UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Escola de Ciências e Tecnologia

Mestrado em Matemática para o Ensino

Dissertação para a obtenção do grau de Mestre

Jogos Combinatórios Imparciais

João Paulo Maltêz Mulas

Orientador: Professora Doutora Sandra Maria Santos Vinagre

Co-Orientador: Professor Doutor Jorge Nuno Monteiro de Oliveira e Silva

Évora 2010

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Escola de Ciências e Tecnologia

Mestrado em Matemática para o Ensino

Dissertação para a obtenção do grau de Mestre

Jogos Combinatórios Imparciais

João Paulo Maltêz Mulas

Orientador: Professora Doutora Sandra Maria Santos Vinagre

Co-Orientador: Professor Doutor Jorge Nuno Monteiro de Oliveira e Silva

Évora 2010

Jogos Combinatórios Imparciais

RESUMO

Neste trabalho aborda-se a Teoria Matemática de jogos combinatórios imparciais. Procura-se definir o termo jogo e define-se Jogo Combinatório Imparcial. Descreve-se e analisa-se as técnicas matemáticas que se encontram por detrás destes jogos, estuda-se Grafos, define-se Posição P e N, determina-se o valor da Função Grundy de alguns jogos e aborda-se a Soma de jogos imparciais. Apresenta-se ainda a Soma-Nim, a sua aplicação nesta teoria e o modelo matemático que suporta a ideia de que estes jogos admitem uma estratégia vencedora, à priori conhecida, para um dos jogadores. Reflecte-se também sobre as potencialidades didáctico-pedagógicas do uso de jogos, dentro e fora da sala de aula, e dá-se a conhecer o Concurso Inventa um Jogo Nim e uma ficha de trabalho propostos em contexto escolar.

Impartial Combinatorial Games

ABSTRACT

This work approaches the Mathematical Theory of the impartial combinatorial games. On the one hand, we are seeking to define the term game and, on the other, we manage to define the term Impartial Combinatorial Game. The mathematical techniques behind these games are described and analised. Graphs are studied, the P-positon and N-position are defined, the value of the Grundy Function of some games is determined and the Sum of Impartial Games is approached. We also present the Nim-Sum, its application to this theory and the mathemantical model that supports the idea that these games admit a priorly known winning strategy for one of the players. We also conduct a reflection about the educational and teaching potential of the use of the games inside and outside of a school environment, and we present the Contest Invent a Nim Game and a work sheet that were proposed in a school context.

Agradecimentos

À Carla Costa agradeço pela ajuda a todos os níveis que sempre me dispensou, pela paciência com que sempre acolheu os meus momentos de desalento, pelo apoio e incentivo nos momentos mais críticos e pela colaboração na concretização deste trabalho, nomeadamente com a partilha de ideias.

À minha família, que tantas vezes abdicou da minha presença, exprimo o meu agradecimento pela coragem que sempre me deu para concretizar este trabalho.

Em especial, aos meus Orientadores, Professora Doutora Sandra Vinagre e Professor Doutor Jorge Nuno Silva expresso o meu sincero agradecimento pelo seu profissionalismo, pelos seus conselhos, pelas críticas e ensinamentos, pelos momentos de reflexão que me proporcionaram, bem como pela forma interessada e disponível com que sempre acompanharam este trabalho.

Aos meus alunos intervenientes neste trabalho manifesto gratidão pelo simpático acolhimento e pela receptividade que sempre mostraram na participação das Actividades Curriculares e Extra-Curriculares propostas e mencionadas neste trabalho.

A todas as pessoas que de alguma forma contribuíram para a concretização deste trabalho, o meu mais sincero agradecimento.

Conteúdo

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução

Este trabalho pretende apresentar alguns jogos combinatórios imparciais, o estudo matemático dos mesmos e a possibilidade destes, em particular o Jogo de Subtracção, serem usados como mais um recurso didáctico que os professores podem utilizar nas aulas de Matemática.

A ideia de fazer um curso de mestrado surgiu da vontade de aumentar e melhorar a formação profissional e pessoal e o tema surgiu em consequência do interesse que nutro pelos jogos, em particular os didácticos e também da possibilidade destes serem aplicados na sala de aula.

No presente capítulo apresenta-se, de forma sucinta, os objectivos/motivações pessoais e a descrição deste trabalho. É também feita uma breve abordagem sobre a definição de jogo e do acto de jogar segundo vários autores e em particular é definido Jogo Matemático. E por último, no final deste capítulo, é apresentado um breve resumo dos Capítulos 2 e 3 que compõem este trabalho.

O jogo é sempre ou quase sempre uma boa estratégia para motivar os alunos com maior desinteresse e dificuldades de aprendizagem na Matemática, dando-lhes hipóteses e uma visão diferente de olhar para esta disciplina de modo a relacionarem-se com ela de uma forma mais estreita. A incorporação de brincadeiras e jogos na prática pedagógica desenvolve diferentes competências que contribuem para a aquisição de inúmeras aprendizagens, muitas vezes, sem que o próprio aluno se aperceba. Os professores de Matemática devem continuar a motivar os alunos para a aprendizagem, desenvolver a concentração/atenção, a organização, a tomada de decisões na resolução de problemas, a adequação de estratégias na resolução de problemas, o raciocínio lógico-dedutivo, o sentido cooperativo e a autoconfiança, por forma a que estes desenvolvam e adquiram um conjunto de competências gerais, que deverão ter à saída da sua educação escolar e necessárias à qualidade da vida pessoal e social de todos os cidadãos, conforme referido em [GLLNDFOJRAS 01].

M. Gardner, em [Gardner 08], refere "Como as outras ciências, a Matemática é uma espécie de jogo cujo adversário é o universo. Os melhores matemáticos e os melhores professores de matemática são obviamente aqueles que, para além de compreenderem as regras do jogo, também sabem desfrutar o prazer do jogo.".

Segundo A. Cabral, em [Cabral 02], "As regras são inerentes à busca do prazer e consistem em viabilizar o fim proposto da acção através de uma correcta utilização de meios. Digamos que o prazer é o objectivo intrínseco do jogo; e a vitória, o extrínseco; no fundo, o mesmo objecto, conforme é visto do lado do sujeito e do da acção. Em qualquer actividade a busca do prazer impõe a utilização dos meios adequados; no jogo, porém, o prazer reside só no conseguimento vitorioso dessa utilização".

As actividades lúdicas são inerentes ao Ser Humano e apresentam uma enorme importância no desenvolvimento das potencialidades humanas. Perante as actividades lúdicas o Homem pode beneficiar tanto do seu aspecto de diversão, de ocupação dos seus tempos livres e de promoção do convívio, como também do seu aspecto da aprendizagem, pois apesar destas estarem essencialmente vocacionadas para o lazer, o entretenimento e a brincadeira, têm outro objectivo, o desenvolvimento físico, motor, emocional e cognitivo do Ser Humano. S. Miranda, em [Miranda 01], afirma que "Prazer e alegria não se dissociam jamais. O brincar é incontestavelmente uma fonte inesgotável desses dois elementos. O jogo, o brinquedo e a brincadeira sempre estiveram presentes na vida do homem, dos mais remotos tempos até aos dias de hoje, nas mais variadas manifestações (bélicas, filosóficas, educacionais). O jogo pressupõe uma regra, o brinquedo é o objecto manipulável e a brincadeira, nada mais é que o acto de brincar com o brinquedo ou mesmo com o jogo. Jogar também é brincar com o jogo. O jogo pode existir por meio do brinquedo, se os elementos envolvidos lhe impuserem regras. Percebe-se, pois, que jogo, brinquedo e brincadeira têm conceitos distintos, todavia estão implicados; e o lúdico abarca todos eles.".

A actividade lúdica sintetiza o Humano, na medida em que permite a expressão da individualidade e da cultura mobilizando, ao mesmo tempo, o pensamento, a acção e a afectividade do sujeito que brinca, dos parceiros de um jogo. Em todas as sociedades e em todas as culturas, no passado e na actualidade, a actividade lúdica está presente em diferentes momentos da vida individual e colectividade dos seus membros. Desde a infância que quase todo o Ser Humano tem uma relação muito próxima com os jogos e com as actividades lúdicas e, em alguns casos, já na fase adulta nunca se distanciam completamente desta prática e, por isso, encontra-se uma variedade infinita de jogos, nas diferentes culturas e em qualquer momento histórico. S. Miranda, em [Miranda 01], refere que "O jogo está, desde sempre, ligado à condição humana o que faz com que em determinada altura da vida, todos nós tenhamos já sido estimulados por um jogo. É também um grande transmissor da cultura de um povo, dando-nos a possibilidade de conhecer mais uma parte da história e das raízes de um grupo.". J. Huizinda, em [Huizinda 99], refere que "O jogo é mais antigo que a cultura."e J. P. Neto e J. N. Silva, em [NS 04], referem que "As razões profundas que levam a que todas as civilizações desenvolvam jogos são ainda desconhecidas, mas é consensual o seu interesse cultural e educacional.".

A diversidade de jogos, em qualquer marco histórico, e as suas diferentes classificações tornam difícil a apresentação de uma única definição sobre o que é um jogo e/ou o que é jogar.

M. Gardner, em [Gardner 08], apresentou alguma dificuldade em chegar a uma só definição do que é o jogo e segundo este autor "A ideia de Jogo combina muitos significados, interligados como se de membros de uma família se tratasse (...)".

T. Kishimoto, em [Kishimoto 97], referiu "O que oferece dificuldade para o conceito de jogo é o emprego de vários termos como sinónimos. Jogo, brinquedo e brincadeira têm sido utilizados com o mesmo significado. (...) O sentido usual permite que a língua portuguesa referende os três termos como sinónimos.".

Alguns autores referem que, embora o jogo possa ser visto como uma actividade lúdica, não poderá dispensar a existência de regras, nomeadamente J. Huizinda, em [Huizinda 99], refere que "(...) o jogo é uma actividade ou ocupação voluntária, exercida dentro de determinados limites de tempo e espaço, segundo regras livremente consentidas, mas absolutamente obrigatórias, dotado de um fim em si mesmo, acompanhado de um sentimento de tensão e de alegria (...)" e L. Macedo, em [Macedo 94], refere que "O jogo é uma actividade delimitada porque permite a combinação do espaço e tempo; incerta porque não se tem a certeza do resultado; improdutiva porque não há intenção de gerar ganhos ou bens materiais; regulamentada, porque está sujeita às suas próprias regras; fictícia porque trabalha com o irreal. A natureza lúdica, divertida, alegre e que se sustenta pelo simples prazer funcional são atributos do jogo. Ninguém é obrigado a gozar ou a permanecer no jogo.".

Para J. Fletcher, em [Fletcher 71], um jogo define-se tendo em conta algumas características, nomeadamente "(...) tem um conjunto de jogadores (dois ou mais); tem um conjunto de regras que têm de ser seguidas pelos jogadores, todos os resultados possíveis são conhecidos, cada jogador tem um conjunto de recursos ao seu dispor para chegar ao resultado que pretende e há um sistema de informação.". G. Bright, J. Harvey e M. Wheeler, em [BHW 85], definem jogo como "(...) uma actividade livre, é um desafio contra um ou mais adversários, controla-se por um conjunto definido de regras, representa uma situação arbitrária delimitada no tempo e no espaço (esta situação não é conhecida no início do jogo) (...)".

M. Matos e M. Ferreira, em [MF 04], referem que "Quando perguntamos a alguém o que é um jogo geralmente respondem-nos que é qualquer passatempo ou diversão. Se pedirmos que nos dêem exemplos de jogos, a resposta é, com muita frequência: xadrez, damas, monopólio, póquer, futebol, andebol, basquetebol, vídeo jogos, entre outros. Se analisarmos as respostas com o mínimo de atenção verificamos que a maior parte das pessoas define um jogo de forma pouco rigorosa, no entanto, os exemplos de jogos que sugerem não deixam dúvidas sobre o que é, de facto, um jogo. Também das respostas dadas podemos constatar, que dos vários exemplos de jogos sugeridos estes podem ser classificados em categorias diferentes: jogos de mesa, jogos de cartas, jogos desportivos, jogos electrónicos, jogos com vários jogadores e jogos com apenas um jogador. Pelo facto de estarmos perante situações tão diferenciadas que recebem o mesmo nome, jogo, elas devem possuir alguma característica ou um conjunto de características comuns. Fazendo uma análise simples podemos identificar de imediato que em todo o jogo existem regras que indicam ao jogador o que pode ou não fazer. Por outro lado, o jogador procura uma estratégia que resulte na obtenção de determinado objectivo em oposição com os outros jogadores que também tentam optimizar o seu ponto de vista. O resultado final depende do conjunto das estratégias adoptadas por todos os participantes, fenómeno que se denomina por interdependência estratégica. Então, um jogo é qualquer situação governada por regras com um resultado bem definido caracterizado por uma interdependência estratégica.”. Referem ainda que “Foi há aproximadamente quarenta anos que o matemático John Von Neumann e o economista Oskar Morgenstern, ao tentarem resolver determinados problemas económicos, repararam que os problemas típicos do comportamento económico coincidiam com os princípios matemáticos aplicados a determinados jogos de estratégia. Foi o princípio da Teoria de jogos. Nas décadas seguintes, após a publicação da obra *Theory of Games and Economic Behaviour (1944)*, a Teoria de jogos despertou grande interesse devido quer às suas novas propriedades matemáticas, quer às suas diversas aplicações a problemas sociais, económicos e políticos, etc. (...) A Teoria de jogos analisa situações competitivas que envolvem conflitos de interesse. A sua premissa básica é a racionalidade das decisões, ou seja, supõe que cada jogador procura constantemente maximizar algum benefício, que pode ser de qualquer ordem, isto é, procura objectivos exógenos bem definidos (é racional) e tem em conta o seu conhecimento ou expectativas sobre o comportamento dos outros jogadores (age estrategicamente). A Teoria de jogos usa a Matemática para expressar as suas ideias formalmente contribuindo para o entendimento dos fenómenos que se observam quando são tomadas decisões que interagem entre si.”.

Actualmente, fala-se muito na importância da relação entre o jogo e a Matemática. Esta despertou e continua a despertar interesse de vários autores, pois a utilização dos jogos como recurso pedagógico é uma oportunidade de vivenciar situações ricas e desafiadoras. Os jogos estão em correspondência directa com o pensamento matemático, pois em ambos existem regras, instruções, operações, definições, deduções, desenvolvimento, utilização de normas e novos conhecimentos.

A aprendizagem da Matemática sempre dependeu de uma grande variedade de factores, contudo, actualmente, dados os progressos e as exigências da nossa sociedade essa variedade tende a aumentar o que torna o ensino da Matemática bastante mais complexo. No entanto, a utilização de jogos para complementar o estudo e a aquisição de conteúdos é uma mais valia para o Ser Humano se tornar matematicamente competente, conforme é exigido ao professor no seu trabalho com os alunos, como se refere em [GLLNDFOJRAS 01]. Transcreve-se, de [GLLNDFOJRAS 01], a título de exemplo uma das competências a desenvolver no aluno, ao longo do seu percurso da educação básica e que contribui para que este seja considerado matematicamente competente, para a qual a utilização de jogos ajuda a adquirir: "A predisposição para procurar entender a estrutura de um problema e a aptidão para desenvolver processos de resolução, assim como para analisar os erros cometidos e ensaiar estratégias alternativas.". Segundo A. Petty, em [Petty 95], "(...) promover o desenvolvimento do raciocínio das crianças por meio de situações em que jogos são instrumento para exercitar e estimular um pensar com lógica e critério, porque interpretar informações, procurar soluções, levantar hipóteses e coordenar diferentes pontos de vista são condições para jogar (...). Além disso, eles também fazem parte das condições para se aprender as disciplinas escolares.". Segundo L. Macedo, A. Petty e N. Passos, em

[MPP 00], "(...) jogar favorece e enriquece o processo de aprendizagem, na medida em que o sujeito é levado a reflectir, fazer previsões e inter-relacionar objectos e eventos, e ainda, aprender a questionar e corrigir as suas acções, analisar e comparar pontos de vista, organizar e cuidar dos materiais utilizados.".

Dos muitos objectivos do ensino da Matemática encontra-se o de ensinar a resolver problemas e as situações de jogos representam uma boa situação-problema, na medida em que o professor pode propor questões aos alunos, potenciando as suas capacidades para compreender e explicar os conceitos da Matemática.

M. Guzmán, em [Guzman 90], valoriza a utilização dos jogos para o ensino da Matemática, sobretudo porque os jogos não apenas divertem, mas também se extrai das actividades com jogos ideias suficientes para gerar conhecimento, interesse e fazer com que os alunos pensem com certa motivação.

Este trabalho dedica-se essencialmente a *Jogos Matemáticos* e segundo J. P. Neto e J. N. Silva, em [NS 04], "Por jogos matemáticos designam-se normalmente, puzzles, problemas e actividades que vão da simples charada à questão matemática ainda em aberto.". Os Jogos Matemáticos ou as chamadas *Matemáticas Recreativas* apresentam-se com uma grande componente lúdica mas são um excelente suporte para complementar o estudo e a aquisição de conteúdos na disciplina de Matemática. Contudo, segundo J. Rino, em [Rino 04], "(...) a aprendizagem através do jogo pode ser feita em meio escolar ou extra-escolar, pois as regras e interacções que se pretendem desenvolver deverão contribuir para a construção de um cidadão responsável e autónomo, para a qual a escola é apenas um dos contributos." e, na opinião de J. Château, em [Chateau 87], há cuidados que se devem ter no destaque do papel pedagógico do jogo, nomeadamente "Se não se vê no jogo um encaminhamento para o trabalho, arrisca-se a reduzi-lo a um simples divertimento e a rebaixar ao mesmo tempo a educação e a criança.". Quando se pergunta o que é a Matemática Recreativa, a resposta não é imediata nem fácil, pois não é recreativo apenas o que é divertido e não muito sério. Na opinão de A. Machiavelo, em [Machiavelo 08], "(...) é mais complicado do que se possa pensar separar, em Matemática, o que é "recreativo" do que é "sério". De um certo ponto de vista, pode-se até dizer que "Matemática Recreativa" é um pleonasmo, pois os matemáticos divertem-se e têm prazer com a Matemática (...)". Cite-se J. Huizinda, em [Huizinda 99], a propósito deste assunto: "Na nossa maneira de pensar, o jogo é diametralmente oposto à seriedade. À primeira vista, esta oposição parece tão irredutível a outras categorias como o próprio conceito de jogo. Todavia, caso o examinemos mais de perto, verificaremos que o contraste entre jogo e seriedade não é decisivo nem imutável. É lícito dizer que o jogo é a não-seriedade, mas esta afirmação, além do facto de nada nos dizer quanto às características positivas do jogo, é extremamente fácil de refutar. Caso pretendamos passar de "o jogo é a não-seriedade" para "o jogo não é sério", imediatamente o contraste tornar-se-á impossível, pois certas formas de jogo podem ser extraordinariamente sérias. Além disso, é facílimo designar várias outras categorias fundamentais que também são abrangidas pela categoria da "não-seriedade" e não apresentam qualquer relação com o jogo. O riso, por exemplo, está de certo modo em oposição à seriedade, sem de maneira alguma estar directamente ligado ao jogo. Os jogos infantis, o futebol e o xadrez são executados dentro da mais profunda seriedade, não se verificando nos jogadores a menor tendência para o riso.".

A. Machiavelo, em [Machiavelo 08], refere que "Na espécie humana o jogo tem um papel tão fundamental, sendo tão omnipresente, tão comum, que a sua presença passa complematemente despercebida em muitas situações.", cita ainda J. Huizinda por este referir a importância do jogo no quotidiano como um patrinómio das civilizações "o jogo, genuíno e puro, é uma das bases principais da civilização" e acrescenta que "Na nossa espécie, brincar não só é fundamental a um desenvolvimento equilibrado da criança e do adolescente, como também é fundamental que os adultos o continuem a fazer. Brincar desempenha um papel crucial na sobrevivência da nossa espécie!".

Como referido atrás, passa-se agora à descrição dos outros dois capítulos que constituem este trabalho.

No segundo capítulo, *Jogos combinatórios imparciais*, dá-se a conhecer, de forma breve, a história dos jogos combinatórios imparciais referindo os primeiros matemáticos interessados por esta área da Matemática. Destaca-se ainda um artigo de referência nesta área, de 1901, do matemático Charles Leonard Bouton, *Nim, a Game With a Complete Mathematical Theory*, onde se refere que o autor analisou o jogo Nim, um dos mais atraentes e importantes jogos para o estudo deste tema. Neste capítulo são ainda descritas e analisadas as técnicas matemáticas que se encontram por detrás dos jogos combinatórios imparciais. Começa-se por caracterizar o Jogo Combinatório Imparcial, estudar Grafos nos jogos, definir Posição P ou $P-$posição e Posição N ou $N-$posição, definir Função Grundy, determinar o valor desta função de alguns exemplos de jogos combinatórios imparciais e abordar a Soma de jogos combinatórios imparciais. Apresenta-se ainda a Soma-Nim e a sua aplicação na Teoria de jogos combinatórios imparciais, bem como o modelo matemático que suporta a ideia de que estes jogos admitem uma estratégia vencedora, à priori conhecida, para um dos jogadores. Ao longo deste capítulo e à medida que surgem novos conceitos são apresentados exemplos de diferentes jogos combinatórios imparciais como, por exemplo, o Jogo Nim, o Jogo de Subtracção, o Jogo Add-Up Nim, o Jogo Rainha Branca, o Jogo Nimble e o Jogo do Arbusto.

O jogo Nim é um jogo extremamente estratégico, que requer muito raciocínio matemático para que se possa elaborar uma estratégia vencedora. Tradicionalmente é jogado por duas pessoas que alternando as jogadas devem retirar, um ou mais, objectos (palitos, pedras, moedas, pedaços de papel, ...) de cada vez, dispostos em pilhas (filas, caixas, ...) e ganha, segundo a versão convencional, aquele que retirar o último objecto. Pode encontrar-se inúmeros jogos disfarçados do jogo Nim, e por isso regras diferentes no que diz respeito, por exemplo, à quantidade de objectos utilizados no jogo, ao número de pilhas, à quantidade de objectos por pilha e ao uso ou não de tabuleiros ou outros materiais. Contudo, na sua essência o objectivo destes jogos é ser o último a fazer uma jogada legal (na versão convencional) e portanto vencer. No jogo Nim, jogando algumas partidas, é possível estabelecer uma estratégia optimizada para o jogo, de forma a que garantindo a obtenção de determinado número de objectos nas pilhas, *posições boas* adiante chamadas de posições N ou $N-$posições, se atinge o objectivo do jogo. Deixar uma determinada posição, *posições más* adiante chamadas de posições P ou $P-$posições, para que o adversário jogue posteriormente e perca o jogo é o objectivo do jogador que acabou de jogar. As posições são consideradas seguras e a sua descoberta, isto é, de uma estratégia vencedora surge nas interacções com os resultados do jogo após se jogar um certo número de vezes. Contudo, observar-se-á mais adiante que todas as posições P são exactamente aquelas que anulam a Função Grundy. Assim, determinada a Função Grundy sabe-se se estamos perante uma situação que nos leva à vitória ou não, isto é, sabe-se encontrar uma posição vencedora (estratégia vencedora), uma vez que consiste em jogar para uma determinada posição, designe-se por x, tal que a Função Grundy nessa possição seja nula, isto é, $g(x) = 0$, onde mais adiante a função g é definida como a Função Grundy.

Para analisar matematicamente o jogo Nim com mais do que duas pilhas de objectos (pois com uma ou duas pilhas é trivial) e determinar a estratégia óptima revela-se importante o uso de uma base diferente da habitualmente usada, a base 2. Adiante, explorar-se-á um algoritmo que permite ao jogador configurar o jogo de maneira a que, se ele continuar a partida sem erros, a vitória estará assegurada. Esta estratégia utilizando a linguagem binária foi desenvolvida pelo matemático Charles Leonard Bouton, por volta de 1901, e é conhecida como o Teorema de Bouton, Teorema 2.44, referido mais à frente no Capítulo 2. O algoritmo da vitória consiste em arranjar uma configuração segura do número de objectos em cada pilha de modo a que, não interessando qual a jogada do adversário, faz-se novamente a configuração e acaba-se sempre por vencer. O conhecimento deste algoritmo por parte dos dois jogadores é irrevelante, pois o que conseguir iniciá-lo e se nunca cometer erros consegue vencer o jogo. O primeiro passo do algoritmo é contar quantos objectos há em cada pilha e transformar os números obtidos em número binário e de seguida efectuar a Soma-Nim destes números. A obtenção de Soma-Nim igual a zero é favorável ao jogador que alcançou tal posição conforme se verá mais adiante.

O jogo Nim com duas ou mais pilhas de feijões é um exemplo de um jogo gerado a partir do jogo Nim com uma única pilha de feijões, pois é composto por dois ou mais jogos Nim de uma pilha de feijões cuja análise é simples. Contudo, nem todos os jogos gerados por jogos combinatórios imparciais sendo simples de jogar são simples de analisar. A análise do jogo Nim com duas ou mais pilhas de feijões é relativamente simples por ser um jogo gerado por uma combinação do mesmo jogo combinatório imparcial. No entanto, nem sempre os jogos gerados por jogos combinatórios imparciais são uma combinação de um mesmo jogo e nestes casos a sua análise é mais complicada, a qual necessita de novos conceitos, nomeadamente o de Função Sprague-Grundy da soma, função dada a partir das Funções de Grundy das parcelas.

No terceiro capítulo, *O jogo no processo ensino e aprendizagem*, faz-se uma abordagem do jogo, como referência no Currículo de Matemática em Portugal, apresenta-se uma actividade desenvolvida no âmbito do Plano de Actividades de uma Escola, enquadrada pelo Despacho 14724/2009, publicado no Diário da República 2.^{a} série de 1 de Julho e dá-se a conhecer uma actividade que suporta alguns conteúdos do Ensino Básico da disciplina de Matemática envolvendo um Jogo Combinatório Imparcial.

A actividade inserida no Plano de Actividades da Escola, intitulava-se *Inventa um jogo Nim* e assumiu o formato de um concurso. Assim, permitindo também desenvolver o gosto pela Matemática, o hábito de trabalho e persistência, o raciocínio lógico, o cálculo mental, a capacidade de decisão e a noção de estratégia promovida pelo jogos, deu-se primazia ao desenvolvimento da capacidade de apreciar a importância da Matemática no dia-a-dia e no seu aspecto lúdico, nomeadamente desenvolvendo a capacidade de imaginar, criar e testar um Jogo Combinatório Imparcial numa "variante" do jogo Nim, isto é, através de um jogo Nim disfarçado.

A actividade desenvolvida em sala de aula surgiu como uma alternativa metodológica, o uso de jogos, na consolidação do tema *Sequências de Números*, da Unidade *Ainda os Números* do Programa de Matemática do 8.^{o} ano de escolaridade e permitiu que os alunos construíssem e consolidassem o seu conhecimento na interação com os colegas, existindo assim a possibilidade de surgirem vários tipos de procedimentos: agir aleatoriamente, por tentativas, por cálculos antecipados, por análises cuidadosas, por atitudes intuitivas ou mais arriscadas. A proposta desta actividade em sala de aula, com o suporte de um jogo - o *Jogo Nim* - permitiu que o papel do aluno fosse activo e se centrasse na observação, no relacionamento, na comparação, no levantamento de hipóteses e na argumentação, permitindo que interagisse, observasse e analisasse individualmente ou colectivamente as jogadas, na procura da solução para a actividade proposta. O facto dos alunos terem desenvolvido as tarefas da actividade em grupo permitiu o desenvolvimento de atitudes de convívio social, uma vez que ao actuar em equipa permitiu-lhes superar parte do egocentrismo natural do Ser Humano. O jogo de apoio à concretização das tarefas, o jogo Nim, permitiu estimular os alunos, uma vez que não se revelou ser fácil demais nem difícil demais. Além de proporcionar prazer e diversão, o jogo pode representar um desafio e provocar o pensamento reflexivo do aluno, razões suficientes para que se defenda o seu uso no ensino da Matemática, pois mesmo que os jogos tenham uma Matemática implícita, como é o caso do jogo proposto, nem sempre são usados para ensinar conceitos matemáticos. O mais importante é a base para provocar a reflexão e o estabelecimento de relações lógicas por parte do aluno. Ao professor coube apenas a tarefa de orientar a actividade, questionando os procedimentos utilizados e as conjecturas formuladas. Contudo, houve uma grande preocupação metodológica em analisar as tarefas propostas aos alunos antes de as propor em sala de aula, analisando as jogadas e reflectindo sobre os possíveis erros, prevendo algumas das eventuais dificuldades que pudessem encontrar. Veja-se o que referem D. Fiorentini e M. Miorim, em [FM 90], sobre a importância da preparação das actividades quando se pressupõe o uso de jogos em sala de aula: "(...) o professor não pode subjugar a sua metodologia de ensino a algum tipo de material por ele ser atraente ou lúdico. Nenhum material é válido por si só. Os materiais e a sua aplicação sempre devem, estar em segundo plano. A simples introdução de jogos ou actividades no ensino da matemática não garante uma melhor aprendizagem desta disciplina (...)". Segundo R. Grando, em [Grando 04], "estes tipos de jogos são importantes para a formação do pensamento matemático e propiciam passos para a generalização (estratégias dos jogos) (...)". Refere ainda que "(...) é possível preparar armadilha ao jogar, para que o adversário não vença e também prever situações que poderá auxiliá-lo na sua próxima jogada. Dessa forma o aluno não joga apenas por jogar, deverá estar atento às jogadas e encontrar as melhores estratégias (...)". Quando os alunos jogam aleatoriamente sem nenhuma reflexão podem ou não vencer, mas quando começam a ganhar, começam a formular estratégias na procura do conceito matemático que os leva à vitória. Os alunos jogando Nim trabalham conceitos de divisibilidade e múltiplos de números, e também, o cálculo mental, com o intuito de desenvolver uma análise de possibilidades na deslocação dos objectos, previsões e antecipações de jogadas.

Capítulo 2

Jogos combinatórios imparciais

No presente capítulo pretende-se, de forma breve, dar a conhecer a histórica dos Jogos combinatórios imparciais, mencionando os primeiros matemáticos que se interessaram por esta área da Matemática, bem como as suas descobertas ou estudos sobre esta matéria. Refere-se o artigo *Nim, a Game With a Complete Mathematical Theory*, de 1901, do matemático Charles Leonard Bouton onde este analisou um dos mais antigos e atraentes jogos matemáticos - o jogo Nim. De seguida descrevem-se e analisam-se as técnicas matemáticas que se encontram por detrás dos jogos combinatórios imparciais. Em primeiro lugar, começa-se por caracterizar Jogo combinatório imparcial, estuda-se Grafos nos jogos, define-se Posição P e Posição N, define-se Função Grundy e determina-se o valor desta função em alguns exemplos de jogos combinatórios imparciais e apresenta-se a Soma-Nim e a sua aplicação na Teoria de jogos combinatórios imparciais, apresentando-se o modelo matemático que suporta a ideia de que estes jogos admitem uma estratégia vencedora, à priori conhecida, para um dos jogadores. Por último, na certeza de que a partir de jogos combinatórios imparciais se pode gerar novos jogos imparciais estuda-se a Soma de jogos combinatórios imparciais.

2.1 Uma breve viagem histórica

No início do século XX, a análise do jogo Nim pelo matemático americano Charles Leonard Bouton foi o ponto de partida para o nascimento de uma área da Matemática completamente nova, a Teoria de jogos combinatórios imparciais, que foi seguida por outros matemáticos, conforme se ilustra na árvore genealógica dos primeiros investigadores de Jogos combinatórios imparciais na Figura 2.1.

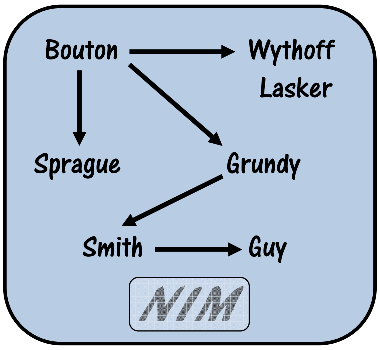


Figura 2.1: Árvore genealógica dos primeiros investigadores de Jogos combinatórios imparciais.

Charles Leonard Bouton nasceu em St. Louis, Missouri, a 25 de Abril de 1869 e morreu em Cambridge, Massachusetts, a 20 de Fevereiro de 1922. Segundo W. Osgood, J. Coolidge e G. Chase, em [OCC 22], a sua mãe Mary Rothery Conklin era descendente de Escoceses e o seu pai William Bouton, engenheiro de profissão, era descendente de *Huguenot.* A sua família há muito que estava estabelecida na Nova Inglaterra quando Charles Leonard Bouton nasceu e o ambiente em casa era académico e intelectualmente estimulante. Foi o único dos quatro irmãos que não seguiu as pisadas do pai e recebeu uma educação nas escolas públicas de St. Louis. Teve o seu primeiro grau, o de Master of Science da Universidade de Washington, em 1891 e nos dois anos seguintes foi professor na Smith Academy, St. Louis, posteriormente instrutor na Universidade de Washington, onde parte do seu trabalho era ajudar o professor Henry S. Pritchett. Os anos lectivos de 1894-1895 e 1895-1896 foram passados na Graduate School, onde finalizou o mestrado e posteriormente recebeu uma bolsa para estudar no estrageiro. Escolheu como seu mestre o Geómetra Sophus Lie, que se encontrava na altura no auge da sua fama. Em todo o seu trabalho científico foi notória a aprendizagem com o génio Lie. Depois de se doutorar em Leipzig em 1898, Charles Leonard Bouton voltou a Harvard e iniciou um longo período de trabalho interrompido apenas por sabáticas ocasionais. Participou nas equipas editoriais da revista *Bulletin of the American Mathematical Society*, de 1900 a 1902, e na revista *Transactions of the American Mathematical Society*, de 1902 a 1911. Sendo um homem gentil e amável foi apreciado por todos os que o conheceram. A sua opinião sempre ouvida com respeito e o seu poder de crítica bastante aperfeiçoado deu-lhe um lugar de destaque e de notoriedade na área da Matemática. A sua vida doméstica foi maravilhosamente tranquila e pacífica. Em 1907 casou-se com Maria Spencer de Baltimore, de quem teve três filhas, Elizabeth, Margaret e Charlotte.

Segundo R. Nowakowski, em [Nowakowski 09], alguns dos jogos que foram sugeridos por Charles Leonard Bouton são muito interessantes e importantes e acredita que o jogo Nim deve muito a Charles Leonard Bouton, uma vez que este teve um papel preponderante no interesse pela área, nomeadamente com a produção de vários documentos com resultados importantes, onde se salienta o artigo [Bouton 01]. O jogo Nim é um jogo extremamente estratégico e é um dos mais antigos e atraentes de todos os jogos matemáticos tradicionalmente jogados por duas pessoas que, alternando as jogadas, devem retirar objectos (palitos, pedras, moedas, pedaços de papel, ...) dispostos em pilhas (filas, caixas,

...). Os jogadores retiram um ou mais objectos de cada vez, mas somente a partir de uma pilha e ganha, segundo a versão convencional, aquele que retirar o último objecto. Por tratar-se de um jogo de interesse matemático encontram-se inúmeros jogos Nim disfarçados e por isso diferentes regras, no que diz respeito, por exemplo, à quantidade de objectos utilizados no jogo, ao número de pilhas e à quantidade de objectos por pilha. Apesar de bastante simples, o Nim é um jogo que requer muito raciocínio matemático para que se possa elaborar uma estratégia vencedora. Charles Leonard Bouton apresentou uma teoria para a estratégia de vitória do jogo. Esta teoria está ligada, de modo surpreendente, com a aritmética dos números naturais no sistema de numeração binário. Estas ideias estão presentes na formulação mais recente de E. Berlekamp, J. Conway e R. Guy, em [BCG 82], onde aparece também uma curiosa invenção: a junção do Nim com os números, originando nímeros.

O clássico Teorema de Bouton, Teorema 2.44, referido mais à frente na Secção 2.2.4, assegura que se obtém uma posição vencedora quando se consegue que a Soma-Nim do número de objectos das pilhas seja zero. A sua teoria é baseada na representação binária, pois expressam-se o número de objectos de cada pilha no sistema binário e procede-se de modo que após a sua jogada a Soma-Nim seja nula. No jogo Nim existem posições das quais se gostaria de sair depois de uma jogada e há outras posições que um jogador gostaria de encontrar quando fosse a sua vez de jogar, por ser a que lhe permitiria vencer. Existem terminologias diferentes, por exemplo, segundo A. Beck, M. Bleicher e D. Crowe, em [BBC 00], chamam *position winning* se o jogador a jogar usar a estratégia vencedora e, por outro lado, segundo G. Hardy e E. Wright, em [HW 96], chamam *position losing* se o jogador que vai jogar a deixar para o adversário. No entanto, é prática usual nos jogos combinatórios imparciais chamar a uma estratégia vantajosa para o próximo jogador a jogar uma *N-position* e uma *P-position* se se tratar de uma estratégia vantajosa para o jogador que acabou de jogar, contudo neste trabalho usa-se conforme definido mais à frente, as designações *posição N* ou $N-$*posição* e *posição P* ou $P-$*posição*, conforme definido em [ANW 06].

Willem Wythoff introduziu o jogo Wythoff (Rainha Branca) em 1907, que de forma independente também foi estudado por Rufus Issacs. O jogo tem ligações interessantes com a razão de ouro e a sequência dos números de Fibonacci, tornando a Matemática muito interessante e bonita, conforme descreve Harold Coxeter, no livro de sua autoria *The golden section, phyllotaxis and Wythoff's game* publicado por Scripta Mathematica.

Emanuel Lasker, em 1931, introduziu o jogo Lasker's Nim e segundo Jörg Bewersdorff, no livro *Glöuck, Logik und Bluff Mathematik im Spiel – Methoden, Ergebnisse und Grenzen*, Emanuel Lasker deixou por desenvolver toda a Teoria de jogos combinatórios imparciais, pois não entendia o resultado das posições P e N e como elas interagiam.

Roland Sprague e Patrick Grundy desenvolveram uma teoria no campo dos Jogos combinatórios imparciais em que o Nim desempenhou um papel muito importante e onde o Teorema Sprague-Grundy afirma que cada jogo combinatório imparcial, segundo a versão convencional, é equivalente a um nímero (ver Teorema 7.5 em [SS 06]). O valor da Função Grundy de um jogo combinatório imparcial é definida como o único nímero ao qual o jogo é equivalente. O Teorema Sprague-Grundy foi descoberto independentemente por Roland Sprague (1935) e Patrick Grundy (1939) e tem sido desenvolvido no campo da Teoria de jogos combinatórios imparciais, nomeadamente através dos matemáticos Elwyn Berlekamp, John Conway e Richard Guy, entre outros. Este desenvolvimento é apresentado, por exemplo, no livro *Winning Ways for your Mathematical Plays* da autoria dos matemáticos anteriormente mencionados e no livro *On Numbers and Games* da autoria do matemático proeminente John Conway. O primeiro é um compêndio de informação sobre jogos matemáticos, foi publicado pela primeira vez em 1982 pela Academic Press em dois volumes, e o segundo, publicado pela Academic Press Inc em 1976 e posteriormente reeditado pela AK Peters em 2000, é um livro onde se apresenta um resumo histórico matemático sobre o desenvolvimento da teoria matemática geral sobre certa classe de jogos, mas cuja escrita lúdica e despretensiosa é em muitos capítulos acessível a não-matemáticos.

Em 1949, Richard Guy, na análise do jogo Dawson's Chess, também redescobriu a Teoria Sprague-Grundy e, além disso, uma infinidade de jogos aos quais a teoria pode ser aplicada, conforme publicou Thomas Dawson no livro *Caissa's wild roses*, em 1935. Richard Guy trabalhou com Cedric Smith, que havia trabalhado com Patrick Grundy. Isto levou-os a publicar o artigo *The G-values of various games* que ainda hoje se encontra bastante actual. Na área da Teoria de jogos combinatórios imparciais, Richard Guy publicou mais de 20 artigos, publicou livros, ajudou a organizar grandes conferências e foi editor do volume 56 das Publicações MSRI (Mathematical Sciences Research Institute Publications) onde apresenta muitas propostas de trabalho - *Unsolved Problems in Combinatorial Game Theory.*

Um outro jogo que também deve ser mencionado na mesma linha é o jogo Welter, de 1952. C. P. Welter conhecia o trabalho de Roland Sprague e uma generalidade de jogos NIM.

Apesar da aparente confusão sobre o equivalente a valores de nim, há, segundo o que escreveu Richard Nowakowski no artigo *The History of Combinatorial Game Theory*, uma maneira muito bonita para decidir sobre um bom movimento, apresentado nos livros já mencionados *Winning Ways for your Mathematical Plays* e *On Numbers and Games.*

Aviezri Fraenkel, matemático israelita, é considerado com sendo aquele que tem o maior número de publicações na área, com mais de sessenta trabalhos sobre, principalmente, Jogos combinatórios imparciais.

Refira-se ainda o trabalho apresentado pelos investigadores portugueses, professores universitários, A. Carvalho, C. Santos, J. N. Silva e J. P. Neto, em [CSSN 10], um resumo histórico matemático sobre o desenvolvimento da Teoria de jogos combinatórios imparciais.

2.2 Descrição e teoria

Se num jogo ambos os jogadores tiverem iguais opções de jogo, então o jogo é chamado de *Jogo combinatório imparcial.* Uma característica importante de um jogo combinatório imparcial, para além do facto do conjunto de regras para lances legais não fazerem qualquer distinção entre os jogadores, é o facto de nenhum jogador poder acumular uma vantagem por usufruir de informação escondida ou peças diferentes. Nestes jogos, o conceito de sorte e azar não está associado à vitória, antes pelo contrário, estes jogos admitem uma estratégia vencedora para um dos jogadores dela conhecedora, são jogos de pura estratégia sem elementos aleatórios. Por exemplo, num jogo combinatório imparcial popular, o jogo Nim, todos os movimentos possíveis são conhecidos por ambos os jogadores e, se necessário, toda a história do jogo também. O jogador que acabará por perder é aquele que não tiver uma jogada válida ao seu alcance. No jogo Nim ambos os jogadores usam as mesmas regras, toda a informação do jogo está disponível para ambos, ambos têm um número finito de jogadas e não intervém o factor sorte para que um jogador saia vitorioso.

Pode-se assim caracterizar jogos combinatórios imparciais através da seguinte definição.

Definição 2.1 *Um jogo G diz-se um* jogo combinatório imparcial *se:*

i) é jogado alternadamente por dois jogadores;

ii) não dispuser de nenhum dispositivo de lançamento, isto é, nenhum dado ou nenhum baralhador de cartas e não intervém a sorte;

iii) em cada jogada os jogadores dispuserem apenas de um número finito de escolhas possíveis iguais para ambos e cada jogador está ciente de todos os detalhes do jogo em todos os momentos, não usufruindo de informação escondida ou peças diferentes;

iv) independentemente da forma como é jogado, termina com a vitória de um dos jogadores num número finito de jogadas;

v) vence o último jogador a jogar, isto é, o primeiro a não dispor de nenhum lance legal perde - Jogo Normal - ou perde o último jogador a jogar, isto é, o último a dispor de um lance legal perde - Jogo Misère.

Neste trabalho apenas se abordam jogos combinatórios imparciais na sua versão de *Jogo Normal*. Embora uma análise similiar para a versão de *Jogo Misère* pudesse ser feita em muitos dos jogos, aqui não será retratada.

Exemplos de jogos não abrangidos por estas regras são:

- Pontos e Quadrados e Go (ver Figura 2.3 (a)[1]), já que estes são jogos de pontuação e não é garantido que a última pessoa a mover-se tenha uma maior ou a menor pontuação, não respeitando por isso a condição *v)* da Definição 2.1, como se pode ver nas Figuras 2.2 e 2.3 (b) (Fonte: [SNS 07b]);

[1]Fonte: http://cdlpc.blogs.sapo.pt/30858.html.

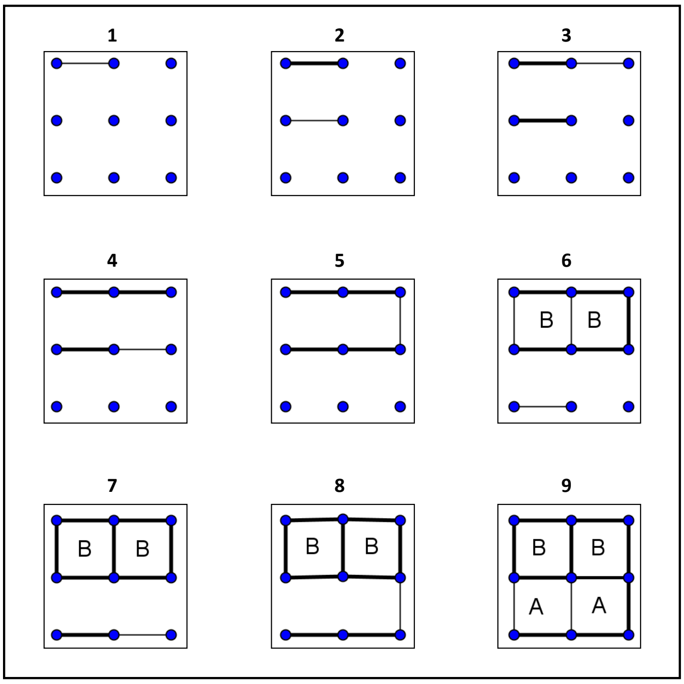


Figura 2.2: Sequência de jogadas do jogo Pontos e Quadrados, num tabuleiro 3×3, em que o último jogador a jogar (Jogador A) empata o jogo.

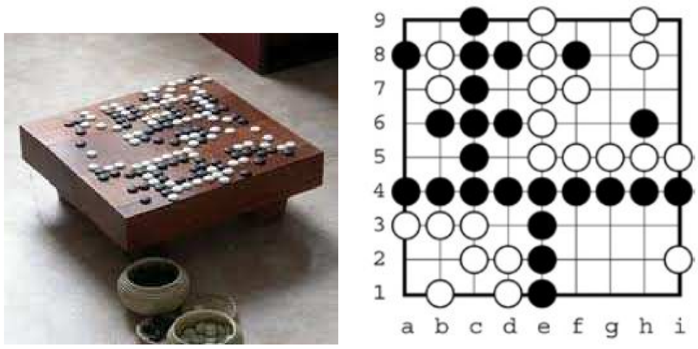
- Xadrez, pois o jogo poderá terminar num empate, não respeitando por isso as condições *iv)* e *v)* da Definição 2.1, como se pode ver no exemplo da Figura 2.4. Note-se que neste o jogador só pode movimentar as suas peças (as peças brancas pretencem a um jogador e as pretas a outro jogador e ambos só podem movimentar as suas peças);

- Gamão, uma vez que existe um dispositivo de lançamento (dados), não respeitando por isso a condição *ii)* da Definição 2.1, como se pode ver no exemplo da Figura 2.5;

- Bridge, ver Figura 2.6[2], já que o único aspecto que este jogo satisfaz é o facto de terminar.

No estudo dos jogos combinatórios imparciais se ambos os jogadores jogarem por meio de uma jogada perfeita é dada primazia apenas ao jogador que ganha. O que significa

[2]Fonte: http://www.bridge.pro.br/federacao_paulista_de_bridge_2002.htm.



(a) (b)

Figura 2.3: (a) Exemplo de um taluleiro do jogo Go e (b) Exemplo de um tabuleiro do jogo Go na posição de fim de partida, onde tendo sido o jogador com peças Brancas o último a jogar, perde o jogo. Com as peças Brancas obteve-se uma pontuação de 36 pontos e com as Negras uma pontuação de 40 pontos. Depois de retiradas as peças soltas em territórios inimigos, no caso das Brancas, as peças b7, b8 e i2 em território negro e, no caso das Negras, as peças f8 e h6 em território branco, contabiliza-se as peças de cada jogador (19 peças brancas e 21 peças negras) e o território de cada jogador (as brancas têm dois territórios que valem 4 e 13 intersecções, respectivamente, no canto inferior esquerdo e no canto superior direito e as negras também têm dois territórios de valores 8 e 12 correspondentes às intersecções do canto superior esquerdo e do canto inferior direito, respectivamente).

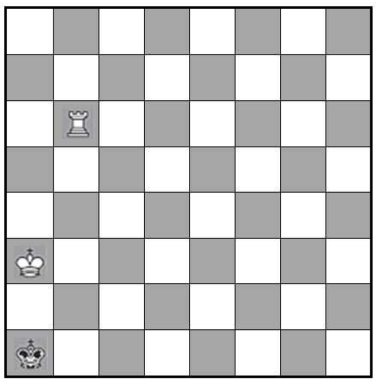


Figura 2.4: Tabuleiro de Xadrez ilustrando o fim do jogo com um empate (são as peças pretas as jogar, não há nenhuma jogada legal que se possa realizar e o rei preto não está em xeque).

Figura 2.5: Tabuleiro de Gamão com quinze peças de cor diferente para cada jogador, com um par de dados e um copinho para misturá-los.

Figura 2.6: Acto de jogar no Torneio de Bridge organizado pela Federação Paulista de Bridge.

jogar perfeitamente ou uma jogada perfeita? O conceito de jogar perfeitamente ou de uma jogada perfeita é facilmente compreendido: se um jogador tem uma hipótese de jogada que o leva à vitória, situação em que colocará o jogador adversário numa posição perdedora, deve aplicá-la por forma a vencer.

2.2.1 Grafo e jogo

A Teoria dos Grafos é actualmente uma das áreas importantes da Matemática Discreta e tem as suas raízes em jogos e recreações matemáticas. Atribui-se a sua criação a Euler ao resolver o problema das pontes de Königsberg em 1736, mas foram os problemas acerca de fórmulas de estrutura de compostos químicos que Arthur Cayley resolveu na segunda metade do século XIX que a começaram a desenvolver. Hoje, a Teoria dos Grafos tem sido aplicada a muitas áreas, pois um grafo constitui o modelo matemático ideal para o estudo das relações entre objectos discretos de qualquer tipo.

Um jogo combinatório tem como modelo matemático um grafo.

Definição 2.2 *Um* grafo simples K *consiste num conjunto finito e não vazio* $X(K)$ *de elementos chamados* vértices *e num conjunto finito* $F(K)$ *de pares não ordenados de elementos distintos de* $X(K)$ *chamados* arestas*.*

Definição 2.3 *Dois vértices* a *e* b *do grafo* K *dizem-se* adjacentes *se o par* $\{a, b\}$ *pertence a* $F(K)$*. Habitualmente representa-se um grafo simples* $K = (X(K), F(K))$*, abreviadamente* $K = (X, F)$*, por um diagrama no qual os vértices são representados por pontos e as arestas por linhas unindo vértices adjacentes.*

Exemplo 2.4 *Apresenta-se na Figura 2.7 o diagrama que representa o grafo K definido por*

$$X(K) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$$

e

$$F(K) = \{\{a,b\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,e\},\{b,f\},\{c,d\},\{c,f\},\{d,g\},\{e,h\},\{f,g\},\{f,h\},\{f,i\},\{g,i\},\{h,i\}\}.$$

Muitas vezes chama-se grafo simples *ao diagrama que o representa.*

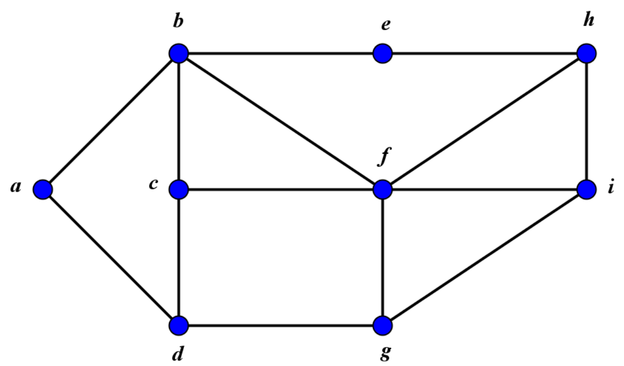


Figura 2.7: Diagrama do grafo associado ao Exemplo 2.4.

Em qualquer grafo simples existe no máximo uma aresta unindo cada par de vértices. No entanto, muitos resultados envolvendo grafos simples podem ser estendidos a grafos mais gerais nos quais dois vértices podem ter várias arestas (*arestas múltiplas*) unindo--os. Pode-se ainda remover a restrição que impõe que as arestas unam vértices distintos, admitindo *lacetes*, ou seja, arestas unindo um vértice a ele próprio. O grafo daí resultante, no qual lacetes e arestas múltiplas são admitidas, diz-se um *pseudografo*.

Definição 2.5 *Chama-se* pseudografo K *a um conjunto finito não vazio* $X(K)$ *de vértices e um multi-conjunto finito* $F(K)$ *de pares não ordenados de elementos de* $X(K)$ *(não necessariamente distintos) chamados* arestas.

Exemplo 2.6 *Apresenta-se na Figura 2.8 o diagrama que representa o pseudografo* K *definido por*

$$X(K) = \{a, b, c, d\}$$

e

$$F(K) = \{\{a, b\}, 2{\cdot}\{a, c\}, 2{\cdot}\{b\}, 3{\cdot}\{b, c\}, \{c, d\}, \{d\}\}\,.$$

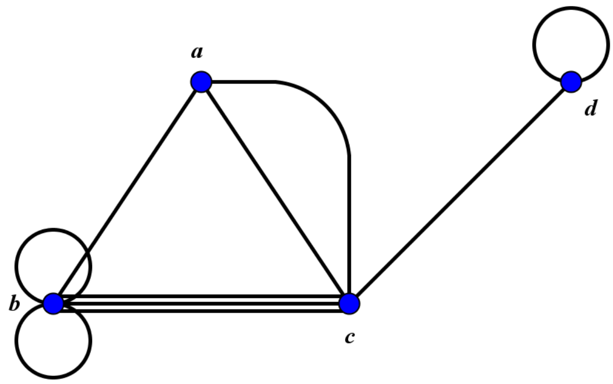


Figura 2.8: Diagrama do pseudografo associado ao Exemplo 2.6.

Muitas vezes, na modelação de certos problemas convirá considerar um sentido para as arestas. Por exemplo, na modelação de jogos com sentido único.

Definição 2.7 *Chama-se um* grafo dirigido *(ou, abreviadamente,* digrafo*)* D *a um conjunto finito não vazio* $X(D)$ *de elementos chamados vértices e a um multi-conjunto finito* $F(D)$ *de pares ordenados de elementos de* $X(D)$ *chamados* arcos. *Um digrafo diz-se* simples *se não contiver lacetes e os seus arcos forem todos distintos.*

Exemplo 2.8 *Apresenta-se na Figura 2.9 o digrafo que representa o pseudografo K definido no Exemplo 2.6.*

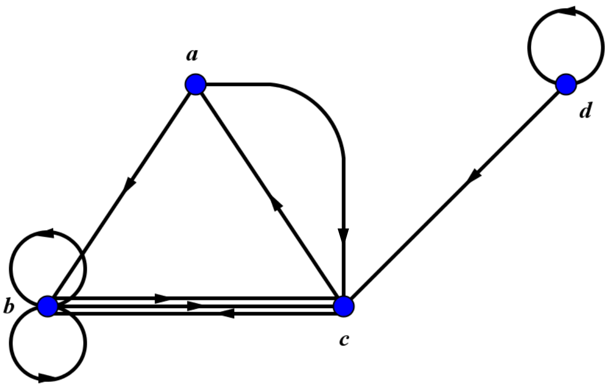


Figura 2.9: Diagrama do digrafo associado ao Exemplo 2.6.

Um jogo combinatório tem como modelo matemático um grafo dirigido sem lacetes, em que os vértices representam as posições que podem ocorrer num jogo e as arestas orientadas correspondem aos possíveis movimentos de uma posição para outra. Note-se que o grafo que representa um jogo combinatório imparcial tem de ser finito e sem lacetes, pois, caso contrário, e se os jogadores repetissem indefinidamente as posições associadas aos lacetes, o jogo não terminaria. Assim, não só não é permitido repetir posições, como o jogo caminhará sem margem de dúvidas para uma posição final e vencedora, aquela para a qual o jogador joga sem que exista hipótese do outro jogador efectuar um lance legal. No digrafo a posição final e vencedora está associada a um vértice sem sucessores, chamado *vértice terminal*. Analogamente, a posição inicial do jogo está associada a um vértice com sucessores (ligado a outro vértice por um caminho finito), chamado *vértice inicial*.

Apresenta-se a seguir o estudo de alguns jogos combinatórios imparciais, o jogo Nim, o jogo da Subtracção e o jogo Add-UpNim, que surgirão ao longo do estudo e da abordagem de novos conceitos.

Definição 2.9 *Chama-se* jogo Nim *ao jogo combinatório que é jogado com pilhas (filas, caixas, ...) de objectos (feijões, palitos, pedras, moedas, pedaços de papel, ...) e cada jogador, alternadamente, pode retirar um ou mais objectos de uma pilha à sua escolha (de um mínimo de um a um máximo de toda a pilha). Ganha, segundo a versão convencional, aquele que retirar o último objecto.*

Definição 2.10 *Chama-se* jogo de Subtracção com uma pilha *ao jogo que:*

- se inicia com uma pilha de n feijões ou outros objectos, com $n \in \mathbb{N}$;

- é jogado alternadamente por dois jogadores;

- em cada jogada, o jogador, possa retirar $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ feijões, com $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ números naturais distintos entre si;

- vence o último a jogar, isto é, o primeiro a não dispor de nenhum lance legal perde.

Denota-se este jogo por $S^{(n)}_{\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_k\}}$, onde em índice superior consta o número de feijões com que se inicia o jogo e em índice inferior consta o número de feijões que se pode retirar em cada jogada.

Exemplo 2.11 *Os jogos $S^{(7)}_{\{2,3\}}$, $S^{(10)}_{\{2,5,8\}}$ e $S^{(13)}_{\{1,6,13\}}$ são exemplos de jogos de Subtracção com uma pilha de feijões.*

Note-se que o jogo $S^{(n)}_{\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_k\}}$, com $a_1 = 1$, termina obrigatoriamente com a jogada do jogador que retire o último feijão da pilha. Contudo, num jogo de Subtracção não é obrigatório retirar todos os feijões da pilha de feijões para se terminar o jogo, pois num jogo $S^{(n)}_{\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_k\}}$, com $a_1 \neq 1$, isso pode não acontecer. Por exemplo, no jogo $S^{(7)}_{\{2,4\}}$ ao terminar-se com um feijão não é possível retirá-lo pois é um lance ilegal neste jogo. Repare-se na seguinte sequência que ilustra o que se acabou de referir, em que cada número é o número de feijões que existe no monte de feijões após cada jogada: $7 \rightarrow 5 \rightarrow 1$. O jogador que iniciou o jogo perde, pois efectuada a jogada do segundo jogador a jogar ainda existe um feijão e o jogador que iniciou o jogo não o poderá retirar, visto que não consistui um lance legal, uma vez que apenas se pode retirar 2 ou 4 feijões.

A seguir apresenta-se três exemplos com a análise detalhada, dois de jogos de Subtracção com uma pilha e um terceiro de um jogo Nim disfarçado.

Exemplo 2.12 *Jogo de Subtracção (1)*

Analise-se o jogo $S^{(13)}_{\{1,2,3\}}$*, isto é, o jogo de Subtracção que se inicia com uma pilha de 13 feijões e que cada jogada consiste em retirar 1, 2 ou 3 feijões, vencendo quem retirar o último feijão, os dois últimos ou três últimos feijões.*

Será que um dos jogadores pode afirmar antecipadamente que vence o jogo? Isto é, existirá uma estratégia vencedora para um dos jogadores?

Para compreender bem o jogo deve-se fazer uma análise retrógrada, isto é, analisar o jogo de trás para a frente, partindo da posição final (que corresponde a ter zero feijões) até à posição inicial (que corresponde a ter treze feijões), através de um esquema análogo ao que consta na Figura 2.10.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

Figura 2.10: Esquema que ilustra todas as posições de jogadas possíveis e posição terminal no jogo $S^{(13)}_{\{1,2,3\}}$.

Nos casos em que se inicia o jogo com um, dois ou três feijões ou nos casos em que após um certo número de jogadas se encontra numa das posições com um, dois ou três *feijões o próximo jogador a jogar retira um, dois ou três feijões, respectivamente, e ganha o jogo.*

No caso em que se inicia com quatro feijões ou se após um certo número de jogadas se encontra na posição com quatro feijões o próximo jogador a jogar retira um (ficando com três), retira dois (ficando com dois) ou retira três (ficando com um) e o jogador a efectuar a jogada seguinte vence o jogo, pois ao retirar três, dois ou um feijão, respectivamente, deixará o jogador que anteriormente jogou sem hipótese de jogada, uma vez que retira todos os feijões e ganha. Pelo que se pode afirmar que deixar zero ou quatro feijões é um bom objectivo, pois garante a vitória a quem faz tal proeza.

Se se iniciar o jogo com cinco, seis ou sete feijões ou após um certo número de jogadas se encontra nas posições com cinco, seis ou sete feijões então o próximo jogador a jogar retira um (ficando com quatro), retira dois (ficando com quatro) ou retira três (ficando com quatro) e o jogador a efectuar a jogada seguinte perde o jogo, pois irá proceder conforme descrito anteriormente para o caso de existirem quatro feijões.

De forma semelhante se constata que se o jogo se iniciar com oito feijões ou após um certo número de jogadas se encontra na posição com oito feijões, então o próximo jogador a jogar retira um (ficando com sete), retira dois (ficando com seis) ou retira três (ficando com cinco) e o jogador a efectuar a jogada seguinte vence o jogo pois, ao retirar três, dois ou um feijão, respectivamente, deixará o jogador adversário numa posição perdedora, isto é, numa posição com quatro feijões e, portanto, sem hipótese de ganhar, pois no máximo poderá deixar três feijões que serão retirados na próxima jogada.

De forma análoga se constata que as posições em que se tem nove, dez, onze ou treze feijões, são posições vencedoras, pois permitem ao jogador que vai jogar colocar o ad-

versário numa posição perdedora, isto é, com oito (nos três primeiros casos) e doze feijões (no último caso) e ter doze feijões na pilha é uma boa posição à semelhança dos casos em que se tem quatro ou oito feijões.

Conclui-se então que a estratégia vencedora consiste em jogar sempre para uma posição em que o adversário fique com quatro, oito ou doze feijões, pelo que o primeiro jogador a jogar terá sempre acesso a esta estratégia.

Note-se que se o jogo não se iniciar com treze feijões e se iniciar com um número que também não seja múltiplo de quatro, a estratégia vencedora é exactamente a mesma, isto é, se $n = 4k$ $(k \in \mathbb{N})$ *é múltiplo de quatro e o jogo se iniciar com* $n+1$, $n+2$ *ou* $n+3$ *feijões, o jogador que irá jogar deverá retirar um, dois ou três feijões repectivamente, de forma a colocar o adversário numa posição perdedora. Neste caso, numa posição em que ficaria com n feijões e, portanto, o primeiro a jogar vence o jogo. Contudo, se o jogo se iniciar com um número de feijões que seja múltiplo de quatro, o primeiro jogador nunca vencerá, pois após a sua jogada colocará o adversário numa posição vencedora que terá hipótese de aplicar a estratégia vencedora e colocar o jogador que iniciou o jogo novamente numa posição perdedora. Apresenta-se mais à frente, na Secção 2.2.4, um resultado teórico com demonstração que prova estas afirmações.*

A Figura 2.11 esquematiza a situação anteriormente descrita e o grafo orientado correspondente a este jogo de Subtracção encontra-se na Figura 2.12.

Exemplo 2.13 *Jogo de Subtracção (2)*

Analise-se o jogo $S_{\{3,4\}}^{(23)}$, *isto é, o jogo de Subtracção que se inicia com uma pilha de 23 feijões e que cada jogada consiste em retirar apenas 3 ou 4 feijões, vencendo quem fizer*

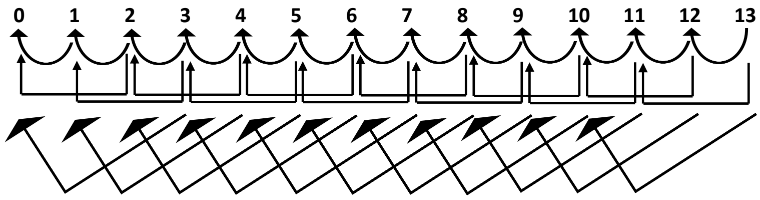


Figura 2.11: Esquema de todas as jogadas admissíveis em cada posição de jogadas válida no jogo $S^{(13)}_{\{1,2,3\}}$.

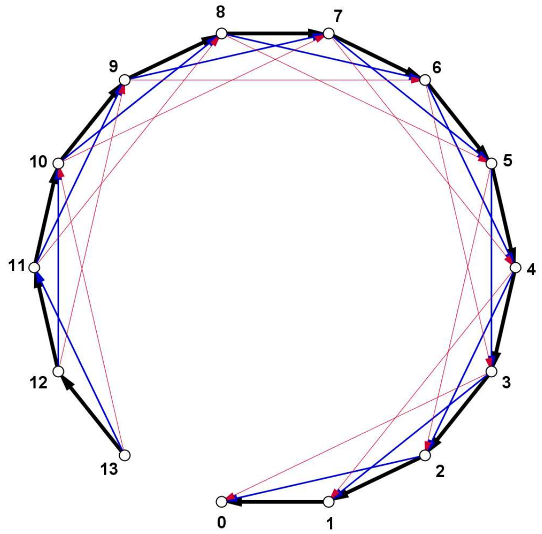


Figura 2.12: Digrafo associado ao jogo $S^{(13)}_{\{1,2,3\}}$.

a última jogada legal.

Será que um dos jogadores pode afirmar antecipadamente que vence o jogo? Isto é, existirá uma estratégia vencedora para um dos jogadores?

Para compreender bem o jogo deve-se fazer uma análise retrógrada, isto é, analisar o jogo de trás para a frente, partindo da posição final (que corresponde a ter zero feijões) até à posição inicial (que corresponde a ter vinte e três feijões), através de um esquema análogo ao que consta na Figura 2.13.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23

Figura 2.13: Esquema que ilustra todas as posições de jogadas possíveis e terminais no jogo $S^{(23)}_{\{3,4\}}$.

Não faz sentido pensar-se no jogo que se inicia com um ou dois feijões, pois não permite uma jogada legal.

Nos casos em que se inicia o jogo com três, quatro, cinco ou seis feijões ou nos casos em que após um certo número de jogadas se encontra numa das posições com três, quatro, cinco ou seis feijões o próximo jogador a jogar retira três, três ou quatro, três ou quatro, quatro feijões, respectivamente, e ganha o jogo.

No caso em que se inicia com sete, oito ou nove feijões ou após um certo número de jogadas se encontra nas posições com sete, oito ou nove feijões o próximo jogador a jogar retira três (ficando com quatro, cinco ou seis) ou retira quatro (ficando com três, quatro ou cinco) e o jogador a efectuar a jogada seguinte vence o jogo, pois irá retirar três ou quatro feijões, de forma a deixar o jogador adversário sem hipótese de jogada, uma vez que deixará na pilha de feijões apenas zero, um ou dois feijões.

No caso em que se inicia com dez, onze, doze ou treze feijões ou após um certo número de jogadas se encontra nas posições com dez, onze, doze ou treze feijões o próximo jogador a jogar retira três quando na pilha existem dez, onze ou doze feijões (ficando com sete, oito ou nove) ou retira quatro quando na pilha existem onze, doze ou treze feijões (ficando com sete, oito ou nove) e vence o jogo, pois o jogador adversário irá proceder conforme exposto anteriormente, isto é, fazer uma jogada que o leve a ficar com quatro, cinco ou seis feijões ou então com três, quatro ou cinco feijões e o próximo jogador a jogar irá retirar três ou quatro feijãos, de forma a deixar o jogador adversário sem hipótese de jogada, uma vez que deixará no monte de feijões apenas zero, um ou dois feijões. Portanto pode afirmar-se que deixar zero, um, dois, sete, oito ou nove feijões é um bom objectivo, pois garante a vitória a quem faz tal proeza.

Se se iniciar o jogo com catorze, quinze ou dezasseis feijões ou após um certo número de jogadas se encontra nas posições com catorze, quinze ou dezasseis feijões, então o próximo jogador a jogar retira três ou quatro (ficando necessáriamente com dez, onze, doze ou treze) e o jogador adversário vence o jogo, pois irá proceder conforme o descrito anteriormente para o caso de existirem dez, onze, doze ou treze feijões.

De forma semelhante se constata que se se iniciar o jogo com dezassete, dezoito, dezanove ou vinte feijões ou após um certo número de jogadas se encontra nas posições com dezassete, dezoito, dezanove ou vinte feijões, então o próximo jogador a jogar retira três ou quatro feijões de forma a ficar com catorze, quinze ou dezasseis feijões e vence o jogo, pois colocou o adversário numa posição perdedora.

Conclui-se então que a estratégia vencedora consiste em jogar sempre para uma posição em que o adversário fique com zero, um, dois, sete, oito, nove, catorze, quinze ou dezasseis *feijões, pelo que o primeiro jogador a jogar terá sempre acesso a esta estratégia. Analogamente se mostra que se iniciar com vinte e um, vinte e dois ou vinte e três feijões irá dar a vitória ao segundo jogador a jogar.*

Note-se que se o jogo não se iniciar com vinte e três feijões e se iniciar com um número que não seja múltiplo de sete, múltiplo de sete mais um ou múltiplo de sete mais dois, a estratégia vencedora é exactamente a mesma, isto é, se $n = 7k$ $(k \in \mathbb{N})$ *é múltiplo de sete (*$7k+1$ *é múltiplo de sete mais um e* $7k+2$ *é múltiplo de sete mais dois) e o jogo se iniciar com* $7k+3$, $7k+4$ *ou* $7k+5$ *feijões, então o jogador que irá jogar deverá retirar três ou quatro feijões, de forma a colocar o adversário numa posição perdedora. Neste caso, numa posição em que ficaria com* $7k$, $7k+1$ *ou* $7k+2$ *feijões e, portanto, o primeiro a jogar vence o jogo. Contudo, se o jogo se iniciar com um número de feijões que seja múltiplo de sete, múltiplo de sete mais um ou múltiplo de sete mais dois, o primeiro jogador nunca vencerá pois após a sua jogada colocará o adversário numa posição vencedora que terá hipótese de aplicar a estratégia vencedora e colocar o jogador que iniciou o jogo novamente numa posição perdedora. Apresenta-se mais à frente, na Secção 2.2.4, um resultado teórico com demonstração que prova estas afirmações.*

A Figura 2.14 ilustra a situação anteriormente descrita, do jogo $S^{(23)}_{\{3,4\}}$.

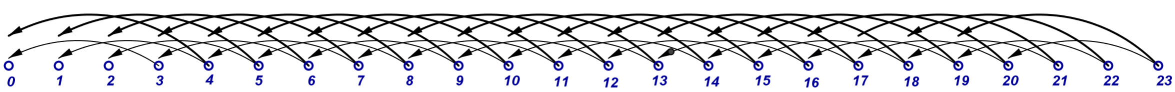


Figura 2.14: Esquema de todas as jogadas admissíveis em cada posição de jogada válida no jogo $S^{(23)}_{\{3,4\}}$.

Exemplo 2.14 *Jogo Add-Up Nim*

Analise-se uma versão do jogo Add-Up Nim que não carece de nenhum material específico.

As regras são as que se enunciam de seguida:

- escolher um número a atingir (note-se que quanto maior for o número mais tempo demorará o jogo a terminar) e escrevê-lo (ou não, pois este jogo permite ser jogado oralmente);

- o primeiro jogador escolhe o número 1, 2 ou 3;

- o segundo jogador escolhe o número 1, 2 ou 3, que adicionará ao número escolhido pelo primeiro jogador;

- alternando as jogadas, cada jogador volta a escolher o número 1, 2 ou 3, que adicionará à soma obtida até então;

- o vencedor será aquele que fizer a soma igual ao número a que os jogadores se proponham atingir, o escolhido inicialmente.

Será que um dos jogadores pode afirmar antecipadamente que vence o jogo? Isto é, existirá uma estratégia vencedora para um dos jogadores?

Para compreender bem o jogo deve fazer-se uma análise retrógrada, através de um esquema análogo ao que consta na Figura 2.15, partindo da posição final que corresponde ao número que se escolhe no início do jogo, neste caso considera-se o número escolhido igual a 13.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

Figura 2.15: Esquema do jogo Add-Up Nim que ilustra todas as possibilidades de fim de jogada para se atingir o número 13 e posição inicial.

Se se pensar nos casos em que se inicia o jogo escolhendo para número a atingir o número um, dois ou três, o primeiro jogador a jogar irá convenientemente escolher o número um, dois ou três, respectivamente, e ganha (sem que o segundo jogador tenha conseguido fazer uma jogada sequer).

No caso em que se inicia o jogo escolhendo para número a atingir o número quatro, o primeiro jogador a jogar vai escolher o número um, dois ou três e o segundo jogador vence o jogo, pois irá escolher o número três, dois ou um, respectivamente, perfazendo assim a soma quatro. Pelo que se pode afirmar que escolher como número a atingir o quatro é mau para o jogador que iniciar o jogo.

Se se escolher, para número a atingir, o número cinco, seis ou sete, o primeiro jogador a jogar vence sempre pois:

- se pretender atingir a soma cinco vai escolher o número um e o segundo jogador vai poder escolher o número um (perfazendo a soma dois), escolher o número dois (perfazendo a soma três) ou escolher o número três (perfazendo a soma quatro). Por sua vez, o jogador que tinha iniciado o jogo irá escolher convenientemente, o número três (perfazendo a soma cinco), escolher o número dois (perfazendo a soma cinco) ou escolher o número um (perfazendo a soma cinco), pelo que vencerá o jogo. Note-se que para atingir a soma de cinco (como número escolhido inicialmente) não é favorável o primeiro jogador a jogar escolher o número dois ou três na sua vez de jogar, pois o jogador adversário iria vencer escolhendo os números três e dois, respectivamente, e em ambos os casos perfazia a soma cinco.

- se pretender atingir a soma seis vai escolher o número dois e o segundo jogador vai poder escolher o número um (perfazendo a soma três), escolher o número dois (perfazendo

a soma quatro) ou escolher o número três (perfazendo a soma cinco). Por sua vez, o jogador que tinha iniciado o jogo, irá escolher convenientemente o número três (perfazendo a soma seis), escolher o número dois (perfazendo a soma seis) ou escolher o número um (perfazendo a soma seis), pelo que vencerá o jogo. Note-se que para atingir a soma de seis (como número escolhido inicialmente) não é favorável o primeiro jogador a jogar escolher o número um na sua vez de jogar, pois o jogador adversário iria vencer uma vez que seria uma situação análoga aquela que tem como objectivo atingir o número cinco (pois se o objectivo é chegar a seis e já tem um, é o mesmo que querer chegar a cinco partindo de zero) e verificou-se anteriormente que existe uma estratégia vencedora para quem iniciar o jogo e pretende atingir a soma cinco. Também não é favorável o primeiro jogador a jogar escolher o número três na sua vez de jogar, pois o jogador adversário iria vencer escolhendo o números três, dado que desta forma iria perfazer a soma seis.

- se pretender atingir a soma sete vai escolher o número três e o segundo jogador vai poder escolher o número um (perfazendo a soma quatro), escolher o número dois (perfazendo a soma cinco) ou escolher o número três (perfazendo a soma seis). Por sua vez, o jogador que tinha iniciado o jogo irá escolher convenientemente o número três (perfazendo a soma sete), escolher o número dois (perfazendo a soma sete) ou escolher o número um (perfazendo a soma sete), pelo que vencerá o jogo. Note-se que para atingir a soma de sete (como número escolhido inicialmente) não é favorável o primeiro jogador a jogar escolher o número um na sua vez de jogar, pois o jogador adversário iria vencer, uma vez que seria uma situação análoga aquela que tem como objectivo atingir o número seis (pois se o objectivo é chegar a sete e já tem um, é o mesmo que querer chegar a seis partindo de zero) e verificou-se anteriormente que existe uma estratégia vencedora para

quem iniciar o jogo e pretender atingir a soma seis. Também não é favorável o primeiro jogador a jogar escolher o número dois na primeira jogada, pois o jogador adversário iria vencer, por analogia aos casos anteriores.

De forma semelhante se constata que se iniciar o jogo escolhendo para número a atingir o número oito, então o primeiro jogador a jogar vai escolher o número um, dois ou três e o segundo jogador vence o jogo, pois em cada caso existirá uma estratégia vencedora que o levará à vitória, conforme se ilustra na Figura 2.16 em que se usou todas as sequências de jogadas possíveis.

Início	Jogador	N.º escolhido	Soma	Jogador	N.º escolhido	Soma	Jogador	N.º escolhido	Soma	Jogador	N.º escolhido	Soma	Jogador	N.º escolhido	Soma	Jogador	N.º escolhido	Soma	VITÓRIA
0	O 1.º a jogar	1	1	O 2.º a jogar	1	2	O que iniciou o jogo	1	3	O que precedeu o jogador que iniciou o jogo	1	4	O que iniciou o jogo	1	5	O que precedeu o jogador que iniciou o jogo	3	8	2.º
			1			2			3			4		2	6		2	8	2.º
			1			2			3			4		3	7		1	8	2.º
			1			2			3		2	5		3	8				1.º
			1			2			3		3	6		2	8				1.º
			1			2		2	4		1	5		3	8				1.º
			1			2			4		2	6		2	8				1.º
			1			2			4		3	7		1	8				1.º
			1			2		3	5		3	8							2.º
			1		2	3		1	4		1	5	O que iniciou o jogo	3	8				1.º
			1			3			4		2	6		2	8				1.º
			1			3			4		3	7		1	8				1.º
			1			3		2	5		3	8							2.º
			1			3		3	6		2	8							2.º
			1		3	4		1	5		3	8							2.º
			1			4		2	6		2	8							2.º
			1			4		3	7		1	8							2.º
0	O 1.º a jogar	2	2	O 2.º a jogar	1	3	O que iniciou o jogo	1	4	O que precedeu o jogador que iniciou o jogo	1	5	O que iniciou o jogo	3	8				1.º
			2			3		1	4		2	6		2	8				1.º
			2			3		1	4		3	7		1	8				1.º
			2			3		2	5		3	8							1.º
			2			3		3	6		2	8							1.º
			2		2	4		1	5		3	8							1.º
			2			4		2	6		2	8							1.º
			2			4		3	7		1	8							1.º
			2		3	5		1	6		2	8							1.º
			2			5		2	7		1	8							1.º
			2			5		3	8										1.º
0	O 1.º a jogar	3	3	O 2.º a jogar	1	4	O que iniciou o jogo	1	5	O que precedeu o jogador que iniciou o jogo	3	8							2.º
			3			4		2	6		2	8							2.º
			3			4		3	7		1	8							2.º
			3		2	5		1	6		2	8							2.º
			3			5		2	7		1	8							2.º
			3			5		3	8										1.º
			3		3	6		1	7		1	8							2.º
			3			6		2	8										1.º

Figura 2.16: Jogadas possíveis no jogo Add-Up Nim que se inicia escolhendo o número 8, como número a atingir.

De forma análoga se constata que se se escolher para número a atingir o número nove, *dez ou onze, então o primeiro jogador a jogar vence sempre, se se escolher para número a atingir o número 12, o primeiro jogador a jogar perde sempre. Por outro lado, se se escolher para número a atingir o número 13, o primeiro jogador a jogar vence sempre.*

Conclui-se então que a estratégia vencedora consiste em jogar sempre de forma a deixar o adversário com uma soma igual a quatro, oito ou doze. Contudo, se o jogo se iniciar com a escolha de um número a atingir que seja um múltiplo de quatro, o primeiro jogador nunca vencerá, pois após a sua jogada colocará o adversário numa posição vencedora que terá hipótese de aplicar a estratégia vencedora e colocará o jogador que iniciou o jogo novamente numa posição perdedora. Apresenta-se mais à frente, na Secção 2.2.4, um resultado teórico com demonstração que prova estas afirmações.

A Figura 2.17 esquematiza a situação anteriomente descrita e o grafo orientado correspondente é o que se ilustra na Figura 2.18.

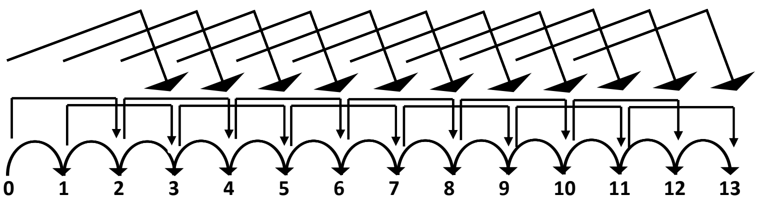


Figura 2.17: Esquema das possíveis jogadas em cada posição de jogadas no jogo Add-Up Nim que inicia com a escolha do número 13, como número a atingir.

2.2.2 Posições P e N

O jogo Nim tem algumas propriedades muito interessantes, bem como toda a ampla classe de jogos que são equivalentes ao jogo Nim. Se ambos os jogadores são conhecedores da estratégia vencedora, o jogo Nim e todos os jogos Nim disfarçados são completamente

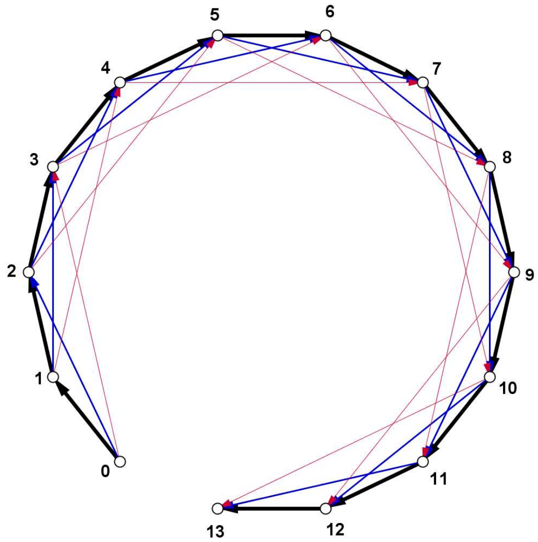


Figura 2.18: Digrafo associado ao jogo Add-Up Nim que se inicia escolhendo o número 13, como número a atingir.

deterministas, pois pode dizer-se qual o jogador que vai ganhar o jogo antes mesmo de começar.

A maneira mais fácil de compreender qual a melhor estratégia é fazer a análise retrógrada e classificar cada posição, como sendo uma das que garante a vitória.

Definição 2.15 *Num jogo combinatório imparcial, as posições que garantem a vitória ao jogador que acabou de jogar chamam-se* posições P *ou* $P-$posições. *As posições que não forem posições P dão, necessariamente, a vitória ao jogador que irá jogar de seguida e chamam-se* posições N *ou* $N-$posições.

Note-se que as iniciais P e N são tradicionais na literatura especializada e têm origem nas palavras *Previous player* e *Next player*.

Definição 2.16 *Num jogo combinatório imparcial designa-se por $\mathcal{P}$ o conjunto de todas as posições P e por $\mathcal{N}$ o conjunto de todas as posições N.*

Num jogo combinatório imparcial é sempre possível, no início, determinar as posições P e N. Basta para isso começar a classificar as posições, partindo das posições terminais e classificar as posições antecessoras segundo o algoritmo seguinte:

1. Todas as posições terminais são posições P;

2. Todas as posições das quais se atinge uma posição P, numa jogada, são posições N;

3. Todas as posições das quais só se podem atingir posições N, numa jogada, são posições P;

4. Se o passo 3 não introduziu novas posições P, o algoritmo termina aqui; caso contrário, deve ir-se de novo para o passo 2.

Outra forma de referir esta partição no conjunto das posições de um jogo imparcial é fazendo a seguinte *caracterização de* $\mathcal{P}$ e $\mathcal{N}$. As posições P e N são definidas recursivamente pelas condições seguintes:

i) Todas as posições terminais são posições P;

ii) De qualquer posição N existe pelo menos uma jogada para uma posição P;

iii) De qualquer posição P todas as jogadas conduzem a uma posição N.

Exemplo 2.17 *Retome-se o jogo de Subtracção (1) do Exemplo 2.12, o jogo* $S^{(13)}_{\{1,2,3\}}$*, e registe-se a letra* P *e* N*, no esquema da Figura 2.10, consoante garantam ou não a vitória do jogador que acabou de jogar.*

Na Figura 2.19, o número zero corresponde a uma posição P*, pois corresponde à posição terminal.*

Na Figura 2.20 os números um, dois e três correspondem a posições N *(posições não terminais), pois existem formas de jogar que nos levam para uma posição* P*, retirando*

P

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

Figura 2.19: Análise retrógrada do jogo $\mathrm{S}_{\{1,2,3\}}^{(13)}$ e classificação da posição com P se após um certo número de jogadas se encontra numa posição com zero feijões.

um, dois ou três feijões, respectivamente.

Figura 2.20: Análise retrógrada do jogo $\mathrm{S}_{\{1,2,3\}}^{(13)}$ e classificação das posições com N e P se se iniciar o jogo com um, dois ou três feijões ou nos casos em que após um certo número de jogadas se encontra numa das posições com um, dois ou três feijões.

Na Figura 2.21 o número quatro corresponde a uma posição P, pois qualquer que seja a forma de jogar, retirando um, dois ou três feijões, atinge-se uma posição N.

Figura 2.21: Análise retrógrada do jogo $\mathrm{S}_{\{1,2,3\}}^{(13)}$ e classificação das posições com N e P se se iniciar o jogo com quatro feijões ou nos casos em que após um certo número de jogadas se encontra na posição com quatro feijões.

Na Figura 2.22 os números cinco, seis e sete correspondem a posições N, pois existem formas de jogar que nos levam para uma posição P, retirando um, dois ou três feijões, respectivamente.

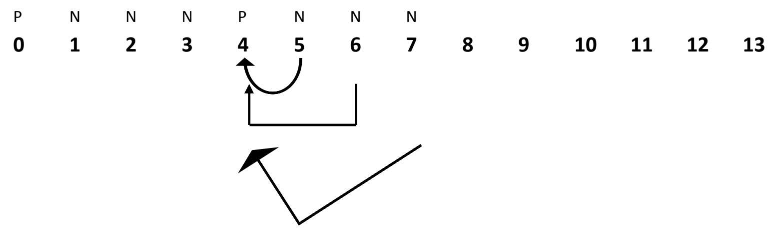


Figura 2.22: Análise retrógrada do jogo $S^{(13)}_{\{1,2,3\}}$ e classificação das posições com N e P se se iniciar o jogo com cinco, seis ou sete feijões ou nos casos em que após um certo número de jogadas se encontra numa das posições com cinco, seis ou sete feijões.

Na Figura 2.23 o número oito corresponde a uma posição P, pois qualquer que seja a forma de jogar, retirando um, dois ou três feijões, atinge-se uma posição N.

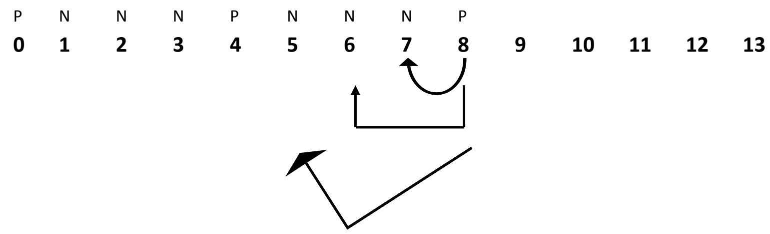


Figura 2.23: Análise retrógrada do jogo $S^{(13)}_{\{1,2,3\}}$ e classificação das posições com N e P se se iniciar o jogo com oito feijões ou nos casos em que após um certo número de jogadas se encontra na posição com oito feijões.

Na Figura 2.24 os números nove, dez e onze correspondem a posições N, pois existem formas de jogar que nos levam para uma posição P, retirando um, dois ou três feijões, respectivamente.

Na Figura 2.25 o número doze corresponde a uma posição P, pois qualquer que seja a forma de jogar, retirando um, dois ou três feijões, atinge-se uma posição N.

Na Figura 2.26 o número treze corresponde a posição N, pois existe uma forma de jogar que nos leva para uma posição P, retirando um feijão.

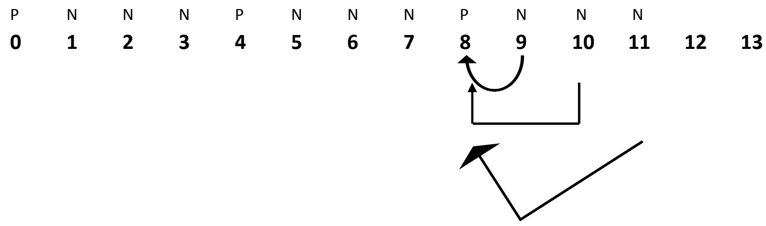


Figura 2.24: Análise retrógrada do jogo $S^{(13)}_{\{1,2,3\}}$ e classificação das posições com N e P se se iniciar o jogo com nove, dez ou onze feijões ou nos casos em que após um certo número de jogadas se encontra numa das posições com nove, dez ou onze feijões.

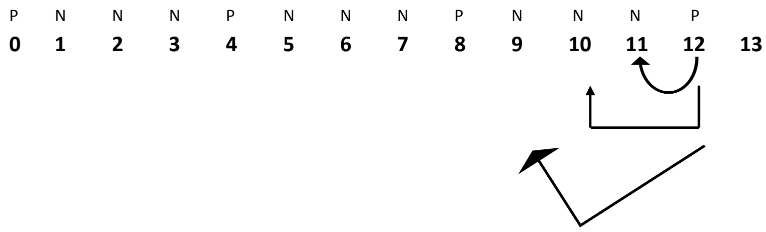


Figura 2.25: Análise retrógrada do jogo $S^{(13)}_{\{1,2,3\}}$ e classificação das posições com N e P se se iniciar o jogo com doze feijões ou nos casos em que após uma jogadas se encontra na posição com doze feijões.

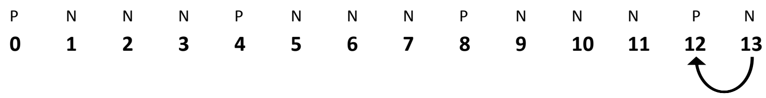


Figura 2.26: Análise retrógrada do jogo $S^{(13)}_{\{1,2,3\}}$ e classificação das posições com N e P se se iniciar o jogo com treze feijões.

Na Figura 2.27 registam-se todas as posições N e P do jogo $S^{(13)}_{\{1,2,3\}}$.

P	N	N	N	P	N	N	N	P	N	N	N	P	N
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**

Figura 2.27: Análise retrógrada do jogo $\mathrm{S}^{(13)}_{\{1,2,3\}}$ e classificação das posições com N e P.

Viu-se que as posições P são 0, 4, 8, 12 e que as posições N são 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13 . Tem-se então

$$\mathcal{P} = \{0, 4, 8, 12\}$$

e

$$\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13\}.$$

Exemplo 2.18 *Retome-se o jogo de Subtracção (2) do Exemplo 2.13, o jogo $S^{(23)}_{\{3,4\}}$, e registe-se a letra P e N, no esquema da Figura 2.13, consoante garantam ou não a vitória do jogador que acabou de jogar.*

Na Figura 2.28 os números zero, um e dois correspondem a posições P, pois correspondem a posições terminais.

P	**P**	**P**																					
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**

Figura 2.28: Análise retrógrada do jogo $\mathrm{S}^{(23)}_{\{3,4\}}$ e classificação das posições com P se após um certo número de jogadas se encontra numa das posições com zero, um ou dois feijões.

Na Figura 2.29 os números três, quatro, cinco e seis correspondem a posições N, pois existem formas de jogar que nos levam para uma posição P (neste caso posições terminais).

Na Figura 2.30 os números sete, oito e nove correspondem a posições P, pois qualquer que seja a forma de jogar atinge-se uma posição N.

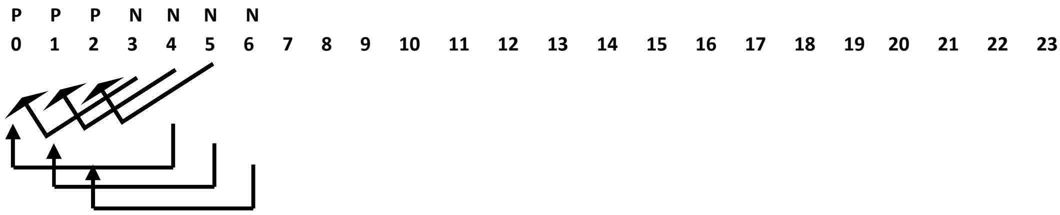


Figura 2.29: Análise retrógrada do jogo $S^{(23)}_{\{3,4\}}$ e classificação das posições com N e P se se iniciar o jogo com três, quatro, cinco ou seis feijões ou nos casos em que após um certo número de jogadas se encontra numa das posições com três, quatro, cinco ou seis feijões.

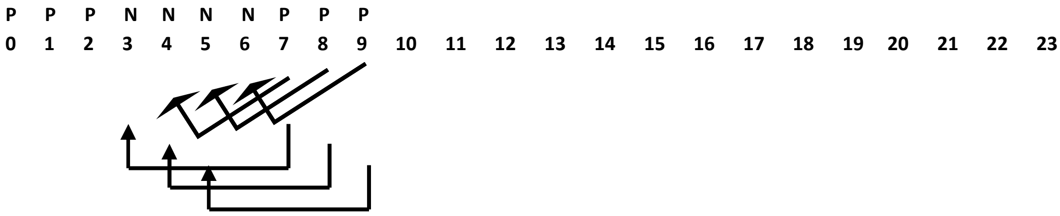


Figura 2.30: Análise retrógrada do jogo $S^{(23)}_{\{3,4\}}$ e classificação das posições com N e P se se iniciar o jogo com sete, oito ou nove feijões ou nos casos em que após um certo número de jogadas se encontra numa das posições com sete, oito ou nove feijões.

Na Figura 2.31 os números dez, onze, doze e treze correspondem a posições N, pois existem formas de jogar que nos levam para uma posição P.

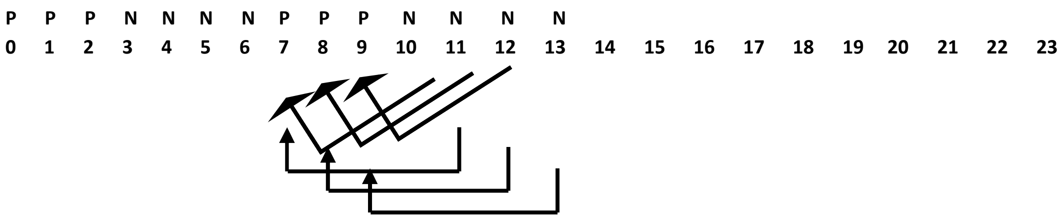


Figura 2.31: Análise retrógrada do jogo $S^{(23)}_{\{3,4\}}$ e classificação das posições com N e P se se iniciar o jogo com dez, onze, doze ou treze feijões ou nos casos em que após um certo número de jogadas se encontra numa das posições com dez, onze, doze ou treze feijões.

Na Figura 2.32 os números catorze, quinze e dezasseis correspondem a posições P, pois qualquer que seja a forma de jogar atinge-se uma posição N.

Na Figura 2.33 os números dezassete, dezoito, dezanove e vinte correspondem a

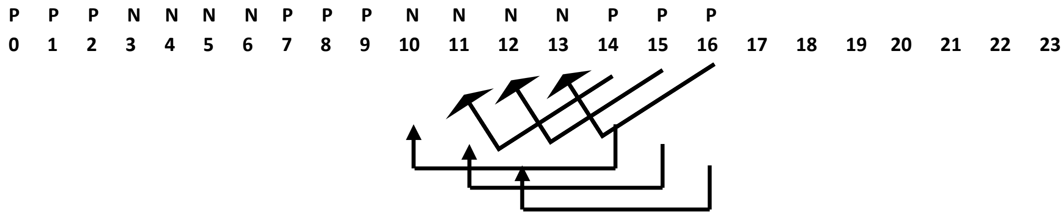


Figura 2.32: Análise retrógrada do jogo $S^{(23)}_{\{3,4\}}$ e classificação das posições com N e P se se iniciar o jogo com catorze, quinze ou dezasseis feijões ou nos casos em que após um certo número de jogadas se encontra numa das posições com catorze, quinze ou dezasseis feijões.

posições N, pois existem formas de jogar que nos levam para uma posição P.

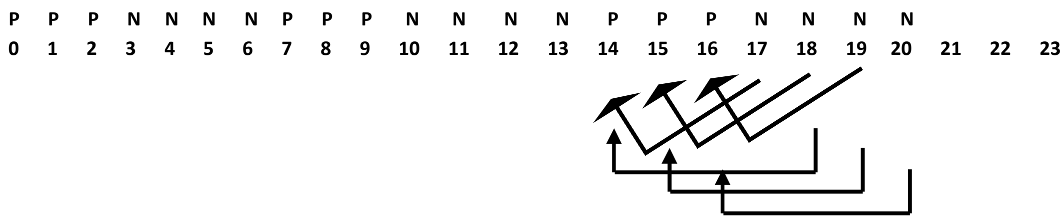


Figura 2.33: Análise retrógrada do jogo $S^{(23)}_{\{3,4\}}$ e classificação das posições com N e P se se iniciar o jogo com dezassete, dezoito, dezanove ou vinte feijões ou nos casos em que após um certo número de jogadas se encontra numa das posições com dezassete, dezoito, dezanove ou vinte feijões.

Na Figura 2.34 os números vinte e um, vinte e dois e vinte e três correspondem a posições P, pois qualquer que seja a forma de jogar atinge-se uma posição N.

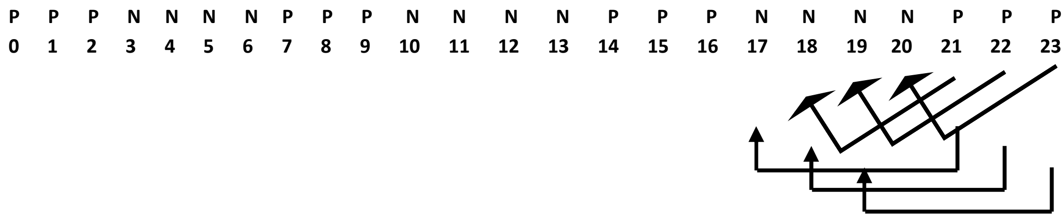


Figura 2.34: Análise retrógrada do jogo $S^{(23)}_{\{3,4\}}$ e classificação das posições com N e P se se iniciar o jogo com vinte e um, vinte e dois ou vinte e três feijões.

Na Figura 2.35 registam-se todas as posições N e P do jogo o $S^{(23)}_{\{3,4\}}$.

P	**P**	**P**	**N**	**N**	**N**	**N**	**P**	**P**	**P**	**N**	**N**	**N**	**N**	**P**	**P**	**P**	**N**	**N**	**N**	**N**	**P**	**P**	**P**
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**

Figura 2.35: Análise retrógrada do jogo $S_{\{3,4\}}^{(23)}$ e classificação das posições com N e P.

Viu-se que as posições P são 0, 1, 2, 7, 8, 9, 14, 15, 16, 21, 22, 23 e que as posições N são 3, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 13, 17, 18, 19, 20. Tem-se então

$$\mathcal{P} = \{0, 1, 2, 7, 8, 9, 14, 15, 16, 21, 22, 23\}$$

e

$$\mathcal{N} = \{3, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 13, 17, 18, 19, 20\}\,.$$

Exemplo 2.19 *Jogo Rainha Branca (1)*

Analise-se o jogo Rainha Branca que necessita de um tabuleiro quadrangular 8×8 *e de uma peça, chamada rainha branca ou abreviadamente rainha (note-se que este é um caso mais simples da versão do jogo da rainha, pois o jogo pode ser jogado com um tabuleiro de outras dimensões, isto é, de* $m \times m$, *com* $m \in \mathbb{N}$ *e ter até* n *peças iguais, com* $n \in \mathbb{N}$ *em número finito). Inicia-se o jogo com a peça sobre uma das casas do tabuleiro, numa posição escolhida aleatoriamente e cada jogada consiste em movimentar a peça para norte, oeste ou noroeste, o número de casas que se quiser (a Figura 2.36 é um exemplo de um taluleiro na posição inicial com a indicação de todas as hipóteses de jogada). Perde quem não conseguir fazer uma jogada legal, isto é, vence quem conseguir colocar a rainha na casa do canto superior esquerdo do tabuleiro.*

Será que um dos jogadores pode afirmar antecipadamente que vence o jogo? Isto é, existirá uma estratégia vencedora para um dos jogadores?

Analisa-se de seguida as hipótese de jogada iniciando com a peça da rainha na posição indicada no tabuleiro da Figura 2.36.

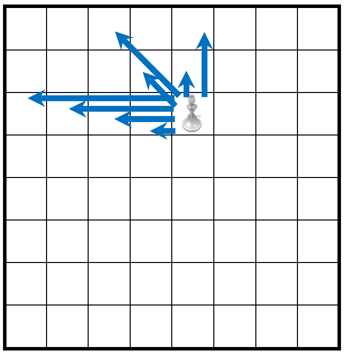


Figura 2.36: Exemplo de um taluleiro do jogo Rainha Branca (1) na posição inicial com a indicação de todas as hipóteses de jogada.

Começe-se, por uma questão de facilitar a linguagem, a numerar as casas do tabuleiro, na horizontal, da esquerda para a direita e na vertical, de cima para baixo, com os números de zero a sete. Assim, a casa que se quer atingir, aquela que não permite ao adversário fazer mais nenhuma jogada legal é a casa na linha e na coluna zero, que se denota por $(0,0)$*, e a casa de onde se está a iniciar o jogo, neste exemplo, é a casa na linha dois e na coluna quatro, que se denota por* $(2,4)$*. Neste jogo usa-se a notação* (n,m) *para designar a posição da peça no tabuleiro, onde* n*, a primeira componente, diz respeito à numeração que se tem na vertical ou à linha em que se encontra e* m*, a segunda componente, diz respeito à numeração que se tem na horizontal ou à coluna em que se encontra.*

Divida-se a análise em três casos, de acordo com as jogadas com analogias.

1.º Caso:

O primeiro jogador a jogar movimenta a rainha para uma das seguintes casas: $(2,0)$, $(2,2)$, $(0,2)$ *ou* $(0,4)$ *e, posteriormente, o segundo jogador a jogar movimenta a rainha para a casa* $(0,0)$ *e vence, conforme se ilustra na Figura 2.37, onde as setas de cor verde referem-se às hipóteses de jogadas a efectuar pelo jogador que iniciou o jogo e as setas de cor azul referem-se às hipóteses de jogadas a efectuar pelo segundo jogador a jogar. Logo,* *a escolha de uma destas casas, por parte do jogador que iniciou o jogo não é uma boa opção.*

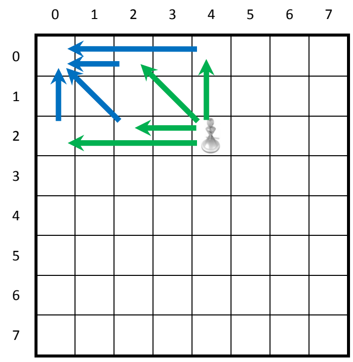


Figura 2.37: Exemplo de um tabuleiro com a indicação de todas as hipóteses de jogada enunciadas no 1.º Caso, do Exemplo 2.19, do jogo Rainha Branca (1).

2.º Caso:

O primeiro jogador movimenta a rainha para uma das seguintes casas: $(2,3)$, $(1,3)$ *ou* $(1,4)$ *e, posteriormente, o segundo jogador a jogar movimenta a rainha para duas das seguintes casas estratégicas:*

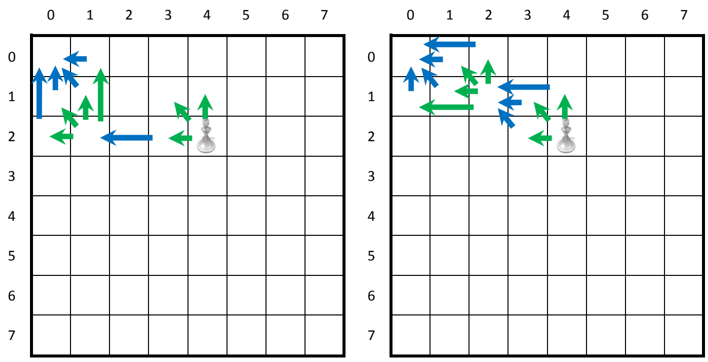
- a casa $(2,1)$ *se a rainha estiver em* $(2,3)$*, o que faz com que o jogador que iniciou o jogo movimente a rainha para uma das casas* $(2,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ *ou* $(0,1)$ *perdendo o jogo, pois o jogador que efectuou a segunda jogada vencerá ao movimentar a rainha directamente para a casa* $(0,0)$*, conforme se ilustra na Figura 2.38 (a), onde as setas de cor verde, junto à rainha referem-se às hipóteses de jogada a efectuar pelo jogador que iniciou o jogo e junto à casa* $(2,1)$ *referem-se às hipóteses de jogada a efectuar pelo mesmo jogador após o jogador a que cabe a segunda jogada ter efectuado a sua jogada, escolhendo movimentar a rainha da casa* $(2,3)$ *para a casa* $(2,1)$ *representado pela seta de cor azul que se encontra junto a essa casa. As setas de cor azul que se encontram junto à casa* $(0,0)$ *referem-se às hipóteses de jogada do jogador a que coube a segunda jogada e, consequentemente, a quarta*

jogada depois de iniciarem o jogo seguindo as jogadas descritas anteriormente. Logo, a escolha da casa $(2,1)$ *por parte do segundo jogador não é uma boa opção para o jogador que iniciou o jogo, pelo que este não deverá jogar para a casa* $(2,3)$*;*

- a casa $(1,2)$ *se a rainha estiver em* $(2,3)$*,* $(1,3)$ *ou* $(1,4)$*, o que faz com que o jogador que iniciou o jogo movimente a rainha para uma das casas* $(1,0)$*,* $(1,1)$*,* $(0,1)$ *ou* $(0,2)$ *perdendo o jogo, pois o jogador adversário vencerá ao movimentar a rainha directamente para a casa* $(0,0)$*, conforme se ilustra na Figura 2.38 (b), onde as setas de cor verde, junto à rainha referem-se às hipóteses de jogada a efectuar pelo jogador que iniciou o jogo e junto à casa* $(1,2)$ *referem-se às hipóteses de jogada a efectuar pelo mesmo jogador após o jogador a que cabe a segunda jogada ter efectuado a sua jogada, escolhendo movimentar a rainha de uma das casas* $(2,3)$*,* $(1,3)$ *ou* $(1,4)$ *para a casa* $(1,2)$ *representado pelas setas de cor azul que se encontram junto às casas referidas. As setas de cor azul que se encontram junto à casa* $(0,0)$ *referem-se às hipóteses de jogada do jogador a que coube a segunda jogada e, consequentemente, a quarta jogada depois de iniciarem o jogo seguindo as jogadas descritas anteriormente. Logo, a escolha da casa* $(1,2)$ *por parte do segundo jogador não é uma boa opção para o jogador que iniciou o jogo, pelo que este não deverá jogar para as casas* $(2,3)$*,* $(1,3)$ *e* $(1,4)$*.*

3.º Caso:

O primeiro jogador movimenta a rainha para a casa $(2,1)$ *e, posteriormente, o segundo jogador movimenta a rainha para uma das casas* $(2,0)$*,* $(1,0)$*,* $(1,1)$ *ou* $(0,1)$ *e o jogador que iniciou o jogo vencerá ao movimentar a rainha directamente para a casa* $(0,0)$*, conforme se ilustra na Figura 2.39, onde a seta de cor verde, junto à rainha refere-se à hipótese de jogada a efectuar pelo jogador que iniciou o jogo e movimentou a rainha da casa* $(2,4)$



(a) (b)

Figura 2.38: (a) e (b) Exemplo de um tabuleiro com a indicação de todas as hipóteses de jogada enunciadas no 2.º Caso, do Exemplo 2.19, do jogo Rainha Branca (1).

para a casa $(2, 1)$ *e as setas de cor azul referem-se às hipóteses de jogada a efectuar pelo jogador a que cabe a segunda jogada. As setas de cor verde que se encontram junto à casa* $(0, 0)$ *referem-se às hipóteses de jogada do jogador que iniciou o jogo e, consequentemente, à terceira jogada depois de iniciarem o jogo seguindo as jogadas descritas anteriormente. Logo, a escolha da casa* $(2, 1)$ *por parte do jogador que iniciou o jogo é uma boa opção para vencer o jogo.*

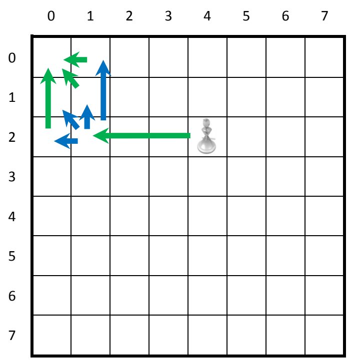


Figura 2.39: Exemplo de um tabuleiro com a indicação de todas as hipóteses de jogada enunciadas no 3.º Caso, do Exemplo 2.19, do jogo Rainha Branca (1).

Exemplo 2.20 *Considere-se o jogo Rainha Branca que necessita de um tabuleiro quadrangular* 8×8 *e de uma rainha. Registe-se a letra* P *e* N*, nas casas do tabuleiro do jogo, consoante garantam ou não a vitória do jogador que acabou de jogar, supondo que o jogo inicia-se com a rainha sobre uma das casas do tabuleiro e cada jogada consiste em movimentar a rainha para norte, oeste ou noroeste, o número de casas que se quiser. Perde quem não conseguir fazer uma jogada legal, isto é, vence quem conseguir colocar a rainha na casa do canto superior esquerdo do tabuleiro.*

Na Figura 2.40 (a) a casa (0,0) corresponde a uma posição P*, pois corresponde à posição terminal. Na Figura 2.40 (b) as casas* $(0, m)$ *e* $(n, 0)$*, com* $n, m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$*, e as casas* (n, m)*, onde* $n = m$*, com* $n, m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$*, correspondem a uma posição* N*, pois existem formas de jogar que nos levam para uma posição* P *(neste caso à posição terminal), movendo a rainha branca para oeste, norte ou noroeste tantas casas quantas as necessárias até atingir a casa* $(0, 0)$*. Na Figura 2.40 (c) as casas* $(1, 2)$ *e* $(2, 1)$ *correspondem a posições* P*, pois todas as formas de jogar levam para uma posição* N*, movendo a rainha branca no primeiro caso para oeste, norte ou noroeste, até duas, uma ou uma casa, respectivamente, e movendo a rainha branca no segundo caso para oeste, norte ou noroeste, uma, até duas ou uma casa, respectivamente. Na Figura 2.40 (d) as casas* (n, m)*, com* $n \in \{1, 2\}$ *e* $m \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$*, as casas* $(n, n + 1)$*, com* $n \in \{3, 4, 5, 6\}$*, as casas* (n, m)*, com* $n \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$ *e* $m \in \{1, 2\}$*, e as casas* $(n, n-1)$*, com* $n \in \{4, 5, 6, 7\}$*, correspondem a posições* N*, pois existem formas de jogar que levam para uma posição* P*, movendo a rainha branca para oeste, noroeste, norte e noroeste tantas casas quantas as necessárias até atingir a casa que corresponda a uma posição* P *(casas* $(1, 2)$ *ou* $(2, 1)$*). Nos casos em que a rainha se encontre nas casas* $(2, 3)$ *ou* $(3, 2)$*, também se consegue uma* *forma de jogar de modo a levá-la para as casas* $(1, 2)$ *e* $(2, 1)$*, movendo a rainha uma casa para noroeste em ambos os casos. Na Figura 2.40 (e) as casas* $(3, 5)$ *e* $(5, 3)$ *correspondem a posições* P*, pois todas as formas de jogar levam para uma posição* N*, movendo a rainha branca num qualquer lance legal. Na Figura 2.40 (f) as casas* $(3, 6), (3, 7)$ *e* $(4, 6), (5, 7)$ *e* $(6, 3), (7, 3)$ *e* $(6, 4), (7, 5)$ *correspondem a posições* N*, pois existem formas de jogar que levam para uma posição* P*, movendo a rainha branca para oeste, noroeste, norte e noroeste, uma ou duas casas, de forma a atingir as casas que correspondam a uma posição* P *(casas* $(3, 5)$ *ou* $(5, 3)$*). Na Figura 2.41 as casas* $(4, 7)$ *e* $(7, 4)$ *correspondem a posições* P*, pois todas as formas de jogar levam para uma posição* N*, movendo a rainha branca num qualquer lance legal. Desta forma, registam-se na Figura 2.41 todas as posições* P *e* N *do jogo.*

Viu-se que as posições P *são* $(0, 0), (1, 2), (2, 1), (3, 5), (5, 3), (4, 7)$ *e* $(7, 4)$*. Tem-se então*

$$\mathcal{P} = \{(0, 0), (1, 2), (2, 1), (3, 5), (5, 3), (4, 7), (7, 4)\}$$

e

$$\mathcal{N} = \{(n, m) : n, m \text{ são inteiros não negativos inferiores ou iguais a sete}\} \setminus \mathcal{P}.$$

2.2.3 Função Grundy

Os jogos sobre grafos podem ser analisados classificando os seus vértices P e N, a partir dos vértices terminais, por um processo semelhante ao descrito anteriormente. Contudo, defenir-se-á uma função que dará informação adicional e permitirá jogar vários jogos ao mesmo tempo, a Função Grundy.

Fixe-se o seguinte conceito, para definir a função referida anteriormente.

P							

(a)

P	N	N	N	N	N	N	N
N	N						
N		N					
N			N				
N				N			
N					N		
N						N	
N							N

(b)

P	N	N	N	N	N	N	N
N	N	**P**					
N	**P**	N					
N			N				
N				N			
N					N		
N						N	
N							N

(c)

P	N	N	N	N	N	N	N
N	N	**P**	N	N	N	N	N
N	**P**	N	N	N	N	N	N
N	N	N	N	N			
N	N	N	N	N	N		
N	N	N		N	N	N	
N	N	N			N	N	N
N	N	N				N	N

(d)

P	N	N	N	N	N	N	N
N	N	**P**	N	N	N	N	N
N	**P**	N	N	N	N	N	N
N	N	N	N	N	**P**		
N	N	N	N	N	N		
N	N	N	**P**	N	N	N	
N	N	N			N	N	N
N	N	N				N	N

(e)

P	N	N	N	N	N	N	N
N	N	**P**	N	N	N	N	N
N	**P**	N	N	N	N	N	N
N	N	N	N	N	**P**	N	N
N	N	N	N	N	N	N	
N	N	N	**P**	N	N	N	N
N	N	N	N	N	N	N	N
N	N	N	N		N	N	N

(f)

Figura 2.40: (a), (b), (c), (d), (e) e (f) Análise retrógrada do jogo do Exemplo 2.19, Rainha Branca, e classificação das posições com N e P .

P	N	N	N	N	N	N	N
N	N	**P**	N	N	N	N	N
N	**P**	N	N	N	N	N	N
N	N	N	N	N	**P**	N	N
N	N	N	N	N	N	N	**P**
N	N	N	**P**	N	N	N	N
N	N	N	N	N	N	N	N
N	N	N	N	**P**	N	N	N

Figura 2.41: Classificação das posições com N e P das casas do tabuleiro do jogo do Exemplo 2.19, Rainha Branca.

Definição 2.21 *Chama-se* mínimo excluído *de um conjunto de números inteiros não negativos, A, e representa-se por* mexA, *ao menor inteiro não negativo que não pertence a A.*

Exemplo 2.22 *Sejam $A = \{0, 2, 3, 16\}$, $B = \{1, 2, 3, 6\}$ e $C = \{0, 1, 2, 13, 16\}$. Então, $mexA = 1$, $mexB = 0$ e $mexC = 3$.*

Definição 2.23 *Chama-se* Função Sprague-Grundy *(ou apenas* Função Grundy*) de um grafo orientado $K = (X, F)$ sem lacetes à função $g : X(K) \to \mathbb{N}_0$ definida por*

$$g(x) = \min \{n \in \mathbb{N}_0 : n \neq g(y) \ \ e \ y \in F(x)\}$$

ou

$$g(x) = mex \{g(y) : y \in F(x)\}.$$

O valor da Função Grundy calcula-se recursivamente, isto é, para cada x, o valor $g(x)$ depende dos valores que $g(y)$ toma quando y percorre $F(x)$, onde $F(x)$ é o conjunto das posições para as quais se pode jogar a partir de x. Deste modo, começa-se esta recursão nos vértices terminais, x, para os quais $F(x)$ é vazio e $g(x) = 0$.

Veja-se a seguir um exemplo simples, retirado de [Silva 07], onde se determina a Função Grundy de um grafo orientado.

Exemplo 2.24 *Considere-se o jogo imparcial representado pelo digrafo da Figura 2.42. O vértice D é um vértice terminal, pelo que $g(D) = 0$. Não há mais vértices terminais. Como $F(A) = \{D\}$ e conhece-se $g(D)$, pode calcular-se $g(A)$.*

Com efeito, tem-se que

$$g(A) = mex \{g(D)\} = mex \{0\} = 1.$$

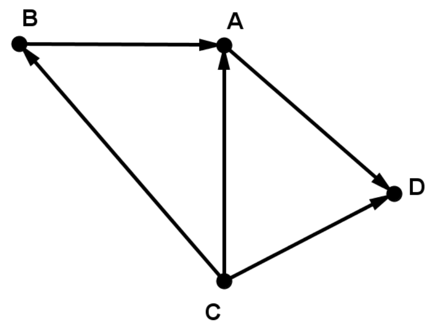


Figura 2.42: Digrafo do Exemplo 2.24.

Analogamente

$$g(B) = mex\,\{g(A)\} = mex\,\{1\} = 0.$$

Finalmente,

$$g(C) = mex\,\{g(A), g(B), g(D)\} = mex\,\{0, 1\} = 2.$$

Na Figura 2.43 tem-se o digrafo do Exemplo 2.24 com os valores da Função Grundy perto de cada vértice.

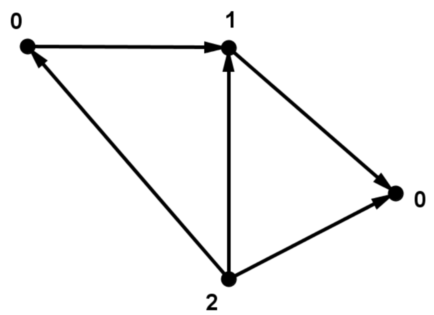


Figura 2.43: Digrafo do Exemplo 2.24 com os valores da Função Grundy.

Exemplo 2.25 *Determine-se os valores da Função Grundy do jogo Nim, de uma pilha com n feijões, com $n \in \mathbb{N}$, mas sem desenhar o grafo associado a este jogo.*

A posição terminal é 0*, portanto* $g(0) = 0$.

Como

$$F(1) = \{0\},$$

tem-se

$$g(1) = mex\,\{g(0)\} = mex\,\{0\} = 1;$$

e como

$$F(2) = \{0, 1\},$$

tem-se

$$g(2) = mex\,\{g(0), g(1)\} = mex\,\{0, 1\} = 2;$$

e como

$$F(3) = \{0, 1, 2\},$$

tem-se

$$g(3) = mex\,\{g(0), g(1), g(2)\} = mex\,\{0, 1, 2\} = 3;$$

e como

$$F(4) = \{0, 1, 2, 3\},$$

tem-se

$$g(4) = mex\,\{g(0), g(1), g(2), g(3)\} = mex\,\{0, 1, 2, 3\} = 4;$$

e assim sucessivamente. Donde, resulta o seguinte padrão:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
$g(x)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...

Note-se que, neste jogo Nim a *Função Grundy* coincide com o número de feijões que existe na pilha de feijões.

Exemplo 2.26 *Retome-se o jogo de Subtracção (1) do Exemplo 2.12, o jogo* $S^{(13)}_{\{1,2,3\}}$, *relembre-se o digrafo associado ao exemplo na Figura 2.12 e determine-se os valores da Função Grundy.*

A posição terminal é 0, *portanto* $g(0) = 0$.

Como

$$F(1) = \{0\},$$

tem-se

$$g(1) = mex\{g(0)\} = mex\{0\} = 1;$$

e como

$$F(2) = \{0, 1\},$$

tem-se

$$g(2) = mex\{g(0), g(1)\} = mex\{0, 1\} = 2;$$

e como

$$F(3) = \{0, 1, 2\},$$

tem-se

$$g(3) = mex\{g(0), g(1), g(2)\} = mex\{0, 1, 2\} = 3;$$

e como

$$F(4) = \{1, 2, 3\},$$

tem-se

$$g(4) = mex\{g(1), g(2), g(3)\} = mex\{1, 2, 3\} = 0;$$

e como

$$F(5) = \{2, 3, 4\},$$

tem-se

$$g(5) = mex\{g(2), g(3), g(4)\} = mex\{2, 3, 0\} = 1;$$

e como

$$F(6) = \{3, 4, 5\},$$

tem-se

$$g(6) = mex\{g(3), g(4), g(5)\} = mex\{3, 0, 1\} = 2;$$

e como

$$F(7) = \{4, 5, 6\},$$

tem-se

$$g(7) = mex\{g(4), g(5), g(6)\} = mex\{0, 1, 2\} = 3;$$

e como

$$F(8) = \{5, 6, 7\},$$

tem-se

$$g(8) = mex\{g(5), g(6), g(7)\} = mex\{1, 2, 3\} = 0;$$

e de forma análoga se obtém

$$g(9) = 1; g(10) = 2; g(11) = 3; g(12) = 0 \text{ e } g(13) = 1.$$

Organizando os valores tem-se

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$g(x)$	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1

Comparando com a análise anterior deste jogo, ver Exemplo 2.17, pode observar-se que todas as posições P*, isto é,*

$$\mathcal{P} = \{0, 4, 8, 12\},$$

são exactamente aquelas que anulam a Função Grundy ($g(0) = g(4) = g(8) = g(12) = 0$*).*

A estratégia vencedora para este jogo consiste em jogar para uma posição x *tal que* $g(x) = 0$*, isto é, como se viu anteriormente para uma posição pertencente ao conjunto* $\mathcal{P} = \{0, 4, 8, 12\}$*.*

Observação 2.27 *O facto das posições* P *coincidirem com as posições que anulam a Função Grundy surge intuitivamente da definição da Função Grundy e da caracterização de* $\mathcal{P}$ *e* $\mathcal{N}$*:*

1. $g(x) = 0$ se x for terminal;
2. Se $g(x) = 0$ e $y \in F(x)$, então $g(y) \neq 0$;
3. Se $g(x) \neq 0$, então, para algum $z \in F(x)$, tem-se $g(z) = 0$.

Exemplo 2.28 *Retome-se o jogo de Subtracção (2) do Exemplo 2.13,* $S^{(23)}_{\{3,4\}}$*, relembre-se o esquema associado ao exemplo na Figura 2.14 e determine-se os valores da Função Grundy.*

As posições terminais são $0, 1, 2$*, portanto* $g(0) = g(1) = g(2) = 0$*.*

Como

$$F(3) = \{0\},$$

tem-se

$$g(3) = mex\,\{g(0)\} = mex\,\{0\} = 1;$$

e como

$$F(4) = \{0, 1\},$$

tem-se

$$g(4) = mex\{g(0), g(1)\} = mex\{0\} = 1;$$

e como

$$F(5) = \{1, 2\},$$

tem-se

$$g(5) = mex\{g(1), g(2)\} = mex\{0\} = 1;$$

e como

$$F(6) = \{2, 3\},$$

tem-se

$$g(6) = mex\{g(2), g(3)\} = mex\{0, 1\} = 2;$$

e como

$$F(7) = \{3, 4\},$$

tem-se

$$g(7) = mex\{g(3), g(4)\} = mex\{1\} = 0;$$

e como

$$F(8) = \{4, 5\},$$

tem-se

$$g(8) = mex\{g(4), g(5)\} = mex\{1\} = 0;$$

e como

$$F(9) = \{5, 6\},$$

tem-se

$$g(9) = mex\,\{g(5), g(6)\} = mex\,\{1, 2\} = 0;$$

e como

$$F(10) = \{6, 7\},$$

tem-se

$$g(10) = mex\,\{g(6), g(7)\} = mex\,\{2, 0\} = 1;$$

e assim sucessivamente.

Organizando os valores tem-se

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
$g(x)$	0	0	0	1	1	1	2	0	0	0	1	1	1	2	0	0	0	1	1	1	2	0	0	0

Comparando com a análise anterior deste jogo, ver Exemplo 2.18, pode observar-se que todas as posições P, isto é,

$$\mathcal{P} = \{0, 1, 2, 7, 8, 9, 14, 15, 16, 21, 22, 23\},$$

são exactamente aquelas que anulam a Função Grundy ($g(0) = g(1) = g(2) = g(7) = g(8) = g(9) = g(14) = g(15) = g(16) = g(21) = g(22) = g(23) = 0$).

A estratégia vencedora para este jogo consiste em jogar para uma posição x tal que $g(x) = 0$, isto é, como se viu anteriormente para uma posição pertencente ao conjunto $\mathcal{P} = \{0, 1, 2, 7, 8, 9, 14, 15, 16, 21, 22, 23\}$.

Definição 2.29 *Chama-se* Função Sprague-Grundy do jogo Rainha Branca *(ou apenas* Função Grundy do jogo Rainha Branca*) à função* $\mathcal{G} : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ *definida por*

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(x,y) \quad = \quad & mex\ \left(\left\{\mathcal{G}(x',y) : 0 \leq x' < x\right\} \cup \left\{\mathcal{G}(x,y') : 0 \leq y' < y\right\} \cup \right.\\ & \left.\{\mathcal{G}(x-k,y-k) : 1 \leq k \leq \min\{x,y\}\}\right).\end{aligned}$$

Exemplo 2.30 *Retome-se o jogo Rainha Branca do Exemplo 2.20, determine-se os valores da sua Função Grundy e, posteriormente, coloquem-se os valores nas respectivas casas do tabuleiro.*

A posição terminal é $(0,0)$*, pois o jogo termina quando a rainha se encontra na casa do canto superior esquerdo do tabuleiro e naturalmente tem-se que a Função Grundy do jogo Rainha Branca na casa* $(0,0)$ *é zero, isto é,* $\mathcal{G}(0,0) = 0$*. Coloque-se o valor da Função Grundy no tabuleiro do jogo conforme se ilustra na Figura 2.44.*

0							

Figura 2.44: Tabuleiro do jogo Rainha Branca, do Exemplo 2.20, com o valor da Função Grundy na casa $(0,0)$.

Como

$$F(0,1) = \{(0,0)\},$$

tem-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(0,1) &= mex\ \left(\left\{\mathcal{G}(x',1) : 0 \leq x' < 0\right\} \cup \left\{\mathcal{G}(0,y') : 0 \leq y' < 1\right\} \cup \right.\\
&\quad \left.\left\{\mathcal{G}(0-k,1-k) : 1 \leq k \leq \min\{0,1\}\right\}\right) = \\
&= mex\ \left(\left\{\mathcal{G}(x',1) : 0 \leq x' < 0\right\} \cup \left\{\mathcal{G}(0,y') : 0 \leq y' < 1\right\} \cup \right.\\
&\quad \left.\left\{\mathcal{G}(0-k,1-k) : 1 \leq k \leq 0\right\}\right) = \\
&= mex\ \left(\left\{\mathcal{G}(0,0)\right\}\right) = \\
&= mex\ \left(\{0\}\right) = \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Coloque-se o valor da Função Grundy no tabuleiro do jogo conforme se ilustra na Figura 2.45.

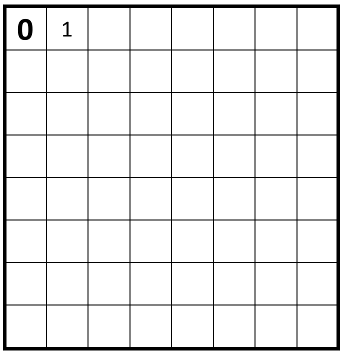


Figura 2.45: Tabuleiro do jogo Rainha Branca, do Exemplo 2.20, com os valores da Função Grundy nas casas $(0,0)$ e $(0,1)$.

Como

$$F(1,0) = \{(0,0)\},$$

tem-se

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}(1,0) &= mex\ \left(\left\{\mathcal{G}(x',0) : 0 \leq x' < 1\right\} \cup \left\{\mathcal{G}(1,y') : 0 \leq y' < 0\right\} \cup \right.\\
&\quad \left.\{\mathcal{G}(1-k,0-k) : 1 \leq k \leq \min\{1,0\}\}\right) = \\
&= mex\ \left(\left\{\mathcal{G}(x',0) : 0 \leq x' < 1\right\} \cup \left\{\mathcal{G}(1,y') : 0 \leq y' < 0\right\} \cup \right.\\
&\quad \left.\{\mathcal{G}(1-k,0-k) : 1 \leq k \leq 0\}\right) = \\
&= mex\ (\{\mathcal{G}(0,0)\}) = \\
&= mex\ (\{0\}) = \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Coloque-se o valor da Função Grundy no tabuleiro do jogo conforme se ilustra na Figura 2.46.

0	1						
1							

Figura 2.46: Tabuleiro do jogo Rainha Branca, do Exemplo 2.20, com os valores da Função Grundy nas casas $(0,0)$, $(0,1)$ e $(1,0)$.

Como

$$F(0,2) = \{(0,0),(0,1)\},$$

tem-se

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}(0,2) &= mex\ \left(\left\{\mathcal{G}(x',2) : 0 \leq x' < 0\right\} \cup \left\{\mathcal{G}(0,y') : 0 \leq y' < 2\right\} \cup \right. \\
&\quad \left. \left\{\mathcal{G}(0-k, 2-k) : 1 \leq k \leq \min\{0,2\}\right\}\right) = \\
&= mex\ \left(\left\{\mathcal{G}(x',2) : 0 \leq x' < 0\right\} \cup \left\{\mathcal{G}(0,y') : 0 \leq y' < 2\right\} \cup \right. \\
&\quad \left. \left\{\mathcal{G}(0-k, 2-k) : 1 \leq k \leq 0\right\}\right) = \\
&= mex\ \left(\{\mathcal{G}(0,0)\} \cup \{\mathcal{G}(0,1)\}\right) = \\
&= mex\ \left(\{0,1\}\right) = \\
&= 2.
\end{aligned}
$$

Coloque-se o valor da Função Grundy no tabuleiro do jogo conforme se ilustra na Figura 2.47.

0	1	2					
1							

Figura 2.47: Tabuleiro do jogo Rainha Branca, do Exemplo 2.20, com os valores da Função Grundy nas casas $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ e $(0,2)$.

Como

$$F(1,1) = \{(0,0), (0,1), (1,0)\},$$

tem-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(1,1) &= mex\ \left(\left\{\mathcal{G}(x',1) : 0 \leq x' < 1\right\} \cup \left\{\mathcal{G}(1,y') : 0 \leq y' < 1\right\} \cup\right.\\
&\quad \left.\{\mathcal{G}(1-k,1-k) : 1 \leq k \leq \min\{1,1\}\}\right) =\\
&= mex\ \left(\left\{\mathcal{G}(x',1) : 0 \leq x' < 1\right\} \cup \left\{\mathcal{G}(1,y') : 0 \leq y' < 1\right\} \cup\right.\\
&\quad \left.\{\mathcal{G}(1-k,1-k) : 1 \leq k \leq 1\}\right) =\\
&= mex\ (\{\mathcal{G}(0,1)\} \cup \{\mathcal{G}(1,0)\} \cup \{\mathcal{G}(0,0)\}) =\\
&= mex\ (\{1,1,0\}) =\\
&= 2.
\end{aligned}$$

Coloque-se o valor da Função Grundy no tabuleiro do jogo conforme se ilustra na Figura 2.48.

0	1	2					
1	2						

Figura 2.48: Tabuleiro do jogo Rainha Branca, do Exemplo 2.20, com os valores da Função Grundy nas casas $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,2)$ e $(1,1)$.

Como

$$F(2,0) = \{(0,0),(1,0)\},$$

tem-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(2,0) &= mex\ \left(\left\{\mathcal{G}(x',0) : 0 \leq x' < 2\right\} \cup \left\{\mathcal{G}(2,y') : 0 \leq y' < 0\right\} \cup\right. \\
&\quad \left.\left\{\mathcal{G}(2-k,0-k) : 1 \leq k \leq \min\left\{2,0\right\}\right\}\right) = \\
&= mex\ \left(\left\{\mathcal{G}(x',0) : 0 \leq x' < 2\right\} \cup \left\{\mathcal{G}(2,y') : 0 \leq y' < 0\right\} \cup\right. \\
&\quad \left.\left\{\mathcal{G}(2-k,0-k) : 1 \leq k \leq 0\right\}\right) = \\
&= mex\ \left(\left\{\mathcal{G}(0,0)\right\} \cup \left\{\mathcal{G}(1,0)\right\}\right) = \\
&= mex\ \left(\left\{0,1\right\}\right) = \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Coloque-se o valor da Função Grundy no tabuleiro do jogo conforme se ilustra na Figura 2.49.

0	1	2					
1	2						
2							

Figura 2.49: Tabuleiro do jogo Rainha Branca, do Exemplo 2.20, com os valores da Função Grundy nas casas $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,2)$, $(1,1)$ e $(2,0)$.

Como

$$F(0,3) = \left\{(0,0),(0,1),(0,2)\right\},$$

tem-se

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}(0,3) &= mex\ \left(\left\{\mathcal{G}(x',3) : 0 \leq x' < 0\right\} \cup \left\{\mathcal{G}(0,y') : 0 \leq y' < 3\right\} \cup \right. \\
&\quad \left. \{\mathcal{G}(0-k,3-k) : 1 \leq k \leq \min\{0,3\}\}\right) = \\
&= mex\ \left(\left\{\mathcal{G}(x',3) : 0 \leq x' < 0\right\} \cup \left\{\mathcal{G}(0,y') : 0 \leq y' < 3\right\} \cup \right. \\
&\quad \left. \{\mathcal{G}(0-k,3-k) : 1 \leq k \leq 0\}\right) = \\
&= mex\ (\{\mathcal{G}(0,0)\} \cup \{\mathcal{G}(0,1)\} \cup \{\mathcal{G}(0,2)\}) = \\
&= mex\ (\{0,1,2\}) = \\
&= 3.
\end{aligned}
$$

Coloque-se o valor da Função Grundy no tabuleiro do jogo conforme se ilustra na Figura 2.50.

0	1	2	3				
1	2						
2							

Figura 2.50: Tabuleiro do jogo Rainha Branca, do Exemplo 2.20, com os valores da Função Grundy nas casas $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,2)$, $(1,1)$, $(2,0)$ e $(0,3)$.

Como

$$F(1,2) = \{(0,2),(0,1),(1,1),(1,0)\}\,,$$

tem-se

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}(1,2) &= mex\ \left(\left\{\mathcal{G}(x',2) : 0 \leq x' < 1\right\} \cup \left\{\mathcal{G}(1,y') : 0 \leq y' < 2\right\} \cup \right. \\
&\qquad \left.\{\mathcal{G}(1-k,2-k) : 1 \leq k \leq \min\{1,2\}\}\right) = \\
&= mex\ \left(\left\{\mathcal{G}(x',2) : 0 \leq x' < 1\right\} \cup \left\{\mathcal{G}(1,y') : 0 \leq y' < 2\right\} \cup \right. \\
&\qquad \left.\{\mathcal{G}(1-k,2-k) : 1 \leq k \leq 1\}\right) = \\
&= mex\ (\{\mathcal{G}(0,2)\} \cup \{\mathcal{G}(1,0)\} \cup \{\mathcal{G}(1,1)\} \cup \{\mathcal{G}(0,1)\}) = \\
&= mex\ (\{2,1,2,1\}) = \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Coloque-se o valor da Função Grundy no tabuleiro do jogo conforme se ilustra na Figura 2.51.

0	1	2	3				
1	2	**0**					
2							

Figura 2.51: Tabuleiro do jogo Rainha Branca, do Exemplo 2.20, com os valores da Função Grundy nas casas $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,2)$, $(1,1)$, $(2,0)$, $(0,3)$ e $(1,2)$.

Como

$$F(2,1) = \{(1,1),(0,1),(1,0),(2,0)\},$$

tem-se

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}(2,1) &= mex\ \left(\left\{\mathcal{G}(x',1) : 0 \le x' < 2\right\} \cup \left\{\mathcal{G}(2,y') : 0 \le y' < 1\right\} \cup \right.\\
&\qquad \left.\left\{\mathcal{G}(2-k,1-k) : 1 \le k \le \min\left\{2,1\right\}\right\}\right) = \\
&= mex\ \left(\left\{\mathcal{G}(x',1) : 0 \le x' < 2\right\} \cup \left\{\mathcal{G}(2,y') : 0 \le y' < 1\right\} \cup \right.\\
&\qquad \left.\left\{\mathcal{G}(2-k,1-k) : 1 \le k \le 1\right\}\right) = \\
&= mex\ \left(\left\{\mathcal{G}(0,1)\right\} \cup \left\{\mathcal{G}(1,1)\right\} \cup \left\{\mathcal{G}(2,0)\right\} \cup \left\{\mathcal{G}(1,0)\right\}\right) = \\
&= mex\ \left(\left\{1,2,2,1\right\}\right) = \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Coloque-se o valor da Função Grundy no tabuleiro do jogo conforme se ilustra na Figura 2.52.

0	1	2	3				
1	2	**0**					
2	**0**						

Figura 2.52: Tabuleiro do jogo Rainha Branca, do Exemplo 2.20, com os valores da Função Grundy nas casas $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,2)$, $(1,1)$, $(2,0)$, $(0,3)$, $(1,2)$ e $(2,1)$.

Como

$$F(3,0) = \left\{(0,0),(1,0),(2,0)\right\},$$

tem-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(3,0) &= \; mex\ \left(\left\{\mathcal{G}(x',0) : 0 \leq x' < 3\right\} \cup \left\{\mathcal{G}(3,y') : 0 \leq y' < 0\right\} \cup \right. \\
&\quad \left. \left\{\mathcal{G}(3-k, 0-k) : 1 \leq k \leq \min\left\{3,0\right\}\right\}\right) = \\
&= \; mex\ \left(\left\{\mathcal{G}(x',0) : 0 \leq x' < 3\right\} \cup \left\{\mathcal{G}(3,y') : 0 \leq y' < 0\right\} \cup \right. \\
&\quad \left. \left\{\mathcal{G}(3-k, 0-k) : 1 \leq k \leq 0\right\}\right) = \\
&= \; mex\ \left(\left\{\mathcal{G}(0,0)\right\} \cup \left\{\mathcal{G}(1,0)\right\} \cup \left\{\mathcal{G}(2,0)\right\}\right) = \\
&= \; mex\ \left(\left\{0,1,2\right\}\right) = \\
&= \; 3.
\end{aligned}$$

Coloque-se o valor da Função Grundy no tabuleiro do jogo conforme se ilustra na Figura 2.53.

0	1	2	3				
1	2	**0**					
2	**0**						
3							

Figura 2.53: Tabuleiro do jogo Rainha Branca, do Exemplo 2.20, com os valores da Função Grundy nas casas $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,2)$, $(1,1)$, $(2,0)$, $(0,3)$, $(1,2)$, $(2,1)$ e $(3,0)$.

E assim sucessivamente.

Organizando, no tabuleiro do jogo Rainha Branca, os valores da sua Função Grundy tem-se o tabuleiro conforme se ilustra na Figura 2.54.

Comparando com a análise anterior deste jogo, ver Exemplo 2.20, pode observar-se

0	1	2	3	4	5	6	7
1	2	**0**	4	5	3	7	8
2	**0**	1	5	3	4	8	6
3	4	5	6	2	**0**	1	9
4	5	3	2	7	6	9	**0**
5	3	4	**0**	6	8	10	1
6	7	8	1	9	10	3	4
7	8	6	9	**0**	1	4	5

Figura 2.54: Tabuleiro do jogo Rainha Branca, do Exemplo 2.20, preenchido com os valores da Função Grundy.

que todas as posições P, isto é,

$$\mathcal{P} = \{(0,0),(1,2),(2,1),(3,5),(5,3),(4,7),(7,4)\},$$

são exactamente aquelas que anulam a Função Grundy ($\mathcal{G}(0,0) = \mathcal{G}(1,2) = \mathcal{G}(2,1) = \mathcal{G}(3,5) = \mathcal{G}(5,3) = \mathcal{G}(4,7) = \mathcal{G}(7,4) = 0$).

A estratégia vencedora para este jogo consiste em jogar para uma posição (x,y) tal que $\mathcal{G}(x,y) = 0$, isto é, como se viu anteriormente para uma posição pertencente ao conjunto $\mathcal{P} = \{(0,0),(1,2),(2,1),(3,5),(5,3),(4,7),(7,4)\}$.

2.2.4 Soma-Nim

Até agora viu-se algumas técnicas para analisar jogos de subtracção com uma única pilha de feijões de forma a encontrar uma estratégia vencedora, ainda que nesses exemplos se obedecesse a algumas restrições, pois não se poderia retirar todos os feijões da pilha de feijões, ver o Exemplo 2.12 sobre o jogo $S^{(13)}_{\{1,2,3\}}$ e ver o Exemplo 2.13 sobre o jogo $S^{(23)}_{\{3,4\}}$, a sua análise não é difícil. Ao analisar-se o jogo Nim de uma pilha com n feijões, do Exemplo 2.25, referiu-se que sua Função Grundy coincidia com o número de feijões que existia na pilha de feijões, o que equivaleria a dizer que a sua caracterização é muito simples, pois a estratégia vencedora é trivial. No jogo Nim que envolva apenas uma pilha de feijões, se esta não estiver vazia ganha o próximo jogador a jogar, retirando todos os feijões e se a pilha estiver vazia, venceu o jogador que fez a última jogada. Veja-se agora se também é possível encontrar uma estratégia vencedora quando se tem um jogo Nim disfarçado, por exemplo, o jogo de Subtracção em que existe mais do que uma pilha de feijões.

Definição 2.31 *Chama-se* jogo de Subtracção com mais do que uma pilha de feijões *ao jogo que:*

- se inicia com m pilhas de $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_m$ feijões ou outros objectos, com $m, n_1, n_2, n_3, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$;

- é jogado alternadamente por dois jogadores;

- em cada jogada o jogador escolhe uma pilha i de feijões (com $i = 1, \ldots, m$) e retira desta $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots, a_{ik_i}$ feijões, com $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots, a_{ik_i}$ números naturais distintos entre si;

- vence o último a jogar, isto é, o primeiro a não dispor de nenhum lance legal perde.

Denota-se este jogo por

$$S1^{(n_1)}_{\{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1k_1}\}} \times S2^{(n_2)}_{\{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots, a_{2k_2}\}} \times \cdots \times Sm^{(n_m)}_{\{a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}, \ldots, a_{mk_m}\}},$$

onde em índice superior consta o número de feijões existente em cada pilha de feijões, em índice inferior consta o número de feijões que se pode retirar em cada jogada e Sm é a pilha m.

Exemplo 2.32 *Os jogos $S1^{(7)}_{\{2,3\}} \times S2^{(10)}_{\{2,5,8\}}$, $S1^{(7)}_{\{2,3\}} \times S2^{(13)}_{\{1,6,13\}}$ e $S1^{(7)}_{\{2,3\}} \times S2^{(10)}_{\{2,5,8\}} \times S3^{(13)}_{\{1,6,13\}}$ são exemplos de jogos de Subtracção com mais do que uma pilha de feijões.*

Exemplo 2.33 *Analise-se o jogo de Subtracção* $S1^{(n)}_{\{1,2,3,\ldots,n\}} \times S2^{(m)}_{\{1,2,3,\ldots,m\}}$*, isto é, o jogo que inicia com duas pilhas de* n *e* m *feijões e que cada jogada consiste em, o jogador a jogar, retirar feijões de uma pilha à sua escolha, tantos quantos os que pretender, até ao número máximo de feijões existente na pilha escolhida. Vence quem retirar o último feijão.*

Note-se que se trata de um jogo Nim com duas pilhas.

Será que um dos jogadores pode afirmar antecipadamente que vence o jogo? Isto é, existirá uma estratégia vencedora para um dos jogadores?

Com duas pilhas e sem restrição do número de feijões a retirar, o jogo também não é nada difícil, pois se as pilhas tiverem:

- um número diferente de feijões, o primeiro jogador a jogar vence sempre, pois poderá igualar o número de feijões existentes nas pilhas. A partir daqui, independentemente da pilha que o jogador adversário escolher e do número de feijões que escolher retirar, o primeiro jogador a jogar copia a jogada do adversário, garantindo que fará a última jogada e retirará o último feijão. J. P. Neto e J. N. Silva, em [NS 06], referem que "Este tipo de estratégia, que replica as jogadas do adversário, é conhecida por Tweedledum e Tweedledee.".

- um número igual de feijões, o segundo jogador a jogar vencerá o jogo pois replicará as jogadas do adversário.

Observação 2.34 *A caracterização das posições* P *e posições* N *do jogo do Exemplo 2.33 é dada por*

$$S(n,m) = \begin{cases} N & se \quad n \neq m \\ P & se \quad n = m. \end{cases}$$

Quando $n \neq m$ *as posições são* N *uma vez que dão, necessariamente, a vitória ao jogador* *que irá de seguida jogar e quando $n = m$ as posições são P pois estas posições darão apenas a vitória ao segundo jogador, pelo que o primeiro a jogar perderá.*

Exemplo 2.35 *Veja-se uma concretização do jogo do Exemplo 2.33, o jogo* $S1^{(2)}_{\{1,2\}} \times S2^{(5)}_{\{1,2,3,4,5\}}$, *abreviadamente designado por* $S(2,5)$.

Uma boa jogada do primeiro jogador a jogar é retirar três feijões da segunda pilha de feijões, igualando desta forma o número de feijões que existem nas duas pilhas de feijões, dois feijões em cada pilha.

Divida-se a análise em dois casos.

1.º Caso:

Se o segundo jogador retirar dois feijões de qualquer uma das pilhas de feijões, o jogador a que cabe a jogada seguinte retirará de seguida os dois feijões da outra pilha de feijões e vence o jogo.

2.º Caso:

Se o segundo jogador retirar apenas um feijão de qualquer uma das pilhas de feijões, o jogador a que cabe a jogada seguinte retirará de seguida um feijão da pilha de feijões não escolhida pelo adversário, ficando desta forma cada pilha de feijões com um feijão. De seguida, o próximo jogador a jogar retirará um feijão de qualquer uma das pilhas de feijões e o jogador adversário (o que iniciou o jogo) retirará o único feijão existente na outra pilha de feijões e vence o jogo.

No caso do jogo Nim com três ou mais pilhas de feijões, necessita-se de novos conceitos para determinar a estratégia óptima, uma vez que para analisar matematicamente o jogo Nim revelou-se importante usar uma base diferente da habitualmente usada, a base 2.

Existe um algoritmo que permite que o jogador possa configurar o jogo de maneira que, se ele continuar a partida sem erros, a vitória estará assegurada. Tal estratégia utiliza a linguagem binária e é conhecida como Teorema de Bouton, Teorema 2.44, referido mais à frente, pois foi desenvolvida pelo matemático Charles Leonard Bouton, por volta de 1901, na Universidade de Harvard. O algoritmo da vitória consiste em fazer uma configuração segura do número de feijões em cada pilha de modo que não interessando qual a jogada do adversário, faz-se novamente a configuração, e acaba-se sempre por vencer. E, mesmo que os dois saibam aplicar este algoritmo, o que conseguir iniciá-lo, nunca cometendo erros, vence o jogo. O primeiro passo é contar quantos feijões há em cada pilha e transformar os números obtidos em número binários.

Sobre o assunto veja-se a seguir um exemplo, retirado de [NS 09].

Exemplo 2.36 *Escreva-se a representação dos números 5, 9, 10 e 12 na base* 2.

Como

$$\begin{gathered} 2^0 = 1, \\ 2^1 = 2, \\ 2^2 = 4, \\ 2^3 = 8, \\ \vdots \end{gathered}$$

tem-se

$$\begin{aligned} 5 &= 4 + 1 = 2^2 + 2^0, \\ 9 &= 8 + 1 = 2^3 + 2^0, \\ 10 &= 8 + 2 = 2^3 + 2^1, \\ 12 &= 8 + 4 = 2^3 + 2^2. \end{aligned}$$

Considerando agora que as potências de base 2 *que não ocorrem na representação de um número estão a ser multiplicadas por zero e as que ocorrem são multiplicadas por um, obtém-se*

$$\begin{aligned} 5 &= 1\times 4+1\times 1=1\times 2^2+0\times 2^1+1\times 2^0, \\ 9 &= 1\times 8+1\times 1=1\times 2^3+0\times 2^2+0\times 2^1+1\times 2^0, \\ 10 &= 1\times 8+1\times 2=1\times 2^3+0\times 2^2+1\times 2^1+0\times 2^0, \\ 12 &= 1\times 8+1\times 4=1\times 2^3+1\times 2^2+0\times 2^1+0\times 2^0. \end{aligned}$$

Escrevendo somente os coeficientes, as representações de 5, 9, 10 e 12 na base 2 *são dadas por*

$$\begin{aligned} 5 &= (101)_2\,, \\ 9 &= (1001)_2\,, \\ 10 &= (1010)_2\,, \\ 12 &= (1100)_2\,. \end{aligned}$$

Pode assim representar-se os números inteiros recorrendo somente ao número zero e ao número um.

Definição 2.37 *Chama-se* Soma-Nim *de dois inteiros não negativos x e y, representados na base* 2*, à soma dos seus respectivos coeficientes módulo* 2 *(isto é,* $0\oplus 0=0$, $0\oplus 1=1$, $1\oplus 0=1$, $1\oplus 1=0$*) e representa-se por $x\oplus y$.*

Exemplo 2.38 *Determine-se o valor de* $5 \oplus 9$.

Como as representações de 5 e 9 na base 2 *são iguais a* $5 = (101)_2$ *e* $9 = (1001)_2$, *ver o Exemplo 2.36, efectua-se a soma (módulo 2) ordenada dos coeficientes e obtém-se*

$$\begin{array}{cccccc} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \oplus & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Note-se que se teve de escrever um zero à esquerda dos coeficientes módulo 2 *do número 5, pois a sua representação tem apenas três coeficientes e a do número 9 tem quatro coeficientes, pois escrever 0101 e 101 é igual visto que os zeros à esquerda não contam.*

Como a soma dos coeficientes é igual a 1100 e 1100 na base 2 *é igual ao número 12, tem-se que* $5 \oplus 9 = 12$.

C. Santos, J. P. Neto e J. N. Silva definem Soma-Nim, em [SNS 07a], como: "A Soma--Nim de dois números obtém-se escrevendo-se em base 2 e somando de forma usual duas potências diferentes de 2, sendo nula a soma de duas potências de 2 iguais.". Exemplifique-se esta afirmação.

Exemplo 2.39 *Determine-se o valor de* $5 \oplus 9$.

Como $5 = 4 + 1$ *e* $9 = 8 + 1$, *tem-se*

$5 \oplus 9 =$

$= (4 + 1) \oplus (8 + 1) =$

$= 4 \oplus 1 \oplus 8 \oplus 1 =$

$= 1 \oplus 1 \oplus 8 \oplus 4 =$

$= 8 \oplus 4 =$

$= 12.$

Exemplo 2.40 *Determine-se o valor de* $31 \oplus 26$.

Como $31 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1$ *e* $26 = 16 + 8 + 2$, *tem-se*

$31 \oplus 26 =$

$= (16 + 8 + 4 + 2 + 1) \oplus (16 + 8 + 2) =$

$= 16 \oplus 8 \oplus 4 \oplus 2 \oplus 1 \oplus 16 \oplus 8 \oplus 2 =$

$= 16 \oplus 16 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 4 \oplus 2 \oplus 2 \oplus 1 =$

$= 4 \oplus 1 =$

$= 5.$

Observação 2.41 *O processo utilizado nos Exemplos 2.39 e 2.40 é válido pois a Soma--Nim goza de todas as boas propriedades, expressão utilizada por J. P. Neto e J. N. Silva, em [NS 06], para referirem a propriedade comutativa, associativa, existência de elemento neutro, existência do elemento inverso e Lei do Corte.*

Proposição 2.42 *Se* x, y *e* z *são números inteiros não negativos quaisquer e* $\oplus$ *a operação Soma-Nim, então*

i) $x \oplus y = y \oplus x$,

ii) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$,

iii) $0 \oplus x = x$,

iv) $x \oplus x = 0$,

v) se $x \oplus y = z \oplus y$ *então* $x = z$.

Demonstração: A título de exemplo, demonstra-se apenas a alínea i).

Sejam x e y números inteiros não negativos tais que as suas representações na base 2 são $x = (x_0x_1 \cdots x_n)_2$ e $y = (y_0y_1 \cdots y_m)_2$, com $x_n, y_m \in \{0, 1\}$, com $n, m \in \mathbb{N}_0$.

- Suponha-se que $n = m$.

Efectuando-se a soma (módulo 2) ordenada dos coeficientes, para determinar $x \oplus y$, obtém-se

$$\begin{array}{cccccc} & x_0 & x_1 & \cdots & x_m \\ \oplus & y_0 & y_1 & \cdots & y_m \\ \hline & a_0 & a_1 & \cdots & a_m \end{array}$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_m \in \{0,1\}$, com $m \in \mathbb{N}_0$.

Como a soma dos coeficientes é igual a $a_0a_1 \cdots a_m$ e $a_0a_1 \cdots a_m$ é, na base 2, igual ao número $a_0 \times 2^m + a_1 \times 2^{m-1} + \cdots + a_m \times 2^0$, tem-se que $x \oplus y = a_0 \times 2^m + a_1 \times 2^{m-1} + \cdots + a_m \times 2^0$.

Efectuando-se a soma (módulo 2) ordenada dos coeficientes para determinar $y \oplus x$, obtém-se

$$\begin{array}{cccccc} & y_0 & y_1 & \cdots & y_m \\ \oplus & x_0 & x_1 & \cdots & x_m \\ \hline & b_0 & b_1 & \cdots & b_m \end{array}$$

onde $b_0, b_1, \ldots, b_m \in \{0,1\}$, com $m \in \mathbb{N}_0$.

Como a soma dos coeficientes é igual a $b_0b_1 \cdots b_m$ e $b_0b_1 \cdots b_m$ é, na base 2, igual ao número $b_0 \times 2^m + b_1 \times 2^{m-1} + \cdots + b_m \times 2^0$, tem-se que $y \oplus x = b_0 \times 2^m + b_1 \times 2^{m-1} + \cdots + b_m \times 2^0$.

Se x_m e y_m forem distintos, tem-se $x_m \oplus y_m = 1$ e $y_m \oplus x_m = 1$, mas se x_m e y_m forem iguais, tem-se $x_m \oplus y_m = 0$ e $y_m \oplus x_m = 0$ com $x_m, y_m \in \{0,1\}$, com $m \in \mathbb{N}_0$.

Logo

$$\begin{gathered} x_0 \oplus y_0 = y_0 \oplus x_0 \\ x_1 \oplus y_1 = y_1 \oplus x_1 \\ \vdots \\ x_m \oplus y_m = y_m \oplus x_m \end{gathered}$$

e tem-se que $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1, \ldots$, $a_m = b_m$, com $a_m, b_m \in \{0,1\}$, com $m \in \mathbb{N}_0$.

Das igualdades $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1, \cdots$, $a_m = b_m$ conclui-se que

$x \oplus y = a_0 \times 2^m + a_1 \times 2^{m-1} + \cdots + a_m \times 2^0 = b_0 \times 2^m + b_1 \times 2^{m-1} + \cdots + b_m \times 2^0 = y \oplus x.$

Portanto $x \oplus y = y \oplus x$.

- Suponha-se que $n \neq m$.

1.º Caso: Sem perda de generalidade, considere-se $n < m$.

Se $n < m$, na representação na base 2 do número x escreve-se com um ou mais zeros à esquerda dos coeficientes módulo 2 do número x, pois a sua representação tem menos coeficientes do que a do número y.

Efectuando-se a soma (módulo 2) ordenada dos coeficientes, para determinar $x \oplus y$, obtém-se

$$\begin{array}{cccccccc} & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \oplus & y_0 & y_1 & \cdots & y_i & y_{i+1} & y_{i+2} & \cdots & y_m \\ \hline & a_0 & a_1 & \cdots & a_i & a_{i+1} & a_{i+2} & \cdots & a_m \end{array}$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_m \in \{0,1\}$, com $m \in \mathbb{N}_0$.

Como a soma dos coeficientes é $a_0 a_1 \cdots a_i a_{i+1} a_{i+2} \cdots a_m$ e $a_0 a_1 \cdots a_i a_{i+1} a_{i+2} \cdots a_m$ é, na base 2, igual ao número $a_0 \times 2^m + a_1 \times 2^{m-1} + \cdots + a_i \times 2^{m-i} + a_{i+1} \times 2^{m-i-1} + a_{i+2} \times 2^{m-i-2} + \cdots + a_m \times 2^0$, tem-se que $x \oplus y = a_0 \times 2^m + a_1 \times 2^{m-1} + \cdots + a_i \times 2^{m-i} + a_{i+1} \times 2^{m-i-1} + a_{i+2} \times 2^{m-i-2} + \cdots + a_m \times 2^0$.

Efectuando-se a soma (módulo 2) ordenada dos coeficientes, para determinar $y \oplus x$, obtém-se

$$\begin{array}{ccccccccc} & y_0 & y_1 & \cdots & y_i & y_{i+1} & y_{i+2} & \cdots & y_m \\ \oplus & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \hline & b_0 & b_1 & \cdots & b_i & b_{i+1} & b_{i+2} & \cdots & b_m \end{array}$$

onde $b_0, b_1, \ldots, b_i, b_{i+1}, b_{i+2}, \ldots, b_m \in \{0,1\}$, com $m \in \mathbb{N}_0$.

Como a soma dos coeficientes é igual a $b_0 b_1 \cdots b_i b_{i+1} b_{i+2} \cdots b_m$ e $b_0 b_1 \cdots b_i b_{i+1} b_{i+2} \cdots b_m$ é, na base 2, igual ao número $b_0 \times 2^m + b_1 \times 2^{m-1} + \cdots + b_i \times 2^{m-i} + b_{i+1} \times 2^{m-i-1} + b_{i+2} \times 2^{m-i-2} + \cdots + b_m \times 2^0$, tem-se que $y \oplus x = b_0 \times 2^m + b_1 \times 2^{m-1} + \cdots + b_i \times 2^{m-i} + b_{i+1} \times 2^{m-i-1} + b_{i+2} \times 2^{m-i-2} + \cdots + b_m \times 2^0$.

Do caso em que $n = m$ tem-se que $a_{i+1} = b_{i+1}$, $a_{i+2} = b_{i+2}, \ldots, a_m = b_m$, com $a_j, b_j \in \{0,1\}$, com $j \in \mathbb{N}_0$. Tem-se também que $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1, \ldots,$ $a_i = b_i$, com $a_k, b_k \in \{0,1\}$, com $k \in \mathbb{N}_0$ pois:

- se $\exists\ y_i \neq 0$, com $i \in \mathbb{N}_0$, tem-se $0 \oplus y_i = 1$ e $y_i \oplus 0 = 1$;

- se $\exists\ y_i = 0$, com $i \in \mathbb{N}_0$, tem-se $0 \oplus y_i = 0$ e $y_i \oplus 0 = 0$.

Como

$$\begin{gathered} 0 + y_0 = y_0 + 0 \\ 0 + y_1 = y_1 + 0 \\ \vdots \\ 0 + y_i = y_i + 0 \\ x_0 + y_{i+1} = y_{i+1} + x_0 \\ x_1 + y_{i+2} = y_{i+2} + x_1 \\ \vdots \\ x_m + y_m = y_m + x_m \end{gathered}$$

donde se conclui que

$x \oplus y =$

$= a_0 \times 2^m + a_1 \times 2^{m-1} + \cdots + a_i \times 2^{m-i} + a_{i+1} \times 2^{m-i-1} + a_{i+2} \times 2^{m-i-2} + \cdots + a_m \times 2^0 =$

$= b_0 \times 2^m + b_1 \times 2^{m-1} + \cdots + b_i \times 2^{m-i} + b_{i+1} \times 2^{m-i-1} + b_{i+2} \times 2^{m-i-2} + \cdots + b_m \times 2^0 =$

$= y \oplus x$.

Portanto $x \oplus y = y \oplus x$.

2.^{o} Caso: Considere-se $n > m$.

A demonstração é análoga à do 1.^{o} Caso. ■

Exemplo 2.43 *Determine-se o valor de* $767 \oplus 951$.

Em geral, para escrever um número qualquer em base 2 *começa-se por encontrar a maior potência de* 2 *que ele contém, depois faz-se o mesmo à diferença entre o número e essa potência de* 2 *e vai-se repetindo o processo.*

Como

$$\begin{aligned} 951 &> 2^9 = 512 \\ 951 &< 2^{10} = 1024 \end{aligned}$$

e

$$951 - 512 = 439$$

tem-se

$$951 = 512 + 439.$$

Como

$$\begin{aligned} 439 &> 2^8 = 256 \\ 439 &< 2^9 = 512 \end{aligned}$$

e

$$439 - 256 = 183$$

tem-se

$$951 = 512 + 256 + 183.$$

Como

$$\begin{aligned} 183 &> 2^7 = 128 \\ 183 &< 2^8 = 256 \end{aligned}$$

e

$$183 - 128 = 55$$

tem-se

$$951 = 512 + 256 + 128 + 55.$$

Como

$$\begin{aligned} 55 &> 2^5 = 32 \\ 55 &< 2^6 = 64 \end{aligned}$$

e

$$55 - 32 = 23$$

tem-se

$$951 = 512 + 256 + 128 + 32 + 23.$$

Como

$$\begin{aligned} 23 &> 2^4 = 16 \\ 23 &< 2^5 = 32 \end{aligned}$$

e

$$23 - 16 = 7$$

tem-se

$$951 = 512 + 256 + 128 + 32 + 16 + 7.$$

Como

$$7 = 4 + 2 + 1$$

tem-se

$$951 = 512 + 256 + 128 + 32 + 16 + 4 + 2 + 1.$$

Procedendo-se de forma análoga para o número 767*, obtém-se*

$$767 = 512 + 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1.$$

Donde

$$\begin{aligned}
&767 \oplus 951 = \\
&= (512+128+64+32+16+8+4+2+1) \oplus (512+256+128+32+16+4+2+1) = \\
&= 512 \oplus 128 \oplus 64 \oplus 32 \oplus 16 \oplus 8 \oplus 4 \oplus 2 \oplus 1 \oplus 512 \oplus 256 \oplus 128 \oplus 32 \oplus 16 \oplus 4 \oplus 2 \oplus 1 = \\
&= 512 \oplus 512 \oplus 128 \oplus 128 \oplus 32 \oplus 32 \oplus 16 \oplus 16 \oplus 4 \oplus 4 \oplus 2 \oplus 2 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 64 \oplus 8 \oplus 256 = \\
&= 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 64 \oplus 8 \oplus 256 = \\
&= 64 \oplus 8 \oplus 256 = \\
&= 328.
\end{aligned}$$

Segundo J. P. Neto e J. N. Silva, em [NS 06], tem-se que "A importância desta soma reside no facto de Bouton ter caracterizado as posições do jogo Nim geral em termos da soma-nim dos números de feijões nas diversas pilhas".

Teorema 2.44 *(de Bouton, 1901) Num jogo Nim, se representarmos a posição com n pilhas e com número de feijões $x_1, \ldots, x_n$ por $(x_1, \ldots, x_n)$ temos que a posição $(x_1, \ldots, x_n)$ é uma posição P se, e somente se, $x_1 \oplus \cdots \oplus x_n = 0$.*

Enuncie-se agora os dois teoremas analisados por Bouton no artigo [Bouton 01] e que ensinam a vencer o jogo Nim se na vez do jogador a que cabe a jogada seguinte deixar uma certa configuração, chamada combinação segura, de feijões na mesa de modo que, se depois disso jogar sem erro, o jogador adversário não possa ganhar, independentemente das jogadas que faça. Em linhas gerais, a demosntração deste facto consiste em mostrar que se o jogador a que cabe a jogada seguinte deixa uma combinação segura de feijões na mesa, então o jogador adversário, no seu próximo movimento, seja ele qual for, não poderá deixar uma outra combinação segura. Para além do facto de, após o movimento do jogador adversário, o jogador que efectou a jogada anterior ao adversário novamente poderá deixar uma nova combinação segura e continuar a jogar.

Teorema 2.45 *Se o jogador a que cabe a jogada seguinte deixa uma combinação segura na mesa, então o jogador adversário não conseguirá deixar outra combinação segura na sua vez de jogar.*

Demonstração: Suponha-se um jogo que iniciou-se com n pilhas de $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_n$ feijões cada uma e não com um número necessariamente igual de feijões por cada pilha de feijões, com $n \in \mathbb{N}$.

Considere-se as regras do jogo Nim e suponha-se que o jogador que efectuou a jogada deixou na mesa uma combinação segura.

O jogador seguinte pode apenas escolher uma pilha de feijões e terá de retirar pelo menos um feijão da pilha de feijões.

Sabendo-se que dados os números de feijões de $n-1$ pilhas de feijões é possível determinar com exactidão o número de feijões da $n-ésima$ pilha de feijões e dado que o jogador adversário havia deixado uma combinação segura na mesa quando jogou, pode-se afirmar que o jogador seguinte irá desmanchar tal combinação, pelo que não poderá deixar na mesa uma nova combinação segura. ■

Observação 2.46 *O processo de determinação, de modo a obter-se uma combinação segura, do número de feijões da $n-ésima$ pilha de feijões conhecidos os números de feijões de $n-1$ pilhas de feijões é simples pois basta garantir que os números um apareçam em número par, por coluna, na matriz da soma dos coeficientes das representações dos números de feijões por pilha, na base 2. Veja-se um raciocínio para o caso de um jogo Nim com três pilhas de A, B e C feijões, onde $A=(100)_2$ e $B=(11)_2$. O valor de C, com $C=(c_1c_2c_3)_2$, onde $c_1,c_2,c_3\in\{0,1\}$, terá de garantir que a Soma-Nim seja zero.*

Como

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 1 \\ \oplus & c_1 & c_2 & c_3 \\ \hline & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

e como os números um aparecem em número ímpar em todas as colunas da matriz da soma dos coeficientes das representações dos números A, B e C, então $c_1=1$, $c_2=1$ e $c_3=1$ e tem-se que $C=(111)_2$.

Teorema 2.47 *Se o jogador a que cabe a jogada seguinte deixa uma combinação segura na mesa e o jogador adversário retira feijões de uma determinada pilha de feijões, então* *o jogador seguinte poderá recompor uma combinação segura retirando feijões de uma das restantes pilhas de feijões.*

Demonstração: Suponha-se um jogo que iniciou-se com n pilhas de $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_n$ feijões cada uma e não com um número necessariamente igual de feijões por cada pilha de feijões, com $n \in \mathbb{N}$.

Considere-se as regras do jogo Nim e suponha-se que o jogador que efectuou a jogada deixou uma combinação segura na mesa. De seguida, o jogador adversário escolhe uma das pilhas de feijões. Suponha-se, sem perda de generaliadade, que o jogador escolheu a primeira pilha de feijões e retira desta um certo número feijões, por exemplo b_1, com $b_1 \leq n_1$ e $b_1, n_1 \in \mathbb{N}$. Repare-se que, quando numa pilha de feijões se retiram feijões, o número associado a essa pilha de feijões acaba por diminuir, o que provocará uma mudança na representação binária do número que representa o número de feijões da pilha escolhida, isto é, olhando da esquerda para a direita, algum número um da representação binária passa para o número zero, pois que caso contrário o número estaria a aumentar o que não respeitaria as regras do jogo. Suponha-se, sem perda de generalidade, que a alteração do número um para número zero foi no primeiro algarismo, olhando da esquerda para a direita, e analise-se dois casos:

1.^{o} Caso: Considere-se n par.

Do facto do jogador que efectuou a jogada ter deixado uma combinação segura e da casa correspondente ao algarismo que sofreu alteração, após a jogada do jogador seguinte, ser a primeira tem-se que os números um existente na primeira posição de cada número de feijões das pilhas de feijões na sua representação binária é sempre em número ímpar e nunca em número par, pois representaria uma combinação segura, o que seria uma contradição com o Teorema 2.45. Na próxima jogada, o jogador a jogar escolhe uma pilha que tenha um determinado número de feijões que na sua representação binária tenha um número um na primeira posição da esquerda para a direita, por forma a obter novamente uma combinação segura, pois ficará com um número par de números um, na primeira posição da representação binária de todos os números de feijões existentes nas pilhas de feijão. Note-se que na procura da combinação segura e consequente alteração de números um para zero na primeira posição o jogador terá de observar da necessidade de alterar ou não os algarismos à direita desta casa (primeira) neste mesmo número (correspondente à pilha escolhida) do número zero para o número um ou do número um para o número zero, de modo a obter novamente uma combinação segura. A necessidade do jogador ter este cuidado prende-se com o facto de a jogada do jogador anterior poder ter estragado a combinação segura também noutras posições que não só na primeira. Qualquer que seja a próxima jogada do jogador, este não impedirá o jogador adversário de fazer em seguida um raciocínio análogo ao anterior, retirando os feijões de maneira a arranjar uma combinação segura.

Deste modo, não aplicando nenhum erro, o jogador que havia deixado a combinação segura vencerá o jogo.

2.^{o} Caso: Considere-se n impar.

A prova é análoga ao caso em que n é par. ■

Exemplo 2.48 *Considere-se o jogo* $S1^{(5)}_{\{1,2,3,4,5\}} \times S2^{(4)}_{\{1,2,3,4\}} \times S3^{(7)}_{\{1,2,3,4,5,6,7\}}$*, abreviadamente designado por* $S(5,4,7)$*, caracterize-se a posição do jogo e escolha-se as jogadas vencedoras, se for caso disso.*

Determine-se então $5 \oplus 4 \oplus 7$.

Como $5 = (101)_2$, $4 = (100)_2$ *e* $7 = (111)_2$, *tem-se*

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 & 0 \\ \oplus & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Como $5 \oplus 4 \oplus 7 = 6 \neq 0$, *pois* $6 = 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = (110)_2$, *então pelo Teorema de Bouton, Teorema 2.44, a posição do jogo é* N.

Neste caso tem-se três jogadas boas, isto é, três jogadas que nos levam à vitória. Para encontrar uma jogada vencedora, basta manter os coeficientes das representações de dois dos números 5, 4 ou 7 na base 2 *e arranjar a do outro número de forma que a sua soma seja zero. Essa nova representação irá dar-nos a informação de número de feijões a retirar e em que pilha de feijões. Assim, as jogadas vencedoras são descobertas pelos coeficientes das representações de 5, 4 e 7 na base* 2 *e dadas pelas duas colunas, mais à esquerda, da matriz da soma dos coeficientes das representações de 5, 4 e 7 na base* 2, *com três números um e um número um, respectivamente. Alterando essas colunas de números um, em número ímpar, encontra-se facilmente a representação que não estraga a soma e que dessa forma a soma dê zero.*

1.ª Jogada vencedora:

Mantenha-se os coeficientes das representações dos números 4 e 7 na base 2, *altere-se a do número 5 e observe-se a seguinte Soma-Nim:*

$$\begin{array}{cccc} & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & 0 & 0 \\ \oplus & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Como $3 = (011)_2$, *tem-se que a jogada vencedora é aquela em que se retira dois feijões à pilha com 5 feijões, ficando-se com três, pois* $3 \oplus 4 \oplus 7 = 0$ *e pelo Teorema de Bouton,* *Teorema 2.44, a posição do jogo é P, o que garante que o próximo jogador a jogar não vence o jogo uma vez que bastará ao jogador que efectuou a jogada vencedora copiar a jogada do adversário e desta forma garantir a vitória.*

2.ª Jogada vencedora:

Mantenha-se os coeficientes das representações dos números 5 e 7 na base 2, *altere-se a do número 4 e observe-se a seguinte Soma-Nim:*

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 \\ \oplus & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Como $2 = (010)_2$, *tem-se que a jogada vencedora é aquela em que se retira dois feijões à pilha com 4 feijões, ficando-se com dois, pois* $5 \oplus 2 \oplus 7 = 0$ *e pelo Teorema de Bouton, Teorema 2.44, a posição do jogo é P, o que garante que o próximo jogador a jogar não vence o jogo uma vez que bastará ao jogador que efectuou a jogada vencedora copiar a jogada do adversário e desta forma garantir a vitória.*

3.ª Jogada vencedora:

Mantenha-se os coeficientes das representações dos números 5 e 4 na base 2, *altere-se a do número 7 e observe-se a seguinte Soma-Nim:*

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 & 0 \\ \oplus & 0 & 0 & 1 \\ \hline & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Como $1 = (001)_2$, *tem-se que a jogada vencedora é aquela em que se retira seis feijões à pilha com 7 feijões, ficando-se com um, pois* $5 \oplus 4 \oplus 1 = 0$ *e pelo Teorema de Bouton, Teorema 2.44, a posição do jogo é P, o que garante que o próximo jogador a jogar não* *vence o jogo uma vez que bastará ao jogador que efectuou a jogada vencedora copiar a jogada do adversário e desta forma garantir a vitória.*

Exemplo 2.49 *Considere-se o jogo* $S1^{(10)}_{\{1,2,\ldots,n\}} \times S2^{(11)}_{\{1,2,\ldots,m\}} \times S3^{(12)}_{\{1,2,\ldots,k\}} \times S4^{(13)}_{\{1,2,\ldots,l\}}$*, com* $n, m, k, l \in \mathbb{N}$ *e tais que* $n \leq 10$*,* $m \leq 11$*,* $k \leq 12$ *e* $l \leq 13$*, abreviadamente designado por* $S(10, 11, 12, 13)$*, caracterize-se a posição do jogo e escolha-se as jogadas vencedoras, se for caso disso.*

Determine-se então $10 \oplus 11 \oplus 12 \oplus 13$.

Como $10 = (1010)_2$*,* $11 = (1011)_2$*,* $12 = (1100)_2$ *e* $13 = (1101)_2$*, tem-se*

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \oplus & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Como $10 \oplus 11 \oplus 12 \oplus 13 = 0$*, então pelo Teorema de Bouton, Teorema 2.44, a posição do jogo é* P*, o que garante que o primeiro jogador a jogar não vence o jogo uma vez que bastará ao jogador seguinte copiar a jogada do adversário e desta forma garantir a sua vitória.*

Exemplo 2.50 *Considere-se o jogo* $S1^{(49)}_{\{1,2,\ldots,n\}} \times S2^{(18)}_{\{1,2,\ldots,m\}} \times S3^{(33)}_{\{1,2,\ldots,k\}} \times S4^{(35)}_{\{1,2,\ldots,l\}}$*, com* $n, m, k, l \in \mathbb{N}$ *e tais que* $n \leq 49$*,* $m \leq 18$*,* $k \leq 33$ *e* $l \leq 35$*, abreviadamente designado por* $S(49, 18, 33, 35)$*, caracterize-se a posição do jogo e escolha-se as jogadas vencedoras, se for caso disso.*

Determine-se então $49 \oplus 18 \oplus 33 \oplus 35$.

Como $49 = (110001)_2$, $18 = (10010)_2$, $33 = (100001)_2$ *e* $35 = (100011)_2$, *tem-se*

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \oplus & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Como $49 \oplus 18 \oplus 33 \oplus 35 = 33$, *pois* $33 = 1\times 2^5 + 0\times 2^4 + 0\times 2^3 \times 0 \times 2^2 + 0\times 2^1 + 1\times 2^0 = (100001)_2$, *então pelo Teorema de Bouton, Teorema 2.44, a posição do jogo é* N. *As jogadas vencedoras são descobertas pelos coeficientes das representações dos números 49, 18, 33 e 35 na base* 2. *Veja-se de seguida como alterar as colunas de números um, em número ímpar, e encontrar a representação com Soma-Nim igual a zero.*

Dado que a Soma-Nim de 49, com 18, com 33 e com 35 é 33 altera-se, na matriz da soma, os coeficientes das representações dos números 49, 33 e 35 na base 2, *pois são aqueles que fazem com que a Soma-Nim não dê zero. Essa alteração fornece-nos informação do número de feijões a retirar e a respectiva pilha de feijões.*

Como retirar feijões numa pilha é o mesmo que fazer a Soma-Nim entre o número de feijões da pilha em causa e o resultado da Soma-Nim do número de feijões de todas as pilhas, as jogadas vencedoras são determinadas através dos seguintes cálculos:

$$\begin{aligned} 49 \oplus 33 &= (32+16+1) \oplus (32+1) = 32 \oplus 16 \oplus 1 \oplus 32 \oplus 1 = 16 \\ 18 \oplus 33 &= (16+2) \oplus (32+1) = 16 \oplus 2 \oplus 32 \oplus 1 = 51 \\ 33 \oplus 33 &= 0 \end{aligned}$$

e

$$35 \oplus 33 = (32+2+1) \oplus (32+1) = 32 \oplus 2 \oplus 1 \oplus 32 \oplus 1 = 2.$$

A segunda Soma-Nim equivale a uma jogada impossível, pois não se pode jogar de 18 para 51 uma vez que não é possível acrescentar feijões numa pilha de feijões mas sim retirar. Assim, conclui-se que esta não é a pilha de feijões a alterar.

Como nas restantes três Soma-Nim os valores obtidos permitem realizar uma jogada válida, conclui-se que existem três jogadas vencedoras, onde a primeira consiste em retirar 33 feijões da pilha de 49 feijões ficando com 16 feijões, a segunda consiste em retirar 33 feijões da pilha de 33 feijões ficando com zero feijões e a terceira consiste em retirar 33 feijões da pilha de 35 feijões ficando com 2 feijões. Verifique-se que cada uma dessas jogadas é uma jogada vencedora.

1.ª Jogada vencedora:

Mantenha-se os coeficientes das representações dos números 18, 33 e 35 na base 2*, altere-se a do número 49 para 16 e observe-se a seguinte Soma-Nim:*

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \oplus & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Como $16 = (010000)_2$*, tem-se que uma jogada vencedora é aquela em que se retira trinta e três feijões à pilha com 49 feijões, ficando-se com dezasseis, pois* $16 \oplus 18 \oplus 33 \oplus 35 = 0$ *e pelo Teorema de Bouton, Teorema 2.44, a posição do jogo é* P*, o que garante que o próximo jogador a jogar não vence o jogo uma vez que bastará ao jogador que efectuou a jogada vencedora copiar a jogada do adversário e desta forma garantir a vitória.*

2.ª Jogada vencedora:

Mantenha-se os coeficientes das representações dos números 49, 18 e 35 na base 2*,* *altere-se a do número 33 para zero e observe-se a seguinte Soma-Nim:*

$$\begin{array}{rcccccc} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \oplus & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Como $0 = (000000)_2$, *tem-se que uma jogada vencedora é aquela em que se retira todos os feijões da pilha com 33 feijões, ficando-se com zero, pois* $49 \oplus 18 \oplus 0 \oplus 35 = 0$ *e pelo Teorema de Bouton, Teorema 2.44, a posição do jogo é* P, *o que garante que o próximo jogador a jogar não vence o jogo uma vez que bastará ao jogador que efectuou a jogada vencedora copiar a jogada do adversário e desta forma garantir a vitória.*

3.ª Jogada vencedora:

Mantenha-se os coeficientes das representações dos números 49, 18, e 33 na base 2, *altere-se a do número 35 para 2 e observe-se a seguinte Soma-Nim:*

$$\begin{array}{rcccccc} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \oplus & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Como $2 = (000010)_2$, *tem-se que uma jogada vencedora é aquela em se retira trinta e três feijões à pilha com 35 feijões, ficando-se com dois, pois* $49 \oplus 18 \oplus 33 \oplus 2 = 0$ *e pelo Teorema de Bouton, Teorema 2.44, a posição do jogo é* P, *o que garante que o próximo jogador a jogar não vence o jogo uma vez que bastará ao jogador que efectuou a jogada vencedora copiar a jogada do adversário e desta forma garantir a vitória.*

Observação 2.51 *Note-se que nem sempre existem três jogadas vencedoras num jogo Nim com quatro pilhas de feijões conforme se exemplificou no Exemplo 2.50. Repare-se* *no Exemplo 2.52.*

Exemplo 2.52 *Considere-se o jogo* $S1^{(49)}_{\{1,2,\ldots,n\}} \times S2^{(18)}_{\{1,2,\ldots,m\}} \times S3^{(1)}_{\{1\}} \times S4^{(3)}_{\{1,2,\ldots,k\}}$, *com* $n, m, k \in \mathbb{N}$ *e* $n \leq 49$, $m \leq 18$ *e* $k \leq 3$, *abreviadamente designado por* $S(49, 18, 1, 3)$ *e caracterize-se a posição do jogo e escolha-se as jogadas vencedoras, se for caso disso.*

Determine-se então $49 \oplus 18 \oplus 1 \oplus 3$.

Como $49 = (110001)_2$, $18 = (10010)_2$, $1 = (1)_2$ *e* $3 = (11)_2$, *tem-se*

$$\begin{array}{rcccccc} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \oplus & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Como $49 \oplus 18 \oplus 1 \oplus 3 = 33$, *pois* $33 = 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 \times 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = (100001)_2$, *então pelo Teorema de Bouton, Teorema 2.44, a posição do jogo é* N. *A jogada vencedora é descoberta pelos coeficientes das representações dos números 49, 18, 1 e 3 na base* 2 *e dada pela coluna da matriz, mais à esquerda e mais à direita, da Soma-Nim desses coeficientes, uma vez que estas são as colunas com um número ímpar de números um.*

Tem-se que

$$\begin{aligned} 49 \oplus 33 &= (32 + 16 + 1) \oplus (32 + 1) = 32 \oplus 16 \oplus 1 \oplus 32 \oplus 1 = 16 \\ 18 \oplus 33 &= (16 + 2) \oplus (32 + 1) = 16 \oplus 2 \oplus 32 \oplus 1 = 51 \\ 1 \oplus 33 &= 1 \oplus (32 + 1) = 1 \oplus 32 \oplus 1 = 32 \end{aligned}$$

e

$$3 \oplus 33 = (2 + 1) \oplus (32 + 1) = 2 \oplus 1 \oplus 32 \oplus 1 = 2 \oplus 32 = 34.$$

As três últimas Soma-Nim equivalem a jogadas impossíveis, pois não se pode jogar de 18 para 51, nem de 1 para 32 e nem de 3 para 34, uma vez que não é possível acrescentar *feijões numa pilha de feijões mas sim retirar. Assim, conclui-se que estas não são as pilhas de feijões a alterar.*

Como na primeira Soma-Nim o valor obtido permite realizar uma jogada válida, conclui-se que existe apenas uma jogada vencedora que consiste em retirar 33 feijões da pilha de 49 feijões ficando com 16.

Mantenha-se os coeficientes das representações dos números 18, 1 e 3 na base 2*, altere-se a do número 49 para 16 e observe-se a seguinte Soma-Nim:*

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \oplus & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Como $16 = (010000)_2$*, tem-se que a jogada vencedora é aquela em que se retira trinta e três feijões à pilha com 49 feijões, ficando-se com dezasseis, pois* $16 \oplus 18 \oplus 1 \oplus 3 = 0$ *e pelo Teorema de Bouton, Teorema 2.44, a posição do jogo é* P*, o que garante que o próximo jogador a jogar não vence o jogo uma vez que bastará ao jogador que efectuou a jogada vencedora copiar a jogada do adversário e desta forma garantir a vitória.*

Com os exemplos anteriores verificou-se a importância da Soma-Nim na classificação de uma jogada em posição P ou posição N, bem como na escolha da jogada vencedora, pois se se conseguir deixar ao adversário pilhas de feijões cujas quantidades tenham Soma--Nim nula, tem-se a vitória garantida, desde que sempre que se jogue se anule a Soma-Nim dos números de feijões das pilhas.

Veja-se agora um exemplo de jogo Nim disfarçado.

Definição 2.53 *Chama-se jogo* Nimble *ao jogo que:*

- se joga com uma tira $1 \times n$ quadrados a que chama-se casas, com $n \in \mathbb{N}$;

- se inicia com um número finito de moedas (ou outros objectos) sobre as casas, em posições escolhidas aleatoriamente na tira de quadrados;

- pode, em cada casa, conter qualquer número de moedas;

- é jogado alternadamente por dois jogadores;

- em cada jogada, o jogador a jogar movimenta uma moeda para a esquerda o número de casas que quiser;

- termina quando todas as moedas estiverem na casa mais à esquerda da tira;

- vence o último a jogar, isto é, o primeiro a não dispor de nenhum lance legal perde.

Denota-se este jogo por $N_{(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n)}$, onde $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in \mathbb{N}_0$ e cada a_i, com $i = 1, 2, \ldots, n$, corresponde ao número de moedas que se encontram na casa i da tira de quadrados, da esquerda para a direita, respectivamente. Associe-se a cada posição do jogo um elemento do conjunto $\mathbb{N}^n$.

Exemplifique-se de seguida dois casos particulares do jogo Nimble, o primeiro em que a análise é fácil e rápida e sem recorrer-se à Soma-Nim e o segundo em que a análise não é trivial e, portanto, irá recorrer-se ao resultado teórico da Soma-Nim.

Exemplo 2.54 *Considere-se o jogo Nimble $N_{(0,0,2,0)}$.*

Este jogo joga-se numa tira de 1×4 quadrados e cada jogada consiste em escolher uma moeda das que se encontram na terceira casa e movimentá-la para a esquerda o número de casas que se quiser - com ou sem moedas - e termina quando todas as moedas estiverem na casa mais à esquerda da tira. Ganha o último jogador a jogar.

Observe-se a Figura 2.55 que corresponde ao jogo $N_{(0,0,2,0)}$.

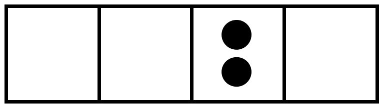


Figura 2.55: Caso particular do jogo Nimble, o jogo $N_{(0,0,2,0)}$.

Será que um dos jogadores pode afirmar antecipadamente que vence o jogo? Isto é, existirá uma estratégia vencedora para um dos jogadores?

Analise-se o jogo Nimble ilustrado na Figura 2.55, de forma a responder às questões formuladas anteriormente.

Na Figura 2.56 registam-se todas as hipóteses de jogada num jogo $N_{(0,0,2,0)}$, *mas analise-se apenas aquelas em que o primeiro jogador a jogar não vencerá se ambos os jogadores aplicarem uma estratégia vencedora.*

O jogo inicia-se com duas moedas na terceira casa, posição que se designa por $(0,0,2,0)$. *O primeiro jogador a jogar terá duas hipóteses de jogar, movendo uma das moedas que se encontram na terceira casa para a segunda casa ou para a primeira casa, isto é, ficando na posição* $(0,1,1,0)$ *ou* $(1,0,1,0)$ *e o jogador seguinte deverá optar:*

- no 1.º caso, se o segundo jogador deslocar a moeda que se encontra na terceira casa para a segunda, fica-se na posição $(0,2,0,0)$. *Com duas moedas na segunda casa, o primeiro jogador não tem outra hipótese de jogada senão mover uma das duas moedas para a primeira casa, ficando na posição* $(1,1,0,0)$ *e o segundo jogador fará a última jogada legal, mover a moeda da segunda casa para a primeira casa, ficando na posição* $(2,0,0,0)$ *e vence o jogo.*

- no 2.º caso, se o segundo jogador deslocar a moeda na terceira casa para a primeira,

fica-se na posição $(2,0,0,0)$ *e vence o jogo, por todas as moedas já se encontrem na casa mais à esquerda da tira.*

Note-se que o jogo iniciou-se com um número par de moedas e venceu o segundo jogador a jogar, pelo que neste caso teria sido vantajoso ser-se o segundo a jogar. Das quatro possíveis e distintas jogadas de um jogo jogado até ao fim, é a segunda jogada que decide a vitória pois a partir daí basta imitar a jogada do adversário. Na 1.º caso é visível (ver Figura 2.56) a repetição de jogada do segundo jogador, pois tem-se na primeira jogada, de cada jogador, o movimento da moeda da terceira casa para a segunda, o que equivale a $(0,1,1,0)$ *ou a* $(0,2,0,0)$*. Posteriormente, na segunda jogada, de cada jogador, é visível a imitação, com o movimento da moeda da segunda casa para a primeira, o que equivale a* $(1,1,0,0)$ *ou a* $(2,0,0,0)$*. O mesmo acontece se se analisar o 2.º caso, pois o primeiro jogador a jogar joga da terceira casa para a primeira, que equivale a* $(1,0,1,0)$*, e o jogador seguinte limita-se a imitar a jogada do adversário, pois também faz um movimento da terceira casa para a primeira, que equivale a* $(2,0,0,0)$*.*

Tornou-se evidente com o Exemplo 2.54, e que se generaliza para os casos em que o número de moedas no tabuleiro em cada casa é um número par, que se deve deixar que o adversário seja o primeiro a jogar, uma vez que se pode sempre repetir a jogada que o adversário fizer, garantindo assim ser o último a fazer uma jogada legal e, consequentemente, a ganhar.

O jogo Nim que se inicia com uma pilha de 5 feijões e que cada jogada consiste em retirar 1, 2, 3, 4 ou 5 feijões e que vence quem retirar o último feijão e o jogo Nimble $N_{(0,0,0,0,0,1)}$, (isto é, o jogo que é jogado numa tira de quadrados 1×6 com a única moeda na casa mais à direita em que cada jogada consiste em movimentar a moeda uma, duas,

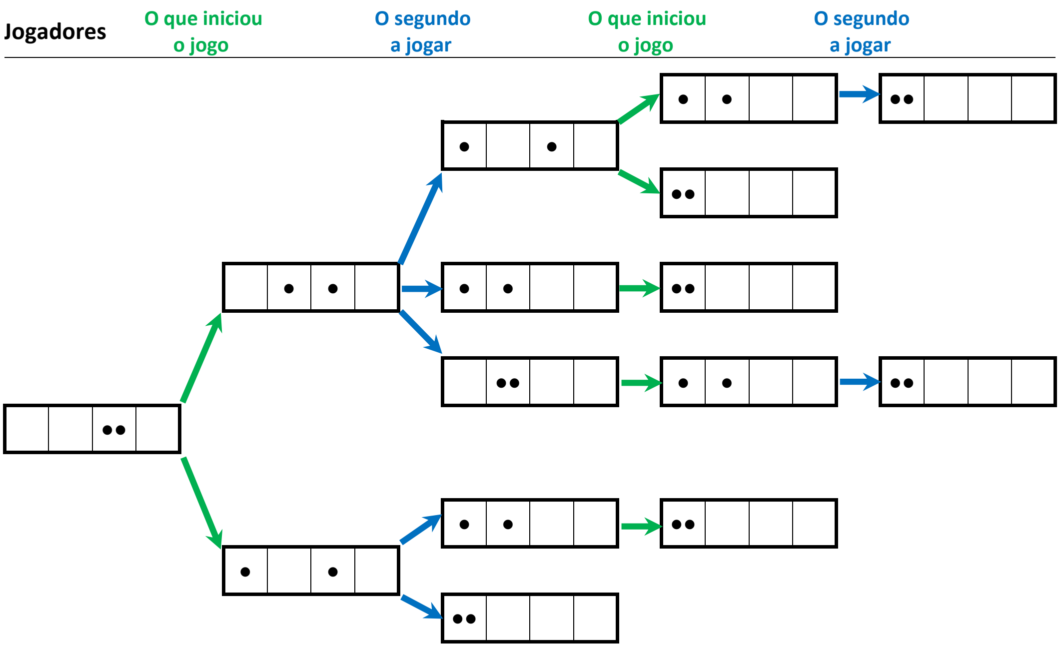


Figura 2.56: Possibilidades de jogadas no jogo Nimble $N_{(0,0,2,0)}$.

três, quatro ou cinco casas para a esquerda e termina quando a moeda estiver na casa mais à esquerda da tira) são semelhantes. Vencendo o último a jogar, estes jogos são obviamente semelhantes, pois existe uma correspondência entre os movimentos permitidos num e no outro. Mais, como se verá no exemplo seguinte, pode dizer-se que em geral, o jogo Nimble é um jogo semelhante ao jogo Nim, ou seja, a tira de quadrados é uma pilha de Nim disfarçada.

Exemplo 2.55 *Analise-se o jogo Nimble* $N_{(1,2,1,3,0,3,0,2,0,1,2)}$.

Este jogo joga-se numa tira de 1×11 *quadrados, com 15 moedas dispostas na tira conforme se ilustra na Figura 2.57, em que cada jogada consiste em escolher uma moeda e movimentá-la para a esquerda o número de casas que se quiser - com ou sem moedas - e termina quando todas as moedas estiverem na casa mais à esquerda da tira. Ganha o* *último a jogar.*

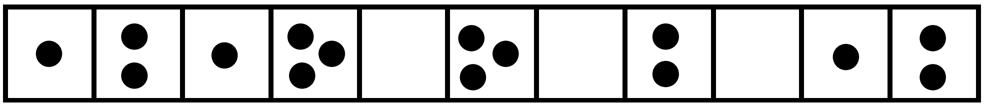


Figura 2.57: Caso particular do jogo Nimble, o jogo $N_{(1,2,1,3,0,3,0,2,0,1,2)}$.

Será que um dos jogadores pode afirmar antecipadamente que vence o jogo? Isto é, existirá uma estratégia vencedora para um dos jogadores?

Identificando cada uma das moedas com uma pilha de feijões em que o número de feijões de cada pilha é igual à distância da moeda, que lhe está associada, à casa situada na extremidade esquerda da tira tem-se que o jogo Nimble $N_{(1,2,1,3,0,3,0,2,0,1,2)}$ *corresponde a um jogo Nim de 15 pilhas, em que o número de feijões de cada pilha é igual a 0,1,1,2,3,3,3,5,5,5,7,7,9,10 e 10, respectivamente.*

Determine-se então $0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 2 \oplus 3 \oplus 3 \oplus 3 \oplus 5 \oplus 5 \oplus 5 \oplus 7 \oplus 7 \oplus 9 \oplus 10 \oplus 10$.

Por aplicação das propriedades da Soma-Nim enunciadas anteriormente, tem-se

$0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 2 \oplus 3 \oplus 3 \oplus 3 \oplus 5 \oplus 5 \oplus 5 \oplus 7 \oplus 7 \oplus 9 \oplus 10 \oplus 10 =$

$= 2 \oplus 3 \oplus 5 \oplus 9 =$

$= 2 \oplus (2+1) \oplus (4+1) \oplus (8+1) =$

$= 2 \oplus 2 \oplus 1 \oplus 4 \oplus 1 \oplus 8 \oplus 1 =$

$= 1 \oplus 4 \oplus 8 =$

$= 13.$

Como $0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 2 \oplus 3 \oplus 3 \oplus 3 \oplus 5 \oplus 5 \oplus 5 \oplus 7 \oplus 7 \oplus 9 \oplus 10 \oplus 10 = 13$, *então, pelo Teorema de Bouton, Teorema 2.44, a posição inicial do jogo é* N. *Dado que* $0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 2 \oplus 3 \oplus 3 \oplus 3 \oplus 5 \oplus 5 \oplus 5 \oplus 7 \oplus 7 \oplus 9 \oplus 10 \oplus 10 = 1 \oplus 4 \oplus 8$ *passa-se a considerar apenas um* *jogo Nim com três pilhas de 1, 4 e 8 feijões, respectivamente, pois a estratégia vencedora consiste em obrigar o nosso adversário a jogar a partir de posições com Soma-Nim nula.*

Como retirar feijões numa pilha é o mesmo que fazer a Soma-Nim entre o número de feijões da pilha em causa e o resultado da Soma-Nim do número de feijões de todas as pilhas, as jogadas vencedoras são determinadas através dos seguintes cálculos:

$$\begin{aligned} 1 \oplus 13 &= 1 \oplus (8+4+1) = 1 \oplus 8 \oplus 4 \oplus 1 = 8 \oplus 4 = 12 \\ 4 \oplus 13 &= 4 \oplus (8+4+1) = 4 \oplus 8 \oplus 4 \oplus 1 = 8 \oplus 1 = 9 \end{aligned}$$

e

$$8 \oplus 13 = 8 \oplus (8+4+1) = 8 \oplus 8 \oplus 4 \oplus 1 = 4 \oplus 1 = 5.$$

A primeira e segunda Soma-Nim equivalem a jogadas impossíveis, pois não se pode jogar de 1 para 12 e nem de 4 para 9, uma vez que não é possível acrescentar feijões numa pilha de feijões, mas sim retirar. Assim, conclui-se que não é destas pilhas de feijões que se deve retirar os feijões nesta jogada.

Como na última Soma-Nim os valores obtidos permitem realizar uma jogada válida, conclui-se que existe apenas uma jogada vencedora, a que consiste em retirar 5 feijões da pilha de 8 feijões ficando com 3 feijões.

Mantenha-se os coeficientes das representações dos números 1 e 4 na base 2*, altere-se a do número 8 para 5 e observe-se a seguinte Soma-Nim:*

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \oplus & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Como $5 = (0101)_2$*, tem-se que a jogada vencedora é aquela em que se retira cinco feijões à pilha com 8 feijões, ficando-se com três, pois* $1 \oplus 4 \oplus 5 = 0$ *e pelo Teorema de*

Bouton, Teorema 2.44, a posição do jogo é P, o que garante que o próximo jogador a jogar não vence o jogo uma vez que bastará ao jogador que efectuou a jogada vencedora copiar a jogada do adversário e desta forma garantir a vitória.

2.2.5 Soma de jogos combinatórios imparciais

A partir de jogos combinatórios imparciais pode-se gerar novos jogos imparciais. O jogo Nim com duas ou mais pilhas de feijões é um exemplo deste tipo de jogos, pois é composto por dois ou mais jogos Nim de uma única pilha de feijões cuja a análise é simples. No entanto, nem todos os jogos gerados por jogos combinatórios imparciais sendo simples de jogar são simples de analisar, isto é, saber se um dos jogadores poderá afirmar antecipadamente que vence o jogo e saber se existirá uma estratégia vencedora para um dos jogadores. A análise do jogo Nim com duas ou mais pilhas de feijões foi efectuada anteriormente e é relativamente simples. Contudo, nem sempre os jogos gerados por jogos combinatórios imparciais são uma combinação de um mesmo jogo e nestes casos a sua análise, que será feita nesta secção, é mais complicada. Começa-se por dar uma definição formal de soma de jogos combinatórios imparciais e, em seguida, mostra-se como funciona a Função Sprague-Grundy da soma, função dada a partir das Funções de Grundy das parcelas. T. Ferguson, em [Ferguson 08], refere que: "É possível determinar a Função Sprague-Grundy da soma de n grafos $G = G_1+G_2+\cdots+G_n$ a partir da Função Grundy de cada uma das componentes. Este resultado, que caso seja possível aplicar, simplifica muito a análise de alguns jogos combinatórios imparciais, foi desenvolvido independentemente por Roland Sprague (1936-7) e por Patrick Grundy (1939).".

Definição 2.56 *Chama-se* Soma de jogos combinatórios imparciais *ao jogo imparcial que:*

- se joga com n jogos combinatórios imparciais, $G_1, G_2, \ldots, G_n$, com $n \in \mathbb{N}$;

- se inicia com uma dada posição em cada um dos jogos escolhidos;

- obriga o jogador, na sua vez de jogar, a escolher um jogo e a efectuar nele uma jogada legal, deixando todos os outros inalterados;

- termina quando os jodagores, jogando alternadamente, atingem uma posição terminal em todos os jogos G_i, com $i = 1, 2, \ldots, n$. Vence aquele que fizer a última jogada legal.

Denota-se este jogo por $G = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$, com $n \in \mathbb{N}$.

Como a cada jogo combinatório imparcial está associado um grafo orientado que lhe serve de modelo, definida a Soma de jogos combinatórios imparciais, segue-se naturalmente na linguagem de grafos a seguinte definição de Soma de Grafos de n jogos.

Definição 2.57 *Sejam $K_1 = (X_1, F_1)$, $K_2 = (X_2, F_2)$, $\ldots$, $K_n = (X_n, F_n)$ n grafos. Chama-se* Soma de Grafos de n jogos *a $K = (X, F)$, onde $K = K_1 + K_2 + \cdots + K_n$ é um novo grafo, o conjunto X é o produto cartesiano $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in X_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, n\}$ e o conjunto dos sucessores de um vértice genérico $(x_1, x_2, ..., x_n)$ é dado por*

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \{(y, x_2, \ldots, x_n) : y \in F(x_1)\} \cup \{(x_1, y, \ldots, x_n) : y \in F(x_2)\} \cup \cdots \cup \\ & \quad \{(x_1, x_2, \ldots, y) : y \in F(x_n)\}. \end{aligned}$$

Observação 2.58 *Note-se que um sucessor do vértice $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é um vértice em que apenas uma das componentes foi modificada. Resulta então deste facto e da Definição 2.57 que o grafo K associado à soma de n jogos $G = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$ é a soma dos grafos $K_1, K_2, \ldots, K_n$ associados a cada um destes jogos, isto é, $K = K_1 + K_2 + \cdots + K_n$.*

Teorema 2.59 *Se os grafos $K_1, K_2, \ldots, K_n$ admitem as Funções Grundy $g_1(x_1), g_2(x_2), \ldots,$ $g_n(x_n)$, respectivamente, então a Função Grundy associada ao grafo $K = K_1+K_2+\cdots+K_n$ é a função g definida por*

$$g\,(x_1, x_2, ..., x_n) = g_1(x_1) \oplus g_2(x_2) \oplus ... \oplus g_n(x_n).$$

Demonstração: Sejam $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ um vértice pertencente ao grafo $K = (X, F)$, $g_i(x_i)$, com $i = 1, 2, \ldots, n$, a Função Grundy associada ao grafo $K_i = (X_i, F_i)$ e p um número inteiro tal que $p = g_1(x_1) \oplus g_2(x_2) \oplus \cdots \oplus g_n(x_n)$.

Começa-se por mostrar que para todo o inteiro $q < p$ existe um vértice $(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n)$ pertencente a $F\,(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ tal que $g\,(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n) = q$.

Se $q = (q_n, \ldots, q_k, \ldots, q_1, q_0)_2$, $p = (p_n, \ldots, p_k, \ldots, p_1, p_0)_2$ e k o maior índice tal que $p_k \neq q_k$, então $p_k = 1$ e $q_k = 0$ uma vez que $p > q$. Seja, ainda, $d = q + p$, a sua expansão binária tem $k + 1$ dígitos, isto é, $d = (d_k, d_{k-1}, \ldots, d_0)_2$ onde $d_k = 1$. Como $p = g_1(x_1) \oplus g_2(x_2) \oplus \cdots \oplus g_n(x_n)$, existe pelo menos um x_i tal que o desenvolvimento binário de $g(x_i)$ tem um 1 na posição k. Então, $d \oplus g_i(x_i) < g_i(x_i)$ pelo que existe no grafo K_i um vértice $y_i \in F_i(x_i)$ tal que $g(y_i) = d \oplus g_i(x_i)$ e

$$\begin{aligned}
g\,(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n) &= g_1(x_1) \oplus \cdots \oplus (d \oplus g_i(x_i)) \oplus \cdots \oplus g_n(x_n) \\
&= d + (g_1(x_1) \oplus \cdots \oplus g_i(x_i) \oplus \cdots \oplus g_n(x_n)) \\
&= d \oplus p \\
&= q \oplus p \oplus p \\
&= q.
\end{aligned}$$

Mostra-se agora que a imagem por g de um sucessor de $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é diferente de p.

Seja $(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n) \in F(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ então $y_i \in F_i(x_i)$ pelo que $g_i(x_i) \neq g_i(y_i)$.

Tem-se que

$$g(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = g_1(x_1) \oplus \cdots \oplus g_i(x_i) \oplus \cdots \oplus g_n(x_n)$$

e

$$g(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n) = g_1(x_1) \oplus \cdots \oplus g_i(y_i) \oplus \cdots \oplus g_n(x_n).$$

Pela Proposição 2.42 v), tem-se que

$$g(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n) \neq g(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = p.$$

Portanto, conclui-se que $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é a Função Grundy do grafo K. ■

Exemplo 2.60 *Seja $G = G_1 + G_2 + G_3 + G_4$ a soma de quatro jogos combinatórios imparciais, cujo valor da Função Grundy é* 6, 12, 9 *e* 27, *respectivamente. Analise-se o jogo G e veja-se como se deve jogar de forma a saber quem o vence e com que jogada.*

Como cada posição do jogo $G = G_1 + G_2 + G_3 + G_4$ é caracterizada pela Soma-Nim dos valores das Funções Grundy associados a cada uma das componentes, ver Teorema 2.59, pode-se então considerar que, cada componente G_i se comporta como uma pilha do jogo Nim de tamanho igual ao seu valor da Função Grundy, isto é, G_1 é um jogo Nim de uma pilha com 6 feijões, G_2 é um jogo Nim de uma pilha com 12 feijões , G_3 é um jogo Nim de uma pilha com 9 feijões e G_4 é um jogo Nim de uma pilha com 27 feijões.

Como se verá a seguir a estratégia para o jogo G é determinada pela estratégia a seguir no jogo de Nim correspondente.

Como $6 = (110)_2$, $12 = (1100)_2$, $9 = (1001)_2$ *e* $27 = (11011)_2$, *tem-se*

$$\begin{array}{cccccc} & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \oplus & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Como $6 \oplus 12 \oplus 9 \oplus 27 = 24$, *pois* $24 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = (11000)_2$, *então pelo Teorema de Bouton, Teorema 2.44, a posição do jogo é* N. *A jogada vencedora é descoberta pelos coeficientes das representações dos números 6, 12, 9 e 27 na base* 2 *e dada pelas duas colunas da matriz, mais à esquerda, da Soma-Nim desses coeficientes.*

Tem-se que

$$\begin{array}{rcl} 6 \oplus 24 & = & (4+2) \oplus (16+8) = 4 \oplus 2 \oplus 16 \oplus 8 = 30 \\ 12 \oplus 24 & = & (8+4) \oplus (16+8) = 8 \oplus 4 \oplus 16 \oplus 8 = 20 \\ 9 \oplus 24 & = & (8+1) \oplus (16+8) = 8 \oplus 1 \oplus 16 \oplus 8 = 17 \end{array}$$

e

$$27 \oplus 24 = (16+8+2+1) \oplus (16+8) = 16 \oplus 8 \oplus 2 \oplus 1 \oplus 16 \oplus 8 = 3.$$

Mantenha-se os coeficientes das representações dos números 6, 12 e 9 na base 2, *altere-se a do número 27 para 3 e observe-se a seguinte Soma-Nim:*

$$\begin{array}{cccccc} & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \oplus & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

O primeiro jogador tendo acesso à estratégia vencedora deve começar por escolher o jogo G_4 *e jogar nele de forma a que o valor da Função Grundy passe de* 27 *para* 3 *(o equivalente a retirar 24 feijões na pilha de 27 feijões), pois como* $3 = (00011)_2$ *e* $6 \oplus 12 \oplus 9 \oplus 3 = 0$ *e pelo Teorema de Bouton, Teorema 2.44, a posição do jogo é* P*, o que garante que o jogador adversário não vence o jogo uma vez que bastará ao jogador que iniciou o jogo copiar a jogada do adversário e desta forma garantir a vitória.*

A análise efectuada, no Exemplo 2.30, para o tabuleiro quadrangular de dimensão 8 $\times$ 8, do jogo Rainha Branca do Exemplo 2.20, pode ser transportada para outro tabuleiro de qualquer dimensão e uma vez conhecida a estratégia para o jogo de um tabuleiro quadrangular de dimensão 8×8 fica também conhecida a estratégia para um jogo Rainha Branca com um tabuleiro de dimensão $n \times n$, com $n \in \mathbb{N}$. Apesar dos exemplos anteriores fazerem referência ao jogo Rainha Branca com apenas uma rainha este pode ser jogado com mais do que uma rainha no tabuleiro quadrangular e, em particular, com mais do que uma rainha em cada casa do tabuleiro.

O jogo Rainha Branca (2) que se inicia com 4 rainhas dispostas conforme se ilustra na Figura 2.58 e o jogo Nimble $N_{(0,0,1,0,0,3,0,0)}$ são semelhantes, pois existe uma correspondência entre os movimentos permitidos num e no outro. Mais, como referido anteriormente, existe uma correspondência entre os movimentos permitidos num jogo Nimble e um jogo Nim, pelo que se pode dizer que o jogo Rainha Branca (2) que se inicia com 4 rainhas dispostas conforme se ilustra na Figura 2.58 é um jogo semelhante ao jogo Nim com quatro pilhas de feijões com 2, 5, 5 e 5 feijões cada uma, ou seja, a tira e o tabuleiro da Figura 2.58 não são mais do que a Soma de jogos combinatórios imparciais.

Conhecida a Função Grundy de um jogo Rainha Branca com apenas uma rainha é possível jogar de forma perfeita qualquer jogo com mais do que uma rainha. Veja-se os Exemplos 2.61 e 2.62.

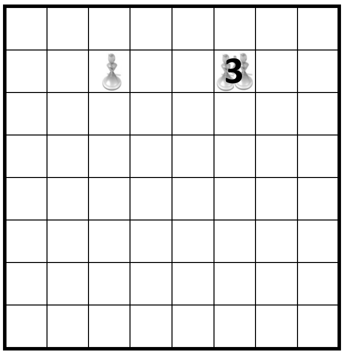


Figura 2.58: Caso particular do Jogo Rainha Branca (2).

Exemplo 2.61 *Considere-se o jogo da Rainha Branca (3), que é um jogo da família do jogo da rainha Branca e que se encontra no Exemplo 2.20, em que o tabuleiro contém 14 rainhas em vez de uma rainha conforme enunciado no Exemplo 2.20, distribuídas conforme se ilustra na Figura 2.59 (a) e com as mesmas regras de movimento da rainha escolhida para se movimentar no tabuleiro das enunciadas no Exemplo 2.20. Além destas regras é ainda permitido passar por cima de casas ocupadas e perde o jogador que não dispuser de nenhum lance legal, ou seja, que encontrar todas as rainhas na casa do canto superior esquerdo, casa* $(0,0)$*. Analise-se o jogo e verifique-se se algum dos jogadores poderá afirmar antecipadamente que vence o jogo. Isto é, existirá uma estratégia vencedora para um dos jogadores?*

Um jogo com n *rainhas pode ser decomposto na soma de* n *jogos com apenas uma rainha pelo que para analisar um jogo deste tipo começa-se por analisar a Função Grundy dos jogos mais simples em que apenas há uma rainha no tabuleiro. Conforme analisado anteriormente, no Exemplo 2.20, as posições (posição* P *ou posição* N*) do jogo Rainha Branca são determinadas pela casa em que a rainha se encontra.*

O jogo Rainha Branca (3), jogado num tabuleiro quadrangular 8×8 *com 14 rainhas* *dispostas conforme se ilustra na Figura 2.59 (a), pode ser decomposto em 14 jogos associados a cada uma das rainhas. Assim, o valor da Função Grundy determina-se calculando a Soma-Nim dos valores da Função Grundy correspondente a cada um destes jogos. Estes valores encontram-se assinalados no tabuleiro do jogo Rainha Branca da Figura 2.59 (b) e tem-se que*

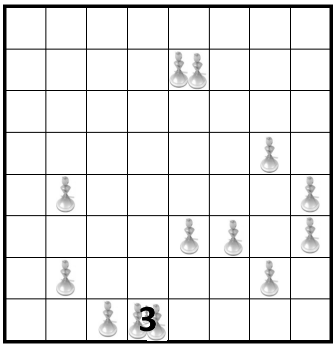
$5 \oplus 5 \oplus 1 \oplus 5 \oplus 0 \oplus 6 \oplus 8 \oplus 1 \oplus 7 \oplus 3 \oplus 6 \oplus 9 \oplus 9 \oplus 9 =$

$= 5 \oplus 8 \oplus 7 \oplus 3 \oplus 9 =$

$= (4+1) \oplus 8 \oplus (4+2+1) \oplus (2+1) \oplus (8+1) =$

$= 4 \oplus 1 \oplus 8 \oplus 4 \oplus 2 \oplus 1 \oplus 2 \oplus 1 \oplus 8 \oplus 1 =$

$= 0.$



(a)

0	1	2	3	4	5	6	7
1	2	**0**	4	5	3	7	8
2	**0**	1	5	3	4	8	6
3	4	5	6	2	**0**	1	9
4	5	3	2	7	6	9	**0**
5	3	4	**0**	6	8	10	1
6	7	8	1	9	10	3	4
7	8	6	9	**0**	1	4	5

(b)

Figura 2.59: (a) Tabuleiro do jogo Rainha Branca (3) numa posição inicial com 14 rainhas e (b) Tabuleiro do jogo Rainha Branca, do Exemplo 2.20, preenchido com os valores da Função Grundy.

Logo, pelo Teorema de Bouton, Teorema 2.44, a posição do jogo é P, o que garante que o primeiro jogador a jogar perde o jogo uma vez que bastará ao jogador adversário copiar a jogada do adversário e desta forma garantir a vitória.

Exemplo 2.62 *Considere-se o jogo da Rainha Branca (4), que é um jogo da família do jogo da Rainha Branca e que se encontra no Exemplo 2.20, em que o tabuleiro contém 8 rainhas em vez de uma rainha conforme enunciado no Exemplo 2.20, distribuídas conforme se ilustra na Figura 2.60 (a) e com as mesmas regras de movimento da rainha escolhida para se movimentar no tabuleiro das enunciadas no Exemplo 2.20. Tal como no Exemplo 2.61 é permitido passar por cima de casas ocupadas e perde o jogador que não dispuser de nenhum lance legal, ou seja, que encontrar todas as rainhas na casa do canto superior esquerdo, casa* $(0, 0)$. *Analise-se o jogo e verifique-se se algum dos jogadores poderá afirmar antecipadamente que vence o jogo. Isto é, existirá uma estratégia vencedora para um dos jogadores?*

O jogo Rainha Branca (4), jogado num tabuleiro quadrangular 8×8 *com 8 rainhas dispostas conforme se ilustra na Figura 2.60 (a), pode ser decomposto em 8 jogos associados a cada uma das rainhas. Assim, o valor da Função Grundy determina-se calculando a Soma-Nim dos valores da Função Grundy correspondente a cada um destes jogos. Estes valores encontram-se assinalados no tabuleiro do jogo Rainha Branca da Figura 2.60 (b) e tem-se*

$3 \oplus 4 \oplus 4 \oplus 9 \oplus 9 \oplus 9 \oplus 6 \oplus 7 =$

$= 3 \oplus 9 \oplus 6 \oplus 7 =$

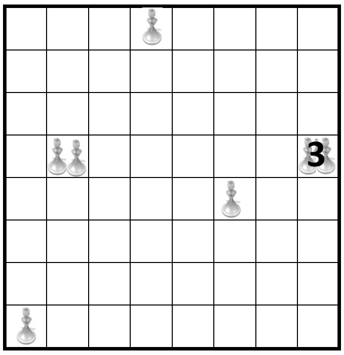
$= (2 + 1) \oplus (8 + 1) \oplus (4 + 2) \oplus (4 + 2 + 1) =$

$= 2 \oplus 1 \oplus 8 \oplus 1 \oplus 4 \oplus 2 \oplus 4 \oplus 2 \oplus 1 =$

$= 8 \oplus 1 \oplus 2 =$

$= 11.$

Como a Soma-Nim é diferente de zero então, pelo Teorema de Bouton, Teorema 2.44,



(a)

0	1	2	3	4	5	6	7
1	2	**0**	4	5	3	7	8
2	**0**	1	5	3	4	8	6
3	4	5	6	2	**0**	1	9
4	5	3	2	7	6	9	**0**
5	3	4	**0**	6	8	10	1
6	7	8	1	9	10	3	4
7	8	6	9	**0**	1	4	5

(b)

Figura 2.60: (a) Tabuleiro do jogo Rainha Branca (4) numa posição inicial com 8 rainhas e (b) Tabuleiro do jogo Rainha Branca, do Exemplo 2.20, preenchido com os valores da Função Grundy.

a posição do jogo é N, o que garante que o primeiro jogador a jogar vence o jogo uma vez que bastará movimentar uma rainha para uma casa em que a nova Soma-Nim seja zero e depois deixar o jogador adversário jogar e copiar a sua jogada. Veja-se como descobrir a casa favorável.

Como $3 = (11)_2$, $9 = (1001)_2$, $6 = (110)_2$ *e* $7 = (111)_2$, *tem-se*

$$\begin{array}{rcccc} & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \oplus & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

A jogada vencedora é descoberta pelos coeficientes das representações dos números 3, 9, 6 e 7 na base 2 *e dada pelas colunas da matriz da soma desses coeficientes, nomeadamente a que se encontra mais à esquerda e as duas que se encontram mais à direita.*

Tem-se que:

$$\begin{aligned} 3 \oplus 11 &= (2+1) \oplus (8+2+1) = 2 \oplus 1 \oplus 8 \oplus 2 \oplus 1 = 8 \\ 9 \oplus 11 &= (8+1) \oplus (8+2+1) = 8 \oplus 1 \oplus 8 \oplus 2 \oplus 1 = 2 \\ 6 \oplus 11 &= (4+2) \oplus (8+2+1) = 4 \oplus 2 \oplus 8 \oplus 2 \oplus 1 = 4 \oplus 8 \oplus 1 = 13 \end{aligned}$$

e

$$7 \oplus 11 = (4+2+1) \oplus (8+2+1) = 4 \oplus 2 \oplus 1 \oplus 8 \oplus 2 \oplus 1 = 4 \oplus 8 = 12.$$

A primeira, terceira e quarta Soma-Nim equivalem a jogadas impossíveis pois não se pode jogar de 3 para 8, nem de 6 para 13 e nem de 7 para 12, uma vez que não é possível acrescentar feijões numa pilha de feijões, mas sim retirar. Assim, conclui-se que estas não são as pilhas de feijões a alterar.

Como na segunda Soma-Nim o valor obtido permite realizar uma jogada válida, conclui-se que existe apenas uma jogada vencedora que consiste em retirar 7 feijões da pilha de 9 feijões ficando com 2.

Mantenha-se os coeficientes das representações dos números 3, 6 e 7 na base 2*, altere-se a do número 9 para 2 e observe-se a seguinte Soma-Nim:*

$$\begin{array}{rcccc} & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \oplus & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Como a nova Soma-Nim é igual a zero tem-se que a jogada vencedora é aquela em que se escolhe uma das rainhas que se encontrar a casa $(3,7)$ *e se movimenta para a casa* $(3,4)$*, cujo valor da Função Grundy é igual a 2, conforme se encontram assinalados no tabuleiro do jogo Rainha Branca da Figura 2.60 (b).*

Veja-se a seguir um exemplo que envolve três jogos para ilustrar a soma de jogos combinatórios imparciais em que cada um dos jogos é apresentado de forma diferente dos outros. Primeiramente apresenta-se os jogos, nos Exemplos 2.63, 2.64 e 2.65, e de seguida propõe-se um exercício, o Exercício 2.66, como soma dos três jogos apresentados nos Exemplos 2.63, 2.64 e 2.65.

Exemplo 2.63 *Lim (retirado de [NS 04])*

Este jogo, inventado por Jorge Nuno Silva, ultiliza três pilhas de feijões.

Cada jogada consiste em escolher duas pilhas, retirar o mesmo número de feijões de cada uma delas e somar esse número à terceira. Perde o jogador que não puder jogar, por, na sua vez, encontrar duas pilhas vazias.

Por exemplo, duas jogadas válidas são dadas por $(5,3,7) \rightarrow (2,6,4) \rightarrow (4,4,2)$, *cujo diagrama pode ver-se na Figura 2.61.*

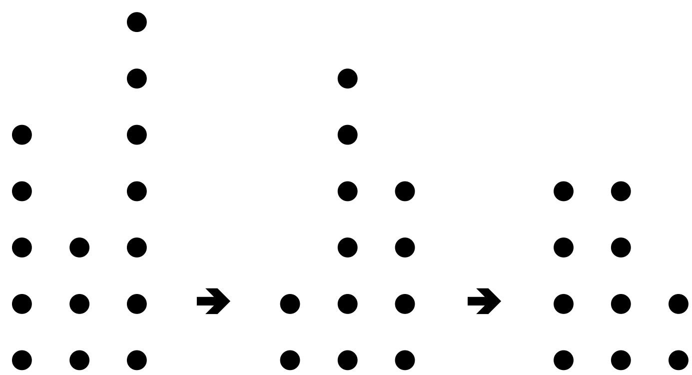


Figura 2.61: Diagrama de duas jogadas possíveis no jogo Lim que se inicia com três pilhas com 5, 3 e 7 feijões.

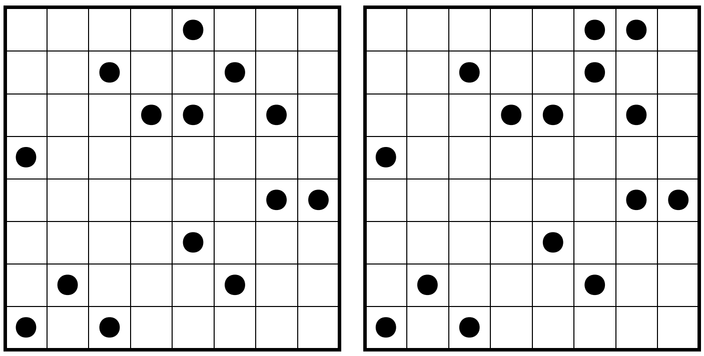
Exemplo 2.64 *Plainim (retirado de [NS 04])*

Num tabuleiro de xadrez colocam-se várias peças iguais. Numa jogada só se podem re-

tirar e adicionar peças numa única linha do tabuleiro. Cada casa pode conter, no máximo, uma peça. Uma jogada consiste em retirar uma peça e, nas casas à direita dessa (se as houver), colocar e remover peças à vontade. Isto é, as casas à direita da peça retirada podem permanecer como estavam (ocupadas ou vazias) ou passar de ocupadas a vazias ou de vazias a ocupadas.

Ganha quem retirar a última peça.

Observe-se um exemplo, ver Figura 2.62, de jogada legal, onde se jogou na primeira linha, retirando uma peça e juntando, à direita desta, duas outras.



(a) (b)

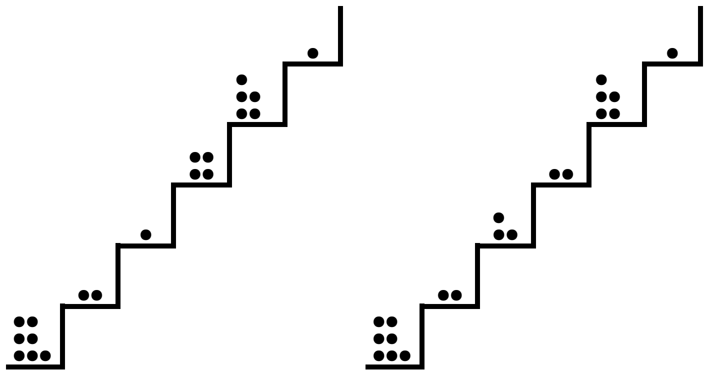
Figura 2.62: (a) Tabuleiro do jogo Plainim numa posição inicial e (b) Tabuleiro do jogo Plainim após jogada do primeiro jogador, onde retirou a peça da primeira linha, do tabuleiro em (a), e juntou à direita desta duas outras.

Exemplo 2.65 *Escadas (retirado de [NS 04])*

Há n degraus numa escada. Cada degrau contém um número inteiro não negativo de peças. Cada jogada consiste em passar algumas peças de um degrau para o degrau imediatamente abaixo. Perde quem, ao querer jogar, constatar que todas as peças se encontram já no andar térreo, de onde se não podem mover mais.

Outra implementação consiste em colocar peças de damas em casas consecutivas de uma fila de um tabuleiro, sendo permitido deslocar algumas de uma casa para a que lhe estiver imediatamente à esquerda.

Um $n-$*uplo de inteiros não negativos pode representar a situação em cada momento. Assim, a jogada* $(7,2,1,4,5,1) \rightarrow (7,2,3,2,5,1)$ *corresponde à jogada ilustrada na Figura 2.63.*



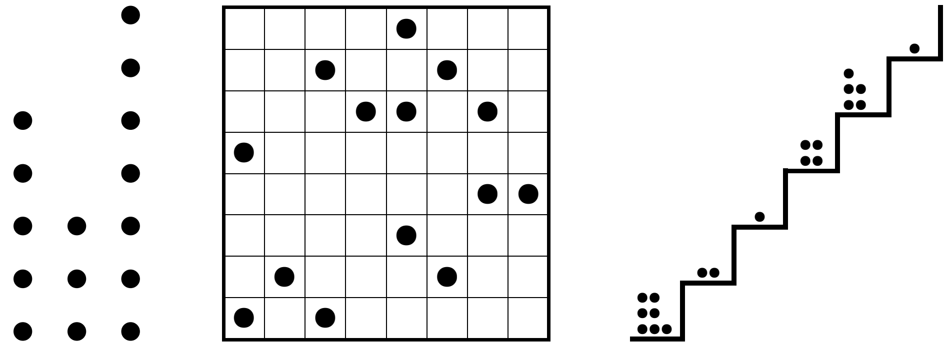
(a) (b)

Figura 2.63: (a) Diagrama do jogo Escadas numa posição inicial e (b) Diagrama do jogo Escadas após jogada do primeiro jogador, onde movimentou duas peças do 4.º degrau para o 3.º degrau, do diagrama em (a).

Exercício 2.66 *Seja* $G = G_1 + G_2 + G_3$ *a soma de três jogos combinatórios imparciais. O jogo* G_1 *corresponde ao jogo apresentado no Exemplo 2.63, cuja posição inicial corresponde à da Figura 2.64 (a), o jogo* G_2 *corresponde ao jogo apresentado no Exemplo 2.64, cuja posição inicial corresponde à da Figura 2.64 (b), e o jogo* G_3 *corresponde ao jogo apresentado no Exemplo 2.65, cuja posição inicial corresponde à da Figura 2.64 (c).*

Algum dos jogadores poderá afirmar antecipadamente que vence o jogo? Isto é, existirá uma estratégia vencedora para um dos jogadores?

A resolução deste exercício é deixada a cargo do leitor.



(a) (b) (c)

Figura 2.64: (a) Diagrama do jogo G_1, jogo Lim, numa posição inicial, (b) Tabuleiro do jogo G_2, jogo Plainim, numa posição inicial e (c) Diagrama do jogo G_3, jogo Escadas, numa posição inicial, do Exemplo 2.66.

De seguida apresenta-se e analisa-se um outro Jogo Combinatório Imparcial, o *Arbusto*, um jogo inventado por John Conway. Este jogo, ver Figura 2.65, é constituído por canas simples e é frequentemente considerado um jogo adequado para a aprendizagem da Teoria de jogos combinatórios imparciais.

Este jogo desenvolve-se num desenho de um arbusto, isto é, um conjunto de n segmentos ligado a um *chão*, com $n \in \mathbb{N}$, ver Figura 2.65.

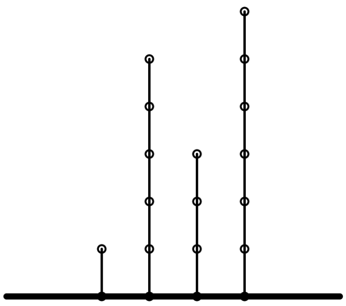
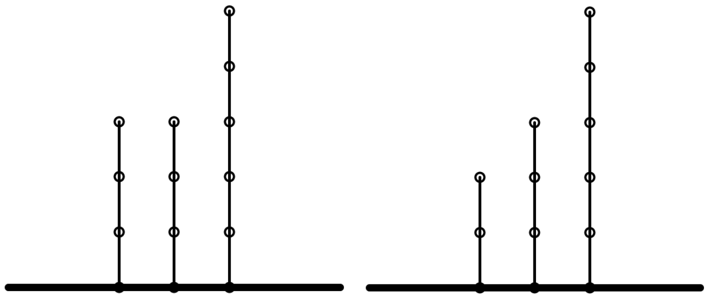


Figura 2.65: Desenho do jogo Arbusto com quatro bambus de canas simples.

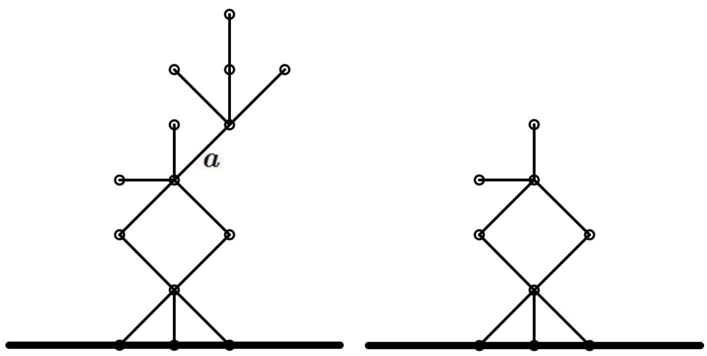
Neste trabalho, analisa-se a versão imparcial deste jogo em que cada jogador alternadamente e na sua vez de jogar, pode apagar (cortar) um dos segmentos do desenho. J.

P. Neto e J. N. Silva, em [NS 04], referem que "Cada jogada consiste em apagar um dos segmentos, sendo que todos os segmentos que ficarem, assim, sem ligação ao chão, também devem ser apagados, ganhando quem cortar o último segmento.", ver Figuras 2.66 e 2.67.



(a) (b)

Figura 2.66: (a) Desenho do jogo Arbusto numa posição inicial com 3 bambus de canas simples e (b) Desenho do jogo Arbusto após o jogador escolher o segmento superior do primeiro bambu, da esquerda para a direita, para apagar no desenho em (a).



(a) (b)

Figura 2.67: (a) Desenho do jogo Arbusto numa posição inicial, com 1 arbusto e (b) Desenho do jogo Arbusto após o jogador escolher o segmento a para apagar do desenho em (a).

Exemplo 2.67 *Considere-se o jogo Arbusto da Figura 2.68, retirado de [Silva 99], aqui chamado "cão", pela sua analogia com este animal, e veja-se as jogadas efectuadas por dois jogadores até ao fim do jogo, onde não se fazem jogadas necessariamente perfeitas.*

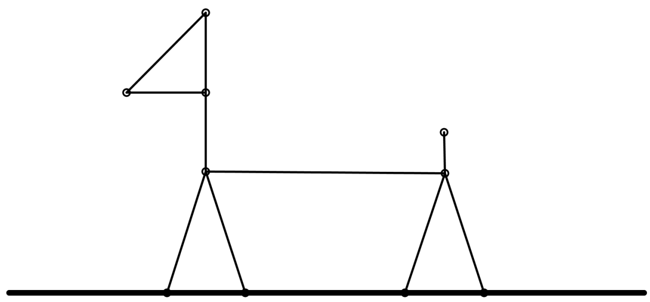


Figura 2.68: Desenho do jogo Arbusto numa posição inicial.

O primeiro jogador a jogar, apaga o segmento que corresponde ao pescoço do cão e em consequência disso fica-se com três segmentos, os da cabeça do cão, sem "ligação indirecta" ao chão, pelo que estes também são apagados, conforme se ilustra na Figura 2.69.

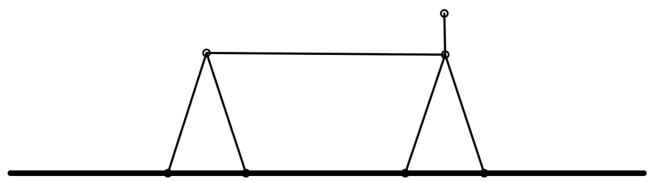


Figura 2.69: Desenho do jogo Arbusto após o jogador ter efectuado a sua jogada no desenho da Figura 2.68, apagando o segmento que corresponde ao pescoço do cão e, consequentemente, os três segmentos que formam a cabeça, por estes deixarem de ter "ligação indirecta" com o chão.

De seguida, o jogador seguinte apaga o segmento que corresponde à cauda do cão conforme se ilustra na Figura 2.70.

Figura 2.70: Desenho do jogo Arbusto após o jogador ter efectuado a sua jogada no desenho da Figura 2.69, apagando o segmento que corresponde à cauda do cão.

O jogador que iniciou o jogo apaga o segmento que corresponde ao tronco do cão conforme se ilustra na Figura 2.71.

Figura 2.71: Desenho do jogo Arbusto após o jogador ter efectuado a sua jogada no desenho da Figura 2.70, apagando o segmento que corresponde ao tronco do cão.

O jogador adversário apaga o segmento que corresponde à pata dianteira do cão, posicionada mais à frente, conforme se ilustra na Figura 2.72.

Figura 2.72: Desenho do jogo Arbusto após o jogador ter efectuado a sua jogada no desenho da Figura 2.71, apagando o segmento que corresponde à pata dianteira do cão, posicionada mais à frente.

O jogador que iniciou o jogo apaga o segmento que corresponde à pata traseira do cão, posicionada mais atrás, conforme se ilustra na Figura 2.73.

O jogador adversário apaga o segmento que corresponde à pata dianteira do cão conforme se ilustra na Figura 2.74.

Figura 2.73: Desenho do jogo Arbusto após o jogador ter efectuado a sua jogada no desenho da Figura 2.72, apagando o segmento que corresponde à pata traseira do cão, posicionada mais atrás.

Figura 2.74: Desenho do jogo Arbusto após o jogador ter efectuado a sua jogada no desenho da Figura 2.73, apagando o segmento que corresponde à pata dianteira do cão.

O jogador que iniciou o jogo apaga o segmento que corresponde à pata traseira do cão conforme se ilustra na Figura 2.75, vencendo o jogo.

Figura 2.75: Desenho do jogo Arbusto após o jogador ter efectuado a sua jogada no desenho da Figura 2.74, apagando o segmento que corresponde à pata traseira do cão, vencendo o jogo.

T. Ferguson, em [Ferguson 08], refere que "um bambu com um único ramo de n segmentos é equivalente a um jogo Nim com uma pilha de n feijões, com $n \in \mathbb{N}$, em que, em cada jogada, o jogador pode retirar tantos feijões quantos os que se queira até ao máximo de feijões existentes na pilha". Acrescenta ainda que: "Jogar um jogo Arbusto com mais do que um bambu, isto é, jogar uma soma de jogos de canas simples de bambu é equivalente a jogar Nim". Assim, o desenho apresentado na Figura 2.65 é simplesmente um jogo de Nim com quatro pilhas com 1, 5, 3 e 6 feijões.

Exemplo 2.68 *Considere-se o jogo Arbusto da Figura 2.76, caracterize-se a posição do jogo e escolha-se as jogadas vencedoras, se for caso disso.*

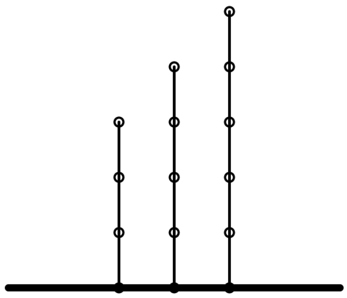


Figura 2.76: Desenho do jogo Arbusto com três bambus de canas simples.

Este jogo é equivalente ao jogo Nim com três pilhas com 3, 4 e 5 feijões.

Determine-se então $3 \oplus 4 \oplus 5$.

$3 \oplus 4 \oplus 5 =$

$= (2+1) \oplus 4 \oplus (4+1) =$

$= 2 \oplus 1 \oplus 4 \oplus 4 \oplus 1 =$

$= 2.$

Como $3 \oplus 4 \oplus 5 = 2$, *então pelo Teorema de Bouton, Teorema 2.44, a posição do jogo é* N.

Como $3 = (11)_2$, $4 = (100)_2$ *e* $5 = (101)_2$, *tem-se*

$$\begin{array}{cccc} & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & 0 & 0 \\ \oplus & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

A jogada vencedora é descoberta pelos coeficientes das representações dos números 3, 4 e 5 na base 2 *e dada pela coluna central da matriz da soma desses coeficientes.*

Tem-se que

$$\begin{aligned} 3 \oplus 2 &= (2+1) \oplus 2 = 2 \oplus 1 \oplus 2 = 1 \\ 4 \oplus 2 &= 4 \oplus 2 = 6 \end{aligned}$$

e

$$5 \oplus 2 = (4+1) \oplus 2 = 4 \oplus 1 \oplus 2 = 7.$$

As duas últimas Soma-Nim equivalem a jogadas impossíveis, pois não se pode jogar de 4 para 6, nem de 5 para 7, uma vez que não é possível acrescentar feijões numa pilha de feijões, mas sim retirar. Assim, conclui-se que estas não são as pilhas de feijões a alterar.

Como na primeira Soma-Nim o valor obtido permite realizar uma jogada válida, conclui-se que existe apenas uma jogada vencedora que consiste em retirar 2 feijões da pilha de 3 feijões ficando com 1.

Mantenha-se os coeficientes das representações dos números 4 e 5 na base 2*, altere-se a do número 3 para 1 e observe-se a seguinte Soma-Nim:*

$$\begin{array}{cccc} & 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 & 0 \\ \oplus & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Como a nova Soma-Nim é igual a zero tem-se que a jogada vencedora é aquela em que, no desenho da Figura 2.76, se escolhe o primeiro bambu, da esquerda para a direita, e deste se apaga o segmento do meio, ficando apenas com um segmento (o que apresenta a ligação com o chão), visto que o segmento superior deste mesmo bambu acabará por ficar sem ligação e, portanto, também será apagado.

O primeiro jogador tendo acesso à estratégia vencedora deve começar por colocar o jogo numa posição P*, a vista anteriormente, e desta forma garantir a vitória, pois o jogador* *adversário, o segundo a jogar, não vence o jogo uma vez que bastará ao jogador seguinte copiar a jogada do adversário.*

J. P. Neto e J. N. Silva, em [NS 04], referem que "Cada arbusto concreto não é, em geral, a soma de arbustos menores, porque as partes não estão, usualmente separadas. Portanto, a teoria da soma de jogos, apresentada atrás, não nos ajuda neste caso. Contudo, há dois princípios que permitem facilitar a determinação do valor da Função Grundy de cada posição.". Apresenta-se de seguida estes dois princípios, o *Princípio da Nimdade* e o *Princípio da Fusão.*

Princípio da Nimdade *Se num vértice convergem n canas, então estas podem ser substituídas pela sua Soma-Nim.*

Considere-se a árvore da Figura 2.77 (retirada de [Ferguson 08]), isto é, um arbusto com uma raiz e por isso com um único caminho para atingir o chão e analise-se a substituição de uma Soma-Nim, num vértice, pelo facto de nele convergirem duas canas. Posteriomente procede-se de forma análoga para os casos em que convergem num vértice mais do que duas canas.

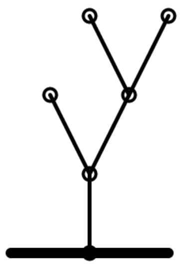


Figura 2.77: Desenho do jogo Arbusto com uma árvore.

Veja-se como funciona o princípio enunciado para encontrar o bambu equivalente à árvore do desenho da Figura 2.77. O desenho tem dois vértices com dois ramos. O mais elevado destes vértices tem dois ramos, cada um com um segmento e a Soma-Nim é zero, pois $1 \oplus 1 = 0$, por isso os dois segmentos podem ser substituídos por um ramo com zero segmentos. Ou seja, os dois ramos podem ser apagados pelo que o desenho apresentaria a forma de Y, conforme se ilustra na Figura 2.78.

O mesmo raciocínio pode ser usado para mostrar que os dois segmentos do desenho da Figura 2.78, que convergem no segmento disposto mais a baixo, podem ser removidos. Assim, a árvore da Figura 2.77 é equivalente a um bambu de uma cana, conforme se ilustra na Figura 2.79.

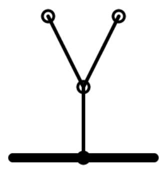


Figura 2.78: Desenho do jogo Arbusto após aplicar-se o *Princípio da Nimdade* ao desenho da Figura 2.77, com a remoção dos dois segmentos que convergem no vértice mais elevado que tem dois ramos.

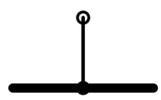


Figura 2.79: Desenho do jogo Arbusto após aplicar-se o *Princípio da Nimdade* ao desenho da Figura 2.78, com a remoção dos dois segmentos que convergem no vértice que se encontra disposto mais a baixo.

Observação 2.69 *O "crescimento de uma árvore" pode ser resumido numa figura simples, ver Figura 2.80, usada por W. Zielonka em [Zielonka 08].*

Na Figura 2.80 (a) o segmento curvo, denotado por x, denominado lacete*, ligado directamente ao chão por um vértice tem o valor da Função Grundy igual a $G(x)$ e na Figura*

2.80 (b) o segmento curvo ligado ao chão por um segmento, denotado por $(1 : x)$, *tem o valor da Função Grundy igual a* $G(1 : x) = G(x) + 1$, *onde* $+$ *representa a adição usual. Para mais detalhes consulte-se [Zielonka 08] onde se prova por indução esta propriedade.*

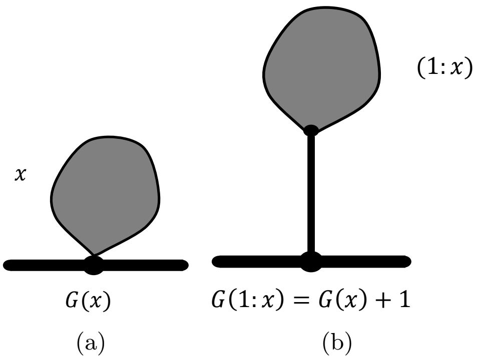


Figura 2.80: (a) Desenho do jogo Arbusto com um segmento curvo, denotado por x, ligado directamente por um vértice ao chão, com Função Grundy igual a $G(x)$ e (b) Desenho do jogo Arbusto com um segmento curvo ligado ao chão por um segmento, denotado por $(1{:}x)$, com Função Grundy igual a $G(x)+1$.

Exemplo 2.70 *Considere-se a árvore da Figura 2.81 (retirada de [Zielonka 08]), isto é, um arbusto com uma raiz e por isso com um único caminho para atingir o chão, explique-se e determine-se o valor da Função Grundy.*

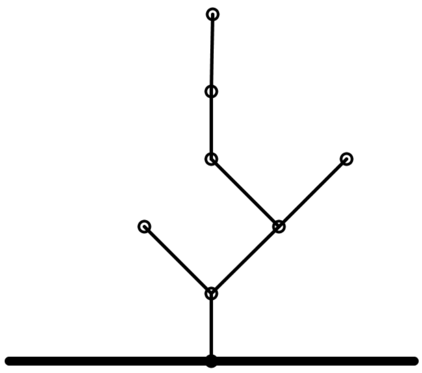


Figura 2.81: Desenho do início do jogo Arbusto com uma árvore.

O Princípio Nimdade permite trabalhar desde os segmentos terminais até à raiz, de modo sucessivo, simplificando a "vegetação" e culminando na obtenção de um bambu de canas simples, conforme se ilustra na Figura 2.82.

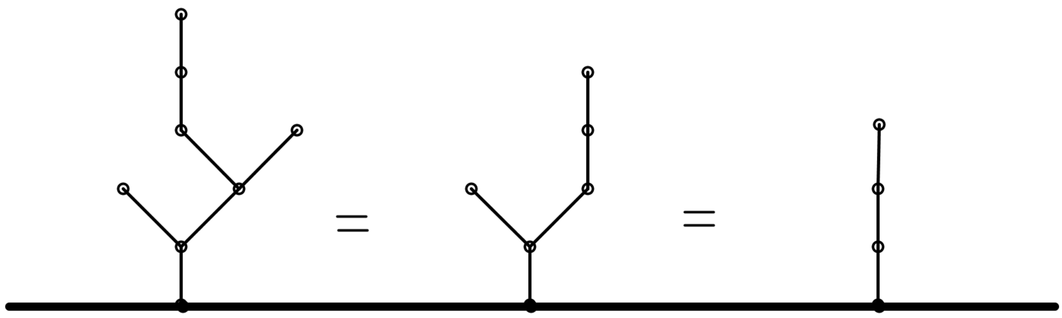


Figura 2.82: Aplicação do *Princípio da Nimdade* ao desenho do jogo Arbusto, da Figura 2.81.

Determine-se agora o valor da Função Grundy de cada posição:

- na primeira árvore da Figura 2.83, tem-se

$$1 + (1 \oplus 3) = 3$$

onde o 1 adicionado, com a adição usual, a $1 \oplus 3$ *surge do exposto anteriormente com a análise da Figura 2.80 e* $1 \oplus 3$ *é a Soma-Nim entre o valor da Função Grundy correspondente ao ramo da esquerda da árvore e o ramo da direita da árvore, respectivamente. O valor* 3 *usado na Soma-Nim anterior surge do resultado da soma* $1 + (3 \oplus 1)$*, que se determina usando a soma usual de* 1 *(ver a análise da Figura 2.80) e* $3 \oplus 1$*, onde o* 3 *é o valor da Função Grundy correspondente ao ramo da esquerda da árvore e o* 1 *é o valor da Função Grundy correspondente ao ramo da direita, antes do ramo direito da árvore.*

- na segunda árvore da Figura 2.83, tem-se

$$1 + (1 \oplus 3) = 3$$

onde o 1 *adicionado, com a adição usual, a* $1 \oplus 3$ *surge do exposto anteriormente (ver a análise da Figura 2.80) e* $1 \oplus 3$*, onde o 1 é o valor da Função Grundy correspondente ao ramo da esquerda e o* 3 *é o valor da Função Grundy correspondente ao ramo da direita da árvore.*

O jogo mencionado anteriormente é equivalente ao jogo Nim com uma pilha de 3 feijões e, portanto, o valor da Função Grundy é igual a 3, conforme se ilustra na terceira árvore da Figura 2.83.

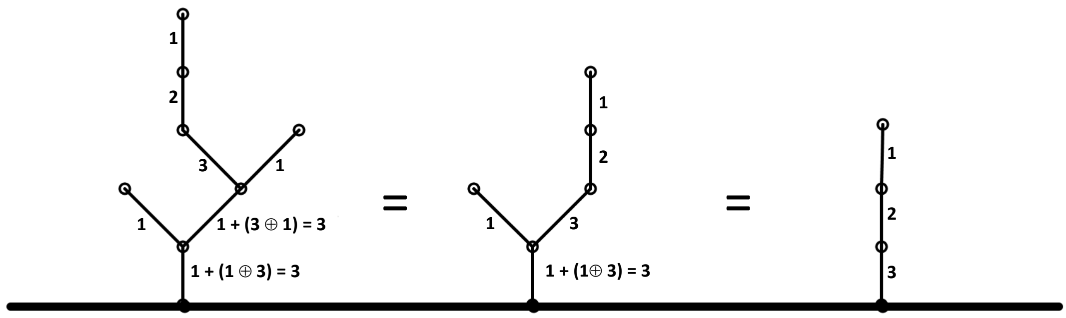


Figura 2.83: Aplicação do *Princípio da Nimdade*, com indicação/determinação do valor da Função Grundy ao desenho do jogo Arbusto da Figura 2.81.

Exemplo 2.71 *Determine-se o valor da Função Grundy da árvore da Figura 2.84, retirada de [Ferguson 08].*

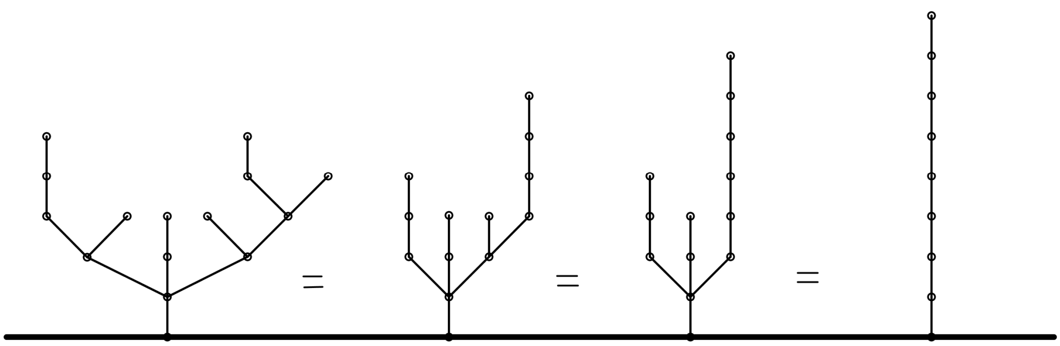


Figura 2.84: Aplicação do *Princípio da Nimdade* ao desenho do jogo Arbusto da primeira árvore desta figura.

O valor da Função Grundy de cada posição é dado por:

- na primeira árvore da Figura 2.84,

$$1 + (3 \oplus 2 \oplus 6) = 8$$

pois

$$\begin{aligned} 1 + (3 \oplus 1) &= 3 \text{ (é o valor da Função Grundy do ramo da esquerda da árvore)} \\ & \; 2 \text{ (é o valor da Função Grundy do ramo do centro da árvore)} \\ 1 + (1 \oplus (1 + (2 \oplus 1))) &= 6 \text{ (é o valor da Função Grundy do ramo da direita da árvore);} \end{aligned}$$

- na segunda árvore da Figura 2.84,

$$1 + (3 \oplus 2 \oplus 6) = 8$$

pois

$$\begin{aligned} & \; 3 \text{ (é o valor da Função Grundy do ramo da esquerda da árvore)} \\ & \; 2 \text{ (é o valor da Função Grundy do ramo do centro da árvore)} \\ 1 + (1 \oplus 4) &= 6 \text{ (é o valor da Função Grundy do ramo da direita da árvore);} \end{aligned}$$

- na terceira árvore da Figura 2.84,

$$1 + (3 \oplus 2 \oplus 6) = 1 + 7 = 8$$

pois

$$\begin{aligned} & 3 \text{ (é o valor da Função Grundy do ramo da esquerda da árvore)} \\ & 2 \text{ (é o valor da Função Grundy do ramo do centro da árvore)} \\ & 6 \text{ (é o valor da Função Grundy do ramo da direita da árvore).} \end{aligned}$$

O jogo mencionado anteriormente é equivalente ao jogo Nim com uma pilha de 8 feijões e, portanto, o valor da Função Grundy é igual a 8.

Princípio da Fusão *Cada ciclo pode ser fundido num vértice sem alterar o valor da Função Grundy da "vegetação".*

J. P. Neto e J. N. Silva, em [NS 04], referem que "o chão pode ser interpretado como um vértice único e *fundir* dois vértices adjacentes consiste em fazê-los coincidir, transformando o segmento que os une num lacete.". Aborde-se este princípio usando casos mais gerais, onde se permite que os arbustos tenham mais que uma raiz, que tenham caminhos fechados - *ciclos* ou segmentos curvos a ligar um vértice a si mesmo, também denominados *lacetes*, ver Figura 2.85 (retirado de [Zielonka 08]).

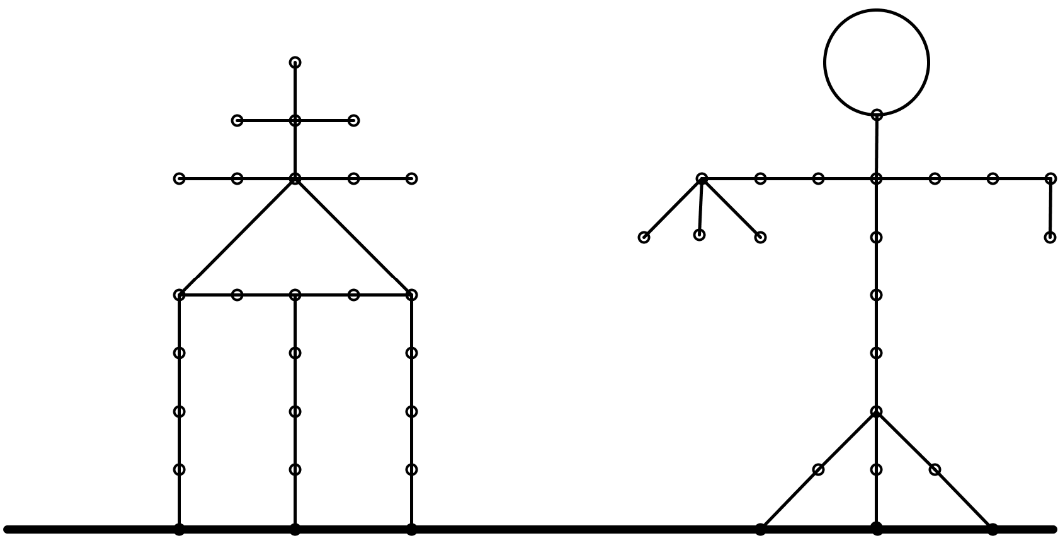


Figura 2.85: Desenho do início do jogo Arbusto com arbustos com mais do que uma raiz, com ciclos e/ou lacetes.

Segundo J. P. Neto e J. N. Silva, em [NS 04], os lacetes têm um comportamento igual ao de um segmento vulgar, no que diz respeito ao jogo, podendo assim ser substituídos por segmentos, conforme se ilustra no exemplo da Figura 2.86 retirado de [NS 04], onde o primeiro passo foi identificar o chão como um só vértice, o segundo foi fundir os vértices, o terceiro foi substituir os lacetes por arestas vulgares e último foi uma aplicação do Princípio da Nimdade.

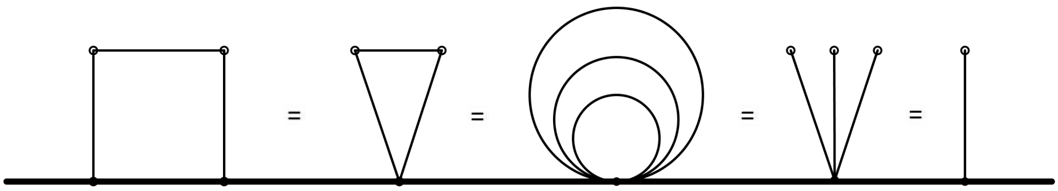


Figura 2.86: Sequência de desenhos do jogo Arbusto, onde se faz uso do facto do chão se poder identificar com um só vértice.

Exemplo 2.72 *Considere-se o jogo Arbusto da Figura 2.87, retirado de [NS 04].*

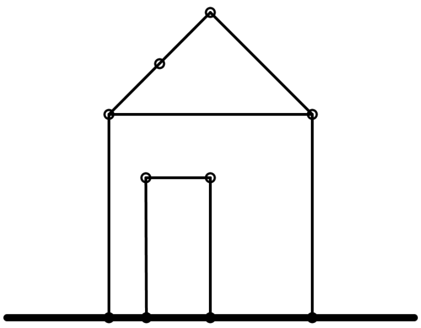


Figura 2.87: Desenho do início de um jogo Arbusto.

Será que um dos jogadores pode afirmar antecipadamente que vence o jogo? Isto é, existirá uma estratégia vencedora para um dos jogadores?

Observe-se a Figura 2.88 e repare-se que se fez aplicações sucessivas dos Princípios da Nimdade e da Fusão para determinar o valor da Função Grundy. Conforme analisado anteriormente, na Figura 2.86, a porta é equivalente a uma aresta e o telhado desaparece pois aplica-se o Princípio da Fusão aos seus vértices (vértices inferiores do telhado) e de *seguida uma Soma-Nim das arestas ($(1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1) = 0$) pelo que fica-se com quatro lacetes. No terceiro passo da Figura 2.88 fica-se com dois segmentos (cuja Soma-Nim é zero e por isso formam três lacetes) e uma aresta isolada. Assim, toda a figura tem valor da Função Grundy igual a 1, correspondem a uma posição N. Pelo que é possível afirmar antecipadamente que o jogador que iniciar o jogo, cujo desenho do arbusto se encontra na Figura 2.87, tem uma estratégia vencedora e, portanto, é o vencedor.*

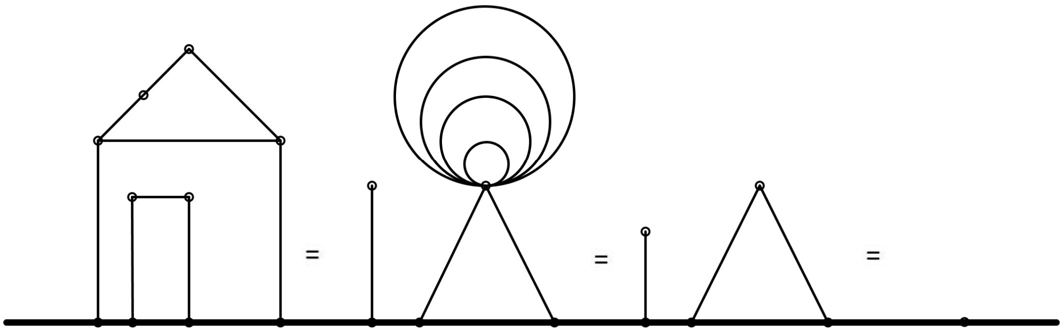


Figura 2.88: Sequência de desenhos do jogo Arbusto, do Exemplo 2.72, onde se aplicou os Princípios da Nimdade e da Fusão.

A resolução dos Exercícios 2.73 e 2.74 é deixada a cargo do leitor.

Exercício 2.73 *Considere-se o jogo Arbusto da Figura 2.89, retirada de [Ferguson 08].*

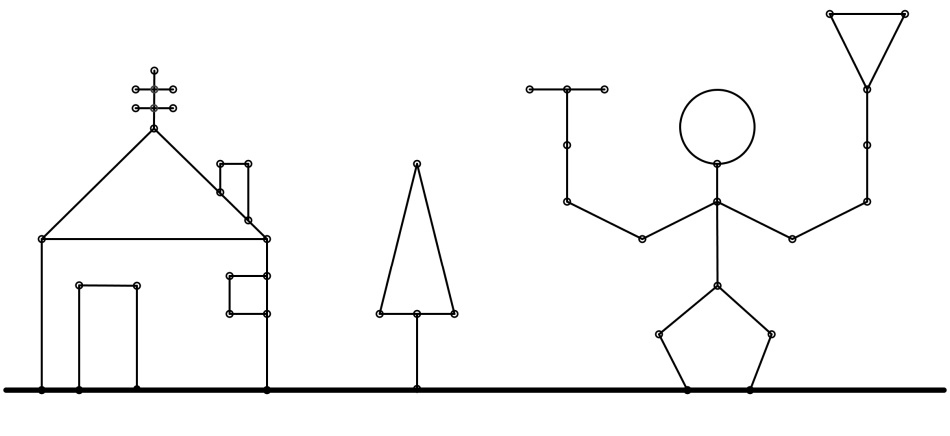


Figura 2.89: Desenho do início do jogo Arbusto do Exercício 2.73.

Será que um dos jogadores pode afirmar antecipadamente que vence o jogo? Isto é, existirá uma estratégia vencedora para um dos jogadores?

Exercício 2.74 *Considere-se o jogo Arbusto da Figura 2.90, retirada de [Guy 89].*

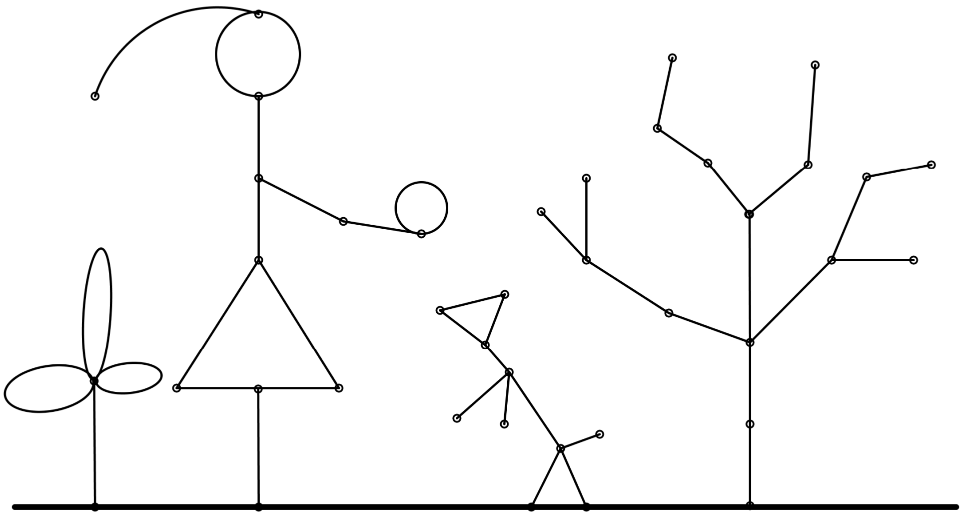


Figura 2.90: Desenho do início do jogo Arbusto do Exercício 2.74.

Será que um dos jogadores pode afirmar antecipadamente que vence o jogo? Isto é, existirá uma estratégia vencedora para um dos jogadores?

Capítulo 3

O jogo no processo de ensino-aprendizagem

Neste capítulo, que se encontra dividido em três secções, pretende-se relatar uma experiência do uso pedagógico dos Jogos Matemáticos na Escola onde leccionei no ano lectivo 2009/2010, no âmbito das actividades extra-curriculares do Plano Anual de Actividades da Escola e no âmbito das actividades curriculares, na disciplina de Matemática. Por outro lado, evidência-se a importância da inserção da abordagem dos Jogos Matemáticos durante o processo de ensino-aprendizagem dos alunos, ou seja, comprova-se o valor da utilização dessa ferramenta alternativa em referências feitas nos documentos oficiais que regulam o ensino da Matemática em Portugal. Na primeira secção, *O Jogo no Currículo de Matemática*, referem-se os documentos curriculares de carácter geral, como os que no todo ou em parte se referem explicitamente ao ensino da Matemática nos vários Ciclos do Ensino, indicando a sua natureza e propósito e nos quais é feita a referência da aplicação de jogos em orientações metodológicas explícitas e materiais didácticos aconselhados pelos autores dos referidos documentos. Na segunda secção, *O Concurso Inventa um jogo Nim*, apresenta-se a actividade extra-curricular proposta aos alunos na Escola onde leccionei no ano lectivo 2009/2010 e descreve-se a metodologia utilizada na sua concretização. Na terceira secção, *Uma aplicação do jogo Nim em sala de aula*, apresenta-se uma tarefa proposta no âmbito das actividades curriculares na disciplina de Matemática e explica-se a metodologia utilizada na aplicação da mesma.

3.1 O Jogo no Currículo de Matemática

Em Portugal, nos últimos vinte anos ocorreram as maiores mudanças ao nível do sistema educativo. A. Canavarro, L. Santos e S. Machado, em [CSM 06], referem que "A última grande reforma educativa, muitas vezes designada por Reforma Roberto Carneiro, iniciou-se em 1986, com a publicação da nova Lei de Bases (Lei n.º 46/86), em vigor ainda hoje. No seu seguimento iniciou-se um processo de revisão curricular, e novos programas para as diferentes disciplinas foram então elaborados e homologados no início dos anos 90.". Neste trabalho procura-se referir apenas os documentos curriculares decorridos dos processos de revisão curricular do Ensino Básico e do Ensino Secundário a partir dos anos 90 e nos quais é feita a referência da aplicação de jogos em orientações metodológicas explícitas e materiais didácticos aconselhados.

Em Portugal, o ensino da Matemática nos três Ciclos do Ensino Básico tem como principal instrumento regulador o programa datado do início dos anos noventa (1990 para o 1.º Ciclo e 1991 para os 2.º e 3.º Ciclos). Este programa está desdobrado em dois volumes, o primeiro dos quais surge como capítulo do livro *Organização Curricular e Programas* e o segundo designa-se por *Programa de Matemática: Plano de Organização do Ensino--Aprendizagem.* O primeiro inclui uma introdução, com uma referência à perpectiva em que são encarados os conteúdos temáticos, as finalidades e objectivos gerais (formulados em termos de valores/atitudes, capacidades/aptidões e conhecimentos), uma descrição dos conteúdos matemáticos a tratar (com indicações dos respectivos objectivos de aprendizagem) e a orientação metodológica e para a avaliação. O segundo, para além de repetir os objectivos gerais já incluídos no primeiro volume, contém uma introdução indicando o propósito do documento, indicações gerais sobre a gestão do programa, uma proposta de repartição dos conteúdos temáticos por ano de escolaridade e um roteiro com indicação de diversas unidades em que se podem leccionar os conteúdos previstos, com sugestões metodológicas para cada um deles e uma indicação do peso relativo em termos do número de aulas.

A *Reorganização Curricular do Ensino Básico* culminou com a publicação do Decreto-Lei n.º 6/2001. Nesse ano foi publicado o *Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais*, que contém um capítulo dedicado à disciplina de Matemática, onde são enunciadas duas finalidades para a Matemática no Ensino Básico, referidos os diversos aspectos gerais da competência matemática a desenvolver ao longo da Educação Básica e apresentados um conjunto de orientações metodológicas gerais para a disciplina. Este documento inclui ainda um capítulo apresentando aspectos da competência matemática por área temática, para o conjunto da educação básica e para cada um dos ciclos (em particular, para o 3.º Ciclo), bem como as experiências de aprendizagem a proporcionar aos alunos, aspectos transversais e recursos a considerar na aprendizagem da Matemática.

O *Reajustamento do Programa de Matemática do Ensino Básico* foi uma das acções definidas no Plano de Acção para a Matemática que resultou de um processo de reestruturação dos programas em vigor desde 1991, para os adequar ao Currículo Nacional do Ensino Básico. Este reajustamento, agora designado por *Novo Programa de Matemática* *do Ensino Básico* (*NPMEB*) foi homologado a 28 de Dezembro de 2007 e consistiu na elaboração de um documento único que engloba para cada um dos Ciclos do Ensino Básico as finalidades do ensino da Matemática, os objectivos gerais do ensino da Matemática, os temas matemáticos e capacidades transversais, as orientações metodológicas e aspectos ligados à gestão curricular e à avaliação. A concretização do NPMEB tem vindo a ser feita de forma faseada, tendo começado por uma etapa de experimentação nos 1.º, 3.º, 5.º e 7.º anos de escolaridade (40 professores experimentadores, 10 por cada ano de escolaridade em que se iniciou o processo), etapa que se iniciou em 2008/09. Ao mesmo tempo que continuou o processo de experimentação em 2009/10, iniciou-se o processo de generalização do NPMEB aos Agrupamentos de Escolas e/ou Escolas não Agrupadas que para tal se candidataram. Contudo, no ano lectivo 2010/2011, dando-se seguimento ao processo de experimentação nas turmas piloto iniciado em 2008/2009 e ao processo iniciado em 2009/2010 por candidatura das escolas, todos os alunos dos 1.º, 3.º, 5.º e 7.º anos de escolaridade encontram-se abrangidos obrigatoriamente pelo NPMEB.

Os programas de Matemática do Ensino Secundário foram revistos em 1991 e de novo em 1997. Em 2002 foi introduzido um Currículo Nacional com novas orientações para o ensino desta disciplina. Segundo A. Canavarro, J. Ponte e L. Santos, em [CPS 00], "Este ajustamento, que corresponde na verdade a um novo programa, arruma de forma diferente os temas constantes no programa anterior, fazendo corresponder cada tema a um período lectivo. Além disso, dá uma ênfase muito maior à calculadora gráfica, tornando-a de uso obrigatório, e salienta a importância das actividades de modelação, exploração e investigação por parte dos alunos.". Entretanto, em 2002, a nova reestruturação dos planos de estudo do Ensino Secundário, envolveu o desaparecimento da disciplina de Métodos Quantitativos e o surgimento de novas disciplinas de Matemática, para os Cursos Tecnológicos e para os alunos das áreas das ciências sociais e a revisão do programa dos alunos dos agrupamentos ditos científicos. Assim, considera-se para o Ensino Secundário, o Programa de Matemática A dirigido aos alunos dos Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas; o Programa de Matemática B dirigido aos alunos dos Cursos Científico-Humanístico de Artes Visuais, Tecnológicos de Construção Civil e Edificações, Electrotecnia e Electrónica, Informática, Administração, Marketing e de Desporto; e o Programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais dirigido aos alunos do Curso Geral de Ciências Sociais e Humanas e o Curso Tecnológico de Ordenamento do Território.

Muitos são os grupos de trabalho e de pesquisa em Educação Matemática que propõe o uso de jogos no ensino da Matemática. Da análise dos documentos oficiais anteriormente referidos, nomeadamente do Ensino Básico, permite-se identificar algumas observações sobre o uso de jogos no ensino da Matemática.

Em [DEB 04], aquando da apresentação de uma componente de *suportes de aprendizagem* (meios e ferramentas que ajudam os alunos a formar e a desenvolver as suas capacidades matemáticas ao longo do seu percurso e no contexto de todos os blocos de conteúdos), nomeadamente no que se refere ao *Material*, os autores referem a enorme dependência das crianças do que concerne ao ambiente a aos materiais colocados à sua disposição uma vez que, estes necessitam de usá-los explorando-os, experimentando-os e manipulando-os por forma a encontrar uma resposta ao solicitado pelo professor. Assim, referem que "Sendo os objectos da Matemática entes abstractos, é importante que os conceitos e relações a construir possam ter um suporte físico. Se por um lado a manipulação de material pode permitir a construção de certos conceitos, por outro lado, pode servir, também, para a representação de modelos abstractos permitindo, assim, uma melhor estruturação desses conceitos. (...) Convém ainda realçar a importância que alguns jogos podem ter no desenvolvimento de competências necessárias à resolução de problemas. Os tradicionais jogos de "pedrinhas" e "pauzinhos", os dominós, o rapa, os jogos de dados e de cartas, os jogos de construções e os jogos de estratégia (batalha naval, damas, xadrez, "mastermind", etc.), são exemplos de jogos que favorecem: a capacidade de aceitar e seguir uma regra; o desenvolvimento da memória; a agilidade de raciocínio; o gosto pelo desafio; a construção de estratégias pessoais. A par de enorme prazer que proporcionam constituem ainda, como todos os jogos, um importante factor de crescimento emocional e social. A partir de jogos simples já conhecidos, o professor deverá estimular as crianças a inventarem novos jogos.".

Em [DEB 91a], aquando na apresentação do tema *Números e Cálculo*, para o 5.º ano de escolaridade, os autores registam a importância da motivação dos alunos pela Matemática como motor de arranque das aprendizagens: " (...) a realização de actividades sugestivas - jogos, problemas (...) que levem os alunos a fazer conjecturas, a querer descobrir, a gostar de Matemática (...)". Ainda na apresentação geral do tema e referindo-se ao subtópico dos *Números inteiros e números decimais*, os autores sugerem que os alunos resolvam "problemas, jogos numéricos que envolvam comparação, enquadramentos , etc., visando um melhor conhecimento dos números.". Mais adiante na especificação do subtópico referido, este apresenta-se com o seguinte objectivo a atingir: "Procurar uma estratégia adequada à resolução de um problema ou jogo de números.". Ainda neste documento, mas relativo ao 6.º ano de escolaridade, é referido, aquando da apresentação do tema *Números* *e Cálculo*, a importância dos jogos na aquisição de conhecimento: "O estudo da adição e da subtração limitar-se-á a casos simples e será feito com carácter lúdico, contribuindo assim para desenvolver nos alunos uma atitude positiva face à Matemática. Será através de jogos, da resolução de problemas sugestivos, que os alunos irão descobrir intuitivamente as regras do cálculo.".

Em [DEB 91b], aquando da exposição dos *Objectivos Gerais*, os autores referem nos *Objectivos referentes aos Conhecimentos*, nomeadamente no *Desenvolver processos e técnicas de tratamento de informação* que " Utilizar o conceito de probabilidade para resolver problemas simples ligados a jogos, (...)". Mais adiante, na apresentação do tema *Números e Cálculo*, para o 7.º ano de escolaridade, os autores registam a importância dos alunos adquirirem gosto pela Matemática para mais facilmente compreenderem os conteúdos: "(...) tirando partido do aspecto lúdico, desenvolvendo uma relação afectiva do aluno com a Matemática. Brincando e explorando, ir-se-á caminhando de descoberta em descoberta (...)". Ainda neste tema, o primeiro subtema *Problemas e jogos sobre números*, do tema *Conhecer melhor os números* nas *Observações/sugestões metodológicas* referem que "Alguns jogos numéricos poderão constituir um desafio à imaginação contribuindo para desenvolver o raciocínio.". Ainda neste documento, mas relativo ao 8.º ano de escolaridade, na apresentação do tema *Geometria*, os autores salientam a importância de actividades lúdicas, mais uma vez na preocupação dos alunos adquirirem gosto pela Matemática: "A resolução de puzzles geométricos permitirá aos alunos (...) uma actividade lúdica (...)" e "(...) é importante que o aluno realize experiências, faça tentativas e corrija erros.". No que concerne ao 9.º ano de escolaridade, aquando da apresentação do tema *Funções e Estatística e Probabilidades*, os autores referem a necessidade do uso de jogos, quando no estudo dos conceitos probabilísticos: "(...) na abordagem intuitiva que se faz de Probabilidades, onde o aspecto lúdico da Matemática ganha força (...)".

Segundo as *Competências Essencias, no Currículo Nacional do Ensino Básico*, em [GLLNDFOJRAS 01], "(...) todos os alunos devem ter oportunidades de se envolver em diversos tipos de experiências de aprendizagem (...)" e os autores fazem uma referência específica à importância dos jogos como uma das Experiências de Aprendizagem a privilegiar: "O jogo é um tipo de actividade que alia raciocínio, estratégia e reflexão com desafio e competição de uma forma lúdica muito rica. Os jogos de equipa podem ainda favorecer o trabalho cooperativo. A prática de jogos, em particular dos jogos de estratégia, de observação e de memorização, contribui de forma articulada para o desenvolvimento de capacidades matemáticas e para o desenvolvimento pessoal e social. Há jogos em todas as culturas e a matemática desenvolveu muito conhecimento a partir deles. Além disso, um jogo pode ser um ponto de partida para uma actividade de investigação ou de um projecto.".

Os autores do Programa de Matemática do Ensino Básico, em [PSGBGSMMO 07], nas suas *Orientações metodológicas gerais*, referem para os três Ciclos do Ensino Básico a importância das tarefas propostas pelo professor, onde registam o uso de jogos como mais uma experiência matemática estruturante na aprendizagem da Matemática escrevendo: "(...) o aluno deve ter diversos tipos de experiências matemáticas, nomeadamente resolvendo problemas, realizando actividades de investigação, desenvolvendo projectos, participando em jogos e ainda resolvendo exercícios que proporcionem uma prática compreensiva de procedimentos.". Ainda no mesmo documento, aquando da esplanação do tema *Geometria e Medida*, para o 1.º Ciclo do Ensino Básico, nomeadamente nos *Recur-*

sos sugeridos nas *Indicações metodológicas*, os autores referem que "Na abordagem da Geometria e Medida (...) o computador possibilita explorações que podem enriquecer as aprendizagens realizadas no âmbito deste tema, nomeadamente através de applets – pequenos programas ou aplicações disponíveis na Internet – e permitir a realização de jogos (...)". Ao longo deste tema e na apresentação dos *Tópicos e objectivos específicos – Geometria* aconselha-se o professor a "Propor a realização de jogos de orientação, percursos e labirintos e as suas representações em papel quadriculado." aquando da leccionação do tópico *Orientação espacial*, nos 1.º e 2.º anos do 1.º Ciclo do Ensino Básico. Mais à frente ainda como nota para a leccionação deste tópico, sugere-se "(...) a realização do jogo da batalha naval.". De seguida, no tema *Organização e Tratamento de Dados*, para o 1.º Ciclo do Ensino Básico, nomeadamente nos *Conceitos específicos* sugeridos nas *Indicações metodológicas*, os autores referem que "O lançamento da moeda ao ar, a extracção de bolas de um saco e o lançamento de dados são exemplos de jogos apropriados para os alunos fazerem aprendizagens sobre este assunto (noção de que uma situação aleatória).".

No que concerne ao Ensino Secundário, refira-se, a título de exemplo, apenas o programa de Matemática dos Cursos Profissionais para o Ensino Secundário onde se dá grande ênfase ao uso do jogo nas aulas de Matemática, nomeadamente com a existência de um módulo (Módulo B5: Jogos e Matemática) destinado na sua totalidade segundo os autores do programa, em [MFLLMFS 05], ao "Desenvolvimento de capacidades matemáticas através do uso de jogos de raciocínio.". Registe-se, do documento referido anteriormente e sobre o assunto supracitado, as competências Matemáticas visadas com a leccionação deste módulo:

- Compreensão do valor motivador de jogos de raciocínio.

- Compreensão de como o envolvimento em actividades de jogos representa um desenvolvimento das capacidades de raciocínio.

- Aptidão para discutir estratégias para os jogos.

- Aptidão para usar a Matemática como forma de analisar e elaborar estratégias ganhadoras para os jogos.

A propósito da importância dos jogos, os autores do programa, em [MFLLMFS 05], referem que "(...) é interessante que os estudantes saibam que a análise de jogos é uma área que pode ser feita a um nível de muita sofisticação, sendo interessante que os estudantes conheçam alguma história ligada aos jogos. Se houver oportunidade, seria vantajosa uma visita às exposições *Pedras que jogam* e *Jogos do mundo*. Poderão ser referidos outros episódios históricos, como os relacionados com o matemático John Nash que ganhou o prémio Nobel por resultados da Teoria dos Jogos (e os outros galardoados com o prémio pela aplicação dessa teoria à Economia) e que foi também um dos inventores do jogo do Hex.".

Nos últimos anos assiste-se a uma maior preocupação com o ensino e aprendizagem da Matemática e principalmente no Ensino Básico esta preocupação resulta essencialmente do insucesso escolar que os alunos têm vindo a revelar na disciplina de Matemática. Tendo em atenção o diagnóstico efectuado pelos professores de Matemática, decorrente da reflexão sobre os resultados dos exames de Matemática do 9.º ano de escolaridade de 2005 e de Junho de 2006, o Ministério da Educação definiu um Plano de Acção para a Matemática. E, neste âmbito, muitas foram e continuam a ser as acções desenvolvidas, em Portugal, por várias entidades relacionando o Jogo e a Matemática. Destaca-se as seguintes:

- Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos[1], promovidos pela Associação Ludus, a Associação de Professores de Matemática, a Sociedade Portuguesa de Matemática e outras entidades com o objectivo de divulgar e promover o interesse pelos jogos, nomeadamente pelos jogos matemáticos. Da lista fazem parte os seguintes jogos: Jogos Poliédricos, Peões, Amazonas, Hex, Ouri, Pontos e Quadrados, Go, Semáforo e Rastros.

- O 1.º Campeonato de Ouri de Évora[2], promovido pelo Departamento de Matemática da Universidade de Évora e pela Delegação Regional do Sul e Ilhas da Sociedade Portuguesa de Matemática, destinou-se aos alunos dos três Ciclos do Ensinos Básico e do Ensino Secundário e teve como objectivo contribuir para despertar o gosto pela Matemática e melhorar a compreensão da sua natureza; desenvolver conhecimentos, aprendizagens e destrezas que se constroem quando se joga, por exemplo, destrezas motoras, rapidez de decisão, velocidade de raciocínio, solidariedade, imaginação, criatividade e a capacidade de criar estratégias; sensibilizar os professores para a utilização do jogo como uma experiência de aprendizagem significativa para os alunos, na sala de aula e na escola e aprofundar o conhecimento das relações entre os jogos e a Matemática.

- A Associação de Professores de Matemática considerou que o tema do ano de 2004 seria *A Matemática e Jogo*, procurando assim dar maior visibilidade a este tema, nomeadamente através da criação de recursos e do envolvimento de professores e alunos na dinamização de actividades relevantes para o ensino e aprendizagem da matemática envolvendo jogos matemáticos. De destacar a exposição *Jogos do Mundo*[3] e a exposição *Matemática em jogo*[4] na Universidade da Beira Interior.

[1]Para saber mais sobre o assunto consultar: http://ludicum.org/cnjm/.
[2]Para saber mais sobre o assunto consultar: http://www.coe08.uevora.pt/.
[3]Para saber mais sobre o assunto consultar: http://www.apm.pt/portal/index.php?id=21926.
[4]Para saber mais sobre o assunto consultar: http://www.museu.ubi.pt/main.php?cix=3123&lang=undefined&v=78901.

- Exposição *Matemática em Jogo*[5] organizada pelo Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e pelo Centro Cultural de Belém, da qual constavam os jogos: Amazonas, Hex, Mancala, Moinho, Nim, Sim, Pontos e Quadrados, Go e Alquerque.

- Constituição da disciplina *Jogos Matemáticos em Contextos de Aprendizagem*[6] no Moodle ERTE/PTE como um pólo aglutinador de informação, recursos e tutoriais sobre Jogos Matemáticos, criada pela ERTE/PTE, Equipa de Recursos e Tecnologias Educativas/Plano Tecnológico da Educação e o CCEMS - Centro de Competências Entre Mar e Serra - Equipa Eureka. Esta equipa organizou os Jogos Matemáticos em cinco áreas sendo elas: Jogos quebra-cabeças, Jogos combinatórios, Jogos abstractos, Jogos aritméticos e Jogos geométricos.

3.2 O *Concurso Inventa um Jogo Nim*

O Despacho 14724/2009 publicado no Diário da República 2.ª série de 1 de Julho fixou o calendário escolar dos estabelecimentos de educação pré-escolar e dos Ensinos Básico e Secundário para o ano lectivo 2009/2010, dando às escolas a possibilidade de "(...) durante um ou dois dias, substituir as actividades lectivas por outras actividades escolares de carácter formativo envolvendo os seus alunos.". Neste sentido, o Conselho Pedagógico da Escola onde leccionei no ano lectivo 2009/2010, Escola Secundária de Montemor-o-Novo, deu parecer favorável a que nos dias 18 e 19 de Fevereiro de 2009, fossem interrompidas as actividades lectivas substituindo-as por outras de carácter igualmente formativo. Do

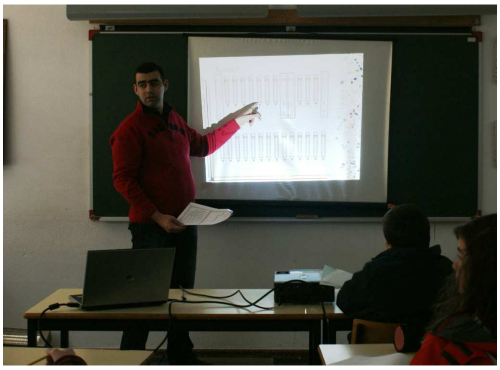
[5] Para saber mais sobre o assunto consultar: http://mat.fc.ul.pt/mej/expo.html.

[6] Para saber mais sobre o assunto consultar: http://www.crie.min-edu.pt/index.php?action=view&id=339&date_id=415&module=calendarmodule&section=9.

conjunto de actividades elaboradas pelos professores do Departamento de Matemática e Ciências Experimentais da referida escola, a integrar no plano de Actividades Escolares de Carácter Formativo, fui proponente, a par de outras, da actividade *Concurso Inventa um Jogo Nim*.

O Concurso destinou-se aos alunos do 3.º Ciclo do Ensino Básico da referida escola, no âmbito da disciplina de Matemática e iniciou-se no dia 19 de Fevereiro de 2010, pelas 14h, respeitando as orientações da Escola e terminou um mês depois. A apresentação do concurso ficou a meu cargo, onde usei uma apresentação em Power Point, conforme se pode observar na Figura 3.1, cujo conteúdo (exemplos retirados de [Pfeiffer 98]) foi entregue numa pasta, aos alunos, juntamente com o regulamento do concurso, com folhas brancas A4, material de escrita, de medição e de desenho, ver Figura 3.2.

(a)



(b)

Figura 3.1: (a) e (b) Apresentação da Actividade *Concurso Inventa um Jogo Nim.*

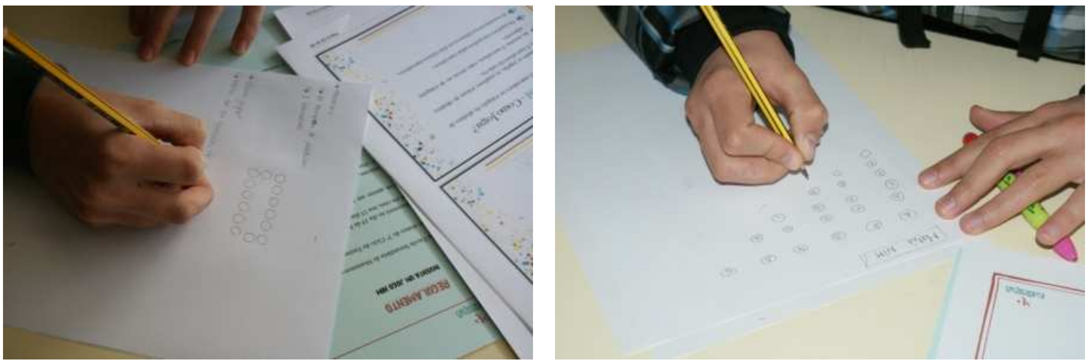
A apresentação iniciou-se com a divulgando aos alunos que "O objectivo deste concurso é seres capaz de imaginar, desenvolver e testar um Jogo Combinatório Imparcial numa variante do jogo Nim.", precedida da leitura do regulamento do concurso. Esclarecidas as dúvidas sobre o objectivo e regulamento do concurso procedeu-se à definição de *Jogo*

(a) (b)

Figura 3.2: (a) e (b) Materiais, em suporte papel, entregue aos alunos.

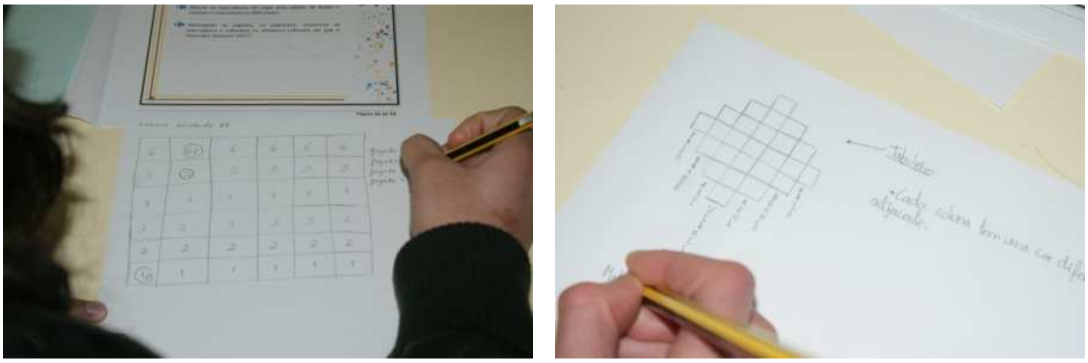
Combinatório Imparcial e exemplificação de alguns jogos disfarçados de jogo Nim: Kayes, Classic Nim, Array Nim, Add-Up Nim e Triangular Nim.

Os alunos participantes iniciaram a elaboração do trabalho a submeter a concurso ainda na sessão de apresentação do mesmo, ver Figuras 3.3, 3.4, 3.5 e 3.6. Posteriormente, analisei as propostas de trabalho e uma semana depois dei o *feedback* necessário à continuação do trabalho. Passadas duas semanas os alunos entregaram os trabalhos finais a concurso.



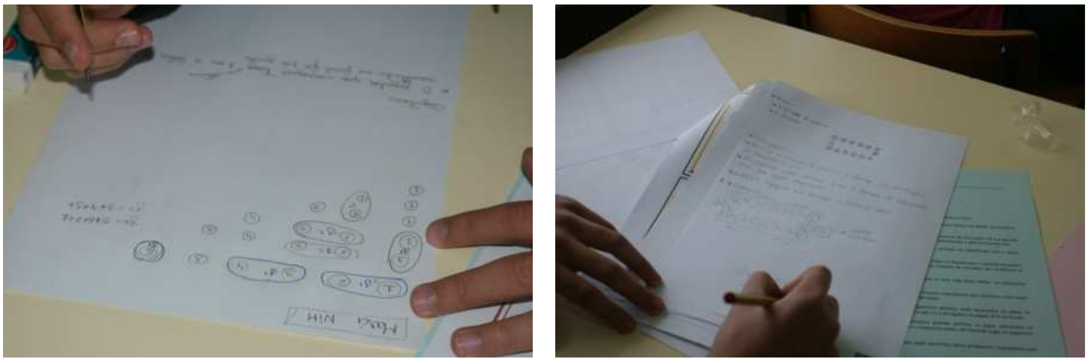
(a) (b)

Figura 3.3: (a) e (b) Construção de um jogo Nim disfarçado.



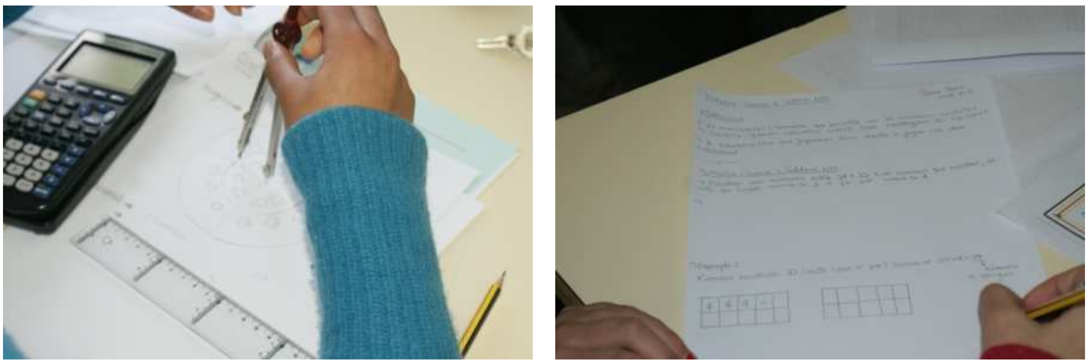
(a) (b)

Figura 3.4: (a) e (b) Construção de um jogo Nim disfarçado.



(a) (b)

Figura 3.5: (a) e (b) Construção de um jogo Nim disfarçado.



(a) (b)

Figura 3.6: (a) e (b) Construção de um jogo Nim disfarçado.

Considero com esta actividade, ter contribuído para a concretização do PMII (Plano de Acção para Matemática II), uma vez que foi proporcionado um espaço, onde os alunos puderam imaginar, desenvolver e testar um jogo matemático, desenvolvendo o raciocínio lógico, o cálculo mental e das noções de estratégia, promovido pelos jogos. Considero ainda, com esta actividade, ter contribuído para a concretização do PEE (Plano Educativo de Escola), uma vez que dinamizei e fomentei a interactividade entre os alunos e as experiências que lhes foram oferecidas, permitiram a transmissão de saberes culturais. A actividade permitiu sensibilizar os alunos para a importância da Matemática no dia-a-dia e do seu aspecto lúdico, pelo que penso ter atingido os objectivos a que me propus.

3.3 Uma aplicação do jogo Nim em sala de aula

Atendendo ao tema deste trabalho, ao interesse que nutro pelos jogos didácticos e à sua aplicação no contexto de sala de aula, bem como à minha frequência numa Acção de Formação para Professores intitulada *Jogos Matemáticos*, promovida pelos Centro de Formação da Sociedade Portuguesa de Matemática e dinamizada pelo Professor Doutor Jorge Nuno Silva, fiquei extremamente motivado para aplicar uma Ficha de Trabalho (ver Anexo 3.1) elaborada na sequência da referida Acção, cujas tarefas tinham como tema de fundo *Sequências de Números*, da Unidade *Ainda os Números* do Programa de Matemática do 8.º ano de escolaridade, e cujo único material necessário à sua concretização era o exigido no jogo Nim, feijões ou outros objectos.

As turmas onde apliquei a Ficha de Trabalho, duas turmas do 8.º ano de escolaridade, da Escola Secundária de Montemor-o-Novo, no ano lectivo 2009/2010, tinham características muito diferentes. Numa turma os alunos revelavam uma atitude muito positiva a todo o tipo de tarefas propostas e, embora fosse uma turma heterógenea no que concerne ao ritmo de aprendizagem, os alunos eram persistentes e autónomos. Na outra, a grande maioria dos alunos revelavam fraca autonomia na realização de tarefas e maiores dificuldades de aprendizagem, nomeadamente no que concerne à interpretação de enunciados, o que os levava a ter grandes dificuldades na conclusão das tarefas propostas, sendo por isso uma turma mais homogénea em todos os sentidos.

Segundo T. Vergani, em [Vergani 93], "Em educação matemática, existem duas tendências principais que orientam a quase totalidade das actividades práticas actualmente propostas aos alunos, a nível de atitudes motivantes. A primeira corrente de motivação opta pela matematização de situações concretas reais, privilegiando o carácter pragmático das aplicações na vida quotidiana. A segunda corrente de motivação opta pelas situações lúdicas, privilegiando o valor do carácter não utilitário da imaginação matematizante; preocupa-se menos com o interesse prático imediato das actividades propostas do que com a experiência da gratuitidade como fonte de prazer.".

Tendo em atenção as características dos alunos, aos quais se propôs a Ficha de Trabalho, procurou-se articular na prática pedagógica e ao longo do ano lectivo as duas tendências já referidas de forma a responder às dificuldades, necessidades e interesses dos mesmos. Assim, e conjuntamente com a utilização de outras estratégias com vista à aquisição de determinados conceitos e competências matemáticas, utilizou-se alguns jogos, adaptados ao perfil e interesse dos alunos, para atingir os objectivos planificados, pois como é referido por P. Pinto, N. Félix e I. Cunha, em [PFC 01], "Os jogos, particularmente os de estratégia, de observação e de memorização, (...) permitem o desenvolvimento de capacidades matemáticas e competências sociais.".

Com a aplicação das tarefas propostas aos alunos, na Ficha de Trabalho, retomou-se a investigação de sequências. Este assunto já havia sido trabalhado aquando da leccionação, no 1.º Período, do tema *Sequências de Números*, da Unidade *Ainda os Números* e, voltou-se a ele com vista a aprofundar o estudo de relações algébricas e sua simbolização e reavaliar os conhecimentos dos alunos sobre esta temática. Não se pretendeu com estas tarefas a aquisição de novos conteúdos, mas sim desenvolver no alunos a capacidade de resolver problemas, adaptando, concebendo e pondo em prática várias estratégias, desenvolver a capacidade de interpretar; expressar e discutir as soluções encontradas e os processos utilizados; formular e testar conjecturas e generalizações, recorrendo à linguagem natural e à linguagem matemática, usando conceitos e procedimentos algébricos de complexidade crescente.

Na aula em que foi proposta a realização da Ficha de Trabalho houve a necessidade de acomodar os alunos, na sala de aula, de acordo com os grupos de trabalho formados para a realização das tarefas. Os grupos foram previamente constituídos pelo professor após, a planificação da aula, ter ponderado sobre os prós e contras dos alunos que deveria constituir um grupo e não outro, por forma a colmatar as dificuldades diagnosticadas e necessidades dos alunos. Após a leitura do enunciado da Ficha de Trabalho os alunos preceberam de imediato que, muito para além dos conceitos e procedimentos algébricos necessários à aquisição das competências matemáticas essenciais e gerais, existia nestas aulas uma grande componente lúdica e, portanto, uma possibilidade de em grupo poderem desenvolver uma actividade estimulante e desafiante cooperando entre si e interajudando-se por forma a concretizarem com sucesso as tarefas propostas. Duas das questões que os alunos teriam de responder, "Haverá uma estratégia vencedora, isto é, uma forma de jogar que o leve sempre à vitória? Conhecida uma das estratégias de jogo (por exemplo, a descoberta na questão anterior) haverá um número específico de feijões com que se deva iniciar o jogo e que leve à vitória do primeiro jogador a jogar?", levavam os alunos a, jogando, formar um pensamento matemático, proporcionar a generalização e prever situações que melhor os auxiliariam na sua próxima jogada. Dessa forma, os alunos não podiam jogar apenas por jogar, mas sim deveriam estar muito atentos a todas as jogadas por forma a encontrar a melhor estratégia que levasse à vitória.

Deve referir-se que, apesar do produto final em ambas as turmas ter sido diferente, em ambas foi igualmente gratificante observar o desenrolar das aulas. Na turma anteriormente mencionada como sendo mais heterógenea, os grupos obtiveram trabalhos mais rigosos na escrita, preocuparam-se em apresentar todas as conclusões e apresentar uma estrutura de trabalho correcta. Na outra turma, a anteriormente mencionada como homogénea, apesar dos alunos terem produzido trabalhos mais pobres em termos escritos, houve, também nesta, uma grande envolvência por parte dos alunos.

Atendendo ao perfil dos alunos e à pretensão a que os mesmos adquiram as competências matemáticas essenciais e gerais, a leccionação das temáticas ao longo do ano lectivo passou também pela utilização, conforme já mencionado anteriormente, de alguns jogos matemáticos, nomeadamente o jogo Nim e jogos Nim disfarçados. Este tipo de abordagem permitiu quase sempre uma maior envolvência dos alunos, uma participação mais activa, permitindo estimular a comunicação matemática. Também os conhecimentos matemáticos anteriores puderam ser maximizados nestas aulas, pelo que considero que sempre que possível e de forma equilibrada deva-se utilizar jogos didácticos nas aulas.

3.4 Anexos

Anexo 3.1 *Ficha de Trabalho.*

Escola Secundária de Montemor-o-Novo

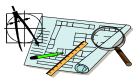
Ministério da Educação

Disciplina de Matemática

Prof. João Paulo M. Mulas

8.º ano de escolaridade — Ano Lectivo 2009/2010

Trabalho de Grupo



Aluno			*Encarregado de Educação*
Nome: ________________________________			Rubrica: ______________
N.º ____	Turma: ____	Data: ___/___/_____	Data: ___/___/_____

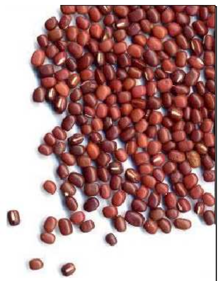
JOGO NIM

Parte I – Joga e Tira conclusões

O Jogo da Subtracção

Número de Jogadores:
Dois jogadores

Material:
Feijões



Regras do jogo:

1. Um jogador será o jogador A e o outro será o B.
2. Começa a jogar o jogador A.
3. Os jogadores jogam alternadamente.
4. Cada jogador pode tirar 1, 2 ou 3 feijões.
5. Ganha o último jogador a jogar, isto é, a tirar o último, os dois ou três últimos feijões.

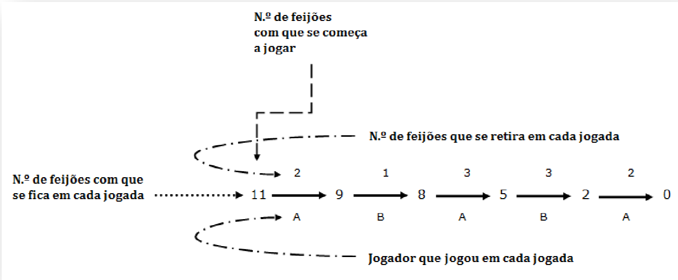
Tarefa: Experimenta jogar começando com 1 feijão. Posteriormente, joga com dois feijões, depois com três, quatro e assim sucessivamente e, responde às questões que se encontram abaixo.

Haverá uma estratégia vencedora, isto é, uma forma de jogar que leve sempre à vitória?

Conhecida uma das estratégias de jogo (por exemplo, a descoberta na questão anterior) haverá um número específico de feijões com que se deva iniciar o jogo e que leve à vitória do primeiro jogador a jogar?

Observações:

1- Regista todas as jogadas como no exemplo:



2- Para cada número inicial de feijões joga um número de vezes suficientes por forma a tentar validar as conjecturas.

3- Alterna as funções que cada elemento cumpre dentro do grupo de trabalho para que todos possam jogar.

Parte II – Análise de Jogo

Introdução:

Entre as estratégias de análise que aparecem com naturalidade podemos identificar algumas.

- ***Elaboração do grafo completo das posições do jogo.*** Para muitos jogos este método, se bem que laborioso, esclarece totalmente. Muitas vezes, após iniciar o grafo do jogo, algumas considerações permitem economizar trabalho.
- ***Analisar do fim para o princípio***. Corresponde a elaborar o grafo do jogo partindo das posições terminais.
- ***Simplificação***. Consiste em considerar situações semelhantes, mas menos complexas, e retirar destas ideias para aplicar ao original.
- ***Fazer analogias com casos típicos***. Por exemplo, conhecer bem o jogo NIM e a sua análise matemática, permite resolver muitos jogos da mesma família.

In: http://educare.pt (No espaço da responsabilidade da Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM))
http://www.educare.pt/educare/Detail.aspx?contentid=A444B0B7A15F4AEF9021D2221992DDA5&opsel=1&schema=1CD970AB0836334EB627B1FF128684C3&channelid=1E5A774A901000B8E0440003BA2C8E70

Usaremos aqui a estratégia de análise de jogo retrógrada, a que consiste em analisar o jogo do fim para o princípio.

Tarefa:

Considera o jogo que se inicia com 13 feijões e as regras enunciadas na Parte I.

1- Escreve a sequência de números inteiros não negativos inferiores a 14.

Cada número que escreveste corresponde ao número de feijões que existem em cada uma das possibilidades de jogada.

Em cada uma das situações és o jogador que irá jogar e portanto, deverás optar por uma qualquer hipótese de colocar o adversário em posição perdedora. Em situação de jogo deves optar sempre por colocar-te numa situação que te leva à vitória. De seguida é só esperar que o segundo jogador faça a sua jogada e voltar a raciocinar da mesma forma para te colocar novamente numa posição vencedora, até terminar o jogo.

Usa a letra N para designar uma possível derrota.

Usa a letra P para designar uma possível vitória.

2- Escreve as letras N ou P junto a cada um dos números da sequência anterior, consoante o seu significado, isto é, se houver alguma hipótese de jogada que te leve à vitória deves escrever a letra P, caso contrário, deves escrever a letra N. Sempre que usares a letra N, em índice, **escreve o número de feijões que retiravas de forma a obter uma posição vencedora** e consequente uma vitória (Exemplo: N_2 - Na jogada em questão se retirar 2 feijões vou colocar-me numa posição vencedora.).

1- **Escreve a sequência de números que se encontram junto a cada letra P.**

2- **Observa a sequência obtida e tira conclusões.**

3- **Escreve a expressão geradora desta sequência.**

4- **Se iniciares um jogo com 115 feijões e fores tu a jogar, haverá alguma estratégia vencedora? Se sim, qual? Caso contrário, diz porquê? E se o número inicial de feijões for 312?**

5- **Qual o número de jogadas necessárias para levar-te à vitória num jogo que se inicie com 62 feijões? Explica a tua resposta sem realizar a análise retrógrada.**
Sugestão: *Recorrendo à questão 2, observa o que acontece se o jogo se iniciar com 9, 10 e 11 feijões ou 13, 14 ou 15 feijões.*

6- **Qual o número de feijões com que se deve iniciar um jogo de forma a ganhar, num número de jogadas igual a 21? Explica a tua resposta.**

7- **Qual o número específico de feijões com que se deve iniciar o jogo de forma a que o primeiro jogador, conhecedor da estratégia vencedora, ganhe? Explica qual a estratégia vencedora, isto é, a forma de jogar que leve sempre à vitória?**

Parte III – Conjecturar com a análise de Jogo

Procede à análise de jogo, conforme sugerido na Parte II, para tirar conclusões considerando que em vez de retirar 1,2 ou 3 feijões se pudesse tirar 1, 2, 3 ou 4 feijões; 1,2,3,4 ou 5 feijões e assim sucessivamente. O que concluis se, em cada jogada, poderes tirar até *n* feijões.

Parte IV – Explorar mais

Procede à análise de jogo, conforme sugerido na Parte II, para tirar conclusões considerando que em vez de retirar 1,2 ou 3 feijões se pudesse tirar apenas 3 ou 4 feijões.

Tarefa:
Considera o jogo que se inicia com 23 feijões e as regras enunciadas anteriormente.

1- Escreve a sequência de números inteiros não negativos inferiores a 24.

2- Escreve as letras N ou P junto a cada um dos números da sequência anterior.

3- Escreve a sequência de números que se encontram junto à primeira letra P, de cada conjunto de três letras P da sequência que escreveste em 1.

4- Observa a sequência obtida e tira conclusões.

5- Escreve a expressão geradora desta sequência.

6- Se iniciares um jogo com 115 feijões e fores tu a jogar, haverá alguma estratégia vencedora? Se sim, qual? Caso contrário, diz porquê? E se o número inicial de feijões for 309?

7- Qual o número de jogadas necessárias para levar-te à vitória num jogo que se inicie com 62 feijões? Explica a tua resposta sem realizar a análise retrógrada.
Sugestão*: Recorrendo à questão 2, observa o que acontece se o jogo se iniciar com 3, 4, 5 e 6 feijões, 10, 11, 12 e 13 feijões, 3, 4, 5 e 6 feijões ou 24, 25, 26 ou 27 feijões.*

8- Qual o número de feijões com que se deve iniciar um jogo de forma a ganhar, num número de jogadas igual a 21? Explica a tua resposta.

BOM TRABALHO !!!

Bibliografia

[ANW 06] Albert, M., Nowakowski, R. e Wolfe, D., *Lessons in Play, An Introduction to the Combinatorial Theory of Games*, A K Peters, Ltd., 2006.

[BBC 00] Beck, A., Bleicher, M. e Crowe, D., *Excursions into Mathematics*, Millennium Edition, AK Peters, Natick, 2000.

[BCG 82] Berlekamp, E., Conway, J. e Guy, R.,*Winning Ways for your Mathematical Plays*, Academic Press, London, 1982.

[BHW 85] Bright, G., Harvey, J. e Wheeler, M., *Learning and mathematics games*, Journal for Research in Mathematics Education, Monograph Number 1, 1985.

[Bouton 01] Bouton, C., *Nim, a Game With a Complete Mathematical Theory*, Annals of Mathematics, 35-39, 1901.

[Cabral 02] Cabral, A., *O jogo no ensino*, Notícias Editorial, Lisboa, 2001.

[Chateau 87] Château, J., *O Jogo e a Criança*, Tradução Guido de Almeida, Editora Summus, São Paulo, 1987.

[CPS 00] Canavarro, A., Ponte, J. e Santos, L., *O currículo de matemática: que problemas? Que mudanças?*, Actas do ProfMat 2000, Lisboa: APM, 84-95, 2000.

[CSM 06] Canavarro, A., Santos, L. e Machado, S., *Actas do XV Encontro de Investigação em Educação Matemática: Orientações curriculares actuais para a Matemática em Portugal*, Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, Milfontes, http://sem.spce.org.pt/encontro2006.htm, 2006.

[CSSN 10] Carvalho, A., Santos C., Silva J. N. e Neto J. P., *History of Combinal Game*, http://ludicum.org/, 2010.

[Ferguson 08] Ferguson, T., *Game Theory*, University of California at Los Angeles, 2008.

[Fletcher 71] Fletcher, J., *The Effectiveness of Simulation Games as Learning Environments: A Proposed Program of Research.* Simulation & Games, 425-454, 1971.

[FM 90] Fiorentini, D. e Miorim, A., *Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da matemática*, Boletim SBEM, São Paulo, Ano 4, 7, 5-10, 1990.

[Gardner 08] Gardner, M., *Rodas, Vida e Outras Diversões Matemáticas*, Biblioteca Desafios Matemáticos, 2008.

[GLLNDFOJRAS 01] Galvão, C., Loureiro, C., Lemos, E., Nunes, F., Duarte, I., Figueiredo, I., Oliveira, I., Janeiro, J., Roldão, M., Abrantes, P. e Santos, Z., *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais, Competências Gerais/Competências Específicas da Matemática*, Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica, 2001.

[Guy 89] Guy, R., *Fair Game: How to play impartial combinatorial games*, COMAP, Inc., Arlington, 1989.

[Grando 04] Grando, R., *O jogo e a matemática no contexto da sala de aula*, Editora Paulus, São Paulo, 2004.

[Guzman 90] Guzmán, M., *Aventuras Matemáticas*, Edições Gradiva, Lisboa, 1990.

[Huizinda 99] Huizinda, J., *Homo Ludens*, Edições Perpsectiva, São Paulo, 1999.

[HW 96] Hardy, G. e Wright, E., *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press, 1996.

[Kishimoto 97] Kishimoto, T., *Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação*, Cortez Editora, São Paulo, 1997.

[DEB 91a] *Organização Curricular e Programas. Ensino Básico 2.º Ciclo*, Ministério da Educação, DEB, Lisboa, Vol. II, 1991.

[DEB 91b] *Organização Curricular e Programas. Ensino Básico 3.º Ciclo*, Ministério da Educação, DEB, Lisboa, Vol. II, 1991.

[DEB 04] *Organização Curricular e Programas Ensino Básico-1.º Ciclo*, Ministério da Educação (4^a Edição), DEB, 2004.

[Macedo 94] Macedo, L., *Ensaios Construtivistas*, Casa do Psicólogo Livraria e Editora Ltda, São Paulo, 1994.

[Machiavelo 08] Machiavelo, A., *Algumas observaçoes sobre a Matemática Recreativa*, Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática, 58, 67-89, 2008.

[MFLLMFS 05] Martins, A., Fonseca, C., Lopes, I., Loura, L., Martins, M., Fonseca, M. e Silva, J., *Programa de Matemática dos Cursos Profissionais*, Ministério da Educação, Direcção-Geral de Formação Vocacional, 2005.

[MF 04] Matos, M. e Ferreira, M., *Matemática e Jogo: Apresentação e Representação*, Revista Educação Matemática, Janeiro/Fevereiro, 76, 17-21, 2004.

[Miranda 01] Miranda, S., *Do fascínio do jogo à alegria do aprender nas séries iniciais*, Edições Papirus, Campinas, 2001.

[MPP 00] Macedo, L., Petty, A. e Passos, N., *Aprender com jogos e situações-problema*, Edições Artmed, Porto Alegre, 2000.

[NS 04] Neto, J. P. e Silva, J. N., *Jogos Matemáticos, Jogos Abstractos*, Gradiva Publicações, 2004.

[NS 06] Neto, J. P. e Silva, J. N., *Jogos Histórias de Família*, Gradiva Publicações, Lisboa, 2006.

[NS 09] Neves, M. e Silva, J. N., *Matemática, Ensino Profissional, Nível 3, Módulo B5 - Jogos e Matemática*, Porto Editora, Porto, 2009.

[Nowakowski 09] Nowakowski, R., *The History of Combinatorial Game Theory*, Dalhousie University, 2009.

[OCC 22] Osgood, W., Coolidge, J. e Chase, G., *Charles Leonard Bouton*, Bulletin (New Series of the American Mathematical Society), 123-124, 1922.

[Petty 95] Petty, A., *Ensaio sobre o Valor Pedagógico dos Jogos de Regras: uma perspectiva construtivista*, Dissertação de Mestrado, Instituto de Psicologia, USP, São Paulo, 1995.

[PFC 01] Pinto, P., Félix, N. e Cunha, I., *Competências essenciais no Ensino Básico*, Visões Multidisciplinares, Colecção Cadernos do Criap, Asa Editores, Porto, 2001.

[Pfeiffer 98] Pfeiffer, S., *Creating NIM Games*, Math Projects Series, 1998.

[PSGBGSMMO 07] Ponte, J., Serrazina, L., Guimarães, H., Brenda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. e Oliveira, P., *Programa de Matemática do Ensino Básico*, Ministério da Educação, DGIDC, 2007.

[Rino 04] Rino, J., *O Jogo, Interacções e Matemática*, Associação de Professores de Matemática, Lisboa, 2004.

[SNS 07a] Santos, C., Neto, J. P. e Silva, J. N., *As somas nim + Jogo "Ouri"*, Colecção Jogos com História, 2007.

[SNS 07b] Santos, C., Neto, J. P. e Silva, J. N., *A Aritmética Binária*, Colecção Jogos com História, 2007.

[SS 06] Schleicher, D. e Stoll, M., *An Introduction To Conway's Games and Numbers*, Moscow Mathematical Journal, 6, 359-388, 2006.

[Silva 99] Silva, J. N., *Jogórios*, Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática, 40, 57-68, 1999.

[Silva 07] Silva, J. N., *Jogos Nim*, Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática, Número especial Jogos Matemáticos, 95-103, 2007.

[Vergani 93] Vergani, T., *Um horizonte de possíveis sobre uma educação matemática viva e globalizante*, Universidade Aberta, Lisboa, 1993.

[Zielonka 08] Zielonka, W., *Combinatorial games*, Université Denis Didert, MPRI, www.liafa.jussieu.fr/˜zielonka, 2008.