Fernando Manuel Lucas Carapau
PhD em Matemática

Texto Didáctico
de
Matemática Aplicado à Economia e Gestão II

Texto da Autoria do Prof. Drº Fernando Carapau
Universidade de Évora

Ano lectivo 2014-2015

"Como é que a Matemática, que é, antes de tudo, um produto do pensamento humano, independente da experiência, pode adaptar-se tão admiravelmente aos objectos da realidade"

Albert Einstein

Prefácio

Este Texto Didático - *que tem como base a bibliografia recomendada* - é uma forma de auxiliar o estudo dos alunos na disciplina de Matemática Aplicado à Economia e Gestão II das licenciaturas - *Economia e Gestão* - ministrada pelo Departamento de Matemática da Universidade de Évora. O curso a desenvolver será rigoroso e exigente, como tal, o estudo deste texto é, sem dúvida alguma, importante, mas por si só não basta, é necessário consultar outros livros (ver bibliografia) e estudar as matérias propostas. Neste texto didáctico o leitor não irá encontrar exercícios resolvidos sobre a matéria exposta porque tais resoluções estão reservadas para as aulas teóricas e práticas. Por este motivo é importante ir a todas as aulas e estar atento aos assuntos expostos, para assim poder perceber as resoluções dos exercícios e tentar resolver outros por iniciativa própria. No final de cada capítulo existem exercícios propostos para as aulas teóricas, aulas práticas e também para trabalho de casa dos alunos. Numa disciplina como Matemática I é necessário fazer um estudo profissional e diário, não deixe o estudo para a véspera dos testes. Ter dúvidas é normal, todos nós somos simples mortais, o que não é normal é não tentar combater essas dúvidas por iniciativa própria. Sempre que uma dúvida teimar em não se dissipar pode recorrer aos atendimentos semanais dos docentes da disciplina. Gostaria de alertar os alunos para o seguinte facto: o ensino universitário é um ensino em que os alunos não podem ter apenas por base o que lhes é ensinado nas aulas é necessário trabalhar arduamente extra aulas para assim refinar o conhecimento sobre determinado assunto.

Quero terminar expressando a minha gratidão aos colegas e amigos que contribuiram com os seus comentários pertinentes, sugestões e correcções que permitiram a melhoria desde texto didáctico.

Fernando Carapau

Conteúdo

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Noções Topológicas em $\mathbb{R}$

"A Matemática é como um jogo de xadrez: bela, emotiva, complexa e cheia de estratégia. A grande diferença é que o xadrez tem um número finito de regras"

Fernando Carapau

De seguida vamos apresentar a noção de vizinhança de um ponto que é o conceito básico da topologia. Com este novo conceito iremos estudar a posição relativa de um ponto a um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$.

1.1 Vizinhança de um ponto

Antes de introduzir a noção de vizinhança de um ponto vamos considerar a seguinte definição:

Definição 1.1 (Espaço Métrico) *Diz-se que um conjunto A é um espaço métrico quando existe uma função que, a cada par ordenado $(x, y) \in A \times A$, associa um número real $d(x, y)$ - chamado distância de x a y - com as seguintes propriedades:*

1. $d(x, y) \geqslant 0, \ \forall x, y \in A$;
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
3. $d(x, y) = d(y, x), \ \forall x, y \in A$;
4. $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y), \ \forall x, y, z \in A$.

Tendo em conta a Definição 1.1, temos que o conjunto dos números reais, i.e. o conjunto $\mathbb{R}$, é um espaço métrico para a seguinte distância

$$d(x, y) = \mid x - y \mid, \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Agora estamos em condições de introduzir a noção de vizinhança de um ponto a pertencente ao espaço métrico $\mathbb{R}$.

Definição 1.2 (Vizinhança de um ponto) *Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$. Então, a vizinhança de centro a e raio ε é dada por*

$$\mathcal{V}_\varepsilon(a) = \Big\{ x \in \mathbb{R}; \ \mid x - a \mid < \varepsilon \Big\} = \Big] a - \varepsilon, a + \varepsilon \Big[,$$

i.e. é o intervalo aberto de centro a e raio ε.

Geometricamente, a vizinhança ε de a é representada por um segmento de recta (de extremos abertos) de centro no ponto a e comprimento 2ε, ver Figura 1.1.

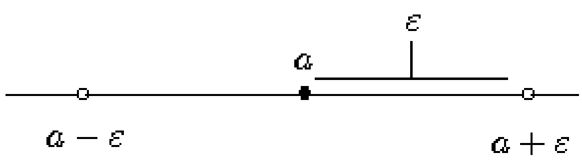

Figura 1.1: Vizinhança de centro a e raio ε.

1.2 Posição relativa entre um ponto e um conjunto não vazio

Com a definição de vizinhança de um ponto estamos em condições de estudar a posição relativa de um número real em relação a um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$. Seja C um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$, i.e.

$$C \subset \mathbb{R} \text{ com } C \neq \emptyset.$$

Definição 1.3 (Ponto interior) *Um número real b é um ponto interior ao conjunto C, se existe pelo menos uma vizinhança de b contida em C, i.e.*

$$b \text{ é ponto interior de } C \Leftrightarrow \exists\, \varepsilon > 0, \mathcal{V}_\varepsilon(b) \subset C.$$

O conjunto dos pontos interiores de C, chama-se interior de C e representa-se por $Int(C)$.

Definição 1.4 (Ponto exterior) *Um número real b é um ponto exterior ao conjunto C, se é interior ao complementar $\hat{C} = \mathbb{R} \setminus C$ de C, i.e.*

$$b \text{ é ponto exterior de } C \Leftrightarrow \exists\, \varepsilon > 0, \mathcal{V}_\varepsilon(b) \subset \hat{C}.$$

O conjunto dos pontos exteriores de C, chama-se exterior de C e representa-se por $Ext(C)$.

Definição 1.5 (Ponto de fronteira) *Um número real b é um ponto de fronteira do conjunto C, se não é interior nem exterior ao conjunto C, i.e.*

$$b \text{ é ponto de fronteira de } C \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \mathcal{V}_\varepsilon(b) \cap C \neq \emptyset \ \wedge \ \mathcal{V}_\varepsilon(b) \cap \hat{C} \neq \emptyset.$$

O conjunto dos pontos de fronteira de C, chama-se fronteira de C e representa-se por $Fr(C)$.

Definição 1.6 (Ponto de acumulação) *Um número real b é um ponto de acumulação do conjunto C, se toda a vizinhança de b possui pelo menos um elemento do conjunto C distinto de b, i.e.*

$$b \text{ é ponto de acumulação de } C \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \Big(\mathcal{V}_\varepsilon(b) \setminus \{b\}\Big) \cap C \neq \emptyset.$$

O conjunto dos pontos de acumulação de C, chama-se derivado de C e representa-se por C'.

Definição 1.7 (Ponto isolado) *Um elemento de um conjunto C que não seja ponto de acumulação de C, diz-se um ponto isolado, i.e.*

$$b \in C \text{ é ponto isolado de } C \Leftrightarrow \exists\, \varepsilon > 0, \mathcal{V}_\varepsilon(b) \cap C = \{b\}.$$

Definição 1.8 (Ponto aderente) *Um número real b é um ponto aderente ao conjunto C, se qualquer vizinhança de b intersecta o conjunto C, i.e.*

$$b \text{ é ponto aderente de } C \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \mathcal{V}_\varepsilon(b) \cap C \neq \emptyset.$$

O conjunto dos pontos aderentes de C, chama-se aderência ou fecho de C e representa-se por $\bar{C}$.

Como consequência das Definições 1.6 e 1.8, temos a seguinte igualdade:

$$\bar{C} = C \cup C'.$$

Tendo em conta as Definições 1.3−1.5, resulta imediatamente que $Int(C)$, $Ext(C)$ e $Fr(C)$ são conjuntos disjuntos dois a dois e

$$Int(C) \cup Ext(C) \cup Fr(C) = \mathbb{R}.$$

Das definições em causa, temos ainda que

$$Ext(C) = Int(\mathbb{R} \setminus C) \quad \wedge \quad Fr(C) = Fr(\mathbb{R} \setminus C),$$

assim como é fácil verificar que $Int(C) \subset C$ e que $C \subset \bar{C}$.

1.3 Noção de conjunto aberto e de conjunto fechado

Tendo em conta a secção anterior, estamos em condições de apresentar a definição para *conjunto aberto* e *conjunto fechado.*

Definição 1.9 (Conjunto aberto) *Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ não vazio diz-se aberto se é formado apenas por pontos interiores, i.e.*

$$Int(A) = A.$$

Definição 1.10 (Conjunto fechado) *Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ não vazio diz-se fechado se contém todos os pontos aderentes, i.e.*

$$\bar{A} = A.$$

De seguida, vamos apresentar a noção de conjunto limitado.

Definição 1.11 (Conjunto limitado) *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$, não vazio, diz-se um conjunto limitado se existem reais a e b, tais que:*

$$X = \big\{x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x \leqslant b\big\}.$$

Depois de introduzir estes conceitos iremos resolver alguns exercícios na aula teórica. Da mesma forma, serão apresentados exercícios para trabalho de casa e exercícios para resolução nas aulas práticas com o empenho e dedicação dos alunos.

1.4 Exercícios para aulas teóricas

1. Determine em $\mathbb{R}$ o interior, fronteira, exterior, aderência, pontos isolados e o derivado dos seguintes conjuntos:

a) $[0,1] \cup]2,3[\cup \{6,10\}$;

b) $A = \{x \in \mathbb{R};\ x^2 < 9\}$;

c) $B = \{x \in \mathbb{R};\ 0 <\mid x - 3 \mid \leqslant 5\}$.

2. Considere a condição $p(x) : x^2 < 50$. Determine o interior, exterior, fronteira, derivado, aderência e pontos isolados de cada um dos seguintes conjuntos:

a) $A = \{x \in \mathbb{N};\ p(x)\}$.

b) $B = \{x \in \mathbb{R};\ p(x)\}$.

c) $C = \{x \in \mathbb{Z};\ p(x)\}$.

3. Considere o conjunto $A = \left\{x \in \mathbb{R};\ x = 1 + (-1)^n + \dfrac{(-1)^n}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

a) Determine o interior, exterior, fronteira, derivado e aderência do conjunto A.

b) Verifique se o conjunto A é aberto ou fechado.

4. Sendo B o domínio da função

$$f(x) = \frac{1}{ln\big(cos^2(x)\big)},$$

determine a fronteira , interior, exterior, aderência e derivado do conjunto B e indique, justificando, se B é um conjunto aberto ou fechado.

1.5 Exercícios para aulas práticas

1. Considere o conjunto $A = \big] -\infty, 0\big[\cup \{1\} \cup \big]2, 1000\big[$.

a) Os números $-1, 0$ e 2 são pontos aderentes ao conjunto A. Justifique esta afirmação.

b) Indique, justificando, o valor lógico da seguinte proposição:

$$\exists\, b \in \mathbb{R} : \text{ b é ponto aderente a } A \ \wedge \ \forall x \in A, \ b \leqslant x.$$

c) Indique o interior, fronteira, exterior e pontos isolados do conjunto em causa.

2. Indique o interior, fronteira, exterior, aderência, derivado e pontos isolados do seguinte subconjunto de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R};\ x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

3. Determine em $\mathbb{R}$ o interior, aderência e derivado do seguinte conjunto

$$A = \left\{x \in \mathbb{R};\ \frac{x-1}{x+3} > \frac{x}{x+2}\right\}.$$

4. Para cada um dos seguintes conjuntos determine a aderência, interior, exterior, fronteira, derivado e pontos isolados:

a) $A = \{x \in \mathbb{N};\ x^2 - 5 < 0\}$.

b) $B = \{x \in \mathbb{Z};\ \mid 2x - 1 \mid < 3 \ \wedge \ x \leqslant \sqrt{2}\}$.

5. Sendo B o domínio da função

$$f(x) = 2 + ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),$$

determine a fronteira, interior, exterior, aderência e derivado do conjunto B e indique, justificando, se B é um conjunto aberto ou fechado.

1.6 Exercícios para trabalho de casa

1. Determine o interior, exterior, aderência, derivado, fronteira e pontos isolados do seguinte subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$

$$A = \left\{x \in \mathbb{R};\ \left| \frac{x^2}{x-2} \right| \leqslant 1\right\},$$

indicando se o conjunto em causa é aberto ou fechado.

2. Determine o interior, exterior, aderência, derivado, fronteira e pontos isolados dos seguintes conjuntos, indicando se são abertos ou fechados:

a) $A = \{x \in \mathbb{N};\ x \leqslant 10\}$.

b) $B =]1, 5[\cup \{10\}$.

c) $C = \{x \in \mathbb{Z};\ \mid x + 1 \mid < 5 \wedge x^2 \leqslant 15\}$.

d) $D = \{x \in \mathbb{R};\ \mid x + 2 \mid \leqslant 6\}$.

3. Indique, justificando, o valor lógico de cada proposição:

a) Se um número b é interior ao conjunto A, então b é aderente ao conjunto A.

b) Se um número b pertence ao conjunto A, então b é interior ao conjunto A.

4. Sendo B o domínio da função

$$f(x) = \frac{\sqrt{-x^2 + x + 2}}{x - 1},$$

determine a fronteira, interior, exterior, aderência, derivado e pontos isolados do conjunto B e indique, justificando, se B é um conjunto aberto ou fechado.

Capítulo 2

Cálculo Diferencial em $\mathbb{R}$

"A Matemática...certamente que não existia se se soubesse desde o início que na natureza não existia nenhuma linha exactamente recta, nenhum círculo perfeito e nenhuma grandeza absoluta"

Friedrich Nietzsche

Neste capítulo, vamos relembrar o conceito de derivada num ponto, que é a *ferramenta* matemática usada para estudar taxas nas quais variam as grandezas físicas; iremos ainda relembrar a interpretação geométrica e física de derivada num ponto. Digo relembrar visto que estes conceitos já foram estudados pelos alunos no ensino secundário. Entretanto, iremos apresentar aos alunos alguns conceitos novos, tais como: Teoremas de Rolle, de Lagrange e de Cauchy, assim como as Regras de L'Hôpital e de Cauchy de grande utilidade para o cálculo de limites.

2.1 Conceito de derivada num ponto

Em 1637, o francês Pierre de Fermat ao interessar-se pela pesquisa de máximos e mínimos de uma função de variável real foi um dos primeiros matemáticos a definir - *de uma forma não muito rigorosa* - o conceito de derivada num ponto. Posteriormente, Newton e Leibnitz - *independentememte um do outro* - introduziram a noção matemática de derivada num ponto com o objectivo de dar uma definição analítica rigorosa da noção de *velocidade* de um movimento. Dito isto vamos passar à definição de derivada num ponto.

Seja $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real de variável real e $b \in D_f$ um ponto de acumulação de D_f - domínio da função f. Considerando a razão incremental

$$\frac{f(x) - f(b)}{x - b},$$

definida em $D_f \setminus \{b\}$, temos:

Definição 2.1 (Derivada de uma função num ponto) *Diz-se que a função f é derivável ou diferenciável em b se existir e for finito o seguinte limite,*

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Ao valor do limite em causa designa-se por derivada de f no ponto b e representa-se por[1]*:*

$$f'(b) = \lim_{x \to b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = \lim_{h \to 0} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}.$$

A derivada de f em b pode ainda representar-se por $Df(b)$ ou $\dfrac{df}{dx}(b)$.

De seguida iremos apresentar a noção de derivada lateral. Seja $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real de variável real e $b \in D_f$ um ponto de acumulação de $D_b^+ = \big\{x \in D_f;\ x > b\big\}$. Diz-se que f é derivável (ou diferenciável) à direita em b se existe e for finito o seguinte limite

$$f'(b^+) = \lim_{x \to b^+} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}.$$

Seja agora $b \in D_f$ um ponto de acumulação de $D_b^- = \big\{x \in D_f;\ x < b\big\}$. Diz-se que f é derivável (ou diferenciável) à esquerda em b se existe e for finito o seguinte limite

$$f'(b^-) = \lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}.$$

Como consequência resulta que, se b é um ponto de acumulação de D_b^+ e D_b^-, f é derivável em b sse f é derivável à direita e à esquerda em b e além disso $f'(b^+) = f'(b^-)$. Pode no entanto suceder que uma função tenha derivada à direita e à esquerda de um ponto e não seja diferenciável nesse ponto, como prova disso mesmo temos o seguinte exemplo:

[1] A última igualdade é válida pela mudança de variável $x = b + h$.

Exemplo 2.1 *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real de variável real definida por*

$$f(x) = \mid x \mid = \begin{cases} x & sse \quad x \geqslant 0, \\ \\ -x & sse \quad x < 0. \end{cases}$$

Esta função tem derivada à direita do ponto $x = 0$, pois

$$\begin{aligned} f'(0^+) &= \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\mid x \mid - 0}{x} \\ &= \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Da mesma forma a função em causa tem derivada à esquerda do ponto $x = 0$, pois

$$\begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\mid x \mid - 0}{x} \\ &= \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Tendo em conta (2.1) − (2.2), podemos concluir que existem derivadas laterais da função f no ponto $x = 0$, mas não existe derivada da função f no ponto $x = 0$, visto que

$$f'(0^+) \neq f'(0^-).$$

A derivada de uma função num ponto ao existir é única. Além disso, a noção de derivada tem um carácter local, i.e. depende apenas da função numa vizinhança do ponto tão pequena quanto se queira.

2.2 Interpretação geométrica

A existência de derivada de um função num ponto a é susceptível de uma interpretação geométrica, a qual conduz de uma maneira natural à ideia de tangente a uma curva, ver Figura 2.1.

Seja f uma função diferenciável no ponto a. Considerando sobre o gráfico de f o ponto $P = (a, f(a))$, o ponto genérico $Q = (x, f(x))$ e a recta PQ secante ao gráfico de f. O declive desta secante é a razão incremental

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

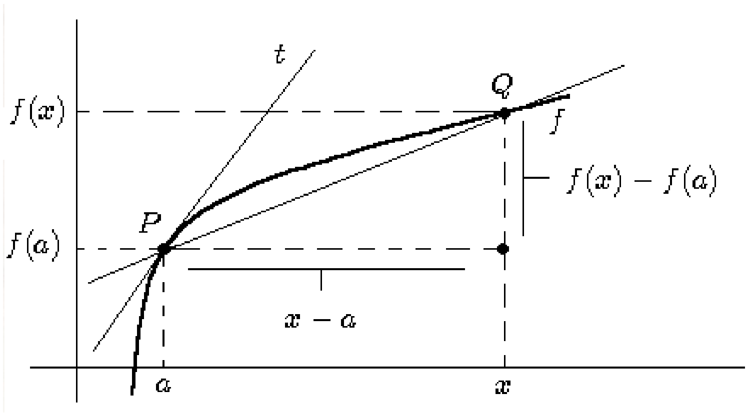

Figura 2.1: Interpretação geométrica de derivada num ponto.

Quando $x \to a$ o limite da razão incremental, i.e.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a),$$

é o número para que tende o declive da secante PQ, quando o ponto Q se aproxima do ponto P. E, assim, $f'(a)$ é o declive da recta t tangente ao ponto a. A equação da recta t é dada por:

$$y = f(a) + f'(a)\big(x - a\big).$$

Portanto quando uma função é diferenciável num ponto a, significa em termos geométricos que o gráfico da função f admite uma tangente no ponto $(a, f(a))$ e o valor da derivada é o declive dessa tangente. Pode acontecer existir tangente à direita e à esquerda do ponto $(a, f(a))$ mas não coincidirem - ver Figura 2.2 - por terem declives diferentes, i.e.

$$f'(a^+) \neq f'(a^-).$$

E, neste caso a função f não é diferenciável no ponto a.

Conclusão, os pontos de diferenciabilidade de f em termos geométricos, são aqueles onde a curva f tem uma recta tangente, e os pontos de não diferenciabilidade são aqueles onde a curva não tem recta tangente. De modo informal, os pontos de não diferenciabilidade mais comuns podem ser classificados como: ***picos, pontos de tangência vertical e pontos de descontinuidade,*** ver Figura 2.3, situações $(c), (d)$ e (e), respectivamente.

Intuitivamente faz sentido que os picos sejam pontos de não diferenciabilidade, uma vez que não há como desenhar uma única recta tangente a tal ponto. Por um

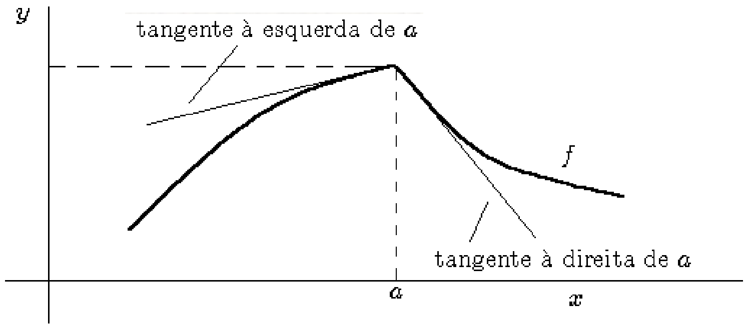

Figura 2.2: Interpretação geométrica de derivada lateral.

ponto de tangência vertical entendemos um lugar na curva onde a recta secante tende para uma posição limite vertical, como consequência não existe derivada nesse ponto. Em relação aos pontos de descontinuidade não há uma maneira de desenhar uma única recta tangente a tais pontos, ou seja uma função f não pode ser diferenciável em pontos de descontinuidade. O seguinte teorema mostra que uma função deve ser contínua em cada ponto onde é diferenciável.

Teorema 2.1 *Se uma função f é diferenciável num ponto b, então f também é contínua no ponto b.*

Demonstração: Supondo que f é diferenciável no ponto b, então existe a derivada de f no ponto b, e é dada por

$$f'(b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}. \tag{2.3}$$

Para mostrar que f é contínua no ponto b, temos que mostrar que

$$\lim_{x \to b} f(x) = f(b),$$

i.e.

$$\lim_{x \to b} \big[f(x) - f(b) \big] = 0. \tag{2.4}$$

Tendo em conta a mudança de variável $h = x - b$, a condição (2.4) é equivalente a provar o seguinte

$$\lim_{h \to 0} \big[f(h+b) - f(b) \big] = 0.$$

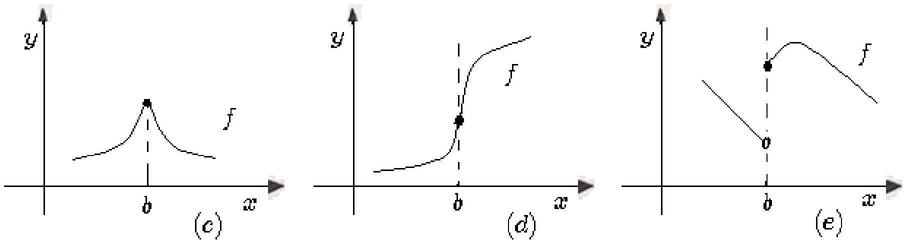

Figura 2.3: Pontos de não diferenciabilidade mais comuns.

Então, usando a expressão (2.3) e as propriedades dos limites, temos

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\big[f(h+b)-f(b)\big] &= \lim_{h\to 0}\Big[\frac{f(h+b)-f(b)}{h}h\Big]\\ &= \lim_{h\to 0}\big[\frac{f(h+b)-f(b)}{h}\big]\lim_{h\to 0}(h)\\ &= f'(b)0=0.\end{aligned}$$

O Teorema 2.1 mostra que a diferenciabilidade num ponto implica a continuidade no mesmo ponto. Porém, a condição inversa é falsa, i.e. uma função pode ser contínua num ponto, sem ser diferenciável no ponto. Como exemplo, disso mesmo, temos a função

$$f(x)=|\ x\ |=\begin{cases} x & \text{sse} \quad x\geqslant 0\\ \\ -x & \text{sse} \quad x<0\end{cases}$$

que é contínua no ponto $x=0$, mas não é diferenciável no mesmo ponto.

Observação 2.1 *A negação do Teorema* 2.1 *é também um resultado muito importante, i.e. se f não é uma função contínua no ponto b, então f não é diferenciável em b.*

2.3 Interpretação física

Podia dar uma interpretação física com uma situação abstracta, mas não o irei fazer. Irei sim, usar um caso físico concreto para que o aluno sinta a beleza da noção de diferenciabilidade. Para além dos conceitos matemáticos existe sempre a beleza da interpretação física dos mesmos, quando possível.

Considerando um carro imaginário que se move sobre a recta real situando-se na posição $s(t)$ em cada instante de tempo t. A velocidade média do carro entre os instantes de tempo t_0 e t pode-se obter pela razão incremental

$$\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}, \tag{2.5}$$

i.e, dividindo o espaço percorrido pelo carro pelo tempo gasto para percorrer esse espaço.

Supondo agora que estamos interessados na velocidade instantânea - designada simplesmente por v - do carro no instante t_0. A intuição sugere que, num pequeno intervalo de tempo, a velocidade do carro não pode variar muito. Assim, se t estiver próximo de t_0, então a velocidade média do carro no intervalo de tempo $[t_0, t]$ deverá aproximar-se à velocidade instantânea do carro no instante de tempo t_0. Além disso, quanto menor for o intervalo de tempo entre t_0 e t, melhor será a aproximação. Isto sugere o seguinte: se t aproximar-se tanto quanto se queira de t_0, então a velocidade média do carro no intervalo de tempo $[t_0, t]$ deverá aproximar-se tanto quanto se queira da velocidade instantânea no instante t_0. Como consequência, a velocidade instantânea do carro no ponto t_0 é dada por:

$$v = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = s'(t_0). \tag{2.6}$$

Assim se interpreta a derivada de uma função num ponto como uma velocidade instantânea a qual pode ser interpretada como uma taxa de variação. Muitas outras grandezas físicas podem ser interpretadas como taxas de variação, como por exemplo:

- Um microbiologista pode estar interessado na taxa segundo a qual o número de bactérias numa colónia varia com o tempo.

- Um economista pode estar interessado na taxa segundo a qual o custo de produção varia com a quantidade de produtos manufacturados.

- Um investigador na área da medicina pode estar interessado na taxa segundo a qual o raio de uma artéria varia com a concentração de álcool na corrente sanguínea.

- E, ainda, entre outros: a inflação da moeda, a intensidade dos tremores de um terramoto, a voltagem de um sinal eléctrico, o escoamento de um fluido Newtoniano ou não-Newtoniano.

2.4 As regras usuais de derivação

Na primeira secção deste capítulo, definimos a derivada de uma função f num ponto como um limite. Seguidamente iremos usar essa definição para apresentar alguns teoremas importantes, que nos irá permitir calcular derivadas de uma forma mais eficiente.

Teorema 2.2 (Derivada de uma constante) *A derivada de uma função constante é zero, i.e. se* $f(x) = c$, *então*

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}c = 0.$$

Demonstração: Seja $f(x) = c$. Então, a partir da definição de derivada, temos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f(x) = f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0. \;\pitchfork\end{aligned}$$

Teorema 2.3 *Se* f *for diferenciável em* x *e* c *for uma constante qualquer, então* cf *também é diferenciável em* x *e*

$$\frac{d}{dx}\big(cf(x)\big) = c\frac{d}{dx}\big(f(x)\big).$$

Demonstração: Usando a definição temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\big(cf(x)\big) &= \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} c\Big(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\Big)\\ &= c\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &= c\frac{d}{dx}\big(f(x)\big). \;\pitchfork\end{aligned}$$

Teorema 2.4 (Derivada de uma soma) *Se* f *e* g *forem diferenciáveis em* x, *então* $f \pm g$ *também o são e*

$$\frac{d}{dx}\big(f(x) \pm g(x)\big) = \frac{d}{dx}\big(f(x)\big) \pm \frac{d}{dx}\big(g(x)\big).$$

Demonstração: Vamos considerar apenas o caso $+$, visto que o caso $-$ é análogo. Tendo em conta a definição de derivada, vem

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\big(f(x)+g(x)\big) &= \lim_{h\to 0}\frac{\big[f(x+h)+g(x+h)\big]-\big[f(x)+g(x)\big]}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\big[f(x+h)-f(x)\big]+\big[g(x+h)-g(x)\big]}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\
&= \frac{d}{dx}\big(f(x)\big)+\frac{d}{dx}\big(g(x)\big). \pitchfork
\end{aligned}$$

Teorema 2.5 (Derivada de um produto) *Se f e g forem funções diferenciáveis em x, então o produto fg também o é e*

$$\frac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big)=f(x)\frac{d}{dx}\big(g(x)\big)+g(x)\frac{d}{dx}\big(f(x)\big).$$

Demonstração: Tendo em conta a definição de derivada num ponto ao somar e subtrair a quantidade $f(x+h)g(x)$ ao numerador da derivada, temos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left[f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]\\
&= \lim_{h\to 0}f(x+h)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+\lim_{h\to 0}g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}f(x+h)\frac{d}{dx}\big(g(x)\big)+\lim_{h\to 0}g(x)\frac{d}{dx}\big(f(x)\big)\\
&= f(x)\frac{d}{dx}\big(g(x)\big)+g(x)\frac{d}{dx}\big(f(x)\big).
\end{aligned}$$

A demonstração fica concluída pelo facto de que $g(x)\to g(x)$ quando $h\to 0$, visto $g(x)$ não depender de h, e pelo facto de que $f(x+h)\to f(x)$ quando $h\to 0$ pois f é uma função contínua pelo Teorema 2.1. $\pitchfork$

Teorema 2.6 (Derivada de um quociente) *Se f e g forem diferenciáveis em x e $g(x) \neq 0$, então f/g é diferenciável em x e*

$$\frac{d}{dx}\big(\frac{f(x)}{g(x)}\big) = \frac{g(x)\frac{d}{dx}\big(f(x)\big) - f(x)\frac{d}{dx}\big(g(x)\big)}{g^2(x)}.$$

Demonstração: Tendo em conta a definição de derivada num ponto ao somar e subtrair a quantidade $f(x)g(x)$ ao numerador da derivada, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\big(\frac{f(x)}{g(x)}\big) &= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x)g(x+h)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x)g(x+h)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\Big[g(x)\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\Big] - \Big[f(x)\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}\Big]}{g(x)g(x+h)} \\
&= \frac{g(x)\frac{d}{dx}\big(f(x)\big) - f(x)\frac{d}{dx}\big(g(x)\big)}{g^2(x)}.
\end{aligned}$$

A demonstração fica concluída pelo facto de que $g(x) \to g(x)$ quando $h \to 0$, visto $g(x)$ não depender de h (respectivamente para $f(x)$), e pelo facto de que $g(x+h) \to g(x)$ quando $h \to 0$, visto g ser uma função contínua pelo Teorema 2.1. ⫛

Teorema 2.7 (Derivada de um recíproco) *Se g é diferenciável em x e $g(x) \neq 0$, então $1/g$ é diferenciável em x e*

$$\frac{d}{dx}\big(\frac{1}{g(x)}\big) = \frac{-\frac{d}{dx}\big(g(x)\big)}{g^2(x)}.$$

Demonstração: Basta aplicar o Teorema 2.6 para $f(x) = 1$ e sabendo que a derivada de uma constante é nula (Teorema 2.2). ⫛

Teorema 2.8 (Derivada da função inversa) *Seja f uma função diferenciável e injectiva definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Seja $x \in I$ tal que $f'(x) \neq 0$. Então, f^{-1} é diferenciável em $y = f(x)$ e*

$$\frac{d}{dx}\big(f^{-1}(y)\big) = \frac{1}{\dfrac{d}{dx}\big(f(x)\big)}.$$

Demonstração: Consultar Figueira [1]. ⋔

Teorema 2.9 (Derivada da função composta) *Seja g uma função diferenciável no ponto x e f uma função diferenciável no ponto $g(x)$, então a composição $f \circ g$ é diferenciável no ponto x. Além disso, se*

$$y = f(g(x)) \ \ e \ \ u = g(x),$$

então $y = f(u)$ e

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx},$$

i.e.

$$y' = \big(f(g(x))\big)' = f'(g(x))g'(x).$$

Demonstração: Consultar Figueira [1]. ⋔

Teorema 2.10 (Derivada de uma potência) *Seja n um número inteiro positivo, então*

$$\frac{d}{dx}\big(x^n\big) = nx^{n-1}.$$

Demonstração: Seja $f(x) = x^n$. Então, pela definição de derivada e tendo em conta o desenvolvimento do binómio de Newton

$$\big(x+h\big)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \ldots + nxh^{n-1} + h^n,$$

temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\big(x^n\big) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \ldots + nxh^{n-1} + h^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + \ldots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right] \\
&= nx^{n-1}. \pitchfork
\end{aligned}$$

Teorema 2.11 *Seja n um número inteiro qualquer, então*

$$\frac{d}{dx}\big(x^n\big) = nx^{n-1}. \tag{2.7}$$

Demonstração: O caso $n > 0$ foi estudado no Teorema 2.10. O caso $n = 0$ é trivial pelo Teorema 2.2. No caso $n < 0$, vamos considerar $m = -n$, e assim

$$f(x) = x^n = x^{-m} = \frac{1}{x^m}, \quad m > 0.$$

Aplicando o Teorema 2.7, temos

$$f'(x) = -\frac{\frac{d}{dx}\big(x^m\big)}{x^{2m}}.$$

Como $m > 0$ podemos aplicar o Teorema 2.10 para a função x^m, e assim

$$f'(x) = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{m-1-2m} = -mx^{-m-1} = nx^{n-1}. \pitchfork$$

Teorema 2.12 *Seja $g(x) = \sqrt[n]{x}$ com $x > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, então g é diferenciável e*

$$g'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Demonstração: Fazendo $y = \sqrt[n]{x}$, tem-se $x = y^n$ e, pondo $f(y) = y^n$, $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ é uma bijecção para qualquer ponto $y \in]0, +\infty[$. E, além disso $f'(y) = ny^{n-1} \neq 0$ para qualquer $y \in]0, +\infty[$. Aplicando o Teorema 5.7, $g = f^{-1}$ é diferenciável em x, e tem-se

$$g'(x) = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}. \pitchfork$$

Observação 2.2 *A expressão* (2.7) *é igualmente válida no caso em que* $n \in \mathbb{Q}$.

Tendo em conta a propriedade quociente e potência dos logaritmos e o resultado

$$\lim_{\vartheta\to 0}\Big(1+\vartheta\Big)^{1/\vartheta} = \mathbf{e}, \quad (nota: \ \mathbf{e} \simeq 2.718281),$$

temos o seguinte teorema:

Teorema 2.13 *Seja* $f(x) = log_b(x), x > 0$ *a função logaritmo de* x *na base* b $(b > 0$ *e* $b \neq 1)$. *Então a função* f *é diferenciável e*

$$\frac{d}{dx}\Big[log_b(x)\Big] = \frac{1}{xln(b)}.$$

Demonstração: Usando a definição

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\Big[log_b(x)\Big] &= \lim_{h\to 0}\frac{log_b(x+h)-log_b(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}log_b\Big(\frac{x+h}{x}\Big) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}log_b\Big(1+\frac{h}{x}\Big).
\end{aligned}$$

Seja a seguinte mudança de variável $\vartheta = h/x$. Quando $h \to 0$ temos $\vartheta \to 0$, e

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\Big[log_b(x)\Big] &= \lim_{\vartheta\to 0}\frac{1}{\vartheta x}log_b\Big(1+\vartheta\Big) = \frac{1}{x}\lim_{\vartheta\to 0}\frac{1}{\vartheta}log_b\Big(1+\vartheta\Big)\\
&= \frac{1}{x}\lim_{\vartheta\to 0}log_b\Big(1+\vartheta\Big)^{1/\vartheta}\\
&= \frac{1}{x}log_b\Big[\lim_{\vartheta\to 0}\Big(1+\vartheta\Big)^{1/\vartheta}\Big]\\
&= \frac{1}{x}log_b(\mathbf{e}) = \frac{1}{xln(b)}. \ \pitchfork
\end{aligned}$$

Observação 2.3 *No caso particular em que* $b = \boldsymbol{e}$ *(logaritmo neperiano), temos* $ln(\boldsymbol{e}) = 1$ *e como consequência*

$$\frac{d}{dx}\Big[ln(x)\Big] = \frac{1}{x}.$$

Teorema 2.14 *Seja* $f(x) = a^x$ *a função exponencial de base* $a > 0$. *Então a função* f *é diferenciável e*

$$\frac{df}{dx}(x) = a^x ln(a).$$

Demonstração: Tomando o logaritmo neperiano da função $f(x) = a^x$, temos

$$ln(f(x)) = ln(a^x) \Leftrightarrow ln(f(x)) = xln(a).$$

Derivando a segunda igualdade em ordem a x, temos

$$\frac{\frac{df}{dx}(x)}{f(x)} = ln(a) \Leftrightarrow \frac{df}{dx}(x) = f(x)ln(a).$$

E, assim, temos

$$\frac{df}{dx}(x) = a^x ln(a). \pitchfork$$

Observação 2.4 *Se $a = \boldsymbol{e}$, então $ln(\boldsymbol{e}) = 1$, e temos o seguinte resultado*

$$\frac{df}{dx}(x) = \boldsymbol{e}^x.$$

Com o propósito de encontrar as derivadas das funções trigonométricas

$$sin(x),\ \ cos(x),\ \ tg(x),\ \ cotg(x),\ \ sec(x),\ \ cosec(x),$$

vamos considerar os seguintes limites (ver bibliografia)

$$\lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1,\ \ \lim_{x\to 0} \frac{1 - cos(x)}{x} = 0. \tag{2.8}$$

Teorema 2.15 *Seja a função $f(x) = sin(x)$. Então a função f é diferenciável e*

$$\frac{d}{dx}\big(sin(x)\big) = cos(x).$$

Demonstração: Tendo em conta a definição de derivada, os limites considerados na condição (2.8) e a fórmula de adição

$$sin(x+h) = sin(x)cos(h) + cos(x)sin(h),$$

temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\big(sin(x)\big) &= \lim_{h\to 0} \frac{sin(x+h) - sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{sin(x)cos(h) + cos(x)sin(h) - sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \Big[sin(x)\Big(\frac{cos(h) - 1}{h}\Big) + cos(x)\Big(\frac{sin(h)}{h}\Big)\Big] \\
&= -sin(x) \lim_{h\to 0} \Big(\frac{1 - cos(h)}{h}\Big) + cos(x) \lim_{h\to 0} \Big(\frac{sin(h)}{h}\Big) \\
&= cos(x). \pitchfork
\end{aligned}$$

Teorema 2.16 *Seja a função $f(x) = cos(x)$. Então a função f é diferenciável e*

$$\frac{d}{dx}\big(cos(x)\big) = -sin(x).$$

Demonstração: Considerando a seguinte identidade

$$cos(y) - cos(x) = -2sin(\frac{y-x}{2})sin(\frac{y+x}{2}),$$

e façamos $y = x + h$. Da igualdade anterior podemos obter a seguinte fórmula:

$$\frac{cos(x+h) - cos(x)}{h} = -\frac{sin(h/2)}{h/2} sin(x + h/2).$$

E da continuidade da função $sin(x)$ (pois é diferenciável pelo teorema anterior) temos que

$$sin(x + h/2) \to sin(x) \quad qd \quad h \to 0.$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\big(cos(x)\big) &= \lim_{h\to 0} \frac{cos(x+h) - cos(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \Big[\frac{-sin(h/2)}{h/2} sin\big(x + h/2\big)\Big] \\ &= \lim_{h\to 0} \Big[\frac{-sin(h/2)}{h/2}\Big] \lim_{h\to 0} \big[sin\big(x + h/2\big)\big] \\ &= -sin(x). \pitchfork \end{aligned}$$

Tendo em conta que

$$tg(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)},$$

e utilizando a derivada do quociente, temos

$$\frac{d}{dx}\big[tg(x)\big] = \frac{1}{cos^2(x)} = sec^2(x).$$

Da mesma forma, pelo facto de

$$cotg(x) = \frac{cos(x)}{sin(x)},$$

temos pela derivada do quociente

$$\frac{d}{dx}\big[cotg(x)\big] = \frac{-1}{sin^2(x)} = -cosec^2(x).$$

Em relação à função

$$sec(x) = \frac{1}{cos(x)},$$

temos pela derivada do recíproco

$$\frac{d}{dx}\big[sec(x)\big] = sec(x)tg(x).$$

Da mesma forma para a função

$$cosec(x) = \frac{1}{sin(x)},$$

temos pela derivada do recíproco

$$\frac{d}{dx}\big[cosec(x)\big] = -cosec(x)cotg(x).$$

Uffff......estou cansado de derivar!!! De seguida vamos apresentar a Tabela 2.1 a qual contém uma lista de fórmulas generalizadas de derivadas que são uma consequência da derivada da função composta (também conhecida pela regra da cadeia), onde M é uma função que depende da variável x, com domínio e contradomínio adequado para cada fórmula (regra) de derivação.

Agora vamos pensar nas derivadas das seguintes funções trigonométricas inversas:

$$arcsin(x),\ arccos(x),\ arctg(x),$$

$$arccotg(x),\ arcsec(x),\ arccosec(x).$$

Considerando a função $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, definida da seguinte forma $f(x) = sin(x)$. Façamos a sua representação gráfica, ver Figura 2.4.

A função f não é injectiva; logo, não admite inversa. Assim, para definir a inversa de f temos que considerar uma determinada restrição (restrição principal) do domínio de f onde a função seja injectiva. Considerando a restrição $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, temos a seguinte representação gráfica de f, ver Figura 2.5.

Nesta restrição a função f admite inversa, a qual será a função

$$f^{-1} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],$$

$\big(cos(M)\big)' = -M'sin(M)$	$\big(sin(M)\big)' = M'cos(M)$
$\big(tg(M)\big)' = \dfrac{M'}{cos^2(M)} = M'sec^2(M)$	$\big(cotg(M)\big)' = \dfrac{-M'}{sin^2(M)} = -M'cosec^2(M)$
$\big(sec(M)\big)' = M'sec(M)tg(M)$	$\big(cosec(M)\big)' = -M'cosec(M)cotg(M)$
$\big(\mathbf{e}^M\big)' = M'\mathbf{e}^M$	$\big(\mathbf{a}^M\big)' = M'\mathbf{a}^M ln(\mathbf{a}),\ \mathbf{a} > 0$
$\big(ln(M)\big)' = \dfrac{M'}{M}$	$\big(log_a(M)\big)' = \dfrac{M'}{Mln(a)},\ \mathbf{a} > 0, \mathbf{a} \neq 1$
$\big(M^\alpha\big)' = \alpha M^{\alpha-1}M'$	$\big(\sqrt[n]{M}\big)' = \dfrac{M'}{n\sqrt[n]{M^{n-1}}}$

Tabela 2.1: Fórmulas generalizadas de derivação.

definida da seguinte forma $f^{-1}(x) = arcsin(x)$, cuja representação gráfica é dada por, ver Figura 2.6.

De seguida, vamos determinar a derivada da função $y = arcsin(x)$.

Teorema 2.17 *A derivada da função $y = arcsin(x)$ é dada por*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Demonstração: Em virtude de $x = sin(y)$, temos $\dfrac{dx}{dy} = cos(y)$. E, pela derivada da função inversa

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{cos(y)}.$$

Tendo em conta que

$$cos(y) = \sqrt{1 - sin^2(y)} = \sqrt{1-x^2},$$

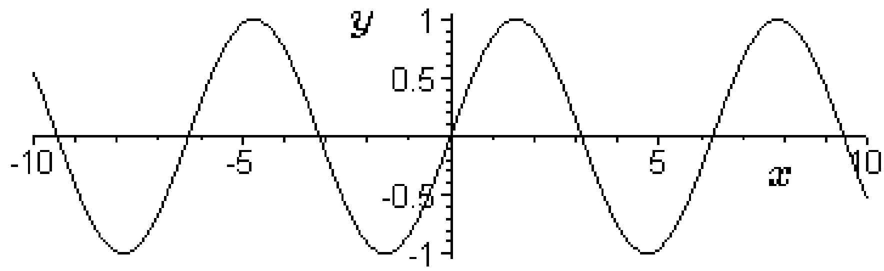

Figura 2.4: Gráfico da função $f(x) = sin(x)$.

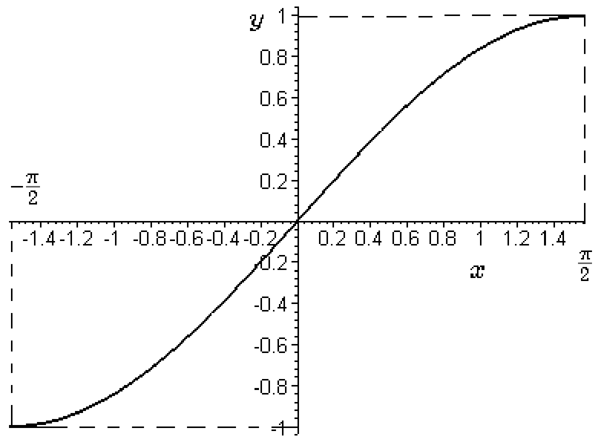

Figura 2.5: Gráfico da função $f(x) = sin(x)$ na restrição principal $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

vem que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

O sinal da raíz é positiva, porque a função $y = arcsin(x)$ tem como imagem o intervalo $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$, e neste intervalo $cos(y) \geqslant 0$. $\pitchfork$

Considerando a função $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, definida da seguinte forma $f(x) = cos(x)$. Façamos a sua representação gráfica, ver Figura 2.7.

A função f não é injectiva; logo, não admite inversa. Assim, para definir a inversa de f temos que considerar uma determinada restrição (restrição principal) do domínio de f onde a função seja injectiva. Considerando a restrição $[0, \pi]$, temos

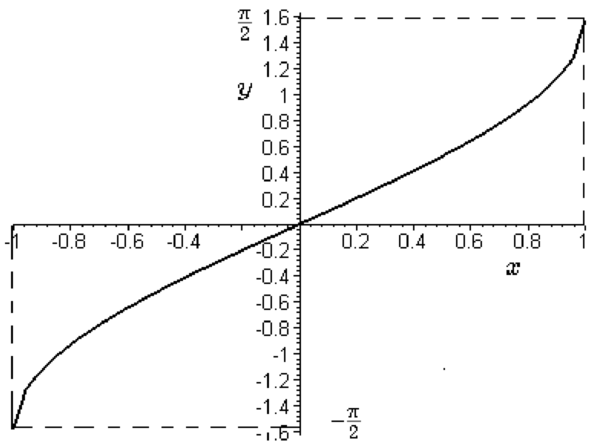

Figura 2.6: Gráfico da função $f(x) = arcsin(x)$.

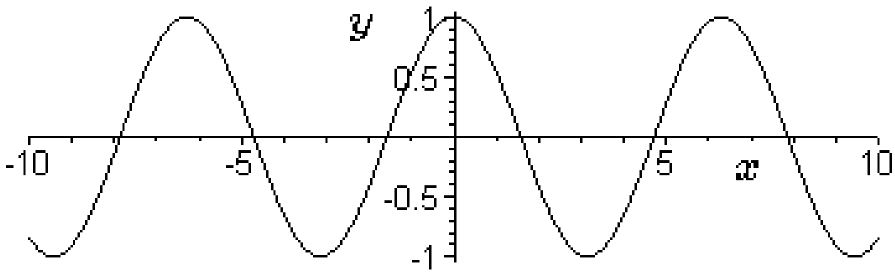

Figura 2.7: Gráfico da função $f(x) = cos(x)$.

a seguinte representação gráfica de f, ver Figura 2.8.

Nesta restrição a função f admite inversa, a qual será a função

$$f^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi],$$

definida da seguinte forma $f^{-1}(x) = arccos(x)$, cuja representação gráfica é dada por, ver Figura 2.9.

De seguida, vamos determinar a derivada da função $y = arccos(x)$.

Teorema 2.18 *A derivada da função $y = arccos(x)$ é dada por*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

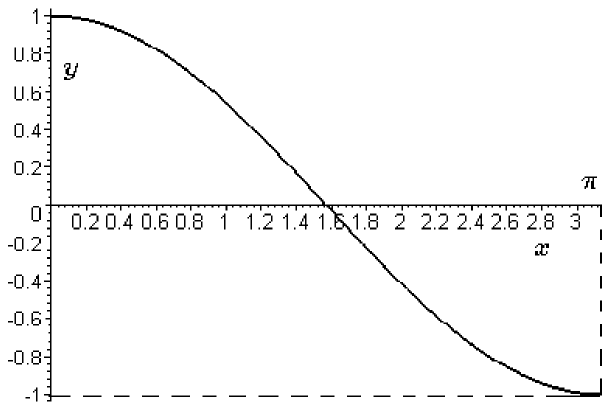

Figura 2.8: Gráfico da função $f(x) = cos(x)$ na restrição principal $[0, \pi]$.

Demonstração: Em virtude de $x = cos(y)$, temos $\dfrac{dx}{dy} = -sin(y)$. E, pela derivada da função inversa

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{1}{sin(y)}.$$

Tendo em conta que

$$sin(y) = \sqrt{1 - cos^2(y)} = \sqrt{1 - x^2},$$

vem que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{sin(y)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

O sinal da raíz é positiva, porque a função $y = arccos(x)$ tem como imagem o intervalo $0 \leqslant y \leqslant \pi$, e neste intervalo $sin(y) \geqslant 0$. ⫛

Seja a função $f : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$, definida da seguinte forma $f(x) = tg(x)$. Façamos a sua representação gráfica, ver Figura 2.10.

A função f não é injectiva; logo, não admite inversa. Assim, para definir a inversa de f temos que considerar uma determinada restrição (restrição principal) do domínio de f onde a função seja injectiva. Considerando a restrição $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, temos a seguinte representação gráfica de f, ver Figura 2.11.

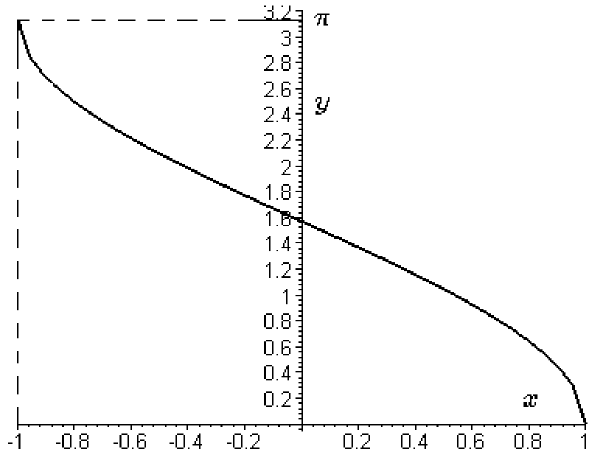

Figura 2.9: Gráfico da função $f(x) = arccos(x)$.

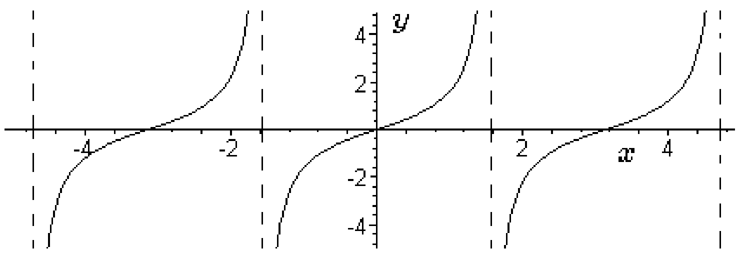

Figura 2.10: Gráfico da função $f(x) = tg(x)$.

Nesta restrição a função f admite inversa, a qual será a função

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,$$

definida da seguinte forma $f^{-1}(x) = arctg(x)$, cuja representação gráfica é dada por, ver Figura 2.12.

De seguida, vamos determinar a derivada da função $y = arctg(x)$.

Teorema 2.19 *A derivada da função $y = arctg(x)$ é dada por*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

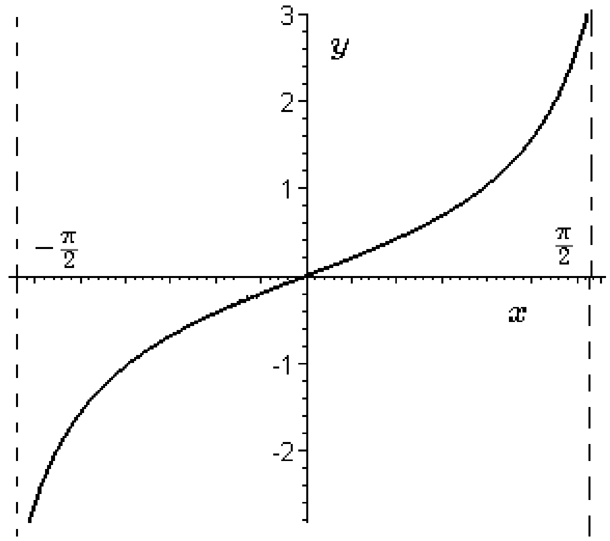

Figura 2.11: Gráfico da função $f(x) = tg(x)$ na restrição principal $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Demonstração: Em virtude de $x = tg(y)$, temos $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{cos^2(y)}$. E, pela derivada da função inversa

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = cos^2(y).$$

Tendo em conta que $sec^2(y) = 1 + tg^2(y)$, temos

$$cos^2(y) = \frac{1}{sec^2(y)} = \frac{1}{1 + tg^2(y)}.$$

Então

$$\frac{dy}{dx} = cos^2(y) = \frac{1}{1 + tg^2(y)} = \frac{1}{1 + x^2}. \pitchfork$$

Seja a função $f : \mathbb{R} \setminus \Big\{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\Big\} \to \mathbb{R}$, definida da seguinte forma $f(x) = cotg(x)$. Façamos a sua representação gráfica, ver Figura 2.13.

A função f não é injectiva; logo, não admite inversa. Assim, para definir a inversa de f temos que considerar uma determinada restrição (restrição principal) do domínio de f onde a função seja injectiva. Considerando a restrição $]0, \pi[$, temos a seguinte representação gráfica de f, ver Figura 2.14.

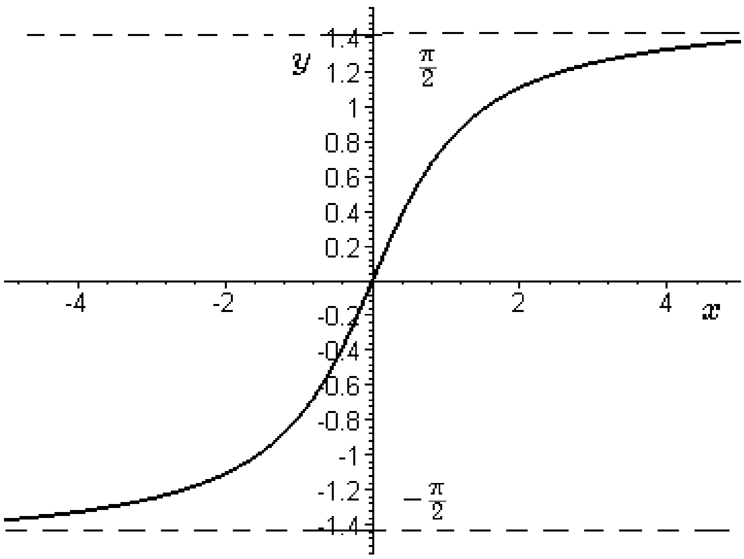

Figura 2.12: Gráfico da função $f(x) = arctg(x)$.

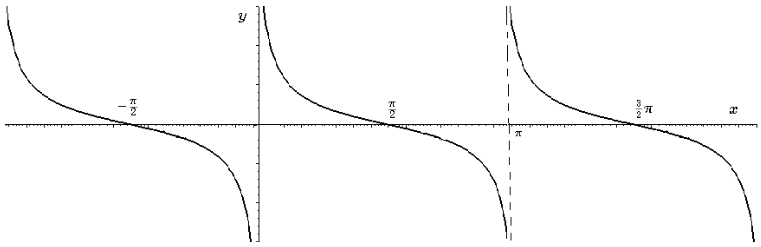

Figura 2.13: Gráfico da função $f(x) = cotg(x)$.

Nesta restrição a função f admite inversa, a qual será a função

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to]0, \pi[,$$

definida da seguinte forma $f^{-1}(x) = arccotg(x)$, cuja representação gráfica é dada por, ver Figura 2.15.

De seguida, vamos determinar a derivada da função $y = arccotg(x)$.

Teorema 2.20 *A derivada da função $y = arccotg(x)$ é dada por*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

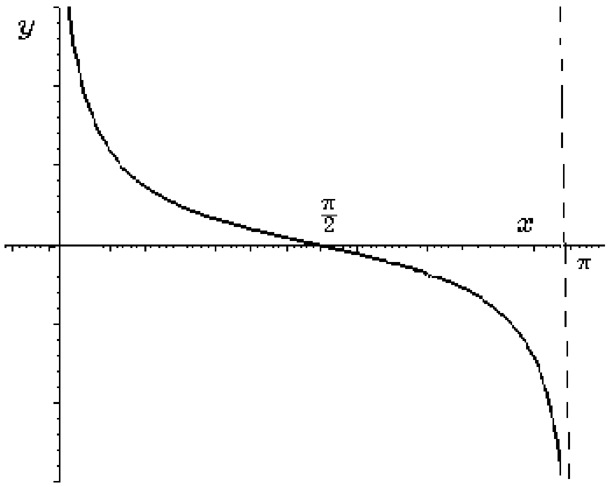

Figura 2.14: Gráfico da função $f(x) = cotg(x)$ na restrição principal $]0, \pi[$.

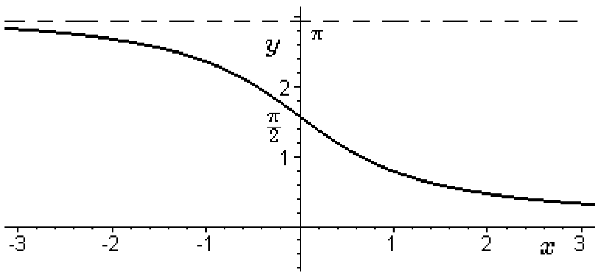

Figura 2.15: Gráfico da função $f(x) = arccotg(x)$.

Demonstração: Em virtude de $x = cotg(y)$, temos $\dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{1}{sin^2(y)}$. E, pela derivada da função inversa

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -sin^2(y).$$

Tendo em conta que $cosec^2(y) = 1 + cotg^2(y)$, temos

$$sin^2(y) = \frac{1}{cosec^2(y)} = \frac{1}{1 + cotg^2(y)}.$$

Então
$$\frac{dy}{dx} = -sin^2(y) = -\frac{1}{1+cotg^2(y)} = -\frac{1}{1+x^2}. \pitchfork$$

Seja a função $f : \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \to]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$, definida da seguinte forma $f(x) = sec(x)$. Façamos a sua representação gráfica, ver Figura 2.16.

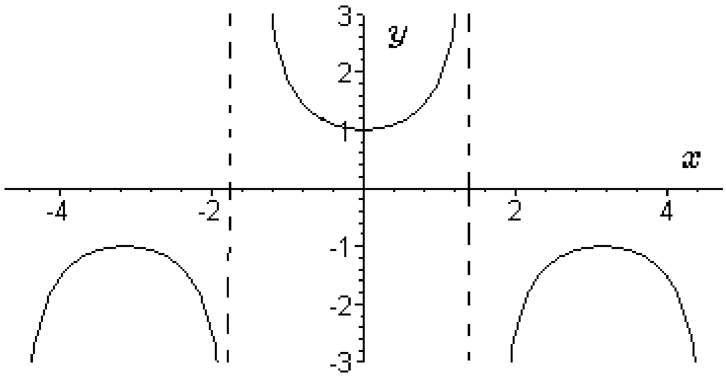

Figura 2.16: Gráfico da função $f(x) = sec(x)$.

Para definir a inversa de f temos que considerar uma determinada restrição (restrição principal) do domínio de f onde a função seja injectiva. Em relação a esta função não existe acordo universal sobre que restrição principal deve ser considerada. No nosso caso vamos considerar a restrição associada aos programas *Mathematica e Maple*, i.e. vamos considerar a restrição $[0,\pi]$ com $x \neq \pi/2$, onde o contradomínio é $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$, ver Figura 2.17.

Nesta restrição a função f admite inversa, a qual será a função
$$f^{-1} :]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[\to [0,\pi],$$
definida da seguinte forma $f^{-1}(x) = arcsec(x)$, cuja representação gráfica é dada por, ver Figura 2.18.

Teorema 2.21 *A derivada da função $y = arcsec(x)$ é dada por*
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

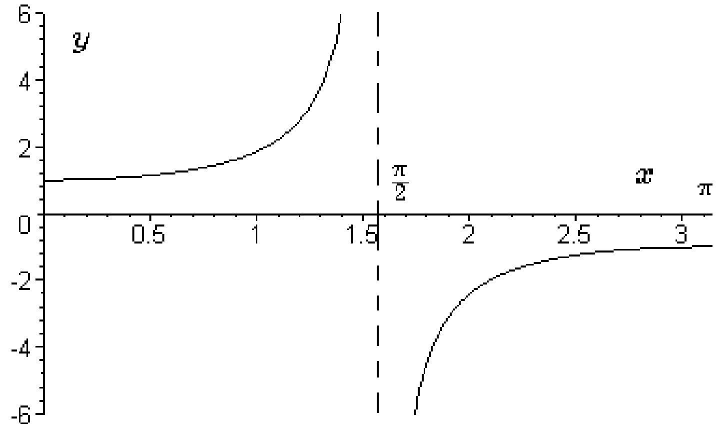

Figura 2.17: Gráfico da função $f(x) = sec(x)$ na restrição principal $[0, \pi]$ com $x \neq \pi/2$ e contradomínio $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

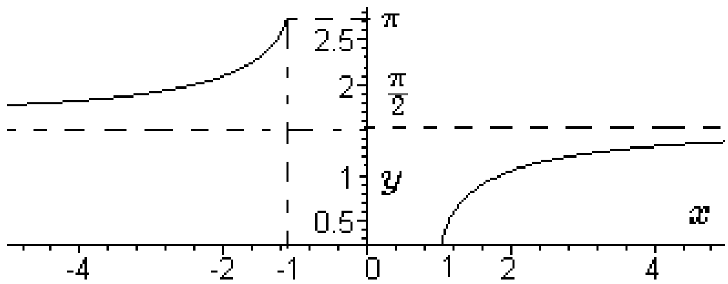

Figura 2.18: Gráfico da função $f(x) = arcsec(x)$ com domínio $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ e contradomíno $[0, \pi]$ onde $y \neq \pi/2$.

Demonstração: Consultar Anton [2]. ⫛

Seja a função $f : \mathbb{R} \setminus \left\{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \rightarrow]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, definida da seguinte forma $f(x) = cosec(x)$. Façamos a sua representação gráfica, ver Figura 2.19.

Para definir a inversa de f temos que considerar uma determinada restrição (restrição principal) do domínio de f onde a função seja injectiva. Considerar a restrição associada aos programas *Mathematica e Maple*, i.e. a restrição $[-\pi/2, \pi/2]$ com $x \neq 0$, onde o contradomínio é $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

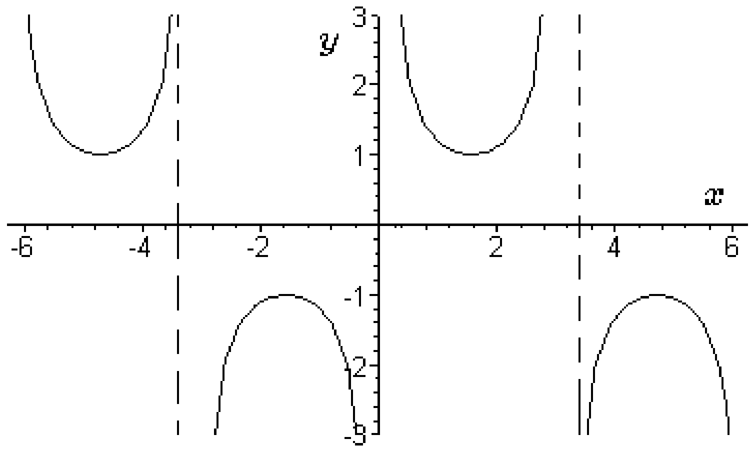

Figura 2.19: Gráfico da função $f(x) = cosec(x)$.

Na restrição em causa a função f admite inversa, a qual será a função

$$f^{-1} :]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\rightarrow [-\pi/2, \pi/2],$$

definida da seguinte forma $f^{-1}(x) = arccosec(x)$, cuja representação gráfica é dada por, ver Figura 2.20.

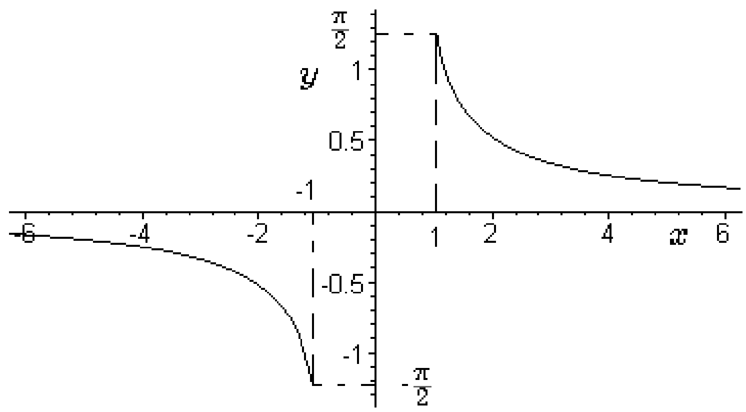

Figura 2.20: Gráfico da função $f(x) = arccosec(x)$ com domínio $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ e contra-domíno $[-\pi/2, \pi/2]$ onde $y \neq 0$.

Teorema 2.22 *A derivada da função $y = arccosec(x)$ é dada por*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

Demonstração: Consultar Anton [2]. ⋔

De seguida vamos apresentar a Tabela 2.2 a qual contém uma lista com derivadas de funções trigonométricas inversas que são uma consequência da derivada da função composta (também conhecida pela regra da cadeia), onde M é uma função que depende da variável x com domínio e contadomínio adequado.

$\big(arccos(M)\big)' = -\frac{M'}{\sqrt{1-M^2}}$	$\big(arcsin(M)\big)' = \frac{M'}{\sqrt{1-M^2}}$
$\big(arctg(M)\big)' = \frac{M'}{1+M^2}$	$\big(arccotg(M)\big)' = -\frac{M'}{1+M^2}$
$\big(arcsec(M)\big)' = \frac{M'}{\lvert M\rvert\sqrt{M^2-1}}$	$\big(arccosec(M)\big)' = -\frac{M'}{\lvert M\rvert\sqrt{M^2-1}}$

Tabela 2.2: Derivadas de funções trigonométricas inversas.

Observação 2.5 *Dada uma função f n-vezes diferenciável a notação usual para as derivadas de ordem superior é a seguinte:*

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\big[f(x)\big]$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\Big[\frac{d}{dx}\big[f(x)\big]\Big] = \frac{d^2}{dx^2}\big[f(x)\big]$$

$$f'''(x) = \frac{d}{dx}\Big[\frac{d^2}{dx^2}\big[f(x)\big]\Big] = \frac{d^3}{dx^3}\big[f(x)\big]$$

$$\cdots$$

De uma maneira geral a n-ésima derivada de f (onde $f^{(0)} \equiv f$) é dada por

$$f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}\Big[\frac{d^{(n-1)}}{dx^{(n-1)}}\big[f(x)\big]\Big] = \frac{d^n}{dx^n}\big[f(x)\big].$$

2.5 Análise de funções

Nesta secção iremos usar o cálculo diferencial para estudar uma função em termos de monotonia, extremos, concavidades, pontos de inflexão e assímptotas.

2.5.1 Monotonia

Os termos crescente, decrescente e constante são usados para descrever o comportamento de uma função num determinado intervalo, por exemplo, ver Figura 2.21.

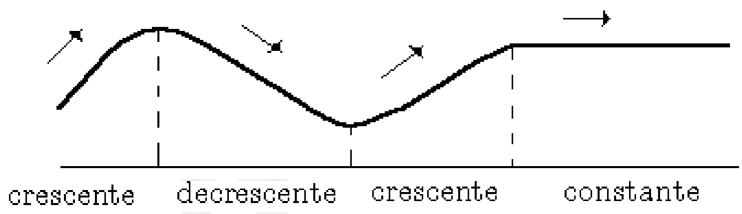

Figura 2.21: Monotonia de uma função.

A definição seguinte expressa as ideias intuitivas apresentadas na Figura 2.21.

Definição 2.2 *Seja f uma função definida num intervalo I, então:*

(a) f é crescente em I se $\forall x_1, x_2 \in I,\ \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$,

(b) f é decrescente em I se $\forall x_1, x_2 \in I,\ \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$,

(c) f é constante em I se $\forall x_1, x_2 \in I,\ \ f(x_1) = f(x_2)$.

A Figura 2.21 sugere que uma função diferenciável f é crescente em qualquer intervalo onde o seu gráfico tem rectas tangentes com declive positivo; decrescente em qualquer intervalo onde o seu gráfico tem rectas tangentes com declive negativo e constante em qualquer intervalo onde o seu gráfico tem rectas tangentes com declive nulo. Esta observação sugere os seguintes teoremas (os quais são uma consequência do Teorema do Valor Médio de Lagrange - ver Teorema 2.31):

Teorema 2.23 *Seja f uma função contínua em I e diferenciável em $Int(I)$. Se $f'(x) = 0$ para $\forall x \in Int(I)$, então f é uma função constante em I.*

Demonstração: Consultar Figueira [1]. ⫛

Teorema 2.24 *Seja f uma função contínua em I e diferenciável em $Int(I)$. Então*

$$f'(x) \geqslant 0 \ \ \forall x \in Int(I) \Leftrightarrow f \textit{ é crescente em } I,$$

$$f'(x) \leqslant 0 \ \ \forall x \in Int(I) \Leftrightarrow f \textit{ é decrescente em } I.$$

Tem-se ainda

$$f'(x) > 0 \ \ \forall x \in Int(I) \Rightarrow f \textit{ é estritamente crescente em } I,$$

$$f'(x) < 0 \ \ \forall x \in Int(I) \Rightarrow f \textit{ é estritamete decrescente em } I.$$

Demonstração: Consultar Figueira [1]. ⫛

2.5.2 Concavidades e pontos de inflexão

O sinal da derivada da função f revela-nos os locais onde a função é crescente ou decrescente, nada nos diz sobre a sua curvatura. Nos intervalos onde f tem a curvatura voltada para cima, dizemos que a função f é convexa, e se a curvatura for voltada para baixo, dizemos que a função f é côncava.

Para funções diferenciáveis a direcção da curvatura pode ser caracterizada em termos de rectas tangentes ao seu gráfico, da seguinte forma (ver Figura 2.22): (i) o gráfico de uma função f tem a curvatura voltada para cima nos intervalos onde o seu gráfico fica acima de suas rectas tangentes; (ii) o gráfico de uma função f tem a curvatura voltada para baixo nos intervalos onde o seu gráfico fica abaixo de suas rectas tangentes.

Tendo em conta a descrição anterior temos a seguinte definição:

Definição 2.3 *Se a função f for diferenciável num intervalo aberto I, então f é convexa se f' for uma função crescente em I, e côncava se f' for uma função decrescente em I.*

Tendo em conta a definição anterior temos o seguinte teorema:

Teorema 2.25 *Seja f uma função duas vezes diferenciável num intervalo aberto I.*

(a) Se $f''(x) > 0$ para $\forall x \in I$, então f tem a concavidade voltada para cima em I.

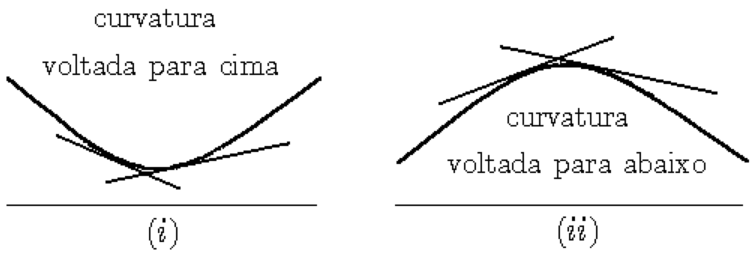

Figura 2.22: Concavidade de uma função: na situação (i) a função é convexa; na situação (ii) a função é côncava.

(b) Se $f''(x) < 0$ para $\forall x \in I$, então f tem a concavidade voltada para baixo em I.

Demonstração: Consultar Figueira [1]. ⫛

A próxima definição está associada aos pontos onde uma função muda o sentido de sua concavidade, ver Figura 2.23.

Definição 2.4 *Seja f uma função contínua num intervalo aberto I, com $x_0 \in I$. Se f muda o sentido da concavidade em x_0, então f tem um ponto de inflexão em x_0 e chamamos ao ponto $(x_0, f(x_0))$ do gráfico da função um ponto de inflexão de f.*

Tendo em conta a definição anterior temos o seguinte corolário:

Corolário 2.1 *Seja f uma função duas vezes diferenciável num ponto $x_0 \in int(I)$ e x_0 um ponto de inflexão da função f, então $f''(x_0) = 0$.*

Demonstração: Consultar Figueira [1]. ⫛

É preciso ter cuidado ao interpretar o Corolário 2.1. Este corolário diz-nos que se um ponto é ponto de inflexão, então a segunda derivada de f é nula nesse ponto. A recíproca do corolário é falsa, i.e. lá pelo facto de um ponto anular a segunda derivada não quer dizer que seja ponto de inflexão. Como exemplo, do que foi dito atrás, temos a função $f(x) = x^4$ cuja segunda derivada é nula em $x = 0$ e este ponto não é ponto de inflexão da função.

2.5.3 Extremos

De seguida vamos apresentar métodos para encontrar os máximos e/ou mínimos relativos (extremos relativos) de uma função. As ideias a desenvolver têm imensas

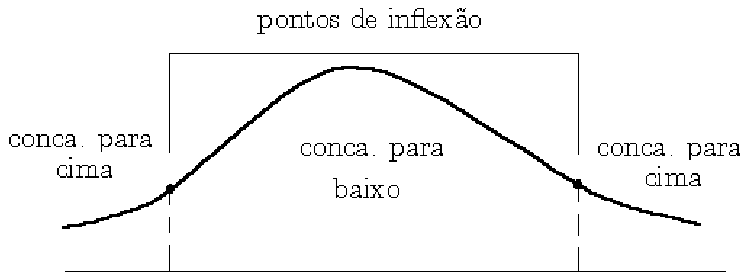

Figura 2.23: Pontos de inflexão de uma função.

aplicações quer ao mundo físico quer ao mundo abstracto.

Definição 2.5 *Uma função f tem um máximo relativo em x_0 se existir um intervalo aberto contendo x_0, no qual $f(x_0)$ é o maior valor, i.e. $f(x_0) \geqslant f(x)$ para todo o x no intervalo. Analogamente, se diz que f tem um mínimo relativo em x_0 se existir um intervalo aberto contendo x_0, no qual $f(x_0)$ é o menor valor, i.e. $f(x_0) \leqslant f(x)$ para todo o x no intervalo. Quando uma função f tem um máximo ou um mínimo relativo em x_0, diz-se que f tem um extremo relativo em x_0.*

Os extremos relativos podem ser vistos como pontos de transição, separando regiões onde uma função é crescente daquelas onde a função é decrescente. Os extremos relativos de uma função contínua ocorrem ou em *picos* ou em pontos onde a recta tangente ao gráfico da função é horizontal.

Teorema 2.26 *Se uma função f tiver extremos relativos, então eles ocorrem ou em pontos onde $f'(x) = 0$ ou em pontos de não diferenciabilidade.*

Antes de demonstrar o teorema anterior convém fazer a seguinte observação:

Observação 2.6 *Os pontos nos quais $f'(x) = 0$ ou f é não diferenciável são chamados pontos críticos de f. Os pontos críticos tais que $f'(x) = 0$ chamam-se pontos estacionários de f. É importante ter cuidado com a interpretação do teorema anterior. Este teorema afirma que os extremos relativos devem ocorrer em pontos críticos, mas não afirma que em todo o ponto crítico deva ocorrer um extremo relativo, i.e. existem pontos críticos nos quais não ocorrem extremos relativos.*

Demonstração: Passando à demonstração do Teorema 2.26. Há duas possibilidades, ou f é diferenciável em x ou não o é. Se não for, então x é um ponto crítico de

f. Se f for diferenciável em x, então o objectivo é mostrar que $f'(x) = 0$. A ideia da demonstração é mostrar numa primeira fase que $f'(x) \leqslant 0$, para depois mostrar que $f'(x) \geqslant 0$, e como consequência vem o que se pretende mostrar, i.e. $f'(x) = 0$. Sendo f diferenciável em x,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

e como consequência existem derivadas laterais de f em relação a x e temos:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \tag{2.9}$$

e

$$f'(x) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{2.10}$$

Por hipótese, f tem extremos relativos. Suponhamos, sem perda de generalidade, que f admite um máximo relativo em x. Então, existe um intervalo aberto (a, b) contendo x no qual $f(y) \leqslant f(x)$ para qualquer ponto $y \in (a, b)$.

De seguida iremos supor h suficientemente pequeno de tal forma que $x + h \in (a, b)$, então $f(x + h) \leqslant f(x)$, i.e.

$$f(x+h) - f(x) \leqslant 0.$$

Se h for positivo, vem

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leqslant 0, \tag{2.11}$$

se por outro lado h é negativo, temos

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geqslant 0. \tag{2.12}$$

Uma expressão que nunca assume valores positivos não pode ter o seu limite positivo, assim pelas condições (2.9) e (2.11), vem

$$f'(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leqslant 0.$$

Da mesma forma, uma expressão que nunca assume valores negativos não pode ter limite negativo, assim pelas condições (2.10) e (2.12), vem

$$f'(x) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geqslant 0.$$

Pelos resultados anteriores temos $f'(x) \leqslant 0$ e $f'(x) \geqslant 0$, e como consequência vem $f'(x) = 0$. ⋔

Os pontos extremos relativos de uma função f ocorrem somente nos pontos críticos, onde f' muda de sinal. Além disso, se o sinal mudar de positivo para negativo ocorre um máximo relativo e no caso do sinal mudar de negativo para positivo ocorre um mínimo relativo. O teorema seguinte está relacionado com estes conceitos.

Teorema 2.27 (Teste da primeira derivada) *Supondo f uma função contínua num ponto crítico x_0 e $h > 0$ suficientemente pequeno.*

(a) *Se $f'(x) > 0$ para $\forall x \in]x_0 - h, x_0[$ e $f'(x) < 0$ para $\forall x \in]x_0, x_0 + h[$, então f tem um máximo relativo em x_0.*

(b) *Se $f'(x) < 0$ para $\forall x \in]x_0 - h, x_0[$ e $f'(x) > 0$ para $\forall x \in]x_0, x_0 + h[$, então f tem um mínimo relativo em x_0.*

(c) *Se $f'(x)$ tiver o mesmo sinal para $\forall x \in]x_0 - h, x_0[$ e para $\forall x \in]x_0, x_0 + h[$, então f não tem extremo relativo em x_0.*

Demonstração: Vamos provar apenas a condição (a). A demostração das condições (b) e (c) fica ao cuidado do aluno. Supondo $f'(x) > 0$ no intervalo (a, x_0) e $f'(x) < 0$ no intervalo (x_0, b), o objectivo é mostrar que

$$f(x_0) \geqslant f(x), \quad \forall x \in (a, b).$$

Usando o Teorema 2.24, temos que a função f é crescente no intervalo $(a, x_0]$ e decrescente no intervalo $[x_0, b)$. Então, como consequência $f(x_0) \geqslant f(x)$ para $\forall x \in (a, b)$ com igualdade apenas em x_0. ⋔

Existe uma outra forma de verificar a existência de extremos relativos. Baseia-se na observação geométrica de que, num máximo relativo, a função é côncava num intervalo aberto contendo o ponto estacionário, enquanto que, num mínimo relativo, a função é convexa num intervalo aberto contendo o ponto estacionário.

Teorema 2.28 (Teste da segunda derivada) *Supondo f uma função duas vezes diferenciável num ponto x_0.*

(a) *Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$, então f tem em x_0 um mínimo relativo.*

(b) *Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$, então f tem em x_0 um máximo relativo.*

(c) *Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) = 0$, então o teste é inconclusivo, i.e. f pode ter um máximo ou mínimo relativo ou nenhum dos dois.*

Demonstração: Consultar Anton [2]. $\pitchfork$

Se uma função tem extremos absolutos, então a função em causa também tem extremos relativos. De seguida vamos apresentar uma definição que nos fala sobre extremos absolutos.

Definição 2.6 (Extremos absolutos) *Uma função f tem um máximo absoluto num ponto $x_0 \in I$, se $f(x_0)$ for o maior valor de f em I, i.e.*

$$f(x_0) \geqslant f(x), \quad \forall x \in I.$$

Da mesma forma, f tem um mínimo absoluto num ponto $x_0 \in I$, se $f(x_0)$ for o menor valor de f em I, i.e.

$$f(x_0) \leqslant f(x), \quad \forall x \in I.$$

Teorema 2.29 (Teorema de Weierstrass) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua num intervalo fechado e limitado $[a, b]$, então f admite nesse intervalo um máximo e um mínimo absolutos.*

Demonstração: Consultar Figueira [1]. $\pitchfork$

2.5.4 Assímptotas verticais e não verticais

Seja $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real de variável real, e a um ponto de acumulação do domínio D_f.

(i) Diz-se que $x = a$ é uma assímptota vertical ao gráfico de f se

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad \vee \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty.$$

(ii) Diz-se que $y = mx + b$ é uma assímptota não vertical (ou oblíqua) ao gráfico de f em $x \to +\infty$ se

$$\lim_{x\to+\infty} \Big[f(x) - \big(mx + b\big)\Big] = 0, \tag{2.13}$$

onde

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \tag{2.14}$$

e
$$b = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - mx\big). \tag{2.15}$$
De forma semelhante, diz-se que $y = mx + b$ é uma assímptota não vertical ao gráfico de f em $x \to -\infty$ se
$$\lim_{x\to-\infty} \Big[f(x) - \big(mx + b\big)\Big] = 0,$$
onde
$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x},$$
e
$$b = \lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - mx\big).$$

É fácil verificar as condições (2.14)−(2.15) para o caso $x \to +\infty$ (o caso $x \to -\infty$ fica ao cuidado do aluno).

Seja $y = mx + b$ uma assímptota não vertical ao gráfico de f quando $x \to +\infty$. Faça-se $\varpi(x) = f(x) - \big(mx + b\big)$, pela condição (2.13), vem
$$\lim_{x\to+\infty} \varpi(x) = 0.$$
Então, tendo em conta o limite anterior e a seguinte condição
$$m = \frac{f(x)}{x} - \frac{\varpi(x) + b}{x},$$
temos (2.14), i.e.
$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}.$$
A condição (2.15) resulta directamente da condição (2.13).

2.6 Teorema de Rolle, de Lagrange e de Cauchy

De seguida vamos apresentar alguns teoremas fundamentais do cálculo diferencial. Assim, como a sua interpretação geométrica.

Teorema 2.30 (Teorema de Rolle) *Sejam a, b reais, com $a < b$, e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ verificando:*

(i) f é contínua em $[a, b]$;

(ii) f *é diferenciável em* (a, b)*;*

(iii) $f(a) = f(b)$.

Então, existe $c \in (a, b)$ *tal que* $f'(c) = 0$.

Demonstração: Sendo f uma função contínua no intervalo limitado e fechado $[a, b]$ temos pelo Teorema de Weierstrass que f tem máximo e mínimo absolutos, e logo relativos. Se o máximo e mínimo são atingidos nos extremos do intervalo, como $f(a) = f(b)$, ter-se-á f constante e portanto para qualquer $c \in (a, b)$, temos $f'(c) = 0$. Caso contrário, o máximo ou mínimo é atingido num ponto $c \in (a, b)$. Tendo em conta que f é diferenciável em (a, b), e Teorema 2.26, vem que $f'(c) = 0$. ⋔

Geometricamente, ver Figura 2.24, o teorema de Rolle afirma que o gráfico da função f admite pelo menos uma tangente horizontal num ponto interior de (a, b).

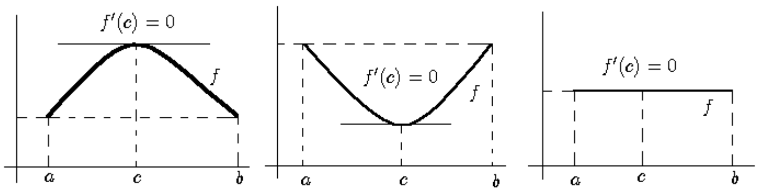

Figura 2.24: Interpretação geométrica do teorema de Rolle.

O teorema de Rolle é um caso particular do teorema que se segue, o teorema de Lagrange.

Teorema 2.31 (Teorema do Valor Médio de Lagrange) *Sejam* a *e* b *reais, com* $a < b$, *e* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *verificando:*

(i) f *é contínua em* $[a, b]$*;*

(ii) f *é diferenciável em* (a, b).

Então, existe $c \in (a, b)$ *tal que* $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Demonstração: O teorema do valor médio de Lagrange também é conhecido pelo teorema de Lagrange, ou então pelo teorema dos acréscimos finitos. A equação da recta secante que passa pelos pontos $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$, ver Figura 2.25, é dada por

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a),$$

e a diferença $\vartheta(x)$ entre a altura do gráfico de $f(x)$ e a recta secante é dada por

$$\vartheta(x) = f(x) - \Big[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)\Big]. \tag{2.16}$$

Como f é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b), vem que ϑ também o é. E além disso,

$$\vartheta(a) = \vartheta(b).$$

Estamos em condições de aplicar o Teorema de Rolle à função ϑ, i.e. existe um ponto $c \in (a, b)$ tal que $\vartheta'(c) = 0$. A partir da equação (2.16), temos

$$\vartheta'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

E, assim

$$\vartheta'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

i.e.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \pitchfork$$

Geometricamente, ver Figura 2.25, o teorema de Lagrange afirma que, entre dois pontos do gráfico de abcissas a e b, há pelo menos um ponto desse gráfico onde a tangente é paralela à secante definida pelos pontos A e B. Por outras palavras, considerando uma partícula móvel sobre a recta situando-se na posição $f(t)$ em cada instante de tempo t, o teorema de Lagrange estabelece que pelo menos uma vez, durante o intervalo de tempo, a velocidade instantânea é igual à velocidade média.

Observação 2.7 *A personagem X conduz um carro numa estrada com limite de velocidade igual a 55km/h. Pelas 8:05 um agente da autoridade cronometra a velocidade do carro como sendo de 50km/h e, às 8:10 passados 5km, um segundo agente da autoridade cronometra a velocidade do carro como sendo de 55km/h. Explique, usando o Teorema do Valor Médio de Lagrange, porque motivo o agente da autoridade tem o direito de multar a personagem X por excesso de velocidade.*

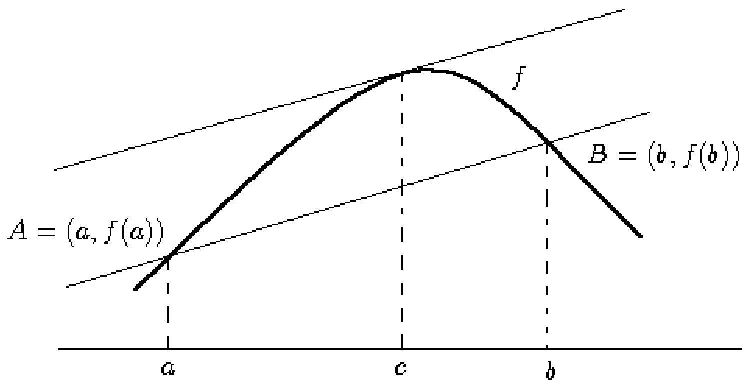

Figura 2.25: Interpretação geométrica do teorema Lagrange.

O teorema de Lagrange é um caso particular do teorema que se segue.

Teorema 2.32 (Teorema do Valor Médio de Cauchy) *Sejam a, b reais, com $a < b$, e $g, f : [a, b] \to \mathbb{R}$ verificando:*

(i) f e g são contínuas em $[a, b]$;

(ii) f e g são diferenciáveis em (a, b);

(iii) $g'(x) \neq 0, \;\; \forall x \in]a, b[$.

Então, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Demonstração: Considerando a função

$$\vartheta(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x),$$

e usando o Teorema de Rolle para esta função, temos o resultado pretendido. ⋔

Interpretando f e g como dois movimentos independentes na recta real e $[a, b]$ como um intervalo de tempo, existe um instante de tempo $c \in]a, b[$ onde o quociente das velocidades instantâneas, i.e.

$$\frac{f'(c)}{g'(c)},$$

coincide com o quociente das velocidades médias, i.e.

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)},$$

no intervalo $[a,b]$.

2.7 Regra de Cauchy, e de L'Hôpital

De seguida vamos apresentar algumas regras muito úteis para o cálculo de certos limites. Sempre que possível, iremos usar a regra de Cauchy para indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, e a regra de L'Hôpital para indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$.

Teorema 2.33 (Regra de Cauchy) *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo qualquer de $\mathbb{R}$ e $a \in \bar{I}$; sejam $f,g : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis e admita-se que $g'(x) \neq 0$ para $x \in I \setminus \{a\}$. Suponha-se agora que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \quad \vee \quad \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty,$$

e que existe o limite

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Então, $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe e tem-se

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demonstração: Consultar Figueira [1].

Observação 2.8 *A regra de Cauchy ainda é válida no caso em que a não pertence ao conjunto I, neste caso, a será um extremo do intervalo, podendo ser $\pm\infty$.*

Teorema 2.34 (Regra de L'Hôpital) *Sejam $f,g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis em $a \in D$; suponha-se que, nalguma vizinhança de a, $g(x) \neq 0$, para $x \in \big(\mathcal{V}_\varepsilon(a) \setminus \{a\}\big) \cap D$. Se $f(a) = g(a) = 0$ e $g'(a) \neq 0$, então $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe e tem-se*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Demonstração: Consultar Figueira [1].

Observação 2.9 *A regra de L'Hôpital ainda é válida (ver [1, 4]) mesmo que $g'(a) = k \in \mathbb{R}$ e $f'(a) = \pm\infty$.*

Agora estamos em condições de resolver os seguintes exercícios.

2.8 Exercícios para aulas teóricas

1. Considere as funções reais de variável real

$$f(x) = 3arcsin(2x - 1), \quad g(x) = \frac{3}{4}arctg(\frac{x}{3}).$$

Determine o domínio e o contradomínio de cada umas delas.

2. Determine as dimensões de um rectângulo com um perímetro de 100 metros, cuja área é a maior possível.

3. Estude as seguintes funções

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}, \quad g(x) = \frac{ln(x)}{x},$$

em termos de monotonia, extremos, concavidades, assímptotas e esboce os seus gráficos.

4. Exercícios relacionados com o teorema de Rolle:

(a) Seja $f(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$. Mostre que, no intervalo $[-1, 2]$ a função f satisfaz as condições do teorema de Rolle.

(b) Seja $g(x) =\mid x - 1 \mid$. Explique porque não é aplicável o teorema de Rolle para o intervalo $[-1, 3]$.

5. Exercícios relacionados com o teorema de Lagrange:

(a) Mostre que o teorema de Lagrange é aplicável à função:

$$f(x) = ln(1 + x), \text{ no intervalo } [0, e - 1],$$

e determine o ponto do gráfico da função f em que a tangente é paralela ao segmento de extremos $(0, f(0))$ e $(e - 1, f(e - 1))$.

(b) Utilize o teorema de Lagrange para demonstrar que $\sqrt{101}$ está compreendido entre 10 e 10,05.

(c) Prove, aplicando o teorema de Lagrange,que

$$1 + x < e^x < \frac{1}{1-x}, \ \forall x \in]0,1[.$$

6. Exercícios relacionados com o teorema de Cauchy:

(a) Sejam f e g funções reais de variável real, definidas por:

$$f(x) = sin(x), \quad g(x) = x + cos(x).$$

Aplique o teorema do valor médio de Cauchy às funções f e g no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

(b) Calcule, aplicando o teorema de Cauchy, o seguinte limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg(a+x) - tg(a-x)}{arctg(a+x) - arctg(a-x)}.$$

7. Verificando a regra de Cauchy, calcule os seguintes limites:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-cos(3x)}{x^2}, \quad \lim_{x\to 0^+} \Big[ln(1+x)\Big]^x, \quad \lim_{x\to 1} \Big(\frac{e}{e^x - e} - \frac{1}{x-1}\Big).$$

8. Verificando a regra de L'Hôpital, calcule os seguintes limites:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{2x}}{x}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^4 + x^2 - x - 1}{sin(x-1)}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{sin(x)}.$$

2.9 Exercícios para aulas práticas

1. Considere as funções reais de variável real

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}arccos(2x+1), \ \ g(x) = \frac{\pi}{2} - 2arccotg(\frac{x}{2} - 1).$$

Determine o domínio e o contradomínio de cada umas delas.

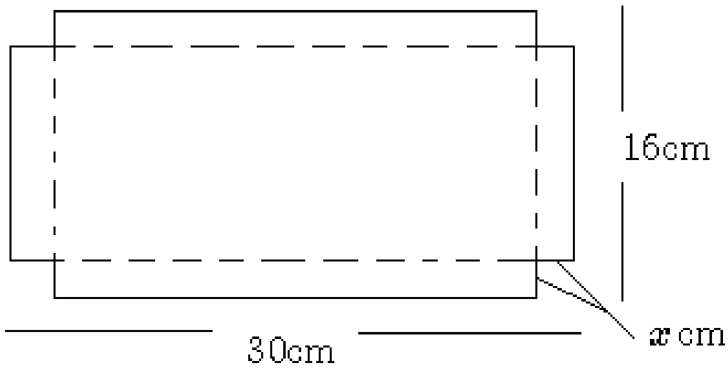

Figura 2.26: Caixinha de chocolates.

2. Uma caixa deve ser feita de uma folha de papelão medindo 16cm por 30cm, destacando-se quadrados iguais dos quatro cantos e dobrando-se os lados, ver Figura 2.26. Qual é o medida dos lados dos quadrados de modo a que a caixa tenha volume máximo.

3. Estude as seguintes funções

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}, \quad g(x) = \frac{|\, x \,| + 1}{x^2 - 1},$$

em termos de monotonia, extremos, concavidades, assímptotas e esboce os seus gráficos.

4. Considere a seguinte função $f(x) = ln(2e^x - 1)$. Determine o seu domínio, sentido da concavidade e assímptotas (nota: em determinadas situações de cálculo aplicar a regra de Cauchy).

5. Exercícios relacionados com o teorema de Rolle:

(a) Seja $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 2}$. Mostre que, no intervalo $[-1, 1]$ a função f satisfaz as condições do teorema de Rolle.

(b) Seja $g(x) = cotg(x)$. Explique porque não é aplicável o teorema de Rolle para o intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

6. Exercícios relacionados com o teorema de Lagrange:

(a) Pode aplicar-se o teorema de Lagrange à função:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sin(1/x) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

no intervalo $[0, a]$?

(b) Seja $f(x) = ln(x)$. Prove, utilizando o referido teorema para a função f, que:

$$x - 1 < ln(x^x) < x^2 - x, \ \ \forall x > 1.$$

7. Sejam f e g funções reais de variável real, definidas por:

$$f(x) = \sqrt{x+1}, \quad g(x) = x + 3.$$

Aplique o teorema do valor médio de Cauchy às funções f e g no intervalo $[0, 1]$.

8. Verificando a regra de Cauchy, calcule os seguintes limites:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x tg(x)}{sin(2x)}, \quad \lim_{x \to 0^+} \Big[\big(cotg(x) \big)^{1/ln(x)} \Big].$$

9. Usando a regra L'Hôpital calcule os seguintes limites:

$$\lim_{x \to 0} \frac{arctg(x)}{x}, \quad \lim_{x \to \pi/2} \frac{1 - sin(x)}{cos(x)}.$$

2.10 Exercícios para trabalho de casa

1. Tendo em conta a Figura 2.27. Qual o ponto $(x, f(x))$ na curva $f(x) = x^2$ para o qual a distância ao ponto $(18, 0)$ é mínima.

2. Determine as assímptotas das seguintes funções:

$$f(x) = x ln\big(e + \frac{1}{x}\big), \ \ g(x) = \frac{x}{x-2}.$$

3. Estude a monotonia e sentido da concavidade das seguintes funções:

$$f(x) = x e^{\frac{1}{x+3}}, \ \ g(x) = x + ln(x^2 - 3).$$

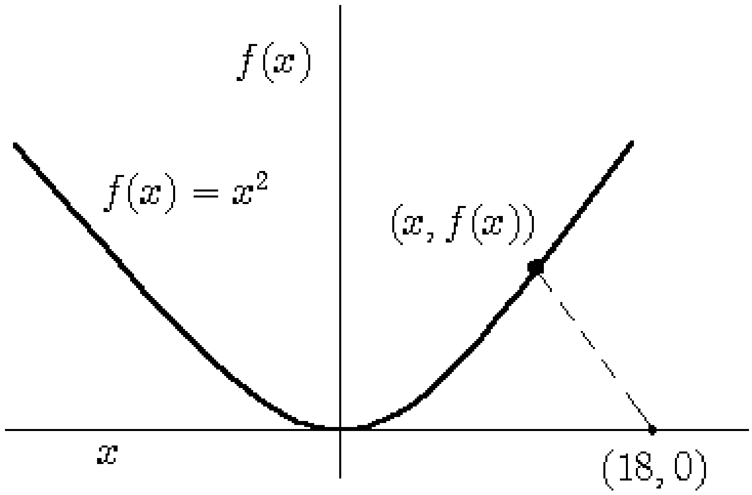

Figura 2.27: Distância mínima de um ponto no gráfico da função ao ponto $(18, 0)$.

4. Estude as seguintes funções

$$f(x) = x^4 - 2x^2 - 3, \;\; g(x) = xe^x,$$

em termos de monotonia, extremos, concavidades, assímptotas e esboce os seus gráficos.

5. Exercícios relacionados com o teorema de Rolle:

(a) Considere a função $f(x) = \dfrac{\pi}{2\sqrt{3}} tg(x) + kx$, com $k \in \mathbb{R}$. Determine k de modo que o teorema de Rolle seja aplicável à função, relativamente ao intervalo $[\pi/6, \pi/3]$.

(b) Verifique se a função $f(x) = ln(sin(x))$ satisfaz o teorema de Rolle no intervalo $[\pi/6, 5\pi/6]$.

6. Prove aplicando o teorema de Lagrange, que:

$$arcsin(x) > x, \;\; \forall x > 0.$$

7. Sejam f e g funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$, tais que:

$$\Big(f'(x) > g'(x), \;\; \forall x \in \mathbb{R}\Big) \;\wedge\; f(a) = g(a).$$

Utilizando o teorema de Cauchy, prove que

$$f(x) > g(x), \quad \forall x > a.$$

8. Verificando a regra de Cauchy, calcule o seguinte limite:

$$\lim_{x\to 0}\Big[x\big(arctg(e^x) - \frac{\pi}{2}\big)\Big].$$

9. Verificando a regra de L'Hôpital, calcule o seguinte limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1 - cos(x)}{x}.$$

Capítulo 3

Primitivação

"Dai-me um ponto de apoio e eu levantarei o mundo"

Arquimedes

Caro aluno, em relação às primitivas iremos apenas explorar um pouco mais do que a ponta do iceberg. Temos que tentar não cair na tentação de transformar um assunto belo numa coisa maçuda e cheia de artifícios. A ideia é perceber os assuntos a expor e pensar sobre eles de forma a que exista um encanto entre o assunto e a mente humana.

3.1 Definição e algumas propriedades

No capítulo anterior estudámos a seguinte situação: dada uma função $F(x)$, achar a sua derivada, i.e. a função $f(x)$ tal que $f(x) = F'(x)$. Ao colocar a situação inversa o problema fica mais interessante, i.e. dada uma função $f(x)$, achar uma função $F(x)$ tal que a sua derivada seja igual a $f(x)$, i.e.

$$F'(x) = f(x).$$

Como consequência, temos:

Definição 3.1 *Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real de variável real. Chama-se primitiva de f em I a qualquer função $F : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável, tal que*

$$\frac{d}{dx}\big(F(x)\big) = f(x),\ \forall x \in I.$$

Diz-se que f é primitivável em I quando f admite pelo menos uma primitiva em I. É usual representar-se uma primitiva de f, por

$$Pf(x) = F(x) \quad ou \quad \int f(x)dx = F(x).$$

Tendo em conta a definição anterior, temos

$$f(x) = \frac{d}{dx}\Big(Pf(x)\Big) = \frac{d}{dx}\Big(\int f(x)dx\Big).$$

De seguida vamos apresentar algumas propriedades a ter em conta.

Proposição 3.1 *Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real de variável real.*

(i) *Se F é uma primitiva de f, então $F+c$, em que c é uma constante real arbitrária, ainda é uma primitiva de f.*

(ii) *Se F_1, F_2 são primitivas de f, então F_1 e F_2 diferem de uma constante real.*

Demonstração: Condição (i): Seja $c \in \mathbb{R}$. Para que $F + c$ seja uma primitiva de f, basta mostrar que

$$\frac{d}{dx}\Big(F(x) + c\Big) = f(x),\ \forall x \in I.$$

Para qualquer $x \in I$

$$\frac{d}{dx}\Big(F(x) + c\Big) = \frac{d}{dx}\Big(F(x)\Big) + \frac{d}{dx}\Big(c\Big) = \frac{d}{dx}\Big(F(x)\Big),$$

e pelo facto de F ser uma primitiva de f, temos

$$\frac{d}{dx}\Big(F(x) + c\Big) = \frac{d}{dx}\Big(F(x)\Big) = f(x),\ \forall x \in I.$$

Condição (ii): As funções F_1, F_2 diferem de uma constante real, i.e.

$$F_1(x) - F_2(x) = cts,\ \forall x \in I,$$

ou seja

$$\frac{d}{dx}\Big(F_1(x) - F_2(x)\Big) = 0,\ \forall x \in I.$$

Para qualquer $x \in I$

$$\frac{d}{dx}\Big(F_1(x) - F_2(x)\Big) = \frac{d}{dx}\Big(F_1(x)\Big) - \frac{d}{dx}\Big(F_2(x)\Big)$$

e, pelo facto de F_1 e F_2 serem primitivas de f

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\Big(F_1(x)-F_2(x)\Big) &= \frac{d}{dx}\Big(F_1(x)\Big)-\frac{d}{dx}\Big(F_2(x)\Big)\\ &= f(x)-f(x)=0,\ \forall x\in I\end{aligned}$$

e assim F_1, F_2 diferem de uma constante. ⫛

Proposição 3.2 *Sejam $f, g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções primitiváveis. Então, temos:*

(i)

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

(ii)

$$\int \Big(f(x)+g(x)\Big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Demonstração: Condição (i): Derivando o lado esquerdo e direito da igualdade, temos:

$$\frac{d}{dx}\Big(\int \alpha f(x)dx\Big) = \alpha\frac{d}{dx}\Big(\int f(x)dx\Big) = \alpha f(x)$$

e

$$\alpha\frac{d}{dx}\Big(\int f(x)dx\Big) = \alpha f(x).$$

Como as derivadas são iguais entre si, quer dizer que a igualdade em causa difere apenas de uma constante, é nesse sentido que a igualdade em causa deve ser entendida.

Condição (ii): Derivando o lado esquerdo e direito da igualdade, temos:

$$\frac{d}{dx}\Big[\int \big(f(x)+g(x)\big)dx\Big] = f(x)+g(x)$$

e

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\Big(\int f(x)dx + \int g(x)dx\Big) &= \frac{d}{dx}\Big(\int f(x)dx\Big)+\frac{d}{dx}\Big(\int g(x)dx\Big)\\ &= f(x)+g(x).\end{aligned}$$

Como as derivadas são iguais entre si, quer dizer que a igualdade em causa difere apenas de uma constante, é nesse sentido que a igualdade em causa deve ser entendida. A expressão anterior ainda é válida para a operação subtracção. ⫛

Como generalização da propriedade anterior, temos:

Proposição 3.3 *Sejam $f_1, f_2, \cdots, f_n$ funções reais de variável real primitiváveis e $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ constantes reais arbitrárias. Então,*

$$\int \Big(\alpha_1 f_1(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x)\Big) dx = \alpha_1 \int f_1(x)dx + \cdots + \alpha_n \int f_n(x)dx.$$

Demonstração: É uma consequência da Proposição 3.2. ⫛

3.2 Primitivas imediatas

Tendo em conta o conceito de primitiva, podemos dizer que as primitivas imediatas são aquelas que resultam directamente da noção de derivada. Sendo assim, vamos apresentar de seguida um formulário, ver Tabelas 3.1−3.3. À esquerda figura a regra da derivação; e à direita figura a regra de primitivação onde $c \in \mathbb{R}$. Para tal, vamos considerar $M : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável, com domínio e contradomínio adequado dependendo da regra em estudo.

Além das Tabelas 3.1 − 3.3, vamos, ainda, ter em conta as primitivas imediatas das funções $sec(M)$ e $cosec(M)$:

$$\begin{aligned}
\int M' sec(M) dx &= \int M' sec(M) \Big(\frac{sec(M) + tg(M)}{sec(M) + tg(M)} \Big) dx \\
&= \int \frac{M' sec^2(M) + M' sec(M) tg(M)}{sec(M) + tg(M)} dx \\
&= ln \mid sec(M) + tg(M) \mid + c, \ c \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

e da mesma forma

$$\begin{aligned}
\int M' cosec(M) dx &= \int M' cosec(M) \Big(\frac{cosec(M) + cotg(M)}{cosec(M) + cotg(M)} \Big) dx \\
&= \int \frac{M' cosec^2(M) + M' cosec(M) cotg(M)}{cosec(M) + cotg(M)} dx \\
&= -ln \mid cosec(M) + cotg(M) \mid + c, \ c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

$\left(M^{\alpha}\right)' = \alpha M^{\alpha-1}M'$	$\int M^{\beta}M'dx = \dfrac{M^{\beta+1}}{\beta+1} + c,\ \beta \neq -1$
$\left(e^{M}\right)' = M'e^{M}$	$\int M'e^{M}dx = e^{M} + c$
$\left(ln(M)\right)' = \dfrac{M'}{M}$	$\int \dfrac{M'}{M}dx = ln(\|M\|) + c$
$\left(sin(M)\right)' = M'cos(M)$	$\int M'cos(M)dx = sin(M) + c$
$\left(cos(M)\right)' = -M'sin(M)$	$\int M'sin(M)dx = -cos(M) + c$
$\left(arcsin(M)\right)' = \dfrac{M'}{\sqrt{1-M^2}}$	$\int \dfrac{M'}{\sqrt{1-M^2}}dx = arcsin(M) + c$
$\left(arccos(M)\right)' = \dfrac{-M'}{\sqrt{1-M^2}}$	$\int \dfrac{-M'}{\sqrt{1-M^2}}dx = arccos(M) + c$

Tabela 3.1: Derivadas e primitivas imediatas - parte I.

3.3 Primitivação por partes, e substituição

A primitivação por partes baseia-se no seguinte:

Teorema 3.1 (Primitivação por partes) *Sejam $v, u : I \to \mathbb{R}$ funções reais de variável real, deriváveis, e suponha-se que uv' é primitivável. Então, $u'v$ também é primitivável e*

$$\int u'vdx = uv - \int uv'dx.$$

Demonstração: Tendo em conta que as funções u e v são deriváveis, temos

$$\left(uv\right)' = u'v + uv'.$$

Como consequência, vem

$$u'v = \left(uv\right)' - uv'.$$

$(a^M)' = M'a^M ln(a),\ a > 0$	$\int M'a^M ln(a)dx = a^M + c,\ a > 0$
$(\sqrt[n]{M})' = \frac{M'}{n\sqrt[n]{M^{n-1}}}$	$\int \frac{M'}{n\sqrt[n]{M^{n-1}}}dx = \sqrt[n]{M} + c$
$(log_a(M))' = \frac{M'}{Mln(a)},\ a > 0, a \neq 1$	$\int \frac{M'}{Mln(a)}dx = log_a(\|M\|) + c,\ a > 0, a \neq 1$
$(tg(M))' = \frac{M'}{cos^2(M)} =$ $= M'sec^2(M)$	$\int \frac{M'}{cos^2(M)}dx =$ $= \int M'sec^2(M)dx = tg(M) + c$

Tabela 3.2: Derivadas e primitivas imediatas - parte II.

Usando a primitivação na expressão anterior, obtém-se

$$\begin{aligned}\int u'vdx &= \int (uv)'dx - \int uv'dx \\ &= uv - \int uv'dx. \pitchfork\end{aligned}$$

Tendo em conta o teorema anterior, podemos fazer a seguinte observação:

Observação 3.1 *É de aplicar a primitivação por partes quando sabemos apresentar a função em estudo como o produto de dois factores $u'v$, tais que:*

(i) Sabemos calcular, sem grande desperdício de energia mental, a primitiva de u.

(ii) Sabemos calcular, sem grande desperdício de energia mental, a primitiva do produto uv'.

Alguns critérios para a escolha de u e v:

(iii) Se no produto $u'v$ existir um factor com funções trigonométricas ou a função exponencial, convém considerar esse factor para u'.

(iv) Se no produto $u'v$ existir um factor com funções trigonométricas inversas ou a função logaritmo, convém considerar esse factor para v.

$\big(cotg(M)\big)' = \dfrac{-M'}{sin^2(M)} =$ $= -M'cosec^2(M)$	$\displaystyle\int \frac{-M'}{sin^2(M)}dx =$ $= \displaystyle\int \big(-M'cosec^2(M)\big)dx = cotg(M) + c$
$\big(arctg(M)\big)' = \dfrac{M'}{1+M^2}$	$\displaystyle\int \frac{M'}{1+M^2}dx = arctg(M) + c$
$\big(arccotg(M)\big)' = \dfrac{-M'}{1+M^2}$	$\displaystyle\int \frac{-M'}{1+M^2}dx = arccotg(M) + c$

Tabela 3.3: Derivadas e primitivas imediatas - parte III.

De seguida iremos apresentar o teorema sobre a primitivação por substituição. Este médodo é uma consequência da derivada da função composta. A ideia é a seguinte: para calcular

$$\int f(x)dx$$

vamos considerar a mudança de variável $x = \varphi(t)$, em que φ é uma função contínua com inversa, e com derivada contínua. Então, vem $dx = \varphi'(t)dt$ e temos

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{3.1}$$

O segundo termo na igualdade (3.1) vem em função da variável t. Para o resultado vir em função da variável x basta usar o facto de φ ser invertível, i.e. $t = \varphi^{-1}(x)$ e substituir onde está t no resultado obtido.

Em termos mais precisos:

Teorema 3.2 (Primitivação por subtituição) *Sejam I e J dois intervalos de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ uma função primitivável e $\varphi : J \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável que aplique bijectivamente o intervalo J sobre o intervalo I. Nestas condições, a função $\big(f \circ \varphi\big)\varphi'$ é primitivável e, designando por θ uma sua primitiva, $\theta \circ \varphi^{-1}$ é uma primitiva de f.*

Demonstração: Seja g uma primitiva qualquer de f, então

$$\big(g \circ \varphi\big)' = \big(g' \circ \varphi\big)\varphi' = \big(f \circ \varphi\big)\varphi' = \theta',$$

e, assim $\big(g \circ \varphi - \theta\big)' = 0$. Como consequência a diferença $g \circ \varphi - \theta$ é uma constante em J, de onde resulta que

$$\big(g \circ \varphi - \theta\big) \circ \varphi^{-1} = g \circ \big(\varphi \circ \varphi^{-1}\big) - \theta \circ \varphi^{-1} = g - \theta \circ \varphi^{-1},$$

será uma constante em I. Deste modo, $\theta \circ \varphi^{-1}$ difere de uma primitiva de f por uma constante, e portanto $\theta \circ \varphi^{-1}$ é uma primitiva de f em I. ⋔

Tendo em conta o teorema anterior, podemos fazer a seguinte observação:

Observação 3.2 *É de aplicar a primitivação por substituição quando conseguirmos encontrar uma substituição $x = \varphi(t)$ tal que a função $f(\varphi(t))\varphi'$ seja uma função que sabemos primitivar. Obtida uma primitiva (que será uma função de t), há que desfazer a substituição, ou seja regressar à variável inicial, i.e. x, para tal temos que compor o resultado obtido com $t = \varphi^{-1}(x)$.*

Tendo em conta a observação anterior, vamos introduzir alguns critérios de escolha para a primitivação por substituição, se necessária:

1. Quando aparece o factor $\sqrt{a^2 - b^2x^2}$ fazer a substituição $x = \frac{a}{b}sin(t)$.
2. Quando aparece o factor $\sqrt{a^2 + b^2x^2}$ fazer a substituição $x = \frac{a}{b}tg(t)$.
3. Quando aparece o factor $\sqrt{b^2x^2 - a^2}$ fazer a substituição $x = \frac{a}{b}sec(t)$.
4. Quando aparece o factor e^x fazer a substituição $x = ln(t)$.
5. Quando aparece o factor $ln(x)$ fazer a substituição $x = e^t$.
6. Quando aparece o factor $sin(x)$ e/ou $cos(x)$ usar, quando possível, as relações

$$cos(x) = \frac{1 - tg^2(\frac{x}{2})}{1 + tg^2(\frac{x}{2})}, \quad sin(x) = \frac{2tg(\frac{x}{2})}{1 + tg^2(\frac{x}{2})}$$

   e depois fazer a substituição $x = 2arctg(t)$.
7. Quando aparece os factores $\sqrt[m_1]{x^{\beta_1}}$, $\sqrt[m_2]{x^{\beta_2}}, \ldots,$ $\sqrt[m_n]{x^{\beta_n}}$ em fracção fazer a substituição $x = t^{\alpha}$, sendo α o mínimo múltiplo comum entre $m_1, m_2, \ldots, m_n$.
8. Quando aparece o factor $\sqrt{ax^2 + bx + c}$, temos três casos possíveis:

(i) se $a > 0$, fazer $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}x + t$,

(ii) se $c > 0$, fazer $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} + tx$,

(iii) se α é uma raíz real de $ax^2 + bx + c$, fazer

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \big(x - \alpha\big)t.$$

3.4 Primitivação de funções racionais

A ideia é obter uma primitiva de uma função racional, a qual é uma função do tipo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \tag{3.2}$$

em que $P(x)$ e $Q(x)$ são polinómios na variável x. A função (3.2) é própria se o grau do polinómio $P(x)$ é inferior ao grau do polinómio $Q(x)$ e imprópria no caso contrário.

Se a função (3.2) for imprópria, é possível, pela divisão de polinómios, obter

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = D(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \tag{3.3}$$

em que o grau do polinómio $R(x)$ (polinómio resto) é inferior ao grau do polinómio $Q(x)$ (polinómio quociente). De uma maneira geral para obter uma primitiva da função (3.2), temos que em primeiro lugar reduzir toda a função racional imprópria numa função própria através da divisão de polinómios. E por decomposição, o problema fica reduzido à primitivação de funções racionais próprias.

Teorema 3.3 *Sejam P e Q dois polinómios com grau de P inferior ao grau de Q. Então,*

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

é a soma de um número finito de funções racionais simples de dois tipos:

$$i)\ \frac{A}{\big(x - a\big)^k}, \qquad ii)\ \frac{Bx + C}{\Big[\big(x - \alpha\big)^2 + \beta^2\Big]^l}$$

onde os parâmetros A, B e C são constantes reais; $x-a$, respectivamente $\big(x-\alpha\big)^2+\beta^2$, são os factores irredutíveis da decomposição de $Q(x)$, de multiplicidade $\geqslant k$ e $\geqslant l$, respectivamente. Mais precisamente, se

$$Q(x) = (x-a_1)^{n_1}\dots(x-a_p)^{n_p}\Big[\big(x-\alpha_1\big)^2+\beta_1^2\Big]^{m_1}\dots\Big[\big(x-\alpha_q\big)^2+\beta_q^2\Big]^{m_q},$$

então

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{n_i}\frac{A_{ik}}{(x-a_i)^k}+\sum_{j=1}^{q}\sum_{l=1}^{m_j}\frac{B_{jl}x+C_{jl}}{\Big[\big(x-\alpha_j\big)^2+\beta_j^2\Big]^l}. \tag{3.4}$$

Demonstração: Omite-se tal demonstração, ver bibliografia. ⋔

Naturalmente, no membro da direita desta última igualdade, estará ausente o primeiro somatório se $Q(x)$ não tiver raízes reais; e estará ausente o segundo se $Q(x)$ só tiver raízes reais; e claro estão ambos presentes se houver raízes reais e não reais (i.e. raízes complexas).

Trata-se agora de determinar os coeficientes A_{ik}, B_{jl} e C_{jl}. A anterior igualdade reduz-se, após desembaraçar de denominadores, a uma igualdade de polinómios e os coeficientes em causa podem ser calculados utilizando o método dos coeficientes indeterminados, i.e. dados os polinómios

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

e

$$Q(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + b_0$$

com o mesmo grau n, temos que $P(x) = Q(x)$ sse

$$a_n = b_n,\quad a_{n-1} = b_{n-1},\quad \dots,\quad a_1 = b_1,\quad a_0 = b_0.$$

Tendo em conta o Teorema 3.3, a primitiva da expressão (3.4), vem

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{n_i}\int\frac{A_{ik}}{(x-a_i)^k}dx+\sum_{j=1}^{q}\sum_{l=1}^{m_j}\int\frac{B_{jl}x+C_{jl}}{\Big[\big(x-\alpha_j\big)^2+\beta_j^2\Big]^l}dx.$$

De acordo com a igualdade anterior, o problema está reduzido a sabermos primitivar as seguintes funções racionais simples:

$$(i)\ \frac{A}{(x-a)^k},\qquad (ii)\ \frac{Bx+C}{\Big[\big(x-\alpha\big)^2+\beta^2\Big]^m},\quad m,k\ \textit{naturais}.$$

A primitiva da condição (i): para $k = 1$, temos

$$\int \frac{A}{(x-a)}dx = A\, ln(x-a) + c,\ c \in \mathbb{R}$$

e para os naturais $k > 1$,

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = \frac{A}{-k+1}\big(x-a\big)^{-k+1} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

A primitiva da condição (ii): o cálculo desta primitiva pode ser feita pela seguinte substituição $\varphi :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$, definida por $x = \varphi(t) = \alpha + \beta tg(t)$. E, assim, com a substituição anterior temos:

$$\begin{aligned}\int \frac{Bx+C}{\Big[\big(x-\alpha\big)^2+\beta^2\Big]^m}dx &= \int \Big[\frac{B(\alpha+\beta tg(t))+C}{\big(\beta^2 tg^2(t)+\beta^2\big)^m}\beta sec^2(t)\Big]dt \\ &= \int \Big[\frac{B\alpha + C + B\beta tg(t)}{\big(\beta^2 sec^2(t)\big)^m}\beta sec^2(t)\Big]dt.\end{aligned}$$

No caso $m = 1$, vem:

$$\begin{aligned}\int \Big[\frac{B\alpha+C}{\beta} + Btg(t)\Big]dt &= \int \Big[\frac{B\alpha+C}{\beta} + B\frac{sin(t)}{cos(t)}\Big]dt \\ &= \frac{B\alpha+C}{\beta}t - Bln(cos(t)) + c,\ c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

No caso $m \neq 1$, vem:

$$\begin{aligned}&\int \Big[\frac{B\alpha + C + B\beta tg(t)}{\beta^{2m-1}}cos^{2m-2}(t)\Big]dt = \\ &= \frac{B\alpha+C}{\beta^{2m-1}}\int cos^{2m-2}(t)dt + \frac{B}{\beta^{2m-2}}\int tg(t)cos^{2m-2}(t)dt \\ &= \frac{B\alpha+C}{\beta^{2m-1}}\int cos^{2m-2}(t)dt + \frac{B}{\beta^{2m-2}}\int sin(t)cos^{2m-3}(t)dt \\ &= \frac{B\alpha+C}{\beta^{2m-1}}\int cos^{2m-2}(t)dt - \frac{B}{\beta^{2m-2}}\frac{cos^{2m-2}(t)}{2m-2}\end{aligned}$$

em relação ao cálculo da primitiva da função $cos^{2m-2}(t)$, basta ter em conta, que

$$\int cos^{2m-2}(t)dt = \int cos^{2m-3}(t)cos(t)dt,$$

e aplicar a primitiva por partes tantas vezes quantas as necessárias. De seguida, nas situações anteriores, temos que regressar à variável x, para isso basta ter em conta que

$$t = \varphi^{-1}(x) = arctg(\frac{x-\alpha}{\beta}).$$

Algumas relações a ter em conta de modo a obter primitivas de funções racionais: a substituição $x = ln(t)$ transforma a primitiva de

$$\int \frac{P(e^x)}{Q(e^x)} dx$$

na de

$$\int \frac{P(t)}{Q(t)} \frac{1}{t} dt$$

que é uma primitiva de uma função racional em t.

A substituição $x = 2arctg(t)$ com as relações trigonométricas:

$$cos(x) = \frac{1 - tg^2(\frac{x}{2})}{1 + tg^2(\frac{x}{2})}, \quad sin(x) = \frac{2tg(\frac{x}{2})}{1 + tg^2(\frac{x}{2})}$$

transforma a primitiva de

$$\int \frac{P(sin(x), cos(x))}{Q(sin(x), cos(x))} dx$$

na de

$$\int \frac{P(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})}{Q(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})} \frac{2}{1+t^2} dt$$

que é uma primitiva de uma função racional em t.

3.5 Algumas fórmulas de recorrência

Usando a primitivação por partes, i.e.

$$\int u'v dx = uv - \int uv' dx,$$

podemos obter algumas fórmulas de recorrência. De seguida vamos considerar alguns casos concretos de primitivação por recorrência.

A primitivação de polinómios multiplicados por e^x, i.e. $x^k e^x$ com k um número natural. Por partes, façamos

$$u' = e^x, \quad v = x^k,$$

obtém-se uma fórmula de recorrência, que permite descer até

$$\int e^x dx = e^x.$$

A fórmula de recorrência é a seguinte:

$$\int e^x x^k dx = e^x x^k - k \int e^x x^{k-1} dx.$$

A primitivação de polinómios multiplicados por $sin(x)$ ou $cos(x)$, i.e. $x^k sin(x)$ ou $x^k cos(x)$ com k um número natural. Por partes, obtém-se fórmulas de recorrência, que permite descer até

$$\int sin(x)dx = -cos(x), \quad \int cos(x)dx = sin(x).$$

A fórmula de recorrência é a seguinte: para $u' = sin(x)$ e $v = x^k$, temos

$$\int x^k sin(x)dx = -x^k cos(x) + k \int x^{k-1} cos(x)dx,$$

e para $u' = cos(x)$ e $v = x^k$, temos

$$\int x^k cos(x)dx = x^k sin(x) - k \int x^{k-1} sin(x)dx.$$

Seja k um natural, com $k \geqslant 2$. Primitivação de potências do $sin(x)$ ou do $cos(x)$. No caso de $sin^k(x)$. Ao considerar,

$$\int sin^k(x)dx = \int sin(x) sin^{k-1}(x)dx,$$

e primitivando por partes com $u' = sin(x)$ e $v = sin^{k-1}(x)$, tem-se

$$\begin{aligned}
\int sin^k(x)dx &= -cos(x)sin^{k-1}(x) + (k-1) \int sin^{k-2}(x)cos^2(x)dx \\
&= -cos(x)sin^{k-1}(x) + (k-1) \int sin^{k-2}(x)\Big(1 - sin^2(x)\Big)dx \\
&= -cos(x)sin^{k-1}(x) + (k-1) \int sin^{k-2}(x)dx - (k-1) \int sin^k(x)dx.
\end{aligned}$$

Resolvendo esta equação em relação à variável $\int sin^k(x)dx$, obtém-se a seguinte fórmula de recorrência

$$\int sin^k(x)dx = -\frac{1}{k}cos(x)sin^{k-1}(x) + \frac{k-1}{k}\int sin^{k-2}(x)dx.$$

Quanto a $cos^k(x)$, ao considerar

$$\int cos^k(x)dx = \int cos(x)cos^{k-1}(x)dx,$$

e usando primitivas por partes com $u' = cos(x)$ e $v = cos^{k-1}(x)$, obtém-se, usando o critério anterior, a seguinte fórmula de recorrência

$$\int cos^k(x)dx = \frac{1}{k}sin(x)cos^{k-1}(x) + \frac{k-1}{k}\int cos^{k-2}(x)dx.$$

No caso

$$\int ln^k(x)dx, \quad k \in \mathbb{N},$$

ao usar a primitivação por partes com $u' = 1$ e $v = ln^k(x)$, tem-se

$$\begin{aligned}\int ln^k(x)dx &= xln^k(x) - \int k\frac{1}{x}xln^{k-1}(x)dx \\ &= xln^k(x) - k\int ln^{k-1}(x)dx.\end{aligned}$$

De seguida, vamos considerar as primitiva de $tg^k(x)$ e $cotg^k(x)$ para $k > 1$ natural. No caso da $tg^k(x)$ ao considerar a relação

$$tg^2(x) = sec^2(x) - 1,$$

tem-se

$$\begin{aligned}\int tg^k(x)dx &= \int tg^{k-2}(x)tg^2(x)dx \\ &= \int tg^{k-2}(x)\big(sec^2(x) - 1\big)dx \\ &= \int tg^{k-2}(x)sec^2(x)dx - \int tg^{k-2}(x)dx \\ &= \frac{tg^{k-1}(x)}{k-1} - \int tg^{k-2}(x)dx.\end{aligned}$$

No caso da $cotg^k(x)$ ao considerar a relação

$$cotg^2(x) = cosec^2(x) - 1,$$

tem-se, ao utilizar o critério anterior

$$\int cotg^k(x)dx = -\frac{cotg^{k-1}(x)}{k-1} - \int cotg^{k-2}(x)dx.$$

Para terminar, vamos considerar para m, n inteiros positivos a seguinte primitiva

$$\int sin^m(x)cos^n(x)dx.$$

Esta primitiva pode ser calculada usando um dos três procedimentos dados na Tabela 3.4:

	Procedimento	Identidade
n ímpar	separar um factor $cos(x)$ aplicar a identidade apresentada fazer a substituição $t = sin(x)$	$cos^2(x) = 1 - sin^2(x)$
m ímpar	separar um factor $sin(x)$ aplicar a identidade apresentada fazer a substituição $t = cos(x)$	$sin^2(x) = 1 - cos^2(x)$
n, m par	usar a identidade apresentada para reduzir as potências do $sin(x)$ e $cos(x)$	$cos^2(x) = \frac{1}{2}\big(1 + cos(2x)\big)$ $sin^2(x) = \frac{1}{2}\big(1 - cos(2x)\big)$

Tabela 3.4: Critérios a ter em conta para calcular a primitiva de $\int sin^m(x)cos^n(x)dx$, com m e n inteiros positivos.

3.6 Exercícios para aulas teóricas

1. Considere a seguinte função real de variável real

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

estude a primitiva de f em $\mathbb{R}$.

2. Determine a família das seguintes primitivas imediatas, indicando um intervalo onde seja válido essa primitivação:

$$\int tg(x)dx, \quad \int \frac{arctg(x)}{1+x^2}dx,$$

$$\int \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}}dx, \quad \int \big(e^{3x} + cos(2x)\big)dx.$$

3. Determine o intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e uma função $f : I \to \mathbb{R}$, tal que

$$f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{x}, \quad \text{com} \quad f(1) = 2.$$

4. Utilize o método da primitivação por partes para determinar as seguintes primitivas:

$$\int ln(x)dx, \quad \int xe^x dx, \quad \int x^2 cos(x)dx, \quad \int e^x cos(x)dx.$$

5. Utilize o método da primitivação por substituição para determinar as seguintes primitivas:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx, \quad \int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx,$$

$$\int \frac{ln^4(x)}{x(ln^2(x)+1)}dx, \quad \int \frac{8}{\sqrt{x^2-9}}dx.$$

6. Primitivas de fracções racionais:

$$\int \frac{1}{x^2-4}dx, \quad \int \frac{x^3}{x^2+1}dx,$$

$$\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}dx, \quad \int \frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4}dx.$$

7. Primitivas sem indicação do método:

$$\int \frac{1}{sin(x)cos(x)}dx, \quad \int e^{sin(x)}cos(x)dx,$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx, \quad \int \frac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}dx.$$

3.7 Exercícios para aulas práticas

1. Considere a seguinte função real de variável real

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se} \quad x \geqslant 0 \\ -1 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

estude a primitiva de f em $\mathbb{R}$.

2. Determine a família das seguintes primitivas imediatas, indicando um intervalo onde seja válido essa primitivação:

$$\int \frac{1}{xln(x)}dx, \quad \int sin(3x)dx,$$

$$\int \frac{ln^3(x)}{x}dx, \quad \int \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2+1)^2}}dx.$$

3. Determine o intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e uma função $f: I \to \mathbb{R}$, tal que

$$f''(x) = x + e^x, \;\; \text{com} \;\; f(1) = 1, \; f'(0) = 2.$$

4. Utilize o método da primitivação por partes para determinar as seguintes primitivas:

$$\int arctg(x)dx, \; \int x^2e^xdx, \; \int xsin(x)dx, \; \int sin^2(x)dx.$$

5. Utilize o método da primitivação por substituição para determinar as seguintes primitivas:

$$\int \sqrt{4-x^2}dx, \int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}dx, \int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}dx, \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}dx.$$

6. Primitivas de fracções racionais:

$$\int \frac{x^2}{x-1}dx, \; \int \frac{x}{(x-1)(x+1)^2}dx,$$

$$\int \frac{x^2}{x^2-2x+5}dx, \; \int \frac{x^5}{x^2-1}dx.$$

7. Primitivas sem indicação do método:

$$\int sin(x)cos(x)dx, \int sin^3(x)dx,$$

$$\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}dx, \int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}}dx.$$

3.8 Exercícios para trabalho de casa

1. Considere a seguinte função real de variável real

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \geqslant 0 \\ \\ 0 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

estude a primitiva de f em $\mathbb{R}$.

2. Determine a família das seguintes primitivas imediatas, indicando um intervalo onde seja válido essa primitivação:

$$\int 2^x dx, \quad \int \frac{x}{3x^2+6}dx,$$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)arctg(x)}dx, \quad \int sin^2(x)cos(x)dx.$$

3. Determine a função f, tal que

$$f''(x) = \frac{3}{x^2}, \text{ com } f(e^2) = 6, \; f'(4) = -3/4.$$

4. Utilize o método da primitivação por partes para determinar as seguintes primitivas:

$$\int cos^2(x)dx, \quad \int x^2 sin(x)dx,$$

$$\int x^3\left(x^2+1\right)^m dx, \; (m \neq -2, -1), \; \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

5. Utilize o método da primitivação por substituição para determinar as seguintes primitivas:

$$\int \sqrt{e^x - 1}dx, \quad \int \frac{x^2+3}{\sqrt{9-x^2}}dx,$$

$$\int \frac{cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx, \quad \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx.$$

6. Primitivas de fracções racionais:

$$\int \frac{1}{x^3+1}dx, \quad \int \frac{2x-3}{x^2(x^2+2)}dx,$$

$$\int \frac{x^2+x-2}{3x^3-x^2+3x-1}dx, \quad \int \frac{3x^4+3x^3-5x^2+x-1}{x^2+x-2}dx.$$

7. Primitivas sem indicação do método:

$$\int xsin(2x)dx, \quad \int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx,$$

$$\int sin^2(x)cos^2(x)dx, \quad \int xln^2(x)dx.$$

8. Determine a primitiva da função

$$f(x) = \frac{x+4}{(x-1)^2}$$

cujo gráfico passa pelo ponto $(0,1)$.

9. Determine a função f definida em $]-1,+\infty[$, tal que

$$f'(x) = \frac{2x}{(1+x)(1+x^2)}, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Capítulo 4

Integração

"I have discovered a truly marvelous demonstration of this proposition which this margin is too narrow to contain"

Pierre de Fermat

O *cálculo integral* é um instrumento natural e poderoso para a investigação em várias áreas, tais como a matemática em geral, a física e a mecânica entre outras. Intuitivamente o integral de uma função f, não negativa, definida num intervalo $[a, b]$ pode interpretar-se como sendo a área da parte do plano Oxy limitada pelo gráfico da função f, as rectas verticais $x = a$ e $x = b$, e o eixo Ox, ver Figura 4.1.

As fórmulas para as áreas de figuras básicas, tais como rectângulos, polígonos e círculos datam dos primeiros registos sobre a matemática, i.e. à mais de dois mil anos. A primeira tentativa real, para além do nível elementar no cálculo de áreas, foi feito pelo matemático grego Arquimedes (287-212 a.C.), o qual arquitectou uma técnica engenhosa (*método de exaustão*) para calcular a área de regiões limitadas por vários tipos de curva. As ideias fundamentais deste método são elementares e podem descrever-se do seguinte modo: dada uma região cuja área se pretende determinar, inscrevemos nela uma região poligonal que se aproxime da região dada e cuja área seja conhecida e de cálculo fácil. Em seguida, escolhemos outra região poligonal que dê uma melhor aproximação e continuando este processo tomando linhas poligonais com cada vez maior número de lados, de modo a preencher toda a região à qual se prentende calcular a área, ver por exemplo Figura 4.2.

Depois de Arquimedes, o desenvolvimento do método de exaustão teve que esperar quase 18 séculos até que o uso de símbolos e técnicas algébricas se tornaram

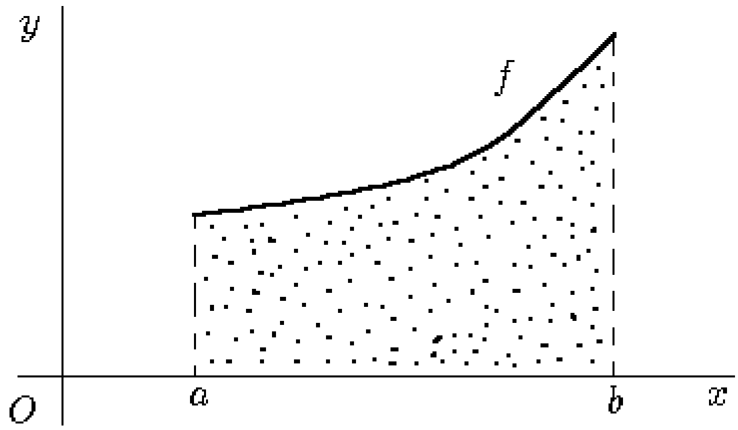

Figura 4.1: Gráfico genérico de uma função f limitada no intervalo $[a, b]$.

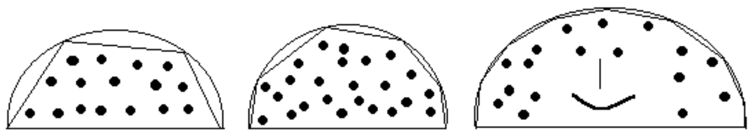

Figura 4.2: O método de exautão aplicado a uma região semicircular, ver Apostal [6].

parte usual da matemática.

Depois desta visita ao passado, coloca-se a questão fucral:

Como calcular a área descrita na Figura 4.1?

Para determinar a área descrita na Figura 4.1, com uma certa aproximação, vamos considerar áreas de rectângulos como indica a Figura 4.3. No caso (i) o cálculo da área virá aproximada por defeito enquanto no caso (ii) virá por excesso. Quanto maior for o número de rectângulos melhor será a exactidão do cálculo.

A área exacta será o limite para que tende a soma das áreas dos rectângulos quando o seu número aumenta indefinidamente, enquanto o comprimento das bases tende para zero. De seguida iremos formular em termos matemáticos as ideias expostas anteriormente.

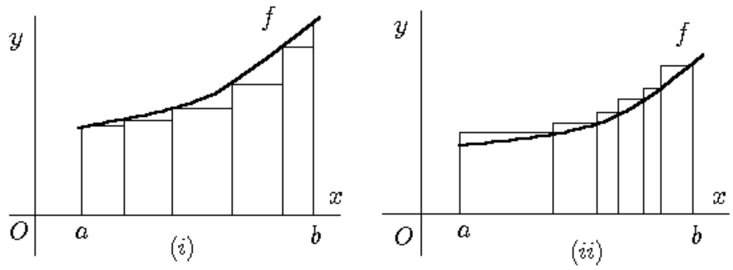

Figura 4.3: Aproximação da área pretendida por áreas de rectângulos: (i) cálculo da área por defeito; (ii) cálculo da área por excesso.

4.1 Integral de Darboux e de Riemann

Antes de iniciarmos o estudo sobre o integral de Darboux e de Riemann, iremos introduzir alguns conceitos essenciais para o nosso estudo:

Definição 4.1 *Seja A um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$.*

1. *Diz-se que um elemento de m de $\mathbb{R}$ é um majorante de A, se é majorante de todos os elementos de A, i.e.*

$$m \text{ é majorante de } A \text{ se } m \geqslant x,\ \forall x \in A.$$

2. *Diz-se que A é majorado em $\mathbb{R}$, se existe em $\mathbb{R}$ pelo menos um majorante de A, i.e.*

$$A \text{ é majorado em } \mathbb{R} \text{ se } \exists\, m \in \mathbb{R} :\ m \geqslant x,\ \forall x \in A.$$

3. *O elemento m é o máximo de A, se m é um majorante de A, que pertence a A, i.e.*

$$m \text{ é máximo de } A \text{ se } m \in A\ \wedge\ m \geqslant x,\ \forall x \in A.$$

4. *O menor dos majorantes de A designa-se por supremo de A.*

Definição 4.2 *Seja A um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$.*

1. *Diz-se que um elemento de m de $\mathbb{R}$ é um minorante de A, se é minorante de todos os elementos de A, i.e.*

$$m \text{ é minorante de } A \text{ se } m \leqslant x,\ \forall x \in A.$$

2. *Diz-se que A é minorado em $\mathbb{R}$, se existe em $\mathbb{R}$ pelo menos um minorante de A, i.e.*
$$A \text{ é minorado em } \mathbb{R} \text{ se } \exists\, m \in \mathbb{R}: \; m \leqslant x, \; \forall x \in A.$$

3. *O elemento m é o mínimo de A, se m é um minorante de A, que pertence a A, i.e.*
$$m \text{ é o mínimo de } A \text{ se } m \in A \; \wedge \; m \leqslant x, \; \forall x \in A.$$

4. *O maior dos minorantes de A designa-se por ínfimo de A.*

Seja $[a, b]$ um intervalo de $\mathbb{R}$. Chamamos *partição de* $[a, b]$ a qualquer conjunto de pontos
$$P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\},$$
com
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$
Com a partição P dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos com amplitudes $\triangle x_i = x_i - x_{i-1}$, com $i = 1, 2, \ldots, n$.

Definição 4.3 *Dadas duas partições P_1 e P_2 do intervalo $[a, b]$, dizemos que P_2 é mais fina que P_1 quando qualquer ponto de P_1 é ponto de P_2.*

Seja f uma função real contínua, limitada e definida no intervalo $[a, b]$. Para cada partição P do intervalo $[a, b]$, ver Figura 4.4, temos: os comprimentos das bases dos rectângulos dadas por

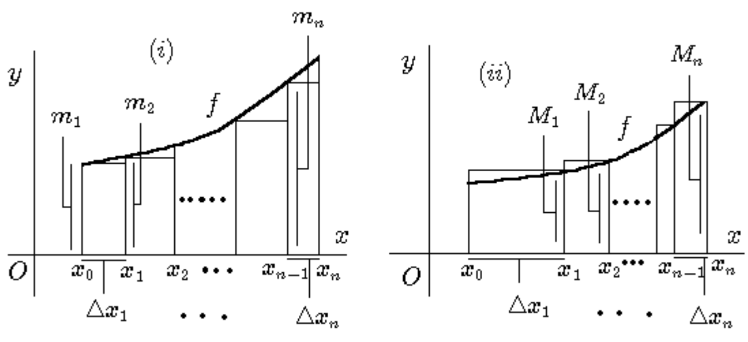

Figura 4.4: Processo de aproximação da área pretendida por áreas de rectângulos: (i) cálculo da área por defeito; (ii) cálculo da área por excesso.

$$\triangle x_1 = x_1 - x_0,\ \triangle x_2 = x_2 - x_1,\ \ldots,\ \triangle x_n = x_n - x_{n-1},$$

e, temos ainda o ínfimo e o supremo da função para cada base dos rectângulos

$$m_1 \text{ o ínfimo e } M_1 \text{ o supremo de } f \text{ no intervalo } [x_0, x_1],$$

$$m_2 \text{ o ínfimo e } M_2 \text{ o supremo de } f \text{ no intervalo } [x_1, x_2],$$

$$\ldots$$

$$m_n \text{ o ínfimo e } M_n \text{ o supremo de } f \text{ no intervalo } [x_{n-1}, x_n],$$

ou seja

$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),\ \ M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),\ i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Definição 4.4 *Ao maior dos comprimentos das bases dos rectângulos* $\triangle x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *chamaremos comprimento da partição, designando-o por* $\mid P \mid$*, definido da seguinte forma*

$$\mid P \mid = \max_i \left\{\triangle x_i\right\}.$$

Chamamos *soma inferior de Darboux da função* f *relativa à partição* P ao número dado por

$$\underline{S}_P(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \triangle x_i,$$

i.e. é a soma das áreas dos rectângulos inferiores ao gráfico da função f, ver (i) em Figura 4.4. E da mesma forma, chamamos *soma superior de Darboux da função* f *relativa à partição* P ao número dado por

$$\overline{S}_P(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \triangle x_i,$$

i.e. é a soma das áreas dos rectângulos superiores ao gráfico da função f, ver (ii) em Figura 4.4.

É imediato verificar (ao cuidado do aluno) que

$$\underline{S}_P(f) \leqslant \overline{S}_P(f)$$

para toda a partição P de $[a, b]$. Assim como as seguintes proposições:

Proposição 4.1 *Sejam P_1 e P_2 partições quaisquer de $[a,b]$, sendo P_2 mais fina que P_1, então tem-se*

$$\underline{S}_{P_1}(f) \leqslant \underline{S}_{P_2}(f), \;\; \overline{S}_{P_1}(f) \geqslant \overline{S}_{P_2}(f),$$

i.e. à medida que passamos para partições mais finas, as somas inferiores crescem e as somas superiores decrescem.

Demonstração: Ver Sarrico [4]. $\pitchfork$

Proposição 4.2 *Seja f uma função definida e limitada no intervalo $[a,b]$, (i.e. $m \leqslant f(x) \leqslant M$, $\forall x \in [a,b]$) e P uma partição qualquer de $[a,b]$, então*

$$m(b-a) \leqslant \underline{S}_P(f) \leqslant \overline{S}_P(f) \leqslant M(b-a).$$

Demonstração: Como exercício proposto aos alunos. Ver bibliografia. $\pitchfork$

Proposição 4.3 *Seja f uma função definida e limitada no intervalo $[a,b]$. Considere duas partições quaisquer P_1 e P_2 de $[a,b]$.*

1. *Mostre graficamente que se P_2 é um refinamento de P_1, então*

$$\underline{S}_{P_1}(f) \leqslant \underline{S}_{P_2}(f) \leqslant \overline{S}_{P_2}(f) \leqslant \overline{S}_{P_1}(f).$$

2. *Demonstre analiticamente a alínea anterior.*

Demonstração: Como exercício proposto aos alunos. Ver bibliografia. $\pitchfork$

Tendo em conta as somas de Darboux, podemos definir o integral de Darboux: define-se *integral inferior de Darboux* de f no intervalo $[a,b]$ e representa-se por

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx$$

como o supremo das somas inferiores relativamente a todas as partições P do intervalo $[a,b]$, i.e.

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_P \underline{S}_P(f).$$

Analogamente, define-se *integral superior de Darboux* de f no intervalo $[a,b]$, por

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_P \overline{S}_P(f),$$

i.e. é o ínfimo das somas superiores para qualquer partição P do intervalo $[a,b]$.

Quando os integrais superior e inferior de Darboux no intervalo $[a,b]$ coincidem, i.e.

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx,$$

a função f diz-se integrável no sentido de Darboux.

Proposição 4.4 *Seja f uma função definida e limitada no intervalo $[a,b]$, e P uma partição qualquer de $[a,b]$, então*

$$\underline{S}_P(f) \leqslant \underline{\int_a^b} f(x)dx \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)dx \leqslant \overline{S}_P(f).$$

Demonstração: Como exercício proposto aos alunos. Ver bibliografia. ⫛

De seguida vamos apresentar as somas de Riemann. Considere-se uma partição P do intervalo $[a,b]$, i.e.

$$P = \left\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\right\}$$

e escolhe-se arbitrariamente um elemento $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i],\ i = 1, 2, \ldots, n$ em cada um dos intervalos da partição. A soma

$$S_P(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i,$$

é designada por soma de Riemann relativa é função f no intervalo $[a,b]$ associada à partição P e à escolha arbitrária de $\xi_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$, nos subintervalos da partição, ver Figura 4.5.

A proposição seguinte relaciona as somas de Darboux com as somas de Riemann.

Proposição 4.5 *Seja f uma função definida e limitada no intervalo $[a,b]$, e P uma partição qualquer de $[a,b]$, então*

$$\underline{S}_P(f) \leqslant S_P(f) \leqslant \overline{S}_P(f).$$

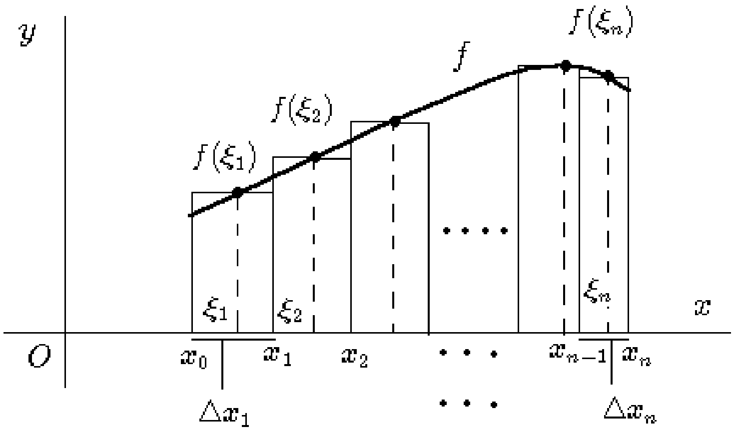

Figura 4.5: Somas de Riemann.

Demonstração: Como exercício proposto aos alunos. Ver bibliografia. ⋔

De seguida vamos definir o integral de Riemann.

Definição 4.5 *Diz-se que uma função* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é integrável à Riemann ou R-integrável, se existe um número real* I *satisfazendo a seguinte condição:*

$$\forall \delta > 0,\ \exists \epsilon > 0,\ \mid P \mid < \epsilon : \mid S_P(f) - I \mid < \delta, \tag{4.1}$$

para toda a partição P *de* $[a, b]$ *e qualquer que seja a escolha dos pontos* $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i],\ i = 1, 2, \ldots, n.$

Exprime-se a condição (4.1) da seguinte forma: existe o limite das somas de Riemann quando o comprimento da partição tende para zero, i.e.

$$\lim_{|P| \to 0} S_P(f) = I.$$

Note-se que, quando $\mid P \mid \to 0$, o número de intervalos em que $[a, b]$ fica decomposto tende para infinito, i.e. $n \to +\infty$. O número I é designado por *integral de Riemann* ou *integral definido* de f em $[a, b]$ e representa-se por

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P| \to 0} S_P(f) = \lim_{n \to +\infty} S_P(f) = I,$$

onde f é a função integranda, x a variável de integração e a, b os extremos de integração do intervalo de integração. O valor do integral depende apenas da função f e do intervalo $[a, b]$, sendo totalmente independente da variável de integração.

Como consequência da exposição anterior, temos alguns resultados importantes:

Teorema 4.1 *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada em $[a, b]$. Então, são equivalentes:*

1. *f é integrável no sentido de Darboux no intervalo $[a, b]$, i.e.*

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

2. *Para todo $\delta > 0$, existe uma partição P de $[a, b]$, tal que*

$$\overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) < \delta. \tag{4.2}$$

3. *Para todo $\delta > 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que a desigualdade (4.2) é verificada para toda a partição P de $[a, b]$ tal que $| P |< \epsilon$.*

4. *f é integrável no sentido de Riemann no intervalo $[a, b]$, e tem-se*

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Demonstração: Ver Figueira [1]. ⋔

Teorema 4.2 *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada em $[a, b]$. Se f é contínua em $[a, b]$ então f é Riemann integrável no intervalo em causa.*

Demonstração: Ver Sarrico [4]. ⋔

Nem só as funções contínuas são integráveis como mostra o teorema seguinte:

Teorema 4.3 *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada em $[a, b]$. Se f é monótona em $[a, b]$ então f é Riemann integrável no intervalo em causa.*

Demonstração: Ver Sarrico [4]. ⋔

Observação 4.1 *Por convenção vamos considerar*

$$\int_a^a f(x)dx = 0,$$

i.e. sempre que os extremos de integração sejam iguais, tem-se que o integral em causa é nulo.

4.2 Algumas propriedades do integral de Riemann

Nesta secção iremos apresentar algumas propriedades importantes do integral de Riemann, as quais irão ser de grande utilidade para o cálculo integral.

Teorema 4.4 *Se uma função f é Riemann integrável em $[a, b]$ e $c \in \mathbb{R}$, então cf é Riemann integrável em $[a, b]$, e tem-se*

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

Demonstração: Tendo em conta o integral de Riemann, temos

$$\begin{aligned}\int_a^b cf(x)dx &= \lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n} cf(\xi_i)\triangle x_i = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} cf(\xi_i)\triangle x_i \\ &= c\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i \\ &= c\int_a^b f(x)dx. \pitchfork\end{aligned}$$

Teorema 4.5 *Como consequência do Teorema 4.2 a função constante $f(x) = k$ é uma função Riemann integrável no intervalo $[a, b]$, com $k \in \mathbb{R}$. Então, tem-se*

$$\int_a^b f(x)dx = k(b - a).$$

Demonstração: Sem perda de generalidade, vamos considerar uma partição de $[a, b]$ com a mesma amplitude intervalo a intervalo, i.e.

$$\triangle x_i = \frac{b-a}{n},\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Então, pelo integral de Riemann, vem

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \int_a^b kdx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} k\triangle x_i \\
&= k\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\triangle x_i \\
&= k\lim_{n\to+\infty}\Big(\underbrace{\frac{b-a}{n}+\frac{b-a}{n}+\ldots+\frac{b-a}{n}}_{n \text{ termos}}\Big) \\
&= k\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{n(b-a)}{n}\Big) \\
&= k(b-a).
\end{aligned}$$

Teorema 4.6 *Sejam f_1, f_2 funções Riemann integráveis em $[a,b]$, então f_1+f_2 é Riemann integrável em $[a,b]$, e tem-se*

$$\int_a^b \big(f_1(x)+f_2(x)\big)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$$

Demonstração: Tendo em conta o integral de Riemann, temos

$$\begin{aligned}
\int_a^b \big(f_1(x)+f_2(x)\big)dx &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\Big(f_1(\xi_i)+f_2(\xi_i)\Big)\triangle x_i \\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\triangle x_i + \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\triangle x_i \\
&= \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.
\end{aligned}$$

Teorema 4.7 (Integração por decomposição) *Sejam $f_1, f_2, \ldots, f_n$ funções Riemann integráveis em $[a,b]$ e $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, então $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_n f_n$ é Riemann integrável em $[a,b]$, e tem-se*

$$\int_a^b \big(\alpha_1 f_1(x)+\ldots+\alpha_n f_n(x)\big)dx = \alpha_1\int_a^b f_1(x)dx + \ldots + \alpha_n\int_a^b f_n(x)dx.$$

Demonstração: Basta aplicar sucessivamente os Teoremas (4.4) e (4.6).

Teorema 4.8 *Seja f uma função Riemann integrável em $[a,b]$ e $c \in]a,b[$, então f é Riemann integrável em $[a,c]$ e em $[c,b]$, e tem-se*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Demonstração: Ver Piskounov [9]. ⫛

Teorema 4.9 *Sejam f_1, f_2 funções Riemann integráveis em $[a,b]$ e $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ para $\forall x \in [a,b]$, então*

$$\int_a^b f_1(x)dx \leqslant \int_a^b f_2(x)dx.$$

Demonstração: Tendo em conta que $-f_2$ é uma função Riemann integrável em $[a,b]$ (ver Teorema 4.4), temos que $f_1 - f_2$ é uma função Riemann integrável no intervalo $[a,b]$ (ver Teorema 4.6). Então,

$$\begin{aligned}
\int_a^b \big(f_1(x) - f_2(x)\big)dx &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^n \big(f_1(\xi_i) - f_2(\xi_i)\big)\triangle x_i \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^n \big(\underbrace{f_1(\xi_i) - f_2(\xi_i)}_{\leqslant 0}\big)\underbrace{\triangle x_i}_{>0} \\
&\leqslant 0,
\end{aligned}$$

i.e.

$$\int_a^b f_1(x)dx \leqslant \int_a^b f_2(x)dx. \text{ ⫛}$$

Teorema 4.10 *Seja f uma função Riemann integrável em $[a,b]$ e $f(x) \geqslant 0$ para $\forall x \in [a,b]$, então*

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant 0.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\triangle x_i \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^n \underbrace{f(\xi_i)}_{\geqslant 0}\underbrace{\triangle x_i}_{>0} \\
&\geqslant 0. \text{ ⫛}
\end{aligned}$$

Teorema 4.11 *Seja f uma função Riemann integrável em $[a, b]$, então $\mid f \mid$ é integrável à Riemann e tem-se*

$$\mid \int_a^b f(x)dx \mid \leqslant \int_a^b \mid f(x) \mid dx.$$

Demonstração: Ao cuidado do aluno como exercício. Ver bibliografia. ⋔

Teorema 4.12 *Seja f uma função Riemann integrável em $[a, b]$, e limitada em $[a, b]$, i.e. $\mid f(x) \mid \leqslant M$, $\forall x \in [a, b]$, então*

$$\mid \int_a^b f(x)dx \mid \leqslant M(b-a).$$

Demonstração: Ao cuidado do aluno como exercício. Ver bibliografia. ⋔

Teorema 4.13 *Se f é um função Riemann integrável e limitada em $[a, b]$, i.e.*

$$m \leqslant f(x) \leqslant M, \ \text{para } \forall x \in [a, b],$$

então, tem-se

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a).$$

Demonstração: Ao cuidado do aluno como exercício. Ver bibliografia. ⋔

Teorema 4.14 *Seja f uma função Riemann integrável em $[a, b]$, então*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Demonstração: Ao cuidado do aluno como exercício. Ver bibliografia. ⋔

Teorema 4.15 *Seja f uma função Riemann integrável em $[a, b]$, então:*

1. *Se f é uma função par, temos*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_{-a}^{-b} f(x)dx.$$

2. *Se f é uma função ímpar, temos*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-a}^{-b} f(x)dx.$$

Demonstração: Ao cuidado do aluno como exercício. Ver bibliografia. ⫛

Observação 4.2 *Uma função f com domínio D_f diz-se uma função par se*

$$f(x) = f(-x) \text{ para } \forall x \in D_f,$$

e da mesma forma diz-se que f é uma função ímpar se

$$f(x) = -f(-x) \text{ para } \forall x \in D_f.$$

Teorema 4.16 *Seja f uma função Riemann integrável em $[a, b]$, então*

$$\int_{-a}^{-b} f(x)dx = -\int_a^b f(-x)dx.$$

Demonstração: Ao cuidado do aluno como exercício. Ver bibliografia. ⫛

Teorema 4.17 (Desigualdade de Schwartz) *Sejam f, g funções Riemann integráveis em $[a, b]$, então*

$$\Big(\int_a^b f(x)g(x)dx\Big)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx.$$

Demonstração: Consultar bibliografia. ⫛

4.3 Teorema fundamantal do cálculo integral e fórmula de Barrow

É a ligação entre os conceitos integração e primitivação que nos permite um notável avanço em termos de cálculo.

Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $a \in I$ uma função Riemann integrável em todo o subintervalo I de $\mathbb{R}$.

Definição 4.6 *Chamamos integral indefinido de f em I à função*

$$F : I \to \mathbb{R},$$

definida da seguinte forma

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad \forall x \in I.$$

Como consequência da definição anterior podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 4.18 (Teorema Fundamental do Cálculo) *Seja f uma função Riemann integrável em $[a, b]$. Então a função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

é contínua em $[a, b]$. Além disso, se f for contínua em $x_0 \in [a, b]$, F é diferenciável em x_0 e tem-se

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Demonstração: Vamos em primeiro lugar demonstrar a continuidade da função F para $\forall x_0 \in [a, b]$, i.e.

$$\forall \delta > 0 \; \exists \epsilon > 0 \;\; | x - x_0 | < \epsilon \Rightarrow | F(x) - F(x_0) | < \delta.$$

Tendo em conta todas as propriedades dadas até ao momento, temos

$$\begin{aligned} | F(x) - F(x_0) | &= \; | \int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt \; | \\ &= \; | \int_a^x f(t)dt - \Big(\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x_0} f(t)dt \Big) \; | \\ &= \; | \int_x^{x_0} f(t)dt \; | \\ &\leqslant \; M \mid x - x_0 \mid \end{aligned}$$

pois f é limitada no intervalo $[a, b]$, i.e. $| f(x) | \leqslant M$, para $\forall x \in [a, b]$. Tendo em conta que $| x - x_0 | < \epsilon$, temos

$$| F(x) - F(x_0) | \leqslant M \mid x - x_0 \mid < M\epsilon.$$

Tomando $\delta = M\epsilon$, temos que existe $\epsilon = \frac{\delta}{M} > 0$, e assim fica provado a continuidade de F em $[a, b]$. Para consultar o resto da demonstração, ver Sarrico [4]. $\pitchfork$

Como consequência do teorema anterior, temos:

(i) Toda a função f contínua em $[a,b]$ é primitivável em $[a,b]$, e uma primitiva de f é dada por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

devido ao facto de $F'(x) = f(x)$ para $\forall x \in [a,b]$.

(ii) Um método prático para o cálculo de integrais de funções contínuas, i.e.

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

(iii) A possibilidade de derivar rapidamente funções do tipo

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

onde f é contínua, da forma $F'(x) = f(x)$.

(iv) Como generalização de (iii), para

$$F(x) = \int_{P(x)}^{M(x)} f(t)dt,$$

temos

$$F'(x) = f(M(x))M'(x) - f(P(x))P'(x),$$

onde $M(x), P(x)$ são funções de x.

A condição (ii) pode-se formular da seguinte forma:

Teorema 4.19 (Fórmula de Barrow) *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função Riemann integrável e primitivável em $[a,b]$. Representando por F uma primitiva de f, tem-se*

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Demonstração: Consultar Figueira [1]. ⫛

Observação 4.3 *O símbolo $\Big[F(x)\Big]_a^b$ é conhecido por símbolo de Barrow, o qual tem o seguinte significado*

$$\Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

4.4 Integração por partes e substituição

Nesta secção vamos apresentar resultados úteis análogos aos teoremas da primitivação por partes e por substituição.

Teorema 4.20 (Integração por partes) *Se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são funções cujas derivadas são Riemann integráveis em $[a, b]$, então*

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g'(x)dx &= \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx.\end{aligned}$$

Demonstração: Ver Sarrico [4]. ⋔

Teorema 4.21 (Integração por substituição) *Seja uma das hipóteses:*

H1. *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e $\phi : [c, d] \to [a, b]$ diferenciável com ϕ' Riemann integrável em $[c, d]$;*

H2. *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann integrável e $\phi : [c, d] \to [a, b]$ monótona com ϕ' Riemann integrável em $[c, d]$;*

então para $a = \phi(c)$ e $b = \phi(d)$, tem-se

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

Demonstração: Consultar Figueira [1]. ⋔

4.5 Teoremas da média do cálculo integral

Nesta secção vamos desenvolver algumas propriedades básicas dos integrais definidos, conhecidas como teoremas do valor médio para integrais.

Teorema 4.22 (Primeiro Teorema da Média) *Seja a seguinte função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, existe $c \in [a, b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\big(b - a\big).$$

Demonstração: Para
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$
o Teorema fundamental do cálculo garante as condições de aplicabilidade do Teorema de Lagrange à função F no intervalo $[a, b]$. Logo, existe $c \in [a, b]$ tal que
$$F(b) - F(a) = (b - a)F'(c) = (b - a)f(c).$$
Pelo facto de $F(a) = 0$, da igualdade anterior temos
$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\big(b - a\big).$$

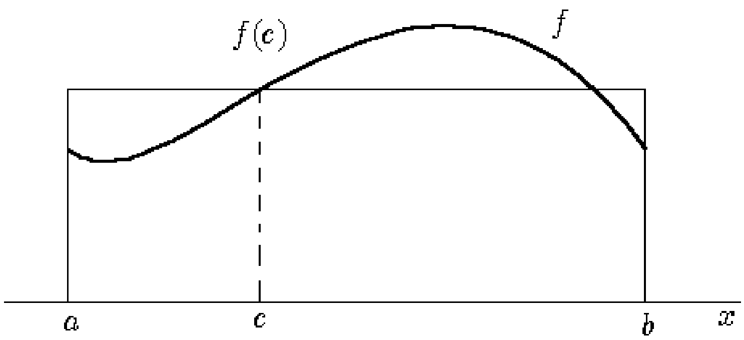

Figura 4.6: Interpretação geométrica do primeiro teorema da média.

O primeiro Teorema da Média diz-nos que a área da região do plano compreendida entre o gráfico da função f, o eixo das abcissas e as rectas verticais $x = a$ e $x = b$ é igual à área de um rectângulo com altura $f(c)$ e largura $b - a$, onde $c \in]a, b[$, ver Figura 4.6.

Teorema 4.23 (Segundo Teorema da Média) *Sejam as funções $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ com f uma função contínua. Se g é Riemann integrável e não muda de sinal em $[a, b]$, então existe $c \in]a, b[$ tal que*
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

Demonstração: Consultar Sarrico [4].

4.6 Exercícios para aulas teóricas

1. Considere a função f definida e limitada em $[a, b]$. Mostre que para qualquer partição P de $[a, b]$ se tem
$$m(b-a) \leqslant \underline{S}_P(f) \leqslant \overline{S}_P(f) \leqslant M(b-a)$$
onde m e M são respectivamente o ínfimo e o supremo da função f em $[a, b]$.

2. Calcule as somas de Darboux da seguinte função $f(x) = x$ em $[2, 4]$ com a decomposição $P = \{2, 2.5, 3, 3.5, 4\}$.

3. Verifique que a função
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ \\ 0 & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$
não é integrável à Darboux no intervalo $[1, 3]$.

4. Calcule a soma de Riemann da seguinte função $f(x) = x^3$ em $[1, 2]$ com a decomposição $P = \{1, 1.1, 1.3, 1.6, 1.9, 2\}$.

5. Determine utilizando a definição de integral de Riemann os seguintes integrais
$$\int_0^b e^x dx, \quad \int_0^b k dx.$$

6. Determine o valor dos seguintes integrais definidos:
$$\int_{-1}^3 (x + e^x) dx, \quad \int_1^2 ln(x) dx, \quad \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx, \quad \int_2^3 \frac{1}{x^3 - x} dx.$$

7. Determine o domínio, intervalos de monotonia e extremos locais da função:
$$F(x) = \int_1^x ln(t) dt.$$

8. Considere a função $F(x) = \displaystyle\int_0^x t sin(t) dt$, determine usando a regra de Cauchy o seguinte limite
$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{x^2}.$$

9. Indique o valor médio da função $h(x) = 2 + 3cos(x)$ no intervalo $[-\pi, \pi]$.

10. Utilizando a desigualdade de Schwarz, determine um majorante do seguinte integral
$$\int_1^2 \sqrt{x+2}dx.$$

4.7 Exercícios para aulas práticas

1. Se f é um função Riemann integrável e limitada em $[a, b]$, i.e.
$$m \leqslant f(x) \leqslant M, \text{ para } \forall x \in [a, b],$$
então, tem-se
$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a).$$

2. Calcule as somas de Darboux da seguinte função $f(x) = x^2$ em $[0, 1]$ com a decomposição $P = \{0, 0.1, 0.3, 0.6, 0.9, 1\}$.

3. Seja a função $f(x) = k$, com $k \in \mathbb{R}$ definida no intervalo $[a, b]$. Considerndo P uma partição qualquer em $[a, b]$, mostre que f é integrável no sentido de Darboux.

4. Calcule a soma de Riemann da seguinte função $f(x) = x - 1$ em $[2, 3]$ com a decomposição $P = \{2, 2.3, 2.6, 2.9, 3\}$.

5. Determine utilizando a definição de integral de Riemann os seguintes integrais
$$\int_a^b xdx, \quad \int_0^1 x^2dx,$$
no segundo integral utilizar o facto de
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

6. Demonstre a seguinte desigualdade
$$\left| \int_{-1}^2 f(x)dx \right| \leqslant 4,$$

sendo

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \geqslant 0 \\ \\ -2 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

7. Determine o valor dos seguintes integrais definidos:

$$\int_2^4 e^{2x} dx, \ \int_0^1 \frac{arctg^2(x)}{x^2+1} dx, \ \int_0^\pi x^2 sin(x) dx,$$

$$\int_1^2 \frac{x^4}{x+1} dx, \ \int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx.$$

8. Determine o domínio, intervalos de monotonia e extremos locais da função:

$$F(x) = \int_2^{e^x} \frac{1}{ln(t)} dt.$$

9. Considere a função $F(x) = \displaystyle\int_1^{x-1} \frac{t}{t^2+1} dt$, determine usando a regra de Cauchy o seguinte limite

$$\lim_{x \to 2} \frac{F(x)}{x-2}.$$

10. Determine as dimensões de um rectângulo com área idêntica à representada na Figura 4.7 (usar teorema do valor médio):

4.8 Exercícios para trabalho de casa

1. Seja f uma função definida e limitada no intervalo $[a, b]$. Considere duas partições quaisquer P_1 e P_2 de $[a, b]$.

   (i) Mostre graficamente que se P_2 é um refinamento de P_1, então

   $$\underline{S}_{P_1}(f) \leqslant \underline{S}_{P_2}(f) \leqslant \overline{S}_{P_2}(f) \leqslant \overline{S}_{P_1}(f).$$

   (ii) Demonstre analiticamente a alínea anterior.

2. Calcule as somas de Darboux da seguinte função $f(x) = -x + 1$ em $[0, 1]$ com a decomposição $P = \{0, 0.1, 0.3, 0.5, 0.8, 1\}$.

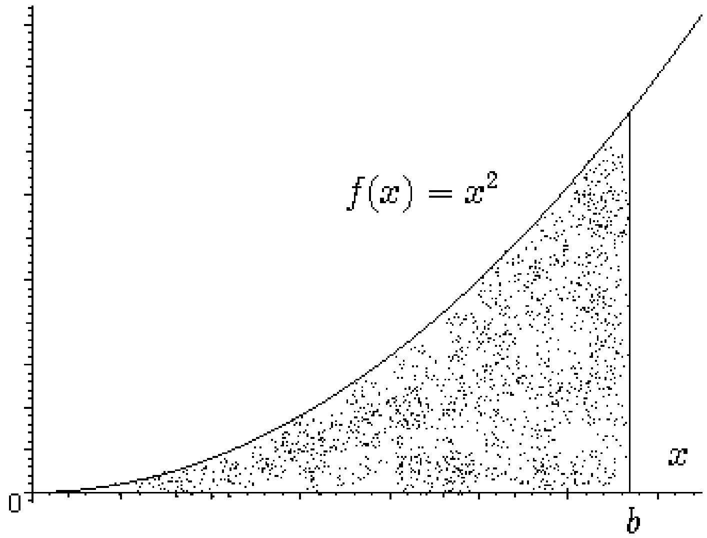

Figura 4.7: Gráfico da função $f(x) = x^2$ no intervalo $[0, b]$.

3. Calcule a soma de Riemann da seguinte função $f(x) = sin(x)$ em $[0, 2\pi]$ com a decomposição $P = \left\{n\frac{\pi}{4}; n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\right\}$.

4. Verifique utilizando a definição de integral de Riemann o seguinte resultado

$$\int_a^b kxdx = \frac{k}{2}(b^2 - a^2).$$

5. Demonstre a seguinte desigualdade

$$\mid \int_{\pi/6}^{\pi/3} cos(x)dx \mid \leqslant \frac{\pi}{6}.$$

6. Determine o valor dos seguintes integrais definidos:

$$\int_0^1 e^x cos(x)dx,\ \int_1^e \frac{2}{x(x+1)^2}dx,\ \int_0^\pi x^2 e^x dx,$$

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx,\ \int_0^{\pi/2} cos^2(x)dx,\ \int_1^2 \frac{ln(x)}{x(1+ln(x))}dx.$$

7. Determine o domínio, intervalos de monotonia e extremos locais das funções:

$$F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt, \quad G(x) = \int_2^{x} \big(t^2 - t - 2\big) dt.$$

8. Considere a função $F(x) = x \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$, determine usando a regra de Cauchy o seguinte limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{3 - 3e^{-x^2}}.$$

9. Sabendo que o valor médio da função f no intervalo $[2, 5]$ é 20, determine

$$\int_2^5 f(x) dx.$$

10. Determine, sem calcular o valor do integral, um majorante e um minorante para

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{x^2 + 2} dx.$$

Capítulo 5

Aplicações do Cálculo Integral

"Mathematicians have tried in vain to this day to discover some order in the sequence of prime numbers, and we have reason to believe that it is a mystery into which the human mind will never penetrate"

Leonhard Euler

De seguida vamos estudar algumas aplicações do cálculo integral: cálculo de áreas planas, cálculo de comprimento de uma linha, cálculo de volumes de sólidos de revolução, e por fim o cálculo de áreas de uma superfície de revolução.

5.1 Cálculo de áreas planas

Como vimos no capítulo anterior a área representada pela Figura 5.1, é dada pelo seguinte integral definido:

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

Enquanto, que a área representada pela Figura 5.2 é dada pelo seguinte integral definido

$$A = -\int_a^b f(x)dx,$$

visto que neste caso $\int_a^b f(x)dx$ é negativo (pois f é negativa no intervalo $[a, b]$) e o valor da área é como se sabe um valor positivo.

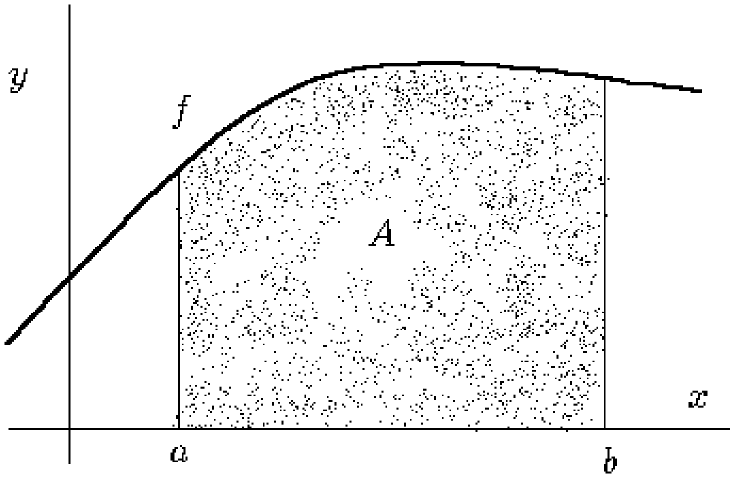

Figura 5.1: Cálculo de áreas planas - situação I.

Como consequência das duas situações anteriores, a área representada pela Figura 5.3 é dada pelo seguinte integral definido

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx.$$

No entanto, a área representada pela Figura 5.4 é dada pelo seguinte integral definido

$$A = \int_a^b \Big(f(x) - g(x)\Big)dx,$$

visto que $f(x) \geqslant g(x)$ para $\forall x \in [a, b]$.

A área representada pela Figura 5.5 é dada pelo seguinte integral definido

$$A = \int_a^b \Big(f(x) - g(x)\Big)dx + \int_b^c \Big(g(x) - f(x)\Big)dx,$$

visto que $f(x) \geqslant g(x)$ para $\forall x \in [a, b]$, e por outro lado $f(x) \leqslant g(x)$ para $\forall x \in [b, c]$.

Para terminar, a área representada pela Figura 5.6 é dada pelo seguinte integral definido

$$A = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx.$$

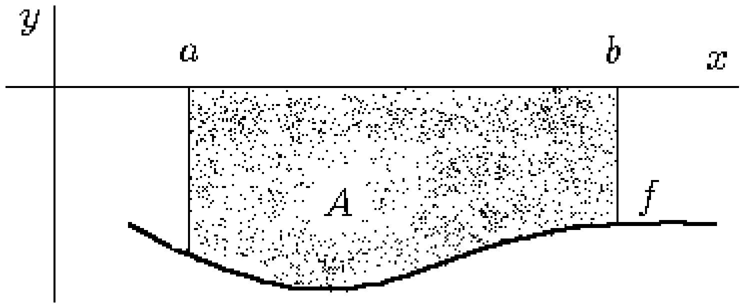

Figura 5.2: Cálculo de áreas planas - situação II.

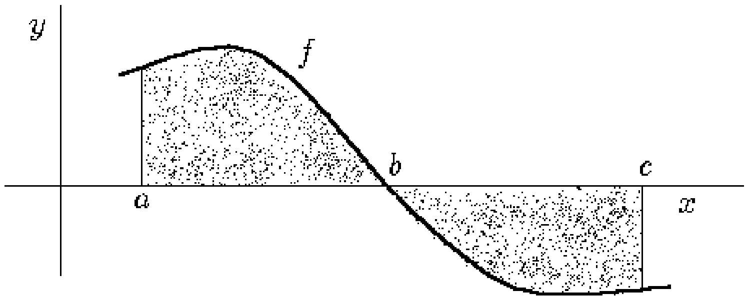

Figura 5.3: Cálculo de áreas planas - situação III.

Observação 5.1 *Para calcular uma determinada área num intervalo é fundamental representar de uma forma precisa e clara o gráfico da função (ou funções) em estudo. Identificar os extremos de integração e verificar se existem pontos de intersecção entre linhas.*

5.2 Cálculo de comprimento de uma linha

A ideia básica para definir o comprimento da linha (curva), ver Figura 5.7, é dividir a linha em pequenos segmentos com medida L_k. Ao fazer a soma de todos estes L_k temos o valor aproximado do comprimento da linha. Para implementar esta ideia, vamos dividir o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos pela partição

$$P = \Big\{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, b = x_n\Big\}.$$

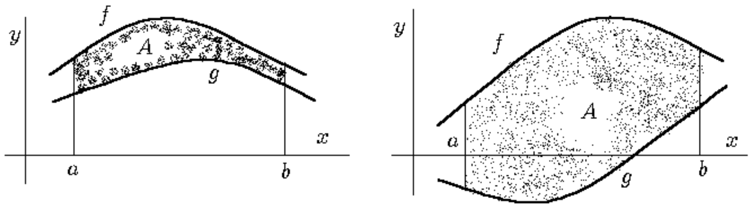

Figura 5.4: Cálculo de áreas planas - situação IV.

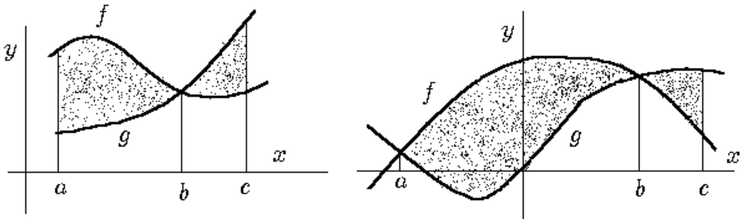

Figura 5.5: Cálculo de áreas planas - situação V.

Sejam $M_0 = f(x_0), M_1 = f(x_1), \ldots, M_n = f(x_n)$ pontos sobre a curva ligados por segmentos de recta. Estes segmentos de recta formam uma linha poligonal, a qual pode ser entendida como uma aproximação da curva f. Conforme sugerido pela Figura 5.8 (a qual é uma secção do gráfico da Figura 5.7) o comprimento L_k do k-ésimo segmento de recta da linha poligonal é dada por (usando o fantástico Teorema de Pitágoras)

$$\begin{aligned} L_k &= \sqrt{(\triangle x_k)^2 + (\triangle y_k)^2} \\ &= \sqrt{(\triangle x_k)^2 + \left[f(x_k) - f(x_{k-1})\right]^2}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Assim, ao somar todos os comprimentos L_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, obtemos a seguinte aproximação

$$L \approx \sum_{i=1}^{n} L_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\triangle x_i)^2 + \left[f(x_i) - f(x_{i-1})\right]^2}. \tag{5.2}$$

Pelo Teorema do Valor Médio de Lagrange, existe um ponto $\xi_i \in]x_{i-1}, x_i[$, tal que

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i),$$

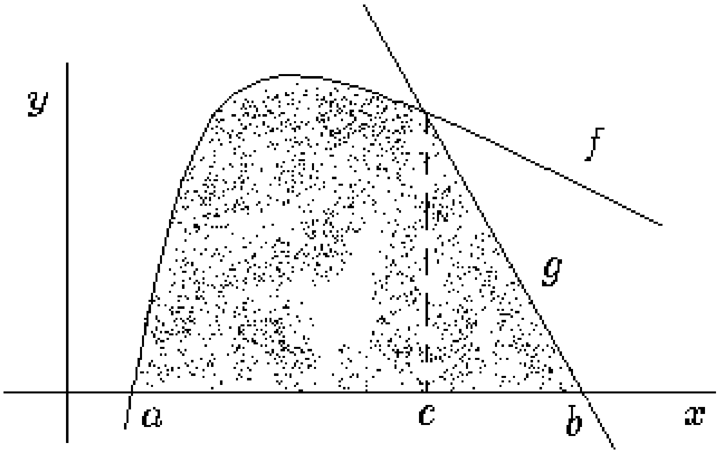

Figura 5.6: Cálculo de áreas planas - situação VI.

i.e.

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f'(\xi_i)\triangle x_i.$$

E, portanto, podemos reescrever (5.2) como

$$L \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left[f'(\xi_i)\right]^2} \triangle x_i. \tag{5.3}$$

Ao considerar em (5.3) o comprimento da partição a tender para zero, ou seja $\mid P \mid \to 0$, i.e. $n \to +\infty$, obtém-se o seguinte integral de Riemann

$$L = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left[f'(\xi_i)\right]^2} \triangle x_i = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2} dx,$$

i.e.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2} dx, \tag{5.4}$$

o qual define o comprimento da linha f no intervalo $[a, b]$.

Observação 5.2 *O comprimento de uma linha quando a função em causa é dada pelas equações paramétricas:*

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [a, b],$$

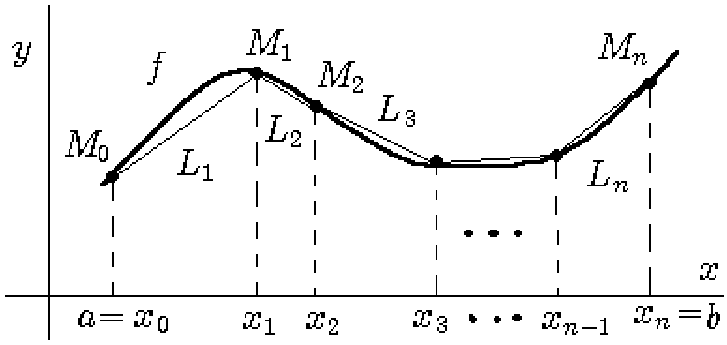

Figura 5.7: Cálculo de comprimento de uma linha genérica.

em que as funções φ e ψ são contínuas e com derivadas contínuas em $[a, b]$, *é dado por*

$$L = \int_a^b \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2} dt. \tag{5.5}$$

Tendo em conta o resultado (5.4) *a demonstração de* (5.5) *é imediata.*

5.3 Cálculo de volumes de sólidos de revolução

Um sólido de revolução é um sólido gerado pela rotação de uma região plana em torno de uma recta, a qual se designa por *eixo de revolução*, ver Figura 5.9.

Seja o trapezóide genérico representado em (i) na Figura 5.10, que ao rodar em torno do seu eixo de revolução (neste caso coincide com o eixo das abcissas) no intervalo $[a, b]$ gera um sólido de revolução, ver (ii) em Figura 5.10.

Considerando a k-ésima secção de uma partição

$$P = \left\{a = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\right\},$$

o trapezóide com base de comprimento $\triangle x_k$ será aproximadamente um rectângulo quando $\triangle x_k \to 0$, que ao rodar em torno do seu eixo de revolução gera um cilindro de raio $f(\xi_k)$ e altura $\triangle x_k$ para qualquer elemento arbitrário $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Então, tem-se que o volume do cilindro da k-ésima secção é dado por

$$\pi\left[f(\xi_k)\right]^2 \triangle x_k.$$

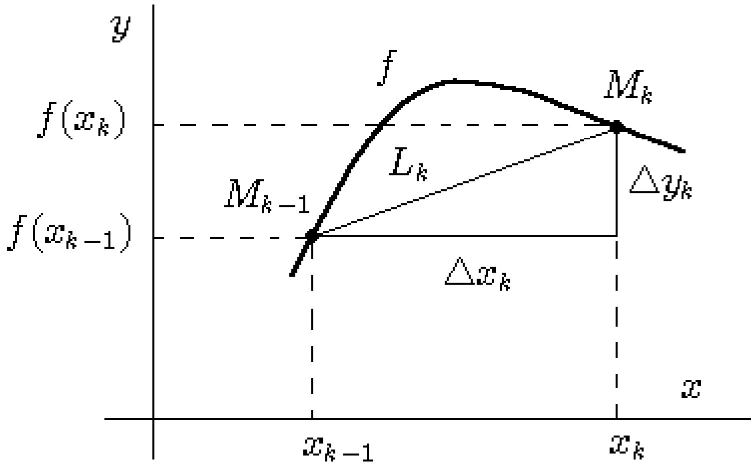

Figura 5.8: Secção k-ésima da partição.

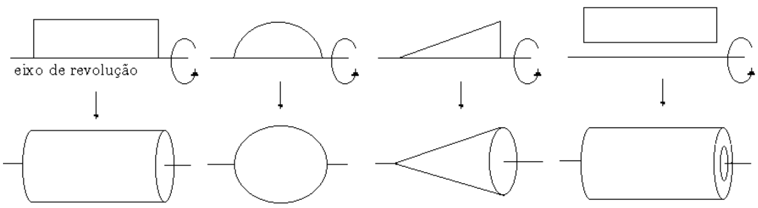

Figura 5.9: Alguns sólidos de revolução.

Ao fazer a soma dos volumes dos cilindros para todas as secções da partição, temos

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \pi \Big[f(\xi_i)\Big]^2 \triangle x_i. \tag{5.6}$$

Ao considerar em (5.6) o comprimento da partição a tender para zero, ou seja $|P| \to 0$, i.e. $n \to +\infty$, obtém-se o seguinte integral de Riemann

$$V = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi \Big[f(\xi_i)\Big]^2 \triangle x_i = \int_a^b \pi \Big[f(x)\Big]^2 dx,$$

ou seja,

$$V = \int_a^b \pi f^2(x) dx.$$

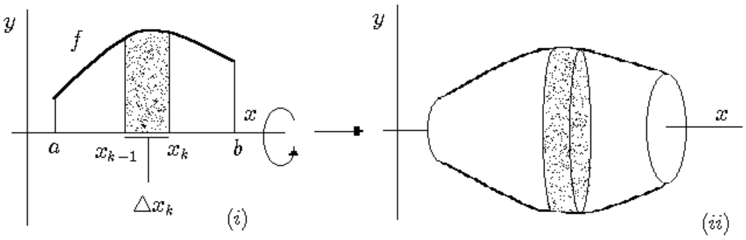

Figura 5.10: Secção k-ésima da partição.

A expressão anterior define o volume de um sólido de revolução gerado pelo gráfico da função f no intervalo $[a,b]$ em que o eixo de revolução é o eixo das abcissas.

Observação 5.3 *Se a rotação, em vez de ser em torno do eixo das abcissas, for efectuada em torno de um eixo de equação $y = k$, tem-se*

$$V = \int_a^b \pi \Big[f(x) - k\Big]^2 dx.$$

Na situação em que o sólido de revolução é gerado pelos gráficos das funções f e g no intervalo $[a,b]$ com eixo de revolução o eixo das abcissas, ver Figura 5.11, tem-se que o volume é dado por

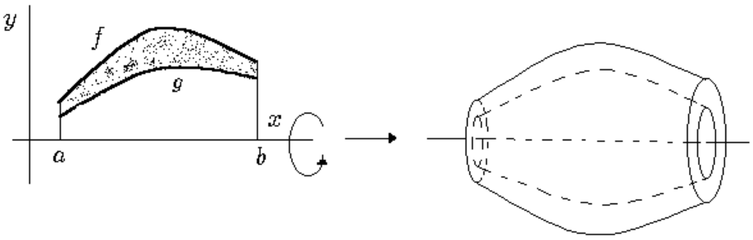

Figura 5.11: Sólido de revolução gerado pelos gráficos das funções f e g no intervalo $[a,b]$ em que o eixo de revolução coincide com o eixo das abcissas.

$$\int_a^b \pi\Big(f^2(x) - g^2(x)\Big)dx,$$

onde $f(x) \geqslant g(x)$, para $\forall x \in [a,b]$.

5.4 Cálculo de áreas de uma superfície de revolução

Dada uma função f definida num intervalo $[a, b]$ e considerando uma partição P em $[a, b]$, ver (i) em Figura 5.12, tem-se que os pontos $M_0 = f(x_0), M_1 = f(x_1), \ldots, M_n = f(x_n)$ sobre a curva ligados por segmentos de recta formam uma poligonal. Quando essa linha poligonal gira em torno do eixo de revolução, obtemos uma superfície composta em n partes, cada uma delas sendo o tronco de um cone circular, ver (ii) em Figura 5.12. A área lateral de cada k-ésima secção de tronco pode ser obtida

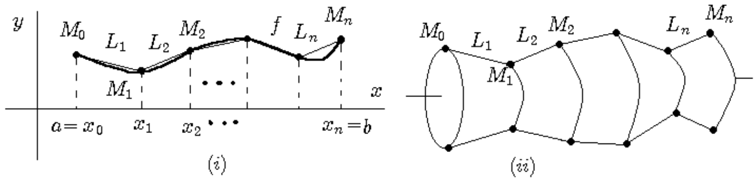

Figura 5.12: Área de uma superfície de revolução.

pela fórmula

$$S_k = \pi(\alpha_k + \beta_k)h_k,$$

onde h_k é a altura inclinada e α_k, β_k os raios das bases do tronco da k-ésima secção.

A k-ésima secção de tronco tem raios $f(x_{k-1})$, $f(x_k)$ e altura $\triangle x_k$. Sendo a sua altura inclinada dada pelo comprimento (5.1), i.e.

$$L_k = \sqrt{\big(\triangle x_k\big)^2 + \big[f(x_k) - f(x_{k-1})\big]^2}.$$

Como consequência, a área lateral S_k é dada por

$$S_k = \pi\Big(f(x_k) + f(x_{k-1})\Big)\sqrt{\big(\triangle x_k\big)^2 + \big[f(x_k) - f(x_{k-1})\big]^2},$$

e assim a aproximação da área S da superfície de revolução, vem

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} \pi\Big(f(x_i) + f(x_{i-1})\Big)\sqrt{\big(\triangle x_i\big)^2 + \big[f(x_i) - f(x_{i-1})\big]^2}. \tag{5.7}$$

Pelo Teorema do Valor Médio de Lagrange, existe um ponto $\xi_i \in]x_{i-1}, x_i[$, tal que

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i),$$

i.e.

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f'(\xi_i)\triangle x_i.$$

E, assim, a condição (5.7), vem

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} \pi\Big(f(x_i) + f(x_{i-1})\Big)\sqrt{1 + \left[f'(\xi_i)\right]^2}\triangle x_i. \tag{5.8}$$

Para considerar a expressão (5.8) como uma soma de Riemann, temos ainda que aplicar o seguinte teorema:

Teorema 5.1 *Seja f uma função contínua num intervalo $[a,b]$ e c um número qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$, inclusive, então há pelo menos um número x no intervalo $[a,b]$ tal que $f(x) = c$.*

Demonstração: Consultar Anton [2]. ⫛

Aplicando o Teorema 5.1, temos que o valor médio dos números $f(x_{i-1})$ e $f(x_i)$ está entre estes dois números, ou seja, existe um ponto $\varpi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$\frac{1}{2}\Big[f(x_{i-1}) + f(x_i)\Big] = f(\varpi_i).$$

Assim, (5.8) pode ser expresso como

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(\varpi_i)\sqrt{1 + \left[f'(\xi_i)\right]^2}\triangle x_i. \tag{5.9}$$

Embora a expressão (5.9) esteja próxima de uma soma de Riemann, ela não é uma verdadeira soma de Riemann, pois envolve duas variáveis arbitrárias ξ_i e ϖ_i e não só uma delas. Num *curso avançado sobre Cálculo Diferencial* prova-se que esse facto não tem nenhum efeito no cálculo do limite, devido à continuidade da função f no intervalo em causa. Deste modo, no cálculo do limite quando $|P| \to 0$ podemos supor que ξ_i e ϖ_i são o mesmo, e assim temos

$$\begin{aligned} S &= \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(\varpi_i)\sqrt{1 + \left[f'(\xi_i)\right]^2}\triangle x_i \\ &= 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \Big[f'(x)\Big]^2}dx, \end{aligned}$$

i.e.

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \Big[f'(x)\Big]^2}dx.$$

A expressão anterior define a área de uma superfície de revolução gerado pelo gráfico da função f, em torno do eixo das abcissas, no intervalo $[a,b]$.

5.5 Exercícios para aulas teóricas

1. Determine a área limitada pela função $f(x) = sin(x)$ para $\forall x \in [0, \pi]$ e o eixo das abcissas (represente graficamente a função em causa).

2. Determine a área dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

(i) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \ x \leqslant 2,\ y \geqslant -5x + 5,\ y \leqslant ln(x)\right\}$.

(ii) $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \ y \geqslant x^2 - 2x + 4,\ y \leqslant 7\right\}$.

(iii) $C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \ x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$.

3. Determine a área limitada pelas linhas:

(i) $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$.

(ii) $y = \dfrac{1}{x},\ y = 0,\ x = a$ e $x = 2a$ com $a > 0$.

4. Determine o comprimentos das seguintes linhas:

(i) $x^2 + y^2 = a^2$, com $a > 0$.

(ii) $x = acos(t),\ \ y = asin(t)$, com $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

5. Calcule os seguintes volumes dos sólidos de revolução:

(i) Obtenha a fórmula para o volume de uma esfera de raio r. A esfera é gerada rodando o semicirculo superior de $x^2 + y^2 = r^2$ em torno do eixo das abcissas. Represente graficamente o processo de gerar o sólido.

(ii) Determine o volume da região entre os gráficos das equações $f(x) = x^2 + 1/2$ e $g(x) = x$ no intervalo $[0, 2]$ em que o eixo das abcissas é o eixo de revolução. Represente graficamente o processo de gerar o sólido.

(iii) Determine o volume da região entre os gráficos das equações $f(x) = x^2$ e $g(x) = x$ para $x = 0$ e $x = 1$, em que o eixo das ordenadas é o eixo de revolução. Represente graficamente o processo de gerar o sólido.

6. Calcule as seguintes áreas de superfícies de revolução:

(i) Calcule a área da superfície de um cone de revolução gerado pela equação $f(x) = ax,\ a > 0$, no intervalo [0,a], em que o eixo das abcissas é o eixo de revolução. Represente graficamente o processo de gerar o sólido.

(ii) Calcule a área da superfície de um sólido de revolução gerado pela equação $f(x) = x^3$, no intervalo [0,1], em que o eixo das abcissas é o eixo de revolução. Represente graficamente o processo de gerar o sólido.

(iii) Calcule a área da superfície de um sólido de revolução gerado pela equação $f(x) = x^2$, para $x = 1$ e $x = 2$, em que o eixo das ordenadas é o eixo de revolução. Represente graficamente o processo de gerar o sólido.

5.6 Exercícios para aulas práticas

1. Determine a área limitada pela função $f(x) = ln(x)$ para $\forall x \in [1/2, 2]$ e o eixo das abcissas (represente graficamente a função em causa).

2. Determine a área dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

(i) $A = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \ y \leqslant x,\ y \geqslant x^2 - 2x\Big\}$.

(ii) $B = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \ y \leqslant -x^2,\ y \geqslant x^2 - 4\Big\}$.

(iii) $C = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \ y \leqslant e^x,\ y \leqslant -x + 1,\ x \geqslant -1,\ y \geqslant 0\Big\}$.

3. Determine a área limitada pelas linhas:

(i) $x = y^2 - 2y$ e $y = x$.

(ii) $y =\mid x \mid$ e $y = 1$.

4. Determine o comprimentos das seguintes linhas:

(i) $y = \sqrt{x^3}$, com $1 \leqslant x \leqslant 2$.

(ii) $x = (1 + t)^2,\ \ y = (1 + t)^3$, com $0 \leqslant t \leqslant 1$.

(iii) $y = ln(\dfrac{e^x + 1}{e^x - 1})$, com $1 \leqslant x \leqslant 2$.

5. Calcule os seguintes volumes dos sólidos de revolução:

(i) Determine o volume da região entre os gráficos das equações $f(x) = x$ e $g(x) = -x^2 + 2$ no intervalo $[0, 1]$ em que o eixo das abcissas é o eixo de revolução. Represente graficamente o processo de gerar o sólido.

(ii) Determine o volume da região gerada pela equação

$$f(x) = \sqrt{-x + 3}$$

no intervalo $[-1, 3]$ em que o eixo das abcissas é o eixo de revolução. Represente graficamente o processo de gerar o sólido.

(iii) Determine o volume da região gerada pela equação $f(x) = x + 1$ no intervalo $[0, 3]$ em duas situações: na primeira o eixo de revolução é o eixo das abcissas; e na segunda o eixo de revolução é a equação $y = 1$. Represente graficamente o processo de gerar o sólido.

(iv) Determine o volume da região gerada pela equação $f(x) = 3 - 2x, \;\; y = 2, \;\; y = 0, \;\; x = 0$ em que o eixo de revolução é o eixo das ordenadas. Represente graficamente o processo de gerar o sólido.

6. Calcule as seguintes áreas de superfícies de revolução:

(i) Calcule a área da superfície de um sólido de revolução gerado pela equação $f(x) = e^x$, no intervalo [0,1], em que o eixo das abcissas é o eixo de revolução. Represente graficamente o processo de gerar o sólido.

(ii) Calcule a área da superfície de um sólido de revolução gerado pelas equações $f(x) = -x^2 + 2x$ e $g(x) = x^2$, no intervalo [0,1], em que o eixo das abcissas é o eixo de revolução. Represente graficamente o processo de gerar o sólido.

(iii) Calcule a área da superfície de um sólido de revolução gerado pela equação $f(x) = x^3, \; y = 1, \; x = 0$, em que o eixo das ordenadas é o eixo de revolução. Represente graficamente o processo de gerar o sólido.

5.7 Exercícios para trabalho de casa

1. Determine a área limitada pela função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ para $\forall x \in [1, e]$ e o eixo das abcissas (represente graficamente a função em causa).

2. Determine a área dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

(i) $A = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\;\; x \leqslant y \leqslant -x^2+2\Big\}.$

(ii) $B = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\;\; y \leqslant ln(x),\; y \geqslant x^2-3x+2,\; x \leqslant 2\Big\}.$

(iii) $C = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\;\; \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1\Big\}.$

3. Determine a área limitada pelas linhas:

(i) $x^2+y^2=1$ e $y=-x+1$.

(ii) $y=x^2-4$ e $y=-x^2+4$.

4. Tendo em conta a seguinte configuração gráfica represente o conjunto da área assim como o seu valor

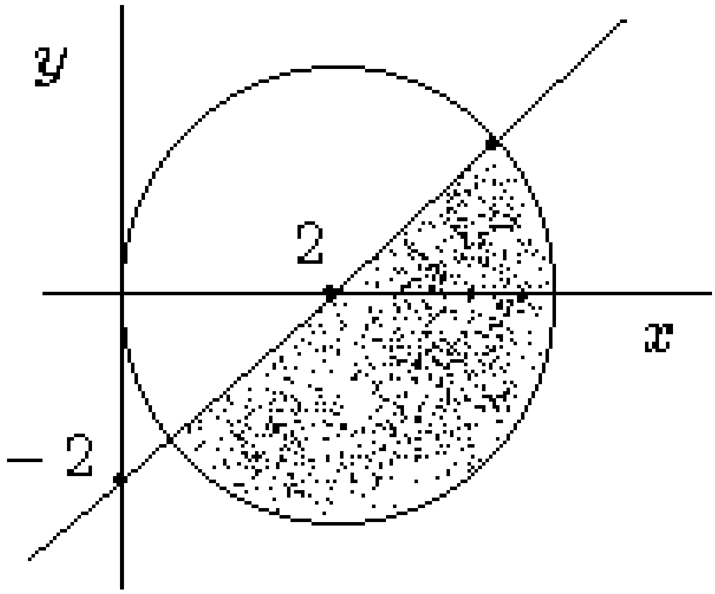

Figura 5.13: Área de uma figura plana.

5. Determine o comprimentos das seguintes linhas:

(i) $y = 1 - ln(cos(x))$, com $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$.

(ii) $x = acos^3(t)$, $y = asin^3(t)$, com $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$.

(iii) $x = a(t - sin(t))$, $y = a(1 - cos(t))$, com $a > 0$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/3$.

(iv) $y = 2x$, com $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

6. Calcule os seguintes volumes dos sólidos de revolução:

(i) Determine o volume da região entre os gráficos das equações $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$ no intervalo $[0, 1]$ em que o eixo das abcissas é o eixo de revolução. Represente graficamente o processo de gerar o sólido.

(ii) Determine o volume da região gerada pela equação $y = \sqrt{x}$ no intervalo $[0, 3]$ em que o eixo das abcissas é o eixo de revolução. Represente graficamente o processo de gerar o sólido.

(iii) Determine o volume da região gerada pelas equações $y = \sqrt{x}$, $y = 2$, $x = 0$ em que o eixo das ordenadas é o eixo de revolução. Represente graficamente o processo de gerar o sólido.

7. Calcule as seguintes áreas de superfícies de revolução:

(i) Calcule a área da superfície de um sólido de revolução gerado pela equação $f(x) = 2$, no intervalo [0,1], em que o eixo das abcissas é o eixo de revolução. Represente graficamente o processo de gerar o sólido.

(ii) Calcule a área da superfície de um sólido de revolução gerado pelas equações $f(x) = x$ e $g(x) = x + 1$, no intervalo [0,1], em que o eixo das abcissas é o eixo de revolução. Represente graficamente o processo de gerar o sólido.

(iii) Calcule a área da superfície de um sólido de revolução gerado pela equação $f(x) = -x + 1$, $x = 0$, $y = 0$, em que o eixo das ordenadas é o eixo de revolução. Represente graficamente o processo de gerar o sólido.

Capítulo 6

Integrais Impróprios

"Numbers are friends to me, more or less. It doesn´t mean the same for you, does it, 3,844? For you it's just a three and an eight and a four and a four. But I say - Hi, 62 squared!!"

Wim Klein

Na teoria de integração que apresentamos foi suposto que a função f estava definida e limitada num intervalo $[a, b]$ subconjunto de $\mathbb{R}$. Aos integrais que não verificam esta condição chamam-se *integrais impróprios*, os quais vamos estudar de seguida.

6.1 Definição e generalidades

Dizemos que

$$\int_a^b f(x)dx,$$

é um integral impróprio:

(i) de 1ª espécie se $a = -\infty$ e/ou $b = +\infty$, i.e. o intervalo de integração não é limitado;

(ii) de 2ª espécie se existem pontos de descontinuidade de f no intervalo $[a, b]$;

(iii) misto se é ao mesmo tempo de 1ª e de 2ª espécie.

De seguida vamos apresentar algumas generalidades dos integral impróprios.

6.1.1 Integrais impróprios de 1^{a} espécie

Seja $f(x)$ uma função definida e contínua para todos os pontos x tais que $a \leqslant x < +\infty$. Diz-se que o integral impróprio de 1^{a} espécie

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \tag{6.1}$$

é convergente se existe e é finito o seguinte limite

$$\lim_{\beta\to+\infty} \int_a^{\beta} f(x)dx, \tag{6.2}$$

e tem-se

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\beta\to+\infty} \int_a^{\beta} f(x)dx.$$

Caso o limite (6.2) não exista em $\mathbb{R}$ diz-se que o integral impróprio de 1^{a} espécie (6.1) é divergente.

De forma análoga. Seja $f(x)$ uma função definida e contínua para todos os pontos x tais que $-\infty < x \leqslant b$. Diz-se que o integral impróprio de 1^{a} espécie

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx \tag{6.3}$$

é convergente se existe e é finito o seguinte limite

$$\lim_{\beta\to-\infty} \int_{\beta}^{b} f(x)dx, \tag{6.4}$$

e tem-se

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{\beta\to-\infty} \int_{\beta}^{b} f(x)dx.$$

Caso o limite (6.4) não exista em $\mathbb{R}$ diz-se que o integral impróprio de 1^{a} espécie (6.3) é divergente.

Por fim, seja $f(x)$ uma função definida e contínua para todos os pontos x tais que $-\infty < x < +\infty$. Diz-se que o integral impróprio de 1^{a} espécie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx, \quad c \in \mathbb{R} \tag{6.5}$$

é convergente se existem e são finitos os seguintes limites

$$\lim_{\beta\to-\infty}\int_{\beta}^{c} f(x)dx, \quad \lim_{\beta\to+\infty}\int_{c}^{\beta} f(x)dx, \tag{6.6}$$

e tem-se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\beta\to-\infty}\int_{\beta}^{c} f(x)dx + \lim_{\beta\to+\infty}\int_{c}^{\beta} f(x)dx.$$

Caso um limite em (6.6) não exista em $\mathbb{R}$ diz-se que o integral impróprio de 1ª espécie (6.5) é divergente.

Observação 6.1 (Interpretação geométrica) *Por exemplo, o integral*

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx,$$

onde $f(x)$ é definida e contínua para todos os pontos x tais que $a \leqslant x < +\infty$, exprime a área do domínio infinito compreendido entre o gráfico da função f, $x = a$ e o eixo das abcissas, ver Figura 6.1.

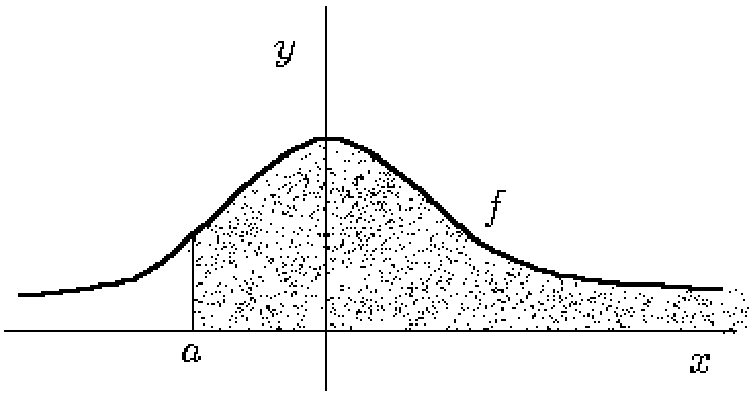

Figura 6.1: Em termos geométricos o integral impróprio de 1ª espécie $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ é interpretado como sendo a área do domínio infinito compreendido entre o gráfico da função f, o eixo das abcissas e o intervalo $[a, +\infty[$.

6.1.2 Integrais impróprios de 2ª espécie

Seja $f(x)$ uma função definida e contínua para todos os pontos x tais que $a < x \leqslant b$, não estando a função definida em $x = a$, ou, melhor ainda, $x = a$ é um ponto de descontinuidade de f. Diz-se que o integral impróprio de 2ª espécie

$$\int_a^b f(x)dx \tag{6.7}$$

é convergente se existe e é finito o seguinte limite

$$\lim_{\beta \to a^+} \int_\beta^b f(x)dx, \tag{6.8}$$

e tem-se

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\beta \to a^+} \int_\beta^b f(x)dx.$$

Caso o limite (6.8) não exista em $\mathbb{R}$ diz-se que o integral impróprio de 2ª espécie (6.7) é divergente.

Seja $f(x)$ uma função definida e contínua para todos os pontos x tais que $a \leqslant x < b$, não estando a função definida em $x = b$, ou, melhor ainda, $x = b$ é um ponto de descontinuidade de f. Diz-se que o integral impróprio de 2ª espécie

$$\int_a^b f(x)dx \tag{6.9}$$

é convergente se existe e é finito o seguinte limite

$$\lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta f(x)dx, \tag{6.10}$$

e tem-se

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta f(x)dx.$$

Caso o limite (6.10) não exista em $\mathbb{R}$ diz-se que o integral impróprio de 2ª espécie (6.9) é divergente.

Por fim, se $f(x)$ é uma função com uma descontinuidade em $x = c$, com $c \in [a, b]$, diz-se que o integral impróprio de 2ª espécie

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{6.11}$$

é convergente se existem e são finitos os seguintes limites

$$\lim_{\beta \to c^-} \int_a^{\beta} f(x)dx, \quad \lim_{\beta \to c^+} \int_{\beta}^{b} f(x)dx \tag{6.12}$$

e tem-se

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\beta \to c^-} \int_a^{\beta} f(x)dx + \lim_{\beta \to c^+} \int_{\beta}^{b} f(x)dx.$$

Caso um dos limites em (6.12) não exista em $\mathbb{R}$ diz-se que o integral impróprio de 2^{a} espécie (6.11) é divergente.

Observação 6.2 (Interpretação geométrica) *Considerando, por exemplo, o integral*

$$\int_a^b f(x)dx$$

com $x = a$ o único ponto de descontinuidade de f em $[a, b]$. Em termos geométricos, o integral anterior exprime a área de uma região ilimitada, ver Figura 6.2.

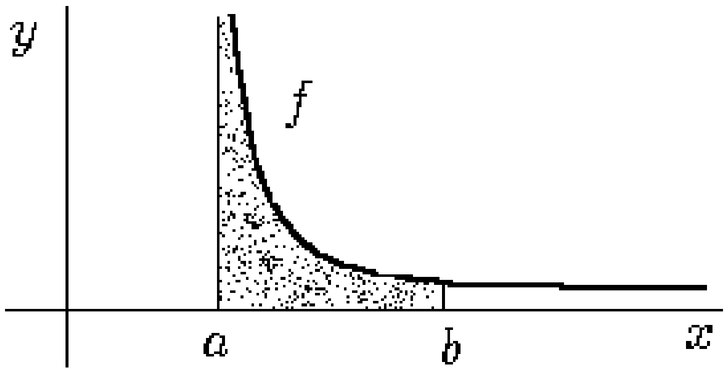

Figura 6.2: Em termos geométricos o integral impróprio de 2^{a} espécie $\int_a^b f(x)dx$, com $x = a$ um ponto de descontinuidade de f, é interpretado como sendo a área da região ilimitada gerada pela função f no intervalo $]a, b]$ e o eixo das abcissas.

6.1.3 Integrais impróprios mistos

Para os integrais impróprios mistos basta ter em conta as situações descritas anteriormente para os integrais impróprios de 1^{a} e 2^{a} espécie. Por exemplo, se $f(x)$ é uma função definida e contínua para todos os pontos x tais que $a < x < +\infty$, com uma descontinuidade no ponto $x = a$, temos que

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx, \quad c \in]a, +\infty[,$$

é convergente se existem e são finitos os seguintes limites

$$\lim_{\beta \to a^+} \int_\beta^c f(x)dx, \quad \lim_{\beta \to +\infty} \int_c^\beta f(x)dx.$$

Caso um dos limites anteriores não exista em $\mathbb{R}$ o integral impróprio misto

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

diz-se divergente.

No caso, em que $f(x)$ é uma função definida e contínua para todos os pontos x tais que $-\infty < x < b$, com uma descontinuidade no ponto $x = b$, temos que

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad c \in]-\infty, b[,$$

é convergente se existem e são finitos os seguintes limites

$$\lim_{\beta \to -\infty} \int_\beta^c f(x)dx, \quad \lim_{\beta \to b^-} \int_c^\beta f(x)dx.$$

Caso um dos limites anteriores não exista em $\mathbb{R}$ o integral impróprio misto

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx$$

diz-se divergente.

Por fim, se $f(x)$ é uma função com uma descontinuidade em $x = c$, com $c \in]-\infty, +\infty[$, e supondo $-\infty < a < c < b < +\infty$, diz-se que o integral impróprio misto

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^c f(x)dx \\ &+ \int_c^b f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx, \end{aligned}$$

é convergente se cada um dos integrais do segundo membro da expressão anterior for convergente, e divergente se pelo menos um dos integral do segundo membro for divergente.

Observação 6.3 (Interpretação geométrica) *Por exemplo, o integral*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

com $x = c$ *o único ponto de descontinuidade de* f *em* $]-\infty, +\infty[$*. Em termos geométricos, o integral anterior exprime a área de uma região ilimitada, ver Figura 6.3.*

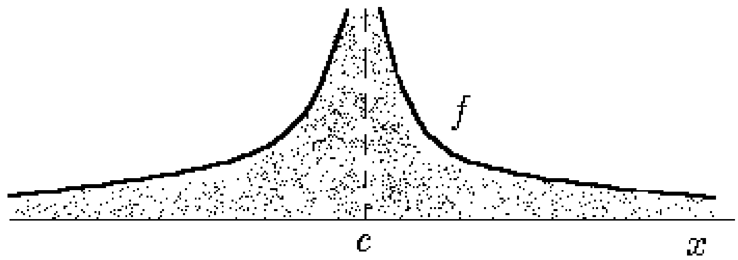

Figura 6.3: Em termos geométricos o integral impróprio misto $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, com $x = c$ um ponto de descontinuidade de f, é interpretado como sendo a área da região ilimitada gerada pela função f no intervalo $]-\infty, +\infty[$ e o eixo das abcissas.

6.2 Critérios de convergência

Na secção anterior estudámos a convergência dos integrais impróprios recorrendo à definição. Por vezes o recurso à definição torna-se um processo de cálculo muito complicado. Nesta secção, iremos estudar critérios de convergência com os quais iremos obter informação sobre a convergência ou não de um integral impróprio sem efectuar o cálculo do mesmo. Note-se o seguinte, ao aplicar tais critérios apenas obtemos informação sobre a convergência ou divergência, caso seja convergente o valor do integral será obtido pela definição de integral impróprio.

Teorema 6.1 (Critério geral de comparação) *Sejam* f *e* g *funções Riemann integráveis em cada intervalo* $[a, t]$ *com* $a < t < b$ *e suponhamos*

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x), \quad para \ \forall x \in [a, b[$$

Então, tem-se:

(*i*) *Se* $\int_a^b g(x)dx$ *é convergente também* $\int_a^b f(x)dx$ *é convergente, i.e. todo o integral minorante de um integral convergente ainda é convergente.*

(*ii*) *Se* $\int_a^b f(x)dx$ *é divergente também* $\int_a^b g(x)dx$ *é divergente, i.e. todo o integral majorante de um integral divergente ainda é divergente.*

Demonstração: Consultar Sarrico [4]. ⋔

Teorema 6.2 *Seja* f *uma função Riemann integrável em cada intervalo* $[a,t]$ *com* $a < t < b$ *e* b *finito ou* $+\infty$. *Então, se* $\int_a^b | f(x) | dx$ *converge também* $\int_a^b f(x)dx$ *converge e tem-se*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leqslant \int_a^b | f(x) | \, dx.$$

Demonstração: Consultar Sarrico [4]. ⋔

Observação 6.4 *Se* $\int_a^b |f(x)|dx$ *for convergente, o integral* $\int_a^b f(x)dx$ *diz-se absolutamente convergente. Por outro lado, se* $\int_a^b f(x)dx$ *for convergente e* $\int_a^b |f(x)|dx$ *divergente, diz-se que o integral* $\int_a^b f(x)dx$ *é simplesmente convergente.*

Observação 6.5 *Os teoremas anteriores foram enunciados no intervalo* $[a,b[$, *i.e.* b *pode ser infinito ou então um ponto de descontinuidade. Os mesmos teoremas ainda são válidos para intervalos do tipo* $]a,b]$ *ou* $]a,b[$.

As proposições seguintes são muito importantes para o estudo da convergência ou divergência dos integrais impróprios.

Proposição 6.1 (Critério para integrais impróprios de 1^{a} espécie) *Se* f *é uma função Riemann integrável em cada intervalo* $[a,t]$ *com* $t > a$ *e* $f(x) \geqslant 0$ *para* $\forall x \in [a,+\infty[$, *então:*

(*i*) *Se existe* $\alpha > 1$ *tal que*

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = L < +\infty,$$

tem-se que o integral $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *é convergente.*

(*ii*) *Se existe* $\alpha \leqslant 1$ *tal que*

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = L > 0,$$

tem-se que o integral $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *é divergente.*

Demonstração: Consultar Sarrico [4]. ⫛

Proposição 6.2 (Critério para integrais impróprios de 1^{a} espécie) *Se f é uma função Riemann integrável em cada intervalo $[t, b]$ com $t < b$ e $f(x) \geqslant 0$ para $\forall x \in]-\infty, b]$, então:*

(i) Se existe $\alpha > 1$ tal que

$$\lim_{x\to-\infty} x^\alpha f(x) = L < +\infty,$$

tem-se que o integral $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ é convergente.

(ii) Se existe $\alpha \leqslant 1$ tal que

$$\lim_{x\to-\infty} x^\alpha f(x) = L > 0,$$

tem-se que o integral $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ é divergente.

Demonstração: Consultar Sarrico [4]. ⫛

Proposição 6.3 (Critério para integrais impróprios de 2^{a} espécie) *Se f é uma função Riemann integrável em cada intervalo $[a, t]$ com $a < t < b$, b um ponto de descontinuidade e $f(x) \geqslant 0$ para $\forall x \in [a, b[$, então:*

(i) Se existe $\alpha < 1$ tal que

$$\lim_{x\to b^-} (b-x)^\alpha f(x) = L < +\infty,$$

tem-se que o integral $\int_a^b f(x)dx$ é convergente.

(ii) Se existe $\alpha \geqslant 1$ tal que

$$\lim_{x\to b^-} (b-x)^\alpha f(x) = L > 0,$$

tem-se que o integral $\int_a^b f(x)dx$ é divergente.

Demonstração: Consultar Sarrico [4]. ⫛

Proposição 6.4 (Critério para integrais impróprios de 2^{a} espécie) *Se f é uma função Riemann integrável em cada intervalo $[t, b]$ com $a < t < b$, a um ponto de descontinuidade e $f(x) \geqslant 0$ para $\forall x \in]a, b]$, então:*

(i) Se existe $\alpha < 1$ *tal que*

$$\lim_{x \to a^+} (a-x)^\alpha f(x) = L < +\infty,$$

tem-se que o integral $\int_a^b f(x)dx$ *é convergente.*

(ii) Se existe $\alpha \geqslant 1$ *tal que*

$$\lim_{x \to a^+} (a-x)^\alpha f(x) = L > 0,$$

tem-se que o integral $\int_a^b f(x)dx$ *é divergente.*

Demonstração: Consultar Sarrico [4]. ⫛

Observação 6.6 *Por vezes nos critérios relacionadas com os integrais impróprios de* 2^a *espécie faz-se* $(x-c)^\alpha$ *em vez de* $(c-x)^\alpha$*, este facto está relacionado com a estrutura da expressão da função* f.

Observação 6.7 *Para os integrais impróprios mistos aplicar as vezes que forem necessárias as Proposições* 6.1*,* 6.2*,* 6.3 *e* 6.4.

De seguida vamos apresentar alguns resultados importantes a usar como resultados de comparação no estudo da convergência ou divergência dos integrais impróprios.

Teorema 6.3 (Integrais de Dirichlet) *O integral impróprio de* 1^a *espécie*

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx, \quad a > 0$$

é convergente para $\alpha > 1$*, e divergente para* $\alpha \leqslant 1$.

Demonstração: Numa primeira etapa vamos considerar $\alpha = 1$. Como consequência, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx &= \lim_{\beta \to +\infty} \int_a^\beta \frac{1}{x} dx \\
&= \lim_{\beta \to +\infty} \Big[ln \mid x \mid \Big]_a^\beta \\
&= \lim_{\beta \to +\infty} \Big(ln \mid \beta \mid - ln \mid a \mid \Big) \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

e assim o integral em causa diverge para $\alpha = 1$.

No caso $\alpha \neq 1$, tem-se

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx &= \lim_{\beta\to+\infty}\int_a^\beta x^{-\alpha}dx \\ &= \lim_{\beta\to+\infty}\left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_a^\beta \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\lim_{\beta\to+\infty}\left(\beta^{-\alpha+1} - a^{-\alpha+1}\right).\end{aligned}$$

Por conseguinte, se $-\alpha + 1 < 0$, i.e. $\alpha > 1$, temos

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx &= \frac{1}{1-\alpha}\lim_{\beta\to+\infty}\left(\frac{1}{\beta^{\alpha-1}} - a^{-\alpha+1}\right) \\ &= \frac{a^{-\alpha+1}}{\alpha-1}\end{aligned}$$

que é um valor finito, e assim o integral converge. Finalmente, se $-\alpha + 1 > 0$, i.e. $\alpha < 1$, temos

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx &= \frac{1}{1-\alpha}\lim_{\beta\to+\infty}\left(\beta^{-\alpha+1} - a^{-\alpha+1}\right) \\ &= +\infty\end{aligned}$$

e o integral diverge. ⫛

Teorema 6.4 *Os integrais impróprios de* 2^a *espécie*

$$\int_a^b \frac{1}{(x-b)^\alpha}dx,\quad \int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}dx$$

são convergentes para $\alpha < 1$, *e divergentes para* $\alpha \geqslant 1$. *Esta conclusão ainda é válida para os integrais impróprios de* 2^a *espécie*

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx,\quad \int_a^b \frac{1}{(a-x)^\alpha}dx.$$

Demonstração: Vamos apenas demonstrar o teorema para o caso

$$\int_a^b \frac{1}{(x-b)^\alpha}dx,$$

pois os restantes casos são análogos. Considerando $\alpha = 1$, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{1}{x-b}dx &= \lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta \frac{1}{x-b}dx \\
&= \lim_{\beta \to b^-} \Big[ln \mid x - b \mid \Big]_a^\beta \\
&= \lim_{\beta \to b^-} \Big(ln \mid \beta - b \mid - ln \mid a - b \mid \Big) \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

e assim o integral é divergente para $\alpha = 1$. Para $\alpha \neq 1$, temos

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{1}{\big(x-b\big)^\alpha}dx &= \lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta \big(x-b\big)^{-\alpha}dx \\
&= \frac{1}{-\alpha+1} \lim_{\beta \to b^-} \Big[\big(x-b\big)^{-\alpha+1} \Big]_a^\beta \\
&= \frac{1}{-\alpha+1} \lim_{\beta \to b^-} \Big(\big(\beta-b\big)^{-\alpha+1} - \big(a-b\big)^{-\alpha+1} \Big).
\end{aligned}$$

Por conseguinte, se $-\alpha + 1 < 0$, i.e. $\alpha > 1$, temos

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{1}{\big(x-b\big)^\alpha}dx &= \frac{1}{1-\alpha} \lim_{\beta \to b^-} \Big(\frac{1}{\big(\beta-b\big)^{\alpha-1}} - \big(a-b\big)^{-\alpha+1} \Big) \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

e assim o integral diverge. Finalmente, se $-\alpha + 1 > 0$, i.e. $\alpha < 1$, temos

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{1}{\big(x-b\big)^\alpha}dx &= \frac{1}{1-\alpha} \lim_{\beta \to b^-} \Big(\big(\beta-b\big)^{-\alpha+1} - \big(a-b\big)^{-\alpha+1} \Big) \\
&= \frac{\big(a-b\big)^{-\alpha+1}}{\alpha-1}
\end{aligned}$$

que é um valor finito, e assim o integral converge. ⋔

6.3 Exercícios para aulas teóricas

1. Classifique e estude por definição a natureza dos seguintes integrais impróprios:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax}dx, \ a > 0, \quad \int_0^{+\infty} \frac{arctg^2(x)}{1+x^2}dx,$$

$$\int_0^1 ln(x)dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx.$$

2. Estude por comparação a natureza dos seguintes integrais impróprios:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+e^x)}dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}dx.$$

3. Estude, utilizando os critérios, a natureza dos seguintes integrais impróprios:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3-1}dx.$$

4. Estude a convergência do seguinte integral e diga se o integral em causa é absolutamente ou simplesmente convergente

$$\int_1^{+\infty} \frac{sin(x)}{x}dx.$$

6.4 Exercícios para aulas práticas

1. Classifique e estude por definição a natureza dos seguintes integrais impróprios:

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx, \quad \int_0^3 \frac{1}{(x-1)^3}dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^3}dx, \quad \int_4^{+\infty} \frac{1}{x^2-4}dx.$$

2. Estude por comparação a natureza dos seguintes integrais impróprios:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^5+6x}dx, \quad \int_2^3 \frac{5}{2x^2-8x+8}dx.$$

3. Estude, utilizando os critérios, a natureza dos seguintes integrais impróprios:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}dx, \quad \int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx, \quad \int_1^2 \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx.$$

4. Estude a convergência do seguinte integral e diga se o integral em causa é absolutamente ou simplesmente convergente

$$\int_1^{+\infty} \frac{sin(x)}{x^3}dx.$$

5. Determine o valor do seguinte integral

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|\ x\ |}}dx.$$

6.5 Exercícios para trabalho de casa

1. Classifique e estude por definição a natureza dos seguintes integrais impróprios:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx, \quad \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}dx,$$

$$\int_{0}^{\pi/2} \frac{tg(x)}{1+sin^2(x)}dx, \quad \int_{-2}^{+\infty} \frac{1}{x^3+1}dx.$$

2. Estude por comparação a natureza dos seguintes integrais impróprios:

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}+4x^3}dx, \quad \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}dx \quad \int_{1}^{+\infty} e^{-x^2}dx.$$

3. Estude, utilizando os critérios, a natureza dos seguintes integrais impróprios:

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^5+1}}dx, \quad \int_{-\infty}^{0} \frac{3x}{1+x^3}dx, \quad \int_{1}^{+\infty} \frac{x^2+1}{3x^4-x+2}dx.$$

4. Estude a natureza do seguinte integral impróprio

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{x^\alpha}dx$$

   em função do parâmetro α.

5. Estude a convergência dos seguintes integrais impróprios e diga se algum deles é absolutamente convergente

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{cos(x)}{x^{3/2}}dx, \quad \int_{1}^{+\infty} \frac{sin^2(x)}{x^2}dx.$$

6. Mostre a seguinte igualdade

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-ax}cos(bx)dx = \frac{a}{a^2+b^2}, \ a>0, b\in\mathbb{R}.$$

Capítulo 7

Séries Numéricas

"I'm beginning to think that nothing is more conducive to the abstract sciences than prison. My Hindu friend Vij often used to say that if he spent six months or a year in prison he would most certainly be able to prove the Riemann hypothesis. This may have been true, but he never got the chance."

André Weil

Neste capítulo vamos introduzir o conceito de série numérica, assim como estudar a sua natureza.

7.1 Definições e generalidades

Seja dada uma sucessão numérica infinita

$$u_1,\ u_2,\ u_3, \ldots, u_n, \ldots. \tag{7.1}$$

À expressão

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{7.2}$$

chama-se série numérica, sendo os números da sucessão (7.1) os termos da série, e u_n o seu termo geral. À soma dos n termos da série chama-se sucessão das somas parciais S_n, i.e.

$$S_1 = u_1,$$

$$S_2 = u_1 + u_2,$$
$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3,$$
$$S_4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4,$$
$$\dots$$
$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

Se o limite da sucessão das somas parciais

$$S = \lim_{n \to +\infty} S_n,$$

existir e for finito a série numérica (7.2) diz-se convergente sendo S a sua soma. Caso contrário a série (7.2) diz-se divergente.

Observação 7.1 *Por vezes é conveniente considerar séries do tipo* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *ou, mais geralmente* $\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$ *onde* p *é um número inteiro. As ideias dadas, e as que irão seguir, estendem-se facilmente a estes dois tipos de séries.*

7.1.1 Séries Geométricas

A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é uma série geométrica se para

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = r, \quad \text{com } r \text{ uma constante},$$

i.e. a razão entre dois termos consecutivos da série é sempre igual à mesma constante. A constante r designa-se como sendo a razão da série geométrica.

Considerando a série geométrica ($a \neq 0$)

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1},$$

com termo geral $u_n = ar^{n-1}$, a sucessão das somas parciais S_n, vem

$$S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}. \tag{7.3}$$

Multiplicando ambos os membros de (7.3), por $-r$, tem-se

$$-rS_n = -ar - ar^2 - ar^3 - \ldots - ar^n, \tag{7.4}$$

somando (7.3) e (7.4), temos

$$S_n - rS_n = a - ar^n,$$

i.e.

$$S_n = \frac{a\big(1 - r^n\big)}{1 - r}. \tag{7.5}$$

A natureza da série em causa é dada pelo limite da expressão (7.5) quando $n \to +\infty$. Acontece que o limite em causa depende do parâmetro r e, assim, temos:

(i) para $|r| > 1$, tem-se que o $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n$ não existe em $\mathbb{R}$, e como consequência o $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ não existe em $\mathbb{R}$ e a série geométrica diverge;

(ii) para $|r| < 1$, tem-se $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n = 0$, e o $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{a}{1-r} = S$ e a série geométrica converge;

(iii) para $r = 1$, temos $S_n = an$ e, tem-se que o $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ não existe em $\mathbb{R}$ e a série geométrica diverge;

(iv) para $r = -1$, temos $S_n = 0$ se n é par, e $S_n = a$ se n é ímpar. Como as subsucessões das somas parciais oscilam entre a e 0, o $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ não existe em $\mathbb{R}$ e a série geométrica diverge.

Como consequência da exposição anterior temos que uma série geométrica é convergente se $|r| < 1$; e a sua soma é dada por

$$S = \frac{a}{1-r},$$

sendo r a razão da série e a o seu primeiro termo.

7.1.2 Séries Aritméticas

A série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ é uma série aritmética se para

$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; u_{n+1} - u_n = r, \quad \text{com } r \text{ uma constante,}$$

i.e. a diferença entre dois termos consecutivos da série é sempre igual à mesma constante. A constante r designa-se como sendo a razão da série aritmética.

Considerando a série aritmética

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big[u_1 + (n-1)r\Big],$$

com termo geral $u_n = u_1 + (n-1)r$, a sucessão das somas parciais S_n, vem

$$S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} n. \tag{7.6}$$

Como consequência da expressão (7.6), tem-se que o limite de S_n quando $n \to +\infty$ não existe em $\mathbb{R}$, e assim uma série aritmética é sempre divergente.

7.1.3 Séries de Mengoli

Considerando a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. Se for possível decompor o termos geral u_n numa diferença do tipo

$$u_n = a_n - a_{n+k}, \text{ com } k \in \mathbb{N},$$

tem-se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \big[a_n - a_{n+k}\big]. \tag{7.7}$$

Às séries do tipo da expressão (7.7) dá-se o nome de séries de Mengoli.

Considerando inicialmente $k = 1$, tem-se a seguinte sucessão de somas parciais

$$\begin{gathered} S_1 = a_1 - a_2, \\ S_2 = a_1 - a_2 + a_2 - a_3 = a_1 - a_3, \\ S_3 = a_1 - a_3 + a_3 - a_4 = a_1 - a_4, \\ \cdots \\ S_n = a_1 - a_{n+1}. \end{gathered}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} S_n &= \lim_{n\to+\infty} \Big(a_1 - a_{n+1}\Big) \\ &= a_1 - \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} \\ &= a_1 - \lim_{n\to+\infty} a_n. \end{aligned}$$

Para $k = 2$, tem-se a seguinte sucessão de somas parciais

$$S_1 = a_1 - a_3,$$

$$S_2 = a_1 - a_3 + a_2 - a_4 = a_1 + a_2 - a_3 - a_4,$$

$$S_3 = a_1 + a_2 - a_3 - a_4 + a_3 - a_5 = a_1 + a_2 - a_4 - a_5,$$

$$\dots$$

$$S_n = a_1 + a_2 - a_{n+1} - a_{n+2}.$$

E, assim,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} S_n &= \lim_{n\to+\infty} \Big(a_1 + a_2 - a_{n+1} - a_{n+2}\Big) \\ &= a_1 + a_2 - \lim_{n\to+\infty} \Big(a_{n+1} + a_{n+2}\Big) \\ &= a_1 + a_2 - 2 \lim_{n\to+\infty} a_n. \end{aligned}$$

Ao generalizar para qualquer k, temos

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=1}^{k} a_n - k \lim_{n\to+\infty} a_n.$$

A série de Mengoli é convergente se o $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ existir e for finito, e a soma é dada por

$$S = \sum_{n=1}^{k} a_n - k \lim_{n\to+\infty} a_n.$$

Caso contrário a série de Mengoli diverge, i.e. se o $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ não existir em $\mathbb{R}$.

7.2 Alguns teoremas sobre séries

Considerando a série

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n, \tag{7.8}$$

i.e.

$$S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots$$

ou de uma forma mais geral

$$S = S_n + R_n, \tag{7.9}$$

sendo:

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \quad R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$$

onde R_n é o resto de ordem n, soma dos termos da série a partir da ordem $n+1$. Se a série (7.8) é convergente, a sua soma é S, e para $\delta > 0$ arbitrário, tem-se

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = S \;\Rightarrow \mid S - S_n \mid < \delta. \tag{7.10}$$

Tendo em conta a expressão (7.9):

$$S - S_n = R_n \;\Rightarrow \mid S - S_n \mid = \mid R_n \mid$$

e por (7.10), vem:

$$\mid R_n \mid < \delta.$$

E, assim, para uma série ser convergente o resto de ordem n tem que ser um infinitésimo. De seguida, iremos apresentar alguns resultados importantes sobre convergência e divergência de uma série.

Teorema 7.1 (Critério de convergência de Anastácio da Cunha) *A série* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, *é convergente sse*

$$\forall\delta > 0\ \exists p \in \mathbb{N}\ \forall n, k \in \mathbb{N}\ n \geqslant p \Rightarrow \mid S_{n+k} - S_n \mid < \delta.$$

Demonstração: Consultar Sarrico [4]. ⋔

O teorema anterior diz-nos que uma série é convergente se existe uma ordem a partir da qual o valor absoluto de qualquer soma finita de termos consecutivos é tão pequena quanto se queira. Este teorema é usualmente conhecido pelo teorema de Cauchy-Bolzano.

Corolário 7.1 (Condição necessária de convergência) *Considerando a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

com termo geral u_n*:*

(i) Se $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ *a série é divergente.*

(ii) Se $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ *a série pode ser convergente ou divergente.*

Demonstração: Vamos apenas provar a condição (i). Com vista a um absurdo vamos supor que a série converge. Então, o limite da sucessão das somas parciais existe e é finito, i.e.

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = S.$$

Tendo em conta que $u_n = S_n - S_{n-1}$, tem-se

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \big(S_n - S_{n-1}\big) = 0,$$

o que é um absurdo por hipótese. Para ver a demonstração da condição (ii), consultar Anton [2]. ⋔

Teorema 7.2 *Se a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *converge, então*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Demonstração: Considerando a sucessão das somas parciais, i.e.

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n,$$

vem que

$$S_{n-1} = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}.$$

E, assim, tem-se

$$S_n - S_{n-1} = u_n. \tag{7.11}$$

Como por hipótese a série é convergente vem que S_n tem limite finito. Suponhamos que $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$, então $\lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S$ e, tendo em conta (7.11), tem-se

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0. \text{ ⋔}$$

Teorema 7.3 *A série* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *converge sse existe* $p \in \mathbb{N}$ *tal que* $\sum_{n=p}^{+\infty} u_n$ *converge.*

Demonstração: Consultar Sarrico [4]. ⫛

Este último teorema diz-nos que a natureza de uma série, i.e. a convergência ou divergência de uma série não se altera se omitirmos ou acrescentarmos um número finito de termos.

Teorema 7.4 *Se* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *são séries convergentes com somas* B *e* D*, respectivamente, então:*

(i) A série $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *converge e tem por soma* $B \pm D$*.*

(ii) A série $\sum_{n=1}^{+\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge e tem como soma* cB*, para* $\forall c \in \mathbb{R}$*.*

Demonstração: Consultar Ferreira [8]. ⫛

O teorema seguinte mostra que existe uma relação entre a convergência de uma série e a do integral impróprio associado:

Teorema 7.5 (Critério do Integral) *Seja* $\sum_{n=p}^{+\infty} u_n$*, com* $p \in \mathbb{N}$*, uma série de termos positivos e seja* $f(x)$ *a função que resulta quando* n *é substituído por* x *no termo geral da série. Se* f *é uma função monótona decrescente no intervalo* $[p, +\infty[$*, então*

$$\int_p^{+\infty} f(x)dx \quad e \quad \sum_{n=p}^{+\infty} u_n$$

têm a mesma natureza.

Demonstração: Consultar Ferreira [8]. ⫛

Tendo em conta o Critério do Integral e os integrais de Dirichlet (ver capítulo sobre integrais impróprios), tem-se:

Teorema 7.6 (Séries de Dirichlet) *Seja a seguinte série de Dirichlet*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

(i) Se $\alpha \leqslant 1$ *então a série diverge.*

(ii) Se $\alpha > 1$ *então a série converge.*

Demonstração: Basta aplicar o Critério do Integral e ter em conta os integrais de Dirichlet. ⫛

Observação 7.2 (Série harmónica) *A série de Dirichlet com* $\alpha = 1$, *i.e.*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

designa-se por série harmónica, a qual é uma série divergente.

7.3 Critérios de convergência para séries de termos não negativos

De seguida vamos apresentar, sem demonstrar, alguns critérios de convergência para séries de termos não negativos.

Teorema 7.7 (Critério de comparação) *Sejam* $a_n \geqslant 0, b_n \geqslant 0$ *para* $\forall n \in \mathbb{N}$, *e* $a_n \leqslant b_n$ *a partir de uma certa ordem* $n \geqslant p$*:*

(i) Se $\sum b_n$ *converge, então* $\sum a_n$ *converge.*

(ii) Se $\sum a_n$ *diverge, então* $\sum b_n$ *diverge.*

Demonstração: Consultar Sarrico [4]. ⫛

Como consequência do critério de comparação, temos os seguintes corolários:

Corolário 7.2 *Sejam* $a_n \geqslant 0$ *e* $b_n > 0$ *para* $\forall n \in \mathbb{N}$, *e além disso*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = k, \; 0 < k < +\infty,$$

então as séries $\sum a_n$ *e* $\sum b_n$ *têm a mesma natureza, ou seja, ou ambas convergem ou ambas divergem.*

Corolário 7.3 *Sejam* $a_n \geqslant 0$ *e* $b_n > 0$ *para* $\forall n \in \mathbb{N}$*, e além disso*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

se a série $\sum b_n$ *converge, então a série* $\sum a_n$ *é convergente.*

Corolário 7.4 *Sejam* $a_n \geqslant 0$ *e* $b_n > 0$ *para* $\forall n \in \mathbb{N}$*, e além disso*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$$

se a série $\sum b_n$ *diverge, então a série* $\sum a_n$ *é divergente.*

Observação 7.3 *Para aplicarmos o critério de comparação e seus corolários relaciona-se a série a estudar com uma série de que se conheça a sua natureza. As séries que normalmente se utilizam para comparação são as séries geométricas, as séries de Mengoli e as séries de Dirichlet.*

Teorema 7.8 (Critério da razão) *Seja* $\sum a_n$ *uma série de termos positivos. Então:*

(i) *Se existe um número* $k < 1$ *tal que, a partir de uma certa ordem, se tenha*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant k,$$

a série $\sum a_n$ *é convergente.*

(ii) *Se, a partir de uma certa ordem, se tem*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1,$$

a série $\sum a_n$ *é divergente.*

Demonstração: Consultar Ferreira [8]. ⋔

Teorema 7.9 (Critério de D'Alembert) *Seja* $a_n > 0$ *para* $\forall n \in \mathbb{N}$ *e*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k, \text{ com } k \text{ finito ou } +\infty,$$

então:

(i) Se $k < 1$, a série $\sum a_n$ é convergente.

(ii) Se $k > 1$, a série $\sum a_n$ é divergente.

Demonstração: Consultar Sarrico [4]. ⫛

Observação 7.4 *O critério de D'Alembert não é conclusivo para $k = 1$ e nesse caso concreto temos que usar o critério de Raabe. O critério de D'Alembert está indicado quando no termo geral figuram: produtos sucessivos, factoriais e potências.*

Teorema 7.10 (Critério da raiz) *Seja $\sum a_n$ uma série de termos não negativos. Então:*

(i) Se existe um número $k < 1$ tal que, a partir de uma certa ordem, se tenha

$$\sqrt[n]{a_n} \leqslant k,$$

a série $\sum a_n$ é convergente.

(ii) Se, para infinitos valores n, se tem

$$\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1,$$

a série $\sum a_n$ é divergente.

Demonstração: Consultar Ferreira [8]. ⫛

Teorema 7.11 (Critério de Cauchy) *Seja $a_n \geqslant 0$ para $\forall n \in \mathbb{N}$ e*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = k, \text{ com } k \text{ finito ou } +\infty,$$

então:

(i) Se $k < 1$, a série $\sum a_n$ é convergente.

(ii) Se $k > 1$, a série $\sum a_n$ é divergente.

Demonstração: Consultar Sarrico [4]. ⫛

Observação 7.5 *Seja $a_n > 0$ para $\forall n \in \mathbb{N}$. Então, é válido o seguinte resultado (ver por exemplo [4]):*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Observação 7.6 *O critério de Cauchy não é conclusivo para $k = 1$ e nesse caso concreto temos que usar o critério de Raabe. O critério de Cauchy está indicado quando todos os factores do termo geral, estão elevados pelo menos ao expoente n.*

Teorema 7.12 (Critério de Raabe) *Seja $a_n > 0$ para $\forall n \in \mathbb{N}$ e*

$$\lim_{n\to+\infty} n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\Big) = k, \ \text{com } k \text{ finito},$$

então:

(i) Se $k < 1$, a série $\sum a_n$ é divergente.

(ii) Se $k > 1$, a série $\sum a_n$ é convergente.

Demonstração: Consultar Swokowski [5]. ⋔

7.4 Séries alternadas e convergência absoluta

A secção anterior foi dedicada às séries de termos não negativos. Nesta secção, vamos estudar as séries cujos termos são alternadamente positivos ou negativos, i.e. vamos estudar as séries alternadas.

Definição 7.1 *Chamamos série alternada a uma série do tipo*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + \dots$$

onde $a_n \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Observação 7.7 *Da mesma forma a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

onde $a_n \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}$, é uma série alternada.

O teorema seguinte diz-nos em que condições uma série alternada é convergente.

Teorema 7.13 (Critério de Leibniz) *A série alternada*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n,$$

onde $a_n \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}$, *é convergente sse verifica as seguintes condições:*

(*i*) a_n *é um infinitésimo, i.e.*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0;$$

(*ii*) a_n *é uma sucessão monótona decrescente, i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} - a_n \leqslant 0.$$

Demonstração: Consultar Ferreira [8]. ⋔

Uma série alternada que não verifique uma das condições do Critério de Leibniz (i.e. condições (*i*) ou (*ii*)), diz-se uma série alternada divergente.

Se uma série converge, então a soma parcial S_n pode ser utilizada para aproximar a soma S da série. Em muitos casos, é difícil determinar a precisão da aproximação; mas, no caso particular de uma série alternada, o teorema seguinte constitui uma forma simples de avaliação desse erro.

Teorema 7.14 *Seja* $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$, *uma série alternada convergente. Se* S *é a sua soma e* S_n *a sua soma parcial, então*

$$\mid S - S_n \mid \leqslant a_{n+1}$$

i.e., o erro cometido ao aproximarmos S *por* S_n *é, no máximo, igual a* a_{n+1}.

Demonstração: Consultar Swokowski [5].⋔

Segue-se um conceito útil no estudo de uma série que tem termos positivos e termos negativos:

Teorema 7.15 *Se a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} | u_n |$ *é convergente, então a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *é convergente, e tem-se*

$$| \sum_{n=1}^{+\infty} u_n | \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} | u_n | .$$

Demonstração: Consultar Ferreira [8]. ⫛

De seguida vamos considerar a convergência simples e absoluta.

Definição 7.2 *Uma série* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *é absolutamente convergente se a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} | u_n |$ *é convergente.*

Definição 7.3 *Uma série* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *é simplesmente convergente se a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *é convergente, mas a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} | u_n |$ *é divergente.*

Observação 7.8 *Por vezes no estudo da natureza de uma série é necessário ter em conta os seguintes resultados (ver bibliografia):*

$$\lim \left(1 + \frac{a}{v_n}\right)^{v_n} = e^a \ \ qd \ \ v_n \to +\infty, \ a \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n} = +\infty, \ a > 1.$$

7.5 Exercícios para aulas teóricas

1. Dada a seguinte série

$$\frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \ldots$$

   determine uma expressão geral para a sucessão das somas parciais que lhe está associada e diga se a série é convergente ou divergente, e a sua soma se for possível.

2. Determine a natureza das seguintes séries geométricas e sempre que possível a sua soma:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n, \ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}.$$

3. Estude a natureza das seguintes séries de Mengoli:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+1)}.$$

4. Utilize o critério de comparação ou seus corolários para estudar a natureza das seguintes séries:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2+n}.$$

5. Diga o que pode concluir sobre a natureza das seguintes séries analisando apenas o seu termo geral:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+3n}{2n^2+2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{5n}.$$

6. Utilizando o critério de D'Alembert, estude a natureza das seguintes séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{1.3.5.\ldots.(2n-1)}.$$

7. Utilizando o critério da raiz de Cauchy, estude a natureza das seguintes séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{2n}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2+3}\right)^n.$$

8. Estude as seguintes séries alternadas:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+3}{n(n+1)}.$$

9. Estude em termos de convergencia absoluta ou simples as seguintes séries:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{sin(n)}{n^2}.$$

10. Utilize o critério do integral para estudar a natureza da seguinte série:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n^2}.$$

7.6 Exercícios para aulas práticas

1. Dada a seguinte série
$$\frac{1}{1.4}+\frac{1}{2.5}+\frac{1}{3.6}+\ldots$$
determine uma expressão geral para a sucessão das somas parciais que lhe está associada e diga se a série é convergente ou divergente, e a sua soma se for possível.

2. Determine a natureza das seguintes séries geométricas e sempre que possível a sua soma:
$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-4)^n,\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{-1}{6}\right)^{n-1}.$$

3. Estude a natureza das seguintes séries de Mengoli:
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{(n+2)n},\ \sum_{n=1}^{+\infty}ln\Big(\frac{n}{n+1}\Big).$$

4. Usando séries de Mengoli, mostre a seguinte igualdade
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(x+1+n)(x+n)}=\frac{1}{1+x}.$$

5. Utilize o critério de comparação ou seus corolários para estudar a natureza das seguintes séries:
$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{2+5^n},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3n^3-2n^2+4}{n^7-n^3+2},$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\sqrt{n^2+2}-n\Big),\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3n^2+5n}{2^n(n^2+1)}.$$

6. Utilizando o critério de D'Alembert, estude a natureza das seguintes séries
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n}{n!},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+2}{3^n},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n n!}{2.4.6.\ldots.2n}.$$

7. Utilizando o critério da raiz de Cauchy, estude a natureza das seguintes séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n n!}{n^n},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{3n+1}}{(n+1)^n},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(1+3/n)^{n^2}}.$$

8. Estude as seguintes séries alternadas:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{ln(n+1)},\ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n}.$$

9. Estude em termos de convergencia absoluta ou simples as seguintes séries:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{n^3+1},\ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{n!}{(2n-1)!},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{cos(1/n)}{n^2+1}.$$

10. Utilize o critério do integral para estudar a natureza da seguinte série:

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{ln(n)}{n}.$$

7.7 Exercícios para trabalho de casa

1. Dada a seguinte série
$$\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\dots$$
determine uma expressão geral para a sucessão das somas parciais que lhe está associada e diga se a série é convergente ou divergente, e a sua soma se for possível.

2. Determine a natureza das seguintes séries geométricas e sempre que possível a sua soma:
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-1}{5^n},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{3^{n+1}}.$$

3. Estude a natureza das seguintes séries de Mengoli:

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2-1},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3}{(2n-1)n},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

4. Determine o valores de x para os quais a série geométrica converge

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{(x+1)^n}.$$

5. Utilize o critério de comparação ou seus corolários para estudar a natureza das seguintes séries:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n+1}{\sqrt{3n^3+2}}, \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{ln(n)}{n}, \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1}, \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3+1}.$$

6. Utilizando o critério de D'Alembert, estude a natureza das seguintes séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n!}, \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{e^n}, \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.4.9.\ldots.n^2}{1.5.9.\ldots.(4n-3)}, \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n}.$$

7. Utilizando o critério da raiz de Cauchy, estude a natureza das seguintes séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n}, \ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1-e^{-n}\right)^n, \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{(n!)^n}, \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+2)^2}{n^{2n}}.$$

8. Estude as seguintes séries alternadas:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n}, \ \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{\sqrt{n}+1}.$$

9. Estude em termos de convergencia absoluta ou simples as seguintes séries:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n\sqrt{n}}, \ \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}, \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{cos(n)}{n^{3/2}}.$$

10. Utilize o critério do integral para estudar a natureza da seguinte série:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3+2n)^2}.$$

Capítulo 8

Séries de Potências

"The Riemann Hypothesis - It would be a tragedy if it just needed a trick to prove it."

Alain Connes

No capítulo anterior estudámos as séries cujos termos são números. De seguida vamos considerar séries cujos termos são funções. As séries de potências são casos particulares muito importantes das séries de funções.

8.1 Definição e generalidades

Seja x uma variável. Uma série de potências de x é uma série de funções da forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

onde cada $a_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$ é um número real.

Da mesma forma, para um real b, chama-se uma séria de potências de $x - b$ a uma séria da forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \big(x-b\big)^n = a_0 + a_1(x-b) + a_2(x-b)^2 + \ldots + a_n(x-b)^n + \ldots$$

8.2 Intervalo e raio de convergência

Seja o caso mais geral das séries de potências, i.e. a série de potências de $x-b$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \big(x-b\big)^n. \tag{8.1}$$

Em relação à série (8.1) o nosso objectivo é determinar o seu raio de convergência e determinar os valores de x para os quais a série em causa converge.

Passando à série dos módulos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mid a_n \big(x-b\big)^n \mid, \tag{8.2}$$

e impondo convergência na mesma, obtemos os valores de x para os quais a série (8.2) converge, e ao invocar o Teorema 7.15 e Definição 7.2 ficamos a saber que a série (8.1) converge absolutamente para os mesmos valores de x. De seguida vamos analisar este assunto de forma mais precisa.

Tendo em conta a descrição anterior ao aplicar o Critério de D'Alembert à série dos módulos (8.2), com imposição de convergência, vem

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mid a_{n+1}\big(x-b\big)^{n+1} \mid}{\mid a_n\big(x-b\big)^n \mid} < 1,$$

i.e.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mid a_{n+1} \mid}{\mid a_n \mid} \mid x-b \mid < 1.$$

Designando por R o seguinte limite, i.e.

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mid a_n \mid}{\mid a_{n+1} \mid}, \tag{8.3}$$

vamos obter

$$\frac{1}{R} \mid x-b \mid < 1 \Rightarrow \mid x-b \mid < R,$$

i.e.

$$b-R < x < b+R, \ \text{ ou seja } \ x \in \,]b-R, b+R[.$$

Concluimos, pelo que foi dito anteriormente, que a série (8.1) é absolutamente convergente para os valores de x tais que $\mid x-b \mid < R$ e diverge para os valores de x tais que $\mid x - b \mid > R$. Caso o limite (8.3) exista, R designa-se por *raio de convergência* e é equivalente, via Observação 7.5, ao seguinte limite[1]:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{8.4}$$

Como consequência, temos o seguinte teorema:

Teorema 8.1 *A cada série* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \big(x - b\big)^n$ *está associado o raio de convergência* $R \geqslant 0$ *ou* $+\infty$ *de tal maneira que a série é absolutamente convergente nos pontos* x *tais que* $|x - b| < R$ *e divergente nos pontos* x *tais que* $|x - b| > R$*, sendo*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{8.5}$$

Demonstração: Consultar Sarrico [4]. ⫛

Tem-se a partir deste teorema que o conjunto de valores x para os quais a série de potências (8.1) converge é um intervalo centrado em $x = b$ tal que $|x - b| < R$, e diverge para os valores de x tais que $|x - b| > R$, ver Figura 8.1.

Para terminar, falta estudar a natureza da série (8.1) nos extremos do intervalo $]b-R, b+R[$, i.e. falta estudar as situações $x = b-R$ e $x = b+R$. Para tal, temos que substituir $x = b-R$ e $x = b+R$ na série (8.1) e estudar a série numérica associada a tais situações. É necessário realizar o estudo da convergência da série nos extremos do intervalo $]b - R, b + R[$ pois para esses valores o Critério de D'Alembert não é conclusivo. O estudo descrito atrás também podia ser feito aplicando o Critério de Cauchy, com imposição de convergência.

8.3 Séries de Taylor e Mac-Laurin

Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função indefinidamente diferenciável num ponto em I. Fixando $a \in I$, chama-se série de Taylor da função f em torno do ponto $x = a$, à série

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= \frac{f(a)}{0!} + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots \end{aligned}$$

[1]Dada uma sucessão numérica u_n, chama-se sublimite da sucessão a qualquer número que seja limite de uma subsucessão de u_n. Seja M o maior de todos os sublimites de u_n, então diz-se que M é o *limite superior* de u_n e representa-se por $\overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n = M$. Se u_n é uma sucessão convergente então $\lim_{n\to+\infty} u_n = \overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n$. Para analisar este assunto com mais detalhe, ver Sarrico [4].

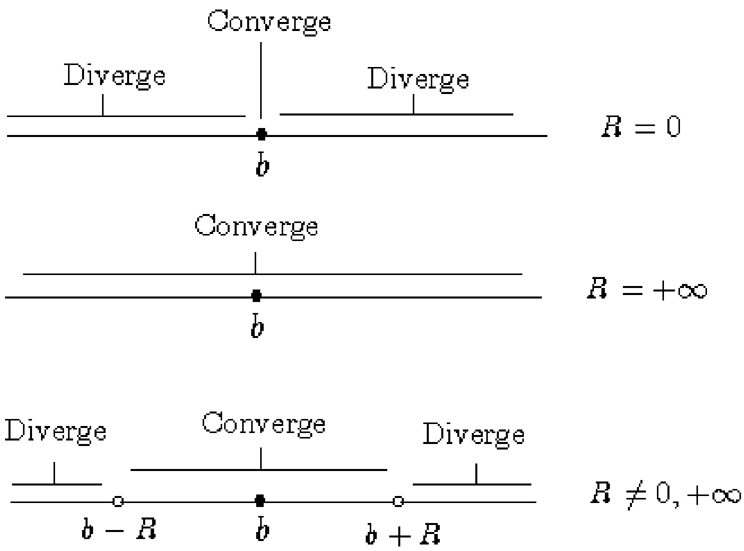

Figura 8.1: Interpretação geométrica do raio e intervalo de convergência. Nesta figura a natureza da série (8.1) não foi analisada nos extremos do intervalo $]b - R, b + R[$.

a qual é uma série de potências de $x - a$.

Da mesma forma, se $a = 0 \in I$, chama-se série de Mac-Laurin da função f em torno do ponto $x = 0$, à série

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\ &= \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \ldots \end{aligned}$$

a qual é uma série de potências de x.

Observação 8.1 *A expressão $f^{(n)}(a)$ representa a derivada de ordem n da função f no ponto a. Por convenção, $f^{(0)}(a) \equiv f(a)$.*

De seguinda vamos apresentar condições que garantem a existência dos desenvolvimentos anteriores.

Definição 8.1 *Sejam a um número real e f uma função indefinidamente diferenciável no ponto a. O polinómio de grau n de Taylor, i.e. $P_n(x)$ de f em a é* *dado por:*

$$P_n(x) = \frac{f(a)}{0!} + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Observação 8.2 *Se $a = 0$ da definição anterior temos que*

$$P_n(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

é o polinómio de Mac-Laurin de grau n de f.

Teorema 8.2 (O resto da fórmula de Taylor) *Seja f dotada de $n+1$ derivadas num intervalo que contém a. Se x é um número diferente de a no intervalo, então existe um número ζ entre a e x tal que $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ onde*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Demonstração: Consultar Ferreira [8].⫛

No caso em que $a = 0$, o teorema anterior está relacionado com o resto da fórmula de Mac-Laurin. O teorema seguinte dá-nos condições suficientes para a existência do desenvolvimento de uma função f em série de potências.

Teorema 8.3 *Seja f uma função indefinidamente diferenciável num intervalo que contém a, e seja $R_n(x)$ o resto de Taylor de f em a. Se*

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$$

para todo o x no intervalo em causa, então $f(x)$ é representada pela série de Taylor para $f(x)$ em a. Quando $a = 0$, o mesmo acontece para a série de Mac-Laurin.

Demonstração: Consultar Ferreira [8].⫛

De seguida vamos apresentar dois teoremas com muita utilidade prática. Um sobre a diferenciação de uma série de potências, e o outro sobre a integração de uma série de potências, respectivamente.

Teorema 8.4 *Suponha que uma função f está representada por uma série de potências em $x - a$ com raio de convergência $R \neq 0$, i.e.*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} K_n(x-a)^n, \quad x \in]a-R, a+R[.$$

Então:

(i) A função f é diferenciável no intervalo $]a-R, a+R[$.

(ii) Se a representação de f por uma série de potências for diferenciável termo a termo, então a série resultante tem raio R e converge para f' sobre o intervalo $]a-R, a+R[$, i.e.

$$\frac{df}{dx}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dx}\Big[K_n(x-a)^n\Big], \quad x \in]a-R, a+R[.$$

Demonstração: Consultar Anton [3].⫛

Teorema 8.5 *Suponha que uma função f está representada por uma série de potências em $x-a$ com raio de convergência $R \neq 0$, i.e.*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} K_n(x-a)^n, \quad x \in]a-R, a+R[.$$

Então:

(i) Se a representação de f por uma série de potências for integrável termo a termo, então a série resultante tem raio R e converge para $\int f(x)dx$ no intervalo $]a-R, a+R[$, i.e.

$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big[\int K_n(x-a)^n dx\Big] + c, \quad x \in]a-R, a+R[, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(ii) Se α e β forem pontos do intervalo $]a-R, a+R[$ e se a representação de f em série de potências for integrável termo a termo de α até β, então a série numérica resultante converge absolutamente em $]a-R, a+R[$, e tem-se

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big[\int_\alpha^\beta K_n(x-a)^n dx\Big].$$

Demonstração: Consultar Anton [3].⫛

8.4 Exercícios para aulas teóricas

1. Determine o raio de convergência das seguintes séries de potências, assim como o intervalo onde a mesma converge e diverge, i.e. a natureza das séries em $\mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{(x+1)^n}{2^n n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!x^n}.$$

2. Desenvolva em série de potências de x (i.e. série de Mac-Laurin) as seguintes funções:

$$f(x) = e^x, \;\; f(x) = sin(x), \;\; f(x) = (1+x)^\alpha.$$

3. Desenvolva em série de potências de $x-2$ (i.e. série de Taylor) as seguintes funções:

$$f(x) = ln(x), \;\; f(x) = \frac{1}{x(x-1)}.$$

4. Utilize séries de Mac-Laurin para determinar o seguinte limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sin(x)}{x}.$$

5. Utilize a derivação e a integração para desenvolver em série de potências de x a função $f(x) = arctg(x)$.

8.5 Exercícios para aulas práticas

1. Determine o raio de convergência das seguintes séries de potências, assim como o intervalo onde a mesma converge e diverge:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n!(x-1)^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1-x)^n}.$$

2. Desenvolva em série de potências de x (i.e. série de Mac-Laurin) as seguintes funções:

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \;\; f(x) = cos(x), \;\; f(x) = ln(x+1).$$

3. Desenvolva em série de potências de $x - 1$ (i.e. série de Taylor) as seguintes funções:
$$f(x) = ln(3 - x), \;\; f(x) = x^2 ln(x^2), \;\; f(x) = e^{-x}.$$

4. Utilize séries de Mac-Laurin para determinar o seguinte limite:
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}.$$

5. Utilize a derivação e a integração para desenvolver em série de potências de x a função $f(x) = arcsin(x)$.

8.6 Exercícios para trabalho de casa

1. Determine o raio de convergência das seguintes séries de potências, assim como o intervalo onde a mesma converge e diverge:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \;\; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2 (x)^n}{(2n)!}, \;\; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}, \;\; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(x-2)^n (n+2)}.$$

2. Desenvolva em série de potências de x (i.e. série de Mac-Laurin) as seguintes funções:
$$f(x) = \frac{e^{2x}}{1+2x}, \;\; f(x) = tg(x),$$
$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)}, \;\; f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x}.$$

3. Desenvolva em série de potências de $x - 4$ (i.e. série de Taylor) as seguintes funções:
$$f(x) = \sqrt{x}, \;\; f(x) = \frac{1}{x}.$$

4. Utilize séries de Mac-Laurin para determinar ao seguinte limite:
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

5. Sabendo que
$$sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$
determine o desenvolvimento da função $f(x) = cos(x)$ numa série de potências de x, usando: derivação e primitivação.

Capítulo 9

Equações Diferenciais Ordinárias

"The imaginary number is a fine and wonderful recourse of the divine spirit, almost an amphibian between being and not being"

Gottfried W. Leibniz

As equações diferenciais têm amplas aplicações na resolução de problemas complexos sobre movimento, vibrações, aerodinâmica, hidrodinâmica e todo o tipo de fenómenos físicos que envolvam taxas de variação de quantidades variáveis. De seguida iremos estudar apenas os casos mais simples, i.e. as equações diferenciais lineares com coeficientes constantes.

Definição 9.1 *Uma equação diferencial linear de ordem n é uma equação da forma*

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = \xi, \tag{9.1}$$

onde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ e ξ são constantes, com $a_n \neq 0$. Se $\xi = 0$, a equação diz-se homogénea. Por outro lado, se $\xi \neq 0$, a equação diz-se não-homogénea.

Chama-se *problema de valores iniciais* ao problema que consiste em encontrar a solução de uma equação diferencial que satisfaça certas condições num ponto de um intervalo I subconjunto de $\mathbb{R}$. Por outro lado, chama-se *problema de valores na fronteira* ao problema que consiste em encontrar a solução de uma equação diferencial que satisfaça condições dadas em mais de um ponto do intervalo I.

Exemplo de uma equação diferencial não-homogénea de ordem 2, com valores iniciais:

$$\begin{cases} y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 5, \\ \\ y'(0) = 1, \;\; y(0) = 1. \end{cases}$$

Da mesma forma a equação diferencial homogénea de ordem 2

$$\begin{cases} y''(t) - 3y'(t) + y(t) = 0, \\ \\ y'(0) = 1, \;\; y(2) = 1, \end{cases}$$

é um problema de valores na fronteira.

Finalmente podemos colocar a seguinte questão:

Como encontrar a solução da equação diferencial (9.1)*?*

De seguida iremos analisar a resposta de tal questão.

9.1 Equações diferenciais lineares homogéneas de ordem n

Seja a seguinte equação diferencial linear homogénea de ordem n:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0, \;\; a_n \neq 0. \qquad (9.2)$$

Da equação anterior, e estabelecendo a seguinte correspondência:

$$y^{(n)}(t) \to k^n, \; y^{(n-1)}(t) \to k^{n-1}, \; \ldots, \; y'(t) \to k, \; y(t) \to 1$$

temos a seguinte equação característica

$$a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \ldots + a_1 k + a_0 = 0,$$

de raízes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Em relação às raízes, tem-se as seguintes possibilidades (onde $C_j, B_j \in \mathbb{R}$):

1. Para raízes reais α corresponde uma solução particular

$$C_1 e^{\alpha t}.$$

2. Para raízes reais α de multiplicidade r, corresponde r soluções particulares linearmente independentes

$$C_0e^{\alpha t},\ C_1te^{\alpha t},\ C_2t^2e^{\alpha t},\ldots,C_{r-1}t^{r-1}e^{\alpha t}.$$

3. Para qualquer par de raízes complexas conjugadas[1] $\alpha \pm i\beta$ correspondem duas soluções particulares

$$C_1e^{\alpha t}cos(\beta t) \ \text{ e } \ C_2e^{\alpha t}sin(\beta t).$$

4. Para qualquer par de raízes complexas conjugadas $\alpha \pm i\beta$ de multiplicidade r, correspondem $2r$ soluções particulares

$$C_0e^{\alpha t}cos(\beta t),\ C_1te^{\alpha t}cos(\beta t),\ C_2t^2e^{\alpha t}cos(\beta t),\ldots,C_{r-1}t^{r-1}e^{\alpha t}cos(\beta t);$$

$$B_0e^{\alpha t}sin(\beta t),\ B_1te^{\alpha t}sin(\beta t),\ B_2t^2e^{\alpha t}sin(\beta t),\ldots,B_{r-1}t^{r-1}e^{\alpha t}sin(\beta t).$$

Quando uma equação diferencial reúne as soluções particulares anteriores, digamos, $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ que são linearmente independentes, tem-se que a solução da equação diferencial (9.2) (consultar bibliografia), é dada por

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + \ldots + y_n(t).$$

Teorema 9.1 *Dadas duas soluções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ da equação diferencial* (9.2)*, tem-se que $y_1(t) + y_2(t)$ ainda é uma solução da equação* (9.2)*.*

Demonstração: Consultar Piskounov [10]. ⫛

9.2 Equações diferenciais lineares não-homogéneas de ordem n

Seja a seguinte equação diferencial linear não-homogénea de ordem n:

$$a_ny^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1y'(t) + a_0y(t) = \xi,\ \ a_n, \xi \neq 0. \tag{9.3}$$

[1] Onde $i = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária.

Teorema 9.2 *A solução da equação diferencial* (9.3), *é dada por*

$$y(t) = y_1(t) + y_*(t),$$

onde $y_1(t)$ *é a solução do problema homogéneo associado, e* $y_*(t)$ *é uma solução particular da equação não-homogénea.*

Demonstração: Consultar Piskounov [10]. ⫛

Para simplificar o nosso estudo, vamos apenas estudar soluções particulares do tipo

$$y_*(t) = ht^\beta, \quad h \in \mathbb{R}, \quad \beta \geqslant 0.$$

Considerando $y(t) = y_1(t) + y_*(t)$ uma solução da equação diferencial (9.3), com $y_1(t)$ a solução do problema homogéneo de grau n associado, e $y_*(t) = ht^\beta$ uma solução particular, tem-se ao substituir $y(t)$ na expressão (9.3)

$$\begin{aligned} \xi &= a_n\beta(\beta-1)\ldots(\beta-(n-1))ht^{\beta-n} + \ldots + a_2\beta(\beta-1)ht^{\beta-2} \\ &+ a_1\beta ht^{\beta-1} + a_0ht^\beta \end{aligned} \tag{9.4}$$

e, da expressão anterior podemos determinar o valor de β (o valor de n é conhecido) de modo que a igualdade entre o lado esquerdo e o lado direito seja igual a uma constante, para tal basta escolher o maior expoente dos $\beta - n$ (tenha em conta que $\beta \geqslant 0$) e igualá-lo a zero. E, assim, com o parâmetro β identificado em (9.4) podemos determinar o valor de h, escrever a solução particular e como consequência escrever a solução da equação diferencial (9.3).

9.3 Exercícios para aulas teóricas

1. De acordo com os dados das Nações Unidas, a população mundial no começo de 1990 era de, aproximadamente, 5.3 bilhões e crescendo a uma taxa de 2% ao ano. Supondo um modelo de crescimento exponencial do tipo

$$y'(t) - py(t) = 0, \quad y(0) = y_0,$$

estime a população mundial no início do ano de 2015. É, de notar, que a taxa de crescimento relativo a 2% por unidade de tempo em um modelo de crescimento exponencial significa $p = 0.02$ na nossa equação.

2. Resolva as seguintes equações diferenciais:

$$y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = 0, \quad y'(t) + 2y(t) = 8.$$

3. Resolva as seguintes equações diferenciais:

$$6y''(t) - 7y'(t) + y(t) = 0, \ y(0) = 10, \ y'(0) = 5,$$

$$y'''(t) - 4y''(t) = 5, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 1, \ y''(0) = 10/8.$$

4. Confirme que $y(t) = e^t$ e $y(t) = e^{-t}$ são soluções da equação diferencial $y''(t) - y(t) = 0$. E, além disso, determine outra solução tal que $y(0) = 1$ e $y'(0) = 1$.

9.4 Exercícios para aulas práticas

1. Considere um peso de massa m suspenso por uma mola vertical, o qual é deixado numa posição de equilíbrio. Suponha que o peso é, então, colocado em movimento vibratório vertical. O modelo matemático que descreve tal movimento vibratório é designado por *modelo harmónico simples*, i.e.

$$y''(t) + \frac{k}{m}y(t) = 0,$$

onde k é uma constante positiva, chamada constante da mola. Determine a solução da equação diferencial homogénea em causa.

2. Resolva as seguintes equações diferenciais:

$$y''(t) - 2y'(t) + 5y(t) = 0, \quad y'''(t) - y''(t) + 9y'(t) - 9y(t) = 0,$$

$$y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = 2.$$

3. Resolva as seguintes equações diferenciais:

$$y''(t) - y(t) = 0, \ y(0) = 1, \ y'(1) = 0,$$

$$y'''(t) - 2y''(t) + 2y'(t) - y(t) = 2, \ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$$

4. Verifique que $y(t) = C_1e^{kt} + C_2e^{-kt}$, com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ é solução da equação diferencial

$$y''(t) - k^2y(t) = 0.$$

9.5 Exercícios para trabalho de casa

1. Quando uma droga (digamos, penicilina ou aspirina) é administrada a um indivíduo, ela entra na corrente sanguínea e, então, é absorvida pelo organismo no decorrer do tempo. Pesquisas médicas mostraram que a quantidade de uma droga presente na corrente sanguínea tende a decrescer a uma taxa proporcional à quantidade de droga presente - quanto mais droga estiver presente na corrente sanguínea, mais rapidamente ela será absorvida pelo corpo. Para traduzir este princípio num modelo matemático, suponha que $y = y(t)$ seja a quantidade de droga presente na corrente sanguínea no instante t. A cada instante, a taxa de variação de y em relação a t é $y'(t)$, assim, a hipótese de que o decrescimento da taxa é proporcional à quantidade y na corrente sanguínea traduz-se na equação diferencial

$$y'(t) = -py(t)$$

onde p é uma constante de proporcionalidade positiva a qual depende da droga e pode ser determinada experimentalmente. O sinal negativo é requerido, pois y decresce com o tempo. Assim, se a dosagem inicial da droga for conhecida, digamos $y = y_0$ em $t = 0$, então a fórmula geral para $y(t)$ pode ser obtida resolvendo-se o problema de valor inicial

$$y'(t) + py(t) = 0, \;\; y(0) = y_0,$$

determine a solução da equação diferencial linear homogénea em causa.

2. Resolva as seguintes equações diferenciais:

$$y''(t) - 4y'(t) + 13y(t) = 0, \quad y^{(v)}(t) - 4y'''(t) = 5.$$

3. Resolva as seguintes equações diferenciais:

$$y''(t) - 4y'(t) + 13y(t) = 0, \; y(0) = 2, \; y'(0) = 1;$$
$$y''(t) - y'(t) = 3, \; y(0) = 2, \; y'(0) = 1.$$

4. Considere a seguinte equação diferencial ordinária homogénea de ordem 2:

$$y''(t) + 4y(t) = 0$$

$i)$ Verifique se a função $y(t) = te^{-2t} + cos(-2t)$ satisfaz a equação diferencial dada.

$ii)$ Determine a solução da equação diferencial dada com condições de fronteira

$$y(0) = 1, \;\; y'(\frac{\pi}{2}) = 2$$

Bibliografia

[1] Figueira, Mário, 1996, Fundamentos de Análise Infinitesimal, Textos de Matemática, Univ. de Lisboa, Fac. de Ciências, Departamento de Matemática.

[2] Anton, Howard, 1999, Cálculo um novo horizonte, Vol.I, 6ªEdição, Bookman.

[3] Anton, Howard, 1999, Cálculo um novo horizonte, Vol.II, 6ªEdição, Bookman.

[4] Sarrico, Carlos, 1997, Análise Matemática, leituras e exercícios, Trajectos Ciência, Gradiva, Lisboa.

[5] Swokowski, Earld William, 1994, Cálculo com geometria analítica, Vol.2, 2ª edição, Makron Books do Brasil editora, Ltda.

[6] Apostol, M.T., 1994, Cálculo, Vol.I, 2ªEdição, Editora Reverté, Ltda.

[7] Apostol, M.T., 1994, Cálculo, Vol.II, 2ªEdição, Editora Reverté, Ltda.

[8] Ferreira, J.Campos, 1987, Introdução à Análise Matemática, 3ªEdição, Fundação Calouste Gulbenkian.

[9] Piskounov, N., 1988, Cálculo Diferencial e Integral, Vol.I, 12ªEdição, Editora Lopes da Silva.

[10] Piskounov, N., 1988, Cálculo Diferencial e Integral, Vol.II, 12ªEdição, Editora Lopes da Silva.