightarrow \frac{\delta}{\varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2} > \frac{\delta}{\varepsilon^2}.$$

(*iii*) A derivada de $g(\cdot)$ anula-se apenas no ponto $x_0$, dado que

$$\nabla g(x_0) = \underbrace{(0, ..., 0)}_{n \text{ vezes}} = 0$$

e

$$\nabla g(\omega) \neq 0, \forall\, \omega \in x_0 + \varepsilon B, \text{ pois } \frac{\partial g}{\partial \omega_i}(\omega) = \frac{2\delta\left(\omega_i - x_0^i\right)}{\varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2} \neq 0, \forall\, i \in \mathbb{N}.$$

(*iv*) $g(\omega) \to +\infty$ e $|\nabla g(\omega)| \to +\infty$ quando $\omega$ se aproxima da fronteira de $x_0 + \varepsilon B$, isto é, quando $|\omega - x_0| \to \varepsilon$, uma vez que

$$\lim_{|\omega - x_0| \to \varepsilon} g(\omega) = \lim_{|\omega - x_0| \to \varepsilon} \frac{\delta}{\varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2} = +\infty$$

e

$$\lim_{|\omega - x_0| \to \varepsilon} |\nabla g(\omega)| = \lim_{|\omega - x_0| \to \varepsilon} 2\delta \sqrt{\frac{|\omega - x_0|^2}{\left[\varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2\right]^4}} = +\infty.$$

(*v*)

$$\begin{aligned}
g(x) - g(x_0) &= \frac{\delta}{\varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2} - \frac{\delta}{\varepsilon^2} \\
&= \frac{\frac{(f(x_0) - f(x))\varepsilon^2\left(\varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2\right)}{2|x - x_0|^2}}{\varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2} - \frac{\frac{(f(x_0) - f(x))\varepsilon^2\left(\varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2\right)}{2|x - x_0|^2}}{\varepsilon^2} \\
&= \frac{(f(x_0) - f(x))\left(\varepsilon^2 - \left(\varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2\right)\right)}{2|x - x_0|^2} \\
&= \frac{(f(x_0) - f(x))}{2} \\
&< f(x_0) - f(x).
\end{aligned}$$

Seja $z$ algum ponto em $x_0 + \varepsilon B$.

Vamos mostrar que a função $(f + g)(\cdot)$ tem um mínimo global no ponto $z$ em $x_0 + \varepsilon B$. Por hipótese, $f(\cdot)$ é sci, então $f(\cdot)$ é sci em $z \in x_0 + \varepsilon B$. Além disso, $g(\cdot)$ é contínua em $x_0 + \varepsilon B$, em particular é contínua no ponto $z$, logo é sci em $z \in x_0 + \varepsilon B$, pela nota 6.27. Consequentemente, $(f + g)(\cdot)$ é sci em $z \in x_0 + \varepsilon B$, pela proposição 6.22. Consideremos agora o conjunto

$$E := \{y \in x_0 + \varepsilon B : (f + g)(y) \leq (f + g)(x_0)\}.$$

Mostremos que $E$ é fechado. Seja $(y_n) \subset E$ uma qualquer sucessão tal que $(y_n) \to y$. Então $(y_n) \subset x_0 + \varepsilon B$ é tal que

$$(f+g)(y_n) \leq (f+g)(x_0). \tag{3.4}$$

$(f+g)(\cdot)$ é sci em $x_0 + \varepsilon B$ e como $y \in x_0 + \varepsilon B$, temos que $(f+g)(\cdot)$ é sci em $y \in x_0 + \varepsilon B$. Então

$$(f+g)(y) = \liminf_{(y_n)\to y} (f+g)(y_n),$$

pela proposição 6.21. Logo, de (3.4) vem

$$\liminf_{(y_n)\to y} (f+g)(y_n) \leq \liminf_{(y_n)\to y} (f+g)(x_0) \Leftrightarrow (f+g)(y) \leq (f+g)(x_0),$$

donde $y \in E$. E portanto, $E$ é fechado. Agora vamos mostrar que $E$ é limitado. Seja $y \in E$ qualquer, então $y \in x_0 + \varepsilon B$ tal que $(f+g)(y) \leq (f+g)(x_0)$. Logo, $|y - x_0| < \varepsilon$. E vem

$$y \in E \Rightarrow |y| \leq |y - x_0| + |x_0| < \varepsilon + |x_0|.$$

Desta maneira, como $E$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ fechado e limitado, então é compacto. E portanto, pelo teorema 6.25, existe o ponto $z \in E$ tal que $z$ é ponto de mínimo global para $(f+g)(\cdot)$ em $E$, isto é,

$$(f+g)(z) \leq (f+g)(y), \forall\, y \in E. \tag{3.5}$$

Fixemos agora algum $\delta_1 > 0$ tal que $z + \delta_1 B \subset E$ e qualquer $R_1 > 0$. Seja $y \in z + \delta_1 B$ qualquer, então, de (3.5), vem

$$(f+g)(z) \leq (f+g)(y) + R_1 |y - z|^2.$$

Isto é,

$$0 \leq (f+g)(y) - (f+g)(z) + R_1 |y - z|^2, \forall\, y \in z + \delta_1 B.$$

E como $|y - z| < \delta_1 \Rightarrow y - z \neq 0$, vem

$$\langle 0, y - z\rangle \leq (f+g)(y) - (f+g)(z) + R_1 |y - z|^2, \forall\, y \in z + \delta_1 B.$$

Logo, pela proposição 23.11, $\xi = 0$ é um subgradiente proximal de $(f+g)(\cdot)$ em $z$.

Como $f : U \to (-\infty, +\infty]$ e $g : x_0 + \varepsilon B \to \mathbb{R}$ são sci finitas em $z$ e $\xi = 0 \in \partial^\pi (f+g)(z)$, então, pela proposição 23.14, resulta que

$$\forall\, \widetilde{\varepsilon} > 0, \exists\, u, v \in z + \widetilde{\varepsilon} B : 0 \in (\xi^* + \xi^{**}) + \widetilde{\varepsilon} B,$$

onde $\xi^*$ é um subgradiente proximal de $f(\cdot)$ em $u$ e $\xi^{**}$ é um subgradiente proximal de $g(\cdot)$ em $v$ (isto é, $\xi^* \in \partial^\pi f(u)$ e $\xi^{**} \in \partial^\pi g(v)$). Logo, para cada $i \in \mathbb{N}$, existem os pontos $u_i$ e $v_i$ com

$$|u_i - z| < \frac{1}{i}$$

e

$$|v_i - z| < \frac{1}{i}, \tag{3.6}$$

e tais que

$$|\xi_i^* + \xi_i^{**}| < \frac{1}{i}, \tag{3.7}$$

onde $\xi_i^*$ é um subgradiente proximal de $f(\cdot)$ em $u_i$ e $\xi_i^{**}$ é um subgradiente proximal de $g(\cdot)$ em $v_i$. Como $\xi_i^* \in \partial^\pi f(u_i)$, então, por hipótese,

$$\xi_i^* = 0. \tag{3.8}$$

E como $\xi_i^{**} \in \partial^\pi g(v_i)$, $g(\cdot)$ é diferenciável e sci em $x_0 + \varepsilon B$, então

$$\xi_i^{**} = \nabla g(v_i), \tag{3.9}$$

pelo corolário 23.13. Notemos que (3.6) é o mesmo que dizer que

$$v_i \to z \text{ quando } i \to +\infty. \tag{3.10}$$

Além disso, juntando, para cada $i \in \mathbb{N}$, (3.7), (3.8) e (3.9) resulta que

$$|\xi_i^* + \xi_i^{**}| < \frac{1}{i} \Leftrightarrow |0 + \nabla g(v_i)| < \frac{1}{i} \Leftrightarrow |\nabla g(v_i)| < \frac{1}{i},$$

isto é,

$$\nabla g(v_i) \to 0 \text{ quando } i \to +\infty. \tag{3.11}$$

Associando (3.10) e o facto de $\nabla g(\cdot)$ ser contínua (por aplicação da nota 17.4) vem

$$\nabla g(v_i) \to \nabla g(z) \text{ quando } i \to +\infty. \tag{3.12}$$

Como temos (3.11) e (3.12), e o limite é único, então

$$\nabla g(z) = 0.$$

Juntando (3.3), concluimos que $z = x_0$. Isto é, o minimizante $z$ é igual a $x_0$.

Finalmente, como $z = x_0$, $x \in E$ e

$$(f+g)(y) \geq (f+g)(x_0), \; \forall\, y \in E,$$

então

$$(f+g)(x) \geq (f+g)(x_0) \Leftrightarrow f(x) + g(x) \geq f(x_0) + g(x_0) \Leftrightarrow g(x) - g(x_0) \geq f(x_0) - f(x).$$

O que contradiz a afirmação $(v)$ acerca de $g(\cdot)$.

Logo, não podemos ter $f(x) < f(x_0)$. E portanto, $f(x) \geq f(x_0)$, para $x \in x_0 + \varepsilon B$ fixado.

Agora vamos mostrar que $f(\cdot)$ tem um valor constante $f_0$ em todos os pontos da bola $x_0 + \varepsilon B$, nos quais $f(\cdot)$ é finita. Para que $f(\cdot)$ seja finita na bola $x_0+\varepsilon B$, não podemos ter $f(x) > f(x_0)$, para $x \in x_0+\varepsilon B$ fixado. Seja $f(x_0) = f_0$. Analogamente ao que foi feito anteriormente, vamos supor que $f(x) > f(x_0)$, e deduzir uma contradição.

Assim, consideremos a função $\widetilde{g} : x_0 + \varepsilon B \to \mathbb{R}$ dada por

$$\widetilde{g}(\omega) := -\frac{\widetilde{\delta}}{\varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2},$$

para algum

$$\widetilde{\delta} := \frac{2\left(f(x) - f(x_0)\right)\varepsilon^2 \left(\varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2\right)}{|x - x_0|^2} > 0.$$

e que verifica o seguinte :

$(i')$ é continuamente diferenciável em $x_0 + \varepsilon B$;

$(ii')$ tem um único máximo global no ponto $x_0$, isto é,

$$\widetilde{g}(x_0) > \widetilde{g}(\omega), \; \forall\, \omega \in x_0 + \varepsilon B;$$

$(iii')$ a sua derivada anula-se apenas no ponto $x_0$, isto é,

$$\nabla\widetilde{g}(x_0) = 0 \qquad \text{e} \qquad \nabla\widetilde{g}(\omega) \neq 0, \, \forall\, \omega \in x_0 + \varepsilon B; \tag{3.13}$$

$(iv')$ $\widetilde{g}(\omega) \to -\infty$ e $|\nabla\widetilde{g}(\omega)| \to +\infty$ quando $\omega$ se aproxima da fronteira de $x_0 + \varepsilon B$, isto é, quando $|\omega - x_0| \to \varepsilon$;

$(v')$ $\widetilde{g}(x_0) - \widetilde{g}(x) > f(x) - f(x_0)$.

Mostremos que, de facto, isso acontece. Considerando a norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$, $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$, $x_0 = (x_0^1, ..., x_0^n)$, temos :

$$|\omega - x_0|^2 = \langle \omega - x_0, \omega - x_0 \rangle = (\omega_1 - x_0^1)^2 + ... + (\omega_n - x_0^n)^2 = \sum_{i=1}^{n} (\omega_i - x_0^i)^2 ;$$

$$\nabla \widetilde{g}(\omega) = \left( \frac{\partial \widetilde{g}}{\partial \omega_1}(\omega), ..., \frac{\partial \widetilde{g}}{\partial \omega_n}(\omega) \right),$$

onde, para cada $i = 1, ..., n$, $\frac{\partial \widetilde{g}}{\partial \omega_i} : U \to \mathbb{R}$ é uma função dada por

$$\frac{\partial \widetilde{g}}{\partial \omega_i}(\omega) = -\frac{2\widetilde{\delta}(\omega_i - x_0^i)}{\left(\varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2\right)^2}, \ \forall\ i \in \mathbb{N};$$

$$|\nabla \widetilde{g}(\omega)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial \widetilde{g}}{\partial \omega_i}(\omega) \right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left( -\frac{2\widetilde{\delta}(\omega_i - x_0^i)}{\left(\varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2\right)^2} \right)^2} = 2\widetilde{\delta} \sqrt{\frac{|\omega - x_0|^2}{\left[\varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2\right]^4}}.$$

E verifiquemos os pontos $(i')$, $(ii')$, $(iii')$, $(iv')$, $(v')$.

$(i')$ $\widetilde{g}(\cdot)$ é continuamente diferenciável em $x_0 + \varepsilon B$. De facto, para cada $i = 1, ..., n$, existe $\frac{\partial \widetilde{g}}{\partial \omega_i}(\cdot)$ e é uma função contínua, porque :

- $\omega \mapsto |\omega - x_0|$ é uma função contínua, pois a norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$ é uma função contínua;
- $\omega \mapsto |\omega - x_0|^2$ é uma função contínua, pela proposição 17.3, pois é o produto da função contínua $\omega \mapsto |\omega - x_0|$ por ela própria;
- $\omega \mapsto -|\omega - x_0|^2$ é uma função contínua, pela proposição 17.3, pois é o produto das funções contínuas $\omega \mapsto -1$ e $\omega \mapsto |\omega - x_0|^2$;
- $\omega \mapsto \varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2$ é uma função contínua, pela proposição 17.3, pois é a soma das funções contínuas $\omega \mapsto \varepsilon^2$ e $\omega \mapsto -|\omega - x_0|^2$;
- $\omega \mapsto \left[\varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2\right]^2$ é uma função contínua, pela proposição 17.3, pois é o produto da função contínua $\omega \mapsto \varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2$ por ela por ela própria;
- $\omega \mapsto \frac{1}{\left[\varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2\right]^2}$ é uma função contínua, pela proposição 17.3, pois é o quociente das funções contínuas $\omega \mapsto 1$ e $\omega \mapsto \left[\varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2\right]^2$, e a última nunca se anula nos pontos do seu domínio;
- $\omega \mapsto \omega_i - x_0^i$ é uma função contínua para cada $i \in \mathbb{N}$, pois é uma função afim em $\mathbb{R}$ para cada $i \in \mathbb{N}$;
- $\omega \mapsto -2\widetilde{\delta}(\omega_i - x_0^i)$ é uma função contínua para cada $i \in \mathbb{N}$, pela proposição 17.3, pois é o produto das funções contínuas $\omega \mapsto -2\widetilde{\delta}$ e $\omega \mapsto \omega_i - x_0^i$ para cada $i \in \mathbb{N}$;
- $\omega \mapsto -\frac{2\widetilde{\delta}(\omega_i - x_0^i)}{\left[\varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2\right]^2}$ é uma função contínua para cada $i \in \mathbb{N}$, pela proposição 17.3, pois é o quociente das funções contínuas $\omega \mapsto -2\widetilde{\delta}(\omega_i - x_0^i)$ e $\omega \mapsto \frac{1}{\left[\varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2\right]^2}$.

$(ii')$ $\widetilde{g}(\cdot)$ tem um único máximo global no ponto $x_0$, isto é,

$$\widetilde{g}(x_0) > \widetilde{g}(\omega), \ \forall\ \omega \in x_0 + \varepsilon B.$$

De facto, para qualquer $\omega \in x_0 + \varepsilon B$ temos

$$\widetilde{g}(\omega) = -\frac{\widetilde{\delta}}{\varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2} < -\frac{\widetilde{\delta}}{\varepsilon^2} = g(x_0),$$

dado que

$$\varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2} > \frac{1}{\varepsilon^2} \Leftrightarrow -\frac{\widetilde{\delta}}{\varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2} < -\frac{\widetilde{\delta}}{\varepsilon^2}.$$

$(iii')$ A derivada de $\widetilde{g}(\cdot)$ anula-se apenas no ponto $x_0$, dado que

$$\nabla \widetilde{g}(x_0) = \underbrace{(0, ..., 0)}_{n \text{ vezes}} = 0$$

e

$$\nabla \widetilde{g}(\omega) \neq 0, \forall\, \omega \in x_0 + \varepsilon B, \text{ pois } \frac{\partial \widetilde{g}}{\partial \omega_i}(\omega) = -\frac{2\widetilde{\delta}\left(\omega_i - x_0^i\right)}{\varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2} \neq 0, \forall\, i \in \mathbb{N}.$$

$(iv')$ $\widetilde{g}(\omega) \to -\infty$ e $|\nabla \widetilde{g}(\omega)| \to +\infty$ quando $\omega$ se aproxima da fronteira de $x_0 + \varepsilon B$, isto é, quando $|\omega - x_0| \to \varepsilon$, uma vez que

$$\lim_{|\omega - x_0| \to \varepsilon} \widetilde{g}(\omega) = \lim_{|\omega - x_0| \to \varepsilon} -\frac{\widetilde{\delta}}{\varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2} = -\infty$$

e

$$\lim_{|\omega - x_0| \to \varepsilon} |\nabla \widetilde{g}(\omega)| = \lim_{|\omega - x_0| \to \varepsilon} 2\widetilde{\delta} \sqrt{\frac{|\omega - x_0|^2}{\left[\varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2\right]^4}} = +\infty.$$

$(v')$

$$\begin{aligned}
\widetilde{g}(x_0) - \widetilde{g}(x) &= -\frac{\widetilde{\delta}}{\varepsilon^2} + \frac{\widetilde{\delta}}{\varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2} \\
&= -\frac{\frac{2(f(x) - f(x_0))\varepsilon^2\left(\varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2\right)}{|x - x_0|^2}}{\varepsilon^2} + \frac{\frac{2(f(x) - f(x_0))\varepsilon^2\left(\varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2\right)}{|x - x_0|^2}}{\varepsilon^2 - |\omega - x_0|^2} \\
&= \frac{2\left(f(x) - f(x_0)\right)\left(-\varepsilon^2 + |\omega - x_0|^2 + \varepsilon^2\right)}{|x - x_0|^2} \\
&= 2\left(f(x) - f(x_0)\right) \\
&> f(x) - f(x_0).
\end{aligned}$$

Seja $\widetilde{z}$ algum ponto em $x_0 + \varepsilon B$.

Vamos mostrar que a função $(f + \widetilde{g})(\cdot)$ tem um mínimo global no ponto $\widetilde{z}$ em $x_0 + \varepsilon B$. Por hipótese, $f(\cdot)$ é sci, então $f(\cdot)$ é sci em $\widetilde{z} \in x_0 + \varepsilon B$. Além disso, $\widetilde{g}(\cdot)$ é contínua em $x_0 + \varepsilon B$, em particular é contínua no ponto $\widetilde{z}$, logo é sci em $\widetilde{z} \in x_0 + \varepsilon B$, pela nota 6.27. Consequentemente, $(f + \widetilde{g})(\cdot)$ é sci em $\widetilde{z} \in x_0 + \varepsilon B$, pela proposição 6.22. Consideremos agora o conjunto

$$\widetilde{E} := \{y \in x_0 + \varepsilon B : (f + \widetilde{g})(y) \leq (f + \widetilde{g})(x_0)\}.$$

Mostremos que $\widetilde{E}$ é fechado. Seja $(y_n) \subset \widetilde{E}$ uma qualquer sucessão tal que $(y_n) \to y$. Então $(y_n) \subset x_0 + \varepsilon B$ é tal que

$$(f + \widetilde{g})(y_n) \leq (f + \widetilde{g})(x_0). \tag{3.14}$$

$(f + \widetilde{g})(\cdot)$ é sci em $x_0 + \varepsilon B$ e como $y \in x_0 + \varepsilon B$, temos que $(f + \widetilde{g})(\cdot)$ é sci em $y \in x_0 + \varepsilon B$. Então

$$(f + \widetilde{g})(y) = \liminf_{(y_n) \to y} (f + \widetilde{g})(y_n),$$

pela proposição 6.21. Logo, de (3.14) vem

$$\liminf_{(y_n)\to y}(f+\widetilde{g})(y_n) \leq \liminf_{(y_n)\to y}(f+\widetilde{g})(x_0) \Leftrightarrow (f+\widetilde{g})(y) \leq (f+\widetilde{g})(x_0),$$

donde $y \in \widetilde{E}$. E portanto, $\widetilde{E}$ é fechado. Agora vamos mostrar que $\widetilde{E}$ é limitado. Seja $y \in \widetilde{E}$ qualquer, então $y \in x_0 + \varepsilon B$ tal que $(f+\widetilde{g})(y) \leq (f+\widetilde{g})(x_0)$. Logo, $|y - x_0| < \varepsilon$. E vem

$$y \in \widetilde{E} \Rightarrow |y| \leq |y - x_0| + |x_0| < \varepsilon + |x_0|.$$

Desta maneira, como $\widetilde{E}$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ fechado e limitado, então é compacto. E portanto, pelo teorema 6.25, existe o ponto $\widetilde{z} \in \widetilde{E}$ tal que $\widetilde{z}$ é ponto de mínimo global para $(f+\widetilde{g})(\cdot)$ em $E$, isto é,

$$(f+\widetilde{g})(\widetilde{z}) \leq (f+\widetilde{g})(y), \forall\, y \in \widetilde{E}. \tag{3.15}$$

Fixemos agora algum $\delta_2 > 0$ tal que $\widetilde{z} + \delta_2 B \subset \widetilde{E}$ e qualquer $R_2 > 0$. Seja $y \in \widetilde{z} + \delta_2 B$ qualquer, então, de (3.15), vem

$$(f+\widetilde{g})(\widetilde{z}) \leq (f+\widetilde{g})(y) + R_2 |y - \widetilde{z}|^2.$$

Isto é,

$$0 \leq (f+\widetilde{g})(y) - (f+\widetilde{g})(\widetilde{z}) + R_2 |y - \widetilde{z}|^2, \forall\, y \in \widetilde{z} + \delta_2 B.$$

E como $|y - \widetilde{z}| < \delta_2 \Rightarrow y - \widetilde{z} \neq 0$, vem

$$\langle 0, y - \widetilde{z}\rangle \leq (f+\widetilde{g})(y) - (f+\widetilde{g})(\widetilde{z}) + R_2 |y - \widetilde{z}|^2, \forall\, y \in \widetilde{z} + \delta_2 B.$$

Logo, pela proposição 23.11, $\widetilde{\xi} = 0$ é um subgradiente proximal de $(f+\widetilde{g})(\cdot)$ em $\widetilde{z}$.

Como $f : U \to (-\infty, +\infty]$ e $\widetilde{g} : x_0 + \varepsilon B \to \mathbb{R}$ são sci finitas em $\widetilde{z}$ e $\widetilde{\xi} = 0 \in \partial^\pi (f+\widetilde{g})(\widetilde{z})$, então, pela proposição 23.14, resulta que

$$\forall\, \widetilde{\widetilde{\varepsilon}} > 0, \exists\, \widetilde{u}, \widetilde{v} \in \widetilde{z} + \widetilde{\widetilde{\varepsilon}} B : 0 \in \left(\widetilde{\xi}^* + \widetilde{\xi}^{**}\right) + \widetilde{\widetilde{\varepsilon}} B,$$

onde $\widetilde{\xi}^*$ é um subgradiente proximal de $f(\cdot)$ em $\widetilde{u}$ e $\widetilde{\xi}^{**}$ é um subgradiente proximal de $\widetilde{g}(\cdot)$ em $\widetilde{v}$ (isto é, $\widetilde{\xi}^* \in \partial^\pi f(\widetilde{u})$ e $\widetilde{\xi}^{**} \in \partial^\pi \widetilde{g}(\widetilde{v})$). Logo, para cada $j \in \mathbb{N}$, existem os pontos $\widetilde{u}_j$ e $\widetilde{v}_j$ com

$$|\widetilde{u}_j - \widetilde{z}| < \frac{1}{j}$$

e

$$|\widetilde{v}_j - \widetilde{z}| < \frac{1}{j}, \tag{3.16}$$

e tais que

$$\left|\widetilde{\xi}_j^* + \widetilde{\xi}_j^{**}\right| < \frac{1}{j}, \tag{3.17}$$

onde $\widetilde{\xi}_j^*$ é um subgradiente proximal de $f(\cdot)$ em $\widetilde{u}_j$ e $\widetilde{\xi}_j^{**}$ é um subgradiente proximal de $\widetilde{g}(\cdot)$ em $\widetilde{v}_j$. Como $\widetilde{\xi}_j^* \in \partial^\pi f(\widetilde{u}_j)$, então, por hipótese,

$$\widetilde{\xi}_j^* = 0. \tag{3.18}$$

E como $\widetilde{\xi}_j^{**} \in \partial^\pi \widetilde{g}(\widetilde{v}_j)$, $\widetilde{g}(\cdot)$ é diferenciável e sci em $x_0 + \varepsilon B$, então

$$\widetilde{\xi}_j^{**} = \nabla \widetilde{g}(\widetilde{v}_j), \tag{3.19}$$

pelo corolário 23.13. Notemos que (3.16) é o mesmo que dizer que

$$\widetilde{v}_j \to \widetilde{z} \text{ quando } j \to +\infty. \tag{3.20}$$

Além disso, juntando, para cada $j \in \mathbb{N}$, (3.17), (3.18) e (3.19) resulta que

$$\left|\widetilde{\xi_j^*} + \widetilde{\xi_j^{**}}\right| < \frac{1}{j} \Leftrightarrow |0 + \nabla\widetilde{g}(\widetilde{v}_j)| < \frac{1}{j} \Leftrightarrow |\nabla\widetilde{g}(\widetilde{v}_j)| < \frac{1}{j},$$

isto é,

$$\nabla\widetilde{g}(\widetilde{v}_j) \to 0 \text{ quando } j \to +\infty. \tag{3.21}$$

Associando (3.20) e o facto de $\nabla\widetilde{g}(\cdot)$ ser contínua (por aplicação da nota 17.4) vem

$$\nabla\widetilde{g}(\widetilde{v}_j) \to \nabla\widetilde{g}(\widetilde{z}) \text{ quando } j \to +\infty. \tag{3.22}$$

Como temos (3.21) e (3.22), e o limite é único, então

$$\nabla\widetilde{g}(\widetilde{z}) = 0.$$

Juntando (3.13), concluimos que $\widetilde{z} = x_0$. Isto é, o minimizante $\widetilde{z}$ é igual a $x_0$.

Finalmente, como $\widetilde{z} = x_0$, $x \in \widetilde{E}$ e

$$(f + \widetilde{g})(y) \geq (f + \widetilde{g})(x_0), \forall\, y \in \widetilde{E},$$

então

$$(f + \widetilde{g})(x) \geq (f + \widetilde{g})(x_0) \Leftrightarrow f(x) + \widetilde{g}(x) \geq f(x_0) + \widetilde{g}(x_0) \Leftrightarrow \widetilde{g}(x_0) - \widetilde{g}(x) \leq f(x) - f(x_0).$$

O que contradiz a afirmação $(v')$ acerca de $\widetilde{g}(\cdot)$.

Logo, não podemos ter $f(x) > f(x_0)$. E portanto, $f(x) = f(x_0) = f_0$, para $x \in x_0 + \varepsilon B$ fixado e tal que $f(x) \in \mathbb{R}$. Mas como $x \in x_0 + \varepsilon B$ é um qualquer tal que $f(x) \in \mathbb{R}$, mostrámos que

$$f(y) = f(x_0) = f_0, \forall\, y \in x_0 + \varepsilon B : f(y) \in \mathbb{R}. \tag{3.23}$$

No entanto, nós queremos que $f(\cdot)$ seja constante em todos os pontos de uma vizinhança de algum ponto em $U$ (no caso desta demonstração, em todos os pontos de uma vizinhança de $x_0$), e não em alguns pontos dessa vizinhança. Por isso, basta mostrar que

$$f(y) \in \mathbb{R}, \forall\, y \in x_0 + \frac{\varepsilon}{4}B,$$

pois assim, temos que

$$f(y) = f_0, \forall\, y \in x_0 + \frac{\varepsilon}{4}B.$$

Suponhamos que não temos sempre $f(\cdot)$ finita em toda a bola $x_0 + \frac{\varepsilon}{4}B$. Então $f(z) = +\infty$ para algum $z \in x_0 + \frac{\varepsilon}{4}B$. Fixemos $\delta > 0$ com $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$, e consideremos o ponto $(z, f_0 - \delta)$ em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, o qual não pertence ao *epi* $f$. (Suponhamos $(z, f_0 - \delta) \in$ *epi* $f$, isto é, $f_0 - \delta \geq f(z) = +\infty$, contradizendo o facto de que $f_0 - \delta \in \mathbb{R}$. Logo, $f(z) > f_0 - \delta$, isto é, $(z, f_0 - \delta) \notin$ *epi* $f$). Note-se que *epi* $f$ é fechado, pois $f$ é sci. Então, pela proposição 3.4, existe pelo menos o ponto $(\omega, r) \in$ *epi* $f$, que é o ponto mais próximo de $(z, f_0 - \delta)$, isto é,

$$|(z, f_0 - \delta) - (\omega, r)| \leq |(z, f_0 - \delta) - (x, y)|, \forall\ (x, y) \in \textit{epi } f.$$

Em particular, para $(x_0, f_0) \in$ *epi* $f$,

$$\begin{aligned} |(z, f_0 - \delta) - (\omega, r)| &\leq |(z, f_0 - \delta) - (x_0, f_0)| = |(z - x_0, -\delta)| \\ &= |z - x_0| + |-\delta| = |z - x_0| + \delta \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Desta maneira,

$$|(z, f_0 - \delta) - (\omega, r)| < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow |(z - \omega, f_0 - \delta - r)| < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow |z - \omega| + |f_0 - \delta - r| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

E se a soma de dois números positivos é menor que $\frac{\varepsilon}{2}$, então cada um deles é menor que $\frac{\varepsilon}{2}$, logo,

$$|z - \omega| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim,

$$|\omega - x_0| \leq |\omega - z| + |z - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3}{4}\varepsilon < \varepsilon.$$

Isto é,

$$\omega \in x_0 + \varepsilon B. \tag{3.24}$$

Consequentemente, por (3.24), (3.23) e por $f(\omega) \in \mathbb{R}$ (pois $(\omega, r) \in epi\ f$), deduzimos que

$$f(\omega) = f_0.$$

Além disso, $(\omega, r)$ é o ponto do *epi* $f$ que está mais próximo de $(z, f_0 - \delta)$, então está na fronteira do *epi* $f$, logo

$$f(\omega) = r.$$

E portanto,

$$r = f(\omega) = f_0.$$

Mostrámos então que $(\omega, f(\omega)) = (\omega, f_0)$ é um ponto do *epi* $f$ que está mais próximo do ponto $(z, f_0 - \delta)$. Em termos geométricos, isto significa que

$$\bar{\xi} = (z, f_0 - \delta) - (\omega, f_0) = (z - \omega, -\delta)$$

é uma normal proximal ao *epi* $f$ em $(\omega, f(\omega)) = (\omega, f_0)$. Isto é,

$$\bar{\xi} = (z - \omega, -\delta) \in N^{\pi}_{epi\ f}(\omega, f(\omega)).$$

E como

$$(z - \omega, -\delta) = \delta\left(\frac{z - \omega}{\delta}, -1\right),$$

então

$$\bar{\xi} = \delta\left(\frac{z - \omega}{\delta}, -1\right) \in N^{\pi}_{epi\ f}(\omega, f(\omega)).$$

O que é equivalente a dizer que o vector não-nulo $\bar{\bar{\xi}} = \frac{z-\omega}{\delta}$ é um subgradiente proximal de $f(\cdot)$ em $\omega$. O que contradiz a hipótese que diz que se existir subgradiente proximal de $f(\cdot)$ num ponto de $U$, esse subgradiente é único e igual a zero. Logo,

$$f(y) \in \mathbb{R},\ \forall\ y \in x_0 + \frac{\varepsilon}{4}B.$$

E portanto,

$$f(y) = f_0,\ \forall\ y \in x_0 + \frac{\varepsilon}{4}B.$$

O que significa que $f(\cdot)$ é localmente constante em $U$. ■

**Nota 3.2.** *A conclusão da proposição anterior não acontece se só assumirmos que* $0 \in \partial^{\pi} f(x)$, *em vez de* $\partial^{\pi} f(x) = \{0\}$, *em todos os pontos onde* $\partial^{\pi} f(x)$ *existe. Para ilustrarmos este facto vamos considerar o exemplo que se segue.*

**Exemplo 3.3.** *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *satisfazendo*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

*Então* $f$ *é sci e* $\partial^{\pi} f(x) = \{0\}$ *em todos os pontos excepto* $x = 0$. *Além disso,* $0 \in \partial^{\pi} f(0)$. *No entanto,* $f$ *não é constante.*

### 3.2. Um resultado auxiliar

Demonstremos a seguinte proposição que foi usada na demonstração da proposição 3.1.

**Proposição 3.4.** *Sejam $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado não-vazio e $x$ um ponto de $\mathbb{R}^n$ que não está em $C$. Então existe pelo menos um ponto $c \in C$, que é o ponto em $C$, mais próximo de $x$, isto é, tal que*

$$d_C(x) := \inf_{c' \in C} |x - c'| = |x - c| \leq |x - c'|, \; \forall \, c' \in C.$$

**Demonstração:**

Como o ínfimo de um conjunto de números reais é limite de uma sucessão de elementos desse conjunto, temos

$$d_C(x) = \lim_{k \to +\infty} |x - c_k|$$

onde $(c_k)$ é uma sucessão conveniente de pontos de $C$.

Da desigualdade

$$|c_k| \leq |c_k - x| + |x|,$$

resulta que a sucessão $(c_k)$ é limitada, pois $(|x - c_k|)$ é limitada, por ser convergente, e $|x|$ é um número real, por ser uma norma em $\mathbb{R}^n$.

Como a sucessão $(c_k)$ é limitada, então possui uma subsucessão convergente. Chamemos $(c_k)$ a essa subsucessão. Podemos assim assumir que

$$(c_k) \to c \text{ quando } k \to +\infty.$$

E como $C$ é fechado, resulta que $c \in C$.

Além disso, pelo facto de a norma em $\mathbb{R}^n$ ser uma função contínua, vem

$$d_C(x) = \lim_{k \to +\infty} |x - c_k| = |x - c|,$$

o que completa a demonstração. ■

## 4. O problema autónomo

Considerando o problema $(\mathcal{P})$ sob as condições (1.1) e (1.2), com lagrangiano $L : \Omega \times \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ satisfazendo as seguintes hipóteses básicas (as mesmas da secção 2.1) e hipóteses extra :

### 4.1. Hipóteses básicas

$(i)$ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (ver (1.2)) é fechado;
$(ii)$ $C \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ é fechado e é um conjunto compacto pelo menos uma das projecções

$$C_x := \{x \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in C \text{ para algum } y \in \mathbb{R}^n\},$$

$$C_y := \{y \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in C \text{ para algum } x \in \mathbb{R}^n\};$$

$(iii)$ $K \subset \mathbb{R}^n$ é um cone convexo fechado;
$(iv)$ a função $(s, v) \mapsto L(s, v)$ é sci;
$(v)$ para cada $s \in \Omega$ :
$(v_1)$ a função $L(s, \cdot)$ é convexa;
$(v_2)$ o domínio *dom* $L(s, \cdot)$ é um conjunto aberto, convexo e não-vazio;
$(vi)$ existe uma função $l(\cdot)$ localmente limitada inferiormente tal que

$$L(s, v) \geq l(s) \qquad \forall\, s \in \Omega \qquad \forall\, v;$$

$(vii)$ existe uma função lipschitziana $\overline{x}(\cdot) \in X$ para a qual $\Lambda(\overline{x}(\cdot))$ é finito (ver $(\mathcal{P})$).

No que segue consideraremos o conjunto de subnível

$$\Gamma(\overline{x}(\cdot)) := \{x(\cdot) \in X : \Lambda(x(\cdot)) \leq \Lambda(\overline{x}(\cdot))\}$$

e o seu subconjunto

$$\Gamma_\theta(\overline{x}(\cdot)) := \Gamma(\overline{x}(\cdot)) \cap AC_\theta([0, T], \mathbb{R}^n)$$

(os mesmos da secção 2.1).

### 4.2. Hipóteses extra

A primeira hipótese extra é :

$$(HE_1) \begin{cases} \text{existe } k > 0 \text{ tal que qualquer função } x(\cdot) \text{ de } \Gamma(\overline{x}(\cdot)) \text{ satisfaz} \\[2ex] \qquad\qquad \inf_{0 \leq t \leq T} ess\, |x'(t)| < k. \end{cases}$$

A segunda hipótese extra é :

$$(HE_2) \begin{cases} \text{para algum } k \text{ satisfazendo } (HE_1), \text{ vale} \\[2ex] (*) \begin{cases} \lim\limits_{\beta \to +\infty} \sup\limits_{\substack{s \in \Omega, \\ v \in K, |v| > \beta}} \{L(s, v) - \langle v, \partial_v L(s, v)\rangle\} < \\[2ex] < \inf\limits_{\substack{s \in \Omega, \\ v \in K, |v| < k}} \{L(s, v) - \langle v, \partial_v L(s, v)\rangle\}. \end{cases} \end{cases}$$

(Aqui $\partial_v L(s, v)$ é o subgradiente da função convexa $L(s, \cdot)$; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno em $\mathbb{R}^n$.)

## 4.3. O problema $(\mathcal{P}_\theta)$

Consideremos o seguinte problema :

$$(\mathcal{P}_\theta) \quad \min\left\{\Lambda(x(\cdot)) : x(\cdot) \in AC_\theta([0,T],\mathbb{R}^n),\ (x(0),x(T)) \in C,\ x(t) \in \Omega\ \forall\, t \in [0,T],\ x'(t) \in K \text{ qs}\right\},$$

onde

$$\Lambda(x(\cdot)) := \int_0^T L(x(t),x'(t))\ dt.$$

Introduzindo um parâmetro $\alpha \in \mathbb{R}$ em $(\mathcal{P}_\theta)$ através da adição de uma nova restrição :

$$\Lambda_\theta(x(\cdot)) \leq \alpha,\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R},$$

onde

$$\Lambda_\theta(x(\cdot)) := \int_0^T \theta(|x'(t)|)\ dt.$$

temos uma nova classe de funções :

$$\mathbf{AC}_\theta^\alpha([0,T],\mathbb{R}^n) := \left\{x(\cdot) \in AC([0,T],\mathbb{R}^n) : \Lambda_\theta(x(\cdot)) \leq \alpha,\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R}\right\},$$

e um novo problema :

$$(\mathcal{P}_\theta(\alpha)) \quad \min\left\{\Lambda(x(\cdot)) : x(\cdot) \in AC_\theta^\alpha([0,T],\mathbb{R}^n),\ (x(0),x(T)) \in C,\ x(t) \in \Omega\ \forall\, t \in [0,T],\ x'(t) \in K \text{ qs}\right\}.$$

Denotemos ainda o valor de $(\mathcal{P}_\theta(\alpha))$ por $V_\theta(\alpha)$, isto é,

$$V_\theta(\alpha) := \inf\left\{\Lambda(x(\cdot)) : x(\cdot) \in AC_\theta^\alpha([0,T],\mathbb{R}^n),\ (x(0),x(T)) \in C,\ x(t) \in \Omega\ \forall\, t \in [0,T],\ x'(t) \in K \text{ qs}\right\}.$$

## 4.4. Lemas auxiliares

**Lema 4.1.** (*i*) *Para qualquer $\alpha$ suficientemente grande, $V_\theta(\alpha)$ é finito.*
(*ii*) *Sempre que $V_\theta(\alpha)$ é finito, o ínfimo definindo $V_\theta(\alpha)$ é atingido.*
(*iii*) *A função $V_\theta(\cdot)$ é sci.*

**Demonstração:**
(*i*) **Para qualquer $\alpha$ suficientemente grande, $V_\theta(\alpha)$ é finito.**
Sabemos, pela hipótese básica (*vii*), que existe pelo uma função lipschitziana $\overline{x}(\cdot) \in X$ para a qual $\Lambda(\overline{x}(\cdot))$ é finito. Então $\overline{x}(\cdot)$ é admissível para o problema $(\mathcal{P})$ e $\Lambda(\overline{x}(\cdot)) \in \mathbb{R}$. E como $\overline{x}(\cdot)$ é lipschitziana, logo $\overline{x}'(\cdot) \in L^\infty([0,T],\mathbb{R}^n)$, pelo corolário 18.5. Consequentemente, pela proposição 13.28,

$$|\overline{x}'(t)| \leq |\overline{x}'(\cdot)|_{L^\infty([0,T],\mathbb{R}^n)} = \sup_{0\leq t\leq T} ess\,|\overline{x}'(t)| \text{ qs em } [0,T].$$

Como $\theta(\cdot)$ é uma função estritamente crescente, vem

$$\theta(|\overline{x}'(t)|) \leq \theta\left(\sup_{0\leq t\leq T} ess\,|\overline{x}'(t)|\right) \text{ qs em } [0,T].$$

Além disso, existem os integrais $\int_0^T \theta\left(\sup_{0\leq t\leq T} ess\,|\overline{x}'(t)|\right) dt$ e $\int_0^T \theta(|\overline{x}'(t)|)\ dt$ (o primeiro existe pois $\theta\left(\sup_{0\leq t\leq T} ess\,|\overline{x}'(t)|\right)$ é uma constante e o segundo existe pela demonstração do teorema 2.1). Então, pelo lema 11.12,

$$\Lambda_\theta(\overline{x}(\cdot)) = \int_0^T \theta(|\overline{x}'(t)|)\ dt \leq \int_0^T \theta\left(\sup_{0\leq t\leq T} ess\,|\overline{x}'(t)|\right) dt = T\,\theta\left(\sup_{0\leq t\leq T} ess\,|\overline{x}'(t)|\right) < +\infty.$$

Logo, vamos fixar qualquer $\alpha$ suficientemente grande tal que

$$\Lambda_\theta(\overline{x}(\cdot)) \leq \alpha.$$

E portanto, $\overline{x}(\cdot)$ é admissível para o problema $(\mathcal{P}_\theta(\alpha))$. Desta maneira, podemos dizer que $(\mathcal{P}(\alpha))$ tem funções admissíveis.

Vamos aplicar o método directo. Para isso, definimos o conjunto das funções em competição da seguinte maneira :

$$\begin{aligned}
\Gamma_\theta(\overline{x}(\cdot)) &:= \Gamma(\overline{x}(\cdot)) \cap AC_\theta([0,T],\mathbb{R}^n) \\
&= \{x \in AC([0,T],\mathbb{R}^n) : (x(0),x(T)) \in C,\ x(t) \in \Omega\ \forall\ t \in [0,T],\ x'(t) \in K \text{ qs}, \\
&\quad \Lambda_\theta(x(\cdot)) = \textstyle\int_0^T \theta(|x'(t)|)\ dt \leq \alpha, \\
&\quad \textstyle\int_0^T L(x(t),x'(t))\ dt = \Lambda(x(\cdot)) \leq \Lambda(\overline{x}(\cdot)) \in \mathbb{R}\Big\}.
\end{aligned}$$

Agora vamos definir uma noção de convergência em $\Gamma_\theta(\overline{x}(\cdot))$. Para tal, mostraremos que $\Gamma_\theta(\overline{x}(\cdot))$ enquanto subconjunto de $W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n)$ é sequencialmente fracamente relativamente compacto, ou seja, qualquer sucessão de $\Gamma_\theta(\overline{x}(\cdot))$ tem uma subsucessão fracamente convergente em $W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n)$, pela definição 13.37. Desta maneira, consideremos uma qualquer sucessão minimizante $(x_k(\cdot))$ em $\Gamma_\theta(\overline{x}(\cdot))$, então para qualquer $k \in \mathbb{N}$, temos

$$(x_k(\cdot)) \subset AC([0,T],\mathbb{R}^n),$$

$$(x_k(0),x_k(T)) \subset C, \qquad (x_k(t)) \subset \Omega\ \forall\ t \in [0,T], \qquad (x'_k(t)) \subset K \text{ qs},$$

$$\Lambda_\theta(x_k(\cdot)) = \int_0^T \theta(|x'_k(t)|)\ dt \leq \alpha,$$

$$\int_0^T L(x_k(t),x'_k(t))\ dt = \Lambda(x_k(\cdot)) \leq \Lambda(\overline{x}(\cdot)) \in \mathbb{R}.$$

Como $\theta(\cdot)$ é uma função de Nagumo e

$$\Lambda_\theta(x_k(\cdot)) = \int_0^T \theta(|x'_k(t)|)\ dt \leq \alpha,$$

então, pela proposição 13.39 o conjunto $\{x'_k(\cdot)\} \subset L^1([0,T],\mathbb{R}^n)$ é sequencialmente fracamente relativamente compacto em $L^1([0,T],\mathbb{R}^n)$. Isto é, pela definição 13.37, a nossa sucessão $(x'_k(\cdot))$ possui uma subsucessão, ainda designada por $(x'_k(\cdot))$, fracamente convergente para $v(\cdot) \in L^1([0,T],\mathbb{R}^n)$ (este $v(\cdot)$ não tem de estar em $\{x'_k(\cdot)\}$).

Pela hipótese básica $(ii)$, pelo menos uma das projecções $C_x$ ou $C_y$ é um conjunto compacto. Como $(x_k(\cdot))$ é $AC$, em particular é contínua, então, pela proposição 17.1, $(x_k(\cdot))$ é limitada em $C_x$ ou $C_y$. Logo, pelo menos uma das sucessões $(x_k(0))$ ou $(x_k(T))$ é limitada (em $C_x$ ou $C_y$ respectivamente). Considerando um dos casos, suponhamos a limitação em $C_x$ da sucessão $(x_k(0))$ (isto é,

$$\exists\ M > 0 : |x_k(0)| \leq M,\ \forall\ k \in \mathbb{N}),$$

então ela possui uma subsucessão, ainda designada por $(x_k(0))$, convergente para um ponto $x_0$. Isto é,

$$(x_k(0)) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} x_0. \tag{4.1}$$

Notemos que por $(x_k(\cdot))$ ser $AC$, pode-se definir da seguinte forma :

$$x_k(t) := x_k(0) + \int_0^t x_k'(\tau)\ d\tau,\ \forall\ t \in [0,T],\ \forall\ k \in \mathbb{N},$$

pelo teorema 18.4.

Mostremos que $(x_k(\cdot))$ é equicontínua, isto é, pela definição 13.35,

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall\ t_1,\ t_2 \in [0,T] : |t_1 - t_2| \leq \delta : |x_k(t_1) - x_k(t_2)| \leq \varepsilon,\ \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

Como o conjunto $\{x_k'(\cdot)\} \subset L^1([0,T],\mathbb{R}^n)$ é sequencialmente fracamente relativamente compacto em $L^1([0,T],\mathbb{R}^n)$, então, pela proposição 13.39, a sucessão $(x_k'(\cdot))$ é equiabsolutamente integrável em $[0,T]$. Isto é, pela definição 13.38, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe algum $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\int_E |x_k'(t)|\ dt \leq \varepsilon,$$

para qualquer $k \in \mathbb{N}$ e para qualquer subconjunto mensurável $E$ de $[0,T]$ com $\mu(E) \leq \delta$. Sejam agora $t_1$, $t_2 \in [0,T]$ quaisquer tais que $|t_1 - t_2| \leq \delta$ (para o $\delta$ acima), então, para qualquer $k \in \mathbb{N}$, vem

$$\begin{aligned}
|x_k(t_1) - x_k(t_2)| &= \left|\left(x_k(0) + \int_0^{t_1} x_k'(\tau)\ d\tau\right) - \left(x_k(0) + \int_0^{t_2} x_k'(\tau)\ d\tau\right)\right| \\
&= \left|-\int_{t_1}^0 x_k'(\tau)\ d\tau - \int_0^{t_2} x_k'(\tau)\ d\tau\right| = \left|\int_{t_1}^{t_2} x_k'(\tau)\ d\tau\right| \\
&\leq \int_{t_1}^{t_2} |x_k'(\tau)|\ d\tau \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

E portanto, a sucessão $(x_k(\cdot))$ é equicontínua.

Agora vamos mostrar que $(x_k(\cdot))$ é equilimitada, isto é, pela definição 13.34,

$$\exists\ \widetilde{M} > 0 : |x_k(t)| \leq \widetilde{M},\ \forall\ t \in [0,T],\ \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

Desta maneira, para qualquer $t \in [0,T]$ e para qualquer $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}
|x_k(t)| &= \left|x_k(0) + \int_0^t x_k'(\tau)\ d\tau\right| \leq |x_k(0)| + \left|\int_0^t x_k'(\tau)\ d\tau\right| \\
&\leq |x_k(0)| + \int_0^t |x_k'(\tau)|\ d\tau \\
&\leq M + \int_0^T |x_k'(\tau)|\ d\tau \text{ (pois } (x_k(0)) \text{ é limitada e } |x_k'(\tau)| \geq 0) \\
&\leq M + |x_k'(\cdot)|_{L^1([0,T],\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Vamos majorar $|x_k'(\cdot)|_{L^1([0,T],\mathbb{R}^n)}$. Como $\theta(\cdot)$ é uma função de Nagumo, temos que

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\theta(r)}{r} = +\infty,$$

isto é,

$$\forall\ m > 0,\ \exists\ M_m > 0 : r > M_m \Rightarrow \frac{\theta(r)}{r} > m.$$

Então, para qualquer $m > 0$ fixado, para o qual $M_m > 0$, temos

$$r < \frac{\theta(r)}{m}, \ \forall\, r > M_m. \tag{4.2}$$

Consideremos os subconjuntos $E_1$, $E_2$ de $[0,T]$ :

$$E_1 := \{t \in [0,T] : |x_k'(t)| > M_m, \ \forall\, k \in \mathbb{N}\}; \tag{4.3}$$

$$E_2 := [0,T] \backslash E_1 = \{t \in [0,T] : |x_k'(t)| \leq M_m, \ \forall\, k \in \mathbb{N}\}. \tag{4.4}$$

Assim, para qualquer $k \in \mathbb{N}$, vem

$$\begin{aligned}
|x_k'(\cdot)|_{L^1([0,T],\mathbb{R}^n)} &= \int_0^T |x_k'(\tau)|\ d\tau = \int_{E_1} |x_k'(\tau)|\ d\tau + \int_{E_2} |x_k'(\tau)|\ d\tau \\
&\leq \int_{E_1} \frac{\theta(|x_k'(\tau)|)}{m}\ d\tau + \int_{E_2} M_m\ d\tau \text{ (por (4.2), (4.3) e (4.4))} \\
&\leq \int_0^T \frac{\theta(|x_k'(\tau)|)}{m}\ d\tau + \int_0^T M_m\ d\tau \text{ (pois } \frac{\theta(|x_k'(\tau)|)}{m} \geq 0 \text{ e } M_m > 0) \\
&= \frac{1}{m}\int_0^T \theta(|x_k'(\tau)|)\ d\tau + T\ M_m \leq \frac{1}{m}\ \alpha + T\ M_m.
\end{aligned}$$

Logo,

$$|x_k(t)| \leq M + \frac{1}{m}\ \alpha + T\ M_m.$$

Então

$$\exists\ \widetilde{M} = M + \frac{1}{m}\alpha + T\ M_m > 0 : |x_k(t)| \leq \widetilde{M}, \ \forall\, t \in [0,T], \ \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

E portanto, a sucessão $(x_k(\cdot))$ é equilimitada. Consequentemente, pelo teorema 13.36, existem uma subsucessão de $(x_k(\cdot))$, ainda designada por $(x_k(\cdot))$, e uma função contínua $x(\cdot)$ tais que $(x_k(\cdot))$ converge uniformemente em $[0,T]$ para $x(\cdot)$, quando $k \to +\infty$. Ou seja,

$$\left(\sup_{t\in[0,T]} |x_k(t) - x(t)|\right) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{4.5}$$

Logo

$$(x_k(t)) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} x(t), \ \forall\, t \in [0,T],$$

isto é, $(x_k(\cdot))$ converge pontualmente para $x(\cdot)$. O que significa que

$$\begin{aligned}
x(t) &= \lim_{k\to+\infty} x_k(t) = \lim_{k\to+\infty}\left[x_k(0) + \int_0^t x_k'(\tau)\ d\tau\right] \\
&= \lim_{k\to+\infty} x_k(0) + \lim_{k\to+\infty}\int_0^t x_k'(\tau)\ d\tau \\
&= x_0 + \lim_{k\to+\infty}\int_0^t x_k'(\tau)\ d\tau \text{ (por (4.1))} \\
&= x_0 + \int_0^t v(\tau)\ d\tau, \ \forall\, t \in [0,T], \ \forall\, k \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

(esta última desigualdade deve-se ao facto de $(x_k'(\cdot)) \rightharpoonup v(\cdot)$ em $L^1([0,T],\mathbb{R}^n)$, isto é,

$$\left(\int_0^T \langle x_k'(t), \psi(t)\rangle \, dt\right) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \left(\int_0^T \langle v(t), \psi(t)\rangle \, dt\right), \forall\, \psi(\cdot) \in L^\infty([0,T],\mathbb{R}^n) \tag{4.6}$$

implica que

$$\left(\int_0^t x_k'(\tau)\, d\tau\right) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \left(\int_0^t v(\tau)\, d\tau\right), \forall\, t \in [0,T].)$$

Temos portanto

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(\tau)\, d\tau, \forall\, t \in [0,T],$$

onde $v(\cdot) \in L^1([0,T],\mathbb{R}^n)$. Seja $x_1 : [0,T] \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$x_1(t) := x_0.$$

Como $x_1(\cdot)$ é lipschitziana, então $x_1(\cdot)$ é AC, pela nota 18.6. Seja $x_2 : [0,T] \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$x_2(t) := \int_0^t v(\tau)\, d\tau.$$

Como $v(\cdot) \in L^1([0,T],\mathbb{R}^n)$, então pela proposição 18.7, $x_2(\cdot)$ é absolutamente contínua e $x_2'(t) = v(t)$ qs em $[0,T]$. Logo $x(\cdot) := x_1(\cdot) + x_2(\cdot)$ é AC pela proposição 18.8 e

$$x'(t) = v(t) \text{ qs em } [0,T]. \tag{4.7}$$

E portanto, a sucessão das funções AC $(x_k(\cdot))$, para qualquer $k \in \mathbb{N}$, converge uniformente para uma função AC $x(\cdot)$ definida por

$$x(t) := x_0 + \int_0^t v(\tau)\, d\tau.$$

Vamos mostrar que $(x_k(\cdot)) \rightharpoonup x(\cdot)$ em $W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n)$, ou seja, pela nota 15.9,

$$(i) \quad \left(\int_0^T \langle x_k(t), \psi(t)\rangle \, dt\right) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \langle x(t), \psi(t)\rangle \, dt, \forall\, \psi(\cdot) \in L^\infty([0,T],\mathbb{R}^n),$$

$$(ii) \quad \left(\int_0^T \langle x_k'(t), \psi(t)\rangle \, dt\right) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \langle x'(t), \psi(t)\rangle \, dt, \forall\, \psi(\cdot) \in L^\infty([0,T],\mathbb{R}^n).$$

Como

$$\begin{aligned}
0 &\le \left|\int_0^T \langle x_k(t) - x(t), \psi(t)\rangle \, dt\right| \le \int_0^T |\langle x_k(t) - x(t), \psi(t)\rangle| \, dt \\
&\le |x_k(\cdot) - x(\cdot)|_{L^1([0,T],\mathbb{R}^n)} \; |\psi(\cdot)|_{L^\infty([0,T],\mathbb{R}^n)} \text{ (pelo teorema 13.21)} \\
&= \int_0^T |x_k(t) - x(t)| \, dt \; |\psi(\cdot)|_{L^\infty([0,T],\mathbb{R}^n)} \\
&\le |\psi(\cdot)|_{L^\infty([0,T],\mathbb{R}^n)} \int_0^T \sup_{t\in[0,T]} |x_k(t) - x(t)| \, dt \\
&= T \; |\psi(\cdot)|_{L^\infty([0,T],\mathbb{R}^n)} \sup_{t\in[0,T]} |x_k(t) - x(t)| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ (por (4.5))},
\end{aligned}$$

isto é,

$$\lim_{k\to+\infty}\left|\int_0^T \langle x_k(t)-x(t),\psi(t)\rangle\, dt\right|=0,$$

verificando-se $(i)$. Além disso, juntando (4.6) e (4.7) temos

$$\left(\int_0^T \langle x_k'(t),\psi(t)\rangle\, dt\right)\underset{k\to+\infty}{\rightarrow}\int_0^T \langle x'(t),\psi(t)\rangle\, dt,\ \forall\ \psi\in L^\infty([0,T],\mathbb{R}^n),$$

ou seja, verifica-se $(ii)$.

Até aqui mostrámos que $\Gamma_\theta(\overline{x}(\cdot))$ é sequencialmente fracamente relativamente compacto.

Seguidamente mostra-se

$$i:=\inf\{\Lambda(x(\cdot)):x(\cdot)\in\Gamma_\theta(\overline{x}(\cdot))\}\in\mathbb{R}$$

(isto é, $i\neq-\infty,\ +\infty$). Existirá necessariamente pelo menos uma sucessão minimizante $(x_k(\cdot))$ em $\Gamma_\theta(\overline{x}(\cdot))$, ou seja, com $\Lambda(x_k(\cdot))\to i$. Relembremos que o integral $\Lambda:W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n)\to[-\infty,+\infty]$ é definido por

$$\Lambda(x(\cdot)):=\int_0^T L(x(t),x'(t))\, dt.$$

Comecemos por mostrar que $\Lambda(\cdot)$ é limitado inferiormente em $\Gamma_\theta(\overline{x}(\cdot))$. Pela hipótese básica $(vi)$, $L(s,v)\geq l(s)$ para alguma função $l(\cdot)$ localmente limitada inferiormente. Ou seja, para cada $\overline{s}\in\Omega$, $\exists\ a\in\mathbb{R}$ , $\exists\ \eta>0$ :

$$l(s)\geq a,\ \forall\ s\in A:=\overline{s}+\eta B.$$

Assim,

$$\exists\ a\in\mathbb{R}:L(s,v)\geq a,\ \forall\ s\in A,\ \forall\ v\in\mathbb{R}^n.$$

Em particular, para quase todo $t\in[0,T]$, substituindo $s$ por $x(t)$, $v$ por $x'(t)$,

$$\exists\ a\in\mathbb{R}:L(x(t),x'(t))\geq a,\ \text{qs em }\ [0,T].$$

Além disso, existem os integrais $\int_0^T L(x(t),x'(t))\, dt$ e $\int_0^T a\, dt$ (o primeiro existe pois $a$ é uma constante e o segundo existe pela demonstração do teorema 2.1, para o caso não-autónomo). Então, pelo lema 11.12,

$$\Lambda(x(\cdot)):=\int_0^T L(x(t),x'(t))\, dt\geq\int_0^T a\, dt=a\,T>-\infty.$$

O que significa que $\Lambda(\cdot)$ é limitado inferiormente em $\Gamma_\theta(\overline{x}(\cdot))$. Logo

$$i>-\infty.$$

Como $\Lambda(\overline{x}(\cdot))\in\mathbb{R}$, vem

$$i\leq\Lambda(\overline{x}(\cdot))<+\infty.$$

E portanto,

$$i\in\mathbb{R}.$$

Seja agora uma qualquer sucessão minimizante $(x_k(\cdot))\subset\Gamma_\theta(\overline{x}(\cdot))$ para $\Lambda(\cdot)$, isto é, tal que

$$\lim_{k\to+\infty}\Lambda(x_k(\cdot))=i=\inf\{\Lambda(x(\cdot)):x(\cdot)\in\Gamma_\theta(\overline{x}(\cdot))\}.$$

Já provámos que $\Gamma_\theta(\overline{x}(\cdot))$ é sequencialmente fracamente relativamente compacto, desta maneira para qualquer sucessão $(x_k(\cdot))\subset\Gamma_\theta(\overline{x}(\cdot))$ existe uma função $x(\cdot)\in W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n)$ e tal que, se necessário passando a uma subsucessão, temos $(x_k(\cdot))\rightharpoonup x(\cdot)$ em $W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n)$.

Mostremos que $x(\cdot)\in\Gamma_\theta(\overline{x}(\cdot))$.

Como $(x_k(t)) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} x(t)$, para qualquer $t \in [0,T]$, $C$ e $\Omega$ são fechados e $(x_k(0), x_k(T)) \subset C$, $(x_k(t)) \subset \Omega$ $\forall\, t \in [0,T]$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, então

$$(x(0), x(T)) \in C, \qquad x(t) \in \Omega\ \forall\, t \in [0,T].$$

Além disso, como $(x_k(\cdot)) \rightharpoonup x(\cdot)$ em $W^{1,1}([0,T], \mathbb{R}^n)$, então, pelo teorema 15.7, passando a uma subsucessão se necessário, $(x_k(\cdot)) \rightharpoonup x(\cdot)$ em $L^1([0,T], \mathbb{R}^n)$. Logo, pelo teorema 13.41, $(x_k(\cdot)) \to x(\cdot)$ em medida em $[0,T]$. Tendo em atenção a convergência fraca $(x_k'(\cdot)) \rightharpoonup x'(\cdot)$ em $L^1([0,T], \mathbb{R}^n)$ e o facto de $K$ ser um cone convexo fechado, então, pelo teorema 13.42,

$$x'(t) \in K \text{ qs em } [0,T].$$

Como a sucessão $(x_k(\cdot)) \subset L^1([0,T], \mathbb{R}^n)$ converge fortemente para $x(\cdot) \in L^1([0,T], \mathbb{R}^n)$ (pois $(x_k(\cdot)) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} x(\cdot)$ uniformente),então pelo teorema 13.29, existe uma subsucessão de $(x_k(\cdot))$, ainda denotada por $(x_k(\cdot))$, tal que

$$(x_k(\cdot)) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} x(\cdot) \text{ qs em } [0,T].$$

Tendo em conta a função de Nagumo $\theta(\cdot)$, seja $I : L^1([0,T], \mathbb{R}^n) \to [-\infty, +\infty]$ a função dada por

$$I(x(\cdot)) := \int_0^T \theta(|x(t)|)\ dt.$$

Pretendemos agora aplicar o lema de Fatou à função $I(\cdot)$. Por hipótese, $\theta(\cdot) \in C^1([0,+\infty), \mathbb{R})$ é estritamente crescente então

$$\theta(\gamma) \geq \theta(0) =: c,\ \forall\, \gamma \in [0,+\infty).$$

Seja $\overline{\theta} : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ dada por

$$\overline{\theta}(\gamma) := \theta(\gamma) - c.$$

Substituindo $\gamma$ por $|x(t)|$ para qualquer $t \in [0,T]$ vem

$$\overline{\theta}(|x(t)|) := \theta(|x(t)|) - c.$$

Como $(x_k(\cdot)) \subset L^1([0,T], \mathbb{R}^n)$, então a sucessão $(x_k(\cdot))$ é mensurável. Além disso, $\theta(|\cdot|)$ é contínua (pois é a composição das funções contínuas $\xi \mapsto |\xi|$ e $\xi_1 \mapsto \theta(\xi_1)$), logo, para cada $k \in \mathbb{N}$ a função $\theta(|x_k(\cdot)|)$ é mensurável em $[0,T]$, pela proposição 10.27. Como a função constante $t \mapsto -c$ é mensurável então a função $\overline{\theta}(|x_k(\cdot)|)$ é mensurável pelo teorema 10.22 e toma valores em $[0,+\infty)$. Por outro lado, $\overline{\theta}(|\cdot|)$ é contínua (pois é a soma das funções contínuas $\xi \mapsto \theta(|\xi|)$ e $t \mapsto -c$), em particular $\overline{\theta}(|\cdot|)$ é sci, logo

$$\overline{\theta}(|x(t)|) \leq \liminf_{k\to+\infty} \overline{\theta}(|x_k(t)|) \text{ qs em } [0,T],$$

isto é,

$$\theta(|x(t)|) - c \leq \liminf_{k\to+\infty} (\theta(|x_k(t)|) - c) \text{ qs em } [0,T].$$

Além disso, como $\overline{\theta}(|x(\cdot)|)$ e $\liminf\limits_{k\to+\infty}\overline{\theta}(|x_k(\cdot)|)$ são mensuráveis e $\geq 0$, pelo lema 11.11,vem

$$\begin{aligned}
\int_0^T \theta(|x(t)|)\ dt - c\,T &= \int_0^T [\theta(|x(t)|) - c]\ dt = \int_0^T \overline{\theta}(|x(t)|)\ dt \\
&\leq \int_0^T \liminf_{k\to+\infty} \overline{\theta}(|x_k(t)|)\ dt \\
&\leq \liminf_{k\to+\infty} \int_0^T \overline{\theta}(|x_k(t)|)\ dt \text{ (pelo lema 11.18 (de Fatou))} \\
&= \liminf_{k\to+\infty} \int_0^T [\theta(|x_k(t)|) - c]\ dt \\
&= \liminf_{k\to+\infty} \left(\int_0^T \theta(|x_k(t)|)\ dt - c\,T\right) \\
&= \liminf_{k\to+\infty} \int_0^T \theta(|x_k(t)|)\ dt - c\,T.
\end{aligned}$$

Donde

$$I(x(\cdot)) = \int_0^T \theta(|x(t)|)\ dt \leq \liminf_{k\to+\infty} \int_0^T \theta(|x_k(t)|)\ dt = \liminf_{k\to+\infty} I(x_k(\cdot)),$$

o que significa que $I(\cdot)$ é sci na topologia forte de $L^1([0,T],\mathbb{R}^n)$.

Consideremos agora a função $\Delta : W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n) \to L^1([0,T],\mathbb{R}^n)$ dada por

$$\Delta(\gamma) := \gamma'.$$

Mostremos que a função $\Delta(\cdot)$ é linear. Sejam $x_1(\cdot)$, $x_2(\cdot) \in W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n)$ quaisquer, então para qualquer $\varphi(\cdot) \in C_c^\infty([0,T],\mathbb{R}^n)$,

$$\exists!\ v_1(\cdot) \in L^1([0,T],\mathbb{R}^n) : \int_0^T \langle x_1(t), \varphi'(t)\rangle\ dt = -\int_0^T \langle v_1(t), \varphi(t)\rangle\ dt,$$

$$\exists!\ v_2(\cdot) \in L^1([0,T],\mathbb{R}^n) : \int_0^T \langle x_2(t), \varphi'(t)\rangle\ dt = -\int_0^T \langle v_2(t), \varphi(t)\rangle\ dt,$$

logo

$$v_1(\cdot) = x_1'(\cdot) = \Delta(x_1(\cdot)), \tag{4.8}$$

$$v_2(\cdot) = x_2'(\cdot) = \Delta(x_2(\cdot)). \tag{4.9}$$

Temos também

$$\exists!\ v_3(\cdot) \in L^1([0,T],\mathbb{R}^n) : \int_0^T \langle (x_1+x_2)(t), \varphi'(t)\rangle\ dt = -\int_0^T \langle v_3(t), \varphi(t)\rangle\ dt,$$

logo

$$v_3(\cdot) = (x_1+x_2)'(\cdot) = \Delta((x_1+x_2)(\cdot)). \tag{4.10}$$

Desta maneira,

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle (x_1+x_2)(t), \varphi'(t)\rangle \; dt &= \int_0^T \langle x_1(t)+x_2(t), \varphi'(t)\rangle \; dt \\ &= \int_0^T \langle x_1(t), \varphi'(t)\rangle \; dt + \int_0^T \langle x_2(t), \varphi'(t)\rangle \; dt \\ &= -\int_0^T \langle v_1(t), \varphi(t)\rangle \; dt - \int_0^T \langle v_2(t), \varphi(t)\rangle \; dt \\ &= -\int_0^T \langle (v_1+v_2)(t), \varphi(t)\rangle \; dt,\end{aligned}$$

donde (por (4.10))

$$(v_1+v_2)(\cdot) = v_3(\cdot) = (x_1+x_2)'(\cdot) = \Delta((x_1+x_2)(\cdot)) \tag{4.11}$$

e (por (4.8), (4.9), (4.11))

$$\Delta((x_1+x_2)(\cdot)) = (v_1+v_2)(\cdot) = v_1(\cdot)+v_2(\cdot) = \Delta(x_1(\cdot)) + \Delta(x_2(\cdot)). \tag{4.12}$$

Analogamente, sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x(\cdot) \in W^{1,1}([0,T], \mathbb{R}^n)$ quaisquer, então para qualquer $\varphi(\cdot) \in C_c^\infty([0,T], \mathbb{R}^n)$,

$$\exists!\; v_1(\cdot) \in L^1([0,T], \mathbb{R}^n) : \int_0^T \langle x(t), \varphi'(t)\rangle \; dt = -\int_0^T \langle v_1(t), \varphi(t)\rangle \; dt,$$

logo

$$v_1(\cdot) = x'(\cdot) = \Delta(x(\cdot)). \tag{4.13}$$

Temos também

$$\exists!\; v_2(\cdot) \in L^1([0,T], \mathbb{R}^n) : \int_0^T \langle (\alpha\, x)(t), \varphi'(t)\rangle \; dt = -\int_0^T \langle v_2(t), \varphi(t)\rangle \; dt,$$

logo

$$v_2(\cdot) = (\alpha\, x)'(\cdot) = \Delta((\alpha\, x)(\cdot)). \tag{4.14}$$

Donde

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle (\alpha\, x)(t), \varphi'(t)\rangle \; dt &= \int_0^T \langle \alpha\, x(t), \varphi'(t)\rangle \; dt \\ &= \alpha \int_0^T \langle x(t), \varphi'(t)\rangle \; dt \\ &= \alpha\left(-\int_0^T \langle v_1(t), \varphi(t)\rangle \; dt\right) \\ &= -\int_0^T \langle (\alpha\, v_1)(t), \varphi(t)\rangle \; dt,\end{aligned}$$

logo (por (4.14))

$$(\alpha\, v_1)(\cdot) = v_2(\cdot) = (\alpha\, x)'(\cdot) = \Delta((\alpha\, x)(\cdot)) \tag{4.15}$$

e (por (4.13), (4.15))

$$\Delta((\alpha\, x)(\cdot)) = (\alpha\, v_1)(\cdot) = \alpha\, v_1(\cdot) = \alpha\, \Delta(x(\cdot)). \tag{4.16}$$

E portanto por (4.12) e (4.16), a função $\Delta(\cdot)$ é linear.

Agora vamos mostrar que a função $\Delta(\cdot)$ é limitada, isto é,

$$\exists\ k \in \mathbb{R} : |\Delta(x(\cdot))|_{L^1([0,T],\mathbb{R}^n)} \leq k\,|x(\cdot)|_{W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n)},$$

usando a definição 9.8. Desta maneira,

$$|\Delta(x(\cdot))|_{L^1([0,T],\mathbb{R}^n)} = |x'(\cdot)|_{L^1([0,T],\mathbb{R}^n)} \leq |x'(\cdot)|_{L^1([0,T],\mathbb{R}^n)} + |x(\cdot)|_{L^1([0,T],\mathbb{R}^n)} = |x(\cdot)|_{W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n)}.$$

E portanto,

$$\exists\ k = 1 \in \mathbb{R} : |\Delta(x(\cdot))|_{L^1([0,T],\mathbb{R}^n)} \leq k\,|x(\cdot)|_{W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n)};$$

o que significa que a função linear $\Delta(\cdot)$ é limitada.

Como a função $\Delta(\cdot)$ é linear e limitada, então é contínua, pela proposição 9.9.

Note-se que

$$\Lambda_\theta(\cdot) = (I \circ \Delta)(\cdot).$$

Já provámos que $I(\cdot)$ é sci na topologia forte de $L^1([0,T],\mathbb{R}^n)$, então pela proposição 6.23, o conjunto

$$\{x(\cdot) \in L^1([0,T],\mathbb{R}^n) : I(x(\cdot)) \leq \lambda\} = I^{-1}((-\infty;\lambda])$$

é fechado, para qualquer $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$. Como $\Delta(\cdot)$ é contínua, logo o conjunto

$$\begin{aligned}
\Delta^{-1}\left(I^{-1}((-\infty;\lambda])\right) &= \left(\Delta^{-1} \circ I^{-1}\right)((-\infty;\lambda]) = (I \circ \Delta)^{-1}((-\infty;\lambda]) \\
&= \left\{x(\cdot) \in W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n) : (I \circ \Delta)(x(\cdot)) \leq \lambda\right\} \\
&= \left\{x(\cdot) \in W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n) : \Lambda_\theta(x(\cdot)) \leq \lambda\right\}
\end{aligned}$$

é fechado, pela proposição 6.19. Logo, a função $\Lambda_\theta(\cdot)$ é sci na topologia forte de $W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n)$, pela proposição 6.23.

Mostremos que $\Lambda_\theta(\cdot)$ é convexa. Sejam $x_1(\cdot)$, $x_2(\cdot) \in W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n)$ e $0 < \lambda < 1$ quaisquer, então

$$\begin{aligned}
\Lambda_\theta(\lambda\, x_1(\cdot) + (1-\lambda)\, x_2(\cdot)) &= \int_0^T \theta(|\lambda\, x_1'(t) + (1-\lambda)\, x_2'(t)|)\ dt \\
&\leq \int_0^T \theta(\lambda\ |x_1'(t)| + (1-\lambda)\,|x_2'(t)|)\ dt \text{ (pois } |\cdot| \text{ é uma norma em } \mathbb{R}^n) \\
&\leq \int_0^T [\lambda\ \theta(|x_1'(t)|) + (1-\lambda)\,\theta(|x_2'(t)|)]\ dt \text{ (pois } \theta(\cdot) \text{ é convexa)} \\
&= \lambda \int_0^T \theta(|x_1'(t)|)\ dt + (1-\lambda) \int_0^T \theta(|x_2'(t)|)\ dt \\
&= \lambda\ \Lambda_\theta(x_1(\cdot)) + (1-\lambda)\ \Lambda_\theta(x_2(\cdot)),
\end{aligned}$$

o que significa que a função $\Lambda_\theta(\cdot)$ é convexa.

Finalmente, como $W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n)$ é um espaço localmente convexo pela proposição 9.6 e $\Lambda_\theta(\cdot)$ é sci na topologia forte de $W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n)$, então é sci na topologia fraca de $W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n)$, pela proposição 14.1. Assim

$$\Lambda_\theta(x(\cdot)) \leq \liminf_{k\to+\infty} \Lambda_\theta(x_k(\cdot)) = \liminf_{k\to+\infty} \int_0^T \theta(|x_k'(t)|)\ dt \leq \alpha,$$

pois $(x_k(\cdot)) \subset \Gamma_\theta(\overline{x}(\cdot))$.

Como $x(\cdot)$ é admissível para o problema $(\mathcal{P}_\theta(\alpha))$, resulta, pela proposição 14.2,

$$\Lambda(x(\cdot)) = \int_0^T L(t, x(t), x'(t))\, dt \leq \liminf_{k\to+\infty} \int_0^T L(t, x_k(t), x'_k(t))\, dt = \liminf_{k\to+\infty} \Lambda(x_k(\cdot)).$$

Logo

$$-\infty < i \leq \Lambda(x(\cdot)) \leq \liminf_{k\to+\infty} \Lambda(x_k(\cdot)) = \lim_{k\to+\infty} \Lambda(x_k(\cdot)) = i < +\infty.$$

E portanto,

$$-\infty < \Lambda(x(\cdot)) = i = V_\theta(\alpha) < +\infty,$$

isto é, $x(\cdot)$ é solução para o problema $(\mathcal{P}_\theta(\alpha))$. Juntando o facto de $(\mathcal{P}_\theta(\alpha))$ ter funções admissíveis para $\alpha$ suficientemente grande (já provámos), podemos afirmar que

$$V_\theta(\alpha) = \Lambda(x(\cdot)) = i$$

é finito para $\alpha$ suficientemente grande.

$(ii)$ **Sempre que $V_\theta(\alpha)$ é finito, o ínfimo definindo $V_\theta(\alpha)$ é atingido.**
Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$i = V_\theta(\alpha) = \inf\{\Lambda(x(\cdot)) : x \in AC_\theta^\alpha([0,T], \mathbb{R}^n) : (x(0), x(T)) \in C,\ x(t) \in \Omega\ \forall\, t \in [0,T],\ x'(t) \in K \text{ qs em } [0,T]\}$$

é finito.

Queremos mostrar que $V_\theta(\alpha)$ é atingido, isto é, que existe uma função $z(\cdot)$ que verifique

$$V_\theta(\alpha) = \Lambda(z(\cdot)) = i.$$

Aplicando novamente o método directo, de forma análoga à demonstração do ponto $(i)$ deste lema, vamos definir o conjunto

$$\begin{aligned} J_1 := \Big\{ & x \in AC([0,T], \mathbb{R}^n) : (x(0), x(T)) \in C,\ x(t) \in \Omega\ \forall\, t \in [0,T],\ x'(t) \in K \text{ qs}, \\ & \Lambda_\theta(x(\cdot)) = \textstyle\int_0^T \theta(|x'(t)|)\, dt \leq \alpha, \\ & \textstyle\int_0^T L(x(t), x'(t))\, dt = \Lambda(x(\cdot)) \leq i \Big\}. \end{aligned}$$

Analogamente à demonstração do ponto $(i)$, garantimos a existência de uma função $z(\cdot) \in J_1$ verificando

$$\Lambda(z(\cdot)) = V_\theta(\alpha) = i,$$

o que significa que $V_\theta(\alpha)$ é atingido.

$(iii)$ **A função $V_\theta(\cdot)$ é sci.**
Queremos mostrar que

$$V_\theta(\alpha) \leq \liminf_{k\to+\infty} V_\theta(\alpha_k),$$

para qualquer sucessão $(\alpha_k) \subset \mathbb{R}$ tal que $(\alpha_k) \to \alpha$, para qualquer $k \in \mathbb{N}$.
Seja $(\alpha_k) \subset \mathbb{R}$ uma qualquer sucessão tal que

$$(\alpha_k) \to \alpha,\ \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Se $V_\theta(\alpha_k) = +\infty$, para qualquer $k \in \mathbb{N}$ bastante grande, não há nada a provar. De facto isso é verdade pois se $V_\theta(\alpha_k) = +\infty$ então

$$\lim_{k\to+\infty} V_\theta(\alpha_k) = +\infty$$

e

$$V_\theta(\alpha) \le \liminf_{k\to+\infty} V_\theta(\alpha_k),$$

para qualquer $k \in \mathbb{N}$ bastante grande.

Suponhamos agora que $V_\theta(\alpha_k)$ é finito, para qualquer $k \in \mathbb{N}$ bastante grande. Então, pelo ponto $(ii)$ deste lema, o ínfimo definindo $V_\theta(\alpha_k)$ é atingido, o que significa que para qualquer $k \in \mathbb{N}$, o problema $(\mathcal{P}_\theta(\alpha_k))$ admite uma solução $(x_k(\cdot))$. Logo (por definição de $(\mathcal{P}_\theta(\alpha))$ e $V_\theta(\alpha)$)

$$(x_k(\cdot)) \subset AC_\theta^{\alpha_k}([0,T],\mathbb{R}^n),\ (x_k(0), x_k(T)) \subset C,\ (x_k(t)) \subset \Omega\ \forall\, t \in [0,T],\ (x_k'(t)) \subset K \text{ qs em } [0,T]$$

e

$$V_\theta(\alpha_k) = \Lambda(x_k(\cdot)), \tag{4.17}$$

para qualquer $k \in \mathbb{N}$.

Como $(\alpha_k)$ é uma sucessão convergente, para qualquer $k \in \mathbb{N}$, então é limitada, o que significa que

$$\exists\, B > 0 : |\alpha_k| \le B,\ \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Logo, pelo facto de $(x_k(\cdot)) \subset AC_\theta^{\alpha_k}([0,T],\mathbb{R}^n)$,

$$\Lambda_\theta(x_k(\cdot)) = \int_0^T \theta(|x_k'(t)|)\ dt \le \alpha_k \le B. \tag{4.18}$$

Seguidamente, vamos aplicar o método. Desta maneira, definimos o conjunto das funções competidoras :

$$\begin{aligned} J_2 \ := \ & \{x \in AC([0,T],\mathbb{R}^n) : (x(0), x(T)) \in C,\ x(t) \in \Omega\ \forall\, t \in [0,T],\ x'(t) \in K \text{ qs}, \\ & \Lambda_\theta(x(\cdot)) = \textstyle\int_0^T \theta(|x'(t)|)\ dt \le B, \\ & \textstyle\int_0^T L(x(t), x'(t))\ dt = \Lambda(x(\cdot)) \le \Lambda(\overline{x}(\cdot)) \in \mathbb{R}\Big\}. \end{aligned}$$

E analogamente à demonstração do ponto $(i)$ deste lema, concluimos que $(x_k(\cdot))$ tem uma subsucessão fracamente convergente para uma função $x(\cdot) \in W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n)$ verificando o seguinte :

$$(x(0), x(T)) \in C, \qquad x(t) \in \Omega\ \forall\, t \in [0,T], \qquad x'(t) \in K \text{ qs}.$$

Já provámos no ponto $(i)$ deste lema, que $\Lambda_\theta(\cdot)$ é sci na topologia fraca de $W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n)$. Logo

$$\Lambda_\theta(x(\cdot)) \le \liminf_{k\to+\infty} \Lambda_\theta(x_k(\cdot)) \le \liminf_{k\to+\infty} \alpha_k = \alpha$$

(por (4.18) e porque $\lim\limits_{k\to+\infty} \alpha_k = \alpha$), donde a função $x(\cdot)$ é admissível para o problema $(\mathcal{P}_\theta(\alpha))$.

Finalmente, e de forma análoga à demonstração do ponto $(i)$ deste lema, conclui-se que

$$\Lambda(x(\cdot)) \le \liminf_{k\to+\infty} \Lambda(x_k(\cdot)).$$

E portanto,

$$V_\theta(\alpha) \le \Lambda(x(\cdot)) \le \liminf_{k\to+\infty} \Lambda(x_k(\cdot)) = \liminf_{k\to+\infty} V_\theta(\alpha_k),$$

(pois $x(\cdot)$ é admissível para o problema $(\mathcal{P}_\theta(\alpha))$ e por (4.17)), isto é, $V_\theta(\cdot)$ é sci. ■

**Definição 4.2.** *Dizemos que $V_\theta(\cdot)$ é **finalmente constante** se*

$$\exists\, \alpha_0 \in \mathbb{R} : V_\theta(\alpha) = V_\theta(\alpha_0),\ \forall\, \alpha \ge \alpha_0.$$

*(Ver [10], p. 664.)*

**Lema 4.3.** *$(\mathcal{P}_\theta)$ tem solução se e só se $V_\theta(\cdot)$ é finalmente constante (4.19).*

**Demonstração:**
(i) Se $V_\theta(\cdot)$ é finalmente constante, então $(\mathcal{P}_\theta)$ tem solução.

Suponhamos primeiro que $V_\theta(\cdot)$ é finalmente constante, isto é,

$$\exists\ \alpha_0 : V_\theta(\alpha) = V_\theta(\alpha_0),\ \forall\ \alpha \geq \alpha_0. \tag{4.19}$$

Pelo lema 4.1, $V_\theta(\cdot)$ é finalmente finito (ou seja, para qualquer $\alpha$ suficientemente grande, $V_\theta(\alpha)$ é finito). Assim,

$$\exists\ \alpha_0 > 0 : V_\theta(\alpha_0) < +\infty, \text{ e } V_\theta(\alpha) = V_\theta(\alpha_0),\ \forall\ \alpha \geq \alpha_0. \tag{4.20}$$

Como $V_\theta(\alpha_0) < +\infty$, então, pelo lema 4.1, o ínfimo definindo $V_\theta(\alpha_0)$ é atingido nalgum ponto $x_0(\cdot)$. Logo $x_0(\cdot)$ é solução para $(\mathcal{P}_\theta(\alpha_0))$. Isto é,

$$V_\theta(\alpha_0) = \Lambda(x_0(\cdot)). \tag{4.21}$$

Agora vamos mostrar que $x_0(\cdot)$ é solução para $(\mathcal{P}_\theta)$. Suponhamos, com vista a um absurdo, que isto não acontece; então existe $x(\cdot) \in AC_\theta([0,T],\mathbb{R}^n)$ admissível para $(\mathcal{P}_\theta)$ e tal que

$$\Lambda(x(\cdot)) < \Lambda(x_0(\cdot)). \tag{4.22}$$

Escolhemos agora qualquer $\alpha > \alpha_0$ tal que

$$\Lambda_\theta(x(\cdot)) < \alpha,$$

pois $\Lambda_\theta(x(\cdot)) < +\infty$ (pelo facto de $x(\cdot) \in AC_\theta([0,T],\mathbb{R}^n)$). Consequentemente, por definição de $V_\theta(\alpha)$, vem

$$V_\theta(\alpha) \leq \Lambda(x(\cdot)). \tag{4.23}$$

Então, juntando (4.21), (4.22) e (4.23), resulta

$$V_\theta(\alpha) \leq \Lambda(x(\cdot)) < \Lambda(x_0(\cdot)) = V_\theta(\alpha_0).$$

Logo,

$$V_\theta(\alpha) < V_\theta(\alpha_0),$$

o que contradiz (4.20). E portanto $x_0(\cdot)$ é solução para $(\mathcal{P}_\theta)$. Isto é, $(\mathcal{P}_\theta)$ tem solução, como queríamos demonstrar.

(ii) Se $(\mathcal{P}_\theta)$ tem solução, então $V_\theta(\cdot)$ é finalmente constante.

Suponhamos que $(\mathcal{P}_\theta)$ tem solução. Seja $x_0(\cdot)$ uma solução para $(\mathcal{P}_\theta)$. Isto é, $x_0(\cdot) \in AC_\theta([0,T],\mathbb{R}^n)$ é admissível para $(\mathcal{P}_\theta)$ e tal que

$$\Lambda(x_0(\cdot)) \leq \Lambda(x(\cdot)),\ \forall\ x(\cdot) \in AC_\theta([0,T],\mathbb{R}^n) \text{ admissível para } (\mathcal{P}_\theta). \tag{4.24}$$

Seja $\alpha_0$ suficientemente grande tal que

$$V_\theta(\alpha_0) \in \mathbb{R}$$

e

$$\Lambda_\theta(x_0(\cdot)) \leq \alpha_0.$$

Então, pelo lema 4.1, o ínfimo definindo $V_\theta(\alpha_0)$ é atingido nalgum ponto $\overline{x}(\cdot)$, isto é,

$$V_\theta(\alpha_0) = \Lambda(\overline{x}(\cdot)), \tag{4.25}$$

com $\overline{x}(\cdot) \in AC_\theta^{\alpha_0}([0,T],\mathbb{R}^n)$ admissível para $(\mathcal{P}_\theta(\alpha_0))$ e tal que

$$\Lambda(\overline{x}(\cdot)) \leq \Lambda(x(\cdot)),\ \forall\ x(\cdot) \in AC_\theta^{\alpha_0}([0,T],\mathbb{R}^n) \text{ admissível para } (\mathcal{P}_\theta(\alpha_0)). \tag{4.26}$$

Como $x_0(\cdot)$ é admissível para $(\mathcal{P}_\theta(\alpha_0))$, então, por (4.26),

$$\Lambda(\overline{x}(\cdot)) \leq \Lambda(x_0(\cdot)). \tag{4.27}$$

E como $\overline{x}(\cdot)$ é admissível para $(\mathcal{P}_\theta)$, de (4.24), resulta

$$\Lambda(x_0(\cdot)) \leq \Lambda(\overline{x}(\cdot)). \tag{4.28}$$

Logo, juntando (4.25), (4.27) e (4.28), vem

$$V_\theta(\alpha_0) = \Lambda(\overline{x}(\cdot)) = \Lambda(x_0(\cdot)). \tag{4.29}$$

Seja agora $\alpha \geq \alpha_0$ qualquer. Como $V_\theta(\cdot)$ é decrescente temos

$$V_\theta(\alpha) \leq V_\theta(\alpha_0)$$

(com $V_\theta(\alpha_0) \in \mathbb{R}$). Donde

$$V_\theta(\alpha) \in \mathbb{R}.$$

Então, (analogamente ao que foi feito para $\alpha_0$) pelo lema 4.1, o ínfimo definindo $V_\theta(\alpha)$ é atingido nalgum ponto $\overline{\overline{x}}(\cdot)$, isto é,

$$V_\theta(\alpha) = \Lambda\left(\overline{\overline{x}}(\cdot)\right), \tag{4.30}$$

com $\overline{\overline{x}}(\cdot) \in AC_\theta^\alpha([0,T], \mathbb{R}^n)$ admissível para $(\mathcal{P}_\theta(\alpha))$ e tal que

$$\Lambda\left(\overline{\overline{x}}(\cdot)\right) \leq \Lambda(x(\cdot)), \; \forall\, x(\cdot) \in AC_\theta^\alpha([0,T], \mathbb{R}^n) \text{ admissível para } (\mathcal{P}_\theta(\alpha)). \tag{4.31}$$

Como $x_0(\cdot)$ é admissível para $(\mathcal{P}_\theta(\alpha))$ (pois

$$\Lambda_\theta(x_0(\cdot)) \leq \alpha_0 \leq \alpha),$$

então, por (4.31),

$$\Lambda\left(\overline{\overline{x}}(\cdot)\right) \leq \Lambda(x_0(\cdot)). \tag{4.32}$$

E como $\overline{\overline{x}}(\cdot)$ é admissível para $(\mathcal{P}_\theta)$, de (4.24), resulta

$$\Lambda(x_0(\cdot)) \leq \Lambda\left(\overline{\overline{x}}(\cdot)\right). \tag{4.33}$$

Logo, juntando (4.30), (4.32) e (4.33), vem

$$V_\theta(\alpha) = \Lambda\left(\overline{\overline{x}}(\cdot)\right) = \Lambda(x_0(\cdot)). \tag{4.34}$$

Finalmente, por (4.29) e (4.34), temos

$$\exists\, \alpha_0 : V_\theta(\alpha) = \Lambda\left(\overline{\overline{x}}(\cdot)\right) = \Lambda(x_0(\cdot)) = \Lambda(\overline{x}(\cdot)) = V_\theta(\alpha_0), \; \forall\, \alpha \geq \alpha_0.$$

E portanto, $V_\theta(\cdot)$ é finalmente constante. ■

**Lema 4.4.** *$V_\theta(\cdot)$ é finalmente constante.*

**Demonstração:**

Queremos mostrar que $V_\theta(\cdot)$ é finalmente constante, isto é, que $V_\theta(\cdot)$ é constante a partir de certa altura. Então pela proposição 3.1, basta mostrar que, para $\alpha$ suficientemente grande, sempre que $\zeta$ é um subgradiente proximal de $V_\theta(\cdot)$ em $\alpha \in \mathbb{R}$, temos $\zeta = 0$. Suponhamos, com vista a um absurdo, que $\zeta \neq 0$ é um subgradiente proximal de $V_\theta(\cdot)$ em $\alpha \in \mathbb{R}$ suficientemente grande.

Comecemos por mostrar que $V_\theta(\cdot)$ é decrescente. Isto é, sejam $\alpha_1$, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha_1 < \alpha_2$. Então, $\Lambda_\theta(x(\cdot)) \leq \alpha_1 < \alpha_2$, logo $AC_\theta^{\alpha_1}([0,T], \mathbb{R}^n) \subseteq AC_\theta^{\alpha_2}([0,T], \mathbb{R}^n)$. E portanto, $V_\theta(\alpha_1) \geq V_\theta(\alpha_2)$.

Como $\zeta \neq 0$ é um subgradiente proximal de $V_\theta : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ em $\alpha \in \mathbb{R}$, pela proposição 23.11, existem $\sigma > 0$ e $\delta > 0$ tais que

$$\zeta(\beta - \alpha) \leq V_\theta(\beta) - V_\theta(\alpha) + \sigma|\beta - \alpha|^2, \forall \beta \in \alpha + \delta B. \tag{4.35}$$

Suponhamos, com vista a um absurdo, que $\zeta > 0$ e $\beta < \alpha$, então da desigualdade (4.35) temos

$$\begin{aligned} \zeta &\leq \frac{V_\theta(\beta) - V_\theta(\alpha)}{\beta - \alpha} + \sigma\frac{|\beta - \alpha|^2}{\beta - \alpha} = \\ &= \frac{V_\theta(\beta) - V_\theta(\alpha)}{\beta - \alpha} + \sigma|\beta - \alpha|. \end{aligned}$$

Desta maneira

$$0 < \zeta \leq \frac{V_\theta(\beta) - V_\theta(\alpha)}{\beta - \alpha} + \sigma|\beta - \alpha|.$$

Então

$$\begin{aligned} 0 &< \limsup_{\beta\to\alpha}\left(\frac{V_\theta(\beta) - V_\theta(\alpha)}{\beta - \alpha} + \sigma|\beta - \alpha|\right) \\ &\leq \limsup_{\beta\to\alpha}\frac{V_\theta(\beta) - V_\theta(\alpha)}{\beta - \alpha} + \limsup_{\beta\to\alpha}\sigma|\beta - \alpha|. \end{aligned}$$

Donde

$$0 < \limsup_{\beta\to\alpha}\frac{V_\theta(\beta) - V_\theta(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

Isto é, existe $\beta > \alpha$ suficientemente próximo de $\alpha$ tal que

$$\frac{V_\theta(\beta) - V_\theta(\alpha)}{\beta - \alpha} > 0.$$

Logo, como $\beta - \alpha > 0$, temos que

$$V_\theta(\beta) - V_\theta(\alpha) > 0 \Leftrightarrow V_\theta(\beta) > V_\theta(\alpha).$$

Obtemos assim uma contradição, pois $V_\theta(\cdot)$ é decrescente. Então, $\zeta \leq 0$. E portanto, $\zeta < 0$ (pois suposemos $\zeta \neq 0$). Seja então $\zeta = -r$, onde $r > 0$.

Seja agora $z(\cdot)$ uma solução de $(\mathcal{P}_\theta(\alpha))$ (a qual existe pelo lema 4.1, pois $V_\theta(\alpha)$ é finito), então $V_\theta(\alpha) = \Lambda(z(\cdot))$ e $\Lambda_\theta(z(\cdot)) \leq \alpha$, pois $z(\cdot) \in AC_\theta^\alpha([0,T], \mathbb{R}^n)$. Vamos exigir que a igualdade aconteça nesta última desigualdade. (Para termos a igualdade, também, temos de ter $\Lambda_\theta(z(\cdot)) \geq \alpha$.) Suponhamos que não. Então $\Lambda_\theta(z(\cdot)) < \alpha$, e para qualquer $\alpha' : \Lambda_\theta(z(\cdot)) < \alpha' < \alpha$ vem

$$V_\theta(\alpha') \leq \Lambda(z(\cdot)) = V_\theta(\alpha) \leq V_\theta(\alpha'), \tag{4.36}$$

porque :

$$\alpha' < \alpha \Rightarrow V_\theta(\alpha') \geq V_\theta(\alpha), \text{ pois } V_\theta(\cdot) \text{ é decrescente;}$$

$$\Lambda_\theta(z(\cdot)) < \alpha' \Rightarrow z(\cdot) \in AC_\theta^{\alpha'}([0,T], \mathbb{R}^n) \Rightarrow V_\theta(\alpha') \leq \Lambda(z(\cdot)) = V_\theta(\alpha),$$

pois $z(\cdot)$ é admissível para $(P_\theta(\alpha'))$.

De (4.36), temos

$$V_\theta(\alpha') = \Lambda(z(\cdot)) = V_\theta(\alpha),$$

e segue que $V_\theta(\cdot)$ é constante em $(\Lambda_\theta(z(\cdot)), \alpha]$. Pela desigualdade (4.35), para cada $\alpha' \in (\Lambda_\theta(z(\cdot)), \alpha] \cap (\alpha + \delta B)$ e $\zeta = -r$, $r > 0$, temos $\alpha' < \alpha$ e

$$\begin{aligned} -r(\alpha' - \alpha) &\leq V_\theta(\alpha') - V_\theta(\alpha) + \sigma|\alpha' - \alpha|^2 \Leftrightarrow -r(\alpha' - \alpha) \leq \sigma|\alpha' - \alpha|^2 \\ &\Leftrightarrow r \leq \sigma\frac{|\alpha' - \alpha|^2}{\alpha - \alpha'} = \sigma|\alpha' - \alpha|. \end{aligned}$$

Logo,

$$0 < r \leq 0,$$

o que é absurdo, pois assim viria $r = 0 = \zeta$, contrariando o facto de $\zeta = -r$, onde $r > 0$. Desta maneira, temos de ter $\Lambda_\theta(z(\cdot)) \geq \alpha$, e consequentemente, $\Lambda_\theta(z(\cdot)) = \alpha$.

A desigualdade do subgradiente proximal (4.35), com $\zeta = -r$, $r > 0$, $\beta = \alpha'$ diz que para algum $\sigma > 0$, para algum $\delta > 0$, e para qualquer $\alpha'$ tal que $|\alpha' - \alpha| < \delta$, temos

$$V_\theta(\alpha') - V_\theta(\alpha) + \sigma|\alpha' - \alpha|^2 \geq -r(\alpha' - \alpha).$$

Como $V_\theta(\alpha) = \Lambda(z(\cdot))$, $\Lambda_\theta(z(\cdot)) = \alpha$, a desigualdade anterior fica

$$V_\theta(\alpha') - \Lambda(z(\cdot)) + \sigma|\alpha' - \Lambda_\theta(z(\cdot))|^2 \geq -r(\alpha' - \Lambda_\theta(z(\cdot))),\ \forall\ \alpha' : |\alpha' - \Lambda_\theta(z(\cdot))| < \delta,$$

para algum $\sigma > 0$ e algum $\delta > 0$. Seja $x(\cdot)$ uma função admissível para $(\mathcal{P}_\theta)$ tal que $|\Lambda_\theta(x(\cdot)) - \Lambda_\theta(z(\cdot))| < \delta$. Então, fazendo $\alpha' = \Lambda_\theta(x(\cdot))$ na desigualdade anterior vem

$$V_\theta(\Lambda_\theta(x(\cdot))) - \Lambda(z(\cdot)) + \sigma|\Lambda_\theta(x(\cdot)) - \Lambda_\theta(z(\cdot))|^2 \geq -r(\Lambda_\theta(x(\cdot)) - \Lambda_\theta(z(\cdot))), \tag{4.37}$$

para algum $\sigma > 0$, para algum $\delta > 0$. Como $V_\theta(\alpha') \leq \Lambda(x(\cdot))$, pois $x(\cdot)$ admissível para o problema $(\mathcal{P}_\theta(\Lambda_\theta(x(\cdot))))$, de (4.37) temos, para algum $\sigma > 0$,

$$\begin{aligned} -r(\Lambda_\theta(x(\cdot)) - \Lambda_\theta(z(\cdot))) &\leq V_\theta(\Lambda_\theta(x(\cdot))) - \Lambda(z(\cdot)) + \sigma|\Lambda_\theta(x(\cdot)) - \Lambda_\theta(z(\cdot))|^2 \\ &\leq \Lambda(x(\cdot)) - \Lambda(z(\cdot)) + \sigma|\Lambda_\theta(x(\cdot)) - \Lambda_\theta(z(\cdot))|^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\Lambda(x(\cdot)) + r\Lambda_\theta(x(\cdot)) + \sigma|\Lambda_\theta(x(\cdot)) - \Lambda_\theta(z(\cdot))|^2 \geq \Lambda(z(\cdot)) + r\Lambda_\theta(z(\cdot)), \tag{4.38}$$

para algum $\sigma > 0$.

Vejamos agora se estamos em condições de aplicar o teorema 2.1. Por hipótese, $L : \Omega \times \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ é um lagrangiano que satisfaz o seguinte :

$(i)$ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (ver (1.2)) é fechado;

$(ii)$ $C \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ é fechado e é um conjunto compacto pelo menos uma das projecções

$$C_x := \{x \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in C \text{ para algum } y \in \mathbb{R}^n\},$$

$$C_y := \{y \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in C \text{ para algum } x \in \mathbb{R}^n\};$$

$(iii)$ $K \subset \mathbb{R}^n$ é um cone convexo fechado;

$(iv)$ a função $(s, v) \mapsto L(s, v)$ é sci;

$(v)$ para cada $s \in \Omega$ :

  $(v_1)$ a função $L(s, \cdot)$ é convexa;

  $(v_2)$ o domínio *dom* $L(s, \cdot)$ é um conjunto aberto, convexo e não-vazio;

$(vi)$ existe uma função $l(\cdot)$ localmente limitada inferiormente tal que

$$L(s, v) \geq l(s) \qquad \forall\ s \in \Omega \qquad \forall\ v;$$

$(vii)$ existe uma função lipschitziana $\overline{x}(\cdot) \in X$ para a qual $\Lambda(\overline{x}(\cdot))$ é finito (ver $(\mathcal{P})$).

Pela hipótese básica $(vii)$ há-de existir uma função lipschitziana $\overline{x}(\cdot) \in X$ para a qual $\Lambda(\overline{x}(\cdot)) \leq \alpha$. Logo, $\overline{x}(\cdot)$ é admissível para $(\mathcal{P}_\theta(\alpha))$. E como $z(\cdot)$ é solução de $(\mathcal{P}_\theta(\alpha))$, então

$$\Lambda(z(\cdot)) \leq \Lambda(y(\cdot)),\ \forall\ y(\cdot) \text{ admissível para } (\mathcal{P}_\theta(\alpha)),\ \text{e } z(\cdot) \in AC_\theta^\alpha([0, T], \mathbb{R}^n). \tag{4.39}$$

Em particular,

$$\Lambda(z(\cdot)) \leq \Lambda(\overline{x}(\cdot)).$$

Logo, $z(\cdot) \in \Gamma_\theta(\overline{x}(\cdot)) := \Gamma(\overline{x}(\cdot)) \cap AC_\theta([0,T], \mathbb{R}^n)$. Além disso, como $x(\cdot)$ é admissível para $(\mathcal{P}_\theta(\Lambda_\theta(x(\cdot))))$, então $x(\cdot)$ é admissível para o problema $(\mathcal{P})$. Assim, por (4.38), vem

$$f(x(\cdot)) \geq f(z(\cdot)),$$

para $z(\cdot) \in \Gamma_\theta(\overline{x}(\cdot))$, e para qualquer função $x(\cdot) \in AC_\theta([0,T], \mathbb{R}^n)$ admissível para $(\mathcal{P})$ tal que $\Lambda_\theta(x(\cdot))$ está suficientemente próximo de $\Lambda_\theta(z(\cdot))$.

Estamos então em condições de aplicar o teorema 2.1, o qual garante a existência de uma função integrável $\xi(\cdot)$ tal que

$$\xi(t) \in \partial_t L(z(t), z'(t)) \text{ qs em } [0,T],$$

e a existência de uma constante $c$ e uma função mensurável $p(\cdot)$ com

$$p(t) \in \partial_v L(z(t), z'(t)) \text{ qs em } [0,T],$$

tais que

$$L(z(t), z'(t)) - \langle z'(t), p(t)\rangle + r\,\theta(|z'(t)|) - r\,|z'(t)|\,\theta'(|z'(t)|) = c + \int_0^t \xi(\tau)\,d\tau \text{ qs em } [0,T].$$

Como $L(\cdot)$ não depende explicitamente de $t$, vem

$$L(z(t), z'(t)) - \langle z'(t), p(t)\rangle + r\,\theta(|z'(t)|) - r\,|z'(t)|\,\theta'(|z'(t)|) = c \text{ qs em } [0,T], \tag{4.40}$$

para alguma constante $c$ e alguma função mensurável $p(\cdot)$ com

$$p(t) \in \partial_v L(z(t), z'(t)) \text{ qs em } [0,T].$$

Mostremos agora que

$$\sup_{0\leq t\leq T} ess\,|z'(t)| > \beta,$$

onde $\beta$ é qualquer número menor que $\theta^{-1}(\alpha/T)$.

Note-se que também temos (de (4.39))

$$\Lambda(z(\cdot)) \leq \Lambda(x(\cdot)),\ \forall\ x(\cdot) \text{ admissível para } (\mathcal{P}_\theta).$$

E como $z(\cdot)$ é solução para $(\mathcal{P}_\theta(\alpha))$, então $z(\cdot)$ é admissível para $(\mathcal{P}_\theta)$. Logo, $z(\cdot)$ é solução para $(\mathcal{P}_\theta)$. Assim (analogamente à demonstração da parte 2 do teorema 4.5)

$$z'(\cdot) \in L^\infty([0,T], \mathbb{R}^n).$$

Consequentemente, pela proposição 13.28,

$$\sup_{0\leq t\leq T} ess\,|z'(t)| = |z'(\cdot)|_{L^\infty([0,T],\mathbb{R}^n)} \geq |z'(t)| \text{ qs em } [0,T].$$

Como $\theta(\cdot)$ é uma função estritamente crescente, vem

$$\theta\left(\sup_{0\leq t\leq T} ess\,|z'(t)|\right) \geq \theta(|z'(t)|) \text{ qs em } [0,T].$$

Além disso, existem os integrais $\int_0^T \theta\left(\sup_{0\leq t\leq T} ess\,|z'(t)|\right)\,dt$ e $\int_0^T \theta(|z'(t)|)\,dt$ (o primeiro existe pois $\theta\left(\sup_{0\leq t\leq T} ess\,|z'(t)|\right)$ é uma constante e o segundo existe pela demonstração do teorema 2.1). Então, pelo lema 11.12,

$$T\,\theta\left(\sup_{0\leq t\leq T} ess\,|z'(t)|\right) = \int_0^T \theta\left(\sup_{0\leq t\leq T} ess\,|z'(t)|\right)\,dt \geq \int_0^T \theta(|z'(t)|)\,dt = \Lambda_\theta(z(\cdot)) = \alpha.$$

Donde,

$$\theta\left(\sup_{0\leq t\leq T} ess\,|z'(t)|\right) \geq \frac{\alpha}{T}.$$

E como, por hipótese, $\theta(\cdot) \in C^1([0,+\infty),\mathbb{R})$ e é estritamente crescente, segue do teorema 16.8 que

$$\sup_{0\leq t\leq T} ess\,|z'(t)| \geq \theta^{-1}\left(\frac{\alpha}{T}\right).$$

Logo,

$$\sup_{0\leq t\leq T} ess\,|z'(t)| > \beta,\ \forall\,\beta : \beta < \theta^{-1}\left(\frac{\alpha}{T}\right).$$

Note-se que devido a $\theta^{-1}(\alpha/T)$ tender para $+\infty$ quando $\alpha$ tende para $+\infty$, podemos tomar $\beta$ arbitrariamente grande fazendo $\alpha$ suficientemente grande.

Como

$$\sup_{0\leq t\leq T} ess\,|z'(t)| > \beta,$$

isto é,

$$\inf\{c\in\mathbb{R} : |z'(t)| \leq c \text{ qs em } [0,T]\} > \beta,$$

então

$$\exists\, I_1 \subset [0,T] \text{ com } \mu(I_1) > 0 : |z'(t)| > \beta,\ \forall\, t\in I_1.$$

Logo, de (4.40) para algum $s_1\in\Omega$, para algum $v_1\in K$ com $|v_1| > \beta$, e para algum $p_1 \in \partial_v L(s_1,v_1)$, vem

$$L(s_1,v_1) - \langle v_1,p_1\rangle + r\ \left[\theta(|v_1|) - |v_1|\ \theta'(|v_1|)\right] = c.$$

Desta igualdade temos

$$\begin{aligned} c &= L(s_1,v_1) - \langle v_1,p_1\rangle + r\ \left[\theta(|v_1|) - |v_1|\ \theta'(|v_1|)\right] \qquad (4.41)\\ &\leq \sup_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K,|v|>\beta}} \{L(s,v) - \langle v,\partial_v L(s,v)\rangle\} + r \sup_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K,|v|>\beta}} \{\ \theta(|v|) - |v|\ \theta'(|v|)\}. \end{aligned}$$

Como $z(\cdot)\in\Gamma(\overline{x}(\cdot))$ e vale a hipótese extra $(HE_1)$, temos que existe $k>0$ tal que

$$\inf_{0\leq t\leq T} ess\,|z'(t)| < k,$$

isto é,

$$\sup\{c\in\mathbb{R} : |z'(t)| \geq c \text{ qs em } [0,T]\} < k.$$

Desta maneira,

$$\exists\, I_2 \subset [0,T] \text{ com } \mu(I_2) > 0 : |z'(t)| < k,\ \forall\, t\in I_2.$$

Logo, de (4.40) para algum $s_2\in\Omega$, para algum $v_2\in K$ com $|v_2| < k$, e para algum $p_2 \in \partial_v L(s_2,v_2)$, vem

$$L(s_2,v_2) - \langle v_2,p_2\rangle + r\ \left[\theta(|v_2|) - |v_2|\ \theta'(|v_2|)\right] = c.$$

Desta igualdade temos

$$
\begin{aligned}
c &= L(s_2, v_2) - \langle v_2, p_2 \rangle + r \left[\theta(|v_2|) - |v_2| \; \theta'(|v_2|)\right] \\
&\geq \inf_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K, |v|<k}} \{L(s,v) - \langle v, \partial_v L(s,v)\rangle\} + r \inf_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K, |v|<k}} \{\theta(|v|) - |v| \; \theta'(|v|)\}.
\end{aligned} \tag{4.42}
$$

Juntando (4.41) e (4.42) resulta que

$$
\begin{aligned}
& r \left[ \inf_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K, |v|<k}} \{\theta(|v|) - |v| \; \theta'(|v|)\} - \sup_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K, |v|>\beta}} \{\theta(|v|) - |v| \; \theta'(|v|)\} \right] \\
\leq & \sup_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K, |v|>\beta}} \{L(s,v) - \langle v, \partial_v L(s,v)\rangle\} - \inf_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K, |v|<k}} \{L(s,v) - \langle v, \partial_v L(s,v)\rangle\}.
\end{aligned} \tag{4.43}
$$

Para $\alpha$, e consequentemente $\beta$, suficientemente grandes, o lado direito da desigualdade (4.43) é negativo. De facto, como vale a hipótese $(HE_2)$ e fazendo $\beta \longrightarrow +\infty$, no lado direito da desigualdade (4.43), vem

$$
\begin{aligned}
& \lim_{\beta\longrightarrow+\infty} \left[ \sup_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K, |v|>\beta}} \{L(s,v) - \langle v, \partial_v L(s,v)\rangle\} - \inf_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K, |v|<k}} \{L(s,v) - \langle v, \partial_v L(s,v)\rangle\} \right] \\
< & \inf_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K, |v|<k}} \{L(s,v) - \langle v, \partial_v L(s,v)\rangle\} - \inf_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K, |v|<k}} \{L(s,v) - \langle v, \partial_v L(s,v)\rangle\} = 0.
\end{aligned} \tag{4.44}
$$

Por outro lado, para $\alpha$, e consequentemente $\beta$, suficientemente grandes, o termo dentro do parêntesis do lado esquerdo é positivo. De facto, fazendo $\beta \longrightarrow +\infty$, e como $k > 0$, então pelo lema 4.7 (aplicado a $\theta(\cdot)$)

$$
\begin{aligned}
& \lim_{\beta\longrightarrow+\infty} \left[ \inf_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K, |v|<k}} \{\theta(|v|) - |v| \; \theta'(|v|)\} - \sup_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K, |v|>\beta}} \{\theta(|v|) - |v| \; \theta'(|v|)\} \right] \\
> & \inf_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K, |v|<k}} \{\theta(|v|) - |v| \; \theta'(|v|)\} - \inf_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K, |v|<k}} \{\theta(|v|) - |v| \; \theta'(|v|)\} = 0.
\end{aligned} \tag{4.45}
$$

De (4.43), (4.44) e (4.45), segue que $r$ é negativo, o que contradiz o facto de termos suposto $r > 0$. Logo, não podemos ter $\zeta \neq 0$, mas sim $\zeta = 0$. E portanto, $V_\theta(\cdot)$ é finalmente constante. ■

### 4.5. O teorema 2 do artigo: enunciado e demonstração

**Teorema 4.5.** *Suponhamos a validade das hipóteses básicas e as hipóteses extra* $(HE_1)$ *e* $(HE_2)$. *Então o problema* $(\mathcal{P})$ *tem solução e, além disso, qualquer solução* $x(\cdot)$ *é lipschitziana e satisfaz*

$$L(x(t), x'(t)) - \langle x'(t), p(t)\rangle = c \text{ qs em } [0,T], \tag{4.46}$$

*onde* $c$ *é uma constante e* $p(\cdot)$ *é uma função mensurável tal que*

$$p(t) \in \partial_v L(x(t), x'(t)) \text{ qs em } [0,T].$$

**Demonstração:**

**(Parte 1 da demonstração do teorema 4.5 : como $V_\theta(\cdot)$ é finalmente constante, então o problema $(\mathcal{P}_\theta)$ admite uma solução $z(\cdot)$ que satisfaz a equação do enunciado do teorema 4.5)**

$V_\theta(\cdot)$ é finalmente constante, pelo lema 4.4, e que para $\alpha$ suficientemente grande, $V_\theta(\alpha)$ é finito, pelo lema 4.1 $(i)$. Desta maneira, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ suficientemente grande para o qual

$$V_\theta(\alpha) \text{ é finito e } V_\theta(\overline{\alpha}) = V_\theta(\alpha), \ \forall\, \overline{\alpha} \geq \alpha. \tag{4.47}$$

Seja $z(\cdot)$ uma solução de $(\mathcal{P}_\theta(\alpha))$ (a qual existe pelo lema 4.1 $(ii)$). Então,

$$\Lambda(z(\cdot)) \leq \Lambda(x(\cdot)), \ \forall\, x(\cdot) \text{ admissível para } (\mathcal{P}_\theta(\alpha)),$$

$$V_\theta(\alpha) = \Lambda(z(\cdot)) \text{ e } \Lambda_\theta(z(\cdot)) \leq \alpha. \tag{4.48}$$

Vamos mostrar que

$$V_\theta(\alpha) = \Lambda(z(\cdot)) = V_\theta(\Lambda_\theta(z(\cdot))). \tag{4.49}$$

Se $\Lambda_\theta(z(\cdot)) = \alpha$, temos (4.49). Suponhamos agora que $\Lambda_\theta(z(\cdot)) < \alpha$. A função $z(\cdot)$ é admissível para $(\mathcal{P}_\theta(\Lambda_\theta(z(\cdot))))$. Seja $z_1(\cdot)$ uma qualquer outra função admissível para $(\mathcal{P}_\theta(\Lambda_\theta(z(\cdot))))$. Logo,

$$\Lambda_\theta(z_1(\cdot)) \leq \Lambda_\theta(z(\cdot)) < \alpha,$$

e portanto, $z_1(\cdot)$ também é admissível para o problema $(\mathcal{P}_\theta(\alpha))$. Então

$$\Lambda(z(\cdot)) \leq \Lambda(z_1(\cdot)).$$

Logo, $z(\cdot)$ é solução de $(\mathcal{P}_\theta(\Lambda_\theta(z(\cdot))))$. E resulta

$$V_\theta(\Lambda_\theta(z(\cdot))) = \Lambda(z(\cdot)). \tag{4.50}$$

Juntando (4.48) e (4.50), obtemos (4.49).

De (4.47), (4.48) e (4.49), temos

$$0 = V_\theta(\overline{\alpha}) - V_\theta(\alpha) = V_\theta(\overline{\alpha}) - V_\theta(\Lambda_\theta(z(\cdot))), \ \forall\, \overline{\alpha} \geq \Lambda_\theta(z(\cdot)),$$

isto é

$$V_\theta(\overline{\alpha}) - V_\theta(\Lambda_\theta(z(\cdot))) \geq 0, \ \forall\, \overline{\alpha} \geq \Lambda_\theta(z(\cdot)).$$

Quando $\overline{\alpha} < \Lambda_\theta(z(\cdot))$ e pelo facto de $V_\theta(\cdot)$ ser decrescente vem $V_\theta(\overline{\alpha}) \geq V_\theta(\Lambda_\theta(z(\cdot)))$, ou seja

$$V_\theta(\overline{\alpha}) - V_\theta(\Lambda_\theta(z(\cdot))) \geq 0, \ \forall\, \overline{\alpha} < \Lambda_\theta(z(\cdot)).$$

Em particular, temos

$$V_\theta(\overline{\alpha}) - V_\theta(\Lambda_\theta(z(\cdot))) \geq 0, \ \forall\, \overline{\alpha} \in \Lambda_\theta(z(\cdot)) + \delta B,$$

para algum $\delta > 0$. Então

$$V_\theta(\overline{\alpha}) - V_\theta(\Lambda_\theta(z(\cdot))) + \sigma|\overline{\alpha} - \Lambda_\theta(z(\cdot))|^2 \geq 0, \ \forall\, \overline{\alpha} \in \Lambda_\theta(z(\cdot)) + \delta B, \tag{4.51}$$

para algum $\sigma > 0$, para o $\delta > 0$ referido.

Por (4.49), $V_\theta(\Lambda_\theta(z(\cdot))) = \Lambda(z(\cdot))$, então substituindo em (4.51), vem

$$V_\theta(\overline{\alpha}) - \Lambda(z(\cdot)) + \sigma|\overline{\alpha} - \Lambda_\theta(z(\cdot))|^2 \geq 0, \ \forall\, \overline{\alpha} \in \Lambda_\theta(z(\cdot)) + \delta B, \tag{4.52}$$

para algum $\sigma > 0$, para algum $\delta > 0$.

Seja $x(\cdot)$ uma função admissível para $(\mathcal{P}_\theta)$ tal que $\Lambda_\theta(x(\cdot)) \in \Lambda_\theta(z(\cdot)) + \delta B$, para algum $\delta > 0$. Logo, por (4.52), temos

$$V_\theta(\Lambda_\theta(x(\cdot))) - \Lambda(z(\cdot)) + \sigma|\Lambda_\theta(x(\cdot)) - \Lambda_\theta(z(\cdot))|^2 \geq 0, \text{ com } \Lambda_\theta(x(\cdot)) \in \Lambda_\theta(z(\cdot)) + \delta B, \tag{4.53}$$

para algum $\sigma > 0$, para algum $\delta > 0$. Como $V_\theta(\Lambda_\theta(x(\cdot))) \leq \Lambda(x(\cdot))$ (porque $x(\cdot)$ é admissível para $(\mathcal{P}_\theta(\Lambda_\theta(z(\cdot))))$), de (4.53), resulta

$$\Lambda(x(\cdot)) - \Lambda(z(\cdot)) + \sigma|\Lambda_\theta(x(\cdot)) - \Lambda_\theta(z(\cdot))|^2 \geq 0, \text{ com } \Lambda_\theta(x(\cdot)) \in \Lambda_\theta(z(\cdot)) + \delta B,$$

para algum $\sigma > 0$, para algum $\delta > 0$. Ou seja,

$$\Lambda(x(\cdot)) + \sigma|\Lambda_\theta(x(\cdot)) - \Lambda_\theta(z(\cdot))|^2 \geq \Lambda(z(\cdot)), \text{ com } \Lambda_\theta(x(\cdot)) \in \Lambda_\theta(z(\cdot)) + \delta B,$$

para algum $\sigma > 0$, para algum $\delta > 0$.

Assim,

$$f(x(\cdot)) \geq f(z(\cdot)), \text{ quando } r = 0,$$

para qualquer função $x(\cdot)$ admissível para $(\mathcal{P}_\theta)$ e tal que $\Lambda_\theta(x(\cdot))$ está suficientemente próximo de $\Lambda_\theta(z(\cdot))$. Pela hipótese básica $(vii)$ existe pelo menos uma função lipschitziana $\overline{x}(\cdot) \in X$ para a qual $\Lambda(\overline{x}(\cdot))$ é finito, então, também, há-de existir uma função lipschitziana $\overline{x}(\cdot) \in X$ para a qual $\Lambda(\overline{x}(\cdot)) \leq \alpha$. Logo, $\overline{x}(\cdot)$ é admissível para $(\mathcal{P}_\theta(\alpha))$. E como $z(\cdot)$ é solução de $(\mathcal{P}_\theta(\alpha))$, então

$$\Lambda(z(\cdot)) \leq \Lambda(x(\cdot)), \forall\, x(\cdot) \text{ admissível para } (\mathcal{P}_\theta(\alpha)), \text{ e } z(\cdot) \in AC_\theta^\alpha([0,T], \mathbb{R}^n).$$

Em particular,

$$\Lambda(z(\cdot)) \leq \Lambda(\overline{x}(\cdot)).$$

Logo, $z(\cdot) \in \Gamma_\theta(\overline{x}(\cdot)) := \Gamma(\overline{x}(\cdot)) \cap AC_\theta$. Além disso, como $x(\cdot)$ é admissível para $(\mathcal{P}_\theta)$, então $x(\cdot)$ é admissível para o problema $(\mathcal{P})$. E portanto, para $z(\cdot) \in \Gamma_\theta(\overline{x}(\cdot))$,

$$f(x(\cdot)) \geq f(z(\cdot)), \text{ quando } r = 0,$$

para qualquer função $x(\cdot)$ admissível para $(\mathcal{P})$ e tal que $\Lambda_\theta(x(\cdot))$ está suficientemente próximo de $\Lambda_\theta(z(\cdot))$. Note-se que também acontece

$$\Lambda(z(\cdot)) \leq \Lambda(x(\cdot)), \forall\, x(\cdot) \text{ admissível para } (\mathcal{P}_\theta).$$

E como $z(\cdot)$ é solução para $(\mathcal{P}_\theta(\alpha))$, então $z(\cdot)$ é admissível para $(\mathcal{P}_\theta)$. Logo, $z(\cdot)$ é solução para $(\mathcal{P}_\theta)$.

Tenhamos em atenção que todas as outras hipóteses básicas do teorema 2.1 são satisfeitas. Logo, o teorema 2.1 garante a existência de uma função integrável $\xi(\cdot)$ tal que

$$\xi(t) \in \partial_t L(z(t), z'(t)) \text{ qs em } [0,T],$$

e a existência de uma constante $c$ e uma função mensurável $p(\cdot)$ com

$$p(t) \in \partial_v L(z(t), z'(t)) \text{ qs em } [0,T],$$

tais que

$$L\left(z\left(t\right),z'\left(t\right)\right)-\left\langle z'\left(t\right),p\left(t\right)\right\rangle =c+\int_0^t \xi\left(\tau\right)\,d\tau \text{ qs em } \left[0,T\right].$$

Como $L\left(\cdot\right)$ não depende explicitamente de $t$, vem

$$L\left(z\left(t\right),z'\left(t\right)\right)-\left\langle z'\left(t\right),p\left(t\right)\right\rangle =c \text{ qs em } \left[0,T\right]. \tag{4.54}$$

para alguma constante $c$ e alguma função mensurável $p\left(\cdot\right)$ com

$$p\left(t\right)\in\partial_v L\left(z\left(t\right),z'\left(t\right)\right) \text{ qs em } \left[0,T\right].$$

O que significa que $z\left(\cdot\right)$ satisfaz a equação (4.46).

**(Parte 2 da demonstração do teorema 4.5 : $z\left(\cdot\right)$ é lipschitziana)**

A equação (4.54), na presença de $(HE_2)$, implica que $z'\left(\cdot\right)$ é essencialmente limitada, isto é,

$$\exists\,\beta>0:\left|z'\left(t\right)\right|\leq\beta, \text{ qs em } \left[0,T\right].$$

Suponhamos, com vista a um absurdo, que $z'\left(\cdot\right)\notin L^\infty\left(\left[0,T\right],\mathbb{R}^n\right)$. Então para qualquer $\beta>0$,

$$\exists\,I_1\subset\left[0,T\right] \text{ com } \mu\left(I_1\right)>0:\left|z'\left(t\right)\right|>\beta,\ \forall\,t\in I_1.$$

Logo, de (4.54) para algum $s_1\in\Omega$, para algum $v_1\in K$ com $\left|v_1\right|>\beta$, e para algum $p_1\in\partial_v L\left(s_1,v_1\right)$, temos

$$L\left(s_1,v_1\right)-\left\langle v_1,p_1\right\rangle =c.$$

Desta igualdade resulta

$$c=L\left(s_1,v_1\right)-\left\langle v_1,p_1\right\rangle \leq \sup_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K,\left|v\right|<\beta}}\left\{L\left(s,v\right)-\left\langle v,\partial_v L\left(s,v\right)\right\rangle\right\}. \tag{4.55}$$

Além disso, como $z\left(\cdot\right)\in\Gamma\left(\overline{x}\left(\cdot\right)\right)$, é válida a hipótese extra $(HE_1)$. Então existe $k>0$ tal que

$$\inf_{0\leq t\leq T} ess\left|z'\left(t\right)\right|<k,$$

isto é,

$$\sup\left\{c\in\mathbb{R}:\left|z'\left(t\right)\right|\geq c \text{ qs em } \left[0,T\right]\right\}<k.$$

Desta maneira,

$$\exists\,I_2\subset\left[0,T\right] \text{ com } \mu\left(I_2\right)>0:\left|z'\left(t\right)\right|<k,\ \forall\,t\in I_2.$$

Logo, de (4.54) para algum $s_2\in\Omega$, para algum $v_2\in K$ com $\left|v_2\right|<k$, e para algum $p_2\in\partial_v L\left(s_2,v_2\right)$, vem

$$L\left(s_2,v_2\right)-\left\langle v_2,p_2\right\rangle =c.$$

Desta igualdade temos

$$c=L\left(s_1,v_1\right)-\left\langle v_1,p_1\right\rangle \geq \inf_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K,\left|v\right|>k}}\left\{L\left(s,v\right)-\left\langle v,\partial_v L\left(s,v\right)\right\rangle\right\}. \tag{4.56}$$

Juntando (4.55) e (4.56) resulta

$$\inf_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K,\left|v\right|>k}}\left\{L\left(s,v\right)-\left\langle v,\partial_v L\left(s,v\right)\right\rangle\right\}\leq \sup_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K,\left|v\right|<\beta}}\left\{L\left(s,v\right)-\left\langle v,\partial_v L\left(s,v\right)\right\rangle\right\},$$

isto é,

$$0 \leq \sup_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K,|v|<\beta}} \{L(s,v) - \langle v, \partial_v L(s,v)\rangle\} - \inf_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K,|v|>k}} \{L(s,v) - \langle v, \partial_v L(s,v)\rangle\}. \tag{4.57}$$

Assim sendo, para $\beta$ suficientemente grande, o lado direito da desigualdade (4.57) é negativo. De facto, como vale a hipótese $(HE_2)$ e fazendo $\beta \to +\infty$, no lado direito da desigualdade (4.57), vem

$$\lim_{\beta\to+\infty}\left[\sup_{\substack{s\in\Omega,v\in K\\ |v|>\beta}} \{L(s,v) - \langle v, \partial_v L(s,v)\rangle\} - \inf_{\substack{s\in\Omega,v\in K\\ |v|<k}} \{L(s,v) - \langle v, \partial_v L(s,v)\rangle\}\right]$$

$$< \inf_{\substack{s\in\Omega,v\in K\\ |v|<k}} \{L(s,v) - \langle v, \partial_v L(s,v)\rangle\} - \inf_{\substack{s\in\Omega,v\in K\\ |v|<k}} \{L(s,v) - \langle v, \partial_v L(s,v)\rangle\} = 0.$$

O que contradiz (4.57). E portanto, $z'(\cdot)$ é essencialmente limitada. Logo,

$$z'(\cdot) \in L^\infty([0,T], \mathbb{R}^n). \tag{4.58}$$

Mostremos agora que

$$z(\cdot) \in L^\infty([0,T], \mathbb{R}^n), \tag{4.59}$$

isto é,

$$\exists\, \widetilde{\beta} > 0 : |z(t)| \leq \widetilde{\beta}, \text{ qs em } [0,T].$$

Como $z(\cdot)$ é solução do problema $(\mathcal{P}_\theta)$, então é $AC$. Logo, pelo teorema 18.4,

$$z(t) = z(0) + \int_0^t z'(\tau)\ d\tau,\ \forall\, t \in [0,T].$$

Donde,

$$\begin{aligned} |z(t)| &\leq |z(0)| + \left|\int_0^t z'(\tau)\ d\tau\right| \leq |z(0)| + \int_0^t |z'(\tau)|\ d\tau \leq |z(0)| + \int_0^T |z'(\tau)|\ d\tau \\ &\leq |z(0)| + \int_0^T \beta\ d\tau = |z(0)| + \beta\, T = \widetilde{\beta}, \end{aligned}$$

pela proposição 11.15 (podemos aplicar esta proposição porque $\exists\, \beta > 0 : |z'(t)| \leq \beta$, qs em $[0,T]$, e porque os integrais

$$\int_0^T |z'(t)|\ dt = \int_0^T \max\{|z'(t)|, 0\}\ dt - \int_0^T -\min\{|z'(t)|, 0\}\ dt = \int_0^T |z'(t)|\ dt + 0 \in [0,\infty]$$

e

$$\int_0^T \beta\ dt = \int_0^T \max\{\beta, 0\}\ dt - \int_0^T -\min\{\beta, 0\}\ dt = \beta\, T + 0 = \beta\, T \in \mathbb{R}$$

existem, tendo em conta a definição 11.8). Desta maneira,

$$\exists\, \widetilde{\beta} > 0 : |z(t)| \leq \widetilde{\beta},\ \forall\, t \in [0,T].$$

Em particular, $z(\cdot) \in L^\infty([0,T], \mathbb{R}^n)$. E portanto, de (4.58) e (4.59),

$$z(\cdot) \in W^{1,\infty}([0,T], \mathbb{R}^n).$$

Consequentemente, $z(\cdot)$ é lipschitziana, pela nota 15.3.

**(Parte 3 da demonstração do teorema 4.5 : $z(\cdot)$ é solução de $(\mathcal{P})$)**

Queremos agora mostrar que $z(\cdot)$ é solução do problema $(\mathcal{P})$.

Tudo o que foi realizado acima foi feito para uma função de Nagumo $\theta(\cdot)$ fixada. Seja $\psi(\cdot)$ uma qualquer outra função de Nagumo. Vamos agora mostrar que $z(\cdot)$ também é solução do problema $(\mathcal{P}_\psi)$ dado por

$$(\mathcal{P}_\psi)\quad \min\left\{\Lambda(x(\cdot)) : x(\cdot) \in AC_\psi([0,T],\mathbb{R}^n),\ (x(0),x(T)) \in C,\ x(t) \in \Omega\ \forall\ t \in [0,T],\ x'(t) \in K \text{ qs}\right\},$$

Seja $y(\cdot)$ uma solução lipschitziana de $(\mathcal{P}_\psi)$, a qual existe pela demonstração anterior (onde se mostrou que $z(\cdot)$ é solução lipschitziana de $(\mathcal{P}_\theta)$) substituindo $\theta(\cdot)$ por $\psi(\cdot)$. Mostremos que $y(\cdot)$ é admissível para $(\mathcal{P}_\theta)$. Suponhamos que $y(\cdot)$ não é admissível para $(\mathcal{P}_\theta)$, isto é, vamos supor que

$$\Lambda_\theta(y(\cdot)) = \int_0^T \theta(|y'(t)|)\ dt = +\infty.$$

Tal como $z'(\cdot)$, $y'(\cdot) \in L^\infty([0,T],\mathbb{R}^n)$, então, pela proposição 13.28,

$$|y'(t)| \le |y'(\cdot)|_{L^\infty([0,T],\mathbb{R}^n)} = \sup_{0\le t\le T} ess\,|y'(t)| \text{ qs em } [0,T].$$

E como $\theta(\cdot)$ é uma função estritamente crescente, vem

$$\theta(|y'(t)|) \le \theta\left(\sup_{0\le t\le T} ess\,|y'(t)|\right) \text{ qs em } [0,T].$$

Além disso, existem os integrais $\int_0^T \theta\left(\sup_{0\le t\le T} ess\,|y'(t)|\right) dt$ e $\int_0^T \theta(|y'(t)|)\ dt$ (o primeiro existe pois $\theta\left(\sup_{0\le t\le T} ess\,|y'(t)|\right)$ é uma constante e o segundo existe pela demonstração do teorema 2.1). Então, pelo lema 11.12,

$$+\infty = \int_0^T \theta(|y'(t)|)\ dt \le \int_0^T \theta\left(\sup_{0\le t\le T} ess\,|y'(t)|\right) dt = T\ \theta\left(\sup_{0\le t\le T} ess\,|y'(t)|\right).$$

O que é absurdo. E portanto, $y(\cdot)$ é admissível para $(\mathcal{P}_\theta)$. Analogamente, mostramos que $z(\cdot)$ é admissível para $(\mathcal{P}_\psi)$. Suponhamos que $z(\cdot)$ não é admissível para $(\mathcal{P}_\psi)$, isto é, vamos supor que

$$\Lambda_\psi(z(\cdot)) = \int_0^T \psi(|z'(t)|)\ dt = +\infty.$$

Como $z'(\cdot) \in L^\infty([0,T],\mathbb{R}^n)$, então, pela proposição 13.28,

$$|z'(t)| \le |z'(\cdot)|_{L^\infty([0,T],\mathbb{R}^n)} = \sup_{0\le t\le T} ess\,|y'(t)| \text{ qs em } [0,T].$$

E como $\psi(\cdot)$ é uma função estritamente crescente, pois é uma função de Nagumo, vem

$$\psi(|z'(t)|) \le \psi\left(\sup_{0\le t\le T} ess\,|y'(t)|\right) \text{ qs em } [0,T].$$

Além disso, existem os integrais $\int_0^T \psi\left(\sup_{0\le t\le T} ess\,|y'(t)|\right) dt$ e $\int_0^T \psi(|z'(t)|)\ dt$ (o primeiro existe pois $\psi\left(\sup_{0\le t\le T} ess\,|y'(t)|\right)$ é uma constante e o segundo existe pela demonstração do teorema 2.1). Então, pelo lema 11.12,

$$+\infty = \int_0^T \psi(|z'(t)|)\ dt \le \int_0^T \psi\left(\sup_{0\le t\le T} ess\,|y'(t)|\right) dt = T\ \psi\left(\sup_{0\le t\le T} ess\,|y'(t)|\right).$$

O que é absurdo. E portanto, $z(\cdot)$ é admissível para $(\mathcal{P}_\psi)$. Logo,

$$\Lambda(y(\cdot)) \leq \Lambda(z(\cdot)) \leq \Lambda(y(\cdot))$$

(as desigualdades anteriores devem-se ao facto de $\Lambda(y(\cdot)) \leq \Lambda(z(\cdot))$, pois $y(\cdot)$ é solução de $(\mathcal{P}_\psi)$ e $z(\cdot)$ é admissível para $(\mathcal{P}_\psi)$, e de $\Lambda(z(\cdot)) \leq \Lambda(y(\cdot))$, pois $z(\cdot)$ é solução de $(\mathcal{P}_\theta)$ e $y(\cdot)$ é admissível para $(\mathcal{P}_\theta)$). E portanto,

$$\Lambda(z(\cdot)) = \Lambda(y(\cdot)),$$

o que nos permite afirmar que $z(\cdot)$ é solução de $(\mathcal{P}_\psi)$.

Seja agora $x(\cdot)$ uma qualquer função admissível para o problema original $(\mathcal{P})$. Então, $x(\cdot) \in AC([0,T], \mathbb{R}^n)$, logo $x'(\cdot) \in L^1([0,T], \mathbb{R}^n)$, pelo teorema 18.4. Consequentemente, $\{x'(\cdot)\}$ é um conjunto equiabsolutamente integrável pela definição 13.38. Logo, pela proposição 13.39, existe uma função de Nagumo $\psi(\cdot)$ tal que $x(\cdot) \in AC_\psi([0,T], \mathbb{R}^n)$. Consequentemente, $x(\cdot)$ é admissível para $(\mathcal{P}_\psi)$. Mas, dado que $z(\cdot)$ é solução de $(\mathcal{P}_\psi)$, temos

$$\Lambda(z(\cdot)) \leq \Lambda(x(\cdot)).$$

Logo, $z(\cdot)$ é solução de $(\mathcal{P})$.

**(Parte 4 da demonstração do teorema 4.5 : qualquer outra solução $\overline{z}(\cdot)$ do problema $(\mathcal{P})$ é, tal como $z(\cdot)$, lipschitziana e satisfaz a equação do teorema 4.5)**

Seja $\overline{z}(\cdot)$ uma qualquer outra solução de $(\mathcal{P})$, e mostremos que $\overline{z}(\cdot)$ também é solução de $(\mathcal{P}_\psi)$ para alguma função de Nagumo $\psi(\cdot)$ tal que $\overline{z}(\cdot) \in AC_\psi([0,T], \mathbb{R}^n)$. Como $\overline{z}(\cdot) \in AC_\psi([0,T], \mathbb{R}^n)$ e é solução de $(\mathcal{P})$, então é admissível para $(\mathcal{P}_\psi)$ (analogamente ao que foi feito na parte 3 desta demonstração). Além disso, se $y(\cdot)$ é uma solução de $(\mathcal{P}_\psi)$, a qual é admissível para $(\mathcal{P})$, temos que

$$\Lambda(y(\cdot)) \leq \Lambda(\overline{z}(\cdot)) \leq \Lambda(y(\cdot)).$$

Logo,

$$\Lambda(y(\cdot)) = \Lambda(\overline{z}(\cdot)).$$

O que significa que $\overline{z}(\cdot)$ é solução de $(\mathcal{P}_\psi)$. Então, analogamente ao que vimos para $z(\cdot)$, concluimos que $\overline{z}(\cdot)$ é lipschitziana e satisfaz a equação (4.46).

Mostrámos então que qualquer outra solução $\overline{z}(\cdot)$ do problema $(\mathcal{P})$, tal como $z(\cdot)$, é lipschitziana e satisfaz a equação (4.46). ■

### 4.6. Um caso particular: o crescimento coercivo

Consideremos o problema de minimizar o integral

$$\Lambda(x(\cdot)) := \int_0^T L(x(t), x'(t))\, dt$$

na classe das funções $x(\cdot) \in AC([0,T], \mathbb{R}^n)$ satisfazendo as condições de fronteira :

$$x(0) = x_0,\ x(T) = x_T$$

e a restrição :

$$x(t) \in \Omega,\ \forall\, t \in [0,T].$$

**Proposição 4.6.** *Seja $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, para $x_1 \in \mathbb{R}^n$ fixado, a função $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por*

$$g(x_2) := h(x_1, x_2)$$

*é contínua.*

**Demonstração :**
Por hipótese, $h(\cdot)$ é uma função contínua, então $h(\cdot)$ é contínua em qualquer $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n$, isto é,

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta_\varepsilon > 0,\ \forall\ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^{2n} : |(y_1, y_2) - (x_1, x_2)| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |h(y_1, y_2) - h(x_1, x_2)| < \varepsilon.$$

Fixemos $\varepsilon > 0$ para o qual existe $\delta_\varepsilon > 0$.
Mostremos que $g(\cdot)$ é contínua em $x_2 \in \mathbb{R}^n$, isto é,

$$\forall\, \widetilde{\varepsilon} > 0,\ \exists\, \widetilde{\delta}_\varepsilon > 0,\ \forall\ y_2 \in \mathbb{R}^n : |y_2 - x_2| < \widetilde{\delta}_\varepsilon \Rightarrow |g(y_2) - g(x_2)| < \widetilde{\varepsilon}.$$

Fixemos também $x_1 \in \mathbb{R}^n$. Seja $y_2 \in \mathbb{R}^n$ qualquer e tal que $|y_2 - x_2| < \delta_\varepsilon$, então

$$|g(y_2) - g(x_2)| = |h(y_1, y_2) - h(x_1, x_2)| < \varepsilon,$$

(isto deve-se ao facto de

$$|y_2 - x_2| \leq |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| = |(y_1 - x_1, y_2 - x_2)| = |(y_1, y_2) - (x_1, x_2)| < \delta_\varepsilon).$$

Logo, para qualquer $\widetilde{\varepsilon} = \varepsilon > 0$, para algum $\widetilde{\delta}_\varepsilon = \delta_\varepsilon > 0$ e para qualquer $y_2 \in \mathbb{R}^n$ tal que $|y_2 - x_2| < \widetilde{\delta}_\varepsilon$, temos

$$|g(y_2) - g(x_2)| < \varepsilon.$$

Isto é, $g(\cdot)$ é contínua, para qualquer $x_1 \in \mathbb{R}^n$ fixado. ■

**Lema 4.7.** *Suponhamos : $L : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ é contínua, convexa na variável $v$ e coerciva; $K = \mathbb{R}^n$; existe pelo menos uma função lipschitziana $\overline{x}(\cdot) \in X$ para a qual $\Lambda(\overline{x}(\cdot))$ é finito. Consideremos o conjunto de subnível*

$$\Gamma(\overline{x}(\cdot)) := \{x(\cdot) \in X : \Lambda(x(\cdot)) \leq \Lambda(\overline{x}(\cdot))\}.$$

*Então, para qualquer $k > 0$ vale a desigualdade*

$$(*)\begin{cases} \displaystyle\lim_{\beta \to +\infty} \sup_{\substack{s \in \Omega, \\ v \in K, |v| > \beta}} \{L(s, v) - \langle v, \partial_v L(s, v)\rangle\} < \\ \displaystyle\qquad < \inf_{\substack{s \in \Omega, \\ v \in K, |v| < k}} \{L(s, v) - \langle v, \partial_v L(s, v)\rangle\}. \end{cases}$$

**Demonstração:**
Fixemos $k > 0$.
Mostremos primeiro que o lado direito da desigualdade em $(*)$ é finito, e depois que o lado esquerdo é $-\infty$.
Suponhamos que o lado direito é ilimitado inferiormente. Então existe uma sucessão $(s_i, v_i) \subset \Omega \times k\overline{B}$ tal que, para algum $p_i \in \partial_v L(s_i, v_i)$,

$$L(s_i, v_i) - \langle v_i, p_i\rangle \underset{i \to +\infty}{\to} -\infty. \tag{4.60}$$

Como a sucessão $(s_i, v_i)$ é convergente, então é limitada, logo possui uma subsucessão convergente. Assim, passando a uma subsucessão se necessário, podemos supor

$$(s_i, v_i) \to (s, v),\ \forall\ i \in \mathbb{N},$$

com $(s,v) \in \Omega \times k\overline{B}$ (pois $\Omega \times k\overline{B}$ é fechado). Por hipótese, $L(\cdot)$ toma apenas valores reais e é contínua, então

$$-\infty < \lim_{i \to +\infty} L(s_i, v_i) = L(s,v) < +\infty. \tag{4.61}$$

Segue de (4.60) e (4.61)

$$\langle v_i, p_i \rangle \underset{i \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty. \tag{4.62}$$

Seja $\varepsilon_0 > 0$ tal que $L(s, v + \varepsilon_0 v)$ é finito. Por hipótese, $L(s,\cdot)$ é convexa, para qualquer $s \in \Omega$. Além disso, para cada $i \in \mathbb{N}$, $L(s_i, v_i)$ é finito e existe $p_i \in \partial_v L(s_i, v_i)$. Logo, pelo teorema 19.84, para cada $i \in \mathbb{N}$ temos

$$L(s_i, v_i + \varepsilon_0 v_i) - L(s_i, v_i) \geq \langle v_i + \varepsilon_0 v_i - v_i, p_i \rangle = \varepsilon_0 \langle v_i, p_i \rangle. \tag{4.63}$$

Como $L(\cdot)$ é contínua e

$$(s_i, v_i + \varepsilon_0 v_i) \to (s, v + \varepsilon_0 v), \ \forall\, i \in \mathbb{N},$$

(pois para cada $i \in \mathbb{N}$, $(s_i, v_i) \to (s,v)$, isto é, $(s_i) \to s$ e $(v_i) \to v$), então

$$\lim_{i \to +\infty} L(s_i, v_i + \varepsilon_0 v_i) = L(s, v + \varepsilon_0 v), \ \forall\, i \in \mathbb{N}. \tag{4.64}$$

Logo, passando ao limite a desigualdade (4.63), resulta que

$$\lim_{i \to +\infty} \left[ L(s_i, v_i + \varepsilon_0 v_i) - L(s_i, v_i) \right] \geq \varepsilon_0 \lim_{i \to +\infty} \langle v_i, p_i \rangle,$$

isto é, por (4.61), (4.62) e (4.64), temos

$$L(s, v + \varepsilon_0 v) - L(s,v) \geq \varepsilon_0 (+\infty),$$

donde

$$L(s, v + \varepsilon_0 v) = +\infty,$$

contradizendo o facto de termos suposto $L(s, v + \varepsilon_0 v)$ finito. E portanto, o lado direito da desigualdade $(*)$ é finito.

Agora vamos mostrar que o lado esquerdo da desigualdade em $(*)$ é $-\infty$. Sejam $(s,v) \in \Omega \times k\overline{B}$, $p \in \partial_v L(s,v)$, $\varepsilon \in (0, |v|)$ quaisquer. Por hipótese, $L : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ é contínua. Então $L(s,\cdot)$ é contínua, pela proposição 4.6. Logo $L(s,\cdot)$ é sci, pela proposição 6.27. Pela demonstração do teorema 4.8, isto é de (4.69), vem

$$L(s,v) \geq c_0, \text{ para algum } c_0 \in \mathbb{R}.$$

(uma vez que as hipóteses deste lema e do teorema 4.8 são as mesmas). Desta maneira, vamos definir a função $\overline{L} : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ por

$$\overline{L}(v) := L(s,v) - c_0,$$

para $s \in \Omega$ fixado. Também por hipótese, para cada $s \in \Omega$, $L(s,\cdot)$ é convexa, logo $\overline{L}(\cdot)$ é sci pela proposição 6.22 e convexa pela definição 19.67. Além disso, $L(\cdot)$ é coerciva, isto é, existe uma função $\theta : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ que satisfaz :

$$(a) \ \ L(s,v) \geq \theta(|v|), \ \forall\, s \in \Omega, \ \forall\, v \in \mathbb{R}^n;$$

$$(b) \ \ \lim_{r \to +\infty} \frac{\theta(r)}{r} = +\infty. \tag{4.65}$$

Então existe uma função $\overline{\theta} : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\overline{\theta}(r) := \theta(r) - c_0,$$

que satisfaz

$$\overline{L}(v) \geq \overline{\theta}(|v|), \ \forall\, v \in \mathbb{R}^n.$$

Fixemos $v \in int\,(dom\,\overline{L}) = int\,(dom\,L(s,\cdot))$ e $v \neq 0$. Pelo lema 24.1, para quaisquer $\varepsilon \in (0,|v|)$ e $p \in \partial \overline{L}(v) = \partial_v L(s,v)$, temos

$$\langle p,v\rangle - \overline{L}(v) \geq \frac{\varepsilon}{|v|-\varepsilon}\overline{\theta}(|v|) - \overline{L}\left(\frac{\varepsilon v}{|v|}\right)\frac{|v|}{|v|-\varepsilon}.$$

Ou seja,

$$\langle p,v\rangle - [L(s,v) - c_0] \geq \frac{\varepsilon}{|v|-\varepsilon}[\theta(|v|) - c_0] - \left[L\left(s,\frac{\varepsilon v}{|v|}\right) - c_0\right]\frac{|v|}{|v|-\varepsilon}.$$

Isto é,

$$L(s,v) - \langle p,v\rangle \leq L\left(s,\frac{\varepsilon v}{|v|}\right)\frac{|v|}{|v|-\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{|v|-\varepsilon}\theta(|v|). \tag{4.66}$$

Como $L(\cdot)$ toma valores em $\mathbb{R}$, pela proposição 17.1, resulta que $L(\cdot)$ é limitada nos subconjuntos compactos de $\Omega \times \mathbb{R}^n$. Então, existe $c_1 > 0$ tal que

$$|L(s,v)| \leq c_1,\ \forall\ (s,v) \in \Omega \times \mathbb{R}^n.$$

Em particular, existe $c_1 > 0$ tal que

$$L\left(s,\frac{\varepsilon v}{|v|}\right) \leq c_1,\ \forall\ s \in \Omega.$$

Logo, a desigualdade (4.66) transforma-se em

$$L(s,v) - \langle p,v\rangle \leq c_1\frac{|v|}{|v|-\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{|v|-\varepsilon}\theta(|v|). \tag{4.67}$$

Passando ao limite a desigualdade (4.67) quando $|v| \to +\infty$ (com vista a aplicar a propriedade de crescimento de $\theta(\cdot)$) temos

$$\begin{aligned}
\lim_{|v|\to+\infty}[L(s,v) - \langle p,v\rangle] &\leq \lim_{|v|\to+\infty}\left[c_1\frac{|v|}{|v|-\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{|v|-\varepsilon}\theta(|v|)\right] \\
&= \lim_{|v|\to+\infty}\left[c_1\left(1+\frac{\varepsilon}{|v|-\varepsilon}\right)\right] - \lim_{|v|\to+\infty}\frac{\varepsilon}{|v|-\varepsilon}\theta(|v|) \\
&= c_1 - \lim_{|v|\to+\infty}\frac{\varepsilon|v|}{|v|-\varepsilon}\frac{\theta(|v|)}{|v|} \\
&= c_1 - \varepsilon\lim_{|v|\to+\infty}\frac{\theta(|v|)}{|v|} \\
&= c_1 - \varepsilon(+\infty) = -\infty \text{ (por (4.65)).}
\end{aligned}$$

Isto é,

$$\lim_{|v|\to+\infty}[L(s,v) - \langle p,v\rangle] = -\infty.$$

Logo, para qualquer $c_2 > 0$ existe $\delta_{c_2} > 0$ tal que

$$|v| > \delta_{c_2} \Rightarrow L(s,v) - \langle p,v\rangle \leq -c_2,\ \forall\ p \in \partial_v L(s,v),\ \forall\ s \in \Omega,$$

donde,

$$|v| > \delta_{c_2} \Rightarrow \sup_{p\in\partial_v L(s,v)}\{L(s,v) - \langle p,v\rangle\} \leq -c_2,\ \forall\ s \in \Omega.$$

Consequentemente, para $\beta > \delta_{c_2}$ temos

$$\sup_{p\in\partial_v L(s,v)}\{L(s,v) - \langle p,v\rangle\} \leq -c_2,\ \forall\ v \in \mathbb{R}^n,\ |v| > \beta,\ \forall\ s \in \Omega.$$

Então,

$$\sup_{\substack{v\in K,\\ |v|>\beta}} \sup_{p\in\partial_v L(s,v)} \{L(s,v) - \langle p,v\rangle\} \leq -c_2,\ \forall\ s\in\Omega.$$

Logo,

$$\sup_{s\in\Omega} \sup_{\substack{v\in K,\\ |v|>\beta}} \sup_{p\in\partial_v L(s,v)} \{L(s,v) - \langle p,v\rangle\} \leq -c_2.$$

Donde,

$$\lim_{\beta\to+\infty} \sup_{s\in\Omega} \sup_{\substack{v\in K,\\ |v|>\beta}} \sup_{p\in\partial_v L(s,v)} \{L(s,v) - \langle p,v\rangle\} = -\infty.$$

E portanto, o lado esquerdo da desigualdade em $(*)$ é $-\infty$ como é exigido. ■

**Teorema 4.8.** *Suponhamos :* $L:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}$ *é contínua, convexa na variável* $v$ *e coerciva;* $K=\mathbb{R}^n$*; existe pelo menos uma função lipschitziana* $\overline{x}(\cdot)\in X$ *para a qual* $\Lambda(\overline{x}(\cdot))$ *é finito. Consideremos o conjunto de subnível*

$$\Gamma(\overline{x}(\cdot)) := \{x(\cdot)\in X : \Lambda(x(\cdot)) \leq \Lambda(\overline{x}(\cdot))\},$$

*e suponhamos* $\Omega$ *fechado. Então existe um minimizante do problema* $(\mathcal{P})$.

**Demonstração :**
Iremos mostrar que o teorema 4.8 pode ser visto como um caso especial do teorema 4.5.

Como o teorema 4.8 é um caso particular do teorema 4.5, vamos demonstrá-lo através da verificação das hipóteses do teorema 4.5.

Por hipótese, $K=\mathbb{R}^n$ e $\Omega$ é um conjunto fechado, então o teorema 4.8 verifica as hipóteses básicas $(i)$ e $(iii)$ do teorema 4.5.

Notemos que os $x(\cdot)$ em competição, para serem solução para o problema $(\mathcal{P})$, verificam as condições de fronteira $x(0)=x_0$ e $x(T)=x_T$. Defina-se o conjunto

$$C := \{(x_0,x_T)\}.$$

E portanto, verifica-se a hipótese básica $(ii)$ do teorema 4.5, porque $C$ é fechado (pois é formado por um só ponto) e porque as projecções

$$C_x := \{x\in\mathbb{R}^n : (x,y)\in\{(x_0,x_T)\} \text{ para algum } y\in\mathbb{R}^n\} = \{x_0\},$$

$$C_y := \{y\in\mathbb{R}^n : (x,y)\in\{(x_0,x_T)\} \text{ para algum } x\in\mathbb{R}^n\} = \{x_T\}$$

são conjuntos compactos (pois são conjuntos formados por um só ponto, e portanto, enquanto subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, são fechados e limitados).

Também por hipótese, $L(\cdot)$ é contínua, logo é sci, pela proposição 6.27. Isto é, $L(\cdot)$ verifica a hipótese básica $(iv)$ do teorema 4.5.

Além disso, por hipótese, para cada $s\in\Omega\subset\mathbb{R}^n$ fixado, a função $L_1:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ dada por

$$L_1(v) := L(s,v)$$

é convexa. Então, para cada $s\in\Omega\subset\mathbb{R}^n$ fixado, o domínio

$$dom\ L_1 = dom\ L(s,\cdot) = \{v\in\mathbb{R}^n : L_1(v) = L(s,v) < +\infty\} = \mathbb{R}^n$$

é um conjunto aberto, convexo e não-vazio. Ou seja, $L(\cdot)$ verifica a hipótese básica $(v)$ do teorema 4.5.

Além disso, por hipótese, existe pelo menos uma função lipschitziana $\overline{x}(\cdot)\in X$ para a qual $\Lambda(\overline{x}(\cdot))$ é finito. O que significa que o teorema 4.8 verifica a hipótese básica $(vii)$ do teorema 4.5.

Por hipótese, $L(\cdot)$ é coerciva, isto é, existe uma função $\theta : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ que satisfaz :

$$(a)\ \ L(s,v) \geq \theta(|v|),\ \forall\ s \in \Omega,\ \forall\ v \in \mathbb{R}^n;$$

$$(b)\ \ \lim_{r \to +\infty} \frac{\theta(r)}{r} = +\infty.$$

De $(b)$ temos

$$\forall\ M > 0,\ \exists\ \delta_M > 0 : |r| > \delta_M \Rightarrow \frac{\theta(r)}{r} > M,$$

para qualquer $r \in [0,+\infty)$. Desta maneira, fixemos qualquer $M > 0$ para o qual existe $\delta_M > 0$ tais que

$$r > \delta_M \Rightarrow \theta(r) > M\ r.$$

Logo

$$\forall\ M > 0,\ \exists\ \delta_M > 0,\ \exists\ \gamma_M \in \mathbb{R} : \theta(r) > M\ r + \gamma_M,\ \forall\ r \in [0,+\infty). \tag{4.68}$$

Assim, juntando $(a)$ e (4.68), vem

$$\exists\ c_1 > 0,\ \exists\ c_2 \in \mathbb{R} : L(s,v) \geq c_1|v| + c_2,\ \forall\ (s,v) \in \Omega \times \mathbb{R}^n. \tag{4.69}$$

Fixemos $v \in \mathbb{R}^n$ e consideremos a função $l : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$l(s) := c_1|v| + c_2.$$

Então, em particular, $l(\cdot)$ é localmente limitada inferiormente e podemos dizer que $L(\cdot)$ verifica a hipótese básica $(vi)$ do teorema 4.5.

Temos também que qualquer função AC $x(\cdot) \in \Gamma(\overline{x}(\cdot))$ satisfaz

$$\begin{aligned}
\Lambda(\overline{x}(\cdot)) &\geq \Lambda(x(\cdot)) = \int_0^T L(x(t),x'(t))\ dt \geq \int_0^T [c_1|x'(t)| + c_2]\ dt \text{ (por (4.69))} \\
&= c_1 \int_0^T |x'(t)|\ dt + c_2\ T \geq c_1 \int_0^t |x'(t)|\ dt + c_2\ T \text{ (pois } |x'(t)| \geq 0) \\
&\geq c_1 \left| \int_0^t x'(\tau)\ d\tau \right| + c_2\ T = c_1|x(t) - x(0)| + c_2\ T \\
&\geq c_1[|x(t)| - |x(0)|] + c_2\ T,\ \forall\ t \in [0,T].
\end{aligned} \tag{4.70}$$

Como, por hipótese, existe uma função lipschitziana $\overline{x}(\cdot) \in X$ para a qual $\Lambda(\overline{x}(\cdot)) \in \mathbb{R}$, então $\overline{x}(\cdot) \in AC([0,T],\mathbb{R}^n)$ e satisfaz o seguinte :

$$\begin{gathered}
\overline{x}(0) = x_0,\ \overline{x}(T) = x_T; \\
(\overline{x}(0),\overline{x}(T)) \in C, \qquad \overline{x}(t) \in \Omega\ \forall\ t \in [0,T], \qquad \overline{x}'(t) \in K \text{ qs;} \\
\Lambda(\overline{x}(\cdot)) \in \mathbb{R}.
\end{gathered}$$

Logo, de (4.70) vem

$$\begin{aligned}
\Lambda(\overline{x}(\cdot)) &\geq c_1[|x(t)| - |x(0)|] + c_2\ T \\
&= c_1|x(t)| - c_1|x_0| + c_2\ T,\ \forall\ t \in [0,T].
\end{aligned}$$

Donde

$$|x(t)| \leq \underbrace{\frac{\Lambda(\overline{x}(\cdot)) - c_2\ T}{c_1} + |x_0|}_{\in[0,+\infty)},\ \forall\ t \in [0,T]. \tag{4.71}$$

(A desigualdade (4.71) faz sentido porque

$$\Lambda(\overline{x}(\cdot)) \geq c_1 |x(t) - x(0)| + c_2 T \text{ (por (4.70))}$$

implica

$$\Lambda(\overline{x}(\cdot)) - c_2 T \geq c_1 |x(t) - x(0)| \geq 0.)$$

Em particular,

$$|x(\cdot)|_{L^\infty([0,T],\mathbb{R}^n)} = \sup_{0 \leq t \leq T} ess\, |x(t)| \leq \frac{\Lambda(\overline{x}(\cdot)) - c_2\, T}{c_1} + |x_0| = c_3. \tag{4.72}$$

Assim, sem perda de generalidade, podemos assumir $\Omega$ compacto.

Para aplicar o teorema 4.5 se aplica temos de verificar as hipóteses $(HE_1)$ e $(HE_2)$.

Vejamos agora se se verifica a hipótese extra $(HE_1)$, isto é

$$\text{existe } k > 0 \text{ tal que qualquer função } x(\cdot) \text{ de } \Gamma(\overline{x}(\cdot)) \text{ satisfaz}$$

$$\inf_{0 \leq t \leq T} ess\, |x'(t)| < k.$$

Seja $x(\cdot) \in \Gamma(\overline{x}(\cdot))$ qualquer, então $x(\cdot) \in X$ tal que $\Lambda(x(\cdot)) \leq \Lambda(\overline{x}(\cdot))$, para alguma função lipschitziana $\overline{x}(\cdot) \in X$ para a qual $\Lambda(\overline{x}(\cdot))$ é finito. Desta maneira,

$$\begin{aligned}
\Lambda(\overline{x}(\cdot)) &\geq \Lambda(x(\cdot)) = \int_0^T L(x(t), x'(t))\; dt \\
&\geq \int_0^T [c_1 |x'(t)| + c_2]\; dt \text{ (por (4.69))} \\
&= c_1 \int_0^T |x'(t)|\; dt + c_2\, T \\
&\geq c_1 \int_0^T \inf_{0 \leq t \leq T} ess\, |x'(t)|\; dt + c_2\, T \\
&\geq c_1\, T \inf_{0 \leq t \leq T} ess\, |x'(t)| + c_2\, T.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\inf_{0 \leq t \leq T} ess\, |x'(t)| \leq \underbrace{\frac{\Lambda(\overline{x}(\cdot)) - c_2\, T}{c_1\, T}}_{\in[0,+\infty)} + |x_0|, \; \forall\, t \in [0,T].$$

Então, $(HE_1)$ é satisfeita para algum $k > \frac{\Lambda(\overline{x}(\cdot)) - c_2\, T}{c_1\, T}$.

A hipótese extra $(HE_2)$ verifica-se pelo lema 4.7.

Assim sendo, verificam-se todas as hipóteses do teorema 4.5, donde podemos concluir que o problema $(\mathcal{P})$ tem solução, isto é, admite um minimizante. ■

Mostrámos que o teorema 4.8 pode ser visto como um caso especial do teorema 4.5. As hipóteses implicam, como é sabido, que os conjuntos de subnível como $\Gamma(\overline{x}(\cdot))$ são compactos num sentido conveniente. Em contraste com isto, o teorema 4.5 aplica-se em situações onde $\Gamma(\overline{x}(\cdot))$ apenas tem de ser fechado, não precisando de ser compacto. (Ver exemplo 4.11).

### 4.7. Exemplos do caso autónomo

#### 4.7.1. Crescimento linear

Observámos na discussão do caso coercivo que a *condição de crescimento linear*

$$L(s,v) \geq c_1 |v| + c_2, \; \forall\, s \in \Omega, \; \forall\, v \in K,$$

para algum $c_1 > 0$ e algum $c_2 \in \mathbb{R}$ implica $(HE_1)$ para um certo valor $k$. Contudo, a condição de crescimento, sem $(HE_2)$, não garante a existência de solução para o problema $(\mathcal{P})$, como vamos ver no seguinte exemplo :

**Exemplo 4.9 (crescimento linear).** *Sejam $n = 1$, $T = 1$, $C = \{(0,1)\}$, $\Omega = \mathbb{R}$ e $K = \mathbb{R}$, $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função dada por*

$$L(s,v) := s^2 + f(v),$$

*onde $f(\cdot)$ é uma função convexa suave definida por*

$$f(v) := v[1 + \min(v,0)] = \begin{cases} v^2 + v & \text{se } v < 0 \\ v & \text{se } v \geq 0. \end{cases}$$

*Assim $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por*

$$L(s,v) := \begin{cases} s^2 + v^2 + v & \text{se } v < 0 \\ s^2 + v & \text{se } v \geq 0. \end{cases}$$

*A função $L(\cdot)$ satisfaz a condição de crescimento linear com $c_1 = 1$, $c_2 = -1$. De facto, fixando $s \in \mathbb{R}$, se $v < 0$ então*

$$L(s,v) = s^2 + v^2 + v \geq v^2 + v \geq |v| - 1$$

*e se $v \geq 0$ logo*

$$L(s,v) = s^2 + v \geq v = |v| \geq |v| - 1.$$

*Todas as hipóteses básicas são verificadas :*
*(i) $\Omega := \mathbb{R}$ é fechado;*
*(ii) $C := \{(0,1)\}$ é fechado e as projecções $C_x = \{0\}$ e $C_y = \{1\}$ são conjuntos compactos;*
*(iii) $K := \mathbb{R}$ é um cone convexo fechado;*
*(iv) $L(\cdot)$ é contínua em $\mathbb{R}^2$, em particular é sci;*
*(v) para cada $s \in \Omega$ :*
*($v_1$) a função $L(s,\cdot)$ é convexa, pois $f(\cdot)$ é convexa;*
*($v_2$) o domínio dom $L(s,\cdot) = \mathbb{R}$ é um conjunto aberto, convexo e não-vazio;*
*(vi) como $L(s,v) \geq |v| - 1$, então temos $L(s,v) \geq l(s)$, para alguma função $l(\cdot)$ localmente limitada inferiormente, basta definir $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por*

$$l(s) := |v| - 1, \; \forall\, v \in \mathbb{R};$$

*(vii) considerando a função lipschitziana $\overline{x} : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\overline{x}(t) := t,$$

*temos*

$$\begin{aligned} \Lambda(\overline{x}(\cdot)) &= \int_0^1 L(\overline{x}(t), \overline{x}'(t))\, dt = \int_0^1 \left[\overline{x}^2(t) + f(\overline{x}'(t))\right] dt = \int_0^1 \left[t^2 + f(1)\right] dt \\ &= \int_0^1 \left[t^2 + 1\right] dt = \left[\frac{t^3}{3} + t\right]_0^1 = \frac{4}{3} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

*Pela demonstração do teorema 4.8 (caso coercivo) a condição de crescimento linear faz com que* $(HE_1)$ *seja satisfeita para algum* $k > \frac{\Lambda(\overline{x}(\cdot))-(-1)\cdot 1}{1\cdot 1} = \frac{7}{3}$.

*Mostremos que* $(HE_2)$ *não se verifica. Fixemos* $s \in \mathbb{R}$, *então*

$$L_v(s,v) := \begin{cases} 2\ v+1 & se\ v<0 \\ \\ 1 & se\ v \geq 0. \end{cases}$$

*Desta maneira, se* $v < 0$, *vem*

$$L(s,v) - v \cdot L_v(s,v) = s^2 + v^2 + v - v(2\ v+1) = s^2 - v^2,$$

*e se* $v \geq 0$, *logo*

$$L(s,v) - v \cdot L_v(s,v) = s^2 + v - v(1) = s^2.$$

*Donde*

$$\inf_{\substack{s\in\mathbb{R},\\ v\in\mathbb{R},|v|<k}} \{L(s,v) - v \cdot L_v(s,v)\} = \inf_{\substack{s\in\mathbb{R},\\ v\in\mathbb{R},|v|<k}} \{s^2 - v^2\} = -k^2$$

*e*

$$\lim_{\beta\to+\infty} \sup_{\substack{s\in\mathbb{R},\\ v\in\mathbb{R},|v|>\beta}} \{L(s,v) - v \cdot L_v(s,v)\} = \lim_{\beta\to+\infty} \sup_{\substack{s\in\mathbb{R},\\ v\in\mathbb{R},|v|>\beta}} \{s^2\} = +\infty,$$

*isto é,*

$$\lim_{\beta\to+\infty} \sup_{\substack{s\in\mathbb{R},\\ v\in\mathbb{R},|v|>\beta}} \{L(s,v) - v \cdot L_v(s,v)\} > \inf_{\substack{s\in\mathbb{R},\\ v\in\mathbb{R},|v|<k}} \{L(s,v) - v\ L_v(s,v)\},$$

*o que significa que* $(*)$ *não acontece para qualquer* $k > 0$, *logo falha* $(HE_2)$.

*Qualquer função admissível* $x(\cdot)$ *satisfaz*

$$\begin{aligned} \Lambda(x(\cdot)) &= \int_0^1 L(x(t), x'(t))\ dt = \int_0^1 \left[x^2(t) + f(x'(t))\right]\ dt \\ &> \int_0^1 f(x'(t))\ dt \\ &\geq \int_0^1 x'(t)\ dt \text{ (dado que } f(v) \geq v,\ \forall\ v \in \mathbb{R}) \\ &= x(1) - x(0) = 1. \end{aligned}$$

*Então o ínfimo em* $(\mathcal{P})$ *não é menor que* 1, *e* $\Lambda(x(\cdot))$ *nunca atinge este valor. O ínfimo é, de facto, igual a* 1, *como é evidenciado pela sucessão de funções admissíveis* $x_i : [0,T] \to \mathbb{R}$ *definidas por*

$$x_i(t) := \begin{cases} 0 & se\ t \in \left[0, 1-\frac{1}{i}\right] \\ \\ 1 + i(t-1) & se\ t \in \left[1-\frac{1}{i}, 1\right], \end{cases} \quad \forall\ i \in \mathbb{N}.$$

*Temos* $\Lambda(x_i(\cdot)) \to 1$ *quando* $i \to +\infty$. *De facto, para qualquer* $i \in \mathbb{N}$, *vem*

$$\begin{aligned}
\Lambda(x_i(\cdot)) &= \int_0^1 L(x_i(t), x_i'(t))\, dt = \int_0^1 \left[x_i^2(t) + f(x_i'(t))\right] dt \\
&= \int_0^{1-\frac{1}{i}} [0 + f(0)]\, dt + \int_{1-\frac{1}{i}}^1 \left[(1 + i(t-1))^2 + f(i)\right] dt \\
&= \int_{1-\frac{1}{i}}^1 \left[(1 + i(t-1))^2 + i\right] dt \\
&= \frac{1}{i}\left[\frac{(1+i(t-1))^3}{3}\right]_{1-\frac{1}{i}}^1 + i\,[t]_{1-\frac{1}{i}}^1 \\
&= \frac{(1+i(1-1))^3}{3\,i} - \frac{\left(1+i\left(1-\frac{1}{i}-1\right)\right)^3}{3\,i} + i\left(1-1+\frac{1}{i}\right) \\
&= \frac{1}{3\,i} + 1
\end{aligned}$$

*logo*

$$\Lambda(x_i(\cdot)) = \frac{1}{3\,i} + 1 \underset{i \to +\infty}{\longrightarrow} 1,$$

*mostrando que* $(\mathcal{P})$ *não admite solução.* ■

No próximo exemplo não são aplicáveis as teorias de existência conhecidas, mas pode aplicar-se o teorema 4.5.

**Exemplo 4.10 (crescimento linear).** *Seja* $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$L(s,v) := g(s)\sqrt{1 + |v|^2},$$

*onde* $g(\cdot)$ *é uma qualquer função sci localmente limitada definida em* $\mathbb{R}^n$ *com* $\inf\limits_{s\in\Omega} g(s) > 0$.

*Afirmamos que para qualquer escolha de* $C$, $\Omega$, $K$ *satisfazendo as hipóteses básicas* $(i)$, $(ii)$, $(iii)$, *o problema* $(\mathcal{P})$ *tem solução (e todas as soluções são lipschitzianas). Para provar isto, notemos que qualquer* $x(\cdot) \in \Gamma(\overline{x}(\cdot))$ *admite uma limitação à priori de* $|x(\cdot)|_\infty$, *uma vez que* $L(\cdot)$ *tem crescimento linear (analogamente à obtenção de (4.72) na demonstração do teorema 4.8 (caso coercivo)). Consequentemente podemos supor, sem perda de generalidade, que* $\Omega$ *é compacto.*

*Queremos mostrar a validade hipótese básica* $(iv)$, *isto é,* $(s,v) \mapsto L(s,v)$ *é sci.*

*Consideremos a função* $L_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$L_1(s,v) := g(s).$$

*Como* $g(\cdot)$ *é sci, então* $g(\cdot)$ *é sci nalgum ponto* $\overline{s} \in \mathbb{R}^n$, *isto é,*

$$\forall\, \lambda < g(\overline{s}),\ \exists\, \delta_1 > 0,\ \forall\, s : |s - \overline{s}| < \delta_1 \Rightarrow \lambda < g(s).$$

*Assim, seja* $(\overline{s},\overline{v}) \in \mathbb{R}^{2n}$ *e para qualquer* $\lambda < L_1(\overline{s},\overline{v})$, *para algum* $\delta_1 > 0$ *(o mesmo para* $g(\cdot)$*) e* $(s,v)$ *qualquer tal que* $|(s,v) - (\overline{s},\overline{v})| < \delta_1$ *vem*

$$L_1(s,v) = g(s) > \lambda.$$

*Logo,* $L_1(\cdot)$ *é sci.*

*Seja agora a função* $L_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$L_2(s,v) := \sqrt{1 + |v|^2}.$$

*Como a função* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(v) := \sqrt{1+|v|^2}$$

*é contínua, em particular é sci. Então* $f(\cdot)$ *é sci nalgum ponto* $\overline{v} \in \mathbb{R}^n$*, ou seja,*

$$\forall\ \lambda < f(\overline{v}),\ \exists\ \delta_2 > 0,\ \forall\ v : |v - \overline{v}| < \delta_2 \Rightarrow \lambda < f(v).$$

*Desta maneira, seja* $(\overline{s}, \overline{v}) \in \mathbb{R}^{2n}$ *e para qualquer* $\lambda < L_2(\overline{s}, \overline{v})$*, para algum* $\delta_2 > 0$ *(o mesmo para* $f(\cdot)$*) e* $(s,v)$ *qualquer tal que* $|(s,v) - (\overline{s}, \overline{v})| < \delta_2$ *vem*

$$L_2(s,v) = \sqrt{1+|v|^2} > \lambda.$$

*Logo,* $L_2(\cdot)$ *é sci.*

*Por outro lado, como* $\Omega$ *é compacto e* $L_1(\cdot, v) = g(\cdot)$ *para qualquer* $v \in \mathbb{R}^n$ *é sci, então pelo teorema 6.25, existe pelo menos um ponto* $s_0 \in \Omega$ *tal que*

$$L_1(s_0, v) = g_0 = \min_{s \in \Omega} g(s) = \inf_{s \in \Omega} g(s) > 0,\ \forall\ v \in \mathbb{R}^n.$$

*Logo,* $L_1(s,v) > 0,\ \forall\ (s,v) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$.

*Além disso,* $L_2(s,v) > 0,\ \forall\ (s,v) \in \mathbb{R}^{2n}$*, em particular,* $L_2(s,v) > 0,\ \forall\ (s,v) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$ *(*$L_2(\cdot)$ *não depende de* $s$*).*

*Consequentemente, a função* $L(\cdot) := L_1(\cdot)\ L_2(\cdot)$ *é sci pela proposição 6.24.*

*Por outro lado, vamos fixar* $s \in \Omega$ *e mostrar que* $L(s, \cdot)$ *é convexa em* $\mathbb{R}^n$*. Consideremos a função* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(v) := \sqrt{1+|v|^2}.$$

*Como a função*

$$v \mapsto |v|^p$$

*definida em* $\mathbb{R}^n$ *é convexa para* $p \geq 1$ *(*$|\cdot|$ *é a norma euclidiana) (ver [30], p. 32), em particular a função* $\widetilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\widetilde{f}(v) := |v|^2$$

*é convexa. Desta maneira para quaisquer* $v,\ w \in \mathbb{R}^n$ *e* $\lambda \in (0,1)$ *temos*

$$\begin{aligned}
f(\lambda\, v + (1-\lambda)\, w) &= \sqrt{1 + |\lambda\, v + (1-\lambda)\, w|^2} \\
&\leq \sqrt{1 + \lambda\, |v|^2 + (1-\lambda)\, |w|^2} \\
&= \sqrt{\lambda \left(1+|v|^2\right) + (1-\lambda)\left(1+|w|^2\right)} \\
&\leq \sqrt{\lambda \left(1+|v|^2\right)} + \sqrt{(1-\lambda)\left(1+|w|^2\right)} \\
&\leq \lambda \sqrt{1+|v|^2} + (1-\lambda)\sqrt{1+|w|^2} \\
&= \lambda\, f(v) + (1-\lambda)\, f(w)
\end{aligned}$$

*(as duas últimas desigualdades acontecem porque*

$$\sqrt{A+B} \leq \sqrt{A} + \sqrt{B}, \qquad A,\ B \geq 0$$

e
$$\sqrt{A} \leq A, \qquad A \geq 0).$$

*Então $f$ é convexa em $\mathbb{R}^n$. Logo, $L(s,\cdot)$ é convexa em $\mathbb{R}^n$, pois*

$$\begin{aligned} L(s, \lambda\, v + (1-\lambda)\, w) &= g(s)\sqrt{1 + |\lambda\, v + (1-\lambda)\, w|^2} \\ &\leq \lambda\sqrt{1+|v|^2} + (1-\lambda)\sqrt{1+|w|^2} \\ &= \lambda\, L(s,v) + (1-\lambda)\, L(s,w), \end{aligned}$$

*para quaisquer $v$, $w \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in (0,1)$. E como, para cada $s \in \Omega$, dom $L(s,\cdot) = \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto, convexo e não-vazio, então a hipótese básica $(v)$ é verificada.*

*A hipótese básica $(vi)$ também se verifica, pois*

$$L(s,v) := g(s)\sqrt{1+|v|^2} \geq g(s) \geq \min_{s\in\Omega} g(s) > 0$$

*(dado que $|v|^2 \geq 0 \Leftrightarrow 1 + |v|^2 \geq 1 \Rightarrow \sqrt{1+|v|^2} \geq 1$), então temos $L(s,v) \geq l(s)$, para $l(\cdot) = g(\cdot)$ localmente limitada inferiormente.*

*Notemos que a hipótese básica $(vii)$ é verificada pois estamos a considerar $x(\cdot) \in \Gamma(\overline{x}(\cdot))$, logo $\Lambda(x(\cdot)) \leq \Lambda(\overline{x}(\cdot))$, para alguma função lipschitziana $\overline{x}(\cdot) \in X$ para a qual $\Lambda(\overline{x}(\cdot))$ é finito.*

*Para além disso, $L(\cdot)$ satisfaz a condição de crescimento linear, porque*

$$L(s,v) := g(s)\sqrt{1+|v|^2} \geq \min_{s\in\Omega} g(s) \;\; |v| = g_0 \;\; |v|, \forall \;(s,v) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$$

*(dado que $\sqrt{1+|v|^2} \geq |v|$, pois*

$$\sqrt{1+|v|^2} - |v| = \frac{\left(\sqrt{1+|v|^2} - |v|\right)\left(\sqrt{1+|v|^2} + |v|\right)}{\sqrt{1+|v|^2} + |v|} = \frac{1}{\sqrt{1+|v|^2} + |v|} \geq 0).$$

*Pela demonstração do teorema 4.8 (caso coercivo) a condição de crescimento linear faz com que $(HE_1)$ seja satisfeita para algum $k > \frac{\Lambda(\overline{x}(\cdot)) - c_2\, T}{c_1\, T}$, logo para aplicar o teorema 4.5 é suficiente verificar que $(*)$ acontece para qualquer $k > 0$.*

*Temos*

$$\begin{aligned} L(s,v) - \langle v, \nabla_v L(s,v)\rangle &= g(s)\sqrt{1+|v|^2} - \left\langle v, \frac{g(s)\;\, v}{\sqrt{1+|v|^2}}\right\rangle = g(s)\sqrt{1+|v|^2} - \frac{g(s)}{\sqrt{1+|v|^2}}\langle v, v\rangle \\ &= g(s)\sqrt{1+|v|^2} - \frac{g(s)}{\sqrt{1+|v|^2}}|v|^2 = \frac{g(s)\left(1+|v|^2\right) - g(s)\;\; |v|^2}{\sqrt{1+|v|^2}} \\ &= \frac{g(s)}{\sqrt{1+|v|^2}}. \end{aligned}$$

*Então, se $g_1$ é uma limitação superior para $g(\cdot)$ em $\Omega$, isto é,*

$$g_1 := \sup_{s\in\Omega} g(s),$$

*vem*

$$\lim_{\beta\to+\infty} \sup_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K,|v|>\beta}} \{L(s,v) - \langle v, \nabla_v L(s,v)\rangle\} = \lim_{\beta\to+\infty} \sup_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K,|v|>\beta}} \left\{ \frac{g(s)}{\sqrt{1+|v|^2}} \right\} = \lim_{\beta\to+\infty} \frac{g_1}{\sqrt{1+\beta^2}} = 0.$$

*Por outro lado,*

$$\inf_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K,|v|<k}} \{L(s,v) - \langle v, \nabla_v L(s,v)\rangle\} = \inf_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K,|v|<k}} \left\{ \frac{g(s)}{\sqrt{1+|v|^2}} \right\} = \frac{g_0}{\sqrt{1+k^2}}.$$

*Donde*

$$\lim_{\beta\to+\infty} \sup_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K,|v|>\beta}} \{L(s,v) - \langle v, \nabla_v L(s,v)\rangle\} < \inf_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K,|v|<k}} \{L(s,v) - \langle v, \nabla_v L(s,v)\rangle\}$$

*E portanto,* $(*)$ *é satisfeita para* $k > 0$*, verificando-se* $(HE_2)$*.*

*Finalmente, pelo teorema 4.5 concluimos que o problema* $(\mathcal{P})$ *tem solução e qualquer solução é lipschitziana.* ■

Neste exemplo $(*)$ é satisfeita para qualquer $k > 0$. Vamos agora ver um caso em que acontece o contrário; isto é $(*)$ vale apenas para alguns valores de $k$.

**Exemplo 4.11 (crescimento linear).** *Sejam* $K = \Omega := \mathbb{R}^n$, $C := \{(0,0)\}$, $T = 1$, $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *a função definida por*

$$L(s,v) := \sqrt{1+|v|^2} - r\ \sin|s|,$$

*onde* $r$ *é uma constante positiva e as condições de fronteira são* $x(0) = x(1) = 0$*. Consideremos o problema de minimizar o integral*

$$\Lambda(x(\cdot)) := \int_0^1 \left\{ \sqrt{1+|x'(t)|^2} - r\ \sin|x(t)| \right\} dt.$$

*Pela forma como os conjuntos* $K$*,* $\Omega$ *e* $C$ *estão definidos, as hipóteses básicas* $(i)$*,* $(ii)$ *e* $(iii)$ *são verificadas.* $L(\cdot)$ *é contínua em* $\mathbb{R}^2$*, em particular é sci, verificando-se a hipótese básica* $(iv)$*.*

*Por outro lado, a função* $L_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$L_2(s,v) := \sqrt{1+|v|^2}$$

*é convexa (ver exemplo 4.10) e própria. Então a função* $L(s,\cdot)$ *é convexa, para cada* $s \in \mathbb{R}^n$*, pelo teorema 19.68. Além disso, para cada* $s \in \mathbb{R}^n$*, o domínio dom* $L(s,\cdot) = \mathbb{R}$ *é um conjunto aberto, convexo e não-vazio, donde a hipótese básica* $(v)$ *é satisfeita.*

*Mostremos que a hipótese básica* $(vi)$ *também acontece. Temos*

$$L(s,v) := \sqrt{1+|v|^2} - r\ \sin|s| \geq 1 - r$$

*(dado que* $\sqrt{1+|v|^2} \geq 1$ *e* $-1 \leq -\sin|s| \leq 1$*), então* $L(s,v) \geq l(s)$*, para alguma função* $l(\cdot)$ *localmente limitada inferiormente, basta definir* $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *por*

$$l(s) := 1 - r.$$

*Verifiquemos a hipótese básica* $(vii)$*. Para tal consideremos a função lipschitziana, em* $X$*,* $\overline{x} : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ *dada por*

$$\overline{x}(t) := 0,$$

*então*

$$\Lambda(\overline{x}(\cdot)) = \int_0^1 L(\overline{x}(t), \overline{x}'(t))\, dt = \int_0^1 \left\{\sqrt{1+|0|^2} - r\, \sin|0|\right\} dt = \int_0^1 1\, dt = 1 \in \mathbb{R}.$$

*Seja* $(s,v) \in \mathbb{R}^{2n}$ *qualquer, então*

$$\begin{aligned} L(s,v) - \langle v, \nabla_v L(s,v)\rangle &= \sqrt{1+|v|^2} - r\, \sin|s| - \left\langle v, \frac{v}{\sqrt{1+|v|^2}}\right\rangle \\ &= \sqrt{1+|v|^2} - r\, \sin|s| - \frac{1}{\sqrt{1+|v|^2}}\langle v,v\rangle = \sqrt{1+|v|^2} - r\, \sin|s| - \frac{1}{\sqrt{1+|v|^2}}|v|^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+|v|^2}} - r\, \sin|s|. \end{aligned}$$

*Donde*

$$\begin{aligned} \lim_{\beta\to+\infty} \sup_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K, |v|>\beta}} \{L(s,v) - \langle v, \nabla_v L(s,v)\rangle\} &= \lim_{\beta\to+\infty} \sup_{\substack{s\in\mathbb{R}^n,\\ v\in\mathbb{R}^n, |v|>\beta}} \left\{\frac{1}{\sqrt{1+|v|^2}} - r\, \sin|s|\right\} \\ &= \lim_{\beta\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} + r\right) = r \end{aligned}$$

*e*

$$\inf_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K, |v|<k}} \{L(s,v) - \langle v, \nabla_v L(s,v)\rangle\} = \inf_{\substack{s\in\mathbb{R}^n,\\ v\in\mathbb{R}^n, |v|<k}} \left\{\frac{1}{\sqrt{1+|v|^2}} - r\, \sin|s|\right\} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} - r.$$

*Logo, desigualdade* $(*)$ *reduz-se à condição*

$$r < \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} - r \Leftrightarrow 2\, r\sqrt{1+k^2} < 1, \tag{4.73}$$

*então para aplicarmos o teorema 4.5, temos de mostrar que* $(HE_1)$ *é válida para* $k$ *verificando (4.73).*

*A condição de crescimento linear é satisfeita com* $c_1 = 1$, $c_2 = -r$. *De facto,*

$$L(s,v) := \sqrt{1+|v|^2} - r\, \sin|s| \geq |v| - r,\ \forall\ (s,v) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

*Pela demonstração do teorema 4.8 (caso coercivo) a condição de crescimento linear faz com que* $(HE_1)$ *seja satisfeita para algum* $k > \frac{\Lambda(\overline{x}(\cdot)) - c_2\, T}{c_1\, T}$. *Desta maneira,* $(HE_1)$ *acontece para qualquer*

$$k > \frac{1-(-r)\ 1}{1\ 1} = 1 + r.$$

*Deduzimos consequentemente, pelo teorema 4.5, que* $(\mathcal{P})$ *admite solução sempre que*

$$2\, r\sqrt{1+(1+r)^2} < 1,$$

*isto é, quando* $r$ *é suficientemente pequeno.*

*Vamos mostrar que não existe solução quando* $r$ *é suficientemente grande. Quando* $x(\cdot)$ *é solução para* $(\mathcal{P})$, *pelo teorema 4.5, temos*

$$L(x(t), x'(t)) - \langle x'(t), \nabla_v L(x(t), x'(t))\rangle = c \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+|x'(t)|^2}} - r\, \sin|x(t)| = c \text{ qs em } [0,1].$$

*Como* $x(0)=0$, *então* $c>0$. *Mostremos que isso de facto acontece. Pelo teorema 4.5, qualquer solução para* $(\mathcal{P})$ *é lipschitziana, então* $x(\cdot)$ *é lipschitziana. Logo*

$$\exists\ M>0:|x'(t)|\leq M \text{ qs em } [0,1]$$

*e*

$$c=\frac{1}{\sqrt{1+|x'(t)|^2}}-r\ \sin|x(t)|\geq\frac{1}{\sqrt{1+M^2}}-r\ \sin|x(t)| \text{ qs em } [0,1]$$

*(esta última desigualdade acontece porque*

$$|x'(t)|\leq M \text{ qs em } [0,1] \quad\Rightarrow\quad \sqrt{1+|x'(t)|^2}\leq\sqrt{1+M^2} \text{ qs em } [0,1]$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{\sqrt{1+|x'(t)|^2}}\geq\frac{1}{\sqrt{1+M^2}} \text{ qs em } [0,1]\,).$$

*Então existe um conjunto*

$$N:=\left\{t\in[0,1]:\frac{1}{\sqrt{1+M^2}}-r\ \sin|x(t)|>c\right\}$$

*com medida nula.*

*Seja* $(t_i)\subset[0,1]\backslash N$, *para qualquer* $i\in\mathbb{N}$, *uma qualquer sucessão tal que* $(t_i)\to 0$. *Como* $x(\cdot)$ *é AC, em particular é contínua, então* $|x(\cdot)|$ *é contínua por ser a composição de funções contínuas. Logo* $\sin|x(\cdot)|$ *é contínua também por ser a composição de funções contínuas. E portanto, passando ao limite temos*

$$\begin{aligned}\lim_{i\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+M^2}}-r\ \sin|x(t_i)|\right)\ &\leq\ c\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{1+M^2}}-r\ \sin|x(0)|\leq c\\ &\Leftrightarrow\ \frac{1}{\sqrt{1+M^2}}-r\ \sin|0|\leq c\\ &\Rightarrow\ c\geq\frac{1}{\sqrt{1+M^2}}>0,\end{aligned}$$

*isto é, c é uma constante positiva. Consequentemente temos*

$$-r\ \sin|x(t)|=c-\frac{1}{\sqrt{1+|x'(t)|^2}}\geq c-1>-1 \text{ qs em } [0,1]\,.$$

*Mas como* $\sin|x(\cdot)|$ *é uma função contínua vem*

$$-r\ \sin|x(t)|>-1,\ \forall\ t\in[0,1]\,.$$

*O que implica que* $\Lambda(x(\cdot))$ *é positivo, pois*

$$\begin{aligned}\Lambda(x(\cdot))\ &=\ \int_0^1\left\{\sqrt{1+|x'(t)|^2}-r\ \sin|x(t)|\right\}dt\\ &>\ \int_0^1\left\{\sqrt{1+|x'(t)|^2}-1\right\}dt\\ &\geq\ \int_0^1(1-1)\ dt=0.\end{aligned}$$

*Por outro lado, quando $r > 1 + \pi$ definimos uma sucessão de funções admissíveis $x_i : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ por*

$$x_i(t) := \begin{cases} iyt & \text{se } t \in \left[0, \frac{1}{i}\right] \\ y & \text{se } t \in \left(\frac{1}{i}, 1 - \frac{1}{i}\right) \\ -iy(t-1) & \text{se } t \in \left[1 - \frac{1}{i}, 1\right], \quad \forall\, i \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

*onde $y$ é um vector constante de norma $\frac{\pi}{2}$. Então para cada $i \in \mathbb{N}$, vem*

$$\begin{aligned}
\Lambda(x_i(\cdot)) &= \int_0^1 \left\{ \sqrt{1 + |x_i'(t)|^2} - r \sin|x_i(t)| \right\} dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{i}} \left\{ \sqrt{1 + |iy|^2} - r \sin|iyt| \right\} dt + \int_{\frac{1}{i}}^{1-\frac{1}{i}} \left\{ \sqrt{1 + |0|^2} - r \sin|y| \right\} dt + \\
&\quad + \int_{1-\frac{1}{i}}^1 \left\{ \sqrt{1 + |iy|^2} - r \sin|iy(t-1)| \right\} dt \\
&= \frac{1}{i}\sqrt{1 + |iy|^2} - \frac{r}{|iy|}\left[-\cos|y| + \cos|0|\right] + (1 - r \sin|y|)\left(1 - \frac{2}{i}\right) + \\
&\quad + \frac{1}{i}\sqrt{1 + |iy|^2} - \frac{r}{|iy|}\left[-\cos|0| + \cos|y|\right] \\
&= \frac{2}{i}\sqrt{1 + |iy|^2} + \left(1 - \frac{2}{i}\right)(1 - r \sin|y|) \\
&= 2\sqrt{\frac{1}{i^2} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} + \left(1 - \frac{2}{i}\right)\left(1 - r \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \quad (\text{pois } |y| = \frac{\pi}{2}) \\
&= 2\sqrt{\frac{1}{i^2} + \frac{\pi^2}{4}} + \left(1 - \frac{2}{i}\right)(1 - r),
\end{aligned}$$

*logo*

$$\lim_{i \to +\infty} \Lambda(x_i(\cdot)) = \lim_{i \to +\infty} \left[ 2\sqrt{\frac{1}{i^2} + \frac{\pi^2}{4}} + \left(1 - \frac{2}{i}\right)(1 - r) \right] = \pi + 1 - r < 0 \ (\text{pois } r > 1 + \pi),$$

*então não pode existir nenhuma solução $x(\cdot)$ com $\Lambda(x(\cdot)) > 0$. Notemos que para qualquer valor de $r$, $\Lambda(\cdot)$ é limitado ao longo da sucessão $(x_i(\cdot))$ (acima definida). De facto,*

$$\begin{aligned}
|\Lambda(x_i(\cdot))| &= \left| 2\sqrt{\frac{1}{i^2} + \frac{\pi^2}{4}} + \left(1 - \frac{2}{i}\right)(1 - r) \right| \le 2\sqrt{\frac{1 + i^2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{i^2}} + \left|1 - \frac{2}{i}\right| |1 - r| \\
&\le 2\sqrt{\frac{\left(1 + \frac{\pi}{2}i\right)^2}{i^2}} + \left|1 - \frac{2}{i}\right| |1 - r| = 2\frac{\left(1 + \frac{\pi}{2}i\right)}{i} + \left|1 - \frac{2}{i}\right| |1 - r| \\
&\le 2\left(\frac{1}{i} + \frac{\pi}{2}\right) + \left(1 + \frac{2}{i}\right)|1 - r| \le 2\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) + 3|1 - r|, \ \forall\, i \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

*Tenhamos também em atenção que nenhuma subsucessão de $(x_i(\cdot))$ converge para uma função AC, pois* *para a sucessão* $(x_i(\cdot))$ *temos*

$$\lim_{i\to+\infty} x_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t = 0 \\ y & \text{se } t \in (0,1) \\ 0 & \text{se } t = 1, \quad \forall\, i \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

*(com* $\lim_{i\to+\infty} x_i(t) = x(t)$*) onde* $x(\cdot)$ *não é uma função contínua em* $[0,1]$ *(logo não é AC). Desta maneira,* $\Gamma(\overline{x}(\cdot))$ *não é um conjunto compacto. Isto mostra que mesmo quando se aplica o teorema 4.5, o conjunto* $\Gamma(\overline{x}(\cdot))$ *não precisa de ser compacto como no caso coercivo.*

*A questão mantém-se mesmo para uma melhor estimativa para* $k$ *(isto é, para um valor mais pequeno). Recordemos que* $k$ *é algum número superior a* $\inf_{0\le t\le T} |x'(t)|$*, onde* $x(\cdot)$ *é um elemento arbitrário de* $\Gamma(\overline{x}(\cdot))$*, e que a nossa escolha de* $k$ *resulta da condição de crescimento linear. Podemos melhorar em* $k$ *(e portanto deduzir a existência de um maior conjunto de valores para* $r$*) melhorando em* $\overline{x}(\cdot)$ *: isto é, encontrando outra função lipschitziana admissível que dê um valor mais pequeno a* $\Lambda(\cdot)$*. Mas o melhor resultado será obtido tomando* $k$ *arbitrariamente próximo de zero, e isto é possível quando* $n = 1$*, através de uma aproximação alternativa própria do caso* $n = 1$ *(ver subsecção 5.5 para uma continuação desta discussão).* ■

### 4.7.2. Exemplos sem crescimento linear

Nos exemplos acima, a partir da condição de crescimento linear obtivémos a condição $(HE_1)$. Vamos agora ver alguns exemplos nos quais $L(\cdot)$ não possui esse crescimento e onde $(HE_1)$ resulta da estrutura do cone e das condições de fronteira.

**Exemplo 4.12 (sem crescimento linear).** *Seja* $n = 1$ *e consideremos o problema de minimizar o integral*

$$\Lambda(x(\cdot)) := \int_0^1 \left\{ e^{-x'(t)} + r\, g(x(t)) \right\} dt,$$

*onde :*

- $x'(t) \geq 0$ *qs em* $[0,1]$*;*
- $x(0) = 0$*,* $x(1) = \delta > 0$*;*
- $g(\cdot)$ *é uma função sci e localmente limitada;*
- $r$ *é um real não-negativo;*
- $K := [0,\infty)$ *e* $C := \{(0,\delta)\}$*.*

*Seja* $L : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$L(s,v) := e^{-v} + r\, g(s).$$

*Notemos que qualquer função admissível* $x(\cdot)$ *toma necessariamente valores em* $[0,\delta]$*. De facto, como* $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ *é AC e* $x'(t) \geq 0$ *qs em* $[0,1]$*, então* $x(\cdot)$ *é uma função crescente (ver início da demonstração do teorema 2.1). E como* $x(0) = 0$*,* $x(1) = \delta > 0$*, temos que* $x(t) \in \Omega := [0,\delta]$*,* $\forall\, t \in [0,1]$*, verificando-se a hipótese básica* $(i)$*.*

*Além disso, verificam-se as hipóteses básicas* $(ii)$ *e* $(iii)$*, pelas definições dos conjuntos* $C$ *e* $K$*.*

*Queremos agora ver se* $(s,v) \mapsto L(s,v)$ *é sci, isto é, se a hipótese básica* $(iv)$ *é satisfeita.*

*Consideremos a função* $L_1 : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$L_1(s,v) := e^{-v}.$$

*Como a função* $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$E(v) := e^{-v}$$

*é contínua, em particular é sci. Então* $E(\cdot)$ *é sci nalgum ponto* $\overline{v} \in \mathbb{R}$, *isto é,*

$$\forall\ \lambda < E(\overline{v}),\ \exists\ \delta_1 > 0,\ \forall\ v : |v - \overline{v}| < \delta_1 \Rightarrow \lambda < E(v).$$

*Assim, seja* $(\overline{s}, \overline{v}) \in \mathbb{R}^2$ *e para qualquer* $\lambda < L_1(\overline{s}, \overline{v})$, *para algum* $\delta_1 > 0$ *(o mesmo para* $E(\cdot)$*) e* $(s, v)$ *qualquer tal que* $|(s,v) - (\overline{s}, \overline{v})| < \delta_1$ *vem*

$$L_1(s,v) = e^{-v} = E(v) > \lambda.$$

*Logo,* $L_1(\cdot)$ *é sci.*

*Seja* $L_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$L_2(s,v) := g(s).$$

*Como* $g(\cdot)$ *é sci, então* $g(\cdot)$ *é sci nalgum ponto* $\overline{s} \in \mathbb{R}$, *isto é,*

$$\forall\ \lambda < g(\overline{s}),\ \exists\ \delta_2 > 0,\ \forall\ s : |s - \overline{s}| < \delta_2 \Rightarrow \lambda < g(s).$$

*Assim, seja* $(\overline{s}, \overline{v}) \in \mathbb{R}^2$ *e para qualquer* $\lambda < L_2(\overline{s}, \overline{v})$, *para algum* $\delta_2 > 0$ *(o mesmo para* $g(\cdot)$*) e* $(s, v)$ *qualquer tal que* $|(s,v) - (\overline{s}, \overline{v})| < \delta_2$ *vem*

$$L_2(s,v) = g(s) > \lambda.$$

*Logo,* $L_2(\cdot)$ *é sci. Donde* $rL_2(\cdot)$ *é sci, pela proposição 6.28.*

*E portanto,* $L(\cdot)$ *é sci, pela proposição 6.22. Verificando-se a hipótese básica* $(iv)$.

*Por outro lado, fixemos* $s \in \Omega$. *Como*

$$L_v(s,v) = -e^{-v}$$

*e*

$$L_{vv}(s,v) = e^{-v} > 0,$$

*logo* $L(s,\cdot)$ *é convexa em* $\mathbb{R}$, *pela proposição 19.53. E como, para cada* $s \in \Omega$, *dom* $L(s,\cdot) = \mathbb{R}$ *é um conjunto aberto, convexo e não-vazio, então a hipótese básica* $(v)$ *é verificada.*

*Como* $\Omega$ *é compacto e* $g(\cdot) = L(\cdot, v)$ *é sci, então pelo teorema 6.25, existe pelo menos um ponto* $s_0 \in \Omega$ *tal que*

$$L(s_0, v) = g(s_0) = g_0 = \min_{s\in\Omega} g(s) = \inf_{s\in\Omega} g(s),\ \forall\ v \in \mathbb{R}.$$

*Desta maneira, para qualquer* $(s,v) \in \Omega \times \mathbb{R}$ *vem*

$$L(s,v) = e^{-v} + r\ g(s) > r\ g(s) \geq r\ g_0,$$

*então temos* $L(s,v) \geq l(s)$, *onde* $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$l(s) := r\ g_0,$$

*a qual é limitada (por ser constante), em particular é localmente limitada inferiormente, verificando-se a hipótese básica* $(vi)$.

*Vejamos se a hipótese básica* $(vii)$ *é verificada. Consideremos a função lipschitziana admissível para* $(\mathcal{P})$, $\overline{x} : [0,1] \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$\overline{x}(t) := \delta\ t,$$

*então*

$$\Lambda(\overline{x}(\cdot)) = \int_0^1 L(\overline{x}(t), \overline{x}'(t))\ dt = \int_0^1 \left\{e^{-\delta} + r\ g(\delta\ t)\right\}\ dt = e^{-\delta} + r \int_0^1 g(\delta\ t)\ dt.$$

*Como* $\Omega$ *é compacto e* $g(\cdot) = L(\cdot, v)$ *é localmente limitada,então existe pelo menos um ponto* $s_1 \in \Omega$ *tal que*

$$L(s_1, v) = g(s_1) = g_1 = \max_{s\in\Omega} g(s) = \sup_{s\in\Omega} g(s),\ \forall\ v \in \mathbb{R}.$$

*Desta maneira,*

$$r\ g_0 = 0 + r \int_0^1 g_0\ dt \leq \Lambda(\overline{x}(\cdot)) \leq 1 + r \int_0^1 g_1\ dt = 1 + r\ g_1,$$

*isto é,* $\Lambda(\overline{x}(\cdot)) \in \mathbb{R}$, *verificando-se a hipótese básica* $(vii)$.

*Além disso, para qualquer* $k > \delta$, *qualquer função admissível* $x(\cdot)$ *tem de verificar*

$$|x'(t)| < k$$

*para* $t$ *num conjunto de medida positiva. Suponhamos que isso não é verdade, então*

$$|x'(t)| \geq k$$

*para* $t$ *em qualquer conjunto de medida positiva e*

$$k = \int_0^1 k\ dt \leq \int_0^1 |x'(t)|\ dt = \int_0^1 x'(t)\ dt = x(1) - x(0) = \delta$$

*(pois* $x'(t) \geq 0$ *qs em* $[0,1]$*), contradizendo o facto de termos suposto que* $k > \delta$. *Logo,*

$$\inf_{0 \leq t \leq 1} ess\ |x'(t)| < k,$$

*e portanto a hipótese extra* $(HE_1)$ *verifica-se para qualquer* $k > \delta$.

*Falta verificar a hipótese extra* $(HE_2)$. *Calculamos*

$$L(s,v) - v \cdot L_v(s,v) = r\ g(s) + e^{-v}[1+v].$$

*Então*

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \to +\infty} \sup_{\substack{s \in \Omega, \\ v \in K, |v| > \beta}} \{L(s,v) - v \cdot L_v(s,v)\} &= \lim_{\beta \to +\infty} \sup_{\substack{s \in [0,\delta], \\ v \in [0,+\infty), v > \beta}} \left\{r\ g(s) + e^{-v}[1+v]\right\} \\ &= \lim_{\beta \to +\infty} \left(r\ g_1 + e^{-\beta}[1+\beta]\right) = r\ g_1 \end{aligned}$$

e

$$\inf_{\substack{s \in \Omega, \\ v \in K, |v| < k}} \{L(s,v) - v \cdot L_v(s,v)\} = \inf_{\substack{s \in [0,\delta], \\ v \in [0,+\infty), 0 < v < k}} \left\{r\ g(s) + e^{-v}[1+v]\right\} = r\ g_0 + e^{-k}[1+k].$$

*Consequentemente, se* $(*)$ *acontece para qualquer* $k > \delta$, *temos de ter*

$$r\ g_1 < r\ g_0 + e^{-k}[1+k] < r\ g_0 + e^{-\delta}[1+\delta],$$

*para* $r$ *suficientemente pequeno. (Em alternativa, para um certo* $r$, *isto acontece para* $\delta$ *suficientemente pequeno.) Para tal* $r$, *pode-se aplicar o teorema 4.5 e conclui-se que existe uma solução lipschitziana.* ■

Vamos agora ver um exemplo no qual o domínio de $L(s,\cdot)$ não é todo o $\mathbb{R}^n$ :

**Exemplo 4.13 (sem crescimento linear).** *Seja* $n = 1$, $T = 1$ *e consideremos o problema de minimizar o integral*

$$\Lambda(x(\cdot)) := \int_0^1 \left\{(x'(t))^{-2} - (x(t))^2\right\}\ dt,$$

*onde :*

- $x'(t) \geq 0$ *qs em* $[0,1]$;
- $x(0) = 0$, $x(1) = \delta > 0$;
- $\Omega := [0,\delta]$;
- $K := [0,\infty)$;
- $C := \{(0,\delta)\}$.

*Podemos adicionar a restrição $x(t) \in \Omega := [0, \delta]$, para qualquer $t \in [0,1]$, sem modificar a natureza do problema.*

*Consideremos a função $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ dada por*

$$L(s,v) := \begin{cases} v^{-2} - s^2 & \text{se } (s,v) \in \Omega \times (0,+\infty) \\ +\infty & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

*Notemos que o domínio de $L(s,\cdot)$ é $(0,+\infty)$ para cada $s \in \Omega$.*

*Verifiquemos as hipóteses básicas.*

*Pelas definições dos conjuntos $\Omega$, $C$ e $K$, verificam-se as hipóteses básicas $(i)$, $(ii)$ e $(iii)$.*

*Queremos agora verificar a hipótese básica $(iv)$, isto é, ver se $(s,v) \mapsto L(s,v)$ é sci.*

*Como a função $L(\cdot)$ é contínua em $\Omega \times (0,+\infty)$, em particular é sci em $\Omega \times (0,+\infty)$.*

*Por outro lado, fixemos $s \in \Omega$. Como*

$$L_v(s,v) = -2\ v^{-3}$$

*e*

$$L_{vv}(s,v) = 6\ v^{-4} > 0$$

*(pois $v \in (0,+\infty)$), então $L(s,\cdot)$ é convexa em $(0,+\infty)$, pela proposição 19.53. E como, para cada $s \in \Omega$, dom $L(s,\cdot) = (0,+\infty)$ é um conjunto aberto, convexo e não-vazio, temos que $L(s,\cdot)$ é convexa em $\mathbb{R}$, pela proposição 19.54. Verificando-se a hipótese básica $(v)$.*

*Seja $(s,v) \in \Omega \times \mathbb{R}$ qualquer então*

$$L(s,v) \geq v^{-2} - s^2 \geq -s^2 \geq -\delta^2,$$

*logo temos $L(s,v) \geq l(s)$, onde $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por*

$$l(s) := -\delta^2,$$

*a qual é limitada (por ser constante), em particular é localmente limitada inferiormente, verificando-se a hipótese básica $(vi)$.*

*Vejamos se a hipótese básica $(vii)$ é verificada. Consideremos a função lipschitziana admissível para $(\mathcal{P})$, $\overline{x} : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\overline{x}(t) := \delta\ t,$$

*então*

$$\Lambda(\overline{x}(\cdot)) = \int_0^1 L(\overline{x}(t), \overline{x}'(t))\ dt = \int_0^1 \left[\delta^{-2} - (\delta\ t)^2\right]\ dt = \delta^{-2} - \frac{\delta^2}{3} \in \mathbb{R},$$

*como pretendido.*

*É claro, tal como no exemplo anterior, que $(HE_1)$ é satisfeita para qualquer $k > \delta$.*

*Vejamos agora $(HE_2)$. Calculemos*

$$L(s,v) - v \cdot L_v(s,v) = 3\ v^{-2} - s^2.$$

*Então*

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \to +\infty} \sup_{\substack{s \in \Omega, \\ v \in K, |v| > \beta}} \{L(s,v) - v \cdot L_v(s,v)\} &= \lim_{\beta \to +\infty} \sup_{\substack{s \in [0,\delta], \\ v \in [0,+\infty), v > \beta}} \left\{3\ v^{-2} - s^2\right\} \\ &= \lim_{\beta \to +\infty} \left(3\ \beta^{-2}\right) = 0 \end{aligned}$$

*e*

$$\inf_{\substack{s \in \Omega, \\ v \in K, |v| < k}} \{L(s,v) - v \cdot L_v(s,v)\} = \inf_{\substack{s \in [0,\delta], \\ v \in [0,+\infty), 0 < v < k}} \left\{3\ v^{-2} - s^2\right\} = 3\ k^{-2} - \delta^2.$$

*Por forma a termos* $(*)$ *para algum* $k > \delta$, *vamos exigir que*

$$0 < 3\ k^{-2} - \delta^2 < 3\ \delta^{-2} - \delta^2,$$

*isto é,*

$$\delta^2 < 3\ \delta^{-2},$$

*o que acontece para* $\delta$ *suficientemente pequeno. Para tal* $\delta$, *pode-se aplicar o teorema 4.5 e conclui-se que existe uma solução lipschitziana.* ∎

Vejamos um exemplo sem crescimento linear a duas dimensões :

**Exemplo 4.14 (sem crescimento linear).** *Seja* $n = 2$, $T = 1$ *e consideremos o problema de minimizar o integral*

$$\Lambda(x(\cdot)) := \int_0^1 \left\{e^{-x_1'(t)} + \left((x_2'(t))^2 + x_1'(t)\ g(x(t))\right)\right\}\ dt,$$

*onde :*
- $x_i'(t) \geq 0$ *qs em* $[0,1]$ $(i = 1, 2)$;
- $x(0) = (0,0)$, $x(1) = (\delta_1, \delta_2)$, *com* $\delta_i > 0$ $(i = 1, 2)$;
- $g(\cdot)$ *é contínua;*
- $\Omega := [0, \delta_1] \times [0, \delta_2]$;
- $K := [0, +\infty) \times [0, +\infty)$;
- $C := \{(0,0), (\delta_1, \delta_2)\}$.

*Consideremos a função* $L : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow (-\infty, +\infty]$ *dada por*

$$L(s,v) := \begin{cases} e^{-v_1} + v_2^2 + v_1\ g(s_1, s_2) & \text{se } (s,v) \in \Omega \times ((0,+\infty) \times (0,+\infty)) \\ +\infty & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

*Verifiquemos as hipóteses básicas.*
*Pelas definições dos conjuntos* $\Omega$, $C$ *e* $K$, *verificam-se as hipóteses básicas* $(i)$, $(ii)$ *e* $(iii)$.
*Queremos agora verificar a hipótese básica* $(iv)$, *isto é, ver se* $(s,v) \mapsto L(s,v)$ *é sci.*
*Como a função* $L(\cdot)$ *é contínua em* $\Omega \times ((0,+\infty) \times (0,+\infty))$, *em particular é sci em* $\Omega \times ((0,+\infty) \times (0,+\infty))$.
*Fixemos* $s \in \Omega$. *Seja* $L_{1,s} : (0,+\infty) \times (0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$L_{1,s}(v) := e^{-v_1}.$$

*Como a função* $v \mapsto e^{-v}$ *definida em* $\mathbb{R}^n$ *é convexa (ver [30], p. 32) temos*

$$\begin{aligned} L_{1,s}(\lambda\ v + (1-\lambda)\ w) &= L_{1,s}(\lambda\ (v_1, v_2) + (1-\lambda)(w_1, w_2)) \\ &= e^{-(\lambda\ v_1 + (1-\lambda) w_1)} \\ &\leq \lambda\ e^{-v_1} + (1-\lambda)\ e^{-w_1} \\ &= \lambda\ L_{1,s}(v) + (1-\lambda)\ L_{1,s}(w), \end{aligned}$$

*para quaisquer* $v$, $w \in (0,+\infty) \times (0,+\infty)$ *e* $\lambda \in (0,1)$. *Logo* $L_{1,s}(\cdot)$ *é convexa e própria. Analogamente, as funções* $L_{2,s} : (0,+\infty) \times (0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$L_{2,s}(v) := v_2^2$$

*e* $L_{3,s} : (0,+\infty) \times (0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$L_{3,s}(v) := v_1\ g(s_1, s_2)$$

*são convexas e próprias. Logo a função*

$$L(s,\cdot) = L_{1,s} + L_{2,s} + L_{3,s}$$

*é convexa em* $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$, *pelo teorema 19.68. Como para cada* $s\in\Omega$, *dom* $L(s,\cdot) = (0,+\infty)\times(0,+\infty)$ *é um conjunto aberto, convexo e não-vazio, temos que* $L(s,\cdot)$ *é convexa em* $\mathbb{R}$, *pela proposição 19.54. Assim verifica-se a hipótese básica* $(v)$.

*Como* $g(\cdot)$ *é contínua no compacto* $\Omega$, *então* $g(\cdot)$ *é limitada em* $\Omega$ *e vamos notar por* $g_0$ *o mínimo de* $g(\cdot)$ *em* $\Omega$ *e por* $g_1$ *o máximo de* $g(\cdot)$ *em* $\Omega$. *Logo*

$$L(s,v) \geq e^{-v_1} + v_2^2 + v_1\ g(s_1,s_2) \geq v_1\ g_0,$$

*para qualquer* $(s,v)\in\Omega\times\mathbb{R}^2$. *Desta maneira, temos* $L(s,v)\geq l(s)$, *onde* $l:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *é dada por*

$$l(s) := v_1\ g_0,$$

*a qual é limitada (por ser constante), em particular é localmente limitada inferiormente, verificando-se a hipótese básica* $(vi)$.

*Vejamos se a hipótese básica* $(vii)$ *é verificada. Consideremos a função lipschitziana admissível para* $(\mathcal{P})$, $\overline{x}:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ *definida por*

$$\overline{x}(t) := (\delta_1\ t,\ \delta_2\ t),$$

*então*

$$\begin{aligned}\Lambda(\overline{x}(\cdot)) &= \int_0^1 L(\overline{x}(t),\overline{x}'(t))\ dt = \int_0^1 \left[e^{-\delta_1} + \delta_2^2 + \delta_1\ g(\delta_1\ t,\ \delta_2\ t)\right]\ dt \\ &= e^{-\delta_1} + \delta_2^2 + \delta_1 \int_0^1 g(\delta_1\ t,\ \delta_2\ t)\ dt,\end{aligned}$$

*logo*

$$\Lambda(\overline{x}(\cdot)) \geq e^{-\delta_1} + \delta_2^2 + \delta_1 \int_0^1 g_0\ dt = e^{-\delta_1} + \delta_2^2 + \delta_1\ g_0$$

*e*

$$\Lambda(\overline{x}(\cdot)) \leq e^{-\delta_1} + \delta_2^2 + \delta_1 \int_0^1 g_1\ dt = e^{-\delta_1} + \delta_2^2 + \delta_1\ g_1,$$

*isto é,* $\Lambda(\overline{x}(\cdot))\in\mathbb{R}$, *verificando-se a hipótese básica* $(vii)$.

*Mostremos que* $(HE_1)$ *é satisfeita para qualquer* $k>\delta_1+\delta_2$. *Seja* $x(\cdot)$ *uma função admissível. Como*

$$\langle(1,1),v\rangle = \langle(1,1),(v_1,v_2)\rangle = v_1+v_2 = |v_1|+|v_2| = |(v_1,v_2)| = |v|,$$

*então*

$$|v| \leq v_1+v_2$$

*para qualquer* $v\in[0,+\infty)\times[0,+\infty)$, *temos*

$$\int_0^1 |x'(t)|\ dt \leq \int_0^1 \left[x_1'(t)+x_2'(t)\right]\ dt = x_1(1)-x_1(0)+x_2(1)-x_2(0) = \delta_1+\delta_2.$$

*Logo,*

$$\inf_{0\leq t\leq 1} ess\ |x'(t)| = \int_0^1 \inf_{0\leq t\leq 1} ess\ |x'(t)|\ dt \leq \int_0^1 |x'(t)|\ dt \leq \delta_1+\delta_2,$$

*pois* $\inf\limits_{0\leq t\leq 1} ess\ |x'(t)| \leq |x'(t)|$ *qs em* $[0,1]$. *Desta maneira,* $(HE_1)$ *verifica-se para qualquer* $k>\delta_1+\delta_2$.

*Vejamos agora* $(HE_2)$. *Calculemos*

$$\begin{aligned} L(s,v) - \langle v, \nabla_v L(s,v)\rangle &= e^{-v_1} + v_2^2 + v_1\, g(s_1,s_2) - \left\langle (v_1,v_2), \left(-e^{-v_1} + g(s_1,s_2), 2\, v_2\right)\right\rangle \\ &= e^{-v_1}[1+v_1] - v_2^2. \end{aligned}$$

*Então*

$$\begin{aligned} \lim_{\beta\to+\infty} \sup_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K, |v|>\beta}} \{L(s,v) - \langle v, \nabla_v L(s,v)\rangle\} &= \lim_{\beta\to+\infty} \sup_{\substack{s\in[0,\delta_1]\times[0,\delta_2],\\ v\in K=[0,+\infty)\times[0,+\infty), |v|>\beta}} \left\{e^{-v_1}[1+v_1] - v_2^2\right\} \\ &= \lim_{\beta\to+\infty} \left(e^{-\beta}[1+\beta] - 0\right) = 0 \end{aligned}$$

*e*

$$\inf_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K, |v|<k}} \{L(s,v) - \langle v, \nabla_v L(s,v)\rangle\} = \inf_{\substack{s\in[0,\delta_1]\times[0,\delta_2],\\ v\in K=[0,+\infty)\times[0,+\infty), |v|<k}} \left\{e^{-v_1}[1+v_1] - v_2^2\right\} = e^{-k}[1+k] - k^2.$$

*Segue que* $(*)$ *se verifica para qualquer* $k > \delta_1 + \delta_2$ *suficientemente pequeno tal que*

$$0 < e^{-k}[1+k] - k^2,$$

*e portanto para* $\delta_1 + \delta_2$ *suficientemente pequeno. Aplicando o teorema 4.5 concluimos que existe uma solução lipschitziana.* ■

### 4.7.3. $K$ tem de ser um cone

Pode-se pensar que, no teorema 4.5, a restrição de $K$ ser um cone é apenas uma exigência técnica para a demonstração. No entanto, o seguinte exemplo mostra que quando $K$ é um conjunto convexo fechado contendo a origem, mesmo que se verifiquem todas as outras hipóteses do teorema, a existência de solução pode falhar.

**Exemplo 4.15 ($K$ tem de ser cone).** *Seja* $n = 2$, $T = 1$, *e consideremos o problema de minimizar o integral*

$$\Lambda(x(\cdot)) := \int_0^1 \left\{\sqrt{1 + (x_2'(t))^2} - r\; x_1'(t) \sin|x_2(t)|\right\} dt,$$

*onde :*

- $x'(t) \geq 0$ *qs em* $[0,1]$;
- $x(0) = (0,0)$, $x(1) = \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$;
- $r$ *é uma constante positiva;*
- $\Omega := [0,1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;
- $K := \{(v_1,v_2) : 0 \leq v_1 \leq 1,\ v_2 \geq 0\} = [0,1] \times [0,+\infty)$;
- $C := \left\{(0,0), \left(1, \frac{\pi}{2}\right)\right\}$.

*Note-se que* $K$ *não é um cone, porque* $(1,0) \in K$, *mas* $4(1,0) = (4,0) \notin K$.
*Consideremos a função* $L : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to (-\infty, +\infty]$ *dada por*

$$L(s,v) := \begin{cases} \sqrt{1+v_2^2} - r\; v_1\; \sin|s_2| & \text{se } (s,v) \in \Omega \times ((0,1)\times(0,+\infty)) \\ +\infty & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

*Verifiquemos as hipóteses básicas.*
*Pelas definições dos conjuntos* $\Omega$ *e* $C$, *verificam-se as hipóteses básicas* $(i)$ *e* $(ii)$.
*Queremos agora verificar a hipótese básica* $(iv)$, *isto é, ver se* $(s,v) \mapsto L(s,v)$ *é sci.*
*Como a função* $L(\cdot)$ *é contínua em* $\Omega \times ((0,1)\times(0,+\infty))$, *em particular é sci em* $\Omega \times ((0,1)\times(0,+\infty))$.

*Fixemos* $s \in \Omega$. *Seja* $L_{1,s} : (0,1) \times (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$L_{1,s}(v) := \sqrt{1+v_2^2}.$$

*Como a função* $\xi \mapsto \sqrt{1+\xi^2}$ *é convexa (ver exemplo 4.10) temos*

$$\begin{aligned} L_{1,s}(\lambda\, v + (1-\lambda)\, w) &= L_{1,s}(\lambda\, (v_1, v_2) + (1-\lambda)(w_1, w_2)) \\ &= \sqrt{1 + (\lambda\, v_2 + (1-\lambda)\, w_2)^2} \\ &\leq \lambda \sqrt{1+v_2^2} + (1-\lambda)\sqrt{1+w_2^2} \\ &= \lambda\, L_{1,s}(v) + (1-\lambda)\; L_{1,s}(w), \end{aligned}$$

*para quaisquer* $v$, $w \in (0,1) \times (0,+\infty)$ *e* $\lambda \in (0,1)$. *Logo* $L_{1,s}(\cdot)$ *é convexa e própria. Analogamente, a função* $L_{2,s} : (0,1) \times (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$L_{2,s}(v) := -r\; v_1\; \sin|s_2|$$

*é convexa e própria. Logo a função*

$$L(s,\cdot) = L_{1,s} + L_{2,s}$$

*é convexa em* $(0,1)\times(0,+\infty)$, *pelo teorema 19.68. E como, para cada* $s \in \Omega$, *dom* $L(s,\cdot) = (0,1)\times(0,+\infty)$ *é um conjunto aberto, convexo e não-vazio, temos que* $L(s,\cdot)$ *é convexa em* $\mathbb{R}$, *pela proposição 19.54. Verificando-se a hipótese básica* $(v)$.

*Como*

$$L(s,v) \geq \sqrt{1+v_2^2} - r\; v_1\; \sin|s_2| \geq 1 - r\; v_1 \geq 1 - r,$$

*para qualquer* $(s,v) \in \Omega \times \mathbb{R}^2$. *Desta maneira, temos* $L(s,v) \geq l(s)$, *onde* $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$l(s) := 1 - r,$$

*a qual é limitada (por ser constante), em particular é localmente limitada inferiormente, verificando-se a hipótese básica* $(vi)$.

*Vejamos se a hipótese básica* $(vii)$ *é verificada. Consideremos a função lipschitziana admissível para* $(\mathcal{P})$, $\overline{x} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ *definida por*

$$\overline{x}(t) := \left(t, \frac{\pi}{2}\; t\right),$$

*então*

$$\begin{aligned} \Lambda(\overline{x}(\cdot)) &= \int_0^1 L(\overline{x}(t), \overline{x}'(t))\; dt = \int_0^1 \left[\sqrt{1+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} - r\; 1\; \sin\left|\frac{\pi}{2}\; t\right|\right] dt \\ &= \sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}} - r\; \frac{2}{\pi}\left[-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos|0|\right] = \sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}} - r\; \frac{2}{\pi} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

*verificando-se a hipótese básica* $(vii)$.

*Mostremos que* $(HE_1)$ *se verifica. Seja* $x(\cdot) \in \Gamma(\overline{x}(\cdot))$ *então*

$$\begin{aligned} \Lambda(\overline{x}(\cdot)) &\geq \Lambda(x(\cdot)) = \int_0^1 L(x(t), x'(t))\; dt \geq \int_0^1 \left[\sqrt{1+(x_2'(t))^2} - r\; x_1'(t) \sin|x_2(t)|\right] dt \\ &\geq \int_0^1 [|x_2'(t)| - r\; x_1'(t)]\; dt \geq \int_0^1 [|x_2'(t)| - r]\; dt = \int_0^1 |x_2'(t)|\; dt - r \end{aligned}$$

*(pois $0 \leq x_1'(t) \leq 1$), logo*

$$\int_0^1 |x_2'(t)| \ dt \leq \Lambda(\overline{x}(\cdot)) + r.$$

*Donde*

$$\inf_{0\leq t\leq 1} ess\ |x_2'(t)| = \int_0^1 \inf_{0\leq t\leq 1} ess\ |x_2'(t)| \ dt \leq \int_0^1 |x_2'(t)| \ dt \leq \Lambda(\overline{x}(\cdot)) + r,$$

*pois* $\inf_{0\leq t\leq 1} ess\ |x_2'(t)| \leq |x_2'(t)|$ *qs em* $[0,1]$. *Além disso,*

$$|x_1'(t)| = x_1'(t) \leq 1 \ qs \text{ em } [0,1],$$

*porque* $0 \leq x_1'(t) \leq 1$. *Então*

$$|x'(t)| = |(x_1'(t), x_2'(t))| = |x_1'(t)| + |x_2'(t)| \leq 1 + |x_2'(t)| \ qs \text{ em } [0,1],$$

*donde*

$$\inf_{0\leq t\leq 1} ess\ |x'(t)| \leq |x'(t)| \leq 1 + |x_2'(t)|.$$

*Por outro lado,*

$$\inf_{0\leq t\leq 1} ess\ [1 + |x_2'(t)|] \geq c, \ \forall\ c : 1 + |x_2'(t)| \geq c.$$

*Logo para* $c = \inf_{0\leq t\leq 1} ess\ |x'(t)|$ *temos*

$$\inf_{0\leq t\leq 1} ess\ |x'(t)| \leq \inf_{0\leq t\leq 1} ess\ [1 + |x_2'(t)|] = 1 + \inf_{0\leq t\leq 1} ess\ |x_2'(t)| \leq 1 + \Lambda(\overline{x}(\cdot)) + r.$$

*Consequentemente,* $(HE_1)$ *acontece para qualquer* $k > 1 + \Lambda(\overline{x}(\cdot)) + r$.
*Vejamos agora* $(HE_2)$. *Calculemos*

$$\begin{aligned} L(s,v) - \langle v, \nabla_v L(s,v)\rangle &= \sqrt{1+v_2^2} - r\ v_1 \ \sin|s_2| - \left\langle (v_1, v_2), \left(-r\ \sin|s_2|, \frac{v_2}{\sqrt{1+v_2^2}}\right)\right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+v_2^2}}. \end{aligned}$$

*Então*

$$\lim_{\beta\to+\infty} \sup_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K, |v|>\beta}} \{L(s,v) - \langle v, \nabla_v L(s,v)\rangle\} = \lim_{\beta\to+\infty} \sup_{\substack{s\in[0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}],\\ v\in[0,1]\times[0,+\infty), |v|>\beta}} \left\{\frac{1}{\sqrt{1+v_2^2}}\right\} = \lim_{\beta\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}\right) = 0$$

*e*

$$\inf_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K, |v|<k}} \{L(s,v) - \langle v, \nabla_v L(s,v)\rangle\} = \inf_{\substack{s\in[0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}],\\ v\in[0,1]\times[0,+\infty), |v|<k}} \left\{\frac{1}{\sqrt{1+v_2^2}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}.$$

*Assim* $(*)$ *acontece para qualquer* $k > 1 + \Lambda(\overline{x}(\cdot)) + r$ *tal que*

$$0 < \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}.$$

*E portanto,* $(*)$ *tem lugar para qualquer* $k > 0$. *Logo a hipótese extra* $(HE_2)$ *é verificada.*
*Então verificam-se todas as hipóteses do teorema 4.5 excepto* $K$ *ser cone.*

*Vamos agora mostrar que o problema não admite solução para $r$ suficientemente grande. Para isso, observemos que as restrições implicam que qualquer função admissível $x(\cdot)$ tem de ter $x_1(t) \equiv t$. Assim, o problema dado é equivalente ao problema de minimizar*

$$\int_0^1 \left\{ \sqrt{1 + (y'(t))^2} - r \sin |y(t)| \right\} dt,$$

*na classe das funções $y(\cdot) \in AC([0,1], \mathbb{R})$ satisfazendo $y(0) = 0$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$. Mostremos (como no exemplo 4.11) que não existe solução quando $r$ excede $1 + \frac{\pi}{2}$. Seja $r > 1 + \frac{\pi}{2}$. Analogamente, ao exemplo 4.11, quando $y(\cdot)$ é solução para $(\mathcal{P})$ temos $\Lambda(y(\cdot)) > 0$. Vamos então definir uma sucessão de funções admissíveis $y_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ por*

$$y_i(t) := \begin{cases} izt & \text{se } t \in \left[0, \frac{1}{i}\right] \\ z & \text{se } t \in \left(\frac{1}{i}, 1\right], \quad \forall\, i \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

*onde $z$ é um vector constante de norma $\frac{\pi}{2}$. Então para cada $i \in \mathbb{N}$, vem*

$$\begin{aligned}
\Lambda(y_i(\cdot)) &= \int_0^1 \left\{ \sqrt{1 + |y_i'(t)|^2} - r\ \sin |y_i(t)| \right\} dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{i}} \left\{ \sqrt{1 + |iz|^2} - r\ \sin |izt| \right\} dt + \int_{\frac{1}{i}}^1 \left\{ \sqrt{1 + |0|^2} - r\ \sin |z| \right\} dt \\
&= \frac{1}{i}\sqrt{1 + |iz|^2} - \frac{r}{|iz|}\left[-\cos|z| + \cos|0|\right] + (1 - r\ \sin|z|)\left(1 - \frac{1}{i}\right) \\
&= \sqrt{\frac{1}{i^2} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} - \frac{r}{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}\left[-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1\right] + \left(1 - \frac{1}{i}\right)\left(1 - r\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \quad \left(\text{pois } |z| = \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \sqrt{\frac{1}{i^2} + \frac{\pi^2}{4}} - \frac{2\,r}{i\,\pi} + (1 - r)\left(1 - \frac{1}{i}\right),
\end{aligned}$$

*logo*

$$\lim_{i \to +\infty} \Lambda(y_i(\cdot)) = \lim_{i \to +\infty} \left[ \sqrt{\frac{1}{i^2} + \frac{\pi^2}{4}} - \frac{2\,r}{i\,\pi} + (1 - r)\left(1 - \frac{1}{i}\right) \right] = \frac{\pi}{2} + 1 - r < 0 \ \left(\text{pois } r > 1 + \frac{\pi}{2}\right),$$

*então não pode existir nenhuma solução $y(\cdot)$ com $\Lambda(y(\cdot)) > 0$. E portanto, o problema $(\mathcal{P})$ não tem solução quando $k > 1 + \frac{\pi}{2}$.* ■

## 5. O problema não-autónomo

Consideremos agora o problema $(\mathcal{P})$, sob as condições (1.1) e (1.2), com lagrangiano $L : [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^n \to [0,+\infty]$ satisfazendo as seguintes hipóteses básicas e hipóteses extra. Estas hipóteses são as mesmas consideradas no caso autónomo (ver secção 4), excepto que o lagrangiano terá agora de ser $\geq 0$. Ou seja :

### 5.1. Hipóteses básicas

$(i)$ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (ver (1.2)) é fechado;

$(ii)$ $C \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ é fechado e é um conjunto compacto pelo menos uma das projecções

$$C_x := \{x \in \mathbb{R}^n : (x,y) \in C \text{ para algum } y \in \mathbb{R}^n\},$$

$$C_y := \{y \in \mathbb{R}^n : (x,y) \in C \text{ para algum } x \in \mathbb{R}^n\};$$

$(iii)$ $K \subset \mathbb{R}^n$ é um cone convexo fechado;

$(iv)$ a função $(s,v) \mapsto L(t,s,v)$ é sci (semicontínua inferiormente) $\forall\, t \in [0,T]$;

$(v)$ para cada $s \in \Omega$ :

$(v_1)$ a função $L(t,s,\cdot)$ é convexa $\forall\, t \in [0,T]$;

$(v_2)$ o domínio *dom* $L(t,s,\cdot)$ é um conjunto aberto, convexo e não-vazio, independente de $t$ designado por *dom* $L(s,\cdot)$;

$(vi)$ para cada $s \in \Omega$ e $v \in$ *dom* $L(s,\cdot)$, a função
$t \longmapsto L(t,s,v)$ é lipschitziana;

$(vii)$ existem constantes não-negativas $\lambda$ e $\eta$ tais que :

$$|L_t(t,s,v)| \leq \lambda\, L(t,s,v) + \eta \text{ qs em } [0,T] \qquad \forall\, s \in \Omega \qquad \forall\, v \in dom\ L(s,\cdot);$$

$(viii)$ existe uma função lipschitziana $\overline{x}(\cdot) \in X$ para a qual $\Lambda(\overline{x}(\cdot))$ é finito (ver $(\mathcal{P})$).

No que segue consideraremos o conjunto de subnível

$$\Gamma(\overline{x}(\cdot)) := \{x(\cdot) \in X : \Lambda(x(\cdot)) \leq \Lambda(\overline{x}(\cdot))\}$$

e o seu subconjunto

$$\Gamma_\theta(\overline{x}(\cdot)) := \Gamma(\overline{x}(\cdot)) \cap AC_\theta([0,T],\mathbb{R}^n).$$

### 5.2. Hipóteses extra

A primeira hipótese extra é :

$$(HE_1) \left\{ \begin{array}{l} \text{existe } k > 0 \text{ tal que qualquer função } x(\cdot) \text{ de } \Gamma(\overline{x}(\cdot)) \text{ satisfaz} \\ \qquad\qquad \underset{0\leq t\leq T}{ess\ \inf} |x'(t)| < k. \end{array} \right.$$

A segunda hipótese extra é :

$$(HE_2)' \left\{ \begin{array}{l} \qquad\qquad \text{para algum } k \text{ satisfazendo } (HE_1)\text{, vale} \\ (*)' \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{\beta\to\infty} \sup\limits_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K,|v|>\beta,\\ t\in[0,T]}} \{L(t,s,v) - \langle v, \partial_v L(t,s,v)\rangle\} + \{\lambda\ \Lambda(\overline{x}(\cdot)) + \eta\ T\} < \\ \qquad < \inf\limits_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K,|v|<k,\\ t\in[0,T]}} \{L(t,s,v) - \langle v, \partial_v L(t,s,v)\rangle\}. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

(Aqui $\partial_v L(t,s,v)$ é o subgradiente da função convexa $L(t,s,\cdot)$; $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é o produto interno em $\mathbb{R}^n$; e $\lambda$, $\eta$ são as constantes do ponto $(vii)$ das hipóteses básicas.)

### 5.3. O teorema 3 do artigo: enunciado e demonstração

Nesta secção os problemas $(\mathcal{P}_\theta)$ e $(\mathcal{P}_\theta(\alpha))$, e o valor $V_\theta(\alpha)$ são idênticos aos do caso autónomo, exceptuando o integral a minimizar, que passa a ser o seguinte

$$\Lambda(x(\cdot)) := \int_0^T L(t, x(t), x'(t))\ dt.$$

**Teorema 5.1.** *Suponhamos a validade das hipóteses básicas e as hipóteses extra* $(HE_1)$ *e* $(HE_2)'$. *Então o problema* $(\mathcal{P})$ *tem solução e, além disso, qualquer solução* $x(\cdot)$ *é lipschitziana e satisfaz*

$$L(t, x(t), x'(t)) - \langle x'(t), p(t)\rangle = c + \int_0^t \xi(\tau)\ d\tau \text{ qs em } [0,T], \tag{5.1}$$

*onde* $c$ *é uma constante e* $p(\cdot)$ *e* $\xi(\cdot)$ *são funções mensuráveis tais que*

$$p(t) \in \partial_v L(t, x(t), x'(t)) \text{ qs em } [0,T],$$

$$\xi(t) \in \partial_t L(t, x(t), x'(t)) \text{ qs em } [0,T].$$

**Demonstração:**
A demonstração do teorema no caso autónomo necessita de algumas modificações que vamos indicar.

**(Parte 1 da demonstração do teorema 5.1 : $V_\theta(\cdot)$ é finalmente constante)**

Primeiro vamos mostrar que $V_\theta(\cdot)$ é finalmente constante. Demonstrar esta afirmação é análogo a demonstrar o lema 4.4. Desta maneira, a demonstração é idêntica à do lema 4.4 até à altura em que obtemos (4.38).

Confirmemos agora se estamos em condições de aplicar o teorema 2.1. Por hipótese, $L : [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ é um lagrangiano que satisfaz o seguinte :

$(i)$ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (ver (1.2)) é fechado;

$(ii)$ $C \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ é fechado e é um conjunto compacto pelo menos uma das projecções

$$C_x := \{x \in \mathbb{R}^n : (x,y) \in C \text{ para algum } y \in \mathbb{R}^n\},$$

$$C_y := \{y \in \mathbb{R}^n : (x,y) \in C \text{ para algum } x \in \mathbb{R}^n\};$$

$(iii)$ $K \subset \mathbb{R}^n$ é um cone convexo fechado;

$(iv)$ a função $(s,v) \mapsto L(t,s,v)$ é sci (semicontínua inferiormente) $\forall\ t \in [0,T]$;

$(v)$ para cada $s \in \Omega$ :

$(v_1)$ a função $L(t,s,\cdot)$ é convexa $\forall\ t \in [0,T]$;

$(v_2)$ o domínio *dom* $L(t,s,\cdot)$ é um conjunto aberto, convexo e não-vazio, independente de $t$ designado por *dom* $L(s,\cdot)$;

$(vi)$ para cada $s \in \Omega$ e $v \in$ *dom* $L(s,\cdot)$, a função
$t \longmapsto L(t,s,v)$ é lipschitziana;

$(vii)$ existem constantes não-negativas $\lambda$ e $\eta$ tais que :

$$|L_t(t,s,v)| \leq \lambda\ L(t,s,v) + \eta \text{ qs em } [0,T] \qquad \forall\ s \in \Omega \qquad \forall\ v \in \mathit{dom}\ L(s,\cdot);$$

$(viii)$ existe uma função lipschitziana $\overline{x}(\cdot) \in X$ para a qual $\Lambda(\overline{x}(\cdot))$ é finito (ver $(\mathcal{P})$).

No que segue consideraremos o conjunto de subnível

$$\Gamma(\overline{x}(\cdot)) := \{x(\cdot) \in X : \Lambda(x(\cdot)) \leq \Lambda(\overline{x}(\cdot))\}$$

e o seu subconjunto

$$\Gamma_\theta(\overline{x}(\cdot)) := \Gamma(\overline{x}(\cdot)) \cap AC_\theta([0,T], \mathbb{R}^n).$$

Pela hipótese básica $(viii)$ há-de existir uma função lipschitziana $\overline{x}(\cdot) \in X$ para a qual $\Lambda(\overline{x}(\cdot)) \leq \alpha$. Logo, $\overline{x}(\cdot)$ é admissível para $(\mathcal{P}_\theta(\alpha))$. E como $z(\cdot)$ é solução de $(\mathcal{P}_\theta(\alpha))$, então

$$\Lambda(z(\cdot)) \leq \Lambda(y(\cdot)), \; \forall\, y(\cdot) \text{ admissível para } (\mathcal{P}_\theta(\alpha)), \text{ e } z(\cdot) \in AC_\theta^\alpha([0,T],\mathbb{R}^n). \tag{5.2}$$

Em particular,

$$\Lambda(z(\cdot)) \leq \Lambda(\overline{x}(\cdot)).$$

Logo, $z(\cdot) \in \Gamma_\theta(\overline{x}(\cdot)) := \Gamma(\overline{x}(\cdot)) \cap AC_\theta([0,T],\mathbb{R}^n)$. Além disso, como $x(\cdot)$ é admissível para $(\mathcal{P}_\theta(\Lambda_\theta(x(\cdot))))$, então $x(\cdot)$ é admissível para o problema $(\mathcal{P})$. Assim, por (4.38), vem

$$f(x(\cdot)) \geq f(z(\cdot)),$$

para $z(\cdot) \in \Gamma_\theta(\overline{x}(\cdot))$, e para qualquer função $x(\cdot) \in AC_\theta([0,T],\mathbb{R}^n)$ admissível para $(\mathcal{P})$ tal que $\Lambda_\theta(x(\cdot))$ está suficientemente próximo de $\Lambda_\theta(z(\cdot))$.

Isto confirma que de facto estamos em condições de aplicar o teorema 2.1, o qual garante a existência de uma função integrável $\xi(\cdot)$ tal que

$$\xi(t) \in \partial_t L(t, z(t), z'(t)) \text{ qs em } [0,T],$$

e a existência de uma constante $c$ e uma função mensurável $p(\cdot)$ com

$$p(t) \in \partial_v L(t, z(t), z'(t)) \text{ qs em } [0,T],$$

tais que

$$L(t, z(t), z'(t)) - z'(t)\cdot p(t) + r\,\theta(|z'(t)|) - r\,|z'(t)|\,\theta'(|z'(t)|) = c + \int_0^t \xi(\tau)\,d\tau \text{ qs em } [0,T]. \tag{5.3}$$

Mostremos agora que

$$\sup_{0\leq t\leq T} ess\,|z'(t)| > \beta,$$

onde $\beta$ é qualquer número menor que $\theta^{-1}(\alpha/T)$.

Note-se que também acontece

$$\Lambda(z(\cdot)) \leq \Lambda(x(\cdot)), \; \forall\, x(\cdot) \text{ admissível para } (\mathcal{P}_\theta).$$

E como $z(\cdot)$ é solução para $(\mathcal{P}_\theta(\alpha))$, então $z(\cdot)$ é admissível para $(\mathcal{P}_\theta)$. Logo, $z(\cdot)$ é solução para $(\mathcal{P}_\theta)$. Assim (analogamente à parte 2 da demonstração do teorema 4.5)

$$z'(\cdot) \in L^\infty([0,T],\mathbb{R}^n).$$

Consequentemente, pela proposição 13.28,

$$\sup_{0\leq t\leq T} ess\,|z'(t)| = |z'(\cdot)|_{L^\infty([0,T],\mathbb{R}^n)} \geq |z'(t)| \text{ qs em } [0,T].$$

Como $\theta(\cdot)$ é uma função estritamente crescente, vem

$$\theta\left(\sup_{0\leq t\leq T} ess\,|z'(t)|\right) \geq \theta(|z'(t)|) \text{ qs em } [0,T].$$

Além disso, existem os integrais $\int_0^T \theta\left(\sup_{0\le t\le T} ess\,|z'(t)|\right)\,dt$ e $\int_0^T \theta(|z'(t)|)\,dt$ (o primeiro existe pois $\theta\left(\sup_{0\le t\le T} ess\,|z'(t)|\right)$ é uma constante e o segundo existe pela demonstração do teorema 2.1). Então, pelo lema 11.12,

$$T\,\theta\left(\sup_{0\le t\le T} ess\,|z'(t)|\right) = \int_0^T \theta\left(\sup_{0\le t\le T} ess\,|z'(t)|\right)\,dt \ge \int_0^T \theta(|z'(t)|)\,dt = \Lambda_\theta(z(\cdot)) = \alpha.$$

Donde,

$$\theta\left(\sup_{0\le t\le T} ess\,|z'(t)|\right) \ge \frac{\alpha}{T}.$$

E como, por hipótese, $\theta(\cdot) \in C^1([0,+\infty),\mathbb{R})$ e é estritamente crescente, segue do teorema 16.8 que

$$\sup_{0\le t\le T} ess\,|z'(t)| \ge \theta^{-1}\left(\frac{\alpha}{T}\right).$$

Logo,

$$\sup_{0\le t\le T} ess\,|z'(t)| > \beta,\ \forall\,\beta : \beta < \theta^{-1}\left(\frac{\alpha}{T}\right).$$

Note-se que devido a $\theta^{-1}(\alpha/T)$ tender para $+\infty$ quando $\alpha$ tende para $+\infty$, podemos tomar $\beta$ arbitrariamente grande fazendo $\alpha$ suficientemente grande.

Como

$$ess\sup_{0\le t\le T} |z'(t)| > \beta,$$

isto é,

$$\inf\{c\in\mathbb{R} : |z'(t)| \le c \text{ qs em } [0,T]\} > \beta,$$

então

$$\exists\, I_1 \subset [0,T] \text{ com } \mu(I_1) > 0 : |z'(t)| > \beta,\ \forall\, t\in I_1.$$

Logo, de (5.3) para algum $s_1 \in \Omega$, para algum $v_1 \in K$ com $|v_1| > \beta$, e para algum $p_1 \in \partial_v L(t_1, s_1, v_1)$, vem

$$L(t_1,s_1,v_1) - \langle v_1, p_1\rangle + r\ \left[\theta(|v_1|) - |v_1|\ \theta'(|v_1|)\right] = c + \int_0^t \xi(\tau)\ d\tau.$$

Isto é,

$$c = L(t_1,s_1,v_1) - \langle v_1, p_1\rangle + r\ \left[\theta(|v_1|) - |v_1|\ \theta'(|v_1|)\right] - \int_0^t \xi(\tau)\ d\tau.$$

Desta igualdade temos

$$\begin{aligned} c &= L(t_1,s_1,v_1) - \langle v_1, p_1\rangle + r\ \left[\theta(|v_1|) - |v_1|\ \theta'(|v_1|)\right] - \int_0^t \xi(\tau)\ d\tau \qquad (5.4)\\ &\le \sup_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K, |v|>\beta\\ t\in[0,T]}} \{L(t,s,v) - \langle v, \partial_v L(t,s,v)\rangle\} + r \sup_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K, |v|>\beta\\ t\in[0,T]}} \{\ \theta(|v|) - |v|\ \theta'(|v|)\} + \\ &\quad + \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t [-\xi(\tau)]\ d\tau. \end{aligned}$$

Como $z(\cdot) \in \Gamma(\overline{x}(\cdot))$ e vale a hipótese extra $(HE_1)$, temos que existe $k > 0$ tal que

$$\inf_{0 \le t \le T} ess \, |z'(t)| < k,$$

isto é,

$$\sup\{c \in \mathbb{R} : |z'(t)| \ge c \text{ qs em } [0,T]\} < k.$$

Desta maneira,

$$\exists\, I_2 \subset [0,T] \text{ com } \mu(I_2) > 0 : |z'(t)| < k, \ \forall\, t \in I_2.$$

Logo, de (5.3) para algum $s_2 \in \Omega$, para algum $v_2 \in K$ com $|v_2| < k$, e para algum $p_2 \in \partial_v L(t_2, s_2, v_2)$, vem

$$L(t_2, s_2, v_2) - \langle v_2, p_2 \rangle + r \ [\theta(|v_2|) - |v_2| \ \theta'(|v_2|)] = c + \int_0^t \xi(\tau) \ d\tau.$$

Isto é,

$$c = L(t_2, s_2, v_2) - \langle v_2, p_2 \rangle + r \ [\theta(|v_2|) - |v_2| \ \theta'(|v_2|)] - \int_0^t \xi(\tau) \ d\tau.$$

Desta igualdade temos

$$\begin{aligned} c &= L(t_2, s_2, v_2) - \langle v_2, p_2 \rangle + r \ [\theta(|v_2|) - |v_2| \ \theta'(|v_2|)] - \int_0^t \xi(\tau) \ d\tau \\ &\ge \inf_{\substack{s\in\Omega, \\ v\in K, |v|<k \\ t\in[0,T]}} \{L(t,s,v) - \langle v, \partial_v L(t,s,v)\rangle\} + r \inf_{\substack{s\in\Omega, \\ v\in K, |v|<k \\ t\in[0,T]}} \{\theta(|v|) - |v| \ \theta'(|v|)\} + \\ &\quad + \inf_{t\in[0,T]} \int_0^t [-\xi(\tau)] \ d\tau. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Juntando (5.4) e (5.5) resulta

$$\begin{aligned} & r \left[ \inf_{\substack{s\in\Omega, \\ v\in K, |v|<k \\ t\in[0,T]}} \{\theta(|v|) - |v| \ \theta'(|v|)\} - \sup_{\substack{s\in\Omega, \\ v\in K, |v|>\beta \\ t\in[0,T]}} \{\theta(|v|) - |v| \ \theta'(|v|)\} \right] \\ \le & \sup_{\substack{s\in\Omega, \\ v\in K, |v|>\beta \\ t\in[0,T]}} \{L(t,s,v) - \langle v, \partial_v L(t,s,v)\rangle\} - \inf_{\substack{s\in\Omega, \\ v\in K, |v|<k \\ t\in[0,T]}} \{L(t,s,v) - \langle v, \partial_v L(t,s,v)\rangle\} + \\ & + \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t [-\xi(\tau)] \ d\tau - \inf_{t\in[0,T]} \int_0^t [-\xi(\tau)] \ d\tau. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Mostremos agora que

$$\sup_{t\in[0,T]} \int_0^t [-\xi(\tau)] \ d\tau - \inf_{t\in[0,T]} \int_0^t [-\xi(\tau)] \ d\tau \le \lambda \ \Lambda(\overline{x}(\cdot)) + \eta T.$$

Atendendo a

$$\int_0^t [-\xi(\tau)]\ d\tau = -\int_0^t \xi(\tau)\ d\tau,$$

consideremos a função $h_1 : [0,T] \to \mathbb{R}$ dada por

$$h_1(t) := \int_0^t \xi(\tau)\ d\tau.$$

Como $\xi(\cdot) \in L^1([0,T], \mathbb{R}^n)$, então $h_1(\cdot)$ é $AC$, pela proposição 18.7. Consequentemente, $-h_1(\cdot)$ é $AC$ pela proposição 18.8. E portanto, a função $h_2 : [0,T] \to \mathbb{R}$ dada por

$$h_2(t) := \int_0^t [-\xi(\tau)]\ d\tau$$

é $AC$. Logo existem $t_0$, $t_1 \in [0,T]$, com $t_0 \neq t_1$ tais que

$$\sup_{t\in[0,T]} \int_0^t [-\xi(\tau)]\ d\tau = \int_0^{t_1} [-\xi(\tau)]\ d\tau$$

e

$$\inf_{t\in[0,T]} \int_0^t [-\xi(\tau)]\ d\tau = \int_0^{t_0} [-\xi(\tau)]\ d\tau.$$

Então,

$$\begin{aligned} \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t [-\xi(\tau)]\ d\tau - \inf_{t\in[0,T]} \int_0^t [-\xi(\tau)]\ d\tau &= \int_0^{t_1} [-\xi(\tau)]\ d\tau - \int_0^{t_0} [-\xi(\tau)]\ d\tau \\ &= -\int_0^{t_1} \xi(\tau)\ d\tau + \int_0^{t_0} \xi(\tau)\ d\tau. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Se $t_0 < t_1$, vem

$$(5.7) = -\int_0^{t_1} \xi(\tau)\ d\tau - \int_{t_0}^{0} \xi(\tau)\ d\tau = -\int_{t_0}^{t_1} \xi(\tau)\ d\tau.$$

Por outro lado, se

$$\sup_{t\in[0,T]} \int_0^t [-\xi(\tau)]\ d\tau = \int_0^{t_0} [-\xi(\tau)]\ d\tau$$

e

$$\inf_{t\in[0,T]} \int_0^t [-\xi(\tau)]\ d\tau = \int_0^{t_1} [-\xi(\tau)]\ d\tau,$$

então,

$$\begin{aligned} \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t [-\xi(\tau)]\ d\tau - \inf_{t\in[0,T]} \int_0^t [-\xi(\tau)]\ d\tau &= \int_0^{t_0} [-\xi(\tau)]\ d\tau - \int_0^{t_1} [-\xi(\tau)]\ d\tau \\ &= -\int_0^{t_0} \xi(\tau)\ d\tau + \int_0^{t_1} \xi(\tau)\ d\tau. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Se $t_0 < t_1$, vem

$$(5.8) = \int_{t_0}^{0} \xi(\tau)\ d\tau + \int_0^{t_1} \xi(\tau)\ d\tau = \int_{t_0}^{t_1} \xi(\tau)\ d\tau.$$

Assim,

$$\sup_{t\in[0,T]} \int_0^t [-\xi(\tau)]\ d\tau - \inf_{t\in[0,T]} \int_0^t [-\xi(\tau)]\ d\tau = \pm \int_{t_0}^{t_1} \xi(\tau)\ d\tau, \tag{5.9}$$

onde $t_0$ e $t_1$ são pontos no intervalo $[0,T]$, com $t_0 < t_1$. Como

$$\xi(t) \in \partial_t L(t, z(t), z'(t)) \text{ qs em } [0,T],$$

temos, pela hipótese $(vii)$

$$|\xi(t)| \leq \lambda\, L(t, z(t), z'(t)) + \eta \text{ qs em } [0,T], \tag{5.10}$$

para algumas constantes não-negativas $\lambda$ e $\eta$. E como $\xi(\cdot) \in L^1([0,T], \mathbb{R}^n)$, então $|\xi(\cdot)|$ é integrável, pela proposição 18.9. Donde,

$$\begin{aligned}
\pm \int_{t_0}^{t_1} \xi(\tau)\, d\tau &\leq \left| \int_{t_0}^{t_1} \xi(\tau)\, d\tau \right| \leq \int_{t_0}^{t_1} |\xi(\tau)|\, d\tau \\
&\leq \int_{t_0}^{t_1} [\lambda\, L(\tau, z(\tau), z'(\tau)) + \eta]\, d\tau \text{ (por (5.10))} \\
&= \lambda \int_{t_0}^{t_1} L(\tau, z(\tau), z'(\tau))\, d\tau + \eta \int_{t_0}^{t_1} d\tau \\
&\leq \lambda \int_0^T L(\tau, z(\tau), z'(\tau))\, d\tau + \eta \int_0^T d\tau \\
\text{(pois } L(\cdot) &\geq 0 \text{ e } z(\cdot) \text{ é admissível para o problema } (\mathcal{P})\text{)} \\
&= \lambda\, \Lambda(z(\cdot)) + \eta T \\
&\leq \lambda\, \Lambda(\overline{x}(\cdot)) + \eta T \text{ (pois } \overline{x}(\cdot) \text{ é admissível para o problema resolvido por } z(\cdot)\text{)}.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

E portanto, de (5.6), (5.9) e (5.11), resulta

$$\begin{aligned}
& r \left[ \inf_{\substack{s\in\Omega, \\ v\in K, |v|<k \\ t\in[0,T]}} \{\theta(|v|) - |v|\ \theta'(|v|)\} - \sup_{\substack{s\in\Omega, \\ v\in K, |v|>\beta \\ t\in[0,T]}} \{\theta(|v|) - |v|\ \theta'(|v|)\} \right] \\
\leq\ & \sup_{\substack{s\in\Omega, \\ v\in K, |v|>\beta \\ t\in[0,T]}} \{L(t,s,v) - \langle v, \partial_v L(t,s,v)\rangle\} - \inf_{\substack{s\in\Omega, \\ v\in K, |v|<k \\ t\in[0,T]}} \{L(t,s,v) - \langle v, \partial_v L(t,s,v)\rangle\} + \\
& + \{\lambda\, \Lambda(\overline{x}(\cdot)) + \eta T\}.
\end{aligned}$$

Isto é,

$$r\left[\inf_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K,|v|<k\\ t\in[0,T]}}\left\{\theta\left(|v|\right)-|v|\ \theta'\left(|v|\right)\right\}-\sup_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K,|v|>\beta\\ t\in[0,T]}}\left\{\theta\left(|v|\right)-|v|\ \theta'\left(|v|\right)\right\}\right] \tag{5.12}$$

$$\leq \sup_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K,|v|>\beta\\ t\in[0,T]}}\left\{L\left(t,s,v\right)-\left\langle v,\partial_v L\left(t,s,v\right)\right\rangle\right\}+\left\{\lambda\ \Lambda\left(\overline{x}\left(\cdot\right)\right)+\eta T\right\}+$$

$$-\inf_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K,|v|<k\\ t\in[0,T]}}\left\{L\left(t,s,v\right)-\left\langle v,\partial_v L\left(t,s,v\right)\right\rangle\right\}.$$

Para $\alpha$, e consequentemente $\beta$, suficientemente grandes, o lado direito da desigualdade (5.12) é negativo. De facto, como vale a hipótese $(HE_2)'$ e fazendo $\beta\to+\infty$, no lado direito da desigualdade (5.12), vem

$$\lim_{\beta\to+\infty}\left[\sup_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K,|v|>\beta\\ t\in[0,T]}}\left\{L\left(t,s,v\right)-\left\langle v,\partial_v L\left(t,s,v\right)\right\rangle\right\}+\left\{\lambda\ \Lambda\left(\overline{x}\left(\cdot\right)\right)+\eta T\right\}+\right. \tag{5.13}$$

$$\left.-\inf_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K,|v|<k\\ t\in[0,T]}}\left\{L\left(t,s,v\right)-\left\langle v,\partial_v L\left(t,s,v\right)\right\rangle\right\}\right]$$

$$<\inf_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K,|v|<k\\ t\in[0,T]}}\left\{L\left(t,s,v\right)-\left\langle v,\partial_v L\left(t,s,v\right)\right\rangle\right\}-\inf_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K,|v|<k\\ t\in[0,T]}}\left\{L\left(t,s,v\right)-\left\langle v,\partial_v L\left(t,s,v\right)\right\rangle\right\}=0.$$

Por outro lado, para $\alpha$, e consequentemente $\beta$, suficientemente grandes, o termo dentro do parêntesis do lado esquerdo é positivo. De facto, fazendo $\beta\to+\infty$, e como $k>0$, então pelo lema 4.7 (aplicado a $\theta\left(\cdot\right)$)

$$\lim_{\beta\to+\infty}\left[\inf_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K,|v|<k\\ t\in[0,T]}}\left\{\theta\left(|v|\right)-|v|\ \theta'\left(|v|\right)\right\}-\sup_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K,|v|>\beta\\ t\in[0,T]}}\left\{\theta\left(|v|\right)-|v|\ \theta'\left(|v|\right)\right\}\right] \tag{5.14}$$

$$>\inf_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K,|v|<k\\ t\in[0,T]}}\left\{\theta\left(|v|\right)-|v|\ \theta'\left(|v|\right)\right\}-\inf_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K,|v|<k\\ t\in[0,T]}}\left\{\theta\left(|v|\right)-|v|\ \theta'\left(|v|\right)\right\}=0.$$

De (5.12), (5.13) e (5.14), segue que $r$ é negativo, o que contradiz o facto de termos suposto $r>0$. Logo, não podemos ter $\zeta\neq0$, mas sim $\zeta=0$. E portanto, $V_\theta\left(\cdot\right)$ é finalmente constante.

**(Parte 2 da demonstração do teorema 5.1 : como $V_\theta(\cdot)$ é finalmente constante, então o problema $(\mathcal{P}_\theta)$ admite uma solução $z(\cdot)$ que satisfaz a equação do enunciado do teorema 5.1)**

Para $\alpha$ suficientemente grande, $V_\theta(\alpha)$ é finito, pelo lema 4.1 $(i)$. Desta maneira, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ suficientemente grande tal que

$$V_\theta(\alpha) \text{ é finito e } V_\theta(\overline{\alpha}) = V_\theta(\alpha), \forall\, \overline{\alpha} \geq \alpha.$$

Seja $z(\cdot)$ uma solução de $(\mathcal{P}_\theta(\alpha))$ (a qual existe pelo lema 4.1 $(ii)$).

A demonstração segue como na parte 1 da demonstração do teorema 4.5 até à aplicação do teorema 2.1, para $r = 0$. Desta maneira, o teorema 2.1 garante a existência de uma função integrável $\xi(\cdot)$ tal que

$$\xi(t) \in \partial_t L(t, z(t), z'(t)) \text{ qs em } [0,T],$$

e a existência de uma constante $c$ e uma função mensurável $p(\cdot)$ com

$$p(t) \in \partial_v L(t, z(t), z'(t)) \text{ qs em } [0,T],$$

tais que

$$L(t, z(t), z'(t)) - \langle z'(t), p(t)\rangle = c + \int_0^t \xi(\tau)\, d\tau \text{ qs em } [0,T]. \tag{5.15}$$

O que significa que $z(\cdot)$ satisfaz a equação (5.1).

**(Parte 3 da demonstração do teorema 5.1 : $z(\cdot)$ é lipschitziana)**

A equação (5.15), na presença de $(HE_2)'$, implica que $z'(\cdot)$ é essencialmente limitada, isto é,

$$\exists\, \beta > 0 : |z'(t)| \leq \beta, \text{ qs em } [0,T].$$

Suponhamos, com vista a um absurdo, que $z'(\cdot) \notin L^\infty([0,T], \mathbb{R}^n)$. Então para qualquer $\beta > 0$,

$$\exists\, I_1 \subset [0,T] \text{ com } \mu(I_1) > 0 : |z'(t)| > \beta, \forall\, t \in I_1.$$

Logo, de (5.15) para algum $s_1 \in \Omega$, para algum $v_1 \in K$ com $|v_1| > \beta$, e para algum $p_1 \in \partial_v L(t_1, s_1, v_1)$, vem

$$L(t_1, s_1, v_1) - \langle v_1, p_1\rangle = c + \int_0^t \xi(\tau)\, d\tau.$$

Isto é,

$$c = L(t_1, s_1, v_1) - \langle v_1, p_1\rangle - \int_0^t \xi(\tau)\, d\tau.$$

Desta igualdade resulta

$$c = L(t_1, s_1, v_1) - \langle v_1, p_1\rangle - \int_0^t \xi(\tau)\, d\tau \leq \sup_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K, |v|>\beta\\ t\in[0,T]}} \{L(t,s,v) - \langle v, \partial_v L(t,s,v)\rangle\} + \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t [-\xi(\tau)]\, d\tau. \tag{5.16}$$

Como $z(\cdot) \in \Gamma(\overline{x}(\cdot))$ e vale a hipótese extra $(HE_1)$, então existe $k > 0$ tal que

$$\inf_{0\leq t\leq T} ess\, |z'(t)| < k,$$

isto é,

$$\sup\{c \in \mathbb{R} : |z'(t)| \geq c \text{ qs em } [0,T]\} < k.$$

Desta maneira,

$$\exists\, I_2 \subset [0,T] \text{ com } \mu(I_2) > 0 : |z'(t)| < k, \forall\, t \in I_2.$$

Logo, de (5.15) para algum $s_2 \in \Omega$, para algum $v_2 \in K$ com $|v_2| < k$, e para algum $p_2 \in \partial_v L(t_2, s_2, v_2)$, vem

$$L(t_2, s_2, v_2) - \langle v_2, p_2 \rangle = c + \int_0^t \xi(\tau)\ d\tau.$$

Isto é,

$$c = L(t_2, s_2, v_2) - \langle v_2, p_2 \rangle - \int_0^t \xi(\tau)\ d\tau.$$

Desta igualdade temos

$$c = L(t_2, s_2, v_2) - \langle v_2, p_2 \rangle - \int_0^t \xi(\tau)\ d\tau \geq \inf_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K, |v|<k\\ t\in[0,T]}} \{L(t,s,v) - \langle v, \partial_v L(t,s,v)\rangle\} + \inf_{t\in[0,T]} \int_0^t [-\xi(\tau)]\ d\tau. \quad (5.17)$$

Juntando (5.16) e (5.17) resulta

$$\begin{aligned} 0 \ \leq\ & \sup_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K, |v|>\beta\\ t\in[0,T]}} \{L(t,s,v) - \langle v, \partial_v L(t,s,v)\rangle\} - \inf_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K, |v|<k\\ t\in[0,T]}} \{L(t,s,v) - \langle v, \partial_v L(t,s,v)\rangle\} + \\ & + \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t [-\xi(\tau)]\ d\tau - \inf_{t\in[0,T]} \int_0^t [-\xi(\tau)]\ d\tau. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Já vimos que

$$\sup_{t\in[0,T]} \int_0^t [-\xi(\tau)]\ d\tau - \inf_{t\in[0,T]} \int_0^t [-\xi(\tau)]\ d\tau \leq \lambda\ \Lambda(\overline{x}(\cdot)) + \eta T.$$

Então, de (5.18) vem

$$\begin{aligned} 0 \ \leq\ & \sup_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K, |v|>\beta\\ t\in[0,T]}} \{L(t,s,v) - \langle v, \partial_v L(t,s,v)\rangle\} - \inf_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K, |v|<k\\ t\in[0,T]}} \{L(t,s,v) - \langle v, \partial_v L(t,s,v)\rangle\} + \\ & + \{\lambda\ \Lambda(\overline{x}(\cdot)) + \eta T\}. \end{aligned}$$

Isto é,

$$\begin{aligned} 0 \ \leq\ & \sup_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K, |v|>\beta\\ t\in[0,T]}} \{L(t,s,v) - \langle v, \partial_v L(t,s,v)\rangle\} + \{\lambda\ \Lambda(\overline{x}(\cdot)) + \eta T\} + \\ & - \inf_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K, |v|<k\\ t\in[0,T]}} \{L(t,s,v) - \langle v, \partial_v L(t,s,v)\rangle\}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Para $\beta$ suficientemente grande, o lado direito da desigualdade (5.19) é negativo. De facto, como vale a hipótese $(HE_2)'$ e fazendo $\beta \to +\infty$, no lado direito da desigualdade (5.19), vem

$$\lim_{\beta \to +\infty} \left[ \sup_{\substack{s \in \Omega, \\ v \in K, |v| > \beta \\ t \in [0,T]}} \{L(t,s,v) - \langle v, \partial_v L(t,s,v) \rangle\} + \{\lambda\, \Lambda(\overline{x}(\cdot)) + \eta T\} + \right.$$

$$\left. - \inf_{\substack{s \in \Omega, \\ v \in K, |v| < k \\ t \in [0,T]}} \{L(t,s,v) - \langle v, \partial_v L(t,s,v) \rangle\} \right]$$

$$< \inf_{\substack{s \in \Omega, \\ v \in K, |v| < k \\ t \in [0,T]}} \{L(t,s,v) - \langle v, \partial_v L(t,s,v) \rangle\} - \inf_{\substack{s \in \Omega, \\ v \in K, |v| < k \\ t \in [0,T]}} \{L(t,s,v) - \langle v, \partial_v L(t,s,v) \rangle\} = 0.$$

O que contradiz (5.19). E portanto, $z'(\cdot)$ é essencialmente limitada. Logo,

$$z'(\cdot) \in L^\infty([0,T], \mathbb{R}^n).$$

Além disso, pela parte 2 da demonstração do teorema 4.5,

$$z(\cdot) \in L^\infty([0,T], \mathbb{R}^n),$$

logo

$$z(\cdot) \in W^{1,\infty}([0,T], \mathbb{R}^n).$$

Consequentemente, $z(\cdot)$ é lipschitziana, pela nota 15.3.

**(Parte 4 da demonstração do teorema 5.1 : $z(\cdot)$ é solução de $(\mathcal{P})$)**

É idêntica à parte 3 da demonstração do teorema 4.5.

**(Parte 5 da demonstração do teorema 5.1 : qualquer outra solução $\overline{z}(\cdot)$ do problema $(\mathcal{P})$ é, tal como $z(\cdot)$, lipschitziana e satisfaz a equação do teorema 5.1)**

Seja $\overline{z}(\cdot)$ uma qualquer outra solução de $(\mathcal{P})$, e mostremos que $\overline{z}(\cdot)$ também é solução de $(\mathcal{P}_\psi)$ para alguma função de Nagumo $\psi(\cdot)$ tal que $\overline{z}(\cdot) \in AC_\psi([0,T], \mathbb{R}^n)$. Como $\overline{z}(\cdot) \in AC_\psi([0,T], \mathbb{R}^n)$ e é solução de $(\mathcal{P})$, então é admissível para $(\mathcal{P}_\psi)$ (analogamente ao que foi feito na parte 3 da demonstração do teorema 4.5). Além disso, se $y(\cdot)$ é uma solução de $(\mathcal{P}_\psi)$, a qual é admissível para $(\mathcal{P})$, temos que

$$\Lambda(y(\cdot)) \leq \Lambda(\overline{z}(\cdot)) \leq \Lambda(y(\cdot)).$$

Logo,

$$\Lambda(y(\cdot)) = \Lambda(\overline{z}(\cdot)).$$

O que significa que $\overline{z}(\cdot)$ é solução de $(\mathcal{P}_\psi)$. Então, analogamente ao que vimos para $z(\cdot)$, concluimos que $\overline{z}(\cdot)$ é lipschitziana e satisfaz a equação (5.1).

Mostrámos então que qualquer outra solução $\overline{z}(\cdot)$ do problema $(\mathcal{P})$, tal como $z(\cdot)$, é lipschitziana e satisfaz a equação (5.1).

O que completa a demonstração do teorema 5.1 do artigo. ■

### 5.4. Exemplo do caso não-autónomo

**Exemplo 5.2.** *Sejam* $n = 1$, $T = 1$, *e* $L : [0,1] \times \mathbb{R}\times\mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ *dada por*

$$L(t,s,v) = \varphi(t)\ \sqrt{1+v^2},$$

*onde* $\varphi : [0,1] \rightarrow (0, +\infty)$ *é uma função continuamente diferenciável e tal que*

$$m := \min_{t\in[0,1]} \varphi(t) > 0.$$

*Consideremos o problema* $(\mathcal{P})$ *de minimizar*

$$\Lambda(x(\cdot)) = \int_0^1 L(t, x(t), x'(t))\ dt$$

*sujeito a :*
- $x(0) = 0$, $x(1) = c > 0$;
- $C := \{(0,c)\}$;
- $K := \mathbb{R}$.

*Além disso, como* $L(\cdot)$ *satisfaz a condição de crescimento linear*

$$L(t,s,v) \geq m\ |v|, \forall\ (t,s,v) \in [0,1] \times \mathbb{R}\times\mathbb{R},$$

*então podemos adicionar a restrição*

$$x(t) \in \Omega, \forall\ t \in [0,1],$$

*onde* $\Omega$ *é algum conjunto compacto (como no caso coercivo) sem alterarmos a natureza do problema.*

*Pelo facto de termos suposto que* $\Omega$ *é compacto e pelas definições dos conjuntos* $C$ *e* $K$, *podemos afirmar que as hipóteses básicas* $(i)$, $(ii)$ *e* $(iii)$ *são satisfeitas.*

*Como a função* $L(\cdot)$ *é contínua em* $[0,1] \times \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, *então é contínua em* $\mathbb{R}^2$ *pela proposição 4.6 e em particular é sci em* $\mathbb{R}^2$, *verificando-se a hipótese básica* $(iv)$.

*Fixemos* $(t,s) \in [0,1] \times \Omega$. *Então a função* $L(t,s,\cdot)$ *é convexa (ver exemplo 4.10) e dom* $L(t,s,\cdot) = \mathbb{R}$ *é um conjunto aberto, convexo e não-vazio verificando-se a hipótese básica* $(v)$.

*Vejamos agora se se verifica a hipótese básica* $(vi)$, *isto é, para cada* $s \in \Omega$ *e* $v \in$ *dom* $L(s,\cdot)$ *a função* $t \longmapsto L(t,s,v)$ *é lipschitziana.*

*Fixemos* $s \in \Omega$ *e* $v \in$ *dom* $L(s,\cdot)$.

*Seja também*

$$\mu := \max_{t\in[0,1]} |\varphi'(t)|$$

*(o qual existe por* $[0,1]$ *ser compacto e* $\varphi'(\cdot)$ *contínua), então*

$$|\varphi'(t)| \leq \max_{t\in[0,1]} |\varphi'(t)| =: \mu, \forall\ t \in [0,1].$$

*E como* $\varphi : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ *é uma função continuamente diferenciável temos*

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq \mu |t_1 - t_2|, \forall\ t_1, t_2 \in [0,1],$$

*pela proposição 16.7. Sejam* $t_1, t_2 \in [0,1]$ *quaisquer, então*

$$\begin{aligned} |L(t_1,s,v) - L(t_2,s,v)| &= \left|\varphi(t_1)\sqrt{1+v^2} - \varphi(t_2)\sqrt{1+v^2}\right| = \sqrt{1+v^2}\,|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \\ &\leq \sqrt{1+v^2}\ \mu\,|t_1 - t_2| = \overline{\mu}\,|t_1 - t_2|\ \ (\text{fazendo } \overline{\mu} = \sqrt{1+v^2}\ \mu). \end{aligned}$$

*Isto é, a função* $t \mapsto L(t,s,v)$ *é lipschitziana, para cada* $s \in \Omega$ *e* $v \in$ *dom* $L(s,\cdot)$.

*Segue que*

$$|\varphi'(t)| \leq \frac{\mu}{m}\,\varphi(t)\,, \forall\, t \in [0,1]\,,$$

*logo* $L(\cdot)$ *satisfaz a hipótese básica* $(vii)$ *com* $\lambda = \frac{\mu}{m}$, $\eta = 0$. *De facto, para cada* $s \in \Omega$ *e* $v \in dom\, L(s,\cdot)$ *vem*

$$|L_t(t,s,v)| = \left|\sqrt{1+v^2}\,\varphi'(t)\right| = \sqrt{1+v^2}\,|\varphi'(t)| \leq \sqrt{1+v^2}\,\mu \leq \sqrt{1+v^2}\,\varphi(t)\,\frac{\mu}{m}$$

*(pois* $\varphi(t) \geq m \Rightarrow \frac{\varphi(t)}{m} \geq 1$*), o que significa que para* $\lambda = \frac{\mu}{m}$ *e* $\eta = 0$ *a hipótese básica* $(vii)$ *é verificada.*

*Vejamos se a hipótese básica* $(viii)$ *se verifica. Seja a função lipschitziana admissível para* $(\mathcal{P})$, $\overline{x} : [0,1] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\overline{x}(t) := c\,t,$$

*então*

$$\Lambda(\overline{x}(\cdot)) = \int_0^1 L(\overline{x}(t), \overline{x}'(t))\;dt = \int_0^1 \varphi(t)\;\sqrt{1+c^2}\;dt = \sqrt{1+c^2}\int_0^1 \varphi(t)\;dt = \overline{\varphi}\;\sqrt{1+c^2},$$

*onde*

$$\overline{\varphi} := \int_0^1 \varphi(t)\;dt.$$

*Logo, verifica-se a hipótese básica* $(viii)$.

*Vejamos se* $(HE_1)$ *é satisfeita. Pela demonstração do teorema 4.8 (caso coercivo) a condição de crescimento linear faz com que* $(HE_1)$ *seja satisfeita para qualquer*

$$k > \frac{\Lambda(\overline{x}(\cdot)) - c_2\,1}{c_1\,1} = \frac{\overline{\varphi}\,\sqrt{1+c^2}}{m}.$$

*Resta-nos verificar* $(HE_2)'$ *para algum* $k$ *arbitrariamente próximo de* $\frac{\overline{\varphi}\,\sqrt{1+c^2}}{m}$. *Calculemos*

$$L(t,s,v) - v\cdot L_v(t,s,v) = \varphi(t)\,\sqrt{1+v^2} - v\,\varphi(t)\;\frac{v}{\sqrt{1+v^2}} = \frac{\varphi(t)}{\sqrt{1+v^2}}.$$

*Então, se*

$$M := \max_{t\in[0,1]} \varphi(t)$$

*(o qual existe por* $[0,1]$ *ser compacto e* $\varphi(\cdot)$ *contínua), temos*

$$\lim_{\beta\to+\infty}\;\sup_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K, |v|>\beta\\ t\in[0,1]}}\;\{L(t,s,v) - v\cdot L_v(t,s,v)\} = \lim_{\beta\to+\infty}\;\sup_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in\mathbb{R}, |v|>\beta\\ t\in[0,1]}}\;\left\{\frac{\varphi(t)}{\sqrt{1+v^2}}\right\} = \lim_{\beta\to+\infty}\left(\frac{M}{\sqrt{1+\beta^2}}\right) = 0$$

*e*

$$\inf_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in K, |v|<k\\ t\in[0,1]}}\;\{L(t,s,v) - v\cdot L_v(t,s,v)\} = \inf_{\substack{s\in\Omega,\\ v\in\mathbb{R}, |v|<k\\ t\in[0,1]}}\;\left\{\frac{\varphi(t)}{\sqrt{1+v^2}}\right\} = \frac{m}{\sqrt{1+k^2}}.$$

*Além disso,*

$$\lambda\;\Lambda(\overline{x}(\cdot)) + \eta\;1 = \frac{\mu}{m}\;\overline{\varphi}\;\sqrt{1+c^2} + 0\,(1) = \frac{\mu}{m}\;\overline{\varphi}\;\sqrt{1+c^2}.$$

*Então, para* $k > \frac{\overline{\varphi}\,\sqrt{1+c^2}}{m}$, $(*)'$ *reduz-se a*

$$0 + \frac{\mu}{m}\;\overline{\varphi}\;\sqrt{1+c^2} < \frac{m}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{m^2}{\sqrt{m^2+\overline{\varphi}^2\,(1+c^2)}},$$

*donde*

$$\mu\,\overline{\varphi}\,\sqrt{1+c^2}\sqrt{m^2+\overline{\varphi}^2\,(1+c^2)} < m^3.$$

*Queremos agora mostrar que*

$$\overline{\varphi} \le m+\mu.$$

$$\begin{aligned}\mu &= \int_0^1 \mu\, dt = \int_0^1 \max_{t\in[0,1]} |\varphi'(t)|\; dt \ge \int_0^1 |\varphi'(t)|\; dt \ge \int_s^t |\varphi'(t)|\; dt \\ &\ge \left|\int_s^t \varphi'(t)\; dt\right| = |\varphi(t)-\varphi(s)| \ge |\varphi(t)| - |\varphi(s)| = \varphi(t)-\varphi(s),\ \forall\, t,\, s\in[0,1]\end{aligned}$$

*(pois $\varphi(t) > 0,\ \forall\, t \in [0,1]$), então*

$$\varphi(t) \le \varphi(s) + \mu,\ \forall\, t,\, s\in[0,1].$$

*Em particular, a desigualdade anterior também acontece para o* $\min\limits_{t\in[0,1]} \varphi(t) =: m$, *isto é,*

$$\varphi(t) \le m+\mu,\ \forall\, t\in[0,1].$$

*Logo*

$$\overline{\varphi} = \int_0^1 \varphi(t)\; dt \le \int_0^1 [m+\mu]\; dt = m+\mu.$$

*Então uma condição suficiente para que $(HE_2)'$ se verifique é :*

$$\mu\,(m+\mu)\,\sqrt{1+c^2}\sqrt{m^2+(m+\mu)^2\,(1+c^2)} < m^3. \blacksquare$$

*Portanto, deduzimos :*

**Proposição 5.3.** *O problema $(\mathcal{P})$, no caso particular descrito no exemplo 5.2, tem solução desde que $\mu$ seja suficientemente pequeno (isto é que $\varphi(\cdot)$ seja quase constante), para cada par m, c fixado.*

Na análise anterior, vimos apenas condições suficientes para garantir a existência de solução. No entanto, a existência de solução falha a não ser que alguma restrição seja estabelecida em $\varphi(\cdot)$. Uma vez que $\Lambda(\cdot)$ é convexo, podemos estabelecer uma caracterização exacta das condições em $\varphi(\cdot)$ para garantir a existência de solução. Desta maneira consideremos o seguinte resultado :

**Proposição 5.4.** *Sejam $n=1$, $t_1,\, t_2 \in \mathbb{R}$ com $t_1 < t_2$ e $\varphi : [t_1,t_2] \to (0,+\infty)$ uma função continuamente diferenciável. Então o integral*

$$\Lambda(x(\cdot)) := \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)\ \sqrt{1+(x'(t))^2}\; dt$$

*tem um mínimo absoluto das funções $x : [t_1,t_2] \to \mathbb{R}$ AC (absolutamente contínuas) com $x(t_1)=t_1$, $x(t_2)=t_2$, $t_1$, $t_2$ fixados, se e só se*

$$|x_2 - x_1| \le \int_{t_1}^{t_2} \frac{m}{\sqrt{(\varphi(t))^2 - m^2}}\; dt$$

*onde*

$$m := \underset{t\in[t_1,t_2]}{\varphi(t)}\ .$$

*(Ver [9], p.440.)*

Assim o problema $(\mathcal{P})$ (do exemplo 5.2) tem solução se e só se

$$|x(1)-x(0)| \le \int_0^1 \frac{m}{\sqrt{(\varphi(t))^2 - m^2}}\; dt.$$

### 5.5. O caso $n = 1$

No caso especial $n = 1$, o teorema do valor médio (teorema 16.6) permite simplificar as hipóteses extra, fornecendo o valor $k$ de $(HE_1)$ e $(HE_2)$, desde que se tenha a informação extra :

$(A)$ $x(t) \in int\ \Omega\ \forall\ t \in [0,T]$ para qualquer $x(\cdot)$ em $\Gamma(\overline{x}(\cdot))$;

$(B)$ $L(\cdot)$ é localmente lipschitziana em $(t,s,v)$ e, para as constantes $k_0$ e $c_0$, satisfaz

$$|\partial_s L(t,s,v)| \leq k_0 |L(t,s,v)| + c_0, \forall\ (t,s,v) \in [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^n.$$

Assim, se $n = 1$ e valem $(A)$ e $(B)$ (por exemplo se $\Omega = \mathbb{R}^n$ e $L(\cdot)$ é lipschitziana), em lugar de $(HE_1)$ mais $(HE_2)$, supõe-se que vale

$$(HE_2)'' \left\{ \begin{array}{l} \text{para algum } k > k_0 := \sup\left\{\frac{|x_2 - x_1|}{T} : (x_1, x_2) \in C\right\}, \text{ vale} \\ (*)' \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{\beta \to \infty} \sup\limits_{\substack{s\in\Omega, \\ v\in K, |v|>\beta, \\ t\in[0,T]}} \{L(t,s,v) - \langle v, \partial_v L(t,s,v)\rangle\} + \{\lambda\ \Lambda(\overline{x}(\cdot)) + \eta\ T\} < \\ \qquad < \inf\limits_{\substack{s\in\Omega, \\ v\in K, |v|<k, \\ t\in[0,T]}} \{L(t,s,v) - \langle v, \partial_v L(t,s,v)\rangle\}. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Note-se que permanecem as hipóteses básicas do problema não-autónomo (ver subsecções 5.1 e 5.2).

**Teorema 5.5.** *Suponhamos que $n = 1$ e valem as hipóteses básicas e as hipóteses extra $(A)$, $(B)$ e $(HE_2)''$. Então o problema $(\mathcal{P})$ tem solução e, além disso, qualquer solução $x(\cdot)$ é lipschitziana e satisfaz*

$$L(t, x(t), x'(t)) - \langle x'(t), p(t)\rangle = c + \int_0^t \xi(\tau)\ d\tau \text{ qs em } [0,T],$$

*onde $c$ é uma constante e $p(\cdot)$ e $\xi(\cdot)$ são funções mensuráveis tais que*

$$p(t) \in \partial_v L(t, x(t), x'(t)) \text{ qs em } [0,T],$$

$$\xi(t) \in \partial_t L(t, x(t), x'(t)) \text{ qs em } [0,T].$$

**Demonstração:**

A demonstração é muito parecida à do teorema 5.1, a única diferença é a forma como se obtém o conjunto $I_2$, com $\mu(I_2) > 0$, o qual nos dá a limitação inferior de $c$. De facto, a segunda parte do teorema 2.1 afirma que $z(\cdot)$ é continuamente diferenciável. Logo, pelo teorema do valor médio (teorema 16.6) existe $t^* \in (0,T)$ para o qual

$$z'(t^*) = \frac{z(T) - z(0)}{T}.$$

Como $z(\cdot)$ é admissível para $(\mathcal{P}_\theta(\alpha))$ (pela demonstração do teorema 5.1), então $(z(0), z(T)) \in C$. E, pela hipótese $(HE_2)''$,

$$\frac{z(T) - z(0)}{T} \leq \frac{|z(T) - z(0)|}{T} \leq \sup\left\{\frac{|z(T) - z(0)|}{T} : (z(0), z(T)) \in C\right\} =: k_0 < k.$$

Donde

$$|z'(t^*)| = \frac{|z(T) - z(0)|}{T} \le k_0 < k,$$

e

$$\inf_{0\le t\le T} ess\, |z'(t)| \le k_0 < k,$$

onde $k_0$ é definido como acima. Assim

$$\sup\{c \in \mathbb{R} : |z'(t)| \ge c \text{ qs em } [0,T]\} \le k_0 < k,$$

e

$$\exists\, I_2 \subset [0,T] \text{ com } \mu(I_2) > 0 : |z'(t)| < k, \forall\, t \in I_2.$$

O resto da demonstração é idêntica à do teorema 5.1. ■

### 5.6. Exemplo do caso $n = 1$

**Exemplo 5.6.** *Voltemos ao exemplo 4.11, no caso particular $n = 1$. Consideremos a função $L : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por*

$$L(t,s,v) := \sqrt{1 + |v|^2} - r\ \sin|s|$$

*(é a mesma função do exemplo 4.11 considerando $n = 1$ e adaptada ao problema não-autónomo).*

*Já vimos no exemplo 4.11 (caso autónomo) que as hipóteses básicas (i), (ii), (iii), (iv), (v) e (viii) são verificadas.*

*Falta verificar as hipóteses básicas (vi) e (vii). Como a função $L(\cdot)$ não depende explicitamente de $t$, então $\lambda = \eta = 0$, verificando-se (vii).*

*A hipótese extra (A) verifica-se pois para qualquer $x(\cdot) \in \Gamma(\overline{x}(\cdot))$, $x(t) \in int\ \Omega = \Omega = \mathbb{R}$.*

*Vejamos agora se a hipótese extra (B) é verificada. Isto é, $L(\cdot)$ é localmente lipschitziana. Isto é, $L(\cdot)$ é localmente lipschitziana em $(t,s,v)$ e, para as constantes $k_0$ e $c_0$, satisfaz*

$$|L_s(t,s,v)| \le k_0 |L(t,s,v)| + c_0, \forall\ (t,s,v) \in [0,1] \times \Omega \times \mathbb{R}.$$

*Vamos mostrar que para cada $(t^*,s^*,v^*) \in \mathbb{R}^3$, existem $\varepsilon > 0$ e $H > 0$ tais que*

$$|L(t_1,s_1,v_1) - L(t_2,s_2,v_2)| \le H\, |(t_1,s_1,v_1) - (t_2,s_2,v_2)|,$$

*para quaisquer $(t_1,s_1,v_1)$, $(t_2,s_2,v_2) \in B((t^*,s^*,v^*),\varepsilon)$. De facto, para qualquer $\varepsilon > 0$ e $H := H_1 + r\ H_2$ tais que para quaisquer $(t_1,s_1,v_1)$, $(t_2,s_2,v_2) \in B((t^*,s^*,v^*),\varepsilon)$, temos :*

$$\begin{aligned} |L(t_1,s_1,v_1) - L(t_2,s_2,v_2)| &= \left|\sqrt{1+|v_1|^2} - r\ \sin|s_1| - \left(\sqrt{1+|v_2|^2} - r\ \sin|s_2|\right)\right| \qquad (5.20) \\ &\le \left|\sqrt{1+|v_1|^2} - \sqrt{1+|v_2|^2}\right| + r\,|\sin|s_1| - \sin|s_2|| \end{aligned}$$

*Como a função $L_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$L_1(v) := \sqrt{1 + |v|^2}$$

*é convexa, então pelo teorema 19.72, $L_1(\cdot)$ é localmente lipschitziana no int (dom $L_1$) = dom $L_1 = \mathbb{R}$. Logo $L_1(\cdot)$ é lipschitziana em $B(v^*, \varepsilon)$, isto é, é localmente lipschitziana em $v^*$. Consequentemente, pela proposição 2.14, a função $\widetilde{L}_1 : [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\widetilde{L}_1(t, s, v) := L_1(v)$$

*é localmente lipschitziana em $(t^*, s^*, v^*)$. Ou seja,*

$$\left|\sqrt{1 + |v_1|^2} - \sqrt{1 + |v_2|^2}\right| = \left|\widetilde{L}_1(t_1, s_1, v_1) - \widetilde{L}_1(t_2, s_2, v_2)\right| \leq H_1 \left|(t_1, s_1, v_1) - (t_2, s_2, v_2)\right|, \tag{5.21}$$

*para quaisquer $(t_1, s_1, v_1)$, $(t_2, s_2, v_2) \in B((t^*, s^*, v^*), \varepsilon)$, para algum $H_1 > 0$ e para o $\varepsilon$ já referido. Por outro lado, para a função $L_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$L_2(s) := \sin|s|$$

*temos*

$$|L_2'(s)| = |\cos|s|| \leq 1, \ \forall\ s \in \mathbb{R},$$

*logo pela proposição 16.7, a função $L_2(\cdot)$ é lipschitziana em $\mathbb{R}$. Em particular, $L_2(\cdot)$ é localmente lipschiziana em $s^*$, ou seja, é lipschitziana em $B(s^*, \varepsilon)$. Logo, pela proposição 2.14, a função $\widetilde{L}_2 : [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\widetilde{L}_2(t, s, v) := L_2(v)$$

*é localmente lipschitziana em $(t^*, s^*, v^*)$. Isto é,*

$$|\sin|s_1| - \sin|s_2|| = \left|\widetilde{L}_2(t_1, s_1, v_1) - \widetilde{L}_2(t_2, s_2, v_2)\right| \leq H_2 \left|(t_1, s_1, v_1) - (t_2, s_2, v_2)\right|, \tag{5.22}$$

*para quaisquer $(t_1, s_1, v_1)$, $(t_2, s_2, v_2) \in B((t^*, s^*, v^*), \varepsilon)$, para algum $H_2 > 0$ e para o $\varepsilon$ já referido. Desta maneira, juntando (5.20), (5.21), (5.22), resulta*

$$\begin{aligned} |L(t_1, s_1, v_1) - L(t_2, s_2, v_2)| &\leq H_1 \left|(t_1, s_1, v_1) - (t_2, s_2, v_2)\right| + r\ H_2 \left|(t_1, s_1, v_1) - (t_2, s_2, v_2)\right| \\ &= H \left|(t_1, s_1, v_1) - (t_2, s_2, v_2)\right|. \end{aligned}$$

*O que significa que $L(\cdot)$ é localmente lipschitziana em $(t, s, v)$.*

*Por outro lado,*

$$|L_s(t, s, v)| = \left|-r\ \frac{s}{|s|}\ \cos|s|\right| = r\,|\cos|s|| \leq r, \ \forall\ (t, s, v) \in [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

*verificando-se a hipóteses extra $(B)$ para $k_0 = 0$ e $c_0 = r$.*

*Como $k_0 = 0$ (pois*

$$k_0 := \sup \left\{ \frac{|x_2 - x_1|}{1} : (x_1, x_2) \in C = \{(0,0)\} \right\} = 0),$$

*então $(*)'$ acontece para algum $k > k_0$ desde que $2\,r < 1$. Mostremos que isso acontece, começando por calcular o valor de*

$$\lambda\ \Lambda(\overline{x}(\cdot)) - \eta\ 1.$$

*Seja $\overline{x} : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ uma função lipschitziana, em $X$, dada por*

$$\overline{x}(t) := 0,$$

*então*

$$\Lambda(\overline{x}(\cdot)) = \int_0^1 L(\overline{x}(t), \overline{x}'(t))\ dt = \int_0^1 \left\{ \sqrt{1 + |0|^2} - r\ \sin|0| \right\}\ dt = \int_0^1 1\ dt = 1 \in \mathbb{R}.$$

*Como $\lambda = \eta = 0$, vem*

$$\lambda\ \Lambda(\overline{x}(\cdot)) - \eta\ 1 = 0.$$

*Consideremos também $(t, s, v) \in [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ qualquer, logo*

$$L(t,s,v) - \langle v, L_v(t,s,v) \rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + |v|^2}} - r\ \sin|s|,$$

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \to +\infty} \sup_{\substack{s \in \Omega, \\ v \in K, |v| > \beta}} \{L(s,v) - \langle v, L_v(s,v) \rangle\} &= \lim_{\beta \to +\infty} \sup_{\substack{s \in \mathbb{R}, \\ v \in \mathbb{R}, |v| > \beta}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + |v|^2}} - r\ \sin|s| \right\} \\ &= \lim_{\beta \to +\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2}} + r \right\} = r \end{aligned}$$

*e*

$$\begin{aligned} \inf_{\substack{s \in \Omega, \\ v \in K, |v| < k}} \{L(s,v) - \langle v, L_v(s,v) \rangle\} &= \inf_{\substack{s \in \mathbb{R}, \\ v \in \mathbb{R}, |v| < k}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + |v|^2}} - r\ \sin|s| \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + k^2}} - r. \end{aligned}$$

*Desta maneira, a desigualdade $(*)'$ reduz-se à condição*

$$r < \frac{1}{\sqrt{1 + k^2}} - r \Leftrightarrow 2\,r\ \sqrt{1 + k^2} < 1.$$

*E portanto, como $k_0 = 0$, então $(*)'$ acontece para algum $k > k_0$ desde que $2\,r < 1$. Uma vez que todas as hipóteses do teorema 5.5 são satisfeitas, conclui-se que existe solução para $r$ desta maneira. Isto é melhor do que obtivémos aplicando o teorema 4.5.* ■

# Capítulo III
# Apêndice: conceitos e resultados básicos

## 6. Espaços topológicos

### 6.1. Definições e propriedades elementares

**Definição 6.1.** *Seja $X$ um conjunto qualquer. Uma* **topologia** *$\tau$ em $X$ é um conjunto $\tau \subset \mathcal{P}(X)$, que tem de verificar certas condições :*

(*i*) $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$;

(*ii*) $V_1, ..., V_n \in \tau \Rightarrow V_1 \cap ... \cap V_n \in \tau$;

(*iii*) $(V_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ *é uma família arbitrária (finita, contável ou incontável) de elementos de* $\tau \Rightarrow \left( \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha \right) \in \tau$.

(*Ver [33], p. 8.*)

**Definição 6.2.** *Um conjunto $X$ munido de uma topologia $\tau$ em $X$, cuja notação é $(X, \tau)$, denomina-se* **espaço topológico.**

(*Ver [33], p. 8.*)

**Nota 6.3.** *Os conjuntos de $\tau$ denominam-se* **abertos**. *E os seus complementares chamam-se* **fechados.**

(*Ver [33], p. 8.*)

**Definição 6.4.** *Sejam $X$ um conjunto, $\tau$ uma topologia em $X$ e $A \subset X$. Então :*

*(a) Uma* **vizinhança de um ponto** *$p$ é um conjunto aberto contendo $p$.*

*(b) Uma* **vizinhança de um conjunto** *$A$ é um conjunto aberto contendo $A$.*

*(c) O* **interior** *de $A$ é a união de todos os seus subconjuntos abertos e é denotado por $int(A)$; um ponto $p \in int(A)$ diz-se* **ponto interior** *de $A$.*

*(d) O* **fecho** *de $A$ é a intersecção de todos os conjuntos fechados contendo $A$ e é denotado por $\overline{A}$.*

*(e) O conjunto dos pontos que estão em $\overline{A}$ e que não estão em $int(A)$ diz-se a* **fronteira** *de $A$ e é denotado por $fr(A)$.*

(*Ver [20], p. 10.*)

**Definição 6.5.** *(a) Uma família $\beta$ de subconjuntos de $X$ diz-se uma* **base** *para a topologia $\tau$ se $\beta \subset \tau$ e se qualquer conjunto em $\tau$ é a união de alguma subfamília de $\beta$.*

*(b) A famlia $\beta$ diz-se uma* **subbase** *para uma topologia $\tau$ se $\tau$ é a mais pequena topologia contendo $\beta$.*

*(c) Se $\beta$ é uma colecção de vizinhanças de um conjunto $A \subset X$ e qualquer vizinhança de $A$ contém um conjunto em $\beta$, então $\beta$ diz-se uma* **família fundamental de vizinhanças** *para $A$.*

(*Ver [20], p. 10.*)

**Nota 6.6.** *Dar um espaço topológico é o mesmo que tomar um certo conjunto $X$ e definir uma certa topologia $\tau$ nele. No fundo, caracterizamos as partes de $X$ que se consideram abertas.*

(*Ver [24], p. 81.*)

**Definição 6.7.** *A topologia $\tau_A$ denomina-se* **topologia induzida** *por $(X, \tau)$ em $A$, com $A \subset X$.*

(*Ver [24], p. 83.*)

**Nota 6.8.** *Um conjunto $X$ pode admitir topologias distintas gerando espaços topológicos diferentes.*

(*Ver [24], p. 81.*)

**Definição 6.9.** *Sejam $\tau_1$ e $\tau_2$ duas topologias quaisquer distintas num conjunto $X$, isto é, sejam dois espaços topológicos $(X, \tau_1)$ e $(X, \tau_2)$. Então são equivalentes as seguintes afirmações:*

(*i*) *a* **topologia** *$\tau_1$ diz-se* **mais forte** *(ou mais fina) que a topologia $\tau_2$, se $\tau_2 \subset \tau_1$, isto é, se $\tau_1$ contém mais abertos que $\tau_2$;*

(*ii*) a **topologia** $\tau_2$ *diz-se* **mais fraca** *(ou menos fina) que a topologia* $\tau_1$, *se* $\tau_2 \subset \tau_1$, *isto é, se* $\tau_1$ *contém mais abertos que* $\tau_2$.

*(Ver [24], p. 82.)*

**Proposição 6.10.** *Um conjunto num espaço topológico é aberto se e só se contém uma vizinhança de cada um dos seus pontos.*

*(Ver [20], p. 10.)*

**Proposição 6.11.** *(a) A intersecção de qualquer família de conjuntos fechados é um conjunto fechado.*

*(b) A união de qualquer família finita de conjuntos fechados é um conjunto fechado.*

*(c)* $\varnothing$ *e* $X$ *são fechados.*

*(Ver [20], p. 10.)*

**Definição 6.12.** *Sejam* $X$ *um conjunto,* $\tau$ *uma topologia em* $X$ *e* $A \subset X$. *Se* $A \subset X$, *então um ponto* $p$ *é um* **ponto limite**, *ou um* **ponto de acumulação**, *de* $A$ *desde qualquer vizinhança de* $p$ *contém pelo menos um ponto* $q \neq p$, *com* $q \in A$.

*(Ver [20], p. 10.)*

**Definição 6.13.** *Sejam* $X$ *um espaço topológico e* $A \subset X$. *Então* $A$ *diz-se* **denso** *se* $\overline{A} = X$.

*(Ver [20], p. 21.)*

**Definição 6.14.** *Uma* **cobertura** *de um conjunto* $A$ *num espaço topológico* $X$ *é uma família de abertos, cuja união contém* $A$.

*(Ver [20], p. 17.)*

**Definição 6.15.** *Um espaço* $X$ *diz-se* **compacto** *se qualquer cobertura de* $X$ *contém uma subcobertura finita (isto é, uma subfamília finita que também cobre* $X$*).*

*(Ver [20], p. 17.)*

**Definição 6.16.** *Um espaço topológico* $X$ *diz-se* **localmente compacto** *se qualquer ponto tem uma vizinhança cujo fecho é compacto.*

*(Ver [20], p. 17.)*

**Definição 6.17.** *Um conjunto diz-se* **relativamente compacto** *se o seu fecho é compacto.*

*(Ver [20], p. 17.)*

**Nota 6.18.** $\mathbb{R}^n$ *é um espaço topológico.*

### 6.2. Continuidade e sci nos espaços topológicos

**Proposição 6.19.** *Sejam* $X, Y$ *dois espaços topológicos. Então as seguintes afirmaçõse são equivalentes :*

*(a) a aplicação* $f : X \to Y$ *é contínua;*

*(b)* $f^{-1}(B)$ *é um subconjunto fechado de* $X$, *para qualquer subconjunto fechado* $B$ *de* $Y$;

*(c)* $f^{-1}(A)$ *é um aberto de* $X$, *sempre que* $A$ *é um aberto de* $Y$.

*(Ver [15], p. 19 e [33], p. 9.)*

**Definição 6.20.** *Sejam* $E$ *um espaço topológico e* $f : E \to [-\infty, +\infty]$ *uma função. Dizemos que* $f$ *é* **sci (semicontínua inferiormente) num ponto** $a \in E$ *se, para cada* $\lambda < f(a)$, *existe uma vizinhança* $V$ *de* $a$ *tal que* $\lambda < f(V)$.

*(Ver [15], p. 137.)*

**Proposição 6.21.** *Dizer que* $f$ *é sci em* $a$ *é equivalente a dizer que*

$$f(a) = \liminf_{x \to a} f(x).$$

*(Ver [15], p. 137.)*

**Proposição 6.22.** *Sejam $E$ um espaço topológico, $V$, $U$ vizinhanças contidas em $E$, $f : V \to (-\infty, +\infty]$, $g : U \to (-\infty, +\infty]$ funções sci num ponto $a \in U \cap V$. Então a função $f + g : U \cap V \to (-\infty, +\infty]$ é sci no ponto $a$.*
*(Ver [15], p. 138.)*

**Proposição 6.23.** *Seja $E$ um espaço topológico. As seguintes afirmações são equivalentes :*
*(i) uma aplicação $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ é sci em $E$;*
*(ii) para qualquer $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, o conjunto $\{x \in E : f(x) \leq \lambda\}$ é fechado;*
*(iii) para qualquer $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, o conjunto $\{x \in E : f(x) > \lambda\}$ é aberto.*
*(Ver [15], p. 138.)*

**Proposição 6.24.** *Seja $E$ um espaço topológico. Se $f$ e $g$ são $> 0$ e sci em $E$, então $fg$ é sci.*
*(Ver [15], p. 140.)*

**Teorema 6.25.** *Sejam $E$ um conjunto compacto e $f : E \to [-\infty, +\infty]$ uma função sci. Então existe pelo menos um ponto $a \in E$ tal que*
$$f(a) = \inf_{x \in E} f(x).$$
*(Ver [15], p. 141.)*

**Teorema 6.26.** *Sejam $E$ um conjunto compacto e $f : E \to [-\infty, +\infty]$ uma função scs. Então existe pelo menos um ponto $a \in E$ tal que*
$$f(a) = \sup_{x \in E} f(x).$$
*(Ver [15], p. 141.)*

**Proposição 6.27.** *Sejam $E$ um espaço topológico, $D \subset E$ e $f : D \to [-\infty, +\infty]$ uma função. Dizemos que $f$ é* **contínua num ponto** *$a \in D$ se e só se $f$ é sci e scs em $a$.*
*(Ver [35], p. 274.)*

**Proposição 6.28.** *Sejam $E$ um espaço topológico, $D \subset E$ e $f : D \to [-\infty, +\infty]$ uma função sci num ponto $a \in D$ e $c > 0$. Então a função $cf : D \to \overline{\mathbb{R}}$ é sci no ponto $a$.*
*(Ver [35], p. 274.)*

## 7. Espaços métricos

**Definição 7.1.** *Sejam $X$ um conjunto qualquer $\neq \emptyset$. e $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo as seguintes propriedades :*
*(i) $\rho(x, y) \geq 0$;*
*(ii) $\rho(x, y) = 0$ se e só se $x = y$;*
*(iii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;*
*(iv) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.*
*Então $\rho$ diz-se uma* **métrica**, *ou uma função métrica (ou* **distância***) em $X$.*
*(Ver [20], p. 18.)*

**Definição 7.2.** *Sejam $X$ um conjunto qualquer $\neq \emptyset$, $\rho$ uma métrica em $X$, $x \in X$ e $\varepsilon > 0$. Então a* **bola aberta** *de centro em $x$ e raio $\varepsilon$ é o conjunto*
$$B(x, \varepsilon) = \{y \in X : \rho(x, y) < \varepsilon\}.$$
*(Ver [20], p. 19.)*

**Definição 7.3.** *Seja $X$ um conjunto qualquer $\neq \emptyset$. A* **topologia da métrica** *em $X$ é topologia mais pequena que contém as bolas abertas $B(x, \varepsilon)$, com $x \in X$ e $\varepsilon > 0$.*
*(Ver [20], p. 19.)*

**Definição 7.4.** *Sejam $X$ um conjunto qualquer $\neq \emptyset$ e $\rho$ uma métrica em $X$. Diz-se então que $(X, d)$ é um* **espaço métrico.**

*(Ver [20], p. 19.)*

**Definição 7.5.** *Se $X$ é um espaço topológico tal que existe uma função métrica cuja topologia é a mesma que a topologia original, dizemos que $X$ é* **metrizável.**

*(Ver [20], p. 19.)*

## 8. Espaços vectoriais

**Definição 8.1.** *Chamamos* **espaço vectorial** *a um conjunto $E \neq \emptyset$, no qual estão definidas as aplicações :*

$$(i)\ E \times E \ni (x, y) \to x + y \in E \text{ (denotada adição de vectores);}$$
$$(ii)\ \mathbb{K} \times E \ni (\lambda, x) \to \lambda x \in E \text{ (denotada multiplicação por um escalar).}$$

*onde $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. De tal maneira que se verificam as seguintes propriedades: $\forall\ x,\ y,\ z \in E,\ \forall\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{K}$ :*

*1) $x + y = y + x$ (comutatividade);*
*2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (associatividade);*
*3) $\exists^1\ y \in E : x + y = x,\ \forall\ x \in E$ (existência do elemento neutro) (este $y$ usualmente é designado por $y = 0$);*
*4) $\forall\ x \in E,\ \exists^1\ y = -x \in E : x + y = 0$ (existência do elemento simétrico);*
*5) $\alpha\,(\beta x) = (\alpha\beta)\,x$;*
*6) $1 \cdot x = x$;*
*7) $(\alpha + \beta)\,x = \alpha x + \beta x$;*
*8) $\alpha\,(x + y) = \alpha x + \alpha y$.*

*(Ver [20], p. 36.)*

**Definição 8.2.** *Um conjunto $E$ diz-se um* **espaço vectorial topológico** *se se verificarem as condições :*

*1) $E$ é um espaço vectorial;*
*2) $E$ é um espaço topológico;*
*3) as aplicações*

$$(i)\ E \times E \ni (x, y) \to x + y \in E \text{ (denotada adição de vectores),}$$
$$(ii)\ \mathbb{K} \times E \ni (\lambda, x) \to \lambda x \in E \text{ (denotada multiplicação por um escalar),}$$

*onde $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, são contínuas relativamente à topologia de $E$, isto é*

*(a) se forem dados $z_0 = x_0 + y_0$ e uma qualquer vizinhança $U$ do ponto $z_0$, existe uma vizinhança $V$ de $x_0$ e uma vizinhança $W$ de $y_0$ tais que $x + y \in U$, se $x \in V$ e $y \in W$,*

*(b) se forem dados $y_0 = \alpha_0 x_0$ e uma qualquer vizinhança $U$ do ponto $y_0$, existe uma vizinhança $V$ de $x_0$ e um número $\varepsilon > 0$ tais que $\alpha x \in U$ se $|\alpha - \alpha_0| < \varepsilon$ e $x \in V$.*

*(Ver [24], p. 160.)*

**Definição 8.3.** *Um espaço vectorial topológico diz-se* **espaço localmente convexo** *se a origem possui um sistema de vizinhanças convexo.*

*(Ver [24], p. 160.)*

## 9. Espaços normados

**Definição 9.1.** *Seja $E$ espaço vectorial. Uma* **norma** *em $E$ é uma função $|\cdot| : E \to \mathbb{R}$ que verifica as seguintes propriedades :*

*(a) $|x| \geq 0,\ \forall\ x \in E$;*
*(b) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;*
*(c) $|\lambda x| = |\lambda|\,|x|,\ \forall\ x \in E,\ \forall\ \lambda \in \mathbb{K}$ (com $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) (homogeneidade);*
*(d) $|x + y| \leq |x| + |y|,\ \forall\ x,\ y \in E$ (desigualdade triangular).*

*(Ver [16], p. 90.)*

**Definição 9.2.** *Chamamos* **espaço normado** *a um espaço vectorial com uma norma nele definida.*
*(Ver [20], p. 59.)*

**Nota 9.3.** *Um espaço normado é um espaço métrico (logo um espaço topológico) : a distância define-se por* $\rho(x,y) = |x-y|$. *A convergência definida pela norma e a convergência definida pela métrica (=distância) coincidem, obviamente.*
*(Ver [20], p. 59.)*

**Definição 9.4.** *Seja* $X$ *um espaço normado. Um conjunto* $E \subset X$ *diz-se* **limitado** *se existe* $K > 0$ *tal que*

$$|x| \leq K, \forall\, x \in E.$$

*(Ver [20], p. 51, 59.)*

**Proposição 9.5.** *Qualquer subconjunto de* $\mathbb{R}^n$ *é compacto se e só se é limitado e fechado.*
*(Ver [26], p. 43.)*

**Proposição 9.6.** *Qualquer espaço normado é um espaço vectorial topológico localmente convexo.*
*(Ver [24], p. 163.)*

**Definição 9.7.** *Sejam* $E$, $F$ *dois espaços normados. Uma aplicação* $T : E \to F$ *diz-se* **linear** *se*
*(a)* $T(x+y) = T(x) + T(y), \forall\, x, y \in E$;
*(b)* $T(\alpha\, x) = \alpha\, T(x), \forall\, x \in E, \forall\, \alpha \in \mathbb{K}$ *(com* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*).*
*(Ver [20], p. 37, 59.)*

**Definição 9.8.** *Sejam* $E$, $F$ *dois espaços normados. Uma aplicação linear* $T : E \to F$ *é* **limitada** *se*

$$\exists\, M \in \mathbb{R} : |T(x)| \leq M\,|x|\,, \forall\, x.$$

*(Ver [20], p. 59, 60.)*

**Proposição 9.9.** *Sejam* $E$, $F$ *dois espaços normados. Uma aplicação linear* $T : E \to F$ *é contínua se e só se for limitada.*
*(Ver [20], p. 59.)*

**Proposição 9.10.** *Um subconjunto* $S$ *de um espaço normado* $E$ *diz-se* **denso** *em* $E$ *se qualquer elemento de* $E$ *pode ser aproximado por uma sucessão de elementos de* $S$ *, isto é,*

$$\forall x \in E, \exists\ (x_n) \subset S : (x_n) \to x, \text{ quando } n \to +\infty.$$

*(Ver [20], p. 20, 59.)*

**Definição 9.11.** *Uma sucessão* $(x_n)$ *num espaço normado* $E$ *diz-se* **sucessão de Cauchy** *se*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R} : m, n > M \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon.$$

*(Ver [20], p. 20, 59.)*

**Definição 9.12.** *Um espaço normado* $E$ *diz-se* **completo** *se qualquer sucessão de Cauchy em* $E$ *converge (para um elemento de* $E$*). Chama-se* **espaço de Banach** *a qualquer espaço normado completo.*
*(Ver [20], p. 59.)*

**Definição 9.13.** *Um espaço vectorial $E$ diz-se um* **espaço de Hilbert** *se a função $\langle\cdot,\cdot\rangle : E\times E \to \mathbb{K}$ (onde $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{R}$) verifica as seguintes propriedades :*

*(a)* $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
*(b)* $\langle x,x\rangle \geq 0,\ \forall\ x\in E$;
*(c)* $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle,\ \forall\ x,\ y,\ z\in E$;
*(d)* $\langle \alpha\ x,y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle,\ \forall\ x,\ y\in E,\ \forall\ \alpha\in\mathbb{K}$;
*(e)* $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle},\ \forall\ x,\ y\in E$;
*(f) Se* $(x_n)\subset E$ *e se*

$$\lim_{n,m\to+\infty}\langle x_n - x_m, x_n - x_m\rangle = 0,$$

*então existe um* $x\in E$ *com*

$$\lim_{n,m\to+\infty}\langle x_n - x, x_n - x\rangle = 0.$$

*A função $\langle\cdot,\cdot\rangle$ diz-se o* **produto interno** *(ou* **escalar***) de $x$ e $y$. A norma em $E$ é*

$$|x| = \sqrt{\langle x,x\rangle}.$$

*(Ver [20], p. 242, 243.)*

# 10. Espaços mensuráveis

## 10.1. Definições e propriedades elementares

**Definição 10.1.** *Seja $X$ um conjunto qualquer. Uma colecção $\mathcal{M}\subset\mathcal{P}(X)$ (isto é, uma colecção de subconjuntos de $X$) diz-se uma* **àlgebra** *de subconjuntos de $X$ se verificar as seguintes condições :*

*(i)* $X\in\mathcal{M}$;
*(ii)* $A\in\mathcal{M}\Rightarrow A^c\in\mathcal{M}$, *com* $A^c = X\backslash\{x\in X : x\notin A\}$;
*(iii)* $A,\ B\in\mathcal{M}\Rightarrow A\cup B\in\mathcal{M}$.
*(Ver [35], p. 3.)*

**Lema 10.2.** *Se $\mathcal{M}$ é uma àlgebra de subconjuntos de um conjunto $X$, então :*

*(a)* $\varnothing\in\mathcal{M}$;
*(b)* $A_1,\ldots,\ A_n\in\mathcal{M}\Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} A_k\in\mathcal{M}$;
*(c)* $A,\ B\in\mathcal{M}\Rightarrow A\cap B\in\mathcal{M}$;
*(d)* $A_1,\ldots,\ A_n\in\mathcal{M}\Rightarrow \bigcap_{k=1}^{n} A_k\in\mathcal{M}$;
*(e)* $A,\ B\in\mathcal{M}\Rightarrow A\backslash B\in\mathcal{M}$.
*(Ver [35], p. 3.)*

**Definição 10.3.** *Seja $X$ um conjunto qualquer. Uma àlgebra $\mathcal{M}$ de subconjuntos de $X$ diz-se uma* **$\sigma$-àlgebra** *se verificar as condições (i), (ii), (iii) da definição 10.1 e a condição adicional :*

*(iv)* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma família enumerável de elementos de* $\mathcal{M}\Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\in\mathcal{M}$.

*(Ver [35], p. 3.)*

**Definição 10.4.** *Seja $\mathcal{M}$ uma $\sigma$-àlgebra de subconjuntos de um conjunto $X$. Os conjuntos $E\in\mathcal{M}$ chamam-se* **conjuntos mensuráveis.**

*(Ver [33], p. 8.)*

**Definição 10.5.** *Seja $X$ um conjunto qualquer e seja $\mathcal{M}$ uma $\sigma$-álgebra em $X$. Então $(X,\mathcal{M})$ diz-se um* **espaço mensurável.**

*(Ver [33], p. 8.)*

**Definição 10.6.** *Seja $\tau$ uma colecção de todos os conjuntos abertos num espaço topológico $X$. Chamamos à $\sigma$-álgebra $\sigma(\tau)$* **$\sigma$-álgebra de Borel** *de subconjuntos de um espaço topológico $X$ e denotamo-la por $\mathcal{B}(X)$. Os conjuntos $E \in \mathcal{B}(X)$ denominam-se* **conjuntos borelianos** *do espaço topológico.*

*(Ver [35], p. 9.)*

**Nota 10.7.** *A* **$\sigma$-álgebra de Borel** *num espaço topológico é a $\sigma$-álgebra generalizada por subconjuntos fechados. Por outras palavras, os* **subconjuntos borelianos** *são os conjuntos obtidos a partir de subconjuntos abertos e fechados pela união numerável, pela intersecção numerável, pela complementação, e por qualquer combinação numerável destas operações.*

*(Ver [21], p. 231.)*

**Definição 10.8.** *Seja $C_i$ uma colecção de subconjuntos de um conjunto não-vazio $X_i$ para $i = 1,..., n$. Escrevemos $\mathbf{C}_1 \otimes ... \otimes \mathbf{C}_n$ para $\sigma(C_1 \times ... \times C_n)$, isto é, a $\sigma$-àlgebra de subconjuntos $X_1 \times ... \times X_n$ generalizados por $C_1 \times ... \times C_n$.*

*(Ver [35], p. 385.)*

**Definição 10.9.** *Chamamos* **medida** *(positiva) a uma função $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$, onde $\mathcal{M}$ é uma $\sigma$-álgebra que verifica as seguintes condições:*

*$(i)$ se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma colecção de mensuráveis disjuntos dois a dois, então*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

*(esta propriedade tem o nome de aditividade contável);*

*$(ii)$ $\exists A \in M : \mu(A) < +\infty$.*

*(Ver [33], p. 16.)*

**Definição 10.10.** *Seja $X$ um conjunto qualquer, $\mathcal{M}$ uma $\sigma$-álgebra e $\mu$ uma medida. Então, $(X, \mathcal{M}, \mu)$ diz-se um* **espaço de medida***.*

*(Ver [33], p. 16.)*

**Definição 10.11.** *Seja $\mu$ uma medida numa $\sigma$-álgebra $\mathcal{M}$ de subconjuntos de um conjunto $X$. Um conjunto $E \subset X$ diz-se um* **conjunto nulo** *com respeito à medida $\mu$ se $E \in \mathcal{M}$ e $\mu(E) = 0$. Neste caso dizemos também que $E$ é um conjunto nulo no espaço de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$.*

*(Ver [35], p. 16.)*

**Exemplo 10.12.** *O conjunto $\varnothing$ é um conjunto nulo em qualquer espaço de medida, mas não é o único nessas condições.*

*(Ver [35], p. 16.)*

**Definição 10.13.** *Sejam $\mathcal{I}_o$ a colecção de $\varnothing$ e todos os intervalos abertos em $\mathbb{R}$, $\mathcal{I}_{oc}$ a colecção de $\varnothing$ e todos os intervalos do tipo $(a, b]$ em $\mathbb{R}$, $\mathcal{I}_{co}$ a colecção de $\varnothing$ e todos os intervalos do tipo $[a, b)$ em $\mathbb{R}$, e $\mathcal{I}_c$ a colecção de $\varnothing$ e todos os intervalos fechados em $\mathbb{R}$, sabendo que $(a, \infty] = (a, \infty)$ e $[-\infty, b) = (-\infty, b)$. Seja também $\mathcal{I} = \mathcal{I}_o \cap \mathcal{I}_{oc} \cap \mathcal{I}_{co} \cap \mathcal{I}_c$, isto é, a colecção de $\varnothing$ e todos os intervalos em $\mathbb{R}$. Para um intervalo $I = (a, b)$ ou $I = [a, b]$ em $\mathbb{R}$ com $a < b$, definimos $l(I) = b - a$. Para um intervalo infinito $I$ em $\mathbb{R}$ definimos $l(I) = \infty$. E estabelecemos que $l(\varnothing) = 0$.*

*Definimos a função $\mu^* : E \to [0, +\infty]$ por*

$$\mu^*(E) = \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} l(I_n) : \quad (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{I}_o, \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \supset E\right\},$$

*onde $E$ é um qualquer elemento da colecção de todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$ e $l : \mathcal{I}_o \to [0, +\infty]$ é uma função. À função $\mu^*$ dá-se o nome de* **medida exterior de Lebesgue***.*

*(Ver [35], p. 35.)*

**Lema 10.14.** *(a) Para cada $x \in \mathbb{R}$, temos que $\{x\}$ é Lebesgue $\mathcal{M}$-mensurável e $\mu^*(\{x\}) = 0$.*
*(b) Qualquer subconjunto numerável de $\mathbb{R}$ é um conjunto nulo em $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \mu)$.*
*(Ver [35], p. 36.)*

**10.2. Funções mensuráveis**

**Definição 10.15.** *Sejam $(X, \mathcal{M})$ um qualquer espaço de medida, $D \in \mathcal{M}$ e $f : D \to [-\infty, +\infty]$ uma função. $f$ diz-se* **$\mathcal{M}$-mensurável** *em $D$ se $\{x \in D : f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{M}$, isto é, $f^{-1}([-\infty, \alpha]) \in \mathcal{M}$, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$.*
*(Ver [35], p. 61.)*

**Nota 10.16.** *Sejam $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável, $E \subset X$ e $E \subset \mathbb{R}$. Então $\chi_E$ é uma função $\mathcal{M}$-mensurável em $X$ se e só se $E$ é mensurável.*
*(Ver [35], p. 61.)*

**Lema 10.17.** *Sejam $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável, $D \in \mathcal{M}$ e $f : D \to [-\infty, +\infty]$ uma função. Então as seguintes condições são equivalentes :*
*(i) $\{x \in D : f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{M}$, isto é, $f^{-1}([-\infty, \alpha]) \in \mathcal{M}$, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$;*
*(ii) $\{x \in D : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{M}$, isto é, $f^{-1}((\alpha, \infty]) \in \mathcal{M}$, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$;*
*(iii) $\{x \in D : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{M}$, isto é, $f^{-1}([\alpha, \infty]) \in \mathcal{M}$, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$;*
*(iv) $\{x \in D : f(x) < \alpha\} \in \mathcal{M}$, isto é, $f^{-1}([-\infty, \alpha)) \in \mathcal{M}$, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$.*
*(Ver [35], p. 62.)*

**Corolário 10.18.** *Sejam $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável, $D \in \mathcal{M}$ e $f : D \to [-\infty, +\infty]$ uma função mensurável em $D$. Então :*
*(a) $\{x \in D : f(x) = \alpha\} \in \mathcal{M}$, para qualquer $\alpha \in [-\infty, +\infty]$;*
*(b) $\{x \in D : f(x) \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{M}$.*
*(Ver [35], p. 62.)*

**Lema 10.19.** *Seja $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável.*
*(a) Sejam $D \in \mathcal{M}$ e $f : D \to [-\infty, +\infty]$ uma função $\mathcal{M}$-mensurável em $D$, então para qualquer $D_0 \subset D$ tal que $D_0 \in \mathcal{M}$, a restrição de $f$ a $D_0$ é uma função $\mathcal{M}$-mensurável em $D_0$.*
*(b) Sejam $(D_n)$, $n \in \mathbb{N}$, uma sucessão de conjuntos em $\mathcal{M}$, $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$ e $f : D \to [-\infty, +\infty]$ uma função. Se a restrição de $f$ a $D_n$ é $\mathcal{M}$-mensurável em $D_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, então $f$ é $\mathcal{M}$-mensurável em $D$.*
*(Ver [35], p. 64.)*

**Nota 10.20.** *Sejam $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável e $A \in \mathcal{M}$. Então qualquer função constante definida em $A$ é $\mathcal{M}$-mensurável em $A$, isto é, se $f : A \to [-\infty, +\infty]$ é dada por $f(x) = \alpha$, para qualquer $x \in A$ e algum $\alpha \in [-\infty, +\infty]$, então $f$ é $\mathcal{M}$-mensurável em $A$.*
*(Ver [35], p. 64.)*

**Teorema 10.21.** *Sejam $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável, $D \in \mathcal{M}$ e $f : D \to [-\infty, +\infty]$ uma função $\mathcal{M}$-mensurável em $D$. Então para qualquer $c \in \mathbb{R}$, o domínio de definição de $cf$ é $\mathcal{M}$-mensurável e $cf$ é uma função $\mathcal{M}$-mensurável no mesmo domínio.*
*(Ver [35], p. 65.)*

**Teorema 10.22.** *Sejam $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável, $D \in \mathcal{M}$ e $f, g : D \to [-\infty, +\infty]$ duas funções $\mathcal{M}$-mensuráveis em $D$. Então o domínio de definição de $f + g$ é $\mathcal{M}$-mensurável e $f + g$ é uma função $\mathcal{M}$-mensurável no mesmo domínio.*
*(Ver [35], p. 65.)*

**Nota 10.23.** *Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida completo. Seja $f : N \subset X \to [-\infty, +\infty]$ uma qualquer função. Se $N$ tem medida nula, então é $\mathcal{M}$-mensurável em $N$.*
*(Ver [35], p. 68.)*

**Nota 10.24.** *Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida completo, $D \in \mathcal{M}$ e $f$, $g : D \to [-\infty, +\infty]$ tais que $f = g$ qs em $D$. Se $f$ é $\mathcal{M}$-mensurável em $D$, então $g$ também é.*
*(Ver [35], p. 68.)*

**Teorema 10.25.** *Sejam $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável, $D \in \mathcal{M}$, $(g_n)$, $n \in \mathbb{N}$, uma sucessão de funções $g_n : D \to [-\infty, +\infty]$ $\mathcal{M}$-mensuráveis em $D$.*
*(a) $\min\limits_{n=1,\ldots,N} g_n$, $\max\limits_{n=1,\ldots,N} g_n$, $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n$, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n$, $\liminf\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n$, $\limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n$ são $\mathcal{M}$-mensuráveis em $D$.*
*(b) Seja $D_e = \left\{D : \lim\limits_{n\to\infty} g_n \in [-\infty, +\infty]\right\}$. Então $D_e \in \mathcal{M}$ e $\lim\limits_{n\to\infty} g_n$ é $\mathcal{M}$-mensurável em $D_e$.*
*(Ver [35], p. 70.)*

**Proposição 10.26.** *Sejam $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável, $D \in \mathcal{M}$ e $f : D \to [-\infty, +\infty]$ uma função $\mathcal{M}$-mensurável em $D$. Então $f^+$, $f^-$ e $|f|$ são funções $\mathcal{M}$-mensuráveis em $D$, onde para cada $x \in D$,*

$$\begin{aligned} f^+(x) &= \max\{f(x), 0\}, \\ f^-(x) &= -\min\{f(x), 0\}, \\ |f|(x) &= |f(x)|. \end{aligned}$$

*(Ver [35], p. 72.)*

**Proposição 10.27.** *Sejam $f$, $g : D \to [-\infty, +\infty]$ duas funções. Se $f$ é $\mathcal{M}_L$-mensurável em $\mathbb{R}$ e $g$ é contínua em $\mathbb{R}$, então a função composta $g \circ f$ é $\mathcal{M}_L$-mensurável em $\mathbb{R}$.*
*(Ver [35], p. 73.)*

**Proposição 10.28.** *Seja $(X \times Y, \sigma(\mathcal{M} \times \mathcal{B}))$ o espaço produto mensurável de dois espaços mensuráveis $(X, \mathcal{M})$ e $(Y, \mathcal{B})$. Se $f : X \times Y \to [-\infty, +\infty]$ é uma função $\sigma(\mathcal{M} \times \mathcal{B})$-mensurável, então $f(x, \cdot)$ é uma função $\mathcal{B}$-mensurável em $Y$ para cada $x \in X$ e $f(\cdot, y)$ é uma função $\mathcal{M}$-mensurável em $X$ para cada $y \in Y$.*
*(Ver [35], p. 389.)*

**Definição 10.29.** *Uma função $f$ com valores em $[-\infty, +\infty]$ diz-se uma* **função boreliana** *se $f^{-1}(F)$ é um subconjunto boreliano para qualquer conjunto fechado $F$.*
*(Ver [21], p. 231.)*

**Nota 10.30.** *As funções contínuas são borelianas.*
*(Ver [21], p. 231.)*

## 11. O integral de Lebesgue

**Definição 11.1.** *Dado um espaço de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Uma função $\varphi$ diz-se uma* **função simples** *se satisfaz as seguintes condições :*
*$(i)$ o domínio de definição de $\varphi$ é $\mathcal{M}$-mensurável;*
*$(ii)$ $\varphi$ é $\mathcal{M}$-mensurável no seu domínio de definição;*
*$(iii)$ $\varphi$ tem um número finito de valores em $\mathbb{R}$, isto é, o conjunto de chegada de $\varphi$ é um subconjunto finito de $\mathbb{R}$.*
*(Ver [35], p. 113.)*

**Nota 11.2.** *Para uma função simples $\varphi$, a medida do seu domínio de definição pode ser $\infty$, mas $\infty$ e $-\infty$ não podem ser seus valores.*
*(Ver [35], p. 113.)*

**Nota 11.3.** *Relembremos que a função característica $\chi_A$ é definida do seguinte modo :*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \notin A, \end{cases}$$

*onde $A$ é um conjunto mensurável.*
(Ver [33], p. 11.)

**Definição 11.4.** *Uma* **função** *$s$ definida num espaço mensurável $(X, \mathcal{M})$ diz-se* **simples** *se for $\mathcal{M}$-mensurável e o conjunto de todos os seus valores for finito. Assim, se $\alpha_1, ..., \alpha_n$ são valores distintos de uma função simples $s$ e se tomarmos $A_i = \{x : s(x) = \alpha_i\}$, então $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$, onde $\chi_{A_i}$ é a função característica do conjunto $A_i$.*
(Ver [33], p. 15.)

**Proposição 11.5.** *A função $s$ é $\mathcal{M}$-mensurável se e só se cada conjunto $A_i$, $i = 1, ..., n$, for $\mathcal{M}$-mensurável.*
(Ver [33], p. 15.)

**Definição 11.6.** *Seja $\mathcal{M}$ uma $\sigma$-álgebra num conjunto $X$ qualquer e $\mu$ uma medida positiva em $\mathcal{M}$.*
*(a) O* **integral de Lebesgue para funções $\mathcal{M}$-mensuráveis simples** *$s$ em $E$, com respeito à medida $\mu$, sempre que $E$ é um subconjunto $\mathcal{M}$-mensurável de $X$, é definido por*

$$\int_E s \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \mu(A_i \cap E),$$

*com $A_i = \{x \in X : s(x) = \alpha_i\}$, $i = 1, ..., n$.*
*(b) O* **integral de Lebesgue para funções $\mathcal{M}$-mensuráveis** *$f$ em $E$, com respeito à medida $\mu$, sempre que $E$ é um subconjunto $\mathcal{M}$-mensurável de $X$, é definido por*

$$\int_E f \, d\mu = \sup_{0 \leq s \leq f} \int_E s \, d\mu,$$

*ou seja,* **é o supremo dos integrais das funções $\mathcal{M}$-mensuráveis simples** *$s$ tais que $0 \leq s \leq f$.*
(Ver [33], p. 19.)

**Nota 11.7.** *Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida, $D \in \mathcal{M}$ e $f : D \to [-\infty, +\infty]$ uma função, então $f = f^+ - f^-$ onde $f^+$ e $f^-$ são as partes positiva e negativa de $f$, isto é, $f^+ = \max\{f, 0\}$ e $f^- = -\min\{f, 0\}$. Como*
*$f^+$, $f^- : D \to [0, \infty]$, então $\int_D f^+ \, d\mu$ e $\int_D f^- \, d\mu$ existem em $[0, \infty]$, mas $\int_D f^+ \, d\mu - \int_D f^- \, d\mu$ pode não existir em $[-\infty, +\infty]$.*
(Ver [35], p. 147.)

**Definição 11.8.** *Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida, $D \in \mathcal{M}$ e $f : D \to [-\infty, +\infty]$ uma função. Se $\int_D f^+ \, d\mu - \int_D f^- \, d\mu$ existe em $[-\infty, +\infty]$, dizemos que $f$ é* **Lebesgue semi-integrável** *em $D$ com respeito a $\mu$, ou simplesmente $\mu$-semi-integrável em $D$, e definimos*

$$\int_D f \, d\mu = \int_D f^+ \, d\mu - \int_D f^- \, d\mu.$$

*Dizemos que $f$ é* **Lebesgue integrável** *em $D$ com respeito a $\mu$, ou simplesmente $\mu$-integrável em $D$, se*

$$\int_D f \, d\mu \in \mathbb{R},$$

*isto é,*

$$\left| \int_D f \, d\mu \right| < \infty.$$

(Ver [35], p. 147.)

**Nota 11.9.** *Sejam $D \in \mathcal{M}$ num espaço de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $f : D \to [-\infty, +\infty]$ uma função $\mathcal{M}$-mensurável em $D$. $f$ é $\mu$-integrável em $D$ se e só se um dos integrais $\int_D f^+ \, d\mu$ e $\int_D f^- \, d\mu$ é finito.*
(Ver [35], p. 147, 148.)

**Nota 11.10.** *Sejam $D \in \mathcal{M}$ num espaço de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $f : D \to [-\infty, +\infty]$ uma função $\mathcal{M}$-mensurável em $D$. Se $f$ é $\mu$-integrável em $D$, então $|f| < \infty$ qs em $D$, isto é, $f$ toma valores reais qs em $D$.*
(Ver [35], p. 147, 148.)

**Lema 11.11.** *Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida, $D \in \mathcal{M}$ e $f,\ g : D \to [0, +\infty]$ duas funções $\mathcal{M}$-mensuráveis em $D$. Se $f \leq g$ em $D$, então*

$$\int_D f\ d\mu \leq \int_D g\ d\mu.$$

(Ver [35], p. 135.)

**Lema 11.12.** *Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida, $D \in \mathcal{M}$ e $f,\ g : D \to [-\infty, +\infty]$ duas funções $\mathcal{M}$-mensuráveis em $D$. Se $f$ e $g$ são ambas $\mu$-semi-integráveis em $D$ e se $f \leq g$ em $D$, então*

$$\int_D f\ d\mu \leq \int_D g\ d\mu.$$

(Ver [35], p. 149.)

**Lema 11.13.** *Dado um espaço de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$, sejam $D \in \mathcal{M}$, $f,\ g : D \to [-\infty, +\infty]$ funções $\mathcal{M}$-mensuráveis em $D$. Se $f = g$ qs em $D$ e se $f$ é $\mu$-semi-integrável em $D$, então $g$ também é e*

$$\int_D f\ d\mu = \int_D g\ d\mu.$$

(Ver [35], p. 149.)

**Proposição 11.14.** *Sejam $a,\ b \in [-\infty, +\infty]$ tais que $a + b$ existe em $[-\infty, +\infty]$. Então*

$$\max\{a + b, 0\} \leq \max\{a, 0\} + \max\{b, 0\}.$$

(Ver [35], p. 151.)

**Proposição 11.15.** *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto Lebesgue mensurável e $f,\ g : A \to \mathbb{R}$ duas funções Lebesgue $\mathcal{M}_L$-mensuráveis em $A$. Se $f$ e $g$ são ambas $\mu$-integráveis em $A$ e se $f(x) \leq g(x)$ qs em $A$, então*

$$\int_A f(x)\ dx \leq \int_A g(x)\ dx.$$

(Ver [2], p. 16.)

**Teorema 11.16.** *Sejam $I = [a, b]$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, então $\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$ e consequentemente $f$ é Riemann integrável em $I$.*
(Ver [35], p. 128.)

**Teorema 11.17.** *Sejam $I = [a, b]$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada. Se $f$ é Riemann integrável em $I$, então $f$ é Lebesgue $\mathcal{M}$-mensurável e Lebesgue $\mu$-integrável em $I$ e*

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_I f\ d\mu_L.$$

(Ver [35], p. 131.)

**Lema 11.18 (Lema de Fatou).** *Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Então para qualquer sucessão $(f_n : n \in \mathbb{N})$ de funções $\mathcal{M}$-mensuráveis definidas num conjunto $D \in \mathcal{M}$, e com valores em $[0, +\infty]$, temos*

$$\int_D \liminf_{n \to +\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \to +\infty} \int_D f_n \, d\mu.$$

*Em particular, se $f = \lim_{n \to +\infty} f_n$ existe qs em $D$, então*

$$\int_D f \, d\mu \leq \liminf_{n \to +\infty} \int_D f_n \, d\mu.$$

*(Ver [35], p. 141.)*

**Lema 11.19.** *Dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Lebesgue mensurável existe $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivável, tal que $F' = f$. Basta tomar*

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt.$$

*(Ver [35], p. 256.)*

# 12. Topologias fracas

## 12.1. Definições e propriedades fundamentais

**Definição 12.1.** *Sejam $X$ um espaço vectorial e $X'$ o espaço de todos os funcionais lineares definidos em $X$. Um subespaço vectorial $\Gamma$ de $X'$ diz-se **total** se*

$$f(x) = 0, \forall f \in \Gamma \Rightarrow x = 0.$$

*O espaço $\Gamma$ também é chamado um **espaço total de funcionais definidos em** $X$.*
*(Ver [20], p. 418.)*

**Definição 12.2.** *Sejam $X$ um espaço vectorial e $\Gamma$ um subespaço total de $X'$. Então a **$\Gamma$-topologia** de $X$ é a topologia obtida tomando como base todos os subconjuntos da forma*

$$N(p; A, \varepsilon) = \{q : |f(p) - f(q)| < \varepsilon, \ f \in A\},$$

*onde $p \in X$, $A$ é um subconjunto finito de $\Gamma$ e $\varepsilon > 0$.*
*(Ver [20], p. 419.)*

**Lema 12.3.** *Seja $X$ um espaço vectorial. Se $\Gamma$ é um subespaço vectorial total de funcionais lineares definidos em $X$ de $X'$, então $X$ é um espaço vectorial topológico localmente convexo com a $\Gamma$-topologia.*
*(Ver [20], p. 419.)*

**Lema 12.4.** *A topologia de um espaço localmente convexo $X$ é mais forte que a $X'$-topologia de $X$.*
*(Ver [20], p. 420.)*

**Lema 12.5.** *Sejam $X$ um espaço vectorial, e $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ dois subespaços totais de $X'$. Se $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, então a $\Gamma_1$-topologia de $X$ é mais fraca que a $\Gamma_2$-topologia de $X$.*
*(Ver [20], p. 420.)*

**Lema 12.6.** *Sejam $X$ um espaço vectorial e $\Gamma$ um subespaço total de $X'$. Então a $\Gamma$-topologia de $X$ é a topologia mais fraca na qual qualquer funcional em $\Gamma$ é contínuo.*
*(Ver [20], p. 420.)*

**Teorema 12.7.** *Sejam $X$ um espaço vectorial e $\Gamma$ um subespaço total de $X'$. Então os funcionais lineares definidos em $X$ que são contínuos na $\Gamma$-topologia são precisamente os funcionais que estão em $\Gamma$.*
*(Ver [20], p. 421.)*

**Teorema 12.8.** *Um subconjunto convexo de um espaço vectorial topológico localmente convexo é $X'$-fechado se e só se é fechado.*
*(Ver [20], p. 422.)*

### 12.2. A topologia fraca $\sigma(E, E')$

**Nota 12.9.** *Sejam $E$ um espaço de Banach, $E'$ o espaço de todos os funcionais lineares definidos em $E$ e $f \in E'$. Designa-se por $\varphi_f : E \to \mathbb{R}$ a aplicação dada por $\varphi_f(x) = \langle f, x \rangle$. Quando $f$ percorre $E'$ obtemos uma família $(\varphi_f)_{f \in E'}$ de aplicações $\varphi_f : E \to \mathbb{R}$.*
*(Ver [6], p. 35.)*

**Definição 12.10.** *Sejam $E$ um espaço de Banach e $E'$ o seu dual. A* **topologia fraca** $\sigma(E, E')$ *de $E$ é a topologia mais fraca (isto é com menos abertos) de $E$ que torna contínuas todas as aplicações $(\varphi_f)_{f \in E'}$.*
*(Ver [6], p. 35.)*

**Nota 12.11.** *Sejam $E$ um espaço de Banach, $E'$ o seu dual e $(x_n) \subset E$ uma qualquer sucessão. Designamos por*

$$(x_n) \rightharpoonup x$$

*a convergência fraca de $(x_n)$ para $x$ na topologia fraca $\sigma(E, E')$. Para evitar confusões, por vezes dizemos que*

$$(x_n) \rightharpoonup x \text{ fracamente em } \sigma(E, E').$$

*Pelo mesmo motivo, também se diz que*

$$(x_n) \to x \text{ fortemente quando } |x_n - x|_E \to 0.$$

*(Ver [6], p. 35.)*

**Proposição 12.12.** *Sejam $E$ um espaço de Banach, $E'$ o seu dual e $(x_n) \subset E$ uma qualquer sucessão. Então :*
*(i) $(x_n) \rightharpoonup x$ em $\sigma(E, E') \Leftrightarrow \langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle \ \forall\, f \in E'$;*
*(ii) Se $(x_n) \to x$ fortemente, então $(x_n) \rightharpoonup x$ fracamente em $\sigma(E, E')$;*
*(iii) Se $(x_n) \rightharpoonup x$ fracamente em $\sigma(E, E')$, então existe $K > 0$ tal que $|x_n|_E \leq K$ e $|x|_E \leq \liminf_{n \to \infty} |x_n|_E$;*
*(iv) Se $(x_n) \rightharpoonup x$ fracamente em $\sigma(E, E')$ e $(f_n) \to f$ fortemente em $E'$ (isto é $|f_n - f|_{E'} \to 0$), então $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.*
*(Ver [6], p. 35.)*

**Proposição 12.13.** *Sejam $E$ um espaço de Banach, $E'$ o seu dual e $(x_n) \subset E$ uma qualquer sucessão. Se $E$ tem dimensão finita, então a topologia fraca $\sigma(E, E')$ e a topologia forte coincidem. Em particular, uma sucessão $(x_n)$ converge fracamente se e só se converge fortemente.*
*(Ver [6], p. 36.)*

**Nota 12.14.** *Sejam $E$ um espaço de Banach e $E'$ o seu dual. Os abertos (respectivamente os fechados) da topologia fraca $\sigma(E, E')$ são também abertos (respectivamente fechados) na topologia forte. Quando $E$ tem dimensão infinita a topologia fraca $\sigma(E, E')$ é estritamente mais fraca que a topologia forte, isto é, existem abertos (respectivamente fechados) na topologia forte que não são abertos (respectivamente os fechados) na topologia fraca.*
*(Ver [6], p. 36.)*

**Teorema 12.15.** *Sejam $E$ um espaço de Banach e $E'$ o seu dual. Um subconjunto convexo $C \subset E$ é fracamente fechado na topologia fraca $\sigma(E, E')$ se e só se é fechado.*
*(Ver [6], p. 36.)*

### 12.3. A topologia fraca $*$ $\sigma(E', E)$

**Nota 12.16.** *Sejam $E$ um espaço de Banach e $E'$ o seu dual. Então podemos definir o dual de $E'$ por*

$$E'' = (E')'.$$

*(Ver [4], p. 15.)*

**Definição 12.17.** *Sejam $E$ um espaço de Banach e $E'$ o seu dual. A* **norma em** *$E'$ é dada por*

$$|f|_{E'} = \sup_{\substack{x \in E \\ |x| \leq 1}} |\langle f, x \rangle|$$

*e a* **norma do bidual** *$E''$, isto é o dual de $E'$ é dada por*

$$|\xi|_{E''} = \sup_{\substack{f \in E' \\ |f| \leq 1}} |\langle \xi, f \rangle| .$$

*(Ver [6], p. 39.)*

**Definição 12.18.** *Sejam $E$ um espaço de Banach, $E'$ o seu dual e $E''$o seu bidual. Chamamos* **injecção canónica** *à função $J : E \to E''$ definida como se segue :*

*Para cada $x \in E$ fixado, definimos a aplicação $J_x : E' \to \mathbb{R}$ por*

$$J_x(f) := \langle f, x \rangle ,$$

*a qual é linear contínua, isto é um elemento de $E''$. Assim*

$$J(x) := J_x .$$

*A aplicação $J$ é linear e é uma isometria (isto é $|J_x|_{E''} = |x|_E$ para qualquer $x \in E$). Além disso, $J$ pode não ser sobrejectiva.*

*(Ver [6], p. 39.)*

**Nota 12.19.** *Denotemos por $J(E) \subset E''$ a imagem de $E$ pela função canónica $J$.*

*(Ver [4], p. 15.)*

**Definição 12.20.** *Sejam $E$ um espaço de Banach e $E'$ o seu dual. A* **topologia fraca** $*$, *designada também por $\sigma(E', E)$ de $E'$ é a topologia mais fraca (isto é com menos abertos) de $E'$ que torna contínuas todas as aplicações $(\varphi_x)_{x \in E}$.*

*(Ver [6], p. 40.)*

**Nota 12.21.** *Sejam $E$ um espaço de Banach, $E'$ o seu dual e $E''$ o seu bidual. Como $E \subset E''$, então a topologia fraca $* \, \sigma(E', E)$ é mais fraca que a topologia fraca $\sigma(E', E'')$. Por outras palavras, a topologia fraca $* \, \sigma(E', E)$ tem menos abertos (respectivamente fechados) que a topologia fraca $\sigma(E', E'')$, que por sua vez tem menos abertos (respectivamente fechados) que a topologia forte.*

*(Ver [6], p. 40.)*

**Nota 12.22.** *Sejam $E$ um espaço de Banach, $E'$ o seu dual, $E''$ o seu bidual e $(f_n) \subset E'$ uma qualquer sucessão. Designamos por*

$$(f_n) \overset{*}{\rightharpoonup} f$$

*a convergência fraca $*$ de $(f_n)$ para $f$ na topologia fraca $* \, \sigma(E', E)$. Para evitar confusões, por vezes dizemos que*

$$(f_n) \overset{*}{\rightharpoonup} f \text{ fracamente em } \sigma(E', E) .$$

*Pelo mesmo motivo, também se diz que*

$$(f_n) \rightharpoonup f \text{ fracamente em } \sigma(E', E'')$$

*e*

$$(f_n) \to f \text{ fortemente quando } |f_n - f|_{E'} \to 0.$$

*(Ver [6], p. 40.)*

**Proposição 12.23.** *Sejam $E$ um espaço de Banach, $E'$ o seu dual, $E''$ o seu bidual e $(f_n) \subset E'$ uma qualquer sucessão. Então :*

*(i)* $(f_n) \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(E', E) \Leftrightarrow \langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle \ \forall\, x \in E$;

*(ii) Se* $(f_n) \to f$ *fortemente, então* $(f_n) \rightharpoonup f$ *fracamente em* $\sigma(E', E'')$ *e se* $(f_n) \rightharpoonup f$ *fracamente em* $\sigma(E', E'')$, *então* $(f_n) \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *fracamente* $*$ *em* $\sigma(E', E)$.

*(iii) Se* $(f_n) \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *fracamente* $*$ *em* $\sigma(E', E)$, *então existe* $K > 0$ *tal que* $|f_n|_{E'} \leq K$ *e* $|f|_{E'} \leq \liminf_{n\to\infty} |f_n|_{E'}$;

*(iv) Se* $(f_n) \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *fracamente* $*$ *em* $\sigma(E', E)$ *e* $(x_n) \to x$ *fortemente em* $E$ *(isto é* $|x_n - x|_E \to 0$*), então* $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

*(Ver [6], p. 41.)*

**Nota 12.24.** *Quando $E$ tem dimensão finita, as três topologias (forte, fraca $\sigma(E', E'')$ e fraca $*$ $\sigma(E', E)$) coincidem. Desta maneira, $J$ é sobrejectiva, isto é $J(E) = E''$ (uma vez que dim $E$ = dim $E'$ = dim $E''$). Consequentemente $\sigma(E', E) = \sigma(E', E'')$.*

*(Ver [6], p. 41.)*

**Teorema 12.25 (Banach-Alaoglu-Bourbaki).** *O conjunto*

$$B_{E'} = \{f \in E' : |f|_{X'} \leq 1\}$$

*é compacto na topologia fraca $*$ $\sigma(E', E)$.*

*(Ver [6], p. 42.)*

## 12.4. Espaços reflexivos

**Definição 12.26.** *Sejam $E$ um espaço de Banach e $J : E \to E''$ a injecção canónica. Então $E$ diz-se* **reflexivo** *se $J$ é sobrejectiva, ou seja, se*

$$J(E) = E''.$$

*(Ver [6], p. 43.)*

**Nota 12.27.** *Quando $E$ é reflexivo, $E$ e $E''$ identificam-se um com o outro.*

*(Ver [6], p. 43.)*

**Teorema 12.28.** *Seja $E$ um espaço de Banach. Então $E$ é reflexivo se e só se*

$$B_E = \{x \in E : |x|_X \leq 1\}$$

*é compacto na topologia fraca $\sigma(E, E')$.*

*(Ver [6], p. 44.)*

**Proposição 12.29.** *Sejam $E$ um espaço de Banach e $M \subset E$ um subespaço vectorial fechado. Então $M$ (com a topologia induzida por $E$) é reflexivo.*

*(Ver [6], p. 45.)*

**Corolário 12.30.** *Seja $E$ um espaço de Banach. Então $E$ é reflexivo se e só se $E'$ é reflexivo.*

*(Ver [6], p. 45.)*

**Corolário 12.31.** *Sejam $E$ um espaço de Banach reflexivo e $K \subset E$ um subconjunto convexo, fechado e limitado. Então $K$ é compacto na topologia fraca $\sigma(E, E')$.*

*(Ver [6], p. 46.)*

**Teorema 12.32.** *Sejam $E$ um espaço de Banach reflexivo e $(x_n)$ uma sucessão limitada em $E$. Então existe uma subsucessão $(x_{n_k})$ convergente na topologia fraca $\sigma(E, E')$.*

*(Ver [6], p. 50.)*

### 12.5. Espaços separáveis

**Definição 12.33.** *Um espaço métrico $E$ diz-se* **separável** *se existe um subconjunto numerável $D \subset E$, que é denso em $E$.*
*(Ver [6], p. 47.)*

**Proposição 12.34.** *Sejam $E$ um espaço métrico separável e $F \subset E$. Então $F$ é separável.*
*(Ver [6], p. 47.)*

**Teorema 12.35.** *Seja $E$ um espaço de Banach tal que $E'$ é separável. Então $E$ é separável.*
*(Ver [6], p. 47.)*

**Corolário 12.36.** *Seja $E$ um espaço de Banach separável. Então $E$ é reflexivo e separável se e só se $E'$ é reflexivo e separável.*
*(Ver [6], p. 48.)*

**Proposição 12.37.** *Sejam $E$ um espaço de Banach separável e $(f_n)$ uma sucessão limitada em $E'$. Então existe uma subsucessão $(f_{n_k})$ convergente na topologia fraca $*$ $\sigma(E', E)$.*
*(Ver [6], p. 50.)*

## 13. Os espaços $L^p$

### 13.1. Conceitos preliminares

Seja $X$ um conjunto qualquer e seja $\sim \subset X^2$ qualquer.

**Definição 13.1.** *Uma* **relação** *definida num conjunto $X$ é uma propriedade que é válida para alguns (ou todos ou nenhuns) pares ordenados em $X \times X$.*
*(Ver [16], p. 331.)*

**Exemplo 13.2.** $=$ e $\leq$ *são relações definidas em* $\mathbb{R}$.
*(Ver [16], p. 332.)*

**Nota 13.3.** *Se $\sim$ é uma relação em $X$, escrevemos $x \sim y$ para indicar que $\sim$ é válida para o par $(x, y)$.*
*(Ver [16], p. 332.)*

**Definição 13.4.** *$\sim$ diz-se uma* **relação de equivalência** *definida em $X$ se for:*
*(a) reflexiva: $x \sim x$, $\forall\, x, y \in X$;*
*(b) simétrica: $x \sim y \Rightarrow y \sim x$, $\forall\, x, y \in X$;*
*(c) transitiva: $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$, $\forall\, x, y, z \in X$.*
*(Ver [16], p. 332.)*

**Definição 13.5.** *Se $x \in X$, chamamos* **classe de equivalência** *de $x$ segundo $\sim$ ao conjunto*

$$[x] = \{y \in X : x \sim y\}.$$

*(Ver [16], p. 332.)*

**Nota 13.6.** *(a) Se $x \in X$, então $x \in [x]$.*
*(b) Se $x, y \in X$, então $[x]$ e $[y]$ são iguais ou disjuntos. Então a classe de equivalência segundo $\sim$ forma uma partição de $X$ (isto é, uma colecção de conjuntos disjuntos cuja união é $X$).*
*(Ver [16], p. 332.)*

## 13.2. Notações importantes

**Definição 13.7.** *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Designamos por $q$ o* **expoente conjungado** *de $p$, isto é, verifica a relação $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Desta maneira, se $p = 1$ então $q = \infty$ e reciprocamente.*
*(Ver [6], p. 56.)*

**Nota 13.8.** *(i) Se $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, denotamos o espaço $L^p$ por $L^p(\Omega, \mathbb{R})$, se $1 \leq p \leq \infty$.*
*(ii) Se $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, denotamos o espaço $L^p$ por $L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$, se $1 \leq p \leq \infty$.*
*(iii) Se $1 \leq p < \infty$, o espaço dual de $L^p(\Omega, \mathbb{R})$ é $L^q(\Omega, \mathbb{R})$ (analogamente o espaço dual de $L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ é $L^q(\Omega, \mathbb{R}^n)$).*
*(Ver [17], p. 17.)*

## 13.3. O espaço $L^1$

Aqui vamos fazer a construção do espaço $L^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

**Definição 13.9.** *Seja $\Omega$ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$. Chamamos $\mathcal{L}(\Omega, \mathbb{R}^n) = \mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ao* **conjunto das funções com valores em $R^n$, mensuráveis e integráveis em** *$\Omega$, ou* **conjunto das funções Lebesgue-integráveis**. *Isto é,*

$$\mathcal{L}(\Omega, \mathbb{R}^n) = \mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{R}^n) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}^n : f \text{ é mensurável e } \int_\Omega |f(x)| \, dx < \infty\}.$$

*(Ver [16], p. 98.)*

**Nota 13.10.** *Se não exigirmos (b) na definição 9.1(isto é, se $E$ é um espaço vectorial e se a função $|\cdot| : E \to \mathbb{R}$ verifica as seguintes propriedades :*
*(i) $|x| \geq 0$, $\forall\, x \in E$;*
*(ii) $|\lambda x| = |\lambda| \, |x|$, $\forall\, x \in E$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$ (com $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) (homogeneidade);*
*(iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$, $\forall\, x, y \in E$ (desigualdade triangular).),*
*então $|\cdot|$ diz-se uma* **seminorma**.
*(Ver [16], p. 91.)*

**Definição 13.11.** *Chamamos* **seminorma no espaço** *$\mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ à função $p : \mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ definida por*

$$p(f) = \int_\Omega |f(x)| \, dx.$$

*(Ver [16], p. 91.)*

**Nota 13.12.** *Em geral, $p$ não é uma norma em $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$.*
*(Ver [16], p. 91.)*

**Definição 13.13.** *Escrevemos $f \sim g$ se $f(x) = g(x)$, pq todo $x \in \Omega$. Isto é, se*

$$\exists\, N \in \mathcal{M}, \text{ com } N \subset \Omega,\ \mu(N) = 0 : f(x) = g(x), \forall\, x \in N^c.$$

*(Ver [16], p. 103.)*

**Definição 13.14.** *Chamamos $L^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ao conjunto de todas as classes de equivalência de funções pertencentes a $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, definidas pela relação de equivalência $\sim$ (ver definição 13.4). Por outras palavras, $L^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ é o* **conjunto das classes de equivalência de funções integráveis** *em $\Omega$.*
*(Ver [16], p. 103.)*

**Definição 13.15.** *A* **norma em $\mathbf{L}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$** *é a função definida por*

$$|f|_{L^1(\Omega, \mathbb{R}^n)} = \int_\Omega |f(x)| \, dx,$$

*para qualquer $f \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$.*
*(Ver [16], p. 103.)*

### 13.4. O espaço $L^p$ $(1 < p < \infty)$

Façamos agora a construção do espaço $L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

**Definição 13.16.** *Seja $\Omega$ um conjunto aberto de $\mathbb{R}^m$. E seja $p \in \mathbb{R}$, com $1 \leq p < \infty$. Chamamos $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ao* ***conjunto das funções com valores em $\mathbb{R}^n$, mensuráveis e $p$-integráveis em*** *$\Omega$. Isto é,*

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathbb{R}^n) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}^n : f \text{ é mensurável e } \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty\}.$$

*(Ver [16], p. 98.)*

**Definição 13.17.** *Chamamos* ***seminorma no espaço*** *$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ à função $q : \mathcal{L}^p(\Omega, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ definida por*

$$q(f) = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

*(Ver [16], p. 99.)*

**Nota 13.18.** *A função $q$, em geral, não é uma norma em $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$.*
*(Ver [16], p. 103.)*

**Definição 13.19.** *Chamamos $L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ao conjunto de todas as classes de equivalência de funções pertencentes a $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$, definidas pela relação de equivalência $\sim$ (ver definição 13.4). Por outras palavras, $L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ é o* ***conjunto das classes de equivalência de funções $p$-integráveis*** *em $\Omega$.*
*(Ver [16], p. 103.)*

**Definição 13.20.** *Seja $p \in \mathbb{R}$, com $1 \leq p < \infty$. Então, a* ***norma em*** *$\mathrm{L}^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ é a função definida por*

$$|f|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

*para qualquer $f \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$.*
*(Ver [16], p. 103.)*

**Teorema 13.21 (Desigualdade de Hölder).** *Sejam $f \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e $g \in L^q(\Omega, \mathbb{R}^n)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então $fg \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e*

$$\int |fg| \leq |f|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)} \; |g|_{L^q(\Omega,\mathbb{R}^n)}.$$

### 13.5. O espaço $L^\infty$

Finalmente, vamos construir o espaço $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

**Definição 13.22.** *Seja $\Omega$ um conjunto aberto de $\mathbb{R}^m$. Chamamos $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ao* ***conjunto de todas as funções mensuráveis definidas quase sempre em $\Omega$ e tal que existe uma constante $k > 0$ e um conjunto $E \subset \Omega$*** *(ambos dependentes de $f$),* ***com $\mu(E) = 0$, verificando a propriedade:***

$$|f(x)| \leq k, \; \forall \; x \in \Omega \backslash E.$$

*Isto é,*

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}^n : f \text{ é mensurável e } \exists \; k > 0 \text{ tal que } |f(x)| \leq k, \text{ pqt } x \in \Omega\}.$$

*(Ver [16], p. 103.)*

**Definição 13.23.** *Chamamos* **seminorma no espaço** $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ *à função* $N_\infty : \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$N_\infty(f) = \inf\{c : |f(x)| \leq c \text{ qs em } \Omega\}.$$

*(Ver [16], p. 99.)*

**Nota 13.24.** *A função $N_\infty$, em geral, não é uma norma em $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$.*
*(Ver [16], p. 103.)*

**Definição 13.25.** *Chamamos $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ao conjunto de todas as classes de equivalência de funções pertencentes a $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, definidas pela relação de equivalência $\sim$ (ver definição 13.4). Por outras palavras, $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ é o* **conjunto das classes de equivalência de funções limitadas q.s.** *em $\Omega$. Desta maneira,*

$$L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}^n : f \text{ é mensurável e } \exists\, c > 0 \text{ tal que } |f(x)| \leq c, \text{ qs em } \Omega\}.$$

*(Ver [16], p. 103 e [6], p. 56.)*

**Definição 13.26.** *Definimos a* **norma no espaço** *da seguinte forma :*

$$|f|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)} = N_\infty(f) = \inf\{c : |f(x)| \leq c \text{ qs em } \Omega\}.$$

*(Ver [6], p. 56.)*

**Nota 13.27.** *Seja $\Omega$ um subconjunto não-vazio, aberto e limitado de $\mathbb{R}^m$. Então, o conjunto de todas as funções contínuas em $\overline{\Omega}$ é um subespaço fechado de $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, e*

$$|f|_{L^\infty(\Omega)} = \max_{x \in \overline{\Omega}} |f(x)|,$$

*para qualquer $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$.*
*(Ver [16], p. 91.)*

**Proposição 13.28.** *Se $f \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, então*

$$|f(x)| \leq |f|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)} \text{ qs em } \Omega.$$

*(Ver [6], p. 56.)*

## 13.6. Convergência nos espaços $L^p$ $(1 \leq p \leq \infty)$

**Teorema 13.29.** *Sejam $1 \leq p \leq \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ aberto, $(f_m)$ uma sucessão em $L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e $f \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ tais que*

$$\left(|f_m - f|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)}\right) \to 0.$$

*Então existe uma subsucessão $(f_{m_k})$ tal que*
*(i) $(f_{m_k}(x)) \to f(x)$ qs em $\Omega$,*
*(ii) $|f_{m_k}(x)| \leq h(x)$ qs em $\Omega$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, com $h \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$.*
*(Ver [6], p. 58.)*

**Definição 13.30.** *Seja $1 \leq p < \infty$, seja $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto aberto. Dizemos que uma sucessão $(f_k) \subset L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$* **converge fracamente** *em $L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$, e denota-se por $(f_k) \rightharpoonup f$ em $L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$, se*

$$\int_\Omega f_k(x)\, g(x)\; dx \to \int_\Omega f(x)\, g(x)\; dx,$$

*para qualquer $g \in L^q(\Omega, \mathbb{R}^n)$, quando $k = 1, ..., \infty$.*
*(Ver [17], p. 17.)*

**Definição 13.31.** *Seja $p = \infty$, seja $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto aberto. Dizemos que uma sucessão $(f_k) \subset L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$* **converge fracamente** $*$ *em $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, e denota-se por $(f_k) \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, se*

$$\int_\Omega f_k(x)\, g(x)\ dx \to \int_\Omega f(x)\, g(x)\ dx,$$

*para qualquer $g \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, quando $k = 1, ..., \infty$.*
*(Ver [17], p. 18.)*

**Teorema 13.32.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto aberto.*
*(a) Se $p = 1$ e se*

$$(f_n) \rightharpoonup f \text{ em } L^1(\Omega, \mathbb{R}^n),$$

*então*

$$\exists\ K > 0 : |f_n|_{L^1(\Omega, \mathbb{R}^n)} \leq K.$$

*(b) Seja $1 < p < \infty$.*
*(i) Seja*

$$(f_n) \rightharpoonup f \text{ em } L^p(\Omega, \mathbb{R}^n),$$

*então*

$$\exists\ K > 0 : |f_n|_{L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)} \leq K.$$

*(ii) Reciprocamente, se $|f_n|_{L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)} \leq K$, então existe $f \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e uma subsucessão $(f_{n_j})$ de $(f_n)$ tal que*

$$(f_{n_j}) \rightharpoonup f \text{ em } L^p(\Omega, \mathbb{R}^n),$$

*com $n, j \in \mathbb{N}$.*
*(c) Seja $p = \infty$.*
*(i) Seja*

$$(f_n) \overset{*}{\rightharpoonup} f \text{ em } L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n),$$

*então*

$$\exists\ K > 0 : |f_n|_{L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)} \leq K.$$

*(ii) Reciprocamente, se $|f_n|_{L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)} \leq K$, então existe $f \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e uma subsucessão $(f_{n_j})$ de $(f_n)$ tal que*

$$(f_{n_j}) \overset{*}{\rightharpoonup} f \text{ em } L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n),$$

*com $n, j \in \mathbb{N}$.*
*(Ver [17], p. 18.)*

**Lema 13.33.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto aberto e limitado. Então*
*(a) Seja $p = 1$,*

$$(f_n) \rightharpoonup f \text{ em } L^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$$

*sse*

*(i) $|f_n|_{L^1(\Omega, \mathbb{R}^n)} \leq K$;*
*(ii) $\lim_{n\to\infty} \int_D [f_n(x) - f(x)]\, dx = 0$, $\forall$ cubo $D \subset \Omega$;*
*(iii) $(f_n)$ é equi-integrável, isto é, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\lambda = \lambda(\varepsilon) > 0$, tal que se $E$ é um conjunto mensurável de $\Omega$ com $\mu(E) < \lambda(\varepsilon)$, então $\int_E |f_n(x)|\, dx < \varepsilon$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.*
*(b) Seja $1 < p < \infty$,*

$$(f_n) \rightharpoonup f \text{ em } L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$$

*sse*

*(i) $|f_n|_{L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)} \leq K$;*
*(ii) $\lim_{n\to\infty} \int_D [f_n(x) - f(x)]\, dx = 0$, $\forall$ cubo $D \subset \Omega$ .*

*(c) Seja* $p = \infty$,

$$(f_n) \xrightarrow{*} f \text{ em } L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$$

*sse*

(i) $|f_n|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)} \leq K$;

(ii) $\lim_{n\to\infty} \int_D [f_n(x) - f(x)]\, dx = 0, \forall$ cubo $D \subset \Omega$.

*(Ver [17], p. 19.)*

## 13.7. Compacidade fraca em $L^1$

**Definição 13.34.** *Uma sucessão* $(x_k)$, *de funções* $x_k : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *com* $[a,b] \subset \mathbb{R}$, *diz-se* **equilimitada** *se existe* $N > 0$ *tal que* $|x_k(t)| \leq N$, *para qualquer* $t \in [a,b]$ *e para qualquer* $k \in \mathbb{N}$.

*(Ver [9], p. 309.)*

**Definição 13.35.** *Uma sucessão* $(x_k)$, *de funções* $x_k : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *com* $[a,b] \subset \mathbb{R}$, *diz-se* **equicontínua** *se dado* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *tal que, quaisquer que sejam* $t'$, $t'' \in [a,b]$ *tais que* $|t' - t''| < \delta$ *temos* $|x_k(t') - x_k(t'')| \leq \varepsilon$, *para qualquer* $k \in \mathbb{N}$.

*(Ver [9], p. 309.)*

**Teorema 13.36 (Teorema de Ascoli-Arzelà).** *Seja* $(x_k)$ *uma sucessão, de funções* $x_k : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *com* $[a,b] \subset \mathbb{R}$, *equilimitada e equicontínua. Então existem uma subsucessão* $(x_{k_s})$ *de* $(x_k)$ *e uma função contínua* $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *tais que* $(x_{k_s}) \to x$ *uniformemente em* $[a,b]$ *quando* $s \to +\infty$.

*(Ver [9], p. 309.)*

**Definição 13.37.** *Uma família* $\{h(\cdot)\} \in L^1([a,b], \mathbb{R}^n)$ *diz-se* **sequencialmente fracamente relativamente compacta** *em* $L^1([a,b], \mathbb{R}^n)$, *se qualquer sucessão* $(h_k(\cdot))$ *de elementos de* $\{h(\cdot)\}$ *tem uma subsucessão fracamente convergente em* $L^1([a,b], \mathbb{R}^n)$ *(para um elemento* $h \in L^1([a,b], \mathbb{R}^n)$, *o qual não tem de estar em* $\{h(\cdot)\}$).

*(Ver [9], p. 326.)*

**Definição 13.38.** *Uma família* $\{h(\cdot)\} \in L^1([a,b], \mathbb{R}^n)$ *diz-se* **equiabsolutamente integrável** *em* $[a,b]$ *se dado* $\varepsilon > 0$, *existe algum* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *tal que* $\int_E |h(t)|\, dt \leq \varepsilon$, *para qualquer* $h(\cdot)$ *pertencente à família e para qualquer subconjunto mensurável* $E$ *de* $[a,b]$, *com* $\mu(E) \leq \delta$.

*(Ver [9], p. 327.)*

**Proposição 13.39.** *As seguintes afirmações são equivalentes :*

*(a) Uma família* $\{h(\cdot)\} \in L^1([a,b], \mathbb{R}^n)$ *é sequencialmente fracamente relativamente compacta em* $L^1([a,b], \mathbb{R}^n)$.

*(b) Uma família* $\{h(\cdot)\} \in L^1([a,b], \mathbb{R}^n)$ *é equiabsolutamente integrável em* $[a,b]$.

*(c) Existem uma constante* $M$ *e uma função* $\theta : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *limitada inferiormente (que se pode supor de classe* $C^1$, *estritamente crescente e estritamente convexa) tais que*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\theta(r)}{r} = +\infty,$$

*e*

$$\int_a^b \theta(|h(t)|)\, dt \leq M$$

*para qualquer função* $h \in \{h(\cdot)\}$.

*(Ver [9], p. 329.)*

**Definição 13.40.** *Seja* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *não-vazio, e* $f$, $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$ *duas funções. Dizemos que a sucessão* $(f_k)$ ***converge em medida*** *em* $[a,b]$ *para* $f$ *se*

$$\lim_{k\to\infty} \mu^* \left(\{x \in [a,b] : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0,$$

*onde* $\mu^*$ *é a medida exterior de Lebesgue.*
*(Ver , p. .)*

**Teorema 13.41.** *Seja* $(f_n)$ *uma sucessão fracamente convergente para* $f$ *em* $L^1([a,b], \mathbb{R}^n)$*. Então* $(f_n)$ *converge fortemente para* $f$ *se e só se* $(f_n)$ *converge em medida para* $f$ *em qualquer conjunto mensurável com medida finita.*
*(Ver [20], p. 295.)*

**Teorema 13.42.** *Seja* $G \subset \mathbb{R}^h$, $h \geq 1$, *um conjunto mensurável. Suponhamos que, para quase todo* $\bar{t} \in G$, *o conjunto* $A(\bar{t}) \subset \mathbb{R}^n$ *é fechado, e, para cada* $x \in A(\bar{t})$, *os conjuntos* $Q(\bar{t}, x) \subset \mathbb{R}^m$ *são fechados e convexos, e verificam a propriedade :*

$$Q(\bar{t}, \bar{x}) = \bigcap_{\delta>0} cl \bigcup_{(t,x)\in(\bar{t},\bar{x})+\delta B} Q(t,x).$$

*Sejam* $\xi$, $\xi_k : G \to \mathbb{R}^m$ *e* $x$, $x_k : G \to \mathbb{R}^n$ *funções mensuráveis para cada* $k \in \mathbb{N}$, *com* $\xi$, $\xi_k \in L^1(G, \mathbb{R}^m)$,

$$(x_k(t)) \subset A(t), \qquad (\xi_k(t)) \subset Q(t, x_k(t)) \qquad \text{qs em } G,\ \forall\, k \in \mathbb{N},$$

*onde* $(\xi_k) \rightharpoonup \xi$ *em* $L^1(G, \mathbb{R}^m)$ *e* $(x_k(t)) \underset{k\to+\infty}{\to} x(t)$ *em medida em* $G$*. Então*

$$x(t) \in A(t), \qquad \xi(t) \in Q(t, x(t)) \qquad \text{qs em } G.$$

*(Ver [9], p. 340.)*

## 14. Outros resultados de sci

**Proposição 14.1.** *Sejam* $E$ *um espaço vectorial real topológico localmente convexo e* $f : E \to [-\infty, +\infty]$ *uma função convexa. Então* $f$ *é sci na topologia forte de* $E$ *se e só se é sci na topologia fraca de* $E$.
*(Ver [18].)*

**Proposição 14.2.** *Consideremos o integral* $\Lambda : [0,T] \to (-\infty, +\infty]$ *dado por*

$$\Lambda(x(t), \xi(t)) := \int_G L(t, x(t), \xi(t))\ dt$$

*onde :*
*(i)* $G \subset \mathbb{R}^h$, $h \geq 1$, *um conjunto limitado;*
*(ii)* $L : \mathbb{R}^h \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \to [-\infty, +\infty]$ *é uma função que verifica o seguinte :*
*(ii₁)* *para qualquer* $\varepsilon > 0$ *existe um conjunto compacto* $K \subset G$ *tal que* $\mu(G \backslash K) < \varepsilon$ *e* $L|_{K\times\mathbb{R}^{n+r}}$ *é Borel-mensurável;*
$(ii_2)$ *para quase todo* $\bar{t} \in G$, *a função* $(s,v) \mapsto L(\bar{t}, s, v)$ *toma valores em* $(-\infty, +\infty]$ *e é sci em* $\mathbb{R}^{n+r}$;
$(ii_3)$ *para quase todo* $\bar{t} \in G$, *o conjunto*

$$A(\bar{t}) := \left\{\bar{s} \in \mathbb{R}^n : L(\bar{t}, \bar{s}, v) \neq +\infty\right\} \neq \varnothing;$$

$(ii_4)$ *para quase todo* $\bar{t} \in G$ *e para qualquer* $\bar{s} \in A(\bar{t})$, *a função* $v \mapsto L(\bar{t}, \bar{s}, v)$ *é convexa .*
*Consideremos o conjunto*

$$Q(\bar{t}, \bar{s}) := \left\{v \in \mathbb{R}^r : L(\bar{t}, \bar{s}, v) \neq +\infty\right\},$$

*para cada* $(\bar{t}, \bar{s}) \in G \times \mathbb{R}^n$.

*Consideremos também as funções mensuráveis $\xi$, $\xi_k : G \to \mathbb{R}^r$ e $x$, $x_k : G \to \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, verificando o seguinte :*

(a) $\xi, \xi_k \in L^1(G, \mathbb{R}^r)$;

(b) $(\xi_k) \rightharpoonup \xi$ em $L^1(G, \mathbb{R}^r)$ quando $k \to +\infty$;

(c) $(x_k(t)) \underset{k\to+\infty}{\to} x(t)$ em medida em $G$;

(d) $(x_k(t)) \subset A(t)$, $\quad (\xi_k(t)) \subset Q(t, x_k(t)) \quad$ qs em $G$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$;

(e) $-\infty < i := \liminf_{k\to+\infty} \int_G L(t, x_k(t), \xi_k(t))\, dt$.

*Então*

$$x(t) \in A(t), \qquad \xi(t) \in Q(t, x(t)) \qquad \text{qs em } G$$

e

$$\int_G L(t, x(t), \xi(t))\, dt \le \liminf_{k\to+\infty} \int_G L(t, x_k(t), \xi_k(t))\, dt.$$

*(Ver [9], p. 342, 350, 352.)*

## 15. Os espaços de Sobolev

### 15.1. O espaço $W^{1,p}$ $(1 \le p \le \infty)$

**Definição 15.1.** *(a) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ aberto, $s \in N$, $1 \le p \le \infty$. Então*

$$W^{s,p} = \{u : u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}), \nabla^\alpha u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}), \alpha = 1, 2, ..., s\},$$

*onde $\nabla^\alpha u$ representa a matriz das derivadas de ordem $\alpha$, no sentido das distribuições, da função $u$.*

*(b) Para o espaço $W^{s,p}(\Omega, \mathbb{R})$ é associada a norma*

$$\begin{aligned} |u|_{W^{s,p}} &= \left(\sum_{\alpha=0}^{s} |\nabla^\alpha u|_{L^p}^p\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ se } 1 \le p < \infty, \\ |u|_{W^{s,\infty}} &= \max_{0\le\alpha\le s} \{|\nabla^\alpha u|_{L^\infty}\}, \text{ se } p = \infty. \end{aligned}$$

*(c) $W_0^{s,p}(\Omega, \mathbb{R})$ é o fecho de $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ em $W^{s,p}(\Omega, \mathbb{R})$.*

*(d) $W^{-s,q}(\Omega, \mathbb{R})$ é o dual de $W_0^{s,p}(\Omega, \mathbb{R})$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

*(Ver [17], p. 25.)*

**Nota 15.2.** *(i) Se $u : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, representamos o espaço de Sobolev por $W^{s,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$.*

*(ii) $W^{s,p}(\Omega, \mathbb{R})$ é um espaço de Banach, separável se $1 \le p < \infty$ e reflexivo se $1 < p < \infty$.*

*(iii) Se $1 \le p < \infty$, as funções $C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ são densas em $W^{s,p}(\Omega, \mathbb{R})$, relativamente à norma deste espaço.*

*(Ver [17], p. 25.)*

**Nota 15.3.** *Se $\Omega$ é limitado, então $W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ é o espaço das funções lipschitzianas.*

*(Ver [17], p. 25.)*

**Definição 15.4.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função. Então o* **suporte** *da função $f$ é definido pelo conjunto*

$$\text{supp } \varphi = \overline{\{t \in \Omega : \varphi(t) \ne 0\}}.$$

*(Ver [6], p. 68.)*

**Proposição 15.5.** *Seja $I \subset \mathbb{R}$. O espaço de Sobolev $W^{1,p}(I, \mathbb{R}^n)$ é definido por*

$$W^{1,p}(I, \mathbb{R}^n) = \left\{u \in L^p(I, \mathbb{R}^n) : \exists\, g \in L^p(I, \mathbb{R}^n) \text{ tal que } \int_I u\,\varphi' = \int_I g\,\varphi, \forall\, \varphi \in C_c^\infty(I, \mathbb{R}^n)\right\},$$

*onde $C_c^\infty(I, \mathbb{R}^n)$ é o conjunto das funções de classe $C^\infty$ definidas em $I$ com valores em $\mathbb{R}^n$, com suporte compacto.*

*(Ver [6], p. 120.)*

**Nota 15.6.** *Na proposição 15.5, a função $g$ diz-se a derivada no sentido das distribuições (ou fraca) de $u$. Além disso, $g$ é única.*
*(Ver [6], p. 120.)*

### 15.2. Compacidade nos espaços de Sobolev

**Teorema 15.7.** *Seja $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$. Existe uma constante $c$ (que depende apenas de $\mu(I) \leq \infty$) tal que*

$$|u|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^n)} \leq c\ |u|_{W^{1,p}(I,\mathbb{R}^n)}, \forall\ u \in W^{1,p}(I, \mathbb{R}^n), \forall\ 1 \leq p \leq \infty,$$

*por outras palavras $W^{1,p}(I, \mathbb{R}^n) \subset L^\infty(I, \mathbb{R}^n)$ com injecção contínua para qualquer $1 \leq p \leq \infty$. Além disso, quando $I$ é limitado :*
*$(i)$ a injecção $W^{1,p}(I, \mathbb{R}^n) \subset C(\overline{I}, \mathbb{R}^n)$ é compacta para $1 < p \leq \infty$;*
*$(ii)$ a injecção $W^{1,1}(I, \mathbb{R}^n) \subset L^q(I, \mathbb{R}^n)$ é compacta para $1 \leq q \leq \infty$.*
*(Ver [6], p. 129.)*

**Nota 15.8.** *A injeção compacta pode ser compreendida da seguinte maneira. Seja $(u_n) \to u$ em $W^{1,p}(I, \mathbb{R}^n)$.*
*$(i)$ Se $1 \leq p < m$, então*

$$(u_n) \to u \text{ em } L^q(I, \mathbb{R}^n),\ 1 \leq q < \frac{mp}{m-p}.$$

*$(ii)$ Se $p = m$, então*

$$(u_n) \to u \text{ em } L^q(I, \mathbb{R}^n),\ 1 \leq q < \infty.$$

*$(iii)$ Se $p > m$, então*

$$(u_n) \to u \text{ em } L^\infty(I, \mathbb{R}^n).$$

*(Ver [17], p. 26.)*

**Nota 15.9.** *Seja $I$ um intervalo limitado $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Seja $1 \leq p < \infty$. A sucessão $(u_n) \subset W^{1,p}(I, \mathbb{R}^n)$ converge fracamente para a função $u \in W^{1,p}(I, \mathbb{R}^n)$ $((u_n) \rightharpoonup u)$ se e só se*

$$(i)\quad \left(\int_I \langle u_n(t), \psi(t)\rangle\ dt\right) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I \langle u(t), \psi(t)\rangle\ dt, \forall\ \psi \in L^{p'}(I, \mathbb{R}^n),$$

$$(ii)\quad \left(\int_I \langle u_n'(t), \psi(t)\rangle\ dt\right) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I \langle u'(t), \psi(t)\rangle\ dt, \forall\ \psi \in L^{p'}(I, \mathbb{R}^n).$$

## 16. Continuidade em $\mathbb{R}$

**Definição 16.1.** *Dizemos que um ponto $a$ é* **aderente** *a um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ se $a$ for limite de uma sucessão de pontos $(x_n) \in X$.*
*(Ver [25], p. 133.)*

**Definição 16.2.** *Seja $X \subset \mathbb{R}$. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é* **contínua** *se for contínua em todos os pontos de $X$.*
*(Ver [25], p. 174.)*

**Definição 16.3.** *Seja $X \subset \mathbb{R}$. Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ possui um* **ponto de descontinuidade de primeira espécie** *$a \in X$ se $f$ é descontínua no ponto $a$ e, além disso, existem os limites laterais $\lim_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim_{x\to a^-} f(x)$. (Caso $a$ seja ponto de acumulação de $X$ somente de um lado, exigimos apenas que o limite lateral correspondente exista.)*
*(Ver [25], p. 181.)*

**Teorema 16.4.** *Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função cujas descontinuidades são todas de primeira espécie. Então o conjunto dos pontos de descontinuidade de $f$ é numerável.*
*(Ver [25], p. 182.)*

**Proposição 16.5.** *Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Para que $f$ se estenda continuamente a uma função $\varphi : \overline{X} \to \mathbb{R}$ é necessário e suficiente que exista $\lim_{x\to a} f(x)$ para qualquer $a \in X'$, onde $\overline{X}$ é o conjunto dos pontos aderentes e $X'$ é o conjunto dos pontos de acumulação.*
*(Ver [25], p. 197.)*

**Teorema 16.6 (Teorema do valor médio).** *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f$ é derivável em $(a,b)$, existe $c \in (a,b)$, tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

*Um enunciado equivalente seria : Seja $f : [a, a+h] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, derivável em $(a, a+h)$. Existe $t$, com $0 < t < 1$, tal que*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a+th) \cdot h.$$

*(Ver [25], p. 213.)*

**Proposição 16.7.** *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ aberto e $f : \overline{I} \to \mathbb{R}$ uma função derivável em $I$. Se existe $k \in \mathbb{R}$ tal que*

$$|f'(x)| \leq k, \forall\, x \in I,$$

*então*

$$|f(x) - f(y)| \leq k\,|x-y|\,, \forall\, x, y \in I.$$

*(Ver [25], p. 214.)*

**Teorema 16.8.** *Seja $f$ uma função definida num intervalo $I$ e suponha-se que $f$ é estritamente monótona e contínua (em $I$). Então a função inversa $f^{-1}$, é também contínua (em $I$).*
*(Ver [8], p. 318.)*

## 17. Continuidade em $\mathbb{R}^n$

**Proposição 17.1.** *Qualquer função contínua $f : K \to \mathbb{R}^n$, definida num compacto $K \subset \mathbb{R}^m$, é limitada e atinge os seus extremos (isto é, existem $x_1, x_2 \in K$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para qualquer $x \in K$).*
*(Ver [26], p. 44.)*

**Definição 17.2.** *Uma **função** real $f : U \to \mathbb{R}$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, diz-se **de classe** $C^1$ quando existem, em cada ponto $x \in U$, as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)$ e as $n$ funções $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \to \mathbb{R}$, assim definidas, são contínuas. Mais geralmente, diremos que uma **função** $f : U \to \mathbb{R}$ é **de classe** $C^k$ quando ela possuir derivadas parciais em todos os pontos de $U$ e as funções $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} : U \to \mathbb{R}$ forem de classe $C^{k-1}$. Aqui, $k$ é um inteiro $> 0$. Para completar a definição indutiva, diremos que uma **função** $f : U \to \mathbb{R}$ **é de classe** $C^0$ quando ela for contínua. Usaremos a notação $f \in C^k$. Escreveremos também $f \in C^\infty$, e diremos que $f$ é **de classe** $C^\infty$, quando $f \in C^k$ para qualquer $k \geq 0$. Evidentemente $C^0 \supset C^1 \supset \ldots \supset C^k \supset \ldots \supset C^\infty$, sendo todas estas inclusões estritas.*
*(Ver [26], p. 131, 132.)*

**Proposição 17.3.** *A soma $f+g$, o produto $f \cdot g$ e o quociente $\frac{f}{g}$ (se $g(x) \neq 0$ para todos os pontos no domínio de $g$) de funções $f, g : U \to \mathbb{R}$, definidas no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, de classe $C^k$, são ainda funções de classe $C^k$.*
*(Ver [26], p. 133.)*

**Nota 17.4.** *Quando $f : U \to \mathbb{R}$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, é diferenciável em qualquer ponto de $U$, obtemos uma aplicação $\nabla f : U \to (\mathbb{R}^n)^* = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, que associa a cada ponto $x \in U$ o funcional $\nabla f(x)$, cuja matriz é*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right).$$

*A aplicação $\nabla f$ é contínua se, e somente se, cada uma das suas funções coordenadas $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \to \mathbb{R}$ é contínua, isto é, se, e somente se, $f$ é de classe $C^1$.*
*(Ver [26], p. 135.)*

## 18. Funções absolutamente contínuas

**Definição 18.1.** *Uma função $x(t)$, $a \leq t \leq b$, diz-se* ***AC*** *ou* ***absolutamente contínua*** *se, dado $\varepsilon > 0$, existe algum $\delta = \delta(x, \varepsilon) > 0$ tal que, para todos os intervalos finitos não sobrepostos $(\alpha_i, \beta_i)$, $i = 1, ..., N$, em $[a, b]$, com $\sum_{i=1}^{N} (\alpha_i - \beta_i) \leq \delta$, temos $\sum_{i=1}^{N} |x(\alpha_i) - x(\beta_i)| \leq \varepsilon$. Isto é,*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 : \sum_{i=1}^{N} (\alpha_i - \beta_i) \leq \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} |x(\alpha_i) - x(\beta_i)| \leq \varepsilon,$$

*sempre que $(\alpha_1, \beta_1)$, ..., $(\alpha_N, \beta_N)$ são subintervalos disjuntos de $[a, b]$. Intuitivamente: a variação total em $x$ tende para zero quando a variação total em $t$ tende para zero.*

*(Ver [7], p. 81.)*

**Teorema 18.2.** *Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é absolutamente contínua em $[a, b]$ se e só se satisfaz as seguintes condições :*

*(a) $f'$ existe qs em $[a, b]$.*
*(b) $f'$é Lebesgue mensurável e Lebesgue integrável (isto é, $\mu_L$-integrável).*
*(c) $\int_a^x f' \, d\mu_L = f(x) - f(a)$ para cada $x \in [a, b]$.*
*(Ver [35], p. 231.)*

**Nota 18.3.** *Qualquer função $u \in AC((a, b), \mathbb{R}^n)$ é uniformente contínua em $(a, b)$; então podemos sempre estendê-la, como uma função contínua, ao fecho de $(a, b)$.*

*(Ver [7], p. 83.)*

**Teorema 18.4.** *Tem-se*

$$AC((a, b), \mathbb{R}^n) = W^{1,1}((a, b), \mathbb{R}^n).$$

*Mais precisamente, qualquer $u \in AC((a, b), \mathbb{R}^n)$ tem derivada clássica qs $[u']$, a qual pertence a $L^1((a, b), \mathbb{R}^n)$, e, vista como um elemento de $L^1((a, b), \mathbb{R}^n)$, $[u']$ é a derivada fraca de $u$. Reciprocamente, qualquer $u \in W^{1,1}((a, b), \mathbb{R}^n)$, é a menos duma alteração de $u$ num conjunto de medida nula, uma função AC. Finalmente, $u \in AC((a, b), \mathbb{R}^n)$ se e só se $u$ é diferenciável qs no sentido clássico, $[u']$ pertence a $L^1((a, b), \mathbb{R}^n)$ e vale o teorema fundamentel do cálculo, isto é, $\forall\, x, y \in (a, b)$ tem -se*

$$u(x) - u(y) = \int_y^x [u'(t)]\, dt.$$

*Podemos, portanto, dizer que as funções de $W^{1,p}((a, b), \mathbb{R}^n)$ são as primitivas de funções de $L^p((a, b), \mathbb{R}^n)$.*

*(Ver [7], p. 84.)*

**Corolário 18.5.** *Qualquer função lipschitziana $u \in (a, b)$ tem derivada clássica $[u']$ qs em $(a, b)$ e derivada distribucional $u'$, e ambas as derivadas são iguais, vistas como funções em $L^\infty((a, b), \mathbb{R}^n)$. Em particular, $u$ pertence a todos os espaços de Sobolev $W^{1,p}((a, b), \mathbb{R}^n)$.*

*(Ver [7], p. 88.)*

**Nota 18.6.** *Qualquer função lipschitziana é AC.*

*(Ver [7], p. 88.)*

**Proposição 18.7.** *Se $g \in L^1((a, b), \mathbb{R}^n)$ e se, para $x \in (a, b)$,*

$$f(x) := \int_a^x g(t) \; dt,$$

*então $f$ é absolutamente contínua, e $[f'(x)] = g(x)$ qs em $(a, b)$.*

*(Ver [7], p. 97, 98.)*

**Proposição 18.8.** *Sejam $X$ um espaço vectorial normado e $\Delta \subset \mathbb{R}$ um intervalo fechado. Se as funções $x_i(\cdot) : \Delta \to X$, $i = 1, 2$, são absolutamente contínuas e $c_i \in \mathbb{R}$, então a função $c_1\, x_1(\cdot) + c_2\, x_2(\cdot)$ é absolutamente contínua.*

(Ver [3], p. 128.)

**Proposição 18.9.** *Seja $\Delta$ um intervalo fechado de $\mathbb{R}$. Uma função $x(\cdot) : \Delta \to \mathbb{R}^n$ é integrável se e só se $|x(\cdot)|$ é integrável. Nesse caso, temos*

$$\left| \int_\Delta x(t)\ dt \right| \leq \int_\Delta |x(t)|\ dt.$$

(Ver [3], p. 129.)

**Proposição 18.10.** *Se $s(\cdot)$ é uma função AC, crescente definida em $[a,b]$, com $s(a) = c$, $s(b) = d$, então a função inversa $s^{-1}(t) = \tau$ de $t = s(\tau)$ existe, é contínua e AC em $[c,d]$ se e só se $s'(\tau) > 0$ qs em $[a,b]$.*

(Ver [9], p. 438.)

**Proposição 18.11.** *Se $v$ é monótona em $[a,b]$ e se $u$ é absolutamente contínua em $[c,d]$ então $u \circ v$ tem derivada finita quase sempre em $[a,b]$ e verifica-se a regra da cadeia*

$$(u \circ v)'(t) = u'(v(t))\ v'(t) \ \text{ qs em } [a,b].$$

(Ver [34], p. 517.)

**Proposição 18.12.** *Sejam $v : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $u : [c,d] \to \mathbb{R}$ funções absolutamente contínuas. Se $v$ é monótona e se $v([a,b]) \subset [c,d]$ então $u \circ v : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função absolutamente contínua.*

(Ver [19], p. 462.)

**Lema 18.13 (Desigualdade de Gronwall).** *Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ duas funções contínuas. Seja $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua que satisfaz a inequação diferencial, para qualquer $t \in [a,b]$ :*

$$y(t) \leq f(t) + \int_a^t g(s)\, y(s)\ ds.$$

*Então, para qualquer $t \in [a,b]$ tem-se :*

$$y(t) \leq f(t) + \int_a^t f(s)\, g(s)\, e^{\int_a^s g(u)\ du}\ ds.$$

*Em particular, se $f(t) \equiv k$, é constante, então*

$$y(t) \leq k\ e^{\int_a^t g(s)\ ds}.$$

(Ver [22], p. 108.)

**Lema 18.14.** *Seja $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ AC, seja $\psi : \varphi([a,b]) \to [-\infty, +\infty]$ uma função mensurável, e seja $S \subset \varphi([a,b])$ um conjunto mensurável, tais que a função $\psi(\varphi(\cdot))\, \varphi'(\cdot)\, \chi_S(\varphi(\cdot))$ é mensurável. Então os integrais*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \psi(t)\, \chi_S(t)\ dt \tag{18.1}$$

$$\int_a^b \psi(\varphi(\tau))\, \varphi'(\tau)\, \chi_S(\varphi(\tau))\ d\tau = \int_a^b \psi(\varphi(\tau))\, \varphi'(\tau)\, \chi_{\varphi^{-1}(S)}(\tau)\ d\tau \tag{18.2}$$

*existem e são iguais desde que se tenha :*

*ou (a) $\psi(\cdot) \in L^\infty(S)$;*

ou (b) $\psi(\cdot) \in L^1(S)$ e $\Psi(\varphi(\cdot))$ tem variação limitada, com

$$\Psi(t) := \int_{\varphi(a)}^{t} \psi(\sigma)\chi_S(\sigma)\ d\sigma;$$

ou (c) o integral (18.2) existe;
ou (d) $\varphi(\cdot)$ é monótona e o integral (18.1) existe
(isto é, $\psi^-(\cdot)$, ou $\psi^+(\cdot)$ está em $L^1(S)$; e se isso acontece para $S = \varphi(E)$, com $E \subset [a,b]$ mensurável, então podemos escrever (18.1)=(18.2) como

$$\int_{\varphi(E)} \psi(t)\ dt = \int_E \psi(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)\ d\tau).$$

Em particular, (c) implica que, para qualquer função $\psi : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$, qualquer função AC $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ e qualquer $\phi(\cdot) \in L^1(a,b)$,

$$\psi(\varphi(\cdot))\varphi'(\cdot) \le \phi(\cdot)\ \text{qs} \Rightarrow \exists\ \textstyle\int_a^b \psi(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)\ d\tau = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \psi(t)\ dt;$$

$$\varphi(a) = \varphi(b)\ \text{e}\ \psi(\varphi(\cdot))\varphi'(\cdot) \le \phi(\cdot)\ \text{qs} \Rightarrow \textstyle\int_a^b \psi(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)\ d\tau = 0.$$

(Ver [28], p. 4.)

# 19. Análise convexa

## 19.1. Conjuntos afins

**Definição 19.1.** *Se $x$ e $y$ são pontos diferentes em $\mathbb{R}^n$, o conjunto dos pontos da forma*

$$(1-\lambda)x + \lambda y = x + \lambda(y - x),\ \lambda \in \mathbb{R},$$

*é chamado* **a recta passando por $x$ e $y$.**
(Ver [30], p. 3.)

**Definição 19.2.** *Se $x$ e $y$ são pontos diferentes em $\mathbb{R}^n$, o conjunto dos pontos da forma*

$$(1-\lambda)x + \lambda y = x + \lambda(y - x),\ 0 \le \lambda \le 1,$$

*é chamado* **o segmento de recta passando por $x$ e $y$.**
(Ver [30], p. 10.)

**Definição 19.3.** *Um subconjunto $M$ de $\mathbb{R}^n$ é chamado* **conjunto afim** *se*

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in M,\ \forall x, y \in M,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

(Ver [30], p. 3.)

**Definição 19.4.** *Para $M \subset \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^n$, o* **resultado da translação de $M$ por $b$** *é o conjunto*

$$M + b = \{x + b : x \in M\}.$$

(Ver [30], p. 4.)

**Nota 19.5.** *O resultado de uma translação de um conjunto afim é outro conjunto afim.*
(Ver [30], p. 4.)

**Definição 19.6.** *Um subconjunto afim em* $\mathbb{R}^n$*, de dimensão* $(n-1)$*, é chamado* **hiperplano.**
*(Ver [30], p. 4.)*

**Definição 19.7.** *Os conjuntos afins de dimensão* 0, 1 *e* 2 *são chamados* **pontos**, **rectas** *e* **planos**, *respectivamente.*
*(Ver [30], p. 4.)*

**Nota 19.8.** *Os hiperplanos e outros conjuntos afins podem ser representados por equações lineares, ou seja, equações envolvendo funções lineares.*
*(Ver [30], p. 4.)*

**Teorema 19.9.** *Dados* $\beta \in \mathbb{R}$ *e* $b \neq 0 \in \mathbb{R}^n$*, o conjunto*

$$H = \{x : x \in \mathbb{R}^n \text{ e } \langle x, b\rangle = \beta\}$$

*é um hiperplano em* $\mathbb{R}^n$*, com dimensão* $(n-1)$*. Chama-se a* $b$ *a normal ao hiperplano* $H$*.*
*(Ver [30], p. 5.)*

**Definição 19.10.** *Dado qualquer* $C \subset \mathbb{R}^n$*, existe um único conjunto afim minimal (o mais pequeno conjunto afim) contendo* $C$ *(*$C$ *é a intersecção de uma colecção de conjuntos afins* $M$ *tais que* $M \supset C$*). Este conjunto é chamado* **invólucro afim** *de* $S$ *e é denotado por* $aff\ C$*.*
*(Ver [30], p. 6.)*

## 19.2. Conjuntos convexos e cones

**Definição 19.11.** *Um subconjunto* $\mathcal{C}$ *de* $\mathbb{R}^n$ *diz-se* **convexo** *se*

$$(1-\lambda)\,x + \lambda y \in \mathcal{C}, \text{ quando } x, y \in \mathcal{C} \text{ e } 0 < \lambda < 1.$$

*(Ver [30], p. 10.)*

**Nota 19.12.** *Todos os conjuntos afins são convexos. O contrário já não é verdade. Isto porque os conjuntos convexos são relativos a segmentos de recta entre dois pontos e com* $0 < \lambda < 1$*, e os conjuntos afins são relativos a rectas passando por dois pontos e com* $\lambda \in \mathbb{R}$*. Em suma, os conjuntos convexos são mais gerais que os conjuntos afins, na medida em que apenas têm de conter, ao longo de quaisquer pontos* $x$ *e* $y$ *distintos, uma certa porção do segmento de recta entre* $x$ *e* $y$*.*
*(Ver [30], p. 10.)*

**Exemplo 19.13.** *Os elipsóides (em* $\mathbb{R}^3$*) são conjuntos convexos, mas não são conjuntos afins (achatados).*
*(Ver [30], p. 10.)*

**Exemplo 19.14.** 0 *e* $\mathbb{R}^n$ *são conjuntos afins e conjuntos convexos.*
*(Ver [30], p. 10.)*

**Definição 19.15.** *Para quaisquer* $b \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ *e* $\beta \in \mathbb{R}$*, os conjuntos*

$$\{x : x \in \mathbb{R}^n \text{ e } \langle x, b\rangle \leq \beta\}, \qquad \{x : x \in \mathbb{R}^n \text{ e } \langle x, b\rangle \geq \beta\}$$

*são chamados* **semi-espaços fechados.**
*(Ver [30], p. 10.)*

**Definição 19.16.** *Para quaisquer* $b \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ *e* $\beta \in \mathbb{R}$*, os conjuntos*

$$\{x : x \in \mathbb{R}^n \text{ e } \langle x, b\rangle < \beta\}, \qquad \{x : x \in \mathbb{R}^n \text{ e } \langle x, b\rangle > \beta\}$$

*são chamados* **semi-espaços abertos.**
*(Ver [30], p. 10.)*

**Nota 19.17.** *Os semi-espaços são não-vazios e convexos.*
*(Ver [30], p. 10.)*

**Teorema 19.18.** *A intersecção de uma colecção arbitrária de conjuntos convexos é convexa.*
*(Ver [30], p. 10.)*

**Definição 19.19.** *Um conjunto que pode ser expresso como a intersecção de um número finito de semi-espaços fechados de $\mathbb{R}^n$ é chamado um* **conjunto convexo poliedral**.
*(Ver [30], p. 11.)*

**Nota 19.20.** *Os conjuntos convexos poliedrais, em geral, comportam-se melhor que os outros, devido à sua falta de curvatura.*
*(Ver [30], p. 11.)*

**Definição 19.21.** *A intersecção de todos os conjuntos convexos que contêm $C \subset \mathbb{R}^n$ diz-se o* **invólucro convexo** *de $C$, e é denotado por $co\,(S)$.*
*(Ver [30], p. 12.)*

**Nota 19.22.** *O $co\,(S)$ é um conjunto convexo, e é o mais pequeno conjunto convexo que contém $S$.*
*(Ver [30], p. 12.)*

**Definição 19.23.** *A intersecção de todos os conjuntos convexos fechados que contêm $S$ (subconjunto de $\mathbb{R}^n$) diz-se o* **invólucro convexo fechado** *de $S$, e é denotado por $\overline{co}\,(S)$.*
*(Ver [21], p. 4.)*

**Definição 19.24.** *Um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ é chamado* **cone** *se é fechado para a multiplicação escalar positiva, isto é, $\lambda x \in D$ sempre que $x \in D$ e $\lambda > 0$.*
*(Ver [30], p. 13.)*

**Nota 19.25.** *Um cone é uma união de semirectas que partem da origem.*
*(Ver [30], p. 13.)*

**Definição 19.26.** *Um* **cone convexo** *é um cone que é um conjunto convexo.*
*(Ver [30], p. 13.)*

**Teorema 19.27.** *Um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ é um cone convexo se e só se é fechado para a adição e para a multiplicação escalar positiva.*
*(Ver [30], p. 14.)*

**Definição 19.28.** *Um* **vector** *$x^*$ diz-se* **normal** *a um conjunto convexo $C \subset \mathbb{R}^n$ num ponto $a \in C$ se $x^*$ não faz um ângulo agudo com qualquer segmento de recta em $C$ (começando ou acabando em $a$), isto é,*

$$\langle x - a, x^* \rangle \leq 0 \qquad \forall\, x \in C.$$

*Em particular, se $C$ é um semi-espaço*

$$\{x \in C : \langle x, b \rangle \leq \beta\}$$

*e $a$ satisfaz*

$$\langle a, b \rangle = \beta,$$

*então $b$ é normal a $C$ em $a$.*
*(Ver [30], p. 15.)*

**Definição 19.29.** *Sejam $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e $a \in C$ um ponto. Chamamos* **cone normal** *a $C$ em $a$ ao conjunto de todos os vectores $x^*$ normais a $C$ em $a$, isto é,*

$$N\,(a) = \{x^* : \langle x - a, x^* \rangle \leq 0, \forall\, x \in C\}.$$

*(Ver [30], p. 15.)*

**Proposição 19.30.** *Sejam $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e $a \in C$ um ponto. Então o cone normal a $C$ em $a$ é sempre um conjunto convexo.*
*(Ver [30], p. 15.)*

**Definição 19.31.** *Um* **cone fronteira** *de um conjunto convexo $C$ é o conjunto de todos os vectores $n$, tais que*

$$\langle x, n\rangle \leq \beta, \forall\, x \in C,$$

*para algum $\beta \in \mathbb{R}$.*
*(Ver [30], p. 15.)*

## 19.3. Hiperplanos e Separação de Conjuntos Convexos

**Definição 19.32.** *Sejam $C_1$ e $C_2$ conjuntos não-vazios de $\mathbb{R}^n$. Um hiperplano $H$ diz-se* **separador** *de $C_1$ e $C_2$ se $C_1$ está contido num dos semi-espaços fechados associados a $H$ e $C_2$ está contido no semi-espaço fechado oposto.*
*(Ver [30], p. 95.)*

**Definição 19.33.** *Sejam $C_1$ e $C_2$ conjuntos não-vazios de $\mathbb{R}^n$. Diz-se que um hiperplano $H$* **separa** *$C_1$ e $C_2$* **propriamente** *se $C_1$ e $C_2$ não estão ambos apenas contidos em $H$.*
*(Ver [30], p. 95.)*

**Teorema 19.34.** *Sejam $C_1$ e $C_2$ conjuntos não-vazios de $\mathbb{R}^n$. Então existe um hiperplano separando $C_1$ e $C_2$ se e só se existe um vector $b$ tal que*
*(i)* $\inf\{\langle x, b\rangle : x \in C_1\} \geq \sup\{\langle x, b\rangle : x \in C_2\}$,
*(ii)* $\sup\{\langle x, b\rangle : x \in C_1\} > \inf\{\langle x, b\rangle : x \in C_2\}$.
*(Ver [30], p. 95.)*

**Definição 19.35.** *Seja $C$ um conjunto convexo em $\mathbb{R}^n$. Um* **semi-espaço suporte** *de $C$ é um semi-espaço fechado que contém $C$ e tem um ponto de $C$ na sua fronteira.*
*(Ver [30], p. 99.)*

**Definição 19.36.** *Seja $C$ um conjunto convexo em $\mathbb{R}^n$. Um* **hiperplano suporte** *de $C$ é um hiperplano que está na fronteira de um semi-espaço suporte de $C$ . Os hiperplanos suporte têm a seguinte representação:*

$$H = \{x : \langle x, b\rangle = \beta\},$$

*$b \neq 0$, onde $\langle x, b\rangle \leq \beta$, $\forall\, x \in C$ e $\exists\, x \in C$ tal que $\langle x, b\rangle = \beta$.*
*(Ver [30], p. 100.)*

**Nota 19.37.** *Os hiperplanos suporte de $C$ que passam por um ponto $a \in C$ correspondem a vectores $b$ normais a $C$ em $a$.*
*(Ver [30], p. 100.)*

## 19.4. Interior relativo e fronteira relativa de conjuntos convexos

O conceito de interior não é muito importante nos conjuntos convexos, sendo mais conveniente o conceito de interior relativo. Isto porque, por exemplo, um segmento de recta em $\mathbb{R}^3$ tem interior vazio no sentido da métrica do espaço $\mathbb{R}^3$. Como tal, o conceito de interior relativo é mais útil no trato de conjuntos convexos.

**Nota 19.38.** *$B$ é a bola unitária em $\mathbb{R}^n$. Isto é*

$$B = \{x : |x| \leq 1\} = \{x : d(x, 0) \leq 1\},$$

*com $d(x, 0)$ a representar a distância de $x$ ao ponto 0.*
*(Ver [30], p. 43.)*

**Definição 19.39.** *O* ***interior relativo*** *de um conjunto $C$ em $\mathbb{R}^n$, denotado por $ri\,(C)$, é definido como o interior que resulta quando $C$ é encarado como um subconjunto do seu $aff\ C$ (isto é, invólucro afim de $C$). Deste modo, $ri\,(C)$ consiste nos pontos $x \in aff\ C$) para os quais existe $\varepsilon > 0$ tal que $y \in C$ quando $y \in aff\ C$ e $d\,(x, y) \leq \varepsilon$. Por outras palavras,*

$$ri\,(C) = \{x \in aff\ C : \exists\ \varepsilon > 0, (x + \varepsilon B) \cap aff\ C \subset C\}.$$

*(Ver [30], p. 44.)*

Convém também dar outra noção de fecho.

**Definição 19.40.** *Seja $C$ um conjunto em $\mathbb{R}^n$. O* **fecho** *de $C$, denotado por $cl\,(C)$, é o conjunto*

$$cl\,(C) = \cap\{C + \varepsilon B,\ \varepsilon > 0\}.$$

*(Ver [30], p. 44.)*

**Nota 19.41.** $ri\,(C) \subset C \subset cl\,(C)$.
*(Ver [30], p. 44.)*

**Definição 19.42.** *Seja $C$ um conjunto convexo em $\mathbb{R}^n$. A* **fronteira relativa**, *denotada por $frr\,(C)$, é o conjunto diferença*

$$frr\,(C) = cl\,(C) \backslash ri\,(C)\,.$$

*(Ver [30], p. 44.)*

**Exemplo 19.43.** *Seja $P$ um círculo em $\mathbb{R}^3$. A fronteira de $P$ é o próprio $P$. Contudo, a fronteira relativa de $P$ é a circunferência, ou seja, a fronteira de $P$ relativamente ao plano que contém $P$.*

**Nota 19.44.** *Seja $C$ um conjunto convexo não-vazio em $\mathbb{R}^n$. Se $int\ C \neq \varnothing$, então $aff\ C = \mathbb{R}^n$.*
*(Ver [23], p. 33.)*

**Nota 19.45.** *Para um conjunto convexo $C$ em $\mathbb{R}^n$ ($aff\ C = \mathbb{R}^n$ por definição), temos $ri\ C = int\ C$.*
*(Ver [30], p. 44.)*

### 19.5. Funções convexas

**Definição 19.46.** *Uma função $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$, não identicamente $+\infty$, diz-se* **convexa** *se*

$$f\,(\alpha\ x + (1-\alpha)\,x') \leq \alpha\ f\,(x) + (1-\alpha)\,f\,(x')\,,$$

*para quaisquer $x$, $x' \in \mathbb{R}^n$ e qualquer $\alpha \in (0, 1)$. O conjunto formado por estas funções é denotado por $conv\,(\mathbb{R}^n)$.*
*(Ver [23], p. 144.)*

**Definição 19.47.** *Seja $C$ um subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$. Uma função $f : C \to \mathbb{R}$, diz-se* **estritamente convexa** *se*

$$f\,(\alpha\ x + (1-\alpha)\,x') < \alpha\ f\,(x) + (1-\alpha)\,f\,(x')\,,$$

*para quaisquer $x$, $x' \in \mathbb{R}^n$ e qualquer $\alpha \in (0, 1)$.*
*(Ver [21], p. 9.)*

**Definição 19.48.** *O* **epigráfico** *de uma função convexa em $C \subset \mathbb{R}^n$, o qual denotamos por $epi\ f$ em $\mathbb{R}^n$, é definido por*

$$epi\ f = \{(x, \mu) : x \in C,\ \mu \in \mathbb{R},\ f\,(x) \leq \mu\}.$$

*(Ver [30], p. 23.)*

**Definição 19.49.** *O* ***domínio efectivo*** *de uma função convexa em $C \subset \mathbb{R}^n$, o qual denotamos por dom $f$, é a projecção do epi $f$ em $\mathbb{R}^n$. Ou seja,*

$$dom\ f = \{x \in C : \exists\ \mu,\ (x, \mu) \in epi f\} = \{x : f(x) < +\infty\}.$$

*(Ver [30], p. 23.)*

**Definição 19.50.** *Uma* ***função convexa*** *diz-se* ***própria*** *se o seu epigráfico é não-vazio e não contém nenhuma recta vertical. Por outras palavras, uma função convexa é própria se $f(x) < +\infty$, para pelo menos um $x$ e se $f(x) > -\infty$, para todos os $x$. Isto é, $f$ é própria se o conjunto convexo $C = dom\ f$ é não-vazio e a restrição de $f$ a $C$ é finita.*

*(Ver [30], p. 24.)*

**Definição 19.51.** *Uma* ***função convexa*** *diz-se* ***imprópria*** *se não é própria.*

*(Ver [30], p. 24.)*

**Teorema 19.52 (Desigualdade de Jensen).** *Seja $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ uma função. Então, $f$ é convexa se e só se*

$$f(\lambda_1\ x_1 + ... + \lambda_n\ x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + ... + \lambda_n f(x_n),$$

*sempre que $\lambda_1 \geq 0$, ..., $\lambda_n \geq 0$, $\lambda_1 + ... + \lambda_n = 1$.*

*(Ver [30], p. 25.)*

**Proposição 19.53.** *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função $C^2$. Então $f$ é convexa em $I$ se e só se $f''(x) > 0$, $\forall\ x \in I$.*

*(Ver [30], p. 26.)*

**Proposição 19.54.** *Sejam $C$ um subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ não-vazio e $f : C \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Então a função*

$$f(x) + \delta(x \mid C) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in C \\ +\infty & \text{se } x \notin C \end{cases}$$

*é convexa, onde $\delta(\cdot \mid C)$ é a função indicatriz de $C$.*

*(Ver [30], p. 33.)*

**Definição 19.55.** *Uma função $f$ diz-se* ***côncava*** *se satisfaz a desigualdade contrária à definição de função convexa.*

*(Ver [30], p. 25.)*

**Nota 19.56.** *As funções côncavas satisfazem as desigualdades opostas (àquelas referidas nos resultados anteriores) com hipóteses análogas.*

*(Ver [30], p. 25.)*

**Nota 19.57.** *Seja $f$ uma função convexa, então $-f$ é uma função côncava.*

*(Ver [30], p. 32.)*

**Definição 19.58.** *Uma função definida em $C \subset \mathbb{R}^n$ diz-se* ***afim*** *se for finita, convexa e côncava.*

*(Ver [30], p. 23.)*

**Definição 19.59.** *Uma função $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$, não identicamente $+\infty$ (isto é própria) diz-se* ***fechada*** *se é sci, ou se o seu epigráfico é fechado, ou se os seus conjuntos de subnível são fechados.*

*(Ver [23], p. 149.)*

**Definição 19.60.** *Dada qualquer função $f$ definida em $\mathbb{R}^n$, existe uma função sci (não necessariamente finita) majorada por $f$, denominada a função cujo epigráfico é o fecho do epigráfico de $f$ em $\mathbb{R}^{n+1}$. Em geral, esta função chama-se o* **invólucro sci** *de $f$.*
(*Ver [30], p. 52.*)

**Definição 19.61.** *O* **fecho de uma função convexa** *$f$ é o invólucro sci de $f$ se $f$ nunca toma o valor $-\infty$, ao passo que o fecho de $f$ é a função constante $-\infty$ se $f$ é uma função convexa imprópria tal que $f(x) = -\infty$ para algum $x$. Em qualquer caso, o fecho de $f$ é outra função convexa; e denota-se por $cl\ f$.*
(*Ver [30], p. 52.*)

**Proposição 19.62.** *Uma função convexa diz-se fechada se $cl\ f = f$.*
(*Ver [30], p. 52.*)

**Nota 19.63.** *Para uma função convexa própria, o ser fechada é o mesmo que ser sci. Notemos também que as únicas funções convexas impróprias que são fechadas são as funções constantes $-\infty$ e $+\infty$.*
(*Ver [30], p. 52.*)

**Nota 19.64.** *O conjunto formado pelas funções convexas fechadas definidas em $\mathbb{R}^n$ é denotado por $\overline{conv}(\mathbb{R}^n)$.*
(*Ver [23], p. 150.*)

**Teorema 19.65.** *Sejam $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ uma função convexa e $\varphi : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ uma função convexa e crescente. Então, $h(x) = \varphi(f(x))$ é convexa em $\mathbb{R}^n$ (onde estabelecemos que $\varphi(+\infty) = +\infty$).*
(*Ver [30], p. 32.*)

**Proposição 19.66.** *Seja $f \in conv(\mathbb{R}^n)$ (respectivamente $\overline{conv}(\mathbb{R}^n)$) e seja $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma função afim tal que Im $A \cap dom\ f \neq \varnothing$. Então a função $f \circ A : \mathbb{R}^m \to (-\infty, +\infty]$ dada por*

$$(f \circ A)(x) = f(A(x))$$

*está em $conv(\mathbb{R}^n)$ (respectivamente $\overline{conv}(\mathbb{R}^n)$).*
(*Ver [23], p. 159.*)

**Definição 19.67.** *$\lambda\ f + \alpha$ é uma função* **própria e convexa** *quando $f$ é uma função própria convexa e $\lambda$ e $\alpha$ são números reais com $\lambda \geq 0$.*
(*Ver [30], p. 33.*)

**Teorema 19.68.** *Se $f_1$ e $f_2$ são próprias e convexas em $\mathbb{R}^n$, então $f_1 + f_2$ é convexa.*
(*Ver [30], p. 33.*)

### 19.6. Continuidade de funções convexas

**Definição 19.69.** *Seja $f$ um função, definida em $\mathbb{R}^n$, convexa. Dizemos que $f$ é* **contínua relativamente a um subconjunto** *$C \subset \mathbb{R}^n$, se a restrição de $f$ a $C$ é uma função contínua.*
(*Ver [30], p. 82.*)

**Teorema 19.70.** *Uma função convexa $f$ definida em $\mathbb{R}^n$ é contínua relativamente a qualquer conjunto aberto convexo $C$ que esteja no seu domínio efectivo, em particular relativamente a $ri\,(dom\ f)$.*
(*Ver [30], p. 82.*)

**Teorema 19.71.** *Seja $f$ uma função convexa, própria e seja $S$ um qualquer subconjunto fechado limitado de $ri\,(dom\ f)$. Então $f$ é lipschitziana em $S$. Mas se $dom\ f$ está em $\mathbb{R}^n$, $S$ é o interior de $dom\ f$.*
(*Ver [30], p. 86.*)

**Teorema 19.72.** *Qualquer função convexa $f$ definida em $\mathbb{R}^n$ é localmente lipschitziana no interior do seu domínio. Isto é, é localmente lipschitziana em cada ponto $x_0 \in int\,(dom\ f)$. Consequentemente, é lipschitziana em qualquer subconjunto compacto de $int\,(dom\ f)$.*
(*Ver [29], p. 1014.*)

## 19.7. Conjugadas de funções convexas

**Teorema 19.73.** *Qualquer função convexa fechada $f$ é o supremo pontual da colecção de todas as funções afins $h$ tais que $h \leq f$.*
*(Ver [30], p. 102.)*

**Definição 19.74.** *Seja $f$ um função convexa sci definida em $\mathbb{R}^n$. Definimos $F^*$ como sendo o conjunto de todos os pares $(x^*, \mu^*)$ em $\mathbb{R}^{n+1}$, tais que a função afim*

$$h(x) = \langle x, x^* \rangle - \mu^*$$

*é majorada por $f$. Temos que*

$$h(x) \leq f(x), \forall\, x$$

*se e só se*

$$\mu^* \geq \sup\{\langle x, x^* \rangle - f(x) : x \in \mathbb{R}^n\}.$$

*Assim, $F^*$ é o epigráfico da função $f^*$ em $\mathbb{R}^n$ definida por*

$$f^*(x^*) = \sup_x\{\langle x, x^* \rangle - f(x)\} = -\inf_x\{f(x) - \langle x, x^* \rangle\}.$$

*Este $f^*$ diz-se a* **conjugada** *de $f$, ou* **polar** *de $f$.*
*(Ver [30], p. 103.)*

**Nota 19.75.** *Como $f$ é o supremo pontual de funções afins*

$$h(x) = \langle x, x^* \rangle - \mu^*,$$

*tais que $(x^*, \mu^*) \in F^* = epi\ f^*$, temos que*

$$f(x) = \sup_{x^*}\{\langle x, x^* \rangle - f^*(x^*)\} = -\inf_{x^*}\{f^*(x^*) - \langle x, x^* \rangle\}.$$

*O que mostra que a conjugada $f^{**}$ de $f^*$ é $f$, desde que $f$ seja convexa s.c.i..*
*(Ver [30], p. 104.)*

**Nota 19.76.** *A conjugada $f^{**}$ da conjugada $f^*$ tem o nome de* **biconjugada**, *ou* **bipolar**.
*(Ver [30], p. 104.)*

**Teorema 19.77.** *Seja $f$ uma função convexa. A conjugada $f^*$ é uma função convexa fechada própria se e só se $f$ é própria. Além disso, $(cl\ f)^* = f^*$ e $f^{**} = cl\,(f)$.*
*(Ver [30], p. 104.)*

**Corolário 19.78.** *Para qualquer função convexa $f$ em $\mathbb{R}^n$, temos*

$$f^*(x^*) = \sup_x\{\langle x, x^* \rangle - f(x) : x \in ri\,(dom\ f)\}.$$

*(Ver [30], p. 104.)*

**Nota 19.79.** $f_1 \leq f_2 \Rightarrow f_1^* \geq f_2^*$.
*(Ver [30], p. 104.)*

## 19.8. Subdiferenciabilidade

**Definição 19.80.** *Seja $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ uma função. Dizemos que o vector $x^*$ é um* **subgradiente** *de uma função convexa $f$ num ponto $x$ se*

$$f(z) \geq f(x) + \langle x^*, z - x \rangle, \forall z.$$

*(Ver [30], p. 214.)*

**Nota 19.81.** *A desigualdade na definição de subgradiente a que se dá o nome de desigualdade do subgradiente tem um significado geométrico simples quando $f$ é finita em $x$, isto é : o gráfico da função afim*

$$h(x) = f(x) + \langle x^*, z - x \rangle$$

*é um hiperplano não-vertical tangente ao conjunto convexo epi $f$ no ponto $(x, f(x))$.*
*(Ver [30], p. 214.)*

**Definição 19.82.** *Seja $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ uma função. Dizemos que o conjunto de todos os subgradientes de $f$ em $x$ é o* **subdiferencial** *de $f$ em $x$ e denota-se por $\partial f(x)$. Isto é,*

$$\partial f(x) = \{x^* : f(z) \geq f(x) + \langle x^*, z - x \rangle, \forall z\}.$$

*(Ver [30], p. 215.)*

**Teorema 19.83.** *Para qualquer função própia convexa $f$ e qualquer vector $x$, as seguintes condições são equivalentes :*
*(a) $x^* \in \partial f(x)$;*
*(b) $\langle z, x^* \rangle - f(z)$ atinge o seu supremo em $z = x$;*
*(c) $f(x) + f^*(x^*) \leq \langle x, x^* \rangle$;*
*(d) $f(x) + f^*(x^*) = \langle x, x^* \rangle$.*
*Se $(cl\ f)(x) = f(x)$, podemos adicionar à lista anterior, as seguintes condições :*
*(a*) $x \in \partial f^*(x^*)$;*
*(b*) $\langle x, z^* \rangle - f^*(z^*)$ atinge o seu supremo em $z^* = x^*$;*
*(a**) $x^* \in \partial (cl\ f)(x)$.*
*(Ver [30], p. 218.)*

**Teorema 19.84.** *Sejam $f$ uma função convexa e $x$ um ponto onde $f$ é finita. Se $f$ é diferenciável em $x$, então $\nabla f(x)$ é o único subgradiente de $f$ em $x$. E portanto, em particular*

$$f(z) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), z - x \rangle, \forall z.$$

*Reciprocamente, se $f$ tem um único subgradiente em $x$, então $f$ é diferenciável em $x$.*
*(Ver [30], p. 242.)*

**Teorema 19.85.** *Sejam $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma multifunção afim dada por*

$$A(x) = A_0\, x + b,$$

*onde $A_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma transformação linear e $b \in \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Então*

$$\partial (g \circ A)(x) = A_0^*\, \partial g(A(x)), \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

*onde $A_0^*$ é a adjunta de $A_0$.*
*(Ver [23], p. 203.)*

## 20. Multifunções

**Definição 20.1.** *Sejam $X$ e $Y$ espaços métricos. Chamamos* **multifunção** *à correspondência $F : X \to Y$, se a cada ponto $x \in X$ associa um conjunto de valores $F(x) \subseteq Y$.*
*(Ver [5], p. 33.)*

**Nota 20.2.** *Sejam $X$ e $Y$ espaços métricos. Uma multifunção $F : X \to Y$ é caracterizada pelo seu gráfico, denotado por $Graf(F)$, definido por*

$$Graf(F) := \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}.$$

*(Ver [5], p. 34.)*

**Nota 20.3.** *Chamamos valor de $F$ em $x$ ao conjunto $F(x)$.*
*(Ver [5], p. 34.)*

**Definição 20.4.** *Sejam $X$ e $Y$ espaços métricos. Uma multifunção $F : X \to Y$ diz-se* **não-trivial** *se o seu gráfico é não-vazio, isto é, se existe pelo menos um elemento $x \in X$ tal que $F(x)$ não é vazio.*
*(Ver [5], p. 34.)*

**Definição 20.5.** *Sejam $X$ e $Y$ espaços métricos. Uma multifunção $F : X \to Y$ diz-se* **estrita** *se todos os valores $F(x)$ são não vazios.*
*(Ver [5], p. 34.)*

**Definição 20.6.** *Sejam $X$ e $Y$ espaços métricos, e seja $F : X \to Y$ uma multifunção. Chamamos* **domínio** *de $F$ ao subconjunto de elementos $x \in X$ tais que $F(x)$ é não-vazio, isto é,*

$$Dom\ F := \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\}.$$

*(Ver [5], p. 34.)*

**Definição 20.7.** *Sejam $X$ e $Y$ espaços métricos, e seja $F : X \to Y$ uma multifunção. Chamamos* **imagem** *de $F$ à união de todos os valores $F(x)$, quando $x \in X$, isto é,*

$$\operatorname{Im} F := \bigcup_{x \in X} F(x).$$

*(Ver [5], p. 34.)*

**Definição 20.8.** *Sejam $X$ e $Y$ espaços métricos, e seja $F : X \to Y$ uma multifunção. Chamamos* **inversa** *de $F$, e denotamos por $F^{-1}$, à multifunção $F^{-1} : Y \to X$ definida por*

$$x \in F^{-1}(y) \Leftrightarrow y \in F(x) \Leftrightarrow (x, y) \in Graf(F).$$

*(Ver [5], p. 34.)*

**Nota 20.9.** *$Dom\ F = \operatorname{Im} F^{-1}$ e coincide com a projecção do gráfico de $F$ no espaço $X$. $\operatorname{Im} F = Dom\ F^{-1}$ e coincide com a projecção do gráfico de $F$ no espaço $Y$.*
*(Ver [5], p. 34.)*

**Nota 20.10.** *Seja $P$ uma propriedade geométrica. Diremos que uma multifunção satisfaz a propriedade $P$ se o seu gráfico a satisfaz.*
*(Ver [5], p. 34.)*

**Nota 20.11.** *Uma multifunção diz-se fechada (ou convexa, convexa fechada, mensurável, monótona) se o seu gráfico é fechado (ou convexo, convexo fechado, mensurável, monótono, respectivamente).*
*(Ver [5], p. 34.)*

**Proposição 20.12 (Teorema da selecção mensurável ).** *Sejam $S$ é um qualquer conjunto mensurável não-vazio e $\Gamma : S \to \mathbb{R}^n$ uma multifunção mensurável e com valores fechados. Então existe pelo menos uma selecção mensurável, isto é, uma função $x : dom\ \Gamma \to \mathbb{R}^n$ tal que $x(s) \in \Gamma(s)$ para qualquer $s \in dom\ \Gamma$.*

*(Ver [31], p. 163.)*

**Teorema 20.13.** *Seja $S$ um qualquer conjunto mensurável não-vazio. Seja $\Gamma_i : S \to \mathbb{R}^n$ uma multifunção mensurável e com valores fechados para cada $i \in I$ (conjunto de índices contável) e seja $\Gamma : S \to \mathbb{R}^n$ definida por*

$$\Gamma(s) = \bigcap_{i \in I} \Gamma_i(s).$$

*Então $\Gamma$ é mensurável e tem valores fechados. Em particular, o conjunto*

$$\left\{ s \in S : \bigcap_{i \in I} \Gamma_i(s) \neq \varnothing \right\} = dom\ \Gamma$$

*é mensurável.*

*(Ver [31], p. 170.)*

## 21. Integrandos normais

**Definição 21.1.** *Seja $S$ um qualquer conjunto mensurável não-vazio.*

*(a) Qualquer função $f : S \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ chama-se um* **integrando** *em $S \times \mathbb{R}^n$.*

*(b) Chamamos* **multifunção epigráfica** *à multifunção $E_f : S \to \mathbb{R}^{n+1}$ dada por*

$$E_f(s) = epi\ f(s, \cdot) = \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : f(s, x) \leq \alpha\}.$$

*(c) Chamamos* **multifunção domínio** *à multifunção $D_f : S \to \mathbb{R}^n$ dada por*

$$D_f(s) = dom\ f(s, \cdot) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(s, x) < +\infty\}.$$

*(d) Dizemos que $f$ é um* **integrando sci** *se $f(s, \cdot)$ é sci para cada $s \in S$, isto é, $E_f$ tem valores fechados.*

*(e) Dizemos que $f$ é um* **integrando normal** *se $f$ é um integrando sci e $E_f$ é uma multifunção mensurável.*

*(f) Dizemos que $f$ é um* **integrando próprio** *se $f(s, \cdot)$ é própria para cada $s \in S$, isto é, se $f(s, x) > -\infty$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$ e $f(s, x) \neq +\infty$ para algum $x \in \mathbb{R}^n$.*

*(g) Dizemos que $f$ é um* **integrando convexo** *se $f(s, \cdot)$ é convexa para cada $s \in S$, isto é, $E_f$ tem valores convexos.*

*(Ver [31], p. 173.)*

**Nota 21.2.** *Qualquer integrando da forma $f(s, x) \equiv \Phi(x)$ é normal, sendo $\Phi : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ sci, $f : S \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função, e $S$ um qualquer conjunto mensurável não-vazio.*

*(Ver [31], p. 173.)*

**Teorema 21.3.** *Sejam $(S, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida, $S$ um qualquer conjunto não-vazio com uma $\sigma$-àlgebra $\mathcal{A}$ e $f : S \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função tal que $f(s, \cdot)$ é sci para $x \in \mathbb{R}^n$. Se $f$ é um integrando normal, então $f$ é $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-mensurável (onde $\mathcal{B}$ é a àlgebra de Borel em $\mathbb{R}^n$). O recíproco é verdade se o espaço mensurável $(S, \mathcal{A})$ é completo.*

*(Ver [31], p. 174.)*

**Corolário 21.4.** *Seja $S$ um qualquer conjunto mensurável não-vazio. Se $f : S \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ um integrando normal, e $x : S \to \mathbb{R}^n$ é uma função mensurável, então a função $s \to f(s, x(s))$ é mensurável.*

*(Ver [31], p. 174.)*

**Corolário 21.5.** *Seja $S$ um qualquer conjunto mensurável não-vazio e $f : S \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função. Se $f(s, \cdot)$ é convexa, sci e $int\,(dom\ f(s, \cdot)) \neq \varnothing$, para cada $s \in S$ e se $f(\cdot, x)$ é mensurável, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, então $f$ é um integrando normal.*

*(Ver [31], p. 176.)*

**Proposição 21.6.** *Seja $\Gamma : S \to \mathbb{R}^n$ uma multifunção dada por*

$$\Gamma(s) = \{x : f(s,x) \leq \alpha(s)\},$$

*onde $S$ é um qualquer conjunto mensurável não-vazio, $f$ é um integrando normal definido em $S \times \mathbb{R}^n$ (por exemplo, um integrando caratheodory), e $\alpha : S \to \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável. Então $\Gamma$ é mensurável e tem valores fechados.*

*(Ver [31], p. 177.)*

**Teorema 21.7.** *Seja $T$ um qualquer conjunto mensurável não-vazio. Seja $F : T \to \mathbb{R}^n$ uma multifunção com valores fechados. Com respeito à $\sigma$-àlgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ verificam-se as implicações (c)$\Rightarrow$(a)$\Rightarrow$(b) onde*

*(a) $F$ é uma multifunção mensurável;*

*(b) $Graf(F)$ é um subconjunto $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-mensurável de $T \times \mathbb{R}^n$;*

*(c) $F^{-1}(D) \in \mathcal{A}$ qualquer que seja o $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.*

*Quando o espaço $(T, \mathcal{A})$ é completo para alguma medida $\mu$, estas condições são equivalentes. Então tem-se (b)$\Rightarrow$(c)$\Rightarrow$(a) mesmo que $F$ não tenha valores fechados.*

*(Ver [32], p. 648.)*

**Proposição 21.8.** *Seja $T$ um qualquer conjunto mensurável não-vazio. Para $j \in J$ (sendo $J$ um conjunto de índices), seja $S_j : T \to \mathbb{R}^n$ mensurável. Então as seguintes multifunções são mensuráveis :*

*(a) $t \mapsto \bigcap_{j\in J} S_j(t)$, se $J$ é contável e $S_j$ tem valores fechados;*

*(b) $t \mapsto \bigcup_{j\in J} S_j(t)$, se $J$ é contável;*

*(c) $t \mapsto \sum_{j\in J} \lambda_j\, S_j(t)$ para qualquer $\lambda_j \in \mathbb{R}$, se $J$ é finito; e no caso de $S_j : T \to \mathbb{R}^{n_j}$ (em vez de $S_j : T \to \mathbb{R}^n$) temos o produto de conjuntos (isto é, $t \mapsto \prod_{j\in J} \lambda_j\, S_j(t)$ é mensurável);*

*(d) $t \mapsto (S_1(t), ..., S_r(t))$ quando $J = \{1, ..., r\}$.*

*(Ver [32], p. 651, 652.)*

**Definição 21.9.** *Seja $T$ um qualquer conjunto mensurável não-vazio. Uma* **função** *$f : T \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diz-se* **caratheodory** *se $f(t,x)$ é mensurável em $t$ para cada $x$ e contínua em $x$ para cada $t$ (isto é :*

*(a) $f(\cdot, x)$ é mensurável para cada $x \in \mathbb{R}^n$;*

*(b) $f(t, \cdot)$ é contínua para cada $t \in T$).*

*(Ver [32], p. 662.)*

**Proposição 21.10.** *Na categoria dos integrandos normais estão todas as funções caratheodory.*

*(Ver [32], p. 662.)*

## 22. Análise não-suave

### 22.1. Definições e propriedades elementares

**Definição 22.1.** *Sejam $X$ um espaço de Banach, $|\cdot|$ a norma em $X$, $Y$ um subconjunto de $X$ e $B$ a bola aberta unitária. Uma função $f : Y \to \mathbb{R}$ diz-se* **localmente lipschitziana** *se, para algum $\varepsilon > 0$, para algum escalar não-negativo $k$, temos*

$$|f(y) - f(y')| \leq k\,|y - y'|,$$

*para quaisquer $y, y' \in x + \varepsilon B$.*

*(Ver [12], p. 25.)*

**Definição 22.2.** *Sejam $X$ um espaço de Banach e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função localmente lipschitziana no ponto $x \in X$, e $v \in X$ um vector qualquer. A* **derivada direccional generalizada** *de $f$ em $x$ na direcção $v$, denota-se por $f^\circ(x; v)$ e é definida como se segue :*

$$f^\circ(x; v) = \limsup_{\substack{y\to x \\ t\searrow 0}} \frac{f(y + t\,v) - f(y)}{t},$$

*onde $y$ é um ponto em $X$ e $t$ é um escalar positivo.*
*(Ver [12], p. 25.)*

**Definição 22.3.** *Sejam $X$ um espaço de Banach, $|\cdot|$ a norma em $X$ e $X^*$ o espaço dual de $X$. O* **gradiente generalizado** *de $f$ em $x$ denota-se por $\partial f(x)$ e é o subconjunto de $X^*$ dado por*

$$\partial f(x) = \{\xi \in X^* : f^\circ(x; v) \geq \langle \xi, v \rangle, \forall\, v \in X\}.$$

*(Ver [12], p. 27.)*

**Nota 22.4.** *Denotamos por $|X|_*$ a norma em $X^*$ e é definida como se segue :*

$$|\xi|_* = \sup_{v \in X,\, |v| \leq 1} \langle \xi, v \rangle, \forall\, \xi \in X^*.$$

*Além disso, $B_*$ denota a bola aberta unitária em $X^*$.*
*(Ver [12], p. 27.)*

**Proposição 22.5.** *Sejam $X$ um espaço de Banach e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função localmente lipschitziana no ponto $x \in X$ com constante de Lipschitz $k$. Então :*

*(a) $\partial f(x)$ é um subconjunto de $X^*$ não-vazio, convexo, fracamente*-compacto e $|\xi|_* \leq k$ para qualquer $\xi \in \partial f(x)$.*

*(b) Para qualquer $v \in X$, temos*

$$f^\circ(x; v) = \max_{\xi \in \partial f(x)} \langle \xi, v \rangle, \forall\, \xi \in X^*.$$

*(Ver [12], p. 27.)*

**Proposição 22.6.** *Sejam $X$ um espaço de Banach e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função localmente lipschitziana no ponto $x \in X$ com constante de Lipschitz $k$. Então :*

*(a) $\xi \in \partial f(x)$ se e só se $f^\circ(x; v) \geq \langle \xi, v \rangle$, $\forall\, v \in X$.*

*(b) Sejam $(x_i)$ e $(\xi_i)$ sucessões em $X$ e $X^*$ tais que $\xi_i \in \partial f(x_i)$. Suponhamos que $(x_i) \to x$, e que $\xi$ é um ponto de acumulação de $(\xi_i)$ na topologia fraca $*$. Então $\xi \in \partial f(x)$. (Isto é, a multifunção $\partial f$ é fechado na topologia fraca.)*

*(c)*

$$\partial f(x) = \bigcap_{\delta > 0} \bigcup_{y \in x + \delta B} \partial f(y).$$

*(d) Se $X$ tem dimensão finita, então $\partial f$ é scs em $x$.*
*(Ver [12], p. 29.)*

**Nota 22.7.** *$\partial f$ reduz-se à derivada de $f$, se $f$ é $C^1$.*
*(Ver [12], p. 30.)*

**Definição 22.8.** *Sejam $X$ e $Y$ espaços de Banach e $F : X \to Y$ uma função. Dizemos que $F$ admite* **derivada direccional em** *$x$ na direcção $v$ se*

$$F'(x; v) = \lim_{t \searrow 0} \frac{F(x + tv) - F(x)}{t},$$

*quando este limite existe.*
*(Ver [12], p. 30.)*

**Definição 22.9.** *Sejam $X$ e $Y$ espaços de Banach e $F : X \to Y$ uma função. Dizemos que $F$ admite* **derivada de Gâteaux em** $x$, *um elemento do espaço $\mathcal{L}(X,Y)$ dos funcionais lineares contínuos $DF(\cdot) : X \to Y$, sempre que existe $F'(x;v)$ (isto é a derivada direccional de $F$ em $x$ na direcção $v$) e verifica*

$$F'(x;v) = \langle DF(x), v\rangle .$$

*Notemos que isto é equivalente a termos :*

$$\lim_{\substack{x' \to x \\ t \searrow 0}} \frac{F(x'+tv) - F(x')}{t} = \langle D_s F(x), v\rangle, \ \forall\ v \in X.$$

*(Ver [12], p. 30.)*

**Definição 22.10.** *Sejam $X$ e $Y$ espaços de Banach e $F : X \to Y$ uma função. Dizemos que $F$ admite* **derivada estrita em** $x$, *um elemento do espaço $\mathcal{L}(X,Y)$ dos funcionais lineares contínuos $D_s F(\cdot) : X \to Y$, sempre que para qualquer $v \in X$ vale o seguinte :*

$$\lim_{\substack{x' \to x \\ t \searrow 0}} \frac{F(x'+tv) - F(x')}{t} = \langle D_s F(x), v\rangle .$$

*Esta convergência é uniforme para $v$ em conjuntos compactos. (Esta última condição é automática se $F$ é localmente lipschitziana em $x$.)*
*(Ver [12], p. 30.)*

**Corolário 22.11.** *Sejam $X$ e $Y$ espaços de Banach e $F$ uma função definida numa vizinhança de $x \in X$ com valores em $Y$. Se $F$ é continuamente diferenciável em $x$, então $F$ é estritamente diferenciável em $x$ e localmente lipschitziana em $x$.*
*(Ver [12], p. 32.)*

**Proposição 22.12.** *Sejam $X$ um espaço de Banach e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Se $f$ é estritamente diferenciável em $x$, então $f$ é localmente lipschitziana em $x$ e $\partial f(x) = \{D_s f(x)\}$. Reciprocamente, se $f$ é localmente lipschitziana em $x$ e $\partial f(x) = \{\xi\}$, então $f$ é estritamente diferenciável em $x$ e $D_s f(x) = \xi$.*
*(Ver [12], p. 33.)*

**Corolário 22.13.** *Sejam $X$ um espaço de Banach e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Se $f$ é localmente lipschitziana em $x$ e $X$ tem dimensão finita, então $\partial f(x')$ reduz-se a um conjunto com um único elemento para qualquer $x' \in x + \varepsilon B$ se e só se $f$ continuamente diferenciável em $x + \varepsilon B$.*

**Proposição 22.14.** *Sejam $X$ um espaço de Banach, $U \subset X$ um conjunto aberto convexo e $f : U \to \mathbb{R}$ uma função. Se $f$ é limitada superiormente nalgum ponto de $U$, então, para qualquer $x \in U$, $f$ é localmente lipschitziana em $x$.*
*(Ver [12], p. 34.)*

**Proposição 22.15.** *Sejam $X$ um espaço de Banach, $U \subset X$ um conjunto aberto convexo e $f : U \to \mathbb{R}$ uma função. Se $f$ é convexa em $U$ e localmente lipschitziana em $x$, então $\partial f(x)$ coincide com o subdiferencial em $x$ no sentido da análise convexa, e $f^\circ(x;v)$ coincide com a derivada direcional $f'(x;v)$ para cada $v \in X$.*
*(Ver [12], p. 36.)*

**Definição 22.16.** *Sejam $X$ um espaço de Banach e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que $f$ é* **regular** *se :*
*(a) para cada $v \in X$, a derivada direccional $f'(x;v)$ existe;*
*(b) para cada $v \in X$, $f'(x;v) = f^\circ(x;v)$.*
*(Ver [12], p. 39.)*

**Proposição 22.17.** *Sejam $X$ um espaço de Banach e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Se $f$ é lipschitziana numa vizinhança de $x$.*

*(a) Se $f$ é estritamente diferenciável em $x$, então $f$ é regular em $x$.*

*(b) Se $f$ é convexa, então $f$ é regular em $x$.*

*(c) Uma combinação linear finita (por escalares não-negativos) de funções regulares em $x$, é regular em $x$.*

*(Ver [12], p. 40.)*

**Proposição 22.18.** *Se $C$ é convexo, $N_C(x)$ coincide com o cone normal, no sentido da análise convexa.*

*(Ver [12], p. 52.)*

### 22.2. Cálculo básico

**Proposição 22.19.** *Sejam $X$ um espaço de Banach e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função localmente lipschitziana em $x \in X$. Então para qualquer escalar $s$, temos*

$$\partial (sf)(x) = s\, \partial f(x).$$

*(Ver [12], p. 38.)*

**Proposição 22.20.** *Sejam $X$ um espaço de Banach e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Se $f$ é localmente lipschitziana em $x$ e $f$ atinge um mínimo ou máximo local em $x$, então $0 \in \partial f(x)$.*

*(Ver [12], p. 38.)*

**Proposição 22.21.** *Sejam $X$ um espaço de Banach e $\{f_i\}_{i=1,\dots,n}$ uma família finita de funções $f_i : X \to \mathbb{R}$ localmente lipschitzianas em $x \in X$. Então*

$$\partial \left( \sum_{i=1}^{n} f_i \right)(x) \subset \sum_{i=1}^{n} \partial f_i(x).$$

*(Ver [12], p. 38.)*

**Corolário 22.22.** *Sejam $X$ um espaço de Banach e $\{f_i\}_{i=1,\dots,n}$ uma família finita de funções $f_i : X \to \mathbb{R}$ localmente lipschitzianas em $x \in X$. Então para quaisquer escalares $s_i$, temos*

$$\partial \left( \sum_{i=1}^{n} s_i f_i \right)(x) \subset \sum_{i=1}^{n} s_i\, \partial f_i(x),$$

*e a igualdade acontece se todas as funções, excepto uma no máximo, são estritamente diferenciáveis em $x$.*

*(Ver [12], p. 39.)*

**Teorema 22.23.** *Sejam $X$ e $Y$ espaços de Banach, $F : X \to Y$ uma função e $g : Y \to \mathbb{R}$ uma função. Suponhamos que $F$ é estritamente diferenciável em $x$ e que $g$ é localmente lipschitziana em $F(x)$. Então $f = g \circ F$ é localmente lipschitziana em $x$, e temos*

$$\partial f(x) \subset \partial g(F(x)) \circ D_s F(x).$$

*A igualdade é válida se $g$ (ou $-g$) é regular em $F(x)$, e neste caso $f$ (ou $-f$) é também regular em $x$. A igualdade também é válida se a cada vizinhança de $x$, $F$ faz corresponder um conjunto denso numa vizinhança de $F(x)$ (por exemplo, se $D_s F(x)$ é sobrejectiva).*

*(Ver [12], p. 45.)*

**Proposição 22.24.** *Sejam $X$ um espaço de Banach e $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ duas funções. Se $f_1$ e $f_2$ são localmente lipschitzianas em $x$, então, $f_1 f_2$ é localmente lipschitziana em $x$, e temos*

$$\partial (f_1 f_2)(x) \subset f_2(x)\ \partial f_1(x) + f_1(x)\ \partial f_2(x).$$

*Se além disso, $f_1(x) \geq 0$, $f_2(x) \geq 0$ e se $f_1, f_2$ são ambas regulares em $x$, então a igualdade é válida e $f_1 f_2$ é regular em $x$.*

*(Ver [12], p. 48.)*

**Nota 22.25.** *Definimos $\partial f(x)$ mesmo para funções $f : X \to [-\infty, +\infty]$ desde que $f$ seja finita em $x$. Para isso, basta que $f$ seja localmente lipschitziana em $x$.*
*(Ver [12], p. 61.)*

## 23. Análise proximal

**Definição 23.1.** *Sejam $X$ um espaço de Hilbert, $C$ um subconjunto não-vazio de $X$ e $|\cdot|$ a norma em $X$. A* ***função distância*** *associada a $C$, $d_C : C \to \mathbb{R}$ é definida por*

$$d_C(x) := \inf\{|x - c| : c \in C\}.$$

*(Ver [27], p. 65.)*

**Definição 23.2.** *Se $c \in C$ é tal que $|x - c| = d_C(x)$, então o vector $x - c$ diz-se* ***perpendicular*** *ao conjunto $C$ no ponto $c$, e $c$ diz-se uma projecção de $x$ em $C$.*
*(Ver [11], p. 3.)*

**Definição 23.3.** *Sejam $X$ um espaço de Hilbert, $C$ um subconjunto não-vazio de $X$ e $|\cdot|$ a norma em $X$. A* ***projecção métrica*** *em $C$ é a multifunção, $\Pi_C : C \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\Pi_C(x) := \{c \in C : |x - c| = d_C(x)\}.$$

*(Ver [27], p. 65.)*

**Lema 23.4.** *Sejam $X$ um espaço de Hilbert, $C$ um subconjunto fechado não-vazio de $X$, $|\cdot|$ a norma em $X$ e $x \notin C$, então as seguintes afirmações acerca de um ponto $c \in C$ são equivalentes :*
*(a) $c \in \Pi_C(x)$, isto é, $c$ é uma projecção de $x$ em $C$;*
*(b) $\langle x - c, c' - c\rangle \leq \frac{1}{2}|c' - c|^2$, $\forall\, c' \in C$, isto é, $\xi = x - c$ é quase um vector normal dirigido para fora (funcional de suporte) do conjunto $C$ no ponto $c$;*
*(c) $c \in \Pi_C(c + t(x - c))$, $\forall\, t \in [0, 1]$.*
*(Ver [27], p. 66.)*

Para visualizar o lema 23.4 pensemos numa bola fechada centrada em $x$ e com raio $d_C(x) = |x - c|$. As afirmações (a) e (b) expressam o facto de que o interior desta bola não contém pontos de $C$. A afirmação (c) diz-nos que se movermos o centro da bola ao longo da linha recta de $x$ a $c$, e diminuirmos o seu raio apropriadamente, esta propriedade continua válida. Quando o conjunto $C$ é convexo, é também possível mover o centro da bola para fora de $C$ ao longo da linha recta que liga $c$ a $x$ sem modificarmos a situação. Isto permite-nos simplificar a desigualdade em (b). E temos o seguinte corolário :

**Corolário 23.5.** *Sejam $X$ um espaço de Hilbert, $C$ um subconjunto convexo, fechado, não-vazio de $X$, então para qualquer $x \notin C$,*

$$c \in \Pi_C(x) \Leftrightarrow \langle x - c, c' - c\rangle \leq 0,\ \forall\, c' \in C.$$

*(Ver [27], p. 66.)*

**Teorema 23.6.** *Sejam $X$ um espaço de Hilbert, $C$ um subconjunto fechado não-vazio de $X$. Então :*
*(a) o conjunto $\{x \in X : \Pi_C(x) \neq \varnothing\}$ é denso em $X$;*
*(b) o conjunto $\Pi_C(X \backslash C) = \bigcup_{x \in (X \backslash C)} \Pi_C(x)$ é um subconjunto denso da fronteira de $C$.*
*(Ver [27], p. 66.)*

**Corolário 23.7.** *Seja $X$ um espaço de Hilbert. Para qualquer subconjunto convexo, fechado, não-vazio de $X$, o conjunto dos pontos de suporte é denso na fronteira de $C$.*
*(Ver [27], p. 67.)*

**Definição 23.8.** *Sejam $X$ um espaço de Hilbert, $C$ um subconjunto fechado de $X$, com $\overline{c} \in C$. Um vector $\xi \in X$ diz-se uma* **normal proximal** *a $C$ em $\overline{c}$ se existe uma constante $M > 0$ tal que*

$$\langle \xi, c - \overline{c} \rangle \leq M \left| c - \overline{c} \right|^2, \forall\ c \in C. \tag{23.1}$$

*O conjunto de tais vectores $\xi$ diz-se o* **cone normal proximal** *e denota-se por $N_C^{\pi}(\overline{c})$.*
*(Ver [27], p. 74.)*

**Definição 23.9.** *Sejam $X$ um espaço de Hilbert, $f : X \to (-\infty, +\infty]$ uma função sci e $\overline{x} \in dom\ f$. Um vector $\xi \in X$ diz-se um* **subgradiente proximal** *de $f$ em $\overline{x}$ se*

$$(\xi, -1) \in N_{epi\ f}^{\pi}(\overline{x}, f(\overline{x})). \tag{23.2}$$

*O conjunto de tais vectores $\xi$ diz-se o* **subdiferencial proximal** *de $f$ em $\overline{x}$ e denota-se por $\partial^{\pi} f(\overline{x})$.*
*(Ver [27], p. 75.)*

**Nota 23.10.** *(a) A desigualdade (23.1) pode ser reescrita como*

$$\left\langle \frac{1}{2M}\xi, c - \overline{c} \right\rangle \leq \frac{1}{2} \left| c - \overline{c} \right|^2, \forall\ c \in C,$$

*o que é equivalente à afirmação*

$$\overline{c} \in \Pi_C \left( \overline{c} + \frac{1}{2M}\xi \right),$$

*pelo lema 23.4. Por outras palavras, afirmar que $\xi$ é uma normal proximal a $C$ em $\overline{c}$ é simplesmente estabelecer que $\overline{c}$ é o ponto mais próximo em $C$ de algum ponto da forma $c + t\xi$ , $t > 0$. Em particular,*

$$N_C^{\pi}(\overline{c}) \neq \{0\} \Leftrightarrow \overline{c} \in \Pi_C(X \backslash C).$$

*(b) Quando $C$ é um conjunto convexo, o corolário 23.5 dá-nos*

$$\xi \in N_C^{\pi}(\overline{c}) \Leftrightarrow \langle \xi, c - \overline{c} \rangle \leq 0, \forall\ c \in C.$$

*Isto ajuda-nos a compreender a definição de subgradiente proximal : se $f : X \to (-\infty, +\infty]$ é sci, convexa, então :*

$$\begin{aligned}
\xi \in \partial^{\pi} f(\overline{x}) \quad &\Leftrightarrow \quad (\xi, -1) \in N_{epi\ f}^{\pi}(\overline{x}, f(\overline{x})) \\
&\Leftrightarrow \quad \langle (\xi, -1), (x, r) - (\overline{x}, f(\overline{x})) \rangle \leq 0, \forall\ (x, r) \in epi\ f \\
&\Leftrightarrow \quad \langle \xi, x - \overline{x} \rangle \leq r - f(\overline{x}), \forall\ (x, r) \in epi\ f \\
&\Leftrightarrow \quad \langle \xi, x - \overline{x} \rangle \leq f(x) - f(\overline{x}), \forall\ x \in X.
\end{aligned}$$

*Ou seja, $\xi$ é um subgradiente de $f$ em $\overline{x}$ no sentido da análise convexa.*

*(c) No caso geral, onde a convexidade não nos pode ajudar, a afirmação $\xi \in \partial^{\pi} f(\overline{x})$ é equivalente, através de (23.1) e (23.2), à existência de uma constante $M > 0$ tal que*

$$\langle \xi, x - \overline{x} \rangle \leq r - f(\overline{x}) + M \left[ \left| x - \overline{x} \right|^2 + (r - f(\overline{x})) \right], \forall\ (x, r) \in epi\ f.$$

*(Ver [27], p. 75.)*

**Proposição 23.11 (Desigualdade do subgradiente proximal).** *Sejam $X$ um espaço de Hilbert, $f : X \to (-\infty, +\infty]$ uma função sci e $\overline{x} \in dom\ f$. Então $\xi \in \partial^{\pi} f(\overline{x})$ se e só se existem $R > 0$ e $\delta > 0$ tais que*

$$\langle \xi, x - \overline{x} \rangle \leq f(x) - f(\overline{x}) + R\,|x - \overline{x}|^2,\ \forall\ x \in \overline{x} + \delta B.$$

*(Ver [27], p. 75.)*

**Corolário 23.12.** *Sejam $X$ um espaço de Hilbert, $f, g : X \to (-\infty, +\infty]$ funções sci e finitas em $\overline{x}$. Então*

$$\partial^{\pi} f(\overline{x}) + \partial^{\pi} g(\overline{x}) \subseteq \partial^{\pi} (f + g)(\overline{x}).$$

*(Ver [27], p. 76.)*

**Corolário 23.13.** *Sejam $X$ um espaço de Hilbert, $f : X \to (-\infty, +\infty]$ uma função sci e Gâteaux diferenciável em $\overline{x}$. Então*

$$\partial^{\pi} f(\overline{x}) \subseteq \{\nabla f(\overline{x})\}.$$

*(Ver [27], p. 76.)*

**Proposição 23.14.** *Sejam $f$ e $g$ funções sci finitas em $x^*$ com valores em $\overline{\mathbb{R}}$, e seja $\xi \in \partial^{\pi}(f + g)(x^*)$. Então, para qualquer $\varepsilon > 0$, existem $y^*$, $z^* \in x^* + \varepsilon B$, tais que $f(y^*) \in f(x^*) + \varepsilon B$, $g(z^*) \in g(x^*) + \varepsilon B$, e tais que $\xi \in \partial^{\pi} f(y^*) + \partial^{\pi} g(z^*) + \varepsilon B$.*

*(Ver [11], p. 12.)*

## 24. Outros resultados

**Lema 24.1.** *Sejam $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ uma função convexa, sci, $w \in int(dom\ f)$, $w \neq 0$. Seja ainda $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que*

$$\theta(|z|) \leq f(z),\ \forall\ z \in \mathbb{R}^n.$$

*Então, para quaisquer $\varepsilon \in (0, |w|)$ e $p \in \partial f(w)$ temos*

$$\langle p, w \rangle - f(w) \geq \frac{\varepsilon}{|w| - \varepsilon}\theta(|w|) - f\left(\frac{\varepsilon w}{|w|}\right)\frac{|w|}{|w| - \varepsilon}.$$

*(Ver [1], p. 312.)*

# Capítulo IV
# Bibliografia


[1] L. AMBROSIO, O. ASCENZI, G. BUTTAZZO, *Lipschitz regularity for minimizers of integral functionals with highly discontinuous integrands*, J. Math. Anal. Appl., **142** (1989), 301-316.

[2] R. ADAMS, *Sobolev spaces*, Academic press, New York, 1975.

[3] V. ALEXÉEV, V. TIKHOMIROV, S. FOMINE, *Commande optimale*, Mir, Moscou, 1982.

[4] K. ALOIS, J. OLDRICH, F. SVATOPLUK, *Functions Spaces*, Academia-Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1977.

[5] J-P. AUBIN, H. FRANKOWSKA, *Set-Valued Analysis*, Birkhäuser, Boston, 1990.

[6] H. BRÉZIS, *Análisis funcional - teoría y aplicaciones*, Alianza Editorial, Madrid, 1984.

[7] G. BUTTAZZO, M. GIAQUINTA, S. HILDEBRANDT, *One-dimensional variational problems - an introduction*, Oxford Science Publications, Oxford, 1998.

[8] J. CAMPOS FERREIRA, *Introdução à análise matemática*, $6^a$ edição, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1995.

[9] L. CESARI, *Optimization - theory and applications: problems with ordinary differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[10] F. H. CLARKE, *An indirect method in the calculus of variations*, Trans. Amer. Math. Soc. **336** (1993), 655-673.

[11] F. CLARKE, *Methods of dinamic and smooth optimization*, CBMS-NSF Regional Conf.Ser.in Appl. Math., vol. 57, SIAM, Phiadelphia, 1989.

[12] F. CLARKE, *Optimization and nonsmooth analysis*, Wiley-Interscience, New York, 1983.

[13] F. H. CLARKE, Yu. S. LEDYAEV, R. J. STERN, P. R. WOLENSKI, *Nonsmooth analysis and control theory*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[14] F. H. CLARKE, R. B. VINTER, *Regularity properties of solutions to the basic problem in the calculus of variations*, Trans. Amer. Math. Soc. **289** (1985), 73-98.

[15] G. CHOQUET, *Topology*, Academic Press, New York, 1966.

[16] D. L. COHN, *Measure theory*, Birkhäuser, Boston, 1980.

[17] B. DACOROGNA, *Direct methods in the calculus of variations*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[18] G. DAL MASO, *An introduction to* $\Gamma$*-convergence*, Birkhäuser, Boston, 1993.

[19] C. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Sur l'integrale de Lebesgue*, Trans. Americ. Math Soc., **16** (1915), 435-501.

[20] N. DUNFORD, J. T. SCHWARTZ, *Linear operators*, part I: general theory, Interscience Publishers, inc., New York, 1976.

[21] I. EKELAND, R. TEMAN, *Convex analysis and variational problems*, North Holland, Amsterdam, 1976.

[22] M. GUZMAN, *Ecuaciones diferenciales ordinárias - teoría de estabilidad y control*, Alhambra, Madrid, 1975.

[23] J.-B. HIRIART-URRUTY, C. LEMARÉCHAL, *Convex analysis and minimization algorithms I*, Springer--Verlag, Berlin, 1993.

[24] A. N. KOLMOGOROV, S. FOMIN, *Elementos da teoria das funções e de análise funcional*, Editora Mir, Moscou, 1982.

[25] E. L. LIMA, *Curso de análise*, vol.1, Impa, Brasília, 1995.

[26] E. L. LIMA, *Curso de análise*, vol.2, Impa, Brasília, 1995.

[27] P. LOEWEN, *Optimal control via nonsmooth analysis*, CRM Proceedings & Lecture Notes, **2**, Amer. Math. Soc., 1993.

[28] A. ORNELAS, *Bi-monotonicity for scalar minimizers of autonomous simple integrals*, preprint.

[29] A. ROBERTS, D. VARBERG, *Another proof that convex functions are locally Lipschitz*, Amer. Math. Mon., **81** (1974), 1014-1016.

[30] R. T. ROCKAFELLAR, *Convex analysis*, Princeton University Press, New York, 1970.

[31] R. T. ROCKAFELLAR, *Integral functionals, normal integrands and measurable selections*, in Nonlinear operators and the calculus of variations, Lectures notes in mathematics, vol. **543** (1976), 157-207.

[32] R. ROCKAFELLAR, R. WETS, *Variational analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[33] W. RUDIN, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1987.

[34] J. SERRIN, D. VARBERG, *A general chain rule for derivatives and the change of variables formula for the Lebesgue integral,* Amer. Math. Mon., **76** (1969), 514-520.

[35] J. YEH, *Lectures on real analysis*, World Scientific, Singapore, 2000.