Universidade de Évora

Mestrado em Matemática e Aplicações

Problemas de Viabilidade para uma Inclusão Diferencial

Dissertação de Mestrado realizada por
Nuno Miguel Granja de Oliveira

Orientador: Vladimir Goncharov

Évora
2010

Resumo

Neste trabalho prova-se a existência de soluções do tipo Carathéodory de uma inclusão diferencial que pertencem a um subconjunto K de um espaço de Banach, usando a técnica baseada sobre selecções contínuas e o teorema do ponto fixo de Schauder . No lado direito da inclusão considera-se um multifunção semicontinua inferiormente (no sentido de Vietoris) em relação à segunda variável cujos valores são subconjuntos fechados (não necessariamente convexos). Também é provado a existência de soluções de uma equação de evolução, onde o seu lado direito é formado pela soma de um operador linear não limitado gerado por um semigrupo fortemente continuo de operadores lineares contínuos e um operador contínuo entre espaços funcionais. No trabalho considera-se soluções que satisfazem as condições iniciais não locais, que podem ser escritas na funcional. Os casos particulares deste tipo de condições são condições de Cauchy, condições de periodicidade e outra condição ilustrada num exemplo do campo da teoria das Equações Diferenciais Parciais .

Viability Problems for a Differential Inclusion

Abstract

In the Thesis we prove the existence of Carathéodory type solutions of a differential inclusion, using the continuous selections technique and Schauder fixed point theorem. In the thesis we prove the existence of Carathéodory type solutions of a differential inclusion, which belong to a closed subset K of a Banach space, by using a technique, based an continuous selections and Schauder fixed point theorem. In the right-hand side of the inclusion we consider a multifunction, which is lower semicontinuous (in the sense of Vietoris) with respect to the second variable and taking closed subsets on a Banach`s space We prove also the existence of solutions to an evolution equation, whose right-hand side is represented as the sum of a linear unbounded operator, generated by a compact strongly continuous semigroup of linear continuous operators, and as continuous operator between the functional spaces. In the Thesis we study solutions satisfying the one local initial condition, which can be written in the functional form. The particular cases of these conditions are the Cauchy condition, the periodical one and another condition, which is illustrated by an example from the field of Theory of Partial Differential Equations.

Índice

Introdução

Inclusões Diferenciais são generalizações de Equações Diferenciais. Serão consideradas neste trabalho inclusões da forma

$$\dot{x}(t) \in \Gamma\big(t, x(t)\big),$$

com respeito a alguma função $x(t)$,onde a multifunção Γ assume valores não vazios, fechados não necessariamente convexos de um espaço de Banach X.

Os problemas considerados para as equações diferenciais são considerados para as Inclusões Diferenciais, tais como, a existência de soluções, nomeadamente a continuidade destas e a sua dependência de determinadas condições iniciais.

Será abordado neste trabalho o problema da viabilidade em Inclusões Diferenciais, que consiste em encontrar soluções (trajectórias) da forma

$$t \to x(t),$$

com $t \in [0,1]$, que são viáveis, no sentido de satisfazer determinadas condições. Neste trabalho será exigido que pertençam a um determinado conjunto, previamente fixo, K, de X.

A teoria da viabilidade teve a sua origem com a resolução por parte de Nagumo, em 1942, do problema da viabilidade para Equações Diferenciais. Foi formulada uma condição necessária e suficiente para a solução do problema de Cauchy no caso de um determinado conjunto fechado.

Teorema (Nagumo, 1942) Seja K_0 um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^n$ e seja $f: K_0 \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua e limitada .É necessário e suficiente para que uma equação diferencial, $\dot{x} = f(x)$, tenha uma solução viável para toda a condição inicial $x_0 \in K_0$, que

$$f(x) \in \left\{w \in \mathbb{R}^n : \lim\ \inf_{t\to 0^+} \quad \frac{d_{K_0}(x+tw)}{t} = 0\right\},$$

para todo $x_0 \in K_0$.

O conjunto anterior foi introduzido em 1930 por Bouligand atribuindo-lhe a notação $T_{K_0}(x_0)$, sendo actualmente denominado por cone tangente de Bouligand.

A teoria da Viabilidade é utilizada em diversos ramos do conhecimento, por exemplo, em economia, genética, medicina, teoria dos jogos, sociologia, etc. Esta teoria foi desenvolvida por diversos matemáticos sendo de destacar os seguintes: Jean Pierre Aubin, Helena Frankowska, Francis Clarke, Yu. S. Ledyaev, Nikolas Papageorgiou, Shouchuan Hu e Peter Tallos.

Existem várias técnicas para a resolução de alguns problemas de viabilidade. Em [1] são estabelecidas condições necessárias e suficientes para a existência de trajectórias viáveis utilizando a técnica das trajectórias monótonas. Neste trabalho serão estabelecidas a existência de tais trajectórias utilizando a técnica das selecções contínuas e o teorema do ponto fixo de Schauder.

Este trabalho tem por base os artigos [12] e [14], publicados respectivamente em 1990 e 1999.

O texto está organizado da seguinte forma:

No capítulo 0, serão apresentadas definições, alguns resultados de topologia geral, o teorema de Ascoli e do ponto fixo de Schauder, bem como algumas noções de mensurabilidade e integração em espaços de Banach.

O capítulo 1 é dividido em três secções. Na primeira serão dadas algumas noções preliminares de aplicações multivocas bem como alguns resultados sobre selecções contínuas e mensuráveis. Na segunda é estudado o caso do problema de Cauchy, para a inclusão

$$\dot{x}(t) \in \Gamma\big(t, x(t)\big)$$

estando a multifunção definida em $[0,1] \times K$,onde K é um subconjunto compacto e convexo de um espaço de Banach X. Na terceira secção, é tratado o mesmo problema que na segunda secção mas com condições iniciais não locais da forma, $x(0) = \varphi(x)$, com φ definida num subconjunto de $L^1([0,1], X)$ e assumindo valores em X.

O capítulo 2 está dividido em quatro secções. A primeira diz respeito a algumas noções e resultados preliminares, nomeadamente algumas noções topológicas, definições e resultados de semigrupos de operadores lineares limitados bem como o estabelecimento de um lema fundamental para a resolução do problema da secção seguinte. A segunda secção estabelece a existência de uma solução integral da equação de evolução

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + g(x)(t), \qquad (\bullet)$$

onde A é um operador linear em geral não limitado em X, gerador infinitesimal de um semigrupo, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, de operadores lineares limitados em X, fortemente contínuo (c_0-semigrupo) e g é uma função definida de $\mathcal{U} \subset (L^1[0,1], \mathrm{X})$ em $L^1([0,1], \mathrm{X})$. Será utilizada a técnica das selecções contínuas e o teorema de Schauder, tal como no capítulo 1, para a resolução da equação (●), satisfazendo a restrição

$$x(t) \in K,$$

para todo $t \in [0,1]$, onde K é um subconjunto de X, fechado, convexo, limitado e invariante com respeito a $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ e a seguinte condição não local

$$x(0) = \varphi(x), \qquad (\bullet\bullet)$$

Onde φ está definida num subconjunto de $(L^1[0,1], \mathrm{X})$ e assume valores em X. Será estabelecida ainda a existência de soluções periódicas para a equação (●), do tipo $x(0) = x(\theta)$, $\theta \in]0,1]$, condição essa que é do tipo (●●).

No final desta secção é apresentado um exemplo ilustrativo de um problema de valores de fronteira, utilizando uma equação do tipo (●) com operador-diferencial parcial.

A terceira secção trata o mesmo problema da secção anterior, mas no caso em que o conjunto K é não necessariamente limitado.

A quarta secção estabelece a existência de soluções para a inclusão

$$\dot{x}(t) \in Ax + \Gamma\big(t, x(t)\big) ,$$

com as mesmas condições de fronteira.
Será visto que a resolução deste problema resume-se à resolução da equação (●), com g uma selecção de Γ .

Capítulo 0

Preliminares

Este capítulo destina-se a apresentar algumas noções utilizadas ao longo do texto, que se inserem no contexto da presente dissertação. Os teoremas surgirão sem a respectiva demonstração, sendo sempre indicadas as referências bibliográficas.

0.1 Noções e Resultados de Topologia Geral

Definição 0.1.1 Uma colecção τ de subconjuntos de um conjunto X chama-se topologia em X se τ verifica as seguintes propriedades:

(i) $\emptyset \in \tau$ e $X \in \tau$;

(ii) Se $U_i \in \tau$ para $i = 1, \dots, n$, então $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$;

(iii) Se $\{U_\alpha\}$ é uma colecção arbitraria de elementos de τ ,então

$$\bigcup_{\boldsymbol{\alpha}} U_{\boldsymbol{\alpha}} \in \tau \ .$$

Definição 0.1.2 Um conjunto X munido de uma topologia τ, denomina-se espaço topológico. Os conjuntos de τ chamam-se abertos.

Definição 0.1.3 Seja $E \subset X$. E é denominado conjunto fechado do espaço topológico se é o complementar de algum aberto de τ.

Definição 0.1.4 Seja $E \subset X$. O fecho de E, (representa-se por $\bar{E}$), é a intersecção de todos os conjuntos fechados que contêm E.

Definição 0.1.5 Seja $E \subset X$. O interior de E, (representa-se por $int\ E$), é a união de todos os abertos que são subconjuntos de E.

Definição 0.1.6 Denomina-se vizinhança de um ponto $p \in X$ a todo o conjunto aberto que contém p.

Definição 0.1.7 O espaço topológico (X, τ) é um espaço de Hausdorff se para quaiquer $x, y \in X, x \neq y$, existem vizinhanças disjuntas de x e y.

Definição 0.1.8 Seja $E \subset X$. Uma cobertura aberta de E é uma família de conjuntos abertos $G_i, i \in I$, de modo que $E \subset \bigcup_{i \in I} G_i$. Se existe um subconjunto $\tilde{I} \subset I$, tal que $E \subset \bigcup_{i \in \tilde{I}} G_i$, então a família $\{G_i, i \in \tilde{I}\}$, chama-se uma subcobertura da cobertura inicial. Se $\tilde{I}$ é finito a cobertura diz-se finita.

Definição 0.1.9 Um conjunto $K \subset X$ é compacto, se de toda a sua cobertura aberta é possível extrair uma subcobertura finita.

Teorema 0.1.10 ([17], p.96) Todo o conjunto compacto é fechado em qualquer espaço de Hausdorff que o contiver.

Definição 0.1.11 Uma colecção $\tilde{\tau} \subset \tau$ diz-se base de τ, se todo o elemento de τ se representa como a união de elementos de $\tilde{\tau}$.

Observação: Seja $E \subset X$. A colecção de todas as intersecções $E \cap V$, onde $V \in \tau$, é uma topologia em E.

Definição 0.1.12 A topologia definida na observação anterior denomina-se topologia em E, induzida por τ.

Definição 0.1.13 Um conjunto X diz-se um espaço vectorial real se em X estão definidas as operações:

1) de adição, que faz corresponder a cada par $(x, y) \in X \times X$ um elemento $z = x + y \in X$;
2) de multiplicação por números $\alpha \in \mathbb{R}$, que faz corresponder ao par $(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R}$ um elemento $z = \alpha x \in X$;

e estas operações verificam os axiomas seguintes:

1) $x + y = y + x, \forall x, y \in X$;
2) $(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in X$,
3) existe zero, isto é, um elemento $0 \in X$ tal que
$$x + 0 = x, \quad \forall x \in X;$$
4) para todo $x \in X$ existe um elemento inverso, isto é, um $y \in X$ tal que
$$x + y = 0 ;$$

5) $1. x = x$, $\forall x \in X$;

6) $\alpha(\gamma x) = (\alpha\gamma)x$, $\forall x \in X$ e $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$;

7) $(\alpha + \gamma)x = \alpha x + \gamma x$, $\forall x \in X$ e $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$;

8) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, $\forall x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{R}$;

Definição 0.1.14 Seja X um espaço vectorial real. Uma norma em X é uma função real $\|.\|: X \to \mathbb{R}$ que associa a cada vector $x \in X$ o número real $\|x\|$, de modo a serem cumpridas as condições abaixo para quaisquer $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

i) Se $x \neq 0$ então $\|x\| \neq 0$;

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$;

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

O conjunto X munido com a norma $\|.\|$ chama-se espaço normado.

Observação: Uma aplicação que verifica só as condições ii) e iii) é denominada seminorma.

Definição 0.1.15 Uma métrica num conjunto X é uma função $d: X \times X \to \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in X$, um número real $d(x, y)$, chamado a distância de x a y, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in X$:

i) $d(x, x) = 0$;

ii) Se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$;

iii) $d(x, y) = d(y, x)$;

iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Então X munido com a métrica $d(.,.)$ chama-se espaço métrico.

Observação: Todo o espaço normado torna-se um espaço métrico por meio da definição $d(x, y) = \|x - y\|$.

Definição 0.1.16 Sejam X e Y espaços métricos. Diz-se que uma aplicação $f: X \to Y$ é contínua no ponto $a \in X$ se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta$ implica $d\big(f(x), f(a)\big) < \varepsilon$.
Diz-se que $f: X \to Y$ é contínua quando é contínua em todos os pontos $a \in X$.

Definição 0.1.17 Uma sucessão $(x_n)_n$ num espaço normado X chama-se sucessão de Cauchy se para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n, m > n_0$ implica $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$.

Definição 0.1.18 Uma sucessão $(x_n)_n$ num espaço normado X converge para x se para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal $n > n_0$ implica $\|x_m - x\| < \varepsilon$.

Definição 0.1.19 O espaço normado X diz-se completo se toda a sucessão de Cauchy em X converge.

Definição 0.1.20 Um espaço normado completo denomina-se um espaço de Banach

Definição 0.1.21 Em qualquer espaço métrico, a bola aberta de centro x e raio r é o conjunto

$$B(x,r) = \{y: d(x,y) < r\}.$$

Definição 0.1.22 Seja X um espaço métrico, $a \in X$ e $E \subset X$. A distância do ponto a ao conjunto E define-se como

$$d_E(a) = inf_{x \in E}\, d(a,x) \qquad (0.1.1)$$

Proposição 0.1.23 ([19],p.44). A aplicação (0.1.1) definida é contínua.

Definição 0.1.24 Seja X um espaço métrico. Diz-se que $E \subset X$ é denso em X se $\bar{E} = X$.

Observação: Uma vez que um espaço métrico é um caso particular de um espaço topológico o fecho $\bar{E}$ de um conjunto $E \subset X$ (X é um espaço métrico) pode ser definido como o conjunto dos pontos $x \in X$ tais que

$$B(x,\varepsilon) \cap E \neq \emptyset \;\; \forall \varepsilon > 0$$

Definição 0.1.25 Um espaço métrico é separável se contém um subconjunto numerável denso.

Observação: Todo o espaço métrico compacto é separável.

Definição 0.1.26 Um subconjunto $E \subset X$ chama-se relativamente compacto se $\bar{E}$ é compacto.

Observação: A definição anterior pode ser enunciada do seguinte modo: Um subconjunto E de um espaço métrico X é relativamente compacto, quando toda a sucessão de pontos $x_n \in E$, possui uma subsucessão convergente em X, (pode ocorrer que o limite dessa subsucessão não pertença a E).

Definição 0.1.27 Seja X um espaço vectorial . Um subconjunto $E \subset X$ X chama-se convexo se $\lambda a + (1 - \lambda) b \in E$ sempre que $a, b \in E$ e $0 \leq \lambda \leq 1$.

Definição 0.1.28 Um subconjunto $M \subset X$ diz-se subespaço vectorial de X se

$x + y \in M$,para todo $x, y \in M$;

$\lambda x \in M$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e todo $x \in M$.

Observação: Toda a intersecção de subespaços vectoriais é um subespaço vectorial.

Definição 0.1.29 Seja X um espaço vectorial e $E \subset X$. O menor subespaço de X que contém E chama-se subespaço vectorial gerado por E . Este subespaço é igual à intersecção de todos os subespaços de X que contêm E.

Definição 0.1.30 Sejam X e Y dois espaços topológicos e $f: X \to Y$ uma função. Diz que f é contínua em $x \in X$ se para toda a vizinhança U de $f(x)$, $f^{-1}(U)$ é uma vizinhança de x. Se f é contínua para qualquer $x \in X$ chama-se contínua em X.

Definição 0.1.31 Define-se espaço vectorial topológico V como sendo um espaço vectorial, munido de uma topologia para a qual as operações adição e produto por um número real

$$(u, v) \to u + v \text{ de } V \times V \text{ sobre } V;$$

$$(\lambda, u) \to \lambda u \text{ de } \mathbb{R} \times V \text{ sobre } V;$$

são contínuas em relação à topologia definida.

Teorema 0.1.32 ([23], p.11) Seja V um espaço vectorial topológico. Se C é um subconjunto convexo de V, então $\bar{C}$ e $int\, C$ são convexos.

0.2 Operadores lineares

Definição 0.2.1 Sejam X e Y dois espaços vectoriais . Denomina-se operador linear definido sobre X com valores em Y a qualquer aplicação $A: X \rightarrow Y$ tal que

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y) \text{ para todos } x, y \in X \text{ e } \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Definição 0.2.2 Sejam X e Y dois espaços vectoriais topológicos. Um operador linear $A: X \rightarrow Y$ chama-se limitado se a imagem $A(C)$ é limitada em Y para qualquer limitado $C \subset X$.

Observações:

i) Um conjunto C num espaço linear topológico X é limitado se para toda a vizinhança U da origem existe $\lambda > 0$ tal que $C \subset \lambda U$.

ii) Se $A: X \rightarrow Y$ é um operador linear limitado e se X é um espaço métrico, então A é contínuo.(O operador A é encarado como função entre espaços métricos.)

iii) Um operador linear $A: X \rightarrow Y$ é limitado sse existir uma constante c tal que,

$$\|A(x)\| \leq c\|x\|,$$

para qualquer $x \in X$.

Definição.0.2.3 O menor dos números c que satisfaz a desigualdade anterior chama-se norma do operador A e representa--se por $\|A\|$.

Teorema 0.2.4 ([17], p.213) Dado qualquer operador linear limitado $A: X \to Y$, tem-se

$$\|A\| = sup_{\|x\| \leq 1} \|A(x)\| = sup_{x \neq 0} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|} \quad .$$

Definição 0.2.5 Sejam A e B dois operadores lineares de X em Y. Chama-se soma $A + B$ o operador C que, a cada vector $x \in X$, faz corresponder o elemento

$$y = A(x) + B(x) \in Y.$$

Observação: Se X e Y forem espaços normados e os operadores A e B limitados, a sua soma $A + B$ será um operador limitado e tem--se

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \ .$$

Definição 0.2.6 Seja $A: X \to Y$ um operador linear $\lambda \in \mathbb{R}$. Chama-se produto de A por λ representando-se por, λA, ao operador que, a cada vector $x \in X$, faz corresponder o elemento

$$y = \lambda A(x) \in Y.$$

Definição 0.2.7 Sejam $A: X \to Y$ e $B: Y \to Z$. Denomina-se BA a composição dos operadores A e B, isto é, o operador C que faz corresponder a $x \in X$ o elemento $z = B\big(A(x)\big)$ de Z.

Observações:

i) O operador BA é linear, e será contínuo se, por exemplo, ambos os operadores A e B forem contínuos.

ii) se A e B são operadores limitados em espaços normados então o operador BA é limitado e tem-se $\|BA\| \leq \|B\|\|A\|$.

Definição 0.2.8 Um operador $A: X \to Y$ chama-se compacto se levar qualquer conjunto limitado em X num conjunto relativamente compacto em Y.

Definição 0.2.9 Sejam X e Y espaços vectoriais topológicos. Um operador $A: X \to Y$ chama-se fechado se o subconjunto $graph\, A \subset X \times Y$ definido por

$$graph\, A := \big\{\big(x, A(x)\big): x \in X\big\},$$

é fechado em $X \times Y$.

0.3 Teoremas de Ascoli e do ponto fixo de Schauder

Designe-se por $C(X,Y)$ o conjunto das funções contínuas $f: X \rightarrow Y$. O conjunto $C(X,Y)$ torna-se um espaço de Banach se munido com a norma $\|f\| = sup_{x \in X} \|f(x)\|$

Definição 0.3.1 Sejam X e Y espaços métricos e $\mathfrak{A} \subset C(X,Y)$. O conjunto $\mathfrak{A}$ diz-se equicontínuo no ponto $x_0 \in X$ se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(x, x_0) < \delta$ em X implique $d\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$ em Y, $\forall\ f \in \mathfrak{A}$. O conjunto $\mathfrak{A}$ diz-se equicontínuo em X se o for em todos os pontos de X.

Observações: As métricas nos espaços X e Y são designadas pela mesma letra.

Teorema 0.3.2 *(Teorema de Ascoli)* ([18], p.244) Seja $\mathfrak{A}^*$ um subconjunto de $C(K,Y)$, onde K é compacto. Para que $\mathfrak{A}^* \subset C(K,Y)$ seja relativamente compacto, é necessário e suficiente que:

(a) $\mathfrak{A}^*$ seja equicontínuo;

(b) Para cada $x \in K$ o conjunto $\mathfrak{A}^*(x) := \{f(x): f \in \mathfrak{A}^*\}$, seja relativamente compacto em Y.

Definição 0.3.3 Um ponto fixo de uma aplicação $f: X \rightarrow Y$ é um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = x$.

Teorema 0.3.4 (*Teorema de Schauder*) ([3], p.219) Seja $C \neq \emptyset$ um subconjunto convexo de um espaço normado X e seja $f: C \to C$ uma função contínua tal que o conjunto $K := \overline{f(C)}$ é compacto. Então f tém um ponto fixo.

0.4 Mensurabilidade e Integração em Espaços de Banach

Definição 0.4.1 Uma colecção $\mathcal{A}$ de subconjuntos de um conjunto Ω chama-se uma σ-álgebra se $\mathcal{A}$ verifica as seguintes propriedades:

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$;

(ii) Se $A \in \mathcal{A}$, então $A^c \in \mathcal{A}$ (o símbolo A^c representa o complementar de A relativo a Ω);

(iii) Se $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e se $A_n \in \mathcal{A}$ para $n = 1,2, \dots$, então $A \in \mathcal{A}$.

Definição 0.4.2 A par $(\Omega, \mathcal{A})$ chama-se espaço mensurável e os elementos de $\mathcal{A}$ chamam-se conjuntos mensuráveis.

Observação: Dada uma colecção $\mathcal{C}$ de subconjuntos de Ω a intersecção de todas as σ-álgebras que contêm $\mathcal{C}$ é ainda uma σ-álgebra.

Definição 0.4.3 A σ-álgebra, definida na observação anterior denomina-se σ-álgebra gerada por $\mathcal{C}$.

Definição 0.4.4. Seja Ω um espaço topológico. À σ-álgebra gerada por todos os conjuntos abertos de Ω denomina-se σ-álgebra de Borel, representando-se por β.

Observação: Considere-se $\mathbb{R}^+ := (0, +\infty)$.

Definição 0.4.5 A função $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ é denominada medida positiva, se para toda a sucessão de conjuntos disjuntos dois a dois $A_n \in \mathcal{A}$,

$$\mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n) \; .$$

Definição 0.4.6 A medida positiva μ chama-se σ-finita se

$$\mu(\Omega) < +\infty.$$

Definição 0.4.7 A σ-álgebra $\mathcal{A}$ diz-se completa (ou μ-completa) se para todo o conjunto $A \in \mathcal{A}$ satisfazendo $\mu(A) = 0$, qualquer que seja o subconjunto $B \subset A$ ainda é elemento de $\mathcal{A}$.

Definição 0.4.8 Sejam $M = (\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$ e $N = (\mathrm{Y}, \mathcal{B}, \upsilon)$ dois espaços de medida σ-finitos completos.

Define-se a σ-álgebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ de subconjuntos do produto cartesiano $X \times Y$ como sendo a σ-álgebra gerada pelos conjuntos da forma $A \times B$, $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$

Observação: Existe uma única medida $\mu \otimes \upsilon$ definida sobre $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ chamada medida produto, tal que

$$(\mu \otimes \upsilon)(A \times B) = \mu(A) \times \upsilon(B) \text{ com } A \in \mathcal{A} \text{ e } B \in \mathcal{B} .$$

Definição 0.4.9 Ao espaço de medida $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \upsilon)$ dá-se o nome de espaço de medida produto.

Teorema.0.4.10 ([22], p.51) Existe uma medida positiva e completa λ definida numa σ-álgebra $\mathcal{L}$ em $\mathbb{R}^n$, tal que

i) $\lambda(\prod_{i=1}^{n}]a_i, b_i[) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$;

ii) $\lambda(E + x) = \lambda(E)$, $E \in \mathcal{L}$, $x \in \mathbb{R}^n$;

iii) λ é regular, isto é,

$$\lambda(E) = inf\{\lambda(V): E \subset V, V\ aberto\} = sup\{\lambda(K): K \subset E, K\ compacto\}$$

para todo o $E \in \mathcal{L}$.

iv) $\mathcal{L}$ contém os borelianos de $\mathbb{R}^n$.

Observação: Considere-se $E + x := \{y + x: y \in E\}$

Definição 0.4.11 A medida λ definida anteriormente designa-se por medida de Lebesgue.

Definição 0.4.12. $\mathcal{L}$ chama-se σ-álgebra de Lebesgue.

Observação: Existem conjuntos mensuráveis de Lebesgue, que não são borelianos (ver definição 0.4.4).

Definição 0.4.13 Seja $(\Omega\,,\mathcal{A},\mu)$ um espaço de medida. Diz-se que uma propriedade se verifica quase sempre relativamente à medida μ, (abreviado por $q.t.$) se se verifica para todos os pontos de Ω excepto, eventualmente, para um conjunto de pontos de A de medida nula.

Nas definições que se seguem considere-se um espaço $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$**,** σ-finito e um espaço de Banach X.

Definição 0.4.14 A função $f\colon\Omega\to\mathrm{X}$ chama-se função simples se existem conjuntos mensuráveis disjuntos dois a dois $E_1,E_2,..,E_n\subset\Omega$ e $a_{1,}a_2,..,a_n\in X$ tais que

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{E_i}(t)\,,\forall\ t\in\Omega \qquad (0.4.1)$$

onde

$$\chi_{E_i}(t)=\begin{cases}1\,,t\in E_i\\0,t\notin E_i\end{cases}.,$$

é a função característica de E_i.

Definição 0.4.15 ([10], p.41**)** A função $f: \Omega \to \mathrm{X}$ é chama-se mensurável, (ou μ-mensurável), se existe uma sucessão de funções simples $(f_n)_n$ tal que

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty} \|f_n(t) - f(t)\| = 0,$$

para $q.t.\ t \in \Omega$.

Definição 0.4.16 Seja $f: \Omega \to \mathrm{X}$ uma função simples (0.4.1). O integral de f é definido por

$$\int_\Omega f(t)\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i).$$

Definição 0.4.17 ([10],p.44**)** A função mensurável $f: \Omega \to \mathrm{X}$ chama-se integrável no sentido de Bochner se existe uma sucessão de funções simples $(f_n)_n$ tal que

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty} \int_\Omega \|f_n(t) - f(t)\| d\,\mu = 0. \qquad (0.4.2)$$

Observação: Considerando $\varphi: \Omega \to \mathbb{R}^+$ uma função mensurável definimos

$$\int_\Omega \varphi\,(t)\, d\mu := sup\left\{\int_\Omega \psi(t)\, d\,\mu: 0 \le \psi(t) \le \varphi(t)\ para\ q.t\ t \in \Omega\ e\ \psi\ \text{é}\ uma\ função\ simples\right\}.$$

Tomando em conta isto podemos definir o integral da norma em (0.4.2).

Em tudo o que se segue a integrabilidade de funções com valores em X é considerada no sentido de Bochner.

Teorema 0.4.18 ([26], p.5) Se $f: \Omega \to \mathrm{X}$ é Bochner integrável e $(f_n)_n$ é uma sucessão de funções simples verificando a definição anterior, então existe o limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\,\mu \,, \tag{0.4.3}$$

que não depende da escolha da escolha da sucessão $(f_n)_n$ que converge para $q.t. t \in \Omega$. O limite (0.4.3) chama-se o integral de f e designa-se por $\int_\Omega f \, d\,\mu$.

Teorema 0.4.19 ([10]**,** p.45**)** A função mensurável $f: \Omega \to \mathrm{X}$ é integrável se e somente se $\int_\Omega \|f\| \, d\mu < \infty$.

Teorema 0.4.20 ([10]**,** p.46**)** Se a função $f: \Omega \to \mathrm{X}$ é Bochner então

i) $\left\|\int_E f \, d\mu\right\| \leq \int_E \|f\| \, d\mu$, para todo $E \in \mathcal{A}$;

ii) Se $(E_n)_n$ é uma sucessão de elementos de $\mathcal{A}$ disjuntos dois a dois e $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ então

$$\int_E f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\,\mu, \tag{0.4.4}$$

onde a série em (0.4.4) é absolutamente convergente.

Represente-se por $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu, X)$, $1 \leq p < \infty$, o conjunto das funções $f: \Omega \to \mathrm{X}$ mensuráveis em Ω e $\|f\|^p$ integrável com respeito a μ. Defina-se

$$\|.\|_{\mathcal{L}^p}: \mathcal{L}^p(\Omega, \mu, X) \to \mathbb{R}^+ \text{ por}$$

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p} = \left(\int_\Omega \|f\|^p \, d\mu\right)^{1/p}$$

para cada $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu, X)$. Esta aplicação é uma semi-norma em $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu, X)$.

A relação ´´$\sim$`` definida por

$$f \sim g \text{ se } f(t) = g(t),$$

$q.t., t \in \Omega$,

é uma relação de equivalência em $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu, X)$. Seja $L^p(\Omega, \mu, X)$ o espaço quociente $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu, X)/\sim$. Se $f \sim g$ então $\|f\|_{\mathcal{L}^p} = \|g\|_{\mathcal{L}^p}$. Assim a função definida por

$$\|.\|_{L^p}: L^p(\Omega, \mu, X) \to \mathbb{R}^+$$

$$\|\hat{f}\|_{L^p} = \|f\|_{\mathcal{L}^p}$$

para cada $\hat{f} \in L^p(\Omega, \mu, X)$, está bem definida e é uma norma em $L^p(\Omega, \mu, X)$. Com esta norma $L^p(\Omega, \mu, X)$ é um espaço de Banach.

Definição 0.4.21 Um subconjunto $\mathcal{F} \subset L^p(\Omega, \mu, X)$ é uniformente integrável se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\int_E \|f\| \, d\mu \le \varepsilon$$

uma vez que $f \in \mathcal{F}$ e $E \in \mathcal{A}$ satisfaz $\mu(E) \le \delta$.

Observação:

Seja $l: \Omega \to \mathbb{R}^+$ uma função integrável. O conjunto

$$\mathcal{F}_l = \{f \in L^p(\Omega, \mu, X) : \|f(t)\| \le l(t), q.t.\, t \in \Omega\}$$

é uniformemente integrável.

Teorema 0.4.22 Se uma sucessão $(f_n)_n$ converge para f em $L^1(\Omega, \mu, X)$ então existe uma subsucessão $\left(f_{n_k}\right)_{n_k}$ tal que

$$f_{n_k}(t) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(t) \text{ para } q.t.\ t \in \Omega.$$

Observação: O teorema anterior estende para o caso do espaço de Banach, o famoso teorema de Lebesgue inicialmente formulado em dimensões finitas (ver [Brezis], p.58).

Teorema 0.4.23 (Teorema da convergência dominada de Lebesgue) **(**[10]**,** p.45**)** Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida finita e $(f_n)_n$ é uma sucessão de funções Bochner integráveis em Ω. Se $\lim_{n \to \infty} f_n(t) = f(t)$ para $q.t.\ t \in \Omega$ e se existe uma função

$$g: \Omega \to \mathbb{R}^+$$

integrável à Lebesgue de modo que

$$\|f_n(t)\| \leq g(t) \text{ , para } q.t., t \in \Omega \text{ ,}$$

então f é integrável e

$$\lim_n \int_{\mathrm{E}} f_n(t)\, d\,\mu = \int_E f(t)\, d\mu$$

para todo $E \in \mathcal{A}$

Teorema 0.4.24 ([10], p.47**)** Seja T um operador linear fechado onde X e Y são espaços de Banach. Para qualquer função integrável $f: \Omega \to X$ tal que a função $t \to T(f(t))$ é também integrável tem-se

$$T\left(\int_E f(t)\, d\mu\right) = \int_E T(f(t))\, d\mu$$

para todo $E \in \mathcal{A}$.

Observação: Os resultados estabelecidos nos capítulos 1 e 2 utilizam o espaço $L^p(\Omega, \mu, X)$ em que $p = 1$, $\mathrm{T} = [0,1]$ com a σ-álgebra $\mathcal{L}$ dos conjuntos mensuráveis de Lebesgue e $\mu(dt)$ a medida de Lebesgue. O conjunto anterior neste caso é representado por $L^1(\mathrm{T}, X)$.

Capítulo 1

Problema de Cauchy para uma inclusão diferencial num conjunto compacto.

Neste capítulo será provada a existência de soluções do tipo Carathédory da inclusão diferencial

$$\dot{x}(t) \in \Gamma(t, x), \qquad (1.0.0)$$

onde $\Gamma\colon \mathrm{T} \times \mathrm{K} \to 2^{\mathrm{X}}$ é uma multifunção semicontinua inferiormente em $x \in K$, $K \subset X$ é um subconjunto compacto e convexo do espaço de Banach X.

Observação: o símbolo 2^{X} representa a colecção de todos os subconjuntos não vazios, limitados e fechados de X .

Na demonstração será utilizada a técnica das selecções contínuas bem como o teorema do ponto fixo de Schauder.

Começamos por apresentar alguns conceitos e proposições que são úteis para a demonstração do resultado principal deste capítulo.

1.1 Preliminares

Suponhamos que X e Y são espaços topológicos e $F\colon X \to Y$ é uma multifunção

Definição 1.1.1

i) Denomina-se *gráfico* de F, representando-se por $Graph\,F$, o subconjunto de $X \times Y$ definido por

$$Graph\,F \; := \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}.$$

ii) Denomina-se *domínio* de F, representando-se por $Dom\,F$, o subconjunto de X definido por

$$Dom(F) := \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\}.$$

iii) A imagem de F , representa-se por $Im(F)$, é união dos valores $F(x)$, onde $x \in X$, ou seja

$$Im(F) := \bigcup_{x \in X} F(x).$$

Definição1.1.2 A multifunção inversa de F representando-se por F^{-1}, é tal $F^{-1}: Y \to X$ e

$$x \in F^{-1}(y) \Leftrightarrow y \in \; F(x) \Leftrightarrow (x, y) \in Graph\,F$$

Definição1.1.3 Seja $F: X \to Y$ e considere-se os subconjuntos de X representados por $F^{-1}(M)$ e $F_{-1}(M)$, definidos respectivamente por

$$F^{-1}(M) := \{x \in X : F(x) \cap M \neq \emptyset\},$$

$$F_{-1}(M) := \{x \in X : F(x) \subset M\}$$

com M subconjunto de Y.

Observação: Para qualquer multifunção $F: X \to Y$ tém-se a seguinte igualdade

$$F^{-1}(Y \setminus M) = X \setminus F_{-1}(M)$$

para qualquer subconjunto M de Y.

Definição1.1.4 A multifunção $F: X \rightarrow Y$, é semicontínua inferiormente no sentido de Vietoris se para todo o conjunto aberto $U \subset Y$ o conjunto $F^{-1}(U)$ é aberto.

Observação: Se $F: X \rightarrow Y$ é semicontínua inferiormente no sentido de Vietoris então o fecho, $\bar{F}$, $\bar{F}(x) := \overline{F(x)}$, é semicontinuo inferiormente também. Pois, para qualquer conjunto aberto $U \subset Y$ tem-se

$$\left\{x: \overline{F(x)} \cap U \neq \emptyset\right\} = \{x: F(x) \cap U \neq \emptyset\}.$$

A definição anterior tem um carácter global, vejamo-la sob a forma local.

Definição1.1.5 A multifunção $F: X \rightarrow Y$, é semicontínua inferiormente no sentido de Vietoris em $x_0 \in X$ se para todo aberto $U \subset Y$ tal que

$$F(x_0) \cap U \neq \emptyset$$

existe uma vizinhança $V(x_0)$ de x_0, tal que $F(x) \cap U \neq \emptyset$ para todo $x \in V(x_0)$.

No caso de X e Y serem espaços métricos temos mais um conceito de semicontinuidade.

Definição1.1.6 Sendo X e Y espaços métricos a multifunção $F: X \to Y$ é denominada semicontínua inferiormente, no sentido de Hausdorff, em x_0, se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de modo que,

$$\forall\, x \in B(x_0, \delta)$$

se tem,

$$F(x_0) \subset B(F(x), \varepsilon).$$

onde

$$B(F(x), \varepsilon) := \{y: d_{F(x)}(y) < \varepsilon\}.$$

Observação: É bem conhecido que uma multifunção semicontinua inferormente no sentido de Hausdorff é semicontinua inferormente no sentido de Vietoris mas o contrário é verdade quando os seus valores estão contidos num compacto.

Definição1.1.7 A multifunção $F: X \to Y$ é semicontínua inferiormente no sentido de Vietoris em x_0, se para toda a sucessão $(x_n)_n \subset X$ de modo que $x_n \xrightarrow[(n\to\infty)]{} x_0$ e para todo o elemento $y_0 \in F(x_0)$ existe uma sucessão $y_n \xrightarrow[(n\to\infty)]{} y_0$ com $(y_n)_n \in F(x_n), n \geq 1$.

Definição1.1.8 Seja $(\Omega, \mathcal{A})$ um espaço mensurável. A multifunção $F: X \to Y$ é denominada mensurável se $F^{-1}(M) \in \mathcal{A}$, para todo o conjunto fechado $M \subset X$.

Observação: Considerem-se um subconjunto $K \subset X$, $T = [0,1]$ com a σ-álgebra $\mathcal{L}$ dos conjuntos mensuráveis de Lebesgue. A noção de mensurabilidade de $F: T \times K \to X$ diz respeito à σ-álgebra $\mathcal{L} \otimes \beta$ em $T \times K$ gerada por conjuntos da forma $E \times U$, onde $E \in \mathcal{L}$, $U \in \beta$ e β é a σ-álgebra de Borel gerada por K.

Definição1.1.9 Seja $K \subset X$ fechado e convexo e $x \in K$ .O cone tangente do conjunto K no ponto x é o conjunto representado por $T_K(x)$, definido pela fórmula

$$T_K(x) = \overline{\bigcup_{\lambda > 0} \lambda^{-1}(K - x)}.$$

Observações:

i) $v \in T_K(x) \Leftrightarrow \lim_{\lambda \to 0^+} \lambda^{-1} d_K\,(x + \lambda v) = 0$;

ii) Considere-se um conjunto $\mathfrak{A} \subset L_1(T, X)$. O cone tangente de Bouligand de $\mathfrak{A}$ num ponto $u(.)$, representa-se por $\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}(u)$. Neste caso considere-se a distância de um ponto u de $L_1(T, X)$ ao conjunto $\mathfrak{A}$, representada por $\mathcal{D}_{\mathfrak{A}}(u)$ em que

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{A}}(u) = inf_{v \in \mathfrak{A}} \int_T \|u(\tau) - v(\tau)\|\, d\tau.$$

Definição1.1.10 Seja X um espaço de Banach, $[a, b]$ um segmento da recta real. A função $x: [a, b] \to X$ é chamada absolutamente contínua se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de modo que para toda a colecção enumerável de subintervalos disjuntos dois a dois, $[a_k, b_k]$ de $[a, b]$ tal que

$$\sum_k (b_k - a_k) < \delta$$

se tem,

$$\sum_k \|x(b_k) - x(a_k)\| < \varepsilon \, .$$

Definição1.1.11 A função $x: T \to X$ chama-se solução da inclusão (1.0.0) do tipo Carathéodory se $x(.)$ é absolutamente contínua, diferenciavel em quase todos $t \in T$ e cuja derivada $\dot{x}(.)$ é integrável no sentido de Bochner.

***D*efinição1.1.12** Um conjunto $\mathcal{A} \subset L_1(T, X)$ diz-se decomponível se para quaisquer funções $u(.), v(.) \in \mathcal{A}$ e qualquer conjunto $E \in \mathcal{L}$, a função $u\,\chi_E + v\,\chi_{T\setminus E}$ pertence a $\mathcal{A}$.

***D*efinição1.1.13** ([16]) Seja Ω um espaço de medida σ-finito completo e X um espaço de Banach. A multifunção $F: T \to X$ é mensurável (resp. fracamente mensurável, β-mensurável, $\mathcal{C}$-mensurável) se $F_{-1}(M)$ é mensurável para todo o fechado (resp. aberto, boreliano, compacto) M de X.

***Proposição* 1.1.14** ([16], proposição 2.2.) Se a multifunção $F: T \to X$ é mensurável ou fracamente mensurável então $Dom(F)$ é mensurável.

Teorema 1.1.15 ([16], teorema 3.5.)Seja X um espaço métrico separável, T um espaço mensurável e $F: T \to X$ uma multifunção com valores fechados. Consideremos as seguintes afirmações:

a) F é β-mensurável; b) F é mensurável; c) F é fracamente mensurável; d) F é $\mathcal{C}$-mensurável; e) $t \to d\big(x, F(t)\big)$ é mensurável em t para todo $x \in X$; f) $Graph\, F$ é $\mathcal{L} \otimes \mathfrak{B}$-mensurável.

Então

i) a) ⇒ b) ⇒ c) ⇔ e) ⇒ d) e c) ⇒ f);

ii) se X é σ-compacto (i.e. , $X = \bigcup_n X_n$, onde X_n é compacto), logo a) ⇒ b) ⇔ c) ⇔ d) ⇔ e) ⇒ f);

iii) se T é um espaço de medida completo, e X é um espaço de Banach ,então a) ⇔ b) ⇔ c) ⇔ f) ⇒ d).

***De*finição1.1.16** Considere-se a multifunção $F: X \to Y$. Denomina-se selecção de F toda a função unívoca, $f: X \to Y$, de modo que $f(x) \in F(x)$ para todo $x \in X$.

Teorema 1.1.17 (Michael) ([2], p.355) Seja $F: X \to Y$ uma multifunção semicontínua inferiormente com valores fechados e convexos. Então F tem uma selecção contínua onde X é um espaço métrico compacto e Y é um espaço de Banach.

Teorema 1.1.18 (Kuratowski, Ryll-Nardzewski) ([16], teorema 5.1) Seja T um espaço de medida σ-finito completo e X um espaço métrico completo separável. Se $F: T \to X$ é uma multifunção fracamente mensurável com valores fechados, então F tem uma selecção mensurável.

Definição 1.1.19 Seja T um espaço de medida σ-finito completo, X um espaço métrico separável e Y um espaço métrico. Chama-se à função φ de $T \times X$ em Y do tipo Carathéodory, se para todo $x \in X$, $\varphi(.,x)$ é mensurável e para quase todo $t \in T$, $\varphi(t,.)$ é contínua .

Teorema 1.1.20. ([16], teorema 6.4.) Seja Ω um espaço de medida σ-finito completo, X um espaço de Banach separável, Y espaço métrico, $f: \Omega \times X \to Y$ uma função de Carathéodory e B um subconjunto fechado de Y. Então a multifunção definida por $t \to F(t) = \{x \in X: f(t,x) \in B\}$ é mensurável. Em particular se f é uma função real, as multifunções

$$t \to F(t) = \{x \in X: f(t,x) \geq \lambda\} \text{ , } t \to F(t) = \{x \in X: f(t,x) \leq \lambda\} \text{ e}$$

$$t \to F(t) = \{x \in X: f(t,x) = \lambda\}$$

são mensuráveis para qualquer real λ.

Teorema 1.1.21 ([2], teorema 8.2.11) Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, um espaço de medida $\sigma-$finito completo e, X um espaço métrico separável. Considere-se a multifunção $F: \Omega \to X$, com valores não vazios e fechados e uma função do tipo Carathéodory $f: \Omega \times \mathrm{X} \to \mathbb{R}$. Então a função

$$v: \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

definida por

$$v(\omega) = inf_{x \in F(\omega)} f(\omega, x) \text{ ,} \forall \omega \in \Omega$$

é mensurável .

Teorema 1.1.22 ([5], teorema 3) Seja X um espaço de Banach separável e $F: \mathrm{X} \to L^1(T, X)$ uma multifunção semicontínua inferiormente no sentido de Vietoris assumindo valores decomponíveis e fechados. Então F tem uma selecção contínua.

Teorema 1.1.23 ([5], proposição 4.) Seja X um espaço de Banach, e $G: X \to L^1(T, X)$ uma multifunção semicontínua inferiormente no sentido Vietoris assumindo valores fechados não vazios e decomponíveis. Considere-se as funções

$$\varphi: X \to L^1(T, \mathbb{R}),$$

$$g: X \to L^1(T, Z)$$

contínuas tal que , para todo $x \in X$, o conjunto

$$L(x) = \{u \in G(x): \|u(t) - g(x)(t)\| < \varphi(x)(t), q, t., t \in T\}$$

é não vazio para todo $x \in X$. Então a multifunção $L: X \to L^1(T, X)$ é semicontínua inferiormente no sentido de Vietoris e assume valores decomponíveis.

Proposição 1.1.24 ([20], proposição 2.3.) Seja X um espaço de Banach, D um subconjunto de X e $\Psi: D \to X$ um operador contínuo. Suponha-se que

$$\lim_{\lambda \to 0^+} d_D\big(x + \Psi(x)\big)/\lambda = 0$$

para todo $x \in D$. Então para todo o subconjunto compacto K de D

$$\lim_{\lambda \to 0^+} d_D\big(x + \Psi(x)\big)/\lambda = 0$$

uniformemente em K.

Proposição 1.1.25 Seja X um espaço de Banach e K um subconjunto, convexo, fechado e não vazio de X. Considere-se o subconjunto $\mathcal{K}$ de $L^1(T, X)$

$$\mathcal{K} := \{y(.) \in \ L_1(T, X): y(t) \in K, q.t. \ t \in T \},$$

assim tem lugar a seguinte relação

$$\int_T \ d_K\big(x(t)\big)\, dt = \mathcal{D}_{\mathcal{K}}\,\big(x(.)\big).$$

Demonstração:

i) Como

$$\mathcal{D}_{\mathcal{K}}\big(x(.)\big) = inf_{y(.)\in\mathcal{K}} \int_T \|x(t) - y(t)\|\, dt,$$

por definição de ínfimo, $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ y_\varepsilon(.) \in\ \mathcal{K}$ tal que

$\mathcal{D}_{\mathcal{K}}\big(x(.)\big) \geq \int_T \|x(t) - y_\varepsilon(t)\|\, dt - \varepsilon \geq \int_T\ inf_{y\in K}\|x(t) - y\|\, dt -$
$-\varepsilon = TdKxt\, dt - \varepsilon.$

Fazendo $\varepsilon \to 0^+$, conclui-se que

$$\mathcal{D}_{\mathcal{K}}\left(x(.)\right) \geq \int_T\ d_K\big(x(t)\big)\, dt.$$

ii) Considere-se $\varepsilon > 0$ e a multifunção $\Gamma_\varepsilon: T \to \mathcal{K}$ definida por

$$t \to \Gamma_\varepsilon(t) := \left\{\bar{y} \in \mathcal{K}: inf_{y\in K}\|x(t) - y\| \geq \|x(t) - \bar{y}(t)\| - \varepsilon\,, q.t.\ t \in T\right\}$$

Pelos teoremas 1.1.18 e 1.1.20. conclui-se que existe uma selecção mensurável $\bar{y}_\varepsilon(.)$ de $\Gamma_\varepsilon(.)$,isto é

$$inf_{y\in K}\|x(t) - y\| \geq \|x(t) - \bar{y}_\varepsilon(t)\| - \varepsilon\,, q.t. t \in T.$$

Logo

$$\int_T d_K\big(x(t)\big)\, dt = \int_T inf_{y\in K}\|x(t) - y\| dt \geq \int_{\boldsymbol{T}} (\|x(t) - \bar{y}_\varepsilon(t)\| - \varepsilon)\mathrm{dt} \geq$$

$$\geq inf_{y(.)\in\mathcal{K}} \int_{\boldsymbol{T}} \|x(t) - y(t)\|\, dt -\ \varepsilon\mu(T).$$

Fazendo $\varepsilon \to 0^+$, conclui-se

$$\int_T d_K(x(t))\, dt \geq \mathcal{D}_{\mathcal{K}}\,(x(.)).$$

De i) e ii) resulta que

$$\int_T d_K(x(t))\, dt = \mathcal{D}_{\mathcal{K}}\,(x(.)).$$

Ficando assim provado a proposição.

∎

Lema 1.1.26 Seja D um subconjunto fechado e convexo de um espaço de Banach X, $y{:}\,T \to D$ uma função Bochner-integrável, $y_0 \in D$ e $\lambda > 0$l. Então a função $\varphi(.)$ definida por

$$\varphi(t) = y_0 exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) + \lambda^{-1}\int_0^t y(\tau)\, exp\left(-\frac{t-\tau}{\lambda}\right) d\tau, \text{ (1)}$$

É absolutamente continua e satisfaz para todo $t \in T$ a igualdade

$$\dot{\varphi}(t) = \lambda^{-1}\big(y(t) - \varphi(t)\big), \text{ (2)}$$

e a inclusão

$$\varphi(t) \in D$$

Demonstração:

Mostre-se que $\varphi(t) \in D$, para todo $t \in T$.

Como $y(.)$ é integrável, existe uma sucessão de simples $y_s(.), y_s(t) \in D, s = 1,2, \ldots$,tal que

$$\int_T \|y_s(t) - y(t)\| dt \to 0, \text{ com } s \to \infty. (3)$$

Toda a função da y_s assume a forma

$$y_s(t) = \sum_{i=1}^{n_s} y_s^i \, \chi_{E_s^i}(t),$$

onde os conjuntos mensuráveis E_s^i $(i = 1,2, \dots, n_s)$ são disjuntos dois a dois, $\bigcup_{i=1}^{n_s} E_s^i = T$ e $\chi_E(.)$ representa a função indicatriz do conjunto E.

Para $s = 1,2, \dots$, considere-se a função

$$\varphi_s(t) = y_0 exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) + \lambda^{-1} \int_0^t y_s(\tau) \, exp\left(-\frac{t-\tau}{\lambda}\right) d\tau =$$

$$= y_0 exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) + \lambda^{-1} \sum_{i=1}^{n_s} y_s^i \int_{E_s^i \cap [0,t]} exp\left(-\frac{t-\tau}{\lambda}\right) d\tau =$$

$$= \alpha_s^0 y_0 + \sum_{i=1}^{n_s} \alpha_s^i \, y_s^i,$$

onde $\alpha_s^0 = exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right), \alpha_s^i = \lambda^{-1} \int_{E_s^i} exp\left(-\frac{t-\tau}{\lambda}\right) d\tau \ (i = 1,2, \dots, n_s)$.

Tem-se que $\alpha_s^i \geq 0$ para $i = 1,2, \dots, n_s$ e

$$\sum_{i=1}^{n_s} \alpha_s^i = exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) + \lambda^{-1} \sum_{i=1}^{n_s} \int_{E_s^i \cap [0,t]} exp\left(-\frac{t-\tau}{\lambda}\right) d\tau =$$

$$= exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) + \left[exp\left(-\frac{t-\tau}{\lambda}\right)\right]_0^t = 1.$$

Assim $\varphi_s(t)$ é uma combinação convexa de elementos de D. Como D é convexo conclui-se que $\varphi_s(t) \in D$ para todo $t \in T$ e $s = 1,2, \dots$.

Para $t \in T$ tem-se

$$\|\varphi_s(t) - \varphi(t)\| \leq \lambda^{-1} \int_T \|y_s(\tau) - y(\tau)\| d\,\tau.$$

Atendendo a (3) conclui-se que $\varphi_s(t) \to \varphi(t)$, quando $s \to \infty$ e $\varphi(t) \in D$ pois D é um conjunto fechado. A igualdade (2) resulta directamente da diferenciação da expressão (1).

De facto

$$\dot{\varphi}(t) = -\lambda^{-1} y_0 exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) + \lambda^{-1}\left(y(t) - \lambda^{-1} \int_0^t y(\tau)\, exp\left(-\frac{t-\tau}{\lambda}\right) d\tau \right) =$$

$$= \lambda^{-1}\left(-y_0 exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) + \; y(t) - \lambda^{-1} \int_0^t y(\tau)\, exp\left(-\frac{t-\tau}{\lambda}\right) d\tau \right) =$$

$$= \lambda^{-1}\left(y(t) - \left(y_0 exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) + \lambda^{-1} \int_0^t y(\tau)\, exp\left(-\frac{t-\tau}{\lambda}\right) d\tau \right)\right) =$$

$$= \lambda^{-1}\big(y(t) - \varphi(t)\big).$$

Estando assim provado o lema.

■

Observação: Todos os resultados obtidos seguidamente utilizam teoremas de selecções mensuráveis que são válidos só para espaços de Banach separáveis. Nas hipóteses o espaço X não se supõe separável, atendendo ao lema anterior.

Lema 1.1.27 Seja K um subconjunto compacto de X. Então existe um espaço de Banach separável Y, $K \subset Y \subset X$, de modo que $T_K(x) \subset Y$ para todo $x \in K$.

Demonstração:

Considere-se Y como o subespaço de X, gerado por K. Como K é compacto e $K \subset Y$, atendendo à observação ii) da definição 0.1.23, conclui-se que Y é separável.

Pela observação ii) da definição 1.1.9, tem-se

$$T_K(x) \subset \bigcup_{0<h<\alpha} \left(\frac{1}{h}(K - x) \right) + \varepsilon \bar{B} \ ,$$

para todo $x \in K$, $\varepsilon > 0$ e $\alpha > 0$.

Como Y é subespaço vectorial de X, $T_K(x) \subset Y + \ \varepsilon \bar{B}$.

Conclui-se a seguinte inclusão

$$T_K(x) \subset \bigcap_{\varepsilon>0} (Y + \ \varepsilon \bar{B}).$$

Assim

$$T_K(x) \subset Y.$$

Ficando o lema provado.

■

Seja K um subconjunto compacto e convexo do espaço de Banach separável X e considere-se a multifunção, $\Gamma: T \times K \to 2^X$ com as seguintes propriedades

(a) Γ é $\mathcal{L} \otimes \beta$- mensurável;

(b) Para quase todo $t \in T$ a multifunção $\Gamma(\mathrm{t}, .)$ é semicontínua inferiormente em K;

(c) Γ é integravelmente limitada, isto é, existe uma função mensurável e integrável $l(t) \geq 0$, de modo que para quase todo $t \in T$, a desigualdade $\|v\| \leq l(t)$ é verdadeira para todo $x \in K$ e para todo $v \in \Gamma(t, x)$;

(d) Para quase todo $t \in T$ e para todo $x \in K$ tem-se a seguinte inclusão

$$\Gamma(t, x) \subset T_K(x).$$

Considere-se o conjunto $\mathfrak{A} = \{x(.) \in L^1(T, X) : x(t) \in K, q.t.t \in T\}$ fechado em $L^1(T, X)$.

Defina-se a multifunção $\mathcal{G} : \mathfrak{A} \to L^1(T, X)$ por

$$\mathcal{G}(x) = \{u(.) \in L^1(T, X) : u(t) \in \Gamma\big(t, x(t)\big), q.t.t \in T\}, x(.) \in \mathfrak{A}.$$

Lema 1.1.28 Se a multifunção $\Gamma : T \times K \to 2^X$ satisfaz as condições (a) e (c) consideradas anteriormente, então $\mathcal{G}(x) \neq \emptyset \ \forall \ x \in \mathfrak{A}$.

Demonstração:

Provemos que para $x(.) \in \mathfrak{A}$ a multifunção $\Gamma\big(., x(.)\big)$ é mensurável. Pelo teorema 1.1.15 [i)] e pela condição (a), para todo o conjunto fechado $A \subset X$ o conjunto $C = \Gamma^{-1}(A) \cap gr(x(.))$, onde se tem $gr(x(.)) = \{(t, x(t)): t \in T\}$, pertence à σ-álgebra $\mathcal{L} \otimes \beta$. Considerando o teorema 1.1.15 [iii)] tem-se que a multifunção F, definida por $F(t) = \{x: (t, x(t)) \in C\}$, é $\mathcal{L}$-mensurável. Pelo teorema 1.1.14 o conjunto

$$\{t \in T: F(t) \neq \emptyset\} = \{t \in T: \Gamma(t, x(t)) \cap A \neq \emptyset\}$$

é $\mathcal{L}$-mensurável.

Assim $t \to \Gamma(t\,, x(t))$ é $\mathcal{L}$-mensurável.

O teorema 1.1.18 garante a existência de uma selecção mensurável $u(.)$. Atendendo a (c) conclui-se que $u(.) \in L^1(T, X)$. Provando-se que $\mathcal{G}(x) \neq \emptyset$. Como $x(.)$ é qualquer, o lema está provado.

■

Lema 1.1.29 Se a multifunção $\Gamma: T \times K \to 2^X$ satisfaz a propriedade (c), então $\mathcal{G}$ assume subconjuntos fechados, limitados e decomponíveis do espaço $L^1(T, X)$.

Demonstração:

Seja $x(.) \in \mathfrak{A}$ qualquer Provemos que $\mathcal{G}(x)$ é um subconjunto fechado de $L^1(T, X)$. Para isso considere-se $x_n(.) \in \mathcal{G}(x)$ de modo que $x_n(.) \to x_0(.)$ em $L^1(T, X)$. Demonstremos que $x_0(.) \in \mathcal{G}(x)$. Pelo teorema 0.4.23, conclui-se que existe uma subsucessão $x_{n_k}(.)$ de $x_n(.)$ de modo que $x_{n_k}(t) \to x_0(t)\,, q.t.\, t \in T,$ quando $k \to \infty$.

Atendendo a que $x_{n_k}(t) \in \Gamma(t, x(t)), q.t. t \in T$, e $\Gamma(t, x(t))$ é um subconjunto fechado de X, conclui-se $x_0(t) \in \Gamma(t, x(t)), q.t.,\ t \in T$.

Da propriedade (c) conclui-se directamente que $\mathcal{G}(x)$ é limitado em $L^1(T, X)$, pois Γ é integravelmente limitada.

Provemos que $\mathcal{G}(x)$ é decomponível. Considere-se $a(.)$ e $b(.)$ elementos de $\mathcal{G}(x)$ e $E \in \mathcal{L}$. Seja $u = a\chi_E + b\chi_{T\setminus E}$.

Se $t \in E$ então $u(t) = a(t) \in \Gamma(t, x(t)), q.t. t \in T$.

Se $t \in T \setminus E$ então $u(t) = b(t) \in \Gamma(t, x(t)), q.t. t \in T$.

Logo $u(.) \in \mathcal{G}(x)$.

O lema provado.

■

Lema 1.1.30 Se a multifunção $\Gamma: T \times X \to 2^X$ satisfaz as propriedades (a)–(c), então $\mathcal{G}$ é semicontínua inferiormente em $\mathfrak{A}$.

Demonstração:

Suponha-se $\mathfrak{D} \subset L^1(T, X)$ fechado.

Considere-se $x_n \in \mathfrak{A}, \mathcal{G}(x_n) \subset \mathfrak{D}$, convergindo para $x_0 \in \mathfrak{A}$. Pretende-se provar que $\mathcal{G}(x_0) \subset \mathfrak{D}$. Seja $u_0 \in \mathcal{G}(x_0)$ e considere-se a multifunção P_n , definida por

$$P_n(t) = \left\{u \in \Gamma(t, x_n(t)) : \|u - u_0(t)\| \leq d_{\Gamma(t, x_n(t))}(u_0(t)) + n^{-1}\right\}.$$

Esta multifunção toma valores não vazios e fechados.

Escrevendo

$$P_n(t) = \{u \in \mathrm{X}: \alpha_n(t,u) = 0, \beta_n(t,u) \leq n^{-1}\},$$

com

$\alpha_n(t,u) = d_{\Gamma(t,x_n(t))}(u)$ e $\beta_n(t,u) = \|u - u_0(t)\| - d_{\Gamma(t,x_n(t))}\big(u_0(t)\big)$.

Pelo teorema, 1.1.21 e pela proposição 0.1.21 conclui-se que as funções α_n e β_n são funções do tipo Carathéodory. Assim pelo teorema 1.1.20 resulta que P_n é $\mathcal{L}$-mensurável.

Pelo teorema 1.1.18, $P_n(.)$ admite uma selecção mensurável $u_n(.)$ tal que

$$\|u_n(t) - u_0(t)\| \leq d_{\Gamma(t,x_n(t))}\big(u_0(t)\big) + n^{-1}; \text{ (1)}$$

$$u_n(.) \in \mathcal{G}(x_n) \subset \mathfrak{D}. \text{ (2)}$$

Como $x_n(.) \to x_0(.)$ em $\mathfrak{A}$, assim existe $x_{n_k}(.)$ tal que $x_{n_k}(.) \to$ $\to x_0(.)$, para $q.t.\, t \in T$.

Atendendo a que $\Gamma(t,.)$ é semicontinua inferiormente para $q.t.\, t \in T$, pela definição 1.1.7 conclui-se que $d_{\Gamma\left(t,x_{n_k}(t)\right)}\big(u_0(t)\big) \to 0$ quando

$k \to \infty,\ q.t.\, t \in T$. (notar que $x_{n_k}(.) \to x_0(.)$, $q.t.\, t \in T$ e $u_0(t) \in$ $\Gamma\big(t, x_0(t)\big)$

Por (1) conclui-se que $u_{n_k}(t) \to u_0(t)$, para $q.t.\, t \in T$, quando $k \to \infty$.

Pela propriedade (c) de $\Gamma(.,.)$ e aplicando o teorema 0.4.22 conclui-se que

$$u_{n_k}(.) \to u_0(.) \text{ em } L^1(T,X).$$

Pois atendendo a que

$$u_{n_k}(t) \to u_0(t), \text{ para } q.t.\, t \in T \ ,$$

$$\left\| u_{n_k}(t) \right\| \leq l(t)\ q.t.\, t \in T$$

uma vez que $u_{n_k}(t) \in \Gamma\left(t, x_{n_k}(t)\right)$ e pela propriedade (c) de $\Gamma(.,.)$ conclui-se a ultima desigualdade que por sua vez implica

$$\left\| u_{n_k}(t) - u_0(t) \right\| \leq 2l(t)\ q.t.\, t \in T.$$

Assim pelo teorema 0.4.23 tem-se também

$$\int_T \left\| u_{n_k}(t) - u_0(t) \right\| dt \to 0 \text{ quando } n_k \to \infty.$$

Por (2) e atendendo a que $\mathfrak{D}$ é fechado em $L^1(T,X)$ resulta que $u_0 \in \mathfrak{D}$.

O lema está, assim, provado.

■

Lema 1.1.31 Suponha-se a multifunção que satisfaz a propriedade (d) . Então $\mathcal{G}(x) \subset \mathcal{F}_{\mathfrak{A}}(x)$ para toda $x(.) \in \mathfrak{A}$.

Demonstração:

Considere-se $x(.) \in \mathfrak{A}$ e $u(.) \in \mathcal{G}(x)$.

Atendendo a que $u(t) \in \Gamma(t, x(t)), q.t.\, t \in T$,pela propriedade (d) conclui-se que

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \lambda^{-1} d_K\left(x(t) + \lambda u(t)\right) = 0, q.t.\, t \in T \quad .(1)$$

Fixando uma sucessão $(\lambda_n)_n$, de números reais positivos de modo que $\lambda_n \to 0$.

Para $n = 0,1, \ldots$,e pelos teoremas 1.1.18 e 1.1.20 existe uma função mensurável $v_n(.) \in \mathfrak{A}$ de modo que

$\lambda_n{}^{-1}\|x(t) + \lambda_n u(t) - v_n(t)\| \leq \lambda_n{}^{-1} d_K\big(x(t) + \lambda u(t)\big) + n^{-1} \leq$

$\leq \|u(t)\| + n^{-1}, q.t. t \in T$.

Pelo teorema 0.4.24 e (1), conclui-se que

$$\lambda_n{}^{-1} \int_T \|x(t) + \lambda_n u(t) - v_n(t)\| dt \to 0,\ \ n \to \infty. (2)$$

Pela proposição 1.1.25, para cada $x(.) \in \mathfrak{A}$ e $\lambda_n > 0$ tem-se que

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{A}}\,(x + \lambda_n u) = \int_T\ d_K\big(x(t) + \lambda_n u(t)\big)\, dt.$$

De (2) conclui-se que

$$\lambda_n{}^{-1} \int_T\ d_K\big(x(t) + \lambda_n u(t)\big)\, dt \to 0, \lambda_n \to 0^+.$$

Assim

$$\lambda_n{}^{-1}\mathcal{D}_{\mathfrak{A}}\,(x + \lambda_n u) \to 0, \lambda_n \to 0^+,$$

ou seja

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda^{-1}\mathcal{D}_{\mathfrak{A}}\,(x + \lambda u) = 0,$$

portanto $u(.) \in \mathcal{F}_{\mathfrak{A}}(x)$.

O lema está assim provado

■

Pelos lemas 1.1.30 e 1.1.31 e o teorema 1.1.22, conclui-se que existe uma selecção contínua $g: \mathfrak{A} \to L^1(T, X)$ da multifunção $\mathcal{G}$. Do lema 1.1.31 e da proposição 1.1.24, conclui-se que para todo o subconjunto compacto $\mathfrak{A}^*$ de $\mathfrak{A}$ se tem

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \lambda^{-1} \mathcal{D}_{\mathfrak{A}} \left(x + \lambda g(x) \right) = 0, \ (\bullet)$$

onde o limite é uniforme para todo $x \in \mathfrak{A}^*$.

Consideremos o subconjunto de $\mathfrak{A}$ que consiste nas funções absolutamente contínuas $x(t) \in K$, cujas derivadas satisfazem a desigualdade

$$\|\dot{x}(t)\| \leq 2(l(t) + 1) \ (\bullet\bullet).$$

Seja $\mathfrak{A}^*$ o fecho do conjunto anterior no espaço $C(T, X)$ das funções contínuas $x: T \to X$, com norma $\|.\|_C$, $\|x\|_C = sup_{t \in T} \|x(t)\|$ Pelo teorema 0.3.2, o conjunto $\mathfrak{A}^*$ é compacto em $C(T, X)$, e portanto em $L^1(T, X)$.

Atendendo à relação $(\bullet)$, construa-se uma sucessão de números reais $\lambda_n > 0, n = 1,2, \ldots$, tais que $\lambda_n \to 0$ e

$${\lambda_n}^{-1} \mathcal{D}_{\mathfrak{A}} \left(x + \lambda_n g(x) \right) < n^{-1},$$

para cada $x(.) \in \mathfrak{A}^*$.

Lema 1.1.32 Para cada $n \geq 1$, existe uma função contínua

$$v_n: \mathfrak{A}^* \to \mathfrak{A},$$

que satisfaz a desigualdade

$$\|x(t) + \lambda_n g(x)(t) - v_n(x)(t)\| \leq d_K\big(x(t) + \lambda_n g(x)(t)\big) + n^{-1} \lambda_n \ ,$$

para qualquer $x(.) \in \mathfrak{A}^*$, e para $q.t.\, t \in T$.

Demonstração:

Para cada $n \geq 1$,considere-se a multifunção, $\mathcal{P}_n: \mathfrak{A}^* \to \mathfrak{A}$, definida por

$$\mathcal{P}_n(x) = \{u(.) \in \mathfrak{A}: \|x(t) + \lambda_n g(x)(t) - u(t)\| < \\ < d_K\big(x(t) + \lambda_n g(x)(t)\big) + n^{-1}\lambda_n, q.t.\, t \in T\}$$

com $x(.) \in \mathfrak{A}^*$.

Pelos teoremas 1.1.18 e 1.1.20 conclui-se que $\mathcal{P}_n(x) \neq \emptyset$, para cada $x(.) \in \mathfrak{A}^*$. Considerando o teorema 1.1.23, conclui-se que $\mathcal{P}_n$ toma valores decomponíveis e é semicontínua inferiormente em $\mathfrak{A}^*$. Usando o teorema 1.1.22, tem-se a garantia de uma selecção contínua $v_n(.)$ de $\overline{\mathcal{P}_n}, \overline{\mathcal{P}_n}(x) = \overline{\mathcal{P}_n(x)}$, provando-se assim a desigualdade. O lema está provado.

■

Para $n = 1,2,\ldots$, considere-se o conjunto de todas as funções $x(t) \in K$,relativamente às quais as suas derivadas satisfazem, para $q.t.\, t \in T$ a desigualdade $\|\dot{x}(t)\| \leq R_n(t)$, onde

$R_n(t) := max\{2(l(t) + 1), \lambda_n{}^{-1}M\}$, $M := sup_{x,y \in K}\|x - y\| < \infty$.

Seja $\mathfrak{A}_n$ o fecho deste conjunto em $C(T, X)$. Pelo teorema 0.3.2 conclui-se que $\mathfrak{A}_n$ é um compacto de $C(T, X)$ e portanto de $L^1(T, X)$ (da mesma maneira que $\mathfrak{A}^*$ é compacto). Pelo teorema 0.1.29 e por

K ser convexo conclui-se que $\mathfrak{A}_n$ é convexo. Por definição tem-se $\mathfrak{A}^* \subset \mathfrak{A}_n$.

Lema 1.1.33 Para cada $n \geq 1$, existe uma extenção contínua $v_n{}^*$ da função v_n de $\mathfrak{A}^*$ para $\mathfrak{A}_n$ de modo que $v_n{}^*(x) \in \mathfrak{A}$ e

$$\|x(t) - v_n{}^*(x)(t)\| \leq 2\lambda_n(l(t) + 1),$$

para quaisquer $x(.) \in \mathfrak{A}_n$, e para $q.t.\, t \in T$.

Demonstração:

Define-se a multifunção V_n, por

$$V_n(x) = \{u(.) \in \mathfrak{A}: \|x(t) - u(t)\| < 2\lambda_n(l(t) + 1), q.t.\, t \in T\},$$

$$x(.) \in \mathfrak{A}_n\ .$$

Pelo lema 1.1.32 e pela condição (c) da multifunção Γ, conclui-se que $v_n(x) \in V_n(x)$, para cada $x(.) \in \mathfrak{A}^*$. De facto pelo lema 1.1.32, para $x(.) \in \mathfrak{A}^*$ tem-se

$$\|x(t) + \lambda_n g(x)(t) - v_n(x)(t)\| \leq d_K\big(x(t) + \lambda_n g(x)(t)\big) + n^{-1}\lambda_n \leq$$
$$\leq \lambda_n \|g(x)(t)\| + n^{-1}\lambda_n \leq \lambda_n l(t) + n^{-1}\lambda_n,$$

pois $x(t) \in K$, para $q.t.\, t \in T$, e $g(x)(t) \in \Gamma\big(t, x(t)\big), q.t.\, t \in T$.

Assim,

$$\|x(t) - v_n(x)(t)\| \leq \lambda_n l(t) + n^{-1}\lambda_n + \lambda_n\|g(x)(t)\| \leq 2\lambda_n l(t) + 2\lambda_n \leq$$
$$\leq 2\lambda_n(l(t) + 1).$$

Conclui-se portanto que $v_n(x) \in V_n(x)$,para $x(.) \in \mathfrak{A}^*$.

Pelo teorema 1.1.23, conclui-se que a multifunção $\bar{V}_n$, $\bar{V}_n(x) = \overline{V_n(x)}$ é semicontínua inferiormente, tomando valores decomponíveis. Considerando a multifunção $V_n{}^*$ definida por $V_n{}^*(x) = \{v_n(x)\}$ para $x \in \mathfrak{A}^*$, $V_n{}^*(x) = \overline{V_n(x)}$ para $x \in \mathfrak{A}_n \setminus \mathfrak{A}^*$. Assim $V_n{}^*$ será semicontínua inferiormente tomando valores decomponíveis. Pelo teorema 1.1.22, está garantida a existência de uma selecção contínua $v_n{}^*(.)$ de $V_n{}^*$, sendo uma extensão contínua de $v_n(.)$.

O lema está provado.

■

1.2 O resultado principal

Teorema 1.2.1 Seja K um subconjunto convexo e compacto de um espaço de Banach X, separável e a multifunção $\Gamma: T \times X \to 2^X$ satisfaz as propriedades (a)−(d) do parágrafo anterior. Então para qualquer $x_0 \in K$ existe uma solução do tipo Carathéodory $x(.)$ da inclusão diferencial $\dot{x}(t) \in \Gamma\big(t, x(t)\big)$, $t \in [0,1]$, tal que $x(0) = x_0$ e $x(t) \in K$, para todo $t \in T$.

Demonstração:

Fixe-se um ponto $x_0 \in K$ e a função g definida em $\mathfrak{A}$ e que toma valores em $L^1(T, X)$, selecção contínua da multifunção $\mathcal{G}$ definida no parágrafo anterior.

Considere-se o operador $f\colon \mathfrak{A} \to C(T,X)$, definido da seguinte forma

$$f(x)(t) = x_0 + \int_0^t g(x)(\tau)d\tau \ , x(.) \in \mathfrak{A} \, , t \in T,$$

e a sucessão de operadores $f_n\colon \mathfrak{A}_n \to C(T,X)$,$n \geq 1$, definida por

$$f_n(x)(t) = x_0 + {\lambda_n}^{-1} \int_0^t \left({v_n}^*(x)(\tau) - x(\tau)\right)d\tau \, , x(.) \in \mathfrak{A}_n \, , t \in T.$$

Aqui a função contínua ${v_n}^*\colon \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{A}$ foi definida no lema 1.1.33.

As funções f e f_n, $n \geq 1$, são contínuas e satisfazem a desigualdade

$$\|f_n(x) - f(x)\|_C < 2n^{-1}, x(.) \in \mathfrak{A}^*, \ n \geq 1 \, . \quad \textbf{(1)}$$

Integrando a desigualdade do lema 1.1.32 e utilizando a proposição 1.1.25, obtêm-se

$$\int_T \|x(\tau) + \lambda_n g(x)(\tau) - v_n(x)(\tau)\| \, d\tau \leq \mathcal{D}_{\mathfrak{A}} \left(x + \lambda_n g(x)\right) + n^{-1}\lambda_n. \ \textbf{(2)}$$

Como ${\lambda_n}^{-1}\mathcal{D}_{\mathfrak{A}}\left(x + \lambda_n g(x)\right) < n^{-1}, n = 0,1, \ldots,$ para todo $x(.) \in \mathfrak{A}^*$, atendendo a **(2)** resulta

$$\leq {\lambda_n}^{-1} \int_T \|x(\tau) + \lambda_n g(x)(\tau) - v_n(x)(\tau)\| \, d\tau < 2n^{-1}.$$

Para cada $n = 1,2, \ldots$,considere-se o operador $\sigma_n\colon \mathfrak{A}_n \to C(T,X)$, definido por

$$\sigma_n(x)(t) = x_0 \; exp\left(-\frac{t}{\lambda_n}\right) + {\lambda_n}^{-1} \int_0^t {v_n}^*(x)(\tau) \; exp\left(-\frac{t-\tau}{\lambda_n}\right) d\tau,$$

com $x(.) \in \mathfrak{A}_n \, , t \in T$.

Pelos lemas 1.1.26 e 1.1.33, conclui-se que $\sigma_n(x) \in \mathfrak{A}$, é absolutamente contínua, e a sua derivada satisfaz para $q.t.t \in T$, a igualdade

$$\dot{\sigma_n}(x)(t) = \lambda_n{}^{-1}\left(v_n{}^*(x)(t) - \sigma_n(x)(t)\right). \quad \textbf{(3)}$$

Conclui-se assim que $\sigma_n(x) \in \mathfrak{A}_n$, de facto tem-se

$$\|\dot{\sigma_n}(x)(t)\| \leq \lambda_n{}^{-1}M \leq R_n(t), q.t.t \in T$$

pois pela definição de $R_n(t)$ e atendendo a que $v_n{}^*(x)(t)$ e $\sigma_n(x)(t)$ são elementos de K para $q.t.t \in T$, tem-se o pretendido.

Pelo teorema 0.3.4 (teorema de Shauder) e atendendo à convexidade e compacidade de $\mathfrak{A}_n$, conclui-se a existência de uma função $x_n(.) \in \mathfrak{A}_n$, de modo que $\sigma_n(x_n) = x_n$, $x_n(0) = x_0$. Assim por **(3)** conclui-se que

$$\dot{x_n}(t) = \lambda_n{}^{-1}\left(v_n{}^*(x_n)(t) - x_n(t)\right). \textbf{(4)}$$

Desta ultima igualdade e da definição de f_n conclui-se que

$$f_n(x_n) = x_n. \textbf{(5)}$$

Pelo lema 1.1.34 e **(4)**, conclui-se que $x_n(.) \in \mathfrak{A}^*$. De facto

$$\lambda_n{}^{-1}\|v_n{}^*(x)(t) - x_n(t)\| \leq 2(l(t) + 1),$$

portanto,

$$\|\dot{x_n}(t)\| \leq 2(l(t) + 1).$$

Atendendo à definição de $\mathfrak{A}^*$,conclui-se que o pretendido.

Pela compacidade de $\mathfrak{A}^*$,a sucessão $x_n(.)$ tem uma subsucessão $x_{n_k}(.)$ que converge em $C(T,X)$, e portanto em $L^1(T,X)$, para uma função $x(.) \in \mathfrak{A}^*$.

Por **(1)** e **(5)** obtém-se

$\|x - f(x)\|_C \leq \left\|x - x_{n_k}\right\|_C + \left\|f_{n_k}\left(x_{n_k}\right) - f\left(x_{n_k}\right)\right\|_C + \left\|f\left(x_{n_k}\right) -\right.$

$fxC\leq x-xnkC+fxnk-fxC+2nk-1$.

Assim, fazendo $k \to \infty$, na desigualdade anterior e atendendo à continuidade do operador f ,conclui-se que $x = f(x)$. Portanto,

$$x(t) = f(x)(t) = x_0 + \int_0^t g(x)(\tau)d\tau \,, t \in T.$$

Conclui-se que ,$x(0) = x_0$, $x(t) \in K$ para $q.t.\ t \in T$ e

$$\dot{x}(t) = g(x)(t) \in \Gamma\big(t, x(t)\big), \text{ para } q.t.\ t \in T\ .$$

Estando provado o teorema.

■

1.3 Problema de Viabilidade com condições iniciais não locais .

Seja $T = [0,1]$, um intervalo de $\mathbb{R}$, com medida de Lebesgue $\mu\,(dt)$, X um espaço de Banach e a multifunção Γ definida como na secção 1.1 com as mesmas propriedades, (a)-(d), enunciadas.

Nesta secção será provada a existência de soluções do tipo Carathédory da inclusão diferencial

$$\dot{x}(t) \in \Gamma(t, x), t \in T;$$

satisfazendo a restrição

$$x(t) \in K \text{ , para todo } t \in T;$$

onde K é um subconjunto convexo e compacto de X e a condição não local

$$x(0) = \varphi(x),$$

com a função φ continua e definida num subconjunto de $L^1(T, X)$ e assumindo valores em K.

Observação: Se a função φ é constante, $\varphi(x) \equiv x_0 \in X$, caímos no problema da secção 1.2.

Utilizar-se-á para a resolução deste problema o teorema 1.2.1 estabelecido na secção anterior.

Para tal considere-se os conjuntos $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_n, n \geq 1$, definidos na secção 1.1 bem como as funções contínuas g e $v_n{}^*$(estabelecida no lema 1.1.30).

Assim, considere-se o operador, $f: \mathfrak{A} \times K \to C(T, X)$, definido por

$$f(x, \xi)(t) = \xi + \int_0^t g(x)(\tau) d\tau \text{ , } x(.) \in \mathfrak{A} \text{ , } \xi \in K \text{ , } t \in T,$$

e as sucessões de operadores, σ_n, $f_n: \mathfrak{A}_n \times K \to C(T, X)$, $n \geq 1$, definidas, respectivamente por

$$f_n(x, \xi)(t) = \xi + \lambda_n{}^{-1} \int_0^t \big(v_n{}^*(x)(\tau) - x(\tau)\big) d\tau \text{ ,}$$

$$\sigma_n(x,\xi)(t) = \xi\, exp\left(-\frac{t}{\lambda_n}\right) + \lambda_n{}^{-1}\int_0^t v_n{}^*(x)(\tau)\, exp\left(-\frac{t-\tau}{\lambda_n}\right) d\tau$$

para $x(.) \in \mathfrak{A}_n$, $\xi \in K$, $t \in T$.

Utilizando o operador, σ_n, $n \geq 1$, estabeleça-se um novo operador $\Phi_n: \mathfrak{A}_n \times K \to \mathfrak{A}_n \times K$, definido por

$$\Phi_n(x,\xi) = \Big(\sigma_n(x,\xi), \varphi\big(\sigma_n(x,\xi)\big)\Big),\ x(.) \in \mathfrak{A}_n\ , \xi \in K.$$

Como o conjunto $\mathfrak{A}_n \times K$ é convexo e compacto e o operador Φ_n é contínuo, pelo teorema 0.3.4 existe uma função $(x_n, \xi_n) \in \mathfrak{A}_n \times K$ de modo que

$$\Phi_n(x_n, \xi_n) = (x_n, \xi_n).$$

Pela definição de Φ_n, conclui-se que

$$\sigma_n(x_n, \xi_n) = x_n\ ,\ \varphi\big(\sigma_n(x_n, \xi_n)\big) = \xi_n.$$

Portanto,

$$\varphi(x_n) = \xi_n.$$

Como o conjunto $\mathfrak{A}_n \times K$ é compacto em $L^1(T,X) \times X$, implica a existência de um subsucessão $\left(x_{n_k}, \xi_{n_k}\right) \in \mathfrak{A}_n \times K$ convergente em $L^1(T,X) \times X$ para uma função $(x,\xi) \in \mathfrak{A}_n \times K$.

Assim, $\varphi(x) = \xi$ (pela continuidade do operador $\varphi(.)$) .
Repetindo os passos realizados na demonstração do teorema 1.2.1 conclui-se,

$$x(t) = f(x,\xi)(t) = \xi + \int_0^t g(x)(\tau)d\tau\ , x(.) \in \mathfrak{A}\ , \xi \in K\ , t \in T.$$

Portanto, $x(0) = \xi$, $\varphi(x) = x(0)$, $x(t) \in K$ para todo $t \in T$ e

$$\dot{x}(t) = g(x)(t) \in \Gamma(t, x) \text{ para } q.t. \ t \in T \ .$$

Ficando estabelecido o pretendido.

Observação: Pondo $\varphi(x) = x(\theta), \theta \in T$, prova-se a existência de soluções periódicas do problema.

Capítulo 2

Existência de solução de uma equação de evolução com condições de fronteira funcionais

Seja $\mathbf{X}$ um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|$.

Neste capítulo, será abordada a questão da existência de solução para uma equação de evolução do tipo

$$\dot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u})(\boldsymbol{t}) \quad (\bullet)$$

onde A é um operador linear (em geral não limitado) em X gerador infinitesimal de um c_0-semigrupo, $S = \left\{\left(S(t)\right)_{t\geq 0}\right\}$, $\boldsymbol{g}$ é um operador de $\mathcal{U} \subset L^1(T,X)$ em $L^1(T,X)$.

Será provada a existência de uma solução integral $\boldsymbol{u}(\cdot)$ de $(\bullet)$ satisfazendo a restrição $\boldsymbol{u}(\mathrm{t}) \in K$, para todo $\mathrm{t} \in \mathrm{T}$; onde K é um subconjunto fechado e fixo de X e a seguinte condição de fronteira $\boldsymbol{u}(0) = \varphi(\boldsymbol{u})$, onde φ é uma função definida num subconjunto de $L^1(T,X)$ e assume valores em X.

2.1 Preliminares

Definição 2.1.1 Uma família $\left(\mathrm{S(t)}\right)_{\mathrm{t}\geq 0}$, de operadores lineares limitados de X em X chama-se um semigrupo de operadores lineares limitados em X se

i) $S(0) = I;$

ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$, para quaisquer $t, s \geq 0.$

Observação: A letra I na definição anterior representa o operador identidade.

Definição 2.1.2 Um semigrupo de operadores lineares limitados, $\left(S(t)\right)_{t\geq 0}$, diz-se uniformemente contínuo se

$$lim_{t\to 0^+}\|S(t)-I\|=0.$$

Definição 2.1.3 Seja $\left(S(t)\right)_{t\geq 0}$ um semigrupo de operadores lineares em X e

$$D(A)=\left\{x\in X\colon lim_{t\to 0^+}\frac{S(t)x-x}{t}\text{ existe}\right\}.$$

O operador $A\colon D(A)\to X$ definido por

$$Ax=lim_{t\to 0^+}\frac{S(t)x-x}{t},\text{ para } x\in D(A),$$

é chamado o gerador infinitesimal do semigrupo $\left(S(t)\right)_{t\geq 0}$, $D(A)$, é o domínio de A.

Teorema 2.1.4 Sejam $\left(T(t)\right)_{t\geq 0}$ e $\left(S(t)\right)_{t\geq 0}$ semigrupos de operadores lineares limitados uniformemente contínuos. Se $lim_{t\to 0^+}\frac{T(t)-I}{t}=A=lim_{t\to 0^+}\frac{S(t)-I}{t}$, então $T(t)=S(t)$ para todo $t\geq 0$.

Definição 2.1.5 Um semigrupo de operadores lineares limitados $\left(S(t)\right)_{t\geq 0}$ em X é um semigrupo fortemente continuo, ou um c_0-semigrupo, se para todo $x\in X$, $lim_{t\to 0^+}S(t)\,x=x$.

Teorema 2.1.6 Seja $\left(S(\mathrm{t})\right)_{\mathrm{t}\geq 0}$ um c_0-semigrupo. Então existem constantes $w \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que $\|S(t)\| \leq Me^{wt}$ para todo o $\mathrm{t} \geq 0$. Quando $M = 1$ e $w = 0$, $\left(S(t)\right)_{t\geq 0}$ é denominado contractivo.

Definição 2.1.7 Seja $\left(S(t)\right)_{t\geq 0}$ um c_0-semigrupo. Então $\left(S(t)\right)_{t\geq 0}$ é chamado compacto para $t > t_0$ se para todo $t > t_0$, $S(t)$ é um operador compacto. $\left(S(t)\right)_{t\geq 0}$ é chamado compacto se é compacto para
$t > 0$.

Definição 2.1.8 Seja $\left(S(t)\right)_{t\geq 0}$ um c_0-semigrupo num espaço de Banach X. Então o semigrupo $\left(S(t)\right)_{t\geq 0}$ é diferenciável para $t > t_0$ se para todo o $x \in X$, a aplicação, $t \to S(t)x$ é diferenciável para $t > t_0$. $\left(S(t)\right)_{t\geq 0}$ é diferenciável se é diferenciável para todo o $t > 0$.

Observação: Resulta da definição que $\left(S(t)\right)_{t\geq 0}$ é diferenciável sse $S(t)x \in D(A)$ para quaisquer $x \in X$, $t > 0$.

Definição 2.1.9 Seja $\left(S(t)\right)_{t\geq 0}$ um c_0-semigrupo com gerador infinitesimal A . Então $\left(S(t)\right)_{t\geq 0}$chama-se analítico se é diferenciável e existe um $N > 0$ tal que $\|AS(t)\| \leq \frac{N}{t}$ para todo o $t \in]0,1]$.

Definição 2.1.10 O conjunto $K \subset X$ diz-se invariante relativamente ao semigrupo $\left(S(t)\right)_{t \geq 0}$ se $S(t)x \in K$ para todo $x \in K$ e $t \geq 0$.

Definição 2.1.11 Seja X um espaço de Banach e $\mathcal{L}$ a família de todos os subconjuntos limitados de X. Então a medida de não compacidade (de Kuratowski) $\mathcal{X}: \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ é definida por

$\mathcal{X}(\mathrm{B}) = \inf\{\mathrm{r} > 0: \mathrm{B}$ admite uma cobertura finita de conjuntos de diâmetro ≤ $\mathrm{r}\}$.

O próximo lema contém várias propriedades da medida de não compacidade utilizadas posteriormente. .

Lema 2.1.12 Seja $\mathcal{X}: \mathcal{L} \to \mathbb{R}$, anteriormente definida. Então

i) $\mathcal{X}(\mathrm{B}) = 0 \Leftrightarrow \overline{\mathrm{B}}$ é compacto;

ii) Se $B_1 \subset B_2$, então $\mathcal{X}(B_1) \subset \mathcal{X}(B_2)$;

iii) $\mathcal{X}(\mathrm{B}) = \mathcal{X}(\overline{\mathrm{B}})$;

iv) $\mathcal{X}(\mathrm{A} + \mathrm{B}) \leq \mathcal{X}(\mathrm{A}) + \mathcal{X}(\mathrm{B})$.

Observação: Consideremos o espaço $C(T, X)$ das funções contínuas em T, $u: T \to X$, com a topologia da convergência uniforme sobre subconjuntos compactos de $]0,1]$. Esta topologia designa-se por τ_C e pode ser definida pela família enumerável de seminormas

$$\{\rho_m(.), m = 1,2, \dots\}, \quad \rho_m(u) := sup_{t \in \left[\frac{1}{m}, 1\right]} \|u(t)\|.$$

Isto significa que uma sucessão $\left(u_n(.)\right)_n$ converge para $u(.)$ com respeito a τ_C sse $\rho_m\left(u_n(.) - u(.)\right) \to 0$ para cada $m = 1,2, \dots$.

Consideremos o semigrupo $\left(S(t)\right)_{t\geq 0}$ e defina-se o operador $P_S: X \times L^1(T,X) \rightarrow L^1(T,X)$ por

$P_S\big(\xi, v(.)\big)(t) = S(t)\xi + \int_o^t S(t-\tau)v(\tau)d\tau\,,\ \xi \in X,\ v(.) \in L^1(T,X),\ t \in T.$

Definição 2.1.13. Uma função $g: [0,+\infty[\rightarrow X$ é diz-se Hölder continua no intervalo $I \subset [0,\infty[$ se existem números $M > 0$ e $0 < \beta \leq 1$ tal que $\|g(t) -$ $gs\leq Mt-s\beta$ para todos $t,s\in I$.

A função g é localmente Hölder continua em $[0,\infty[$ se g é Hölder continua em $[0,b]$, para todo $b > 0$.

Definição 2.1.14 Seja $\mathcal{U} \subset L^1(T,X)$, $g: \mathcal{U} \rightarrow L^1(T,X)$, e seja A o gerador infinitesimal do c$_0$-semigrupo $\left(S(\mathrm{t})\right)_{\mathrm{t}\geq 0}$ de operadores lineares limitados. A função $u(.) \in \mathcal{U}$ continua é chamada solução integral de (●) se para todo o $\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{T}$ se tem

$$u(t) = S(t)u(0) + \int_0^t S(t-\tau)\, g(u)(\tau)d\tau.$$

Se $u(.)$ é continuamente diferenciável em $]0,1]$, $u(t) \in D(A)$ e verifica a equação (●) para todo $0 < t \leq 1$, denomina-se solução clássica de (●).

No lema que se segue consideremos a topologia $(C(T,X)\,, \tau_C)$.

Lema 2.1.15 Seja $\left(S(t)\right)_{t\geq 0}$, um c_0-semigrupo compacto de operadores lineares compactos limitados em X.

Então para todo o conjunto limitado $K \subset X$ e todo o conjunto uniformemente integrável $Q \subset L^1(T,X)$, o operador P_S transforma o conjunto $K \times Q$ num subconjunto relativamente compacto de $(C(T,X)\,, \tau_C)$.

Demonstração:

Tem-se que

$$\left\|P_S\big(\xi, v(.)\big)(t)\right\| \leq Me^{wt}\left(\|\xi\| + \int_T \|v(\tau)\|d\tau\right), \quad \textbf{(1)}$$

para todos $\xi \in K$ e $v(.) \in Q$.

De facto pelo teorema 2.1.6

$$\left\|P_S\big(\xi, v(.)\big)(t)\right\| \leq \|S(t)\xi\| + \left\|\int_o^t S(t-\tau)v(\tau)d\tau\right\| \leq$$

$$\leq \|S(t)\xi\| + \int_0^t \|S(t-\tau)v(\tau)\|\, d\tau \leq$$

$$\leq \|S(t)\|\|\xi\| + \int_0^t \|S(t-\tau)\| \, \|v(\tau)\|d\tau \leq$$

$$\leq Me^{wt}\|\xi\| + Me^{wt}\int_o^t v(\tau)d\tau\,.$$

Atendendo a que todo o conjunto de $L^1(T,X)$ uniformemente integrável é limitado em $L^1(T,X)$, por **(1)** conclui-se que

$$\Sigma := \left\{P_S\big(\xi, v(.)\big)(t) : \xi \in K, v(.) \in Q, t \in T\right\}$$

é limitado em X.

Fixando $t \in T$ com $t > 0$, provemos que $P_S(K \times Q)(t) \subset \Sigma$ é relativamente compacto em X. Escolha-se $h > 0$, suficientemente pequeno, de modo que $t - h > 0$. Considere-se a desigualdade

$$P_S\big(\xi, v(.)\big)(t) = S(h)(P_S\big(\xi, v(.)\big)(t-h) + \int_{t-h}^t S(t-\tau)v(\tau)d\tau. \quad \textbf{(2)}$$

Esta desigualdade resulta das propriedades de $\big(S(t)\big)_{t\geq 0}$ e do teorema 0.4.24.

.

De facto

$$P_S\big(\xi, v(.)\big)(t) = S(t-h+h)(\xi) + \int_0^t S(t-\tau)v(\tau)d\tau =$$

$$= \big(S(h)S(t-h)\big)(\xi) + \int_0^{t-h} S(t-\tau)v(\tau)d\tau + \int_{t-h}^t S(t-\tau)v(\tau)d\tau =$$

$$= S(h)\left(S(t-h)(\xi) + \int_{0}^{t-h} S\big((t-h)-\tau\big)v(\tau)d\tau\right) + \int_{t-h}^{t} S(t-\tau)v(\tau)d\tau =$$

$$= S(h)P_S\big(\xi, v(.)\big)(t-h) + \int_{t-h}^{t} S(t-\tau)v(\tau)d\tau.$$

Desta desigualdade resulta a seguinte

$$\mathcal{X}\big(P_S(K \times Q)(t)\big) \leq$$

$$\leq \mathcal{X}\big(S(h)P_S(K \times Q)(t-h)\big) + \mathcal{X}\left(\left\{\int_{t-h}^{t} S(t-\tau)v(\tau)d\tau : v(.) \in Q\right\}\right).$$ **(3)**

Basta para tal fazer variar ξ e $v(.)$ em K e Q respectivamente na desigualdade **(2)** e aplicando o lema 2.1.12 (propriedade iv) .

Atendendo a que $P_S(K \times Q)(t-h) \subset \Sigma$, conclui-se que o conjunto $S(h)P_S(K \times Qt-h$ é relativamente compacto em X (o operador Sh é compacto). Pelo lema 2.1.12, (i), conclui-se que. primeira parcela do lado direito da desigualdade **(3)** é zero.

A segunda parcela do lado direito da desigualdade **(3)** pode ser estimada por

$\mathcal{X}\left(\left\{\int_{t-h}^{t} S(t-\tau)v(\tau)d\tau : v(.) \in Q\right\}\right) \leq 2\, Me^{wt} sup_{v(.)\in Q} \int_{t-h}^{t} \|v(\tau)\| d\tau.$ **(4)**

De facto, para todo $v(.) \in Q$, temos que, pelo teorema 2.1.6

$$\left\| \int_{t-h}^{t} S(t-\tau)v(\tau)d\tau \right\| \leq$$

$$\leq \int_{t-h}^{t} \|S(t-\tau)\| \|v(\tau)\| d\tau \leq$$

$$\leq 2\, Me^{wt} sup_{v(.)\in Q} \int_{t-h}^{t} \|v(\tau)\| d\tau.$$

Como Q é uniformemente integrável, para todo o $\epsilon > 0$ existe h_0 tal que,

$$\mathcal{X}\left(\left\{\int_{t-h}^{t} S(t-\tau)v(\tau)d\tau : v(.) \in Q\right\}\right) \leq \epsilon, \text{ para todo } 0 < h < h_0.$$

Como o lado direita da desigualdade **(3)** é independente de h, assim

$$\mathcal{X}\big(P_S(K\times Q)(t)\big)=0.$$

Conclui-se que $P_S(K\times Q)(t)$ é relativamente compacto em X (lema 2.1.12, propriedade i).

Escolha-se $t_0\in\,]0,1]$ e provemos a equicontinuidade do conjunto $P_S(K\times Q)(t_0)$.

Demonstremos primeiro a equicontinuidade à direita de t_0.

Como o conjunto $P_S(K\times Q)(t_0)$ é relativamente compacto, para todo o $\epsilon>0$, existe um número finito de pontos $x_i\in X,\ i=1,\dots,n$ tal que

$$P_S(K\times Q)(t_0)\subset\bigcup_{i=1}^{n}\left(x_i+\frac{\epsilon}{3(Me^{w}+1)}\bar{B}\right)\ \textbf{(5)}.$$

O símbolo, $\bar{B}$, representa a bola fechada unitária de centro na origem.

Como $\big(S(t)\big)_{t\geq 0}$ é um c_0-semigrupo e o conjunto Q é uniformente integrável existe $\delta>0$ tal que

$$\|S(t-t_0)x_i-x_i\|\leq\frac{\epsilon}{3}\ ,i=1,\dots,n\ \textbf{(6)}$$

$$\int_{t_0}^{t}\|v(\tau)\|d\tau\leq\frac{\epsilon}{3Me^{w}}\ \textbf{(7)},$$

para todos o $v(.)\in Q$ e $t\in T$, de modo que $t_0\leq t\leq t_0+\delta$. Para $\xi\in K$ e $v(.)\in Q$, escolhe-se um ponto x_i de modo que, atendendo a **(5)**

$$\big\|P_S\big(\xi,v(.)\big)(t_0)-x_i\big\|\leq\frac{\epsilon}{3(Me^{w}+1)},$$

e para todo $t\in T$, $t_0\leq t\leq t_0+\delta$, tem-se

$$\big\|P_S\big(\xi,v(.)\big)(t)-P_S\big(\xi,v(.)\big)(t_0)\big\|\leq$$

$$\leq\left\|\left(S(t)\xi+\int_0^t S(t-\tau)v(\tau)d\tau\right)-\left(S(t_0)\xi+\int_0^{t_0}S(t_0-\tau)v(\tau)d\tau\right)\right\|=$$

$$=\left\|S(t)\xi+\int_0^{t_0}S(t-\tau)v(\tau)d\tau+\int_{t_0}^{t}S(t-\tau)v(\tau)d\tau-S(t_0)\xi-\int_0^{t_0}S(t_0-\tau)v(\tau)d\tau\right\|=$$

$$=\left\|S(t)\xi-S(t_0)\xi+\int_0^{t_0}\big(S(t-\tau)v(\tau)-S(t_0-\tau)v(\tau)\big)d\tau+\int_{t_0}^{t}S(t-\tau)v(\tau)d\tau\right\|\leq$$

$$\leq \left\| S(t_0)(S(t-t_0)\xi - \xi) + \int_0^{t_0} \Big(S(t_0-\tau)\big(S(t_0-\tau)v(\tau) - v(\tau)\big)\Big) d\tau \right\| +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \|S(t-\tau)v(\tau)\|\, d\tau =$$

$$= \left\| S(t_0)(S(t-t_0) - I)(\xi) + \int_0^{t_0} S(t_0-\tau)(S(t-t_0) - I)v(\tau)d\tau \right\| +$$

$$\int_{t_0}^{t} \|S(t-\tau)v(\tau)\|\, d\tau =$$

$$= \left\| (S(t-t_0) - I)\left(S(t_0)\xi + \int_0^{t_0} S(t_0-\tau)v(\tau)d\tau - x_i \right) + S(t-t_0)(x_i) - x_i \right\|$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \|S(t-\tau)v(\tau)\|\, d\tau \leq$$

$$\leq \|S(t-t_0) - I\| \left\| P_S\big(\xi, v(.)\big)(t_0) - x_i \right\| + \|S(t-t_0)(x_i) - x_i\| +$$

$$+ Me^{w} \int_{t_0}^{t} \|v(\tau)\| d\tau \leq$$

$$\leq (Me^{w} + 1)\frac{\varepsilon}{3(Me^{wt}+1)} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3Me^{wt}} \leq \varepsilon. \text{ (Por } (\mathbf{5}), (\mathbf{6}) \text{ e } (\mathbf{7}))$$

Provando assim a equicontinuidade à direita de $P_S(K \times Q)(t_0)$.
Da mesma forma se prova a equicontinuidade à esquerda de $P_S(K \times Q)(t_0)$. Assim escolhe-se $h > 0, t_0 - 2h \geq 0$, suficientemente pequeno de modo que

$$\int_{t-h}^{t} \|v(\tau)\|\, d\tau \leq \frac{\varepsilon}{8e^{w}} \quad \text{,} \mathbf{(8)}$$

para todos $v(.) \in Q$ e $t \in T, t - h > 0$. Da mesma maneira como na prova da equicontinuidade à esquerda de $P_S(K \times Q)$, existem pontos $x_i \in X$, $i = 1, \ldots, n$, e um número $0 < \delta \leq h$ tal que

$$\|S(t-t_0)(x_i) - x_i\| \leq \frac{\varepsilon}{4}, i = 1, \ldots, n \quad \mathbf{(9)}$$

$$S(h)\Sigma \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left(x_i + \frac{\epsilon}{4(Me^{w}+1)} \bar{B} \right) \quad \mathbf{(10)}$$

$$\int_{t_0}^{t}\|v(\tau)\|d\tau \leq \frac{\varepsilon}{4Me^{w}} \quad \textbf{(11)}$$

para todo $v(.) \in Q$ e $t \in T$, $t_0 - \delta \leq t \leq t_0$.

Seja $\xi \in K$, $v \in Q$ e $t \in [t_0 - \delta, t_0]$. Escolha-se x_i de modo que

$$\left\|S(h)P_S\big(\xi, v(.)\big)(t-h) - x_i\right\| \leq \frac{\epsilon}{4(Me^{w}+1)}.$$

Assim, pelas propriedades de $\big(S(t)\big)_{t\geq 0}$,temos sucessivamente que

$$\left\|P_S\big(\xi, v(.)\big)(t) - P_S\big(\xi, v(.)\big)(t_0)\right\| =$$

$$= \left\|\left(S(t)\xi + \int_0^t \big(S(t-\tau)v(\tau)\big)d\tau\right) - \left(S(t_0)\xi + \int_0^{t_0} \big(S(t_0-\tau)v(\tau)\big)d\tau\right)\right\| =$$

$$= \left\|S(t)\xi + \int_0^{t-h} S(t-\tau)v(\tau)d\tau + \int_{t-h}^{t} S(t-\tau)v(\tau)d\tau - S(t_0)\xi - \int_0^{t-h} S(t_0-\tau)v(\tau)d\tau - \right.$$

$$\left. - \int_{t-h}^{t} S(t_0-\tau)v(\tau)d\tau - \int_t^{t_0} S(t_0-\tau)v(\tau)d\tau\right\| =$$

$= \Big\|S(t-h)(S(h) - S(t_0 - t + h) + \int_0^{t-h} S(t-h-\tau)(S(h) - S(t_0 - t + h))v(\tau)d\tau + + \int_{t-h}^{t}\big((S(t -$

τ−S(t0−τvτdτ−tt0St0−τvτdτ≤

$$\leq \left\|S(t-h)(S(h) - S(t_0 - t + h)\xi + \int_0^{t-h} S(t-h-\tau)(S(h) - S(t_0 - t + h))v(\tau)d\tau\right\| +$$

$$+ \int_{t-h}^{t}\left\|\big((S(t-\tau) - S(t_0-\tau)\big)v(\tau)d\tau\right\| + \ Me^{w}\int_0^{t}\|v(\tau)\|\,d\tau =$$

$$= \left\|S(t-h)(S(h) - S(h)S(t_0-h)\xi + \int_0^{t-h} S(t-h-\tau)(S(h) - S(h)S(t_0-t))v(\tau)d\tau\right\| +$$

$$+ \int_{t-h}^{t}\left\|\big((S(t-\tau) - S(t_0-\tau)\big)v(\tau)d\tau\right\| + \ Me^{w}\int_0^{t}\|v(\tau)\|\,d\tau =$$

$$= \left\|S(t-h)S(h)(I - S(t_0-h))\xi + \int_0^{t-h} S(t-h-\tau)S(h)(I - S(t_0-t))v(\tau)d\tau\right\| +$$

$$+ \int_{t-h}^{t}\left\|\big((S(t-\tau) - S(t_0-\tau)\big)v(\tau)d\tau\right\| + Me^{w}\int_0^{t}\|v(\tau)\|\,d\tau \leq$$

$$\leq \left\|S(h)(I - S(t_0-h))\left(S(t-h)\xi + \int_0^{t-h} S(t-h-\tau)v(\tau)d\tau\right)\right\| + 2Me^{w}\int_{t-h}^{t}\|v(\tau)\|\,d\tau +$$

$$+Me^{w}\int_t^{t_0}\|v(\tau)\|\,d\tau =$$

$$= \left\| S(h)(I - S(t_0 - h))\left(P_S(\xi, v(.))(t-h) + x_i - x_i\right)\right\| + 2Me^w \int_{t-h}^{t} \|v(\tau)\|\, d\tau +$$

$$+Me^w \int_t^{t_0} \|v(\tau)\|\, d\tau \leq$$

$$\leq \|S(t_0 - t) - I\| \left\| S(h)P_S(\xi, v(.))(t-h) - x_i \right\| + \|S(t_0 - t)x_i - x_i\| +$$

$+2Me^w \int_{t-h}^{t} \|v(\tau)\|\, d\tau + Me^w \int_t^{t_0} \|v(\tau)\|\, d\tau \leq \varepsilon$. (por **(8)**, **(9)**,**(10)** e **(11)**)

Assim, provou-se que o conjunto $P_S(K \times Q)$ é equicontinuo para cada ponto $t_0 \in]0,1]$. Pelo teorema de Ascoli (teorema 0.3.2.) o conjunto é relativamente compacto em $(C(T, X), \tau_C)$.

■

Observação: Pelo lema anterior, o operador P_S transforma o conjunto $K \times Q$ num conjunto relativamente compacto de $L^1(T, X)$. De facto, considere-se o número R de modo que

$$\left\| P_S(\xi, v(.))(t) \right\| \leq \text{R},$$

para todos $\xi \in K$,$v(.) \in Q$ e $t \in T$.

Seja $u_n(.) \in P_S(K \times Q)$,convergindo para $u(.)$ em $(C(T, X), \tau_C)$. Então para todo o $\varepsilon > 0$,existe

$m = 1,2, \ldots$, suficientemente grande, de modo que para $n \geq m$,se tem

$$\int_T \|u_n(t) - u(t)\| dt \leq \int_0^{\frac{1}{m}} \|u_n(t) - u(t)\|\, dt + \int_{\frac{1}{m}}^{1} \|u_n(t) - u(t)\|\, dt \leq$$

$$\leq \int_0^{\frac{1}{m}} \|u_n(t)\|\, dt + \int_0^{\frac{1}{m}} \|u(t)\|\, dt + \rho_m\left(u_n(t) - u(t)\right) \leq \varepsilon.$$

2.2 Existência de soluções de $(\bullet)$ no caso de um conjunto limitado

Considere-se X um espaço de Banach separável.

Suponha-se $\mathcal{K} \subset L^1(T,X)$, $g\colon \mathcal{K} \to L^1(T,X)$ e $A\colon D(A) \to X$ um gerador infinitesimal do c_0-semigrupo $\big(S(t)\big)_{t\geq 0}$ de operadores lineares limitados.

Seja $K \subset X$ um conjunto e uma função integrável $l\colon T \to \mathbb{R}$, $l(t) \geq 0$, para todo $t \in T$.

Defina-se os conjuntos

$$\mathcal{K} := \{u(.) \in L_1(T,X) \colon u(t) \in K, q.t., t \in T\};$$

$$Q := \{v(.) \in L_1(T,X) \colon \|v(t)\| \leq 2(l(t)+1), q.t. t \in T\};$$

$$\mathcal{K}^* := \overline{P_S(K \times Q) \cap \mathcal{K}}.$$

O fecho considerado atrás é em $(C(T,X), \tau_C)$.

Se K é limitado pelo lema 2.1.15 e respectiva observação, os espaços $(\mathcal{K}^*, \tau_c)$ e $(\mathcal{K}^*, \|.\|_1)$ são compactos.

O símbolo, $\|.\|_1$, representa a norma em$L^1(T,X)$.

Teorema 2.2.1 Considere-se o conjunto K não vazio fechado, limitado e convexo invariante com respeito ao c_0-semigrupo compacto $\big(S(t)\big)_{t\geq 0}$ com gerador infinitesimal $A\colon D(A) \to X$. Suponha-se a função contínua $g\colon (\mathcal{K}^*, \|.\|_1) \to L_1(T,X)$ satisfazendo as condições

$$\|g(u)(t)\| \leq l(t)\,, \quad g(u)(t) \in T_K\big(u(t)\big)$$

para quase todo $t \in T$ e para toda $u(.) \in \mathcal{K}^*$.

Então para qualquer função contínua $\varphi\colon (\mathcal{K}^*, \tau_c) \to K$, existe uma solução integrável $u(.) \in \mathcal{K}^*$ de (●) de modo que $u(0) = \varphi(u)$-

Demonstração:

De forma semelhante ao demonstrado no lema 1.1.31 , conclui-se que para cada função $u(.) \in \mathcal{K}^*$.

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{1}{\lambda} \mathfrak{D}_{\mathcal{K}}\big(u + \lambda g(u)\big) = 0 \ \textbf{(1)}$$

com o limite uniforme para cada subconjunto compacto de $\mathcal{K}$.

Assim, construa-se a partir de **(1)** a sucessão de números reais $\lambda_n > 0, n = 1,2, \ldots$, de modo que $\lambda_n \to 0^+$ e

$$\frac{1}{\lambda_n}\mathfrak{D}_{\mathcal{K}}\big(u + \lambda_n g(u)\big) \leq \frac{1}{n}, \textbf{ (2)}$$

para todos $u(.) \in \mathcal{K}^*$ e $n = 1,2, \ldots$.

Pelos lemas 1.1.32 e 1.1.33, define-se as funções contínuas $q_n: \mathcal{K} \to \mathcal{K}$, $n = 1,2, \ldots$,satisfazendo as desigualdades

$$\|u(t) + \lambda_n g(u)(t) - q_n(u)(t)\| \leq d_k\big(u(t) + \lambda_n g(u)(t)\big) + \frac{\lambda_n}{n} \textbf{ (3)}$$

para todo $u(.) \in \mathcal{K}^*$ e para quase todo o $t \in T$,

$$\|u(t) - q_n(u)(t)\| \leq 2\lambda_n(l(t) + 1) \textbf{ (4)}$$

para todo $u(.) \in \mathcal{K}$ e para quase todo o $t \in T$.

Defina-se

$$f(\xi, u)(t) := S(t)\xi + \int_0^t S(t-\tau)g(u)(\tau)d\tau \textbf{ (5)}$$

para quaisquer $\xi \in K$, $u(.) \in \mathcal{K}^*$, $t \in T$,

$$f_n(\xi, u)(t) := S(t)\xi + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^t S(t-\tau)\big(q_n(u)(\tau) - u(\tau)\big)d\tau \textbf{ (6)}$$

$$\sigma_n(\xi, u)(t) := e^{\frac{-t}{\lambda_n}}S(t)\xi + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^t e^{\frac{-(t-\tau)}{\lambda_n}}S(t-\tau)\big(q_n(u)(\tau)\big)d\tau \textbf{ (7)}$$

para quaisquer $\xi \in K$, $u(.) \in \mathcal{K}$, $t \in T$ e $n = 1,2, \ldots$.

Verifica-se, assim, que as funções

$$f: K \times (\mathcal{K}^*, \|.\|_1) \to (C(T, X), \tau_C),$$
$$f_n: K \times \mathcal{K} \to (C(T, X), \tau_C),$$
$$\sigma_n: K \times \mathcal{K} \to (C(T, X), \tau_C),$$

são contínuas.

Por **(3)** e **(4)**

$$\|f(\xi, u)(t) - f_n(\xi, u)(t)\| \leq \frac{Me^w}{\lambda_n}\int_0^t d_k\big(u(\tau) + \lambda_n g(u)(\tau)\big)d\tau + \frac{1}{n}Me^w \leq \frac{2}{n}Me^w \textbf{ (8)}$$

para quaisquer $\xi \in K$, $u(.) \in \mathcal{K}^*$, $t \in T$ e $n = 1,2, \ldots$.

De facto

$\|f(\xi, u)(t) - f_n(\xi, u)(t)\| =$

$$= \frac{1}{\lambda_n} \left\| \int_0^t \{S(t-\tau)\lambda_n g(u)(\tau) - S(t-\tau)\big(q_n(u)(\tau) - u(\tau)\big)\} d\tau \right\| =$$

$$= \frac{1}{\lambda_n} \left\| \int_0^t \{S(t-\tau)\big(\lambda_n g(u)(\tau) - q_n(u)(\tau) - u(\tau)\big)\} d\tau \right\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \|S(t-\tau)\| \|\lambda_n g(u)(\tau) - q_n(u)(\tau) - u(\tau)\| \, d\tau \leq$$

$$\leq \frac{1}{\lambda_n} \, Me^w \int_0^t d_k\big(u(\tau) + \lambda_n g(u)(\tau)\big) d\tau + \int_0^t \frac{1}{n} \lambda_n \leq$$

$$\leq \frac{1}{\lambda_n} \, Me^w \frac{\lambda_n}{n} + \frac{\lambda_n}{n} t \leq 2 \frac{Me^w}{n}.$$

Considere-se a seguinte relação

$f_n(\xi, u)(t) - \sigma_n(\xi, u)(t) = \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t S(t-\tau)\big(\sigma_n(\xi, u)(t) - u(\tau)\big) d\tau$, **(9)**

$\xi \in K$, $u(.) \in \mathcal{K}$, $t \in T$ e $n = 1,2, \dots$.

Como K é invariante com respeito ao semigrupo $\big(S(t)\big)_{t\geq 0}$, resulta que $\sigma_n(\xi, u)(t) \in K$, para todo $\xi \in K$, $u(.) \in \mathcal{K}$, $t \in T$, atendendo ao lema 1.1.26.

Seja $R > 0$, escolhido de forma que $K \subset R\bar{B}$ e

$$Q_n := \left\{ v(.) \in L^1(T, X) : \|v(t)\| \leq \frac{R}{\lambda_n} + 2(l(t) + 1), q.t.\, t \in T \right\}.$$

Tem-se Q_n é uniformente integrável e o operador σ_n, transforma $K \times \mathcal{K}$ em $P_{S_n}(K \times Q_n)$, com $\big(S_n(t)\big)_{t\geq 0} := \left(e^{\frac{-t}{\lambda_n}} S(t)\right)_{t\geq 0}$.

O semigrupo anterior é um c_0-semigrupo compacto de operadores limitados em X.

Tem-se que $q_n(u)(.) \in Q_n$. De facto para $u(.) \in \mathcal{K}$ e $q.t\ t \in T$, tem-se que

$$\left\| \frac{q_n(u)(t)}{\lambda_n} \right\| \leq \left\| \frac{q_n(u)(t) - u(t)}{\lambda_n} \right\| + \left\| \frac{u(t)}{\lambda_n} \right\|.$$

Por **(4)** conclui-se que

$$\left\| \frac{q_n(u)(t)}{\lambda_n} \right\| \leq \frac{2\lambda_n(l(t)+1)}{\lambda_n} + \frac{R}{\lambda_n}.$$

Assim,

$$\|q_n(u)(t)\| \leq \frac{R}{\lambda_n}+2\lambda_n(l(t)+1).$$

Pelo lema 2.1.15. conclui-se que o conjunto $\sigma_n(K \times \mathcal{K})$ é relativamente compacto em $(C(T,X),\tau_C)$ e $L^1(T,X)$.

Seja $\varphi^*: (C(T,X),\tau_C) \to K$, uma função contínua de modo que $\varphi^*(u) = \varphi(u)$, para todo $u(.) \in \mathcal{K}^*$. Para cada $n = 1,2,\ldots$, o operador $\big(\xi, u(.)\big) \to \Big(\varphi^*\big(\sigma_n(\xi,u)\big), \sigma_n(\xi,u)\Big)$ transforma o conjunto $K \times \mathcal{K}$ num conjunto relativamente compacto e é contínuo.

Pelo teorema do ponto fixo de Schauder (teorema 0.3.4), existe um par $(\xi_n, u_n) \in K \times \mathcal{K}$ de modo que $\xi_n = \varphi^*\big(\sigma_n(\xi_n,u_n)\big)$ e $u_n = \sigma_n(\xi_n,u_n)$. Em particular, $u_n(0) = \xi_n$.

Por **(9)** e atendendo a que $u_n = \sigma_n(\xi_n,u_n)$ conclui-se que

$$f_n(\xi_n,u_n) = u_n,\ n \geq 1.$$

Atendendo a **(4)** e **(6)**, resulta que $u_n(.) \in \mathcal{K}^*, n \geq 1$, pois como

$$f_n(\xi_n,u_n) = u_n \ (\circ),$$

$$f_n(\xi_n,u_n)(t) = S(t)\xi_n + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^t S(t-\tau)\big(q_n(u_n)(\tau) - u_n(\tau)\big)d\tau \ (\circ\circ) \text{ e}$$

$$\|u_n(t) - q_n(u_n)(t)\| \leq 2\lambda_n(l(t)+1),\ (\circ\circ\circ)$$

conclui-se que

$f_n(\xi_n,u_n)(t) = P_S\left(\xi_n, \frac{q_n(u_n)-u_n}{\lambda_n}\right)$ e também que $\frac{q_n(u_n)-u_n}{\lambda_n} \in Q$. Assim, de $(\circ)$,$(\circ\circ)$ e $(\circ\circ\circ)$ resulta que $u_n(.) \in P_S(K \times Q)(\star)$. Por outro lado como $u_n = \sigma_n(\xi_n,u_n)$ e tendo-se concluído que $\sigma_n(\xi,u)(t) \in K$, para todo $\xi \in K$, $u(.) \in \mathcal{K}$ e $t \in T$, $u_n \in \mathcal{K}$ $(\star\star)$.

De $(\star)$ e $(\star\star)$ resulta $u_n(.) \in \mathcal{K}^*$, assim, $\xi_n = \varphi(u_n)$.

Considere-se a sucessão $\{u_n(.)\}$. Escolha-se uma sua subsucessão convergindo em $(C(T,X),\tau_C)$ e portanto em $L^1(T,X)$. Sem perda de generalidade considere-se $u_n(.) \to u(.)$, $n \to \infty$. Faça-se $\xi = \varphi(u)$. Assim, $\xi_n \to \xi$, e atendendo a **(8)** e à continuidade da função

$$f: K \times (\mathcal{K}^*, \|.\|_1) \to (C(T,X), \tau_C),$$

resulta que para cada $m = 1,2, \dots$.

$\rho_m(u - f(\xi,u)) \leq \rho_m(u - u_n) + \rho_m(f_n(\xi_n,u_n) - f(\xi_n,u_n)) + \rho_m(f(\xi_n,u_n) - f(\xi,u)) \to 0,$

$n \to \infty.$

Assim $u(t) = f(\xi,u)(t),$ para $t \in]0,1]$. A relação verifica-se também para $t = 0$. Assim, $u(0) = \xi = \varphi(u)$ e a função $u(.) \in \mathcal{K}^*$ satisfaz

$$u(t) = S(t)u(0) + \int_0^t S(t-\tau)\, g(u)(\tau) d\tau.$$

O teorema está provado.

■

Usando o teorema anterior e a proposição 4.3 de [20,p.298] resulta o seguinte corolário.

Corolário: 2.2.2 Assumindo que as condições do teorema 2.2.1 são satisfeitas, o semigrupo $(S(t))_{t\geq 0}$ é analítico e o operador g é tal que para todo $u(.) \in \mathcal{K}^*$ a função $g(u)(.)$ é Hölderiana em T.

Então a equação (●) tem uma solução clássica $u(.) \in \mathcal{K}^*$, verificando $u(0) = \varphi(u)$.

Observação: Se a função φ é tal que $\varphi(u) = u(1)$, do teorema 2.2.1 resulta a existência de uma solução integral $u(.)$, viável no conjunto K e tal que $u(0) = u(1)$.(diz-se que $u(.)$ é solução periódica com período 1)

Analogamente pondo $\varphi(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(\theta_i)$ com $\theta_i \in]0,1]$ e $\lambda_i \geq 0, i = 1,2,..,n$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ (resp. $\varphi(u) = \int_0^1 u(t)dt$) obtemos a existência de uma solução integral ou clássica viável em K, que satisfaz a condição suplementar $u(0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(\theta_i)$ para $\theta_i \in]0,1]$ e $\lambda_i \geq 0, i = 1,2,..,n$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ (resp. $u(0) = \int_0^1 u(t)dt$).

Vejamos como exemplo de aplicação do teorema 2.2.1, a resolução de um problema de valores de fronteira utilizando uma equação com operador – diferencial parcial

Considere-se então o problema (►) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + F(t, x, u, \Re u),$$

$u(t,x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$, $t \in [0,1]$, $u(0,x) = u\big(1, \psi(x)\big)$ para todo $x \in \overline{\Omega}$, onde Ω é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira suave $\partial\Omega$ (a fronteira suave significa que para cada $x \in \partial\Omega$ existe um vector normal, único, $\vec{n}(x)$, com $\|\vec{n}(x)\| = 1$, em que a aplicação $x \to \vec{n}(x)$ é continua);

$$\Delta = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{x}_\mathrm{i}^2}$$

é o operador de Laplace;

$$F: [0,1] \times \overline{\Omega} \times [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}, -\infty < a \le 0 \le b < +\infty, a < b,$$

$-\infty < c < d < +\infty$; $\psi: \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$,

Para toda a função contínua u, $a \le u(t,x) \le b$, a função $\Re u$ de variáveis t, x é contínua e toma valores no intervalo $[c,d]$.

Seja $X = C(\overline{\Omega})$ o espaço das funções numéricas definidas em $\overline{\Omega}$ munido com a norma $\|.\|_C$, considerado no capítulo 1.

Considere-se as seguintes definições:

$$D(A_C) := \{u \in X : \Delta u \in X, u = 0 \ e \ \Delta u = 0 \ em \ \partial\Omega\} \ ;$$

$$(A_C u)(x) := \Delta u(x) \text{ para todo } u \in D(A_C),\ x \in \overline{\Omega}\,.$$

Por ([Pazy], teorema 3.7, p.217), A_C é o gerador infinitesimal do c_0 –semigrupo $S_c := \left(\mathrm{S(t)}\right)_{\mathrm{t}\geq 0}$, analítico.

Seja

$$K := \left\{u \in X : a \leq u(x) \leq b, para\ todo\ x \in \overline{\Omega}\right\};$$

$$\mathcal{W} := \{w(.) \in C([0,1], X) : c \leq w(t)(x) \leq d\ , para\ todo\ t \in [0,1], x \in \overline{\Omega}\};$$

e os conjuntos $\mathcal{K}$ e $\mathcal{K}^*$ são os mesmos que na secção 2.2.

Considere-se que

a) $t \to F(t, x, u, w)$ é mensurável para todo $x \in \overline{\Omega}$, $(u, w) \in [a, b] \times [c, d]$;
b) $(x, u, w) \to F(t, x, u, w)$ é contínua para todo $t \in [0,1]$;
c) Para alguma função integrável $l(t) \geq 0$ tem-se:

$$|F(t, x, u, w)| \leq\ l(t),$$

para todos $x \in \overline{\Omega}$, $(u, w) \in [a, b] \times [c, d]$ e $q.t., t \in [0,1]$;
d) O operador $\Re : (\mathcal{K}^*, \|.\|_1) \to (\mathcal{W}, \|.\|_1)$ é contínuo.

Represente-se a função ,$x \to F\big(t, x, u(t)(x), \Re u(t)(x)\big)$ por $g(u)(t)$ para quaisquer $u \in \mathcal{K}^*, t \in [0,1]$, então g é uma função de $\mathcal{K}^*$ em $L^1([0,1]\,, X)$, sendo contínua com respeito à norma $\|.\|_1$ em $\mathcal{K}^*$.

A função contínua u de variáveis t, x denomina-se uma X-solução (resp. X –solução integral) do problema (►) se $t \to u(t\,,.)$ é uma solução clássica (respectivamente, integral) da equação de evolução

$$\dot{u}(t) = A_C u(t) + g(u)(t)$$

com a condição não local $u(0) = \varphi(u)$, com $\varphi: \mathcal{K}^* \to K$,

$$\varphi(u)(x) := u(1)\big(\psi(x)\big) \textbf{ (1)}$$

para quaisquer $u(.) \in \mathcal{K}^*$, $x \in \overline{\Omega}$.

Além disto, identifique-se os elementos dos espaços

$$C([0,1] \times \overline{\Omega}, \mathbb{R}) \text{ e } C([0,1], X).$$

Teorema 2.2.4 Suponha-se que são verificadas as condições a)-d) e as desigualdades

$$F(t,x,a,w) \geq 0 \text{ },F(t,x,b,w) \leq 0 \textbf{ (2)}$$

são validas para $q.t.$ $t \in [0,1]$ e para quaisquer $x \in \overline{\Omega}$ e $w \in [c,d]$. Então para toda a função contínua $\psi: \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$ tal que $\psi(\partial\Omega) \subset \partial\Omega$., o problema (►) tem uma X −solução integral u, em que

$$a \leq u(t,x) \leq b,$$

para todo $t \in [0,1]$, $x \in \overline{\Omega}$.

Demonstração:

Por ([21], teoremas 1.2 e 3.1, p.212) segue-se que o operador $(A_C - \lambda I)^{-\mathbf{1}}$ é compacto e limitado. Pelo corolário 5.1 de ([Martin], p.303), resulta a compacidade do semigrupo S_c. Pela diferenciabilidade de S_c, para todo $z \in K$ a função

$$u(t,x) = (S_c(t)z)(x),$$

é contínua no conjunto $\{(t,x): t \geq 0, x \in \bar{\Omega}\}$ e duas vezes continuamente diferenciável no seu interior. Pelo princípio do máximo ([Vladimirov], p.511), para todos $t \in [0,1]$, $x \in \bar{\Omega}$, tem-se

$$a \leq min\{0, min_{x \in \bar{\Omega}} z(x)\} \leq u(t,x) \leq max\{0, max_{x \in \bar{\Omega}} z(x)\} \leq b \ .$$

Assim o conjunto K é invariante com respeito ao semigrupo S_c.

Considere-se $u(.) \in \mathcal{K}^*$. Prove-se a inclusão $g(u)(t) \in T_K\big(u(t)\big)$. Para tal considere-se $t \in [0,1]$ tal que as condições b) e **(2)** são satisfeitas. Usando estas condições, a continuidade de $u(t)$ e $\Re u(t)$ e a compacidade do conjunto $\bar{\Omega}$, para todo $\varepsilon > 0$ escolha-se $\delta > 0$ de modo que

$$P_{\boldsymbol{\lambda}}(x) := [a,b] \cap \Big(u(t)(x) + F\big(t,x,u(t)(x),\Re u(t)(x)\big) + (-\varepsilon\lambda, \varepsilon\lambda)\Big) \neq \emptyset,$$

para todos $x \in \bar{\Omega}$ e $0 < \lambda < \delta$. Pelo teorema de Michael, (teorema 1.1.17), a multifunção $\overline{P_{\boldsymbol{\lambda}}}: \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$, $\overline{P_{\boldsymbol{\lambda}}}(x) = \overline{P_{\boldsymbol{\lambda}}(x)}$,tem uma selecção contínua z_λ , $a \leq z_\lambda(x) \leq b$. Assim, obtêm-se

$$\frac{1}{\lambda} d_K\big(u(t) + \lambda g(u)(t)\big) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\lambda} sup_{x \in \bar{\Omega}} \left| u(t)(x) + \lambda F\big(t,x,u(t)(x),\Re u(t)(x)\big) - z_\lambda(x) \right| \leq \varepsilon.$$

Tem-se que, $\|g(u)(t)\| \leq l(t)$ para quase todo $t \in [0,1]$, e a função continua $\varphi: \mathcal{K}^* \to K$ definida por **(1)**, é contínua com respeito à topologia τ_c, considerada na observação 2.1.20, em $\mathcal{K}^*$. Aplicando o teorema 2.2.1 conclui-se o pretendido.

■

2.3 Existência de soluções de (●) no caso de um conjunto não necessariamente limitado

Teorema 2.3.1 Suponha-se um c_0-semigrupo $\left(S(t)\right)_{t\geq 0}$ compacto de operadores lineares limitados contractivo, com gerador infinitesimal $A: D(A) \to X$, e K um subconjunto de X não vazio, fechado e convexo, não necessariamente limitado, invariante com respeito a $\left(S(t)\right)_{t\geq 0}$. Suponha-se o operador contínuo $g: (\mathcal{K}^*, \|.\|_1) \to L^1(T, X)$ satisfazendo as mesmas condições verificadas no teorema 2.2.1. A função continua $\varphi: (\mathcal{K}^*, \tau_c) \to K$ é tal que, para algum $0 < \beta < 1$ se tem

$\left\|\varphi(u) - \varphi\left(u^{'}\right)\right\| \leq \beta\left\|u - u^{'}\right\|_C$ para todo $u(.),\ u^{'}(.) \in \mathcal{K}^*$.(▪)

Então a equação (●) tem uma solução integral $u(.) \in \mathcal{K}^*$ de modo que $\varphi(u) = u(0)$.

Demonstração:

Atendendo a (▪), o operador $\gamma: K \to K, \gamma(\xi) = \varphi(S(.)\xi), \xi \in K$ é contractivo.

Verifique-se primeiro que $S(.)\xi \in \mathcal{K}^*$. Como K é invariante com respeito a $\left(S(t)\right)_{t\geq 0}$ tem-se que $S(.)\xi \in K,$ para todo $t \geq 0$ e a aplicação $t \to S(t)\xi$, para todo $\xi \in K$ é contínua.

De facto

$\|(S(t+h)x - S(t)x\| \leq Me^{wt}\|S(h)x - x\|$. Como $\left(S(t)\right)_{t\geq 0}$ é um c_0-semigrupo, conclui-se o pretendido. Assim $S(.)\xi \in L^1(T, X)$, para todo $\xi \in K$, portanto $S(.)\xi \in \mathcal{K}^*$. Prove-se que $S(.)\xi \in P_S(K \times Q)$.

Basta verificar que existem $\xi \in K$ e $v(.) \in Q$ de modo que $S(.)\xi = P_S\left(\xi, v(.)\right)(.)$.

Na definição de $P_S\left(\xi\ v(.)\right)(.)$, basta considerar $v(.) = 0$. Assim, $S(.)\xi \in \mathcal{K}^*$.

Provemos que γ é contractivo. De facto atendendo a (▪)

$\left\|\gamma(\xi) - \gamma\left(\xi^{'}\right)\right\| = \left\|\varphi(S(.)\xi) - \varphi\left(S(.)\xi^{'}\right)\right\| \leq \beta\left\|S(.)\xi - S(.)\xi^{'}\right\|_C \leq \beta M\left\|\xi - \xi^{'}\right\|$.

Pelo princípio das aplicações contractantes ([17], p.72), está garantida a existência de um único ponto fixo de γ. Designemo-lo por ξ_0.

Considere-se $L \geq 0$ e os conjuntos

$$K_L := \{\xi \in K \colon \|\xi - \xi_0\| \leq L\}\ ,\ \ \mathcal{K}^*{}_0 := \overline{P_S(K_L \times Q) \cap \mathcal{K}}$$

onde os conjuntos $\mathcal{K}$ e Q são os mesmos utilizados no teorema na secção 2. A aderência considerada é tomada em $(C(T,X),\tau_C)$. Pelo lema 2.1.16, o conjunto $\mathcal{K}^*{}_0$ é compacto em $(C(T,X),\tau_C)$ e em $L^1(T,X)$. Reproduzindo a demonstração do teorema 2.2.1, substituindo $\mathcal{K}^*$ por $\mathcal{K}^*{}_0$, encontra-se uma sequência, $\lambda_n \to 0^+$, onde é válida a desigualdade **(2),** *para todo* $u(.) \in \mathcal{K}^*{}_0$ Encontram-se também funções contínuas $q_n \colon \mathcal{K} \to \mathcal{K}$, $n = 1,2,\ldots$, satisfazendo **(3)** para $u(.) \in \mathcal{K}^*{}_0$ e **(4)** para $u(.) \in \mathcal{K}$ do mesmo teorema.

Considere-se as funções contínuas definidas por **(5), (6)** e **(7)** do teorema 2.2.1.

Seja

$$L := \frac{2\beta}{1-\beta}\int_T (l(\tau)+1)d\tau\ ,\ \ r(t) := L + 2\int_0^t (l(\tau)+1)d\tau,$$

$$\mathcal{K}_r := \{x(.) \in \mathcal{K} \colon \|x(t) - S(t)\xi_0\| \leq r(t), q.t.\, t \in T\}.$$

Para $\xi \in K_L$ e $u(.) \in \mathcal{K}_r$, tem-se

$$\|\sigma_n(\xi,u)(t) - S(t)\xi_0\| \leq \underbrace{e^{\frac{-t}{\lambda_n}}\|S(t)\xi - S(t)\xi_0\| + \lambda_n{}^{-1}\int_0^t e^{\frac{-(t-\tau)}{\lambda_n}}\|S(t-\tau)q_n(u)(t) - S(t)\xi_0\|dt}_{(\Theta)}$$

De facto

$$e^{\frac{-t}{\lambda_n}}(S(t)\xi - S(t)\xi_0) + \lambda_n{}^{-1}\int_0^t e^{\frac{-(t-\tau)}{\lambda_n}}(S(t-\tau)q_n(u)(t) - S(t)\xi_0)\,d\tau=$$

$$=e^{\frac{-t}{\lambda_n}}S(t)\xi - e^{\frac{-t}{\lambda_n}}S(t)\xi_0 + \lambda_n{}^{-1}\int_0^t e^{\frac{-(t-\tau)}{\lambda_n}}S(t-\tau)q_n(u)(t)d\tau - \lambda_n{}^{-1}\int_0^t e^{\frac{-(t-\tau)}{\lambda_n}}S(t)\xi_0\,d\tau=$$

$$=\sigma_n(\xi,u)(t) - e^{\frac{-t}{\lambda_n}}S(t)\xi_0 - S(t)\lambda_n{}^{-1}\int_0^t e^{\frac{-(t-\tau)}{\lambda_n}}\xi_0 d\tau=$$

$$=\sigma_n(\xi,u)(t) - e^{\frac{-t}{\lambda_n}}S(t)\xi_0 - S(t)\left(\xi_0 - e^{\frac{-t}{\lambda_n}}\xi_0\right)=$$

$$=\sigma_n(\xi,u)(t) - e^{\frac{-t}{\lambda_n}}S(t)\xi_0 - S(t)\xi_0 + e^{\frac{-t}{\lambda_n}}S(t)\xi_0=$$

$$=\sigma_n(\xi,u)(t) - S(t)\xi_0.$$

Por outro lado

$(\Theta) \leq \underbrace{Le^{\frac{-t}{\lambda_n}} + \lambda_n{}^{-1}\int_0^t e^{\frac{-(t-\tau)}{\lambda_n}}\left(2\lambda_n(l(\tau)+1)+r(\tau)\right)d\tau}_{(\Theta\Theta)}$

Repare-se que a desigualdade anterior resulta de

i) $e^{\frac{-t}{\lambda_n}}\|S(t)\xi - S(t)\xi_0\| \leq e^{\frac{-t}{\lambda_n}}\|S(t)\xi\|\|\xi-\xi_0\| \leq e^{\frac{-t}{\lambda_n}}L$, dado que $\xi \in K_L$ e $\left(S(t)\right)_{t\geq 0}$ é contractivo;

ii) $\|S(t-\tau)q_n(u)(t) - S(t)\xi_0\| = \left\|S(t-\tau)\left(q_n(u)(t)-u(\tau)+u(\tau)\right) - S(t-\tau)S(t)\xi_0\right\| \leq$ $\leq \|S(t-\tau)\|(\|q_n(u)(t)-u(\tau)\| + \|u(\tau)-S(t)\xi_0\|)$.

Como $u(.) \in \mathcal{K}_r$, $\|q_n(u)(t)-u(\tau)\| \leq 2\lambda_n(l(\tau)+1)$ e $\|S(t-\tau)\| \leq 1$, resulta que

$$\|S(t-\tau)q_n(u)(t) - S(t)\xi_0\| \leq 2\lambda_n(l(\tau)+1)+r(\tau).$$

Conclui-se que $(\Theta\Theta) = r(t)$.

De facto

$Le^{\frac{-t}{\lambda_n}} + \lambda_n{}^{-1}\int_0^t e^{\frac{-(t-\tau)}{\lambda_n}}\left(2\lambda_n(l(\tau)+1)+r(\tau)\right)d\tau = Le^{\frac{-t}{\lambda_n}} + 2\int_0^t e^{\frac{-(t-\tau)}{\lambda_n}}(l(\tau)+1)d\tau +$

$+\lambda_n{}^{-1}\int_0^t e^{\frac{-(t-\tau)}{\lambda_n}} r(\tau)d\tau =$

$= Le^{\frac{-t}{\lambda_n}} + 2\int_0^t e^{\frac{-(t-\tau)}{\lambda_n}}(l(\tau)+1)d\tau + \lambda_n{}^{-1}\int_0^t e^{\frac{-(t-\tau)}{\lambda_n}}\left(L + 2\int_0^\tau (l(s)+1)\right)d\tau =$

$= Le^{\frac{-t}{\lambda_n}} + 2\int_0^t e^{\frac{-(t-\tau)}{\lambda_n}}(l(\tau)+1)d\tau + \lambda_n{}^{-1}L\int_0^t e^{\frac{\tau-t}{\lambda_n}}d\tau + \lambda_n{}^{-1}\int_0^t e^{\frac{\tau-t}{\lambda_n}}d\tau\int_0^\tau 2(l(s)+1)ds =$

$= Le^{\frac{-t}{\lambda_n}} + 2\int_0^t e^{\frac{-(t-\tau)}{\lambda_n}}(l(\tau)+1)d\tau + \lambda_n{}^{-1}L\int_0^t e^{\frac{\tau-t}{\lambda_n}}d\tau + 2\int_0^\tau (l(s)+1)ds\int_s^t \frac{e^{\frac{\tau-t}{\lambda_n}}}{\lambda_n}d\tau =$

$= Le^{\frac{-t}{\lambda_n}} + 2\int_0^t e^{\frac{-(t-\tau)}{\lambda_n}}(l(\tau)+1)d\tau + \lambda_n{}^{-1}L\int_0^t e^{\frac{\tau-t}{\lambda_n}}d\tau + 2\int_0^\tau (l(s)+1)\left[e^{\frac{\tau-t}{\lambda_n}}\right]_s^t ds =$

$= Le^{\frac{-t}{\lambda_n}} + 2\int_0^t e^{\frac{-(t-\tau)}{\lambda_n}}(l(\tau)+1)d\tau + L - Le^{\frac{-t}{\lambda_n}} + 2\int_0^t (l(s)+1)\left(1-e^{\frac{s-t}{\lambda_n}}\right)ds =$

$= Le^{\frac{-t}{\lambda_n}} + 2\int_0^t e^{\frac{-(t-\tau)}{\lambda_n}}(l(\tau)+1)d\tau + L - Le^{\frac{-t}{\lambda_n}} + 2\int_0^t (l(\tau)+1)\,d\tau - 2\int_0^t e^{\frac{-(t-\tau)}{\lambda_n}}(l(\tau)+1)d\tau =$

$= L + 2\int_0^t (l(\tau)+1)\,d\tau = r(t).$

Por definição de $\mathcal{K}_r$, conclui-se que $\sigma_n(\xi,u) \in \mathcal{K}_r$.

Para todo $u(.) \in \mathcal{K}_r \cap \mathcal{K}^*$, tem-se

$$\|\varphi(u) - \xi_0\| = \|\varphi(u) - \varphi(S(.)\xi_0)\| \leq \beta(\|u - S(.)\xi_0\|_C) \leq \beta r(t) =$$

$= \beta\left(L + 2\int_0^t (l(\tau)+1)\,d\tau\right) \leq \beta L + \frac{1-\beta}{1-\beta}2\beta\int_T (l(\tau)+1)d\tau =$

$= \beta L + (1-\beta)L = L.$

Assim

$\|\varphi(u)-\xi_0\| \leq L$, para todo $u(.) \in \mathcal{K}_r \cap \mathcal{K}^*$. Portanto por definição de K_L, conclui-se que $\varphi(u) \in K_L$.

Podemos considerar φ, como uma extensão da função contínua, $\varphi^*: \mathcal{K}_r \to K_L$.

Defina-se o operador $\Phi_n: \big(\xi, u(.)\big) \to \Big(\varphi^*\big(\sigma_n(\xi,u)\big), \sigma_n(\xi,u)\Big)$, contínuo de $K_L \times \mathcal{K}_r$ em si mesmo. O conjunto $\Phi_n(K_L \times \mathcal{K}_r)$ é relativamente compacto em $X \times (C(T,X), \tau_C)$, com justificação idêntica à do teorema 2.2.1.

Pelo teorema de Schauder (teorema 0.3.4) o operador Φ_n tem um ponto fixo $(\xi_n, u_n) \in K_L \times \mathcal{K}_r$. Como no teorema 2.2.1 sem perda de generalidade pode-se supor que a sucessão $u_n(.) \in \mathcal{K}^*{}_0$, $n \geq 1$, converge para $u(.) \in \mathcal{K}^*$ que é uma solução integral de **(●)** satisfazendo a condição de fronteira funcional

$$u(0) = \varphi(u)$$

provando-se assim o teorema.

■

Do teorema anterior resulta o seguinte corolário

Corolário 2.3.2 Suponha-se um c_0-semigrupo $\big(S(t)\big)_{t\geq 0}$, K um subconjunto de X não vazio, e o operador contínuo

$$g: (\mathcal{K}^*, \|.\|_1) \to L^1(T,X)$$

definidos no teorema anterior. Então para todos $\theta \in]0,1], \lambda \in [0,1[$, e $u_0 \in K$, existe uma solução integral $u(.) \in \mathcal{K}^*$de **(●)** de modo que $u(0) = \lambda u(\theta) + (1-\theta)u_0$.

Demonstração:

Basta considerar no teorema $\varphi(u)$= $\lambda u(\theta) + (1-\theta)u_0$.

■

2.4 Existência de solução de uma inclusão diferencial com condições de fronteira funcionais

Seja $\boldsymbol{X}$ um espaço de Banach separável.

Nesta secção, será abordada a questão da existência de solução para uma inclusão diferencial do tipo

$$\dot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{t}) \in \boldsymbol{Au}(\boldsymbol{t}) + \Gamma\big(t, u(t)\big) \quad (\bullet\bullet)$$

onde A é um operador linear não limitado com domínio $D_A \subset X$ denso em X. A multifunção $\Gamma: T \times K \to X$ assume valores fechados não vazios, com K um subconjunto não vazio de X, limitado, convexo e invariante com respeito ao $c_0 -$semigrupo compacto $\big(S(t)\big)_{t\geq 0}$, de operadores lineares limitados, cujo gerador infinitesimal é A.

Considere-se que Γ, verifica as seguintes propriedades :

(a) Γ é $\mathcal{L} \otimes \beta$- mensurável;

(b) Existe uma função integrável $l(t) \geq 0$, tal que
$$\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}) \subset \boldsymbol{l}(\boldsymbol{t})\overline{\boldsymbol{B}} \text{ para todo } \boldsymbol{x} \in K \text{ e } q.t.\ t \in T \ ;$$

(c) Para $q.t. t \in T$ a multifunção $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{t}, .)$ é semicontínua inferiormente em K;

(d) Para $q.t. t \in T$ e para todo $x \in K$ tem-se a seguinte condição tangencial
$$\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}) \subset \boldsymbol{T_K}(\boldsymbol{x}).$$

Denomina-se solução integral de ($\bullet\bullet$) a uma função contínua

$$\boldsymbol{u}: \boldsymbol{T} \to X,$$

com $u(t) \in K$, para a qual existe uma selecção mensurável $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}) \in \boldsymbol{\Gamma}\big(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})\big)$, tal que

$$u(t) = S(t)u(0) + \int_0^t S(t-\tau)g(u)(\tau)d\tau.$$

Será provada a existência de uma solução integral $u(\cdot)$ de (●●) satisfazendo a seguinte condição de fronteira $u(0) = \varphi(u)$, onde φ é uma função definida num subconjunto de $L^1(T, X)$ que assume valores em X.

Para tal, se for estabelecida a existência de uma selecção contínua $g(.)$ da multifunção $\mathcal{G}: \mathfrak{A} \to L^1(T, X)$ definida por

$$\mathcal{G}(u) = \{v(.) \in L^1(T, X): v(t) \in \Gamma(t, u(t)), q.t. t \in T\},$$

com

$$\mathfrak{A} = \{u(.) \in L^1(T, X): u(t) \in K, q.t. t \in T\},$$

o problema (●●) reduz-se à resolução da equação de evolução (●) da secção 2.2.. Tal como na secção 1.1, pelos lemas 1.1.28, 1.1.29 e 1.1.30 conclui-se que $\mathcal{G}$ assume valores não vazios e decomponíveis em $L^1(T, X)$ e é semicontínua inferiormente em $\mathfrak{A}$. Assim pelo teorema 1.1.22 tem-se a garantia da existência de uma selecção contínua, $g: \mathfrak{A} \to L^1(T, X)$, de $\mathcal{G}$.

Consideremos os mesmos conjuntos $\mathcal{K}$,Q e $\mathcal{K}^*$ definidos na secção 2.2.

A função g é contínua em $(\mathcal{K}^*, \|.\|_1)$ (por construção, $\mathcal{K}^* \subset \mathfrak{A}$). Por outro lado, para todo $u(.) \in \mathcal{K}^*$, para $q.t. t \in T$, $g(u)(t) \in \Gamma(t, u(t))$, assim, pelas condições (b) e (d), conclui-se que $\|g(u)(t)\| \leq l(t)$ e $g(u)(t) \in T_K(u(t))$.

Considere-se uma função continua, $\varphi: (\mathcal{K}^*, \tau_c) \to K$. Pelo teorema 2.2.1 tem-se a garantia de uma solução integral $u(.) \in \mathcal{K}^*$ da equação de evolução (●) em que $u(0) = \varphi(u)$.

Estabelecendo-se assim uma solução integral $u(.)$ de (●●) verificando a seguinte condição não local $u(0) = \varphi(u)$.

Bibliografia

[1] **Aubin, J.P., Cellina ,A.,** Differential Inclusions, Springer Berlim, 1994.

[2] **Aubin, J.P., Frankowska, H**., Set-Valued Analysis, Birkauser, 1990.

[3] **Bollobás, B.,** Linear Analysis an introductory course, Ed. Cambridge Mathematical Textbooks, 1990.

[4] **Bressan, A.,** ”Solutions of lower semicontinuos differential inclusions on closed sets,” Rend. Sem. Math. Uni. Padova, 69, 99 -107 (1983).

[5] **Bressan ,A., Colombo ,G.,** ”Extensions and selections of maps with decomposable values,” Studia Math, 90, Nº1, 69--86 (1988) .

[6] **Brezis, H.,** Analyse Fonctionelle, Ed. Masson, Paris 1983 .

[7] **Deimling, K.,** ”Ordinary Differential Equations in Banach Spaces,” Springer, Berlim (1997).

[8] **Deimling, K.,** Multivalued Differential Equations, Ed. Walter de Gruyter, Berlim, New York, 1992 .

[9] **Deimling, K.,** “Periodic solutions of differential equations in Banach spaces,” Manuscripta Math., 24, 31-34 (1978) .

[10] **Diestel, J., Uhl, J.J.,** Vector Measures ,Ed. American Mathematical society 1997 .

[11] **Fryszkowski, A.,** “Continuos selections for a class of nonconvex multivalued maps”, Studia Math., 76, Nº2, 163-174 (1983).

[12] **Goncharov, V.V.,** “Existence of solutions of a class of generalized differential equations on a compact set,” Siberian Math. J., 31, Nº5, 24-30 (1990).

[13] **Goncharov, V.V.,** “Existence theorems for solutions of generalized differential equations with lower semicontinuous right-hand side on a locally compact set”, Differential Equations, 27, Nº12, 2058-2065 (1991).

[14] **Goncharov, V.V., Timoshin,S.A.,** ”A class of solutions with Functional Boundary Conditions,” Mat. Zametki, vol. 65, Nº1, 48-60 (1999).

[15] **Hiai, F., Umegaki, H. ,**”Integrals, conditional expectations, and martingales of multivalued functions,” J. Multivariate Anal, 7 ,149-182 (1977).

[16] **Himmelberg, C. J.,** “Measurable relations,” Fund. Math., 87, Nº1, 53-72 (1975).

[17] **Kolmogorov, A.,Fomin, S.,** Elementos da teoria das funções e de Análise Funcional, Ed. Mir, Moscovo, 1982.

[18] **Lima, E. L.,** Espaços Métricos, Ed. IMPA ,Rio de Janeiro, 1977.

[19] **Machado, A.,** Introdução à Análise Funcional, Ed. Escolar Editora, 1991.

[20] **Martin, R. H.,** Nonlinear Operators and Differential Equations in Banach Spaces, Wiley, New York 1976.

[21] **Pazy, A.,** Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer, New York 1983.

[22] **Rudin, W.,** Real And Complex Analysis, Third Edition, Ed. McGRAW-HILL, 1987.

[23] **Rudin, W.,** Functional Analysis, Second Edition, Ed. McGRAW-HILL, 1991.

[24] **Smirnov, G.,** Introduction to the Theory of Differential Inclusions, American Mathematical Society, 2000.

[25] **Vladimirov**, **V.S.,** Equations of Mathematical Physics, Nauka, Moscow, 1976.

[26] **Vrabie, I.I.,** c_o-Semigroups and Applications, North-Holland, Mathematics Studies, 2003.

Agradecimentos

Ao Professor Doutor Vladimir Goncharov, meu orientador, pela sua paciência e disponibilidade para esclarecer e ensinar.

Aos meus pais e à minha esposa, Joana, pela força e encorajamento dado durante a realização deste trabalho.