UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Mestrado em MATEMÁTICA APLICADA

Biénio de 1997/1999

O Problema de Minimização de um Funcional Integral do Gradiente com Condições Lineares sobre a Fronteira: Existência, Unicidade e Estabilidade das Soluções

Dissertação de Mestrado realizada por
Nelson J. Mestrinho Lopes

Orientador: António Ornelas
Co- Orientador: Vladimir Goncharov

Évora
2001

ÍNDICE

Agradecimentos

Ao meu orientador, Professor Doutor António Ornelas, pelo seu interesse e dedicação na realização desta dissertação.

Ao Professor Doutor Vladimir Goncharov, co-orientador, mestre e amigo, com quem partilhei proveitosos momentos de reflexão e estudo. Nunca esquecerei a sua paciência e disponibilidade para ajudar, esclarecer e ensinar.

À minha família, principalmente aos meus pais e irmã pela amizade e constante encorajamento. Um agradecimento especial à Susana, minha esposa e companheira, pelo apoio e abnegação ao longo destes dois últimos anos.

Aos muitos colegas e amigos que tudo fizeram, desde o primeiro momento, para me apoiar e encorajar. Um voto de agradecimento muito especial para o Conselho Directivo da Escola Superior de Educação de Santarém, não só pelo apoio financeiro, como também pela criação de condições favoráveis que permitiram uma harmoniosa conjugação entre as minhas funções docentes e todos os aspectos relacionados com o Mestrado.

Esta dissertação não inclui as observações
e críticas efectuadas pelo juri.

1. Introdução

Nesta dissertação estudada-se o problema de minimização de um funcional integral do gradiente, com função integranda escalar, no espaço de Sobolev $\langle a, . \rangle + W_0^{1,1}(\Omega)$ das funções de $W^{1,1}$ lineares na fronteira de Ω, sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Este estudo é feito, em primeiro lugar, na perspectiva da existência e unicidade de mínimo para o funcional. Posteriormente, pretende-se obter selecções, primeiro contínua, depois lipshitziana, em relação ao dado linear (declive) na fronteira de Ω, do conjunto de minimizantes do funcional.

No capítulo 2 são estabelecidas algumas notações e terminologia, bem como alguns conceitos básicos e resultados relativos a espaços de funções (espaços L^p e de Sobolev), Teorema da divergência e Análise Convexa, essenciais nos capítulos seguintes. As principais fontes bibliográficas são [Rockafellar], [Ekeland-Teman], [Brezis], [Adams], [Ziemer], entre outras constantes na bibliografia.

No capítulo 3 abordam-se as condições necessárias e suficientes para existência de solução do problema de minimização em estudo. Este capítulo tem por base os artigos [Cellina1] e [Cellina2], publicados em 1993, [Friesecke], publicado em 1994 e [Sychev], publicado em 2000. De referir que este último artigo surgiu neste trabalho numa fase posterior, tendo-se tornado particularmente influente na forma como o teorema de existência de solução é enunciado e demonstrado. Na demonstração intervêm o Teorema de cobertura de Vitali e funções de suporte. Neste capítulo é também abordada a questão da unicidade de solução.

No capítulo 4, aprofunda-se a questão da existência de mínimo para o funcional integral. Com esse objectivo, constrói-se uma função que depende continuamente do declive na fronteira, que minimiza o integral, para quase todo os valores do declive para o qual o mínimo existe, e minimiza o convexificado do funcional, para todo o declive. Na demonstração tem papel importante o teorema de Vitali e também o teorema de Baire. Este capítulo baseia-se no artigo [Goncharov-Ornelas], preprint em 1994.

Com o capítulo 5 aperfeiçoa-se o resultado do capítulo 4, construindo-se explicitamente uma função do declive na fronteira, lipschitziana, que minimiza o funcional, para todo o declive para o qual o mínimo existe (em vez de ser para quase todos), e minimiza o funcional convexificado, para todo o declive. Este capítulo baseia-se no artigo [Dal Maso-Goncharov-Ornelas], publicado em 1999.

2. Preliminares

Este capítulo destina-se a apresentar algumas notações utilizadas ao longo do texto, assim como algumas noções básicas que se inserem no contexto da presente dissertação. Os teoremas surgirão sem as respectivas demonstrações, sendo sempre indicadas as suas referencias bibliográficas.

2.1. Primeiras notações e alguma terminologia

2.1.1. Ao longo de todo o texto, salvo referência em contrário, Ω designará um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. O seu complementar será representado por Ω^c. Os pontos (ou vectores) de $\mathbb{R}^n$ representam-se por $x = (x_1, ..., x_n)$, onde $x_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$. O conjunto $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ será designado por $\overline{\mathbb{R}}$. Se $x, y \in \mathbb{R}^n$, o produto interno de x por y é

$$\langle x,\, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

e a norma de x é

$$|x| = \sqrt{\langle x,\, x\rangle}.$$

Considerem-se $A, B \subset \mathbb{R}^n$, $x, y \in \mathbb{R}^n$. A distância entre os pontos x, y é

$$\mathrm{d}(x, y) = |x - y|;$$

a distância entre x e A é dada por

$$\mathrm{d}(x, A) = \inf\{|x - a| : a \in A\};$$

o diâmetro de A é definido como sendo

$$\mathrm{diam}(A) = \sup\{|x - y| : x, y \in A\}.$$

Considerando $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos também

$$\lambda A = \{\lambda a : a \in A\},$$

$$A + B = \{a + b : a \in A,\, b \in B\}.$$

Ao conjunto $A + b$ chamamos <u>translação de A por b</u>.

2.1.2. Se $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, onde cada α_i é um inteiro não negativo, α chama-se um <u>multi-índice</u>, sendo o seu comprimento dado por

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

Se $x = (x_1, \ldots, x_n)$, teremos $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$.

2.1.3. Denotaremos a <u>bola unitária</u> em $\mathbb{R}^n$ por

$$B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\},$$

e a <u>bola unitária aberta</u> em $\mathbb{R}^n$ por

$$\mathring{B}_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}.$$

Consideremos um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$. O <u>fecho de A</u> é o conjunto

$$\overline{A} = \bigcap_{\epsilon > 0} (A + \epsilon B_n);$$

o <u>interior</u> e a <u>fronteira de A</u> são dados por

$$\text{int}\, A = \{a \in A : \exists \epsilon > 0, a + \epsilon B_n \subset A\},$$

e

$$\partial A = \overline{A} \setminus \text{int}\, A.$$

2.1.4. Dados dois vectores x e y de $\mathbb{R}^n$, diremos que x e y são <u>ortogonais</u>, escreve-se $x \perp y$, quando $\langle x, y \rangle = 0$. Dado um subconjunto S de $\mathbb{R}^n$, designa-se por <u>complemento ortogonal de S</u>, o conjunto

$$S^\perp = \big\{x \in \mathbb{R}^n : x \perp y, \forall y \in S\big\}.$$

2.1.5. Dado um subconjunto S de $\mathbb{R}^{n+1}$, denotaremos por $\widehat{S}$ a projecção de S sobre $\mathbb{R}^n$, que se define por

$$\widehat{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists z \in \mathbb{R}, \, (x, z) \in S\}.$$

2.1.6. Um subconjunto S de $\mathbb{R}^n$ diz-se <u>conjunto afim</u> se $(1-\lambda)x+\lambda y \in S$, para quaisquer $x,\, y \in S$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Os subespaços de $\mathbb{R}^n$ são os conjuntos afins que contêm a origem ([Rockafellar], p. 4). Um conjunto afim S é <u>paralelo</u> a um conjunto afim R se, para algum $a \in \mathbb{R}^n$, $R = S + a$. A <u>dimensão de um subconjunto afim</u> de $\mathbb{R}^n$, não vazio, define-se como sendo a dimensão do subespaço que lhe é paralelo (por convenção, a dimensão de $\emptyset$ é -1).

2.1.7. Um conjunto $H \subset \mathbb{R}^n$, afim, de dimensão $n-1$, chama-se um <u>hiperplano</u>. Qualquer o hiperplano pode ser representado na forma $H = \{x : \langle x, b\rangle = \beta\}$, com b e β únicos a menos de um múltiplo comum não nulo. O vector b designa-se vector normal do hiperplano H. Qualquer subconjunto afim de $\mathbb{R}^n$ é intersecção de uma colecção finita de hiperplanos.

Os hiperplanos em $\mathbb{R}^{n+1}$ podem ser representados através de aplicações lineares em $\mathbb{R}^{n+1}$, podendo estas ser representadas na forma

$$(x,h) \mapsto \langle x, b\rangle + h\beta_0\,, \quad b \in \mathbb{R}^n, \quad \beta_0 \in \mathbb{R}.$$

Visto que aplicações lineares não nulas que são multiplos escalares umas das outras dão origem a hiperplanos iguais, apenas é necessário considerar os casos em que $\beta_0 = 0$ ou $\beta_0 = -1$. Para $\beta_0 = 0$, os hiperplanos escrevem-se na forma

$$\{(x,h) : \langle x, b\rangle = \beta\}, \quad 0 \neq b \in \mathbb{R}^n, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Estes são chamados verticais. Para $\beta_0 = -1$, o hiperplano representa-se

$$\{(x,h) : \langle x, b\rangle - h = \beta\}, \quad b \in \mathbb{R}^n, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Se, em vez da igualdade, tivermos uma desigualdade, então os conjuntos descritos representam <u>semi-espaços</u>, que serão <u>abertos</u>, no caso de as desigualdades serem estritas, ou <u>fechados</u>, no caso contrário. Deste modo, podemos falar de semi-espaços associados a hiperplanos.

2.1.8. Se $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ for uma função definida em Ω, o <u>suporte de f</u> define-se como sendo

$$\operatorname{spt} f = \Omega \cap \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}.$$

2.1.9. Sendo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função, define-se <u>domínio efectivo de f</u> como sendo o conjunto

$$\operatorname{dom} f = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < +\infty\}.$$

O conjunto

$$\text{epi}\, f = \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha\}$$

é chamado epigráfico de f.

2.1.10. Sendo $A \subset \mathbb{R}^n$ representaremos a medida de Lebesgue de A por $\mu(A)$. Se $B \subset A \subset \mathbb{R}^n$ e $\mu(B) = 0$, então, qualquer condição que se verifique para cada elemento de $A \backslash B$, diz-se que é verificada quase sempre em A.

2.1.11. Uma função f definida num subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^n$ e com valores em $\overline{\mathbb{R}}$ diz-se mensurável se o conjunto

$$\{x : f(x) > a\}$$

é mensurável para qualquer número real a.

Uma outra forma de definir função mensurável é a seguinte: $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável se, para qualquer aberto I de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(I)$ for um conjunto mensurável em $\mathbb{R}^n$.

2.1.12. Uma família $\mathcal{F} = \{C_k(x) : x \in \Omega, k = 1, 2, ...\}$ de subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$ forma uma cobertura de Vitali de um conjunto limitado mensurável $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se, para cada $x \in \Omega$:

(v_1) $x \in C_k(x)$;
(v_2) $\inf\{\mu(C_k(x)) : k \in \mathbb{N}\} = 0$;
(v_3) existe uma constante $t(x) > 0$ tal que, para qualquer $k \in \mathbb{N}$, existe uma bola $x + \varepsilon_k B_n$ tal que $C_k(x) \subset x + \varepsilon_k B_n$ e $\frac{\mu(C_k(x))}{\mu(x+\varepsilon_k B_n)} > t(x)$.

2.1.13. Teorema (Vitali, *[Guzman], p. 20, 25, 26): Seja Ω um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, limitado e mensuravel. Suponha-se que uma família $\{C_k(x) : x \in \Omega,\ k = 1, 2, \ldots\}$ de conjuntos compactos forma uma cobertura de Vitali de Ω. Então existe uma subfamília finita ou infinita numerável de conjuntos disjuntos $S_i = C_{k_i}(x),\ i = 1, 2, \ldots,$ tal que $\mu\left(\Omega \backslash \bigcup_i S_i\right) = 0$.*

Uma outra formulação possível para o teorema de Vitali é a seguinte: Nas condições descritas atrás, para qualquer $\delta > 0$, existe uma subfamília finita de conjuntos disjuntos $S_i = C_{k_i}(x),\ i = 1, 2, \ldots, N$, tal que $\mu\left(\Omega \backslash \bigcup_{i=1}^N S_i\right) < \delta$.

2.1.14. Denotamos o conjunto das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ contínuas por $\mathcal{C}(\Omega)$. Para cada inteiro positivo k, $\mathcal{C}^k(\Omega)$ designa o conjunto das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ contínuas e tais que as suas derivadas parciais de ordens $|\alpha| \leq k$ são contínuas em Ω (uma tal função diz-se de classe $\mathcal{C}^k$). Designa-se $\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \mathcal{C}(\Omega) \cap \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{C}^k(\Omega)\right)$ (funções de classe $\mathcal{C}^\infty$). Os conjuntos $\mathcal{C}_c(\Omega)$ e $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ consitem em todas as funções em $\mathcal{C}(\Omega)$ e $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, respectivamente, que têm suporte compacto em Ω.

2.1.15. Uma importante classe de funções são as funções absolutamente contínuas. Uma função f, definida num intervalo $[a, b]$, é absolutamente contínua se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existir um $\delta > 0$ tal que, qualquer que seja a família finita de intervalos disjuntos (a_k, b_k), $k = 1, 2, \ldots, N$, verificando a condição $\sum_{k=1}^{N} (b_k - a_k) < \delta$, tem-se que $\sum_{k=1}^{N} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$. Uma importante propriedade destas funções estabelece que toda a função absolutamente contínua é derivável quase sempre em $[a, b]$ ([Kolmogorov-Fomin], p. 332-335).

2.1.16. Sendo $x \in \mathbb{R}^n$, escreva-se $x = (x', x_n)$, com $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ e

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R}^n_+ := \{x = (x', x_n) : x_n > 0\};\\
&Q := \{x = (x', x_n) : |x'| < 1 \text{ e } |x_n| < 1\};\\
&Q_+ := Q \cap \mathbb{R}^n_+;\\
&Q_0 := \{x = (x', x_n) : |x'| < 1 \text{ e } x_n = 0\};
\end{aligned}$$

Dizemos que um aberto Ω tem fronteira de classe $\mathcal{C}^1$ (tem fronteira lipshitziana) se, para qualquer $x \in \partial\Omega$ existir uma vizinhança U de x em $\mathbb{R}^n$ e uma função $h : Q \to U$ bijectiva tal que $h \in \mathcal{C}^1(\overline{Q})$ (h lipshitziana), $h^{-1} \in \mathcal{C}^1(\overline{U})$ (h^{-1} lipshitziana), $h(Q_+) = U \cap \Omega$ e $h(Q_0) = U \cap \partial\Omega$.

2.1.17. Define-se espaço vectorial topológico como sendo um espaço vectorial V, munido de uma topologia para a qual as operações adição e produto por um escalar

$$\begin{aligned}
&(u, v) \mapsto u + v \quad &&\text{de } V \times V \text{ sobre } V\\
&(\lambda, u) \mapsto \lambda.u \quad &&\text{de } \mathbb{R} \times V \text{ sobre } V
\end{aligned}$$

são contínuas.

2.2. Espaços L^p

2.2.1. Representamos por $L^p(\Omega)$ a colecção de todas as funções mensuráveis u, definidas em Ω, tais que

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty,$$

sendo p um número real positivo.

Identificamos em $L^p(\Omega)$ as funções que são iguais quase sempre em Ω. Assim, os elementos de $L^p(\Omega)$ são, de facto, classes de equivalência de funções mensuráveis que satisfazem a condição acima descrita. Duas funções são equivalentes se forem iguais quase sempre em Ω.

Este conjunto, munido das operações adição e multiplicação por um escalar, é um espaço vectorial, sendo o funcional dado por

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

uma norma em $L^p(\Omega)$, desde que $1 \leq p < \infty$.

2.2.2. O conjunto $L^\infty(\Omega)$ será constituido por todas as funções (ou melhor, classes de funções) $u : \Omega \to \mathbb{R}$ para as quais existe pelo menos uma constante k tal que $|u(x)| \leq k$, quase sempre em Ω. Também este é um espaço vectorial normado, sendo a norma dada pelo funcional

$$\|u\|_\infty = \inf\{k : |u(x)| \leq k \text{ quase sempre em } \Omega\}.$$

2.2.3. Teorema *([Adams], p. 25, 26): Suponha-se que* $\mu(\Omega) = \int_\Omega dx < \infty$, *e que* $1 \leq p \leq q \leq \infty$. *Convencione-se* $\frac{1}{\infty} = 0$ *e* $\frac{1}{0} = \infty$. *Se* $u \in L^q(\Omega)$, *então* $u \in L^p(\Omega)$ *e*

$$\|u\|_p \leq \mu(\Omega)^{(1/p)-(1/q)} \|u\|_q.$$

Por esta razão, temos

- $L^q(\Omega)$ *é subespaço vectorial de* $L^p(\Omega)$;
- *O operador identidade* $I : L^q(\Omega) \to L^p(\Omega)$ *é contínuo.*

Se $u \in L^{\infty}(\Omega)$, então

$$\lim_{p \to \infty} \|u\|_p = \|u\|_{\infty}.$$

Finalmente, se $u \in L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$ e se existir uma constante K de tal modo que para todo o p,

$$\|u\|_p \leq K,$$

então $u \in L^{\infty}(\Omega)$ e

$$\|u\|_{\infty} \leq K.$$

2.2.4. Lema (Fatou) *([Rudin], p. 23): Seja $(f_n)_n$ uma sucessão de funções de $L^1(\Omega)$ tal que, para qualquer n, $f_n(x) \geq 0$ quase sempre em Ω, e $\sup_n \int_\Omega f_n dx < \infty$. Escreva-se, para cada $x \in \Omega$, $f(x) = \liminf_{n \to \infty} f_n(x)$. Então, $f \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega f(x)dx \leq \liminf_{n \to \infty} \int_\Omega f_n(x)dx.$$

2.2.5. Teorema *([Adams], p. 28): O conjunto $\mathcal{C}_c(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, para $1 \leq p < \infty$.*

2.2.6. Teorema *([Adams], p. 31): O conjunto $\mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, para* $1 \leq p < \infty$.

2.2.7. Teorema *([Brezis], p. 57-63): $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$; é reflexivo para $1 < p < \infty$; é separável para $1 \leq p < \infty$.*

2.3 O espaço de Sobolev $W^{1,p}$

2.3.1. Seja $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u \in L^1(K),\ \text{para todo o compacto } K \subset \Omega\}$ e $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ um multi-índice; uma função $g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ designa-se α-ésima derivada generalizada de u se

$$\int_\Omega \varphi.g\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u.D^\alpha\varphi\,dx,\ \ \forall\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$$

onde

$$D^\alpha\varphi = \tfrac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial^{\alpha_1}x_1\ldots\partial^{\alpha_n}x_n}\ .$$

Em particular, sendo $|\alpha| = 1$, dizemos que g_i é a i-ésima derivada parcial generalizada de u se

$$\int_\Omega \varphi.g_i\,dx = -\int_\Omega u.\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx,\ \ \forall\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)\ .$$

Nesta definição podemos indiferentemente utilizar o espaço $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ ou $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$ ([Brezis], p.150). Quando não houver lugar a qualquer tipo de confusão, representaremos essas derivadas parciais generalizadas por

$$g_i = D_{x_i}u\ ;\ \nabla u = (D_{x_1}u, \ldots, D_{x_n}u).$$

2.3.2. O espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, com $p \in \mathbb{R}$, $1 \le p \le \infty$, é definido por

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D_{x_i}u \in L^p(\Omega),\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Ao espaço $W^{1,p}(\Omega)$ está associada a norma

$$\|u\|_{1,p} = \left(\|u\|_p^p + \sum_{i=1}^n \|D_{x_i}u\|_p^p\right)^{1/p}\ \ \text{para } 1 \le p < \infty$$

$$\|u\|_{1,\infty} = \max\{\|u\|_\infty, \|D_{x_1}u\|_\infty, \ldots, \|D_{x_n}u\|_\infty\}\ \ \text{para } p = \infty.$$

Se uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$, com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado, é lipschitziana então $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$.

2.3.3. O espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ é fecho de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ (ou de $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$) no espaço $W^{1,p}(\Omega)$. De acordo com [Brezis] (p. 171), os elementos de $W_0^{1,p}(\Omega)$ são, "grosso modo", as funções em $W^{1,p}(\Omega)$ que se anulam na fronteira de Ω. É bastante delicado dar um sentido preciso a esta asserção pois uma função $u \in W^{1,p}(\Omega)$ é apenas definida quase por toda a parte (ora $\partial\Omega$ tem, geralmente medida nula).

2.3.4. Teorema (Sobolev e Rellich, *[Dacorogna], p. 25, 26; [Adams], p. 97, 144): Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira lipshitziana e seja $1 \leq p \leq \infty$.*

Caso 1: Se $1 \leq p < n$, então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, para qualquer $1 \leq q \leq \frac{np}{n-p}$, sendo que, para $1 < q \leq \frac{np}{n-p}$,

- *$W^{1,p}(\Omega)$ é subespaço vectorial de $L^q(\Omega)$*
- *O operador identidade $I : W^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ é compacto, ou seja, o fecho do transformado da bola unitária de $W^{1,p}(\Omega)$ é um compacto em $L^q(\Omega)$.*

(nestas condições, diz-se que a injecção é compacta)

Caso 2: Se $p = n$, então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, para qualquer $1 \leq q < \infty$, com injecção compacta.

Caso 3: Se $p > n$, então $W^{1,p}(\Omega) \subset \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, com injecção compacta.

A condição de regularidade de $\partial\Omega$ pode ser mais fraca. Se o espaço $W^{1,p}$ for substituido por $W_0^{1,p}$, não se torna necessário considerar qualquer condição de regularidade para a fronteira de Ω ([Adams], p. 144, 145; [Brezis], p. 169). O caso 3 pode ser melhorado, no sentido em que o espaço $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ pode ser substituido por espaços de funções Holder-contínuas ([Ziemer], p. 3,61, ([Dacorogna], p. 26; [Adams], p. 144).

2.3.5. Teorema *([Brezis], p. 171, 172) Suponha-se Ω com fronteira de classe $\mathcal{C}^1$. Seja $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ com $1 \leq p < \infty$. Então, tem-se que $u = 0$ sobre $\partial\Omega$ se e somente se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

2.3.6. Teorema (Desigualdade de Poincaré) *([Brezis], p. 174): Seja Ω um conjunto aberto limitado e seja $1 \leq p < \infty$; então, existe uma constante K (dependente de Ω e p) tal que*

$$\|u\|_p \leq K \|\nabla u\|_p \,, \qquad \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Em particular, a expressão $\|\nabla u\|_p$ é uma norma para o espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$, equivalente à norma definida em 2.3.2..

2.3.7. Teorema *(***da divergência***, [Ziemer], p. 248; [Grunski], p. 62): Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado, com fronteira lipschitziana, seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, com funções coordenadas $F_1, F_2, \dots F_n \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^n)$ (nestas condições, diz-se que $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um campo vectorial pertencente a $\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$). Então,*

$$\int_\Omega \text{div}\, F\, dx = \int_{\partial\Omega} \langle F(x), \nu(x) \rangle \, d\sigma\,,$$

onde $\nu(x)$ representa o vector normal a Ω em x e div $F = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial x_k}$.

2.3.8. A razão pela qual se enunciou o teorema da divergência é a sua utilização na demonstração de resultados importantes nos capítulos seguintes. Visto que nunca trabalharemos com campos vectoriais a aplicação deste teorema nunca será "directa", pelo que é conveniente explicar a forma como o teorema será aplicado mais adiante.
Consideremos uma função $v \in W_0^{1,1}(\Omega)$ ($\mathcal{C}_c^1(\Omega)$ é denso em $W_0^{1,1}(\Omega)$), com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado, com fronteira lipschitziana, e definam-se os seguintes campos vectoriais: $v_1(x) = (v(x), 0, 0, \dots, 0)$, $v_2(x) = (0, v(x), 0, \dots, 0)$,..., $v_n(x) = (0, 0, \dots, 0, v(x))$. Para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ temos, pelo teorema da divergência, que

$$\int_\Omega \text{div}\, v_i\, dx = \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} v(x).\nu_i(x)\, d\sigma = 0\,,$$

uma vez que $v(x) = 0$ quase sempre em $\partial\Omega$. Deste modo, teremos que

$$\int_\Omega \nabla v(x)\, dx = 0 \in \mathbb{R}^n.$$

2.4 Elementos de Análise Convexa

2.4.1. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ diz-se convexo se $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$, sempre que $x, y \in A$, $\forall \lambda \in [0,1]$. Da definição decorre que a intersecção de uma colecção arbitrária de conjuntos convexos é um conjunto convexo. Se $A, B \subset \mathbb{R}^n$ são convexos e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ então $\alpha A + \beta B$ é convexo. Para além disso, o interior e o fecho de um conjunto convexo são conjuntos convexos.

2.4.2. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. À intersecção de todos os conjunto convexos que contêm A, chamamos convexificado de A (ou involucro convexo de A), que representamos por conv(A). Uma soma de vectores da forma

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m \ , \quad \lambda_i \geq 0 \ , \ i = 1, \ldots m \ , \quad \lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$$

chama-se combinação convexa de $x_1, \ldots, x_m$. Se estes forem vectores de A, então qualquer sua combinação convexa pertence ao conv A.

2.4.3. Teorema (Caratheodory) *([Rockafellar], p.153-161)*: *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. Para qualquer $x \in conv\, A$, existem $x_1, \ldots, x_m \in A$ tais que $m \leq n+1$ e*

$$x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m \ ,$$

com $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$ e $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$.

2.4.4. Teorema *([Rockafellar], p. 158): Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado. Então $\overline{conv}(A) = conv(\overline{A})$. Em particular, se A é fechado e limitado, então conv(A) é fechado e limitado.*

2.4.5. Dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, chama-se involucro afim de A à intersecção da colecção de todos os conjuntos afins M tais que $M \supset A$. De outra forma, o involucro afim de A é conjunto de todos os vectores da forma $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m$, tais que $x_1, \ldots, x_m \in A$ e $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$. Denotamos esse conjunto por afi$\,(A)$.

2.4.6. Sendo $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo, define-se interior relativo de A como sendo o conjunto

$$\operatorname{ri} A = \{x \in \operatorname{afi}(A) : \exists\, \varepsilon > 0,\ (x + \varepsilon B_n) \cap \operatorname{afi}(A) \subset A\}.$$

Define-se também fronteira relativa de A como sendo o conjunto $\operatorname{rb} A = (\overline{A}) \backslash (\operatorname{ri} A)$. Naturalmente, um conjunto A é relativamente aberto se $A = \operatorname{ri} A$.

2.4.7. Seja $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um conjunto convexo. Um semi-espaço de suporte a A é um semi-espaço fechado que contém A e que tem pelo menos um ponto de A na sua fronteira. Um hiperplano de suporte a A é um hiperplano que é a fronteira de um semi-espaço de suporte a A. Dizemos que um hiperplano H separa (estritamente) dois subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}^{n+1}$, A e B, se A estiver contido num dos semi-espaços fechados (abertos) associados a H e B estiver contido no outro semi-espaço fechado (aberto) associado a H.

2.4.8. Teorema (Hahn-Banach) *([Ekeland-Teman], p. 5): Sejam $\mathcal{E}$ um espaço vectorial topológico real, $A \neq \emptyset$ um seu subconjunto aberto convexo e $M \neq \emptyset$ um subespaço afim que não intersecta A. Então, existe um hiperplano H que contém M e que não intersecta A.*

2.4.9. Corolário *([Ekeland-Teman], p. 5): Sejam $\mathcal{E}$ um espaço vectorial topológico real, $A \neq \emptyset$ um seu subconjunto aberto convexo e $B \neq \emptyset$ um subconjunto convexo que não intersecta A. Então, existe um hiperplano H que separa A e B.*

2.4.10. Corolário *([Ekeland-Teman], p. 5): Sejam $\mathcal{E}$ um espaço vectorial topológico real, $C, D \neq \emptyset$ subconjuntos disjuntos convexos de $\mathcal{E}$, com um deles compacto e o outro fechado. Então, existe um hiperplano H que separa estritamente C e D.*

2.4.11. Corolário *([Ekeland-Teman], p. 5): Sejam $\mathcal{E}$ um espaço vectorial topológico real, A subconjunto convexo de $\mathcal{E}$, com interior não vazio. Então, cada ponto da fronteira de A vai pertencer a um hiperplano de suporte de A.*

2.4.12. Corolário *([Ekeland-Teman], p. 5): Num espaço vectorial topológico real, todo o conjunto convexo fechado é a intersecção dos os semi-espaços que o contêm.*

2.4.13. Uma face de um conjunto convexo A é um subconjunto convexo F de A tal que todo o segmento de recta (fechado) em A, com um ponto intermédio em F, tem ambos os extremos em F. O conjunto vazio e o próprio A são faces de A. As faces de A com dimensão 0 designam-se pontos extremos de A. Assim, um ponto $x \in A$ é um ponto extremo de A se e somente se não for possível escrever x como combinação convexa $(1-\lambda)y + \lambda z$ tal que $y \in A$, $z \in A$ e $0 < \lambda < 1$, excepto quando $x = y = z$ ([Rockafellar], p.162).

2.4.14. Teorema *([Rockafellar], p. 164): Seja A um conjunto convexo não vazio e seja U a colecção de todos os interiores relativos de faces não vazias de A. Então U é uma partição de A, i.e., os conjuntos em U são disjuntos e a sua união é A.*

2.4.15. Teorema (Krein-Milman) *([Schaeffer], p. 69-71): Todo o subconjunto convexo compacto de um espaço localmente convexo é o fecho do convexificado do conjunto dos seus pontos extremos.*

2.4.16. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. O conjunto

$$A^* = \{x^* : \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \langle x, x^* \rangle \leq 1\}$$

designa-se polar de A. A^* contém sempre a origem. Ao conjunto $A^{**} = (A^*)^*$ chamamos bipolar de A. Tem-se que $A^{**} = \overline{\text{conv}}\,(A \cup \{0\})$ ([Schaeffer], p. 131). Se A for um conjunto fechado convexo que contenha a origem, então $A^{**} = A$ ([Rockafellar], p. 125).

2.4.17. Como propriedades dos conjuntos polares, temos também que ([Rockafellar], p. 141 e [Schaeffer], p. 130, 131)

- $A \subset B \Rightarrow B^* \subset A^*$;
- Para qualquer conjunto convexo não vazio C, $(\lambda C)^* = \frac{1}{\lambda} C^*$, $0 < \lambda < +\infty$;
- $\left(\bigcup_i A_i\right)^* = \bigcap_i A_i^*$

2.4.18. Um conjunto convexo $A \subset \mathbb{R}^n$ é poliedral se puder ser escrito como intersecção de alguma colecção finita de semi-espaços fechados. Um conjunto convexo diz-se finitamente gerado se for o convexificado de um conjunto finito de pontos e direcções (uma direcção em $\mathbb{R}^n$ é uma classe de equivalência na colecção de todas as semi-rectas fechadas $\{x+\lambda y : x, y \in \mathbb{R}^n, y \neq 0, \lambda \geq 0\}$, pela relação de equivalência "a semi-recta l_1 é a translacção da semi-recta l_2"). Assim, um conjunto A é finitamente gerado se e somente se existirem vectores $a_1, \ldots, a_m$ tais que, para um inteiro fixo k, $0 \leq k \leq m$, A consiste em todos os vectores da forma

$$x = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k + \lambda_{k+1} a_{k+1} + \cdots + \lambda_m a_m,$$

com

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1 \ ; \ \lambda_i \geq 0 \ \text{ para } \ i = 1, \ldots, m \ .$$

O polar de um conjunto convexo poliedral é também um conjunto poliedral, assim como a intersecção de um número finito de conjuntos convexos poliedrais é um conjunto poliedral ([Rockafellar], p. 174).

2.4.19. Teorema *([Rockafellar], p. 171) As seguintes propriedades de um conjunto convexo A são equivalentes:*

(i) A é poliedral;

(ii) A é fechado e tem apenas um número finito de faces;

(iii) A é finitamente gerado.

2.4.20. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Diz-se que a função f é convexa se epi f for um conjunto convexo. De outra forma, f é convexa se e somente se

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

para todos os $x, y \in$ dom f e $\lambda \in [0,\,1]$. A função f é concava de $-f$ for convexa.
Uma função convexa diz-se própria se nunca assumir o valor $-\infty$ e não for identicamente igual a $+\infty$.

2.4.21. Teorema *([Ekeland-Teman], p. 9):*

(i) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é uma função convexa, então αf é também uma função convexa, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$;

(ii) Se f e g são funções convexas de $\mathbb{R}^n$ sobre $\overline{\mathbb{R}}$, então $f+g$ é uma função convexa

(iii) Se $(f_i)_{i \in I}$ for uma família de funções convexas de $\mathbb{R}^n$ sobre $\overline{\mathbb{R}}$, então o seu supremo $\sup_{i \in I} f_i$ é uma função convexa.

2.4.22. $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ diz-se <u>semicontínua inferiormente no ponto x_0</u> se

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0).$$

A função f diz-se semicontinua inferiormente se o for para todo o ponto $x_0 \in \operatorname{dom} f$. Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ diz-se <u>semicontínua superiormente no ponto x_0</u> se

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0).$$

A função f diz-se semicontínua superiormente se o for para todo o ponto $x_0 \in \operatorname{dom} f$.

Uma função que seja semicontínua inferiormente e superiormente num ponto $x_0 \in \operatorname{dom} f$ é contínua nesse ponto.

2.4.23. Teorema *([Rockafellar], p. 51, 52): Seja $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função arbitrária. As seguintes condições são equivalentes*

(i) f é semicontínua inferiormente.

(ii) Os "conjuntos de nível" $C_\alpha = \{x : f(x) \leq \alpha\}$ são fechados, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

(iii) O epigráfico de f é fechado em $\mathbb{R}^{n+1}$.

2.4.24. Teorema *(**desigualdade de Jensen**, [Dacorogna], p. 29, [Rudin], p. 62): Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado, $u \in L^1(\Omega)$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Então,*

$$f\left(\frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega u(x)dx \right) \leq \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega f(u(x))dx.$$

2.4.25. Dada uma família de funções $(f_i)_{i \in I}$ semi-contínuas inferiormente, então o seu supremo é também uma função semi-contínua inferiormente. Assim, dada uma função qualquer $g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, existirá uma função $\overline{g} : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ que será a maior das funções semi-contínuas inferiormente tal que $\overline{g} \leq g$. Teremos neste caso que $\operatorname{epi} \overline{g} = \overline{\operatorname{epi} g}$ ([Ekeland-Teman], p.10).

2.4.26. Teorema *([Ekeland-Teman, p. 11) Se uma função* $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *convexa semi-contínua inferiormente assume o valor* $-\infty$, *então ela não poderá assumir qualquer valor finito.*

2.4.27. Teorema *([Ekeland-Teman], p. 12): Seja* $f : \mathcal{E} \to \overline{\mathbb{R}}$ *uma função convexa, com* $\mathcal{E}$ *um espaço vectorial topológico. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) Existe um conjunto aberto não vazio no qual f *não é identicamente igual a* $-\infty$ *e é limitada superiormente por uma constante* $b < +\infty$.

(ii) f *é uma função própria (nunca assume o valor* $-\infty$ *e não é identicamente igual a* $+\infty$*) e é contínua no interior do seu domínio, que é não vazio.*

2.4.28. Corolário *([Ekeland-Teman], p. 12): Toda a função própria, convexa, definida num espaço de dimensão finita é contínua no interior do seu domínio.*

2.4.29. Corolário *([Ekeland-Teman], p. 12,13): Seja* f *uma função própria, convexa definida num espaço normado. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) Existe um conjunto aberto não vazio no qual f *é limitada superiormente.*

(ii) O interior do domínio de f *é não vazio e nele* f *é localmente lipschitziana.*

2.4.30. Corolário *([Ekeland-Teman], p. 13): Toda a função convexa semi-contínua inferiormente definida num espaço de Banach é contínua no interior do seu domínio.*

2.4.31. Define-se a <u>função polar (ou conjugada) de f</u>, f^*, em $\mathbb{R}^n$ por

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in \operatorname{dom} f} \big(\langle x, x^* \rangle - f(x)\big).$$

Esta função é o supremo pontual das funções afim $g(x^*) = \langle x, x^* \rangle - h$ tais que $(x, h) \in \operatorname{epi} f$. O epigráfico de f^* é uma intersecção de semi-espaços fechados. Deste modo, f^* é uma função convexa semicontínua inferiormente ([Rockafellar], p. 104, [Ekeland-Teman], p. 17).

Desta definição decorre a chamada desigualdade de Fenchel: $f(x) + f^*(x^*) \geq \langle x, x^* \rangle$.

Repetindo o processo obtemos a chamada bipolar, f^{**}, de f

$$f^{**}(x) = \sup_{x^* \in \text{dom } f^*} \big(\langle x^*, x \rangle - f^*(x^*) \big).$$

Da desigualdade de Fenchel, vem que $f^{**} \leq f$. Mais ainda, f^{**} é o supremo pontual da família das funções afim que são inferiores a f. Trata-se, assim, da maior das funções convexas semi-contínuas inferiormente que são limitadas superiormente por f ([Ekeland-Teman], p. 14-18). Por esta razão, temos que $\text{epi}\, f^{**} = \overline{\text{conv}}\ \text{epi}\, f$ ([Ekeland-Teman], p.267, 282).

Se a função f for semi-contínua inferiormente, então, para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f^{**}(x) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{q} c_i f(v_i) : q \in \mathbb{N}, q \leq n+2, c_i \geq 0, v_i \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^{q} c_i = 1, \sum_{i=1}^{q} c_i v_i = x \right\}$$

([Rockafellar], p. 36, 37, 103,104, 157).

2.4.32. Seja C um subconjunto convexo não vazio de $\mathbb{R}^n$. Define-se a função de suporte de C como sendo

$$\delta^*(x^*, C) = \sup \{ \langle x, x^* \rangle : x \in C \}.$$

Esta função é a polar da função indicadora

$$\delta(x, C) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in C \\ +\infty & \text{se } x \notin C \end{cases},$$

sendo, portanto, uma função convexa e semi-contínua inferiormente. Pelo corolário em 2.4.30., temos que a função de suporte é contínua. Da definição da função de suporte de C vem imediatamente que

$$\delta^*(x^*, C - v) = \delta^*(x^*, C) - \langle x^*, v \rangle \ ; \qquad \delta^*(\lambda x^*, C) = \lambda \delta^*(x^*, C), \quad \forall \lambda \geq 0$$

([Rockafellar], p. 112-115). A função de suporte permite-nos outra definição de polar de um conjunto convexo na forma $C^* = \{ x^* \in \mathbb{R}^n : \delta^*(x^*, C) \leq 1 \}$ ([Rockafellar], p. 125). Se C for um conjunto limitado, então $\partial C^* = \{ x^* \in \mathbb{R}^n : \delta^*(x^*, C) = 1 \}$.

2.4.33. Seja f uma função definida em $\mathbb{R}^n$ e com valores em $\overline{\mathbb{R}}$, e seja x um ponto para o qual f é finita. A derivada direccional de f em x segundo o vector v define-se como sendo o limite

$$Df(x)(v) = \lim_{\lambda \to 0^+} \tfrac{f(x+\lambda v) - f(x)}{\lambda}$$

se este existir (podendo este ser $+\infty$ ou $-\infty$).

2.4.34. Teorema *([Rockafellar], p. 213, 214): Seja $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ uma função convexa e seja $x\in$ dom f. Então, $Df(x)(v)$ existe para qualquer $v\in\mathbb{R}^n$. Mais ainda, $Df(x)(v)$ é, como função de v, convexa positivamente homogenea (i.e. $Df(x)(\alpha v)=\alpha Df(x)(v)$, $\alpha>0$).*

2.4.35. Seja $f:\mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função. O conjunto

$$\partial f(x)=\{l\in\mathbb{R}^n : f(y)-f(x)\geq\langle l,y-x\rangle,\forall\, y\in\mathbb{R}^n\}$$

chama-se subdiferencial de f em x. Se a função é diferenciável em x então $\partial f(x)=\{\nabla f(x)\}$. Se $\partial f(x)\neq\emptyset$ então $f(x)=f^{**}(x)$, que implica $\partial f(x)=\partial f^{**}(x)$. Da definição de subdiferencial decorre também que

$$f(x)=\min_{v\in\mathbb{R}^n} f(v) \text{ se e somente se } 0\in\partial f(x)$$

([Ekeland-Teman], p. 20,21).

2.4.36. Teorema *([Ekeland-Teman], p. 21): Seja $f:\mathbb{R}^n\to\overline{\mathbb{R}}$ e f^* a sua polar. Então $x^*\in\partial f(x)$ se e somente se $f(x)+f^*(x^*)=\langle x,x^*\rangle$.*

2.4.37. Teorema *([Ekeland-Teman], p. 22): Seja $f:\mathbb{R}^n\to\overline{\mathbb{R}}$ uma função convexa, finita e contínua no ponto $x\in\mathbb{R}^n$. Então $\partial f(y)\neq\emptyset$ para todos os y pertencentes ao interior do seu domínio, em particular, $\partial f(x)\neq\emptyset$.*

3. Existência e unicidade de minimizante de um funcional do gradiente: Condições necessárias e suficientes

Neste capítulo, será abordada a questão da existência e unicidade de solução para o problema da minimização de funcionais (não necessariamente convexos) do tipo

$$I(\nabla u) = \int_\Omega g(\nabla u(x))\, dx \tag{3.1}$$

no conjunto de todas as funções u tais que $u \in u_a + W_0^{1,1}(\Omega)$, onde $u_a = \langle a, \cdot \rangle$, com $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ semi-contínua inferiormente (s.c.i.) e Ω um subconjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira lipchitziana.

Neste contexto, uma função $u \in u_0 + W_0^{1,1}(\Omega)$ é função admissivel para o problema (3.1) se a parte negativa de $g(\nabla u)$ for integrável. Neste caso, $I(\nabla u)$ está bem definida, sendo $+\infty$ se a parte positiva de $g(\nabla u)$ não for integrável.

Começaremos por apresentar alguns resultados que serão úteis no decorrer deste capítulo.

3.1 Resultados auxiliares

3.1.1. Lema: *Sejam $v_1, \ldots, v_q$ vectores de $\mathbb{R}^n$ tais que $a \in$ int conv$\{v_1, \ldots, v_q\}$. Seja $S =$ conv$\{v_1 - a, \ldots v_q - a\}$, S^* o seu polar. Então, existe uma função lipshitziana w, com $w(x) = 0$ para $x \in (\text{int}\,(S^*))^c$, tal que $\nabla w(x)$ pertence a $\{v_1 - a, \ldots v_q - a\}$ quase sempre.*

Demostração:

(a) O conjunto S^* pode escrever-se como intersecção dos semi-espaços $\{x : \langle x, v_i - a \rangle \leq 1\}$.

Visto ser, por definição, $S^* = \{x : \forall\, y \in S,\ \langle x, y \rangle \leq 1\}$ e dado que $v_i - a \in S$, $\forall\, i \in \{1, \ldots, q\}$, temos, para qualquer $x \in S^*$, que

$$\langle x, v_i - a\rangle \leq 1, \; \forall\, i \in \{1, \dots q\}$$

o que significa que

$$x \in \bigcap_{i=1}^{q} \{z : \langle z, v_i - a\rangle \leq 1\}.$$

Temos, portanto, que $S^* \subset \bigcap_{i=1}^{q} \{z : \langle z, v_i - a\rangle \leq 1\}$.

Reciprocamente, sendo $x \in \bigcap_{i=1}^{q} \{z : \langle z, v_i - a\rangle \leq 1\}$ temos que

$$\langle x, v_1 - a\rangle \leq 1 \wedge \dots \wedge \langle x, v_q - a\rangle \leq 1$$

o que implica que

$$\lambda_1 \langle x, v_1 - a\rangle + \cdots + \lambda_q \langle x, v_q - a\rangle \leq 1, \; \forall \lambda_i \geq 0, \text{ com } \sum \lambda_i = 1, \, i \in \{1, \dots, q\}$$

ou seja,

$$\left\langle x, \textstyle\sum_{i=1}^{q} \lambda_i (v_i - a) \right\rangle \leq 1,$$

para qualquer combinação convexa de $v_1 - a, \dots, v_q - a$. Visto que todos os elementos de S podem ser escritos como combinação convexa de $v_1 - a, \dots, v_q - a$, então $x \in \{z : \forall\, y \in S, \, \langle x, y\rangle \leq 1\} = S^*$. Temos, deste modo que

$$\bigcap_{i=1}^{q} \{z : \langle z, v_i - a\rangle \leq 1\} \subset S^*.$$

Podemos então concluir que $S^* = \bigcap_{i=1}^{q} \{z : \langle z, v_i - a\rangle \leq 1\}$.

(b) Considere-se a função w definida por

$$w(x) = \begin{cases} \delta^*(x, S) - 1 & \text{se } x \in S^* \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Então $w(x) = 0$ na fronteira e no exterior de S^*, é lipshitziana e $\nabla w(x) \in \{v_1 - a, \dots, v_q - a\}$ quase sempre.

(b_1) Em primeiro lugar, quando $x \in \partial(S^*)$, tem-se que $\langle x, v_j - a\rangle = 1$, para algum $j \in \{1, 2, \dots, q\}$.

Suponhamos que $\langle x, v_i - a\rangle < 1,\ \forall \in \{1, \ldots, q\}$. Mostre-se que existe um $\delta > 0$ tal que, para y verificando $|x - y| < \delta$, será $y \in S^*$.

$$\langle x, v_i - a\rangle < 1, \forall\, i \in \{1, \ldots, q\} \;\Rightarrow\; \exists\, \varepsilon > 0 : \langle x, v_i - a\rangle \leq 1 - \varepsilon, \forall\, i \in \{1, \ldots, q\}.$$

Assim, para qualquer $i \in \{1, \ldots, q\}$,

$$\langle y, v_i - a\rangle = \langle x, v_i - a\rangle + \langle y - x, v_i - a\rangle \leq 1 - \varepsilon + |x - y|.\text{max}\,|v_i - a|.$$

Fazendo $\delta = \frac{\varepsilon}{\text{max}\,|v_i - a|}$, temos $\langle y, v_i - a\rangle < 1 - \varepsilon + \varepsilon = 1$. Então, $y \in S^*$.

Temos, pois, que quando $x \in \partial(S^*)$, $\langle x, v_j - a\rangle = 1$, para algum $j \in \{1, 2, \ldots, q\}$, pelo que,

$$\delta^*(x, S) - 1 = \text{sup}\,\{\langle x, y\rangle : y \in S\} - 1 = \langle x, v_j - a\rangle - 1 = 1 - 1 = 0.$$

(b$_2$) Para além disto, sendo $x_1, x_2 \in S^*$, $x_1 \neq x_2$, quaisquer,

$$\frac{|w(x_1) - w(x_2)|}{|x_1 - x_2|} = \frac{\left|\sup\limits_{y\in S}\ \langle x_1, y\rangle - \sup\limits_{y\in S}\ \langle x_2, y\rangle\right|}{|x_1 - x_2|} \leq \frac{\left|\sup\limits_{y\in S}\ \langle x_1 - x_2, y\rangle\right|}{|x_1 - x_2|} \leq \max_i\, |v_i - a|\ ,$$

pois, pela desigualdade de Schwarz,

$$\sup_{y\in S}\ \langle x_1 - x_2, y\rangle \leq \sup_{y\in S}\ (|x_1 - x_2|.|y|) = |x_1 - x_2|.\sup_{y\in S}\ |y|.$$

Como $y = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i (v_i - a)$,

$$|y| = |\textstyle\sum_{i=1}^{q} \lambda_i (v_i - a)| \leq \sum_{i=1}^{q} \lambda_i |v_i - a| \leq \max\limits_i\, |v_i - a|.$$

Então w é lipshitziana.

Sendo w lipshitziana, então existe gradiente da função para quase todos os x ([Federer], p. 216, Teorema de Rademacher). Então, ([Rockafellar], Corolário 25.1.3., p. 243), ∇w é um ponto extremo de S, logo é um elemento de $\{v_1 - a, \ldots, v_q - a\}$, quase sempre.

$\square$

3.1.2. Lema: *Seja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função semi-contínua inferiormente. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) Existem $l \in \mathbb{R}^n$ e $c \in \mathbb{R}$ tais que $\quad g(v) \geq \langle l, v\rangle + c\,, \quad \forall\, v \in \mathbb{R}^n$.

(ii) Existe um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $g^{**}(a) > -\infty$.

Demonstração:

(i) $\Rightarrow$ (ii) é óbvio.

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Se para algum $a \in \mathbb{R}^n$, $g^{**}(a) > -\infty$, então, pelo teorema 2.4.26., $g^{**}(x) > -\infty$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Pelo corolário 2.4.30., g^{**} é contínua no interior de $\operatorname{dom} g^{**}$. Logo, pelo teorema 2.4.37., $\partial g^{**}(a) \neq \emptyset$. Assim, sendo $l \in \partial g^{**}(a)$, temos

$$g(v) - g^{**}(a) \geq g^{**}(v) - g^{**}(a) \geq \langle l, v\rangle,\ \forall\, v \in \mathbb{R}^n,$$

donde sai que

$$g(v) \geq \langle l, v\rangle + g^{**}(a),\ \forall\, v \in \mathbb{R}^n.$$

$\square$

3.1.3. Lema: *Seja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função semi-contínua inferiormente, $a \in \mathbb{R}^n$. Sejam $v_1, \ldots, v_q$ elementos de $\mathbb{R}^n$ tais que $\sum_{i=1}^q c_i v_i = a$, com $c_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^q c_i = 1$. Então, existe uma sucessão $(u_k)_k$ limitada em $W^{1,\infty}(\Omega)$, tal que $u_k|_{\partial\Omega} = \langle a, .\rangle$ e $I(\nabla u_k) \to \sum_{i=1}^q c_i g(v_i)\mu(\Omega)$.*

Demonstração:

Suponha-se, sem perda de generalidade, que $c_i > 0, \forall\, i$.

Considere-se, em primeiro lugar, o caso em que a tem uma única representação como combinação convexa de $v_1, \ldots, v_q$. Neste caso, $v_1, \ldots, v_q$ são pontos extremos de $\operatorname{conv}\{v_1, \ldots, v_q\}$.

No caso de ser $a \in \operatorname{int}\operatorname{conv}\{v_1, \ldots, v_q\}$, a afirmação ficará demonstrada aquando da demonstração, mais adiante, do teorema 3.2.1. (condição suficiente), onde se mostrará que existe uma função $\overline{u}(.)$ tal que $\nabla\overline{u}(.) \in \{v_1, \ldots, v_q\}$ e $\overline{u}\big|_{\partial\Omega}(.) = \langle a, .\rangle$. Neste caso, temos

$$\int_\Omega \nabla\overline{u}(x)dx = \sum_{i=1}^q \int_{\{x:\nabla\overline{u}(x)=v_i\}} \nabla\overline{u}(x)dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{q} v_i.\mu(\{x : \nabla\overline{u}(x) = v_i\})$$

$$= \sum_{i=1}^{q} v_i.\frac{\mu(\{x : \nabla\overline{u}(x) = v_i\})}{\mu(\Omega)}\mu(\Omega)$$

$$= \sum_{i=1}^{q} v_i.\overline{c}_i.\mu(\Omega);$$

uma vez que, pelo teorema da divergência, $\int_\Omega \nabla\overline{u}(x)dx = a\mu(\Omega)$, então $\sum\limits_{i=1}^{q} v_i\overline{c}_i = a$. Como a representação de a como combinação convexa de $v_1, \ldots, v_q$ é única, temos que $c_i = \overline{c}_i$. Deste modo, definindo u_k como sendo $\overline{u}$, para todo o $k \in \mathbb{N}$, obtemos

$$I(\nabla u_k) = I(\nabla\overline{u}) = \int_\Omega g(\nabla\overline{u}(x))dx$$

$$= \sum_{i=1}^{q} \int_{\{x:\nabla\overline{u}(x)=v_i\}} g(\nabla\overline{u}(x))dx$$

$$= \sum_{i=1}^{q} g(v_i).\mu(\{x : \nabla\overline{u}(x) = v_i\})$$

$$= \sum_{i=1}^{q} g(v_i).\frac{\mu(\{x : \nabla\overline{u}(x) = v_i\})}{\mu(\Omega)}.\mu(\Omega)$$

$$= \sum_{i=1}^{q} g(v_i).c_i.\mu(\Omega).$$

Considere-se agora o caso em que $a \notin \operatorname{int}\operatorname{conv}\{v_1, \ldots, v_q\}$. Tem-se, no entanto, que $a \in \operatorname{ri}\operatorname{conv}\{v_1, \ldots, v_q\}$.

Seja P o maior subespaço de $\mathbb{R}^n$ perpendicular a todos os vectores $v_i - a$ $(i = 1, \ldots, q)$. Suponha-se que $\dim P = m$, e $v_{q+1}, \ldots, v_{q+1+m}$ são elementos de P tais que $\operatorname{conv}\{v_{q+1}, \ldots, v_{q+1+m}\}$ tem interior não vazio em P, com 0 pertencente ao seu interior.

Para cada $\varepsilon > 0$ considere-se a função

$$w_\varepsilon(x) = \begin{cases} \delta^*(x, \tilde{S}) - 1 & \text{se } x \in \tilde{S}^* \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases},$$

onde $\widetilde{S} = \operatorname{conv}\{\widetilde{v}_1 - a, \ldots, \widetilde{v}_q - a, \widetilde{v}_{q+1} - a, \ldots, \widetilde{v}_{q+m+1} - a\}$, com $\widetilde{v}_i = v_i$, se $i \in \{1, \ldots, q\}$, $\widetilde{v}_i = a + \varepsilon v_i$, se $i \in \{q+1, \ldots, q+m+1\}$. Assim, para qualquer que seja $\varepsilon > 0$, teremos que $a \in \operatorname{int}\operatorname{conv}\{\widetilde{v}_1, \ldots, \widetilde{v}_{q+m+1}\}$ e $\widetilde{v}_1, \ldots, \widetilde{v}_{q+m+1}$ são pontos extremais de um conjunto compacto convexo. Para além disso,

$$\frac{\mu\big(\{x \in sS^* : \nabla s w_\varepsilon \notin \{v_1 - a, \ldots, v_q - a\}\}\big)}{\mu\big(\{x \in sS^* : \nabla s w_\varepsilon \in \{v_1 - a, \ldots, v_q - a\}\}\big)} \to 0$$

quando $\varepsilon \to 0$ uniformemente em relação a s.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, defina-se a função

$$\widetilde{u}_k(x) = \langle a, x\rangle + s_i w_{1/k}\left(\frac{x - y_i}{s_i}\right), \text{ para } x \in y_i + s_i S^*$$

onde $y_i + s_i S^*$, $i \in I$, é a decomposição de Ω obtida através do teorema de Vitali (ver demonstração do teorema 3.2.1., condição suficiente, alínea b)). Neste caso,

$$\mu\big(\{x \in \Omega : \nabla \widetilde{u}_k(x) \notin \{v_1, \ldots, v_q\}\}\big) \to 0$$

quando $k \to +\infty$. Deste modo, se para uma subsucessão de $\widetilde{u}_k$ (que representaremos usando o mesmo índice k)

$$c_i^k := \frac{\mu\{x \in \Omega : \nabla \widetilde{u}_k(x) = v_i\}}{\mu(\Omega)} \to \widetilde{c}_i, \ i \in \{1, \ldots, q\},$$

então $\sum_i \widetilde{c}_i = 1$, $\sum_i \widetilde{c}_i v_i = a$ e, devido à unicidade da representação de a como combinação convexa de v_i $(i = 1, \ldots, q)$, temos que $\widetilde{c}_i = c_i$. Logo, $c_i^k \to c_i$ quando $k \to +\infty$.

No entanto, ainda não podemos afirmar que $I(\nabla \widetilde{u}_k) \to \sum_{i=1}^q c_i g(v_i)\mu(\Omega)$, uma vez que g pode ser ilimitada no conjunto $\{a + \varepsilon v_i : i \in \{q+1, \ldots, q+m+1\}, \varepsilon \in [0,1]\}$. Para ultrapassar essa dificuldade note-se que, para qualquer $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, os vectores $\widetilde{v}_i = a + \varepsilon v_i$ $(i = q+1, \ldots, q+m+1)$ pertencerão ao interior do conjunto $\operatorname{conv}\{v_1, \ldots, v_{q+m+1}\}$. Deste modo, para todos os k suficientemente grandes, a função $\widetilde{u}_k$ pode ser redefinida de modo semelhante àquele usado anteriormente, em cada conjunto $\{x \in \Omega : \nabla \widetilde{u}_k = \widetilde{v}_i\}$, $i \in \{q+1, \ldots, q+m+1\}$, de tal modo que, denominando essa nova sucessão por u_k, $\nabla u_k(x) \in \{v_1, \ldots, v_{q+m+1}\}$ para quase todos os x neste conjunto e $u_k = \widetilde{u}_k$ na fronteira deste conjunto. Como $u_k = \widetilde{u}_k$ quase sempre no conjunto $\{x \in \Omega : \nabla \widetilde{u}_k(x) \in \{v_1, \ldots, v_q\}\}$ e $|g(\nabla u_k(x))| \leq c < +\infty$, donde sai que $I(\nabla u_k) \to \sum_{i=1}^q c_i g(v_i)\mu(\Omega)$.

O caso geral pode ser reduzido ao anteriormente descrito. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $v_i \neq a$ e $c_i > 0$, $\forall i \in \{1, \ldots, q\}$.

Para $q = 2$, podemos afirmar que existe uma sucessão de funções seccionalmente afins, $u_k(.)$, tal que $u_k\big|_{\partial\Omega}(.) = \langle a, .\rangle$, $\mu(\{x \in \Omega : \nabla u_k(x) = v_i\}) \to c_i.\mu(\Omega)$ $(i = 1, 2)$ e $I(\nabla u_k) \to \sum c_i g(v_i)\mu(\Omega)$, uma vez que a tem uma representação única como combinação convexa de v_1, v_2.

Suponhamos que a afirmação é válida para $q = p$. Para provar que é válida para $q = p + 1$, considerem-se os vectores $\widetilde{v}_1, \ldots, \widetilde{v}_p$ tais que $\widetilde{v}_i = v_i$ para $i \leq p - 1$, $\widetilde{v}_p = \frac{c_p v_p + c_{p+1} v_{p+1}}{c_p + c_{p+1}}$. Então, $a = \sum_{i=1}^{p} \widetilde{c}_i \widetilde{v}_i$, onde $\widetilde{c}_i = c_i$ para $i \leq p - 1$ e $\widetilde{c}_p = c_p + c_{p+1}$. Pela hipótese de indução, existe uma sucessão de funções seccionalmente afins u_k tais que $u_k\big|_{\partial\Omega}(.) = \langle a, .\rangle$, $\mu(\{x \in \Omega : \nabla u_k(x) = v_i\}) \to c_i.\mu(\Omega)$ $(i = 1, \ldots, p)$ e $I(\nabla u_k) \to \sum c_i g(v_i)\mu(\Omega)$. Para $k \in \mathbb{N}$, defina-se $\Omega_k := \text{int}\,\{x \in \Omega : \nabla u_k(x) = v_p\}$. É possível encontrar uma sucessão u_j^k tal que $u_j^k = u_k$ em $\partial\Omega_k$, $\|u_j^k\|_{1,\infty} \leq c < +\infty$ e

$$\mu(\{x \in \Omega_k : u_j^k(x) \neq v_i\}) \to \frac{c_i}{\widetilde{c}_p}\mu(\Omega_k), \text{ com } i = p, p+1,\ j \to +\infty,$$

$$I(\nabla u_j^k; \Omega_k) \to \sum_{i=p}^{p+1} \frac{c_i}{\widetilde{c}_p} g(v_i)\mu(\Omega) = \sum_{i=p}^{p+1} c_i g(v_i)\mu(\Omega),\ j \to +\infty.$$

Então, para uma subsucessão $u_{j(k)}^k$ $(k \to +\infty)$, obtemos a convergência $I(\nabla u_{j(k)}^k) \to \sum_{i=1}^{q} c_i g(v_i)\mu(\Omega)$.

$\square$

3.2 Existência de minimizante

3.2.1. Teorema: *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira lipschitziana e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função semi-contínua inferiormente. O problema de minimização do funcional (3.1) tem solução se e somente se ou $\partial g(a) \neq \emptyset$, ou existem $v_1, \ldots, v_q \in \mathbb{R}^n$ ($q \in \mathbb{N}$) tais que $a \in$ int conv $\{v_1, \ldots, v_q\}$ e $\bigcap_{i=1}^{q} \partial g(v_i) \neq \emptyset$.*

Demonstração:
<u>Condição Suficiente</u>

(a) Se $\partial g(a) \neq \emptyset$, então $u_a(.) = \langle a, .\rangle$ é uma solução.

Sendo $\partial g(a) \neq \emptyset$, existirá um $\ell \in \mathbb{R}^n$ tal que $g(v) - g(a) \geq \langle \ell, v - a\rangle$, $\forall\, v \in \mathbb{R}^n$. Então, considerando $u(.) = \langle a, .\rangle + \widetilde{u}(.)$, com $\widetilde{u}(.) \in W_0^{1,1}(\Omega)$, pelo teorema da divergência

$$I\big(\nabla u\big) - I\big(\nabla(\langle a,.\rangle)\big) = \int_\Omega \big(g(\nabla u(x)) - g(a)\big)\,dx \geq \int_\Omega \langle \ell, \nabla u(x) - a\rangle\,dx =$$

$$= \big\langle \ell, \int_\Omega \big(\nabla u(x) - a\big)\,dx\big\rangle = \big\langle \ell, \int_\Omega \big(a + \nabla\widetilde{u}(x) - a\big)\,dx\big\rangle =$$

$$= \big\langle \ell, \int_\Omega \nabla\widetilde{u}(x)\,dx\big\rangle = 0.$$

(pelo t. da divergência, ver 2.3.8)

Logo, $I(\nabla u) \geq I(\nabla u_a),\ \forall\, u \in u_a + W_0^{1,1}(\Omega)$.

(b) Suponha-se que existem $v_1, \ldots, v_q \in \mathbb{R}^n$ $(q \in \mathbb{N})$ tais que $a \in \operatorname{int}\operatorname{conv}$ $\{v_1, \ldots, v_q\}$. Sejam S e S^* como foram definidos no Lema 3.1.1. Os conjunto da forma $x + sS^*$, com $x \in \Omega$ e $0 < s < d(x, \partial\Omega)$ formam uma cobertura de Vitali de Ω.

Seja $\Gamma(a) = \operatorname{conv}\{v_i,\, i = 1, \ldots, q\}$. Teremos assim que $a \in \operatorname{int}\Gamma(a)$ e $S^* = \big(\Gamma(a) - a\big)^*$. Defina-se

$$r(a) = \sup\{r > 0 : a + rB_n \subset \Gamma(a)\} = \sup\{r > 0 : rB_n \subset S\};$$

$$R(a) = \inf\{R > 0 : \Gamma(a) \subset a + RB_n\} = \inf\{R > 0 : S \subset RB_n\};$$

$$\begin{aligned}\varepsilon(x,s) &= \inf\{R > 0 : x + sS^* \subset x + RB_n\}\\ &= \inf\{R > 0 : S^* \subset \tfrac{R}{s}B_n\} =\\ &= \inf\{sR > 0 : S^* \subset RB_n\} =\\ &= s.\inf\{R > 0 : S^* \subset RB_n\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta(x,s) &= \sup\{r > 0 : x + rB_n \subset x + sS^*\} =\\ &= \sup\{r > 0 : \tfrac{r}{s}B_n \subset S^*\} =\\ &= \sup\{sr > 0 : rB_n \subset S^*\} =\\ &= s.\sup\{r > 0 : rB_n \subset S^*\};\end{aligned}$$

$$C_k(x) = x + s_kS^*, \text{ com } s_k \to 0;$$

$$x + \varepsilon_kB_n = x + \varepsilon(x, s_k)B_n\,.$$

Posto isto tem-se que

(v_1) $x \in C_k(x)$;
(v_2) $\inf\{\mu(C_k(x)) : k \in \mathbb{N}\} = 0$;

(v_3) Existe uma constante $t(x) > 0$ tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$, é possível encontrar uma bola $x + \varepsilon_k B_n$, tal que $C_k(x) \subset x + \varepsilon_k B_n$ e $\frac{\mu(C_k(x))}{\mu(x+\varepsilon_k B_n)} > t(x) > 0, \ \forall\, k \in \mathbb{N}$.

Para provar a alínea (v_3) constroem-se duas bolas, uma inscrita em S^* e outra que circunscreva S^*. Pretenderemos mostrar que a razão dos dois raios não depende de s, o que implicará a afirmação de (v_3).

Em primeiro lugar, temos que

$$\frac{1}{R(a)} = \frac{1}{\inf\{R > 0 : S \subset RB_n\}} = \sup\left\{\frac{1}{R} > 0 : S \subset RB_n\right\} =$$

$$= \sup\left\{\frac{1}{R} > 0 : \frac{1}{R}B_n \subset S^*\right\} = \sup\{r > 0 : rB_n \subset S^*\};$$

$$\frac{1}{r(a)} = \frac{1}{\sup\{r > 0 : rB_n \subset S\}} = \inf\left\{\frac{1}{r} > 0 : rB_n \subset S\right\} =$$

$$= \inf\left\{\frac{1}{r} > 0 : S^* \subset \frac{1}{r}B_n\right\} = \inf\{R > 0 : S^* \subset RB_n\}.$$

(veja-se 2.4.17)

Então,

$$\frac{\delta(x,s)}{\varepsilon(x,s)} = \frac{\frac{s}{R(a)}}{\frac{s}{r(a)}} = \frac{r(a)}{R(a)} \qquad \text{(não depende de } s\text{, nem sequer de } x\text{).}$$

Deste modo,

$$\frac{\mu(x + s_k S^*)}{\mu(x + \varepsilon_k B_n)} \geq \frac{\mu(x + \delta(x,s_k)B_n)}{\mu(x + \varepsilon(x,s_k)B_n)} = \frac{\big(\delta(x,s_k)\big)^n}{\big(\varepsilon(x,s_k)\big)^n} = \left(\frac{r(a)}{R(a)}\right)^n > 0\,, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Do teorema de Vitali, temos que é possível decompor Ω em subconjuntos disjuntos (em número finito ou infinito numerável) da forma $y_i + s_i S^*$ e um conjunto de medida nula.

(c) Defina-se a seguinte função:

$$\bar{u}(x) = \langle a, x\rangle + s_i w\left(\frac{x - y_i}{s_i}\right), \quad \text{para } x \in y_i + s_i S^*$$

onde a função $w(.)$ foi definida na demonstração do Lema 3.1.1.. Então, $\bar{u}\big|_{\partial\Omega} = \langle a, .\rangle$, $\bar{u}(.) \in W^{1,\infty}(\Omega)$ e $\bar{u}$ é solução do problema (3.1) se $\bigcap_{i=1}^{q} \partial g(v_i) \neq \emptyset$.

(c_1) É óbvio que $\bar{u}\big|_{\partial\Omega} = \langle a, . \rangle$, uma vez que $w\left(\dfrac{x - y_i}{s_i}\right) = 0$ para x pertencente ao exterior de $y_i + s_i S^*$.

(c_2) Sendo que a soma de duas funções lipshitzianas é uma função lipshitziana, temos que $\bar{u}(.)$ é elemento de $W^{1,\infty}(\Omega)$ (2.3.2).

(c_3) Para provar que $\bar{u}$ é solução de (3.1) note-se que:
- Sendo $l \in \bigcap_{i=1}^{q} \partial g(v_i)$ e para qualquer função admissivel u do problema (3.1),

$$\int_\Omega \langle l, \nabla u - \nabla \bar{u} \rangle dx = 0. \tag{3.2}$$

De facto, sendo $u, \bar{u} \in W^{1,1}(\Omega)$, com $u\big|_{\partial\Omega} = \bar{u}\big|_{\partial\Omega} = \langle a, . \rangle$, podemos escrever $u = \langle a, . \rangle + f$, com $f\big|_{\partial\Omega} = 0$. Assim, usando novamente o teorema da divergência,

$$\int_\Omega \langle l, \nabla u - \nabla \bar{u} \rangle dx = \Big\langle l, \int_\Omega (\nabla u - \nabla \bar{u})\, dx \Big\rangle = \Big\langle l, \int_\Omega (\nabla f - \nabla w) dx \Big\rangle =$$

$$= \Big\langle l, \int_\Omega \nabla f\, dx \Big\rangle - \Big\langle l, \int_\Omega \nabla w dx \Big\rangle = 0\,.$$

- Para além disto, todas as funções $g(v_i) + \langle l, v - v_i \rangle$, $i = 1, \ldots, q$, coincidem:

Sendo que $l \in \bigcap_{i=1}^{q} \partial g(v_i)$, então

$$\begin{cases} g(v_j) - g(v_i) - \langle l, v_j - v_i \rangle \geq 0 \\ g(v_i) - g(v_j) - \langle l, v_i - v_j \rangle \geq 0 \end{cases},$$

donde se conclui que $g(v_i) - g(v_j) - \langle l, v_i - v_j \rangle = 0$. Daqui resulta que

$$g(v_i) - g(v_j) + \langle l, v - v_i - v + v_j \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow g(v_i) - g(v_j) + \langle l, v - v_i \rangle - \langle l, v - v_j \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow g(v_i) + \langle l, v - v_i \rangle = g(v_j) + \langle l, v - v_j \rangle, \ \forall\, i \neq j\,.$$

Como consequência disto, $g(v) - g(v_i) - \langle l, v - v_i \rangle \geq 0$, sendo válida a igualdade quando $v \in \{v_1, \ldots, v_q\}$.

- Pelas razões invocadas, temos que

$$I(\nabla u) - I(\nabla \bar{u}) = \int_\Omega \big(g(\nabla u) - g(\nabla \bar{u}) - \langle l, \nabla u - \nabla \bar{u}\rangle\big)dx =$$

$$= \int_\Omega \big(g(\nabla u) - g(v_1) - \langle l, \nabla u - v_1\rangle\big)dx - \int_\Omega \big(g(\nabla \bar{u}) - g(v_1) - \langle l, \nabla \bar{u} - v_1\rangle\big)dx.$$

Visto que, $\int_\Omega \big(g(\nabla u) - g(v_1) - \langle l, \nabla u - v_1\rangle\big)dx \geq 0$, e que, por ser $\nabla \bar{u} \in \{v_1, \ldots, v_q\}$ (Lema 3.1.1.), $\int_\Omega \big(g(\nabla \bar{u}) - g(v_1) - \langle l, \nabla \bar{u} - v_1\rangle\big)dx = 0$, temos $I(\nabla u) - I(\nabla \bar{u}) \geq 0$.

Isto prova que a condição $\bigcap_{i=1}^q \partial g(v_i) \neq \emptyset$, com $a \in \text{int conv } \{v_1, \ldots, v_q\}$ implica a existência de solução do problema (3.1). Isto termina a demostração da condição suficiente.

Condição necessária:

(a) Em primeiro lugar, temos que $g^{**}(a) > -\infty$. (*)

De facto, para $v_1, \ldots, v_q \in \mathbb{R}^n$ tais que $\sum_{i=1}^q c_i v_i = a$, com $\sum_{i=1}^q c_i = 1$, temos, pelo lema 3.1.3., que existe uma sucessão limitada em $W^{1,\infty}(\Omega)$, $(u_k)_k$, tal que

$$I(\nabla u_k) = \int_\Omega g(\nabla u_k(x))dx \to \sum_{i=1}^q c_i g(v_i)\mu(\Omega),$$

donde vem

$$\inf\{I(\nabla u) : u(.) \in \langle a, .\rangle + W_0^{1,\infty}(\Omega)\} \leq \sum_{i=1}^q c_i g(v_i)\mu(\Omega). \qquad (**)$$

Visto que o problema tem solução, então

$$\inf\{I(\nabla u) : u(.) \in \langle a, .\rangle + W_0^{1,\infty}(\Omega)\} > -\infty,$$

donde resulta que

$$g^{**}(a) = \inf\left\{\sum_{i=1}^q c_i g(v_i) : q \in \mathbb{N},\, v_i \in \mathbb{R}^n,\, c_i \geq 0,\, \sum_{i=1}^q c_i = 1,\, \sum_{i=1}^q c_i v_i = a\right\} > -\infty.$$

(b) Pelo corolário 2.4.28., a função g^{**} é convexa e contínua. Então, pelo teorema 2.4.37., $\partial g^{**}(a) \neq \emptyset$. Para além disso, designando por $\overline{u}$ a solução do problema (3.1), tem-se, por (*) e por (**), que $I(\nabla \overline{u}) \leq g^{**}(a)\mu(\Omega)$.

Seja $l \in \partial g^{**}(a)$. Então, para qualquer u admissível, temos

$$I(\nabla u) - g^{**}(a).\mu(\Omega) = \int_\Omega \big(g(\nabla u) - g^{**}(a) - \langle l, \nabla u - a\rangle\big)dx \geq 0,$$

uma vez que $\int_\Omega \langle l, \nabla u(x) - a\rangle dx = 0$ (ver no inicio da demonstração). Deste modo, $I(\nabla u) \geq g^{**}(a)\mu(\Omega)$, o que implica que

$$I(\nabla \overline{u}) = g^{**}(a)\mu(\Omega).$$

(c) Seja $P_l = \{v \in \mathbb{R}^n : g(v) - g^{**}(a) - \langle l, v - a\rangle = 0\}$.

Nota: Designando por F a face do epigráfico de g^{**} a cujo interior relativo o ponto $(a, g^{**}(a))$ pertence e por $\widehat{F}$ a sua projecção sobre $\mathbb{R}^n$, podemos escrever que $\widehat{F} = \{v \in \mathbb{R}^n : g^{**}(v) = \langle l, v - a\rangle + g^{**}(a), l \in \partial g^{**}(a)\}$. Deste modo, temos que P_l é a intersecção de $\widehat{F}$ com o conjunto de todos os pontos $x \in \mathbb{R}^n$ tais que $g(x) = g^{**}(x)$. Para além disso, $\operatorname{conv} P_l = \widehat{F}$.

Como $I(\nabla \overline{u}) = g^{**}(a).\mu(\Omega)$ e $\int_\Omega \langle l, \nabla \overline{u} - a\rangle dx = 0$, temos que

$$\int_\Omega g(\nabla \overline{u}(x)) - g^{**}(a)dx = 0 = \int_\Omega \langle l, \nabla \overline{u}(x) - a\rangle dx$$

o que implica que

$$g(\nabla \overline{u}(x)) - g^{**}(a) = \langle l, \nabla \overline{u} - a\rangle$$

para quase todos os $x \in \Omega$. Isto significa que $\nabla \overline{u}(x) \in P_l$ para quase todos os $x \in \Omega$.

Nota: O recíproco também é válido, ou seja, se uma função $\overline{u} \in u_a + W_0^{1,1}(\Omega)$ admissível para o problema de minimização do funcional (3.1) é tal que $\nabla \overline{u}(x) \in P_l$ quase sempre em Ω, então $\overline{u}$ é minimizador do funcional em (3.1) ([Friesecke], p. 454).

P_l é um conjunto fechado:

Seja $(v_k)_k$ uma sucessão em P_l, com $v_k \to v$. Temos então que

$$g(v_k) = g^{**}(a) + \langle l, v_k - a\rangle.$$

Assim,

$$\lim_{k\to\infty} g(v_k) = g^{**}(a) + \lim_{k\to\infty} \langle l, v_k - a\rangle = g^{**}(a) + \langle l, v - a\rangle.$$

Por outro lado, sendo g semi-contínua inferiormente, $\liminf_{k\to\infty} g(v_k) \geq g(v)$. Também, $g(v) \geq g^{**}(v)$ e $g^{**}(v) \geq g^{**}(a) + \langle l, v-a\rangle$. Então,

$$g(v) \leq \liminf_{k\to\infty} g(v_k) \leq \lim_{k\to\infty} g(v_k) = g^{**}(a) + \langle l, v-a\rangle \leq g^{**}(v) \leq g(v).$$

Deste modo, temos que

$$g(v) = g^{**}(a) + \langle l, v-a\rangle$$

ou seja $v \in P_l$. Logo, P_l é fechado.

(d) Afirmamos também que $a \in \operatorname{int}\operatorname{conv} P_l$ se $g(a) \neq g^{**}(a)$.

Suponha-se então que $g(a) \neq g^{**}(a)$ e que a pertence à fronteira de $\operatorname{conv} P_l$.
Seja F a face do epigráfico de g^{**} a cujo interior relativo $(a, g^{**}(a))$ pertence. Se a dimensão de F for igual a n então $\operatorname{ri}\widehat{F} = \operatorname{int}\widehat{F}$. Sendo $a \in \operatorname{int}\widehat{F}$ então $a \in \operatorname{int}\operatorname{conv} P_l$, o que contraria a hipótese de a pertencer à fronteira desse mesmo conjunto.

Então, terá de ser $\dim F < n$. Seja $\dim F = m < n$. Seja H um conjunto afim, de dimensão m, tal que $\widehat{F} \subset H = L + a$, onde L é um subespaço de dimensão m de $\mathbb{R}^{n+1}$. Seja $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m\}$ uma base de L, sendo $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, \xi_{m+1}, \ldots, \xi_{n+1}\}$ base de $\mathbb{R}^{n+1}$. Deste modo, teremos $\nabla\overline{u}(x) - a \in L$, para quase todos os $x \in \Omega$ (uma vez que, sendo $\nabla\overline{u}(x) \in P_l$, será $\nabla\overline{u}(x) \in \widehat{F}$ quase sempre).

Sendo que $L^{\perp} = \operatorname{afi}\{\xi_{m+1}, \ldots, \xi_{n+1}\}$, teremos que $\langle \nabla\overline{u}(x) - a, \xi_i\rangle = 0$, para $i \in \{m+1, \ldots, n+1\}$, para quase todos os $x \in \Omega$. Então, escrevendo $L' = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \xi_i\rangle = 0, i = m+1, \ldots, n+1\}$, temos que $\nabla\overline{u}(x) - a \in L'$, para quase todos os $x \in \Omega$, sendo $\dim L' = m-1$.

Repetindo este processo sucessivamente, chegamos à conclusão que $\nabla\overline{u}(x) - a = 0$, para quase todos os $x \in \Omega$. Assim, podemos afirmar que $\nabla\overline{u}(x) = a$, para quase todos os $x \in \Omega$ e, consequentemente $\overline{u}(x) = \langle a, x\rangle$, para quase todos os $x \in \Omega$.

Deste modo, sendo que $\nabla\overline{u} \in P_l$ quase sempre em Ω e $\nabla\overline{u} = a$ quase sempre em Ω, temos $a \in P_l$ e portanto

$$g(a) - g^{**}(a) - \langle l, a-a\rangle = 0$$

donde resulta que

$$g(a) = g^{**}(a)$$

o que é uma contradição.

Mostrou-se deste modo que ou a $\in \operatorname{int}\operatorname{conv} P_l$ ou $g(a) = g^{**}(a)$. No primeiro caso, existem $v_1, \ldots, v_q \in P_l$ tais que $a \in \operatorname{int}\operatorname{conv}\{v_1, \ldots, v_q\}$. Neste caso, $l \in \partial g(v_i)$, $\forall$ $i \in \{1, \ldots, q\}$ e portanto,

$$\bigcap_{i=1}^{q} \partial g(v_i) \neq \emptyset.$$

No segundo caso, sendo que $l \in \partial g(a)$, teremos $\partial g(a) \neq \emptyset$.

$\square$

3.3 Observações

3.3.1. O resultado de existência apresentado neste capítulo decorre do estudo de vários artigos, publicados entre 1993 e 1998. Em [Cellina1] e [Cellina2], que constituiram o ponto de partida para a abordagem deste tema, demonstra-se uma condição necessária para a existência de mínimo de funcionais do tipo (3.1) para funções integrandas semi-contínuas inferiormente, e também uma condição suficiente para funções integrandas semi-contínuas inferiormente que verificam uma determinada condição de crescimento. Em [Friesecke], uma condição necessária e suficiente para a existência de mínimo é estabelecida para funções integrandas contínuas. Em [Sychev], encontramos o resultado de existência de mínimo que foi apresentado em 3.2.1.. Houve da nossa parte uma tentativa de "polir" a demonstração encontrada nesse artigo, por vezes um pouco confusa, procurando também evidenciar pontos de contacto entre este resultado e os de A. Cellina.

Visto que na base dos capítulos seguintes estão as condições necessárias e suficientes para a existência de mínimo apresentadas em [Cellina1] e [Cellina2], parece pertinente estabelecer uma ponte entre estas e as que foram apresentadas neste capítulo. Assim, demonstraremos o seguinte:

3.3.2. Afirmação: Sejam $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função semi-contínua inferiormente, g^{**} a sua bipolar, F a face (única) do epi g^{**} tal que $(a, g^{**}(a)) \in \mathrm{ri}\, F$. Temos então que:

1. $g(a) = g^{**}(a) \Leftrightarrow \partial g(a) \neq \emptyset$;

2. Considerem-se as seguintes:

(i) $\dim F = n$;

(ii) g verifica a condição de crescimento (C): Existe uma função convexa crescente Φ tal que $\lim\limits_{r \to +\infty} \frac{\Phi(r)}{r} = +\infty$ e $g(v) \geq \Phi(|v|)$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$.

(iii) Existem $v_1, \ldots, v_q \in \mathbb{R}^n$ tais que $a \in \mathrm{int}\,\mathrm{conv}\,\{v_1, \ldots, v_q\}$ e $\bigcap_{i=1}^{q} \partial g(v_i) \neq \emptyset$.

Temos que: (i) e (ii) $\Rightarrow$ (iii); (iii) $\Rightarrow$ (i).

Demonstração:

1. Se $\partial g(a) \neq \emptyset$ então $g(a) = g^{**}(a)$, o que implica que $\partial g(a) = \partial g^{**}(a)$ (2.4.35.). Para além disto, resulta de (2.4.30.) e de (2.4.37.) que $\partial g^{**}(a) \neq \emptyset$. Assim, se for $g(a) = g^{**}(a)$, temos também que $\partial g(a) \neq \emptyset$.

2. Suponha-se que g verifica a condição de crescimento (C) e que $\dim F = n$.

(a) F não pode coincidir com $\operatorname{epi} g^{**}$.

Caso contrário, teriamos $(a, g^{**}(a)) \in \operatorname{ri}\operatorname{epi} g^{**}$, o que, como sabemos, não pode suceder. Deste modo, existe um hiperplano $H := \{(x,h) : \beta = \langle x, b\rangle + h,\ \ b \in \mathbb{R}^n,$ $\beta \in \mathbb{R}\}$ que separa F de $\operatorname{epi} g^{**}$.

(b) H não pode ser vertical.

Caso contrário, teriamos $H = \{(x,h) : \beta = \langle x, b\rangle,\ \ b \in \mathbb{R}^n,\ \ \beta \in \mathbb{R}\}$, existindo nele um ponto (a,h) com $h < g^{**}(a)$, o que também não pode suceder. Teremos então que $F \subset H = \{(x,h) : h = \langle x, b\rangle + \beta\}$.

(c) $F = H \cap \operatorname{epi} g^{**}$ é limitado e fechado.

Consideremos uma sucessão $(x_n, h_n)_n$ qualquer em $H \cap \operatorname{epi} g^{**}$. Teremos então que $h_n = g^{**}(x_n)$ e $h_n = \langle x_n, b\rangle + \beta$. Suponhamos que $|x_n| \to +\infty$. Então, por (C) e uma vez que, sendo $g(v) \geq \Phi(|v|)$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$, será também $g^{**}(v) \geq \Phi(|v|)$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$ teremos que

$$\lim_{|x_n| \to +\infty} \frac{g^{**}(x_n)}{|x_n|} = +\infty,$$

o que significa que a sucessão $\frac{h_n}{|x_n|}$ tende para $+\infty$. Por outro lado, $\frac{h_n}{|x_n|} = \frac{\langle x_n, b\rangle - \beta}{|x_n|}$ é limitado. Temos assim que $(x_n, h_n)_n$ é uma sucessão limitada e, portanto, F é limitada. É também fechada, uma vez que $\operatorname{epi} g^{**}$ é um conjunto fechado (2.4.31.).

(d) Pelo teorema de Krein-Milman (2.4.15), $F = \operatorname{conv}\operatorname{extr} F$. Uma vez que $(a, g^{**}(a)) \in \operatorname{ri} F$, então $a \in \operatorname{int} \widehat{F}$, pelo que existem $v_1, \ldots, v_q \in \operatorname{extr} \widehat{F}$ tais que $a = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i v_i$ e $a \in \operatorname{int}\operatorname{conv}\{v_1, \ldots, v_q\}$. Logo $(v_i, g^{**}(v_i)) \in \operatorname{extr} F$, $i = 1, \ldots, q$, e portanto

$$g^{**}(v_i) = g(v_i) = \langle v_i, b\rangle + \beta.$$

Convencionando $g(x) \geq \langle x, b\rangle + \beta$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, temos

$$g(x) - g(v_i) \geq \langle x - v_i, b\rangle,\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \forall\, i \in \{1, \ldots, q\},$$

o que implica que

$$b \in \bigcap_{i=1}^{q} \partial g(v_i)$$

e por conseguinte, $\bigcap_{i=1}^{q} \partial g(v_i) \neq \emptyset$.

Suponha-se agora que existem $v_1, \dots, v_q \in \mathbb{R}^n$ tais que $a \in \operatorname{int}\operatorname{conv}\{v_1, \dots, v_q\}$ e $\bigcap_{i=1}^{q} \partial g(v_i) \neq \emptyset$.

Seja $\varepsilon > 0$ tal que $a + \varepsilon B_n \subset \operatorname{int}\operatorname{conv}\{v_1, \dots, v_q\}$. Então, para qualquer que seja $u \in a + \varepsilon B_n$, $g^{**}(u) = \langle l, u - a\rangle + g^{**}(a)$,, sendo $l \in \partial g(v_i)$, $\forall i \in \{1, \dots, q\}$.

De facto, sendo $u = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i v_i$, $a = \sum_{j=1}^{q} c_j v_j$, $\lambda_i, c_j \geq 0$, $\sum \lambda_i = \sum c_j = 1$, temos que, $\forall v \in \mathbb{R}^n$,

$$g(v) - g(v_i) \geq \langle l, v - v_i\rangle$$

$$\Rightarrow g(v_i) + \langle l, v - v_i\rangle \leq g(v)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{q} \lambda_i g(v_i) + \langle l, v - \sum_{i=1}^{q} \lambda_i v_i\rangle \leq g(v)$$

$$\Rightarrow g^{**}(u) + \langle l, v - u\rangle \leq g(v).$$

Em particular, sendo $v = v_j$, com $j \in \{1, \dots, q\}$, temos

$$g^{**}(u) + \langle l, v_j - u\rangle \leq g(v_j)$$

$$\Rightarrow g^{**}(u) + \langle l, \sum_{j=1}^{q} c_j v_j - u\rangle \leq \sum_{j=1}^{q} c_j g(v_j)$$

$$\Rightarrow g^{**}(u) + \langle l, a - u\rangle \leq g^{**}(a). \qquad (\bigstar)$$

Atendendo a que $l \in \partial g(v_j)$, $j \in \{1, \dots, q\}$, temos também

$$g(v) - g(v_j) \geq \langle l, v - v_j\rangle$$

$$\Rightarrow g(v_j) + \langle l, v - v_j\rangle \leq g(v)$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{q} c_j g(v_j) + \langle l, v - \sum_{j=1}^{q} c_j v_j\rangle \leq g(v)$$

$$\Rightarrow g^{**}(a) + \langle l, v - a\rangle \leq g(v).$$

Em particular, sendo $v = v_i$, com $i \in \{1, \dots, q\}$, temos

$$g^{**}(a) + \langle l, v_i - a\rangle \leq g(v_i)$$

$$\Rightarrow g^{**}(a) + \langle l, \sum_{i=1}^{q} \lambda_i v_i - a \rangle \leq \sum_{i=1}^{q} \lambda_i g(v_i)$$

$$\Rightarrow g^{**}(a) + \langle l, u - a \rangle \leq g^{**}(u). \qquad (\bigstar\bigstar)$$

De ($\bigstar$) e ($\bigstar\bigstar$) sai que $g^{**}(u) = g^{**}(a) + \langle l, u - a \rangle$, isto é, g^{**} é afim numa vizinhança de a, ou seja, $\dim F = n$.

$\square$

3.3.3. Um outro aspecto que é importante considerar na abordagem de A. Cellina é o facto de, nos seus artigos já referenciados, ser permitido à função integranda assumir o valor $+\infty$. Tal não acontece em [Sychev], que estabelece explicitamente que a função integranda terá valores finitos. Face a isto, é pertinente confrontar a condição necessária para existência de mínimo de [Cellina1] com a questão da possibilidade, ou não, da função integranda ter valores em $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Enunciemos então a dita condição necessária:

Teorema *([Cellina1], p. 340): Sejam g uma função semi-contínua inferiormente (não necessariamente convexa), $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira seccionalmente de classe $\mathcal{C}^1$. Suponha-se que existe mínimo para o funcional (3.1). Então, ou $g(a) = g^{**}(a)$ ou a face F do epi g^{**} a cujo interior relativo $(a, g^{**}(a))$ pertence tem dimensão n.*

Consideremos o seguinte exemplo.

3.3.4. Exemplo: Seja g a seguinte função semi-contínua inferiormente, não convexa, limitada inferiormente, definida em $\Omega =]-1,1[\times]-1,1[$ por

$$g(u_1, u_2) = \begin{cases} 1 - u_1^2 & \text{se } u_1 \in [-1,1], u_2 = 0 \\ +\infty & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Consideremos $a = (0,0)$. Teremos assim que

$$g^{**}(u_1, u_2) = \begin{cases} 0 & \text{se } u_1 \in [-1,1], u_2 = 0 \\ +\infty & \text{caso contrário} \end{cases},$$

$F = \{x : x = \lambda(1,0,0) + (1-\lambda)(-1,0,0), \lambda \in [0,1]\}$ e $a \in \operatorname{ri} F$. O funcional

$$I(\nabla u) = \int_{\Omega} g(\nabla u(x))\, dx, \;\; u \in W_0^{1,1}(\Omega)$$

tem mínimo; no entanto, nem $g(a) = g^{**}(a)$, nem $\dim F = n$.

3.4 Unicidade

3.4.1. O resultado seguinte, que será apresentado como teorema, é na realidade um corolário do teorema 3.2.1.. Dada a sua importância e devido ao facto de não ter sucedido imediatamente o referido teorema, apresentaremos dessa forma este resultado de unicidade de minimizante do funcional (3.1).

3.4.2. Teorema (Unicidade): *Sejam Ω e g como no teorema 3.2.1.. Suponhamos $g(a) = g^{**}(a)$ e que $\dim F < n$, onde F é a face de $\operatorname{epi} g^{**}$ a cujo interior relativo $(a, g^{**}(a))$ pertence. Então o funcional em (3.1) tem como único minimizante $u_a(x) = \langle a, x \rangle$ quase sempre em Ω.*

Demonstração:

Suponhamos que $\overline{u}$ é uma qualquer solução do problema de minimização do funcional (3.1). Então, $\nabla \overline{u}(x) \in P_l = \{v \in \mathbb{R}^n : g(v) - g^{**}(a) - \langle l, v - a \rangle = 0\}$, para quase todos os $x \in \Omega$. Sendo que $\dim F < n$, vimos na demonstração de 3.2.1. (condição necessária) que $\overline{u}(x) = \langle a, x \rangle$ quase sempre em Ω.

□

4. Uma solução contínua relativamente ao dado linear na fronteira para o problema de minimização do funcional do gradiente

Neste capítulo abordaremos o problema de minimização estudado no capítulo anterior na perspectiva da estabilidade das soluções relativamente ao dado de fronteira linear a. Assim, consideraremos o problema

$$(\mathcal{P}_a) : \qquad \min \int_\Omega g(\nabla u(x))dx \; ; \qquad u \in \langle a, . \rangle + W_0^{1,1}(\Omega);$$

e o seu convexificado

$$(\mathcal{P}_a^{**}) : \qquad \min \int_\Omega g^{**}(\nabla u(x))dx \; ; \qquad u \in \langle a, . \rangle + W_0^{1,1}(\Omega),$$

onde g e Ω são como em 3.2.1..

Como vimos anteriormente, os a para os quais $(\mathcal{P}_a)$ tem solução são aqueles tais que $g(a) = g^{**}(a)$ (e neste caso $\langle a, . \rangle$ é solução do problema) ou então aqueles em que $g^{**}(.)$ é afim numa vizinhança de a. Pretende-se agora obter uma função contínua $\sigma : \mathrm{dom}(g^{**}) \to \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, de tal modo que $\sigma(a)$ seja solução de $(\mathcal{P}_a^{**})$, para qualquer a, e seja também solução de $(\mathcal{P}_a)$, para quase todos os a tais que $g^{**}(.)$ é afim numa vizinhança de a.

Começaremos por apresentar alguns conceitos e terminologia que serão úteis no decorrer deste capítulo.

4.1. Noções preliminares

4.1.1. Represente-se por $F(a)$ a face de $\mathrm{epi}\,(g^{**})$ a cujo interior relativo $(a, g^{**}(a))$ pertence. De acordo com o teorema em 2.4.14., para cada a, essa face é única. A projecção de $F(a) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}^n$ denotar-se-à por $\widehat{F}(a)$. Escrevemos $\mathrm{d}(a)$ para representar a dimensão afim do conjunto convexo $F(a)$.

4.1.2. A cada conjunto convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ associamos uma função $l(.,K) : K \to \mathbb{R}^+$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(l_1) $l(.,K)$ é concava e semi-contínua superiormente;

(l_2) Existe uma constante $D > 0$ tal que $l(y,K) \leq D,\ \forall\, y \in K$;

(l_3) $l(y,K) = 0$ se e somente se $y \in \operatorname{extr} K$.

Podem encontrar-se exemplos de funções deste tipo, designadas funções de Chouquet, verificando estas propriedades, em [Bessan] (p. 11, 12) e [Bressan-Flores] (p. 158-160).

4.1.3. Teorema (de Baire) *([Kelley], p. 200): Se X for um espaço métrico completo, então a intersecção de uma família contável de subconjuntos abertos densos de X é, ela própria, densa em X.*

4.2. O resultado principal

4.2.1. Teorema: *Seja Ω um subconjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ e seja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função semi-contínua inferiormente que satisfaz a condição de crescimento (C) (ver 3.3.2.). Então, existe uma função contínua σ : dom(g^{**}) $\to \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ tal que*

(i) $\sigma(a)(.)$ *é um minimizante do problema convexificado (P$_a^{**}$) para todo o a;*

(ii) $\sigma(a)(.)$ *é um minimizante do problema (P$_a$) para quase todos os a tais que $g^{**}(.)$ é afim numa vizinhança de a (i.e. d$(a) = n$).*

Demonstração:

(a) Denote-se por $\mathcal{C}_0(\overline{\Omega})$ o subespaço de $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ formado pelas funções contínuas que assumem o valor 0 na fronteira de Ω. Consideremos o espaço de Banach $\mathcal{C}_b(\mathrm{dom}(g^{**}), \mathcal{C}_0(\overline{\Omega}))$ de todas as funções contínuas limitadas $s : \mathrm{dom}(g^{**}) \to \mathcal{C}_0(\overline{\Omega})$, com norma dada por $\|s\| = \sup_{a \in \mathrm{dom}(g^{**})} \|s(a)\|_\infty$, onde $\|.\|_\infty$ é a norma de $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Façamos $V := \{a \in \mathrm{dom}(g^{**}) : \mathrm{d}(a) = n\}$. O espaço no qual iremos trabalhar é o subespaço $\mathcal{S}$ de $\mathcal{C}_b(\mathrm{dom}(g^{**}), \mathcal{C}_0(\overline{\Omega}))$ que consiste em todas as funções $s(.)$, com $s(a) \equiv 0$

$\forall\ a \notin V$, para as quais existem $M(s) > 0$ e conjuntos fechados, de medida nula, $Z_1(s)$ e $Z_2(s)$, tais que se verificam as seguintes propriedades:

$$\left|s(a)(x) - s(a')(x')\right| \leq M(s)\Big(|a - a'| + |x - x'|\Big) \tag{4.1}$$

$\forall\ a, a' \in \text{dom}(g^{**})$, $\forall\ x, x' \in \overline{\Omega}$;

$$a + \nabla s(a)(x) \in \text{int}\,\widehat{F}(a) \tag{4.2}$$

$\forall\ \ a \in V$, $\forall\ x \in \Omega \backslash Z_2(s)$;

$$\left|\nabla s(a)(x) - \nabla s(a')(x')\right| \leq M(s)\Big(|a - a'| + |x - x'|\Big) \tag{4.3}$$

sempre que a, a' pertencem a alguma bola contida em $V \backslash Z_1(s)$ e x, x' pertencem a alguma bola contida em $\Omega \backslash Z_2(s)$. $\nabla s(a)(x)$ representa o gradiente de $s(a)(.)$ em x.

O conjunto $\mathcal{S}$ é não vazio, pois contém a função nula. Induzindo em $\mathcal{S}$ a topologia de $\mathcal{C}_b(\text{dom}(g^{**}), \mathcal{C}_0(\overline{\Omega}))$, temos que o seu fecho $\overline{\mathcal{S}}$ é um subespaço fechado do espaço métrico completo $\mathcal{C}_b(\text{dom}(g^{**}), \mathcal{C}_0(\overline{\Omega}))$. Então, $\overline{\mathcal{S}}$ é um espaço métrico completo não vazio ([Simmons], p. 73).

(b) Existe gradiente para todas as funções em $\overline{\mathcal{S}}$ e, para além disso, se $s \in \overline{\mathcal{S}}$, fixado a, então $\nabla s(a)(x) \in \overline{\text{int}\,\widehat{F}(a) - a}$, para quase todo o $x \in \Omega$.

Consideremos uma sucessão s_k de elementos de $\mathcal{S}$, suponhamos que s_k converge para s; fixemos $a \in \text{dom}\,(g^{**})$. Temos que $\nabla s_k(a)(x) \in \text{int}\,\widehat{F}(a) - a$, para quase todos os $x \in \Omega$, para qualquer k. Como $\text{int}\,\widehat{F}(a) - a$ é limitado, existe um $M > 0$ tal que $|\nabla s_k| \leq M$, para qualquer k; logo, s_k é lipschitziana com constante M. Passando ao limite, teremos s lipschitziana com constante M, o que significa que existe gradiente para s e $|\nabla s| \leq M$.

Prove-se agora que $\nabla s(a)(x) \in \overline{Y} := \overline{\text{int}\,\widehat{F}(a) - a}$.

De facto, como já vimos, sendo que $\nabla s_k(a)(x) \in \text{int}\,\widehat{F}(a) - a$, então existe um $M > 0$ tal que $|\nabla s_k(a)(x)| \leq M$, para quase todos os $x \in \Omega$ e para qualquer k. Uma vez que $s(a)(.) = 0$ na fronteira de Ω, aplicando a desigualdade de Poincaré (2.3.6), temos que $s_k(a)(.) \in M' B_{1,2}$, para algum $M' > 0$, e onde $B_{1,2}$ representa a bola unitária fechada no espaço $W^{1,2}(\Omega)$. Pelo teorema de Alaoglu-Bourbaki ([Brezis], p. 42), $M' B_{1,2}$ é um conjunto fracamente compacto em $W^{1,2}(\Omega)$. Então, pelo teorema de Eberlein ([Schaeffer], p. 195), existe uma subsucessão de $s_k(a)(.)$ fracamente convergente em $W^{1,2}(\Omega)$. Designando essa subsucessão da mesma forma, isto é, por $s_k(a)(.)$, suponhamos, sem perda de generalidade, que $s_k(a)(.)$ converge fracamente para $f(.)$ em $W^{1,2}(\Omega)$. Então, $s_k(a)(.)$ convergirá fracamente para $f(.)$ em $L^2(\Omega)$. Por outro lado, $s_k(a)(.)$ converge para $s(a)(.)$ em $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$, logo converge fracamente para $s(a)(.)$ em

$L^2(\Omega)$; assim, $f(.) = s(a)(.)$. Mais ainda, $\nabla s_k(a)(.)$ convergirá fracamente para $\nabla s(a)(.)$ em $L^2(\Omega)$.

Considere-se o conjunto $\mathcal{V} = \left\{u \in L^2(\Omega) : u(x) \in \overline{Y} \text{ q.s. em } \Omega\right\}$. Como $\overline{Y}$ é convexo, então também $\mathcal{V}$ é convexo. Para além disso, $\mathcal{V}$ é fechado. De facto, considerando uma sucessão $u_k(.)$ convergente para $u(.)$ em L^2, temos que existirá uma subsucessão convergente para $u(.)$, quase sempre. Então, para quase todos os $x \in \Omega$, $u(x) \in \overline{Y}$, logo, $u(.) \in \mathcal{V}$. Então (por 3.1 de [Schaeffer], p. 136) $\mathcal{V}$ é fracamente fechado.
Visto que $\nabla s_k(a)(.) \in \mathcal{V}$, então $\nabla s(a)(x) \in \overline{Y}$ para quase todos os $x \in \Omega$.

(c) Existem, no máximo, um número finito ou infinito numerável de faces não verticais de epi(g^{**}) cuja dimensão afim é igual a n; denote-se os interiores das suas projecções em $\mathbb{R}^n$ por V_m, $m = 1, 2, \ldots,$ $\bigcup_{m=1}^{\infty} V_m = V$.

Fixemos $m \in \mathbb{N}$ e defina-se o funcional $\mathcal{L}_m : \overline{\mathcal{S}} \to \mathbb{R}$ por

$$\mathcal{L}_m(s) := \int_{V_m} \int_{\Omega} l(a + \nabla s(a)(x), \overline{V}_m) dx da$$

onde $l(., \overline{V}_m)$ é uma função que satisfaz as propriedades $(l_1) - (l_3)$. Como já vimos em (b), este funcional está bem definido.

Afirmação 1: O funcional $\mathcal{L}_m : \overline{\mathcal{S}} \to \mathbb{R}$ é semi-contínuo superiormente.

Para provar esta afirmação defina-se o conjunto

$$\mathcal{U}_m := \left\{u(.) \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap W^{1,2}(\Omega) : \nabla u(x) \in \overline{V}_m \text{ para quase todos os } x \in \Omega\right\}.$$

Defina-se também o funcional $L_m : \mathcal{U}_m \to \mathbb{R}$, $L_m(u) := \int_\Omega l(\nabla u(x), \overline{V}_m) dx$. Consideremos o conjunto $\Theta := \left\{(\lambda, u) : \lambda \leq L_m(u)\right\}$; mostre-se em primeiro lugar que este conjunto é fechado em $\mathbb{R} \times W^{1,2}(\Omega)$.
Seja (λ_n, u_n) uma sucessão em Θ, suponha-se que $\lambda_n \to \lambda$ e que $u_n \to u, \nabla u_n \to \nabla u$ em $L^2(\Omega)$. Então, existe uma subsucessão, que designaremos sem perda de generalidade por ∇u_n, tal que $\nabla u_n \to \nabla u$ quase sempre em Ω. Como $l(., \overline{V}_m)$ é semi-contínua superiormente, temos

$$l(\nabla u(x), \overline{V}_m) \geq \limsup_{n\to\infty} l(\nabla u_n(x), \overline{V}_m), \quad \text{quase sempre em } \Omega.$$

Pelo Lema de Fatou (2.2.4.), para quase todos os $x \in \Omega$,

$$\int_\Omega l(\nabla u(x), \overline{V}_m) dx \geq \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega l(\nabla u_n(x), \overline{V}_m) dx,$$

como $L_m(u_n) \geq \lambda_n \to \lambda$, temos

$$\int_{\Omega} l(\nabla u(x), \overline{V}_m)dx \geq \lambda$$

ou seja, $(\lambda, u) \in \Theta$. Logo, Θ é fechado. Como $l(., \overline{V}_m)$ é uma função concava, L_m é também concava, donde se conclui que Θ é um conjunto convexo, logo, por 3.1 de [Schaeffer], (p. 136), Θ é fracamente fechado em $W^{1,2}(\Omega)$. Então, o funcional L_m é fracamente semi-contínuo superiormente. Fixando $a \in V_m$, considerando uma sucessão $s_n(a)(.) \to s_0(a)(.)$ em $\mathcal{C}_0(\overline{\Omega})$, defina-se a sucessão $\sigma_n(a)(.) := \langle a, . \rangle + s_n(a)(.)$. Então, $\sigma_n(a) \in \mathcal{U}_m$, para $n = 1, 2, \dots$; existirá também uma subsucessão, que designaremos sem perda de generalidade por $\sigma_n(a)(.)$ tal que $\sigma_n(a)(.) \to \sigma_0(a)(.)$ fracamente em $W^{1,2}(\Omega)$, onde $\sigma_0(a)(.) = \langle a, . \rangle + s_0(a)(.)$. Em particular, teremos

$$L_m(\sigma_0(a)(.)) \geq \limsup_{n \to \infty} L_m(\sigma_n(a)(.)).$$

Então, novamente pelo lema de Fatou,

$$\int_{V_m} L_m(\sigma_0(a)(.))da \geq \limsup_{n \to \infty} \int_{V_m} L_m(\sigma_n(a)(.))da,$$

o que prova a afirmação 1.

Para cada $m = 1, 2, \dots$ e $\eta > 0$ fazemos

$$\mathcal{S}_m^\eta := \left\{ s \in \overline{\mathcal{S}} \, : \mathcal{L}_m(s) < \eta \right\}.$$

Da afirmação anterior vem que, para qualquer sucessão $(s_k)_k \subset \left(\mathcal{S}_m^\eta\right)^c$ com $\lim_{k \to \infty} s_k = s$,

$$\mathcal{L}_m(s) \geq \limsup_{k \to \infty} \mathcal{L}_m(s_k) \geq \eta,$$

donde sai que $s \in \left(\mathcal{S}_m^\eta\right)^c$. Isto significa que $\left(\mathcal{S}_m^\eta\right)^c$ é fechado, ou seja, $\mathcal{S}_m^\eta$ é aberto em $\overline{\mathcal{S}}$.

(d) **Afirmação 2**: O conjunto $\mathcal{S}_m^\eta$ é denso em $\overline{\mathcal{S}}$.

Fixemos $\widetilde{s}(.) \in \mathcal{S}$ e $0 < \varepsilon < 1$. Para provar esta afirmação construiremos $\widehat{s}(.) \in \mathcal{S}_m^\eta$ tal que $\left| \widehat{s}(a)(x) - \widetilde{s}(a)(x) \right| < \varepsilon$ para todos os $a \in \mathrm{dom}\,(g^{**})$ e $x \in \overline{\Omega}$.

(d_1) Da definição de $\mathcal{S}$ sabe-se que existem $\widetilde{M} > 0$ e conjuntos de medida nula $\widetilde{Z}_1, \widetilde{Z}_2$ tais que

$$a + \nabla \widetilde{s}(a)(x) \in V_m \tag{4.4}$$
$\forall\ a \in V_m$, $\forall\ x \in \Omega \backslash \widetilde{Z}_2$;

$$\left|\widetilde{s}(a)(x) - \widetilde{s}(a')(x')\right| \leq \widetilde{M}\Big(|a - a'| + |x - x'|\Big)$$
$\forall\ a, a' \in V_m$, $\forall\ x, x' \in \overline{\Omega}$;

$$\left|\nabla \widetilde{s}(a)(x) - \nabla \widetilde{s}(a')(x')\right| \leq \widetilde{M}\Big(|a - a'| + |x - x'|\Big) \tag{4.5}$$

sempre que a, a' pertencem a alguma bola contida em $V \backslash \widetilde{Z}_1$ e x, x' pertencem a alguma bola contida em $\Omega \backslash \widetilde{Z}_2$.

Consideremos $a_j \in V_m \backslash \widetilde{Z}_1$ e $x_k \in \Omega \backslash \widetilde{Z}_2$. Por (4.4), pelo teorema de Caratheodory (2.4.3.) e pelas propriedades de $l(., \overline{V}_m)$, é possível encontrar pontos $w^0(a_j, x_k), \ldots, w^n(a_j, x_k) \in V_m - a_j$ tais que

$$\nabla \widetilde{s}(a_j)(x_k) \in \text{int conv}\,\big\{w^0(a_j, x_k), \ldots, w^n(a_j, x_k)\big\}, \tag{4.6}$$

$$l(a_j + w^i(a_j, x_k), \overline{V}_m) < \frac{\eta}{4.\mu(\Omega)\mu(V_m)}\,,\ \ i = 0, 1, \ldots, n. \tag{4.7}$$

Devido à semi-continuidade superior de $l(., \overline{V}_m)$, por (4.4) e pelas desigualdades (4.5) e (4.7), é possível escolher $0 < \delta(a_j, x_k) < \varepsilon$ tal que, para qualquer a com $|a - a_j| < \delta(a_j, x_k)$, para qualquer x com $|x - x_k| < \delta(a_j, x_k)$, temos $a \in V_m \backslash \widetilde{Z}_1$, $x \in \Omega \backslash \widetilde{Z}_2$ e

$$w^i(a_j, x_k) + \nabla \widetilde{s}(a)(x) - \nabla \widetilde{s}(a_j)(x_k) \in V_m - a, \tag{4.8}$$

$$l\big(w^i(a_j, x_k) + a + \nabla \widetilde{s}(a)(x) - \nabla \widetilde{s}(a_j)(x_k), \overline{V}_m\big) < \frac{\eta}{3\mu(\Omega)\mu(V_m)}\,, \tag{4.9}$$

$i = 0, 1, \ldots, n$. Defina-se agora o conjunto

$$\Gamma(a_j, x_k) := \text{conv}\,\Big\{w^i(a_j, x_k) - \nabla \widetilde{s}(a_j)(x_k) : i = 0, 1, \ldots, n\Big\}$$

e seja $\Gamma^*(a_j, x_k)$ o seu polar. Por (4.6) temos que $0 \in \text{int}\,\Gamma(a_j, x_k)$. Então, por 2.4.4., $\Gamma(a_j, x_k)$ e $\Gamma^*(a_j, x_k)$ são conjuntos limitados e contêm a origem no seu interior.

Seja Q_n o cubo

$$Q_n := \big\{p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n :\ -1 \leq p_i \leq 1,\ \forall\, i = 1, \ldots, n\big\}.$$

Escolha-se $\rho(a_j, x_k)$, com $0 < \rho(a_j, x_k) < \delta(a_j, x_k)$, tal que $a_j + \rho(a_j, x_k)Q_n \subset V_m \backslash \widetilde{Z}_1$; $x_k + \rho(a_j, x_k)\Gamma^*(a_j, x_k) \subset \Omega \backslash \widetilde{Z}_2$ e considere-se a família de conjuntos compactos

$$\mathcal{M} := \Big\{(a_j + \rho Q_n) \times (x_k + \rho\Gamma^*(a_j, x_k)) : a_j \in V_m \backslash \widetilde{Z}_1, \\ x_k \in \Omega \backslash \widetilde{Z}_2,\ \rho \text{ racional com } 0 < \rho \leq \rho(a_j, x_k)\Big\}.$$

(d$_2$) A família $\mathcal{M}$ constitui uma cobertura de Vitali do aberto $(V_m \backslash \widetilde{Z}_1) \times (\Omega \backslash \widetilde{Z}_2)$:

Sendo $R_{jk} := (a_j + \rho Q_n) \times (x_k + \rho\Gamma^*_{jk})$, com $\Gamma^*_{jk} = \Gamma^*(a_j, x_k)$ e ρ racional com $0 < \rho \leq \rho(a_j, x_k)$, temos: a) $(a_j, x_k) \in R_{jk}$; b) $\inf_{\rho} \mu(R_{jk}) = 0$; c) Existe uma constante $r(a_j, x_k) > 0$ tal que, para cada par (j, k), é possivel encontrar uma bola $(a_j, x_k) + \xi(a_j, x_k, \rho)B_n$, que contém R_{jk}, com $\frac{\mu(R_{jk})}{\mu((a_j,x_k)+\xi(a_j,x_k,\rho)B_n)} \geq r(a_j, x_k)$.

Antes de mostrar a alínea c) (as alíneas a) e b) são óbvias!), mostre-se que os conjuntos da forma $a_j + \rho Q_n$, com $a_j \in V_m \backslash \widetilde{Z}_1$ e ρ racional com $0 < \rho \leq \rho(a_j, x_k)$, são cobertura de Vitali de V_m. De facto, temos que, para cada j, $a_j \in a_j + \rho Q_n$ e $\inf\{\mu(a_j + \rho Q_n)\} = 0$; fazendo $\zeta := \sqrt{n}$, temos $Q_n \subset \zeta B_n$ e portanto, $a_j + \rho Q_n \subset a_j + \rho.\zeta B_n$; para além disso, temos que $B_n \subset Q_n$, pelo que

$$\frac{\mu(a_j + \rho Q_n)}{\mu(a_j + \rho.\zeta B_n)} > \frac{\mu(a_j + \rho B_n)}{\mu(a_j + \rho.\zeta B_n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} > 0.$$

Como consequência disto e do facto de os conjuntos da forma $x_k + \rho\Gamma^*_{jk}$ ser uma cobertura de Vitali de Ω (demonstração do Teorema 3.2.1.), temos

$$R_{jk} \subset (a_j, x_k) + \varepsilon(a_j, x_k, \rho)B_{2n}$$

com

$$\begin{aligned}\varepsilon(a_j, x_k, \rho) &:= \inf\{R > 0 : (a_j + \rho Q_n) \times (x_k + \rho\Gamma^*_{jk}) \subset (a_j, x_k) + RB_{2n}\} \\ &= \rho.\inf\{R > 0 : Q_n \times \Gamma^*_{jk} \subset RB_{2n}\}\end{aligned}$$

e

$$\frac{\mu_{2n}(R_{jk})}{\mu_{2n}((a_j, x_k) + \varepsilon(a_j, x_k, \rho)B_{2n})} \geq \frac{\mu(a_j + \rho Q_n).\mu(x_k + \rho\Gamma^*_{jk})}{\mu(a_j + \rho.\zeta B_n).\mu(x_k + \varepsilon(x_k, \rho)B_n)} >$$

$$> r(a_j, x_k) > 0.$$

Tem-se então que, pelo Teorema de Vitali, existem conjuntos disjuntos $P_{jk} := (a_j + \rho_{jk}Q_n) \times (x_k + \rho_{jk}\Gamma^*_{jk})$, com (j, k) pertencentes a um subconjunto finito Λ de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e $0 < \rho_{jk} \leq \rho(a_j, x_k)$, $\Gamma^*_{jk} = \Gamma^*(a_j, x_k)$, tal que

$$\mu_{2n}\Big((V_m \times \Omega)\backslash \bigcup_{(j,k)\in\Lambda} P_{jk}\Big) < \frac{\eta}{3D_m}. \tag{4.10}$$

Aqui, μ_{2n} representa a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^{2n}$, e a constante $D_m > 0$ vem da propriedade (l_2) da função $l(.,\overline{V}_m)$. Façamos $\rho_0 := \min_{(j,\,k)\,\in\,\Lambda} \rho_{jk}$; $P := \bigcup_{(j,k)\in\Lambda} \operatorname{int} P_{jk}$ e $w^i_{jk} := w^i(a_j, x_k)$, $(j,k) \in \Lambda$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Recorrendo ao lema 3.1.1., para cada par $(j,k) \in \Lambda$, existirá um conjunto fechado de medida nula Z_{jk} e uma função lipschitziana $\psi_{jk} : \mathbb{R}^n \to [-1; 0]$ tal que $\psi_{jk}(y) = 0$ $\forall y \notin \Gamma^*_{jk}$ e $\nabla\psi_{jk}(y) \in \big\{w^i_{jk} - \nabla\widetilde{s}(a_j)(x_k) : i = 0, 1, \ldots, n\big\}$ para $y \in \Gamma^*_{jk}\backslash Z_{jk}$.

Façamos agora

$$\widehat{Z}_1 := \widetilde{Z}_1 \cup \bigcup_{(j,k)\in\Lambda} (a_j + \rho_{jk}\partial Q_n)\ ; \quad \widehat{Z}_2 := \widetilde{Z}_2 \cup \bigcup_{(j,k)\in\Lambda} (x_k + \rho_{jk} Z_{jk}).$$

De notar que $\widehat{Z}_1$ e $\widehat{Z}_2$ são conjuntos fechados de medida nula.

Escolha-se $\tau > 0$ de modo a satisfazer a condição

$$\sum_{(j,k)\in\Lambda} \mu\big(\rho_{jk}Q_n \backslash \rho_{jk}(1-\tau)\big) < \frac{\eta}{3\mu(\Omega)D_m} \tag{4.11}$$

e seja $\varphi : \mathbb{R}^n \to [0; 1]$ uma função seccionalmente afim com constante de Lipschitz $\frac{1}{\tau}$ tal que $\varphi(a) = 0\ \forall\, a \notin Q_n$ e $\varphi(a) = 1\ \forall\ a \in (1-\tau)Q_n$.

(d_3) Defina-se agora a função

$$\widehat{s}(a)(x) := \widetilde{s}(a)(x) + \sum_{(j,k)\in\Lambda} \rho_{jk}\varphi\Big(\frac{a-a_j}{\rho_{jk}}\Big)\psi_{jk}\Big(\frac{x-x_k}{\rho_{jk}}\Big),$$

com $a \in \mathbb{R}^n$, $x \in \overline{\Omega}$. Em primeiro lugar tem-se que $\widehat{s}(a)(.) \in \mathcal{C}_0(\overline{\Omega})$ pois é uma soma finita de funções contínuas que assumem o valor 0 em $\partial\Omega$.

Note-se que $\varphi\Big(\frac{a-a_j}{\rho_{jk}}\Big)\psi_{jk}\Big(\frac{x-x_k}{\rho_{jk}}\Big) \neq 0$ apenas se $a \in a_j + \rho_{jk}Q_n$ e $x \in x_k + \rho_{jk}\Gamma^*_{jk}$; neste caso

$$\Big|\widehat{s}(a)(x) - \widetilde{s}(a)(x)\Big| = \Bigg|\sum_{(j,k)\in\Lambda} \rho_{jk}\varphi\Big(\frac{a-a_j}{\rho_{jk}}\Big)\psi_{jk}\Big(\frac{x-x_k}{\rho_{jk}}\Big)\Bigg| =$$

$$= \Big|\rho_{jk}\varphi\Big(\frac{a-a_j}{\rho_{jk}}\Big)\psi_{jk}\Big(\frac{x-x_k}{\rho_{jk}}\Big)\Big| \leq$$

$$\leq \rho_{jk}\left|\psi_{jk}\Big(\frac{x-x_k}{\rho_{jk}}\Big)\right| \leq \rho(a_j,x_k) < \varepsilon. \tag{4.12}$$

Definindo $\widehat{M} := \widetilde{M} + \frac{2}{\tau}\Big(1+\frac{\text{diam}(V_m)}{\rho_0}\Big)$, tem-se que

$$\begin{aligned}
&\left|\widehat{s}(a)(x)-\widehat{s}(a')(x')\right| \leq \\
&\leq \left|\widetilde{s}(a)(x)-\widetilde{s}(a')(x')\right| + \left|\varphi\Big(\tfrac{a-a_j}{\rho_{jk}}\Big)\rho_{jk}\psi_{jk}\Big(\tfrac{x-x_k}{\rho_{jk}}\Big) - \varphi\Big(\tfrac{a'-a_{j'}}{\rho_{j'k'}}\Big)\rho_{j'k'}\psi_{j'k'}\Big(\tfrac{x'-x_{k'}}{\rho_{j'k'}}\Big)\right| \leq \\
&\leq \left|\widetilde{s}(a)(x)-\widetilde{s}(a')(x')\right| + \rho_{jk}\left|\psi_{jk}\Big(\tfrac{x-x_k}{\rho_{jk}}\Big)\right|\left|\varphi\Big(\tfrac{a-a_j}{\rho_{jk}}\Big)-\varphi\Big(\tfrac{a'-a_{j'}}{\rho_{j'k'}}\Big)\right| + \\
&\qquad + \left|\varphi\Big(\tfrac{a'-a_{j'}}{\rho_{j'k'}}\Big)\right|\left|\rho_{jk}\psi_{jk}\Big(\tfrac{x-x_k}{\rho_{jk}}\Big)-\rho_{j'k'}\psi_{j'k'}\Big(\tfrac{x'-x_{k'}}{\rho_{j'k'}}\Big)\right| \leq \\
&\leq \left|\widetilde{s}(a)(x)-\widetilde{s}(a')(x')\right| + \rho_{jk}\left|\varphi\Big(\tfrac{a-a_j}{\rho_{jk}}\Big)-\varphi\Big(\tfrac{a'-a_j}{\rho_{jk}}\Big)+\varphi\Big(\tfrac{a-a_{j'}}{\rho_{j'k'}}\Big)-\varphi\Big(\tfrac{a'-a_{j'}}{\rho_{j'k'}}\Big)\right| + \\
&\qquad + \left|\rho_{jk}\psi_{jk}\Big(\tfrac{x-x_k}{\rho_{jk}}\Big)-\rho_{jk}\psi_{jk}\Big(\tfrac{x'-x_k}{\rho_{jk}}\Big)+\rho_{j'k'}\psi_{j'k'}\Big(\tfrac{x-x_{k'}}{\rho_{j'k'}}\Big)-\rho_{j'k'}\psi_{j'k'}\Big(\tfrac{x'-x_{k'}}{\rho_{j'k'}}\Big)\right| \leq \\
&\leq \widetilde{M}\big(|a-a'|+|x-x'|\big) + \rho_{jk}\left|\varphi\Big(\tfrac{a-a_j}{\rho_{jk}}\Big)-\varphi\Big(\tfrac{a'-a_j}{\rho_{jk}}\Big)\right| + \\
&\qquad + \rho_{jk}\left|\varphi\Big(\tfrac{a-a_{j'}}{\rho_{j'k'}}\Big)-\varphi\Big(\tfrac{a'-a_{j'}}{\rho_{j'k'}}\Big)\right| + \rho_{jk}\left|\psi_{jk}\Big(\tfrac{x-x_k}{\rho_{jk}}\Big)-\psi_{jk}\Big(\tfrac{x'-x_k}{\rho_{jk}}\Big)\right| + \\
&\qquad\qquad + \rho_{j'k'}\left|\psi_{j'k'}\Big(\tfrac{x-x_{k'}}{\rho_{j'k'}}\Big)-\psi_{j'k'}\Big(\tfrac{x'-x_{k'}}{\rho_{j'k'}}\Big)\right| \leq \\
&\leq \widetilde{M}\big(|a-a'|+|x-x'|\big) + \frac{1}{\tau}|a-a'| + \frac{\rho_{jk}}{\rho_{j'k'}}\frac{1}{\tau}|a-a'| + 2\text{diam}\,(V_m)|x-x'| \leq \\
&\leq \widetilde{M}\big(|a-a'|+|x-x'|\big) + \frac{2}{\tau}|a-a'| + 2\text{diam}\,(V_m)|x-x'| \leq \\
&\leq \widehat{M}\big(|a-a'|+|x-x'|\big),
\end{aligned}$$

supondo, sem perda de generalidade, que $\rho_{jk} \leq \rho_{j'k'}$, $\forall\, a, a' \in V_m$, $\forall\, x, x' \in \overline{\Omega}$; deste modo, podemos dizer que é verificada a propriedade (4.2). Em particular, $\widehat{s}(.)$ é contínua e, por (4.12), $\widehat{s}(.) \in \mathcal{C}_b\big(\text{dom}\,(g^{**}), \mathcal{C}_0(\overline{\Omega})\big)$.

O gradiente de $\widehat{s}(a)(.)$ é dado por

$$\nabla\widehat{s}(a)(x) = \nabla\widetilde{s}(a)(x) + \sum_{(j,k)\in\Lambda}\varphi\Big(\frac{a-a_j}{\rho_{jk}}\Big)\nabla\psi_{jk}\Big(\frac{x-x_k}{\rho_{jk}}\Big).$$

Seja $a \in V$ e $x \in \Omega\backslash\widehat{Z}_2$. Se $(a,x) \notin P$, então $\nabla\widehat{s}(a)(x) = \nabla\widetilde{s}(a)(x)$ (pois $\varphi\big(\frac{a-a_j}{\rho_{jk}}\big) = 0$) e, por hipótese, $a + \nabla\widehat{s}(a)(x) = a + \nabla\widetilde{s}(a)(x) \in \text{int}\,\widehat{F}(a)$; caso contrário, existirá um único $(j,k)\in\Lambda$ e $i\in\{0,1,\ldots,n\}$ tal que $\frac{a-a_j}{\rho_{jk}}\in\operatorname{int}Q_n$, $\frac{x-x_k}{\rho_{jk}}\in\Gamma^*_{ijk}:=\big\{z\in\Gamma^*_{jk}:\nabla\psi_{jk}(z)=w^i_{jk}-\nabla\widetilde{s}(a_j)(x_k)\big\}$ e

$$\nabla\widehat{s}(a)(x)=\nabla\widetilde{s}(a)(x)+\varphi\Big(\frac{a-a_j}{\rho_{jk}}\Big)\big(w^i_{jk}-\nabla\widetilde{s}(a_j)(x_k)\big). \tag{4.13}$$

Então, por (4.4) e (4.8) temos que $a+\nabla\widehat{s}(a)(x)=\lambda\big(w^i_{jk}+a+\nabla\widetilde{s}(a)(x)$ $-\nabla\widetilde{s}(a_j)(x_k)\big)+(1-\lambda)\big(a+\nabla\widetilde{s}(a)(x)\big)\in V_m$, onde $\lambda=\varphi\big(\frac{a-a_j}{\rho_{jk}}\big)\in[0;1]$, ficando (4.1) provado para $\widehat{s}(.)$.

Seja agora $(a,x)\in P$ e suponha-se que a, a' pertence a uma bola contida em $V_m\backslash\widehat{Z}_1$, x, x' pertence a uma bola contida em $\Omega\backslash\widehat{Z}_2$. Se $(j,k)\in\Lambda$ é tal que $\varphi\Big(\frac{a-a_j}{\rho_{jk}}\Big)\nabla\psi_{jk}\Big(\frac{x-x_k}{\rho_{jk}}\Big)\neq 0$ então $\frac{a-a_j}{\rho_{jk}}\in\operatorname{int}Q_n$, $\frac{x-x_k}{\rho_{jk}}\in\Gamma^*_{ijk}$, para algum $i=\{0,1,\ldots,n\}$, e portanto $\frac{a'-a_j}{\rho_{jk}}\in\operatorname{int}Q_n$, $\frac{x'-x_k}{\rho_{jk}}\in\Gamma^*_{ijk}$ e por este motivo,

$$\nabla\widehat{s}(a')(x')=\nabla\widetilde{s}(a')(x')+\varphi\Big(\frac{a'-a_j}{\rho_{jk}}\Big)\big(w^i_{jk}-\nabla\widetilde{s}(a_j)(x_k)\big).$$

Por (4.5) e (4.13) tem-se que

$$\begin{aligned}
|\nabla\widehat{s}(a)(x)-\nabla\widehat{s}(a')(x)| &\leq |\nabla\widetilde{s}(a)(x)-\nabla\widetilde{s}(a')(x)|+\\
&\qquad +|w^i_{jk}-\nabla\widetilde{s}(a_j)(x_k)|\Big|\varphi\Big(\frac{a-a_j}{\rho_{jk}}\Big)-\varphi\Big(\frac{a'-a_j}{\rho_{jk}}\Big)\Big|\leq\\
&\leq \widetilde{M}\big(|a-a'|+|x-x'|\big)+\operatorname{diam}(V_m)\Big|\varphi\Big(\frac{a-a_j}{\rho_{jk}}\Big)-\varphi\Big(\frac{a'-a_j}{\rho_{jk}}\Big)\Big|\leq\\
&\leq \widetilde{M}\big(|a-a'|+|x-x'|\big)+\frac{\operatorname{diam}(V_m)}{\tau\rho_0}|a-a'|\leq\\
&\leq \widehat{M}\big(|a-a'|+|x-x'|\big),
\end{aligned}$$

obtendo-se para $\widehat{s}(.)$ a desigualdade em (4.3). Provou-se assim que $\widehat{s}(.)\in\mathcal{S}$ e, por (4.12), que $\|\widehat{s}(a)-\widetilde{s}(a)\|_\infty<\varepsilon$ para todo o $a\in\operatorname{dom}(g^{**})$.

(d$_4$) Resta apenas provar a desigualdade $\mathcal{L}(\widehat{s})<\eta$. Denotemos por

$$P':=\bigcup_{(j,k)\in\Lambda}P'_{jk}\,,\qquad P'_{jk}:=\{(a,x)\in P_{jk}:a\in a_j+\rho_{jk}(1-\tau)Q_n\}\,,$$

com $(j,k)\in\Lambda$. Usando a definição de τ (ver (4.11)), tem-se que

$$\mu_{2n}(P\backslash P') = \mu_{2n}\Bigg(\bigcup_{(j,k)\in\Lambda}(P_{jk}\backslash P'_{jk})\Bigg) = \Bigg(\sum_{(j,k)\in\Lambda}\mu_{2n}(P_{jk}) - \mu_{2n}(P'_{jk})\Bigg) =$$
$$= \sum_{(j,k)\in\Lambda}\mu_{2n}(P_{jk}\backslash P'_{jk}) = \sum_{(j,k)\in\Lambda}\mu(\rho_{jk}Q_n\backslash\rho_{jk}(1-\tau)Q_n).\mu(x_k+\rho_{jk}\Gamma^*_{jk}) <$$
$$< \mu(\Omega)\frac{\eta}{3\mu(\Omega)D_m} = \frac{\eta}{3D_m}. \tag{4.14}$$

Para além disto, para quase todos os $(a,x)\in P'$ e algum $(j,k)\in\Lambda$, $i\in\{0,\dots,n\}$, temos que $\nabla\widehat{s}(a)(x) = \nabla\widetilde{s}(a)(x) + w^i_{jk} - \nabla\widetilde{s}(a_j)(x_k)$. Esta igualdade decorre de (4.13) bem como do facto de, sendo $(a,x)\in P'$, $\frac{a-a_j}{\rho_{jk}}\in(1-\tau)Q_n$; da definição de φ, vem que $\varphi\Big(\frac{a-a_j}{\rho_{jk}}\Big) = 1$. Por (4.9) temos que

$$l(a+\nabla\widehat{s}(a)(x),\overline{V}_m) < \frac{\eta}{3\mu(\Omega)\mu(V_m)}. \tag{4.15}$$

As desigualdades (4.15), (4.14) e (4.10) implicam

$$\mathcal{L}_m(\widehat{s}) = \int_{V_m}\int_\Omega l(a+\nabla\widehat{s}(a)(x),\overline{V}_m)dxda =$$
$$= \int\int_{P'} l(a+\nabla\widehat{s}(a)(x),\overline{V}_m)dxda + \int\int_{P\backslash P'} l(a+\nabla\widehat{s}(a)(x),\overline{V}_m)dxda +$$
$$+ \int\int_{(V_m\times\Omega)} l(a+\nabla\widehat{s}(a)(x),\overline{V}_m)dxda <$$
$$< \frac{\eta}{3\mu(\Omega)\mu(V_m)}\mu(P') + D_m\frac{\eta}{3D_m} + D_m\frac{\eta}{3D_m} \le \eta.$$

Deste modo, $\widehat{s}\in\mathcal{S}^\eta_m$, ficando provada a afirmação em (c).

(e) Como $\overline{\mathcal{S}}$ é um espaço métrico completo não vazio e, para quaisquer $\eta>0$, $m=1,2,\dots$, o conjunto $\mathcal{S}^\eta_m$ é aberto e denso em $\overline{\mathcal{S}}$, pelo teorema de Baire, temos que a intersecção contável $\mathcal{S}_0 := \bigcap_{m=1}^\infty\bigcap_{k=1}^\infty\mathcal{S}^{1/k}_m$ é um subconjunto denso de $\overline{\mathcal{S}}$.

Considere-se $s(.)\in\mathcal{S}_0$ qualquer. Então, $s:\mathrm{dom}\,(g^{**})\to\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ é uma função contínua tal que $s(a)\equiv 0\ \forall a\notin V$, $s(a)(x)=0\,\forall a\in V, x\in\partial\Omega$; para todos os $a\in V$ e quase todos os $x\in\Omega$ existe o gradiente $\nabla s(a)(x)$ que satisfaz $a+\nabla s(a)(x)\in\ \widehat{F}(a)$. Tem-se também, para todos os $m=1,2,\dots$, que

$$\mathcal{L}_m = \int_{V_m}\int_\Omega l(a+\nabla s(a)(x),\overline{V}_m)dxda = 0.$$

Esta igualdade vai implicar que $l(a + \nabla s(a)(x), \overline{V}_m) = 0$, ou seja, $a + \nabla s(a)(x) \in$ extr $\overline{V}_m$, para quase todos os $x \in \Omega$ e quase todos os $a \in V_m$,

(f) Defina-se, por fim, a função $\sigma(a)(x) := \langle a, x\rangle + s(a)(x)$. Pretende mostrar-se que $\sigma : \mathrm{dom}\,(g^{**}) \to \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ satisfaz ***(i)*** e ***(ii)***.

Em primeiro lugar, pela desigualdade de Jensen, pelo facto de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ ser denso em $W_0^{1,1}(\Omega)$ e pelo teorema da divergência, tem-se que

$$\min\Big\{\int_\Omega g^{**}(\nabla u(x))dx : u(.) = \langle a, .\rangle + \widetilde{u}(.),\, \widetilde{u}(.) \in W_0^{1,1}(\Omega)\Big\} = g^{**}(a).\mu(\Omega).$$

De facto,

$$g^{**}\Big(\frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega \nabla u(x)dx\Big) \leq \frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega g^{**}(\nabla u(x))dx$$

$$\Leftrightarrow\ g^{**}\Big(\frac{1}{\mu(\Omega)}\Big(\int_{\partial\Omega}\langle\widetilde{u}(x), \nu\rangle dx + \int_\Omega a dx\Big)\Big) \leq \frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega g^{**}(\nabla u(x))dx$$

$$\Leftrightarrow\ g^{**}(a) \leq \frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega g^{**}(\nabla u(x))dx$$

$$\Leftrightarrow\ \mu(\Omega).g^{**}(a) \leq \int_\Omega g^{**}(\nabla u(x))dx.$$

Deste modo, se $a \notin V$, então $\sigma(a)(x) = \langle a, x\rangle$ é solução do problema convexificado. Caso contrário, $a \in V_m$ para algum $m = 1, 2, \ldots$, e $\nabla\sigma(a)(x) \in V_m$ para quase todos os $x \in \Omega$. Como V_m é a projecção em $\mathbb{R}^n$ de uma face não vertical relativamente aberta, W_m, de epi(g^{**}), existe um hiperplano H, que contém W_m, e separa $\overline{W}_m$ de epi(g^{**}), que se pode escrever na forma $H = \{(w, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : r = \langle\alpha, w\rangle + \beta\}$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (ver cap. 2). Em particular, teremos $g^{**}(\nabla\sigma(a)(x)) = \langle\alpha, \nabla\sigma(a)(x)\rangle + \beta$ para quase todos os $x \in \Omega$. Por isso, usando novamente o teorema da divergencia

$$\begin{aligned}\int_\Omega g^{**}(\nabla\sigma(a)(x))dx &= \Big\langle\alpha, \int_\Omega (a + \nabla s(a)(x))dx\Big\rangle + \beta\mu(\Omega) = \\ &= (\langle\alpha, a\rangle + \beta)\mu(\Omega) = g^{**}(a)\mu(\Omega)\,.\end{aligned} \tag{4.16}$$

A igualdade (4.16) significa que $\sigma(a)(.)$ é solução do problema convexificado.

Finalmente, vamos ter que $\nabla\sigma(a)(x) \in$ extr $\widehat{F}(a)$ e portanto, para quase todos os $x \in \Omega$, $g(\nabla\sigma(a)(x)) = g^{**}(\nabla\sigma(a)(x))$. Deste modo, por (4.16), temos

$$\int_\Omega g(\nabla\sigma(a)(x))dx =$$

$$= \min\left\{\int_\Omega g^{**}(\nabla u(x))dx : u(.) = \langle a, .\rangle + \widetilde{u}(.),\, \widetilde{u}(.) \in W_0^{1,1}(\Omega)\right\} \leq$$

$$\leq \inf\left\{\int_\Omega g(\nabla u(x))dx : u(.) = \langle a, .\rangle + \widetilde{u}(.),\, \widetilde{u}(.) \in W_0^{1,1}(\Omega)\right\} =$$

$$= \min\left\{\int_\Omega g(\nabla u(x))dx : u(.) = \langle a, .\rangle + \widetilde{u}(.),\, \widetilde{u}(.) \in W_0^{1,1}(\Omega)\right\},$$

e assim, $\sigma(a)(.)$ é uma solução do problema original. O teorema fica assim provado.

□

4.2.2. *Observação:* Tal como fizemos no teorema anterior, designemos o conjunto de todos os $a \in \mathrm{dom}(g^{**})$ tais que $g^{**}(.)$ é afim numa vizinhança de a por V. Seja $\sigma(.)$ construida como no teorema. Represente-se por $\mathcal{R}(\sigma)$ o conjunto de $a \in V$ tais que $\sigma(a)(.)$ é solução de $(\mathcal{P}_a)$. Então, $\mathcal{R}(\sigma)$ é uma intersecção contável de abertos, densa em V.

De facto, definindo $\mathcal{R}^k_m(\sigma) := \left\{a \in V_m : L_m(\sigma(a)) < \frac{1}{k}\right\}$, $\mathcal{R}^k(\sigma) := \bigcup_{m=1}^\infty \mathcal{R}^k_m(\sigma)$, $k, m \in \mathbb{N}$, temos, por argumentos semelhantes aos utilizados em (c) e (d) da demonstração anterior, que $\mathcal{R}^k_m(\sigma)$ e $\mathcal{R}^k(\sigma)$ são conjuntos abertos e densos, respectivamente, em V_m e V. Também por argumentos semelhentes aos usados em (e) e (f) da demonstração anterior, podemos estabelecer a igualdade $\mathcal{R}(\sigma) = \bigcap_{k=1}^\infty \mathcal{R}^k(\sigma)$; logo temos que $\mathcal{R}(\sigma)$ é uma intersecção contável de abertos, densa em V.

5. Uma selecção lipschitziana do conjunto de minimizantes de um funcional não convexo do gradiente

No capítulo anterior, demonstrou-se, recorrendo ao Teorema de Vitali e ao Teorema de Baire, a existência de uma função contínua $\sigma : \operatorname{dom} g^{**} \to \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ tal que $\sigma(a)(.)$ é solução para o problema de minimização $(\mathcal{P}_a)$ para quase todos os a para os quais essa solução existe, sendo também solução do problema convexificado $(\mathcal{P}_a^{**})$ para todos os a. O objectivo deste capítulo é apresentar um melhoramento deste resultado. Assim, vamos construir explicitamente uma função $s : \operatorname{dom} g^{**} \to \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ que seja lipschitziana e que minimize o funcional do problema $(\mathcal{P}_a)$ para todos os a para os quais o mínimo exista.

Começaremos por apresentar alguns conceitos de base e construções necessárias à demonstração do teorema de selecção.

5.1. Noções preliminares e resultados auxiliares

5.1.1. Como já foi definido em capítulos anteriores, denotamos por B_n a bola unitária fechada em $\mathbb{R}^n$ $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ e por Q_n o cubo fechado em $\mathbb{R}^n$ $\{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq 1, \forall i = 1, \ldots, n\}$.

5.1.2. Sendo $A, B \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos compactos não vazios, define-se <u>distância de Hausdorff entre A e B</u> como sendo

$$\mathfrak{D}(A,B) := \max\left\{\sup_{a\in A} \mathrm{d}(a,B),\ \sup_{b\in B} \mathrm{d}(b,A)\right\}.$$

Esta distância entre conjuntos verifica algumas propriedades, entre elas:

a) $\mathfrak{D}(A,C) \leq \mathfrak{D}(A,B) + \mathfrak{D}(B,C)$;

b) $\mathfrak{D}(A,B) = 0$ se e somente se $A = B$;

c) $\mathrm{d}(y,B) \leq |y-x| + \mathrm{d}(x,A) + \mathfrak{D}(A,B)$.

([Aubin-Cellina], p. 65, 66)

5.1.3. Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ e $x \in \mathbb{R}^n$. A projecção de x sobre o conjunto C define-se como sendo o conjunto

$$\pi(x, C) = \{y \in C : |x - y| = \mathrm{d}(x, C)\}.$$

Se o conjunto C for convexo e fechado então $\pi(x, C)$ consiste num único ponto, isto é, existe um único ponto em C que está mais próximo de x ([Bushenkov-Smirnov], p. 17).

5.1.4. Dado um conjunto $V \subset \mathbb{R}^n$, uma multifunção $F : V \to \mathbb{R}^n$ é uma correspondencia que a cada ponto $v \in V$ associa um subconjunto $F(v)$ de $\mathbb{R}^n$. Uma multifunção F é Hausdorff-semicontínua inferiormente (H-s.c.i.) se, para quaisquer $v \in V$ e $\varepsilon > 0$, vai existir $\delta > 0$ tal que $v' \in (v + \delta B_n) \cap V \Rightarrow F(v) \subset F(v') + \varepsilon B_n$. Uma multifunção F é Hausdorff-semicontínua superiormente (H-s.c.s.) se, para quaisquer $v \in V$ e $\varepsilon > 0$, vai existir $\delta > 0$ tal que $v' \in (v + \delta B_n) \cap V \Rightarrow F(v') \subset F(v) + \varepsilon B_n$. F será uma multifunção Hausdorff-contínua se for simultaneamente H-s.c.i. e H-s.c.s.. Para multifunções com valores compactos não vazios em $\mathbb{R}^n$, a Hausdorff-continuidade é equivalente à continuidade relativamente à distância de Hausdorff. De facto, $F(v) \subset F(v') + \varepsilon B_n$ e $F(v') \subset F(v) + \varepsilon B_n$ é equivalente a $\sup_{x \in F(v)} \mathrm{d}(x, F(v')) < \varepsilon$ e $\sup_{x' \in F(v')} \mathrm{d}(x', F(v)) < \varepsilon$, o que por sua vez é equivalente a ter $\mathfrak{D}(F(v), F(v')) < \varepsilon$.

5.1.5. Lema: *Se $F : V \to \mathbb{R}^n$ é uma multifunção com valores compactos convexos não vazios, contínua relativamente à distância de Hausdorff, então $v \mapsto \mathbb{R}^n \backslash F(v)$ é Hausdorff-contínua.*

Demonstração:

Pretende provar-se que, se $F : V \to \mathbb{R}^n$ é tal que

$$\forall\, v \in V,\, \forall\, \varepsilon > 0,\, \exists\, \delta > 0 : v' \in (v + \delta \overset{\circ}{B}_n) \cap V \Rightarrow \mathfrak{D}(F(v), F(v')) < \varepsilon$$

então

$$\mathbb{R}^n \backslash F(v') \subset \mathbb{R}^n \backslash F(v) + \varepsilon \overset{\circ}{B}_n$$

e

$$\mathbb{R}^n \backslash F(v) \subset \mathbb{R}^n \backslash F(v') + \varepsilon \overset{\circ}{B}_n.$$

Deste modo, simplificando a notação, prove-se que sendo A e B conjuntos compactos convexos não vazios, $\mathfrak{D}(A, B) < \varepsilon \Rightarrow B^c \subset A^c + \varepsilon \overset{\circ}{B}_n$ e $A^c \subset B^c + \varepsilon \overset{\circ}{B}_n$.

Ora,

$$\mathfrak{D}(A, B) < \varepsilon \Rightarrow \sup_{a \in A} \mathrm{d}(a, B) < \varepsilon \Rightarrow A \subset B + \varepsilon \overset{\circ}{B}_n$$

$$\Rightarrow \left(B + \varepsilon \overset{\circ}{B}_n\right)^c \subset A^c. \qquad (*)$$

Para além disso,

$$\mathfrak{D}(A,B) < \varepsilon \Rightarrow B^c \subset \left(B + \varepsilon \overset{\circ}{B}_n\right)^c + \varepsilon \overset{\circ}{B}_n. \qquad (**)$$

De facto, suponhamos, em primeiro lugar, que $x \in B^c$ e $x \notin B + \varepsilon \overset{\circ}{B}_n$. Então, $x \in \left(B + \varepsilon \overset{\circ}{B}_n\right)^c$, o que implica que $x \in \left(B + \varepsilon \overset{\circ}{B}_n\right)^c + \varepsilon \overset{\circ}{B}_n$.

Suponhamos agora que $x \in B^c$ e $x \in B + \varepsilon \overset{\circ}{B}_n$. Sejam $y = \pi(x,B)$ e $z \in \left(B + \varepsilon \overset{\circ}{B}_n\right)^c$ tal que $x = \lambda y + (1-\lambda)z$, com $\lambda \in (0,1)$. Então,

$$\mathrm{d}(x,z) = |x-z| = |\lambda y + z - \lambda z - z| = \lambda |y-z|.$$

Deste modo,

$$\mathrm{d}\Big(x, \big(B + \varepsilon \overset{\circ}{B}_n\big)^c\Big) = \inf_{z \in \left(B+\varepsilon \overset{\circ}{B}_n\right)^c} |x-z| =$$

$$= \inf_{z \in \left(B+\varepsilon \overset{\circ}{B}_n\right)^c} \lambda |y-z| =$$

$$= \lambda \varepsilon < \varepsilon,$$

uma vez que $\lambda < 1$. Temos assim que $\mathrm{d}\Big(x, \big(B + \varepsilon \overset{\circ}{B}_n\big)^c\Big) < \varepsilon$, o que implica que $x \in \left(B + \varepsilon \overset{\circ}{B}_n\right)^c + \varepsilon \overset{\circ}{B}_n$.

Por (*) e (**), temos então que $B^c \subset A^c + \varepsilon \overset{\circ}{B}_n$. De modo semelhante,

$$\mathfrak{D}(A,B) < \varepsilon \Rightarrow \sup_{b \in B} \mathrm{d}(b, A)\ ;$$

raciocinando de forma análoga chegamos à conclusão que

$$A^c \subset B^c + \varepsilon \overset{\circ}{B}_n.$$

$\square$

5.1.6. Lema: Seja $V \subset \mathbb{R}^n$ conexo e seja $F : V \to \mathbb{R}^n$ uma multifunção tal que tanto $v \mapsto F(v)$ como $v \mapsto \mathbb{R}^n \backslash F(v)$ são Hausdorff-contínuas. Suponha-se que $x \in F(v_1) \backslash F(v_2)$ para alguns $v_1, v_2 \in V$. Então x pertence a $\partial F(v)$, para algum $v \in V$.

Demonstração:

Suponhamos que $x \notin \partial F(v_1) \cup \partial F(v_2)$. Suponhamos que não existe nenhum v tal que $x \in \partial F(v)$. Consideremos agora os conjuntos não vazios $V_x := \{v \in V : x \in \operatorname{int} F(v)\}$ e $W_x := \{v \in V : x \notin \overline{F(v)}\}$. Como um conjunto conexo não pode escrever-se como união de dois conjuntos abertos não vazios, obteremos um absurdo se for provado que tanto V_x como W_x são abertos em V.

Prove-se então que V_x é aberto. Seja $v \in V_x$; então $x \in \operatorname{int} F(v)$. Considere-se o conjunto $E(v) := \mathbb{R}^n \backslash F(v)$. Deste modo, $\varepsilon := \frac{\mathrm{d}(x,E(v))}{2} > 0$ e pela Hausdorff-continuidade de $E(.)$, existe $\delta > 0$ tal que $v' \in (v + \delta B_n) \cap V \Rightarrow E(v') \subset E(v) + \varepsilon B_n$; daqui resulta que $\mathrm{d}(x, E(v')) \geq \mathrm{d}(x, E(v) + \varepsilon B_n) = \mathrm{d}(x, E(v)) - \varepsilon = \varepsilon$. Assim,

$$\begin{aligned} v' \in (v + \delta B_n) \cap V &\Rightarrow \mathrm{d}(x, E(v')) \geq \varepsilon \\ &\Rightarrow x \in \mathbb{R}^n \backslash E(v') = \operatorname{int} F(v') \\ &\Rightarrow v' \in V_x \end{aligned}$$

donde se conclui que $(v + \delta B_n) \cap V \subset V_x$. Logo, V_x é aberto.

Para provar que W_x é aberto, o raciocínio é perfeitamente análogo; em vez de usarmos $E(v)$, usamos $F(v)$.

Temos assim $V = V_x \cup W_x$, com V_x e W_x abertos, o que é absurdo, pois V é um conjunto conexo.

$\square$

5.1.7. Consideremos um qualquer conjunto convexo limitado $V \subset \mathbb{R}^n$ e $a \in V$. De forma semelhante ao que foi feito na demonstração do Teorema 3.2.1., defina-se

$$C(a) := V - a; \quad C^*(a) := (C(a))^*;$$

$$r(a) := \sup\{r > 0 : rB_n \subset C(a)\};$$

$$R(a) := \inf\{R > 0 : C(a) \subset RB_n\}.$$

Tem-se, então, que $0 < r(a) \leq R(a) < +\infty$ e que

$$\sup\{s > 0 : sB_n \subset C^*(a)\} = \frac{1}{R(a)},$$

$$\inf\{S > 0 : C^*(a) \subset SB_n\} = \frac{1}{r(a)}.$$

Destas igualdades decorrem as inclusões $\frac{r(a)}{R(a)} B_n \subset r(a) C^*(a) \subset B_n$, $a \in V$.

5.1.8. Lema: *Para quaisquer* $a_1, a_2 \in V$, *temos que*

$$\frac{1}{r(a_1)}\frac{1}{r(a_2)}|r(a_1) - r(a_2)| \leq \mathfrak{D}(C^*(a_1), C^*(a_2)) \leq \frac{1}{r(a_1)}\frac{1}{r(a_2)}|a_1 - a_2|.$$

Demonstração:

(a) Visto que $\frac{1}{r(a)}$ é a maior distância dos de $C^*(v)$ à origem, supondo sem perda de generalidade que $r(a_1) \geq r(a_2)$, temos que

$$\frac{1}{r(a_1)} \leq \frac{1}{r(a_2)} + \mathfrak{D}(C^*(a_1), C^*(a_2)) \qquad (*)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{r(a_1)} - \frac{1}{r(a_2)} \leq \mathfrak{D}(C^*(a_1), C^*(a_2))$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{r(a_1)}\frac{1}{r(a_2)}|r(a_1) - r(a_2)| \leq \mathfrak{D}(C^*(a_1), C^*(a_2)),$$

ficando assim provada a desigualdade da esquerda.

(Justificação da desigualdade (*):

Temos que, $\forall a' \in C^*(a_1), \forall a" \in C^*(a_2)$, $\mathrm{d}(0, a") \leq \mathrm{d}(0, a') + \mathrm{d}(a', a")$. Fixemos $\varepsilon > 0$ qualquer; seja a' tal que

$$\mathrm{d}(a', a") \leq \inf\{\mathrm{d}(a', a") : a" \in C^*(a_2)\} + \varepsilon = \mathrm{d}(a', C^*(a_2)) + \varepsilon.$$

Então

$$\mathrm{d}(0, a") \leq \mathrm{d}(0, a') + \mathrm{d}(a', C^*(a_2)) + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}(0, a") \leq \mathrm{d}(0, a') + \sup_{a' \in C^*(a_1)} \mathrm{d}(a', C^*(a_2)) + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}(0, a") \leq \mathrm{d}(0, a') + \mathfrak{D}(C^*(a_1), C^*(a_2)) + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r(a_2)} \leq \frac{1}{r(a_1)} + \mathfrak{D}(C^*(a_1), C^*(a_2)) + \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrariamente pequeno, temos então a desigualdade pretendida.)

(b) Para provar a desigualdade da direita suponhamos, em primeiro lugar, que $0 \in V$. Então, por 2.4.16., temos que $V^{**} = \overline{V}$ e

$$\overline{V} - a = \bigcap_{b\in V^*} \{x - a \in \mathbb{R}^n : \langle b, x\rangle \leq 1\}$$

$$= \bigcap_{b\in V^*} \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \left\langle \frac{b}{1-\langle b,a\rangle}, y \right\rangle \leq 1 \right\},\ a \in V.$$

De facto, verifica-se a segunda igualdade fazendo $y := x - a$ e notando que $1 - \langle b, a\rangle > 0\ \forall\, b \in V^*$, uma vez que $a \in V$ e V é aberto. Deste modo,

$$\overline{C(a)} = \bigcap_{b\in V^*} \left\{ \frac{b}{1-\langle b,a\rangle} \right\}^*.$$

Como $\{v\}^{**} = [0, v] := \{\lambda v : \lambda \in [0,1]\}$ (ver 2.4.16), temos que $\mathfrak{D}(\{v_1\}^{**}, \{v_2\}^{**}) \leq |v_1 - v_2|$. Por [Rockafellar] (p. 150, Corolário 16.5.2), a igualdade

$$\left(\bigcap_{\alpha} S_\alpha\right)^* = \overline{\text{conv}}\left(\bigcup_{\alpha} S_\alpha^*\right)$$

verifica-se para qualquer família $\{S_\alpha\}$ de conjuntos convexos fechados que contenham a origem. Por este motivo,

$$C^*(a) = \overline{\text{conv}}\left(\bigcup_{b\in V^*} \left\{ \frac{b}{1-\langle b,a\rangle} \right\}^{**}\right)$$

$$= \overline{\text{conv}}\left(\bigcup_{b\in V^*} \left[0, \frac{b}{1-\langle b,a\rangle}\right]\right),$$

e $\frac{1}{r(a)} = \sup\{|x| : x \in C^*(a)\} = \sup\{\frac{|b|}{1-\langle b,a\rangle} : b \in V^*\}$.

Usando estas propriedades e o facto de se ter $\mathfrak{D}(\overline{\text{conv}}\, A, \overline{\text{conv}}\, B) \leq \mathfrak{D}(A, B)$, temos

$$\mathfrak{D}(C^*(a_1), C^*(a_2)) \leq \mathfrak{D}\left(\bigcup_{b\in V^*} \left[0, \frac{b}{1-\langle b,a_1\rangle}\right], \bigcup_{b\in V^*} \left[0, \frac{b}{1-\langle b,a_2\rangle}\right]\right)$$

$$\leq \sup\left\{ \left| \frac{b}{1-\langle b,a_1\rangle} - \frac{b}{1-\langle b,a_2\rangle} \right| : b \in V^* \right\}$$

$$\leq \sup\left\{ \frac{|b|}{1-\langle b,a_1\rangle} \frac{|b|}{1-\langle b,a_2\rangle} : b \in V^* \right\} |a_1 - a_2|$$

$$\leq \frac{1}{r(a_1)} \frac{1}{r(a_2)} |a_1 - a_2| \quad \forall\, a_1, a_2 \in V.$$

O caso geral pode ser facilmente reduzido a este, considerando o conjunto $V - v$ em lugar de V, onde v é um ponto arbitrário de V.

$\square$

5.1.9. Considere-se um conjunto aberto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Seja $\mathbb{Z}^n$ o conjunto de todos os pontos em $\mathbb{R}^n$ com coordenadas inteiras. Para cada $a \in \mathbb{R}^n$, defina-se

$$D_0(a) := \mathbb{R}^n \backslash \Omega,$$

$$\rho_k^\alpha(a) := \min\left\{\frac{1}{2^{k+1}}, \mathrm{d}\left(\frac{\alpha}{2^k}, D_k(a)\right)\right\}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}^n,$$

$$A_k^\alpha(a) := \frac{\alpha}{2^k} + \rho_k^\alpha(a) r(a) C^*(a), \quad \alpha \in \mathbb{Z}^n,$$

$$A_k(a) := \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} A_k^\alpha(a),$$

$$D_{k+1}(a) := D_k(a) \cup A_k(a), \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Os conjuntos $A_k^\alpha(a)$ são fechados convexos (pois $C^*(a)$ é fechado convexo), e os seus interiores (possivelmente vazios) são subconjuntos de Ω, disjuntos dois a dois:

(a) int $A_k^\alpha(a) \subset \Omega,\ \alpha \in \mathbb{Z}^n,\ k = 0, 1, 2, \ldots .$

De facto, atendendo a que $D_k(a) \supset D_{k-1}(a) \supset \cdots \supset D_0(a)$, temos que $\rho_k^\alpha(a) \leq \mathrm{d}\big(\frac{\alpha}{2^k}, D_k(a)\big) \leq \mathrm{d}\big(\frac{\alpha}{2^k}, \mathbb{R}^n \backslash \Omega\big)$. Por esta razão e pelas inclusões em 5.1.7., vem que

$$\text{int } A_k^\alpha = \text{int}\left(\frac{\alpha}{2^k} + \rho_k^\alpha(a) r(a) C^*(a)\right) \subset$$

$$\subset \text{int}\left(\frac{\alpha}{2^k} + \rho_k^\alpha(a) B_n\right) \subset$$

$$\subset \text{int}\left(\frac{\alpha}{2^k} + \mathrm{d}\left(\frac{\alpha}{2^k}, \mathbb{R}^n \backslash \Omega\right) B_n\right) \subset \Omega.$$

(b) int $A_k^\alpha(a) \bigcap$ int $A_k^\beta(a) = \emptyset,\ \alpha \neq \beta,\ k = 0, 1, 2, \ldots .$

Como $\rho_k^\alpha(a) \leq \frac{1}{2^{k+1}}$, $\rho_k^\beta(a) \leq \frac{1}{2^{k+1}}$ e $r(a) C^*(a) \subset B_n$, temos que

$$A_k^\alpha(a) \subset \frac{\alpha}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} B_n \ \text{ e } \ A_k^\beta(a) \subset \frac{\beta}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} B_n.$$

Deste modo, prove-se que $\mathrm{int}\left(\frac{\alpha}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}B_n\right)\cap\mathrm{int}\left(\frac{\beta}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}B_n\right)=\emptyset$. Suponhamos que existe um x tal que $\left|x-\frac{\alpha}{2^k}\right|<\frac{1}{2^{k+1}}$ e $\left|x-\frac{\beta}{2^k}\right|<\frac{1}{2^{k+1}}$. Então,

$$\left|\frac{\alpha}{2^k}-\frac{\beta}{2^k}\right|\leq\left|\frac{\alpha}{2^k}-x\right|+\left|x-\frac{\beta}{2^k}\right|<\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2^k}.$$

Logo, será

$$\frac{1}{2^k}|\alpha-\beta|=\left|\frac{\alpha}{2^k}-\frac{\beta}{2^k}\right|\leq\frac{1}{2^k},$$

que implica

$$|\alpha-\beta|<1,$$

o que é absurdo, pois sendo $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}^n$, teremos sempre $|\alpha-\beta|\geq 1$.

(c) $\mathrm{int}\,A_k^\alpha(a)\cap\bigcup_\beta\mathrm{int}\,A_j^\beta(a)=\emptyset$, $j\neq k$ inteiros não negativos, com $\dfrac{\alpha}{2^k}\neq\dfrac{\beta}{2^j}$.

Suponhamos, sem perda de generalidade que $j+1\leq k$. Suponhamos também que existe um x tal que $x\in\mathrm{int}\,A_k^\alpha(a)\cap\bigcup_\beta\mathrm{int}\,A_j^\beta(a)$. Por se verificar $D_k(a)\supset D_{k-1}(a)\supset\cdots\supset D_0(a)$ e $\bigcup_\beta\mathrm{int}\,A_j^\beta(a)\subset D_{j+1}(a)$,

$$\left|x-\frac{\alpha}{2^k}\right|<\rho_k^\alpha(a)\leq\mathrm{d}\left(\frac{\alpha}{2^k},D_k(a)\right)\leq$$

$$\leq\mathrm{d}\left(\tfrac{\alpha}{2^k},D_{j+1}(a)\right)\leq\left|x-\frac{\alpha}{2^k}\right|,$$

o que é absurdo.

$\square$

Para além disto, também os conjuntos $A_k(a)$ são fechados; uma vez que Ω é um conjunto limitado, vão existir $\alpha\in\mathbb{Z}^n\cap\Omega$ em número finito, o que faz com que $A_k(a)$ seja, de facto, uma união finita de conjuntos fechados não vazios.

5.1.10. Lema: *Sejam $\alpha\in\mathbb{Z}^n$ e $k\in\mathbb{N}$ tais que o cubo $\frac{\alpha}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}Q_n\subset\Omega$. Então,*

$$\mu\left(\left(\frac{\alpha}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}Q_n\right)\cap\bigcup_{j=0}^{k}A_j(a)\right)\geq\mu\left(\frac{r(a)}{8R(a)}B_n\right).\mu\left(\frac{\alpha}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}Q_n\right)$$

para qualquer $a\in V$.

Demonstração:

(a) Consideremos em primeiro lugar o caso em que

$$\mathrm{d}\Big(\frac{\alpha}{2^k}, A_j(a)\Big) \geq \frac{1}{2^{k+2}}, \quad \forall\, j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}.$$

Como por hipótese $\frac{\alpha}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} Q_n \subset \Omega$, então $\mathrm{d}\big(\frac{\alpha}{2^k}, D_0(a)\big) \geq \frac{1}{2^{k+1}} > \frac{1}{2^{k+2}}$. Também, visto que temos $D_k(a) = D_0(a) \cup A_0(a) \cup A_1(a) \cup \ldots \cup A_{k-1}(a)$, com (ver 5.1.9.) $D_0(a) \cap A_0(a) \cap A_1(a) \cap \ldots \cap A_{k-1}(a) = \emptyset$,

$$\mathrm{d}\Big(\frac{\alpha}{2^k}, D_k(a)\Big) = \min\Big\{\mathrm{d}\Big(\frac{\alpha}{2^k}, S\Big) : S \in \{D_0(a), A_0(a), A_1(a), \ldots, A_{k-1}(a)\}\Big\} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2^{k+2}}.$$

Destas considerações, resulta que $\frac{1}{2^{k+2}} \leq \rho_k^\alpha(a) \leq \frac{1}{2^{k+1}}$ e, consequentemente,

$$\frac{\alpha}{2^k} + \frac{r(a)}{2^{k+2} R(a)} B_n \subset \frac{\alpha}{2^k} + \rho_k^\alpha(a) \frac{r(a)}{R(a)} B_n \subset A_k^\alpha(a) \subset$$

$$\subset \frac{\alpha}{2^k} + \rho_k^\alpha(a) B_n \subset \frac{\alpha}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} Q_n$$

e

$$\mu\bigg(\Big(\frac{\alpha}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} Q_n\Big) \cap \bigcup_{j=0}^{k} A_j(a)\bigg) \geq \mu\big(A_k^\alpha(a)\big) \geq \mu\Big(\frac{\alpha}{2^k} + \frac{r(a)}{2^{k+2} R(a)} B_n\Big) \geq$$

$$\geq \mu\Big(\frac{\alpha}{2^k} + \frac{r(a)}{2^{nk+2} R(a)} B_n\Big) =$$

$$= \frac{1}{2^{nk}} \mu\Big(\frac{\alpha}{2^k} + \frac{r(a)}{4R(a)} B_n\Big) =$$

$$= \mu\Big(\frac{r(a)}{4R(a)} B_n\Big) . \mu\Big(\frac{\alpha}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} Q_n\Big).$$

(b) Suponha-se agora que

$$\mathrm{d}\Big(\frac{\alpha}{2^k}, A_j(a)\Big) < \frac{1}{2^{k+2}}, \quad \text{para algum } j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}.$$

Seja j o menor desses índices. Então, vai existir $\beta \in \mathbb{Z}^n$ tal que

$$\mathrm{d}\Big(\frac{\alpha}{2^k}, A_j^\beta(a)\Big) < \frac{1}{2^{k+2}}.$$

(b$_1$) Consideremos o caso em que $\frac{\alpha}{2^k} = \frac{\beta}{2^j}$. Devido à forma como j foi escolhido,

$$\mathrm{d}\Big(\frac{\beta}{2^j}, A_i(a)\Big) \geq \frac{1}{2^{k+2}}\ ,\ \forall\, i \in \{0, 1, \ldots, j-1\};$$

recorrendo a um argumento identico ao utilizado na alínea anterior, temos que $\rho_j^\beta(a) \geq \frac{1}{2^{k+2}}$. Logo,

$$\mu\bigg(\Big(\frac{\alpha}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}Q_n\Big) \cap \bigcup_{i=0}^{k} A_i(a)\bigg) \geq$$

$$\geq \mu\bigg(\Big(\frac{\alpha}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}Q_n\Big) \cap A_j^\beta(a)\bigg) \geq$$

$$\geq \mu\bigg(\Big(\frac{\alpha}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}Q_n\Big) \cap \Big(\frac{\alpha}{2^k} + \rho_j^\beta(a)\frac{r(a)}{R(a)}B_n\Big)\bigg) \geq$$

$$\geq \mu\bigg(\Big(\frac{\alpha}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}Q_n\Big) \cap \Big(\frac{\alpha}{2^k} + \frac{r(a)}{2^{k+2}R(a)}B_n\Big)\bigg) \geq$$

$$= \mu\bigg(\frac{\alpha}{2^k} + \frac{r(a)}{2^{k+2}R(a)}B_n\bigg) = \bigg(\frac{1}{2^{k+2}}\bigg)^n \bigg(\frac{r(a)}{R(a)}\bigg)^n \mu(B_n) =$$

$$= \frac{1}{2^{nk}}\bigg(\frac{1}{4}\bigg)^n \bigg(\frac{r(a)}{R(a)}\bigg)^n \mu(B_n) =$$

$$= \mu\Big(\frac{\alpha}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}Q_n\Big).\mu\Big(\frac{r(a)}{4R(a)}B_n\Big).$$

(b$_2$) Resta considerar o caso em que $\mathrm{d}\Big(\frac{\alpha}{2^k}, A_j^\beta(a)\Big) < \frac{1}{2^{k+2}}$, para algum $\beta \in \mathbb{Z}^n$ e $j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, com $\frac{\alpha}{2^k} \neq \frac{\beta}{2^j}$.

Neste caso, vai existir $y \in \Big(\frac{\alpha}{2^k} + \frac{1}{2^{k+2}}B_n\Big) \cap A_j^\beta(a)$ e, visto que $\Big|\frac{\beta}{2^j} - \frac{\alpha}{2^k}\Big| = \frac{1}{2^k}|2^{k-j}\beta - \alpha| \geq \frac{1}{2^k}$, temos

$$\Big|y - \frac{\beta}{2^j}\Big| \geq \Big|\frac{\alpha}{2^k} - \frac{\beta}{2^j}\Big| - \Big|\frac{\alpha}{2^k} - y\Big| \geq \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+2}} = \frac{3}{2^{k+2}}.$$

Façamos $z := (1-\lambda)y + \lambda\frac{\beta}{2^j}$, com $\lambda = \frac{1}{2^{k+3}}\frac{1}{\left|\frac{\beta}{2^j}-y\right|}$. Devido à convexidade de $A_j^\beta(a)$, que contém tanto y como a bola $\frac{\beta}{2^j}+\rho_j^\beta(a)\frac{r(a)}{R(a)}B_n$, temos que $z+\lambda\rho_j^\beta(a)\frac{r(a)}{R(a)}B_n \subset A_j^\beta(a)$:

Pretende-se mostrar que se $|u-z| \leq \lambda\rho_j^\beta(a)\frac{r(a)}{R(a)}$ então $u \in A_j^\beta(a)$. Ora,

$$
\begin{aligned}
|u-z| \leq \lambda\rho_j^\beta(a)\frac{r(a)}{R(a)} &\Rightarrow \left|\frac{\beta}{2^j}+\frac{u-z}{\lambda}-\frac{\beta}{2^j}\right| \leq \rho_j^\beta(a)\frac{r(a)}{R(a)} \\
&\Rightarrow \left|\frac{\beta}{2^j}-v\right| \leq \rho_j^\beta(a)\frac{r(a)}{R(a)}, \text{ com } v = \frac{u-z}{\lambda}+\frac{\beta}{2^j}, \\
&\Rightarrow v \in \frac{\beta}{2^j}+\rho_j^\beta(a)\frac{r(a)}{R(a)}B_n \subset A_j^\beta(a).
\end{aligned}
$$

Resta agora mostrar que $u = (1-\lambda)y + \lambda v$. De facto,

$$
\begin{aligned}
(1-\lambda)y+\lambda v &= (1-\lambda)y + u - z + \lambda\frac{\beta}{2^j} = \\
&= (1-\lambda)y + u - (1-\lambda)y - \lambda\frac{\beta}{2^j} + \lambda\frac{\beta}{2^j} = u.
\end{aligned}
$$

Devido ao facto de se ter $v, y \in A_j^\beta(a)$ e $A_j^\beta(a)$ ser convexo, então $u \in A_j^\beta(a)$.

Tendo em conta que

$$
\lambda\rho_j^\beta(a) = \frac{1}{2^{k+3}}\frac{\rho_j^\beta(a)}{\left|y-\frac{\beta}{2^j}\right|} \geq \frac{1}{2^{k+3}},
$$

pois $\left|y-\frac{\beta}{2^j}\right| \leq \rho_j^\beta(a)$ (uma vez que $y \in A_j^\beta(a) \subset \frac{\beta}{2^j}+\rho_j^\beta(a)B_n$), então

$$
z + \frac{1}{2^{k+3}}\frac{r(a)}{R(a)}B_n \subset z + \lambda\rho_j^\beta(a)\frac{r(a)}{R(a)}B_n \subset A_j^\beta(a). \tag{5.1}
$$

Para além disso,

$$
|z-y| = \left|(1-\lambda)y+\lambda\frac{\beta}{2^j}-y\right| = \lambda\left|y-\frac{\beta}{2^j}\right| = \frac{1}{2^{k+3}}\frac{1}{\left|y-\frac{\beta}{2^j}\right|}\left|y-\frac{\beta}{2^j}\right| = \frac{1}{2^{k+3}}
$$

e

$$
\left|y-\frac{\alpha}{2^k}\right| \leq \frac{1}{2^{k+2}},
$$

uma vez que $y \in \frac{\alpha}{2^k}+\frac{1}{2^{k+2}}B_n$. Assim,

$$\left|z-\frac{\alpha}{2^k}\right| \leq |z-y| + \left|y-\frac{\alpha}{2^k}\right| \leq \frac{1}{2^{k+3}} + \frac{1}{2^{k+2}} = \frac{3}{2^{k+3}}.$$

Consideremos u tal que $|u-z| \leq \frac{1}{2^{k+3}}$. Então,

$$\left|u-\frac{\alpha}{2^k}\right| \leq |u-z| + \left|z-\frac{\alpha}{2^k}\right| \leq \frac{1}{2^{k+3}} + \frac{3}{2^{k+3}} = \frac{1}{2^{k+1}},$$

o que implica que

$$z + \frac{1}{2^{k+3}}\frac{r(a)}{R(a)}B_n \subset z + \frac{1}{2^{k+3}}B_n \subset \frac{\alpha}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}B_n \subset \frac{\alpha}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}Q_n. \tag{5.2}$$

Por (5.1) e (5.2), bem como por estas últimas considerações, vem que

$$z + \frac{1}{2^{k+3}}\frac{r(a)}{R(a)}B_n \subset \left(\frac{\alpha}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}Q_n\right) \cap A_j^{\beta}(a)$$

o que vai implicar que

$$\begin{aligned}
\mu\left(\left(\frac{\alpha}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}Q_n\right) \cap \bigcup_{i=0}^{k} A_i(a)\right) \geq\ & \mu\left(\left(\frac{\alpha}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}Q_n\right) \cap A_j^{\beta}(a)\right) \geq \\
& \geq \mu\left(z + \frac{1}{2^{k+3}}\frac{r(a)}{R(a)}B_n\right) = \\
& = \mu\left(\frac{r(a)}{2^{k+3}R(a)}B_n\right) = \frac{1}{2^k}.\mu\left(\frac{r(a)}{8R(a)}B_n\right) \geq \\
& \geq \mu\left(\frac{\alpha}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}Q_n\right).\mu\left(\frac{r(a)}{8R(a)}B_n\right).
\end{aligned}$$

□

5.1.11. Lema: *Para cada $a \in V$, temos que*

$$\mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k(a)\right) = \mu(\Omega).$$

Demonstração:

Façamos $\lambda := \mu\Big(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k(a)\Big) = \sup_k \mu\Big(\bigcup_{j=0}^{k} A_j(a)\Big)$. Suponhamos que $\lambda < \mu(\Omega)$. Então, pela definição de supremo, para qualquer $\varepsilon > 0$ é possível encontrar $k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu\left(\bigcup_{j=0}^{k(\varepsilon)} A_j(a)\right) > \lambda - \varepsilon.$$

Para além disto, como os conjuntos $A_j(a)$ são fechados, vai existir $k'(\varepsilon) \geq k(\varepsilon)$ de tal modo que

$$\mu\left(\left(\Omega \Big\backslash \bigcup_{j=0}^{k(\varepsilon)} A_j(a)\right) \Big\backslash \mathcal{Q}_{k'(\varepsilon)}(a)\right) < \varepsilon,$$

onde $\mathcal{Q}_{k'(\varepsilon)}(a)$ designa a união de todos os cubos fechados do tipo $\frac{\alpha}{2^{k'(\varepsilon)}} + \frac{1}{2^{k'(\varepsilon)+1}} Q_n$, $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ que estão contidos em $\Omega \backslash \bigcup_{j=0}^{k(\varepsilon)} A_j(a)$.

Aplicando o lema anterior a cada um destes cubos e fazendo a sua união, temos que

$$\begin{aligned}\mu\left(\mathcal{Q}_{k'(\varepsilon)}(a) \cap \left(\bigcup_{j=0}^{k'(\varepsilon)} A_j(a)\right)\right) &\geq \mu\left(\frac{r(a)}{8R(a)} B_n\right).\mu\Big(\mathcal{Q}_{k'(\varepsilon)}\Big) \\ &\geq \mu\left(\frac{r(a)}{8R(a)} B_n\right).\Big(\mu(\Omega) - \lambda - \varepsilon\Big),\end{aligned}$$

uma vez que $\mu(\mathcal{Q}_{k'(\varepsilon)}) + \varepsilon \geq \mu\Big(\Omega \backslash \bigcup_{j=0}^{k(\varepsilon)} A_j(a)\Big) \geq \mu(\Omega) - \lambda$. Deste modo,

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{j=0}^{k'(\varepsilon)} A_j(a)\right) &\geq \mu\left(\bigcup_{j=0}^{k(\varepsilon)} A_j(a)\right) + \mu\left(\mathcal{Q}_{k'(\varepsilon)}(a) \cap \left(\bigcup_{j=0}^{k'(\varepsilon)} A_j(a)\right)\right) \\ &\geq \lambda - \varepsilon + \mu\left(\frac{r(a)}{8R(a)} B_n\right).\Big(\mu(\Omega) - \lambda - \varepsilon\Big) > \lambda\end{aligned}$$

para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, o que contradiz a definição de λ. Então, terá de ser $\lambda = \mu(\Omega)$.

$\square$

5.2. O teorema de selecção

5.2.1. Teorema: *Seja Ω um subconjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ e seja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função semi-contínua inferiormente que satisfaz a condição de crescimento (C) (ver 3.3.2.). Então, existe uma função contínua $s : \mathbb{R}^n \to \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ que satisfaz a condição de Lipschitz*

$$\|s(a_1)(.) - s(a_2)(.)\| \leq \left(\max_{x\in\overline{\Omega}} |x| + 3 \right) |a_1 - a_2| \quad \forall\, a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$$

e tal que

(i) $s(a)(.)$ é um minimizante do problema (P_a) para todo o a para o qual existe uma solução;

(ii) $s(a)(.)$ é um minimizante do problema convexificado (P_a^{**}), para todos os a.

Demonstração:

Definimos explicitamente a função $s(a)(.)$ como sendo $s(a)(.) := \langle a, x\rangle$, se $a \notin \bigcup_{m=1}^{\infty} V_m$ e

$$s(a)(.) := \langle a, x\rangle + \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} \chi_{A_k^\alpha(a)}(x) \left(\delta^* \left(x - \frac{\alpha}{2^k}, C(a) \right) - r(a)\rho_k^\alpha(a) \right)$$

se $a \in \bigcup_{m=1}^{\infty} V_m$, onde V_m (com $m \in \mathbb{N}$) representa o interior da projecção da face n-dimensional m do epigráfico de g^{**} e $\chi_{A_k^\alpha(a)}(.)$ é a função característica de $A_k^\alpha(a)$ ($\chi_{A_k^\alpha(a)}(x) = 1$ se $x \in A_k^\alpha(a)$ e $\chi_{A_k^\alpha(a)}(x) = 0$ se $x \notin A_k^\alpha(a)$). Para o caso em que $a \in \bigcup_{m=1}^{\infty} V_m$, $C(a)$ designa o conjunto $V_{m(a)} - a$, onde $m(a)$ é o único dos índices tal que $a \in V_{m(a)}$. Se $x \in \partial A_k^\alpha(a)$ então $x - \frac{\alpha}{2^k} \in \rho_k^\alpha(a) r(a) \partial C^*(a)$, donde decorre que

$$\delta^* \left(x - \frac{\alpha}{2^k}, C(a) \right) = \rho_k^\alpha(a) r(a)$$

e portanto $s(a)(x) = \langle a, x\rangle$. Aproximando $s(a)(.)$ pelas somas parciais, temos que $s(a)(.) - \langle a, .\rangle$ é uma função lipschitziana pertencente a $W_0^{1,1}(\Omega)$, para todo o $a \in \mathbb{R}^n$:

Façamos $S_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \chi_{A_k^\alpha(a)}(x) \Big(\delta^*\Big(x - \frac{\alpha}{2^k}, C(a)\Big) - r(a)\rho_k^\alpha(a)\Big)$. Se $x, y \in A_k^\alpha(a)$, então

$$|S_n(x) - S_n(y)| = \Big|\delta^*\Big(x - \frac{\alpha}{2^k}, C(a)\Big) - \delta^*\Big(y - \frac{\alpha}{2^k}, C(a)\Big)\Big| \leq$$

$$\leq L\Big|x - \frac{\alpha}{2^k} - y + \frac{\alpha}{2^k}\Big| = L|x-y|\ ,$$

com $L = \max_m \{L_m : V_m - a \subset L_m B_n\}$. No caso de ser $x \in A_k^\alpha(a)$ e $y \in A_j^\beta(a)$, vão existir $x' \in\ \partial A_k^\alpha(a)$ e $y' \in \partial A_j^\beta(a)$ tais que $x', y' \in [x, y]$, e portanto

$$|S_n(x) - S_n(y)| \leq |S_n(x) - S_n(x')| + |S_n(x') - S_n(y')| + |S_n(y') - S_n(y)|$$

$$\leq L|x - x'| + L|y' - y| \leq L|x - y|.$$

(a) Como vimos em capítulos anteriores, decorrendo da desigualdade de Jensen e do teorema da divergência, temos que

$$\min\Big\{\int_\Omega g^{**}(\nabla u(x))dx : u(.) \in \langle a, .\rangle + W_0^{1,1}(\Omega)\Big\} = g^{**}(a)\mu(\Omega). \tag{5.3}$$

Deste modo, $\langle a, .\rangle$ é um minimizante do funcional convexificado. Por esse motivo, $s(a)(.)$ é uma solução de (P_a^{**}) sempre que $a \notin \bigcup_{m=1}^\infty V_m$ e é uma solução do problema original (P_a) se $g(a) = g^{**}(a)$.

(b) Suponhamos agora que $a \in V_m$, para algum m. Por ser $\delta^*(z, V_m - a) = \delta^*(z, V_m) - \langle a, z\rangle$, quando $x \in A_k^\alpha(a)$, podemos escrever

$$s(a)(x) = \Big\langle a, \frac{\alpha}{2^k}\Big\rangle + \delta^*\Big(x - \frac{\alpha}{2^k}, V_m\Big) - r(a)\rho_k^\alpha(a). \tag{5.4}$$

Deste modo, pelo lema 5.1.11. e pelo corolário 25.1.3. ([Rockaffelar], p. 243), $s(a)(.)$ é diferenciavel em quase todos os $x \in \Omega$ e o seu gradiente $\nabla s(a)(x)$ relativamente a x pertence ao conjunto extr $\overline{V}_m$. Representemos por W_m a face n-dimensional do epi (g^{**}) cuja projecção é $\overline{V}_m$. Então $(\nabla s(a)(x), g^{**}(\nabla s(a)(x)))$ é um ponto extremos de W_m e portanto de epi (g^{**}). Em particular,

$$g\big(\nabla s(a)(x)\big) = g^{**}\big(\nabla s(a)(x)\big) \tag{5.5}$$

para quase todos os $x \in \Omega$. Pelo torema 11.3 ([Rockafellar], p. 97) vai existir um hiperplano H, que contém W_m e que separa este de epi (g^{**}). Seja $H = \{(w, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : r = \langle p, w\rangle + \gamma\}$, para algum $p \in \mathbb{R}^n$ e $\gamma \in \mathbb{R}$. Como $(\nabla s(a)(x), g^{**}(\nabla s(a)(x))) \in W_m$ temos que $g^{**}(\nabla s(a)(x)) = \langle p, \nabla s(a)(x)\rangle + \gamma$ para quase todos os $x \in \Omega$. Pelo teorema da divergência, obtemos finalmente

$$\int_\Omega g^{**}(\nabla s(a)(x))dx = \int_\Omega \big\langle p, \nabla s(a)(x)\big\rangle + \gamma dx$$

$$= \Big\langle p, \int_\Omega \nabla s(a)(x)dx\Big\rangle + \gamma.\mu(\Omega)$$

$$= \Big(\langle p, a\rangle + \gamma\Big).\mu(\Omega) = g^{**}(a).\mu(\Omega)$$

o que significa, por (5.3), que $s(a)(x)$ é minimizador do problema convexificado. Para além do mais, por (5.5) e (5.3), temos

$$\int_\Omega g(\nabla s(a)(x))dx = \min\Big\{\int_\Omega g^{**}(\nabla u(x))dx : u(.) \in \langle a, .\rangle + W_0^{1,1}(\Omega)\Big\}$$

$$\leq \inf\Big\{\int_\Omega g(\nabla u(x))dx : u(.) \in \langle a, .\rangle + W_0^{1,1}(\Omega)\Big\}.$$

Assim, $s(a)(.)$ é solução do problema (P_a).

(c) Pretende-se agora mostrar que $s : \mathbb{R}^n \to \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ é lipschitziana. No entanto, começaremos por estudar a dependência de $\rho_k^\alpha(a)$ e $A_k^\alpha(a)$ em relação a a, para cada V_m.

Pelo lema 5.1.10. e pela definição e propriedades das distâncias, para quaisquer índices m, j, qualquer $\beta \in \mathbb{Z}^n$ e quaisquer $a_1, a_2 \in V_m$, temos

$$\mathfrak{D}\big(A_j^\beta(a_1), A_j^\beta(a_2)\big) = \mathfrak{D}\big(\rho_j^\beta(a_1)r(a_1)C^*(a_1), \rho_j^\beta(a_2)r(a_2)C^*(a_2)\big)$$

$$\leq \mathfrak{D}\big(\rho_j^\beta(a_1)r(a_1)C^*(a_1), \rho_j^\beta(a_2)r(a_2)C^*(a_1)\big) + \\ + \mathfrak{D}\big(\rho_j^\beta(a_2)r(a_2)C^*(a_1), \rho_j^\beta(a_2)r(a_2)C^*(a_2)\big)$$

$$\leq \frac{1}{r(a_1)}\big|\rho_j^\beta(a_1)r(a_1) - \rho_j^\beta(a_2)r(a_2)\big| + \\ + \rho_j^\beta(a_2)r(a_2)\frac{1}{r(a_1)}\frac{1}{r(a_2)}|a_1 - a_2|$$

$$\leq \big|\rho_j^\beta(a_1) - \rho_j^\beta(a_2)\big| + \frac{\rho_j^\beta(a_2)}{r(a_1)}|r(a_1) - r(a_2)| + \\ + \frac{\rho_j^\beta(a_2)}{r(a_1)}|a_1 - a_2|$$

$$\leq \big|\rho_j^\beta(a_1) - \rho_j^\beta(a_2)\big| + \frac{2\rho_j^\beta(a_2)}{r(a_1)}|a_1 - a_2|$$

$$\leq \left|\rho_j^\beta(a_1) - \rho_j^\beta(a_2)\right| + \frac{2^{-j}}{r(a_1)}|a_1 - a_2|\,.$$

Por este motivo,

$$\left|\rho_k^\alpha(a_1) - \rho_k^\alpha(a_2)\right| \leq$$

$$\leq \left|\mathrm{d}\left(\frac{\alpha}{2^k}, D_k(a_1)\right) - \mathrm{d}\left(\frac{\alpha}{2^k}, D_k(a_2)\right)\right| \leq \mathfrak{D}\left(\bigcup_{j=0}^{k-1} A_j(a_1), \bigcup_{j=0}^{k-1} A_j(a_2)\right)$$

$$\leq \max\left\{\mathfrak{D}\left(A_j^\beta(a_1), A_j^\beta(a_1)\right) : j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}, \beta \in \mathbb{Z}^n\right\}$$

$$\leq \max\left\{\left|\rho_j^\beta(a_1) - \rho_j^\beta(a_2)\right| + \tfrac{2^{-j}}{r(a_1)}|a_1 - a_2| : j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}, \beta \in \mathbb{Z}^n\right\}:$$

(†)

De facto, sendo que $\rho_k^\alpha(a_1) \leq \mathrm{d}\big(\frac{\alpha}{2^k}, D_k(a_1)\big)$, se $\rho_k^\alpha(a_2) = \mathrm{d}\big(\frac{\alpha}{2^k}, D_k(a_2)\big)$, então $\left|\rho_k^\alpha(a_1) - \rho_k^\alpha(a_2)\right| \leq \left|\mathrm{d}\big(\frac{\alpha}{2^k}, D_k(a_1)\big) - \mathrm{d}\big(\frac{\alpha}{2^k}, D_k(a_2)\big)\right|$. O mesmo acontecerá se tivermos $\rho_k^\alpha(a_1) = \rho_k^\alpha(a_2) = \frac{1}{2^{k+1}}$. No caso de ser $\rho_k^\alpha(a_2) = \frac{1}{2^{k+1}}$ e $\rho_k^\alpha(a_1) = \mathrm{d}\big(\frac{\alpha}{2^k}, D_k(a_1)\big)$, será

$$\begin{aligned}\left|\rho_k^\alpha(a_1) - \rho_k^\alpha(a_2)\right| &= \left|\mathrm{d}\big(\tfrac{\alpha}{2^k}, D_k(a_1)\big) - \tfrac{1}{2^{k+1}}\right| = \tfrac{1}{2^{k+1}} - \mathrm{d}\big(\tfrac{\alpha}{2^k}, D_k(a_1)\big)\\ &\leq \mathrm{d}\big(\tfrac{\alpha}{2^k}, D_k(a_2)\big) - \mathrm{d}\big(\tfrac{\alpha}{2^k}, D_k(a_1)\big)\\ &= \left|\mathrm{d}\big(\tfrac{\alpha}{2^k}, D_k(a_1)\big) - \mathrm{d}\big(\tfrac{\alpha}{2^k}, D_k(a_2)\big)\right|.\end{aligned}$$

Quanto à segunda desigualdade, ela decorre de 5.1.2. c) e do facto de ser $\mathfrak{D}\big(D_k(a_1), D_k(a_2)\big) = \mathfrak{D}\Big(\bigcup_{j=0}^{k-1} A_j(a_1), \bigcup_{j=0}^{k-1} A_j(a_2)\Big)$.

Relativamente à terceira desigualdade (a quarta decorre da sequência de desigualdades apresentada acima),

$$\mathfrak{D}\left(\bigcup_{j=0}^{k-1} A_j(a_1), \bigcup_{j=0}^{k-1} A_j(a_2)\right) =$$

$$= \max\left\{\sup_{x \in \bigcup A_j(a_2)} \mathrm{d}\Big(x, \bigcup_{j=0}^{k-1} A_j(a_1)\Big),\ \sup_{y \in \bigcup A_j(a_1)} \mathrm{d}\Big(y, \bigcup_{j=0}^{k-1} A_j(a_2)\Big)\right\}$$

$$\leq \max\left\{ \sup_{x\in\bigcup A_j(a_2)} \mathrm{d}\Big(x, A_j(a_1)\Big), \sup_{y\in\bigcup A_j(a_1)} \mathrm{d}\Big(y, A_j(a_2)\Big)\right\}$$
$$j \in \{1,\ldots,k-1\}$$

$$\leq \max\left\{ \max_{j,\beta} \sup_{x\in A_j^\beta(a_2)} \mathrm{d}\Big(x, A_j^\beta(a_1)\Big), \max_{j,\beta} \sup_{y\in A_j^\beta(a_1)} \mathrm{d}\Big(y, A_j^\beta(a_2)\Big)\right\}$$
$$j \in \{0,1,\ldots,k-1\},\ \beta\in\mathbb{Z}^n$$

$$= \max\left\{ \mathfrak{D}\Big(A_j^\beta(a_1), A_j^\beta(a_2)\Big) : j \in \{0,1,\ldots,k-1\},\ \beta\in\mathbb{Z}^n\right\}.$$

Recorrente da desigualdade assinalada por (†), verificamos que

$$\big|\rho_k^\alpha(a_1) - \rho_k^\alpha(a_2)\big| \leq \frac{2(1-2^{-k})}{r(a_1)}|a_1 - a_2|,$$

que implica

$$\mathfrak{D}\Big(A_j^\beta(a_1), A_j^\beta(a_2)\Big) \leq \frac{2-2^{-k}}{r(a_1)}|a_1 - a_2|, \tag{5.6}$$

$k = 0, 1, \ldots; \alpha\in\mathbb{Z}^n$.

Façamos agora $r(a) = 0$ para $a \notin \bigcup_{m=1}^\infty V_m$. Defina-se $M := \max_{x\in\overline{\Omega}}|x|$ e considerem-se dois pontos $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$. Se a_1 e a_2 não pertencerem a nenhum V_m, teremos que $r(a_1) \leq |a_1 - a_2|$, $r(a_2) \leq |a_1 - a_2|$ e

$$|s(a_1)(x) - s(a_2)(x)| \leq |s(a_1)(x) - \langle a_1, x\rangle| + |\langle a_1, x\rangle - \langle a_2, x\rangle| + |\langle a_2, x\rangle - s(a_2)(x)|$$
$$\leq |\langle a_1, x\rangle - \langle a_1, x\rangle| + \max|x|.|a_1 - a_2| + |\langle a_2, x\rangle - \langle a_2, x\rangle|$$
$$= r(a_1) + M.|a_1 - a_2| + r(a_2)$$
$$\leq (M+2).|a_1 - a_2|$$

para todos os $x \in \overline{\Omega}$. Também, se $x \in \overline{\Omega}\backslash\Big(\bigcup_{i=0}^\infty A_i(a_1) \cup \bigcup_{i=0}^\infty A_i(a_2)\Big)$, então

$$|s(a_1)(x) - s(a_2)(x)| = |\langle a_1, x\rangle - \langle a_2, x\rangle| \leq M.|a_1 - a_2|.$$

Sejam, portanto, $a_1, a_2 \in V_m$ e suponha-se em primeiro lugar que $x \in \overline{\Omega}$ pertence a $A_k^\alpha(a_1) \cap A_k^\alpha(a_2)$, para algum $k = 0, 1, \ldots; \alpha\in\mathbb{Z}^n$. Então, por (5.4) e (5.6),

$$|s(a_1)(x) - s(a_2)(x)| \leq |\langle a_1, \tfrac{\alpha}{2^k}\rangle - \langle a_2, \tfrac{\alpha}{2^k}\rangle| +$$
$$+ |r(a_1)\rho_k^\alpha(a_1) - r(a_1)\rho_k^\alpha(a_2) + r(a_1)\rho_k^\alpha(a_2) - r(a_2)\rho_k^\alpha(a_2)|$$
$$\leq |\langle a_1 - a_2, \tfrac{\alpha}{2^k}\rangle| + r(a_1)|\rho_k^\alpha(a_1) - \rho_k^\alpha(a_2)| + \rho_k^\alpha(a_2)|r(a_1) - r(a_2)|$$

$$\leq M.|a_1 - a_2| + r(a_1).\frac{2}{r(a_1)}|a_1 - a_2| + |a_1 - a_2|$$

$$\leq (M+3)|a_1 - a_2|. \tag{5.7}$$

Mostre-se agora que todos os outros casos podem ser reduzidos a este. De facto, seja $x \in A_k^\alpha(a_1)\backslash A_k^\alpha(a_2)$. Por 5.1.5. e 5.1.6., aplicados à multi-função $v \mapsto A_k^\alpha(v)$, vai existir um ponto $a' \in [a_1; a_2] := \{\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2 : \lambda \in [0,1]\}$ tal que $x \in \partial A_k^\alpha(a') \subset A_k^\alpha(a')$. Considere-se o caso em que $x \in A_j^\beta(a_2)$, para $(\beta, j) \neq (\alpha, k)$. Se $x \notin A_j^\beta(a')$ então novamente por 5.1.5. e 5.1.6., aplicados à multi-função $v \mapsto A_j^\beta(v)$, podemos escolher $a'' \in [a'; a_2]$, com $x \in \partial A_j^\beta(a'')$, mantendo-se (5.7): uma vez que $s(a')(x) = \langle a', x\rangle$ e $s(a'')(x) = \langle a'', x\rangle$, pois $x \in \partial A_k^\alpha(a') \cap \partial A_j^\beta(a'')$,

$$|s(a')(x) - s(a_2)(x)| \leq |s(a_2)(x) - s(a'')(x)| + |\langle a'', x\rangle - \langle a', x\rangle| \leq$$

$$\leq (M+3)|a_2 - a''| + M|a'' - a'|$$

$$\leq (M+3)|a_2 - a''| + (M+3)|a'' - a'|$$

$$= (M+3)|a_2 - a'|. \tag{5.8}$$

Se $x \in A_j^\beta(a')$, então (5.8) decorre directamente de (5.7). A desigualdade (5.8) também é verificada quando $x \notin \bigcup_{i=0}^\infty A_i(a_2)$, uma vez que, neste caso, $s(a_2)(x) = \langle a_2, x\rangle$, e portanto

$$|s(a')(x) - s(a_2)(x)| = |\langle a', x\rangle - \langle a_2, x\rangle| \leq$$

$$\leq M|a_2 - a'| \leq (M+3)|a_2 - a'|.$$

Finalmente, pelas expressão em (5.7) e (5.8),

$$|s(a_1)(x) - s(a_2)(x)| \leq |s(a_1)(x) - s(a')(x)| + |s(a')(x) - s(a_2)(x)|$$

$$\leq (M+3)|a_1 - a'| + (M+3)|a' - a_2|$$

$$\leq (M+3)|a_1 - a_2|.$$

Fica assim provada a lipschitzianidade de s.

□

6. Conclusão

Nesta dissertação, fizemos uma abordagem ao problema de minimização de funcionais (não necessariamente convexos) do tipo

$$I(\nabla u) = \int_{\Omega} g(\nabla u(x))\, dx$$

no conjunto de todas as funções u tais que $u \in u_a + W_0^{1,1}(\Omega)$, onde $u_a = \langle a, \cdot \rangle$, com $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ semi-contínua inferiormente e Ω um subconjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira lipchitziana. O estudo centrou-se em questões relativas à existência e unicidade de solução, assim como na estabilidade dos minimizantes relativamente ao dado de fronteira a.

Uma primeira conclusão refere-se à existência, multiplicidade e unicidade de solução para o problema de minimização. Assim, representando por $F(a)$ a face do epigráfico de g^{**} a cujo interior relativo $(a, g^{**}(a))$ pertence, podemos afirmar que:

- Quando $g(a) \neq g^{**}(a)$ e $\dim F(a) < n$, então não existe solução para o problema de minimização do funcional $I(\nabla u)$;

- Quando $\dim F(a) = n$, então existem várias soluções;

- Quando $g(a) = g^{**}(a)$ e $\dim F(a) < n$, então $u_a = \langle a, \cdot \rangle$ é o único minimizante para o funcional $I(\nabla u)$.

Em relação à estabilidade dos minimizantes relativamente ao dado de fronteira a, construiu-se a função lipschitziana $s : \mathbb{R}^n \to \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, com constante de Lipschitz igual a $\max_{x \in \overline{\Omega}} |x| + 3$, tal que $s(a)(.)$ é minimizante do integral $I(\nabla u)$, para todo o a para o qual existe solução, e é minimizante do integral convexificado $I^{**}(\nabla u) = \int_{\Omega} g^{**}(\nabla u(x))dx$, para todos os $a \in \mathbb{R}^n$. Esta função é dada por

$$s(a)(.) := \langle a, x \rangle + \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \chi_{A_k^{\alpha}(a)}(x) \left(\delta^* \left(x - \frac{\alpha}{2^k}, C(a) \right) - r(a) \rho_k^{\alpha}(a) \right),$$

onde $C(a) = \widehat{F}(a) - a$, $\widehat{F}(a)$ é a projecção de $F(a)$ sobre $\mathbb{R}^n$, $r(a) = \sup \{r > 0 : rB_n \subset C(a)\}$, e os números $\rho_k^{\alpha}(a)$ e os conjuntos $A_k^{\alpha}(a)$ satisfazem as seguintes relações definidas recursivamente:

$$D_0(a) \coloneqq \mathbb{R}^n \backslash \Omega,$$

$$\rho_k^\alpha(a) \coloneqq \min\left\{\frac{1}{2^{k+1}}, \mathrm{d}\left(\frac{\alpha}{2^k}, D_k(a)\right)\right\}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}^n,$$

$$A_k^\alpha(a) \coloneqq \frac{\alpha}{2^k} + \rho_k^\alpha(a) r(a) C^*(a), \quad \alpha \in \mathbb{Z}^n,$$

$$A_k(a) \coloneqq \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} A_k^\alpha(a),$$

$$D_{k+1}(a) \coloneqq D_k(a) \cup A_k(a), \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

BIBLIOGRAFIA

ADAMS, R., *Sobolev Spaces*, Ed. Academic Press, Nova York, 1975

AUBIN, J., CELLINA, A., *Differential Inclusions*, Springer-Verlag, Berlim, 1984

BRESSAN, A.,The most likelypath on a differential inclusion, *J. Diff. Eq. 88*, 1990, 155-174

BRESSAN, A., FLORES, F., On total differential inclusions, preprint SISSA 173/M, 1992

BREZIS, H., *Analyse Fonctionnelle*, Ed. Masson, Paris, 1983

BUSHENKOV, V., SMIRNOV, G., *Stabilization Problems with Constrains: Analysis and Computational Aspects* (preliminary version), SISSA Trieste.

CELLINA, A.,
[1] On minima of a functional of the gradient: necessary conditions, *Nonlin. Anal. 20*, 1993, 337-341

[2] On minima of a functional of the gradient: sufficient conditions, *Nonlin. Anal. 20*, 1993, 343-347

DACOROGNA, B., *Direct Methods in the Calculus of Variations*, Springer-Verlag, Nova York, 1989

MASO, G. Dal, GONCHAROV, V., ORNELAS, A., A Lipschitz selection from the set of minimizers of a nonconvex functional of the gradient, *Nonlin. Anal. 37*, 1999, 707-717

EKELAND, I., TEMAN, R., *Convex Analysis and Variational Problems*, North-Holland Publishing Company, Amsterdão, 1976

FEDERER, H., *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, Berlim, 1996

FRIESECKE, G., A necessary and sufficient condition for nonattainment and formation of microstructure almost everywhere in scalar variational problems, *Proc. R. Soc. Edinb. A 124*, 1994, 437-471

GONCHAROV, V., ORNELAS, A., On Minima of a Functional of the Gradient: A continuous selection, preprint CIMA-UE, 1994

GRUNSKY, H., *The General Stokes Theorem*, Pitman Publishing, Boston, 1983

GUZMÁN, M., *Differentiation of Integrals in* $\mathbb{R}^n$, Springer-Verlag, Berlim, 1975

KELLEY, J., *General Topology*, Springer-Verlag

KOLMOGOROV, A., FOMIN, S., *Elementos da Teoria das Funções e de Análise Funcional*, Editora Mir, Moscovo, 1982

OXTOBY, J., *Measure and Category*, Springer-Verlag, Nova York, 1980

ROCKAFELLAR, R.,*Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, Nova Jersey, 1970

RUDIN, W., *Real and Complex Analysis*, 3ª Edição, Ed. McGraw-Hill, 1987

SCHAEFER, H., *Espacios Vectoriales Topológicos*, Editorial Teide, Barcelona, 1974

SIMMONS, G., *Introduction to Topology and Modern Analysis*, McGraw-Hill, 1963

SYCHEV, M., Characterization of homogeneous scalar variational problems solvable for all boundary data, *Proc. R. Soc. Edinb. 130A*, 2000, 611-631

ZIEMER, W., *Weakly Differentiable Functions*, Springer-Verlag, Nova York, 1989

ERRATA

Na página,		onde se lê,	leia-se
1,	linha 1,	"estudada-se"	"estuda-se"
25,	linha 4,	"extremais"	"extremos"
26,	teor. 3.2.1.,	"ou $\partial g(a) \neq \emptyset$ ou ..."	"$\partial g(a) \neq \emptyset$ ou..."
	dem. (a),	"$u_0(.)$"	"$u_a(.)$"
27,	(b)	"conjunto"	"conjuntos"
32,	antepenultima linha,	"ou $a \in \operatorname{int} \operatorname{conv} P_l$ ou ..."	"$a \in \operatorname{int} \operatorname{conv} P_l$ ou ..."
65,	na linha acima de (5.5),	"ponto extremos"	"ponto extremo"