UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Mestrado em Matemática Aplicada

Biénio 2001–2003

Princípios Variacionais Não Locais

Telma Margarida Cotovio Guerra

Orientado por:

Pablo Pedregal Tercero

Esta dissertação não inclui as críticas e sugestões feitas pelo júri

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Mestrado em Matemática Aplicada

Biénio 2001–2003

Princípios Variacionais Não Locais

Telma Margarida Cotovio Guerra

Orientado por:
Pablo Pedregal Tercero

Esta dissertação não inclui as críticas e sugestões feitas pelo júri

Índice

Agradecimentos

A realização deste trabalho só foi possivel graças à colaboração de várias pessoas, às quais deixo os meus sinceros agradecimentos.

Em primeiro lugar, agradeço ao Professor Pablo Pedregal Tercero, por ter aceite orientar este trabalho, pelo precioso tempo que pode dispender em sugestões e criticas formuladas durante a realização e por todo o apoio e bibliografia concedidos.

Ao Professor António Ornelas agradeço o facto de ter dado boas referências da minha parte ao Professor Pablo Pedregal, sem as quais teria sido muito dificil ter a oportunidade de trabalhar com ele. Agradeço também todas as sugestões e criticas e todo o tempo dedicado à correcção ortográfica deste trabalho.

À Dra. e amiga Patricia Ribeiro, queria agradecer e dar especial destaque pelo facto de me ter facultado o software com que redigi este trabalho e me ter esclarecido todas as dúvidas com que me deparei ao longo da sua utilização, além de todo o apoio moral com que sempre pude contar.

Não queria também deixar passar em branco os nomes dos Mestres e amigos Cristina Almeida, Paula Pereira e Jorge Tiago e das Dras. e amigas Teresa Ribeiro, Isabel Oliveira, por todo o apoio e motivação dados nas alturas mais dificeis.

Aos meus pais e irmã, por todo o apoio moral e compreensão cedidos desde sempre e ao meu namorado que esteve sempre a meu lado na resolução de problemas relacionados com a informática e também por todo o apoio e compreensão.

A todas as pessoas que directa ou indirectamente contribuiram para a elaboração deste trabalho e que injustamente não foram mencionadas, queria manifestar a minha gratidão.

Abstract

Nonlocal variational principles

Our purpose is the mathematical analysis of some nonlocal variational problems. There are many ways to express the nonlocality. Here we are concerned with a type of nonlocality, that can be expressed in general as a double integral. The functional we give especial attencion to is the homogeneous, one-dimensional case, and the main goal is to understand how the nonlocal nature of this kind of problems can affect the basic questions of the calculus of variations like weak lower semicontinuity and relaxation.

All of that work is done with the support of Young measures associated to weakly convergent gradient sequences. Jensen's inequality also have an important role in the paper. Weak lower semicontinuity is obtained by Jensen´s inequality for the appropriate family of Young measures.

We also explore inhomogeneous functionals and the form of the equilibrium equations, and finally we state some direct generalizations of those concepts for nonlocal vector problems.

Key Words and phrases: nonlocality, weak lower semicontinuity for nonlocal fuctionals, relaxation for nonlocal fuctionals, Young measures.

Resumo

O objectivo deste trabalho é a análise matemática de alguns princípios variacionais não locais. Esta propriedade pode expressar-se de diferentes maneiras. Aqui esudamos um tipo de não localidade que pode ser expressa como um integral duplo, em particular, damos especial atenção ao caso um-dimensional, ou seja, o caso homogéneo. O principal objectivo é perceber de que forma a natureza não local destes problemas pode afectar questões básicas do cálculo das variações como a semicontinuidade inferior fraca e a relaxação.

Todo este estudo tem como base as medidas de Young associadas a sucessões de derivadas fracamente convergentes. Também a desigualdade de Jensen tem aqui um papel relevante, dado que podemos obter a semicontinuidade inferior fraca via desigualdade de Jensen para uma apropriada familia de medidas de Young.

Exploramos ainda os funcionais não-homogéneos e a forma das equações de equilíbrio e finalmente generalizamos todos estes resultados ao caso vectorial.

Introdução

Esta tese baseia-se no estudo do artigo *NonLocal Variational Principles, Non Linear Analysis, Theory, Methods and Applications*, Vol. 29, N°12, pág.1379-1392, 1997, escrito pelo Professor Pablo Pedregal Tercero, da Universidade de Castilla - La Mancha, Ciudad Real, Espanha. O objectivo deste estudo é a análise matemática de alguns príncipios variacionais não locais.

A não localidade pode expressar-se de diversas maneiras. Por exemplo, os problemas de controlo óptimo são problemas não locais, definidos através de um integral sobre Ω, que depende de y, a variável de estado, e de u, o controlo. Neste caso temos o funcional de custo

$$\Psi(y,u) = \int_\Omega L(x,y(x),u(x))\,dx$$

para ser minimizado. Dado u, é possivel determinar y através da equação de estado, que é uma equação diferencial, cuja estrutura depende apenas do controlo. Assim, o funcional de custo depende apenas de u, de forma não local, através da equação de estado. No entanto, na maior parte dos casos é muito dificil ou até mesmo impossível escrever explicitamente esta dependência não local de u. Ocasionalmente, a estrutura da equação diferencial poderá permitir-nos escrever a solução do problema, y, em termos da função de Green para a equação, o que nos daria contudo, um integral singular em muitos casos. No entanto, o segundo argumento de L é uma função não local da variável de controlo u.

Neste trabalho, consideramos um tipo diferente de não-localidade, que pode ser escrita, em geral, como o integral duplo

$$I(u) = \int_{\Omega\times\Omega} W(x_1, x_2, u(x_1), u(x_2), \nabla u(x_1), \nabla u(x_2))\, dx_1 dx_2 \tag{0.1}$$

onde Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$, suave e regular, $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$ pertence a um espaço de Sobolev apropriado, e supomos que a densidade de energia

$$W : \Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{M}^{m\times N} \times \mathbb{M}^{m\times N} \to \mathbb{R}$$

é contínua nas variáveis u e ∇u, e mensurável em x_1 e x_2.

A interacção não local deste tipo de energias tem sido usada para explicar trocas de energia em modelos de ferromagnetismo, como se pode ver em [5],[6],[19] e [20]. Funcionais não locais de energia do tipo (0.1) servem para modelar interacções de longo alcance de energias não lineares.

Neste artigo trabalha-se essencialmente com medidas de Young, e a não localidade dos princípios variacionais expressa-se exactamente pela interacção entre estas medidas.

O principal objectivo deste trabalho é perceber de que forma os problemas variacionais de natureza não local como (0.1) podem interferir em questões básicas do cálculo das variações, como a semicontinuidade inferior fraca e a relaxação. Em particular, o funcional que aqui se estuda e a que daremos especial atenção é o funcional homogéneo

$$I(u) = \int_{\Omega\times\Omega} W(u'(x_1), u'(x_2))\, dx_1 dx_2 \tag{0.2}$$

onde Ω é um intervalo aberto da recta real, $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $u - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ para algum u_0 fixado verificando $I(u_0) < \infty$. Consideraremos ainda W uma função contínua e limitada inferiormente. O problema central e de maior relevo deste trabalho será o estudo da semicontinuidade inferior fraca para este tipo de funcionais.

Uma das noções a salientar, e cujo papel é muito importante nesta matéria, é a noção de convergência fraca. Esta goza das mesmas propriedades de compacidade que os espaços de dimensão finita: basicamente as sucessões limitadas formam conjuntos fracamente relativamente compactos. No entanto, no que respeita aos funcionais não lineares, a convergência fraca não se comporta da forma como gostariamos. As medidas de Young constituem aqui um instrumento muito importante para a compreensão da convergência fraca e do seu comportamento relativamente aos funcionais não lineares. Sob hipóteses convenientes, as medidas de Young fornecem-nos uma forma de representar, através de integrais, limites fracos de composições com funções não lineares. Este feito é particularmente importante na compreensão do fenómeno oscilatório e de como as oscilações variam quando um funcional não linear é aplicado.

Também no método directo do cálculo das variações a convergência fraca assume um papel de relevo, uma vez mais por as sucessões uniformemente limitadas nos permitirem extrair subsucessões fracamente convergentes. Com o objectivo de mostrar a existência de minimizantes para um dado funcional, um dos requisitos a cumprir é a propriedade da semicontinuidade inferior fraca. Este é o ponto crucial e mais delicado de conseguir no método directo do cálculo das variações. Muito trabalho foi feito no sentido de determinar sob que condições podemos ter a semicontinuidade inferior fraca, com respeito às topologias fracas, para funcionais não lineares na forma de integrais. A conclusão a que se chegou é que existe sempre algum tipo de convexidade envolvida nestas situações. Outra questão fundamental é como se lida com funcionais que não são fracamente semicontínuos inferiormente. Nalguns casos, podem existir minimizantes, mas em muitos outros, a falta de convexidade conduz-nos a sucessões minimizantes oscilantes cujos limites fracos não são minimizantes. Foi neste contexto, de problemas variacionais, ditos irregulares, que surgiram as medidas de Young, para tentar perceber e prever a natureza altamente oscilatória das sucessões minimizantes.

Um dos nossos objectivos será salientar o papel das medidas de Young na compreensão da semicontinuidade inferior fraca, em problemas variacionais não locais do tipo (0.2), dado que estas são usadas para representar limites fracos de funcionais não lineares. Por outro lado, tentar perceber de que forma é a relaxação afectada, uma vez que não é possivel proceder como no caso local, isto é, não podemos substituir a densidade pelo seu invólucro convexo. A única forma de descrever a relaxação nestes casos é também através das medidas de Young. É por tudo isto que se torna tão importante descrevê-las.

Em primeiro lugar, no capítulo 1, faremos então uma introdução às medidas de Young, destacando (1.2), a sua propriedade fundamental. Apresentaremos em seguida alguns resultados importantes, um dos quais o teorema 1.1, que é uma versão do teorema de existência para medidas de Young, sendo também um teorema de representação de limites fracos.

Posteriormente é feita uma caracterização das medidas de Young associadas a sucessões fracamente convergentes da forma $f_j(x_1, x_2) = (u_j'(x_1), u_j'(x_2))$, onde $\{u_j\}$ é uniformemente limitada em $W^{1,p}(\Omega)$, que aplicaremos depois à semicontinuidade inferior fraca. Finalmente apresentaremos alguns resultados gerais acerca das medidas de Young.

No capítulo 2, que é o mais importante, estuda-se a semicontinuidade inferior fraca para funcionais do tipo (0.2), e a relaxação, no caso 1-dimensional. Apresentaremos um resultado, a proposição 2.1, onde se estabelece uma relação entre a desigualdade de Jensen e a semicontinuidade inferior fraca, dada uma familia apropriada de medidas de Young. O principal resultado deste capítulo e de todo o artigo, é o seguinte:

Teorema 0.1. *Seja W uma função contínua e limitada inferiormente. Uma condição necessária e suficiente para que o funcional I seja fracamente semicontínuo inferiormente é*

$$\sum_{i,j=1}^{2n} W(\lambda_i, \lambda_j) \geq 4 \sum_{i,j=1}^{n} W\left(\frac{\lambda_{2i-1} + \lambda_{2i}}{2}, \frac{\lambda_{2j-1} + \lambda_{2j}}{2}\right), \tag{0.3}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, e cada escolha $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{2n} \in \mathbb{R}$.

Este teorema foi obtido com o objectivo de simplificar a desigualdade de Jensen, que nos estabelece uma condição necessária e suficiente para a semicontinuidade inferior fraca. A condição acima apresentada é uma condição de convexidade. Note-se que a convexidade separada de W é uma condição suficiente para as desigualdades (0.3). Este é um resultado que apresentaremos também no capítulo 2. Uma questão que nos podemos pôr é se a convexidade separada será também necessária para as desigualdades (0.3). Esta é uma questão que não é trivial, e que continua ainda por responder. Neste teorema supomos que os valores ν_x são medidas de Young diferentes em subconjuntos disjuntos de Ω. Geometricamente, as desigualdades (0.3) estabelecem-nos que o valor que W toma no ponto $\left(\frac{\lambda_{2i-1}+\lambda_{2i}}{2}, \frac{\lambda_{2j-1}+\lambda_{2j}}{2}\right)$ multiplicado por 4 é inferior ou igual à soma dos valores que W toma nos pontos (λ_i, λ_j), para $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{2n} \in \mathbb{R}$, com $n \in \mathbb{N}$. Analisemos geometricamente, com mais pormenor os casos $n = 1$, $n = 2$ e o caso $n = 1$ após $n = 2$.

- $n = 1$

$$4W\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}, \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right) \leq W(\lambda_1,\lambda_1) + W(\lambda_1,\lambda_2) + W(\lambda_2,\lambda_1) + W(\lambda_2,\lambda_2)$$

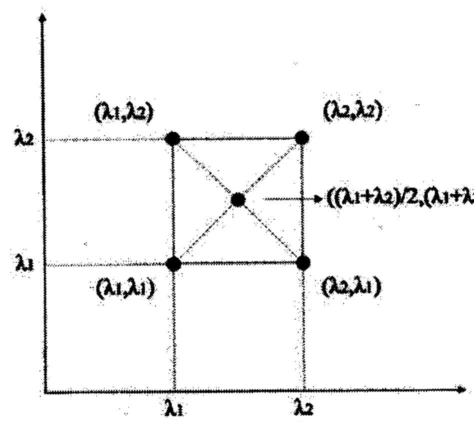

Figura 1: caso $n = 1$.

- $n = 2$

$$
\begin{aligned}
&W(\lambda_1,\lambda_1)+W(\lambda_1,\lambda_2)+W(\lambda_1,\lambda_3)+W(\lambda_1,\lambda_4)\\
&+W(\lambda_2,\lambda_1)+W(\lambda_2,\lambda_2)+W(\lambda_2,\lambda_3)+W(\lambda_2,\lambda_4)\\
&+W(\lambda_3,\lambda_1)+W(\lambda_3,\lambda_2)+W(\lambda_3,\lambda_3)+W(\lambda_3,\lambda_4)\\
&+W(\lambda_4,\lambda_1)+W(\lambda_4,\lambda_2)+W(\lambda_4,\lambda_3)+W(\lambda_4,\lambda_4)\\
&\geq 4\,[W\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2},\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right)+W\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2},\frac{\lambda_3+\lambda_4}{2}\right)\\
&+W\left(\frac{\lambda_3+\lambda_4}{2},\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right)+W\left(\frac{\lambda_3+\lambda_4}{2},\frac{\lambda_3+\lambda_4}{2}\right)].
\end{aligned}
$$

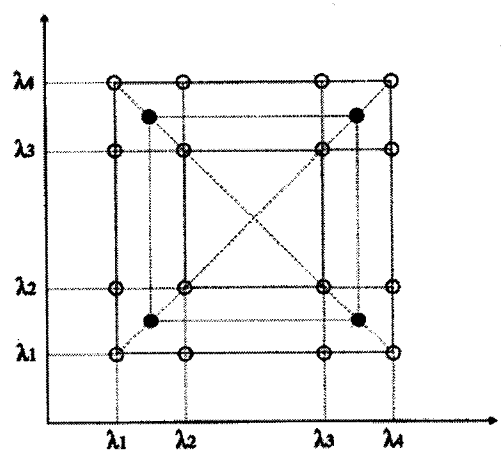

Figura 2: caso $n = 2$.

- $n = 1$ após $n = 2$

$$
\begin{aligned}
& W(\lambda_1, \lambda_1) + W(\lambda_1, \lambda_2) + W(\lambda_1, \lambda_3) + W(\lambda_1, \lambda_4) \\
& + W(\lambda_2, \lambda_1) + W(\lambda_2, \lambda_2) + W(\lambda_2, \lambda_3) + W(\lambda_2, \lambda_4) \\
& + W(\lambda_3, \lambda_1) + W(\lambda_3, \lambda_2) + W(\lambda_3, \lambda_3) + W(\lambda_3, \lambda_4) \\
& + W(\lambda_4, \lambda_1) + W(\lambda_4, \lambda_2) + W(\lambda_4, \lambda_3) + W(\lambda_4, \lambda_4) \\
& \geq 16\, W\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4}{4}, \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4}{4}\right).
\end{aligned}
$$

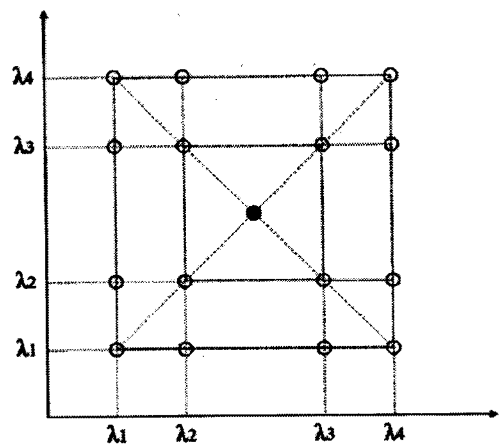

Figura 3: caso $n = 1$ após $n = 2$.

A família de desigualdades obtida desta forma, é de natureza não local, note-se que cada ponto (λ_i, λ_j) não pode ser separado de (λ_j, λ_i), (λ_i, λ_i), (λ_j, λ_j). Cada um deles tem que ser considerado juntamente com os outros três. É esta particularidade da não localidade que torna impossível definir um invólucro convexo apropriado, quando tentamos descrever a relaxação. Quando falha a convexidade do integrando, deparamo-nos com algumas dificuldades. Nalguns problemas podem existir minimizantes, mas noutros, a falta de convexidade conduz-nos a sucessões minimizantes de carácter altamente oscilatório cujos limites fracos não são minimizantes. Quando isto acontece, a ideia é convexificar o integrando, isto é, em vez de considerarmos um integrando não convexo e que nos possa trazer problemas, consideramos antes o seu invólucro convexo e passamos a ter um novo problema, associado ao primeiro, a que chamamos problema relaxado associado. Este novo problema goza de duas propriedades fundamentais, o ínfimo não é alterado em relação ao primeiro e existe minimizante para o novo princípio variacional. No entanto, no caso não local não existe uma forma de definir um invólucro convexo apropriado devido à interacção entre as variáveis, e portanto um novo princípio variacional que goze destas duas propriedades. A única maneira possível de descrever a relaxação nestes casos é através das medidas de Young e de um funcional generalizado definido nessas medidas, ou seja permitir que as medidas de Young possam competir no processo de minimização. Este estudo será então feito no final deste capítulo.

Ainda no capítulo 2, faremos um breve estudo, no caso de um funcional não-homogéneo, e veremos que a condição de convexidade para a semicontinuidade inferior fraca, não é simplesmente a condição de convexidade homogénea para quase todo o par $(x_1, x_2) \in \Omega \times \Omega$, devido à interacção existente entre a não-homogeneidade da densidade de energia e a sua natureza não local. Exploraremos também a forma das equações de equilíbrio deste tipo de princípios variacionais, passando primeiro pelo caso homogéneo.

No capítulo 3 faremos uma breve passagem pelo caso vectorial. Breve porque, depois de entendidas as dificuldades da natureza não local dos funcionais, o caso vectorial não nos adianta nada de novo.

Para ilustrar a importância do teorema 0.1, assim como a sua aplicação prática, faremos, no capítulo 4, o estudo de alguns exemplos práticos e específicos que consideramos importantes. Consideremos, por exemplo, o seguinte problema genérico:

$$(P) \quad \inf \left\{ I(u) = \int_{\Omega\times\Omega} w(u'(x_1) - u'(x_2))\, dx_1 dx_2 : u \in W^{1,p}(\Omega)\,, u - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega) \right\}$$

onde Ω é um intervalo aberto na recta real e w é uma função convexa e par. Provamos no capítulo 4, que nestas condições, $W(\lambda_1, \lambda_2) = w(\lambda_1 - \lambda_2)$ verifica as desigualdades (0.3). Se se verificar uma condição de coercividade apropriada, prova-se usando o teorema 2.4, apresentado e demonstrado no capítulo 2, que existe minimizante para o problema (P).

Um outro exemplo, que é também bastante motivante, é o caso de um integral, cujo integrando é o produto (ou quociente) de funções de uma variável só. Consideremos o caso particular

$$W(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^2(1 + x_2)\lambda_2^2.$$

É interessante notar que o problema variacional associado,

$$\inf\left\{ I(u) = \int_0^1 \int_0^1 u'(x_1)^2(1 + x_2)u'(x_2)^2\, dx_1 dx_2,\ u(0) = 0,\ u(1) = 1 \right\},$$

é um problema de natureza não local e corresponde a minimizar um produto de integrais. A questão que nos colocamos é a seguinte: será que existe minimizante para o integral I? Para responder a esta questão recorremos ao teorema 2.5, análogo ao teorema 2.4, cujos pontos fundamentais a verificar são a coercividade e a semicontinuidade inferior fraca. Para verificarmos esta última basta, como já vimos, que se verifiquem as desigualdades (0.3) para este caso particular ou então a propriedade da convexidade separada para W (lembramos que a convexidade separada é condição suficiente para as desigualdades (0.3)). Este problema não é de modo algum um problema trivial. Veremos, no capítulo 4, que as equações de equilíbrio para este problema (não-homogéneo), tomam a forma de equações integro-diferenciais, que não se conseguem resolver explicitamente. Este problema ilustra o facto de a resolução deste tipo de problemas (não locais) poder ser muito complicada, mesmo para um exemplo simples como este.

Muitas mais aplicações deste tipo de problemas poderiam ser analisadas nestes termos. Este é um assunto recente onde ainda há muita coisa por fazer e por isso pode servir de base para uma posterior tese de doutoramento.

Capítulo 1

Medidas de Young

1.1 Caracterização das medidas de Young

O estudo das medidas de Young está directamente relacionado com o estudo da convergência fraca com respeito a funcionais não lineares. Dizemos, grosso modo, que $f_j \rightharpoonup f$ se

$$\int_E f_j \, dx \to \int_E f \, dx,$$

para todo o conjunto mensurável E.

Em [17], encontramos exemplos, onde a convergência fraca não se comporta da forma como esperariamos, em relação aos funcionais não lineares. Por exemplo, sejam φ e g_j funções, observamos em [17], que o limite fraco de $\{\varphi(g_j)\}$ não é a composição de φ, com o limite fraco de $\{g_j\}$.

Observa-se também, que a convergência fraca é particularmente bem comportada quando lida com sucessões limitadas em $L^\infty(\Omega)$.

Dizemos que a sucessão $\{f_j\}$ em $L^\infty(\Omega)$ converge fracamente* para f (em $L^\infty(\Omega)$) e escrevemos $f_j \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ em $L^\infty(\Omega)$ se

$$\int_\Omega g f_j \, dx \to \int_\Omega g f \, dx \quad \forall g \in L^1(\Omega).$$

Usando o teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki (teorema 5.31), vem que, é possível extrair uma subsucessão fracamente* convergente. O principal ponto onde queremos chegar é o seguinte [17]: suponhamos que $f_j \xrightarrow{*} f$ em $L^\infty(\Omega)$, tal que $\|f_j\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c < \infty$, φ é uma função contínua e $\{\varphi(f_j)\}$ é uma sucessão uniformemente limitada em $L^\infty(\Omega)$. Então, podemos extrair uma subsucessão fracamente* convergente em $L^\infty(\Omega)$, isto é, $\varphi(f_j) \xrightarrow{*} \beta$ em L^∞, usamos a mesma notação desde que não haja perigo de confusão. O limite fraco β não é, como já dissémos atrás, $\varphi(f)$. O que será β então? É aqui que entram as medidas de Young.

Uma medida de Young é uma família de medidas de probabilidade de $\nu=\{\nu_x\}_{x\in\Omega}$ associada a uma sucessão de funções $f_j : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$ tal que $supp(\nu_x) \subset \mathbb{R}^m$ e que depende mensuravelmente de $x \in \Omega$, o que significa que, para qualquer função contínua $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, a função $\overline{\varphi}$, definida por

$$\overline{\varphi}(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(\lambda)\, d\nu_x(\lambda) =< \varphi, \nu_x > \tag{1.1}$$

é mensurável.

Temos ainda que, sempre que $\{\varphi(f_j)\}$ converge fracamente* em $L^\infty(\Omega)$, (ou mais geralmente em $L^p(\Omega)$), o seu limite fraco, pode ser identificado com a função $\overline{\varphi}$, definida atrás, isto é,

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega \varphi(f_j(x))g(x)\, dx = \int_\Omega g(x) \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(\lambda) d\nu_x(\lambda)\, dx \tag{1.2}$$

$\forall g \in L^1(\Omega)$. Esta é a propriedade fundamental de uma familia de medidas de probabilidade.

Intuitivamente, podemos pensar nas medidas de probabilidade como sendo o limite da distribuição de probabilidade dos valores de $\{f_j\}$, onde os pontos são escolhidos arbitrariamente em torno de cada $x \in \Omega$. Para cada $E \subseteq \mathbb{R}^m$ tem-se

$$\nu_x(E) = \lim_{R\to 0} \lim_{j\to\infty} \frac{|\{y \in B_R(x) : f_j(y) \in E\}|}{|B_R(x)|}, \tag{1.3}$$

onde $|\cdot|$ denota a medida de Lebesgue. A relação entre (1.1) e (1.3) é estabelecida fazendo $g \equiv \delta_x$, onde δ é a massa de Dirac e φ uma função próxima da função característica de E, χ_E. Este facto deve ser entendido de forma intuitiva, como já foi referido.

Apresentamos de seguida uma versão do teorema da existência em medidas de Young, válido em qualquer dimensão. Este teorema dá-nos uma forma de representar os limites fracos, quando eles existem, desde que tenhamos garantida a convergência fraca em L^1 das sucessões cujos limites fracos estamos a tentar obter. A convergência faca em L^1, é portanto uma das hipóteses cruciais deste resultado.

É de salientar que, este resultado não nos garante de forma alguma, que estes limites fracos existem, de modo que a existência terá de ser obtida independentemente.

Teorema 1.1. *Seja $f_j : \Omega \to \mathbb{R}^m$, onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ é um conjunto aberto e limitado.*

1. *Se f_j é uma sucessão limitada em $L^p(\Omega)$ $(p \geq 1)$, então existe uma subsucessão (não renomeada) e uma família de medidas de probabilidade $\nu = \{\nu_x\}_{x\in\Omega}$ dependendo mensuravelmente de $x \in \Omega$ (isto é, para qualquer função contínua φ a aplicação $x \mapsto < \varphi, \nu_x >$ é mensurável) tal que, sempre que a sucessão $\{\varphi(f_j)\}$ converge fracamente em $L^1(E)$ para algum conjunto mensurável $E \subseteq \Omega$, temos*

$$\varphi(f_j(x)) \rightharpoonup \overline{\varphi}(x) = < \varphi, \nu_x > .$$

   Além disso

$$\int_\Omega \int_{\mathbb{R}^m} |\lambda|^p \, d\nu_x \, dx < \infty,$$

   para p finito e

$$supp(\nu_x) \subseteq K,$$

   p.q.t o $x \in \Omega$ e $p = \infty$, onde $K \subseteq \mathbb{R}^m$ é um conjunto compacto fixado.

2. *Uma família de medidas de probabilidade $\nu = \{\nu_x\}_{x\in\Omega}$, dependendo mensuravelmente de $x \in \Omega$, pode ser gerada como sendo a medida de Young correspondendo a sucessões de funções $\{f_j\}$ tal que $\{|f_j|^p\}$ é equiintegrável para $p < \infty$ e limitada em $L^\infty(\Omega)$ para $p = \infty$, sse*

$$\int_\Omega \int_{\mathbb{R}^m} |\lambda|^p \, d\nu_x \, dx < \infty,$$

para p finito e

$$supp(\nu_x) \subseteq K,$$

p.q.t o $x \in \Omega$ *e* $p = \infty$*, onde* $K \subseteq \mathbb{R}^m$ *é novamente um conjunto compacto fixado.*

Demonstração: Esta demonstração não é apresentada por ser demasiado extensa e não estar dentro dos nossos principais objectivos. O leitor interessado deve consultar [17], pág. 97. □

Outro resultado importante é o seguinte lema (ver [17] e [18])

Lema 1.2. *Seja* $\{f_j\}$ *uma sucessão limitada em* $L^p(\Omega)$ *com medida de Young associada* $\nu = \{\nu_x\}_{x\in\Omega}$*, de acordo com o teorema anterior. Se* φ *é uma função contínua não negativa (ou limitada inferiormente) então*

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega \varphi(f_j)\, dx \geq \int_\Omega \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(\lambda)\, d\nu_x(\lambda)\, dx.$$

Demonstração: Esta demonstração baseia-se em dois resultados, os teoremas 1.10 e 1.11, que são apresentados na secção 1.3, deste capítulo.

Suponhamos em primeiro lugar que $\varphi \geq 0$. Suponhamos também que o limite é finito, pois se o limite não for finito, nada há a demonstrar. Então, sendo o limite finito, para alguma subsucessão (não renomeada), dado o lim inf, temos que $\{\varphi(f_j)\}$ é uniformente limitada em $L^1(\Omega)$. Então pelo teorema 1.10, o b-limite é dado por

$$\overline{\varphi}(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(\lambda)\, d\nu_x(\lambda)\, dx.$$

Assim, se houver uma subsucessão convergindo fracamente em $L^1(E)$, $E \subseteq \Omega$ mensurável, usando a desigualdade (1.7) do teorema 1.11 e a própria definição de convergência fraca em $L^1(E)$, temos a igualdade. Se houver uma subsucessão não convergente fracamente, novamente pelo teorema 1.11, não é possivel termos a desigualdade estrita

$$\liminf_{j\to\infty} \int_\Omega \varphi(f_j(x))dx < \int_\Omega \overline{\varphi}(x)dx,$$

dado que falha a convergência fraca em L^1, e portanto temos a desigualdade oposta que é a pretendida.

Suponhamos agora que φ é apenas limitada inferiormente. Aplicamos a primeira parte da demonstração a $\varphi - \alpha$ pois $\varphi \geq \alpha \Rightarrow \varphi - \alpha \geq 0$, para concluirmos a desigualdade. □

1.2 Problemas não locais

Suponhamos que estamos a trabalhar com uma sucessão escalar, $\{u_j\}$, limitada em $W^{1,p}(\Omega)$, $p > 1$, onde Ω é algum intervalo aberto da recta real. Vamos caracterizar as medidas de Young associadas a sucessões do tipo $\{f_j(x_1, x_2)\}$ onde $f_j(x_1, x_2) = (u_j'(x_1), u_j'(x_2))$, em termos da medida de Young correspondente a $u_j'(x)$. Com esse objectivo, enunciamos a seguinte proposição,

Proposição 1.3. *Seja $\Lambda = \{\Lambda_{(x_1,x_2)}\}$ uma família de medidas de probabilidade suportadas em $\mathbb{R}^2$. Λ é a medida de Young associada à sucessão $f_j(x_1, x_2) = (u_j'(x_1), u_j'(x_2))$, onde $\{u_j\}$ é limitada em $W^{1,p}(\Omega)$, se e só se $\nu = \nu_x$ é a medida de Young associada a u_j' e*

$$\Lambda_{(x_1,x_2)} = \nu_{x_1} \otimes \nu_{x_2} \tag{1.4}$$

e

$$\int_\Omega \int_{\mathbb{R}} |\lambda|^p \, d\nu_x \, dx < \infty, \tag{1.5}$$

para p finito e

$$supp(\nu_x) \subseteq K, \tag{1.6}$$

p.q.t o $x \in \Omega$ e $p = \infty$, onde $K \subseteq \mathbb{R}^m$ é um conjunto compacto fixado.

Demonstração: Seja Λ a medida de Young associada à sucessão

$$f_j(x_1, x_2) = (u_j'(x_1), u_j'(x_2))$$

onde $\{u_j\}$ é limitada em $W^{1,p}(\Omega)$. Queremos mostrar (1.4), (1.5) e (1.6). Se $p=\infty$, pelo teorema 1.1 2., vem directamente (1.6), e se p for finito, vem (1.5), uma vez que o facto de $\{u_j\}$ ser limitada em $W^{1,p}(\Omega)$ implica a equiintegrabilidade de $\|u_j\|^p$. Mostremos agora (1.4). Sejam $\varphi=\varphi_1\varphi_2$ e $\theta=\theta_1\theta_2$, pela propriedade fundamental de uma família de medidas de probabilidade vem

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega\times\Omega}\theta_1(x_1)\theta_2(x_2)\left(\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}\varphi_1(\lambda_1)\varphi_2(\lambda_2)\,d\Lambda_{(x_1,x_2)}(\lambda_1,\lambda_2)\right)dx_1dx_2\\
&\quad=\lim_{j\to\infty}\int_{\Omega\times\Omega}\theta_1(x_1)\theta_2(x_2)\varphi(f_j(x_1,x_2))\,dx_1dx_2\\
&\quad=\lim_{j\to\infty}\int_{\Omega\times\Omega}\theta_1(x_1)\theta_2(x_2)\varphi_1(u_j'(x_1))\varphi_2(u_j'(x_2))\,dx_1dx_2\\
&\quad=\lim_{j\to\infty}\left(\int_\Omega\theta_1(x_1)\varphi_1(u_j'(x_2))\,dx_1\right)\left(\int_\Omega\theta_2(x_2)\varphi_2(u_j'(x_2))\,dx_2\right)\\
&\quad=\int_\Omega\theta_1(x_1)\left(\int_{\mathbb{R}}\varphi_1(\lambda_1)\,d\nu_{x_1}(\lambda_1)\right)dx_1\int_\Omega\theta_2(x_2)\left(\int_{\mathbb{R}}\varphi_2(\lambda_2)\,d\nu_{x_2}(\lambda_2)\right)dx_2\\
&\quad=\int_{\Omega\times\Omega}\theta_1(x_1)\theta_2(x_2)\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}\varphi_1(\lambda_1)\varphi_2(\lambda_2)\,d(\nu_{x_1}\otimes\nu_{x_2})(\lambda_1,\lambda_2)\,dx_1dx_2,
\end{aligned}$$

o que prova o pretendido.

Em relação à implicação contrária, pelo teorema 1.1 2., bastam (1.5) e (1.6) para concluirmos que Λ é a medida de Young associada à sucessão $f_j(x_1,x_2)=(u_j'(x_1),u_j'(x_2))$, onde $\{u_j\}$ é limitada em $W^{1,p}(\Omega)$. Ou seja, no caso escalar, (1.5) e (1.6) são as únicas condições pedidas para uma família de medidas de probabilidade ser gerada por uma sucessão limitada em $W^{1,p}(\Omega)$. $\square$

Vejamos alguns exemplos da aplicação prática deste resultado.

Exemplo 1.4. *Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tal que $f_j(x_1,x_2)=(u_j'(x_1),u_j'(x_2))$. Sejam ν_{x_1}, ν_{x_1} e $\nu_{x_1}\otimes\nu_{x_2}$ as medidas de Young associadas a $u_j'(x_1)$, $u_j'(x_2)$ e a $f_j(x_1,x_2)$, respectivamente.*

1) *Consideremos* $u_j(y) = \frac{1}{j}u(jy)$, *onde* $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é a função contínua*

$$u(y) = \begin{cases} y, & se\ y \in (0, \frac{1}{2}); \\ 1 - y, & se\ y \in (\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

Podemos estender u *periodicamente a* $\mathbb{R}$. *A derivada de* $u_j(y)$ *é dada por* $u_j'(y) = u'(jy)$ *ou seja,*

$$u_j'(y) = \begin{cases} 1, & se < jy > \in (0, \frac{1}{2}); \\ -1, & se < jy > \in (\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

(Notemos que $< jy > = jy - [jy]$, *onde* $[jy]$ *é a parte inteira do número* jy.*)*
A medida associada a $u_j'(y)$, ν_y, *está concentrada em* 1 *e em* -1, *donde*

$$\nu_y = \lambda\delta_1 + (1 - \lambda)\delta_{-1},$$

para $\lambda \in [0, 1]$ *que é a frequência do declive. Isto significa que temos declive* 1 *com frequência* $\frac{1}{2}$, *e temos declive* -1 *com a mesma frequência. Como* ν_y *não depende de* y, *a medida de Young associada a* $u_j'(x_1)$ *e a* $u_j'(x_2)$ *é a mesma, ou seja,*

$$\nu_{x_1} = \nu_{x_2} = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1},$$

vejamos o gráfico

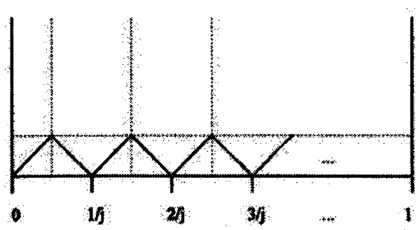

Figura 1.1: exe.1

e portanto, a medida de Young associada a $f_j(x_1, x_2)$ é

$$\begin{aligned}\nu_{x_1} \otimes \nu_{x_2} &= \left(\frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}\right) \otimes \left(\frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}\right) \\ &= \frac{1}{4}(\delta_1 \otimes \delta_1) + \frac{1}{4}(\delta_1 \otimes \delta_{-1}) + \frac{1}{4}(\delta_{-1} \otimes \delta_1) + \frac{1}{4}(\delta_{-1} \otimes \delta_{-1}) \\ &= \frac{1}{4}\delta_{(1,1)} + \frac{1}{4}\delta_{(1,-1)} + \frac{1}{4}\delta_{(-1,1)} + \frac{1}{4}\delta_{(-1,-1)}.\end{aligned}$$

Por outro lado, para qualquer função contínua $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}\varphi\left(u_j'(x_1), u_j'(x_2)\right) &\overset{*}{\rightharpoonup} \frac{1}{4}\varphi_{(1,1)} + \frac{1}{4}\varphi_{(1,-1)} + \frac{1}{4}\varphi_{(-1,1)} + \frac{1}{4}\varphi_{(-1,-1)} \\ &= < \varphi, \nu > .\end{aligned}$$

Ou seja, $< \varphi, \nu >$ é o limite fraco de $\varphi(u_j', u_j')$.

2) *Consideremos $u_j(y)$ como no exemplo anterior, mas em vez de considerarmos o intervalo $(0,1)$, dividido a meio, consideramos os subintervalos $(0, \frac{3}{4})$ e $(\frac{3}{4}, 1)$ e u é a função contínua*

$$u(y) = \begin{cases} y, & se\ y \in (0, \frac{3}{4}); \\ \frac{3}{2} - y, & se\ y \in (\frac{3}{4}, 1). \end{cases}$$

A derivada de $u_j'(y)$ será então dada por

$$u_j'(y) = \begin{cases} 1, & se < jy > \in (0, \frac{3}{4}); \\ -1, & se < jy > \in (\frac{3}{4}, 1). \end{cases}$$

Temos então que

$$\nu_y = \lambda\delta_1 + (1 - \lambda)\delta_{-1},$$

onde $\lambda \in [0,1]$. Temos declive 1 com frequência $\frac{3}{4}$, e declive -1 com frequência $\frac{1}{4}$, logo

$$\nu_y = \frac{3}{4}\delta_1 + \frac{1}{4}\delta_{-1},$$

e a figura é

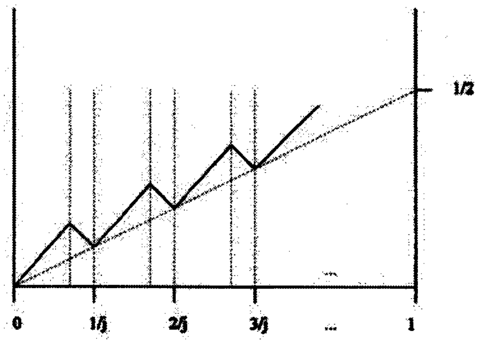

Figura 1.2: exe.2

À semelhança do exemplo anterior, a medida não depende de y*, e portanto as medidas de Young associadas a* $u_j'(x_1)$ *e a* $u_j'(x_2)$ *são a mesma, donde a medida de Young associada a* $f_j(x_1, x_2)$ *é*

$$\nu_{x_1} \otimes \nu_{x_2} = \frac{9}{16}\delta_{(1,1)} + \frac{3}{16}\delta_{(1,-1)} + \frac{3}{16}\delta_{(-1,1)} + \frac{1}{16}\delta_{(-1,-1)}.$$

E novamente, para qualquer função contínua $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *temos*

$$\begin{aligned}\varphi\left(u_j'(x_1), u_j'(x_2)\right) &\overset{*}{\rightharpoonup} \frac{9}{16}\varphi_{(1,1)} + \frac{3}{16}\varphi_{(1,-1)} + \frac{3}{16}\varphi_{(-1,1)} + \frac{1}{16}\varphi_{(-1,-1)} \\ &= < \varphi, \nu > .\end{aligned}$$

Ou seja, $< \varphi, \nu >$ *é o limite fraco de* $\varphi(u_j', u_j')$.

3) *Consideremos*

$$u_j(y) = \begin{cases} u_j^1(y), & se\ y \in (0, \frac{1}{2}); \\ u_j^2(y), & se\ y \in (\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

sendo $u_j^1(y)$ *a sucessão do exemplo 1 e* $u_j^2(y)$ *a sucessão do exemplo 2.*

No intervalo $(0, \frac{1}{2})$*, as derivadas* u_j' *geram a medida*

$$\nu_{x_1} = \nu_{x_2} = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1},$$

e no intervalo $(\frac{1}{2}, 1)$ *a medida de Young associada a* u_j' *é*

$$\nu_{x_1} = \nu_{x_2} = \frac{3}{4}\delta_1 + \frac{1}{4}\delta_{-1}.$$

Portanto, a medida de Young associada a $f_j(x_1, x_2)$ *depende de onde poderá estar o par* (x_1, x_2)*. Se estiver no quadrado* $(0, \frac{1}{2}) \times (0, \frac{1}{2})$ *vem*

$$\nu^{(1)} = \nu_{x_1} \otimes \nu_{x_2} = \frac{1}{4}\delta_{(1,1)} + \frac{1}{4}\delta_{(1,-1)} + \frac{1}{4}\delta_{(-1,1)} + \frac{1}{4}\delta_{(-1,-1)},$$

se estiver em $(0, \frac{1}{2}) \times (\frac{1}{2}, 1)$ *vem*

$$\nu^{(2)} = \nu_{x_1} \otimes \nu_{x_2} = \frac{3}{8}\delta_{(1,1)} + \frac{1}{8}\delta_{(1,-1)} + \frac{3}{8}\delta_{(-1,1)} + \frac{1}{8}\delta_{(-1,-1)},$$

se estiver em $(\frac{1}{2}, 1) \times (0, \frac{1}{2})$ *temos*

$$\nu^{(3)} = \nu_{x_1} \otimes \nu_{x_2} = \frac{3}{8}\delta_{(1,1)} + \frac{3}{8}\delta_{(1,-1)} + \frac{1}{8}\delta_{(-1,1)} + \frac{1}{8}\delta_{(-1,-1)},$$

e finalmente, se estiver no quadrado $(\frac{1}{2}, 1) \times (\frac{1}{2}, 1)$ *a medida será*

$$\nu^{(4)} = \nu_{x_1} \otimes \nu_{x_2} = \frac{9}{16}\delta_{(1,1)} + \frac{3}{16}\delta_{(1,-1)} + \frac{3}{16}\delta_{(-1,1)} + \frac{1}{16}\delta_{(-1,-1)},$$

e $\nu^{(2)} = \nu^{(3)}$.

Concluindo, aplicando o teorema 1.1 a qualquer função $\psi(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2)$, mensurável em x_i e contínua em λ_i temos a seguinte representação:

$$\begin{aligned} &\lim_{j\to\infty} \int_{\Omega\times\Omega} \psi(x_1, x_2, u_j'(x_1), u_j'(x_2))\, dx_1 dx_2 \\ &\quad = \int_{\Omega\times\Omega} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \psi(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2)\, d\nu_{x_1}(\lambda_1) d\nu_{x_2}(\lambda_2)\, dx_1 dx_2, \end{aligned}$$

sempre que a sucessão $\{\psi(x_1, x_2, u_j'(x_1), u_j'(x_2))\}$ converge fracamente em $L^1(\Omega)$.

De futuro, denotemos o conjunto das medidas de Young verificando (1.4) e (1.5) ou (1.6) (dependendo de p ser um número finito ou não) por $\wp$. Fazendo um pequeno abuso de linguagem identificaremos também ν com Λ, (note-se que $\Lambda_{(x_1,x_2)} = \nu_{x_1} \otimes \nu_{x_2}$), e escrevemos $\nu \in \wp$. Neste sentido, $\nu \in \wp$ significa simplesmente (1.5) ou (1.6), dependendo do valor de p.

1.3 Alguns resultados gerais

Nesta secção, apresentamos algumas definições e resultados acerca das medidas de Young. A demonstração destes resultados pode encontrar-se em [17].

Definição 1.5. Seja $\{f_j\}$ uma sucessão de funções em L^1. Dizemos que $\{f_j\}$ é equiintegrável se, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ (dependendo apenas de ε) tal que, se $|E| < \delta$, então

$$\int_E |f_j(x)|\, dx < \varepsilon,$$

para qualquer j.

Definição 1.6. Seja $\psi(x, \lambda) : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \cup +\infty$. Dizemos que ψ é uma função de Carathéodory se ψ é mensurável em x e contínua em λ.

Lema 1.7. *seja $\{f_j\}$ uma sucessão limitada em $L^1(\Omega)$,*

$$\|f_j\|_{L^1(\Omega)} \leq C < \infty.$$

Esta sucessão é fracamente relativamente compacta sse

$$\lim_{k\to\infty} \left(\sup_j \int_{|f_j|\geq k} |f_j|\, dx \right) = 0.$$

Na secção 1.1 apresentámos um teorema de existência em medidas de Young, que é um teorema de representação de limites fracos, se eles existirem. Este teorema vale se tivermos garantida a convergência fraca em L^1 das sucessões envolvidas. Quando esta hipótese falha, falha também o teorema da representação de limites fracos. Para resolver este problema surge então o importante teorema

Teorema 1.8 (lema de Chacon da b-convergênia). *Seja $\{f_j\}$ uma sucessão uniformemente limitada em $L^1(\Omega)$,*

$$\sup_j \|f_j\|_{L^1(\Omega)} = C < \infty.$$

Então existe uma subsucessão (não renomeada), uma sucessão não crescente de conjuntos mensuráveis $\Omega_n \subseteq \Omega$, $|\Omega_n| \searrow 0$ *e* $f \in L^1(\Omega)$ *tal que*

$$f_j \rightharpoonup f \text{ em } L^1(\Omega \setminus \Omega_n)$$

para todo n.

Portanto, mesmo que a convergência em L^1 falhe, podemos continuar a considerar a função $\overline{\varphi}$ definida em (1.1). No entanto, esta função não pode ser considerada como o limite fraco de $\{\varphi(f_j)\}$, porque suposémos precisamente que não existia limite fraco antes de enunciarmos o teorema. Vamos então ver, qual a relação que existe entre $\{\varphi(f_j)\}$ e $\overline{\varphi}$.

Definição 1.9 (b-convergência). A sucessão $\{f_j\} \subseteq L^1(\Omega)$ é b-convergente para $f \in L^1(\Omega)$, e denota-se por

$$f_j \overset{b}{\rightharpoonup} f \text{ em } L^1(\Omega),$$

se existe uma sucessão não crescente de conjuntos mensuráveis $\{\Omega_n\}$ tal que $|\Omega_n| \searrow 0$ e

$$f_j \rightharpoonup f \text{ em } L^1(\Omega \setminus \Omega_n)$$

para todo o n.

Assim, podemos expressar de outra forma o lema de Chacon da b-convergência, dizendo que uma sucessão uniformemente limitada em $L^1(\Omega)$ contém uma subsucessão b-convergente para uma função em $L^1(\Omega)$.

Teorema 1.10. *Seja* $f_j : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *uma sucessão de funções com valores vectoriais com medida de Young associada* $\nu = \{\nu_x\}_{x\in\Omega}$. *Se* $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua e a sucessão* $\{\varphi(f_j)\}$ *é uniformemente limitada em* $L^1(\Omega)$, *então passando possivelmente a uma subsucessão vem*

$$\varphi(f_j) \overset{b}{\rightharpoonup} \overline{\varphi}(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(\lambda)\, d\nu_x(\lambda)\, dx.$$

Nalguns casos, a b-convergência pode ser melhorada no sentido de termos a convergência fraca, de forma que as medidas de Young nos possam proporcionar os limites fracos. O seguinte lema dá-nos uma condição necessária e suficiente para este melhoramento.

Teorema 1.11. *Seja $f_j : \Omega \to \mathbb{R}^+$ ($f_j \geq 0$) uma sucessão de funções mensuráveis em $L^1(\Omega)$, b-convergente para f em $L^1(\Omega)$. Uma subsucessão converge fracamente em $L^1(\Omega)$ se e só se*

$$\liminf_{j\to\infty} \int_\Omega f_j(x)dx \leq \int_\Omega f(x)dx. \tag{1.7}$$

Além disso, toda a sucessão f_j converge fracamente em $L^1(\Omega)$ para f se e só se

$$\limsup_{j\to\infty} \int_\Omega f_j(x)dx \leq \int_\Omega f(x)dx. \tag{1.8}$$

Definição 1.12 (medidas de Radon). Seja X um espaço métrico localmente compacto e separável, $B(X)$ a σ-álgebra de Borel e $(X, B(X))$ um espaço de medida. Uma função de conjunto (real ou vectorial) definida em subconjuntos de Borel relativamente compactos de X é uma medida em $(K, B(K))$, para todo o conjunto compacto $K \subseteq X$, e chama-se medida de Radon (real ou vectorial) em X.

A desigualdade de Jensen tem um papel central no estudo das medidas de Young, por isso incluimos aqui o seguinte resultado

Teorema 1.13. *Seja μ uma medida de Radon positiva sobre a σ-álgebra, M, num conjunto Ω tal que $\mu(\Omega) = 1$. Seja f uma função com valores vectoriais em $L^1(\mu)$ tal que $f(x) \in K$ para $\mu - p.q.t$ o $x \in \Omega$ onde $K \subseteq \mathbb{R}^m$ é um conjunto convexo. Se φ é uma função convexa definida em K então*

$$\varphi\left(\int_\Omega f\, d\mu\right) \leq \int_\Omega \varphi(f)\, d\mu.$$

Capítulo 2

Problemas não locais no caso escalar

2.1 Semicontinuidade inferior fraca

Consideremos em primeiro lugar o funcional homogéneo

$$I(u) = \int_{\Omega\times\Omega} W(u'(x_1), u'(x_2))\, dx_1 dx_2 \tag{2.1}$$

onde Ω é um intervalo aberto da recta real, $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $u - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ para algum u_0 fixado verificando $I(u_0) < \infty$. Suponhamos que Wé uma função contínua e limitada inferiormente.

A seguinte proposição dá-nos uma condição necessária e suficiente para garantirmos a semicontinuidade inferior fraca para o funcional I em $W^{1,\infty}(\Omega)$.

Proposição 2.1. *O funcional I é semicontínuo inferiormente com respeito à convergência fraca em $W^{1,\infty}(\Omega)$ se e só se para cada $\nu \in \wp$, se se verifica a desigualdade de Jensen:*

$$\int_{\Omega\times\Omega}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} W(\lambda_1, \lambda_2)\, d\nu_{x_1}(\lambda_1) d\nu_{x_2}(\lambda_2)\, dx_1 dx_2 \tag{2.2}$$
$$\geq \int_{\Omega\times\Omega} W\left(\int_{\mathbb{R}} \lambda\, d\nu_{x_1}(\lambda), \int_{\mathbb{R}} \lambda\, d\nu_{x_2}(\lambda)\right) dx_1 dx_2.$$

Demonstração: Suponhamos primeiro que o funcional I é fracamente semicontínuo inferiormente, com vista a provar (2.2). Se $\nu \in \wp$, então pelo teorema 1.1 podemos encontrar uma sucessão $\{u_j'\}$, limitada em $L^\infty(\Omega)$ tal que $\{(u_j'(x_1), u_j'(x_2))\}$ gera a correspondente família de medidas de probabilidade Λ. Como $\sup_j \|u_j\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$, e $u_j \rightharpoonup u$ vem que $\{W(u_j'(x_1), u_j'(x_2))\}$ é uniformemente limitada em $L^\infty(\Omega \times \Omega)$ e portanto $\{W(u_j'(x_1), u_j'(x_2))\}$ é fracamente convergente em $L^1(\Omega \times \Omega)$ (ou possivelmente uma sua subsucessão adequada). Novamente pelo teorema 1.1 temos que

$$W(u_j'(x_1), u_j'(x_2)) \rightharpoonup \overline{W}(x_1, x_2),$$

isto é,

$$\int_{\Omega\times\Omega} W(u_j'(x_1), u_j'(x_2))\, dx_1 dx_2 \to \int_{\Omega\times\Omega} \overline{W}(x_1, x_2) dx_1 dx_2,$$

ou seja

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty} &\int_{\Omega\times\Omega} W(u_j'(x_1), u_j'(x_2))\, dx_1 dx_2 \\ &= \int_{\Omega\times\Omega}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} W(\lambda_1, \lambda_2)\, d\nu_{x_1}(\lambda_1) d\nu_{x_2}(\lambda_2)\, dx_1 dx_2.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Se $u_j \rightharpoonup u$ em $W^{1,\infty}(\Omega)$, então

$$u'(x) = \int_{\mathbb{R}} \lambda\, d\nu_x(\lambda). \tag{2.4}$$

Juntando (2.3), (2.4) e a semicontinuidade inferior fraca, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\times\Omega}&\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} W(\lambda_1, \lambda_2)\, d\nu_{x_1}(\lambda_1) d\nu_{x_2}(\lambda_2)\, dx_1 dx_2 \\ &= \lim_{j\to\infty} \int_{\Omega\times\Omega} W(u_j'(x_1), u_j'(x_2))\, dx_1 dx_2 \\ &\geq \int_{\Omega\times\Omega} W(u'(x_1), u'(x_2))\, dx_1 dx_2 \\ &= \int_{\Omega\times\Omega} W\left(\int_{\mathbb{R}} \lambda\, d\nu_{x_1}(\lambda), \int_{\mathbb{R}} \lambda\, d\nu_{x_2}(\lambda)\right) dx_1 dx_2,\end{aligned}$$

donde sai a desigualdade de Jensen.

Provemos agora a implicação contrária. Suponhamos que se verifica a desigualdade de Jensen e $u_j \rightharpoonup u$ em $W^{1,\infty}(\Omega)$. Como W é limitada inferiormente, por hipótese, pelo lema 1.2 vem

$$\begin{aligned}
&\lim_{j\to\infty} \int_{\Omega\times\Omega} W(u_j'(x_1), u_j'(x_2))\, dx_1dx_2 \\
&\geq \int_{\Omega\times\Omega} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} W(\lambda_1,\lambda_2)\, d\nu_{x_1}(\lambda_1)d\nu_{x_2}(\lambda_2)dx_1dx_2 \\
&\underset{\text{des. Jensen}}{\geq} \int_{\Omega\times\Omega} W\left(\int_{\mathbb{R}} \lambda\, d\nu_{x_1}(\lambda), \int_{\mathbb{R}} \lambda\, d\nu_{x_2}(\lambda)\right) dx_1dx_2 \\
&= \int_{\Omega\times\Omega} W(u'(x_1), u'(x_2))\, dx_1dx_2,
\end{aligned}$$

que nos dá a semicontinuidade inferior fraca. □

Note-se que a condição (2.2) não é de natureza local devido à interacção entre ν_{x_1} e ν_{x_2}. Uma condição suficiente para (2.2) é ter (2.2) p.q.t. o $\nu_{x_1}\otimes\nu_{x_2}$, o que é equivalente a

$$\int_{\mathbb{R}^2} W(\lambda_1,\lambda_2)\, d\nu_1(\lambda_1)d\nu_2(\lambda_2) \geq W\left(\int_{\mathbb{R}} \lambda\, d\nu_1(\lambda), \int_{\mathbb{R}} \lambda\, d\nu_2(\lambda)\right), \tag{2.5}$$

para cada par (ν_1,ν_2) com suporte compacto. Esta condição é equivalente, como veremos um pouco mais à frente, à propriedade de convexidade separada para W (onde uma das variáveis se mantém constante). Contudo, escapa-nos o facto de nos integrais em (2.2) os pares $\nu_{x_1}\otimes\nu_{x_1}$, $\nu_{x_1}\otimes\nu_{x_2}$, $\nu_{x_2}\otimes\nu_{x_1}$ e $\nu_{x_2}\otimes\nu_{x_2}$ virem sempre juntos. Por exemplo, se fizermos $W(\lambda_1,\lambda_2)=\lambda_1^2-\lambda_2^2$, o correspondente funcional I torna-se identicamente nulo devido à antisimetria e consequentemente I é fracamente semicontínuo inferiormente. Não temos ainda que W é separadamente convexo. Outra condição suficiente que inclui os casos anti-simétricos é a propriedade da convexidade separada para $\widetilde{W}(\lambda_1,\lambda_2)=W(\lambda_1,\lambda_2)+W(\lambda_2,\lambda_1)$. Mas novamente esta condição não parece ser necessária. Note-se, contudo, que a convexidade separada de W é necessária e suficiente se insistirmos em ter a semicontinuidade inferior fraca sobre subconjuntos mensuráveis arbitrários do produto $\Omega\times\Omega$. Neste caso, podemos localizar cada par $\nu_{x_1}\otimes\nu_{x_2}$ em torno de $\Omega\times\Omega$.

Se tentarmos obter condições necessárias simples, podemos começar por simplificar as medidas fazendo $\nu_x = \nu$, ou seja, considerando que a medida de probabilidade não depende das variáveis, $\forall x \in \Omega$ em (2.2). Assim a desigualdade pode escrever-se como

$$\int_{\mathbb{R}^2} W(\lambda_1, \lambda_2)\, d\nu(\lambda_1) d\nu(\lambda_2) \geq W\left(\int_{\mathbb{R}} \lambda\, d\nu(\lambda), \int_{\mathbb{R}} \lambda\, d\nu(\lambda)\right),$$

que por sua vez é equivalente a

$$4W\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}, \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right) \leq W(\lambda_1,\lambda_1) + W(\lambda_1,\lambda_2) + W(\lambda_2,\lambda_1) + W(\lambda_2,\lambda_2), \quad (2.6)$$

para cada escolha de (λ_1, λ_2). Ora vejamos: tomemos $\nu = \frac{1}{2}\delta_{\lambda_1} + \frac{1}{2}\delta_{\lambda_2}$, onde δ é o delta de Dirac.

$$\begin{aligned}
d\nu(\lambda_1)d\nu(\lambda_2) &= d(\nu(\lambda_1) \otimes \nu(\lambda_2)) \\
&= d\left(\left(\frac{1}{2}\delta_{\lambda_1} + \frac{1}{2}\delta_{\lambda_2}\right) \otimes \left(\frac{1}{2}\delta_{\lambda_1} + \frac{1}{2}\delta_{\lambda_2}\right)\right) \\
&= d\left(\frac{1}{4}(\delta_{\lambda_1} \otimes \delta_{\lambda_1}) + \frac{1}{4}(\delta_{\lambda_1} \otimes \delta_{\lambda_2}) + \frac{1}{4}(\delta_{\lambda_2} \otimes \delta_{\lambda_1}) + \frac{1}{4}(\delta_{\lambda_2} \otimes \delta_{\lambda_2})\right) \\
&= d\left(\frac{1}{4}\delta_{(\lambda_1,\lambda_1)} + \frac{1}{4}\delta_{(\lambda_1,\lambda_2)} + \frac{1}{4}\delta_{(\lambda_2,\lambda_1)} + \frac{1}{4}\delta_{(\lambda_2,\lambda_2)}\right)
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} W(\lambda_1, \lambda_2)\, d\nu(\lambda_1) d\nu(\lambda_2) \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^2} W(\lambda_1,\lambda_2)\, d\left(\frac{1}{4}\delta_{(\lambda_1,\lambda_1)} + \frac{1}{4}\delta_{(\lambda_1,\lambda_2)} + \frac{1}{4}\delta_{(\lambda_2,\lambda_1)} + \frac{1}{4}\delta_{(\lambda_2,\lambda_2)}\right) \\
&\quad = \frac{1}{4}W(\lambda_1,\lambda_1) + \frac{1}{4}W(\lambda_1,\lambda_2) + \frac{1}{4}W(\lambda_2,\lambda_1) + \frac{1}{4}W(\lambda_2,\lambda_2),
\end{aligned}$$

e como

$$W\left(\int_{\mathbb{R}} \lambda\, d\nu(\lambda), \int_{\mathbb{R}} \lambda\, d\nu(\lambda)\right) = W\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}, \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right)$$

vem

$$4W\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}, \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right) \leq W(\lambda_1,\lambda_1) + W(\lambda_1,\lambda_2) + W(\lambda_2,\lambda_1) + W(\lambda_2,\lambda_2).$$

Esta desigualdade é uma condição necessária para a semicontinuidade inferior fraca.

Podemos tentar obter condições necessárias mais complicadas fazendo ν_1 e ν_2, duas medidas de probabilidade diferentes em dois subconjuntos de Ω diferentes. Assim, a condição necessária seria

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} W(\lambda_1,\lambda_2)\,d\nu_1(\lambda_1)d\nu_1(\lambda_2) + \int_{\mathbb{R}^2} W(\lambda_1,\lambda_2)\,d\nu_1(\lambda_1)d\nu_2(\lambda_2) \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^2} W(\lambda_1,\lambda_2)\,d\nu_2(\lambda_1)d\nu_1(\lambda_2) + \int_{\mathbb{R}^2} W(\lambda_1,\lambda_2)\,d\nu_2(\lambda_1)d\nu_2(\lambda_2) \\
&\quad \geq W\left(\int_{\mathbb{R}} \lambda\,d\nu_1(\lambda), \int_{\mathbb{R}} \lambda\,d\nu_1(\lambda)\right) + W\left(\int_{\mathbb{R}} \lambda\,d\nu_1(\lambda), \int_{\mathbb{R}} \lambda\,d\nu_2(\lambda)\right) \\
&\quad + W\left(\int_{\mathbb{R}} \lambda\,d\nu_2(\lambda), \int_{\mathbb{R}} \lambda\,d\nu_1(\lambda)\right) + W\left(\int_{\mathbb{R}} \lambda\,d\nu_2(\lambda), \int_{\mathbb{R}} \lambda\,d\nu_2(\lambda)\right).
\end{aligned}$$

Esta condição é a desigualdade (2.5), mas neste caso, os pares $\nu_{x_1}\otimes\nu_{x_1}$, $\nu_{x_1}\otimes\nu_{x_2}$, $\nu_{x_2}\otimes\nu_{x_1}$ e $\nu_{x_2}\otimes\nu_{x_2}$ vem juntos, o que dá origem a uma desigualdade com quatro integrais, cada um correspondendo a cada um dos pares $\nu_{x_i}\otimes\nu_{x_j}$ com $i,j=1,2$. Esta desigualdade, é de facto, bastante mais complicada. Se quiséssemos escrever explicitamente esta desigualdade para uma família de medidas de probabilidade, tendo três ou mais medidas de probabilidade diferentes, iriamos descobrir algum padrão nas desigualdades resultantes. Vejamos então o seguinte teorema:

Teorema 2.2. *Seja W uma função contínua e limitada inferiormente. Uma condição necessária e suficiente para que o funcional I seja fracamente semicontínuo inferiormente é*

$$\sum_{i,j=1}^{2n} W(\lambda_i,\lambda_j) \geq 4\sum_{i,j=1}^{n} W\left(\frac{\lambda_{2i-1}+\lambda_{2i}}{2}, \frac{\lambda_{2j-1}+\lambda_{2j}}{2}\right), \tag{2.7}$$

para cada $n\in\mathbb{N}$, e cada escolha $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{2n}\in\mathbb{R}$.

Demonstração: Suponhamos que W é uma função contínua, limitada inferiormente tal que o funcional I é fracamente semicontínuo inferiormente. Então, pela proposição 2.1, verifica-se (2.2). Fazendo $\nu_x = \frac{1}{2}(\delta_{t_{2i-1}}+\delta_{t_{2i}})$, para $x\in T_{i,n} = \left(\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right)$ e $i=1,2,...,n$, temos que, de facto (2.2) é na verdade (2.7), e portanto (2.7) é uma condição necessária.

Suponhamos agora que (2.7) se verifica, queremos mostrar que I é fracamente semicontínuo inferiormente, pelo que basta mostrar (2.2). Vamos fazê-lo por aproximação e média. Definimos ν_x^n fazendo $\nu_x^n = \nu_i^n$ para $x \in T_{i,n}$, onde

$$< \varphi, \nu_i^n >= \frac{1}{|T_{i,n}|} \int_{T_{i,n}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(\lambda) d\nu_x(\lambda) dx.$$

Como cada ν_i^n pode ser aproximado por somas finitas de funções delta, vem que (2.7) implica

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega\times\Omega} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} W(\lambda_1, \lambda_2)\, d\nu_{x_1}^n(\lambda_1) d\nu_{x_2}^n(\lambda_2)\, dx_1 dx_2 \\
&\quad \geq \int_{\Omega\times\Omega} W\left(\int_{\mathbb{R}} \lambda\, d\nu_{x_1}^n(\lambda), \int_{\mathbb{R}} \lambda\, d\nu_{x_2}(\lambda) \right) dx_1 dx_2.
\end{aligned}$$

Fazendo o limite da desigualdade, quando $n \to \infty$ obtemos (2.2). □

Lema 2.3. *Seja W uma função como anteriormente descrita verificando a propriedade da convexidade separada. Então verificam-se as desigualdades (2.7).*

Demonstração: Para mostrar que a convexidade separada de W é condição suficiente para as desigualdades (2.7), basta que fixemos uma das variáveis e apliquemos a convexidade à outra e vice versa. O resultado é imediato.□

A partir de (2.7) uma grande família de desigualdades pode ser obtida. Se escrevermos a desigualdade, primeiro para $n = 2$ obtemos

$$\begin{aligned}
&W(\lambda_1, \lambda_1) + W(\lambda_1, \lambda_2) + W(\lambda_1, \lambda_3) + W(\lambda_1, \lambda_4) \\
&+ W(\lambda_2, \lambda_1) + W(\lambda_2, \lambda_2) + W(\lambda_2, \lambda_3) + W(\lambda_2, \lambda_4) \\
&+ W(\lambda_3, \lambda_1) + W(\lambda_3, \lambda_2) + W(\lambda_3, \lambda_3) + W(\lambda_3, \lambda_4) \\
&+ W(\lambda_4, \lambda_1) + W(\lambda_4, \lambda_2) + W(\lambda_4, \lambda_3) + W(\lambda_4, \lambda_4) \\
&\geq 4\,[W\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}, \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right) + W\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}, \frac{\lambda_3+\lambda_4}{2}\right) \\
&+ W\left(\frac{\lambda_3+\lambda_4}{2}, \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right) + W\left(\frac{\lambda_3+\lambda_4}{2}, \frac{\lambda_3+\lambda_4}{2}\right)],
\end{aligned}$$

e aplicando depois a desigualdade para $n = 1$ aos pontos resultantes vem

$$\begin{aligned}&4\left[W\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2},\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right)+W\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2},\frac{\lambda_3+\lambda_4}{2}\right)\right.\\&\left.+W\left(\frac{\lambda_3+\lambda_4}{2},\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right)+W\left(\frac{\lambda_3+\lambda_4}{2},\frac{\lambda_3+\lambda_4}{2}\right)\right]\\&\geq 4\left[4\times W\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4}{4},\frac{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4}{4}\right)\right].\end{aligned}$$

Obtemos assim uma nova desigualdade ($n = 1$ após $n = 2$),

$$\begin{aligned}&W(\lambda_1,\lambda_1)+W(\lambda_1,\lambda_2)+W(\lambda_1,\lambda_3)+W(\lambda_1,\lambda_4)\\&+W(\lambda_2,\lambda_1)+W(\lambda_2,\lambda_2)+W(\lambda_2,\lambda_3)+W(\lambda_2,\lambda_4)\\&+W(\lambda_3,\lambda_1)+W(\lambda_3,\lambda_2)+W(\lambda_3,\lambda_3)+W(\lambda_3,\lambda_4)\\&+W(\lambda_4,\lambda_1)+W(\lambda_4,\lambda_2)+W(\lambda_4,\lambda_3)+W(\lambda_4,\lambda_4)\\&\geq 16\,W\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4}{4},\frac{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4}{4}\right).\end{aligned}$$

(Ver as figuras apresentadas na introdução relacionadas com estas desigualdades.)

Relativamente à continuidade, podemos dizer que, uma condição necessária e suficiente para W é, em vez das desigualdades (2.2), termos igualdades, isto é

$$\sum_{i,j=1}^{2n} W(\lambda_i,\lambda_j) = 4\sum_{i,j=1}^{n} W\left(\frac{\lambda_{2i-1}+\lambda_{2i}}{2},\frac{\lambda_{2j-1}+\lambda_{2j}}{2}\right), \tag{2.8}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, e cada escolha $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{2n} \in \mathbb{R}$. Tais famílias de funções fracamente contínuas são as que satisfazem

$$W(\lambda_1,\lambda_2)+W(\lambda_2,\lambda_1) = L_1(\lambda_1)L_2(\lambda_2),$$

onde cada L_i é uma função linear. Conjectura-se que estas funções serão as únicas.

A condição (2.7) é também uma condição suficiente para a semicontinuidade inferior fraca em $W^{1,p}(\Omega)$ para p finito. Isto mostra-se por aproximação tal como na demonstração do teorema 2.2.

Consideremos agora o seguinte problema variacional:

$$(P) \qquad \inf\left\{I(u)=\int_{\Omega\times\Omega} W(u'(x_1),u'(x_2))\,dx_1dx_2 : u\in W^{1,p}(\Omega)\,, u-u_0\in W_0^{1,p}(\Omega)\right\}$$

onde Ω é um intervalo aberto na recta real e W é uma função contínua e limitada inferiormente. Usando a condição (2.7) e a condição de coercividade

$$c(\max(|\lambda_1|^p,|\lambda_2|^p)-1)\leq W(\lambda_1,\lambda_2) \tag{2.9}$$

demonstra-se, pelo método directo, o seguinte teorema da existência:

Teorema 2.4. *Suponhamos que, para $p>1$, se verificam a condição de coercividade (2.9) e a condição de convexidade definida pelas desigualdades (2.7). Então, sendo $u_0\in W^{1,p}(\Omega)$ tal que $I(u_0)<\infty$, o problema (P) admite pelo menos uma solução.*

Demonstração: Seja $\{u_j\}$ uma sucessão minimizante para (P), isto é,

$$I(u_j)\to\inf(P).$$

Usando as hipóteses, existe $u_0\in W^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\inf(P)\leq I(u_0)<\infty.$$

Usando a coercividade vem

$$\int_{\Omega\times\Omega} c(\max(|u_j'(x_1)|^p,|u_j'(x_2)|^p)-1)\,dx_1dx_2\leq\int_{\Omega\times\Omega} W(u_j'(x_1),u_j'(x_2))\,dx_1dx_2$$

em particular

$$\int_{\Omega\times\Omega} c(\max(|u_j'(x_1)|^p,|u_j'(x_2)|^p)-1)\,dx_1dx_2\leq\inf(P),$$

ou seja, $\inf(P)$ é limitado inferiormente. Usando novamente a coercividade, prova-se que $\|u_j\|$ é limitado.

Supondo que $1<p<\infty$, vem que $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo, e portanto, nestas condições, podemos extrair uma subsucessão da primeira fracamente convergente, a que chamaremos, $\{u_{j_k}\}$. Então

$$u_{j_k}\rightharpoonup u_0.$$

Assim, como $I(u_{j_k})$ é subsucessão de $I(u_j)$, também

$$I(u_{j_k}) \to \inf(P)$$

sempre que $u_{j_k} \rightharpoonup u_0$. Usando agora a condição de convexidade, e o facto de W ser uma função contínua e limitada inferiormente, vem, pelo teorema 2.2, que I é fracamente semicontínuo inferiormente, isto é,

$$\liminf_{j\to\infty} I(u_{j_k}) \geq I(u_0),$$

mas então vem que

$$I(u_0) \leq \inf(P) \leq I(u_0),$$

ou seja, concluimos que

$$I(u_0) = \inf(P),$$

e portanto, u_0 é minimizante de (P).

Supomos agora que $p = \infty$. Se $\{u_j\}$ é uma sucessão limitada em L^∞, então podemos extrair uma subsucessão fracamente convergente em L^∞ e o raciocínio é análogo.□

2.2 Não-homogeneidade e equações de equilíbrio

Consideremos o funcional não-homogéneo

$$I(u) = \int_{\Omega\times\Omega} W(x_1, x_2, u'(x_1), u'(x_2))\, dx_1 dx_2. \tag{2.10}$$

Consideremos também que se verificam as densidades da forma

$$W(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = K(x_1 - x_2)|\lambda_1|^p|\lambda_2|^p,$$
$$W(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = K(x_1 - x_2)|\lambda_1 \cdot \lambda_2|^p,$$

onde K é um núcleo não negativo, possivelmente singular na origem, mas por outro lado, bem comportado. Note-se, contudo que este tipo de funções não satisfaz a condição apropriada de coercividade, e a propriedade das sucessões minimizantes serem limitadas tem que ser obtida de alguma outra maneira (através de uma outra contribuição local para a energia ou de alguma restrição do próprio problema). Tendo em vista os nossos objectivos assumimos a seguinte estimativa para W

$$C(\max(|\lambda_1|^p, |\lambda_2|^p)) + c(x_1, x_2) \leq W(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2), \tag{2.11}$$

onde c está em $L^1(\Omega \times \Omega)$, $C > 0$.

As condições para a semicontinuidade inferior fraca em $W^{1,\infty}(\Omega)$ podem ser facilmente obtidas da mesma maneira

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\times\Omega}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} & W(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2)\, d\nu_{x_1}(\lambda_1) d\nu_{x_2}(\lambda_2)\, dx_1 dx_2 \\ &\geq \int_{\Omega\times\Omega} W\left(x_1, x_2, \int_{\mathbb{R}} \lambda\, d\nu_{x_1}(\lambda), \int_{\mathbb{R}} \lambda\, d\nu_{x_2}(\lambda)\right) dx_1 dx_2.\end{aligned} \tag{2.12}$$

para cada $\nu = \{\nu_x\}_{x\in\Omega} \in \wp$. Não é verdade, no entanto, que esta condição seja equivalente a (2.2) para quase todo o ponto $(x_1, x_2) \in \Omega \times \Omega$, novamente por causa da natureza não local relacionada com $\nu_{x_1} \otimes \nu_{x_2}$ e com a não-homogeneidade de W. Por outro lado, uma útil condição suficiente, que é suficiente na maior parte dos casos com interesse, é ter $W(x_1, x_2, \cdot, \cdot)$ separadamente convexa para quase todo o par (x_1, x_2). Uma outra condição suficiente, fácil de verificar é a propriedade da convexidade separada para

$$\widetilde{W}(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = W(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) + W(x_2, x_1, \lambda_2, \lambda_1).$$

Na verdade,

$$\begin{aligned}W(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) =& \frac{W(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) + W(x_2, x_1, \lambda_2, \lambda_1)}{2} \\ &+ \frac{W(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) - W(x_2, x_1, \lambda_2, \lambda_1)}{2},\end{aligned}$$

mas quando integramos em $\Omega \times \Omega$ a função W definida como a soma destas duas fracções, vem que o integral da segunda fracção é zero por ser antisimétrico, e portanto apenas resta o primeiro integral. Por isso definimos $\widetilde{W}$ da maneira apresentada atrás.

Seria muito difícil escrever uma condição mais simples equivalente a (2.12). A condição para a semicontinuidade fraca em $W^{1,p}(\Omega)$ para p finito é também (2.12).

Tal como no caso homogéneo segue o seguinte teorema de existência:

Teorema 2.5. *suponhamos que se verificam as condições (2.11) e (2.12). Então existe pelo menos uma solução para o problema de minimização*

$$\inf\{I(u) : u \in W^{1,p}(\Omega), u - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)\},$$

onde $I(u)$ é agora dado por (2.10), e $I(u_0) < \infty$.

Demonstração: Análoga à do teorema 2.4.□

De seguida iremos explorar a forma das equações de equilíbrio deste tipo de princípios variacionais não locais. Analisamos primeiro o caso homogéneo

$$I(u) = \int_{\Omega\times\Omega} W(u'(x_1), u'(x_2))dx_1dx_2,$$

onde $\Omega = (0,1)$ e u verifica as condições de fronteira admissíveis $u(0) = 0$ e $u(1) = \alpha$, para algum α real fixado. Assumimos que W tem a regularidade necessária para que se possam escrever as equações de equilíbrio. A condição de equilíbrio é então dada por

$$\frac{d}{dt}I(u_0 + t\theta)\big|_{t=0} = 0$$

onde θ é uma função teste. Fazendo as contas vem

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}I(u_0 + t\theta)\big|_{t=0} = 0\\ &\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left[\int_{\Omega\times\Omega} W(u_0'(x_1) + t\theta'(x_1), u_0'(x_2) + t\theta'(x_2))\, dx_1dx_2\right]\big|_{t=0} = 0\end{aligned}$$

usando a regra de Leibnitz (ver apêndice), a igualdade anterior é equivalente a

$$\int_{\Omega\times\Omega} \frac{d}{dt}\left[W(u_0'(x_1) + t\theta'(x_1), u_0'(x_2) + t\theta'(x_2))\right]\big|_{t=0} dx_1dx_2 = 0$$

usando agora a regra da cadeia (ver apêndice) vem, (fazemos $(v_1, v_2) = (u_0'(x_1) + t\theta'(x_1), u_0'(x_2) + t\theta'(x_2))$ para não complicar a escrita)

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \int_{\Omega\times\Omega}\left[\frac{\partial W}{\partial\lambda_1}(v_1,v_2)\times\theta'(x_1)+\frac{\partial W}{\partial\lambda_2}(v_1,v_2)\times\theta'(x_2)\right]\Big|_{t=0}dx_1dx_2=0\\
&\Leftrightarrow \int_\Omega\left(\int_\Omega\theta'(x_1)\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_1}(u_0'(x_1),u_0'(x_2))+\frac{\partial W}{\partial\lambda_2}(u_0'(x_2),u_0'(x_1))\right)dx_1\right)dx_2=0\\
&\Leftrightarrow \int_\Omega(\left[\theta(x_1)\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_1}(u_0'(x_1),u_0'(x_2))+\frac{\partial W}{\partial\lambda_2}(u_0'(x_2),u_0'(x_1))\right)\right]_0^1\\
&-\int_\Omega\theta(x_1)\frac{d}{dx_1}\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_1}(u_0'(x_1),u_0'(x_2))+\frac{\partial W}{\partial\lambda_2}(u_0'(x_2),u_0'(x_1))\right)dx_1)dx_2=0
\end{aligned}$$

por θ ser uma função teste

$$\left[\theta(x_1)\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_1}(u_0'(x_1),u_0'(x_2))+\frac{\partial W}{\partial\lambda_2}(u_0'(x_2),u_0'(x_1))\right)\right]_0^1=0,$$

e portanto a igualdade atrás é equivalente a

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega\left(\int_\Omega\theta(x_1)\frac{d}{dx_1}\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_1}(u_0'(x_1),u_0'(x_2))+\frac{\partial W}{\partial\lambda_2}(u_0'(x_2),u_0'(x_1))\right)dx_1\right)dx_2=0\\
&\Leftrightarrow \int_\Omega\left(\int_\Omega\frac{d}{dx_1}\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_1}(u_0'(x_1),u_0'(x_2))+\frac{\partial W}{\partial\lambda_2}(u_0'(x_2),u_0'(x_1))\right)dx_2\right)\theta(x_1)\,dx_1=0\\
&\Leftrightarrow \int_\Omega\frac{d}{dx_1}\left(\int_\Omega\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_1}(u_0'(x_1),u_0'(x_2))+\frac{\partial W}{\partial\lambda_2}(u_0'(x_2),u_0'(x_1))\right)dx_2\right)\theta(x_1)\,dx_1=0.
\end{aligned}$$

Dada a arbitrariedade de θ, e usando novamente a regra de Leibnitz temos que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx_1}\left(\int_\Omega\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_1}(u_0'(x_1),u_0'(x_2))+\frac{\partial W}{\partial\lambda_2}(u_0'(x_2),u_0'(x_1))\right)dx_2\right)=0\\
&\Leftrightarrow \int_\Omega\frac{d}{dx_1}\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_1}(u_0'(x_1),u_0'(x_2))+\frac{\partial W}{\partial\lambda_2}(u_0'(x_2),u_0'(x_1))\right)dx_2=0.
\end{aligned}$$

Calculando agora a derivada em ordem a x_1 vem

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_1^2}(u_0'(x_1), u_0'(x_2)) \times u_0''(x_1) + \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_2^2}(u_0'(x_2), u_0'(x_1)) \times u_0''(x_1)\right) dx_2 = 0$$
$$\Leftrightarrow u_0''(x_1) \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_1^2}(u_0'(x_1), u_0'(x_2)) + \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_2^2}(u_0'(x_2), u_0'(x_1))\right) dx_2 = 0.$$

Esta igualdade conduz-nos a duas possibilidades,

$$u_0''(x) = 0,$$

ou

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_1^2}(u_0'(x), u_0'(y)) + \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_2^2}(u_0'(y), u_0'(x))\right) dy = 0.$$

A primeira condição diz-nos que o único funcional linear admissível é sempre um estado de equilíbrio. Além do mais, se W satisfaz (2.2), juntamente com a primeira condição, este funcional linear, u_0, é de facto um minimizante. A segunda condição é uma espécie de equação integro-diferencial. Se o integrando for positivo

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_1^2}(\lambda_1, \lambda_2) + \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_2^2}(\lambda_2, \lambda_1) > 0, \tag{2.13}$$

o único equilíbrio é o funcional linear acima, que será então o único minimizante. Note-se que (2.13) corresponde exactamente à convexidade estrita separada para $\widetilde{W}$, sendo $\widetilde{W} = W(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) + W(x_2, x_1, \lambda_2, \lambda_1)$. (Em termos básicos se $f''(x) > 0$ para $x \in [a, b]$ então f é estritamente convexa em $[a, b]$) .

Consideremos agora o caso não-homogéneo

$$I(u) = \int_{\Omega\times\Omega} W(x_1, x_2, u'(x_1), u'(x_2))\, dx_1 dx_2,$$

onde Ω e u são como no caso anterior. A condição de equilíbrio será

$$\frac{d}{dt} I(u_0 + t\theta)\big|_{t=0} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left[\int_{\Omega\times\Omega} W(x_1, x_2, u_0'(x_1) + t\theta'(x_1), u_0'(x_2) + t\theta'(x_1))\, dx_1 dx_2\right]\Big|_{t=0} = 0$$

onde θ é uma função teste. Fazendo as contas como anteriormente vem

$$\int_\Omega \frac{d}{dx_1}\left(\int_\Omega \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_1}(x_1, x_2, u_0'(x_1), u_0'(x_2)) + \frac{\partial W}{\partial \lambda_2}(x_2, x_1, u_0'(x_2), u_0'(x_1))\right) dx_2\right) \theta(x_1)\, dx_1 = 0.$$

Novamente dada a arbitariedade de θ, e usando mais uma vez a regra de Leibnitz temos que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx_1}\left(\int_\Omega \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_1}(x_1, x_2, u_0'(x_1), u_0'(x_2)) + \frac{\partial W}{\partial \lambda_2}(x_2, x_1, u_0'(x_2), u_0'(x_1))\right) dx_2\right) = 0 \\
&\quad \Leftrightarrow \int_\Omega \frac{d}{dx_1}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_1}(x_1, x_2, u_0'(x_1), u_0'(x_2)) + \frac{\partial W}{\partial \lambda_2}(x_2, x_1, u_0'(x_2), u_0'(x_1))\right) dx_2 = 0.
\end{aligned}$$

Calculando agora a derivada em ordem a x_1 obtemos a forma das equações de equilíbrio, onde figuram derivadas mistas,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \Big(\frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_1 \partial x_1}(x_1, x_2, u_0'(x_1), u_0'(x_2)) + \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_1^2}(x_1, x_2, u_0'(x_1), u_0'(x_2)) \times u_0''(x_1) \\
&\quad + \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_2 \partial x_2}(x_2, x_1, u_0'(x_2), u_0'(x_1)) + \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_2^2}(x_2, x_1, u_0'(x_2), u_0'(x_1)) \times u_0''(x_1)\Big)\, dx_2 = 0.
\end{aligned}$$

2.3 Relaxação

No decurso deste capítulo demos conta de que a semicontinuidade inferior fraca é uma propriedade crucial no que respeita ao uso do método directo do cálculo das variações para encontrar minimizantes. Esta propriedade é herdada por funcionais cujos integrandos gozam da apropriada propriedade de convexidade. No entanto, a convexidade falha para um número muito grande de problemas interessantes. Nalguns deles podem existir minimizantes, noutros a falta de convexidade conduz-nos a sucessões minimizantes altamente oscilatórias cujos limites fracos não são minimizantes. Como devemos então proceder quando falha a convexidade do integrando? Quando isto acontece, a ideia é convexificar o integrando, isto é, em vez de considerarmos o integrando propriamente dito, consideramos o seu invólucro convexo e passamos a ter um novo problema, associado ao primeiro, a que se dá o nome de problema relaxado associado, e este novo problema admite minimizante. A relação existente entre estes dois problemas baseia-se no facto de os dois ínfimos serem iguais e de este último admitir minimizante. (consultar [9] e [10] para mais pormenores.)

Nesta secção pretende-se descrever a relaxação, mas no caso dos problemas que tem sido objecto de estudo ao longo deste trabalho, os problemas variacionais não locais. Neste contexto, descobriram-se as mais surpreendentes diferenças no que respeita ao caso local. Suponhamos que temos a densidade W, para a qual não se verifica nenhuma das propriedades (2.2) ou (2.12), então o objectivo será conseguir um princípio variacional equivalente, no sentido de preservar o mesmo ínfimo e de o novo princípio variacional admitir minimizante, isto é, de o ínfimo ser atingido no novo problema. A forma usual de proceder para funcionais locais é substituir W pelo seu invólucro convexo. Está provado, como já foi referido atrás, que o novo problema goza de duas propriedades fundamentais, o ínfimo não é alterado e existe minimizante para o novo princípio variacional. No caso não local não existe substituto para o invólucro convexo, ou por outra, não existe uma forma de definir um invólucro convexo apropriado e portanto um novo princípio variacional, que goze destas duas propriedades. Seja CW o possível invólucro convexo de W. Então CW deverá satisfazer uma das duas propriedades, (2.2) ou (2.12). Mas, devido à interacção entre as variáveis, não existe maneira de definir CW pontualmente. Note-se que cada ponto (λ_i, λ_j) não pode ser separado de (λ_j, λ_i), (λ_i, λ_i), (λ_j, λ_j). Cada um deles tem que ser considerado juntamente com os outros três. É esta particularidade da não localidade que torna impossível definir um invólucro convexo apropriado, quando tentamos descrever a relaxação. Pensando no caso homogéneo, uma maneira de tentar definir CW é fazer

$$CW = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} W(\lambda_1, \lambda_2)\, d\nu(\lambda_1) d\nu(\lambda_2) : \nu \in \wp \right\},$$

mas, para qualquer ponto (λ_1, λ_2) escolhido arbitrariamente, o resultado do produto $d\nu(\lambda_1) d\nu(\lambda_2)$ vai sempre originar pontos sobre a diagonal $y = x$. Na verdade, esta definição apenas faz sentido na diagonal porque, obviamente,

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda_1 \, d\nu(\lambda_1) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_2 \, d\nu(\lambda_2).$$

Esta é outra forma de dizer que os quatro pontos não podem ser separados uns dos outros, e por isso não há maneira de definir CW. Por outro lado, as condições de convexidade não são preservadas pela operação sup, então a função

$$CW = \sup\{\varphi : \varphi \text{ verifica (2.2) ou (2.12)}, \, \varphi \leq W\}$$

pode não verificar ela própria nenhuma das duas condições.

A única maneira possivel de descrever a relaxação para estes princípios variacionais não locais é através das medidas de Young e de um funcional generalizado definido nessas medidas.

Consideremos o problema (P) como se segue

$$(P) \qquad \inf\left\{I(u) = \int_{\Omega\times\Omega} W(x_1, x_2, u'(x_1), u'(x_2)) \, dx_1 dx_2\right\}$$

onde $\Omega = (0,1)$, e o ínfimo é procurado no conjunto das funções em $W^{1,p}(\Omega)$ satisfazendo as condições de fronteira $u(0) = 0$ e $u(1) = \alpha$. Se (P) não tiver solução, as sucessões minimizantes desenvolvem oscilações, e em geral, os seus limites fracos não são minimizantes. Neste caso, podemos considerar um princípio variacional generalizado, (RP), onde permitimos que as medidas de Young possam competir no processo de minimização.

Seja novamente $\wp$ a família de medidas de probabilidade $\nu = \{\nu_x\}_{x\in\Omega}$ tal que

$$\int_\Omega \int_{\mathbb{R}} |\lambda|^p \, d\nu_x(\lambda) \, dx < \infty, \qquad \int_\Omega \int_{\mathbb{R}} \lambda \, d\nu_x(\lambda) \, dx = \alpha. \tag{2.14}$$

Note-se que

$$\begin{aligned} \int_\Omega u'(x)dx &= [u(x)]_0^1 = u(1) - u(0) = \alpha \\ &= \int_\Omega \int_{\mathbb{R}} \lambda \, d\nu_x(\lambda) \, dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$u'(x) = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, d\nu_x(\lambda) \, dx,$$

para algum u admissível para (P) tal que ν verifique a segunda condição em (2.14). Para tal ν admissível definimos

$$\tilde{I}(\nu) = \int_{\Omega\times\Omega} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} W(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) \, d\nu_{x_1}(\lambda_1) d\nu_{x_2}(\lambda_2) dx_1 dx_2.$$

Com o objectivo de provar o teorema da relaxação, e em particular, que os ínfimos de I e de $\tilde{I}$ são iguais, precisamos de limitar W superiormente,

$$W(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) \leq M(|\lambda_1|^p + |\lambda_1|^p) + m(x_1, x_2), \tag{2.15}$$

onde $M > 0$ e $m \in L^1(\Omega \times \Omega)$. Esta condição é necessária para concluir que $I(u_j) \to \tilde{I}(\nu)$, sempre que $\{|u_j'|^p\}$ é equiintegrável e ν é a correspondente medida de Young. Esta é uma outra consequência da falta do invólucro convexo para W.

Segue então o seguinte teorema:

Teorema 2.6. *Seja W tal que se verificam as condições (2.11) e (2.15), então existe $\nu_0 \in \wp$ tal que*

$$m = \tilde{I}(\nu_0) = \inf\{\tilde{I}(\nu) : \nu \in \wp\},$$

onde $m = \inf(P)$.

Demonstração: Seja $\tilde{m}$ o valor do ínfimo de $\tilde{I}$ sobre $\wp$. Se fizermos $\nu = \{\delta_{u'(x)}\}_{x\in\Omega}$ para algum u admissível para (P), então ν é admissível para $\tilde{I}$, isto é ν pertence a $\wp$. Então $\tilde{m} \leq m$. Por outro lado, pelo teorema 1.1, dado $\nu \in \wp$, podemos encontrar uma sucessão admissível $\{u_j\}$ tal que $\{|u_j'|^p\}$ é equiintegrável em Ω. Então, usando (2.15), a sucessão

$$\{W(x_1, x_2, u_j'(x_1), u_j'(x_2))\}$$

é equiintegrável e

$$\begin{aligned}
\lim_{j\to\infty} I(u_j) &= \lim_{j\to\infty} \int_{\Omega\times\Omega} W(x_1, x_2, u_j'(x_1), u_j'(x_2)) dx_1 dx_2 \\
&= \int_{\Omega\times\Omega} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} W(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) \, d\nu_{x_1}(\lambda_1) d\nu_{x_2}(\lambda_2) dx_1 dx_2 \\
&= \tilde{I}(\nu),
\end{aligned}$$

o que implica que $m = \tilde{m}$. Finalmente, se $\{u_j\}$ é minimizante para I, então a medida de Young correspondente, ν_0, é admissível para (RP) e, pelo lema 1.2,

$$m = \lim_{j\to\infty} I(u_j) \geq \tilde{I}(\nu_0) \geq \tilde{m} = m,$$

o que conclui a demonstração. □

A vantagem de lidar com $\tilde{I}$ em vez de I, é que $\tilde{I}$ admite minimizantes dentro da classe das medidas de Young apenas sob condições de limitação para W. Nenhuma condição de convexidade é necessária.

Consideremos agora um outro funcional, $\bar{I}$, definido no mesmo conjunto de funções admissíveis para I, da seguinte forma

$$\bar{I}(u) = \inf\{\tilde{I}\nu : \nu \in \wp,\ u'(x) = \int_{\mathbb{R}} \lambda\, d\nu_x(\lambda)\}.$$

Vamos mostrar que o correspondente ínfimo de $\bar{I}$ é também m e o ínfimo é atingido.

Demonstração: Sejam m e $\bar{m}$ os ínfimos de $I(u)$ e de $\bar{I}(u)$ respectivamente. Trivialmente $\bar{m} \leq m$. Pelo teorema anterior $\tilde{m} = m$ e ainda, pela forma como $\bar{I}$ está definido $\tilde{m} \leq \bar{m}$. Juntando tudo, vem

$$m = \tilde{m} \leq \bar{m} \leq m,$$

ou seja $\bar{m} = m$.

Para concluirmos que o ínfimo é atingido, basta proceder como no final da demonstração do teorema anterior.□

A questão é a seguinte: enquanto que para princípios variacionais locais, $\bar{I}$ pode ser representado pelo apropriado invólucro convexo de W, o mesmo não se pode fazer para problemas variacionais não locais, como já foi referido.

Outra importante consequência de não podermos definir o invólucro convexo de W é o facto de o suporte de um qualquer minimizante ν_0 para $\tilde{I}$ não poder ser predizível. Para princípios variacionais locais o suporte de um minimizante generalizado está sempre contido no conjunto onde W e o seu invólucro convexo coíncidem. Esta característica torna a tarefa de analizar exemplos específicos muito mais complicada no que respeita a problemas locais, mesmo para aqueles que nos parecem simples. Consideremos o seguinte exemplo:

$$W(\lambda_1, \lambda_2) = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 1)^2.$$

Se $\alpha \in (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, então $m = 0$ e o minimizante de $\tilde{I}$ é

$$\nu = \frac{1 + \alpha\sqrt{2}}{2}\delta_{1/\sqrt{2}} + \frac{1 - \alpha\sqrt{2}}{4}\delta_{-1/\sqrt{2}}.$$

Se α não estiver no intervalo $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, então a função linear parece ser a solução, mas apenas com um trabalho mais detalhado conseguiriamos estabelecer isto de uma forma mais rigorosa.

Capítulo 3

Problemas não locais no caso vectorial

Vamos estudar o caso vectorial de uma forma breve, uma vez que, entendida a natureza não local de um funcional, nada há de especial a apontar no caso vectorial. Consideremos agora o funcional

$$I(u) = \int_{\Omega\times\Omega} W(x_1, x_2, u(x_1), u(x_2), \nabla u(x_1), \nabla u(x_2))\, dx_1 dx_2$$

onde $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$ e a densidade

$$W : \Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{M}^{m\times N} \times \mathbb{M}^{m\times N} \to \mathbb{R}$$

é contínua nas últimas quatro variáveis e mensurável em $\Omega \times \Omega$ e satisfaz as seguintes condições:

$$\begin{aligned} C(|A_1|^p + |A_2|^p + |\lambda_1|^p + |\lambda_2|^p) + c(x_1, x_2) \\ \leq W(x_1, x_2, , \lambda_1, \lambda_2, A_1, A_2) \\ \leq M(|A_1|^p + |A_2|^p + |\lambda_1|^p + |\lambda_2|^p) + m(x_1, x_2), \end{aligned} \tag{3.1}$$

$c, m \in L^1(\Omega \times \Omega)$, $0 < C < M$.

Se $u_j \rightharpoonup u$ em $W^{1,p}(\Omega)$ e $\nu = \{\nu_x\}_{x\in\Omega}$ é a correspondente medida de Young do gradiente para uma subsucessão adequada, então a correspondente medida de

Young, Λ, para a sucessão $\{(u_j(x_1), u_j(x_2), \nabla u_j(x_1), \nabla u_j(x_2))\}$ é

$$\Lambda_{(x_1,x_2)} = \delta_{u(x_1)} \otimes \delta_{u(x_2)} \otimes \nu_{x_1} \otimes \nu_{x_2}.$$

O facto de Λ ser trivial nas componentes correspondentes a $u_j(x_1)$ e $u_j(x_2)$ reflecte o facto de que $u_j \to u$ fortemente em $L^p(\Omega)$ (ver [22]). As medidas de Young associadas a sucessões limitadas de gradientes em $W^{1,p}(\Omega)$ tem sido caracterizadas em [13] pelo significado da desigualdade de Jensen para funções quasiconvexas. Que funções são estas?

Definição 3.1. Uma função φ diz-se quasiconvexa se

$$\varphi(Y) \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \varphi(Y + \nabla u(x))\, dx,$$

para qualquer matriz $Y \in M^{m\times N}$ e qualquer u suave de suporte compacto em Ω.

As medidas de Young associadas a sucessões que dependem de gradientes são chamadas medidas de Young dos gradientes. Seja $\wp$ o conjunto dessas medidas de Young dos gradientes. $\wp$ caracteriza-se pelas três seguintes propriedades:

(i) existe $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\nabla u(x) = \int_{M^{m\times N}} A\, d\nu_x(A);$$

(ii) para qualquer função quasiconvexa ψ com p-crescimento no infinito

$$\psi(\nabla u(x)) \leq \int_{M^{m\times N}} \psi(A)\, d\nu_x(A), \qquad p.q.t\, o\, x \in \Omega;$$

(iii) a função

$$x \mapsto \int_{M^{m\times N}} |A|^p\, d\nu_x(A)$$

pertence a $L^1(\Omega)$.

Além disso, qualquer destas famílias de medidas de probabilidade podem ser geradas por uma sucessão limitada em $W^{1,p}(\Omega)$ tendo crescimento de ordem p dos seus gradientes equiintegráveis em Ω. (Para mais pormenores consultar [17], pág. 153.)

Tal como no caso escalar 1-dimensional temos o seguinte teorema usando os funcionais fracamente semicontínuos inferiormente com respeito à convergência fraca em $W^{1,p}(\Omega)$, e o teorema de existência associado.

Teorema 3.2. *O funcional I é fracamente semicontínuo inferiormente em* $W^{1,p}(\Omega)$ *sse*

$$\int_{\Omega\times\Omega}\int_{M^{m\times N}\times M^{m\times N}} W(x_1,x_2,u(x_1),u(x_2),A_1,A_2)\,d\nu_{x_1}(A_1)d\nu_{x_2}(A_2)\,dx_1dx_2$$
$$\geq \int_{\Omega\times\Omega} W(x_1,x_2,u(x_1),u(x_2),\nabla u(x_1),\nabla u(x_2))\,dx_1dx_2,$$

para todo $\nu\in\wp$ *onde*

$$\nabla u(x)=\int_{M^{m\times N}} Ad\nu_x(A).$$

Uma condição suficiente para a semicontinuidade inferior fraca é a quasiconvexidade separada nas duas variáveis dos gradientes.

Também como no caso 1-dimensional, prova-se o seguinte teorema da existência

Teorema 3.3. *Suponhamos que se verificam as desigualdades (3.1) e a desigualdade do teorema anterior. Então, existe solução para o problema*

$$\inf\{I(u): u\in W^{1,p}(\Omega),\ u-u_0\in W_0^{1,p}(\Omega)\},$$

para qualquer $u_0\in W^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração: análoga à do teorema 2.4.□

A relaxação pode ser descrita apenas em termos das medidas de Young dos gradientes. Definimos um funcional generalizado em $\wp$ por

$$\tilde{I}(\nu)=\int_{\Omega\times\Omega}\int_{M^{m\times N}\times M^{m\times N}} W(x_1,x_2,u(x_1),u(x_2),A_1,A_2)\,d\nu_{x_1}(A_1)d\nu_{x_2}(A_2)dx_1dx_2,$$

onde

$$\nabla u(x)=\int_{M^{m\times N}} Ad\nu_x(A).$$

Um teorema típico de relaxação mostra que o ínfimo de I e de $\tilde{I}$ são o mesmo, e o segundo é atingido. Incorporamos agora os valores de fronteira dados por u_0 em $\wp$ fazendo

$$\nabla u(x) = \int_{M^{m\times N}} A d\nu_x(A), \qquad u - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Teorema 3.4. *Sob as mesmas condições do teorema 3.3, existe $\nu_0 \in \wp$ tal que*

$$\tilde{I}(\nu_0) = \inf\{\tilde{I}(\nu) : \nu \in \wp\} = \inf\{I(u) : u \in W^{1,p}(\Omega),\ u - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)\}.$$

Demonstração: análoga à do teorema 2.6.□

Capítulo 4

Exemplos

Para ilustrar a importância do teorema 2.2, assim como a sua aplicação prática, vamos fazer, neste capítulo, o estudo de alguns exemplos práticos e específicos que consideramos importantes. O objectivo é analisar a semicontinuidade inferior fraca do integral I em cada caso, e testar as condições necessárias e suficientes, estudadas atrás.

Exemplo 4.1. *Seja a função integranda* $W(\lambda_1, \lambda_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)^p$. *Queremos analisar sob que condições temos a semicontinuidade inferior fraca do integral. Consideremos* $p = 1, 2$ *e* 3, *e vejamos qual a diferença entre considerar p ímpar e p par. Seja* $\Omega = (0, 1)$, *um intervalo aberto da recta real.*

1) *p=1*

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega\times\Omega} W(u'(x_1), u'(x_2))\, dx_1 dx_2 &= \int_0^1 \left(\int_0^1 (u'(x_1) - u'(x_2))\, dx_1\right) dx_2 \\
&= \int_0^1 [u(x_1) - u'(x_2)x_1]_0^1\, dx_2 \\
&= \int_0^1 (u(1) - u'(x_2) - u(0))\, dx_2 \\
&= [u(1)x_2 - u(x_2) - u(0)x_2]_0^1 \\
&= [u(1) - u(1) - u(0) + u(0) = 0.
\end{aligned}$$

2) *p=2*

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega\times\Omega} W(u'(x_1),u'(x_2))\,dx_1dx_2 &= \int_0^1\left(\int_0^1 (u'(x_1)-u'(x_2))^2\,dx_1\right)dx_2\\
&= \int_0^1\left(\int_0^1 (u'^2(x_1)-2u'(x_1)u'(x_2)+u'^2(x_2))\,dx_1\right)dx_2\\
&= \int_0^1\int_0^1 u'^2(x_1)dx_1dx_2+\int_0^1\int_0^1 u'^2(x_2))dx_1dx_2\\
&- 2\int_0^1\int_0^1 u'(x_1)u'(x_2)dx_1dx_2,
\end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned}
-2\int_0^1\int_0^1 u'(x_1)u'(x_2)dx_1dx_2 &= -2\int_0^1 [u(x_1)u'(x_2)]_0^1\,dx_2\\
&= -2\int_0^1 [u(1)u'(x_2)-u(0)u'(x_2)]\,dx_2\\
&= -2\,[u(1)u(x_2)-u(0)u(x_2)]_0^1\\
&= -2\,(u(1)u(1)-u(0)u(1)-u(1)u(0)+u(0)u(0))\\
&= -2u^2(1)-4u(0)u(1)+2u^2(0),
\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega\times\Omega} W(u'(x_1),u'(x_2))\,dx_1dx_2 &= \int_0^1\int_0^1 u'^2(x_1)dx_1dx_2+\int_0^1\int_0^1 u'^2(x_2))dx_1dx_2\\
&- 2\int_0^1\int_0^1 u'(x_1)u'(x_2)dx_1dx_2\\
&= \int_0^1\int_0^1 u'^2(x_1)dx_1dx_2+\int_0^1\int_0^1 u'^2(x_2))dx_1dx_2\\
&- 2u^2(1)-4u(0)u(1)+2u^2(0).
\end{aligned}$$

3) *p=3*

$$\int_{\Omega\times\Omega} W(u'(x_1),u'(x_2))\,dx_1dx_2 = \int_0^1\left(\int_0^1 (u'(x_1)-u'(x_2))^3\,dx_1\right)dx_2$$
$$= \int_0^1\left(\int_0^1 (u'(x_1)^3 - 3u'(x_1)^2u'(x_2) + 3u'(x_1)u'(x_2)^2 - u'(x_2)^3)\,dx_1\right)dx_2$$
$$= \int_0^1\int_0^1 u'(x_1)^3dx_1dx_2 - 3\int_0^1\int_0^1 u'(x_1)^2u'(x_2)dx_1dx_2$$
$$+ 3\int_0^1\int_0^1 u'(x_1)u'(x_2)^2dx_1dx_2 - \int_0^1\int_0^1 u'(x_2)^3dx_1dx_2 = 0$$

Depois de efectuados os cálculos, podemos concluir que o integral

$$\int_{\Omega\times\Omega} (u'(x_1)-u'(x_2))^p\,dx_1dx_2, \quad p=1,2,3$$

é igual a zero para p ímpar, e para p par pode ser ou não zero. O que é que isto significa então? Se $W(\lambda_1,\lambda_2)$ é anti-simétrico (p ímpar), o integral, sendo zero (constante), é fracamente semicontínuo inferiormente (mais do que isso, é contínuo), ou seja, a propriedade de anti-simetria para W é uma condição suficiente para a semicontinuidade inferior fraca. Portanto os casos em que W é anti-simétrico são casos triviais. Outro exemplo trivial de um integrando anti-simétrico é $W(\lambda_1,\lambda_2) = w(\lambda_1) - w(\lambda_2)$, onde w é uma função convexa arbitrária.

Exemplo 4.2. *Seja $W(\lambda_1,\lambda_2) = w(\lambda_1-\lambda_2)$. Com este exemplo pretendemos responder à seguinte questão:*

Se w for convexa par, será que W verifica as desigualdades (2.7)? E se for ímpar?

Suponhamos então que w é uma função convexa par. Vamos ver que de facto, W satisfaz (2.7), ou seja

$$W\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2},\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right) \le \frac{1}{4}W(\lambda_1,\lambda_1) + \frac{1}{4}W(\lambda_1,\lambda_2) + \frac{1}{4}W(\lambda_2,\lambda_1) + \frac{1}{4}W(\lambda_2,\lambda_2).$$

Se w é uma função par verifica

$$w(\lambda_1-\lambda_2) = w(\lambda_2-\lambda_1).$$

Por um lado,

$$W\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2},\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right)=w\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}-\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right)=w(0),$$

por outro,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}W(\lambda_1,\lambda_1)+\frac{1}{4}W(\lambda_1,\lambda_2)+\frac{1}{4}W(\lambda_2,\lambda_1)+\frac{1}{4}W(\lambda_2,\lambda_2)\\
=&\frac{1}{4}w(0)+\frac{1}{4}w(\lambda_1-\lambda_2)+\frac{1}{4}w(\lambda_2-\lambda_1)+\frac{1}{4}w(0)\\
=&\frac{1}{2}w(0)+\frac{1}{2}w(\lambda_1-\lambda_2).
\end{aligned}$$

Assim sendo, verificar que W satisfaz (2.7) é o mesmo que verificar que

$$w(0)\leq w(\lambda_1-\lambda_2).$$

Se w é uma função convexa, então

$$w(t\lambda_1+(1-t)\lambda_2)\leq tw(\lambda_1)+(1-t)w(\lambda_2),$$

$\forall t\in(0,1)$, em particular, para $t=\frac{1}{2}$ vem

$$w\left(\frac{1}{2}\lambda_1+\frac{1}{2}\lambda_2\right)\leq\frac{1}{2}w(\lambda_1)+\frac{1}{2}w(\lambda_2). \tag{4.1}$$

Usando a desigualdade (4.1) e a paridade de w vem

$$\begin{aligned}
W\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2},\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right)&=w\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}-\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right)\\
&=w\left(\frac{\lambda_1}{2}+\frac{\lambda_2}{2}-\frac{\lambda_1}{2}-\frac{\lambda_2}{2}\right)\\
&=w\left(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}+\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}\right)\\
&\leq\frac{1}{2}w(\lambda_1-\lambda_2)+\frac{1}{2}w(\lambda_2-\lambda_1)\\
&=w(\lambda_1-\lambda_2),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$w(0)=w\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}-\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right)\leq w(\lambda_1-\lambda_2).$$

Concluimos assim que se w for uma função convexa par, então satisfaz as desigualdades (2.7). Esta é também uma consequência do lema 2.3. Se a função for ímpar, caimos novamente no caso anti-simétrico e portanto trivial. Sendo w ímpar, isto é, $w(\lambda_2 - \lambda_1) = -w(\lambda_1 - \lambda_2)$, vem

$$W\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}, \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right) = w\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} - \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right) = w(0),$$

e

$$\frac{1}{4}W(\lambda_1,\lambda_1) + \frac{1}{4}W(\lambda_1,\lambda_2) + \frac{1}{4}W(\lambda_2,\lambda_1) + \frac{1}{4}W(\lambda_2,\lambda_2) = \frac{1}{2}w(0).$$

Ora, para que w verique (2.7), temos que ter

$$w(0) \leq 0.$$

Mas isso é trivial, porque sendo w ímpar vem

$$w\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} - \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right) = -w\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} - \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right)$$

ou seja

$$w(0) = -w(0)$$

e portanto $w(0) = 0$.

Uma importante questão a salientar é a seguinte: será necessária a convexidade de w para que W verifique as desigualdades do teorema 2.2 e portanto a semicontinuidade inferior fraca para o integral I? Esta é uma questão para a qual ainda não temos resposta. O que sabemos é que a convexidade é condição suficiente para as desigualdades (2.7). Podemos pensar, pelos resultados obtidos neste último exemplo, que de facto a convexidade de w pode ser condição necessária para que W verifique as desigualdades (2.7). Mas este é apenas um exemplo, e esta é apenas uma possivel conjectura.

Considerando o problema

$$(P) \qquad \inf\left\{I(u) = \int_{\Omega\times\Omega} w(u'(x_1) - u'(x_2))\,dx_1dx_2 : u \in W^{1,p}(\Omega)\,, u - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)\right\}$$

onde Ω *é um intervalo aberto na recta real e* w *é a função convexa e par estudada atrás. Se se verificar uma condição de coercividade apropriada, provamos, usando o teorema 2.4, que demonstrámos no capítulo 2, que existe minimizante para o problema* (P).

Um exemplo concreto interessante, que tem sido estudado por Bellettini e Alberti em [1],[2], [4], é o seguinte:

$$W(\lambda_1, \lambda_2) = w(\lambda_1 - \lambda_2) = \arctan[(\lambda_1 - \lambda_2)^2].$$

Será o integral

$$I(u) = \int_{\Omega\times\Omega} \arctan[(u'(x_1) - u'(x_2))^2]\, dx_1 dx_2$$

onde $u \in W^{1,p}(\Omega)$, *e* $u - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *fracamente semicontínuo inferiormente? Ou por outra, será que* W *verifica as desigualdades (2.7)? A função* w *é trivialmente uma função par, mas falha a convexidade. Vejamos o seu gráfico:*

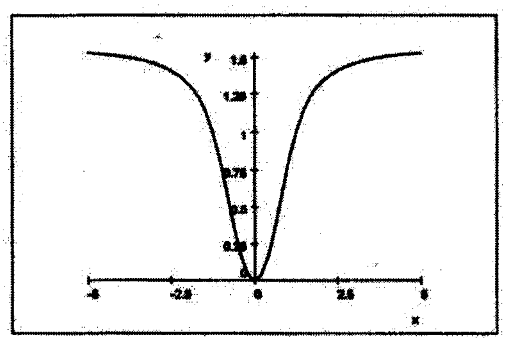

Figura 4.1: $\arctan(x^2)$

Como podemos observar pelo gráfico, w *só é convexa entre os seus dois únicos pontos de inflexão. Será que ainda assim* W *verifica as desigualdades (2.7)? Caimos mais uma vez na questão de saber se a convexidade é ou não condição necessária para as desigualdades (2.7).*

Exemplo 4.3. *Consideremos agora um integral não-homogéneo, cujo integrando é o produto de funções de uma variável só, isto é,*

$$W(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^2(1 + x_2)\lambda_2^2,$$

e consideramos $\Omega = [0, 1]$. *O problema variacional associado,*

$$\inf\left\{I(u) = \int_0^1 \int_0^1 u'(x_1)^2(1 + x_2)u'(x_2)^2 \, dx_1 dx_2 \, , u(0) = 0, \, u(1) = 1\right\},$$

é um problema de natureza não local e corresponde a minimizar um produto de integrais.

Vamos aplicar o teorema 2.5 para mostrar a existência de minimizante para este integral. Para isso temos de verificar duas propriedades muito importantes: a coercividade e a semicontinuidade inferior fraca. Para verificarmos esta última, basta que se verifique a propriedade da convexidade separada para W *em relação às duas últimas variáveis, o que é trivial porque* W *é convexa com coeficiente positivo nas duas variáveis separadamente.*

Relativamente à coercividade mostremos então que u_j *é limitado em* $W^{1,2}(0, 1)$.

$$\begin{aligned}
M \geq I(u) &= \int_0^1 \int_0^1 u_j'(x_1)^2(1 + x_2)u_j'(x_2)^2 \, dx_1 dx_2 \\
&= \int_0^1 u_j'(x_1)^2 \, dx_1 \int_0^1 (1 + x_2)u_j'(x_2)^2 \, dx_2 \\
&\geq \left(\int_0^1 u_j'(x_1) \, dx_1\right)^2 \int_0^1 (1 + x_2)u_j'(x_2)^2 \, dx_2 \\
&= (u_j(1) - u_j(0)) \int_0^1 (1 + x_2)u_j'(x_2)^2 \, dx_2 \\
&= \int_0^1 (1 + x_2)u_j'(x_2)^2 \, dx_2 \geq \int_0^1 u_j'(x_2)^2 \, dx_2,
\end{aligned}$$

onde M *é uma constante, logo* u_j *é limitado em* $W^{1,2}(0, 1)$.

Verificadas ambas as condições, concluimos, pelo teorema 2.5 que existe minimizante para este problema. Analisemos a forma das condições de optimalidade ou *condições de equilíbrio. Reportando-nos agora ao estudo efectuado na secção 2.2 a condição de equilíbrio será então dada por*

$$\frac{d}{dt}I(u_0+t\theta)\big|_{t=0}=0$$

onde θ é uma função teste. Feitos os cálculos, a forma destas equações para este caso, que é o caso não-homogéneo é a seguinte:

$$\int_\Omega \Big(\frac{\partial^2 W}{\partial\lambda_1\partial x_1}(x_1,x_2,u_0'(x_1),u_0'(x_2))+\frac{\partial^2 W}{\partial\lambda_1^2}(x_1,x_2,u_0'(x_1),u_0'(x_2))\times u_0''(x_1)$$
$$+\frac{\partial^2 W}{\partial\lambda_2\partial x_2}(x_2,x_1,u_0'(x_2),u_0'(x_1))+\frac{\partial^2 W}{\partial\lambda_2^2}(x_2,x_1,u_0'(x_2),u_0'(x_1))\times u_0''(x_1)\Big)\,dx_2=0.$$

Calculemos então as derivadas nos pontos correspondentes:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial\lambda_1}(x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2)&=2\lambda_1(1+x_2)\lambda_2^2\\
\frac{\partial W}{\partial\lambda_2}(x_2,x_1,\lambda_2,\lambda_1)&=2\lambda_2^2(1+x_1)\lambda_1\\
\frac{\partial^2 W}{\partial\lambda_1^2}(x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2)&=2(1+x_2)\lambda_2^2\\
\frac{\partial^2 W}{\partial\lambda_2^2}(x_2,x_1,\lambda_2,\lambda_1)&=2\lambda_2^2(1+x_1)\\
\frac{\partial^2 W}{\partial\lambda_1\partial x_1}(x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2)&=0\\
\frac{\partial^2 W}{\partial\lambda_2\partial x_2}(x_2,x_1,\lambda_2,\lambda_1)&=2\lambda_2^2\lambda_1.
\end{aligned}$$

Substituindo as derivadas na equação vem

$$\int_0^1\big(2(1+x_2)u_0'(x_2)^2u_0''(x_1)+2u_0'(x_2)^2u_0'(x_1)+2u_0'(x_2)^2(1+x_1)u_0''(x_1)\big)\,dx_2=0$$
$$\Leftrightarrow 2\int_0^1\big((1+x_2)u_0'(x_2)^2u_0''(x_1)+u_0'(x_2)^2u_0'(x_1)+u_0'(x_2)^2(1+x_1)u_0''(x_1)\big)\,dx_2=0$$
$$\Leftrightarrow u_0''(x_1)\int_0^1(1+x_2)u_0'(x_2)^2\,dx_2+((1+x_1)u_0''(x_1)+u_0'(x_1))\int_0^1 u_0'(x_2)^2\,dx_2=0.$$

Resumindo, a equação de equilíbrio para este caso tem a forma

$$Au_0''(x_1)+B\left((1+x_1)u_0''(x_1)+u_0'(x_1)\right)=0,$$

onde $A = \int_0^1 (1 + x_2) u_0'(x_2)^2 \, dx_2$ *e e* $B = \int_0^1 u_0'(x_2)^2 \, dx_2$. *É uma equação de 2ª-ordem com coeficientes que dependem de uma forma integral do próprio u, que é desconhecido. Esta é uma equação do tipo integro-diferencial não local. Isto mostra que a solução óptima não é a função linear. Mesmo para este caso, considerado simples, não conseguimos resolver explicitamente estas equações. Este é um exemplo que ilustra o complicado que pode ser a resolução de problemas não locais.*

Capítulo 5

Apendíce

5.1 Espaços de medida

Nesta secção vamos introduzir a definição de medida e dar algumas noções básicas que nos ajudem a perceber e lidar com este conceito. Podemos encontrar mais pormenores e demonstrações em qualquer livro de medida e integração, por exemplo o livro [21] .

Definição 5.1. **1.** Uma colecção $\mathfrak{R}$ de subconjuntos de um conjunto X diz-se que é uma σ- álgebra em X se $\mathfrak{R}$ tem as seguintes propriedades:

1.1 $X \in \mathfrak{R}$;

1.2 Se $A \in \mathfrak{R}$, então $A^c \in \mathfrak{R}$, onde A^c é o complementar de A com respeito a X;

1.3 Se $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ e se $A_n \in \mathfrak{R}$ para $n = 1, 2, 3, ...$, então $A \in \mathfrak{R}$.

2. Se $\mathfrak{R}$ é uma σ- álgebra em X então diz-se que $(X, \mathfrak{R})$ é um espaço mensurável e os elementos de $\mathfrak{R}$ são os conjuntos mensuráveis de X.

3. Se X é um espaço mensurável, Y um espaço topológico e f uma aplicação de X em Y, diz-se que f é mensurável se $f^{-1}(V)$ é um conjunto mensurável em X para todo o conjunto aberto V em Y.

Definição 5.2. 1. Chama-se medida positiva a uma função μ, definida numa σ-álgebra $\Re$ com valores em $[0, \infty]$, e que é numeravelmente aditiva. Isto significa que se $\{A_i\}$ é uma colecção numerável de elementos de $\Re$ disjuntos dois a dois, então

$$\mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Além disso, supõe-se que existe pelo menos um $A \in \Re$ tal que $\mu(A) < \infty$.

2. Chama-se espaço de medida a um espaço mensurável em que está definida uma medida positiva na σ- álgebra dos seus conjuntos mensuráveis.

3. Chama-se medida complexa a uma função complexa numeravelmente aditiva definida numa σ- álgebra.

Teorema 5.3. *Seja μ uma medida positiva definida numa σ- álgebra $\Re$. Então*

1. $\mu(\emptyset) = 0$;

2. *Se $A_1, ..., A_n$ são elementos de $\Re$ disjuntos dois a dois então*

$$\mu\left(\cup_{1 \leq i \leq n} A_i\right) = \sum_{1 \leq i \leq n} \mu(A_i);$$

3. $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$, *se* $A, B \in \Re$;

4. *Seja (A_n) uma sucessão em $\Re$. Se $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset ...$ e $A = \cup_{n \in \mathbb{N}}$, então* $\lim_n \mu(A_n) = \mu(A)$;

5. *Seja (A_n) uma sucessão em $\Re$. Se $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset ...$ e $A = \cap_{n \in \mathbb{N}}$, então* $\lim_n \mu(A_n) = \mu(A)$ *se* $\mu(A_1) < +\infty$.

Definição 5.4 (medidas reais e vectoriais). Seja $(X, \Re)$ um espaço mensurável e $m \in \mathbb{N}$ com $m > 1$. A função $\mu : \Re \to \mathbb{R}^m$ diz-se uma medida real se $m = 1$, e diz-se uma medida vectorial se $m > 1$.

Definição 5.5 (medidas de Borel e de Radon). Seja X um espaço métrico localmente compacto e separável, $\Im$ a σ- álgebra de Borel, e consideremos o espaço mensurável $(X, \Im)$.

1. Uma medida positiva em $(X, \Im))$ diz-se medida de Borel. Se uma medida de Borel é finita em conjuntos compactos, diz-se medida de Radon Positiva.

2. Uma função de conjunto real ou vectorial definida em subconjuntos de Borel relativamente compactos de X, é uma medida em $(K, \Im)$ para qualquer compacto $K \subset X$ e chama-se medida de Radon (real ou vectorial) em X.

Definição 5.6 (convergência em medida). Seja μ uma medida positiva definida num espaço mensurável $(X, \Re)$. Sejam f_n e f funções μ- mensuráveis. Dizemos que f_n converge para f em medida se

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x) > \varepsilon\}) = 0 \quad \forall\varepsilon > 0.$$

A convergência quase sempre pode ser comparada com a convergência em medida; de facto, se $\{f_n\}$ é uma sucessão de funções reais μ- mensuráveis em X:

1. se $\mu(X) < \infty$ e $f_n \to f$ μ- q.s. então $f_n \to f$ em medida;

2. se $f_n \to f$ em medida, então a subsucessão $\{f_{n_k}\}$ converge para f μ- q.s.

(Para mais pormenores, consultar [3].)

5.2 Espaços L^p

Nesta secção vamos falar de uma forma muito resumida dos espaços L^p e dos diferentes tipos de convergência associada a estes espaços. Para mais pormenores ver [7].

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $1 \leq p < \infty$. Define-se

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u \,\text{é mensurável e}\, |u|^p \in \mathrm{L}^1(\Omega)\},$$

e para $p = \infty$ define-se

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u \text{ é mensurável e existe } C \text{ tal que } |u(x)| \leq C q.s. \text{ em}\, \Omega\},$$

onde C é uma constante.

Definição 5.7. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $1 \leq p \leq \infty$. Define-se uma norma em $L^p(\Omega)$ da seguinte forma:

$$\|u\|_{L^p} = \begin{cases} \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} & \text{se } 1 \leq p < \infty, \\ \inf\{\alpha : |u(x)| < \alpha \text{ q.s. em } \Omega\} & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

Nota 5.8. *Esta expressão define realmente uma norma desde que se considerem classes de equivalência. Neste sentido $L^p(\Omega)$ é um espaço normado, é mesmo um espaço de Banach. Pode mostrar-se que o seu dual é $L^{p'}$ com p' verificando $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$ para p finito e maior do que* 1.

Definição 5.9. Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$,

1. se $1 \leq p \leq \infty$, dizemos que f_n converge (fortemente) para f se f_n, $f \in L^p(\Omega)$ e

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} = 0,$$

e escrevemos $f_n \to f \ L^p(\Omega)$.

2. se $1 \leq p < \infty$, dizemos que f_n converge fracamente para f se f_n, $f \in L^p(\Omega)$ e

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega [f_n(x) - f(x)]\varphi(x)\, dx = 0, \quad \forall \varphi \in L^{p'}(\Omega),$$

e escrevemos $f_n \rightharpoonup f \ L^p(\Omega)$.

3. se $p = \infty$, dizemos que f_n converge fracamente* para f se f_n, $f \in L^\infty(\Omega)$ e

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega [f_n(x) - f(x)]\varphi(x)\, dx = 0, \quad \forall \varphi \in L^1(\Omega),$$

e escrevemos $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f \ L^\infty(\Omega)$.

Teorema 5.10 (relação entre convergência forte e convergência fraca). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado.*

1. $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f \; L^\infty \Rightarrow f_n \rightharpoonup f \; L^p \quad \forall 1 \leq p < \infty;$

2. $f_n \to f \; L^p \Rightarrow \|f_n\|_{L^p} \to \|f\|_{L^p} \quad \forall 1 \leq p \leq \infty;$

3. *Se* $1 \leq p < \infty$ *e se* $f_n \rightharpoonup f \; L^p$*, então existe uma constante* $k > 0$ *tal que* $\|f_n\|_{L^p} \leq k$ *e* $\|f\|_{L^p} \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^p}$*. O resultado também se aplica para* $p = \infty$ *e se* $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f \; L^\infty$*.*

4. *Se* $1 < p < \infty$ *e se existe uma constante* k *tal que* $\|f_n\|_{L^p} \leq k$*, então existe uma subsucessão* $\{f_{n_i}\}$ *e* $f \in L^p$ *tal que* $f_{n_i} \rightharpoonup f \; L^p$*. O resultado é verdadeiro se* $p = \infty$ *e se* $f_{n_i} \overset{\star}{\rightharpoonup} f \; L^\infty$*.*

5. *Seja* $1 \leq p \leq \infty$ *e* $f_n \to f \; L^p$*, então existe uma subsucessão* $\{f_{n_i}\}$ *tal que* $f_{n_i} \to f$ *q.s. e* $|f_{n_i}| \leq h$ *q.s. com* $h \in L^p$*.*

5.3 Espaços de Sobolev

Vamos introduzir os espaços de Sobolev, mas, mais uma vez, de forma sintética. Para mais pormenores ver [7] e também [8]. Neste último encontramos o estudo destes espaços apenas em dimensão 1.

Começamos por introduzir os espaços de Sobolev em dimensão 1. Seja $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$ um intervalo, limitado ou não, e p um número real tal que $1 \leq p < \infty$. Seja X um espaço linear de funções para as quais

$$\|u\|_{W^{1,p}_\Omega} = (\|u\|^p_{L^p} + \|u'\|^p_{L^p})^{1/p}$$

é finito, isto é,

$$\|u\|_{W^{1,p}_\Omega} = \left(\int_I |u|^p + |u'|^p \, dx\right)^{1/p} < \infty. \tag{5.1}$$

Temos que X contém $C^1_c(\Omega)$ e também contém $C^1(\bar{\Omega})$, se Ω for limitado, onde

$$C^1_c(\Omega) = \cup_{n=1}^\infty E_n \text{ em que } E_n = \{f \in (\Omega) : f(x) = 0 \quad \forall x \notin \Omega_n\}$$

sendo

$$\Omega_n = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) \geq 1/n\},$$

e ainda

$$C^1(\bar{\Omega}) = \{f \in C^1(\Omega) : f \text{ e } f' \text{ são uniformemente contínuas}\},$$

A norma $\|\cdot\|_{W^{1,p}\Omega}$ é uma norma em $C^1(\bar{\Omega})$, mas $C^1(\bar{\Omega})$ não é completo relativamente a esta norma. O completamento de $C^1(\bar{\Omega})$ com respeito à norma (5.1) denota-se por $W^{1,p}(\Omega)$ e chama-se espaço de Sobolev. O fecho de $C_c^1(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$ denota-se por $W_0^{1,p}(\Omega)$. Para $p = \infty$ temos

$$\|u\|_W^{1,\infty} = \max\{\|u\|_L^{\infty}, \|u'\|_L^{\infty}\},$$

e

$$W_0^{1,\infty} = \{u \in W^{1,p}(\Omega) : u = 0 \text{ em } \partial\Omega\}.$$

Este é um modo de definir os espaços de Sobolev com base no completamento. Outro modo, que se demonstra ser equivalente, baseia-se no conceito de derivada no sentido das distribuições e é o seguinte:

Definição 5.11. O espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ define-se por:

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p : \exists v \in L^p \text{ tal que } \int_\Omega u\varphi'\,dx = -\int_\Omega v\varphi\,dx \quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega)\right\}.$$

A este v associado a cada u chamamos derivada fraca de u. φ diz-se uma função teste.

Quando $p = 2$, designamos por H^1 o espaço $W^{1,p}$ e por H_0^1 o espaço $W_0^{1,p}$, porque são espaços de Hilbert.

Os espaços de Sobolev são espaços de Banach munidos da norma (5.1). Os seus elementos são classes de equivalência de funções e podem ser indentificados como elementos de $L^p(\Omega)$. Por definição de $W^{1,p}(\Omega)$, a função identidade define uma correspondência de $W^{1,p}(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$. Desde que não haja confusão, referimo-nos a elementos de $W^{1,p}(\Omega)$ como sendo funções. Por exemplo, podemos dizer que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ é uma função contínua se na classe de equivalência de u existe uma função contínua, ou seja, qualquer elemento na classe de equivalência de u é uma função contínua após uma redefinição num conjunto de medida nula.

De forma análoga se fala em espaços de Sobolev de ordem superior a um e em dimensão superior a um. Consideremos então um aberto Ω de $\mathbb{R}^n$. Seja $k \geq 0$ um inteiro, notamos

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u : \nabla^m u \in L^p(\Omega) : 0 \leq m \leq k\}$$

e

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \begin{cases} \left(\sum_{m=0}^{k}(\|\nabla^m u\|_{L^p})^p\right)^{1/p} & \text{se } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{0 \leq m \leq k}(\|\nabla^m u\|_{L^\infty}) & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

Se $1 \leq p < \infty$, $W_0^{k,p}$ define-se como sendo o fecho de C_c^∞ em $W^{k,p}$. Se $p = 2$, $W^{k,2} = H^k$ e $W_0^{2,p} = H_0^k$.

Teorema 5.12. *Seja E um espaço de Banach reflexivo e seja (u_j) uma sucessão limitada em E. Então podemos extrair uma subsucessão da primeira, (u_{j_k}), que converge fracamente.*

5.4 Conjuntos e funções convexas

Uma das noções mais usadas neste trabalho é a noção de convexidade, por isso deixamos aqui algumas definições e resultados com respeito a tão importante conceito. Para mais pormenores, aconselhamos a consulta, por exemplo, do livro [11].

Definição 5.13. Um conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ diz-se convexo se o segmento de recta entre quaisquer dois pontos de C está contido em C, isto é,

$$x, y \in C \Rightarrow \{(1-\lambda)x + \lambda y : 0 < \lambda < 1\} \subset C.$$

Definição 5.14. Seja f uma função cujos valores são reais ou $+\infty$, definida em $\mathbb{R}^n$. O conjunto

$$\{(x, r) : x \in \mathbb{R}^n,\ r \in \mathbb{R},\ r \geq f(x)\}$$

é denominado o epigráfico de f e denota-se por $epi f$.

Definição 5.15. Uma função $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ diz-se convexa se $epif$ é um conjunto convexo. Uma função côncava é uma função f tal que $-f$ é convexa.

Teorema 5.16. *Seja f uma função de $\mathbb{R}^n$ em $(-\infty, +\infty]$; então f é convexa sse*

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_m x_m) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + ... + \lambda_m f(x_m)$$

sempre que

$$\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, ..., \lambda_m \geq 0, \ \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_m = 1.$$

Definição 5.17. Dado um conjunto de pontos $\{x_1, ..., x_N\} \subset \mathbb{R}^N$, qualquer ponto da forma $\sum_{j=1}^{N} \alpha_j x_j$, com $\alpha_j \geq 0$ para $j = 1, ..., N$ e $\sum_{j=1}^{N} \alpha_j = 1$ é denominada uma combinação convexa dos pontos $x_1, ..., x_N$.

Nota 5.18. *Note-se que um conjunto C é convexo sse C contém todas as combinações convexas dos seus elementos.*

Definição 5.19. Dado um conjunto (finito ou não) de pontos $C \subset \mathbb{R}^n$, o invólucro convexo de C, $co(C)$, é o mais pequeno conjunto convexo que contém C. É a intersecção de todos os conjuntos convexos que contém C, e é igual ao conjunto de todas as combinações convexas de pontos de C.

Definição 5.20. Uma função afim em C é uma função finita, convexa e côncava.

Definição 5.21. Um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ diz-se um espaço afim se

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in M \quad \forall x, y \in M \ e \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

A dimensão de um espaço afim não vazio define-se como sendo a dimensão do subespaço paralelo a ele, e denomina-se dimensão afim. A dimensão do conjunto vazio é -1 por convenção. Os conjuntos afins de dimensão 0,1 e 2 são chamados pontos, linhas e planos respectivamente. Um conjunto afim $(n-1)$ - dimensional em $\mathbb{R}^n$ chama-se hiperplano.

Definição 5.22. Chama-se invólucro afim dum conjunto convexo C à intersecção de todos os espaços afins que contém C. E chama-se dimensão do conjunto convexo C à dimensão afim do seu invólucro afim.

Definição 5.23. O domínio de uma função convexa f em C, que denotamos por $D(f)$, é a projecção em $\mathbb{R}^n$ do epigráfico de f:

$$D(f) = \{x : \exists \mu : (x, \mu) \in epif\} = \{x : f(x) < +\infty\}.$$

Este conjunto é um conjunto convexo em $\mathbb{R}^n$.

Nota 5.24. *Uma função f convexa definida num conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ pode ser sempre estendida a uma função convexa em $\mathbb{R}^n$ pondo $f(x) = +\infty$ para $x \notin C$.*

Teorema 5.25. *Uma função convexa finita em todo o $\mathbb{R}^n$ é necessariamente contínua.*

5.5 Semicontinuidade inferior

Sejam Ω um intervalo aberto e limitado em $\mathbb{R}$, W uma função contínua de $\Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ em $\mathbb{R}$. Consideremos o integral

$$I(u) = \int_\Omega W(x, u(x), u'(x)\, dx.$$

Uma das principais questões relacionadas com este conceito é saber sob que condições da função W é que o integral I é sequencialmente semicontínuo inferiormente em relação à convergência fraca em $W^{1,p}(\Omega)$, $p \geq 1$. Um modo simples de ter uma tal convergência é o seguinte: seja (u_k) uma sucessão de funções lipschitzianas com constantes de Lipschitz equilimitadas que converge uniformemente para uma função u; então, então (u_k) converge fracamente para u em $W^{1,p}(\Omega)$, $p \geq 1$. Uma condição necessária para a semicontinuidade inferior (neste sentido) é dado pelo seguinte teorema:

Teorema 5.26 (condição necessária para a semicontinuidade inferior sequencial). *Se $I(u)$ é um integral sequencialmente semicontínuo inferior com respeito à convergência uniforme de funções equi-lipschitzianas, isto é,*

$$I(u) \leq \liminf_{j \to \infty} I(u_j),$$

sempre que $u_j \to u$ uniformemente, onde

$$\sup_j Lip(u_j) < \infty.$$

($Lip(u_j)$ é a constante de Lipschitz, ou seja é a maior contante que verifica $|u_j(x) - u_j(y)| \leq L|x-y| \quad \forall x, y \forall k$). Então para qualquer $x_0 \in \Omega$, $s_0 \in \mathbb{R}^N$, $\xi_0 \in \mathbb{R}^N$ e para qualquer $\theta \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ temos

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega W(x_0, s_0, \xi_0 + \theta'(x)\, dx \geq W(x_0, s_0, \xi_0).$$

Em particular a função W é convexa em ξ para cada $x \in \Omega$ e $s \in \mathbb{R}^N$ fixados.

Esta última desigualdade não é mais que a quasiconvexidade. Note-se ainda que a quasiconvexidade é equivalente a dizer que as funções lineares $l(x)$ são minimizantes, na classe das funções u com $u(x) = l(x)$ em $\partial\Omega$ do funcional I. Em particular se I é de classe C^2 em ξ, isto implica a convexidade de I em ξ, isto é,

$$W_{\xi,\xi}(x_0, s_0, \xi_0) \geq 0,$$

para qualquer ξ, como vimos no teorema anterior. Portanto, o que acabámos de ver foi que a quasiconvexidade implica a convexidade, mas para integrais simples, para integrais de campos vectoriais esta implicação é falsa. De facto, em dimensão 1, a convexidade implica trivialmente a quasiconvexidade (pela desigualdade de Jensen), portanto em dimensão 1 a quasiconvexidade e a convexidade são equivalentes. Também para integrais múltiplos definidos para funções escalares as duas condições são equivalentes. No entanto, para integrais múltiplos de campos vectoriais, a quasiconvexidade é uma condição estritamente mais fraca do que a convexidade, (ver [15]).

O seguinte teorema mostra que a convexidade em ξ é também uma condição suficiente para a semicontinuidade inferior de I.

Teorema 5.27 (teorema da semicontinuidade de Tonelli). *Seja Ω um intervalo aberto e limitado em $\mathbb{R}$ e seja $W(x, s, \xi)$ uma função satisfazendo as seguintes condições:*

1. *W e W_ξ são contínuas em (x, s, ξ);*

2. *W é não negativa ou limitada inferiormente por uma função de L^1;*

3. *W é convexa em ξ.*

Então o integral I é sequencialmente fracamente semicontínuo inferiormente em $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ $\forall p \geq 1$; isto é, se (u_j) converge fracamente em $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ para u, então

$$I(u) \leq \liminf_{j\to\infty} I(u_j).$$

Equivalentemente, podemos dizer que esta desigualdade se verifica se (u_j) converge uniformemente para u e as normas de u_j' em L^1 são equilimitadas.

Nota 5.28. *A função W ser limitada inferiormente por uma função L^1 serve para garantir que o integral está bem definido e que o* $\liminf$ *não é $-\infty$.*

Teorema 5.29 (teorema da existência de Tonelli). *Suponhamos que $W(x, s, \xi)$ satisfaz as seguintes condições:*

1. *W e W_ξ são contínuas em (x, s, ξ);*

2. *W é convexa em ξ;*

3. *W tem crescimento superlinear, isto é, se existe uma função $\theta : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, localmente limitada inferiormente tal que $W(x, s, \xi) \geq \theta(|\xi|)$ $\forall x, s, \xi$, e $\frac{\theta(r)}{|r|} \to \infty$ quando $|r| \to \infty$.*

Então, nestas condições, existe um minimizante de I na classe

$$C(\alpha, \beta) := \{u \in W^{1,1}((a, b), \mathbb{R}^N) : u(a) = \alpha,\ u(b) = \beta\},$$

sendo α, $\beta \in \mathbb{R}^N$ fixados.

Nota 5.30. *O teorema anterior continua a ser verdadeiro se, em vez de* 1. *considerarmos que W é uma função tipo Carathéodory, isto é, mensurável na primeira variável e contínua nas outras duas.*

Todos estes resultados e as correspondentes demonstrações podem encontrar-se em [8] e [15].

5.6 Outros resultados

Teorema 5.31 (teorema de Banach-Alaouglu-Bourbaki). *Seja X um espaço se Banach e $X^\star$ o seu dual. Se $E \subseteq X^\star$ é um conjunto limitado, fechado e convexo, então B é fracamente* compacto.*

Teorema 5.32 (regra de Leibnitz - derivação sob o sinal do integral). *Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $f : U \times [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função com as seguintes propriedades:*

1. *Para todo $x \in U$, a função $t \mapsto f(x,t)$ é integrável em $a \leq t \leq b$.*

2. *A i-ésima derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)$ existe para cada $(x,t) \in U \times [a,b]$ e a função $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \times [a,b] \to \mathbb{R}$, assim definida, é contínua.*

Então a função $\varphi : U \to \mathbb{R}$, dada por $\varphi(x) = \int_a^b f(x,t)dt$, possui i-ésima derivada parcial em cada ponto $x \in U$, sendo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)dt$$

Em suma: pode-se derivar sob o sinal do integral, desde que o integrando resultante seja uma função contínua.

Teorema 5.33 (regra da cadeia). *Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^m$ e $V \subseteq \mathbb{R}^n$, abertos, $f = (f_1, ..., f_n) : U \to \mathbb{R}^n$, tal que $f(U) \subseteq V$ e cada função coordenada $f_k : U \to \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto $a \in U$. Seja ainda $g : V \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto $b = f(a)$. Então a função a função composta $g \circ f : U \to \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto a e as suas derivadas parciais são*

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i}(a) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_k}(b) \times \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a).$$

Bibliografia

[1] G. Alberti, G. Bellettini, *A non-local anisotropic model for phase transitions: asymptotic behavior of rescaled energies*, Euro. J. Appl. Math., 9, pág. 261-284, 1998.

[2] G. Alberti, G. Bellettini, *A non-local anisotropic model for phase transitions. The optimal profile problem*, Math. Anal., 310, pág. 527-560, 1998.

[3] L. Ambrósio, N. Fusco e D. Pallara, *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*, Oxford Science Publications, University Press, 2000.

[4] G. Bellettini, P. Buttá, E. Presutti, *Shape interface limits for non-local anisotropic interactions*, Arch. Rat. Mech. Anal. 159, pág. 109-135, 2001.

[5] D. Brandon, R. Rogers, *The coercivity and nonlocal ferromagnetism*, Cont. Mech. Therm., 4, pág. 1-21, 1992.

[6] D. Brandon, R. Rogers, *Nonlocal regularization of L.C. Young´s tacking problem*, Appl. Math. Opt., 25, pág. 287-301, 1992.

[7] H. Brézis, *Análisis funcional*, Alianza Universidad Textos, Madrid, 1984.

[8] G. Buttazzo, M. Giaquinta, S. Hildebrandt, *One dimensional Variational problems - An Introduction*, Claredon Press, Oxford, 1998.

[9] B. Dacorogna, *Direct Méthods in the Calculus of Variations*, Springer, 1989.

[10] B. Dacorogna, *Quasiconvexity and relaxation of nonconvex problems*, J. Funct. Anal., 46, pág. 102-118, 1982.

[11] I. Ekeland, R. Temam *Convex analysis and variational problems*, North Holland, Amsterdam, 1977.

[12] G. Grätzer, *Math into Latex*, Birkhäuser, Springer, 2000.

[13] D. Kinderlehrer, D. and P. Pedregal, *Gradient Young measures generated by sequences in Sobolev spaces*, J. of Geom. Anal., 4, pág. 59-90, 1994.

[14] E. Lages Lima, *Curso de Análise, vol.2*, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática pura e Aplicada, 1981.

[15] A. Ornelas, *Sebenta do cálculo das variações*, curso de mestrado, Universidade de Évora, 2001/2003.

[16] P. Pedregal, *Nonlocal Variational Principles*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, 29, pág. 1379-1392, 1997.

[17] P. Pedregal, *Parametrized Measures and Variational Principles*, Birkhäuser, Basel, Boston, Berlim, 1997.

[18] P. Pedregal, *Jensen´s inequality in the calculus of variations*, Differencial and Integral Equations, vol. 7, N°1, pág. 57-72, 1994.

[19] R. Rogers, *Nonlocal variational problems in nonlinear electromagnetoelasticity*, SIAM J. Math. Anal., 19, pág. 1329-1347, 1988.

[20] R. Rogers, *A nonlocal model for the exchange energy in ferromagnetic materials*, J. Integral Eq. Appl., 3, pág. 85-127, 1991.

[21] W. Rudin, *Real and complex analysis*, MacGraw-Hill, 1987.

[22] L. Tartar, *Compensated compactness and applications to partial differencial equations*, Nonlinear analysis and mechanics: Heriot-Watt Symposium, vol.IV, ed R. Knops. Pitman Res. Notes Math., 39, pág. 136-212.

Índice Remissivo