A Matemática e o ensino da Matemática na Universidade: conceções de professores do Ensino Superior

Susana Maria Torrado da Rosa

Tese apresentada à Universidade de Évora
para obtenção do Grau de Doutor em Ciências da Educação

ORIENTADORA: *Doutora Ana Paula Canavarro Teixeira*

ÉVORA, Fevereiro 2015

INSTITUTO DE INVESTIGAÇÃO E FORMAÇÃO AVANÇADA

A Matemática e o ensino da Matemática na Universidade: conceções de professores do Ensino Superior

Susana Maria Torrado da Rosa

Tese apresentada à Universidade de Évora
para obtenção do Grau de Doutor em Ciências da Educação

ORIENTADORA: *Doutora Ana Paula Canavarro Teixeira*

ÉVORA, Fevereiro 2015

INSTITUTO DE INVESTIGAÇÃO E FORMAÇÃO AVANÇADA

Resumo

A matemática e o ensino da matemática na universidade:

conceções de professores do ensino superior.

A investigação realizada visava compreender o fenómeno do ensino da Matemática nos primeiros anos do Ensino Superior, tendo por objetivo estudar em profundidade o modo como os professores de Matemática do Ensino Superior concebem a Matemática e o ensino da Matemática. Procurou-se igualmente investigar os fatores que, do ponto de vista destes professores, poderão estar na origem do insucesso dos alunos na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos do Ensino Superior, assim como identificar e descrever as medidas que poderão contribuir para que os alunos sejam melhor sucedidos na aprendizagem da Matemática no Ensino Superior. Neste âmbito, formalizaram-se para esta investigação quatro grandes objetivos: 1) Identificar, descrever e analisar as conceções de professores do Ensino Superior acerca da Matemática. 2) Identificar, descrever e analisar as conceções de professores do Ensino Superior acerca do ensino da Matemática. 3) Identificar e descrever os fatores que, do ponto de vista dos professores, poderão explicar o insucesso dos alunos na aprendizagem da Matemática no Ensino Superior. 4) Identificar e descrever as medidas que, do ponto de vista dos professores, poderão contribuir para que os alunos sejam melhor sucedidos na aprendizagem da Matemática no Ensino Superior. Com vista à obtenção de respostas para as questões de investigação foram realizados estudos de caso qualitativos a dois professores de uma Universidade da Grande Lisboa. As técnicas de recolha de dados utilizadas foram a entrevista semi-estruturada, a observação de aulas e a análise documental. A análise de dados foi feita a partir de categorias definidas com base nos objetivos e nas questões de investigação

Para os professores investigados, a relação de gosto e interesse pela Matemática foi sendo construída, evoluindo ao longo dos anos, marcada por diversos fatores: a influência familiar, os seus professores de Matemática, a facilidade com que aprendiam e estudavam os conceitos matemáticos, os próprios conceitos matemáticos em aprendizagem e o êxito nas avaliações da disciplina. A Matemática é concetualizada como a “ciência do raciocínio”, “harmoniosa” e “elegante” na forma como os seus conteúdos se relacionam, “ciência abstrata criada pelo homem”, com vida e onde não há verdades absolutas. A Matemática é caraterizada ainda pelo seu raciocínio lógico e rigoroso, pela “simplicidade dos seus princípios”, pela “beleza e harmonia” na forma como os seus conceitos se relacionam, e por constituir uma “grelha” que permite a compreensão da realidade. Na conceção dos professores a Matemática é importante para a própria Matemática, isto é, para o desenvolvimento de novas relações e de novas teorias nos vários campos da Matemática. E, também, porque saber Matemática permite conhecer outras ciências e outros ramos do conhecimento.

No contexto do ensino da Matemática no Ensino Superior, os participantes concetualizam que esta disciplina transmite aos alunos do primeiro ano (na grande maioria das Licenciaturas) conhecimentos gerais de Matemática, as chamadas "ferramentas" matemáticas que são vistas como fulcrais para serem utilizadas nas mais variadas disciplinas das diversas Licenciaturas. Na perspetiva dos professores investigados, um bom professor de Matemática deve: 1) Possuir um conhecimento profundo dos conceitos científicos a ensinar aos seus alunos. 2) Ter um grande "entusiasmo" pela Matemática". 3) Ter um "gosto enorme" pelo ensino da Matemática. 4) Possuir uma elevada capacidade de comunicação. Na ótica dos participantes um bom professor de Matemática deve primeiramente ser capaz de colocar o problema a ensinar, motivando os seus alunos para a temática em estudo, recorrendo às aplicações futuras da mesma, quer noutros campos da Matemática quer noutras disciplinas do plano curricular das suas Licenciaturas. Os alunos nas aulas de Matemática no Ensino Superior devem acompanhar os raciocínios matemáticos em causa, respondendo às questões que o professor vai levantando na exposição dos conceitos em estudo, não se limitando a passar a matéria do quadro. Um bom aluno a Matemática é aquele que está motivado, que manifesta interesse, que tem hábitos de trabalho, que durante as aulas teóricas é capaz de seguir os raciocínios matemáticos em causa, e em conjunto com o professor "construir" e até antecipar as teorias em estudo.

As origens das dificuldades que os alunos têm na aprendizagem da Matemática no Ensino Superior estão fortemente relacionadas com o insucesso dos mesmos nos ensinos Básico e Secundário. A grande dificuldade dos alunos na aprendizagem da Matemática prende-se com a falta de capacidade na elaboração de raciocínios abstratos. Os professores identificam a falta de capacidade de concentração e a falta de persistência perante as primeiras dificuldades, aquando da resolução de exercícios práticos de aplicação direta dos conteúdos matemáticos em estudo. O Processo de Bolonha e a consequente diminuição da carga horária em grande parte das disciplinas de Matemática, são fatores que vieram contribuir fortemente para a diminuição das competências em Matemática em algumas das Licenciaturas.

No âmbito do Ensino Superior, os professores alegam a necessidade de realizar um teste diagnóstico que tenha como objetivo averiguar as reais necessidades de cada aluno, para um possível encaminhamento para um "curso propedêutico em regime intensivo", visando, uma preparação dos alunos para as futuras disciplinas de Matemática que constam dos currículos das várias Licenciaturas. Os professores relevam ainda a necessidade de aumentar o número de horas semanais nas disciplinas de Matemática, por forma a conseguir-se um maior sucesso no ensino e aprendizagem da Matemática no Ensino Superior.

Palavras-chave: matemática, conceções, professores, ensino da matemática, ensino superior.

Abstract

Mathematics and mathematics teaching at university:
conceptions of teachers of higher education.

The research aimed to understand the phenomenon of the Mathematics teaching in the early years of Higher Education, aiming to study in depth how these teachers conceive Mathematics and Mathematics teaching. It also sought to investigate the factors that, from the point of view of these teachers may be the cause of failure of students in learning Mathematics in the early years of Higher Education, as well as identify and describe the means that could help to ensure that students to be more successful in learning Mathematics in Higher Education.

In this context, formalized to this research four main objectives: 1) Identify, describe and analyze the conceptions of Higher Education teachers about Mathematics. 2) Identify, describe and analyze the conceptions of Higher Education teachers concerning the Mathematics teaching. 3) Identify and describe the factors that, from the teacher`s point of view, can explain the failure of students in learning Mathematics in Higher Education. 4) Identify and describe the measures from the teacher`s point of view that could help students to be more successful in learning Mathematics in Higher Education. In order to obtain answers to research questions two qualitative studies were performed using two teachers from an University in Lisbon. The techniques of data collection used were semi-structured interviews, classroom observation and document analysis. The data analysis was taken from categories defined based on the objectives and the research questions.

For investigated teachers, the relationship of pleasure and interest in Mathematics was being built, has evolved over the years, and marked by several factors: family influence, their Mathematics teachers, how easily they learned and studied the mathematical concepts, their own mathematical concepts in learning and success in the assessments in the discipline. Mathematics is characterized as the "science of reasoning", "smooth" and "elegant" in how their contents relate, "abstract science created by man" with life and where there are no absolute truths. Mathematics is still characterized by its logical and rigorous reasoning, the "simplicity of its principles," the "beauty and harmony" in how its concepts relate, and being a "grid" that allows the understanding of reality. In the design of the Mathematics teachers is important for Mathematics itself, to develop new relationships and new theories in various fields of Mathematics. And also, because knowing Mathematics allows to know other sciences and other branches of knowledge.

In the context of the Mathematics teaching in Higher Education, participants tell that this course conveys to first year students (in most Undergraduate) general knowledge of Mathematics, the called Mathematics "tools" that are seen very important to be used in many different disciplines of the various Degrees. In the perspective of the investigated teachers, a good mathematics teacher must: 1) have a thorough knowledge of the scientific concepts to teach their students. 2) Have a great "enthusiasm" of Mathematics. 3) Have a "great pleasure" teaching of Mathematics. 4) Have a high capacity for communication. In the perspective of the participants a good Mathematics teacher must first be able to put the problem to teach, motivate their students to the topic under study, their future applications in other fields of Mathematics and in other disciplines of the curriculum of their degrees. Students in Mathematics classes in Higher Education must accompany mathematical reasoning in question, answering what the teacher wills raise the exposure of the concepts under study, not merely to pass the matter frame. A good Mathematics student is one who is motivated, who expresses interest, who has work habits, one who during lectures is able to follow the mathematical reasoning involved, and one who, together with the teacher "builds" and even anticipates the theories under study.

The origins of student`s difficulties in learning Mathematics in Higher Education are strongly related to the failure in primary and secondary teaching. The great student`s difficulties in learning Mathematics relates to the lack of capacity in developing abstract reasoning. Teachers identify the lack of ability to concentrate and the lack of persistence when the first difficulties arise when solving practical exercises related to the application of mathematical content studied. The Bologna Process and the consequent reduction in workload in most Mathematics subjects are factors that have contributed greatly to the decline of skills in some of Undergraduate Mathematics.

Within Higher Education, teachers defend the use of a diagnostic test that aims to ascertain the real needs of each student, for a possible referral to an "introductory course in intensive system" that aims student`s difficulties for future disciplines of Mathematics contained in the curricula of the various Degrees. Teachers emphasize the need to increase the number of hours per week of the Mathematics subjects seeking greater success in teaching and learning Mathematics in higher education.

Keywords: mathematics, beliefs, teachers, mathematics teaching, Higher Education.

Agradecimentos

Agradeço à Professora Doutora Ana Paula Canavarro Teixeira, as sábias orientações, disponibilidade e todo o apoio ao longo da realização desta investigação.

Agradeço à Cristina Abranches e ao Engenheiro Orlando Cabrinha a dedicação na revisão do texto do trabalho.

Agradeço ao meu marido e aos meus filhos a paciência e o amor recebido ao longo dos últimos cinco anos.

Agradeço aos meus pais o apoio incondicional.

Índice

Índice de Quadros

Índice de Figuras

Índice de Anexos

Capítulo I

Apresentação do estudo

Neste capítulo, numa primeira secção, apresentamos os objetivos e as questões de investigação. Na segunda secção mostramos o enquadramento e a importância do estudo. Finalizamos o capítulo com a estrutura e a organização da investigação.

Objetivos e questões de investigação

A presente investigação visa compreender o fenómeno do ensino da matemática nos primeiros anos do Ensino Superior, fenómeno esse que tem sido ao longo dos anos alvo de reduzida atenção por parte da investigação embora suscite preocupações atendendo ao elevado número de reprovações que os estudantes obtêm nas disciplinas de matemática quando entram para a Universidade. Assim, esta investigação tem por objetivo estudar em profundidade o modo como os professores de matemática do Ensino Superior concebem a matemática e o ensino da matemática. Procura-se igualmente investigar os fatores que, do ponto de vista destes professores, poderão estar na origem do insucesso dos alunos na aprendizagem da matemática nos primeiros anos do Ensino Superior, assim como identificar e descrever as medidas que poderão, do ponto de vista dos professores, contribuir para que os alunos sejam melhor sucedidos na aprendizagem da matemática no Ensino Superior.

Neste âmbito, formalizam-se para este estudo quatro grandes objetivos:

1) Identificar, descrever e analisar as conceções de professores do Ensino Superior acerca da matemática.

2) Identificar, descrever e analisar as conceções de professores do Ensino Superior acerca do ensino da matemática.

3) Identificar e descrever os fatores que, do ponto de vista dos professores, poderão explicar o insucesso dos alunos na aprendizagem da matemática no Ensino Superior.

4) Identificar e descrever as medidas que, do ponto de vista dos professores, poderão contribuir para que os alunos sejam melhor sucedidos na aprendizagem da matemática no Ensino Superior.

Na linha condutora apresentada com este estudo, tenciona obter-se respostas as seguintes questões:

1) Que conceções revelam os professores do Ensino Superior sobre a matemática?

    1.1) Como se relacionam com a matemática?

1.2) O que pensam acerca do que é a matemática? Como caraterizam a atividade matemática?

1.3) O que pensam acerca da importância da matemática?

2) Que conceções revelam os professores do Ensino Superior acerca do ensino da matemática?

   2.1) Quais as finalidades do ensino da matemática no Ensino Superior?

   2.2) Como entendem o seu papel e o papel do aluno no ensino e aprendizagem da matemática no Ensino Superior?

   2.3) Como abordam os conceitos matemáticos? Que tarefas e que metodologias de trabalho usam nas suas aulas de matemática?

3) Quais os fatores que, na perspetiva dos professores, poderão ser explicativos do insucesso dos alunos do Ensino Superior na aprendizagem da matemática?

   3.1) Quais as dificuldades que detetam nos alunos no Ensino Superior?

   3.2) Quais as origens das dificuldades dos alunos no Ensino Superior?

4) Quais as medidas que, do ponto de vista dos professores, poderão ser adotadas para que os alunos sejam melhor sucedidos na aprendizagem da matemática no Ensino Superior?

4.1) Medidas relativas ao ensino não superior?

4.2) Medidas relativas ao Ensino Superior?

Enquadramento e importância do estudo

O estudo das conceções viu reconhecida a sua importância nas décadas de 80 e 90, tendo conhecido um significativo desenvolvimento em Portugal na área da educação matemática, com investigações focadas nas conceções dos alunos e, sobretudo, nas conceções dos professores acerca do conteúdo do ensino e do próprio ensino (Ponte, Matos & Abrantes, 1998).

O papel das conceções é apontado como da maior importância na área educativa, visto que atua nas decisões individuais e influencia a forma como alunos e professores encaram as experiências de ensino e aprendizagem e executam as diversas tarefas a estas associadas (Matos, 1991; Ponte, 1992; Tompson, 1992).

Como Guimarães (2010) nos transmite:

> Existe, na verdade, um consenso crescente sobre a importância em ter acesso à "vida mental" dos professores, em conhecer e compreender os vários aspetos do seu pensamento e conhecimento, bem como as relações desses aspectos com a sua actuação ou comportamento. Por detrás deste interesse, está a convicção de que aquilo que o professor pensa influencia de maneira significativa aquilo que o professor faz (Guimarães, 2010, p. 82).

Por conseguinte, a investigação das conceções é identificada como necessária e relevante na medida em que as conceções dos professores acerca da matemática influenciam o modo como estes pensam, abordam, atuam e se disponibilizam para a realização das várias actividades inerentes ao ensino da matemática, interagindo dialeticamente com as suas práticas de ensino (Tompson, 1992). Assim como é também reconhecido que as conceções dos alunos acerca da matemática influenciam os seus desempenhos na prática da disciplina, bem como as conceções dos professores acerca da mesma influenciam fortemente as conceções dos alunos (Ponte, Matos, & Abrantes, 1998).

A matemática enquanto disciplina faz parte do plano curricular da maior parte dos cursos do Ensino Superior, tendo mesmo vindo a ser introduzida em cursos que tradicionalmente se caracterizavam por não possuírem qualquer disciplina de matemática.

Este facto está diretamente relacionado com a crescente importância que a matemática tem vindo a adquirir na sociedade, uma vez que a interpretação de múltiplas situações e acontecimentos em áreas tão variadas como as da vida empresarial e da economia, do desporto, das artes, etc., é cada vez mais realizada através da matemática (Matos, 1991).

Como Davis e Hersh (1981, 1995) afirmam sobre a variedade das aplicações matemáticas:

> É útil aquilo que satisfaz uma necessidade humana. (…) Um pedagogo – em especial se for um dos clássicos – dirá que a matemática é útil por nos ensinar a pensar e a raciocinar com rigor. Um arquitecto ou um escultor – novamente um

> dos clássicos – dirá que a matemática é útil por nos permitir a percepção e a criação de beleza visual. Um filósofo poderá dizer que a matemática é útil na medida em que lhe permite escapar à realidade da vida quotidiana. Um professor dirá que a matemática é útil porque lhe fornece o sustento. Um editor (…) porque faz vender muitos livros didácticos. Um astrónomo ou um físico dirão que a matemática é útil por ser a linguagem da ciência. Um engenheiro civil afirmará que a matemática é indispensável para construir uma ponte. Um matemático dirá que, dentro da própria matemática, um corpo matemático é útil quando for aplicável a um outro corpo matemático. Como se vê, os significados da expressão utilidade matemática abarcam elementos estéticos, filosóficos, históricos, psicológicos, pedagógicos, comerciais, científicos, tecnológicos e matemáticos (p.85).

Dissertando sobre esta temática, Buescu (2012) remete-nos para a justificação do interesse que a sociedade deve ter no ensino e desenvolvimento da matemática, tendo em devida conta razões de ordem prática. Desenvolvendo esta ideia, o investigador afirma que:

> Desde a Revolução Científica do século XVII que se descobriu que as leis da Natureza têm formulação matemática, e que essa compreensão quantitativa permite, além de descrever o Universo, agir sobre ele. Assim, as aplicações da Matemática surgem como uma ferramenta essencial na construção de aplicações da ciência à tecnologia e ao mundo real. (…) Como podem existir transacções seguras na Internet, as quais permitem comunicar com bancos e fazer pagamentos na web, de modo seguro? Por causa dos números primos. (…) O conceito de computador (…) foi uma ideia estritamente matemática introduzida por Alan Turing (…) motivado por um problema da Matemática pura, da área da Lógica Matemática, onde Turing dá uma definição rigorosa de número computável. Para o fazer introduz aquilo que ficou conhecido como máquina de Turing. (…) Como conseguiu a Google sucesso retumbante? Enquanto os outros motores de busca utilizavam métodos de força bruta para pesquisar na Web, os seus autores, Sergey Brin e Larry Page, dois estudantes de doutoramento em Stanford, desenvolveram um sofisticado modelo matemático,

> incorporando métodos da teoria de Grafes, Álgebra Linear e Análise Numérica. O seu método cristalizado na ferramenta chamada Page-Rank revolucionou toda a indústria informática. (…) O Google tinha alcançado a liderança do mercado para nunca mais a deixar. (…) O que fez a diferença foi utilizar a Matemática adequada ao problema de origem. (p. 27).

Não obstante a importância da matemática na nossa sociedade, o seu ensino e aprendizagem no Ensino Superior em Portugal e em diversos países europeus debatem-se com algumas dificuldades das quais se destacam o insucesso escolar dos alunos e o desinteresse na procura de cursos superiores de secções científicas onde as disciplinas de matemática são tidas como fulcrais.

Dados numéricos de 2004 fornecidos pela Direcção da Prospectiva e do Desenvolvimento em França (Balian *et al*., 2007, p. 92) deixam transparecer uma queda importante da orientação para cursos científicos. Senão vejamos: desde 1995 a 2001 o número de inscrições passou de 34651 a 22151 nas ciências "duras", de 17827 a 10795 nas ciências da vida e da natureza e de 4019 a 3510 nas ciências económicas.

No artigo publicado em França em 2004 pelos mesmos investigadores, com o título "*Os conhecimentos fundamentais ao serviço do futuro científico e técnico – como os reensinar",* os autores constataram que os alunos que permanecem nos cursos referidos não conseguem acompanhá-los "de maneira funcional e em algumas áreas como a matemática, as taxas de insucesso só não sobem em flecha nas universidades porque os exames e os critérios de avaliação são ultrajantemente permissivos em relação ao programa que deveria ser seguido" (p. 40).

Logo, a fundamentação da pertinência da realização deste estudo justifica-se, do ponto de vista da investigadora, pelas seguintes razões:

1) Nutrir motivação pessoal para realizar esta investigação, visto que é professora assistente há dezanove anos numa Universidade da grande Lisboa onde leciona diversas disciplinas de matemática e contacta diretamente com esta realidade;

2) Possuir grande interesse no que concerne à problemática da Educação da matemática no Ensino Superior no nosso país;

3) Acalentar grande dedicação no que respeita ao estudo da temática das conceções dos professores do Ensino Superior acerca da matemática e do seu ensino;

4) Considerar que conhecer a visão dos professores poderá contribuir para acrescentar conhecimento sobre a forma como estes entendem e concetualizam esta disciplina e o seu ensino e, talvez a partir daí, poderão ser levados a compreender, do ponto de vista dos professores, o porquê de uma certa aversão e consequente desinteresse e insucesso que muitos alunos experimentam nas disciplinas de Matemática no Ensino Superior.

A estas razões acresce ainda a quase total inexistência de trabalhos de investigação que abordem em profundidade as conceções dos professores acerca da matemática e do ensino da matemática no âmbito do Ensino Superior, e que utilizem a observação de aulas dos professores do Ensino Superior como técnica de recolha de dados.

A expectativa é que esta investigação se possa constituir como uma oportunidade para ampliar o conhecimento científico sobre o fenómeno do ensino da matemática a nível universitário em Portugal, e incentive uma reflexão que permita contribuir para reduzir o insucesso dos alunos nas disciplinas de matemática.

Estrutura e organização da investigação

O presente documento reflete a investigação que foi realizada, organizando-se em sete capítulos. O primeiro capítulo consiste na introdução ao estudo, sendo apresentado o enquadramento do mesmo bem como os objetivos e questões de investigação. Dedica de seguida dois capítulos ao enquadramento teórico. A fundamentação teórica de uma investigação resulta de um conjunto de leituras e consequente análise crítica das principais temáticas que se relacionam fortemente com o estudo a realizar, cujo objetivo é constituir uma fonte de informação a que se possa recorrer como linha orientadora ao longo de toda a investigação, que permitirá trazer esclarecimento aquando da análise e apresentação dos resultados e das conclusões finais da investigação.

Visando uma maior organização da componente teórica, esta foi orientada em dois capítulos. Numa primeira abordagem teórica proceder ao levantamento das principais perspetivas acerca da matemática, sua natureza e constituição, revela-se fundamental. Com esta finalidade, centrou-se a análise no estudo das ideias dos seguintes autores: i) Davis e Hersh (1995); ii) John Bowers (1988); iii) Moshé Flato (1990); iv) Paul Ernest (1991); v) Dirk J. Struik (1992); vi) Ian Stewart (1996); vii) Jorge Buescu (2012). Neste segundo capítulo pensamos ainda desenvolver a temática acerca do ensino da matemática, seguindo, fundamentalmente, as orientações teóricas de Schoenfeld (1987), Vergani (1993), Santos (1996), Abrantes (1994, 1998), NCTM (2000) Canavarro (1993, 2003), Guimarães (1988, 2003), Pires (2007), Esteves (2010) e Hannula, Pipere, Lepik, & Kislenko (2013).

Num terceiro capítulo, que concerne à revisão de literatura do conceito de conceção, privilegiámos documentos teóricos e práticos levados a cabo por uma panóplia de investigadores que procederam a revisões de literatura bastante aprofundadas acerca da problemática das conceções de professores de matemática acerca da matemática e do ensino da matemática. Assim, selecionaram-se para estudo as seguintes investigações fundamentais: i) Texto de Alba Thompson (1992) intitulado "Teachers' beliefs and conception: a syntesis of the research"; ii) Tese de doutoramento de Henrique Guimarães (2003) – "Concepções sobre a Matemática e a actividade matemática: Um estudo com matemáticos e professores do Ensino Básico e Secundário"; iii) Tese de doutoramento de Ana Paula Canavarro (2003) – "Práticas de ensino de Matemática: Duas professoras, dois currículos"; iv) Textos de João Pedro da Ponte (1992, 2004, 2011) e de Henrique Guimarães (2010); v) Investigações realizadas por Cooney & Wilson (2002), D. McLeod e S. McLeod (2002), Lloyd (2002), Wilkins (2008), Liljedahl, (2010), Gresalfi & Cobb (2011) e Hannula et al. (2013).

No quarto capítulo apresentamos a metodologia utilizada e a sua fundamentação, bem como as opções que foram tomadas ao longo da investigação. O quinto e sexto capítulos consistem na apresentação dos dois estudos de caso, cada um relativo a um professor de matemática do Ensino Superior. No sétimo e último capítulo elaboram-se as conclusões finais da investigação.

Capítulo II

A matemática e o ensino da matemática

Neste capítulo, primeiramente, apresentamos uma secção dedicada à matemática, onde analisamos as perspetivas filosóficas acerca da matemática, a natureza da matemática, a matemática e a cultura, a utilidade da matemática, a matemática e as outras ciências e as ideias matemáticas. Na segunda secção, estudamos o porquê de se ensinar matemática, a evolução das tendências no ensino e na aprendizagem da matemática e, o ensino e a aprendizagem no Ensino Superior.

Introdução

> A busca permanente do conhecimento, da compreensão do mundo, é uma das manifestações da inteligência humana. Não há dúvida de que a interpretação dos sinais do céu constituiu, desde a pré-história, a primeira tentativa de «descodificação» da natureza. Mais tarde, as civilizações do Próximo Oriente, da Índia e da China acumularam progressivamente um rico saber empírico, principalmente no domínio da Matemática. (Cotardière, 2011, p.9).

Como ilustra o sociólogo Boaventura de Sousa Santos (1987) na sua obra "Um discurso sobre as ciências", o modelo de racionalidade que preside à ciência moderna constituiu-se a partir da revolução científica do século XVI, tendo sido desenvolvido nos séculos que se seguiram basicamente no domínio das ciências naturais, estendendo-se às ciências sociais que emergiram no século XIX. Este modelo de racionalidade que o autor intitula de “global” é, na sua perspetiva, um modelo totalitário “na medida em que nega o carácter racional a todas as formas de conhecimento que se não pautarem pelos seus princípios epistemológicos e pelas suas regras metodológicas” (Sousa Santos, 1987, p.10).

A matemática é, desta forma, essencial à ciência moderna, fornecendo não só os instrumentos de análise como a lógica de investigação e o modelo para a representação da própria estrutura da matéria. Na opinião de Boaventura de Sousa Santos (1987), o lugar central da matemática na ciência moderna desencadeia duas consequências principais: 1) conhecer significa quantificar, isto é, o rigor científico afere-se pelo rigor das medições; 2) o método científico assenta na redução da complexidade, ou seja, conhecer implica dividir e classificar para depois poder determinar relações sistemáticas entre o que se separou.

Neste contexto, a descoberta das leis da natureza assenta, por um lado, no isolamento das condições iniciais relevantes e, por outro lado, no pressuposto de que o resultado se produzirá independentemente do lugar e do tempo em que se realizarem as condições iniciais. Como Boaventura de Sousa Santos (1987) refere “as leis da ciência moderna são um tipo de causa formal que privilegia o *como funciona* das coisas em detrimento de *qual o agente* ou *qual o fim das coisas*” (p.18). É neste enquadramento que o autor defende que o conhecimento científico rompe com o conhecimento do senso comum.

O prestígio de Newton e das leis simples a que reduzia toda a complexidade de ordem cósmica transformaram a ciência moderna no “modelo de racionalidade hegemónica que, a pouco e pouco, transbordou do estudo da natureza para o estudo da sociedade” (p.18). Assim, tal como foi possível descobrir as leis da natureza, “seria igualmente possível descobrir as leis da sociedade. Bacon, Vico e Montesquieu são os grandes precursores destas ideias” (p.19).

No século XIX a emergência das ciências sociais enraíza-se no positivismo oitocentista, pois só havendo então duas formas de conhecimento científico – as disciplinas formais da Lógica e da Matemática e as ciências empíricas segundo o modelo mecanicista das ciências naturais – quando as ciências sociais nasceram só poderiam ser consideradas empíricas. Ao analisar as teorias das revoluções científicas de Thomas Kuhn, Boaventura de Sousa Santos (1987) defende que para aquele investigador o atraso das ciências sociais é dado pelo carácter pré-paradigmático destas ciências. Isto é, enquanto nas ciências naturais o desenvolvimento do conhecimento tornou possível a formulação de um conjunto de princípios e teorias que são aceites sem discussão por toda a comunidade científica - conjunto esse que designa por paradigma - nas ciências sociais não há consenso paradigmático.

Ao estudar profundamente o modelo de racionalidade científica, Boaventura de Sousa Santos (1987) defende ainda que este modelo atravessa uma profunda crise, que intitula de “crise do paradigma dominante”. Para o autor esta crise é não só profunda como irreversível, iniciou-se com Einstein e a mecânica quântica, não se sabendo quando acabará nem qual o paradigma que emergirá deste período revolucionário. Assim, se as leis da natureza fundamentam o seu rigor no rigor das formalizações matemáticas:

> As investigações de Gödel, vêm demonstrar que o rigor da Matemática carece ele próprio de fundamento. A partir daqui é possível não só questionar o rigor da matemática como também redefini-lo enquanto forma de rigor cujas condições de

êxito na ciência moderna não podem continuar a ser concebidas como naturais e óbvias (p.27).

É neste entendimento que o autor argumenta que a própria filosofia da matemática, sobretudo a que incide sobre a experiência matemática, tem vindo a problematizar criativamente estes temas e reconhece hoje que o rigor matemático, como qualquer outra forma de rigor, assenta num critério de seletividade e que, como tal, tem um lado construtivo e um lado destrutivo.

É neste âmbito que no presente capítulo vamos analisar a problemática da definição de matemática, das perspetivas filosóficas acerca da matemática, do domínio do Absolutismo e da visão falibilista da matemática, bem como a natureza e utilidade da matemática. Estes temas estão na ordem do dia e vêm ao encontro das argumentações feitas pelo investigador Boaventura de Sousa Santos já em 1987, sendo fortemente discutidos por diversos interessados por esta temática e, mais concretamente, pelos estudiosos da História da matemática e Filosofia da matemática.

Das origens da matemática aos dias de hoje

Não há cultura por mais primitiva que seja que não demonstre possuir uma espécie, mesmo que rudimentar, de matemática (Davis & Hersh, 1981). As primeiras conceções de número e forma datam de tempos tão remotos como os do começo da idade da pedra do Paleolítico. As pinturas em cavernas de França e de Espanha, com mais de 15000 anos, com significado ritual, revelam uma notável compreensão da forma e da descrição bidimensional dos objetos no espaço. Não obstante, os termos numéricos só lentamente começaram a ser usados constatando-se que as primeiras ocorrências foram mais qualitativas do que quantitativas, marcando somente a distinção entre um, dois e muitos (Struik, 1992). A corrente principal da matemática escrita parece ter tido origem no Egito no período entre 3000 e 1600 a.C. Existem também vestígios de que cerca de 1500 a.C. os Babilónios já conheciam uma grande quantidade de conjuntos de números, tais como o comprimento dos lados de triângulos retângulos que, na opinião de Bowers (1988), devido à grandeza desses números não foram descobertos por tentativa e erro mas obtidos por um processo matemático. Também por essa época a matemática escrita encontrava origens na China e na Índia, argumentando Struik (1992) não haver "nenhuma razão particular para acreditar que a prática do antigo Egipto e da Babilónia pudesse ter sido diferente da indiana e da chinesa" (p. 67). No entanto, impõe-se questionar: O que é a matemática? Quantas matemáticas existem?

Na perspetiva de Bowers (1988) existem duas matemáticas: a aritmética e a geometria existentes desde o tempo de Pitágoras (há cerca de 540 a.C.). Esta pluralidade exprimiu-se também nos famosos *Elementos* de Euclides, por volta de 300 a.C., que se compõem de três livros de aritmética bem como da familiar geometria. A geometria apresentada à época por Euclides possui uma caraterística crucialmente significativa: surge como uma ciência dedutiva. Isto é, partindo de um número de ideias elementares tidas como óbvias e tendo por base algumas regras bem definidas de manipulação lógica e matemática, a geometria euclidiana desenvolve uma estrutura de deduções de crescente complexidade. O que se salienta nesta teoria não é apenas o aspeto visual ou espacial do tema, mas também a metodologia em que a hipótese conduz à conclusão. É este processo dedutivo que geralmente designamos por demonstração (Davis & Hersh, 1981).

Com efeito, parece que a matemática se desenvolveu de início como estudo da medida, dando a medição da área origem à geometria e os problemas de cálculo origem à aritmética, como pode inferir-se da definição de matemática dada por Bowers (1988) e constante do dicionário: “ciência abstracta do espaço, do número e da quantidade” (p.14). Na mesma linha de orientação, Davis e Hersh (1981) apresentam uma definição que classificam como "ingénua" e adequada às páginas de um dicionário, em que a matemática significa "a ciência da quantidade e do espaço", isto é, "do simbolismo relacionado com a quantidade e o espaço" (p. 25). Como estes estudiosos referem, as ciências da quantidade e do espaço são conhecidas por aritmética e geometria, tratando a primeira de números de várias espécies e de regras de operação sobre números, e a segunda abordando fundamentalmente questões sobre medidas do espaço.

No historial linguístico acerca da palavra matemática, Bowers (1988) diz que a palavra inglesa *mathematics* deriva no seu aspeto plural do francês *mathématiques,* terminologia que por sua vez advém do latim *mathematica,* embora os romanos não tenham chegado a acordo sobre se estavam perante um feminino singular ou um neutro plural. Esta incerteza devia-se ao facto de a palavra ter sido decalcada do grego *mathematika,* que se relaciona com o termo grego *mathema* que significa compreensão.

A civilização grega, com uma conceção de vida completamente diferente, trouxe à matemática padrões de um novo tipo de ciência. Por isso, na Grécia clássica, a matemática assumiu uma forma puramente dedutiva "criada para uso de filósofos em elegantes banquetes, e não tanto para os equivalentes atenienses dos nossos engenheiros" (Bowers,1988, p. 15). Contudo, já anteriormente a 212 a.C., Arquimedes, além de efetuar cálculos geométricos precursores da álgebra, estudou as forças que atuam na alavanca e na água, dando assim início às rubricas da Estática, Hidrostática e Mecânica. As mais importantes contribuições de Arquimedes na matemática foram feitas no domínio daquilo a que agora chamamos Cálculo Integral , teoremas sobre áreas de figuras planas e sobre volumes de corpos sólidos.

Durante o Império Romano prosseguiu-se a tradição grega da matemática. Vários são os matemáticos que se evidenciam nesta época. Por exemplo, destaca-se o geógrafo Ptolomeu (cerca de 150 d.C.) que acrescentou a Trigonometria ao conjunto dos ramos da matemática.

Com a queda do Império Romano interrompeu-se o trabalho matemático na Europa e durante longos anos a criatividade matemática foi praticamente nula neste continente. Contrariamente, nesta mesma época, os matemáticos árabes reacenderam a chama da matemática reunindo os resultados até então atingidos em Roma, na Grécia, na Índia e na China e usaram-nos como ponto de partida nas suas investigações. Assim, a partir de 1200, o contacto com o mundo islâmico deu nova vida à matemática Ocidental encaminhando-a para uma nova e florescente era. Por volta de 1550 a ciência matemática adquire um novo ramo: são feitos os primeiros estudos acerca da teoria das probabilidades. Os séculos seguintes notabilizaram-se pela introdução de outros novos segmentos da matemática e pela expansão e aperfeiçoamento dos já existentes, verificando-se que em ambos os casos o desenvolvimento se deu a partir de tradições mais antigas (Bowers,1988).

Sendo a matemática uma atividade humana tão fundamental e ancestral, é difícil encontrar uma definição de matemática aceite por todos os investigadores, em parte porque a sua definição se tem alterado de geração para geração, isto é, cada matemático pondera na sua época e geração criando uma definição segundo o seu entendimento e também devido ao facto de o termo matemática ser muito genérico. Com efeito, no século XX floresceu um grande número de novos ramos da matemática que, na sua maioria, são combinações de ramos já existentes. Como exemplo, Bowers (1988) destaca a Análise Linear na qual os métodos de Análise e da Álgebra Linear se combinam subtilmente na aplicação a problemas apropriados. O mesmo se passa com a Análise Numérica que é, essencialmente, uma aritmética das aproximações. A matemática de hoje é composta por uma quantidade muito vasta de matérias que se encontram interligadas de uma forma bastante densa e, se é um facto que há uns séculos atrás um matemático podia dominar todos os campos da matemática, isso agora é impensável para um único matemático. Daí que atualmente seja muito mais difícil obter uma panorâmica realista de tudo o que efetivamente está a ser produzido em matemática, o seu respetivo enquadramento e a sua finalidade. Davis e Hersh (1981) afirmam que frequentemente se utiliza uma metáfora comparando e descrevendo a matemática como uma grande árvore que cresce com um tronco robusto e múltiplas raízes e ramos que desabrocham vivamente etiquetados com certas subdisciplinas. Contudo, é necessário não esquecer que estas raízes e ramos se encontram extremamente entrelaçados entre si e por vezes até dependentes. Como os autores dizem, a matemática:

> É uma árvore que cresce com o tempo. Desenvolvem-se e concluem-se construções. São criadas novas teorias. São delineados e postos na berlinda novos objectos matemáticos. São descobertas novas relações e interligações que exprimem, assim, novas uniformidades. São procuradas e concebidas novas aplicações (...) é um vasto organismo em crescimento, com ramo sobre ramo (...) sendo que por vezes o ramo anterior é condição prévia para a compreensão do ramo seguinte (p. 36).

Apesar da visão "agregativa da matemática" é importante ficar com a ideia de que também existem teorias matemáticas, campos ou áreas de estudo, até mesmo trabalhos de investigação mais antigos que vão sendo abandonados, outros remodelados ou reformulados, outros tornam-se irrelevantes, ininteligíveis e são simplesmente esquecidos. Para ilustrar a grandiosidade das ramificações de uma árvore com mais de quatro mil anos de história, em 1980 a Mathematics Subject Classification (American Mathematical Society) - AMS(MOS) - referida em Davis e Hersh (1981), apresenta um esquema de classificação da matemática onde esta ciência aparece dividida em mais de 3000 categorias. Estes autores acrescentam que na maior parte dessas 3000 categorias cria-se matemática nova a uma taxa de crescimento exponencial. “O oceano está em expansão tanto em profundidade como em largura” (p. 43), é a exclamação dos autores Por conseguinte, vários são os autores (Davis & Hersh, 1981; Stewart, 1996; Browers, 1988) que defendem que se vive atualmente a verdadeira Idade do Ouro da produção matemática, ou não fosse esta a sociedade do conhecimento. Pela quantidade sê-lo-ia certamente. Stewart (1996) refere que nos últimos cinquenta anos foi criada mais matemática do que no conjunto de todas as épocas anteriores juntas. Com efeito, em quase todos os países do mundo, nas diversas Universidades, em livros e revistas da especialidade, publica-se anualmente uma imensidade de trabalhos de investigação na área da matemática, ficando a averiguação da sua qualidade a cargo de vários corpos docentes das respetivas Universidades, bem como de conceituados investigadores nas matérias em estudo.

Segundo Davis e Hersh (1981) existem duas fontes inesgotáveis de novas questões matemáticas. Por um lado, são os avanços nas diversas ciências e na tecnologia que fazem constantemente novos pedidos de ajuda à matemática. Por outro lado, é a própria matemática visto que à medida que se "torna mais elaborada e complexa, cada novo resultado que se conclui torna-se um potencial ponto de partida para várias novas investigações" (p. 42). Assim, a ideia de que a matemática é hoje uma ciência esgotada, sem vida, onde nada de novo, de verdadeiramente essencial ou sensacional possa ser produzido, cai por terra. Apesar de existirem campos da matemática que manifestam um certo esgotamento de assuntos para estudo, como é o caso da geometria elementar do círculo e do triângulo ou da teoria clássica das funções de uma variável complexa, na medida em que o crescimento exponencial da investigação em matemática está destinado a estabilizar "é difícil antever um fim para a produção da matemática, excepto como parte do fim da procura humana por mais sabedoria e por mais poder" (Davis & Hersh, 1981, p. 42).

Perspetivas filosóficas acerca da matemática

Na abordagem da problemática da veracidade e do significado da matemática, bem como da natureza do conhecimento matemático, existem diversas perspetivas que, em determinados tópicos, se entrecruzam e noutros são perfeitamente incompatíveis.

De acordo com Davis e Hersh (1981), em qualquer discussão sobre os fundamentos da matemática são apresentados três "dogmas-padrão": o platonismo, o formalismo e o construtivismo.

O platonismo

Aprofundando um pouco mais cada uma destas perspetivas, podemos dizer que o platonismo é uma corrente que concetualiza os objetos matemáticos como reais, com uma verdadeira existência. A existência desses objetos é um facto objetivo, isto é, estes existem independentemente do nosso conhecimento sobre eles. Como Davis e Hersh afirmam a respeito desta posição:

> Conjuntos infinitos, conjuntos infinitos não contáveis, variedades de dimensão infinita, curvas que preenchem o espaço - todos os membros do jardim zoológico matemático são objectos definidos, com propriedades definidas, algumas conhecidas, muitas desconhecidas. Estes objetivos não são físicos ou materiais. Eles existem fora do espaço e do tempo da existência física. São imutáveis - não foram criados e não se alterarão ou desaparecerão (p. 299).

Na ótica do platonismo um matemático nada pode inventar uma vez que tudo já existe. Por isso, compete-lhe apenas partir à descoberta dessa matemática. Nesta perspetiva acredita-se que os conceitos matemáticos se encontram num mundo à parte dos investigadores, isto é, a matemática existe independentemente dos seres humanos. O platonista encara os objetivos matemáticos não como resultantes de uma construção humana mas como coisas que já existem, num sentido ideal e intemporal, isto é, sem passado, presente ou futuro. Os matemáticos não criam, apenas descobrem o que já existe.

Também Paul Ernest (1991), ao expressar-se sobre o platonismo, refere que esta visão considera os objetos matemáticos como reais, com existência objetiva, independente da humanidade, ficando o trabalho dos matemáticos restringido à descoberta desses objetos bem como das relações pré-existentes entre eles.

De acordo com os platonistas a matemática é universal e, por isso, encaram-na com o sentimento de quem trabalha com algo real, composto por uma panóplia de verdades objetivas, inquestionáveis e imortais. Os platonistas crêem que os objetos da matemática existem no seu próprio mundo separados do mundo das aplicações, existem fora do espaço e do tempo, fora do domínio dos investigadores.

O formalismo

Na perspetiva da doutrina formalista advoga-se a não existência de objetos matemáticos. A matemática consiste apenas em axiomas, definições e teoremas, ou seja, esta é reduzida somente a fórmulas e símbolos desprovidos de qualquer significado.

Em termos populares, como é referido em Paul Ernest (1991), o formalismo é uma visão que considera a matemática como um jogo formal de símbolos desprovidos de qualquer significado e papel em que a única condição necessária é seguir determinadas regras. Por isso, para os formalistas, a matemática consiste basicamente em regras através das quais se obtêm fórmulas, fórmulas essas que não são acerca de nada, são unicamente conjuntos ordenados de símbolos, ou seja, as fórmulas e símbolos não adquirem qualquer significado. Temos, pois, que a matemática aparece como uma combinação de símbolos sem sentido. Ilustrando a perspetiva formalista, Davis e Hersh (1981) dizem:

> Quando se dá uma interpretação física a uma fórmula, esta adquire um significado e pode ser verdadeira ou falsa. Mas esta verdade ou falsidade está relacionada com a interpretação física específica que se fez. Enquanto fórmula matemática pura, não tem qualquer significado nem qualquer valor de veracidade (...) uma fórmula matemática não é sobre nada, a Matemática apenas é. Uma fórmula é só uma fórmula (p. 300).

O formalista define a matemática como a ciência da demonstração rigorosa. Como diz o formalista: "ou temos uma demonstração ou não temos nada" (Davis & Hersh, 1981). Esta abordagem reduz a matemática a deduções formais a partir dos axiomas, sem ter em conta o significado. O importante é o conhecimento das regras de inferência através das quais se transforma uma fórmula noutra. O significado que essas fórmulas possam ter é pura ilusão e é, portanto, irrelevante.

O formalismo atual teve como inspirador o matemático alemão David Hilbert (1862-1943), professor na Universidade de Gotinga. Referindo a essência da inspiração deste matemático pode dizer-se que tinha por ambição exprimir toda a matemática numa linguagem formal. De acordo com este ponto de vista a matemática era considerada uma "actividade puramente formal, que em si mesma não tinha um significado diferente do de um jogo de xadrez" (Flato, 1990, p.50).

Hilbert evidenciou uma convicção profunda de que os problemas matemáticos são questões acerca de objetos reais que têm respostas com significado, que são verdadeiras, assim como uma afirmação acerca da realidade é verdadeira. Contudo, o preço que considerava necessário para obter a certeza era estar preparado para advogar uma interpretação formalista da matemática. Como se lê em Paul Ernest (1991), a tese dos formalistas compreende dois grandes princípios: a) a matemática pura pode ser expressa como um sistema formal não interpretado, onde as verdades matemáticas são representadas por teoremas formais; b) a segurança deste sistema formal pode ser demonstrada em termos da não existência de inconsistências por meio da meta-matemática.

Na posição de um formalista os teoremas não são nem verdadeiros nem falsos. Visto que se referem a termos não definidos apenas pode dizer-se que os teoremas são deduzidos logicamente dos axiomas. É neste sentido que a corrente formalista alega que os teoremas matemáticos não têm qualquer conteúdo, não são acerca de coisa alguma. Os teoremas estão isentos de qualquer dúvida ou erro possível, na medida em que o processo de demonstração rigorosa e dedução não tem falhas nem vícios de raciocínio. Resumindo a posição dos formalistas, Davis e Hersh (1981) afirmam que "para os formalistas a matemática é a ciência da dedução formal, dos axiomas para os teoremas. Os seus termos primitivos são indefinidos. As suas afirmações não têm conteúdo até as interpretarmos" (p. 318).

O formalismo na filosofia da matemática foi encontrar inspiração na corrente dominante da filosofia da ciência durante os anos 40 e 50 (Século XX) – o positivismo lógico. O positivismo lógico, oriundo da "escola de Viena", advogava uma ciência unificada, codificada num cálculo lógico formal e com um único método dedutivo. Esta formalização tinha subjacente a si própria a escolha de um vocabulário de termos básicos, a elaboração de leis fundamentais onde interviessem os termos definidos e o desenvolvimento lógico de uma teoria partindo dessas leis fundamentais. A atitude dos positivistas lógicos, por não ter nenhum objetivo de estudo, não ter dados observacionais aos quais possam aplicar-se regras de interpretação, leva a que a própria matemática não seja vista como uma ciência em si. É assim encarada mais como uma linguagem para as outras ciências. Logo, pode dizer-se que os filósofos positivistas tendem a considerar a matemática como sendo apenas uma ferramenta e não uma área independente e em crescimento.

Assinalando pontos de convergência entre o formalismo e o platonismo, pode dizer-se que as doutrinas platonista e formalista divergem na questão da existência e da realidade matemática. Não divergem, porém, nos princípios de raciocínio que devem ser admissíveis na prática matemática (Davis & Hersh, 1981).

O construtivismo

O construtivismo é uma abordagem que se distancia de forma evidente das perspetivas anteriores. Esta doutrina teve a sua origem com o topólogo holandês L. C. J.

Brouwer por volta de 1908. Os construtivistas, alegando uma certa insegurança na matemática clássica, reclamam a necessidade de reconstruí-la por meio de métodos construtivos e dotados de razão (Paul Ernest, 1991). Isto é, os construtivistas advogam que quer as verdades matemáticas quer a existência de objetos matemáticos devem estabelecer-se por métodos construtivos. Assim, nesta perspetiva, a matemática genuína é apenas aquela que pode ser obtida por uma construção finita. Daí advém que para os construtivistas o conjunto dos números reais ou qualquer conjunto infinito não têm qualquer significado. Como nos é dado a compreender por Davis e Hersh (1981), a posição de Brouwer indica que:

> Os números naturais são-nos dados a conhecer por uma intuição fundamental, que é o ponto de partida para toda a matemática. Ele exigiu que toda a matemática se baseasse construtivamente nos números naturais. Ou seja, os objectos matemáticos não podem ser considerados com significado, não pode dizer-se que existam, a não ser que sejam obtidos por construção num número finito de passos, a partir dos números naturais (p. 313-314).

A doutrina construtivista não suscita entre os investigadores matemáticos grande entusiasmo. Segundo os construtivistas muitos teoremas e respectivas demonstrações da matemática clássica são considerados impossíveis de demonstrar e, como tal, são tidos como inválidos e falsos (Paul Ernest, 1991).

O domínio do absolutismo

O estilo formalista é, de todas as três abordagens, a que nos últimos anos mais tem influenciado o ensino e a aprendizagem da matemática. Como é afirmado por Davis e Hersh (1981) inicialmente o formalismo condicionou as licenciaturas e "finalmente, sob a designação de Matemática Moderna, invadiu até os jardins infantis, com textos pré-escolares sobre a teoria de conjuntos" (p. 318). Consequentemente, neste século, o formalismo tornou-se na corrente filosófica dominante nos diversos níveis de ensino da matemática. A quase totalidade dos matemáticos acredita no platonismo que, como uma "religião secreta", é admitido em privado e raras vezes mencionado em público. Estes investigadores argumentam ser consensual, entre autores que se dedicam ao estudo das questões relacionadas com a Filosofia e fundamentos da matemática, que a maioria dos investigadores matemáticos oscila entre o platonismo e o formalismo, melhor ainda: são platonistas durante a semana e formalistas ao domingo (Davis & Hersh, 1981, p.301).

Isto é, enquanto trabalham em matemática estão convencidos de que estudam uma realidade objetiva cujas propriedades tentam descobrir. No entanto, quando interpelados no sentido de fundamentarem filosoficamente essa realidade, acham conveniente fingir que afinal não acreditam nela (Davis & Hersh, 1981).

Apesar de divergirem em diversos tópicos, as três perspetivas apresentadas unem-se em torno da defesa da matemática como sendo uma fonte de verdade suprema, indiscutível e inquestionável. É neste âmbito que Paul Ernest (1991) insere estas três abordagens numa perspetiva mais ampla que designa por absolutismo. Nesta vertente o absolutismo é considerado o paradigma que ao longo de mais de dois mil anos tem dominado a matemática, idealizando-a como um corpo de verdades objetivas, infalíveis, afastadas dos valores da humanidade. Na visão absolutista a verdade matemática não pode ser posta em causa pois é absolutamente certa. O conhecimento matemático é, para os absolutistas, o único conhecimento verdadeiramente objetivo e inquestionável. Nesta perspetiva, a matemática é idealizada como sendo livre de qualquer erro.

A visão falibilista da matemática

A perspetiva falibilista do conhecimento matemático é radicalmente oposta à da perspetiva absolutista. Isto é, contrariamente aos absolutistas, a verdade matemática na opinião dos falibilistas (como o nome indica) é falível e nunca pode deixar de ser revista e corrigida. O conhecimento matemático não tem uma validade absoluta. É antes um conhecimento corrigível e internamente aberto à revisão.

Esta perspetiva filosófica da matemática deve-se, em parte, às teses inovadoras de Imre Lakatos (1922-1973), físico, filósofo e matemático de origem húngara, fortemente influenciado pelas teorias dos matemáticos Karl Popper (1902-1995) e George Pólya (1887- 1985). Na sua dissertação de doutoramento em filosofia, intitulada *Proofs and Refutations*, Lakatos apresenta a matemática como uma ciência falível e não indubitável, que se desenvolve pela crítica e correcção de teorias, teorias estas que não estão livres de ambiguidades ou possibilidades de erro ou engano. Na abordagem deste estudioso a demonstração não significa um processo mecânico que conduz à verdade, numa cadeia inquebrável desde as hipóteses até às conclusões; significa antes explicações, justificações e elaborações que tornam a conjetura mais plausível, mais convincente, ficando mais pormenorizada e precisa sob a pressão dos contra-exemplos. Cada passo de uma demonstração está sempre sujeito à crítica e correção. Apoiando-se nas teorias de Popper, Lakatos afirma que a matemática se desenvolve por um processo sucessivo de crítica e aperfeiçoamento das teorias e pelo avanço de novas teorias em competição e não pelo modelo dedutivo da matemática formal. Em toda a sua obra, Lakatos defende que a perspetiva formalista, defensora do absolutismo, é inaceitável e, por isso, proclama um feroz ataque a esta atitude. Como o investigador argumenta: "o formalismo nega o estatuto de matemática à maioria das ideias que se consideravam normalmente serem matemática e não esclarece nada em relação ao seu desenvolvimento (...) é tempo de ser desafiada" (Lakatos, citado em Davis & Hersh, 1981, p. 328).

Nos seus estudos este investigador tinha por principal objetivo mostrar a desadequação do absolutismo e apresentar uma imagem alternativa, uma imagem da matemática como uma ciência viva e em desenvolvimento e não uma ciência fossilizada em axiomas formais. É neste contexto que Lakatos (1976, 1978) apresenta o quase-empirismo como uma nova filosofia acerca da matemática. Na visão quase-empirista a matemática "é o que os matemáticos têm vindo a fazer, com todas as imperfeições que caracterizam qualquer actividade ou criação humana" (Ernest, 1991, p. 34).

Paul Ernest (1991) associa quatro caraterísticas à perspetiva quase-empirista de Lakatos: a) O conhecimento matemático é corrigível e falível; b) A matemática é hipotético/dedutiva e a ênfase não está na transmissão da verdade de premissas verdadeiras para as conclusões (visão absolutista) mas na retransmissão da falsidade de conclusões falsas para premissas hipotéticas; c) A Filosofia da matemática está irremediavelmente encadeada com a História da matemática (história da evolução do conhecimento matemático); d) É referida a importância suprema da afirmação da matemática informal.

Tymoczko (1986) é também um dos grandes impulsionadores de uma nova abordagem na Filosofia da matemática. Inspirando-se, entre outros, nos escritos de Polya e Lakatos, introduz a “tentativa de basear a filosofia da matemática na prática dos matemáticos" (Pateman, 1989, p. 20, citado em Santos, 1996, p. 37). Melhor dizendo, alerta-nos para a necessidade de se analisar a prática diária do trabalho dos matemáticos e a definição de matemática "como uma consequência de uma forma particular de pensar acerca de experiências humanas particulares" (Pateman, 1989, p. 20, citado em Santos, 1996, p. 37).

Após a análise das três perspetivas - platonismo, formalismo e construtivismo - deteta-se a existência de uma hipótese tácita defendida por estas que respeita ao facto de a matemática dever ser uma fonte de verdade indubitável. Mas, contrariando esta posição, Davis e Hersh (1981) e Paul Ernest (1991) chamam-nos a atenção para um outro facto: da experiência diária dos matemáticos pode concluir-se que, na realidade, a verdade matemática é como todas as outras verdades. Isto é, o conhecimento matemático é falível, é corrigível, é tentativo e sujeito a evolução como todos os outros tipos de conhecimento humano. A matemática é descrita como parte do conhecimento humano em geral. É uma construção humana. É também uma construção social.

No entanto, constata-se uma certa resistência e até mesmo oposição a esta nova perspetiva acerca da matemática, alegando-se perda de "prestígio" e de "credibilidade" no conhecimento matemático. A este respeito Paul Ernest (1991) ironiza, referindo que o facto de se rejeitar o absolutismo não representa a expulsão da matemática do Jardim do Eden, paraíso de todas as verdades e certezas. Muito pelo contrário "a perda de certeza não representa a perda de conhecimento" além de que da experiência diária se conclui que, na realidade, o Jardim do Eden Absolutista não é mais que uma idealização, um mito, isto é, "não é mais do que um falso paraíso" (p. 20).

A natureza da matemática

No que respeita à natureza da matemática são preferencialmente apresentadas duas visões. Por um lado, numa primeira abordagem, a matemática é concetualizada como sendo uma invenção humana. Os matemáticos têm disso consciência porque são eles que a inventam. Por outro lado, numa segunda vertente, as estruturas matemáticas – figuras geométricas, funções aritméticas e operadores algébricos – são idealizadas como "coisas" misteriosas até para os seus próprios criadores. Esta classificação deve-se ao facto de as estruturas matemáticas possuírem propriedades que, após muito esforço e dedicação, os investigadores conseguem descobrir, outras que tentam em vão descobrir e ainda outras de que nem sequer suspeitam.

Como se pode constatar, o formalismo é construído sobre a primeira abordagem, afirmando-se que a matemática é uma criação da mente humana e que os objetos matemáticos são imaginários. Contrariamente o platonismo é construído sobre a segunda abordagem pois alega que a matemática tem as suas leis (independentemente do ser humano), às quais os matemáticos têm de obedecer.

No final da obra intitulada "A Experiência Matemática", Davis e Hersh (1981) manifestam-se desfavoravelmente sobre o absolutismo (formalismo, construtivismo e platonismo) e, com base nas suas experiências e conceções de matemática, reformulam as perspetivas apresentadas acerca da natureza da matemática. Neste sentido defendem que 1) a matemática é uma criação nossa; é acerca de ideias nas nossas mentes; e que 2) a matemática é uma realidade objetiva, no sentido em que os objetos matemáticos têm propriedades bem definidas que podemos ou não conseguir descobrir.

Estes autores alertam-nos para um segundo facto: a matemática é uma realidade objetiva, não é física nem subjetiva; é uma realidade ideal ou seja, não física, é independente da consciência de qualquer pessoa em particular. Apesar de tal posição não se pense que para estes autores a matemática é o estudo de uma realidade ideal, preexistente e intemporal. Não, nada disso, a matemática não pode ser concetualizada como um "jogo" de símbolos e fórmulas inventadas. Como ilustram, a matemática:

> É antes a parte dos estudos humanos que é capaz de alcançar um consenso, como o da ciência, é capaz de estabelecer resultados reprodutíveis. A existência da matemática é um facto, não uma questão. Este facto não é nem mais nem menos do que a existência de modos de raciocínio e argumentos acerca de ideias que são aliciantes e conclusivas (p. 377).

Do ponto de vista destes investigadores e contrariando a perspetiva formalista, a matemática debruça-se sobre um determinado assunto tendo as suas afirmações significado. Contudo, o “significado deve ser encontrado no conhecimento partilhado pelos seres humanos e não numa realidade externa, não humana” (p. 377). É por este motivo que a matemática é comparada a uma ideologia, a uma religião, a uma forma de arte, etc. Em seu entender a matemática “trabalha com significados humanos e é inteligível apenas no contexto de cultura. Por outras palavras, é um estudo humanístico. É uma das humanidades”. Distingue-se das outras humanidades pelo facto de ser como uma ciência; as suas conclusões são bem definidas, não “são simples produtos de opinião e não estão sujeitas a um desacordo permanente como as ideias de um crítico literário” (p. 378).

Seguindo a mesma linha orientadora, Aires (2010) argumenta que para descrevermos sinteticamente os padrões da natureza inventámos a matemática. Por conseguinte, a “história” desta ciência dos padrões é de seres humanos: “de homens e mulheres, com uma determinada conceção dos fenómenos do mundo que nos rodeia” (p.7). Explorando as ideias deste autor torna-se pertinente a seguinte discussão:

> Se Galileu afirmara que a Natureza está escrita em caracteres matemáticos, Descartes acrescentou que esses caracteres são números. Tal conceito foi-lhe inspirado pela observação, em 1619, de uma mosca a zumbir no canto do quarto onde estava deitado; compreendeu subitamente que a posição da mosca em qualquer momento podia ser representada por três números, cada um indicando a distância da mosca ao chão e paredes que se juntavam no canto. Esta visão

> tridimensional levou-o a postular que a cada ponto do espaço se pode associar um conjunto de coordenadas - cartesianas, como viria a chamar-lhes Leibnitz -, e a cada linha ou corpo uma equação matemática (p.86).

Neste âmbito, deixo a visão dos estudiosos Davis e Hersh (1981), Lakatos (1976, 1978) e Ernest (1991), de que a matemática é uma construção humana e social, enquadrada num determinado contexto cultural. Como tal, é falível, corrigível e com significado.

A matemática e a Cultura

Existem duas posições opostas acerca das descobertas feitas em matemática: a doutrina do indivíduo e a doutrina cultural (Davis & Hersh, 1981). Na primeira posição advoga-se que é o génio individual o único impulsionador da descoberta matemática. Contrariamente, a doutrina cultural, que preconiza um posicionamento mais sócio/económico/cultural, defende que são as forças sociais, económicas e culturais as principais fontes que geram a descoberta. A maioria dos investigadores não se identifica totalmente com apenas uma das posições (note-se que ambas são bastante radicais). É habitual procurar-se antes um posicionamento intermédio que se identifique também com as experiências e práticas matemáticas de cada um.

A título de curiosidade podemos dizer que a perspetiva cultural sai reforçada pela abordagem platonista da matemática. Se uma determinada proposição é considerada um facto universal, uma verdade imutável, existindo para todo o sempre, então a sua descoberta por um determinado investigador foi seguramente acidental e, mais cedo ou mais tarde, seria inevitável a sua descoberta por um outro investigador qualquer (Davis & Hersh, 1981).

Nunca a discussão em torno da dicotomia indivíduo/cultura foi tão acentuada. O debate em torno destas duas posições tem sido problemático, tentando-se várias vezes e de diversas formas uma aproximação entre estas posições extremadas. Davis e Hersh (1981) sugerem uma reconciliação pelas escalas de tempo. Segundo este ponto de vista, a curto prazo – digamos, menos de quinhentos anos – o indivíduo é relevante. A longo prazo – entenda-se, mais de quinhentos anos – o indivíduo perde relevância para a cultura. Por seu lado, assumindo um ponto de vista intermédio, William James (1961) defende que ambos os elementos (génio individual e influência sócio/cultural) são indispensáveis e estão até mesmo interligados. Como o próprio diz: "a comunidade estagna sem o impulso do indivíduo; o indivíduo morre sem o apoio da comunidade" (William James, 1961, referido em Davis & Hersh, 1981, p. 74).

A perspetiva falibilista é a principal defensora da doutrina cultural. Para os falibilistas, a matemática está embebida na história e prática humana, não podendo ser separada das humanidades e das ciências sociais, nem dissociada das considerações culturais humanas em geral. As considerações e os valores sociais e morais jogam um papel importante no desenvolvimento e nas aplicações da matemática. Reivindicativa destas considerações é uma nova filosofia da matemática chamada construtivismo social. O construtivismo social conceptualiza a matemática como uma construção social, em que a linguagem humana, regras e acordos desempenham um papel importante no estabelecimento e justificação das verdades matemáticas (Ernest, 1991).

Na perspetiva construtivista social, o conhecimento matemático objetivo é social e não está contido em registos de papel, nem em textos, muito menos num determinado mundo ideal. O conhecimento matemático reside fundamentalmente nas regras partilhadas pelos membros de uma sociedade. Segundo Paul Ernest (1991), o facto de se considerar o conhecimento matemático como sendo uma construção social advém fundamentalmente de duas premissas: a) a base do conhecimento matemático é o conhecimento linguístico, as convenções; as regras e linguagem são construções sociais; b) os processos sociais interpessoais são requeridos para transformar um conhecimento matemático individual e como tal subjetivo, antes de publicação, num conhecimento matemático objetivo aceite pela comunidade matemática.

Não defendendo uma visão individualista, já em 1981, Davis e Hersh realçavam a característica claramente humana e portanto social da matemática ao referirem que "a definição de matemática muda. Cada geração e cada matemático na sua geração formulam uma definição de acordo com o que pensam" (p. 74).

Estamos, assim, perante uma visão que encara a matemática como uma atividade humana, ciente da prática humana e de natureza social e, portanto, inseparável do contexto social em que é usada. Apoiando-se nesta perspetiva vem sendo aprofundado um outro campo, o da Sociologia da matemática. Esta abordagem tem vindo a defender que os "fundamentos da matemática se devem procurar examinando as práticas culturais em que estão inseridas as actividades dos matemáticos" (Santos, 1996, p. 40).

É nesta sequência que Santos (1996) faz referência a diversos estudos de comparação do conhecimento matemático em diferentes culturas, que vieram mostrar como variam muitas das partes da matemática e realçar alguns dos aspetos mais específicos em que se pode observar a influência da cultura na matemática e na sua aprendizagem.

Numa linha de alguma forma consonante com esta ideia, Flato (1990) defende um relacionamento intenso entre as descobertas matemáticas e uma abordagem cultural coincidente com a hegemonia à época. Isto é, na opinião deste autor existe uma relação profunda entre a existência de uma investigação matemática e um dado meio social e cultural. Logo, de acordo com esta posição, se é justo pôr em destaque a livre criação que preside aos progressos da matemática, não devemos, porém, pensar que esta atividade vive radicalmente isolada do mundo em que se desenrola. Como o autor salienta, a história prova eloquentemente que desde a antiguidade as grandes descobertas em matemática não se produziram onde calhou ou como calhou:

> Pressupõe-se uma preparação cultural extraordinária da parte de uma dada sociedade; é toda uma sociologia que está em jogo, todo um esforço que deve mobilizar consideráveis forças espirituais e materiais, E, quem se lembrar de que a criação matemática é uma actividade altamente intelectual não ficará surpreendido ao verificar que ela se desenvolve em sociedades onde a criação artística tenha alcançado um grau considerável de requinte. As idades de ouro da matemática no decorrer dos séculos produziram-se no decorrer de idades de ouro das civilizações (p. 80).

Em defesa da sua ideologia, Flato (1990) apresenta o exemplo dos países do terceiro mundo e dos países árabes que, salvo notáveis exceções e embora a atividade matemática não requeira em geral grandes investimentos, poucos matemáticos importantes deram ao mundo. Com efeito, até ao século XIX, os grandes matemáticos foram sobretudo franceses, alemães e russos. No que respeita aos Estados Unidos da América, só após a 2ª Guerra Mundial e graças a uma política de imigração em massa de matemáticos europeus, fundamentalmente judeus, conseguiram desenvolver verdadeiramente a investigação em matemática, muito embora os seus interesses tenham começado por ser (e continuem a sê-lo) essencialmente económicos. Como Flato afirma: “o interesse pelos matemáticos é função da avaliação que fizeram da importância económica dos seus trabalhos, (…) com vista aos êxitos tecnológicos com que contam” (p. 82).

Assim, a matemática, como atividade humana que é, incorpora em si uma consciência individual e uma consciência do *milieu* cultural que progride com o tempo. Por isso mesmo diversos historiadores defendem que para se compreender a matemática de um determinado período é necessário não só estar ciente da consciência pessoal, mas também da consciência social e cultural da época.

A utilidade da matemática

É frequente ouvir-se a expressão de que matemática é muito "útil". Mas por ser tão alargada a variedade das aplicações da matemática, Davis e Hersh (1981) acharam vantajoso considerar separadamente os diversos significados que se podem atribuir à palavra útil. Como os investigadores puderam constatar, os significados atribuídos à expressão *utilidade da matemática* "abarcam elementos estéticos, filosóficos, históricos, psicológicos, pedagógicos, comerciais, científicos, tecnológicos e matemáticos" (p. 85). Senão vejamos: 1) um pedagogo clássico dirá que a matemática é útil porque ensina a pensar e a raciocinar com rigor; 2) um arquiteto ou um escultor dirá que a matemática é útil por permitir a perceção e a criação de beleza visual; 3) um filósofo dirá da importância da matemática visto que esta lhe permite escapar à realidade da vida quotidiana; 4) um professor dirá que esta é útil porque lhe fornece o sustento; 5) um editor sabe que a matemática é importante visto que faz vender muitos livros escolares; 6) um físico dirá que a matemática é útil por ser a linguagem da ciência; 7) um engenheiro civil afirmará que a matemática é fundamental para a construção de uma ponte; 8) um matemático dirá que, dentro da própria matemática, uma teoria matemática é útil se for necessária e utilizada na dedução de uma outra teoria (Davis e Hersh, 1981).

Temos assim que para um matemático teórico clássico, a matemática é verdadeiramente útil quando se encaminha para ser utilizada na expansão da própria matemática. É a utilidade da matemática para a matemática. Ou seja, existem resultados de teorias que são fundamentais para demonstrar outras teorias. Significando que para se conseguir o entendimento de certo corpo da matemática é necessário recorrer a estruturas, a técnicas e a resultados profundos de outras teorias. Não se pode supor a matemática como uma coleção de tópicos a estudar isoladamente uns dos outros. É impossível, por exemplo, estudar as equações diferenciais sem possuir alguns conhecimentos de cálculo diferencial.

Para além da utilidade da matemática para a matemática, esta suporta as partes teóricas de muitas outras disciplinas como a física, a engenharia, a economia, a geografia, etc.

Atualmente, tendo em consideração a utilidade da matemática, é usual classificar-se a matemática em duas categorias: a matemática elementar e a matemática avançada. Entende-se por matemática elementar a matemática básica que permite a um indivíduo realizar os raciocínios matemáticos mínimos e as operações imprescindíveis à sua vida diária, como por exemplo, a gestão da sua vida doméstica, a gestão de uma loja, etc. A matemática avançada é toda a matemática superior, desenvolvida por profissionais que se chamam matemáticos, sendo o entendimento dos seus conteúdos apenas do conhecimento de um grupo muito restrito de pessoas.

A matemática pura e a matemática aplicada

A utilidade dada à matemática é também responsável por uma visão fracionada da matemática, dividindo-a em dois campos: a matemática pura e a matemática aplicada. A distinção entre ambas não tem sido fácil, não havendo uma definição consensual de matemática aplicada.

Numa visão separatista, Davis e Hersh (1981) consideram que se os resultados de determinadas teorias matemáticas forem utilizados para demonstrar outras teorias, isto é, se o entendimento de um corpo da matemática depende de outros teoremas anteriormente demonstrados, a matemática utilizada nesse sentido designa-se por pura. Assim sendo, "se um corpo da matemática é utilizado ou ligado a outro corpo da matemática, esta actividade é designada por pura" (p. 86).

Se, por outro lado, uma determinada teoria for, por exemplo, utilizada para a compreensão de um certo fenómeno do mundo físico, esta será designada de aplicada. Como referem "a actividade em que a matemática é utilizada fora dos seus próprios interesses é normalmente designada por matemática aplicada" (p. 88).

A discussão em torno destes conceitos é problemática visto que, como já foi referido, não existe uma definição consensual de matemática aplicada e, como tal, torna-se difícil estabelecer a fronteira entre ambas (pura/aplicada). Senão vejamos: para alguns matemáticos a matemática aplicada é o conjunto das aplicações da matemática, na visão de outros, a matemática aplicada é toda aquela que já teve aplicação. Ora, considerando a primeira hipótese, como a matemática é utilizada em quase toda a investigação científica para testar hipóteses por meio de previsões que se podem sujeitar à experimentação, a matemática aplicada incluiria a maior parte da ciência. No que respeita à segunda hipótese, atualmente, mais de metade dos corpos da matemática já tiveram aplicação e os que não tiveram virão provavelmente a ser utilizados no futuro.

A este respeito Flato (1990) apresenta o exemplo da Geometria riemanniana, que se manteve durante mais de meio século numa situação de matemática pura abstrata, até que encontrou o seu enquadramento físico concreto na teoria da relatividade generalizada de Einstein. Deste modo compreende-se a dificuldade em estabelecer a separação entre matemática aplicada e matemática pura. É neste enquadramento temático que Bowers (1998) afirma:

> Uma dificuldade (…) para se conseguir definir a Matemática aplicada é a existência de temas na Matemática pura, como o estudo das equações diferenciais, que são do maior interesse para aqueles que fazem as aplicações da Matemática. De facto, esses temas são por vezes ensinados como Matemática pura, e outras vezes como Matemática aplicada, de acordo com as conveniências do momento (p. 22).

Existiu durante muitos anos, entre os matemáticos, um sentimento generalizado de rejeição para com as matemáticas aplicadas, conferindo-se superioridade à matemática pura. Contudo, como pode inferir-se em Davis e Hersh (1981), deu-se nos últimos anos uma mudança apreciável nas atitudes predominantes entre os matemáticos americanos, argumentando aqueles autores: "A matemática aplicada está a entrar na moda" (p. 91). Apologista da matemática aplicada, Stewart (1996) manifesta-se contrário à divisão pura/aplicada, afirmando que esta separação parece "cada vez mais artificial, cada vez mais datada e cada vez mais inútil" (p. 258). Em sua defesa, alega o facto de inúmeras teorias consideradas aplicadas terem motivado alguns novos campos da designada matemática pura, e, também, o facto de diversas áreas da alegada matemática pura aparecerem afinal como úteis em vários campos e ciências (como por exemplo as aplicações da teoria dos números aos códigos secretos e ao estudo da eficácia do sistema telefónico).

Quanto a este investigador, a matemática caminha no sentido de estar cada vez mais intimamente ligada com as ciências aplicadas. Na sua opinião, as aplicações envolvem novos conceitos matemáticos, novas ideias, novas teorias. São a razão da existência da matemática. São a fonte impulsionadora que dá vida à matemática.

Na mesma linha de pensamento, Flato (1990) pronuncia-se:

> A evolução actual da investigação condena à esterilidade, a prazo mais ou menos longo, aqueles matemáticos que julgam poderem encerrar-se no domínio supostamente hermético da Matemática pura. Sem se preocuparem com o que se passa na física ou noutras ciências (p. 63).

A matemática e as outras ciências

Diversas ciências – física, química, biologia, economia, etc. – estabeleceram com a matemática uma relação de proximidade visto que a matemática as influenciou, sendo ao mesmo tempo influenciada por essas várias ciências.

A utilidade da matemática e a "estreita relação" da matemática com as outras ciências é também ressalvada por Ernest (1991) ao referir que a "aplicabilidade do conhecimento matemático é sustentado pela estreita relação entre a matemática e as várias ciências", ciências estas que são "corpos de conhecimento, são corpos de investigação, partilhando métodos e problemas" (p. 59, 60). Defende o autor que a matemática e as outras ciências são construções sociais e que, como todo o conhecimento humano, estão unidas em torno de um objetivo: "a explicação das experiências humanas no contexto com o mundo físico e social" (p. 60).

De entre todas as ciências pode destacar-se o profundo relacionamento da matemática com a física. Nesta relação é frequente afirmar-se que a matemática representa unicamente a linguagem da física, que fornece os utensílios concetuais à física. Assim, Flato (1990) questiona e considera enigmática a eficácia dos utensílios matemáticos na física, na medida em que estes são criados sem se ter em conta o seu uso. Como forma de ilustrar esta posição faz referência à célebre declaração do Nobel Eugene Wigner que não hesitou em falar de milagre – "a eficácia, não explicada pela razão, da matemática nas ciências da Natureza" (p. 60). É verdade que em certo sentido a matemática é uma linguagem. Contudo, não pode ser unicamente entendida como uma simples ferramenta da física.

A matemática possui um modo de pensamento próprio, desenvolve-se por si mesma, através de construções livres e independentes de qualquer modelo físico (Flato, 1990). Aludindo ao nascimento de uma nova teoria na física, este investigador alerta-nos para um esforço conjunto de criatividade "que gera uma espécie de vaivém" entre as duas ciências. Quanto a si, o processo desenrola-se resumidamente da seguinte forma: os físicos fundamentalistas descobrem um "efeito" com base numa teoria preexistente. Este resultado experimental será objeto de trabalho de um físico "fenomenológico" que procurará regras simples para estabelecer tal "efeito", posto o que os físicos tentarão elaborar um modelo mecânico. E, se necessário, numa etapa final, um físico-matemático dirá se este modelo é ou não compatível com a exigência da teoria geral à qual os sucessivos cientistas se referem. Este processo poderá de novo ser desencadeado quando um novo resultado experimental exigir uma revisão da teoria. A ligação entre estas duas disciplinas tornou-se muito estreita, pois em tempos remotos o relacionamento entre ambas era de tal forma denso que não se fazia questão em dissociar estas ciências. Portanto, não é lícito esperar-se por uma ordenação entre ambas procurando classificar-se uma como superior à outra. Pelo contrário, é mais importante ficarmos com a ideia de que as teorias matemáticas beneficiaram com os trabalhos dos físicos e vice-versa.

Para além da importância da matemática na física, a matemática tem-se também infiltrado nas ciências do mundo vivo. Como exemplo, temos a estatística que indiscutivelmente tanto tem sido utilizada na biologia, medicina e genética, principalmente no campo da distribuição e transmissão dos caracteres hereditários. Também, a título de exemplo, destaca-se a economia como mais uma das ciências onde a matemática impõe o seu poder.

Como nos é dado a entender por Paul Samuelson (citado em Flato, 1990), a economia apoderou-se das leis da termodinâmica e transportou-as para o seu objetivo de estudo, mantendo-as tal como se aplicavam na evolução dos sistemas físicos. Esta apropriação, denominada por aplicação, permitiu a apresentação de diversas definições, de que são exemplo as "funções de utilidade", de "capital", etc. Foi neste sentido que surgiram numerosos "modelos" em microeconomia e em macroeconomia. Presentemente, nesta ciência, a "ferramenta" matemática mais utilizada é sem dúvida a teoria das equações diferenciais.

No entanto, para Davis e Hersh (1981) "rara é a área da matemática que não possa ser posta ao serviço da economia" (p. 97). Todavia, apesar de a matemática tanto influenciar a economia, Flato (1990) pensa que ainda é demasiado cedo para se instalar nesta ciência um verdadeiro domínio por parte da matemática, tal como aconteceu com a física. Em defesa dessa ideia apresenta dois fatores que, em seu entender, são os responsáveis por esta situação. Por um lado, aponta para o facto de os sistemas económicos (é feita também referência à biologia) que se deseja sistematizar serem demasiado complexos e comportarem diversos parâmetros para que se possa "abarcá-los hoje correctamente" (p. 70). Por outro lado, "sendo que se tratam de sistemas onde entram em jogo seres que, dotados de cérebro, podem tomar uma multiplicidade de decisões que lhes perturbem o funcionamento, não podemos ainda conceptualizá-los" (p. 70). Considerando o ponto de vista deste autor, podemos concluir que é devido ao facto de a teoria económica estar, ela própria, afetada por um "défice de conceptualização" que a eficácia da matemática é atualmente limitada neste domínio.

Ideias matemáticas

Noções matemáticas

Como nos transmite Stewart (1996) acerca da natureza da matemática:

> É a criação de nova matemática, não a sua prática corrente, que é interessante. A matemática não é sobre símbolos e contas. Estas são apenas ferramentas do ofício – semifusas e colcheias e exercícios para cinco dedos. A matemática é sobre *ideias*. Em particular, é sobre a forma como diferentes ideias se relacionam entre si. Dada uma certa informação, que mais necessariamente se segue? O objetivo da matemática é perceber estas questões pondo de lado o acessório e penetrando no âmago do problema. Não é só uma questão de obter a resposta certa; mais do que isso, importa perceber porque uma resposta é de todo possível e porque tem determinada forma. A boa matemática tem um cheirinho de economia e um elemento surpresa. Mas, acima de tudo, tem *grande alcance* (p.14).

Na opinião deste matemático a essência matemática não incide sobre o cálculo mas sim sobre as ideias**.** Os cálculos são apenas um meio para atingir um fim. Ilustrando ainda, refere que:

> Alguém uma vez enunciou um teorema sobre números primos, afirmando que nunca poderia ser demonstrado porque não havia uma notação para os primos. Carl Friedrich Gauss provou-o em cinco minutos a partir do nada, dizendo (algo asperamente) 'do que ele precisa é de noções, não de notações (Stewart, 1996, p. 14).

Stewart (1996) alega a existência de cinco fontes distintas de ideias matemáticas. São elas: número, ordenação, forma, movimento e acaso. A ideia matemática mais básica e melhor conhecida é a de número, tendo este conceito surgido através da necessidade de contagem. Adianta ainda que "a medição de comprimentos e pesos conduziu às fracções e aos números reais" e "um rasgo de imaginação matemática criou os números imaginários" (Stewart, 1996, p. 15). A ordenação de objetos segundo diferentes regras deu origem "à análise combinatória, a ramos da álgebra moderna e da teoria de números e àquilo que vem sendo conhecido como matemática finita, a base de grande parte das ciências da computação" (p. 15). A forma deu origem à geometria. O movimento "de projécteis, planetas ou ondas, inspirou o cálculo, a teoria das equações diferenciais ordinárias e de derivadas parciais, o cálculo das variações e a dinâmica topológica" (p. 15). Tendo em consideração o ponto de vista deste autor, a ideia matemática mais recente é o acaso, ou o aleatório.

> Só há um par de séculos se percebeu que o acaso tem um padrão e uma regularidade próprios; só nos últimos cinquenta anos foi possível tornar esta afirmação precisa. As probabilidades e a estatística são o resultado óbvio; menos conhecida, mas igualmente importante, é a teoria das equações diferenciais estocásticas – dinâmica mais interferência aleatória (p. 16).

Os problemas

Os problemas são, na ótica de Stewart (1996), a força motriz da matemática. Nesta ordem de ideias o investigador argumenta que "um bom problema é aquele cuja solução, em vez de simplesmente conduzir a um beco sem saída, abre horizontes inteiramente novos" (p. 16).

Na mesma linha de pensamento Guimarães (2003) destaca o papel central da resolução de problemas na atividade matemática.

> A resolução de problemas ocupa um lugar central na atividade do matemático e é um factor de progresso da Matemática, não só pelas aquisições a que dá origem, graças às soluções encontradas, mas também pelo desenvolvimento das técnicas matemáticas que origina e pelas teorias cuja elaboração motiva. Se o desenvolvimento de teorias matemáticas novas conduz à formulação de novos problemas, reciprocamente, o esforço na resolução destes problemas pode, por sua vez, conduzir ao desenvolvimento de novas teorias (p. 159).

A abstração

Na linha do pensamento de Rutherford e Ahlgren (1995) a matemática assenta na lógica e na criatividade e é estudada tanto pelas suas aplicações práticas como pelo seu interesse teórico. Contudo:

> Para algumas pessoas e não só para os matemáticos profissionais, a essência da Matemática reside na sua beleza e no seu desafio intelectual. Para outros, incluindo muitos cientistas e engenheiros, o valor essencial da Matemática é a sua aplicação à própria actividade matemática (p. 39).

Estes dois investigadores associam à matemática uma outra caraterística, a abstração. Assim, o raciocínio matemático tem frequentemente início com o processo de abstração, isto é, com a verificação da semelhança existente entre dois ou mais objetos ou eventos. Como defendem, "os aspectos que têm em comum, quer concretos, quer hipotéticos, podem ser representados por símbolos, como números, letras, outros sinais, diagramas, construções geométricas, ou mesmo palavras" (p. 43). Tendo em consideração este pressuposto, a matemática é essencialmente um processo de pensamento que implica a formação e aplicação de redes de ideias abstratas e associadas logicamente.

Como tão eloquentemente nos explica Cotardière (2011), no século XIX, a matemática entra numa grande fase de expansão:

> É o início de uma era de ouro que ainda não terminou. A profissão de matemático constitui-se verdadeiramente. As academias perdem a exclusividade da investigação científica: com a democratização do ensino superior, as universidades oferecem cada vez mais saídas a quem quer viver da Matemática, pela qual se interessa cada vez mais a revolução industrial. (…) Assiste-se a tal

> desenvolvimento do saber e das teorias que (…) já não há quase nenhum matemático capaz de dominar todas as ramificações da sua disciplina. (…) A Matemática adquire autonomia relativamente às outras ciências, ainda que os laços se mantenham fortes e até, em certos casos, se aprofundem. Muitos trabalhos vão agora buscar a sua razão de ser as problemáticas puramente matemáticas (p. 74).

Assim, emergem ideias e técnicas cada vez mais abstratas: embora as questões iniciais possam ser relativamente concretas, os matemáticos dão-se conta de que para as resolverem se impõem desvios pelos caminhos da abstração e da generalização. Paralelamente, atribui-se uma atenção extrema ao rigor.

Perspetivando a matemática como a ciência dos padrões e das relações, ela explora as relações possíveis entre abstrações sem, contudo, ter em devida conta se essas abstrações têm ou não correspondência no mundo real.

> Devido ao carácter abstracto, a matemática é universal numa extensão em que outras áreas do pensamento humano não o são. Tem aplicações úteis no comércio, na indústria, na música, na história, na política, no desporto, na medicina, na agricultura, na engenharia e nas ciências sociais e naturais. A relação entre a Matemática e as outras áreas da ciência básica e aplicada é especialmente forte (Rutherford & Ahlgren, 1995, p. 41).

Convergindo neste ponto de vista, Stewart (1996) alude ao processo de abstração e às características de rigorosamente lógica para afirmar que a matemática foi "bem sucedida na resolução de problemas que desconcertaram as maiores cabeças de séculos passados, (…) sendo que as suas teorias mais abstractas estão presentemente a encontrar novas aplicações em questões fundamentais de física, química, biologia, computação e engenharia" (p. 22).

A abstração é a alma da matemática (Davis & Hersh, 1981, p. 116). Contudo, estes autores afirmam que, no que respeita à tendência actual para a abstração extrema, o mundo matemático encontra-se dividido.

> Uma teoria demasiado abstracta rapidamente se torna incompreensível, desinteressante (em si mesma) e porventura incapaz de se renovar. A motivação para a Matemática tem vindo, em larga medida do «grosseiro», e não do «refinado». Os investigadores que seguem um programa ultra-abstracto despendem frequentemente a maior parte dos seus esforços na resolução de problemas relacionados com a terminologia que foram obrigados a introduzir, e o restante dos esforços a restabelecer de forma camuflada resultados que outros haviam já antes estabelecidos com mais brilhantismo, ainda que com mais modéstia (p.119).

A formalização e a demonstração

Davis e Hersh (1981) analisaram as "questões internas" da matemática, destacando os símbolos matemáticos, a abstração, a formalização e a demonstração. No que se refere aos símbolos matemáticos estes contam-se já por várias centenas e todos os anos surgem novos. Em matemática, os símbolos servem essencialmente para designar com rigor e clareza, e para abreviar, e são instrumento para a formalização. A formalização é o processo pelo qual se prepara a matemática para o processo mecânico. Um texto formalizado é uma sequência de símbolos, que são manipulados com o objetivo de uma teoria matemática, sendo essa teoria conhecida por "teoria da demonstração" (Davis & Hersh, 1981, p. 137).

> A grande tentativa para de facto se atingir uma Matemática formalizada foi o Principia Mathematica de Russell e Whitehead – que é considerado o exemplo por excelência de uma obra prima ilegível (…). Enquanto os leitores humanos

> têm uma aversão insuperável às linguagens formais, os computadores dão-se muito bem com elas. Pouco depois da Segunda Guerra Mundial, com o advento do computador electrónico, as linguagens formais deram origem a uma indústria em crescimento. Sob a designação de software, os textos escritos em linguagens formais são hoje um dos artefactos típicos da nossa cultura. (Davis & Hersh, 1981, p.136).

Atribui-se a Tales de Mileto (600 a. C.) a "primeira demonstração na história da Matemática" (Davis & Hersh, 1981, p. 147). Este matemático demonstrou que o diâmetro divide o círculo em duas partes iguais. Como argumentam Davis e Hersh (1981) "esta afirmação é tão simples que parece óbvia (p. 147). Contudo, "o génio nesse acto consistiu em ter-se apercebido de que demonstrar é possível e necessário" (p. 147). Este facto "eleva a demonstração matemática acima do mero pedantismo e é a sua aplicação a situações em que as afirmações em causa são bem menos transparentes" (p. 147). Estes autores salientam que, por um lado, para alguns matemáticos, a demonstração é o propósito da ação matemática e, sem esta, não pode haver Matemática; por outro lado, na opinião de outros "isso é um disparate" (p. 147); havendo muitos outros propósitos na Matemática. O teorema de Pitágoras é apontado como sendo o teorema mais conhecido de toda a história da Matemática. A versão que consta do mais célebre livro de toda a história da Matemática, figura na "proposição 47, livro I, dos *Elementos* de Euclides (300 a. C.)" (p. 147) e:

> Aquilo que inicialmente parece pouco intuitivo, dúbio e mesmo um tanto misterioso acaba após um certo processo mental, por se revelar gloriosamente verdadeiro. (…) O processo demonstrativo, descoberto e divulgado pela matemática grega está ao serviço da confirmação e da certificação. Uma vez demonstrada uma afirmação, é entendido por todos que a sua validade está acima de qualquer dúvida. (…) O método demonstrativo não pode prosseguir indefinidamente. Termina com os chamados *axiomas* e *definições*. Enquanto

> estas últimas são simples convenções linguísticas, os axiomas correspondem a factos fundamentais e manifestamente evidentes sobre os quais está firmada toda a estrutura, erguida e sustentada pelos parafusos da lógica (p. 148).

O método demonstrativo recorre a uma linguagem formal e restrita caracterizando-se por ser um processo com um grau de abstração notável. A abstração, a formalização, a axiomatização e a dedução, são "ingredientes mágicos da demonstração" (Davis e Hersh, p.148, 1981). A linguagem utilizada não é uma linguagem para a literatura ou para a vida quotidiana; "é uma linguagem aperfeiçoada e afinada para satisfazer as necessidades bem definidas de um propósito intelectual bem definido, mas restrito" (p. 148). A este respeito os autores ilustam:

> Na Universidade, numa aula de Matemática avançada, especialmente quando leccionada por um professor com interesses puros era totalmente composta por uma concatenação solene e inalterável de definição, teorema, demonstração, definição, teorema, demonstração. Porquê? Se, como se diz a demonstração é uma validação e uma certificação, então seríamos levados a acreditar que, mal um grupo de estudiosos competentes aceitasse uma demonstração, o resto do mundo académico acreditaria de bom grado e prosseguiria a partir daí. Por que razão os matemáticos e os seus alunos vêem mérito em demonstrar repetidamente o teorema de Pitágoras ou os teoremas de Lebesgue, Wiener ou Kolmogoroff? A demonstração cumpre simultaneamente vários objetivos. Ao ser exposta ao escrutínio e à análise crítica de uma nova plateia, a demonstração passa por um processo constante de revalidação. A demonstração traz consigo a respeitabilidade. A demonstração é a garantia de autoridade. (…) A demonstração sugere nova Matemática. O principiante aproxima-se da criação de nova Matemática ao estudar demonstrações. A demonstração é energia Matemática, a corrente eléctrica que dá vida aos enunciados estáticos dos teoremas. A demonstração é um ritual e uma celebração da força da razão. Um tal exercício em confirmação pode tornar-se muito necessário, se considerarmos todas as confusões em que o raciocínio claro muitas vezes nos enreda (p. 150).

Segundo Guimarães (2003) a apresentação euclidiana deu à Geometria o estatuto de ciência da demonstração por excelência e, desde aí, não mais se deixaria de associar à atividade matemática o raciocínio dedutivo, entendido como o encadeamento lógico de proposições que partem de um conjunto de premissas (ou axiomas) que se sabem (ou supõem) verdadeiras, até à conclusão final que assim assume o caráter de verdade necessária.

A integração vertical

É de relevar ainda que a matemática possui uma integração vertical muito forte, sendo que para se poder progredir para outros conteúdos mais "avançados" é necessário dominar um vasto conjunto de outros campos da matemática. Assim, a matemática é como num edifício, onde não se pode passar de um "andar para outro sem dominar completamente o inferior" (Buescu, 2012, p. 33). Exemplificando:

> Não se pode proceder à integração de funções racionais, matéria ensinada no primeiro ano de qualquer curso universitário científico ou técnico, sem saber dividir polinómios. Não se pode saber dividir polinómios sem conhecer a regra de Ruffini. E não se pode conhecer este algoritmo sem conhecer o algoritmo de Euclides para a divisão de números inteiros, ensinado às crianças com oito anos de idade (p. 33).

O ensino da matemática

Porque se ensina matemática?

É uma pergunta para a qual não é fácil apresentar uma resposta clara, única e convincente. As respostas dadas a esta questão variam consideravelmente, consoante se encara uma perspetiva social, política ou ideológica. Parafraseando Freudenthal (1973) "não há maneira de dizer positivamente qual é a finalidade do ensino da Matemática" (p. 66, afirmado em Abrantes, 1986, p. 6).

Como se justifica então que a matemática permaneça com um peso considerável em todos os currículos da grande maioria dos graus de ensino? Quais as finalidades do ensino da matemática? Sem grande cuidado em explorar a essência destas questões, podemos dizer "à prori" que várias são as razões para justificar a matemática como uma disciplina fundamental: "tem utilidade prática, é uma base para futuros estudos e profissões, tem uma alegada vocação para desenvolver capacidades cognitivas, é uma fonte de prazer intelectual " (Abrantes, 1994, p. 14).

Questionando de uma forma mais geral para que serve a matemática, Paulo Morais (1998) exemplifica:

> Em Matemática, em qualquer raciocínio matemático, a atitude mais comum é a de resolver problemas. Resolver um problema num ambiente matemático não é mais que decompô-lo sucessivamente em problemas mais pequenos, tão pequenos que possam ser facilmente atacados. Uma vez resolvido cada um destes, está solucionado o maior. É assim que se devem resolver os problemas; na Matemática como na vida (...). Não é também despiciendo o facto de que as mais diversas ferramentas matemáticas são utilizadas no nosso quotidiano: das mais elementares situações de cálculo de rendas para as amortizações de empréstimos bancários, (…) até aos mais avançados passos tecnológicos, da

> Estatística à Astronomia, do cálculo diferencial à inteligência artificial, ciências que hoje comandam e indicam os percursos do nosso desenvolvimento (p. 10).

Dissertando sobre esta temática, Buescu (2012) remete-nos para a justificação do interesse que a sociedade deve ter no ensino e desenvolvimento da matemática, tendo em devida conta razões de ordem prática. Desenvolvendo esta ideia o investigador afirma que:

> Desde a Revolução Científica do século XVII que se descobriu que as leis da Natureza têm formulação matemática, e que essa compreensão quantitativa permite, além de descrever o Universo, agir sobre ele. Assim, as aplicações da Matemática surgem como uma ferramenta essencial na construção de aplicações da ciência à tecnologia e ao mundo real. (…) Como podem existir transacções seguras na Internet, as quais permitem comunicar com bancos e fazer pagamentos no web, de modo seguro? Por causa dos números primos. (…) O conceito de computador (…) foi uma ideia estritamente matemática introduzida por Alan Turing (…) motivado por um problema da Matemática pura, da área da Lógica Matemática, onde Turing dá uma definição rigorosa de número computável. Para o fazer introduz aquilo que ficou conhecido como máquina de Turing. (…) Como conseguiu a Google sucesso retumbante? Enquanto os outros motores de busca utilizavam métodos de força bruta para pesquisar na Web, os seus autores, Sergey Brin e Larry Page, dois estudantes de doutoramento em Stanford, desenvolveram um sofisticado modelo matemático, incorporando métodos da teoria de Grafes, Álgebra Linear e Análise Numérica. O seu método cristalizado na ferramenta chamada Page-Rank revolucionou toda a indústria informática. (…) O Google tinha alcançado a liderança do mercado para nunca mais a deixar. (…) O que fez a diferença foi utilizar a Matemática adequada ao problema de origem. (p. 27).

Investigando com mais detalhe este assunto, Abrantes (1986) concluiu da grande dificuldade em descrever com detalhe as finalidades do ensino da matemática, argumentando ser praticamente impossível encontrar em documentos oficiais ou oficiosos uma explicação precisa das razões que fundamentam o ensino da matemática num qualquer nível, ou dos motivos que justificam opções e práticas quanto a currículos e programas.

Como nos é dado a conhecer por este autor, geralmente as finalidades do ensino da matemática não são explanadas de uma forma clara pois, mesmo quando talvez fosse possível inferir finalidades implicitamente, estas são formuladas de um modo eclético ou estabelecidas a um nível de generalidade que não esclarecem em nada o problema das finalidades. Tendo em devida conta que é conhecida a existência de estreitas relações entre o ensino da matemática e os interesses da sociedade, este autor é de opinião que a grande dificuldade em aprofundar estas finalidades reside, fundamentalmente, na grande diversidade das formas de organização das sociedades e respetivos sistemas educativos.

Ao estudar esta problemática e, encarando as finalidades do ensino da matemática de diferentes pontos de vista, refletindo também as relações que se podem estabelecer com a matemática, Abrantes (1986) identificou três categorias que em seguida se aprofundam:

1) A relação da matemática com os interesses e necessidades sociais – os interesses e necessidades de carater social condicionam as questões relacionadas com o ensino da matemática. O envolvimento da matemática no desenvolvimento social e económico é complicado, enquanto que a formação matemática e os seus efeitos estão geralmente distanciados tanto no tempo como no espaço. É neste sentido que, quando da enumeração dos critérios de escolha de finalidades e orientações gerais para o ensino se recorre às aptidões matemáticas que serão úteis no futuro aos estudantes e à sociedade. Não assumindo a mesma relevância, o investigador é da opinião que existem essencialmente dois tipos de

fins últimos no ensino da matemática. São eles, por um lado, as necessidades da sociedade como um todo e, por outro lado, as necessidades dos estudantes enquanto indivíduos. Na ótica deste autor, os primeiros tiveram sempre preponderância e embora os do segundo tipo tenham ocupado posições de importância relativa, variáveis com as condições económicas, políticas e ideológicas e com a influência das ideias humanistas, a sociedade sempre os considerou em princípio subordinados aos primeiros.

2) A relação matemática-Aluno – Neste agrupamento o autor encara as finalidades que se referem essencialmente ao papel do aluno no processo de ensino e, particularmente, o dos diferentes tipos de processos cognitivos que a matemática pode contribuir para desenvolver.

3) A relação matemática-matemática – Esta última categoria considera o ponto de vista respeitante à natureza da matemática enquanto ciência e disciplina e ao papel que desempenha relativamente a outras. Assim, seguindo uma distinção clássica, optou por colocar de um lado, os aspetos internos da estruturação matemática: o método dedutivo, o rigor lógico, a organização axiomática e, do outro lado, os aspetos ligados à criação e invenção: a intuição, a imaginação criadora, a capacidade de abordar problemas novos.

A evolução das tendências no ensino da matemática

Tendo em devida conta com o facto de esta investigação ter procurado estudar o fenómeno da matemática e do ensino da matemática no Ensino Superior no ponto de vistas das conceções dos professores, foi fundamental compreender a evolução das tendências do ensino da matemática no ensino pré-universitário. Inicialmente o estudo das tendências no ensino da matemática foi feito num contexto internacional, posteriormente, foi fundamentada uma breve análise à evolução das perspetivas a nível nacional.

A evolução das tendências a nível internacional

Ao longo de milénios e ainda hoje, a matemática usufrui do título de ciência de grande prestígio. É a “disciplina do cérebro e da inteligência” (Abrantes, 1984, p. 23). Abrantes foi um investigador muito interessado no estudo da evolução das finalidades do ensino da matemática. Num trabalho seu, datado de 1986, refere-se à Revolução Francesa nos finais do século XVIII como uma interessante ilustração da influência dos fatores sociais e políticos sobre a matemática, seu ensino e aprendizagem. Mesmo no início do século XX, e sendo nesta época a instrução uma realidade apenas para uma pequena minoria, a Matemática era entendida basicamente como “disciplina mental”, realidade que só depois da segunda guerra mundial se viria a alterar. Como ilustra Abrantes (1986):

> Nas duas primeiras décadas (…) o desenvolvimento da disciplina mental continuava a ser uma finalidade essencial enquanto se reforçava a influência dos fatores gerais da sociedade sobre o ensino, designadamente com a industrialização e com o advento da guerra: a diligência no trabalho, a lealdade, o patriotismo, eram valores importantes que a escola devia considerar. Depois da segunda grande guerra mundial as condições tecnológicas e socioeconómicas modificaram-se rapidamente o que veio a influenciar decisivamente o ensino da Matemática (p. 25).

Após este período os interesses da sociedade influenciaram vivamente o ensino/aprendizagem na medida em que à escola passou a ser exigida a melhor preparação possível dos alunos, requerendo-se a formação científica e tecnológica indispensável para que, numa futura vida profissional se adaptassem às constantes mutações caraterísticas da época. A matemática passou a ser encarada como uma ciência necessária e imprescindível para se sobreviver num futuro que se avizinhava próximo.

> Tanto para o cidadão médio como para o trabalhador na economia em expansão, a Matemática era essencial; de forma crescente, reconhecia-se que o homem da rua precisava de entender a Matemática para compreender o mundo em que vivia (Abrantes, 1994, p. 17).

As reformas dos anos 60, conhecidas entre nós por Matemáticas Modernas, tiveram como caráter dominante o facto de darem maior relevo ao aspeto formal, ao simbolismo. As finalidades do ensino também sofreram alterações passando:

> A ser mais abertamente do tipo substantivo, já não ligadas à mecanização das capacidades de cálculo mas agora dirigidas para a compreensão dos conceitos e estruturas. Do ponto de vista da natureza da Matemática, a ênfase foi claramente posta nas finalidades do tipo dedutivo, na "estrutura lógica (Abrantes, 1994, p. 26).

Como nos elucida Canavarro (2003):

> O desenvolvimento curricular em Matemática foi alvo de um grande interesse a partir dos anos 60. Até aí, os programas dos níveis mais elementares colocavam a grande ênfase na Aritmética e nas capacidades de cálculo rotineiras (…). A perspetiva utilitarista do ensino da Matemática tinha então uma grande expressão. (…) A modernização do ensino da Matemática, foi conduzida essencialmente por

> matemáticos. Estes viam a escola como uma etapa para o ensino universitário, lugar da produção de cientistas, defendendo uma forte formação matemática mais próxima dos métodos valorizados pela ciência. O grupo Bourbaki com grande influência na altura, propôs significativas alterações nos conteúdos que, nos níveis mais avançados, se refletiram na introdução de estruturas algébricas, Estatística e Probabilidades (p. 138).

Neste contexto, este movimento dos anos 60 atribuiu uma importância primordial à axiomatização, às estruturas algébricas e à lógica. No entanto, apesar desta reforma primar pela valorização e compreensão dos conceitos e métodos da matemática, deixou-se cair no formalismo, tornando-se o simbolismo num dos aspetos mais explorados nos novos programas, o que originou, na opinião de alguns investigadores (Abrantes, 1994; Ponte, 1992; Canavarro, 2003), um ensino que, aos olhos dos alunos, mostrava a matemática como uma disciplina abstrata e desligada da realidade.

Na visão destes investigadores esta realidade deveu-se, em parte, ao facto de as reformas que se tinham verificado até à altura se caraterizarem por uma grande preocupação com as necessidades da sociedade ou com as da própria matemática e nunca com os interesses dos alunos, com as suas carências face à realidade da escola e às necessidades específicas destes na sala de aula. Em consequência, na década de 70, intensificavam-se as críticas ao movimento de reformas das Matemáticas Modernas. Novas tendências começaram então a surgir. Christiansen (1975) resume-as do seguinte modo:

> Ênfase crescente em objetivos de natureza afetiva. Aceitação crescente de responsabilidade para a maioria dos alunos e não só para uma elite. Ênfase crescente na utilidade e na aplicabilidade dos efeitos do ensino da Matemática. Preocupação crescente com o aluno como indivíduo; com a aprendizagem mais do que com o ensino; com as experiências, necessidades e interesses do aluno mais do que com as exigências da Matemática como ciência. Aceitação

> crescente do papel das atividades matemáticas, em processos como descrever, sistematizar, resolver problemas, provar, (…). (Citado em Abrantes, 1994, p.19).

Passaram, pois, a valorizar-se aspetos que tendencialmente têm uma natureza mais afetiva. As novas perspetivas apontam então para uma valorização das capacidades associadas à criatividade, à resolução de problemas, ao trabalho de grupo, à discussão e confrontação de opiniões. Os principais objetivos do ensino da matemática deixaram de dizer respeito apenas a conceitos internos à matemática passando a haver uma maior preocupação com a resolução de problemas, isto é, com as atividades de ligação da matemática com a realidade.

Consequentemente, nas décadas de 70, 80 e 90 surgem diversos relatórios e tomadas de posição de organizações influentes que procuram reagir às tendências conservadoras que se adensavam a avançar com perspetivas cuidadas para a necessária renovação do ensino da Matemática (Canavarro, 2003). Um destes relatórios, o relatório Cockcroft (1982), "atribui grande importância à resolução de problemas e às investigações matemáticas, mas destaca-se sobretudo pela grande ênfase que coloca na discussão na sala de aula" (Canavarro, 2003, p.140).

> No muito citado parágrafo 243, afirma que o ensino da Matemática, em qualquer nível, deveria sempre contemplar: exposição por parte do professor; discussão entre o professor e os alunos e entre estes; trabalho prático adequado; consolidação e prática de competências e rotinas fundamentais; resolução de problemas, incluindo a aplicação da Matemática a situações da vida real; e trabalho de natureza investigativa. Defende ainda a integração das calculadoras no ensino não primário e a utilização de computadores com *software* específico adequado (p. 140).

Gerar atividades que envolvessem ativamente os alunos em processos de descoberta constituía o desafio que então era pedido a investigadores de Educação Matemática e a professores de matemática. Concordante com esta orientação, em 1980, o NCSM (citado em Abrantes, 1994) afirmava que aprender a resolver problemas é a principal razão para se estudar matemática. Portanto, na perspetiva deste organismo, a resolução de problemas deve ser central na vida escolar de modo a que os alunos possam explorar, criar, adaptar-se a novas condições e ativamente criar novo conhecimento no decurso das suas vidas.

Numa definição ampla de competências básicas em matemática, o NCSM apontava, entre outras, a resolução de problemas, a aplicação da matemática a situações da vida quotidiana, a estimativa e a aproximação, a utilização da matemática para predizer, a utilização de tabelas, gráficos e computadores. Neste contexto, o NCSM justapõe que para uma melhoria no ensino da matemática devem diversificar-se o máximo possível as atividades a propor aos alunos, destacando entre outras: a exposição de professor, a discussão entre alunos e entre alunos e professor, a prática de rotinas e competências fundamentais, a resolução de problemas, a resolução de aplicações a situações da vida real, trabalhos de investigação, tarefas individuais e de grupo, a utilização de calculadoras e computadores na realização de trabalhos quer individuais quer de grupo.

Pode, pois, considerar-se que, nas novas tendências que se delinearam no ensino da matemática, a ênfase desloca-se de uma visão tradicionalista caraterizada pela aquisição, por parte dos alunos, de uma panóplia de conceitos, regras e algoritmos, para uma abordagem por descoberta, apologista da resolução de problemas e atividades que relacionem a matemática com a realidade, em cujo seio os alunos aprendem, construindo eles próprios os conceitos matemáticos.

Nesta linha de pensamento, o NRC (1989) defende que não é a memorização de técnicas matemáticas que é especialmente importante, mas a confiança de saber como procurar e usar ferramentas matemáticas, quando é necessário. Não existe uma forma de criar esta confiança sem ser através do processo de criação, construção e descoberta matemática.

Como Abrantes (1994) argumenta:

> As competências matemáticas "básicas" dos cidadãos já não se reduzem à aptidão para, mecânica e rapidamente, fazer contas; incluem saber interpretar situações novas, perceber que operações fazem sentido para resolver um problema, assim como ter disposição para trabalhar em equipa, persistência para explorar uma situação problemática, autonomia para pensar por si próprio (Abrantes, 1994, p. 20).

Neste enquadramento também parece interessante dedicar alguma importância à posição de Freudenthal (1973, citado em Abrantes, 1994) que, sendo um entusiasta destas novas tendências, defende uma perspetiva "realista" em oposição à velha abordagem "mecanicista" e à abordagem "estruturalista" da Matemática Moderna, encarando a matemática como uma "atividade humana", pelo que somos levados a inferir que do seu ponto de vista a aprendizagem da Matemática tem de passar por um processo de "reinvenção", isto é, a formação dos conceitos deve emergir de fenómenos que lhe dão origem na realidade ao invés de ter como ponto de partida os sistemas formais e as estruturas matemáticas (Abrantes, 1994). É o que designa de *matemática Realista* onde se atribui um papel dominante aos problemas em contexto e ao desenvolvimento de modelos, esquemas e simbolização de situações, e reconhece como essencial a contribuição das construções e produções (mentais) dos alunos que os conduzem dos seus próprios métodos informais até processos formais.

Ao investigar sobre o papel das aplicações e da modelação na matemática escolar, Niss (1992) defende que o ensino expositivo de exclusivo domínio do professor ou através de leitura de manuais, remete o aluno para um simples papel de recetor passivo de conhecimentos não sendo criador do seu próprio conhecimento. Como ironicamente ilustra:

> Tal como ler os mais esplêndidos livros sobre ciclismo não faz de cada um de nós um ciclista, ouvir exposições ou ler excelentes manuais não chega para tornar cada um de nós um produtor criativo ou um analista competente de aplicações e modelações matemáticas (p. 2).

No seguimento desta ideia pode dizer-se que as tendências na década de 90 parecem apontar para o desenvolvimento, nos alunos, de capacidades de ordem superior. Ou seja, capacidades para identificar e resolver situações problemáticas, para estabelecer pensamentos críticos e para desenvolver estratégias de natureza metacognitiva. Todavia, para além dos aspetos cognitivos, as novas tendências na aprendizagem da matemática incidem na valorização de dois novos domínios – o campo afetivo e o cultural. Assim, na vertente que respeita aos aspetos afetivos: as conceções que os alunos desenvolvem sobre a matemática, bem como a motivação e a disposição com que se envolvem nos processos de pensamento matemático, estão relacionados com os seus comportamentos no desenrolar das diversas atividades que constituem a prática diária da disciplina de matemática. Ao aludir a um desses comportamentos, Schoenfeld (1987) diz:

> Se se pensa na Matemática como uma disciplina que fornece soluções pré-empacotadas para problemas pré-empacotados e formalmente enunciados pode não se usá-la quando apropriado, mesmo que se seja perfeitamente capaz de fazê-lo (p. 73).

Na outra vertente defende-se que no ensino da matemática é também necessário ter presente os aspetos culturais; visto que o conhecimento não está apenas ligado a cada área específica, este deverá ser em grande parte um produto da atividade do contexto e da cultura em que se desenvolve e utiliza.

A valorização destes aspetos é uma caraterística destas novas perspetivas. Nesta linha teórica entende-se que a aprendizagem da matemática não se restringe apenas à aquisição, por parte do aluno, da maior quantidade possível de informação. Esta deve também "incluir o alcance da sua capacidade e disposição para utilizar, aplicar e comunicar essa informação" (NCTM, 1991, p. 205). Isto é, o aluno passa a ter um papel ativo na sua própria aprendizagem pois, à medida que assimila nova informação, deve construir a sua própria compreensão dos conceitos, estruturas e ideias.

Em suma, a ideia chave destas novas tendências é a necessidade de *integração* de vários aspetos, dos quais se destaca: "a predisposição dos alunos face a esta ciência, em particular a sua confiança em fazer matemática e o modo como a valorizam" (NCTM, 1991, p. 205).

Num novo milénio, o NCTM (2000) defende que os alunos devem aprender Matemática com "compreensão", sendo esta consideração assumida como pressuposto fundamental para a visão da matemática escolar. Neste enquadramento, aprender matemática exige compreender e ser capaz de aplicar procedimentos, conceitos e processos, e a compreensão é apresentada como condição ou pré-requisito facilitador do processo da aprendizagem, bem como do desenvolvimento da autonomia dos alunos e da sua capacidade para enfrentar novas situações e resolver novos problemas.

A evolução das tendências a nível nacional

Em 1988, a Associação de Professores de Matemática descrevia a situação nacional do seguinte modo:

> O panorama atual do ensino da Matemática nas nossas escolas é marcado por um domínio quase absoluto dos objetivos cognitivos de níveis mais baixos (memorização de factos, algoritmos e técnicas de resolução de tipos preestabelecidos de exercícios) (…). O grau de complexidade e de sofisticação técnica dos exercícios varia enormemente mas os objetivos visados não deixam de referir-se aos níveis cognitivos mais baixos nem de estar associados a conteúdos rigidamente pré-fixados e "puramente" matemáticos, sem qualquer ligação com problemas do mundo atual (p. 4).

Diversos investigadores vieram então apelar para a necessidade de mudança das orientações teóricas que até então influenciavam o ensino da Matemática. Entre as orientações apresentadas pela APM (1988), salientam-se três: 1) "a resolução de problemas deve estar no centro do ensino e da aprendizagem da Matemática"; 2) "as aplicações da Matemática devem ocupar um lugar relevante no conjunto das atividades de aprendizagem"; 3) "o ensino e a aprendizagem devem tirar todo o partido possível (…) dos instrumentos que a evolução tecnológica tem posto ao serviço das mais variadas atividades nos domínios sociais, profissionais e científicos, designadamente as calculadoras e os computadores" (p. 30-31). Neste âmbito, é feita também referência ao novo papel que o professor deve assumir neste processo; este não deve continuar a ser visto como um mero fornecedor de informação, deve passar a ser também um "organizador das atividades, um facilitador da aprendizagem, um dinamizador do trabalho, um companheiro de descoberta" (APM, 1988, p. 7). Ao aluno é pedido que transite de mero recetor a construtor, competindo-lhe participar mais ativamente na sua própria aprendizagem; para além de assimilar nova informação deve construir a própria compreensão dos conceitos, estruturas e ideias.

No contexto da evolução das tendências do ensino da matemática no ensino nacional, na medida em que as novas tendências, no decorrer dos anos 90, apontavam no sentido de desenvolver nos alunos os processos metacognitivos e as suas respetivas capacidades críticas, torna-se também importante, pelo facto de ser um assunto tão largamente estudado, fazer referência ao crescente papel que as novas tecnologias computacionais têm vindo a ser chamadas a desempenhar no ensino e na aprendizagem da matemática.

Vários investigadores em Educação matemática (Ponte,1995; Abrantes 1994; Matos e Carreira, 1996) passaram a dedicar grande parte dos seus estudos indagando a vantagem que se pode tirar das novas tecnologias no ensino desta disciplina.

Por exemplo, Ponte (1995), entre outras coisas, afirma que as novas tecnologias permitem trazer a este processo: i) "uma relativização da importância das competências de cálculo e de simples manipulação simbólica, que podem ser realizadas agora muito mais rapidamente e eficientemente"; ii) "uma atenção redobrada às capacidades intelectuais de ordem mais elevada, que se situam para além do cálculo e da simples compreensão de conceitos e relações matemáticas"; iii) "uma demonstração prática da possibilidade de envolver os alunos em atividade matemática intensa e significativa, favorecendo o desenvolvimento de atitudes positivas em relação a esta disciplina e uma visão muito mais completa da sua verdadeira natureza" (p. 1).

Numa outra área, que respeita a problemas de aplicação à realidade, por exemplo, Matos e Carreira (1996) ao analisarem as principais razões para a introdução da modelação e aplicação no ensino da matemática identificaram como principal "a preparação dos alunos para uma melhor inserção na sociedade", visto que todos eles virão um dia mais tarde a ser "solicitados a resolver problemas, fazer estimativas, tomar decisões, etc." (p. 16). Contudo, estes autores apontam ainda as "aplicações como motivação", as aplicações como elementos culturais" e "as aplicações como forma de evitar aprendizagens incorretas" como razões importantes para se incluir as aplicações no ensino da matemática.

Assim, devido à forte influência que a matemática exerce quer na nossa vida quer a nível das mais diversas profissões, é entendido que a aprendizagem da matemática deve acima de tudo contribuir para desenvolver nos alunos um espírito crítico, de modo a que estes se tornem indivíduos competentes e independentes, capazes de viverem num mundo matematizado e de contribuírem para esse mundo com inteligência (Abrantes, 1994). Tendo em vista esta finalidade, pode dizer-se que nas três últimas décadas os problemas, as aplicações e a modelação matemática, a utilização das novas tecnologias, assim como a valorização de aspetos afetivos na aprendizagem desta disciplina, para a além de terem atraído a atenção da comunidade internacional ligada à Educação em matemática, surgiram vivamente na maior parte dos currículos da Matemática um pouco por todo o mundo.

Todavia, apesar de já terem decorrido algumas década desde que foram feitas as primeiras recomendações para a necessidade de uma nova orientação a dar ao ensino e aprendizagem da matemática, e muito embora nos últimos anos se tenham vindo a realizar diversos trabalhos de investigação acerca da introdução destas novas tendências (desde estudos acerca da resolução de problemas, da aplicação da matemática a situações reais e a estudos que pretendem compreender as conceções dos alunos e professores desta disciplina), num artigo de opinião publicado na revista Noesis, Abrantes (1998) analisa criticamente os resultados de um inquérito nacional sobre as estratégias de ensino, feito a cerca de 450 professores de matemática dos vários ciclos de ensino, concluindo que:

> Nas salas de aula e ao contrário do que algumas pessoas têm afirmado, o ensino da Matemática não será hoje radicalmente diferente do que era há uma década, não obstante ter havido uma evolução considerável dos currículos. No entanto, há sinais de que algumas das novas orientações são consideradas por um número significativo de professores, em especial a importância da resolução de problemas e da ligação Matemática-realidade (p.74).

Analisando o mesmo estudo, a APM (1998) argumenta que, do mesmo, se pode conclui que a realização de exercícios rotineiros e a exposição de matéria pelo professor constituem as tarefas mais frequentes nas aulas de matemática. Só uma pequena minoria de professores recorre com frequência à resolução de problemas ou promove a discussão entre os alunos ou atividades de exploração e investigação.

Como nos explica Canavarro (2003) a matemática escolar que hoje em dia conhecemos é profundamente diferente daquela que marcou presença até aos anos 80.

> Identificadas as necessidades matemáticas do cidadão de modo a ser matematicamente alfabetizado, surgem objetivos educacionais que passam, em primeiro lugar, pelo desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, considerando-se ainda o desenvolvimento de capacidades associadas à atividade matemática, bem como as atitudes e predisposições dos alunos em relação à disciplina. Argumenta-se a favor de proporcionar aos alunos uma experiência matemática diversificada e rica, na qual tenham acesso a recursos tecnológicos que lhe permitam desenvolver o respetivo poder matemático (Canavarro, 2003, p. 151).

No ponto de vista desta investigadora as orientações expressas no documento *Principles and standards for school mathematics* (2000) parecem constituir uma boa refereência do atual pensamento curricular nacional. Como afirma:

> Destaca-se a preocupação com a equidade, que deverá ser interpretada como proporcionar a todos os alunos uma educação matemática de qualidade, implicando por isso a diferenciação do ensino. Destaca-se também a focalização nas ideias matemáticas importantes e relevantes, que se devem refletir articuladamente em todos os níveis, dando-se relevância aos mesmos temas e processos matemáticos ao longo de toda a escolaridade. Os temas eleitos são Números e Operações, Álgebra, Geometria, Medida, e Análise de Dados e Probabilidades. Os processos enunciados são resolução de problemas, raciocínio e demonstração, comunicação, conexões e representação (p. 152)

Contudo, Canavarro (2003) adverte que a "literatura aponta para uma evolução consistente no que diz respeito ao enunciado das tendências curriculares na disciplina de Matemática, não menos verdade será que a sua expressão prática assume versões muito diversas na sala de aula" (p. 152).

Neste contexto, ao analisarem as orientações curriculares para o processo de ensino e aprendizagem da matemática nos ensinos básico e secundário, Canavarro et al (2007) identificaram as seguintes orientações:

> i) O aluno assume um papel activo na sua aprendizagem e o professor surge como dinamizador e regulador da mesma, não se registando diferenças significativas entre os ensinos básico e secundário; ii) O foco das aprendizagens não são tópicos específicos: no ensino básico há um alargamento do que é considerado conteúdos (programas) ou é dada primazia aos processos relativamente a tópicos específicos (CNEB), no ensino secundário fazer Matemática também é considerado um conteúdo, iii) O estabelecimento de conexões dentro da Matemática e com outras áreas do conhecimento, ocupando a modelagem um lugar de destaque no ensino

> secundário; iv) A indicação, no ensino básico, e a obrigatoriedade, no ensino secundário, do uso das tecnologias; v) Destaque para a importância da resolução de problemas em ambos os níveis de ensino (…) vi) O raciocínio matemático, surge numa perspectiva pouco formal e a partir da experiência dos alunos em ambos os níveis de ensino (p. 19).

O ensino no Ensino Superior

Em 1999, vinte e nove Ministros europeus da Educação assinaram a Declaração de Bolonha que visava a criação de um Espaço Europeu do Ensino Superior. Os signatários desta declaração comprometeram-se a criar uma área universitária europeia até 2010 e promoveram diversas reformas educativas tendo em vista este objetivo.

A harmonização dos sistemas universitários europeus teve como perspetiva central promover a "comparabilidade dos cursos e a mobilidade dos estudantes que é facilitada, com o requisito de uma declaração dos créditos e das classificações obtidas num Suplemento do Diploma, que tem uma forma específica nacional e uma forma europeia padrão" (Pires, 2007, p. 82).

Nos entendimentos do Processo de Bolonha, os cursos universitários devem:

> Habilitar para a competitividade, adaptabilidade e inserção na sociedade, serem meios de aquisição de competências certificadas, válidas num espaço internacional num contexto temporal determinado. O ensino de graduação (1º ciclo) passa, assim, a ter o prazo de três anos, com 180 a 240 créditos (podendo alargar-se em casos específicos, como medicina e engenharia). A pós-graduação fica estruturada em dois níveis: o mestrado (2º ciclo), em dois anos, com 90 a 120 créditos e o doutoramento (3º ciclo), para os que obtiverem o mestrado, em três anos (Pires, 2007, p. 82).

Com o processo de Bolonha o foco do ensino universitário passou a ser a aprendizagem dos estudantes com o pressuposto de contribuírem para uma sociedade do conhecimento, com competências direcionadas para o mercado de trabalho, "tendo em consideração as necessidades de inovação, polivalência, adaptação, cooperação e formação ao longo da vida" (Pires, 2007, p. 83). Assim, este sistema de ensino universitário visa, comprometer os estudantes para que estes sejam mais responsáveis pelos seus estudos, inclinando-se ainda para o conceito de aprendizagem continuada em que cada um deve estar em permanente processo de aprendizagem.

No contexto do Processo de Bolonha, aludindo à importância do papel do professor universitário na prática pedagógica, Pires (2007) afirma que:

> A energia, dedicação e convicção de um professor pode ser o meio mais eficaz para persuadir e entusiasmar os estudantes. (…) Para estes o cenário intelectual em que participam na Universidade é, por vezes, mais intenso, bem organizado e compensador do que muitas das horas passadas na "vida real". (…) O papel do professor no processo educativo, cuja influência pode ser tão forte que, mesmo depois de ele ter desaparecido, continua a manifestar-se ao longo da vida do estudante (p. 16).

Analisando a necessidade de mudança do processo de ensino e aprendizagem no Ensino Superior, esta professora universitária é de opinião que o professor tem de ter:

> Um modo diferente de olhar para o ensino e para os alunos, tem de transmitir novos conhecimentos com imaginação, analisando criticamente as ideias e os valores que ensina e realizando as suas tarefas criteriosamente. Deve, sobretudo, advertir os estudantes que a demanda, pela sabedoria e por uma prática orientada é, mais uma questão de conhecimento do que informação e, tentar apresentar o seu pensamento de modo que os comova e lhes seja útil. Do mesmo modo também o papel dos estudantes transcende a aquisição de conhecimentos e de capacidades (p. 17).

Ainda no âmbito do Processo de Bolonha, Esteves (2010), ilumina-nos, também, sobre a necessidade de mudança do enfoque predominante de um passado onde se entendia maioritariamente o ensino no Ensino Superior como transmissão (centrada no professor) para o presente, em que se privilegia o ensino enquanto incitação (proporcionada pelo professor), para que os estudantes aprendam de forma autónoma e mais comprometida.

A ideia desta investigadora centra-se em cultivar na Universidade dos nossos dias trabalhos pedagógicos do tipo incitativo e do tipo "apropriativo". A ação tutorial dos professores, preconizada pelo Processo de Bolonha, advoga uma orientação individualizada a cada aluno, incitando-o a um certo grau de participação ativa na procura autónoma do conhecimento e não, apenas, pela simples comunicação por parte dos professores, do conhecimento já existente.

Neste sentido, Esteves (2010) defende a atividade tutorial como uma ação que permite mudar a relação do estudante com a aquisição do conhecimento. Isto é, passar de um conhecimento que tradicionalmente é apresentado ao aluno, comunicado "pronto a ser reproduzido, a um conhecimento que é reconstruído por ele a partir da informação válida que lhe cabe pesquisar e gerir" (p. 55).

Contudo, e apesar de muito se ter trabalhado nas Universidades aquando da implementação do Processo de Bolonha, no que respeita ao processo de ensino e aprendizagem, verifica-se que a exposição dos conhecimentos por parte do professor universitário continua a ser a atividade central. Sobre esta realidade Esteves (2010) afirma que:

> Durante séculos a profissionalização do corpo docente universitário não passou pelo desenvolvimento de competências pedagógicas. Por isso, agora quando se

> fala em processos inovadores, em centrar os processos educativos e formativos nos estudantes e na sua aprendizagem, isto é motivo de perplexidade, quando não de rejeição ativa. (…) E não chega reunir umas tantas boas vontades individuais para que se façam inovações pertinentes, consistentes e duradoras. É assim necessário promover e sustentar processos institucionais de mudança e inovação que contem com a adesão imprescindível dos docentes e que sejam um fator potenciador da mesma (p. 59).

Com este intuito, a investigadora defende que a formação pedagógica dos docentes universitários impõe-se como uma necessidade urgente, que não passa apenas por um "conjunto de iniciativas pontuais e avulsas a que alguns docentes (geralmente uma minoria) aderem a título individual", mas antes por "um sistema consagrado institucionalmente" em que "todos os docentes participem como pensamos ser de seu direito e de seu dever, enquanto profissionais do ensino" (p. 60). Esteves (2010) ainda nos remete para o estudo dos processos pedagógicos *versus* conhecimento científico.

> A pedagogia universitária não pode continuar a ocupar um lugar marginal nas preocupações dos docentes em relação a outras preocupações que têm sido até hoje mais fortes e determinantes na construção dos percursos de carreiras individuais. (…) O estado do conhecimento científico sobre os processos pedagógicos na universidade, tendo conhecido avanços importantes nas duas últimas décadas, ainda é demasiado fragmentário e lacunar, o que aconselha a que nos posicionemos todos como co-construtores ativos do conhecimento de que necessitamos, muito mais do que como recetores de um conhecimento que, em muitos casos, é ainda insuscetível de sustentar de modo perentório os caminhos da inovação a empreender (p. 60).

No que concerne o ensino da matemática no Ensino Superior, não se encontraram, em Portugal, obras de investigação que abordem a evolução das tendências curricular. Contudo, o processo de Bolonha introduziu, em grande parte das Universidades, em substituição das aulas práticas das disciplinas de matemática, aulas de orientação tutorial, onde os alunos deveria ser distribuídos por pequenos grupos de trabalho, visando uma maior autonomia do aluno.

No contexto internacional, encontram-se mais recentemente alguns estudos sobre o ensino superior. Por exemplo, Mali et al (2014) afirmam que se desconhecem estudos sobre o ensino e a aprendizagem da matemática nos pequenos grupos tutoriais, defendendo a importância de se investigar esta realidade. Versando também acerca do ensino e da aprendizagem da matemática no contexto do Ensino Superior, August (2014) adverte-nos para a necessidade de se estudar aprofundadamente a problemática da desistência dos alunos nas disciplinas de Matemática no primeiro ano da Universidade.

Síntese

1 – A primeira grande conclusão aponta no sentido de como é difícil encontrar uma definição de matemática aceite universalmente por todos os investigadores. Isto deve-se primordialmente a dois motivos: o primeiro reside no facto de a palavra matemática ser um termo muito genérico que engloba uma diversidade de ramos e mesmo outras ciências e, o segundo, porque a sua definição se tem alterado de geração em geração, na medida em que cada matemático pondera na sua época e geração criando a sua própria definição segundo o seu entendimento.

2 – A matemática é atualmente caraterizada como uma grande árvore que cresce com inúmeros troncos e múltiplos ramos e raízes que se encontram extremamente entrelaçados entre si e por vezes até muito dependentes uns dos outros. Ou seja, pode

constatar-se que a matemática é hoje constituída por uma quantidade muito vasta de matérias que se encontram interligadas de forma bastante densa. A matemática é uma ciência com vida, sendo que nos últimos anos foi criada mais matemática do que no conjunto de todas as épocas anteriores.

3 – Ao analisar a problemática do significado da matemática, bem como da natureza do conhecimento matemático, é possível identificar três perspetivas chave que se distinguem relativamente à crença da existência dos entes matemáticos ser independente ou não do Homem.

a) O platonismo, que alega que os objetos matemáticos são reais e têm verdadeira existência, ou seja, existem independentemente do nosso conhecimento sobre eles cabendo ao homem descobri-los.

b) O formalismo, que defende que a matemática consiste basicamente no jogo formal de símbolos desprovidos de qualquer significado e em que a única condição necessária é a de seguir determinadas regras com o intuito de criar fórmulas. Nesta perspetiva é encarada como uma linguagem para as outras ciências, o que leva a que não seja vista como uma ciência em si mas apenas como uma ferramenta. Esta doutrina é, de todas, a que nos últimos anos mais tem influenciado o ensino da matemática.

c) O construtivismo, que considera que os únicos objetos matemáticos que têm existência real e significado são os que podem ser construídos a partir de certos objetos primitivos, de modo finito. É por isso que, nesta perspetiva, a matemática genuína é apenas aquela que se pode obter por uma construção finita. Exige-se assim que toda a matemática se baseie construtivamente nos números naturais.

4 – O absolutismo é o paradigma que, ao longo de mais de 2000 anos, tem dominado a matemática, idealizando-a como um corpo de verdades objetivas, infalíveis e inquestionáveis. Neste posicionamento a verdadeira matemática não pode ser posta em causa visto ser sempre absolutamente certa. Todavia, nas últimas décadas tem crescido uma nova corrente – falibilista – que argumenta que, como qualquer atividade e criação humana, a matemática é falível e não pode deixar de ser revista e corrigida. Nesta linha de pensamento a matemática é encarada como uma construção humana e social e como todos os tipos de conhecimento humano é falível e questionável.

5 – A respeito da natureza da matemática são preferencialmente apresentadas duas visões distintas. Em primeiro lugar, a matemática é vista como uma invenção humana, melhor dizendo, é uma criação da mente humana, sendo que os objetos matemáticos são imaginários. Em segundo lugar, defende-se que a matemática existe, tem as suas leis independentemente do homem, competindo-lhe a este descobri-las. Em parte pode dizer-se que a primeira visão é fundada na perspetiva Formalista e a segunda na Platonista.

6 – Acerca das descobertas feitas em matemática existem duas posições opostas. Numa primeira abordagem advoga-se que é o génio individual o único impulsionador da descoberta matemática. Na segunda abordagem, a doutrina cultural preconiza que são as forças sociais, económicas e culturais as principais fontes que geram a descoberta. Torna-se importante salientar que a maioria dos investigadores não se identifica plenamente apenas com uma das posições, encontrando-se, na maior parte das vezes, posicionamentos intermédios. Contudo, pode afirmar-se que a perspetiva falibilista é a principal aliada da doutrina cultural visto alegar que a matemática é uma

atividade humana, que necessariamente tem de estar implícita na prática humana e na sua natureza social e cultural e, como tal, não pode ser separada do contexto social em que é usada, nem dissociada das considerações culturais humanas em geral.

7 – Associada à utilidade da matemática destaca-se também a estreita ligação entre esta e as mais diversas ciências. A matemática é a ciência que fornece o raciocínio matemático e a linguagem para quase todas as ciências. Pese embora este facto, não se pense que a matemática só dá; muito pelo contrário, a matemática é impulsionadora das outras ciências mas também é impulsionada por elas. Neste contexto é visível que uma das fontes inesgotáveis da matemática se encontra precisamente nas outras ciências que estão constantemente a “solicitar-lhe ajuda”.

8 – A essência matemática não incide no cálculo mas sim nas ideias matemáticas; sobre a forma como diferentes ideias se relacionam entre si. O raciocínio matemático tem frequentemente início com o processo de abstração, isto é, com a verificação da semelhança existente entre dois ou mais objetos ou eventos. Consequentemente, emergem ideias e técnicas cada vez mais abstratas: embora as questões iniciais possam ser relativamente concretas, os matemáticos dão-se conta de que para as resolver se impõem desvios pelos caminhos da abstração e da generalização. Perspetivando a matemática como a ciência dos padrões e das relações, ela explora as relações possíveis entre abstrações sem, contudo, ter em devida conta se essas abstrações têm ou não correspondência no mundo real.

9 - Em matemática os símbolos servem essencialmente para designar com rigor e clareza e para abreviar. A formalização é o processo pelo qual se prepara a matemática

para o processo mecânico. Um texto formalizado é uma sequência de símbolos, que são manipulados com o objetivo de uma teoria matemática, sendo essa teoria conhecida por "teoria da demonstração" Davis & Hersh, 1981). O método demonstrativo recorre a uma linguagem formal e restrita caraterizando-se por ser um processo com um notável grau de abstração. A abstração, a formalização, a axiomatização e a dedução são "ingredientes mágicos da demonstração".

10 - No que respeita às finalidades do ensino da matemática, concluiu-se da grande dificuldade em descrever com detalhe essas finalidades sendo pouco frequente encontrar em documentos oficiais ou oficiosos uma explicação precisa das razões que fundamentam o ensino da matemática num qualquer nível, ou dos motivos que justificam opções e práticas quanto a currículos e programas. As finalidades do ensino da matemática nem sempre são explanadas de uma forma clara pois, mesmo quando talvez fosse possível inferir finalidades implicitamente, estas são formuladas de um modo eclético ou estabelecidas a um nível de generalidade que não esclarecem em nada o problema das finalidades. Contudo, é conhecida a existência de estreitas relações entre o ensino da matemática e os interesses da sociedade.

11 - Os interesses da sociedade influenciaram vivamente o ensino da matemática na medida em que passou a ser exigida à escola a melhor preparação possível dos alunos, requerendo-se a formação científica e tecnológica indispensável para que numa futura vida profissional se adaptassem às constantes mutações características da época. A matemática passou a ser encarada como uma ciência necessária e imprescindível para se sobreviver num futuro que se avizinhava próximo.

12 – A nível internacional, os movimentos dos anos 60 atribuíram uma importância primordial à axiomatização, às estruturas algébricas e à lógica. No entanto, apesar de esta reforma primar pela valorização e compreensão dos conceitos e métodos da matemática, deixou-se cair no formalismo, tornando-se o simbolismo num dos aspetos mais explorados nos novos programas, o que originou um ensino que, aos olhos dos alunos, mostrava a matemática como uma disciplina abstrata e desligada da realidade.

13 - Nas décadas de 70, 80 e 90 surgem diversos relatórios e tomadas de posição de organizações influentes que procuram reagir às tendências conservadoras que se adensavam a avançar com perspetivas cuidadas para a necessária renovação do ensino da matemática. Um destes relatórios, o relatório Cockcroft (1982), atribui grande importância à resolução de problemas e às investigações matemáticas mas destaca-se sobretudo pela grande ênfase que coloca na discussão na sala de aula. Passaram a valorizar-se aspetos que tendencialmente têm uma natureza mais afetiva. As novas perspetivas apontam então para uma valorização das capacidades associadas à criatividade, à resolução de problemas, ao trabalho de grupo, à discussão e confrontação de opiniões. Os principais objetivos do ensino da matemática deixaram de dizer respeito apenas a conceitos internos à matemática passando a haver uma maior preocupação com a resolução de problemas, isto é, com as atividades de ligação da matemática com a realidade.

14 - Atualmente, devido à forte influência que a matemática exerce, quer na nossa vida quer a nível das mais diversas profissões, é entendido que a aprendizagem da matemática deve acima de tudo contribuir para desenvolver nos alunos um espírito

crítico de modo a que estes se tornem indivíduos competentes e independentes, capazes de viverem num mundo matematizado e de contribuírem para esse mundo com inteligência. Tendo em vista esta finalidade, pode dizer-se que nas três últimas décadas os problemas, as aplicações e a modelação matemática, a utilização das novas tecnologias, assim como a valorização de aspetos afetivos na aprendizagem desta disciplina, para além de terem atraído a atenção da comunidade internacional ligada à Educação em matemática, surgiram vivamente na maior parte dos currículos da matemática um pouco por todo o mundo.

15 - No âmbito do Processo de Bolonha, emerge a necessidade de mudança do enfoque predominante de um passado, onde se entendia maioritariamente o ensino no Ensino Superior como transmissão (centrada no professor), para o presente, em que se privilegia o ensino enquanto incitação (proporcionada pelo professor), de modo a que os estudantes aprendam de forma autónoma e mais comprometida. Esta ideia centra-se em cultivar na Universidade dos nossos dias, trabalhos pedagógicos do tipo incitativo e do tipo "apropriativo". A ação tutorial dos professores, preconizada pelo Processo de Bolonha, advoga uma orientação individualizada a cada aluno, incitando-o a um certo grau de participação ativa na procura autónoma do conhecimento e não, apenas, pela simples comunicação por parte dos professores, do conhecimento já existente.

16 - Apesar de muito se ter trabalhado nas Universidades aquando da implementação do Processo de Bolonha, no que concerne ao processo de ensino e aprendizagem, verifica-se que a exposição dos conhecimentos por parte do professor universitário continua a ser a atividade central. Daqui pode inferir-se que a formação pedagógica dos docentes universitários impõe-se como uma necessidade urgente.

17 - No que concerne o ensino da matemática no Ensino Superior, não se encontraram, em Portugal, obras de investigação que abordem a evolução das tendências curricular.

Capítulo III

As conceções

Neste capítulo na primeira secção estudamos as visões gerais da definição de conceção. Na segunda secção analisamos as conceções acerca da matemática e do ensino da matemática.

Visões gerais da definição de conceção

Num historial apresentado por Thompson (1992), compreendemos que o interesse pelo estudo das conceções vem já dos anos 20. Nessa época houve, por parte da psicologia social, um interesse pelo estudo da natureza das conceções bem como pela sua influência nas atividades desenvolvidas pelas pessoas. Nas décadas que se seguiram, em virtude do incremento das teorias behavioristas, assistiu-se a um desinteresse generalizado por esta temática levando a que os estudos na área da psicologia sobre as conceções quase tenham desaparecido.

O estudo das conceções expandiu-se então verdadeiramente no final dos anos setenta e esteve associado a uma mudança de paradigma que, desde aí, tem vindo a ocorrer na investigação educacional. O interesse por estes estudos deveu-se, em parte, ao avanço da psicologia cognitivista desenvolvida nos anos setenta que, ao contrário de uma perspetiva behaviorista que havia dominado os estudos nas décadas anteriores, influenciou as investigações educacionais centrando-se mais no estudo dos processos cognitivos (psicólogos cognitivistas avançaram com teorias da construção ativa do conhecimento).

Em Portugal, nos finais dos anos 80 e princípios dos anos 90, constata-se, na área de investigação em Educação matemática, um grande interesse, por um lado, pelo estudo das conceções dos professores acerca da matemática e do seu ensino e, por outro lado, pelo estudo das conceções dos alunos acerca desta disciplina e da sua aprendizagem (não tão investigado como o anterior), verificando-se que vários são os documentos e investigações bem como teses de mestrado e doutoramento que versam estas matérias.

Na medida em que este estudo incide nas conceções dos professores acerca da matemática e do seu ensino, torna-se imperativo discutir o conceito de conceção, bem como o significado que este termo irá ter no desenrolar deste trabalho de investigação.

A primeira observação a fazer sobre o termo conceção é a de que não existe uma definição clara e precisa partilhada por todos os investigadores desta temática. Na ótica de Thompson (1992) apesar de ser frequente a utilização do termo conceção em diversas investigações, a sua definição não é explorada com o aprofundamento necessário. A investigadora afirma que:

> Apesar da crescente popularidade das concepções como tópico de estudo, o conceito não tem sido tratado de forma substancial na literatura de investigação educacional. Na maior parte dos casos, os investigadores assumem que os leitores sabem o significado de concepção (p.11).

Na mesma linha de opinião, também Matos (1992) refere o caráter pouco fundamentado das conceções, afirmando tratar-se de um termo pouco cuidado no que respeita à sua definição. Quanto a Eisenhart, Shrum, Harding e Cuthbert (1989, citados em Matos, 1992) “isto deve-se em parte ao facto de haver diferentes explicações acerca da natureza e génese das conceções” (p.131).

Assim, a delimitação do termo conceção é difícil, em virtude de a este estarem associados outros conceitos tais como: conhecimento, crenças, preferências, atitudes, pontos de vista, sistemas de conceções, representações, valores, convicções, etc. Não podemos, portanto, de modo algum ter a pretensão de explorar todas as perspetivas psicológicas e filosóficas subjacentes à definição de conceção. Contudo, procurando-se a clarificação deste termo, iremos analisar os aspetos essenciais das definições de conceção do ponto de vista de vários autores que, nos últimos anos, se têm debruçado sobre esta temática.

Na década de 80, mais precisamente em 1982, a tese de doutoramento de Alba Thompson constituiu um marco no estudo das conceções dos professores, na medida em que influenciou e incentivou diversos investigadores ao estudo das conceções. A definição apresentada por esta investigadora é referência incontornável em quase todos os estudos sobre conceções. À época, Thompson (1982) descrevia da seguinte forma as conceções:

> As concepções são um conjunto de crenças, perspectivas e preferências (…), são uma estrutura mental mais geral, incluindo crenças, significados, conceitos, proposições, regras, imagens mentais, preferências e outras coisas semelhantes. As concepções são uma predisposição do indivíduo para a acção, um estado teorético que caracteriza, de modo subtil, a forma como cada pessoa se orienta no mundo onde está inserida (Thompson, 1982, referido em Antunes, 1995, p.12).

Dez anos volvidos, Ponte (1992) acresce a esta definição o facto de as conceções não se reduzirem aos aspetos imediatamente observáveis do comportamento, não se revelarem com facilidade, nem aos outros nem ao próprio. Como afirma, as conceções:

> São um substrato conceptual que joga um papel determinante no pensamento e na acção. Este substrato é de uma natureza diferente dos conceitos específicos - não diz respeito a objectos ou acções bem determinadas, mas antes constitui uma forma de os organizar, de ver o mundo, de pensar. Não se reduz aos aspectos mais imediatamente observáveis do comportamento e não se revelam com facilidade, nem aos outros nem a nós próprio (Ponte, 1992, p. 185).

Para Matos (1992) as conceções são um esquema concetual com o qual permanentemente é constituída a realidade. São estruturas organizadas de informação – "sistemas de conceções". Além disso, para este autor, a ideia de conceção entronca numa ideia mais geral – "a representação".

Analisando as várias definições apresentadas, e apesar das divergências que as caracterizam e que mais adiante iremos debater, existem duas caraterísticas que invariavelmente aparecem em todas as definições. Por um lado, as conceções estão sempre associadas a um conjunto de elementos em que impreterivelmente se incluem as crenças que um indivíduo possui; por outro lado, todos os autores defendem que estas constituem uma estrutura que comanda e influencia a ação e a predisposição do indivíduo.

No entanto, desde já convém referir que a definição de Matos (1991) se distingue um pouco das outras, uma vez que este autor valoriza o facto de as conceções terem um caráter essencialmente cognitivo, isto é, situa as conceções no domínio da cognição, destacando-se uma componente afetiva.

Matos (1992) também aproxima a noção de conceção ao conceito de representação social. Aqui, as representações sociais podem ser definidas como teorias acerca dos “objectos sociais relevantes, consistindo numa modalidade de conhecimento que capta, avalia e explica a realidade (…) são sentimentos afectivos, memórias vividas, experiências pessoais, abordagens acerca da existência e visões alternativas de conceber o mundo e a realidade” (Matos, 1992, p.133).

No que respeita à construção das conceções, mais recentemente Hannula (2010) defende que, por um lado, as conceções enraízam-se tendo em devida conta as experiências de contato individual com as atividades matemáticas, por outro lado, as conceções são construídas socialmente, adquiridas no contexto de partilha na sala de aula.

Quanto às conceções acerca da matemática, Schoenfeld (1987) entende-as como compreensões e sentimentos de um indivíduo que moldam as formas como este concetualiza e se envolve no comportamento matemático. É importante referir que também nesta definição se denota a integração de aspetos cognitivos e afetivos, bem como a alusão à influência das conceções no comportamento matemático.

Crenças, conceções e conhecimento

Para Pajares (1992), as conceções influenciam o modo como os indivíduos caraterizam os fenómenos e atribuem um sentido ao mundo que os rodeia sendo, geralmente, oriundas de experiências anteriores ou de fonte de transmissão cultural.

Na abordagem deste autor, é extremamente difícil dizer onde acaba o conhecimento e começam as conceções. No entanto, salienta cinco aspetos que caraterizam as conceções e que irremediavelmente as levam a distinguir do conhecimento: as suposições existenciais, a alternância, a componente afetiva, a avaliação e a memória episódica.

Pajares (1992), tal como Thompson (1992), tende a distinguir conceções de conhecimento. Em ambas as perspetivas, ao conhecimento estão associados critérios de validade que satisfazem a sua condição de verdade, ao passo que nas conceções estes critérios de validade são inexistentes.

As conceções não têm suporte empírico que as valide, são criações livres da imaginação humana individual e/ou coletiva. Basicamente pode dizer-se que estes autores evidenciam a separação entre conceções e conhecimento, na medida em que as conceções assentam em juízos de valor e na avaliação, existindo naquelas uma maior componente afetiva e avaliativa, ao invés do conhecimento que assenta num facto objetivo, isto é, na razão.

A razão e a evidência promovem e contribuem para o avanço do conhecimento, ao passo que as conceções mais dificilmente mudam e, quando o fazem, a mudança não deriva tanto de uma análise crítica, argumentação ou razão, mas sim de determinadas experiências ou acontecimentos, que se poderão dizer do dia-a-dia, e que irremediavelmente marcam o indivíduo, o seu comportamento, o seu relacionamento e forma de vivenciar, atuar, encarar ou lidar com certos assuntos.

Dentro desta linha de orientação, Canavarro (1993) aponta duas caraterísticas distinguem as conceções do conhecimento. São elas as seguintes: a) Os diferentes graus de convicção com que podem ser suportadas as conceções, variando desde uma fé profunda a uma visão encarada com alguma probabilidade; e b) A não consensualidade das conceções que podem variar de cultura para cultura e de pessoa para pessoa.

No entanto, alguns autores, dos quais destacamos Ponte (1992) e Guimarães (1988), acentuam a perspetiva cognitiva das conceções identificando-as com o conhecimento. Isto é, para Ponte (1992) as conceções são uma forma de conhecimento, ainda que incipiente.

Este autor divide o conhecimento em três níveis tendo em devida conta o grau de racionalidade e de experiência, e a articulação entre as crenças de base. Distingue o conhecimento científico do conhecimento profissional e do conhecimento comum. O conhecimento comum não requer condições especiais: na sua formação são determinantes as ações ou interações de ordem social e as experiências do indivíduo, ou seja, na formação deste tipo de conhecimento assumem particular importância as crenças condicionadas não só pela cultura como pela vivência pessoal e saberes de ordem científica e profissional.

Contudo, na opinião deste autor, nos restantes níveis de conhecimento intervêm também necessariamente as crenças (conceções). Portanto, apesar de considerar que no conhecimento científico predomina a racionalidade e a argumentação lógica, este conhecimento não pode de modo algum prescindir de se apoiar ele próprio em crenças, como o investigador refere: "no sentido de proposições não demonstradas, muitas delas porque não demonstráveis" (p. 194).

Para Ponte (1992) as crenças são "indispensáveis, pois sem elas o ser humano ficaria virtualmente paralisado, sem ser capaz de determinar cursos de acção" (p. 195). Pelo que, quanto a si, não há necessidade de tentar distinguir ou de considerar incompatíveis as conceções e o conhecimento. As conceções são entendidas como uma "parte do conhecimento relativamente 'pouco elaborado' em vez de os ver como dois domínios disjuntos" (pp. 195, 196).

Acrescenta ainda que nas conceções predomina "a elaboração mais ou menos fantasista e a falta de confrontação com a realidade empírica. No conhecimento mais elaborado de natureza prática predominam os aspectos experimentais. No conhecimento de natureza teórica predomina a argumentação racional" (p. 196).

O autor concetualiza as conceções como uma forma específica de conhecimento, argumentando que estas constituem "o pano de fundo organizador dos conceitos", são "miniteorias", ou seja, quadros concetuais que desempenham um papel semelhante ao dos pressupostos teóricos gerais dos cientistas.

É no quadro desta conjetura que Ponte (1992) afirma que as conceções têm um caráter essencialmente cognitivo, situa-as no domínio da cognição. Como o autor afirma:

> As concepções têm uma natureza essencialmente cognitiva. Actuam como uma espécie de filtro. Por um lado, são indispensáveis pois estruturam o sentido que damos às coisas. Por outro lado, actuam como elemento bloqueador em relação a novas realidades ou a certos problemas, limitando as nossas possibilidades de actuação e compreensão (p. 185).

Temos, pois, que para Ponte (1992) as conceções influenciam os pensamentos, as ações, e as tomadas de decisão do indivíduo, constituindo também uma estrutura organizativa que suporta as suas interpretações.

No que respeita à natureza das conceções argumenta que as mesmas se formam num processo simultaneamente individual (como resultado da elaboração sobre a nossa experiência) e social (como resultado do confronto das nossas elaborações com os outros). Por isso, as conceções dos professores acerca da matemática são influenciadas pelas suas próprias experiências e também pelas representações sociais dominantes, ou seja, pela interação com os pontos de vista maioritários. Porém, é importante referir que, ao contrário de Matos (1991), o autor não se refere à intervenção dos fatores de índole afetiva nas conceções.

Numa visão um pouco distinta da de Ponte (1992), Lester, Garofalo e Kroll (1989, citados em Matos, 1992), ao considerarem as conceções como aquilo que diz respeito a objetos exteriores à própria pessoa, preocupam-se em relacionar conceções e conhecimento, "assumindo como concepções o conhecimento que não é externamente justificado"(p. 131).

Na sua tese de doutoramento, Guimarães (2003), reflete sobre a influência das conceções na atuação do professor.

> O ato de ensinar, justamente porque se ensina sempre alguma coisa a alguém, é, assim, um ato radicalmente intencional. Um ato que, portanto, pressupõe no professor razões e motivos, propósitos e objetivos, eventualmente nem sempre claramente definidos e explícitos, que o orientam nos juízos que faz e nas opções e decisões que toma na sua prática de ensino. Estes juízos, opções e decisões do professor decorrem das interpretações que realiza, do significado que atribui a questões, problemas e situações com que se depara, que, nessa medida, têm influência importante na sua atuação (p.1).

Numa abordagem idêntica, Canavarro (1993), na sua investigação acerca das relações entre as conceções e as práticas de professores de matemática, define as conceções de professor "como um sistema organizativo algo difuso que opera tácita e permanentemente sobre o conjunto de componentes que constituem as referências do professor – crenças, valores, conhecimento de vária natureza e elementos afectivos – gerando e suportando os seus modos de ver e de actuar" (p. 25).

A apresentação sequente da definição de conceção, sob o ponto de vista destes dois investigadores, prende-se com o facto de existirem pontos de afinidade entre si, tal como também existem com a definição apresentada por Ponte (1992).

Por conseguinte, é possível identificar três caraterísticas que, direta ou indiretamente, emergem das perspetivas destes três investigadores. As conceções: a) Estão associadas a diversos outros termos dos quais se destacam as crenças e o conhecimento; b) Constituem uma estrutura organizativa que suporta as interpretações que o indivíduo faz, influenciando as suas ações e tomadas de decisão; c) Atuam quer ao nível do consciente, quer do inconsciente, sendo estruturas difíceis de explicar, por vezes, de assumir, de revelar ou observar.

Os sistemas de conceções

O sistema de conceções surge como uma metáfora para examinar e descrever como as conceções individuais estão organizadas (Ponte, 1992). As conceções não podem ser encaradas de forma isolada como componentes individualizáveis. Constituem, antes, sistemas de conceções (Schoenfeld, 1987, 2000; Matos, 1991).

Consequentemente, o sistema de conceções é entendido como uma estrutura organizativa, constituída por um conjunto de conceções associadas a um dado objeto ou situação, sendo que o sistema de conceções estabelece a forma como estas se relacionam entre si.

Já na definição de conceção apresentada por Kelly (1955, referido em Matos, 1992) se denota uma aproximação do conceito de conceção ao de sistema de conceções, na medida em que este autor define conceções como estruturas organizadoras de informação, como redes de construções que afirma poderem ser mais ou menos permeáveis à introdução de novos elementos.

Considerando os alunos e a sua relação com a matemática, Matos (1991) afirma que os sistemas de conceções constituem "a visão dos alunos acerca do mundo matemático", são "a perspectiva com a qual eles abordam a matemática e as actividades matemáticas, e, por isso, interagem com as escolhas que os alunos podem realizar quando se encontram em actividade matemática" (Matos, 1991, p. 81).

Também Guimarães (1988), a sua tese de mestrado acerca das conceções e práticas dos professores de matemática, apresenta uma noção de conceção dos professores, a que associa o conceito de "sistema conceptual", definindo-o como:

> Um esquema teórico, mais ou menos consciente, mais ou menos explícito, que o professor possui, que lhe permite interpretar o que se lhe apresenta ao seu espírito, e que de alguma maneira o predispõe e influencia a sua acção em relação a isso (p. 20).

Numa linha de pensamento idêntica, para Valentim (1996) os sistemas de conceções constituem uma organização das conceções associadas a um dado objeto ou facto e, por acionarem determinados tipos de informação, influenciam o comportamento do indivíduo, principalmente no que respeita aos alunos, nas escolhas por estes efetuadas, por exemplo, quando se encontram a realizar atividades da prática escolar em matemática.

Green (1971, referido em Canavarro, 1993) atribui ao sistema de conceções três caraterísticas fundamentais; a) O sistema de conceções é uma estrutura quase-lógica, o que significa que existe uma relação de dependência entre as conceções, havendo algumas que são consideradas como primárias e outras como derivações; b) As conceções são dotadas de força psicológica, o que significa que diferentes conceções possuem diferentes graus de convicção; c) Os sistemas de conceções correspondem a uma estrutura em "cachos", onde cada cacho de conceções subsiste isoladamente e sem conflito com os outros cachos coexistentes e por vezes contraditórios.

Posto isto podemos, então, dizer que existem diversos investigadores (Green, 1971; Schoenfeld,1987, 2000; Matos, 1991; Tompson, 1992; Valentim, 1996) que sugerem que as conceções não agem isoladamente mas antes interagem, organizam-se, isto é, estabelecem-se ligações, relações entre elas formando-se conjuntos estruturados de informação associados a um dado objeto ou situação. A esta organização (conjunto de conceções e ligações entre elas) designam como sistema de conceções.

As representações

Na visão de Matos (1992), as representações constituem teorias implícitas acerca dos objetos sociais relevantes e consistem numa modalidade de conhecimento que serve a apreensão, avaliação e explicação da realidade. A representação constitui o produto e o processo duma atividade pela qual as pessoas constroem a realidade, face a situações e objetos com os quais são confrontadas e lhes atribuem um significado específico.

Para este investigador, a grande quantidade de informação, com que diariamente somos confrontados, leva-nos a "sistematizar os objetos través de uma estrutura hierarquizada em categorias. Estas categorias, e os atributos que a partir delas são desenvolvidos, constituem um sistema de avaliação e explicação da realidade" (p. 129). Contudo, para o autor, a realidade é construída na "interacção social", cabendo ao indivíduo um papel imprescindível na interação com a realidade. Isto é, "as pessoas não são elementos passivos, quer do ponto de vista da aprendizagem em geral, quer em relação à formação da sua personalidade" (p. 129). Na abordagem deste autor, é ao sistema concetual com que se constrói a realidade que se designa de conceção.

De acordo com as ideias deste investigador, as representações que têm as suas raízes na antropologia e psicologia social, definem-se pelas construções realizadas pelo sujeito acerca da própria realidade. São as visões estruturantes com as quais as pessoas concebem o mundo e a realidade "face a situações e objectos com os quais são confrontados e lhes atribuem uma significação específica" (p. 132). Isto é, constituem as "teorias implícitas acerca dos objectos sociais relevantes e consistem numa modalidade de conhecimento que serve a apreensão, a avaliação e explicação da realidade" (p. 133).

A experiência é mediada pela interpretação: todos os objetos, pessoas, acontecimentos e situações não possuem um significado próprio, isto é, o significado é-lhes conferido pelas pessoas, através das representações que estas possuem do assunto em causa.

Matos (1992) está em concordância com a definição de Vale (1993), para quem a representação é uma manifestação de um processo de categorização cuja função é a de organizar a realidade. Para Matos (1992), existem três tipos de elementos responsáveis pela formação, dinâmica e, de certo modo, pela existência das representações. São eles os seguintes:

> i) A dispersão da informação relativa aos objectos com que lidamos, que traduz por insuficiência e ambiguidade, e que é um factor gerador de desfasamento entre a informação de que dispomos e a informação que seria necessária para a realização da apropriação (quando a representação adquire um carácter estável) do objecto; ii) A focalização das pessoas em diferentes objectos do ambiente em que se encontram, e que corresponde a uma escolha realizada de acordo com os interesses e valores de cada um; iii) A pressão para a inferência, que decorre da interacção social e que leva as pessoas à necessidade de exprimir juízos e opiniões (p. 133).

Relativamente às representações das pessoas sobre a matemática, este autor afirma serem as mesmas construídas em interação com as experiências do dia-a-dia, em diferentes contextos sociais, em diferentes momentos e com diferentes fontes de informação, argumentando que a construção das representações sobre a matemática é um "processo complexo e prolongado no tempo, realizado na interação social entre os alunos, e entre estes e o professor, e na relação entre os alunos e os materiais que utilizam na atividade matemática" (p. 134).

A estrutura hierárquica das conceções

Como já foi referido anteriormente, os diversos autores estudados manifestam que as conceções são estruturadas quer por um processo individual através da experiência pessoal, quer pela construção social e, ainda, por comparação das experiências e vivências de cada indivíduo com as dos outros.

Pajares (1992) alega que todas as pessoas têm uma teoria sobre a realidade e o mundo envolvente, com a qual fazem inferências acerca de tudo o que as rodeia; de vários objetos, assuntos, pessoas e até sobre si próprias. Refere que as primeiras inferências enviesam a interpretação de informações subsequentes que muitas vezes se evidenciam contraditórias, de tal modo que as teorias anteriores são sempre insuficientemente revistas, mesmo em presença de novas evidências (trazidas à luz por meio de informações recentes) que são incompatíveis com as anteriores.

Quer isto dizer que as experiências anteriores influenciam os juízos posteriores, que se convertem em teorias (conceções) que se comportam de uma forma altamente resistente à mudança. E quanto mais cedo uma conceção é incorporada na estrutura mais dificilmente se alterará; mesmo após contatos com explicações e fundamentações científicas, um indivíduo mantém conceções baseadas em premissas que, por vezes, estão incorretas, incompletas e sem fundamentação lógica ou verdade.

Por tal motivo dificilmente se verificam mudanças profundas no sistema de conceções. No entender de Ponte (1992) a mudança do sistema de conceções só se verifica perante abalos muito fortes, geradores de grandes desequilíbrios.

Pajares (1992) concetualiza um sistema de conceções baseado na proposição de que as pessoas mantêm várias conceções, de diferentes intensidades, complexidade e dependência, estabelecendo-se uma hierarquia da relevância, importância e influência das referidas conceções.

A análise que este autor faz da estruturação de um sistema de conceções baseia-se em três quesitos: 1) As conceções diferem em intensidade e poder; 2) As conceções variam numa dimensão central/periférica; 3) As conceções centrais são mais resistentes à mudança.

Este investigador assemelha a estrutura de um sistema de conceções à de um átomo. Por isso, concetualiza-o constituído centralmente por uma secção nuclear que suporta vários elementos de um sistema estável, composto pelas conceções centrais resistentes à mudança e perifericamente por um conjunto de conceções não tão resistentes, que se poderão dizer até de organização mais recente, mais fáceis de explicar e com maior possibilidade de conversão.

Pajares (1992) evidencia a centralidade das conceções em termos da ligação, ou seja, da conexão desta com outras conceções, definindo-se conexão de conceções pelo grau de relacionamento entre elas. Isto é, a conexão é tanto maior quanto mais explicações, influências e consequências existirem entre as conceções.

Este autor defende a existência de quatro pressupostos para a conexão, que formam uma hierarquia nas conceções, permitindo estabelecer a prioridade e importância entre as conceções. A saber: a) As conceções respeitantes a uma pessoa ou à sua identidade têm mais conexão do que as que são partilhadas com outros; b) Há conceções que podem ser apreendidas através do relacionamento com outros – as derivadas - ou pelo contacto direto do sujeito com um determinado objeto ou assunto – as não derivadas. As conceções não derivadas têm mais funcionalidade com o sujeito, em parte porque o fenómeno é presenciado através do entendimento do próprio; c) As conceções acerca de questões de gosto são menos centrais e têm poucas ligações; d) As atitudes e os valores, designados pelo autor de subestruturas das conceções, também são por este analisados em termos de conexão variando numa direção central-periférica, sendo que a sua intensidade pode ser interpretada pelas suas relações funcionais com as conceções, e são essas ligações que permitem inferir a respetiva relevância e predisposição para a ação.

Compreender as conceções centrais, periféricas e as conexões funcionais de um indivíduo parece importante dado que são as ligações que se estabelecem entre si que determinam os valores orientadores para a sua vida, desenvolvem ou mantêm atitudes, interpretam informações e determinam o comportamento.

Como anteriormente foi mencionado, Matos (1992) aproxima as noções de conceção e sistemas de conceções ao conceito de representação, por isso o modelo agora apresentado, que salienta a importância do núcleo central, também é reconhecido por este estudioso.

Assim, também Matos (1992) concetualiza a estrutura de uma representação em duas grandes áreas: 1) O núcleo central – onde se situam as conceções fundamentais ou primitivas segundo designação de Green (1971). De acordo com o ponto de vista deste autor a organização da informação, que constitui as construções estruturantes das conceções mais centrais, é mais perfeita do ponto de vista da sua lógica interna. Logo, o conjunto de conceções que constituem o núcleo central é fundamental na dinâmica das representações (quer na sua mudança quer nas atitudes que permite explicar); 2) A zona periférica do núcleo da representação – onde devem existir as conceções cuja informação está organizada em construções externamente mais fáceis de explicar e portanto com maior permeabilidade à mudança.

Como exemplo, e no que respeita às conceções dos alunos acerca da aprendizagem da matemática, Matos (1992) aponta, como conceções centrais, ser capaz de aprender, recordar e aplicar regras, fórmulas e procedimentos. Como conceções periféricas, a ideia de que os problemas de matemática são resolúveis num espaço de tempo razoavelmente curto (Schoenfeld, 1987, 2000; Matos, 1992). Para Matos (1992), o núcleo central assume uma função geradora e uma função organizadora. Uma função geradora dado que é através do núcleo que "se cria ou se transforma a significação dos outros elementos constituintes da representação", ou seja, "é a partir desse núcleo que os restantes elementos tomam significado e adquirem um dado valor" (p. 137). Sendo o núcleo central considerado o elemento mais estável da representação, o "elemento unificador e estabilizador da representação" (p. 137) responsável pela determinação da natureza das ligações entre os diversos elementos, a este é também atribuída a função organizadora da representação.

Evidenciamos, pois, que a questão da organização estrutural das conceções assume um papel importante, na medida em que algumas das conceções que "ocorrem mais fortemente para a construção da representação assumem um posicionamento mais periférico (…) o que significa maior ou menor facilidade de serem alteradas ou substituídas e de mudarem de posicionamento na representação" (p.137). Daí resulta que "a periferia da representação serve de zona tampão entre uma realidade que a pode colocar em causa e uma zona central que não deverá mudar" (p. 137).

As atitudes

A noção de conceção surge também ligada ao conceito de atitude tornando-se a distinção entre estes dois termos difícil em virtude de, por vezes, aparecerem como sinónimos um do outro. Sem uma aparente preocupação em distinguir atitudes de conceções, Antunes (1995) define atitude como uma predisposição para responder a determinada classe de estímulos com determinada classe de resposta.

Numa linha de pensamento similar, também Ajzen (1988, citado em Antunes, 1995) considera as atitudes como uma predisposição para responder de forma favorável ou desfavorável a um objeto, pessoa, instituição ou acontecimento.

Apesar da existência de diversas orientações dadas ao conceito de atitude, para Antunes (1995) existem três referências que invariavelmente caraterizam as atitudes. Em primeiro lugar, as atitudes referem-se a experiências subjetivas, expressando o posicionamento de um indivíduo, ou grupo constituído, a partir da sua história. Em segundo lugar, as atitudes são sempre referidas a um objeto. Por último, num terceiro ponto, as atitudes incluem sempre uma dimensão afetiva-avaliativa, isto é, uma atitude traduz sempre uma posição que pode ser expressa por gosto/não gosto, concordo/discordo.

Contudo, alguns investigadores tendem a diferenciar as noções de conceção e atitude. Por exemplo, para Matos (1992), as atitudes são idealizadas como dependentes ou suportadas pelas conceções. Por isso, define atitude como uma organização relativamente estável de diversas conceções acerca de um objeto, ou situação, que predispõe um indivíduo para responder de uma determinada forma.

Ao analisar também, de um ponto de vista mais global, as várias definições de atitude, e apesar de Matos (1992) considerar que algumas delas são divergentes, este investigador apresenta os seguintes pontos de convergência entre si: a) As atitudes são elaboradas a partir da experiência; b) Todos os investigadores distinguem entre atitude como intenção de comportamento e esse mesmo comportamento; c) Se um indivíduo tem um conjunto de predisposições em relação a um dado objeto num dado ambiente, elas tendem a afetar a resposta a esse mesmo objeto de uma forma consistente.

Contudo, ao expressar-se acerca do conceito de atitude, Matos (1992) evidencia a necessidade de se concetualizar este termo com base em duas posições distintas e que, de certa forma, o autor considera opostas. Assim, por um lado, numa perspetiva de raiz behaviorista, a atitude é considerada como uma resposta das pessoas a estímulos que lhe são exteriores, sendo que a "conceptualização da avaliação das atitudes é circunscrita à medição do grau de apreciação das pessoas acerca de um dado objecto ou situação" (p. 141). Por outro lado, numa abordagem de "natureza construtivista", as atitudes são consideradas como parte integrante da construção pessoal dos objetos, pessoas e situações. Pressupõe-se a "adoção da ideia de que a realidade é uma construção permanente das pessoas que assim dão sentido aos objectos e situações do seu meio ambiente" (p. 141). Saliente-se que nesta última vertente se tornam mais relevantes e influentes os aspetos afetivos e emocionais, assim como a interação social na construção das atitudes.

Como já anteriormente referimos, Matos (1992) aproxima o conceito de conceção ao conceito de representação. Considera que a atitude "exprime a orientação geral (positiva ou negativa) acerca do objeto da representação", o que significa que a atitude "tem o papel de expressão da representação mas não é algo exterior a essa representação" (p. 137), é parte integrante da representação. As atitudes são, por conseguinte, o resultado de "abstracções e generalizações" de várias experiências ocorridas no tempo.

Igualmente ao referir-se à importância dos aspetos afetivos na atividade matemática, Marshall (1989, citado em Matos, 1992) afirma que o simples reconhecimento de uma situação é suficiente para gerar uma resposta afetiva. Como exemplo apresenta a situação de uma criança que acumula um conjunto de experiências negativas na resolução de problemas, o que originará uma "resposta atitudinal" negativa face à atividade de resolução de problemas, resultante da ativação de memórias afetivas previamente elaboradas.

As conceções acerca da matemática e do seu ensino

Como já referimos na introdução desta investigação, não se conhecem trabalhos de investigação que abordem em profundidade as conceções dos professores acerca da matemática e do ensino da matemática no âmbito do Ensino Superior, que utilizem a observação de aulas dos professores do Ensino Superior como técnica de recolha de dados.

No entanto, destacamos, neste ponto, a investigação de Guimarães realizada em 2003 com matemáticos e professoras do ensino não universitário, a investigação de Canavarro datada de 1993, que contou com a participação de três professoras do segundo e terceiro ciclos, bem como, os resultados obtidos por diversos investigadores como Cooney & Wilson (2002), McLeod & McLeod (2002), Lloyd (2002), Wilkins (2008), Ponte (2004, 2011), Gresalfi & Cobb (2011), Liljedahl, (2010), Hannula, Pipere, Lepik e Kislenko (2013).

Refletindo sobre a importância do estudo das conceções dos professores sobre a matemática e sobre o ensino e aprendizagem desta disciplina, Guimarães (2010) argumenta:

> Na nossa relação com a realidade, as concepções podem ser vistas a desempenhar um papel que é, simultaneamente, condição e limite do nosso conhecimento dessa

> realidade. Por um lado, permitem-nos interpretar, *dar sentido* às situações com que nos confrontamos; sem elas, poderíamos dizer, essa interpretação não é possível. Por outro lado, o acesso que temos à realidade não é um acesso directo; é através dos nossos sistemas conceptuais que a realidade nos chega e, exactamente por isso, chega-nos 'filtrada' pelas nossas concepções que assim limitam o nosso conhecimento, introduzindo uma 'distorção' que impregna a percepção e a compreensão que temos do que se nos apresenta ao nosso espírito. Assim, para compreender a actuação do professor, os juízos que faz e as opções e decisões que toma, investigar as suas concepções sobre a Matemática e sobre o ensino e aprendizagem dessa disciplina, constituirá certamente um passo importante (p.83).

Na sua tese de doutoramento intitulada "Concepções sobre a Matemática e a actividade matemática: Um estudo com matemáticos e professores do Ensino Básico e Secundário", Guimarães (2003) estudou as conceções sobre a matemática e a atividade matemática, tendo, para o efeito, realizado quatro estudos de caso. Dois deles referentes a dois matemáticos e professores do Ensino Superior e os outros dois referentes a duas professoras de matemática do Ensino Básico e Secundário.

Analisando esta investigação e no que concerne ao percurso escolar dos participantes e à sua relação com a matemática, pode afirmar-se que: a) A relação dos professores com a matemática não é marcada por uma preferência exclusiva por esta disciplina na formação pré-universitária; b) O gosto dos professores pela matemática revelou-se cedo e manteve-se relativamente estável; c) No ensino superior a relação com a disciplina foi negativamente perturbada no caso das professoras, o que não aconteceu com os matemáticos.

No que respeita às conceções acerca da matemática, este investigador defende que foram identificados dois tipos de atributos relevantes para a caraterização das conceções sobre a matemática: atributos de natureza estética e de natureza lógica ou intelectiva. Guimarães (2003) afirma que são exemplos dos primeiros a "harmonia", invocada pelos matemáticos e por uma das professoras, e a “elegância”, citada por um dos matemáticos. Contudo, e aprofundando esta temática, elucida-nos que os atributos, que apelam sobretudo à sensibilidade estética e associados ao reconhecimento de uma beleza matemática, não se evidenciaram de forma significativa na visão que os participantes têm desta ciência. Em contrapartida, os que apelam à racionalidade ou à intelecção, como o rigor, a exatidão e o caráter dedutivo, foram os que mais se destacaram. Caraterísticas estas que o estudioso identificou noutras investigações:

> São todavia as qualidades como o carácter rigoroso e exacto da Matemática e a sua natureza dedutiva que mais se destacam como os atributos que melhor caracterizam esta ciência, do ponto de vista dos participantes deste estudo. Neste mesmo sentido apontam os resultados de outros estudos sobre as concepções de professores nos vários níveis de escolaridade do ensino não superior. Numa revisão incidindo sobre investigação realizada em Portugal neste nível de ensino (Ponte, Matos e Abrantes, 1998) diz-se mesmo, a propósito das concepções dos professores, que os trabalhos revistos, no essencial, evidenciam uma visão geral da Matemática muito marcada pelos aspectos formais, lógicos e dedutivos (p. 388).

Para o investigador são os atributos de carácter rigoroso e exato que as professoras consideraram distintivos da matemática no confronto com outras ciências, que lhe conferem a clareza e confiança que lhe reconheceram. Esta conceção está igualmente presente nos matemáticos, mas menos extremada e enraizada num deles, para quem a matemática tem também fragilidades e zonas em que não existe uma completa segurança e solidez do conhecimento.

Guimarães (2003) considera ainda que os matemáticos reconhecem analogias entre a matemática e as outras ciências, nomeadamente ao valorizar o raciocínio plausível e uma componente de tipo experimental na produção do conhecimento matemático. Quanto à ideia da matemática como uma ciência exata e rigorosa, nesta investigação estas conceções revelaram-se "como um dos traços mais nítidos" (p. 389), pelo que afirma:

> Rigor e exactidão são dos atributos mais utilizados para caracterizar esta ciência e incluem-se entre os que são evocados mais espontaneamente. (…) Estes atributos, são associados ao carácter lógico e dedutivo reconhecido à Matemática, e todas estas qualidades são consideradas como lhe sendo próprias e exclusivas, conferindo-lhe uma marca distintiva face às outras ciências. (…) A concepção da Matemática como ciência do rigor e da certeza exprime-se, nas professoras, através da consideração da Matemática como um domínio do conhecimento onde é sempre possível distinguir com clareza o certo do errado ou verdadeiro do falso, ou seja, como uma área científica onde não há lugar para ambiguidades. Esta concepção está também presente nos matemáticos deste estudo, num deles, por ventura, de uma forma mais extremada e enraizada do que no outro (p. 389).

Sobre a aplicabilidade e a relação da matemática com a realidade, neste estudo, concluiu-se que "a ideia da Matemática como uma ciência de grande utilidade e aplicação nos mais diversos domínios da atividade humana emergiu também com clareza como um dos traços das concepções sobre matemática dos participantes desta investigação." (p. 390). Ao desenvolver esta temática, identificam-se duas componentes – a instrumental e a aplicacional - nas conceções dos professores acerca da matemática:

> Em primeiro lugar, como mais geral e dominante, uma visão da Matemática que podemos chamar instrumental. Nessa relação, a Matemática parece ser encarada essencialmente como municiadora de ferramentas – teóricas, conceptuais, de linguagem – consideradas indispensáveis quer à resolução de problemas que as ciências e o estudo da realidade levantam, quer ao desenvolvimento científico em geral. A esta característica da Matemática foi reconhecida grande universalidade, sendo patente a ideia de que todo o conhecimento matemático é aplicável, mesmo se motivado e desenvolvido sem tal intuito. A natureza abstracta da Matemática e

> o seu carácter exacto e rigoroso foram os atributos utilizados para explicar a diversidade das suas aplicações. (…) em segundo lugar é também possível discernir, no modo como a relação da Matemática com as ciências e a realidade é entendida pelos participantes deste estudo, a ideia de que existe reciprocidade nessa relação. Ou seja, a ideia de que, se há um movimento – de aplicação – da Matemática para as ciências (e realidade) há, reciprocamente, um movimento destas para a Matemática, movimento concebido como estímulo e inspirador do desenvolvimento do conhecimento matemático. (p. 392).

No contexto da atividade matemática, Guimarães (2003) identificou as seguintes modalidades: a demonstração, o cálculo e a matematização. Sobre a demonstração, neste estudo, conclui-se, em primeiro lugar, a tendência em associar demonstração a dedução, quando se trata de estabelecer a verdade de resultados matemáticos. Em segundo lugar, a demonstração e o raciocínio dedutivo aparecem "como um lugar proeminente na visão que os participantes desta investigação têm da Matemática e da actividade matemática." (p. 397). No que respeita ao cálculo, e apesar de os participantes considerarem ser esta a atividade matemática mais trabalhada no ensino da matemática, esta modalidade parece ser vista como a "de menor estatuto, no conjunto das várias modalidades que os diferentes participantes destacaram." (p. 398). Sobre a demonstração, o investigador afirma que, para os participantes, esta é tendencialmente associada à dedução e surge como a modalidade por excelência da atividade matemática no quadro da ciência, sendo o que mais se distingue dos outros domínios científicos.

Na investigação datada de 1993, onde Canavarro investigou as conceções e práticas de professores de matemática acerca do ensino da matemática, distinguem-se "essencialmente a ideia de desenvolvimento de capacidades e a ideia de aquisição de conhecimentos." (p. 315). Investigando esta temática, sobressai nesta investigação, três visões sobre o que pensam os participantes acerca do que é ensinar matemática:

1) “Ensinar Matemática corresponde a ensinar os alunos a pensar e é o desenvolvimento de capacidades e atitudes” (p. 315). Nesta visão, cabe ao professor proporcionar aos seus alunos “uma experiência de “construção” semelhante à dos cientistas, numa perspectiva de “descoberta” de conhecimento, suscitado por um “problema” matemático e pela relação com a realidade” (p. 315).

2) “Ensinar Matemática é equivalente a ensinar aos alunos o conjunto de conhecimentos matemáticos estipulado no programa, os quais são indispensáveis para a sua progressão.” (p. 315). Nesta perspetiva, sobressai a ideia de que o ensino “conservador, centrado na transmissão de conhecimentos teóricos e na mecanização da resolução dos exercícios práticos, é o mais eficiente em termos de aquisição de conteúdos por parte dos alunos.” (p. 316).

3) Ensinar Matemática é “ensinar a trabalhar com números” (p. 315). Esta visão aponta-nos para a conceção de que “o ensino da Matemática deve ser “simples” e “giro”, de forma a tornar aliciante para os alunos esta disciplina, valorizando igualmente uma componente mais tradicional que passa pela prática de resolução de exercícios de aplicação.” (p. 316).

Numa investigação em que Ponte (2004) descreve a experiência de um grupo de professores e formadores ligados à disciplina de Matemática, em diversos níveis de ensino, que tinham empreendido coletivamente uma atividade de aprofundamento e divulgação das suas pesquisas sobre a sua própria prática profissional, foi possível concluir: 1) A pesquisa dos profissionais sobre a sua própria prática depara-se usualmente com muitos problemas e dificuldades – desde as condições sociais e institucionais adversas, à falta de tempo e, frequentemente, de autoconfiança e de formação dos seus protagonistas. 2) Para os professores do Ensino Básico e Secundário esta atividade pode ajudar a resolver problemas prementes ou contribuir para uma melhor compreensão do que se passa na sua prática. 3) Para os docentes do Ensino Superior, esta pode significar um campo de trabalho de onde não só resultem elementos importantes para a sua atividade profissional, como ressaltam contributos, em termos de conhecimento, para a respetiva comunidade académica.

Wilkins (2008), numa investigação que contou com a participação de 481 professores do ensino básico, onde estudou a relação entre conhecimento, atitude, conceções e práticas dos professores, concluiu que as conceções dos professores têm um profundo impacto nas suas práticas, assim como, têm uma implicação no alcance dos objetivos nos cursos de formação dos professores.

Nesta perspetiva, versando sobre a investigação na área da formação dos professores, Ponte (2011) advoga da necessidade de neste processo se entrecruzarem vários "tipos de conhecimentos" intrínsecos a cada professor. Como sejam: o conhecimento dos processos e conteúdos matemáticos; o conhecimento dos currículos matemáticos; o conhecimento de "ensinar Matemática"; o conhecimento das suas "práticas"; o conhecimento da "identidade" do professor, e o conhecimento de cada estudante. Ao referir-se ao conhecimento da "identidade" do professor, este investigador remete-nos para a importância do estudo das conceções dos professores acerca da matemática, na medida em que, na sua perspetiva, estas desempenham um papel central nas práticas dos professores. Também Gresalfi e Cobb (2011) ressalva a importância da investigação da "identidade" do professor no contexto do desenvolvimento profissional do mesmo.

Na mesma linha de pensamento, Conner, Edenfield, Gleason e Ersoz (citados em Ponte, 2011) defendem que as conceções dos professores acerca da matemática, formam a "identidade" do professor, e como tal influenciam fortemente as suas decisões e as suas ações na sua prática letiva. Na mesma consonância, Schoenfeld (2000) argumenta que as conceções dos professores acerca do ensino da matemática têm um papel muito relevante e influenciam a conduta dos professores nas suas aulas. Hannula *et al*. (2013), numa investigação que contou com a participação de 815 professores de três países – Finlândia, Estónia e Letónia – que tinha por objetivo central estudaram as conceções e as práticas dos professores de matemática em contexto com o seu meio cultural, corroboram as ideias anteriores, ao concluírem que no que respeita às conceções dos professores acerca da matemática, estas têm uma grande influenciam nas suas preferências no desenrolar das suas práticas no ensino da matemática.

Num estudo de Cooney e Wilson (2002), onde se analisou o papel das conceções nas mudanças e no desenvolvimento profissionais dos professores de matemática, defendeu-se que as conceções dos professores acerca da matemática afetam fortemente a forma como estes professores atuam nas suas aulas e reagem perante as mudanças.

Ao inferirem da necessidade de se realizarem estudos sobre as conceções dos professores acerca da matemática, D. McLeod e S. McLeod (2002) convergem na mesma ótica, argumentando que estas conceções têm relações estreitas com os processos afetivos e cognitivos dos professores que são tão importantes, e que, influenciam a forma como estes vão atuar no desenrolar das suas atividades.

No âmbito da investigação aos currículos de matemática, Lloyd (2002) ao refletir sobre as conceções dos professores de matemática no processo de ensino desta disciplina, remete-nos também para a importância de se realizarem mais investigações acerca das conceções dos professores sobre o currículo desta disciplina e do papel deste no desenvolvimento profissional dos professores.

Nesta linha de investigação Liljedahl, (2010), concebe o sistema de conceções como o conjunto dominante das crenças referente a um determinado contexto, e defende que o principal objetivo do ensino da matemática tem de passa por uma mudança no sistema de conceções dos professores de matemática.

Analisando a problemática da relação entre conceções e práticas, Santos e Ponte (2008) defendem que as práticas são determinadas pelas conceções e vice-versa. Como referem:

> Por um lado, não há práticas que não tenham por detrás concepções, explícitas ou implícitas. Assim, podemos afirmar que, no dia-a-dia, as práticas são determinadas pelas concepções. Mas por outro lado, as concepções têm de vir de algum lado, e é natural supor que se constituam a partir da experiência, de contexto físico e, sobretudo, do contexto institucional e cultural em que os actores se movem (p. 25).

Aprofundando esta problemática os investigadores afirmam que o acumular de novas experiências influenciam a evolução das práticas e das conceções. Isto é:

> O acumular de novas experiências e a mudança do contexto têm a sua influência na evolução das práticas e das suas concepções, mas numa escala alargada – de semanas, meses, anos ou décadas. Novos elementos que surgem a integrar essa experiência (mudanças nas orientações curriculares, a participação num curso de formação, num encontro profissional ou num projecto educativo) podem contribuir para a mudança das práticas e das concepções, mas fazem-no sempre no quadro de práticas e concepções já bem experimentadas e sedimentadas desde a infância e da formação inicial, reforçada pela cultura da escola e as representações sociais dominantes (p.26).

Guimarães (2003) reflete ainda sobre o relacionamento das sucessivas reformas no ensino da matemática com as conceções acerca da matemática:

> Desde meados do século XX que na maioria dos países ocidentais, de uma forma mais ou menos intensa e profunda e com concretizações diversificadas e de alcance variado, têm vindo a ocorrer sucessivas reformas no ensino da Matemática. As perspetivas e orientações curriculares associadas a esses movimentos reformadores, muito particularmente no que dizem respeito aos conteúdos, métodos e objetivos de ensino, dão indicação sobre as conceções relativas à atividade matemática que lhes estão subjacentes (p. 89).

Nesta conjetura, com este estudo procurámos identificar e discutir, de uma forma global, o conjunto de perspetivas dos professores sobre o que é, e como se ensina matemática, sobre a forma como entendem o seu papel e o do aluno na aprendizagem da matemática. Assim, as "visões gerais" que os professores interiorizam e com as quais constroem a realidade matemática constituem as suas conceções acerca da matemática. Estas têm uma relação muito forte com a sua ação no desenrolar da prática da disciplina, influenciando vivamente o seu relacionamento com a matemática e condicionando a forma como encaram o seu ensino. Como Schoenfeld (1987) diz:

> As concepções da pessoa sobre a matemática podem determinar de que modo ela decide abordar um problema, que técnicas usará ou evitará, quanto tempo e esforço dedicará ao problema, etc. As concepções estabelecem o contexto dentro do qual operam os recursos, as heurísticas e o controlo (Schoenfeld, 1987, p. 45, citado em Abrantes, 1994, p. 173).

Síntese

1) Após a análise das várias definições aqui apresentadas, a primeira grande conclusão a que se chega é a de que não existe uma definição de conceção única, precisa, de significado consensual para todos os investigadores, visto que, como podemos verificar, associado ao termo conceção está toda uma panóplia de outros termos (conhecimento, crenças, atitudes, representações, etc.). Não obstante, pôde constatar-se que as conceções são apontadas, direta ou indiretamente, pelos vários investigadores estudados, como a essência que está na base de todos os outros conceitos.

2) Em virtude de as conceções não serem elementos isolados, mas antes interagirem entre si constituindo sistemas, e devido à problemática em torno da definição de conceção, neste estudo pretendemos dar um sentido mais amplo à terminologia relativa às conceções, encarando-as como o conjunto das "visões gerais" do professor acerca do seu mundo matemático. Isto é, com este estudo procuramos identificar e discutir de uma forma global o conjunto de perspetivas dos professores sobre o que é e como se ensina matemática, nomeadamente sobre a forma como entendem o seu papel e o do aluno na aprendizagem da matemática.

3) Assim, com fundamento na análise dos vários conceitos, e no âmbito deste estudo, as conceções irão ser consideradas como uma estrutura organizada de informação, constituída por um conjunto de teorias, proposições, processos (alguns deles muito resistentes à mudança e portanto à introdução de novos

elementos) que o professor constrói e desenvolve, quer por meios individuais, quer por construção social ou herança cultural, quer por mecanismos de natureza cognitiva ou de índole afetivo/emocional. Esta estrutura mental, que grande parte das vezes é desenvolvida e assimilada inconscientemente e sem fundamentação racional, permite ao professor configurar, explicar e avaliar a realidade, o mundo exterior. São as linhas profundas com que o professor se encara a si próprio, aos outros e à realidade. No que respeita às conceções acerca da matemática e do seu ensino, estas servem de suporte para a elaboração de uma imagem, de uma representação do que é a Matemática e do que é ensinar matemática. Neste estudo pretendemos dar um sentido mais amplo à terminologia relativa às conceções, encarando-as como o conjunto das "visões gerais" do professor acerca do mundo matemático. São as "visões gerais" que os professores interiorizam e com as quais constroem a realidade matemática constituem as suas conceções acerca da matemática. Estas têm uma relação muito forte com a sua ação no desenrolar da prática da disciplina, influenciando vivamente o seu relacionamento com a matemática e condicionando a forma como encaram e praticam o seu ensino.

Capítulo IV

Metodologia

Neste capítulo é apresentada a fundamentação teórica da metodologia utilizada nesta investigação, seguida da explicação da forma como os dados foram recolhidos e analisados, bem como da justificação das diversas opções metodológicas que foram tomadas ao longo do desenrolar do estudo.

Opções metodológicas

A escolha da metodologia a utilizar numa investigação deve ser feita em função do problema, seus objetivos e questões de investigação. No entanto, as opções metodológicas não são exclusivamente determinadas por estes aspetos. Santos (2000) chama a atenção da importância das assunções do investigador, nomeadamente dos seus pressupostos teóricos, na definição do paradigma a que se submete a investigação. É fundamental que exista coerência entre o objeto de estudo, o propósito com que este é feito, os pressupostos que o orientam e a opção metodológica que se adota (Santos, 2000; Canavarro, 2003).

Uma vez que o pretendido nesta investigação é aprofundar o conhecimento, relativamente aos professores do Ensino Superior, no que respeita às suas conceções sobre a matemática e o ensino da matemática, isto era, identificar, descrever e compreender detalhadamente o significado pessoal que dão à matemática e ao seu ensino, incluindo-se a problemática do insucesso dos alunos nesta disciplina, enveredámos por um paradigma interpretativo para inspiração e orientação da conduta ao longo da investigação. Esta opção teve em conta o facto de o paradigma interpretativo ter por objetivo de análise a compreensão dos significados ou interpretações que os participantes têm sobre o assunto em estudo. Como afirma Erickson, a investigação interpretativa coloca o "interesse central no significado humano na vida social e na sua elucidação e exposição por parte do investigador" (1986, p. 119).

No âmbito da investigação interpretativa, e no que diz respeito à definição da modalidade do estudo, a opção tomada recai no estudo de caso qualitativo. Com ele pretende-se responder a questões de natureza explicativa, que proporcionem uma descrição holística de um fenómeno sobre o qual a investigadora não tem, nem deseja ter, qualquer controlo, e que está bem identificado e delimitado (Merriam, 1988; Ponte, 2006). Como afirma Ponte, esta "abordagem é particularmente útil quando numa investigação se visa "compreender em profundidade o "como" e os "porquês" dessa entidade, evidenciando a sua identidade e características próprias, nomeadamente nos aspectos que interessam ao pesquisador" (2006, p.2).

Pretende-se ainda tirar partido da possibilidade de uma "interpretação no contexto" (Merriam, 1988, p. 10), onde é favorecida a percepção de interacções entre factores significantes característicos do fenómeno. Isto torna-se especialmente interessante para estudar um fenómeno actual no seu contexto real, sobretudo se é impossível separar as variáveis do fenómeno do próprio contexto (Merriam, 1988; Yin, 2010). Tal é o caso na presente investigação — para estudar as conceções sobre o ensino da matemática dos professores, é fundamental considerar o contexto da sua sala de aula, onde as conceções se revelam através da prática.

Em Portugal, os estudos de caso têm sido desde há muito adotados em investigações que procuram estudar as conceções. Tal é o caso, por exemplo, de Matos (1991), que defende que o estudo de caso é particularmente sugerido quando se tem "intenção de interpretar e teorizar sobre a natureza das concepções" (p.152), ou ainda de Guimarães (1983, 2003) que sublinha a natureza subjetiva do objeto em investigação, as conceções, para apoiar a opção por estudo de caso interpretativo.

É importante salientar que esta investigação não teve por objetivo a generalização de resultados. Pretendeu-se apresentar as conceções dos professores do Ensino Superior acerca da matemática e do seu ensino, não perdendo de vista que o posicionamento da investigadora assenta num paradigma interpretativo, visando olhar os fenómenos em estudo não com o objetivo de estabelecer generalizações estatísticas para um universo mas antes com o intuito de explorar em profundidade, almejando desta forma contribuir para a criação de teoria que os explique. Canavarro (1993), Guimarães (2003) e Ponte (2006) defendem precisamente que o estudo de caso é particularmente sugerido quando se tem intenção de estudar, interpretar e teorizar sobre a natureza das conceções.

Utilizando as palavras de Matos (1991) "trata-se de estudar um caso específico em grande pormenor ou compará-lo com outro caso estudado igualmente em pormenor por forma a gerar propriedades universais concretas que permitam encontrar a generalidade no particular" (p. 155). Note-se que a generalização de resultados para toda uma população não constitui um "objetivo apropriado" (Erickson, 1986) numa investigação que recorre à modalidade de estudo de caso, pois a generalização que aqui se pretende visa a teoria.

A problemática da generalização constitui um dos tópicos mais criticados sendo apontado como uma das grandes fragilidades desta abordagem. Uma forma de contornar esta questão é apresentada por Yin (2010) que, na tentativa de estabelecer relações ente o processo de generalização e a elaboração de teoria, considera que, através de um estudo de caso, não se generaliza para um dado universo mas sim para a teoria. Isto é, com os resultados de um estudo de caso verificamos se estes confirmam ou não a teoria, com o objetivo primordial de acrescentar conhecimento à teoria existente sobre a temática em investigação. É nesta consonância que Yin (2010) revela que uma teoria prévia é tida como padrão no seio da qual são comparadas e discutidas as conclusões. A teoria tem não só o papel de fórum em que é recebido e discutido o caso mas serve igualmente de "veículo" para a generalização dos resultados a outros casos.

Acrescente-se, ainda, que a realização de "múltiplos casos" é uma estratégia usada quando se pretende ampliar o conhecimento que deriva da investigação (Guimarães, 2003; Stake, 2007). Foi também aqui adoptada com o propósito de obter mais informação para elucidar acerca das conceções dos professores sobre a matemática e o seu ensino, pensando que desta forma se possa contribuir para a teoria de forma mais completa, na medida em que, ao estabelecerem-se comparações entre os casos, é possível destacarem-se os aspetos que se venham a manifestar comuns ou distintos entre si. Como salienta Guimarães (2003), a modalidade de estudo de caso múltiplo adequa-se quando se pretende compreender em profundidade uma situação num registo exploratório, mas também descritivo e analítico, e evidenciar os aspetos singulares mais relevantes que a caraterizam. Na ótica deste investigador:

> O recurso a vários casos tem por objectivo gerar evidência diversificada, e em maior quantidade, e possibilitar, com o seu confronto, uma iluminação mútua desses casos, bem como a identificação de elementos de homogeneidade (aspectos comuns, convergências, semelhanças) e de heterogeneidade (singularidades, divergências, contrastes) (Guimarães, 2003, p. 21).

Assim, a opção desta investigação por um estudo de caso numa lógica interpretativa e com uma abordagem qualitativa deve-se ao facto de se constatar que esta abordagem é a mais aconselhável quando o objetivo do estudo é investigar com grande pormenor as conceções de determinados sujeitos. Tem-se em consideração que se pretende compreender, com profundidade, as conceções acerca da matemática e do seu ensino do ponto de vista de professores do Ensino Superior.

Os participantes na investigação

Um passo fundamental da realização de qualquer estudo de caso é a escolha do caso a estudar. Naturalmente que o caso tem de respeitar a especificidade do fenómeno em investigação, que no presente significa recair em docentes do Ensino Superior que ensinem matemática. Não se trata portanto de um estudo de caso intrínseco, pois não é relevante estudar um dado docente em particular, servindo qualquer um o propósito do estudo. Trata-se pois de um estudo de caso instrumental, cuja utilização visa alcançar algo mais do que compreender o caso específico – existe um problema de investigação, uma perplexidade, uma necessidade de compreensão global e consegue-se alcançar um conhecimento mais profundo se se estudar um caso particular (Stake, 2007).

A opção pela realização de estudo de caso múltiplo já foi anteriormente justificada pela possibilidade que permite de confronto dos casos, em busca de similitudes e de contrapontos, e consequente enriquecimento das conclusões que se podem retirar (Erickson, 1986; Guimarães, 2003). Assim, optou-se pela realização de dois casos, o que permite alguma diversidade dentro dos limites da viabilidade prática da concretização da investigação, entre os quais se destacam o tempo e o contexto da sua realização.

Para a seleção dos dois professores a constituir-se como casos desta investigação tomou-se como critérios serem professores efetivos do ensino superior, preferencialmente com vasta experiência, e terem como formação de base um curso de matemática, pela importância da relação com esta ciência. Foi também considerado adequado que os professores fossem da mesma instituição, de modo a minimizar as potenciais influências que diferentes contextos de instituições distintas pudessem ter nas conceções sobre o ensino da matemática reveladas pelos professores, derivadas, por exemplo, de contactarem com populações de alunos muito diversas ou com situações institucionais com regras não similares. Além disso, esta opção seria mais económica para a investigadora, sem representar prejuízo para a investigação.

Foram ainda considerados três critérios relacionados com a relação do professor com a investigação. Por um lado, deveria demonstrar interesse pela temática em estudo e manifestar interesse em participar na investigação; por outro, deveria manifestar disponibilidade para ser entrevistado várias vezes e ser observado durante a sua prática letiva; 5) evidenciar ser um bom informador tendo em consideração o estudo a realizar, isto é, tendo em devida conta o estudo que se pretendia realizar, era imprescindível encontrar professores com ideias e opiniões sobre os assuntos em estudo. Como referem Bogdan e Biklen (1994) na seleção dos participantes “alguns sujeitos estão disponíveis a falar, têm mais experiência do contexto” e, por tal motivo, tornam-se “informadores-chave” (p. 95), e isto representa certamente uma mais valia para investigação.

A seleção efetiva dos professores foi um processo que se revelou moroso e um pouco complexo. Iniciou-se em Maio de 2010 e levou mais de um ano a ser concluído. Numa primeira diligência a investigadora abordou, individualmente, todos os professores de matemática de uma Universidade da grande Lisboa, à qual tinha acesso facilitado, tendo-lhes apresentado, genericamente, a investigação que estava a realizar no âmbito do seu Doutoramento em Ciências da Educação, questionando se estariam interessados em participar no estudo em causa. Nos encontros que estabeleceu com cada professor, informou dos objetivos da investigação, das técnicas que iriam ser utilizadas para a recolha de dados, bem como da ética que se comprometia a respeitar, sublinhando-se a utilização da informação recolhida exclusivamente para o fim a que se destina e a salvaguarda do anonimato do professor.

Durante este processo, que se prolongou até Junho de 2011 – que envolveu o contacto com onze professores de matemática – a investigadora verificou que iria ter algumas dificuldades na seleção dos participantes para a investigação, pois, apenas um professor, a que chamaremos "Professor Dinis", se manifestou muito interessado na temática em causa e afirmou estar disponível para participar com empenho no estudo.

Quanto aos restantes professores: uns afirmaram não ter disponibilidade para participar, na medida em que as suas "vidas académicas" estavam muito preenchidas; outros manifestaram algum interesse em participar mas desejavam receber antecipadamente o guião das entrevistas, sendo um facto que, para a maioria dos professores, a observação das suas aulas era algo que os preocupava e poderia incomodar. A estes últimos a investigadora esclareceu que a sua conduta durante essas observações seria a de máxima discrição, visando prioritariamente, não perturbar o funcionamento da aula com a sua presença, nem, mais tarde, incomodar o professor questionando-o sobre os conteúdos matemáticos por ele lecionados ou sobre a forma como foram apresentados aos alunos.

Em Junho de 2011 a investigadora conheceu um professor estudioso da problemática associada ao ensino da matemática nos vários níveis de ensino, que ingressou então na mesma instituição de ensino e que, após uma breve apresentação do estudo em causa, se disponibilizou de imediato para participar na investigação.

Foi, portanto, com enorme satisfação que a investigadora informou, com mais detalhe, o professor a que chamaremos "Professor Vasco" do estudo em desenvolvimento bem como das questões de ética que se comprometia a respeitar.

Quadro 1: Os participantes na investigação

	Nome fictício	Idade	Anos de ensino	Principais habilitações académicas
Caso 1	Prof. Dinis	61	36	Licenciatura em Matemática Mestrado em Matemática
Caso 2	Prof. Vasco	59	31	Licenciatura em Matemática Doutoramento em Matemática

No quadro 1 resume-se alguma informação sobre os dois participantes desta investigação, que acabaram por ser ambos do mesmo sexo, com idade praticamente igual, com duração de experiência de ensino semelhante, e formação científica pós-graduada na área da matemática.

No que diz respeito à relação da investigadora com os professores participantes na investigação, esclarece-se que a investigadora já conhecia o Professor Dinis e mantém com o mesmo uma relação de amizade cordial. No que respeita ao Professor

Vasco, a investigadora não o conhecia anteriormente e manteve durante a investigação em causa uma relação de cordialidade.

A recolha de dados

O paradigma interpretativo está associado a metodologias de investigação que assentam principalmente em técnicas de recolha de dados de caráter qualitativo (Merriam, 1988; Yin, 2010; Stake, 2007). Evocando a expressão de Bell (1997) que "as técnicas de recolha de informação selecionadas são aquelas que se adequam à tarefa" (p. 23), visto ter este estudo, por objetivo, investigar as conceções dos professores do Ensino Superior acerca da matemática e do seu ensino, foram seguidas as recomendações de grande parte dos investigadores portugueses (Matos, 1991; Abrantes, 1994; Canavarro, 1993, 2003; Guimarães, 1988, 2003, Santos, 1996, 2000; Ponte, 2006) que já realizaram estudos neste âmbito, tendo sido utilizadas a entrevista, a observação de aulas e a análise documental, como técnicas de recolha de dados. Como Canavarro (2003) afirma:

> A importância de possuir evidências de diversas fontes torna possível concretizar a triangulação de informação, uma preocupação (…) de reforçar a credibilidade do estudo. Mas existe uma outra razão fundamental para a necessidade de recorrer a várias fontes, em especial, à combinação da observação que permite ver o professor em acção na sala de aula, e à entrevista, que dá oportunidade de ouvir o professor falar sobre essa mesma acção (p. 194).

A recolha de dados realizou-se durante o 1º semestre e o 2º semestre do ano letivo de 2011/2012, de acordo com o que se apresenta no quadro 2.

Quadro 2: Esquema da recolha de dados

	1ª entrevista	Observação de aulas e entrevistas curtas	2ª entrevista
Caso 1: Prof. Dinis	Outubro 2011	Outubro 2011	Janeiro 2012
Caso 2: Prof. Vasco	Fevereiro 2012	Maio 2012	Julho 2012

Entrevista

Bodgan e Biklen (1994) são de opinião que as boas entrevistas se caraterizam pelo facto de o entrevistado estar o mais à vontade possível para falar livremente sobre os seus pontos de vista, pelo que o guião das entrevistas, para além de ter sido construído tendo por base guiões utilizados em estudos com objetivos similares, dos quais se destacam os desenvolvidos por Frank (1992), Nimier (1979), Matos (1991), Canavarro (1993, 2003), Guimarães (1988, 2003), Abrantes (1994) e Santos (1996), foi elaborado por forma a permitir criar um ambiente propício para que o entrevistado pudesse exprimir e explicar as suas ideias e entendimentos sobre a matemática e o ensino da matemática. A necessidade de criar um ambiente de confiança é, também, reiterada por Merriam (1988) ao defender que o estabelecimento de um ambiente de confiança, é um requisito essencial para que o investigador e os participantes possam comunicar de uma forma produtiva. A opção por uma entrevista semi-estruturada deveu-se à razão desta não ser tão rígida, servindo de orientação e, ao mesmo tempo, permitindo uma possível flexibilização às adaptações necessárias recorrentes da conversa com o entrevistado em causa.

Ao decidirmos por estas opções, é fundamental argumentar que as conceções são entidades não “observáveis em si mesmo”, sendo que a entrevista tem a vantagem de permitir correções, esclarecimentos e adaptações e, como tal, obter informação que não é possível alcançar de outro modo (Canavarro, 2003). Assim, a entrevista é a técnica de recolha de dados mais conveniente para a obtenção de dados num estudo em que se tem por finalidade estudar as conceções. Também Lessard-Hébert, Goyette e Boutin (1994) reforçam esta mesma opinião, ao reconhecerem que a entrevista é insubstituível quando se trata de recolher dados válidos sobre as crenças, as opiniões e as ideias dos sujeitos em estudo.

Numa linha de pensamento concordante, Bogdan e Biklen (1994) afirmam que a entrevista é particularmente útil quando se pretende recolher dados descritivos na linguagem do próprio sujeito. Isto é, a entrevista permite ao investigador “desenvolver intuitivamente uma ideia sobre a maneira como os sujeitos interpretam aspetos do mundo” (p. 134).

Reforçando ainda a eficácia desta técnica de recolha de dados, é pertinente referir que uma das suas grandes qualidades prende-se com o facto de esta permitir captar, de uma forma imediata, a informação desejada para a investigação. Apesar de Bell (1997) entender que a entrevista é uma técnica de recolha de dados que acarreta grandes dificuldades, identifica que a sua grande vantagem “é a sua adaptabilidade”. Como a investigadora afirma “uma entrevista habilidosa consegue explorar determinadas ideias, testar respostas, investigar motivos e sentimentos” (p. 118), coisa que é impossível atingir com qualquer outro instrumento de recolha de dados.

Neste contexto, enveredar por entrevistas semi-estruturadas apresentou-se como a opção mais correta, tendo em consideração o estudo em causa, pelo facto deste tipo de entrevista possibilitar uma maior flexibilização, permitindo encorajar o entrevistado de modo a exprimir os seus pontos de vista sem receio de estar a ser interrompido e, como tal, manipulado pela investigadora. As entrevistas foram conduzidas tendo por base os respetivos guiões (anexos 1 a 3), mas cada uma delas orientada segundo o ritmo e respostas do entrevistado. Ao longo de cada entrevista, a investigadora foi adaptando cada nova questão, em função da resposta ou da informação que o entrevistado foi dando, com a finalidade de aprofundar e melhorar a compreensão das suas respostas. Desta forma encorajam-se os participantes a exprimirem, abertamente, os seus pontos de vista sem serem constantemente interrompidos. Assim, foi possível estabelecer uma relação de confiança com o participante, com o objetivo de explorar determinadas ideias e aprofundar respostas.

Para a concretização desta investigação foram feitas duas entrevistas a cada um dos dois professores participantes. A primeira entrevista tinha por objetivo recolher informação genérica sobre o professor e sobre as suas conceções sobre a matemática, explorando os domínios da sua relação com a matemática, a caraterização da matemática, assim como a importância da matemática. O guião para esta primeira entrevista (anexo 1) foi comum aos dois participantes. A duração da entrevista foi de aproximadamente uma hora e trinta minutos para cada um dos participantes.

A segunda entrevista tinha o intuito de obter informação sobre as conceções dos professores participantes acerca do ensino da matemática, focando nomeadamente: as finalidades do ensino da matemática no Ensino Superior, o papel do professor e o papel do aluno no processo de aprendizagem da matemática, as suas aulas de matemática, os fatores explicativos do insucesso na matemática, assim como as medidas a adotar para que os alunos sejam melhor sucedidos na aprendizagem da matemática.

Atendendo ao atrás referido, a segunda entrevista foi realizada após a observação de aulas de cada um dos professores participantes e depois de uma prévia análise de dados da primeira entrevista. Como tal, para esta segunda entrevista, foi necessário elaborar um guião para cada professor (anexos 2 e 3), visto que se pretendia aprofundar algumas questões da primeira entrevista e, também, esclarecer, explorar e aprofundar a informação obtida pela observação de aulas. Estas segundas entrevistas tiveram a duração aproximada de uma hora e trinta minutos a duas horas.

As duas entrevistas com o Professor Dinis realizaram-se, a seu pedido, em sua casa. As entrevistas feitas ao Professor Vasco tiveram lugar na sala de professores, na Universidade onde é docente. Ambas foram sempre agendadas tendo em devida conta as disponibilidades evidenciadas pelos participantes, com o intuito de não prejudicar a sua vida familiar e profissional. A escolha das datas para a realização das entrevistas com o Professor Vasco nem sempre foi fácil pois tiveram de ser várias vezes alteradas, visto o professor se encontrar com diversos compromissos profissionais.

As entrevistas foram sempre individuais, isto é, contaram unicamente com a presença da investigadora e do professor em causa. Os professores responderam a todas as questões com muito entusiasmo (principalmente o professor Dinis), verificando-se apenas algumas hesitações e dificuldades nas questões relacionadas com a caraterização e com a origem da matemática. Pode dizer-se que todas as entrevistas decorreram com normalidade, exceto a segunda entrevista realizada com o professor Vasco que foi interrompida pelo telemóvel alegando necessidade de atender algumas chamadas.

O comportamento da investigadora durante as entrevistas foi o de respeitar o máximo possível as recomendações de diversos investigadores (Matos, 1991; Abrantes;

1994; Canavarro, 2003; Guimarães, 2003) que aconselham, entre outras coisas, inicialmente garantir confidencialidade de toda a informação recolhida e de anonimato em todo o material que viesse a ser divulgado na sequência da investigação e, posteriormente, no desenrolar de entrevista, tentar criar um clima tanto quanto possível de à-vontade e de confiança mútua, não cortando a palavra ao entrevistado para que este possa explicitar livremente as suas opiniões. Todas as entrevistas foram audiogravadas e posteriormente transcritas pela investigadora.

Observação de aulas

A observação de aulas é uma técnica de recolha de dados fulcral quando se pretende elaborar um estudo cujo objetivo central consiste em estudar as conceções dos professores acerca da matemática e do ensino da matemática. Contudo, é da combinação desta técnica com a entrevista aos participantes que a informação para o estudo em causa se enriquece e complementa. Como Canavarro (2003, p. 195) afirma: "O significado revela-se tanto na acção como no discurso. O fazer e o dizer são ambos faces da mesma moeda e devem ser associados para a compreensão do significado de qualquer situação"

Consequentemente, a observação de aulas dos professores é um complemento das entrevistas que permite aceder a dados que iluminam o que o professor consegue explicitar sobre as suas conceções, bem como criam possibilidade de se revelarem novos elementos que o investigador pode querer esclarecer e aprofundar.

A investigadora acompanhou durante duas semanas cada um dos dois professores participantes da investigação, sendo que as aulas observadas do Professor

Dinis se realizaram entre 20/10/2011 e 31/10/2011 e as aulas observadas do Professor Vasco se realizaram de 24/4/2012 a 17/5/2012. A observação de aulas foi marcada respeitando as conveniências da investigadora. Para o Professor Dinis, observaram-se quatro aulas consecutivas da mesma turma, do Curso de Gestão de Empresas da disciplina de Matemáticas gerais. No caso do Professor Vasco, observaram-se também quatro aulas consecutivas da mesma turma, do Curso de Gestão de Empresas da disciplina de Complementos de Matemática

No final de cada aula observada a investigadora realizou uma entrevista aberta de curta duração (aproximadamente 15 minutos) com o respetivo professor onde este falava abertamente sobre a sua perceção de como lhe tinha corrido a aula e, quando desejava, sobre as temáticas em estudo. Estas entrevistas de curta duração tinham por objetivo recolher as primeiras impressões e reflexões do professor sobre a aula, tendo sido gravadas e posteriormente transcritas pela investigadora.

A observação de aulas foi realizada a partir de um lugar escolhido pela investigadora, quase sempre na última fila da sala, com boas condições de visibilidade do quadro e de todos os alunos da turma. Como material de registo foi utilizado um caderno para cada professor, sendo que neste foram redigidas notas de campo relativas a todos os acontecimentos que tiveram lugar durante a aula: número de alunos, a fala e a escrita do professor, perguntas dos alunos e perguntas e respostas do professor. Logo, registou-se exaustivamente todo o desenvolvimento da aula centrado essencialmente na ação do professor, tomando como base um guião de observação bastante aberto (anexo 4) .

A conduta da investigadora durante estas observações foi a de máxima discrição, assumindo um papel de observadora não interveniente, procurando prioritariamente não perturbar o funcionamento das aulas. Com este procedimento pretendeu-se que a presença da investigadora não provocasse a "distorção do fenómeno a estudar, um dos riscos que envolve a utilização desta técnica de recolha de informação" (Canavarro, 2003, p. 199).

Análise documental

A análise documental foi utilizada como técnica complementar de recolha de dados, permitindo também a triangulação de dados. Pretendeu-se recolher documentos que permitissem conhecer o tipo de tarefas matemáticas que os professores adotam nas suas aulas e disponibilizam para o estudo matemático dos seus alunos. Para tal, analisaram-se as sebentas realizadas pelos professores e fornecidas aos alunos no início do semestre, a bibliografia recomendada aos alunos, testes e exames realizados em anos anteriores bem como, o programa da disciplina.

A análise de dados

A análise dos dados não começa exclusivamente após a recolha de todos os dados. Muito pelo contrário: inicia-se no momento em que é efetuada a primeira entrevista. Nesta fase preliminar é feito o primeiro contacto com a informação e iniciado, desde logo, o processo (provisório) de elaboração do sistema de categorias que permite, mais tarde, codificar a informação.

O sistema prévio de categorias foi criado através da interação entre a informação inicialmente recolhida e os elementos teóricos previamente definidos da revisão de literatura.

A análise dos dados tornou-se mais intensa depois de efetuada a recolha de todos os dados e assim, partindo das entrevistas completamente redigidas, da informação obtida pela observação de aulas e análise documental e do sistema prévio de categorias, adotaram-se as recomendações de Bardin (1989) e de Bogdan e Biklen (1994) acerca da análise de conteúdo, e procedeu-se, então, à análise dos dados da seguinte forma:

1) Várias leituras integrais das transcrições das entrevistas e das descrições das aulas observadas. Confrontação desta informação com o esboço inicial do sistema de categorias;

2) Elaboração definitiva do sistema de categorias (Anexo 5) tendo em devida conta as questões de investigação e as necessidades emergentes das várias leituras da informação recolhida;

3) Leituras das transcrições das entrevistas para associar os dados às categorias definidas;

4) Interpretação e discussão, professor a professor, dos "dados primordiais" contidos nos registos finais.

Como Bogdan e Biklen (1994) referem:

> Um bom trabalho qualitativo é documentado com boas descrições provenientes dos dados para ilustrar e substanciar as asserções feitas (…). Citar os sujeitos e apresentar pequenas secções das notas de campo e de outros dados ajuda a convencer o leitor e a aproximá-lo das pessoas que estudou (p. 56).

Assim, na elaboração escrita dos dois estudos de caso, para além das interpretações e discussões dos dados, é fundamental apresentar "descrições brutas" dos mesmos para justificar e iluminar as afirmações correspondentes às interpretações feitas.

No que aqui concerne, pretendeu-se nesta investigação alcançar uma articulação forte entre as citações e as interpretações, por ser extremamente enriquecedor para a investigação complementar as interpretações com a expressão direta dos investigados, tendo em conta que o um objetivo do relatório da investigação é salvaguardar a existência de uma base de evidência, adequada e credível, para as afirmações e as interpretações que são feitas.

Capítulo V

Professor Dinis

Este capítulo visa apresentar as conceções do Professor Dinis acerca da matemática e do ensino da matemática. Na primeira secção é feita uma apresentação global do Professor. Nas segunda e terceira secções descrevem-se as suas visões sobre a matemática e o ensino da matemática. No quarta secção apresenta-se a sua perspetiva sobre os fatores que poderão explicar o insucesso em matemática no Ensino Superior. O capítulo finaliza com a discussão das ideias principais que é possível identificar acerca das conceções do Professor relativamente à matemática e ao ensino da matemática bem como do fenómeno do insucesso

Apresentação do Professor

O Professor Dinis tem 61 anos, nasceu e sempre viveu em Lisboa e é professor de matemática no Ensino Superior há mais de 36 anos. Na minha perspetiva, trata-se de um senhor com um ar intelectual, alegre, com um sentido de humor muito apurado, muito inteligente e simpático. Foi o primeiro professor a disponibilizar-se para participar nesta investigação.

No que concerne o seu percurso escolar, este professor recorda-se de quase todos os seus antigos professores, desde a “Primária” até à “Faculdade”, a quem considera na quase totalidade como professores excelentes. Sendo uma “criança precoce”, que aprendeu a ler aos três anos de idade e que sempre teve “facilidade em aprender”, todo o seu percurso escolar se caraterizou por um desempenho brilhante.

Durante os primeiros anos de instrução, o Professor Dinis sempre gostou mais “da parte de Ciências do que da parte de Letras”. Não gostava de História, não gostava de Filosofia, não gostava de grande parte das áreas das Humanidades. Gostava muito de Matemática e de Ciências Naturais – esta última era, aliás, a sua disciplina favorita.

Quando terminou o Liceu, “aquilo que mais gostava de fazer era estudar biologia”, sendo sua intenção “estudar biologia na Faculdade”. Simplesmente, quanto a si, nos anos sessenta a biologia não tinha grandes saídas profissionais e as informações que tinha do curso de Biologia em Lisboa não eram excelentes, daí resultando fracas perspetivas profissionais. O professor argumenta que por razões familiares “não podia propriamente fazer um curso só por fazer, era suposto depois ter um emprego e ganhar dinheiro”.

Neste contexto, finalizado o Liceu, decidiu-se pela Licenciatura em matemática que era uma das suas disciplinas favoritas. Tirar o curso de Matemática, “arranjar um emprego” e, posteriormente, tirar o curso de Biologia era sua intenção. Contudo, quando acabou o curso de Matemática foi convidado a ficar como Assistente na Universidade onde se licenciou e a exigência deste trabalho fez com que desistisse da ideia de tirar o curso de Biologia.

O Professor Dinis, desde muito jovem, nutriu interesse e envolve-se bastante em diversas atividades que sempre ocuparam grande parte do seu dia-a-dia. Considerando-se um “colecionador compulsivo”, coleciona porcelanas inglesas, conchas, fivelas antigas, selos, notas de bancos, bonecos em formas de rã e muitas outras coisas. No que respeita a atividade de colecionador de conchas, foi fundador e presidente da Sociedade Portuguesa de Malacologia. Organizou reuniões internacionais e editou várias revistas sobre conchas. Sobre esta temática, é atualmente, responsável por uma revista nacional que sai de dois em dois meses e uma outra, internacional, que sai três ou quatro vezes por ano.

Sente também, um grande interesse por literatura fantástica, principalmente por histórias de terror, tendo escrito e publicado várias sobre este tema. Acrescenta que não só tem lido muitos livros sobre esta temática como igualmente se dedica à edição de histórias de ficção numa revista inglesa de prestígio internacional.

Juntamente com estes diversos interesses, destaca-se ainda o gosto que o Professor Dinis tem por banda desenhada, fazendo parte de um grupo estrangeiro de peritos na obra de Hergé que anualmente realizam congressos e publicam artigos sobre este teor:

> Eu tenho feito diversos artigos, diversos trabalhos sobre a obra de Hergé. Quando fazemos reuniões, sou eu que faço uma espécie de ata, um relatório sobre a reunião, o que é que se fez, o que é que se disse e por aí fora. Tudo isto acarreta um grande envolvimento da minha parte. De maneira que tenho com que me entreter! (primeira entrevista)

A matemática

A relação com a matemática

Durante o seu percurso académico como aluno do curso de Matemática, o Professor Dinis afirma que, apesar de não ter sido um aluno muito aplicado, nunca teve grandes dificuldades e destacou-se sempre entre os melhores alunos. A sua média final de curso foi de 19 valores, sendo a mais elevada entre todos os alunos que finalizaram o curso de matemática no mesmo ano. Como o professor relembra:

> Na Universidade (…) eu era bom aluno, tinha boas notas. Não era um aluno que fizesse muito "vida de Universidade" (...). Nunca passei lá muito tempo. Ia às aulas e vinha-me embora. Tinha boas notas. Nunca fui aluno de trabalhar muito, o que foi um erro. Eu, ao longo do curso de Matemática, podia ter avançado muito mais se tivesse estudado mais. Mas sempre tive múltiplos interesses, nunca estive dedicado só à matemática. E como aquilo que estudava era perfeitamente suficiente para acompanhar a matéria e ter bons resultados, não sentia a necessidade de estudar mais e ocupava o tempo vago com outras coisas. Sempre com o gosto pela biologia, comecei a colecionar conchas e a estudar e a fazer trabalhos, e a fazer isto e aquilo, o que me desviava do estudo da matemática. Coisa de que me vim a arrepender mais tarde, porque se tivesse estudado mais profundamente, podia ter avançado mais na matemática. (primeira entrevista)

Ao longo do seu percurso profissional, o Professor Dinis lecionou uma panóplia de disciplinas na área da matemática em várias Universidades Portuguesas. Como nos informa na primeira entrevista:

> Lecionei uma grande lista de disciplinas. Lecionei Matemáticas Gerais, que é uma cadeira introdutória do primeiro ano com Análise e um pouco de Álgebra, que é a disciplina que dou correntemente, mas também dei Álgebra Linear, Álgebra, Topologia Algébrica, Teoria de Grupos, Teoria de Anéis, Álgebra Comutativa, Matemática Discreta, Lógica Matemática, Análise Numérica e, provavelmente, mais disciplinas que agora não me recordo. (…) Enquanto estive na Faculdade (…) no sector da Álgebra, dei praticamente todas as disciplinas dessa área da matemática. (primeira entrevista)

Nos primeiros anos como professor universitário, o Professor Dinis realizou diversos trabalhos de investigação científica em Álgebra Linear, publicou na revista da Academia das Ciências alguns artigos sobre Teoria de Anéis e de Semi-anéis e participou ainda com comunicações sobre semi-anéis em alguns congressos luso-espanhóis. Neste enquadramento, era seu objetivo preparar uma tese de doutoramento sobre estas temáticas subjacentes à Álgebra Linear. Contudo, o falecimento do seu Professor Orientador - que tanto admirava - atrasou a preparação da sua tese de doutoramento o que, com o passar dos anos e a falta de um Professor que verdadeiramente o acompanhasse com vista à conclusão dos seus trabalhos de investigação, fizeram com que desistisse da ideia de concluir o seu doutoramento.

Apesar de as Ciências da Natureza e a Biologia sempre terem sido as suas disciplinas favoritas, desde muito cedo (Primeiro Ciclo) que o Professor Dinis revela possuir um enorme gosto e interesse pela matemática.

A sua relação com a matemática caracterizou-se pelo gosto pela matemática, pela facilidade com que aprendia os conteúdos matemáticos e pelos bons resultados que sempre obteve nas provas de avaliação dos conhecimentos de matemática. Apesar do facto de não se sentir confortável com a resolução de problemas matemáticos que apelavam a aplicações da matemática a situações do dia-a-dia, sempre gostou muito de matemática e era dos melhores alunos ao longo dos anos e nos diversos níveis de Ensino:

> Eu sempre tive gosto pela matemática. No Ensino Primário, estudávamos a Aritmética e a Geometria. Lembro-me perfeitamente que sempre tive uma certa facilidade em fazer as coisas de matemática. Tinha assim uma certa facilidade em aprender. Mas nos problemas, naquilo que se chamavam os problemas, aquele tipo de coisa que vai culminar naqueles problemas de torneiras, "se uma torneira enche um tanque em três horas e outra esvazia em duas horas, quanto tempo é que leva a encher o tanque?", esse tipo de coisas (...) nunca tive grande facilidade... A tal ponto que, ainda eu estava na instrução primária, e a minha mãe ensinou-me a regra de três simples, que só se aprendia depois nos primeiros anos de Liceu, para me ajudar a fazer os problemas, porque senão (...) sem a regra de três simples eu nunca sabia muito bem se havia de multiplicar, se havia de dividir. Enfim, tudo aquilo era um

bocadinho confuso para mim. E com a regra de três simples aquilo ia muito bem. (…) Eu era dos melhores alunos da turma, para não dizer o melhor aluno. (primeira entrevista)

Apesar de classificar, desde sempre, o seu relacionamento com a matemática como muito bom, algumas experiências negativas na aprendizagem desta disciplina, como, por exemplo, os problemas de aplicação da matemática à realidade, desgostaram-no e criaram-lhe dificuldades na concretização dos mesmos. Contudo, este professor procurou alternativas ("regra de três simples") transformando estes desafios matemáticos em problemas rotineiros que passou a resolver sempre da mesma forma. Assim, visando a recuperação destas dificuldades, entrega-se à matemática não deixando que estes fatores menos positivos tenham contribuído para que ficasse desmotivado ou desinteressado pelo estudo da matemática.

A relação de gosto e interesse pela matemática foi sendo construída, evoluindo ao longo dos anos influenciada por diversos fatores: a influência familiar, os seus professores de matemática, a facilidade com que aprendia e estudava os conceitos matemáticos, os próprios conceitos matemáticos em aprendizagem e o êxito nas avaliações da disciplina. Como refere:

Durante o Liceu sempre gostei de matemática. Aliás a matemática na família era uma coisa já quase genética porque a minha mãe tinha frequentado o curso de Matemática, embora não se tivesse licenciado. Foi aluna do Professor Gonçalves, Professor Sebastião e Silva, Professor Menezes, por aí fora (...). E o meu pai era de Económicas, embora também não se tivesse licenciado, mas frequentou o curso de Económicas. Portanto, a matemática era uma coisa que em casa era do domínio corrente. Inclusivamente, a minha mãe chegou a dar lições de matemática a uns primos. Portanto, a matemática não era uma coisa estranha e era uma coisa que eu gostava, e para a qual tinha facilidade, ao longo do Liceu sempre tive facilidade na matemática. (primeira entrevista)

O gosto pela matemática e pelos conteúdos matemáticos em estudo também é justificado pelas caraterísticas que este professor atribui à própria matemática. Contudo, a grande revelação e o verdadeiro fascínio que sente pela matemática surgiram no Liceu quando este professor teve contacto com os novos programas matemáticos inspirados nos movimentos da "Matemática Moderna". O Professor Dinis afirma:

> A matemática era uma coisa muito tradicional, porque era aquela matemática clássica, que já se ensinava quase há cem anos da mesma maneira. Todo aquele trabalho da Álgebra, com as equações, com as fórmulas resolventes (...) depois a Geometria, em que a gente tinha de facto de demonstrar os teoremas da Geometria. (…) Mas para mim, a maior revelação veio no sexto e sétimo ano do Liceu, porque dado o gosto que eu já tinha pela matemática, resolvi inscrever-me nas turmas de Matemática Moderna. Matemática Moderna que foi uma reestruturação do ensino da matemática, que foi criada pelo Professor Sebastião e Silva, para a qual foram constituídas turmas piloto em vários Liceus. Eu estava no Dom João de Castro e tínhamos lá uma turma de Matemática Moderna. E aquilo era um programa experimental porque, por um lado, introduzia no ensino da matemática uma série de conceitos que, até aí, não eram utilizados. Por exemplo, a Teoria de Conjuntos, tradicionalmente no Liceu não se falava em Teoria de Conjuntos. E ali começava-se logo pela Teoria de Conjuntos, as intersecções, as uniões, os pontos cartesianos, por aí fora (...). E inseria-se uma quantidade de tópicos no programa (...) muitos deles de carácter experimental. Por isso, só para dar um exemplo, enquanto nos programas tradicionais (...) da Matemática Clássica (...), por exemplo, se ensinavam derivadas, para fazer o estudo de uma função, etc. (...), nós, na Matemática Moderna, fazíamos as derivadas e primitivas. Quer dizer, nós, a nível do sétimo ano, aprendemos a calcular primitivas. (primeira entrevista)

A atração que este professor sempre sentiu pela matemática deve-se fundamentalmente às caraterísticas que associa à matemática, como sejam, a abstração, a elegância e a harmonia "das coisas matemáticas". Como podemos constatar das suas afirmações no desenrolar da primeira entrevista, no final do Liceu o Professor Dinis encontrava-se profundamente motivado e "encantado" com a matemática:

> A Matemática Moderna punha as coisas num contexto muito mais global, muito mais abstrato. Na matemática as partes que sempre me atraíram mais foram as partes mais abstratas. Eu costumo dizer, por brincadeira, que quanto menos se aplica, mais eu gosto. Quer dizer, nunca me interessou, minimamente, a Matemática Aplicada. As Estatísticas, a Investigação Operacional, a Mecânica, etc.. Isso nunca me interessou minimamente. E, por isso, depois na Faculdade eu optei sempre pelas partes mais abstratas, nomeadamente pela parte da Álgebra. Portanto, as minhas áreas preferidas eram sempre a Álgebra, a Lógica, os Fundamentos da Matemática, sempre as coisas mais abstratas. (primeira entrevista)

O Professor justifica esta sua preferência com a elegância e a harmonia das relações entre os conceitos matemáticos:

> Porque o que me atraía na matemática era, principalmente, a elegância e a harmonia das coisas. A gente fazia a Teoria de Grupos, por exemplo, e ver aqueles teoremas a aparecerem, e ver como é que as coisas se relacionavam. (…) No fundo, para mim, a matemática tinha uma componente estética muito forte, que era, justamente, da harmonia das coisas, da ligação entre os conceitos. Ora essa Matemática Moderna, que me foi apresentada a partir do meu sexto ano, nesse aspeto era muito mais aliciante. Eu quando cheguei à Faculdade já tinha ouvido falar em semi-grupos, em grupos, em anéis, em corpos, que dava uma visão abstrata e global às coisas. (…) E a gente perceber que, tanto com números, como com funções, como com outras coisas quaisquer, se podia ter uma estrutura análoga e, isso para mim era um encanto especial. (primeira entrevista)

O facto de o Professor ter frequentado "os programas das Matemáticas Modernas" nos últimos anos do Liceu veio despertar um maior gosto e interesse pela matemática, facilitando o seu percurso académico no desenrolar da Licenciatura em matemática:

> Ao entrar no curso de Matemática, a percentagem dos alunos no primeiro ano que tinham vindo de Matemática Moderna era muito pequena. E nós tínhamos uma facilidade extraordinária em relação a outros colegas. Eu lembro-me, por exemplo, de nas aulas práticas de Álgebra Linear, nos exercícios de Teoria de

> Conjuntos eu ia resolvendo aquilo, calmamente, por ali fora. E os outros colegas todos, estavam a suar e não percebiam muito bem aquilo. (primeira entrevista)

Os vários professores universitários de matemática que o Professor Dinis teve durante a sua Licenciatura foram para si marcantes e contribuíram para aumentar ainda mais o seu bom relacionamento e interesse pelas vastas abordagens matemáticas em estudo. Alguns destes professores foram de tal forma uma forte influência para o Professor Dinis que este não hesitou em chamá-los de "professores excelentes", "professores extraordinários" e "realmente fascinantes".

Como podemos constatar, o gosto e o bom relacionamento do Professor Dinis com a matemática construiu-se essencialmente em torno dos seguintes fatores: 1) As caraterísticas que associa à matemática (abstração, elegância e a harmonia "das coisas matemáticas"); 2) O gosto e a facilidade com que aprendia e estudava os conceitos matemáticos; 3) A forte influência familiar; 4) Os diversos professores de matemática que o motivaram e influenciaram positivamente em relação à matemática; 5) O êxito que sempre teve nas atividades escolares e, como tal, na avaliação da aprendizagem. Destaque-se que o percurso escolar em matemática deste professor sempre foi notável, tendo sido durante toda a escolaridade um dos melhores alunos da sua turma, obtendo sempre a excelência nas avaliações da aprendizagem em matemática.

A caracterização da matemática

Quando questionado "sobre o que é a matemática", o Professor Dinis refere a dificuldade de definir "cabalmente" esta ciência:

> É uma pergunta muito complicada. (…) Que levaria, provavelmente, umas tardes de conversa, porque eu penso que não há ninguém no mundo capaz de responder a essa pergunta cabalmente. (primeira entrevista)

Da forma como o Professor Dinis se referiu à matemática ao longo dos encontros que mantivemos, é possível extrair quatro ideias chave que constituem a sua conceptualização e caraterização da matemática. Na sua ótica a matemática é a "ciência do raciocínio", "harmoniosa" e "elegante" na forma como os seus conteúdos se relacionam, ciência abstrata criada pelo homem, com vida e onde não há verdades absolutas. Como podemos constatar:

> Para mim, a matemática tem a beleza estrutural do raciocínio matemático. (…) É de facto, uma coisa bem pensada, que não tem nada a mais nem nada a menos, tem as ideias perfeitamente arrumadas. (primeira entrevista)

Com efeito, numa primeira abordagem, o que mais o fascina na matemática e o que na sua ótica a distingue de toda as outras ciências, são a abstração das teorias matemáticas e a sua generalização:

> A matemática, do meu ponto de vista, distingue-se, primeiro, pela abstração, pelo carácter abstrato das teorias matemáticas. Depois pela generalização. (…) Na matemática, os conceitos são introduzidos com a máxima generalidade possível e depois, podem aplicar-se às mais variadas coisas. Mas a abstração e a generalização para mim são os grandes aspetos da matemática e, depois, a parte estética. A harmonia das coisas. O facto dos teoremas, na maior parte das vezes, funcionarem bem. Na matemática a estruturação do raciocínio é muito aliciante. E isso, enfim (…) no meu caso particular, também terá a ver com outras caraterísticas pessoais. Sempre fui uma pessoa muito organizada, muito arrumada. Portanto, a estruturação das coisas, a arrumação das ideias e dos conceitos, para mim sempre foi atraente. (primeira entrevista)

Para este Professor, a matemática é apresentada como uma ciência construída por ideias estruturadas, muito bem arrumadas e onde a "organização" do raciocínio matemático é apontada como um atributo muito “aliciante” para a sua prática matemática. Esta ideia remete-nos para a perspetiva de que a matemática é essencialmente um processo de pensamento que implica a formação e aplicação de redes de ideias abstratas que se associam logicamente.

Ao definir-se como uma pessoa “muito organizada” e “muito arrumada” e, pelo facto, de também atribuir estas caraterísticas à própria matemática, a sua atração pela matemática fica por si justificada.

Quando o Professor Dinis se referiu à “beleza estrutural do raciocínio matemático”, informou-nos também do seu gosto e fascínio pelas demonstrações matemáticas:

> Eu gosto das demonstrações. As demonstrações, evidentemente, há vários tipos de demonstrações, quer dizer (...) há umas que são muito chatas e que servem só para provar que aquilo é verdade, há outras que são interessantes justamente pelas belas ideias que encerram. A começar, por exemplo, pela demonstração que já vem do Euclides, que a raiz de dois não é racional, é uma bela demonstração. Nisso, eu compreendo bastante bem aquela ideia de um matemático húngaro, chamado Paul Erdős, enfim, muito conhecido, um matemático excêntrico, um indivíduo muito estranho, publicou centenas e centenas de artigos. O Paul Erdős dizia que Deus tinha um livro, a que ele chamava apenas “O Livro”, onde estavam registadas as mais belas e mais interessantes demonstrações da matemática e (…) portanto, o Paul Erdős ficava todo contente quando conseguia demonstrar uma coisa qualquer e considerava a demonstração muito elegante, muito bonita, capaz de ir para o livro e, isso é uma coisa que, esteticamente, é fascinante. (primeira entrevista)

Nesta posição, a “elegância” e “harmonia” na forma como os conceitos matemáticos se relacionam são outros dois atributos que este professor associa à matemática. A formalização matemática ou a “teoria da demonstração” onde uma sequência de símbolos se manipulam abstratamente, com o objetivo de construir uma teoria matemática, impõem-se como a atividade matemática que mais fascina o

Professor Dinis. Neste enquadramento, este Professor aproxima-se da doutrina formalista onde se destaca que a prioridade da matemática consiste na combinação de símbolos matemáticos destituídos de qualquer significado.

No seu ponto de vista, fazer matemática é levar o "espírito humano aos seus limites". Assim, a matemática é perspetivada como uma ciência dinâmica, que desafia continuamente o homem, num "jogo intelectual" e na busca incessante pela criação de mais relações entre as várias teorias matemáticas. Nas suas palavras, a atividade matemática consiste em:

> Tentar levar o espírito humano aos seus limites. (…) Nos estudos de Lógica Matemática e de Fundamentos da Matemática, em que aí, no fundo, não se está já a procurar uma aplicação direta das coisas, nem sequer uma aplicação indireta, está-se a refletir na maneira de raciocinarmos e na maneira de desenvolvermos a própria matemática. E, portanto, no fundo está-se a discutir (…) os processos intelectuais, os que são lícitos, os que não são lícitos, (…) a tentar desmontar o raciocínio e a tentar estabelecer, mesmo, os limites desse próprio raciocínio. Como, por exemplo, o Teorema de Gödel 1931, que é considerado uma das maiores vitórias (…) do intelecto Humano, no século XX e que, no fundo estabelece uma espécie de limites para aquilo que a abstração consegue fazer, o Teorema da Incompletude. Que mostra que um sistema formal dentro de certas condições nunca é completo, nunca se consegue demonstrar tudo, há sempre coisas que são verdade mas não se conseguem demonstrar. Portanto, nesse aspeto, o matemático puro, o matemático abstrato, está a fazer um jogo intelectual, está a pegar nas coisas e a tentar ver até onde é que consegue ir, até onde é que consegue chegar, o que é que consegue ainda deduzir daquilo, ou, eventualmente, a tentar relacionar teorias que até aí não se via relação nenhuma. (primeira entrevista)

Para o professor Dinis, a matemática surge na sequência de uma necessidade humana. É, portanto, criada pelo homem. Como nos elucida:

> A matemática começa a partir do momento em que o Homem tem bens, possui objetos. Visto que, e isto não é uma pura conjetura, quer dizer isto foi confirmado pela Antropologia, no estudo das tribos primitivas. (…) Pessoas

> que vivem da caça e da pesca, e que vão apanhar frutos às árvores, precisam de contar (…) e a contagem, a delimitação de áreas, são coisas básicas da matemática, coisas iniciais. (…) Conceitos de matemáticos, aqui na circunstância, traduzidos pelos números, pela Aritmética. Existiam tribos, por exemplo, que já conseguiam contar, mas só contavam coisas do género "um, dois, três e muitos". (..) Era assim, porque não tinham necessidade de mais, e as pessoas só começaram a ter necessidade de contar, por terem objetos, terem coisas. Quando um homem começa a ter um rebanho tem que aprender a contar as ovelhas, porque senão vai para o campo com elas, perde duas ou três e não dá por isso. Tem que as contar para saber se estão todas. Quando um homem começa a ter bens pessoais, riqueza (…) que o distingue de outros, é preciso avaliar essa riqueza, quando começa a ter uma terra para lavrar, para plantar umas coisas tem que começar a avaliar as dimensões. (…) Quando começa a fazer trocas comerciais, com outras tribos, com outras civilizações, com outros homens, essas trocas comerciais têm que ser avaliadas, têm que haver mecanismos de avaliação, as coisas têm que ser contabilizadas. (primeira entrevista)

Como podemos constatar, na ótica deste Professor, a matemática é uma atividade humana ancestral e fundamental, desenvolveu-se, nos primórdios, como uma ciência da medida e da aritmética que permitia ao homem a "gestão" de problemas do seu dia-a-dia.

O Professor Dinis está ciente e tem profundo conhecimento do florescimento nos séculos XIX e XX de um grande número de novos ramos da matemática. Este Professor elucida-nos ainda acerca de determinados campos da matemática que se julgavam esgotados e que durante o último século foram impulsionados com novas teorias:

> Todos os dias, um pouco por todo o Mundo, se descobrem novas coisas, e uma vez por outra, até, novas teorias (…) mesmo dentro das teorias já existentes, todos os dias aparecem novas coisas. E nem é preciso ir tão longe porque, de cada vez que nós fazemos um ponto de exame, (…) fazemos uma pergunta teórica, (…) acabamos por inventar uma nova coisa, uma nova "propriedadezinha". Pode não ter interesse nenhum, pode ser uma coisa elementar, mas é uma coisa nova, que foi acabada de descobrir. Muitas vezes

acontece que um matemático descobre umas propriedades, uns teoremas, resolve um problema e, depois, verifica que houve um sujeito na China, ou na Índia, ou no Japão que um mês antes tinha descoberto o mesmo. A matemática está (…) o mais vivo possível, quer dizer há congressos de matemática por toda a parte do mundo, em que são apresentados resultados novos. Essa ideia de que a matemática está esgotada, no fundo, é semelhante aquilo que se pensava no século (…) nos fins do século XVIII, princípios do século XIX, que "a Lógica está esgotada". Achava-se que a Lógica Aristotélica já tinha dado o que tinha a dar, pronto não havia mais nada para dizer em Lógica. Ao passo que, no século XIX, houve a grande expansão da Lógica Matemática, com nomes famosos como Bertrand Russell, (…) que enveredou pela Lógica Matemática e que descobriu coisas sensacionais, (…) teorias novas, ideias novas, conceitos novos para uma coisa que se pensava que estava esgotada. (primeira entrevista)

Na visão do Professor Dinis, a matemática é uma ciência relativa onde não há verdades absolutas. A "verdade matemática" é, em sua opinião, uma "verdade puramente relativa" que depende dos axiomas que estão em causa e da teoria matemática que se pretende alcançar:

A verdade matemática é uma coisa relativa. (…) Na matemática Clássica, primeiramente, era o estudo do mundo ao nosso redor. A Geometria, como o próprio nome indica, "Geo-Metria", era a medição da Terra. Era medir as áreas, os perímetros e coisas assim. Portanto, eram coisas mais ou menos concretas. Mas com a Matemática Moderna, a partir do século XVII, XVIII, XIX, a matemática converteu-se numa teoria axiomática e, portanto, não há verdades absolutas, pura e simplesmente, quer dizer, as coisas podem ser verdade numa certa teoria, a partir de certos teoremas, a partir de certos axiomas. Se os axiomas forem outros, a verdade passa a ser outra e o exemplo mais flagrante disso foi, no século XIX, as descobertas das geometrias "não-Euclidianas". Até ali, a única Geometria que se conhecia era a Geometria de Euclides, onde prevalecia o chamado Axioma das Paralelas. No século XIX, justamente com o desenvolvimento da Lógica Matemática, percebeu-se que esse axioma era independente dos outros, quer dizer, os restantes axiomas com esse não produziam incoerência nenhuma, e os restantes axiomas com a

> negação desse também não produziam incoerência nenhuma. (…) Tínhamos teorias diferentes com geometrias diferentes, geometrias "não-Euclidianas". Que depois, até, vieram algumas a ter aplicações práticas. Por exemplo, na Relatividade tudo aquilo é passado num espaço em que a geometria não é Euclidiana. Mas, portanto, a verdade na matemática, é uma verdade puramente relativa, tudo depende dos axiomas que estão em causa e da teoria que estamos a fazer. (primeira entrevista)

A importância da Matemática

Na conceção do Professor Dinis, a matemática é a ciência do raciocínio. É uma teoria lógico-dedutiva que fornece a ginástica mental permitindo ao cérebro exercitar-se "nos raciocínios", "nas deduções", "no rigor" e "na utilização da Lógica":

> A matemática ensina técnicas, fornece ginástica mental, por ser uma teoria lógico-dedutiva, uma ciência lógico-dedutiva, permite que o cérebro se exercite nos raciocínios, nas deduções, no rigor, na utilização da Lógica. E isso depois serve de ajuda a quaisquer raciocínios que se façam, nem que seja a discutir futebol. Quer dizer, uma pessoa se raciocinar bem, discute bem Futebol, se raciocinar mal, discute mal e tira conclusões erradas. (última entrevista)

Na perspetiva do Professor Dinis, a matemática é descrita como indispensável visto que fornece a linguagem que permite descrever e formalizar, sintética e ordenadamente, o universo:

> Quando o Leonardo Da Vinci desenvolvia as suas máquinas, máquinas de guerra ou disto ou daquilo, ele tinha que lidar com forças, com aspetos físicos, e toda a Física se rege por leis, que os físicos procuram compreender e formalizar. E é na formalização que a matemática intervém, e, portanto, a matemática, neste aspeto, fornece uma espécie de linguagem, que permite facilitar a descrição do Universo. Sem a matemática, a descrição do Universo seria uma coisa confusa, para dizer uma coisa tinha que se estar duas horas a

> falar, e se usarmos um conceito matemático, aquilo fica mais sintético e, portanto, permite resumir e focar melhor o que se pretende dizer. E, portanto, é nesse aspeto que a matemática se revela indispensável. É na formalização das coisas e na descrição sintética das coisas. (primeira entrevista)

Tendo em devida conta as caraterísticas de abstração e generalização, a matemática é descrita do ponto de vista concetual como estando na cúpula de todas as ciências:

> Do ponto de vista conceptual, a matemática, no fundo, está na cúpula das ciências, considerando o ponto de vista da generalidade e da abstração. É evidente que, quanto mais geral e mais abstrata for uma ciência, mais parecida será com a matemática. Por exemplo, a Física Teórica, no fundo, é a Matemática Aplicada, é usar técnicas matemáticas para interpretar o Universo, para interpretar o Cosmos, etc. Se for uma ciência muito mais experimental, uma ciência muito mais empírica, está muito mais afastada da matemática. (primeira entrevista)

Neste contexto, ao referir-se à importância da matemática, este Professor afirma que, por um lado, a matemática tem a sua relevância do ponto de vista aplicacional, auxiliando outras ciências na resolução de problemas concretos. Assim:

> A matemática é encarada do ponto de vista da aplicação, portanto, a matemática como instrumento para resolver problemas. Quando um físico ou um engenheiro tem problemas é preciso resolvê-los usando técnicas matemáticas. Eu, por exemplo, tenho um amigo que foi meu colega de Liceu que se doutorou em Engenharia (…) e fez uma tese de doutoramento sobre cristais líquidos. Ele (…) trabalhava em parceria com um professor de matemática, (…) porque ele, quando fazia as suas experiências com cristais líquidos, bombardeava-os com umas radiações, depois media a radiação emitida e tentava tirar conclusões. Ao fazer isso tudo, apareciam-lhe equações diferenciais, que ele não conseguia resolver, então passava-as para um matemático que investigava aquilo, e também não as conseguia resolver, era preciso inventar novos processos matemáticos para conseguir resolver aquilo. E muitas vezes ele dizia “bom se eu fizer aqui uma mudança de variável, uma

> coisa assim, eu consigo, por exemplo, anular estas parcelas e simplificar a equação". E depois o físico dizia "não, mas essas parcelas não me convém que se anulem porque isso tem importância, procure antes anular aquelas que não me interessam para nada". Portanto, há este objetivo da matemática, (…) auxiliar outras ciências. (primeira entrevista)

Por outro lado, e apesar de considerar que toda a matemática pura tem ou vai ter aplicação num determinado contexto aplicacional, o Professor Dinis remete-nos para a importância da matemática pura no desenvolvimento do raciocínio matemático:

> A pesquisa matemática pura, em que, nesta fase, é quase um jogo intelectual. E se isto fosse assim, ou se isto fosse de outra maneira, o que é que se podia deduzir daí? O que não quer dizer que as duas coisas não acabem por se interligar, porque há muita coisa que se deduz no plano puramente abstrato, e que mais tarde vem a encontrar aplicação. Há múltiplos exemplos ao longo da História. Indivíduos, por exemplo, da Física que a certa altura usavam lá umas técnicas para fazer umas contas e, depois, descobriram que estavam a trabalhar com matrizes e a aplicar matrizes, sem saber. Porque as matrizes já tinham sido inventadas, e eles faziam as mesmas contas sem saber que eram matrizes, ficavam com os índices só, e por aí fora. Por isso o Professor Pereira Gomes costumava dizer, era uma pessoa muito divertida, e costumava dizer que a matemática pura é aquela que ainda não se aplica. (primeira entrevista)

Ao refletir sobre o trabalho dos matemáticos, o Professor Dinis salienta que atualmente os computadores e determinadas aplicações informáticas são instrumentos indispensáveis para o desenvolvimento de certas teorias matemáticas:

> O que é um matemático? A resposta mais elementar é que um matemático é um indivíduo que estuda matemática, que aprende matemática, que desenvolve a matemática, ou que ensina a matemática. O que é que o matemático utiliza? Bom, tradicionalmente utiliza papel e lápis. Mais nada. Porque, justamente, o facto de a matemática ser uma ciência abstrata significa que a maior parte da matemática é construída no intelecto e, portanto, só precisamos de um papel e lápis para ir tomando nota das conclusões. Modernamente já não é tanto assim, porque com a introdução dos computadores há, hoje em dia, aspetos computacionais da matemática. Por

> exemplo, o Teorema das Quatro Cores na Topologia, que diz que quatro cores são suficientes para pintar um mapa plano, sem que dois países contíguos tenham a mesma cor. Foi uma coisa que só foi possível ser demonstrada com o auxílio de computadores, porque foi preciso analisar milhares e milhares de casos, e aquilo à mão a pessoa perdia-se. Esse tipo de demonstração até foi um bocado contestada inicialmente, hoje creio que já é perfeitamente aceite. Hoje em dia, para certos estudos, por exemplo, as pessoas que estudam a Teoria de Números (…) têm que trabalhar com computadores porque têm que fazer cálculos que levam milhares de horas de computador, portanto, que levaria milhões de horas humanas a fazer, e não era possível. O estudo, por exemplo, da sequência dos números primos, (…), são coisas que só os computadores é que conseguem fazer, portanto, são instrumentos indispensáveis nessas áreas. (primeira entrevista)

Nesta sequência, este Professor destaca também a relevância da matemática para o desenvolvimento das novas tecnologias. Assim, a matemática é apresentada como fulcral para o desenvolvimento de outras ciências e, no desenvolvimento do "plano tecnológico":

> Hoje em dia, nada do que nós usamos quotidianamente, no plano tecnológico, poderia existir se não houvesse matemática. Porque a gente sabe, que desde os televisores, aos computadores, aos iPods, aos automóveis (…) nada disso existia sem Engenharia. A Engenharia não existia sem a Física, a Física não existe sem a matemática. Portanto, a matemática está na base de tudo, se não tivéssemos matemática viveríamos numa sociedade rural, sem tecnologias. (primeira entrevista)

O ensino da matemática no Ensino Superior

A finalidade do ensino da matemática

Como já mencionámos, na visão deste Professor a matemática surgiu como uma criação do homem e da necessidade deste fazer face às dificuldades e aos problemas práticos do seu dia-a-dia. Assim, a matemática começou por ser uma “técnica prática” para resolver este tipo de problemas. No contexto escolar do ensino da matemática no ensino superior, para o Professor Dinis, esta disciplina fornece aos alunos do primeiro ano (na grande maioria das Licenciaturas) conhecimentos gerais de matemática, as chamadas “ferramentas” matemáticas que são entendidas como fundamentais para aplicar em outras disciplinas da Licenciatura, ou entendidas como conhecimento matemático necessário para quem quer tirar um curso superior. Como afirma:

> A matemática dada para este tipo de cursos é uma ferramenta, para que, depois, nas disciplinas da especialidade, isto quer seja no curso de Economia, Gestão, Biologia, Física, ou Química, (…). A ideia não é ensinar matemática, a ideia é dar-lhes os instrumentos matemáticos necessários para que, depois, nas suas áreas de especialidade, os possam usar. (última entrevista)

Pelo que, referindo-se em particular “às necessidades matemáticas” dos alunos do curso de Economia, este Professor salienta a importância e justificação do ensino do conceito de derivada devido às suas aplicações nas necessidades reais no domínio dos modelos económicos, mais precisamente no estudo dos custos marginais:

> Portanto, num curso de Economia (…) eles utilizam muito as derivadas, a derivação de funções implícitas, por exemplo, é preciso que os alunos dominem isso. Pode, até, dispensar-se das partes mais teóricas. Quando dou matemática a estes cursos, dispenso uma percentagem muito elevada de demonstrações. Faço as demonstrações mais simples e aquelas que ilustram os conceitos, mas as demonstrações mais complicadas, não as faço. Por exemplo, regras de derivação: por uma questão de ilustrar o conceito, às vezes, deduzo a regra da derivada da soma de duas funções, mas a derivada do produto ou do quociente, já não a faço, porque não vale a pena, aquilo não lhes interessa, não é isso que eles precisam de saber. Precisam é, depois, de aplicar as derivadas aos custos marginais. (última entrevista)

Na conceção do Professor Dinis, a matemática é a ciência do raciocínio. O seu ensino é fulcral na medida em fornece a ginástica mental permitindo ao cérebro exercitar-se “nos raciocínios”, “nas deduções”, “no rigor” e “na utilização da Lógica”. Contudo, no contexto do Ensino Superior, este Professor é de opinião que a razão fundamental para o ensino da matemática, prende-se com as suas futuras necessidades de aplicação de certos conceitos matemáticos no âmbito das suas Licenciaturas. É a matemática aplicada em toda a sua plenitude.

O papel do professor e o papel do aluno

Na ótica do Professor Dinis, de uma forma geral, um bom professor de matemática deve dominar em absoluto os conceitos científicos a ensinar aos seus alunos, bem como possuir uma elevada capacidade de comunicação. A clareza na forma como apresenta os conceitos e a simpatia do professor para com os seus alunos, são caraterísticas vistas como essenciais para o ensino da matemática. Como defende:

> Um bom professor de matemática tem que possuir basicamente duas caraterísticas. Primeiro, tem que saber a matéria, isso é fundamental, fundamental! Segundo, tem que ter uma boa capacidade de comunicação com a turma. Idealmente, tem que ser uma pessoa que se saiba explicar com clareza. Portanto, para mim, o primeiro critério é saber bem o que está a dizer, não cometer erros. Porque é preferível que o professor não ensine assim muito bem, mas não cometa erros, porque os alunos depois sempre podem com os apontamentos das aulas procurar perceber melhor, com o apoio de aulas práticas, se as houver – muitas vezes, o professor tem um assistente e este também vai explicando algumas coisas – e com o apoio bibliográfico, o aluno pode sempre completar aquilo que aprendeu. Portanto, a primeira coisa é saber a matéria, depois, de preferência, ter boa comunicação com a turma. Há professores que têm uma má relação pessoal com a turma, que se tornam antipáticos, de que os alunos não gostam e, portanto, depois é difícil transmitir a matéria. (última entrevista)

Versando acerca do papel do professor numa aula de matemática, este Professor perspetiva que a gestão do tempo da aula é fundamental no ensino da matemática. Assim:

> O professor deveria ser capaz de transmitir aos alunos, naquele tempo de aula, uma determinada matéria. Essa matéria tem que estar pensada para caber no tempo de aula, é desagradável deixar assim um bocadinho pendurado para a aula seguinte, porque perde a sequência ou, então, tem que se voltar muito atrás e perde-se muito tempo. Portanto, o professor, ao entrar na sala, deveria ter um objetivo para a aula. (última entrevista)

Neste sentido, na sua opinião um bom professor de matemática deve primeiramente ser capaz de colocar o problema a ensinar, motivando os seus alunos para a temática em estudo recorrendo às aplicações futuras da mesma, quer noutros campos da matemática, quer noutras disciplinas do plano curricular das suas Licenciaturas:

> É tentar motivar o assunto, na medida do possível, explicando de onde é que vem ou, pelo menos, assegurando aos alunos que vem de algum sítio ou que vai ter aplicação mais tarde, porque, às vezes, há coisas que a gente, de momento, não pode explicar para que é que servem, mas tem que dar aos alunos uma certa garantia de que vai servir para alguma coisa. (…) Por exemplo, quando se estuda as formas quadráticas, só dizendo o que é uma forma quadrática e qual é a classificação, indefinidas, semi-definidas, (…). e como é que se classifica, naquele momento, aquilo parece que não serve para nada. Portanto, é preciso que o professor assegure aos alunos que aquilo é dado porque vai ser útil quando formos estudar máximos e mínimos. Máximos e mínimos, um aluno de Economia ou de Gestão, percebe que é importante. E, portanto, se lhe dizem que aquela matéria vai ser dada mais tarde ele aceitará melhor. (…) É motivar um assunto, ou dando uma motivação concreta, começando com exemplos ou utilizando uma matéria já dada ou, pelo menos, assegurando que vai ser necessária adiante. Depois, é expor o melhor possível, com clareza, as partes técnicas, as propriedades, os conceitos necessários e fazer alguns exemplos. (última entrevista)

Questionado sobre o papel dos alunos nas aulas de matemática no Ensino Superior, este Professor argumenta que estes devem acompanhar os raciocínios matemáticos em causa, respondendo às questões que o mesmo vai levantando na exposição dos conceitos em estudo, não se limitando a passar a matéria do quadro.

Em todas as aulas que tivemos oportunidade de observar, o Professor Dinis foi incansável na colocação de perguntas aos seus alunos, sendo que na maior parte das vezes e apesar de os alunos parecerem estar atentos, não obteve respostas. A falta de participação dos seus alunos no desenrolar das suas aulas teóricas é um aspeto que não lhe agrada, tal como o desgosta que os alunos não tragam dúvidas para esclarecer nas aulas. Como desabafou no final de uma das aulas observadas:

> Eu gostava que nas aulas teóricas eles fossem capazes de responder às perguntas que eu faço. Ou seja, terem o raciocínio suficientemente desenvolvido para estarem a acompanhar as explicações e, até, em muitos casos, a prever a maneira de fazer certas coisas ou o resultado que certas coisas vão dar. (…) Nas propriedades dos determinantes quando a gente explica que se multiplicar uma linha por uma constante, o valor do determinante vem multiplicado por essa constante, daí resulta imediatamente que se multiplicarmos a matriz toda por uma constante, o determinante é multiplicado pela constante elevado ao número de linhas. Portanto, um aluno deveria ser capaz de perceber isto e responder logo. E mesmo que respondesse mal numa primeira tentativa, depois, com uma observação da nossa parte, deveria ser capaz de emendar. Portanto, isso era o que se gostaria de ter. Numa aula prática, seria bom que os alunos tivessem feito exercícios e trouxessem dúvidas (…) "eu estive a fazer o estudo de funções, consegui fazer esta, esta e esta, mas aqui nesta não me está a dar bem", para a gente ver onde é que havia o problema. (entrevista curta após aula)

Referindo-se ainda ao papel do aluno na aprendizagem da matemática, argumenta que um excecional aluno "é capaz de improvisar" uma demonstração que lhe seja colocada na aula, sendo que esta característica para si é distintiva dos que considera alunos bons ou médios. De qualquer modo, para todos vê como indispensável, ser capaz de acompanhar e de participar no desenrolar da aula:

> Um muito bom aluno é um aluno que é inteligente, que tem jeito para matemática, que trabalha, evidentemente, que estuda as coisas e que, depois, em plena aula teórica, é capaz de improvisar a demonstração de um teorema, mesmo que não seja inteiramente trivial. Como no meu tempo acontecia com várias pessoas. Em plena aula teórica, o professor punha um teorema e havia vários alunos na minha turma capazes de dizer "olhe, isso demonstra-se assim, desta maneira". Portanto, isso é um aluno excecional, digamos. Um aluno bom é, pelo menos, aquele que está interessado, que tem hábitos de trabalho, que tem prática, que estuda devidamente e que tem o raciocínio suficientemente desenvolvido para perceber bem e para responder às tais perguntas que a gente faz. Já não estou a dizer que improvise demonstrações complicadas. Que perceba que um teorema se tem de provar por absurdo ou por indução matemática ou coisa assim. Mas, pelo menos, que responda facilmente àquelas perguntas que a gente vai fazendo. Isso é que seria um bom aluno. Que chegaria ao ponto e consistentemente teria à volta de catorze, quinze, dezasseis. (última entrevista)

Assim, um bom aluno a matemática é aquele que está motivado, que manifesta interesse, que tem hábitos de trabalho, que durante as aulas teóricas é capaz de seguir os raciocínios matemáticos em causa e, em conjunto com o professor, "construir" e até antecipar as teorias em estudo.

As aulas de matemática

Sendo professor universitário com mais de três décadas de experiência no ensino da matemática em diversas Licenciaturas, e tendo em devida conta com o facto de considerar que as matérias que ensina são "elementares", confessou não dedicar muito tempo, em geral, à preparação das suas aulas, dedicando-se essencialmente ao alinhamento dos temas a abordar. No entanto, quando leciona disciplinas mais complexas, prepara apontamentos com ideias, demonstrações e exemplos e explorar:

> Como já sou professor há muito tempo e dou a mesma matéria há muito tempo, não gasto muito tempo a preparar aulas. Há muito o improvisar. Eu como não preparo as aulas, a não ser, enfim, pensar no que é que tenho para dar, para saber o que vou dar a seguir, o que é que dei na aula anterior. (...) Quando são cadeiras um bocadinho mais avançadas, aí, já a coisa é diferente, às vezes, tenho que pensar, na véspera, o que é que vou dizer, e até, levar uns apontamentos se há alguma demonstração mais complicada. (...) Quando se trata de dar exemplos eu, normalmente, não levo os exemplos preparados, porque com o treino, a gente consegue improvisar um exemplo, controlando, mais ou menos, o resultado que nos vai dar. Por exemplo, se a gente quer dar um exemplo de um sistema de equações possível e indeterminado, é fácil escrever umas equações e fazer com que a última seja a soma das duas primeiras. Os alunos não dão por isso, não percebem que aquilo já está armadilhado, à partida, para dar o efeito que a gente quer.(última entrevista)

Durante as aulas que tivemos oportunidade de observar, o Professor Dinis manifestou-se sempre muito confiante e motivado. No desenrolar das suas aulas nunca recorreu aos seus apontamentos, nem mesmo quando apresentava e resolvia exercícios no quadro.

Para o Professor Dinis o quadro e o giz são os materiais de trabalho para as suas aulas teóricas e de orientação tutorial. Tudo o que diz durante a aula é cuidadosamente escrito no quadro. Nas suas aulas observamos a forma como organiza e apresenta a matéria no quadro. Tudo é meticulosamente estruturado por forma a ter no quadro, do princípio até ao final da aula, as definições e teoremas que são mais importantes, caso seja necessário comparar os conceitos em estudo.

O Professor Dinis justifica esta capacidade para gerir o espaço do quadro com a sua vasta experiência no ensino da matemática:

> Isto resulta, única e exclusivamente, do treino, da prática, porque já faço isto há trinta e tal anos e, portanto, eu já sei mais ou menos o que é que cabe em cada aula. Quando começo a dar um assunto, já imagino, mais ou menos, onde é que aquilo vai acabar, o que é que me cabe no quadro. E, portanto, também quando começo um assunto, eu sei, à partida, o que é que quero dizer sobre aquilo e, por consequência, sei o que é que me interessa ter presente no quadro e, por isso, posso fazer a gestão do espaço. E, se me interessa que a definição esteja presente durante a aula toda, tomo o cuidado de a pôr num canto e de não a apagar e de não ocupar demasiado espaço com aquilo. Se for uma observação, que eu sei que não me vai fazer falta nenhuma, já posso pôr no meio do quadro e depois apagar a meio. (última entrevista)

Tendo em consideração as caraterísticas que associa à matemática, para este Professor, a clareza e a organização na apresentação dos conteúdos no quadro é fundamental para uma boa aprendizagem da matemática. Exemplificando, refere:

> Porque a matemática, propriamente dita, o assunto, tem muito a ver com a estruturação das coisas. A gente quando tem um problema, mesmo um problema concreto, quer seja um problema de Física, quer seja um problema corriqueiro, de torneiras a encher num tanque e outras a esvaziar, seja o que for, a primeira coisa a fazer é aquilo que no meu tempo se chamava pôr o problema em equação. No fundo, pôr o problema em equação é estruturar as coisas, é saber o que é dado, o que é pedido, quais são as incógnitas a estabelecer para depois ir procurar os valores, é pensar em que tipo de matéria é que aquilo se enquadra para depois aplicar as propriedades adequadas. Portanto, é realmente um esforço de estruturação do raciocínio. Logo, se nós, à partida, já apresentarmos as coisas devidamente estruturadas isso facilita a aprendizagem, porque o aluno mais facilmente tem quadros de referência em que pode depois encaixar as coisas. Se a matéria for apresentada de uma forma muito vaga, muito desorganizada, depois o aluno, provavelmente, terá muito mais dificuldade em se localizar no meio daquilo. (última entrevista)

Como podemos observar nas suas aulas, o Professor Dinis faz consecutivamente perguntas aos seus alunos. Este procedimento prende-se com o facto de defender que o aluno deve ter uma participação ativa na aula, e procurar alcançar respostas para as questões colocadas. Na sua ideia, é mais importante obter respostas dos alunos e "pôr a turma a funcionar":

> Eu vou sempre perguntando, porque é mais estimulante, para um aluno, procurar chegar a uma resposta do que estar puramente a ouvir respostas já feitas. É claro que isso, infelizmente, nos tempos que correm, a maior parte das vezes não resulta porque a gente pergunta as coisas e ninguém responde. Mas, desde que haja uma certa resposta da turma, é mais interessante pôr a turma a funcionar. (última entrevista)

Na realidade, durante as aulas do Professor Dinis, observamos que os seus alunos estavam muito atentos e passavam a matéria que este Professor ia escrevendo no quadro. Contudo, quando questionados, mantinham-se em silêncio sendo necessário o Professor responder às suas próprias questões.

Foi possível observar a profunda preocupação que este Professor tem com a transmissão dos conteúdos em estudo, perguntando diversas vezes aos seus alunos se tinham dúvidas, e repetindo sempre que questionado. No final de uma das aulas observadas confidenciou que gostava de ser como um professor seu que, quando a aula não lhe corria bem, na aula seguinte repetia as partes mais importantes.

Da observação das suas aulas, compreendemos que na conceção deste Professor a forma como dá a sua aula depende fundamentalmente dos conteúdos em estudo**.** Assim, por um lado, há conceitos em que devido às suas caraterísticas e visando uma melhor motivação para o seu estudo, parte de casos concretos e até mesmo de exemplos práticos. Por outro lado, quando os temas são "mais difíceis de motivar" e para uma melhor gestão do tempo de aula, argumenta que se comece pela definição dos conceitos em estudo, remetendo para o final da aula a resolução de exercícios de aplicação dos mesmos. Como nos disse, no final de uma das suas aulas:

> Há coisas que se prestam para partir de casos concretos e tentar motivar o conceito. Por exemplo, se uma pessoa está a dar, em Álgebra Linear,

> aplicações lineares e depois quer introduzir valores próprios e vetores próprios, dá jeito, por exemplo, pegar em aplicações de R^2 para R^2, dar-lhes uma interpretação geométrica (…). Se eu pegar em rotações ou em simetrias em relação a um eixo e depois, a partir dessa interpretação geométrica, chamar a atenção para o facto de que certos vectores mantêm a direcção e que esses têm um comportamento especial e que se chamam vectores próprios, etc. Outras vezes, os conceitos são um bocadinho (...) mais dificeis de motivar, ou por que a motivação seja mais longa e não há tempo, na aula, para começar por aí, então, às vezes é preferível começar logo pela definição e vamos por aí fora. Por exemplo, quando eu introduzo o conceito de produto interno, é evidente que uma pessoa poderia partir de coisas de carácter geométrico, do ângulo, da trigonometria, ver assim umas coisas, e depois, a partir daí, introduzir a noção de produto interno, mas leva muito tempo. Ainda por cima, os alunos não dominam bem a Trigonometria. Portanto, dá pouco jeito. Atravanca muito as aulas. Gastam-se ali umas três ou quatro aulas com isso. (entrevista curta após aula)

Apesar de considerar que as demonstrações são "a essência da matemática", nas aulas que tivemos oportunidade de observar quase não se realizaram. Numa das curtas entrevistas feitas após a observação de uma das suas aulas, o Professor Dinis explicou-nos que as razões para este procedimento prendem-se com a curta duração das aulas teóricas, as dificuldades e impreparação dos seus alunos. Assim, na sua visão, numa aula de matemática com a duração de uma hora não é possível realizar demonstrações grandes, e na maior parte das vezes os alunos que assistem às suas aulas não têm "conhecimentos matemáticos", nem o raciocínio matemático suficientemente desenvolvido para o acompanharem na realização das mesmas:

> As demonstrações são aquilo que se podia chamar um mal necessário. (…) As coisas têm que ser provadas, a gente faz uma afirmação e tem que provar que aquilo é verdade, tem que fazer a demonstração (…). Embora depois haja algumas coisas que, também, são de carácter construtivo e, portanto, para além de provar o que se está a dizer, também, ajudam a construir coisas. Por exemplo, na Álgebra Linear, o método do Gram-Schmidt permite, a partir de

uma base qualquer, construir uma base ortonormada. Isto por um lado prova a existência de bases ortonormadas. A gente sabe que em qualquer espaço de dimensão finita, um produto interno, é possível ter bases ortonormadas. E como é que a gente sabe que é possível? Porque a gente pode pegar numa qualquer e construir uma ortonormada com o processo de Gram-Schmidt. Pronto, mas o método do Gram-Schmidt, se eu quiser, posso pô-lo em prática mesmo, quer dizer, não é uma demonstração só de existência. É uma demonstração construtiva. Noutros casos não, noutros casos há uma prova de existência de coisas, uma prova de que isto é assim, mas sem o aspeto construtivo. Por exemplo, uma demonstração por redução ao absurdo não tem nenhum aspeto construtivo. A demonstração é a essência da matemática desde o tempo de Euclides. (…) A matemática foi organizada com o carácter lógico-dedutivo, partindo de axiomas, depois deduzindo coisas. E como não é Catequese, essas coisas que se deduzem têm de ser justificadas. Se não forem justificadas ninguém tem que as aceitar. (última entrevista)

Na perspetiva deste Professor, é essencial no ensino da matemática no Ensino Superior, destacar as vantagens do estudo dos conceitos matemáticos em causa, fazendo, sempre que possível, referência a exemplos de aplicações dos conteúdos em estudo nas áreas de especialização dos alunos. No entanto, nas aulas observadas durante este estudo, não foi feita alusão a nenhuma aplicação dos conteúdos. O Professor afirma que tem por objetivo que os seus alunos entendam em profundidade o conceito e as situações onde este pode ser aplicado:

Por exemplo, quando introduzo o conceito de derivada, procuro explicar, com muito pormenor – eu gasto quase uma aula só com o conceito de derivada – e procuro explicar aos alunos que a derivada mede, essencialmente, uma variação. E, para eles perceberem a ideia, eu utilizo dois ou três exemplos, que não exploro até à formalização, mas que deixo mais a nível intuitivo só para que a ideia lá fique. (…) Eu tenho em vista que o conceito lhes fique em traços gerais. Ainda antes de entrar na formalização. Antes de dizer que a derivada é o $\lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Porque isso é uma coisa que o aluno depois aprenderá, mas, mesmo que não saiba no momento, ou que se esqueça, pode sempre ir ver a um livro ou a uma tabela. Mas o conceito é outra coisa, o conceito é, digamos, ele saber em que situações é que a ideia de derivada pode ser útil. Eu começo, normalmente, por lhes colocar o seguinte, dizer-lhes que, quando a gente tem uma função (…) interessa-nos saber os valores que a função dá, é evidente. Mas, às vezes, também interessa saber a variação, saber quanto é que variou, independentemente, do valor que ela deu. Por exemplo, quando a gente lê, no jornal, uma notícia a dizer que o preço do barril de petróleo aumentou dez euros, isto é a variação. Isto não nos diz quanto é que custava antes nem quanto é que custa agora, só diz que aumentou dez euros. E isso é uma notícia interessante, porque a gente, daí, já sabe quais são as consequências que isso vai ter: os transportes podem aumentar, os combustíveis aumentam, os produtos, depois, aumentam por causa dos transportes, etc. Sabe-se que isso vai ter as suas consequências. Só essa informação já é interessante. Faço-lhes ver que essa informação, apesar de interessante, é fraca. Porque uma coisa é o aumento de dez euros ter sido num prazo por exemplo, de cinco anos, outra coisa é ter sido de um dia para o outro. As consequências são muito diferentes. E, depois, digo-lhes, (…) se o aumento de dez euros for em cinco anos, a gente pensa, bom (…) são cerca de dois euros por ano e temos uma ideia de variação média de quanto é que variou. Mas depois a gente pensa, se aumentou dez euros em cinco anos, não quer dizer que tenha aumentado mesmo dois por ano, pode ter estado quatro anos sem aumentar nada e depois aumentar tudo junto, ou pode ter baixado pelo meio e depois voltado a subir, desde que a diferença entre o princípio e o fim seja dez euros, e isso significa que, em intervalos grandes, a variação dá-nos pouca informação e, em intervalos mais pequenos, dá melhor informação.(…) Mas tudo isso só em termos intuitivos, que é para ver se o conceito lá fica. Se o conceito lá ficar, depois, o aluno, provavelmente, percebe melhor as vantagens de aprender a lidar com aquilo, até porque, não são alunos de matemática, são alunos de Gestão, de Economia e coisas do género, em que, portanto, vão aplicar derivadas a fenómenos, por exemplo, da esfera económica, a receitas, a lucros, os lucros marginais, as receitas marginais (…) Tudo o que é marginal, em Economia é derivada. E, portanto, se a ideia lá ficar, depois, quando, nas cadeiras de Economia, da especialidade, usarem derivadas para tirar conclusões, aquilo já não lhes deve parecer estranho. (última entrevista)

Nas suas aulas de orientação tutorial este Professor informou-nos que resolve e explica, em pormenor, um conjunto de exercícios de aplicação direta, e que ”ilustrem o maior número possível” dos conceitos matemáticos em estudo. Como nos elucida:

> Escolho exercícios que ilustrem todos os aspetos que se pretende que eles saibam. Por exemplo, se se trata, suponhamos, de um estudo de funções, eu dou um exemplo ou dois, normalmente, numa tutorial, não me cabem mais do que dois exemplos, porque aquilo tem que ser explicado com pormenor. Mas eu procuro, por exemplo, casos em que haja máximos e mínimos, em que haja inflexões, em que haja assíntotas, assíntotas oblíquas, em que seja necessário, às vezes, resolver uma equação de grau superior ao segundo, arranjando uma raiz por tentativas e depois dividindo (…). Portanto, procuro exemplos que ilustrem o maior número possível de coisas sobre a matéria.

Como material de trabalho os alunos têm ainda acesso a várias listas de exercícios (anexo 6) que o Professor Dinis envia para o email da turma, bem como um conjunto de livros que fazem parte da bibliografia da disciplina. É feita uma lista de exercícios para cada capítulo que tem por objetivo preparar os alunos para as provas de avaliação.

Nas disciplinas que atualmente leciona, Matemáticas Gerais e Complementos de Matemática, a avaliação da aprendizagem consiste na realização de dois testes, uma frequência e o exame final (anexo 7). Estes instrumentos de avaliação têm a mesma estrutura todos os anos, e são elaborados em conformidade com as listas de exercícios facultadas pelo Professor. Os fracos resultados dos seus alunos são o fator que mais o desmotiva no ensino da matemática. Devido às fracas classificações dos seus alunos, o professor Dinis confidenciou que a "aula mais desagradável" é a que se realiza após o primeiro teste. Justificando, diz:

> Começo sempre o ano muito entusiasmado, porque gosto de dar aulas. Tenho uma turma que não conheço e que também não me conhece a mim (…). Eu vou explicando a matéria (…), quando a gente está a explicar a matéria, tirando as tais perguntas que a gente faz e que, às vezes, não têm o eco que se desejaria, as turmas estão sempre com um ar de quem está a acompanhar, eles vão tomando apontamentos, estão, mais ou menos, com atenção, alguns até vão acenando com a cabeça a dizer que sim, parece que estão a perceber muito bem e, depois, chega-se ao primeiro ponto. E, nos últimos anos – isto não era

> assim há vinte e tal anos – mas, nos últimos anos, os pontos são uma catástrofe, porque a grande maioria tem notas negativas e normalmente muito fracas. Então, a aula mais desagradável é a aula seguinte. (…) É assim uma sensação desagradável que fica a pairar sobre a turma. (última entrevista)

Apesar dos fracos resultados na avaliação da aprendizagem e da falta de participação dos seus alunos, o Professor Dinis é de opinião que os seus alunos costumam gostar das suas aulas teóricas e de orientação tutorial.

> Os alunos, pelo menos, costumam gostar das minhas aulas, mantenho boas relações com os alunos, mesmo aqueles que reprovam continuam a dar-se bem comigo, reconhecem que não é por minha culpa que reprovam. (última entrevista)

Os fatores explicativos do insucesso na matemática no Ensino Superior

As dificuldades detetadas nos alunos

Na visão do Professor Dinis, a grande maioria dos seus alunos não possui preparação matemática suficiente para estar no Ensino Superior e, em muitos casos, não tem as "capacidades intelectuais" necessárias, onde é necessário estudar e obter a aprovação de duas ou três disciplinas de matemática, dependendo, respetivamente, das Licenciaturas em causa. Referindo-se à "impreparação" dos seus alunos, diz:

> Os alunos chegam agora com uma impreparação terrível. Porque, por um lado não sabem coisas que deveriam saber, por outro lado, não têm o espírito formado, não só para aprender matemática, como mesmo para estudar seja o que for. E, muitos deles, não têm preparação suficiente para estar no ensino superior. (…) Já nem estou a falar da preparação, estou a falar das capacidades intelectuais que têm. Hoje em dia, há alunos que entram por várias vias, os maiores de vinte e três anos e outras vias semelhantes, (…) eles não percebem

> as coisas, não percebem. E, portanto, seriam bons técnicos. Eu, ainda no outro dia, disse, numa reunião de professores, nós temos alunos que, eventualmente, seriam bons eletricistas, mas maus engenheiros eletrotécnicos. (…) E isso não é demérito, porque uma pessoa que não tem capacidades para as abstrações da matemática, ou da Física ou da Química, não quer dizer que não possa ser um bom eletricista, um bom profissional, um bom programador de computadores (…). O que não será é um bom licenciado. É que são coisas diferentes, uma coisa é um curso técnico, outra coisa é uma Licenciatura. (última entrevista)

Observa o Professor Dinis que a grande dificuldade dos alunos na aprendizagem da matemática no Ensino Superior, prende-se com a falta de capacidades na elaboração de raciocínios abstratos. Esta incapacidade deve-se, na sua perspetiva, ao facto de durante o Ensino Básico e Secundário os alunos não terem sido preparados para elaborar raciocínios em termos abstratos. Como nos informou:

> Os alunos têm uma incapacidade enorme em raciocinar em termos abstratos. O raciocínio abstrato é coisa que não lhes é incutida ao longo do ensino primário, secundário (…). Eles não aprendem a raciocinar em termos abstratos. (…) Porque há coisas que quando não se aprendem em certas idades, não se aprendem mais. (…) Hoje em dia, o que se verifica é que certos alunos que a gente pensa que não são maus de todo, enfim, que são pessoas inteligentes, que são pessoas capazes de perceber umas coisas, são capazes de tirar dezasseis ou dezassete num ponto e no ponto seguinte tirar quatro ou cinco. Não dão confiança nenhuma. Porque ao mesmo tempo que sabem fazer umas coisas, podem dizer o maior disparate. Como por exemplo, uma das alunas, este ano, que é das que passaram à primeira tentativa, com catorze, portanto, aquilo que normalmente se diria uma boa aluna. É uma boa aluna, porque consegue realmente aprender a matéria, trabalha, faz exercícios e consegue estudar as coisas e saber fazer. Mas, no mesmo ponto em que tem catorze, não consegue ter mais, porque acha que o domínio de x mais um sobre x é R e não percebe que é R exceto zero. É daquele tipo de funções em que um aluno, um bom aluno, deveria automaticamente ver que o domínio era R exceto zero. Tem o x no denominador, não pode anular-se. É daquelas coisas que já têm que estar no subconsciente. E eram coisas que um bom aluno, noutros tempos, não dizia. Podia, eventualmente, enganar-se num

> problema mais complicado, que metesse uns logaritmos, enganar-se numa conta (…). Mas não fazia disparates deste calibre. E, hoje em dia, fazem. Nós tivemos, por exemplo, um aluno, este ano, que no primeiro ponto que nós fizemos, teve dezassete e, no segundo, teve cinco. (…) Dantes, isto era impensável, um aluno de dezassete nunca tinha cinco. (última entrevista)

Na perspetiva deste professor os conceitos matemáticos não estão "interiorizados" nem compreendidos na sua plenitude pelos alunos, estando, assim, automatizados. Como afirma:

> Há muita coisa que, mesmo nos bons alunos, não está interiorizada, não está compreendida, está quase automatizada, mas não está compreendida, e que, portanto, depois, isto permite dizer um disparate. Sem dar por isso. Uma pessoa que diz que o domínio de x mais um sobre x à quarta é R deveria dar por isso, logo a seguir. Quando vai fazer as contas, quando vai procurar os zeros da função (…) Deveria logo dizer, "olha que disparate que estou a fazer, o zero não está no domínio". Uma pessoa que vai por aí fora no estudo de uma função e não dá por isso, é porque não tem de facto as coisas interiorizadas. Muitos dos alunos, hoje em dia, não têm por exemplo, o conceito de função interiorizado. Eles não sabem bem o que é uma função (…). (última entrevista)

Uma das grandes dificuldades que, todos os anos, o Professor Dinis identifica nos seus alunos respeita ao cálculo numérico:

> Os alunos não sabem fazer contas. Deixaram de saber fazer contas. E isso é culpa dos atuais programas do ensino primário, do ensino secundário, em que as contas estão uma confusão. E eu vejo pelos meus netos, por exemplo, que não aprendem a fazer contas. Por exemplo, o algoritmo da divisão não lhes é ensinado, convenientemente. O algoritmo da subtração em que a gente punha um número por debaixo do outro e subtraia, e vai um (…). Hoje em dia, eles não aprendem assim. Aprendem umas técnicas, supostamente, mais sofisticadas, mas que só lhes faz confusão. Porque, para subtrair (…) trezentos e noventa e quatro menos duzentos e quarenta e cinco, eles decompõem o trezentos e noventa e quatro, em trezentos, mais noventa, mais quatro e o duzentos e quarenta e cinco, em duzentos, mais quarenta, mais cinco. Depois,

> fazem trezentos menos duzentos, noventa menos quarenta e por aí fora. E, depois, juntam aquilo tudo. O que, à partida, pode parecer mais interessante por desmontar o processo de subtração, mas, não só os miúdos, aos seis, aos sete anos, não estão em idade de aprender essas subtilezas, como era preferível que aprendessem o algoritmo e, depois, um bocadinho mais velhos, então, verem por dentro como é que funciona. (…) De maneira que somar frações é mentira. Não sabem somar frações. Somam o numerador e somam o denominador, como se fosse para multiplicar.

Referindo-se ainda às dificuldades dos seus alunos, o Professor Dinis exemplifica com os conceitos trigonométricos:

> Há matérias que lhes parecem extremamente difíceis. Por exemplo, Trigonometria (…) dantes não havia, assim, uma aversão por aí além à Trigonometria, era das coisas que os alunos mais ou menos gostavam, porque aquilo tem uma interpretação geométrica fácil, com o círculo trigonométrico. Hoje em dia, os alunos têm uma aversão completa à Trigonometria. Acham aquilo uma coisa indecifrável. Porque não têm essa capacidade de raciocínio. Portanto, não sabem fazer contas, não sabem raciocinar em termos abstratos, não têm o conceito de dedução, de demonstração. Não sabem o que é demonstrar, não sabem o que é deduzir coisas, portanto, têm o raciocínio pouco desenvolvido. E, no ensino superior, isso não se consegue contrariar. (última entrevista)

As origens das dificuldades

Para o Professor Dinis as origens das dificuldades que os alunos têm na aprendizagem da matemática resulta, fundamentalmente, do insucesso dos mesmos no Ensino Secundário. É a falta de bases que os alunos têm, é a “má preparação que os alunos trazem do Ensino Secundário” que não permite que os alunos sejam bem sucedidos na aprendizagem da matemática no contexto do Ensino Superior.

> O problema, aqui, no ensino superior resulta do insucesso no ensino secundário. E o insucesso do ensino secundário resulta do insucesso no ensino primário (…). Hoje em dia, com a má preparação que eles trazem do ensino secundário, porque no ensino secundário, hoje em dia, não se ensina matemática, ensina-se uma espécie de uma lista de fórmulas para aplicar quase como se fosse um reflexo condicionado. Quando o professor pergunta não sei quê, aplica-se a fórmula não sei quantos. De onde é que ela veio ninguém sabe, para que é que serve ninguém sabe, mas sabe que é para aplicar ali. (última entrevista)

Referindo-se ao tempo em que era estudante, recorda que eram feitas todas as demonstrações das fórmulas em estudo e que desta forma melhor se compreendia o contexto da suas aplicações. Como afirma:

> Noutros tempos, não era assim, a gente tinha que fazer as demonstrações todas. Eu lembro-me, por exemplo, no meu segundo ciclo, terceiro, quarto e quinto ano, ou seja, hoje em dia sétimo, oitavo e nono, a gente tinha que saber toda a parte de Geometria. Em que as demonstrações tinham que se saber todas. Aquilo era perguntado nos pontos e no exame de quinto ano e tudo isso era perguntado. As demonstrações dos casos de igualdade de triângulos, de semelhança de triângulos, as propriedades das circunferências, dos ângulos nas circunferências, etc. – tudo isso era perguntado. E as demonstrações eram para se saber. O que fazia com que uma pessoa quando chegava à Universidade estava habituada a raciocinar e a deduzir coisas. Hoje em dia, já não é assim. Naquele tempo, toda a gente tinha que saber deduzir a fórmula resolvente da equação de segundo grau. Hoje em dia, eles nem sabem que aquilo tem uma dedução. Aquilo caiu-lhes do céu (…) O que não quer dizer que os melhores professores do ensino secundário não tenham ensinado, só que depois não é pedido, as deduções não são pedidas, aquilo é posto e pronto, é, assim, uma espécie de automatismo que se cria. (última entrevista)

Referindo-se às dificuldades no cálculo numérico, para este Professor a utilização precoce da máquina calculadora por parte dos alunos, vem agravar as suas dificuldades nesta temática.

> Na sequência disso, mete-se logo uma máquina de calcular nas mãos, que acaba com quaisquer hipóteses de saberem fazer contas. E fazer contas com frações já

> não é assim tão óbvio como é que a máquina de calcular vai ajudar. A máquina de calcular faz aquilo em decimal, não soma frações. (última entrevista)

A falta de estudo por parte dos alunos é um problema, que quanto a este Professor, dificulta a aprendizagem da matemática no Ensino Superior:

> Nas minhas turmas, ultimamente, não tem havido alunos bons. E, portanto, as perguntas ficam sem resposta e nunca ninguém tem dúvidas. Ainda por cima, nem sequer estudam a matéria de umas aulas para as outras. Eu, este ano, na cadeira de Álgebra Linear, para os cursos de Engenharia Informática, numa turma que deveria ter, para aí, presentes na sala uns quarenta, ao fim de várias aulas a falar de aplicações lineares e do núcleo de uma aplicação linear, que o facto de o núcleo ser zero significa que a aplicação é injectiva. E ao fim de fazer vários exemplos e de falar nisto várias vezes, numa aula seguinte, perguntei individualmente, o que é o núcleo de uma aplicação linear e não houve um único aluno que fosse capaz de me responder. Ou seja, só de decorar a definição, ser o conjunto dos vectores que dão imagem zero. Não é assim uma frase muito difícil. Mas, nenhum! E não é perguntar para a turma, é perguntar a cada um deles! "Senhor Fulano, o que é o núcleo de uma aplicação linear?" Eu já sabia os nomes deles, portanto, podia chamá-los pelos nomes. Silêncio absoluto. E depois o colega do lado, e o outro a seguir, e o outro a seguir? E não houve um único que fosse capaz de dizer o que era o núcleo de uma aplicação linear. O que revela também uma grande falta de estudo. (última entrevista)

O Professor Dinis argumenta que a falta de aulas práticas, nos planos curriculares de algumas Licenciaturas, agrava as dificuldades dos alunos na aprendizagem da matemática e, acrescenta que a reduzida carga horária, de apenas três horas semanais em algumas Licenciaturas, é um dos fatores para o insucesso dos alunos na aprendizagem da matemática no Ensino Superior:

> O problema é que, aquilo que na universidade se chama pomposamente aula tutorial, não é uma aula tutorial, não é uma sessão de orientação tutorial. Porque orientação tutorial é uma coisa que se faz com um grupo de cinco alunos, muitas vezes, no gabinete do professor, que a gente não tem, e em que

> se procura averiguar o que é que os alunos estão a fazer, se estão a estudar, se não estão, se têm dificuldades, sugerir-lhes livros que eles possam consultar, "olhe se o senhor não percebeu isso veja este livro" ou "se o senhor já percebeu muito bem essa parte, olhe isso estende-se ou generaliza-se ou há uma coisa parecida que é interessante, veja não sei o quê". Isso é que é orientação tutorial. Isso ali não é possível fazer-se, a começar logo pelo facto de serem grupos de trinta e tal alunos. Não é possível. E, portanto, o que a gente pode fazer numa sessão, dita tutorial, é apenas uma espécie de mini-aula prática. Como temos muito pouco tempo, não posso fazer aquilo que eu normalmente faria numa aula prática que era chamar os alunos ao quadro. (última entrevista).

Com a implementação do processo de Bolonha, a ideia de avaliação contínua em que existem vários instrumentos para compor uma nota final, é entendida, por este Professor, como um fator de facilitismo e de desresponsabilização do aluno na aprendizagem da matemática no Ensino Superior, na medida em que o aluno pode ir "acumulando" valores para a nota final, com as "pequenas avaliações", não sendo apenas avaliado com um exame final onde todas os conceitos em estudo se relacionam. Como nos explica :

> Eu sou contra esses processos por vários motivos. Primeiro, porque há aí um certo facilitismo. Quer dizer, quando se fazem pontos que abrangem só parte da matéria, e se pretende que o aluno vá obter logo uma nota nesses pontos que vai contar para a nota final, isso é uma facilidade, a meu ver, excessiva, que se está a dar. Porque, quer dizer, faz-se o primeiro ponto que tem só um mês de matéria ou um mês e meio. É mais fácil do que fazer um ponto sobre uma matéria de um semestre. Depois, esses pontos têm um objetivo mais ou menos explícito, que consiste em levar os alunos a estudar. A ideia é obrigar o aluno, durante o semestre, a estudar. Mas um aluno que está na universidade deveria saber se deve estudar, ou não, sem ser obrigado a prestar provas a meio. Além do mais, fazer esses pontos tem a desvantagem de que, como cada ponto é feito só sobre parte da matéria, nem sequer se podem fazer perguntas que relacionem partes diferentes da matéria, porque quando se está a fazer o primeiro ponto é só sobre o que foi dado até aí, mas no segundo ponto a

primeira matéria já não vem (…). Isto não dá uma unidade ao programa e ao objetivo da disciplina. Eu preferiria que o ensino da disciplina decorresse normalmente durante o semestre e, no fim do semestre, se fizesse o exame tradicionalmente, e logo se veria se o aluno sabia ou não. Esses pontos, por outro lado, são introduzidos, também, sobre o pretexto de uma hipotética avaliação contínua. Mas isso é pura demagogia. Porque fazer dois pontos não é, por definição, avaliação contínua, fazer dois pontos e ter duas notas é o mais descontínuo possível. Avaliação contínua faz-se quando há turmas pequenas e há aulas práticas a funcionar ou há as tais sessões tutoriais com pequeninos grupos. E, nessa altura, ao longo do semestre, o professor pode adquirir uma opinião sobre cada aluno e quando chega ao fim do semestre quase que podia atribuir uma nota a cada um e o exame, depois, vai confirmar, ou não, essa ideia que o professor tem. Se o professor acha que aquele aluno deve valer à volta de catorze e, depois, vai fazer o ponto e, em vez de catorze, tira doze, depois, até se pode fazer ali uma pequena correção. (última entrevista)

As medidas a adotar visando o sucesso na matemática do Ensino Superior

Medidas relativas ao ensino não superior

No que respeita a medidas a adotar visando o sucesso da matemática no Ensino Secundário e, consequentemente, no Ensino Superior, o Professor Dinis classifica de prioritária uma reformulação na formação científica dos professores. Como afirma:

Aos professores do ensino secundário, far-lhes-ia um exame sobre a matéria que estão a lecionar. Àqueles que passassem no exame, duplicava-lhes o ordenado e mandava-os dar aulas, àqueles que chumbassem no exame, e eu tenho a certeza de que havia muitos, sobre a matéria que estão a ensinar, eu dava-lhes seis meses para se prepararem e fazerem um novo exame. Se voltassem a chumbar, ficavam proibidos de ensinar, fosse quem fosse, para o resto da vida! (última entrevista)

Neste âmbito, a avaliação dos conhecimentos científicos dos professores é apontada por este Professor como uma medida a investigar e a estudar com vista a “averiguar da qualidade dos professores”, sendo que a realização de um “exame sobre a matéria que estão a lecionar” se afigura como uma necessidade para os professores do Ensino Básico e Secundário:

> Primeiro, era preciso realmente averiguar da qualidade dos professores (…). Eu, há bocado, por brincadeira, estava a dizer que os despedia a todos (…). Não se poderia fazer isso, como é evidente, mas era preciso seriamente avaliar a qualidade dos professores. E não era pôr uns professores a avaliar os outros, porque isso (…) há, sempre, enfim (…) dinâmicas de grupo que complicam muito a avaliação séria. É preciso, de facto, garantir que os professores sabem a matéria. (última entrevista)

Quanto aos programas curriculares da matemática no Ensino Básico e Secundário, o Professor Dinis fala-nos da necessidade de alteração dos mesmos, apontando para um ensino “mais tradicional”:

> É preciso alterar os programas, de facto. E, aí, não é preciso inventar grandes coisas. Bastava ir, aqui há cinquenta anos, buscar os livros de Álgebra do Calado, os livros de aritmética do Sebastião e Silva, (…) buscar aqueles livros tradicionais e inspirar-se aí. Não quer dizer que fizesse exatamente a mesma coisa. Há muita coisa a que se podia dar uma vestimenta nova e organizar de outra maneira. (última entrevista)

Insiste que no Ensino Básico e Secundário é necessário apostar num nível elevado de exigência e de rigor e de recorrer, cada vez mais, à realização de exames finais como forma central da avaliação das aprendizagens.

> O nível de exigência tem de aumentar. Depois é preciso criar mecanismos para evitar que os alunos passem de ano sem saber. Porque, hoje em dia, um aluno consegue chegar (…) até ao nono ano, chumbando em matemática por ali fora. (…) É necessário apostar nos exames. (última entrevista)

Referindo-se à problemática da utilização das máquinas calculadoras nas aulas de matemática, e visto entender que a sua utilização é o principal fator para que atualmente, no Ensino Superior, os alunos tenham sérias dificuldades no cálculo numérico, este Professor é de opinião que as mesmas devem ser retiradas aos alunos em todos os níveis de ensino da matemática:

> Era preciso retirar as máquinas de calcular do ensino, pelo menos, tão cedo como elas são agora utilizadas ou, então, pô-las só na mão de professores (…). Porque eu, quando protesto em relação às máquinas de calcular, não é que eu tenha nenhuma aversão à máquina de calcular (…). O problema não é esse, o problema é o mau uso que se faz da máquina de calcular. É porque, em vez de se fazer da máquina de calcular um auxiliar, põe-se como um substituto. Quer dizer, hoje em dia, a gente vê pessoas, universitários, que para multiplicar por dez vão à máquina de calcular. E isso é que não pode ser, porque a máquina de calcular está a substituir o raciocínio e a compreensão dos conceitos e das relações entre os números. (…) Na instituição primária, abolia-se, abolia-se de todo. Porque, na instrução primária, não se fazem contas que justifiquem a utilização de máquina de calcular. E, quando se fazem contas, o objetivo é, justamente, que os alunos aprendam os algoritmos para as fazerem. Na instrução primária, os alunos deviam, de facto, aprender esses algoritmos. Terem desembaraço no cálculo. (última entrevista)

Referindo-se ao facto de considerar que a grande maioria dos seus alunos não possui preparação matemática suficiente para estar no Ensino Superior, este Professor argumenta da necessidade de recriar o ensino técnico, comercial, ou industrial, para onde poderiam ser canalizados alguns alunos, como alternativa ao Ensino Secundário. Como exemplifica:

> Porque se os alunos tivessem o ensino primário como deve ser, com níveis de exigência estabelecidos de acordo com as suas idades, e, quando não alcançassem as metas desejáveis, não pudessem progredir; se os alunos fossem encaminhados para tipos de ensinos diferentes, consoante as suas capacidades, como, por exemplo, no meu tempo de estudante, havia os cursos técnicos e havia o liceu. Eu, por exemplo, na minha família, tive, tenho primos

que fizeram o ensino técnico, e não é que os pais não tivessem possibilidade de os pôr no liceu, simplesmente, os miúdos não estavam para ali virados, não queriam, não se interessavam. Portanto, se houvesse realmente tipos diferentes de ensino, em que as próprias escolas dissessem, este rapaz, de facto, tem capacidades e interesse em seguir um ensino tipo liceal. Um ensino tipo liceal é um ensino mais abrangente, com coisas mais teóricas, em que se ensina História, Filosofia, Geografia, etc.. O ensino técnico tem um peso muito menor destas coisas de carácter genérico e um peso maior de coisas específicas, viradas para uma profissão. (…) Um miúdo, por exemplo, que fosse para uma escola comercial, como havia antes, havia as escolas comerciais e as escolas industriais. Se fosse uma escola comercial, precisava de pouco mais que a Aritmética, o estudo das percentagens, os cálculos de juros compostos, umas coisas viradas para as aplicações comerciais. Não precisava de saber grandes teorias de funções, nem de derivadas, isso aprenderia mais tarde, se quisesse depois enveredar por outras coisas. (última entrevista)

Medidas relativas ao Ensino Superior

No âmbito do Ensino Superior, este Professor defende a realização de um teste diagnóstico cujo objetivo é averiguar as reais necessidades de cada aluno, para um possível encaminhamento para um "curso propedêutico em regime intensivo" que visava, uma preparação dos alunos para as futuras disciplinas de matemática que constam dos currículos das várias Licenciaturas.

O que era preciso, primeiro, à entrada, fazer uma espécie de um teste de diagnóstico, ver o nível de aptidão de cada um em coisas elementares; a fazer as tais contas, a somar frações, a trabalhar com números decimais, a analisar uma desigualdade, saber se dois vírgula três é menor ou mais pequeno que quatro quintos, coisas assim (…). Portanto, fazer o teste diagnóstico à entrada, sobre coisas elementares, para a gente averiguar se os alunos tinham preparação suficiente para acompanhar as aulas que lhes iam ser dadas, em matemática. Aqueles que revelassem capacidade suficiente, conhecimentos suficientes, sim senhor, iam para as aulas de matemática, os outros deviam ser

> aconselhados a não se inscreverem em matemática ou, então, a cadeira de matemática ser passada, no mínimo, para o segundo semestre e deveria haver um curso propedêutico, com regime intensivo. Se a matemática fosse deslocada para o segundo semestre, poderia funcionar durante o primeiro semestre, se a matemática se mantivesse no primeiro semestre, deveria ser feito, antes do começo das aulas, nem que, para isso, fosse preciso atrasar o começo das aulas de matemática. Por exemplo, enquanto outras disciplinas começam a meio de Setembro, a matemática começava em Novembro. E ter ali um mês e meio para fazer um curso em regime intensivo para atacar essas matérias. (última entrevista)

Na visão deste Professor seria uma mais valia para a aprendizagem da matemática na Universidade aumentar o número de horas semanas nas disciplinas de matemática no Ensino Superior.

Síntese

Analisando o estudo feito do caso do Professor Dinis, é possível apresentar a seguinte síntese:

Sobre as conceções acerca da matemática

1) A relação de gosto e interesse pela matemática foi sendo construída, evoluindo ao longo dos anos, marcada por diversos fatores: a influência familiar, os seus professores de matemática, a facilidade com que aprendia e estudava os conceitos matemáticos, os próprios conceitos matemáticos em aprendizagem e o êxito nas avaliações da disciplina.

2) Apesar de classificar, desde sempre, o seu relacionamento com a matemática como muito bom, algumas experiências negativas na aprendizagem desta disciplina, como, por exemplo, os problemas de aplicação da matemática à realidade, desgostaram-no e criaram-lhe dificuldades na concretização dos mesmos. Contudo, este professor procurou alternativas ("regra de três simples") transformando estes desafios matemáticos em problemas rotineiros que passou a resolver sempre da mesma forma, revelando a sua preferência por ter procedimentos seguros para aplicar em situação.

3) Do modo como carateriza a matemática é possível extrair quatro ideias chave que constituem a sua concetualização da matemática. A matemática é a "ciência do raciocínio", "harmoniosa" e "elegante" na forma como os seus conteúdos se relacionam, "ciência abstrata criada pelo homem", com vida e onde não há verdades absolutas.

4) A matemática é apresentada como uma ciência construída por ideias estruturadas, muito bem arrumadas e onde a "organização" do raciocínio matemático é apontada como um atributo muito "aliciante" para a sua prática. Esta ideia remete-nos para a perspetiva de que a matemática é essencialmente um processo de pensamento que implica a formação e aplicação de redes de ideias abstratas que se associam logicamente.

5) Fazer matemática é levar o "espírito humano aos seus limites". Assim, a matemática é perspetivada como uma ciência dinâmica, que desafia

continuamente o homem, num “jogo intelectual” e na busca incessante pela criação de mais relações entre as várias teorias matemáticas.

6) Na visão do Professor Dinis a matemática é uma ciência relativa onde não há verdades absolutas. A “verdade matemática” é, na sua perspetiva, uma “verdade puramente relativa” que depende dos axiomas que estão em causa e da teoria matemática que se pretende alcançar.

7) A matemática é descrita como indispensável visto que fornece a linguagem que permite descrever e formalizar, sintética e ordenadamente, o universo.

Sobre as conceções acerca do ensino da matemática

1) No contexto escolar do ensino da matemática no ensino superior, para o Professor Dinis, esta disciplina fornece aos alunos do primeiro ano (na grande maioria das Licenciaturas) conhecimentos gerais de matemática, as chamadas “ferramentas” matemáticas que são entendidas como fundamentais para aplicar em outras disciplinas da Licenciatura, ou entendidas como conhecimento matemático necessário para quem quer tirar um curso superior.

2) A matemática é a ciência do raciocínio. O seu ensino é fulcral na medida em que fornece a ginástica mental permitindo ao cérebro exercitar-se “nos raciocínios”, “nas deduções”, “no rigor” e “na utilização da Lógica”. Contudo, no contexto do Ensino Superior, este Professor é de opinião que a razão fundamental para o

ensino da matemática, prende-se com as necessidades futuras da aplicação de certos conceitos matemáticos no âmbito das suas Licenciaturas. É a matemática aplicada em toda a sua plenitude.

3) Para o Professor Dinis um bom professor de matemática deve dominar, em absoluto os conceitos científicos a ensinar aos seus alunos, bem como possuir uma elevada capacidade de comunicação. A clareza na forma como apresenta os conceitos e a simpatia do professor para com os seus alunos, são caraterísticas consideradas essenciais para o ensino da matemática. Ainda acerca do papel do professor numa aula de matemática, este Professor perspetiva que a gestão do tempo da aula é fundamental numa aula de matemática.

4) Um bom professor de matemática deve primeiramente ser capaz de colocar o problema a ensinar, motivando os seus alunos para a temática em estudo, recorrendo às aplicações futuras da mesma, quer noutros campos da matemática quer noutras disciplinas do plano curricular das suas Licenciaturas.

5) Os alunos nas aulas de matemática no Ensino Superior devem acompanhar os raciocínios matemáticos em causa, respondendo às questões que o Professor vai levantando na exposição dos conceitos em estudo, não se limitando a passar a matéria do quadro. Compete-lhes, ainda, realizar "exercícios" e trazer as suas dúvidas para serem esclarecidas pelo Professor no desenrolar das aulas práticas.

6) Um excelente aluno a matemática é aquele que está motivado, que manifesta interesse, que tem hábitos de trabalho, que durante as aulas teóricas é capaz de

seguir os raciocínios matemáticos em causa, e em conjunto com o professor "construir" e até improvisar as demonstrações que lhe são colocadas.

7) Sendo professor universitário com mais de três décadas de experiência no ensino da matemática em diversas Licenciaturas, e tendo em devida conta o facto de considerar que as matérias que ensina são "elementares", confessou não dedicar muito tempo à preparação das suas aulas. Durante as aulas que observamos o Professor Dinis manifestou-se sempre muito confiante e motivado. No desenrolar das suas aulas nunca recorreu aos seus apontamentos nem mesmo quando apresentava e resolvia exercícios no quadro.

8) Para o Professor Dinis o quadro e o giz são os materiais de trabalho para as suas aulas teóricas e de orientação tutorial. Tudo o que diz durante a aula é cuidadosamente escrito no quadro. Nas suas aulas tudo é meticulosamente estruturado por forma a ter no quadro, do princípio até ao final da aula, as definições e teoremas que são mais importantes, caso seja necessário comparar os conceitos em estudo.

9) O Professor Dinis faz consecutivamente perguntas aos seus alunos. Este procedimento deve-se ao facto de defender que o aluno deve ter uma participação ativa na aula, e procurar alcançar respostas para as questões colocadas.

10) Na conceção deste Professor a forma como dá a sua aula depende fundamentalmente dos conteúdos em estudo**.** Assim, por um lado, há conceitos

em que devido às suas caraterísticas, e visando uma melhor motivação para o seu estudo, deve partir-se de casos concretos e até mesmo de exemplos práticos. Por outro lado, quando os temas são "mais difíceis de motivar" e para uma melhor gestão do tempo de aula, argumenta que se comece pela definição dos conceitos em estudo, remetendo para o final da aula a resolução de exercícios de aplicação dos mesmos.

11) Na sua perspetiva é essencial no ensino da matemática no Ensino Superior destacar as vantagens do estudo dos conceitos matemáticos em causa, fazendo, sempre que possível, referência a exemplos de aplicações dos conteúdos em estudo nas áreas de especialização dos alunos. É seu objetivo que os alunos entendam em profundidade o conceito e as situações onde este pode ser aplicado

12) Nas disciplinas que atualmente leciona - Matemáticas Gerais e Complementos de Matemática - a avaliação da aprendizagem consiste na realização de dois testes, uma frequência e o exame final. Os fracos resultados dos seus alunos são o fator que mais o desmotiva no ensino da matemática. Devido às baixas classificações dos seus alunos, o professor Dinis confidenciou que a "aula mais desagradável" é a que se realiza após o primeiro teste.

Os fatores explicativos do insucesso na matemática

1) É entendimento do Professor Dinis que a grande maioria dos seus alunos não tem preparação matemática suficiente e/ou capacidades intelectuais para frequentar o Ensino Superior, onde é necessário estudar e obter a aprovação de

duas ou três disciplinas de matemática, dependendo respetivamente, das Licenciaturas em causa.

2) Na sua visão a grande dificuldade dos alunos na aprendizagem da matemática no Ensino Superior prende-se com a falta de capacidade na elaboração de raciocínios abstratos. Esta incapacidade deve-se ao facto de, durante o Ensino Básico e Secundário, os alunos não terem sido preparados para elaborar raciocínios em termos abstratos.

3) Na perspetiva deste professor grande parte dos conceitos matemáticos não estão “interiorizados” nem compreendidos na sua plenitude pelos alunos, estão, assim, automatizados.

4) Uma das grandes dificuldades, identificadas todos os anos nos seus alunos, respeita ao cálculo numérico. Esta lacuna é entendida, por este professor, como um fator que contribui fortemente para o insucesso no ensino e aprendizagem da matemática na Universidade.

5) Para o Professor Dinis a origem das dificuldades que os alunos têm na aprendizagem da matemática resulta, fundamentalmente, do insucesso dos mesmos no Ensino Secundário. Logo, é a má preparação que os alunos trazem do Ensino Secundário que não permite que os mesmos sejam bem sucedidos na aprendizagem da matemática no contexto do Ensino Superior.

6) O professor considera que a falta de estudo por parte dos alunos é um problema que dificulta a aprendizagem da matemática no Ensino Superior.

7) Na perspetiva do Professor Dinis a falta de aulas práticas nos planos curriculares de algumas Licenciaturas agrava as dificuldades dos alunos na aprendizagem da matemática. A reduzida carga horária (em algumas Licenciaturas de apenas três horas semanais) é um dos fatores para o insucesso dos alunos na aprendizagem da matemática.

8) Com o processo de Bolonha, a forma de avaliação das aprendizagens é considerada como um fator de facilitismo e de desresponsabilização do aluno na aprendizagem da matemática no Ensino Superior.

As medidas a adotar visando o sucesso na matemática

1) No que respeita as medidas a adotar visando o sucesso da matemática no Ensino Secundário, e consecutivamente no Ensino Superior, o Professor Dinis, classifica de prioritário uma reformulação na formação científica dos professores. Neste enquadramento, a avaliação dos conhecimentos científicos dos professores é apontada por este Professor como uma medida a investigar e a estudar com vista a "averiguar da qualidade dos professores" no Ensino Básico e Secundário, sendo que a realização de um "exame sobre a matéria que estão a lecionar" se afigura como uma necessidade para todos os professores.

2) Na sua visão, os programas curriculares da matemática no Ensino Básico e Secundário, deveriam ser alterados, defendendo o retorno ao ensino tradicional de “há cinquenta anos” atrás. Assim, é prioritário apostar num nível elevado de exigência e rigor, onde se recorra cada vez mais à realização de exames finais como forma central da avaliação das aprendizagens.

3) Referindo-se à problemática da utilização das máquinas calculadoras nas aulas de matemática, e visto entender que a sua utilização é o principal factor para que atualmente no Ensino Superior os alunos terem sérias dificuldades no cálculo numérico, este Professor, é de opinião que as mesmas devem ser retirar aos alunos em todos os níveis de ensino da matemática.

4) No âmbito do Ensino Superior, este Professor defende a realização de um teste diagnóstico que tinha como objetivo averiguar as reais necessidades de cada aluno, para um possível encaminhamento para um “curso propedêutico em regime intensivo” que visa, uma preparação dos alunos para as futuras disciplinas de matemática.

5) Na visão deste Professor seria uma mais valia para a aprendizagem da matemática aumentar o número de horas semanas nas disciplinas de matemática no Ensino Superior.

Capítulo VI

Professor Vasco

Neste capítulo apresenta-se o caso do Professor Vasco, expondo e analisando as suas conceções acerca da matemática e do ensino da matemática. Na primeira secção é feita a apresentação global do Professor. Nas segunda e terceira secções são descritas e analisadas as visões próprias sobre a matemática e o ensino da matemática. Na quarta secção apresentamos a sua perspetiva sobre os fatores que poderão ser explicativos do insucesso na matemática do Ensino Superior, bem como as medidas a adotar visando uma melhoria no ensino da matemática no Ensino Superior. O presente capítulo finaliza com a discussão das ideias essências que é possível extrair das conceções do Professor relativamente à matemática e ao ensino da matemática, bem como dos fatores que, do seu ponto de vista, poderão ser explicativos do insucesso na matemática, assim como, as medidas a adotar visando uma melhoria no ensino da matemática na Universidade.

Apresentação do Professor

O Professor Vasco tem 58 anos, nasceu e sempre viveu em Lisboa e é professor de matemática no Ensino Superior há 30 anos. Na minha perspetiva, trata-se de um senhor muito reservado e sempre muito ocupado. Foi o segundo professor a disponibilizar-se e a manifestar interesse em participar nesta investigação.

No que respeita ao seu percurso escolar, este professor recorda-se muito bem da quase totalidade dos seus antigos professores, desde a “Primária” até à “Faculdade”, a quem considera professores excelentes. Todo esse percurso se caraterizou por um desempenho brilhante e sempre pontuado pelas máximas classificações.

Durante os primeiros anos de escola, o Professor Vasco gostava muito das disciplinas de História, de Física, de Química e de Matemática. Contudo, não nutria o mesmo interesse por grande parte das disciplinas nas áreas das Humanidades.

O Professor Vasco, desde muito jovem, nutre uma “grande paixão” pelo teatro, desenho, pintura e música. Estas atividades estiveram sempre presentes ao longo da sua vida e, como tal, sempre lhe ocuparam muito tempo. Nos últimos anos, com vista a aperfeiçoar a arte de pintar, inscreveu-se no Curso de Pintura da Sociedade Nacional de Belas Artes e já concluiu os dois primeiros anos.

Como nos informa:

> Eu gosto muito de desenhar e de pintar. Desde miúdo, (…) desde o liceu, quando andava no Pedro Nunes, havia atividades extra curriculares e podia-se escolher várias atividades. Havia teatro, pintura, etc. Por acaso, houve um ano em que eu escolhi teatro. Foi muito interessante, (…) gostei muito. Tínhamos o apoio da atriz Maria do Céu Guerra (…). Adorei, (…). Depois, durante dois anos seguidos ou três, escolhi pintura. E gostei muito. Desenhei e pintei bastante (…). Mas, deixei de pintar por preguiça (…). É mais difícil ter o material de pintura a óleo, ter um sítio, etc. Comecei a desenhar (…). E, agora, voltei à pintura e estou no terceiro ano do curso de Pintura na Sociedade Nacional de Belas Artes (…). (primeira entrevista)

Juntamente com estes diversos interesses destaca-se, ainda, o gosto que o Professor Vasco tem pela investigação genealógica e pela Paleografia. Explica este seu hobbie com entusiasmo:

> Tirei, há pouco tempo, um curso de Paleografia. (…) Acho muito engraçado. Vou a arquivos consultar documentos (…). É outro dos meus *hobbies*. É uma coisa que se pode fazer ao longo da vida, não se tem metas, nem prazos a cumprir. Portanto, há coisas que se podem arrastar ao longo de décadas. Uma pessoa pode estar a fazer uma investigação ao longo de décadas (…). É algo que eu, agora, vou continuar a fazer sempre. (primeira entrevista)

A matemática

A relação com a matemática

O grande entusiasmo do Professor Vasco pelo estudo da matemática surgiu no Liceu, destacando-se "claramente como a sua grande vocação". Desde as primeiras aulas no Liceu que a matemática passou a ser "uma coisa magnífica", pelo que, quando terminou o Liceu, a sua decisão estava tomada. Queria ir para a Universidade estudar matemática, visto que o seu gosto pela matemática, "de repente, ultrapassava, em muito", o gosto que tinha por todas as outras disciplinas.

Por influência familiar este Professor ainda ponderou enveredar por um dos cursos de Engenharia, na medida em que estes cursos também "tinham muita matemática", e assim, teria mais "hipóteses de emprego". No entanto, a sua decisão já estava tomada, o Professor Vasco queria "estudar matemática pela matemática" e não para depois a aplicar "em seguros, ou em computadores, ou na construção".

Durante o seu percurso académico como aluno do curso de Matemática, o Professor Vasco nunca teve grandes dificuldades e destacou-se sempre entre os melhores alunos do seu ano. Apesar de considerar que foi um aluno dedicado e estudioso, lamenta não se ter empenhado mais em certas disciplinas, como, por exemplo, nas disciplinas de Estatística. Afirma:

> Hoje em dia, é uma coisa que tenho pena de não ter estudado, devidamente. E tive várias cadeiras de Estatística, porque estava na moda na altura, porque era uma coisa que tinha aplicações mais evidentes que outras áreas da matemática e fiquei sem saber quase Estatística. (…) Não me sentia muito incentivado e, às vezes, é um ciclo vicioso, quando as pessoas não têm um conhecimento profundo dos assuntos podem ter preconceitos em relação a esse assunto, portanto, podem não gostar do assunto, porque não sabem o que ele é. E era o que me acontecia em relação à Estatística. No primeiro embate achei uma coisa um bocadinho maçadora, gostava muito mais de Análise, de Álgebra, de Geometria Diferencial, dessas coisas. Estatística achava assim uma coisa menor. E, portanto, fiz o mínimo essencial para ter o apto. (…) Deveria ter feito um esforço (…) e, se calhar, tinha entrado mais na Estatística e acabava por gostar, quase de certeza, e, hoje em dia, tenho pena de não ter, na altura, estudado mais. Portanto, podia ter ligado mais e hoje poderia saber muito mais. (primeira entrevista)

Quando finalizou o curso de Matemática, e devido aos excelentes resultados obtidos (a sua média final de curso foi de 18 valores), o Professor Vasco foi convidado a ficar como Assistente na Universidade onde se licenciou. Esta oportunidade foi algo que o deixou "contentíssimo":

> Quando acabei o curso e logo no próprio mês em que acabei o curso, eu já era monitor, portanto, eu já tinha começado a dar aulas, enquanto monitor, a partir do quarto ano da licenciatura. (…) Era mais ou menos o que todos desejávamos, portanto, desde o momento em que tive essa oportunidade fiquei contentíssimo. Nessa altura, havia essa possibilidade, havia concursos para monitor, a pessoa podia ser monitora a partir do quarto ano da licenciatura e, evidentemente que, toda a gente gostava de o ser. Portanto, eu, como fui aceite, gostei muito. (primeira entrevista)

Ao longo do seu percurso profissional este Professor lecionou uma panóplia de disciplinas na área da matemática, em Licenciaturas de Matemática e em diversos

Mestrados de matemática e Física. Foi ainda Professor Orientador de vários alunos que realizaram Mestrados e Doutoramentos em matemática. Tal, como nos deu a conhecer no nosso primeiro encontro:

> Comecei por lecionar aulas práticas de uma disciplina de cálculo para Biologia. Nesse ano tivemos muitos alunos na Faculdade e, tive que arranjar maneira de dar aulas de cálculo para Biologia a toda aquela gente (…). Também dei aulas para uma disciplina de Equações Diferenciais (…), dei Análise Matemática II, Teoria dos Operadores, Física Matemática (…). Nos Mestrados fui responsável por várias disciplinas de Álgebra, de Análise, de Teoria dos Operadores, (…) e Mecânica Quântica. (primeira entrevista)

Durante quatro anos, sendo que dois deles foram passados no estrangeiro, o Professor Vasco não deu aulas, realizou diversos trabalhos de investigação científica no domínio das Equações Diferenciais, que contribuíram e culminaram no seu Doutoramento em Matemática.

Nos últimos anos da sua carreira académica participou na Coordenação do Conselho Científico da Universidade onde sempre lecionou, tendo como função acompanhar e coordenar os vários processos de reforma de diversas Licenciaturas, bem como a implementação do Processo de Bolonha.

Assim, o Professor Vasco revela possuir, desde o Ensino Secundário, um enorme gosto e interesse pela matemática. Classificando a matemática de uma "coisa magnífica":

> Até ao quinto ano do liceu, inclusive, as disciplinas de que eu mais gostava eram História e Física. Também gostava de Geografia e de matemática, mas matemática, até ao quinto ano, não era a minha preferida. Gostava ainda muito mais de Física e de História. (…) Mas o gosto pela matemática, propriamente dito, só apareceu, assim, realmente, destacando-se claramente como uma vocação, a partir do que corresponde atualmente ao décimo ano, portanto, foi mesmo no terceiro ciclo. Não é que eu não gostasse, eu gostava de matemática, mas, depois, percebi que o gosto que eu tinha pela Física tinha

> mais a ver com as partes da matemática que nós dávamos em Física. (…) Assim a grande revelação foi, fundamentalmente, nos últimos dois anos do liceu. Aí, foi, desde a primeira aula, que achei a matemática uma coisa magnífica. (primeira entrevista)

Apesar de desde muito novo sempre ter gostado da disciplina de Matemática e de tal se refletir em muito bons resultados nas avaliações, a sua relação com a matemática intensificou-se, fundamentalmente, no início do Ensino Secundário, quando participou nas turmas experimentais onde estavam a ser implementados os novos programas de Matemática inspirados nos movimentos da "Matemática Moderna".

Como nos informa:

> Aí, foi, desde a primeira aula, que achei a matemática uma coisa magnífica. Começou, logo, com os próprios textos que nos foram distribuídos na primeira aula. Porque eu entrei para uma turma experimental (…) e distribuíam-nos aquelas sebentas do Professor Sebastião e Silva, que tinham um aspeto de sebentas universitárias, o que, para nós, se calhar, tinha algum charme. A ideia de termos umas folhas, não eram propriamente livros, eram umas folhas que davam um ar assim, não sei, isto talvez seja assim um bocadinho fútil, mas todos nós sentíamo-nos mais adultos a estudar por aquilo. (…) Havia aquele aliciante de ser um programa novo, tudo aquilo. E, depois, de repente, a matemática, era tudo dito como surgiu. (primeira entrevista)

Ao longo do seu percurso académico, a sua relação com a matemática foi sempre muito boa:

> Era muito boa! Gostava muito de matemática. Nunca tive dificuldades e sempre gostei muito de tudo o que aprendia em matemática. Não me lembro de não ter gostado de nenhuma parte da matemática que aprendi. O que se aprendia, até ao chamado quinto ano de liceu da altura, era uma parte um bocadinho restrita da matemática. Eu gostei, por exemplo, da Geometria mas não se ia muito longe, gostava daquela parte hipotético-dedutiva da Geometria. Lembro-me de ter algumas discussões com o meu professor de

> Filosofia; na altura, havia um capítulo da Filosofia em que se dava, isto já no sexto ano, os diferentes tipos de raciocínio. Distinguia-se o raciocínio lógico do raciocínio matemático e do raciocínio dedutivo. O exemplo que se dava (…) era que no raciocínio lógico não havia criatividade, portanto, tudo aquilo que se deduzia já estava contido nas premissas, contrariamente ao raciocínio matemático e dava-se como exemplo que da igualdade dos lados de um triângulo deduzia-se a igualdade dos ângulos. E eu olhei para aquilo e lembro-me de dizer, assim, ao Professor: "Oh, Professor, aquilo deduz-se porque há um axioma anterior que permite tirar essa dedução", portanto, a conclusão está contida nos axiomas (…). (primeira entrevista)

Assim, podemos constatar que o Professor Vasco nutre uma grande "paixão" pela matemática. Observemos a sua afirmação de que não se lembra, ao longo de todo o seu percurso estudantil, de alguma parte da matemática de que não tenha gostado.

Neste sentido, a sua relação com a matemática assentou essencialmente no forte gosto que sente e sempre sentiu pelos conteúdos matemáticos, na facilidade com que os compreende, e pelos excelentes resultados que sempre obteve nas provas de avaliação dos conhecimentos de matemática.

No decorrer da sua carreira académica como estudante, este Professor, sempre se destacou dos seus colegas pelo interesse, fascínio, dedicação, investigação (sobre os mais variados tópicos matemáticos, extracurriculares, pelos quais facilmente nutria sério interesse) e, pelos bons resultados na disciplina de Matemática.

A sua relação de gosto e grande interesse pela matemática foi sendo construída, e evoluiu ao longo dos anos, influenciada pelos próprios conteúdos matemáticos em estudo, intensificada pelo aumento da complexidade dos temas que iam sendo aprofundados, pela facilidade com que os compreendia, pelo gosto e dedicação que impunha às suas atividades matemáticas, e pelo grande sucesso que sempre obteve nas avaliações da disciplina.

Para o Professor Vasco, o gosto pela matemática e pelos conteúdos matemáticos em estudo é fortemente justificado pelas caraterísticas que este professor atribui à própria matemática. Quando justificou a sua opção pela Licenciatura em Matemática argumentou que seria "uma escolha de vida", na medida em que queria estudar "matemática" pela "matemática" e não por algum interesse nas suas aplicações. Como argumenta:

> A minha decisão já estava tomada, queria ir estudar matemática pela matemática e não para depois a aplicar em seguros, ou em computadores, ou na construção. (…) Foi uma escolha de vida. (…). E, ainda hoje, quando eu me lembro das primeiras aulas de matemática do sexto ano, recordando o que na altura senti, ainda considero que, de facto, o que me foi apresentado foi a matemática como ela é. Foi ali que conheci a matemática, que comecei a perceber o que era a matemática, de uma maneira mais profunda (…). Houve, de facto, ali, uma viragem decisiva. (…) Eu gostava de matemática, mas, depois, percebi que o gosto que eu tinha pela Física tinha mais a ver com as partes da matemática que nós dávamos em Física. (primeira entrevista)

Pelo atrás exposto, podemos argumentar que a atração que este professor sempre sentiu pela matemática deve-se, essencialmente, às caraterísticas que associa à matemática, como sejam, o rigor lógico e a simplicidade "das coisas matemáticas":

> Na matemática temos rigor lógico, portanto, a possibilidade de, a partir de um número limitado de princípios, deduzir o máximo que é possível. Depois, de alguma maneira, a simplicidade dos princípios básicos (…). Só se estudam coisas perfeitamente simples. (primeira entrevista)

Durante o seu percurso universitário como aluno, este Professor gostou de todas as disciplinas da sua Licenciatura em Matemática, e manteve sempre uma grande organização e dedicação no estudo das mesmas.

Da panóplia de professores universitários com quem teve a oportunidade de privar durante os anos de estudante, o Professor Vasco guarda excelentes recordações e agradece a motivação e entusiamo que alguns deles lhe transmitiram, motivando-o positivamente para as suas atividades matemáticas. É, deste modo, que se refere a um dos seus antigos professores, que, na sua ótica, o viria a marcar a "vida inteira":

> Era um dos grandes colaboradores do Professor Sebastião e Silva. Era uma pessoa com um gosto enorme pelo que estava a fazer, portanto, via-se que gostava de matemática e transmitia esse gosto aos alunos, foi, principalmente, por causa dele que eu comecei logo a gostar de matemática, logo na primeira aula (…), ele foi suficiente para me marcar a vida inteira. (…) Era uma pessoa que sabia muito de matemática e tinha um entusiasmo enorme pela matemática, portanto, era uma pessoa que gostava do que estava a fazer. (primeira entrevista)

Podemos, pois, deduzir que o forte gosto, sentimento positivo, e o excelente relacionamento que o Professor Vasco nutre relativamente à matemática, construiu-se em torno dos seguintes fatores: 1) As caraterísticas que associa à matemática (rigor lógico e a simplicidade "das coisas matemáticas"); 2) Os próprios conteúdos matemáticos e a intensificação e complexidade dos mesmos; 3) A facilidade com que compreendia e estudava os conteúdos matemáticos; 4) A panóplia de professores universitários que lhe transmitiram o gosto e a motivação para as suas atividades matemáticas; 5) A disciplina e a dedicação que impunha às suas atividades matemáticas; e 6) As elevadas classificações que sempre obteve na avaliação da aprendizagem.

A caraterização da matemática

Aludindo à forma como o Professor Vasco se referiu à matemática, ao longo das entrevistas que mantivemos e da observação das suas aulas, é possível apresentar quatro ideias fundamentais que constituem a sua concetualização e visão da matemática. Na conceção deste Professor a matemática carateriza-se essencialmente pelo seu raciocínio lógico e rigoroso, pela "simplicidade dos seus princípios", pela "beleza e harmonia" na forma como os seus conceitos se relacionam, por ser uma ciência com vida, criada pelo homem, constituindo uma "grelha" que permite a compreensão da realidade.

Referindo-se ao raciocínio matemático, este Professor classifica este raciocínio de "raciocínio comum", que é "comum" a todas as pessoas e que respeita ao "funcionamento da nossa razão". Logo, desmistificando esta temática, para o Professor Vasco, o raciocínio Matemático, é o raciocínio que fazemos todos os dias nas mais diversas situações do dia-a-dia.

Como nos explica:

> O raciocínio matemático é o raciocínio comum, não tem nada de especial. Não há nada de especial na matemática, em termos de raciocínio. O raciocínio que se faz em matemática é o raciocínio que qualquer pessoa fazer na sua vida do dia-a-dia. (…) Não há nada no raciocínio matemático de difícil. É muito simplesmente o funcionamento da nossa razão, do nosso raciocínio. (primeira entrevista)

No ponto de vista do Professor Vasco, a matemática é concetualizada como uma ciência "bela" e "harmoniosa". A beleza e a harmonia que associa à matemática remetem-nos para o facto de idealizar esta ciência como sendo construída por ideias abstratas, perfeitamente organizadas e interligadas.

É a forma como as "coisas matemáticas" se interligam entre si e com a realidade que constituem a beleza e a harmonia que este Professor remete para a caraterização da matemática. O "prazer estético" e o "belo" que associa à construção matemática têm a ver com a "harmonia" e a relação perfeita e profunda das ideias matemáticas. Com efeito:

> O prazer estético tem a ver com uma certa harmonia, e com a relação profunda entre tudo na matemática. (…) Quer dizer, acho que toda a gente tem essa

> sensação de estética perante determinadas realidades, seja uma música, seja um quadro, seja um texto, seja uma poesia, seja um texto científico. Na matemática, eu acho que isso é muito claro, quando se consegue compreender uma construção matemática, porque ligam-se muitas coisas e, portanto, dá-nos aquela sensação de Eureka, de descoberta de qualquer coisa de essencial, em que tudo está perfeitamente ligado, e que, no fundo, isto também está ligado à ideia do belo. (primeira entrevista)

Mais especificamente, na sua conceção a riqueza da matemática reside na “interligação” que se faz entre os diversos conceitos matemáticos.

O Professor Vasco vê, também, a matemática como “uma pequena parcela do conhecimento”. Esta, é uma ”grelha” através da qual o homem “olha” a realidade exterior e faz a sua compreensão. Como tal, a matemática “circunscreve” toda a realidade que pode ser tratada de uma “maneira especialmente rigorosa”:

> A matemática é uma grelha de compreensão da realidade. (…) Eu acho que a matemática, enquanto ciência, é uma pequena parcela do conhecimento. A matemática ajuda-nos de uma determinada maneira a olhar para a realidade. A circunscrever, da realidade exterior, tudo aquilo que pode ser tratado de uma maneira especialmente rigorosa. (primeira entrevista).

No entender deste Professor, a física é a ciência que permite estudar e descrever o mundo, sendo, em certa medida, a matemática uma ferramenta e, portanto, “uma parte da física”:

> A física é o estudo da realidade exterior. Logo, em certo sentido, a matemática é uma parte da física. Havia um grande matemático no século XX, que morreu há pouco tempo, o Arnold, que dizia que a matemática é a parte da física em que as experiências são baratas, assim, é tudo aquilo que se pode estudar da realidade exterior sem ser preciso construir aparelhos complicados para fazer as experiências. (…) Depois, evidentemente, se quisermos ter um conhecimento mais profundo da realidade, temos que realizar experiências que já não são, digamos, tão “baratas”, já nos obrigam a construir instrumentos, a deslocarmo-nos, etc. Mas estando apenas parados à noite, olhando para o céu,

> olhando para as estrelas, olhando para o horizonte, já conseguimos chegar a uma quantidade enorme de conceitos importantes que estão na base dos desenvolvimentos de toda a matemática, desde a antiguidade. (primeira entrevista)

Perspetivando a matemática como uma parte da física, para o Professor Vasco, o objetivo central da matemática é o "reducionismo" na medida em que simplifica e reduz tudo o que podemos apreender da realidade. Como desenvolve:

> Eu diria que a matemática, entendida desta maneira, é uma parte da Física. Depois, todo o resto da física é um desenvolvimento dessas primeiras ideias que podemos considerar, ainda, puramente matemáticas, como sejam a Geometria e a Aritmética. Partindo desses dois pilares do conhecimento matemático e tentando cada vez mais, ter em conta, mais aspetos da realidade (…) Assim, construi-se a matemática (…). A matemática é uma parte da física cujo objetivo é essa ideia, que poderia chamar-se de "reducionista", de tentarmos simplificar, ao máximo, tudo aquilo que nós conseguimos apreender da realidade. (…) Em última análise, quer dizer, neste momento, não conseguimos compreender a realidade toda, apenas, deste ponto de vista, puramente reducionista. Mas é uma espécie de jogo que se faz de tentar levar isso até onde se conseguir, sabendo nós que, evidentemente, isto não esgota a realidade nem nós podemos viver, pelo menos eu assim o entendo, apenas, com base no conhecimento que nos é dado por este jogo. (primeira entrevista)

Na ideia deste Professor e pelo facto de considerar que a matemática é uma criação do homem visto dela necessitar, concetualiza, a "contagem" como sendo a base de toda a matemática. Como podemos constatar na sua primeira entrevista:

> Quando começo as aulas, na primeira aula, em quase todas as cadeiras, faço um bocadinho um ponto de situação em relação a como surgiu a matemática. E as primeiras ideias matemáticas que se conseguem transmitir, talvez, dissecar são, no fundo, a ideia do número, da contagem. (…) Desde o momento em que as pessoas se começam a apropriar de bens, e não vão apenas, buscar aquilo que a Natureza dá espontaneamente (…). Se as pessoas começam a ter rebanhos, a ter produtos agrícolas, etc., já têm necessidade de,

> alguma maneira de contar, de avaliar efetivos, e essa avaliação obriga às primeiras operações matemáticas para a pessoa saber se lhe falta uma ovelha, no dia seguinte, ou se nasceu uma ovelha ou se a roubaram. Para saber isso é preciso ter alguma maneira prática de controlar. Precisamos de ter alguns instrumentos que nos permita controlar se um determinado conjunto tem mais ou menos elementos que outro, portanto, essa operação simples de comparação, de estabelecer pares, é a base da contagem, e é a base de toda a matemática. (primeira entrevista)

Nesta visão infere-se que, com a Geometria e a Aritmética, "constrói-se" toda a matemática:

> Com a Aritmética consegue-se construir, praticamente, apenas, à custa dos conceitos, das ideias básicas dos conjuntos e da ideia de estabelecer correspondências biunívocas, (…) conceitos completamente básicos e elementares, pode-se fazer uma axiomática da Geometria (…). Com estes conceitos e um número muito reduzido de axiomas, consegue-se construir toda a Geometria, e com a Geometria e a Aritmética, podendo ser tudo reduzido a Aritmética, constrói-se toda a matemática. Portanto, a matemática é o procurar ir o mais longe possível, com o mínimo possível de pressupostos. É o que carateriza a matemática. (primeira entrevista)

Desenvolvendo esta perspetiva, o Professor Vasco salienta ainda:

> Em matemática estuda-se aquilo que pode ser reduzido à quantidade, de alguma maneira, se assim se pode dizer. Portanto, encara-se a realidade, partindo do que nela se pode reduzir àquelas operações elementares de comparação de conjuntos, de estabelecimento de correspondências um a um. Quer dizer, se nós olharmos para a história da matemática, a primeira operação que se pode considerar matemática é a contagem, ou seja, aquela ideia muito simples de comparar conjuntos do ponto de vista de conseguir estabelecer entre eles correspondências um a um. E isso é um dos aspetos. Depois há o aspeto da Geometria, de olhar para a realidade exterior e, de alguma maneira, privilegiar a localização. Basicamente, a Geometria vive da possibilidade de localizar objetos e da possibilidade de ordená-los relativamente ao nosso olhar. (…) Portanto, estas ideias, completamente simples, são a base da Geometria. Logo,

Geometria e Aritmética, se assim quisermos, são a base da matemática. Todo o resto são elaborações a partir daqui. (primeira entrevista)

Referindo-se ao trabalho dos matemáticos, e recordando o tempo em que estava a realizar o seu Doutoramento, transmitiu-nos que o cerne da sua investigação consistia em procurar, e estudar aprofundadamente, novas relações entre determinadas equações diferenciais e novas formas de as resolver. O Professor descreve este período da sua vida como um período muito intenso, passando os dias e as noites a trabalhar e, fundamentalmente, a pensar sobre as temáticas em estudo, descrevendo a concentração como a "arma" fulcral para a sua investigação. Como nos informa:

> Basicamente passava o dia e as noites a pensar sobre o assunto. (…) Não escrevia muito. Escreve-se, assim, uns rascunhos, tenta-se ver como são as coisas (…) Mas tem é que se passar muito tempo a pensar. Aliás, eu devo dizer que muitos dos problemas que eu consegui resolver foram resolvidos antes de adormecer. (…) A assistir a um concerto (…). (primeira entrevista)

Aludindo, ainda, ao muito trabalho, à sua dedicação e persistência no período em que realizava os seus trabalhos de investigação em matemática:

> A parte do suor é pegar nos artigos todos que estão feitos acerca do assunto e lê-los com toda a atenção, podendo ter que perder, às vezes, um dia inteiro com um parágrafo ou com duas linhas. É a parte de suor, a parte do suor é como se diz: "A investigação científica é noventa e nove por cento de suor e um por cento de criatividade." (…) Esta ideia de que há prazeres que não são imediatos, que obrigam a passar por uma fase de sofrimento, é essencial para qualquer empreendimento que valha a pena e, para a matemática, é fundamental. A tal ideia de que se tem de passar dias a ler artigos, a decifrar, decifrar (…), é o mesmo que ter um manuscrito com uma letra dificílima e tentar decifrá-la. Um artigo de matemática, se é de facto alguma coisa nova para nós, tem que ser decifrado e o decifrar pode custar muito, pode obrigar depois a ler outros, a ler livros, a ir consultar outras coisas. E, só depois de decifrar aquilo tudo, é que a pessoa está apta a ter a capacidade de inovar qualquer coisa, porque não se pode inovar sobre o vazio. Isso tudo custa, é

> maçador, há muitas fases maçadoras no estudo da matemática. Não é só a ideia romântica do Eureka, o Eureka é uma coisa muitíssimo rara, mas temos é que ter esperança de que ele aconteça ou, pelo menos, trabalhar para isso. (primeira entrevista)

A importância da matemática

Na conceção do Professor Vasco, a matemática é descrita como indispensável visto que fornece a linguagem que permite descrever, compreender e formalizar, sintética e ordenadamente, a realidade. Como nos transmite:

> A matemática serve para contar ovelhas! A primeira utilidade terá sido essa, depois, daí para a frente, as coisas vão-se complicando. As necessidades humanas vão-se complicando e, a certa altura, as pessoas, também, para além do que é estritamente necessário para a alimentação e para a sobrevivência, para a propagação da espécie, também, e depois há o prazer do conhecimento. Faz parte da nossa natureza. E a matemática serve, essencialmente, para isso, para compreender, porque mesmo a história das pedrinhas e da ovelha faz-nos compreender algo acerca do rebanho de ovelhas que não tínhamos compreendido antes. Quer dizer, o facto de termos um saco de pedras que podemos guardar debaixo da almofada (…), mas que, com esse saquinho, nós, no dia seguinte, sabemos se nos roubaram, ou não, uma pedra, isso faz-nos compreender algo acerca de alguma caraterística importante do dito rebanho. Portanto, daí para a frente, é só uma complicação disto, uma utilização, cada vez mais eficaz, deste tipo de aspetos corriqueiros, da matemática. Portanto, fundamentalmente, a utilidade da matemática é para compreender a realidade. (primeira entrevista)

Salientando os seus interesses acerca da matemática, para o Professor Vasco, a matemática é importante para a própria matemática, isto é, para o desenvolvimento de novas relações e de novas teorias nos vários campos da matemática. E, também, porque saber matemática permite-nos conhecer “outras ciências” e “outros ramos do conhecimento”:

> Eu gosto da matemática em si. Gosto de estudar matemática, pela matemática, mas também gosto de utilizar os conhecimentos de matemática para estudar outras coisas. Quer dizer, o facto de ter conhecimentos de matemática abre-me muitas portas. (…) Permite-me ter mais capacidades para perceber outras ciências, outros ramos do conhecimento. Portanto, além de ser um conhecimento, em si, que me agrada, abre-me portas. (primeira entrevista)

Na ótica do Professor Vasco, primeiramente, a matemática é importante para a própria matemática. Nesta conjetura, não podemos ter a “pretensão de que tudo o que se publica em matemática” tenha aplicação imediata na realidade do nosso dia-a-dia.

Como tão bem nos elucida:

> Primariamente, a matemática para a matemática. Só será, depois, a escada para outros assuntos, porque a matemática, como um todo, é uma janela de compreensão da realidade, que, depois, tem consequências, por aí fora, em tudo aquilo em que a compreensão da realidade nos seja útil. Mas eu acho que é, em si, um valor, compreender independentemente da utilidade que possa ter para outras atividades humanas. (…) A matemática não tem pretensão de que tudo aquilo que se publica em matemática venha a ter uma utilidade imediata fora da matemática nem há a necessidade disso. A matemática, como um todo, é um ramo de conhecimento que tem esse valor próprio. Como tal, obviamente que, depois, tem uma série de consequências que nem sequer se podem prever. Há ramos da matemática que foram desenvolvidos muito antes de, alguma vez, terem sido aplicados em qualquer coisa que se possa dizer exterior à matemática. Por exemplo, há o caso conhecido da geometria Riemanniana, que foi desenvolvida no século dezanove, e depois foi essencial para a teoria da relatividade geral do século vinte. Quando se desenvolveu não se sonhava que alguma vez viesse a ser aplicada nesse contexto. (primeira entrevista)

O ensino da matemática no Ensino Superior

A finalidade do ensino da matemática

Perspetivando a sua conceção de que a matemática é importante para a própria matemática, isto é, para o desenvolvimento de novas relações e novas teorias nos vários campos da matemática e, também, porque saber matemática permite-nos conhecer "outras ciências" e "outros ramos do Conhecimento", para o Professor Vasco a aprendizagem da matemática no âmbito do Ensino Superior é fundamental.

No entendimento do Professor Vasco, a matemática é descrita como indispensável visto que fornece a linguagem que permite descrever, compreender e formalizar, sintética e ordenadamente, a realidade. No contexto escolar do ensino da matemática no Ensino Superior, para o Professor Vasco, esta disciplina transmite aos alunos do primeiro ano (na grande maioria das Licenciaturas) conhecimentos gerais de matemática, as chamadas "ferramentas" matemáticas que são vistas como fulcrais para serem utilizadas nas mais variadas disciplinas das diversas Licenciaturas. Neste contexto, este Professor designa estas disciplinas de Matemática, de "disciplinas de serviço":

> Nos cursos de Gestão e Economia as disciplinas de Matemática são as chamadas "disciplinas de serviço". (…) A matemática é uma disciplina indispensável. Não é possível ter ideia de um modelo económico, pensando em Economia, sem a matemática. Portanto, eu penso que é consensual que, em cursos como Economia, Gestão, etc., a matemática tem um papel importantíssimo. (…) Por exemplo, em Arquitetura também. É impensável um arquiteto não ter conceitos de geometria bem estruturados na cabeça, e não só de geometria. (última entrevista)

O papel do professor e o papel do aluno

Na ideia do Professor Vasco, um professor de matemática deve possuir um conhecimento profundo dos conceitos científicos a ensinar aos seus alunos, deve ter um "entusiasmo enorme pela matemática", deve ter um "gosto enorme" pelo ensino da matemática, assim como possuir uma elevada capacidade de comunicação:

> Um bom professor de matemática tem de ter um gosto enorme pelo que está a fazer. (…) Tem de gostar muito de matemática e transmitir esse gosto aos alunos. (…) Tem de ser uma pessoa que saiba muito de matemática e que tenha um entusiasmo enorme pela matemática. (última entrevista)

Questionado sobre o professor que mais o marcou positivamente ao longo da sua vida como aluno de matemática, o Professor Vasco identificou um professor universitário com vasta experiência no ensino da matemática. Na sua visão a experiência profissional de um professor é tida como um fator fundamental no processo de ensino e aprendizagem da matemática. Assim, aludindo a este professor universitário, diz-nos:

> Este professor tinha uma experiência enorme, era uma pessoa já de uma certa idade mas com um espírito jovem. (…). Era muito sabedor, sabia muito, sabia o que estava a ensinar, transmitia tudo com muito entusiasmo. (…) Depois como tinha muita cultura, também, acompanhava as suas aulas de uma séria de referências interessantes (…). Era uma pessoa de quem toda a gente gostava imenso como professor, tinha, realmente, uma grande cultura e um poder fantástico de comunicação. (última entrevista)

Aprofundando a temática do papel de um professor de matemática, o Professor Vasco defende que este deve preparar muito bem a "ideia geral" que pretende transmitir aos seus alunos, seguir um "fio condutor", como se estivesse a "contar uma história". É nesta conjetura que este Professor afirma que ensinar matemática é uma “arte” e o professor de matemática é um artista. Perspetivando esta ideia, afirma:

> É preciso preparar bem a ideia geral do assunto a transmitir. O professor de matemática é uma espécie de compositor, e as aulas devem ser preparadas como uma espécie de sinfonias e, depois, a pessoa deve dar assim uns concertos. Quer dizer, aquilo tem de ser uma coisa que tem de ter um fio condutor, tem de ser uma história. A pessoa tem de estar a contar uma história. Não pode ser um conjunto seco de sucessão de conhecimentos, tem de ser uma história com princípio, meio e fim. (…) Eu acho que ensinar matemática é arte, é fazer um bocadinho de arte. (última entrevista)

Resumindo, para o professor Vasco um bom professor de matemática tem de ser capaz de transmitir o gosto pela matemática:

> É alguém que consegue transmitir o gosto que tem pela matemática. E a única maneira de conseguir transmitir o gosto que se tem pela matemática é conseguir fazer matemática na alma. E fazer com que os alunos consigam acompanhar, e estejam, também, a fazer matemática. (última entrevista)

Neste enquadramento, refletindo acerca do papel dos alunos nas aulas de matemática no Ensino Superior, para o Professor Vasco estes devem ter um papel ativo e centrar a sua atenção exclusivamente nas atividades matemáticas que estão a ser desenvolvidas. Assim, devem estar muito atentos, acompanhando os raciocínios matemáticos que o professor está a desenvolver e respondendo às questões que o mesmo vai colocando:

> O aluno deve ter atenção ao que se passa no quadro e deve procurar acompanhar o raciocínio. Quando o professor está a desenvolver um raciocínio, deve procurar acompanhá-lo, quando o professor faz uma pergunta e o interpela, deve fazer um esforço para tentar responder. Deve sempre ter um papel ativo. É impossível estar numa aula de matemática, utilmente, sem estar, permanentemente, com a atenção bem focada na atividade. (última entrevista)

Para que uma aula de matemática no Ensino Superior funcione em pleno e para que os alunos possam participar ativamente na construção da aula é, na conceção deste Professor, necessário que os alunos preparem e estudem os conteúdos em questão de uma aula para a outra. Este requisito é fundamental para que os alunos acompanhem aquilo que o professor vai fazendo no quadro e que possam eles próprios também construir a matemática:

> Uma aula é preparada, evidentemente, a pensar que os alunos que estão a assistir à aula prepararam as aulas anteriores. Nós sabemos que isso, infelizmente, não acontece em muitos casos, ou, talvez, até na maioria dos casos, mas, pronto, é aquilo que se deve fazer. Um aluno que tenha feito isso, que tenha estudado as aulas anteriores, que tenha trabalhado por si, deveria estar apto a acompanhar aquilo que o professor vai fazendo no quadro. Acompanhar não quer dizer, obviamente, que à primeira, eles percebam tudo. Mas, que apanhem a ideia geral e, em alguns casos, que consigam mesmo, eles próprios, dar o passo que o professor deixa para eles darem. (última entrevista)

Nas aulas observadas, à medida que o Professor Vasco expunha no quadro os conceitos em estudo, colocava diversas perguntas aos seus alunos, sendo que grande parte destes não estava muito atenta e, como tal, o Professor não obtinha respostas.

É neste sentido que após a observação de uma das suas aulas, nas pequenas entrevistas que mantivemos, o Professor confidenciou que:

> Gostava muito que quando faço uma pergunta todos respondessem. Quando faço uma pergunta, se estivessem a acompanhar a matéria, os alunos deveriam saber responder, sem hesitar, pois são perguntas muito simples. Na prática, não se verifica isso, há sempre uma minoria e são quase sempre os mesmos que respondem. (entrevista curta após aula)

Cingindo-se ainda ao papel do aluno na aprendizagem da matemática, diz o Professor Vasco que ao aluno compete ainda “dedicar-se” e “esforçar-se” por realizar um vasto e diversificado conjunto de “exercícios”, por forma a abranger todos os conteúdos em estudo.

As aulas de matemática

O Professor Vasco é um professor universitário com mais de três décadas de experiência no ensino da matemática em diversas Licenciaturas. Ser professor de matemática no Ensino Superior foi o que sempre desejou desde que iniciou a sua Licenciatura em Matemática. Como nos explica:

> Ficar a dar aulas na Faculdade era o que todos desejávamos. Desde o momento em que tive essa oportunidade fiquei contentíssimo. Nessa altura, havia essa possibilidade, havia concursos para monitores, a pessoa podia ser monitora a partir do quarto ano da licenciatura e, evidentemente, toda a gente gostava de o ser. Portanto, eu, como fui aceite, gostei muito disso porque comecei por dar aulas de dúvidas no quarto ano e, depois, no quinto, houve uma grande necessidade de docentes e fiquei como Assistente. (primeira entrevista)

O Professor Vasco dedica todas as suas noites à preparação das aulas que irá dar no dia seguinte. Devido à sua vasta experiência no ensino dos mais variados conteúdos matemáticos a lecionar no Ensino Superior, este Professor confidenciou-nos que para preparar as suas aulas não necessita de consultar livros nem apontamentos, dedicando apenas algum tempo à “meditação” sobre as temáticas a lecionar, por forma a identificar a “ideia” a transmitir e a linha condutora a seguir. De um modo geral não tem por hábito recorrer à elaboração de apontamentos para consultar durante as aulas que irá realizar:

> Quando preparo uma matéria, tento ver a forma mais natural para que os assuntos saiam uns dos outros. O objetivo é que o aluno sinta que aquilo que se vai sucedendo não é arbitrário. Eu gosto de comparar (…) uma aula com o desenvolvimento de uma sinfonia. Tem de haver sintonia do princípio até ao

> fim. Nós quase que estamos à espera do que é que vem a seguir. O ideal seria que o aluno, quando assiste a uma aula e assiste ao desenrolar de uma matéria, quase já esteja à espera de que caminho seguir e o que tem de vir dali. (última entrevista)

Nas aulas que observamos o Professor Vasco manifestou-se sempre algo tímido e nunca olhou diretamente para os seus alunos.

Durante o desenrolar das suas aulas, o Professor manteve-se sempre virado para o quadro, mesmo quando questionava os alunos, e nunca recorreu a apontamentos nem mesmo quando lhe surgiam dúvidas sobre os conceitos e algumas demonstrações que escrevia no quadro. Por seu lado, os alunos mantinham-se muito passivos e a sua grande maioria não passava do quadro os apontamentos que o Professor Vasco ia escrevendo.

No decurso destas aulas observámos que os alunos não estavam muito atentos, iam conversando entre si, não passavam a matéria que o Professor ia escrevendo no quadro e, quando questionados, mantinham-se em silêncio sendo necessário o Professor responder às suas próprias questões.

Nas quatro aulas a que assistimos, verificámos que estas tinham um número muito reduzido de alunos, no máximo dez alunos em cada aula teórica. Na opinião do Professor Vasco, a justificação para esta situação prende-se com o facto de os alunos não estarem preparados para acompanhar as suas aulas e, também, por se sentirem desmotivados devido aos fracos resultados obtidos numa das primeiras provas de avaliação do semestre. No final de uma das aulas observadas, refletindo sobre esta problemática, o Professor Vasco conjeturou:

> Eles é que sabem porque é que deixaram de ir às aulas. Eu só posso fazer conjeturas. Posso dizer que muitos deles não tinham preparação para seguirem a disciplina. Portanto, aperceberam-se de que não estavam a perceber nada e não estavam a acompanhar a matéria. Admito que esta fosse uma das razões. (…) O facto de as avaliações terem sido más, se calhar, deram consciência a

> este facto. Provavelmente, não teriam bem consciência do nível de ignorância que tinham em relação à matéria e, com os testes, ficaram com essa ideia. (entrevista curta após aula)

A avaliação da aprendizagem dos seus alunos consiste na realização de dois testes, uma frequência e o Exame Final (anexo 8). Estes instrumentos de avaliação têm a mesma estrutura todos os anos, e são elaborados em conformidade com as listas de exercícios facultadas pelo Professor. O processo de avaliação é o acontecimento mais desagradável na sua prática de docente universitário. Apesar de considerar que a avaliação das aprendizagens é fundamentais pois permitem ajudar os alunos a perceberem onde "falham", para este Professor, é "muito desagradável ter de classificar" os alunos, ter de os "chumbar", ter de "lhes atribuir notas numéricas e ordená-los":

> É claro que há aspetos da nossa profissão que são muito desagradáveis, em particular, a classificação. Eu não digo a avaliação, que é uma coisa diferente, mas a classificação. No fundo, muitas vezes, confunde-se avaliação com classificação. Acho muito desagradável ter que classificar as pessoas, ter que as chumbar, ter de lhes atribuir notas numéricas e ordená-las, etc. Tudo isso é um aspeto que não é essencial, digamos, à ideia de transmitir conhecimentos, de ajudar as pessoas a ganharem o gosto por um determinado conhecimento, mas que, por inerência, tem que ser feito porque a sociedade é assim feita. As pessoas têm que ser classificadas e, de alguma maneira, isso, também, tem alguns aspetos positivos porque pode ajudar os alunos a perceberem em que é que falham, onde é que falham e porque é que falham. Mas não é agradável. É um aspeto que não é muito motivante. Fazer exames não é nada motivante, pois os resultados são sempre uma desgraça. (última entrevista)

Para as suas aulas teóricas o Professor Vasco utiliza como materiais de trabalho apenas o quadro e o giz. Tudo o que vai dizendo durante a aula é escrito no quadro. Contudo, a gestão do espaço do quadro não é particularmente organizada, sendo que do princípio até ao final da sua aula não tem necessidade de apagar o quadro vai ocupando todo o espaço livre, o que por vezes criou uma certa dificuldade em transcrever e acompanhar o Professor nas suas exposições. Como afirma, a distribuição dos assuntos no quadro não é algo em que pense habitualmente:

> Não tenho essa preocupação em distribuir os assuntos no quadro. Não é nada que esteja planeado. As coisas saem-me naturalmente, nada é preparado. (…) Não estou a pensar nisso, é uma coisa muito natural. (última entrevista)

Da observação das suas aulas, e tendo em devida conta as conceções deste Professor acerca da matemática, verificamos que nas suas exposições privilegia a perspetiva geométrica como fator motivador para os conteúdos em estudo. Justificando este procedimento exemplifica:

> A interpretação geométrica é uma motivação para o estudo das primitivas. Quer dizer, em vez de se estar a estudar apenas, as primitivas, com o conceito puramente formal, que é o inverso da derivação, sem se perceber muito bem o que é que se vai fazer com aquilo. Penso que apresentar o estudo das primitivas a partir da área e representação gráfica se percebe melhor. Acho que é fundamental perceber porque é que se está a fazer assim. Ou então, fica um mistério, "porque raio é que o professor se lembra, agora, de estar a inverter a derivação". Pode ter um interesse teórico e imagina-se que poderá ter aplicações. Porque é bastante inesperado o que é que a área tem a ver com a derivação. Parece-me um bocadinho inesperado. (…) Quer dizer, eu acho que é um dos aspetos atraentes da matemática conseguir-se relacionar áreas do conhecimento, aparentemente, completamente desligadas. Portanto, eu acho que, sempre que isso é possível, deve fazer-se. (entrevista curta após aula)

O Professor Vasco considera fundamental, no ensino da matemática no Ensino Superior, fazer as demonstrações dos teoremas em estudo em detrimento de fazer exercícios de aplicação direta dos conteúdos em estudo. Como nos explica, numa breve entrevista, no final de uma das suas aulas:

É verdade, eu dou muita importância aos conceitos, às demonstrações, aos procedimentos e aos algoritmos. Não há nada que se possa tirar. A matemática baseia-se em conceitos. Conceitos que eu acho que são, de facto, abstraídos da realidade. Portanto, são conceitos que nos ajudam a compreender a realidade. Nós compreendemos por conceitos. Logo, partimos de conceitos básicos e aprofunda-se através de uma elaboração desses conceitos e da relação entre eles. E, para sabermos se, de facto, o que estamos a fazer é adequado, temos que fazer as demonstrações, temos que justificar, logicamente, porque é que uma determinada proposição é válida, tendo em conta que já sabemos que outras atrás são válidas. Isto é a demonstração. E depois, evidentemente, há teoremas que, pela sua própria natureza, se podem considerar como algoritmos. (…) Tudo isto é muito simples e fundamental para se fazer nas aulas. (entrevista curta após aula)

Da observação das suas aulas, verificamos que o Professor Vasco não faz referência à aplicação dos conteúdos matemáticos em estudo. A justificação para este procedimento remete-nos para o facto de considerar que nas Licenciaturas onde leciona (Gestão e Economia) a matemática é uma “disciplina de serviço”, sendo que os alunos irão ter oportunidade de ver as aplicações matemáticas em estudo nas várias disciplinas das suas áreas de especialização.

O Professor Vasco inicia as suas aulas apresentado primeiramente os conceitos, definições e respetivas demonstrações, e por fim, se restar tempo, resolve exemplos diretos das temáticas apresentadas. Contudo, e tendo em devida conta a natureza de determinados conteúdos matemáticos a expor aos alunos, para o Professor Vasco, iniciar a aula com determinados exemplos pode ser uma mais valia e um fator motivador para as matérias a estudar. Como ilustra:

A ideia de ligar os extremos à derivada é uma ideia completamente nova, até porque a ideia de derivada é recente para os alunos. Tinham acabado de aprender derivadas no primeiro semestre e, portanto, os extremos para funções com mais de uma variável – já tinham ouvido extremos de uma variável – agora é uma coisa bastante nova e, portanto, convém procurar percebê-la com

> casos simples, os exemplos mais simples. E, sobretudo, aí havia outra motivação para fazer dessa maneira, é que estávamos a falar em extremos de funções de duas variáveis e o que se estava a ver era como é que se podia reduzir isso ao caso de funções de uma variável. Portanto, nós estávamos, no fundo, a tentar encontrar uma maneira de reduzir a situação mais complicada, que era extremos de funções com duas variáveis a um caso que eles já conheciam. Daí, começar por se fazer dessa maneira. (…) Assim, além da importância de se ver um exemplo concreto, havia, também, a importância de ver como é que se podia começar por resolver isto com os instrumentos que já tínhamos do primeiro semestre. Isto, feito em abstrato, era muito mais complicado. (última entrevista)

Como material de trabalho os alunos têm acesso a várias listas de exercícios que o Professor Vasco tem o cuidado de enviar para o email da turma (anexo 9), bem como um conjunto de livros que fazem parte da bibliografia da disciplina que leciona. É feita uma lista de exercícios para cada capítulo que tem por objetivo preparar os alunos para as provas de avaliação.

Os fatores explicativos do insucesso na matemática no Ensino Superior

As dificuldades detetadas nos alunos

Na perspetiva do Professor Vasco, e tendo em devida conta as caraterísticas que associa à matemática, grande parte dos seus alunos no Ensino Superior não possui a preparação matemática necessária para progredirem com sucesso para as disciplinas de Matemática no Ensino Superior. Como defende:

> Posso dizer que muitos dos meus alunos não estão preparados para, de facto, poderem fazer as matemáticas do Ensino Superior. (…) Nós sabemos que a

> preparação dos alunos à entrada é bastante fraca. (…) A matemática é um tipo de disciplina que num determinado nível, para ser utilmente acompanhada, pressupõe uma preparação anterior. E não há volta a dar a isto. Se o aluno não atingiu esse nível, anteriormente, vai ter uma dificuldade enorme e, por vezes, mesmo inultrapassável em acompanhar uma disciplina de nível superior. A matemática é construtiva, logo, a matemática não é uma acumulação de conhecimentos separados. Os conhecimentos que vêm a seguir dependem, fortemente, daqueles que foram adquiridos até àquele momento. E, portanto, é completamente, utópico pensar que um aluno, com qualquer preparação que seja, consegue acompanhar uma disciplina de Matemática. (última entrevista)

As grandes dificuldades que o Professor Vasco identifica nos seus alunos respeitam aos conteúdos matemáticos dos primeiros ciclos de ensino como, por exemplo, o cálculo numérico. Neste ponto, argumenta que são as falhas "mais básicas" (não saberem a tabuada, não saberem fazer contas, não saberem somar duas frações, não saberem pôr em evidência um fator numa expressão algébrica) que mais frequentemente deteta nos seus alunos. Como diz:

> As principais dificuldades dos alunos são aquelas que não foram ultrapassadas, talvez, no primeiro ciclo. Basicamente é aí que se encontram as grandes dificuldades. Quanto mais recuamos na escolaridade mais graves são as falhas. É muito mais grave um aluno na Universidade não saber a tabuada, não saber fazer uma conta. É muito grave não saber somar duas frações. (…) É muito grave não saber pôr em evidência um fator numa expressão algébrica. (…) É isto que nós notamos nos alunos que entram para a Universidade. (…) Há alunos que começam a resolver um exercício, aplicam as regras de derivação como deve ser, depois, chegam a uma determinada expressão algébrica ou analítica e (…) bloqueiam ou fazem disparates tremendos. Porque o que não sabem são as coisas mais elementares. Isso é o aspeto operatório, (…) e depois há aspetos de falhas de raciocínio, de pouca prática do raciocínio dedutivo, de um mínimo de lógica. Porque não foi trabalhado na devida altura. (última entrevista)

Refletindo ainda acerca das dificuldades detetadas nos seus alunos, o Professor Vasco identifica a falta de capacidade de concentração e a falta de persistência perante as primeiras dificuldades, aquando da resolução de exercícios práticos de aplicação direta dos conteúdos matemáticos em estudo.

As origens das dificuldades

Na ótica do Professor Vasco, as origens das dificuldades que os alunos têm na aprendizagem da matemática no Ensino Superior estão fortemente relacionadas com o insucesso dos mesmos no Ensinos Básico e Secundário. É a "fraca preparação" que os alunos trazem dos anos anteriores que compromete irremediavelmente o sucesso na aprendizagem da matemática no Ensino Superior. Como nos informa:

> Nós sabemos que a preparação dos alunos, à entrada da Universidade, é bastante fraca. (…) E depois também não são tomadas medidas para ultrapassar essas dificuldades, por isso temos tantos problemas nas disciplinas de Matemática. (última entrevista)

A falta de hábitos de trabalho, a falta de capacidade de trabalho, a falta de persistência perante as primeiras adversidades no estudo da matemática, são fatores que contribuem fortemente para o insucesso dos alunos na aprendizagem da matemática no âmbito do Ensino Superior. Como nos é afirmado pelo Professor Vasco:

> Há uma falta de hábitos de trabalho muito grande. (…) Os alunos têm uma grande dificuldade em fixar a sua atenção num texto que não sejam capazes de ler rapidamente. E isso é mortal para a matemática. Nós sabemos que, por vezes, para compreendermos um texto de matemática são necessárias muitas horas de trabalho. Estou a falar por mim, em particular, se eu pegar num artigo, mesmo da minha área, não me admiro nada se tiver que passar uma tarde com metade de uma página. É perfeitamente natural. Isto é muito difícil de engolir para um aluno. Hoje em dia eles estão habituados à gratificação

> imediata. Estão habituados a pegar num texto e a lê-lo na diagonal. Portanto, a ideia de que têm que passar, ali, uma hora ou duas, a reler, a tentar, por si próprios, dizer a mesma coisa de outra maneira, para ver se perceberam bem, inventarem uns exemplos ou recorrerem a alguns exemplos para ver se perceberam bem o que está lá escrito, não lhes agrada. Portanto, terem que perder ali, se calhar, uma tarde inteira com uma página, isso é muito difícil porque é um hábito que tem que se adquirir cedo. (última entrevista)

Na concetualização do Professor Vasco o Processo de Bolonha "desvalorizou" o ensino da matemática na grande maioria das Licenciaturas no Ensino Superior, ao reduzir a carga horária semanal para apenas três horas. O Professor Vasco é de opinião que este é um dos fatores que tem contribuído para o insucesso dos alunos na aprendizagem da matemática. Como nos explica:

> Eu assisti na minha vida profissional a uma desvalorização da matemática em alguns cursos, o que veio aumentar ainda mais as dificuldades que os alunos têm. (…) Na Faculdade de Ciências diversos cursos que tinham vários semestres de matemática foram, progressivamente, reduzindo o número de semestres de matemática. Houve uma redução progressiva da matemática, o que parece um bocado paradoxal porque, com a evolução das próprias ciências como é natural que aconteça, à medida que estas evoluem, vão-se matematizando mais. No entanto, houve aqui uma evolução um bocadinho ao contrário. (…) Praticamente todos os cursos reduziram a matemática, na Faculdade de Ciências. (última entrevista)

Quanto a este Professor, o Processo de Bolonha e a consequente diminuição da carga horária em grande parte das disciplinas de Matemática, é um fator que veio contribuir fortemente para a diminuição das competências em matemática em algumas das Licenciaturas. Referindo-se ao "velho ideal do ensino universitário", advoga que este está "desvirtuado", visto que, o ideal universitário era dar ao aluno uma sólida preparação em grandes áreas do conhecimento, que permitisse ao aluno ficar com os "alicerces necessários" para poder enveredar por diversas atividades profissionais:

> O velho ideal do ensino universitário está muito desvirtuado. O Processo de Bolonha é muito contraditório relativamente a este ideal. O ideal universitário não era, propriamente, preparar profissionais para saírem daqui e entrarem para uma empresa que precisa de pessoas que saibam uma determinada técnica para aplicar naquele momento. O ideal universitário era, exatamente, o inverso. Era dar uma sólida base, em grandes áreas do conhecimento, que permitisse às pessoas ficarem com os alicerces necessários para, depois, poderem ter atividades profissionais variadas, para se poderem adaptar às circunstâncias, ficarem com uma preparação para terem autonomia. Isso é que era o essencial. Portanto, supunha-se que tinham uma formação sólida. E, desse ponto de vista, fazia bastante sentido que a matemática tradicionalmente dada no primeiro e no segundo ano universitário, fosse dada para todos. Depois, cada um aplicaria a parte do seu curso de que necessitasse, mas ficava com aquela formação. (…) Agora, em matemática, cada vez damos menos coisas. (última entrevista)

As medidas a adotar visando o sucesso na matemática do Ensino Superior

Medidas relativas ao ensino não superior

Na conceção do Professor Vasco, e visando o sucesso no ensino e aprendizagem da matemática nos vários níveis de ensino, é necessário que cada vez mais cedo sejam incutidos nos alunos, fortes hábitos de trabalho, por forma a aumentar e solidificar as suas capacidades e empenho nas atividades matemáticas.

> Verifico que há um certo *deficit* nas condições que os alunos têm nas aulas. É necessário exigir-lhes um mínimo de atenção, de esforço, etc.. (…) E tem de ser logo quando são novos, pois há janelas de oportunidade que se não são treinadas devidamente e na altura certa, perde-se a oportunidade e, depois, a pessoa fica para o resto da vida, privado dessas capacidades e algumas delas têm muito a ver com o ensino da matemática. Como as capacidades de memorização, capacidades de esforço individual de compreensão. (…) Tudo

> isso que é tradicionalmente treinado, em particular, também, na matemática, nas idades mais baixas. (última entrevista)

Na linha de pensamento deste Professor o ensino da matemática nos Ensinos Básico e Secundário está “desestruturado”. Assim, classifica de prioritária uma reformulação dos programas, dos manuais escolares e da formação dos professores, argumentando:

> Eu penso que se deveria procurar estruturar melhor o ensino da matemática, pois acho que está um pouco desestruturado. Portanto, deve-se melhorar a qualidade dos programas, dos manuais, etc. Depois, há um trabalho a médio/longo prazo que é a formação de professores. Estou a pensar, em particular, na formação dos professores do ensino básico. (…) Eu acho que quem vai ensinar matemática, a qualquer nível que seja, tem que saber bastante mais do que aquilo que vai ensinar. E não sei se isso está a acontecer, neste momento no ensino da matemática. Então este é um aspeto que também terá de ser melhorado. (última entrevista)

Neste âmbito, desenvolvendo a sua ideia acerca da avaliação dos professores de matemática, o Professor Vasco defende a realização de uma prova de avaliação para aferir o nível de conhecimentos matemáticos dos mesmos:

> Acho que devia haver uma prova objetiva para avaliar os professores. Quem vai ensinar matemática tem de saber muito, mas mesmo muito, de matemática. (…) Há um défice grande na formação de professores. Tudo isso são passos que se têm de dar na boa direção mas estou convencido que isto não se resolve, assim, de um dia para o outro. Penso que se forem dados passos na boa direção, continuadamente, ao longo de uns anos largos, a situação pode melhorar mas não acredito que melhore de um dia para o outro. (…) E eu não vejo outra maneira a não ser os exames que são tão contestados. Quer dizer, acho que tem que haver um exame, tem que haver uma prova nacional, qualquer coisa que intervenha na colocação dos professores. (última entrevista)

Medidas relativas ao Ensino Superior

No que concerne ao ensino da matemática no contexto do Ensino Superior, este Professor remete-nos para a necessidade de aumentar o número de horas semanais nas disciplinas de Matemática, bem como a criação de cursos propedêuticos, com o intuito de colmatar algumas das dificuldades que os alunos trazem dos Ensinos Básico e Secundário. A este respeito, refere:

> O número de aulas adequado a uma disciplina afere-se pela experiência passada. E estamos a falar em experiência de muitas décadas. Os professores com larga experiência sabem, perfeitamente, que precisam de um certo número de horas para que os alunos assimilem uma determinada matéria. É preciso ter um certo número de aulas, de problemas a acompanhar as aulas teóricas, para que essa matéria fique bem assimilada. E não se sabe isto porque tenha sido feita alguma experiência de laboratório nos últimos anos, sabe-se isto porque foi experimentado ao longo de muitas gerações, por muitos professores e muitos alunos. É a única justificação que há para isto. Não são investigações levadas a cabo, há dois ou três anos. (…) Todos os Professores sabem que três horas por semana para uma disciplina do tipo Matemáticas Gerais é muito, muito pouco tempo com os alunos. (…) É necessário criar aulas em que os alunos resolvam problemas com a ajuda dos professores, as chamadas aulas práticas. Criar aulas suplementares, aulas de preparação, cursos propedêuticos. E, depois, deveriam ter a possibilidade de tirarem dúvidas com os vários professores. Isso é que seria o percurso normal de um aluno. E estou convencido de que se eles fizessem isso teriam sucesso. (última entrevista)

Síntese

Analisando as conceções apuradas no caso do Professor Vasco, é possível apresentar a seguinte síntese:

Sobre as conceções acerca da matemática

1) O Professor Vasco possui um enorme gosto e forte interesse pela matemática, classificando esta ciência de uma ciência magnífica.

2) A sua relação de gosto e grande interesse pela matemática foi sendo construída, e evoluiu ao longo dos anos, influenciada pelos próprios conteúdos matemáticos em estudo, intensificada pelo aumento da complexidade dos temas que iam sendo aprofundados, pela facilidade com que os compreendia, pelo gosto e dedicação que impunha às suas atividades matemáticas, e pelo grande sucesso que sempre obteve nas avaliações da disciplina.

3) Deduz-se que o forte gosto, sentimento positivo, e o excelente relacionamento que o Professor Vasco nutre relativamente à matemática, construiu-se em torno dos seguintes fatores: a) As caraterísticas que associa à matemática (rigor lógico e a simplicidade "das coisas matemáticas"); b) Os próprios conteúdos matemáticos e a intensificação e complexidade dos mesmos; c) A facilidade com que compreendia e estudava os conteúdos matemáticos; d) A panóplia de professores universitários que lhe transmitiram o gosto e a motivação para as suas atividades matemáticas; e) A disciplina e a dedicação que impunha às suas atividades matemáticas; e f) As elevadas classificações que sempre obteve na avaliação da aprendizagem.

4) Na conceção deste Professor a matemática carateriza-se essencialmente pelo seu raciocínio lógico e rigoroso, pela “simplicidade dos seus princípios”, pela “beleza e harmonia” na forma como os seus conceitos se relacionam, por ser uma ciência com vida, criada pelo homem, constituindo uma “grelha” que permite a compreensão da realidade.

5) Na conceção do Professor Vasco a matemática é descrita como indispensável visto que fornece a linguagem que permite descrever, compreender e formalizar, sintética e ordenadamente, a realidade.

6) Salientando os seus interesses acerca da matemática, para o Professor Vasco, a matemática é importante para a própria matemática, isto é, para o desenvolvimento de novas relações e de novas teorias nos vários campos da matemática. E, também, porque saber matemática permite-nos conhecer outras ciências e outros ramos do conhecimento.

Sobre as conceções acerca do ensino da matemática

1) No contexto escolar do ensino da matemática no Ensino Superior, para o Professor Vasco, esta disciplina transmite aos alunos do primeiro ano (na grande maioria das Licenciaturas) conhecimentos gerais de matemática, as chamadas “ferramentas” matemáticas que são vistas como fulcrais para serem utilizadas nas mais variadas disciplinas das diversas Licenciaturas. Neste contexto, este Professor designa estas disciplinas de Matemática, de “disciplinas de serviço”.

2) Em seu entender, um professor de matemática deve possuir um conhecimento profundo dos conceitos científicos a ensinar aos seus alunos, deve ter um "entusiasmo enorme pela matemática", deve ter um "gosto enorme" pelo ensino da matemática, assim como possuir uma elevada capacidade de comunicação. Na sua visão a experiência profissional de um professor é tida como um fator fundamental no processo de ensino e aprendizagem da matemática.

3) Para o Professor Vasco um excelente professor de matemática deve preparar muito bem a "ideia geral" que pretende transmitir aos seus alunos, seguir um "fio condutor", como se estivesse a "contar uma história". É nesta conjetura que afirma que ensinar matemática é uma "arte" e o professor de matemática é um artista.

4) Na visão deste Professor, nas aulas de matemática, os alunos devem ter um papel ativo e centrar a sua atenção exclusivamente nas atividades matemáticas que estão a ser desenvolvidas. Assim, devem estar muito atentos, acompanhando os raciocínios matemáticos que o professor está a desenvolver e respondendo às questões que o mesmo vai colocando.

5) Para que uma aula de matemática no Ensino Superior funcione em pleno e para que os alunos possam participar ativamente na construção da aula é, na conceção deste Professor, necessário que os alunos preparem e estudem os conteúdos em causa de uma aula para a outra. Cingindo-se ainda ao papel do aluno na aprendizagem da matemática, o Professor diz que ao aluno compete

ainda "dedicar-se" e "esforçar-se" por realizar um vasto e diversificado conjunto de "exercícios", por forma a abranger todos os conteúdos em estudo.

6) Ser professor de matemática no Ensino Superior foi o que o Professor Vasco sempre idealizou desde que iniciou a sua Licenciatura em Matemática.

7) O Professor Vasco dedica todas as suas noites à preparação das aulas que irá dar no dia seguinte. Este Professor confidenciou-nos que para preparar as suas aulas não necessita de consultar livros nem apontamentos, dedica apenas algum tempo à "meditação" sobre os conteúdos a lecionar, por forma a identificar a "ideia" a transmitir e a linha condutora a seguir. De um modo geral não tem por hábito recorrer à elaboração de apontamentos para consultar durante as aulas que irá realizar.

8) Durante o desenrolar das suas aulas este Professor manteve-se sempre virado para o quadro, mesmo quando questionava os alunos, e nunca recorreu a apontamentos nem mesmo quando lhe surgiam dúvidas sobre os conceitos e algumas demonstrações que escrevia no quadro. Por seu lado, os alunos mantinham-se muito passivos e a sua grande maioria não passava do quadro os apontamentos que o Professor Vasco ia escrevendo.

9) Para as suas aulas teóricas o Professor Vasco utiliza como materiais de trabalho apenas o quadro e o giz. Tudo o que vai dizendo durante a aula é escrito no quadro. Contudo, a gestão do espaço do quadro não é

particularmente organizada, sendo que do princípio até ao final da sua aula o Professor Vasco não tem necessidade de apagar o quadro e vai ocupando todo o espaço livre, o que por vezes criou uma certa dificuldade em transcrever e acompanhar o Professor nas suas exposições.

10) Tendo em devida conta as conceções deste Professor acerca da matemática, verificamos que nas suas exposições privilegia a perspetiva geométrica como fator motivador para os conteúdos em estudo. Considera ainda, fundamental, no ensino da matemática no Ensino Superior, fazer as demonstrações dos teoremas em estudo em detrimento de fazer exercícios de aplicação direta dos conteúdos em estudo.

11) O Professor Vasco inicia as suas aulas apresentando primeiramente os conceitos, definições e respetivas demonstrações, e por fim, se restar tempo, resolve exemplos diretos dos conteúdos apresentados. Contudo, e tendo em consideração a natureza de determinados conteúdos matemáticos a expor aos alunos, para o Professor Vasco, iniciar a aula com determinados exemplos pode ser uma mais valia e um fator motivador para as matérias a estudar.

12) O Professor Vasco não faz referência à aplicação dos conteúdos matemáticos em estudo. A justificação para este procedimento remete-nos para o facto de considerar que nas Licenciaturas onde leciona (Gestão e Economia) a matemática é uma “disciplina de serviço”, sendo que os alunos irão ter oportunidade de ver as aplicações matemáticas em causa nas várias disciplinas das suas áreas de especialização.

Os fatores explicativos do insucesso na matemática

1) Na perspetiva deste Professor, e tendo em atenção as caraterísticas que associa à matemática, grande parte dos seus alunos no Ensino Superior não possui a preparação matemática necessária para progredir com sucesso nas disciplinas de Matemática no Ensino Superior.

2) As grandes dificuldades que o Professor Vasco identifica nos seus alunos respeitam aos conteúdos matemáticos dos primeiros ciclos de ensino, como por exemplo, o cálculo numérico. Neste ponto, argumenta que são as falhas "mais básicas" que mais frequentemente deteta nos seus alunos.

3) Refletindo ainda acerca das dificuldades detetadas nos seus alunos, este Professor identifica a falta de capacidade de concentração e a falta de persistência perante as primeiras dificuldades, aquando da resolução de exercícios práticos de aplicação direta dos conteúdos matemáticos em estudo.

4) As origens das dificuldades que os alunos têm na aprendizagem da matemática no Ensino Superior estão fortemente relacionadas com o insucesso dos mesmos nos Ensinos Básico e Secundário. É a "fraca preparação" que os alunos trazem dos anos anteriores que compromete irremediavelmente o sucesso na aprendizagem da matemática no Ensino Superior.

5) A falta de hábitos de trabalho, a falta de capacidade de trabalho, a falta de persistência perante as primeiras adversidades no estudo da matemática, são fatores que contribuem fortemente para o insucesso dos alunos na aprendizagem da matemática no âmbito do Ensino Superior.

6) Na concetualização do Professor Vasco o Processo de Bolonha "desvalorizou" o ensino da matemática na grande maioria das Licenciaturas no Ensino Superior, ao reduzir a carga horária semanal para apenas três horas. O Professor é de opinião que este é um dos fatores que tem contribuído para o insucesso dos alunos na aprendizagem da matemática.

7) O Processo de Bolonha e a consequente diminuição da carga horária em grande parte das disciplinas de Matemática, é um fator que veio contribuir fortemente para a diminuição das competências em matemática em algumas das Licenciaturas.

As medidas a adotar visando o sucesso na matemática

1) Na conceção do Professor Vasco, e visando o sucesso no ensino e aprendizagem da matemática nos vários níveis de ensino, é necessário que, cada vez mais cedo, sejam incutidos nos alunos, fortes hábitos de trabalho, por forma a aumentar e solidificar as suas capacidades e empenho nas atividades matemáticas.

2) Na linha de pensamento deste Professor, o ensino da matemática no Ensino Básico e no Ensino Secundário está "desestruturado". Assim, classifica de prioritária, uma reformulação dos programas, dos manuais escolares e da formação dos professores.

3) Neste âmbito, desenvolvendo a sua ideia acerca da avaliação dos professores de matemática, o Professor Vasco defende a realização de uma prova de avaliação para aferir o nível de conhecimentos matemáticos dos mesmos.

4) No que concerne ao ensino da matemática no contexto do Ensino Superior, este Professor remete-nos para a necessidade de aumentar o número de horas semanais nas disciplinas de Matemática, bem como a criação de cursos propedêuticos, com o intuito de colmatar algumas das dificuldades que os alunos trazem do Ensino Básico e Secundário.

Capítulo VII

Conclusão

Neste capítulo apresentamos a conclusão da investigação. Na primeira secção expomos uma síntese sobre o estudo realizado. Na segunda secção apresentamos as conclusões do estudo. Finalizamos este capítulo com as considerações finais.

Síntese do estudo

A investigação realizada visa compreender o fenómeno do ensino da matemática nos primeiros anos do Ensino Superior, tendo por objetivo estudar em profundidade o modo como os professores de matemática do Ensino Superior concebem a matemática e o ensino da matemática. Procurou-se igualmente investigar os fatores que, do ponto de vista destes professores, poderão estar na origem do insucesso dos alunos na aprendizagem da matemática nos primeiros anos do Ensino Superior, assim como identificar e descrever as medidas que poderão contribuir para que os alunos sejam melhor sucedidos na aprendizagem da matemática no Ensino Superior.

Neste âmbito, formalizaram-se para esta investigação quatro grandes objetivos: 1) Identificar, descrever e analisar as conceções de professores do Ensino Superior acerca da matemática.

2) Identificar, descrever e analisar as conceções de professores do Ensino Superior acerca do ensino da matemática.

3) Identificar e descrever os fatores que, do ponto de vista dos professores, poderão explicar o insucesso dos alunos na aprendizagem da matemática no Ensino Superior.

4) Identificar e descrever as medidas que, do ponto de vista dos professores, poderão contribuir para que os alunos sejam melhor sucedidos na aprendizagem da matemática no Ensino Superior.

Neste contexto de estudo, procurou-se encontrar resposta para as seguintes questões de investigação:

1) Que conceções revelam os professores do Ensino Superior sobre a matemática?

1.1) Como se relacionam com a matemática?

1.2) O que pensam acerca do que é a matemática? Como caraterizam a atividade matemática?

1.3) O que pensam acerca da importância da matemática?

2) Que conceções revelam os professores do Ensino Superior acerca do ensino da matemática?

2.1) Quais as finalidades do ensino da matemática no Ensino Superior?

2.2) Como entendem o seu papel e o papel do aluno no ensino e aprendizagem da matemática no Ensino Superior?

2.3) Como abordam os conceitos matemáticos? Que tarefas e que metodologias de trabalho usam nas suas aulas de matemática?

3) Quais os fatores que, na perspetiva dos professores, poderão ser explicativos do insucesso dos alunos do Ensino Superior na aprendizagem da matemática?

3.1) Quais as dificuldades que detetam nos alunos no Ensino Superior?

3.2) Quais as origens das dificuldades dos alunos no Ensino Superior?

4) Quais as medidas que, do ponto de vista dos professores, poderão ser adotadas para que os alunos sejam melhor sucedidos na aprendizagem da matemática no Ensino Superior?

4.1) Quais as medidas relativas ao ensino não superior?

4.2) Quais as medidas relativas ao Ensino Superior?

Com vista à obtenção de respostas para estas questões de investigação foram realizados dois estudos de caso qualitativos de professores de uma Universidade da Grande Lisboa. As técnicas de recolha de dados utilizadas foram a entrevista semi-estruturada, a observação de aulas e a análise documental. A análise de dados foi feita a partir de categorias definidas com base nos objetivos e nas questões de investigação, e seguindo as recomendações de Bardin (1989) e Bogdan e Biklen (1994) para a análise de conteúdo.

De seguida apresentam-se as conclusões obtidas, fazendo uma análise de cada caso e também a comparação entre ambos com o objetivo de identificar similitudes e contrastes e de confrontar com a literatura existentes sobre o domínio.

Conclusões

As conceções acerca da matemática

Para os professores investigados, a relação de gosto e interesse pela matemática foi sendo construída, evoluindo ao longo dos anos, marcada por diversos fatores: a influência familiar, os seus professores de matemática, a facilidade com que aprendiam e estudavam os conceitos matemáticos, os próprios conceitos matemáticos em aprendizagem e o êxito nas avaliações da disciplina.

Para o Professor Vasco esta relação foi também fortemente intensificada à medida que se aprofundava e aumentava a complexidade dos temas em estudo. Este Professor possui ainda um enorme gosto e forte interesse pela matemática, classificando esta ciência de uma ciência magnífica.

Para o Professor Dinis a atração que sempre sentiu pela matemática deve-se fundamentalmente às caraterísticas que associa à matemática, como sejam, a abstração, a elegância e a harmonia "das coisas matemáticas". Neste sentido, para ambos os professores, a matemática é concetualizada como a "ciência do raciocínio", "harmoniosa" e "elegante" na forma como os seus conteúdos se relacionam, "ciência abstrata criada pelo homem”, com vida e onde não há verdades absolutas. Os atributos de “harmonia”, “beleza” e “elegância” associados à caraterização da matemática foram também fortemente identificados em Guimarães (2003).

Na perspetiva do Professor Dinis a matemática é apresentada como uma ciência construída por ideias estruturadas, muito bem arrumadas e onde a “organização” do raciocínio matemático é apontada como um atributo muito “aliciante” para a sua prática. Esta ideia remete-nos para a perspetiva de que a matemática é essencialmente um processo de pensamento que implica a formação e aplicação de redes de ideias abstratas que se associam logicamente. Na mesma linha de pensamento, para o Professor Vasco a matemática carateriza-se fundamentalmente pelo seu raciocínio lógico e rigoroso, pela “simplicidade dos seus princípios”, pela “beleza e harmonia” na forma como os seus conceitos se relacionam, por ser uma ciência com vida, criada pelo homem, constituindo uma “grelha” que permite a compreensão da realidade. Assim, a matemática é concetualizada como uma ciência “bela” e “harmoniosa”. A beleza e a harmonia que associam à matemática remete-nos para o facto de idealizarem esta ciência como sendo construída por ideias abstratas, perfeitamente organizadas e interligadas. É a forma como os conceitos se interligam entre si e com a realidade que constituem a beleza e a harmonia que estes professores atribuem à matemática. O “prazer estético” e o “belo” que associam à construção matemática têm a ver com a “harmonia” e a relação perfeita e profunda das ideias matemáticas. A “beleza da matemática” é uma caracterização da matemática fortemente identificada e discutida em Davis e Hersh (1981, 1995).

A formalização matemática ou a “teoria da demonstração” onde uma sequência de símbolos se manipulam abstratamente, com o objetivo de construir uma teoria matemática, impõe-se como a atividade matemática que mais fascina o Professor Dinis. Esta conceção aproxima-se da doutrina formalista onde se destaca que a prioridade da matemática consiste na combinação de símbolos matemáticos destituídos de qualquer significado. Estes pressupostos estão em consonância com a linha de pensamento de Rutherford e Ahlgren (1995) ao identificarem a abstração como a característica central da matemática, sendo que o raciocínio matemático tem início com o processo de abstração. Logo, a matemática é essencialmente um processo de pensamento que implica a formação e a aplicação de redes de ideias abstratas e associadas logicamente.

Fazer matemática é, na visão do Professor Dinis, levar o "espírito humano aos seus limites". Assim, a matemática é perspetivada como uma ciência dinâmica, que desafia continuamente o homem, num "jogo intelectual" e na busca incessante pela criação de mais relações entre as várias teorias matemáticas.

Na visão dos dois professores, a matemática é uma atividade humana ancestral e fundamental: desenvolveu-se, nos primórdios, como uma ciência da medida e da aritmética que permitia ao homem a "gestão" de problemas do seu dia-a-dia. A matemática é concetualizada como uma ciência com vida e em constante evolução. Sendo que nos séculos XIX e XX floresceu de tal forma que originou uma panóplia de novos ramos dentro da própria matemática.

Para ambos os professores estudados, a matemática é tida como uma ciência relativa onde não há verdades absolutas. A "verdade matemática" é, nas suas perspetivas, uma "verdade puramente relativa" que depende dos axiomas que estão em causa e da teoria matemática que se pretende alcançar.

No que concerne à importância da matemática, esta é considerada fundamental visto que é a ciência do raciocínio. É uma teoria lógico-dedutiva que fornece a ginástica mental permitindo ao cérebro exercitar-se "nos raciocínios", "nas deduções", "no rigor" e "na utilização da Lógica". Ambos os professores destacam que a matemática é indispensável na medida em que fornece a linguagem que permite descrever, formalizar e compreender sintética e ordenadamente, a realidade. Em Guimarães (2003), a ideia da matemática como uma ciência de grande utilidade e aplicação nos mais diversos domínios da atividade humana emerge também como uma conceção fortemente enraizada.

Salientando os seus interesses acerca da matemática, para o Professor Vasco a matemática é importante para a própria matemática, isto é, para o desenvolvimento de novas relações e de novas teorias nos vários campos da matemática. E, também, porque saber matemática permite-nos conhecer outras ciências e outros ramos do conhecimento.

Assim, em jeito de síntese, pode afirmar-se que ambos os professores investigados conceptualizam a matemática como uma ciência abstrata, "ciência do raciocínio", "harmoniosa" e "elegante" na forma como os seus conteúdos se relacionam. Para o professor Dinis, a matemática é uma ciência construída por ideias "estruturadas" onde a organização do raciocínio matemático é vista como o alicerce fulcral. Por seu lado, o professor Vasco perspetiva a matemática fundamentalmente pelo seu raciocínio lógico e rigoroso e pela "simplicidade" dos seus princípios. Ambos os professores estudados são de opinião que a matemática é uma ciência com vida, criada pelo Homem, constituindo uma “grelha” que permite a compreensão da realidade.

As conceções acerca do ensino da matemática

No contexto do ensino da matemática no Ensino Superior, ambos os professores defendem que a disciplina de Matemática transmite aos alunos do primeiro ano (na grande maioria das Licenciaturas) conhecimentos gerais de matemática, as chamadas “ferramentas” matemáticas que são vistas como fulcrais para serem utilizadas nas mais variadas disciplinas das diversas Licenciaturas. Neste âmbito, o Professor Vasco designa estas disciplinas de Matemática, de “disciplinas de serviço”, sendo que na sua perspetiva, os alunos irão ter oportunidade de ver as aplicações matemáticas em causa nas várias disciplinas das suas áreas de especialização.

Para os dois professores estudados, a matemática é a ciência do raciocínio, e como tal, o seu ensino é fulcral na medida em que fornece a ginástica mental permitindo ao cérebro exercitar-se “nos raciocínios”, “nas deduções”, “no rigor” e “na utilização da Lógica”. Contudo, no contexto da Universidade, para os professores participantes, a razão fundamental para o ensino da matemática prende-se com as necessidades futuras da aplicação de certos conceitos matemáticos no âmbito de outras disciplinas das suas Licenciaturas. É assim, valorizada, a ideia da aplicabilidade da matemática num contexto futuro de outras disciplinas, embora não se tenha presenciado este aspeto nas aulas assistidas dos professores ou nas listas de exercícios a que tivemos acesso e que facultam aos alunos.

Na perspetiva dos professores investigados, um bom professor de matemática deve possuir um conhecimento profundo dos conceitos científicos a ensinar aos seus alunos, deve ter um “entusiasmo enorme pela matemática”, deve ter um “gosto enorme” pelo ensino da matemática, assim como possuir uma elevada capacidade de comunicação. A experiência profissional é, na visão dos participantes, tida como um fator facilitador no processo de ensino e aprendizagem da matemática no Ensino Superior. A estes pressupostos o Professor Dinis acrescenta que a clareza na forma como apresenta os conceitos e a simpatia do professor para com os seus alunos, são caraterísticas consideradas essenciais para o ensino da matemática.

Na ótica dos dois professores, um excelente professor de matemática prepara muito bem a “ideia geral” que pretende transmitir aos seus alunos, e seguir um “fio condutor”, como se estivesse a “contar uma história”. Assim, um bom professor de matemática deve primeiramente ser capaz de colocar o problema a ensinar, motivando os seus alunos para a temática em estudo, recorrendo às aplicações futuras da mesma, quer noutros campos da matemática quer noutras disciplinas do plano curricular das suas Licenciaturas. É com esta ideia que o Professor Vasco afirma que ensinar matemática é uma “arte”, e o professor de matemática é um artista. Encontramos esta idealização presente em Davis e Hersh (1981, 1995).

Na perspetiva do Professor Dinis, os alunos nas aulas de matemática no Ensino Superior devem acompanhar os raciocínios matemáticos em causa, respondendo às questões que o professor vai levantando na exposição dos conceitos em estudo, não se limitando a passar a matéria do quadro. Na sua ótica, um bom aluno a matemática é aquele que está motivado, que manifesta interesse, que tem hábitos de trabalho, que durante as aulas teóricas é capaz de seguir os raciocínios matemáticos em causa, e em conjunto com o professor “construir” e até antecipar as teorias em estudo. Na visão do Professor Vasco, para que uma aula de matemática no Ensino Superior funcione em pleno e para que os alunos possam participar ativamente na construção da aula, é necessário que os alunos preparem e estudem os conteúdos em questão de uma aula para a outra. Cingindo-se ainda ao papel do aluno na aprendizagem da matemática, para ambos os professores participantes, ao aluno compete também “dedicar-se” e “esforçar-se” por realizar um vasto e diversificado conjunto de “exercícios” por forma a abranger todos os conteúdos em estudo.

Sendo um Professor universitário com mais de três décadas de experiência no ensino da matemática em diversas Licenciaturas, e tendo em devida conta o facto de considerar que as matérias que ensina são “elementares”, o Professor Dinis confessou não dedicar muito tempo à preparação das suas aulas. Durante as suas aulas observámos que este Professor se manifestou sempre muito confiante e motivado. No desenrolar das mesmas nunca recorreu aos seus apontamentos nem mesmo quando apresentava e resolvia exercícios no quadro. Em contrapartida, o Professor Vasco dedica todas as noites à preparação das aulas que irá dar no dia seguinte. Este Professor confessa que para preparar as suas aulas não necessita de consultar livros nem apontamentos, dedica apenas algum tempo à “meditação” sobre os conteúdos a lecionar, por forma a identificar a “ideia” a transmitir e a linha condutora a seguir. De uma forma geral, não tem por hábito recorrer à elaboração de apontamentos para consultar durante as aulas que irá realizar. Assim, são as conceções dos professores acerca da matemáticas, fortemente enraizadas ao longo de décadas, que delimitam as suas práticas docentes. Esta visão está identificada em Ponte e Santos (2008).

Para estes professores universitários o quadro e o giz são os materiais de trabalho para as suas aulas teóricas e de orientação tutorial. Tudo o que o Professor Dinis transmite durante a aula é cuidadosamente escrito no quadro. Nas suas aulas tudo é meticulosamente estruturado por forma a ter no quadro, do princípio até ao final da aula, as definições e teoremas que são mais importantes, caso seja necessário comparar os conceitos em estudo. Contudo, para o Professor Vasco a gestão do espaço do quadro não é particularmente organizada, sendo que do princípio até ao final da sua aula este Professor não tem necessidade de apagar o quadro e vai ocupando todo o espaço livre, o que por vezes criou uma certa dificuldade em transcrever e acompanhar o professor nas suas exposições. Ambos os docentes colocam perguntas aos seus alunos durante as aulas. Este procedimento deve-se ao facto de defenderem que o aluno deve ter uma participação ativa na aula e ser capaz de alcançar respostas para as questões colocadas. Também em Canavarro (1993), na prática matemática dos professores sobressaiu a ideia de que ensinar matemática consiste essencialmente no desenvolvimento de capacidades e na transmissão de conhecimentos.

No que respeita ao processo de ensino e aprendizagem, verifica-se que mesmo após vários anos da implementação do Processo de Bolonha, a exposição de conhecimentos por parte dos professores universitários é a atividade central no desenrolar de uma aula de matemática. Esta realidade já havia sido descrita em Esteves (2010).

Podemos afirmar que as conceções de que a matemática é a ciência que fornece a ginástica mental que permite ao cérebro exercitar-se “nos raciocínios”, “nas deduções", "no rigor" e "na utilização da Lógica", influenciam fortemente a forma como os Professores organizam e realizam a sua prática docente. Estas ideias estão descritas em Schoenfeld (1987, 2000), Cooney & Wilson (2002), D. McLeod, S. McLeod (2002), Lloyd (2002), Wilkins (2008), Ponte (2004, 2011) e Hannula et al. (2013).

Na conceção do Professor Dinis, a forma como dá a sua aula depende fundamentalmente dos conteúdos em estudo**.** Assim, por um lado, há conceitos em que devido às suas caraterísticas, e visando uma melhor motivação para o seu estudo, deve partir-se de casos concretos e até mesmo de exemplos práticos. Por outro lado, quando os temas são "mais difíceis de motivar" e para uma melhor gestão do tempo de aula, argumenta que se comece pela definição dos conceitos em causa, remetendo para o final da aula a resolução de exercícios de aplicação dos mesmos. O Professor Vasco inicia as suas aulas apresentado primeiramente os conceitos, definições e respetivas demonstrações, e por fim, se restar tempo, resolve exemplos diretos dos conteúdos apresentados. Contudo, e tendo em devida conta a natureza de determinados conteúdos matemáticos a expor aos alunos, para o Professor Vasco, iniciar a aula com determinados exemplos, pode ser uma mais valia e um fator motivador para as matérias a estudar. Tendo em consideração as conceções deste Professor acerca da matemática, verificamos que nas suas exposições privilegia a perspetiva geométrica como fator motivador para os conteúdos em estudo. Considera, ainda, fundamental no ensino da matemática na Universidade, fazer as demonstrações dos teoremas em estudo em detrimento de fazer exercícios de aplicação direta dos conteúdos em causa. Como podemos constatar, estas ideias remetem-nos para Davis e Hersh (1995) que afirmam que para alguns matemáticos, a demonstração é o propósito da ação matemática.

O Professor Vasco não faz referência à aplicação dos conteúdos matemáticos em estudo. A justificação para este procedimento remete-nos para o facto de considerar que nas Licenciaturas onde leciona (Gestão e Economia) a matemática é uma “disciplina de serviço” sendo que os alunos irão ter oportunidade de ver as respetivas aplicações matemáticas nas várias disciplinas das suas áreas de especialização. Em contrapartida, para o Professor Dinis é essencial no ensino da matemática no Ensino Superior destacar as vantagens do estudo dos conceitos matemáticos em causa, fazendo, sempre que possível, referência a exemplos de aplicações dos referidos conteúdos nas áreas de especialização dos alunos. É seu objetivo que os alunos entendam em profundidade o conceito e as situações onde estes podem ser aplicados.

Nas disciplinas que os professores atualmente lecionam - Matemáticas Gerais e Complementos de Matemática - a avaliação da aprendizagem consiste na realização de dois testes, uma frequência e o Exame Final. Para ambos os professores, os fracos resultados dos seus alunos são um dos fatores que mais os desagrada na sua profissão.

Os fatores explicativos do insucesso na matemática

Na perspetiva dos professores participantes nesta investigação, a grande maioria dos seus alunos não tem preparação matemática suficiente para frequentar a Universidade, onde é necessário estudar e obter a aprovação de duas ou três disciplinas de Matemática, dependendo respetivamente das Licenciaturas em causa. Como argumenta o Professor Dinis, as origens das dificuldades que os alunos têm na aprendizagem da matemática no Ensino Superior estão fortemente relacionadas com o insucesso dos mesmos nos ensinos Básico e Secundário. É a “fraca preparação” que os alunos trazem dos anos anteriores que compromete irremediavelmente o sucesso na aprendizagem da matemática no Ensino Superior. Esta realidade está associada às características que atribuem à matemática, vendo esta ciência com uma “integração vertical” muito forte, “como num edifício, em que não se pode passar de um andar para o outro sem dominar completamente o inferior” (Buescu, 2012, p. 33).

As grandes dificuldades que os professores identificam nos seus alunos respeitam aos conteúdos matemáticos dos primeiros ciclos de ensino como, por exemplo, o cálculo numérico. Neste ponto, argumentam que são as falhas “mais básicas” que mais frequentemente detetam nos seus alunos.

Na visão dos professores estudados, a grande dificuldade dos alunos na aprendizagem da matemática no Ensino Superior prende-se com a falta de capacidade na elaboração de raciocínios abstratos. Esta incapacidade deve-se ao facto de, durante o Ensino Básico e Secundário, os alunos não terem sido preparados para elaborar raciocínios em termos abstratos.

Os ambos os professores identificam a falta de capacidade de concentração e a falta de persistência perante as primeiras dificuldades, aquando da resolução de exercícios práticos de aplicação direta dos conteúdos matemáticos em estudo. Assim, a falta de hábitos de trabalho, a falta de capacidade de trabalho, a falta de persistência perante as primeiras adversidades no estudo da matemática, são fatores que contribuem fortemente para o insucesso dos alunos na aprendizagem da matemática no âmbito do

Ensino Superior. Na perspetiva destes professores grande parte dos conceitos matemáticos, anteriormente estudados, não estão "interiorizados" nem compreendidos na sua plenitude pelos alunos, estão, sim, automatizados.

Na concetualização dos professores em estudo, o Processo de Bolonha "desvalorizou" o ensino da matemática na grande maioria das Licenciaturas no Ensino Superior, ao reduzir a carga horária semanal nas disciplinas de Matemática. Na sua perspetiva, a falta de aulas práticas nos planos curriculares de algumas Licenciaturas agrava as dificuldades dos alunos no processo de ensino e aprendizagem da matemática. A reduzida carga horária (em algumas Licenciaturas de apenas três horas semanais) é um dos fatores para o insucesso dos alunos na aprendizagem da matemática. Neste contexto, os dois professores são de opinião que este é um dos fatores que mais tem contribuído para o insucesso dos alunos. Assim, o Processo de Bolonha e a consequente diminuição da carga horária em grande parte das disciplinas de Matemática, são fatores que vieram contribuir fortemente, do ponto de vista dos professores, para a diminuição das competências em matemática em algumas das Licenciaturas.

As medidas a adotar visando o sucesso na matemática

No que diz respeito a medidas relativas ao ensino não superior, os professores apresentam um conjunto de medidas que na sua opinião poderiam contribuir para o sucesso dos alunos no ensino superior.

Na conceção dos professores investigados, e visando o sucesso no ensino e aprendizagem da matemática nos vários níveis de ensino, é necessário que, cada vez mais cedo, sejam incutidos nos alunos fortes hábitos de trabalho por forma a aumentar e robustecer as suas capacidades e empenho nas atividades matemáticas.

Na linha de pensamento dos dois professores universitários o ensino da matemática no ensino Básico e no ensino Secundário está “desestruturado”. Assim, classificam de prioritária uma reformulação dos programas, dos manuais escolares e da formação dos professores. Estes professores reforçam a ideia de que uma reformulação na formação científica dos professores é imperiosa. Nesta linha de pensamento, a avaliação dos conhecimentos científicos dos professores é apontada como uma medida a investigar e a estudar com o objetivo de “averiguar da qualidade dos professores” no ensino Básico e no ensino Secundário. A este respeito, o Professor Vasco defende a realização de uma prova de avaliação para aferir o nível de conhecimentos matemáticos dos mesmos. Na visão do Professor Dinis, os programas curriculares da matemática no ensino Básico e no ensino Secundário, deveriam ser alterados, defendendo o retorno ao ensino tradicional de “há cinquenta anos” atrás. Na conceção deste Professor é prioritário apostar num nível elevado de exigência e rigor, onde se recorra cada vez mais à realização de exames finais como forma central da avaliação das aprendizagens.

No âmbito do Ensino Superior, os professores defendem a realização de um teste diagnóstico que tenha como finalidade averiguar as reais necessidades de cada aluno, para um possível encaminhamento para um “curso propedêutico em regime intensivo” visando a uma preparação dos alunos para as futuras disciplinas de Matemática que constam dos currículos das várias Licenciaturas.

Os dois professores universitários relevam concordância na necessidade de aumentar o número de horas semanais nas disciplinas de Matemática de modo a obter um maior sucesso no ensino e aprendizagem da matemática na Universidade.

Considerações finais

A investigação realizada pretendeu compreender em profundidade o fenómeno do ensino da matemática nos primeiros anos da Universidade, tendo por objetivo estudar o modo como os professores de matemática do Ensino Superior concebem a matemática e o ensino da matemática. Procurou-se igualmente investigar os fatores que, do ponto de vista destes professores, poderão estar na origem do insucesso dos alunos na aprendizagem da matemática nos primeiros anos do Ensino Superior, assim como identificar e descrever as medidas que poderão contribuir para que os alunos sejam melhor sucedidos na aprendizagem da matemática no Ensino Superior.

Não obstante, as diferenças entre o Professor Dinis e o Professor Vasco que fomos identificando ao longo deste capítulo, podemos dizer que para os professores universitários investigados existem significativas semelhanças na forma como conceptualizam a matemática e o seu ensino.

Assim, a matemática é concetualizada como a "ciência do raciocínio", "harmoniosa" e "elegante" na forma como os seus conteúdos se relacionam, "ciência abstrata criada pelo homem", com vida e onde não há verdades absolutas. A matemática é caraterizada ainda pelo seu raciocínio lógico e rigoroso, pela "simplicidade dos seus princípios", pela "beleza e harmonia" na forma como os seus conceitos se relacionam, e por constituir uma "grelha" que permite a compreensão da realidade. Nas suas visões a matemática é importante para a própria matemática, isto é, para o desenvolvimento de novas relações e de novas teorias nos vários campos da matemática. E, também, porque saber matemática permite conhecer outras ciências e outros ramos do conhecimento, embora este aspeto pareça, talvez, menos importante. No contexto do ensino da matemática na Universidade, os professores investigados concetualizam que esta disciplina transmite aos alunos do primeiro ano (na grande maioria das Licenciaturas) conhecimentos gerais de matemática, as chamadas “ferramentas” matemáticas que são vistas como fulcrais para serem utilizadas nas mais variadas disciplinas das diversas Licenciaturas. No entanto, interrogamo-nos até que ponto é que a visão dos professores de uma matemática “mais clássica”, que valoriza a pureza do conhecimento, elegendo as demonstrações como o máximo expoente, poderá permear as disciplinas de Matemática que os professores ensinam, e que em princípio têm a função de ser mais instrumentais e aplicadas em contextos diversos.

O facto de ambos os professores em estudo defenderem uma visão mais tradicionalista do ensino da matemática e a praticarem desse modo, centrada na transmissão de uma panóplia de conceitos aos seus alunos, está claramente relacionada com as suas conceções acerca da matemática e do seu ensino, do qual foram alunos bem sucedidos. Neste contexto, podemos argumentar que as conceções de que a matemática é a ciência que fornece a ginástica mental que permite ao cérebro exercitar-se “nos raciocínios”, “nas deduções”, “no rigor” e “na utilização da Lógica”, influenciam fortemente as conceções dos docentes estudados acerca do que é ensinar matemática, que por sua vez, se materializam nas suas práticas docentes. Estas relações estão descritas em Hannula et al. (2013).

No que respeita ao processo de ensino e aprendizagem, verifica-se que mesmo após vários anos da implementação do Processo de Bolonha, a exposição de conhecimentos por parte dos professores universitários é a atividade central no desenrolar de uma aula de matemática na Universidade. Sabe-se que, durante séculos a profissionalização do corpo docente universitário não passou pelo desenvolvimento de competências pedagógicas (Esteves, 2010). Neste contexto, perspetiva-se a necessidade de idealizar um modelo para a formação dos professores universitários onde a vertente pedagógica seja uma das variáveis a ter em devida conta. Assim, neste enquadramento, ocorre-nos sugerir como necessário, na formação dos professores universitário de matemática, equilibrar a formação científica com a formação pedagógica adequada para promover melhores aprendizagens nos alunos. Essa formação teria vantagens em contemplar não apenas métodos de ensino mas também focar-se na problemática da avaliação, de modo a proporcionar aos docentes conhecimentos sobre como praticar uma avaliação contínua que preste justiça ao que os alunos sabem de matemática.

Na conceção dos professores participantes, as origens das dificuldades que os alunos têm na aprendizagem da matemática no Ensino Superior estão fortemente relacionadas com o insucesso dos mesmos nos ensinos Básico e Secundário. A grande dificuldade dos alunos na aprendizagem da matemática prende-se com a falta de capacidade na elaboração de raciocínios abstratos. Os professores identificam a falta de capacidade de concentração e a falta de persistência perante as primeiras dificuldades, aquando da resolução de exercícios práticos de aplicação direta dos conteúdos matemáticos em estudo. Neste contexto, parece-nos pertinente questionamos o fenómeno do insucesso dos alunos no ensino da matemática no ensino superior. Uma primeira questão terá necessariamente que ver com as responsabilidades do próprio ensino superior e com a criação de uma atitude disponível e interessada em lidar com este problema. Assim, como orientar os alunos após os insucessos nos primeiros atos de avaliação? Como controlar a desistência dos alunos nas disciplinas de Matemática no primeiro ano da Universidade? Que mudanças poderão os docentes fazer? Estas questões aproximam-nos das atuais investigações de August (2014) que nos adverte para a necessidade de se estudar aprofundadamente a problemática da desistência dos alunos na Universidade.

É entendimento dos professores investigados que o Processo de Bolonha e a consequente criação de aulas tutoriais para substituição das aulas práticas originaram uma diminuição da carga horária em grande parte das disciplinas de Matemática e, são fatores, que na perspetivas dos dois professores, vieram contribuir fortemente para a diminuição das competências em Matemática em algumas Licenciaturas. Neste âmbito, a realização de investigações, que tenham por objetivo o estudo das aulas de orientação tutorial de matemática, afiguram-se como fundamentais com vista ao estudo deste fenómeno. Investigações semelhantes foram recomendadas por Mali et al (2014).

No contexto do Ensino Superior, os professores alegam a necessidade de se realizar um teste diagnóstico que tenha como objetivo averiguar as reais necessidades de cada aluno, para um possível encaminhamento para um “curso propedêutico em regime intensivo”, visando a preparação dos alunos para as futuras disciplinas de Matemática que constam dos currículos das várias Licenciaturas. O aumento do número de horas semanais nas disciplinas de Matemática é apontado como fulcral para um maior sucesso no ensino e aprendizagem da matemática no Ensino Superior. Nesta linha de pensamento, questionamos a necessidade de reposição de aulas práticas de matemática no Ensino Superior. Quais as vantagens, para os alunos, das aulas de orientação tutorial? Quais as vantagens, para os alunos, das aulas práticas? Em alternativa, poder-se-á interrogar se a solução passará realmente por aumentar o número de horas de ensino por parte dos professores ou se em vez de uma questão de quantidade, não estaremos perante uma questão de qualidade.

Estas considerações finais levantam diversas questões inspiradas na atual investigação, que poderão constituir temáticas para futuras investigações no âmbito do ensino e da aprendizagem da Matemática na Universidade.

É nosso desejo que esta investigação tenha contribuído de alguma forma para o conhecimento do "mundo" da matemática e do ensino da matemática na Universidade, através do olhar dos professores do Ensino Superior.

Que o conhecimento do fenómeno do ensino da matemática no Ensino Superior possa ajudar os Diretores de Curso, os atuais e futuros professores universitários, assim como os seus alunos, a repensar o ensino e da aprendizagem da matemática na Universidade e a contribuir para a sua melhoria.

Referências bibliográficas

Abrantes, P. (1986). *Porque se ensina Matemática: perspectivas e concepções de professores e futuros professores* (Provas de aptidão pedagógica e científica). Lisboa: Universidade de Lisboa.

Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projeto e a relação dos alunos com a Matemática: a experiência do projecto MAT789.* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Abrantes, P. (1998). Reflexões sobre o ensino da Matemática. *Noesis, 44*, 73-75.

Aires, L. M (2010). *Uma história da Matemática: dos primeiros agricultores a Alan Turing, dos Números ao Computador.* Lisboa: Edições Sílabo.

Antunes, R. R. (1995). *Concepções de alunos do 11.ºano acerca da disciplina de filosofia: quatro estudos de caso.* (Tese de Mestrado não publicada, Universidade Católica Portuguesa).

Associação de Professores de Matemática (1988). *A renovação do currículo de Matemática.* Lisboa: APM.

Associação de Professores de Matemática (1998). *Matemática 2000: diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da matemática.* Lisboa: APM.

August, G. (2014). Variables influencing the competencies of math first-year students at the university. In S. Oesterle, P: Liljedahl, C. Nicol, & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Group of the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4., (pp. 201).Vancouver, Canada: PME.

Balain, R., Bismut, J., Connes, A., Demailly, J., Lafforgue, L., Lelong, P. & Serre, J. (2007). Os conhecimentos fundamentais ao serviço do futuro científico e técnico. In Oliveira (Orgs.), *Eduquês: Um flagelo sem fronteiras – o caso Lafforgue* (pp. 25-97). Lisboa: Gradiva.

Bardin, L. (1989). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Bell, J. (1997). *Como realizar um projecto de investigação*. Lisboa: Gradiva.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Bowers, J. (1988). *Convite à Matemática*. Lisboa: Edições Sílabo.

Buescu, J. (2012). *Matemática em Portugal: uma questão de Educação*. Lisboa: Relógio D'Água.

Canavarro, A. P. (1993). *Concepções e práticas de professores de matemática: três estudos de caso* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Canavarro, A. P. (2003). *Práticas de ensino de Matemática: Duas professoras, dois currículos* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Canavarro, A. P., Machado, S., & Santos, L. (2007). Orientações curriculares actuais para a Matemática em Portugal. In J. P. Ponte, L. Serrazina, A. Guerreiro, C. Ribeiro & L. Veia (Eds.), Actas do XV EIEM. Monte Gordo, 7 a 9 de Maio. [Suporte cd-rom]. Lisboa: Secção de Educação Matemática, Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Coob, P., & Gresalfi, M. (2011). Negotiating identities for mathematics teaching in the context of professional development. *Journal for Research in Mathematics Education,* 42(3), 270-304.

Cooney, T., & Skip, W. (2002). Mathematics teacher change and development. In G. Leder, E. Pehknonen, & G. Torner, (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 127-147). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Cotardière, P. (2011). *História das Ciências. Da antiguidade aos nossos dias*. Volume I – Matemática e Astronomia. Lisboa: Edições Texto & Grafia.

Davis, P. J., & Hersh, R. (1981, 1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). New York: MacMillan.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics*. Londres: The Falmer Press.

Esteves, M. (2010). Sentidos da inovação pedagógica no ensino superior. In C. Leite (Orgs.), *Sentidos da Pedagogia no Ensino Superior* (pp. 44-61). Porto: Legis Editora.

Flato, M. (1990). *O poder da matemática*. Lisboa: Terramar.

Frank, M. (1992). Resolução de problemas e concepções acerca da Matemática. *Educação e Matemática*, *21*, 21-23.

Guimarães, H. (1988). *Ensinar Matemática: concepções e práticas* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Guimarães, H. (2003). *Concepções sobre a Matemática e a actividade matemática: um estudo com matemáticos e professores do ensino básico e secundário* (Tese de Doutoramento, Universidade Lisboa). Lisboa: APM.

Guimarães, H. (2010). Concepções, crenças e conhecimento – afinidades e distinções essenciais. *Quadrante*, 19(2), 82-101.

Hannula, M. (2010). The effect of achievement, gender and classroom context on upper secondary students' mathematical beliefs. In V. Guerrier, S. Lavergne & Arzarello (Eds.), *CERME6 – Proceedings of the sixth congress of the european society for research in mathematics education* (pp. 34-43). Lyon: INRP.

Hannula, M., Pipere, A., Lepik, M., & Kislenko, K. (2013). Mathematics teachers' beliefs and schools' micro-culture as predictors of constructivist practices in Estonia, Latvia and Finland. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 2, (pp. 433-440). Kiel: PME.

Lessard-Hébert, M., Goyette, G., & Boutin, G. (1994). *Investigação qualitativa: fundamentos e práticas.* Lisboa: Instituto Piaget.

Liljedahl, P. (2010). Changing beliefs as changing perspective. In V. Guerrier, S. Lavergne & Arzarello (Eds.), *CERME6 – Proceedings of the sixth congress of the european society for research in mathematics education* (pp. 44-53). Lyon: INRP.

Lloyd, G. (2002). Mathematics teachers beliefs and experiences with innovative curriculum materials. In Leder, G., Pehknonen, E. & Torner, G. (Eds.*), Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 115-123). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Mali, A., Biza, I., & Jaworski, B. (2014). Characteristics of university mathematics teaching: use of generic examples in tutoring. In Oesterle, S., Liljedahl, P., Nicol, C. & Allan, D. (Eds.), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American chapter of the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4. Vancouver, Canada: PME.

Martins, M. (1996). *A avaliação das aprendizagens em matemática: concepções dos professores* (Tese de Mestrado, Universidade Católica). Lisboa: APM.

Matos, J. F. (1991). *Logo na educação matemática: um estudo sobre as concepções e atitudes dos alunos* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: Projecto MINERVA, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Matos, J. F. (1992). Atitudes e concepções dos alunos: definições e problemas de investigação. In M. Brown, D. Fernandes, J. F. Matos, & J. Ponte (Eds.), *Educação Matemática. Temas de Investigação.* Lisboa: Instituto de Inovação Educacional e Secção de Educação Matemática da Associação Portuguesa das Ciências da Educação.

Matos, J., & Carreira, S. (1994). Estudos de caso em educação matemática: problemas. *Quadrante*, 3 (1), 19-53.

Matos, J. Carreira, S. (1996). *Modelação e aplicação no ensino da matemática.* Lisboa: Coleção Práticas Pedagógicas. Instituto de Inovação Educacional.

McLeod, D., & McLeod, S. (2002). Beliefs and mathematics education: implications for learning, teaching, and research. In Leder, G., Pehknonen, E. & Torner, G. (Eds.*), Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 115-123). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Merriam, S. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. San Francisco: Jossey-Bass.

Morais, P. (1998). *Os problemas na Matemática.* Jornal Público, 8/10.

NCTM (1991). *Normas profissionais para o ensino da matemática escolar*. Lisboa: APM.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston VA: NCTM.

Nimier, J. (1979). Mathematique et affectivite. *Revue de Pédagogie Française*, 45, 166-172.

Niss, M. (1992). O papel das aplicações e da modelação na matemática escolar. *Educação e Matemática*, *23*, 1-2.

NRC (1989). *Everybody Counts*. Washington: National Academic Press.

Pajares, M. (1992). Teachers' beliefs and educational research: cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research, 62*, 307-332.

Pires, M. (2007). *Ensino Superior: da ruptura à inovação.* Lisboa: Universidade Católica Editora.

Ponte, J. (1992). Concepções dos professores de matemática e processos de formação. In M. Brown, D. Fernandes, J. F. Matos, & J. Ponte (Eds.), *Educação Matemática: Temas de Investigação*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional e Secção de Educação Matemática da Associação Portuguesa das Ciências da Educação.

Ponte, J., Matos, J. & Abrantes, P. (1998). *Investigação em educação matemática: implicações curriculares*. Lisboa: IIE.

Ponte, J. (2004). Pesquisar para compreender e transformar a nossa própria prática. *Educa, 24*, 37- 66.

Ponte, J. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, *25,* 105-132.

Ponte, J., & Santos, L. (2008). Práticas lectivas num contexto de reforma curricular. *Quadrante, 7*(1), 3-33.

Ponte, J. (2011). Teachers' knowledge, practice and identity: essential aspects of teachers' learning. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14,* 413-417.

Rutherford, F. J. (1995). *Ciência para todos.* Lisboa: Gradiva.

Santos, B. S. (1987). *Um discurso sobre as ciências*. Porto: Edições Afrontamento.

Santos, M. (1996). *Na aula de matemática fartamo-nos de trabalhar: aprendizagem e contexto da matemática escolar* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Santos, L. (2000). *A prática lectiva como actividade de resolução de problemas: Um estudo com três professoras do ensino secundário* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Schoenfeld, A. H. (1987). What's all the fuss about metacognition? In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 189-215). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A. (2000). Models of the teaching process. *Journal of mathematical behavior*, 18(3), 243-261.

Stake, R. E. (2007). *A arte da investigação com estudos de caso*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Stewart, I. (1996). *Os problemas da matemática*. Ciência Aberta, Gradiva.

Struik, D. (1992). *História concisa das matemáticas*. Lisboa: Ciência Aberta, Gradiva.

Thompson, A. (1992). Teachers’ beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 127-146). New York: Macmillan.

Vale, M. (1993). *Concepções e práticas de jovens perante a resolução de problemas de matemática: um estudo longitudinal de dois casos* (Tese de Mestrado). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Valentim, P. B. (1996). *Concepções acerca da Matemática e da sua aprendizagem: um estudo exploratório com alunos do 10.º ano.* (Tese de Mestrado não publicada). Lisboa: Universidade Católica Portuguesa.

Vergani, T. (1993). *Um horizonte de possíveis sobre a educação matemática viva e globalizante*. Lisboa: Universidade Aberta.

Wilkins, J. (2008). The relationship among elementary teachers’ content knowledge, attitudes, beliefs and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*, 139-164.

Yin, R. (2010). *Estudo de caso: planejamento e métodos.* Porto Alegre: Bookman.

Anexos

<u>Anexo 1</u>

<u>Guião da primeira entrevista</u>

- Ainda se recorda como foi o seu percurso escolar? Quais foram as suas disciplinas preferidas?

- Que experiências teve da Matemática enquanto aluno? Que lembranças tem desse período?

- E que tipo de aluno foi na Universidade? Teve sempre o mesmo tipo de relação com a Matemática? Se não, o que provocou a mudança?

  Sente que houve diferença entre o ensino secundário e o ensino superior?

  Como decorriam as aulas de Matemática na Universidade?

  Recorda algum episódio em que tenha sentido que a experiência matemática foi muito positiva (muito negativa)?

  Que pormenores aconteceram nessa situação?

- Qual o professor de Matemática que mais o marcou positivamente (negativamente)? Porquê?

- Quando e porque decidiu tornar-se matemático?

- O que é para si a Matemática? Que palavras utilizaria para descrever a Matemática?

  O que a caracteriza? O que pensa que a distingue das outras ciências?

  Com que disciplinas é que a Matemática se parece mais?

  Se estivesse a jogar um jogo em que desse pistas para adivinhar uma palavra, que pistas dava para a palavra Matemática?

  Qual o objetivo da Matemática? O que se pretende alcançar com a Matemática?

  O que é fazer Matemática? Que elementos podem caraterizar uma atividade como atividade matemática?

  Como comenta estas frases:

  “A Matemática é uma ciência esgotada, sem vida, onde nada de novo há a descobrir”.

  “A Matemática é uma fonte de verdade suprema, indiscutível e inquestionável”.

  “A Matemática nasce da intuição, e não da transpiração.”

- Como é um matemático? Acha que é um matemático?

  Como descreve alguém que considera talentoso em Matemática?

  Como é o trabalho de um matemático? Que objetos usa?

- Como pensa que surgiu a Matemática? Por criação humana? Por descoberta?

  Acha que a Matemática existe independentemente do homem?

Porque surgiu a Matemática?

- Qual a utilidade da Matemática? Qual a importância da Matemática?

  Acha que a Matemática tem alguma importância para as outras ciências? Quais?

  Como situa a Matemática face às outras ciências?

  Como explica a enorme aplicabilidade da Matemática?

  Que importância atribui a conceitos, procedimentos e processos matemáticos?

  O que pensa sobre o binómio Matemática pura/Matemática aplicada?

- Como se tornou professor de Matemática?

  O que o motiva mais na sua profissão?

Anexo 2

Guião da segunda entrevista – Professor Dinis

- Ao longo do seu percurso profissional que disciplinas lecionou?

  Fez investigação em alguma área da Matemática?

- Hoje que balanço faz da sua opção profissional?

  Voltaria atrás se pudesse?

- Nas suas aulas reparei, que quando introduz matéria nova, por vezes começa com um exemplo, outras vezes introduz logo os conceitos teóricos. Pode explicar-me porque estrutura as aulas desta maneira?

  Existem diferenças na forma como estrutura as aulas se estas tiverem propósitos diferentes ou conteúdos diferentes?

- A forma como organiza e apresenta a matéria no quadro é muito importante para si? Como estrutura essa organização? Como faz nas suas aulas tutoriais?

- Nas aulas a que assisti, verifiquei que o professor coloca aos seus alunos exemplos relativamente fáceis para ilustrar a matéria em estudo. Pode explicar-me porque opta por este tipo de atividades?

  Quando seleciona as atividades para a aula, o que tem em vista?

  Existe algum tipo de atividades que considera mais importante para os alunos? Se sim, quais as suas caraterísticas?

- Nas suas aulas o professor faz algumas perguntas aos alunos enquanto explica a matéria. Pode explicitar-me porque dá aos alunos esse papel? Qual o seu objetivo?

  Como gostava que fosse o papel dos alunos nas suas aulas de matemática?

  Nas suas aulas costuma pedir aos alunos para fazerem trabalhos de casa? Porquê?

- O que é para si um bom professor de Matemática? Que caraterísticas deve possuir?

  Qual o papel de um professor de Matemática? O Professor acha que é um bom Professor de Matemática?

- O professor faz dois testes, uma frequência e um exame. O que pensa sobre esta forma de avaliação? Parece-lhe que consegue com este processo obter os dados relevantes para apreciar a preparação matemática dos alunos? Considera a participação e o trabalho dos alunos nas aulas para "compor" a respetiva nota ou não?

- Quando termina uma aula sai satisfeito? Quando considera que uma aula correu mesmo bem?

  Quando pode dizer que uma aula lhe correu muito mal? Lembra-se de algum episódio especificamente gratificante (desagradável) enquanto professor?

- Quais são para si as principais finalidades da Matemática no Ensino Superior?

- O que é para si um bom aluno em Matemática? Tem atualmente algum bom aluno? Pode caraterizá-lo?

- Como vê os alunos que lhe chegam às suas aulas de Matemática?

- Quais as principais dificuldades que verifica nos alunos do primeiro ano do ensino superior? Quais os seus principais pontos fracos?

  Quais têm sido as suas estratégias para ajudar os seus alunos a superarem as respetivas dificuldades? Que origem vê para as dificuldades que identifica nos alunos?

- Na sua opinião os alunos quando chegam ao Ensino Superior têm condições para poderem ser melhor sucedidos na Matemática? Sim / não e porquê?

- Se fosse Ministro da Educação e do Ensino Superior que medidas tomaria no Ensino da Matemática, quer no ensino até ao 12.º ano, quer no superior, com vista a combater o insucesso na Matemática?

Anexo 3

Guião da segunda entrevista – Professor Vasco

- Ao longo do seu percurso profissional, que disciplinas lecionou?

- Hoje que balanço faz da sua opção profissional?

  Voltaria atrás se pudesse?

- Nas aulas em que eu estive presente (integral impróprio, cálculo de áreas, início do estudo de funções de várias variáveis reais) o professor utilizou muito a representação gráfica. Porque fez assim? Poderia fazer de outra forma?

- Na primeira aula da derivada da função composta o Professor partiu de conceitos teóricos e no final deu um exemplo. Contudo, quando iniciou os extremos relativos de uma função fez o oposto. Existem diferenças na forma como estrutura as aulas se estas tiverem propósitos diferentes ou conteúdos diferentes? Como toma essas decisões? Como estrutura as suas aulas?

- Nas aulas o Professor fez algumas perguntas aos alunos. Qual o seu objetivo?

- Como gostava que fosse o papel dos seus alunos nas suas aulas de Matemática? Como é um bom aluno a Matemática? Que caraterísticas devem possuir?

- Ao longo das suas aulas os alunos foram diminuindo, porquê? O que poderia ser feito para cativar mais os alunos?

- O que é para si um bom professor de Matemática? Que caraterísticas devem possuir?

  Qual o papel de um professor de Matemática? O Professor acha que é um bom Professor de Matemática?

- O professor faz dois testes, uma frequência e um exame. O que pensa sobre esta forma de avaliação? Parece-lhe que consegue com este processo obter os dados relevantes para apreciar a preparação matemática dos alunos? Considera a participação e o trabalho dos alunos nas aulas para “compor” a respetiva nota ou não?

- Quando sai de uma aula sai satisfeito? Quando considera que uma aula correu mesmo bem?

  Quando pode dizer que uma aula lhe correu muito mal? Lembra-se de algum episódio especificamente gratificante (desagradável) enquanto professor?

- Quais são para si as principais finalidades da Matemática no Ensino Superior?

- O que é para si um bom aluno em Matemática? Tem atualmente algum bom aluno? Pode caraterizá-lo?

- Como vê os alunos que lhe chegam às suas aulas de Matemática?

- Quais as principais dificuldades que verifica nos alunos do primeiro ano do ensino superior? Quais os seus principais pontos fracos?

Quais têm sido as suas estratégias para ajudar os seus alunos a superarem as respetivas dificuldades? Que origem vê para as dificuldades que identifica nos alunos?

- Na sua opinião os alunos quando chegam ao Ensino Superior têm condições para poderem ser melhor sucedidos na Matemática? Sim / não e porquê?

- Se fosse Ministro da Educação e do Ensino Superior que medidas tomaria no Ensino da Matemática, quer no ensino até ao 12.º ano, quer no superior, com vista a combater o insucesso na Matemática?

Anexo 4

Guião de observação de aulas

1- Registar: data, hora, sala e nº de alunos.

2- Descrição completa da aula:

   2.1- Descrever ambiente de aula e interações na aula (professor – alunos e alunos – alunos).

   2.2- Descrever a estrutura da aula.

   2.3- Caraterizar a atuação do professor.

   2.4- Caraterizar a atuação do aluno.

   2.5- Descrever as atividades na aula.

Anexo 5

Sistema de categorias

1- Apresentação do professor.

1.1- Descrição geral.

1.2- Razões de opção pelo curso de Matemática e descrição da vida académica enquanto aluno.

1.3- Razões de opção pela profissão de professor de Matemática e descrição da vida académica enquanto professor.

1.4- Interesses.

2- Visão sobre a Matemática

2.1- O relacionamento com a Matemática.

2.1.1- O gosto.

2.1.2- O interesse.

2.1.3- A facilidade.

2.1.4- A atração.

2.1.5- A influência familiar.

2.1.6- A influência dos professores.

2.1.7- O percurso escolar em Matemática.

2.1.8- A visão geral acerca da Matemática.

2.2- A caraterização da Matemática.

2.2.1- A ciência do raciocínio.

2.2.2- A ciência da harmonia.

2.2.3- Ciência “elegante”.

2.2.4- Ciência criada pelo homem.

2.2.5- Ciência com vida.

2.2.6- Ciência abstrata.

2.2.7- Ciência do raciocínio.

2.2.8- Ciência “aliciante”.

2.2.9- Ciência muito “organizada e arrumada”.

2.2.10- Ciência relativa onde não há verdades absolutas.

2.3- A importância da Matemática.

2.3.1- Ciência lógica-dedutiva que fornece a “ginástica mental”.

2.3.2- Ciência que fornece a “linguagem” que descreve o universo.

2.3.3- Ciência que está na cúpula de todas as ciências.

2.3.4- Ciência pura-aplicada.

3- O ensino da Matemática

3.1- A finalidade do ensino da Matemática.

3.1.1- A ciência que fornece “ferramentas”.

3.1.2- A ciência que fornece “ginástica mental”.

3.2- O papel do professor.

3.2.1- Apresentar os conteúdos.

3.2.2- Ter elevada capacidade de comunicação.

3.2.3- Ter clareza.

3.2.4- Ser simpático.

3.2.5- Motivar os alunos.

3.3- O papel do aluno.

3.3.1- Acompanhar o professor.

3.3.2- Construir o “saber matemático”.

3.3.3- Participar na aula.

3.3.4- Estudar.

3.3.5- Manifestar interesse.

3.4- As aulas de Matemática.

3.4.1- A preparação e organização da aula.

3.4.2- As demonstrações.

3.4.3- Os exemplos de “aplicação direta”.

3.4.4- Os exemplos de “aplicação a outras ciências”.

3.4.5- A avaliação da aprendizagem.

4- Os fatores explicativos do insucesso na Matemática no Ensino Superior.

4.1- As dificuldades detetadas nos alunos.

4.1.1- A falta de preparação matemática.

4.1.2- A falta de capacidade na elaboração de raciocínios abstratos.

4.1.3- As dificuldades no cálculo numérico.

4.2- As origens das dificuldades.

4.2.1- A falta de pré-requisitos.

4.2.2- O insucesso no Ensino Básico e Secundário.

4.2.3- A falta de estudo.

4.2.4- A utilização de máquina calculadora.

4.2.5- A falta de aulas práticas.

4.2.6- A forma de avaliação.

5- As medidas a adotar visando o sucesso na Matemática do Ensino Superior.

5.1- Reformular a formação científica dos professores do Ensino Básico e Secundário.

5.2- Avaliar os conhecimentos dos professores do Ensino Básico e Secundário.

5.3- Melhorar os programas curriculares do Ensino Básico e Secundário.

5.4- Aumentar o nível de exigência e rigor no Ensino Básico e Secundário.

5.5- Retirar as máquinas calculadoras no Ensino Básico e Secundário.

5.6- Recriar o ensino técnico e comercial no Ensino Secundário.

5.7- Realizar teste diagnóstico no primeiro ano do Ensino Superior.

5.8- Aumentar a carga horária no Ensino Superior

Anexo 6

Lista de exercícios – Professor Dinis

CÁLCULO MATRICIAL

EXERCÍCIOS

1) Utilize o método de Gauss para resolver os seguintes sistemas de equações lineares:

a) $\begin{cases} x+3y=7 \\ 2x-5y=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x-2y=2 \\ 4x+y=-4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x-y=0 \\ x+3y=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-2y=1 \\ -2x+4y=-2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 2x+y=3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+2z=0 \\ 2x+y+z=-1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x+z=2 \\ y+z=1 \\ z+y=3 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ x-y+2z=-1 \\ x-3z=1 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2x-y+z=-1 \\ x+y-2z=0 \\ x-5y+8z=-2 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x-y-z+w=0 \\ x+y+z-2w=1 \\ 2y+3z-w=-1 \end{cases}$

k) $\begin{cases} x+y+z-w=2 \\ 2x-y+z+w=1 \\ x+4y+2z-5w=5 \end{cases}$

l) $\begin{cases} y+2z-w=2 \\ x+y-z-w=1 \\ x-z=3 \\ 2x+y-2w=-1 \end{cases}$

m) $\begin{cases} 2x-y+2z=1 \\ x+3y-z=2 \\ 3x+2y+z=3 \\ x-4y+3z=-1 \end{cases}$

n) $\begin{cases} x-y+z+2w=1 \\ -x+2y+z-w=1 \\ y+2z+w=2 \\ 2x-3y+3w=0 \end{cases}$

2) Use o método de Gauss para discutir os seguintes sistemas de equações, em função dos parâmetros reais α e β:

a) $\begin{cases} x-2y=1 \\ 2x+\alpha y=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ -4x+6y=\beta \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x-y=3 \\ x+\alpha y=\beta \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-y+2z=3 \\ 2x+3y-z=1 \\ 3x+2y+z=\beta \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y+z=1 \\ x-y-z=\beta \end{cases}$

f) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y+z=1 \\ 2x-2y+\alpha z=2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+2z=\beta \\ 2x+\alpha z=2 \end{cases}$

h) $\begin{cases} y+\alpha z=0 \\ x+\beta y=0 \\ \beta y+\alpha z=1 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x+y=a \\ x+2y=a^2 \\ x+3y=a^3 \end{cases}$

j) $\begin{cases} \alpha x+y-z+\alpha w=0 \\ x-2y+2z+w=1 \\ x-y+z+(\alpha+1)w=\beta \end{cases}$

3) Justifique que qualquer sistema de equações lineares com mais incógnitas que equações ou é impossível ou é possível indeterminado. Dê um exemplo de cada.

4) Um sistema de equações lineares chama-se **homogéneo** quando os termos independentes das suas diversas equações são todos iguais a 0. Justifique que todo o sistema homogéneo é possível.

Anexo 7

Instrumento de avaliação – 1ª Frequência – Professor Dinis

Matemática – vários cursos – Frequência – 8/1/2013

(Duração: 2 horas)

1) Considere o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} (k-1)\,x + 2y + 2z = 1 \\ y + kz = -2 \\ (k-1)x + y = t \end{cases}$$

onde k e t designam números reais arbitrários.

[2] **a)** Diga para que valores de k o sistema dado é possível determinado.
[3] **b)** Diga para que valores de k e t o sistema dado é impossível.
[1,5] **c)** Resolva o sistema no caso de ser $k = 2$ e $t = 3$.
d) No que se segue, designe por A a matriz simples do sistema dado, com $k = 3$.
[2] **d1)** Use a regra de Cramer para calcular o valor da incógnita x, em função do parâmetro t.
[1]**d2)** Calcule a matriz inversa de A.
[1,5]**d3)** Resolva a equação matricial $A^{-1}XA^T = A + A^T$.

[2] **2)** Recorde a seguinte propriedade da função logarítmica:

$$\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b,\ \forall a, b \in \mathbb{R}^+.$$

Tendo em conta esta propriedade, explique por que razão são distintas as funções reais de variável real f e g dadas respectivamente por:

$$f(x) = \ln\frac{x-1}{x-2} \quad \text{e} \quad g(x) = \ln(x-1) - \ln(x-2).$$

[2] **3)** Calcule:

$$\lim_{x\to e} (\ln x)^{\frac{1}{x-e}}.$$

[5] **4)** Faça o estudo (tão completo quanto possível) e esboce o gráfico da função real de variável real f definida por $f(x) = \ln\left(\frac{x^3 - x}{6}\right)$. [Nota: Neste caso não existem assímptotas oblíquas]

Anexo 8

Lista de exercícios – Professor Vasco

FUNÇÕES REAIS DE VÁRIAS VARIÁVEIS REAIS EXERCÍCIOS

1. DOMÍNIOS

1) Determine e represente geometricamente os domínios das funções reais definidas por:

a) $2x + y^2$

b) $\log(x + y)$

c) $\log \frac{x}{y}$

d) $\frac{x}{3x^2 + 2y^4}$

e) $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$

f) $\frac{1}{x^2 - y^2}$

g) $\frac{1}{x^2 + y - 2x}$

h) $\frac{\log(3 - x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$

i) $\sqrt{x - \sqrt{y}}$

j) $\sqrt{x - y}$

k) $\log(2x - y)$

l) $\log(x^2 + y^2 - 2)$

2) Determine e represente geometricamente os domínios das funções reais definidas por:

a) $\frac{x^2 + y^2}{y - x + 2}$

b) $\sqrt{4x^2 + y^2 - 16}$

c) $\sqrt{\frac{4 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - 1}}$

d) $\log(x^2 - y^2) + \sqrt{1 + x - y^2}$

e) $\sqrt{x^2 + y^2 - 4} - \log(9 - x^2 - y^2)$

f) $\log y^2 + \sqrt{1 - x^2}$

g) $\log((5x - x^2 - 6)(1 - y^2))$

h) $\log \frac{3x + 2}{2y - 3}$

i) $\frac{1}{4x^2 + 9y^2 - 36}$

j) $\frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}{\log(x + y)}$

k) $\sqrt{y - x^2} - \sqrt{\sqrt{x} - y}$

l) $\sqrt{x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

m) $\frac{1}{\sqrt{\log(y - x^2)}}$

3) Considere a função real definida por $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2$ e calcule $f(1,1)$, $f(-2,3)$, $f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$, $\frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$ e $\frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$.

4) Considere a função real definida por $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$.

a) Calcule $f(-1,2)$, $f(a,a)$ e $f(a+h,b)-f(a,b)$.
b) Mostre que se tem $f(2x,2y)=4\,f(x,y)$ e que, em geral, $f(tx,ty)=t^2\,f(x,y)$, $\forall t\in\mathbb{R}$.

5) Considere a função real definida por $F(K,L)=10\,K^{1/2}L^{1/3}$, com $K\geq 0$ e $L\geq 0$.

a) Calcule $F(1,1)$, $F(4,27)$, $F\left(9,\frac{1}{27}\right)$, $F\left(3,\sqrt{2}\right)$, $F(100,1000)$ e $F(2K,2L)$.

b) Determine a constante α tal que $F(tK,tL)=t^{\alpha}\,F(K,L)$, $\forall t>0$

6) Determine os domínios das funções reais definidas por:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{z}}$

b) $xyz+\sqrt{x^2+xy+2y-4}$

c) $\log\left(1-z^2\right)+\sqrt{1-x^2-y^2}$

d) $\log\left(x^2+y^2+z^2\right)$

e) $\sqrt{1-x^2-y^2-\frac{1}{9}z^2}$

7) Esboce as curvas de nível das funções de duas variáveis reais definidas por:

a) $3x-2y$

b) x^2+y^2

c) $(x-2)^2+(y+3)^2$

d) $4x^2+y^2$

e) $\dfrac{x^3}{y}$

f) $\begin{cases} y & , \text{ se } x\leq 0 \\ y-x & , \text{ se } x>0 \end{cases}$

g) $\sqrt{x^2+y^2}$

h) $\sqrt{xy}$

i) y^2-x^2

j) $\begin{cases} |x| & , \text{ se } y\geq 0 \\ \sqrt{x^2+y^2} & , \text{ se } y<0 \end{cases}$

2. DERIVADAS PARCIAIS

8) Determine as expressões das derivadas parciais de primeira ordem das funções definidas por:

a) $x-y$

b) x^3y-xy^3

c) x^4-3xy^2+5y-3

d) $xyz+x^2y-3xz^3+7y^2z^4$

e) $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$

f) $\dfrac{x+y}{x-y}$

g) $\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

h) $\left(5x^2y - y^3 + 7\right)^3$

i) $x\sqrt{y} + \dfrac{y}{\sqrt[3]{x}}$

j) $\log\left(x^2 + y^2\right)$

k) $xy\log(x + y)$

l) $\log\dfrac{x - y}{x + y}$

m) $\log\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$

n) $\log\dfrac{1 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

o) x^y

p) x^{xy}

q) $\left(x^2 + y\right)^2$

r) $e^{z\left(x^2 + y^2 + z^2\right)}$

s) $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

t) x^{y^z}

9) Determine as expressões das derivadas parciais de primeira e segunda ordens das seguintes funções:

a) $xy\left(2 + x - y^2\right)$

b) $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

c) e^{xy}

d) $xy^3 + e^{x+2y}$

e) $\log\left(x^2 + y^3\right)$

f) $xy\log\left(x^2 + y^2\right)$

g) $x\log\left(x^2 + y^2\right) + 2y$

h) x^y

Anexo 9

Instrumento de avaliação – 1ª Frequência – Professor Vasco

Complementos de Matemática (Vários cursos) – frequência – 5/6/2012

[3] 1) Determine a expressão geral das primitivas da função:

$$\frac{x^2 - 7x + 7}{(x+2)(x^2 - 6x + 9)}$$

[3] 2) Determine uma função real de variável real $f(x)$ tal que $f(0) = 1$ e:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{e^{2x}}.$$

[3,5] 3) Calcule a área da região plana definida pela condições $x^2 + y \geq 2$, $y \leq \frac{1}{x^2}, y \geq 0$ e $x \geq 0$.

[3] 4) Seja f uma função real de variável real de classe C^1 e considere $G(x, y) = x^3 f(xy^2)$; sabendo que $\frac{\partial G}{\partial x}(-1, 2) = 4$ e $\frac{\partial G}{\partial y}(-1, 2) = 3$, Calcule $f(-4)$.

[3,5] 5) Estude a existência de extremos relativos para a função real definida por:

$$f(x, y) = (x^2 - 2x)e^{x - y^2}.$$

[4] 6) Determine, justificando, os extremos absolutos da função real definida por $f(x, y) = x^3 + x - y^2$ no conjunto dos pontos que satisfazem à condição $x^2 + y^2 = 4$.

Instituto de Investigação e Formação Avançada - IIFA

Contactos:
Universidade de Évora
Instituto de Investigação e Formação Avançada - IIFA
Palácio do Vimioso | Largo Marquês de Marialva, Apart. 94
7002-554 Évora | Portugal
Tel: (+351) 266 706 581
Fax: (+351) 266 744 677
email: iifa@uevora.pt