

Mestrado em Matemática Aplicada  
Universidade de Évora  
Biénio 1995/1996–1996/1997

**Teoria de Campo Conforme  
e  
Aplicação ao Modelo de Hubbard Unidimensional**

Tese de Mestrado de

**João Miguel Espiguinha Guerra**

Orientada por  
José Manuel Pereira Carmelo

Évora – 1998

Mestrado em Matemática Aplicada  
Universidade de Évora  
Biénio 1995/1996–1996/1997

**Teoria de Campo Conforme  
e  
Aplicação ao Modelo de Hubbard Unidimensional**

Tese de Mestrado de

João Miguel Espiguinha Guerra

Orientada por  
José Manuel Pereira Carmelo

95-947

Évora – 1998

## Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, ao meu orientador, o Professor José Carmelo, pela sua inestimável ajuda e pela forma incansável como acompanhou o trabalho de investigação que deu origem à tese que aqui se apresenta. Os méritos desta investigação devem-se, em grande parte, a ele e ao seu profundo conhecimento da Física.

Gostaria de agradecer também ao Professor José Ribeiro, pela sua disponibilidade para o esclarecimento de dúvidas, pela leitura prévia que fez desta tese e pelas críticas e sugestões que apresentou.

A minha palavra de apreço e agradecimento vai também para o Luís Miguel Martelo, com quem realizei grande parte da investigação que aqui se apresenta e que me ajudou a compreender muitos aspectos da Física da Matéria Condensada e da Teoria de Campo Conforme. Agradeço-lhe também a leitura que fez deste texto, os erros que detectou e os seus comentários e sugestões.

*Dedico esta tese aos meus pais e à Gabriela.*

Esta tese foi realizada com o apoio da Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica, através da bolsa BM/7092/95 do Programa "Praxis XXI".



## Conteúdo

Agradecimentos	3
Capítulo 1. Introdução	7
1.1. A teoria de campo conforme	7
1.2. Fenómenos críticos	8
1.3. Aplicações a modelos electrónicos unidimensionais	10
1.4. Organização da tese	11
<b>Parte I. Teoria de campo conforme</b>	<b>13</b>
Capítulo 2. Transformações conformes	15
2.1. Variedades semi-Riemannianas	15
2.2. Transformações conformes e campos de Killing conformes	16
2.3. A classificação das transformações conformes	23
Capítulo 3. O grupo conforme	29
3.1. A álgebra de Witt	29
3.2. O grupo conforme de $\mathbb{R}^{2,0}$	31
Capítulo 4. A invariância conforme clássica e quântica	35
4.1. O tensor energia-momento	35
4.2. A invariância conforme clássica	38
4.3. A invariância conforme quântica	40
4.4. As dimensões conformes e os efeitos de tamanho finito	48
4.5. Axiomática da teoria de campo	50
4.6. Axiomática da teoria de campo conforme	53
Capítulo 5. Teoria da representação da Álgebra de Virasoro	57
5.1. Representações e módulos	57
5.2. Módulos de Verma	58
5.3. Unitariedade e irreducibilidade das representações	61
<b>Parte II. Aplicação da teoria de campo conforme ao modelo de Hubbard unidimensional</b>	<b>67</b>
Capítulo 6. O modelo de Hubbard unidimensional	69
6.1. Introdução ao modelo de Hubbard	69
6.2. O modelo de Hubbard unidimensional	71
6.3. A álgebra de operadores de pseudopartículas	73

6.4. O conceito de estado fundamental generalizado	74
6.5. O Hamiltoniano nos pontos críticos	76
Capítulo 7. Aplicação da teoria de campo conforme ao modelo de Hubbard	81
7.1. As álgebras de Virasoro do modelo	81
7.2. As dimensões conformes dos campos primários	83
7.3. As funções de correlação	86
Capítulo 8. Conclusões	89
Apêndice A. Algumas definições	91
A.1. Os limites das pseudo-zonas de Brillouin	91
A.2. Os pseudo-pontos de Fermi e as funções $f$	92
Apêndice B. Cálculos auxiliares	93
B.1. As relações de comutação das álgebras de Virasoro	93
B.2. As funções de correlação dos campos primários	94
Bibliografia	97

## CAPÍTULO 1

### Introdução

#### 1.1. A teoria de campo conforme

A teoria de campo conforme é fundamental na física estatística, na física da matéria condensada e na teoria das cordas, pois o seu sucesso na descrição de transições de fase de segunda ordem em sistemas físicos bidimensionais é essencial para estas disciplinas. Por outro lado, a grande variedade de conceitos matemáticos necessários para definir e resolver os problemas que ela coloca aos investigadores, tornaram a teoria de campo conforme uma das áreas mais activas de investigação em física teórica e em física-matemática.

A teoria de campo conforme bidimensional ilustra exemplarmente como as simetrias que os sistemas físicos exibem são tão poderosas que, só por si, permitem resolver exactamente muitos problemas. A invariância conforme é basicamente uma generalização da invariância sob transformações de escala. É natural que um sistema físico dominado por interações locais e que é simétrico sob dilatações globais, também seja simétrico sob dilatações locais ou infinitesimais. As transformações conformes são essencialmente dilatações locais ou transformações de escala que dependem da posição ou das coordenadas do espaço. Estas dilatações locais também podem ser interpretadas como transformações que preservam os ângulo de intersecção entre duas curvas (ver figura 1.1.1).

Quando o espaço onde se aplica a teoria de campo conforme tem dimensão 3 ou superior, o número de transformações conformes é reduzido (basta um número finito de parâmetros para especificar uma transformação), pelo que a invariância conforme a dimensões  $d \geq 3$  não fornece muita informação sobre os sistemas físicos. Contudo, a duas dimensões, o número de transformações conformes é muito maior – é necessário um

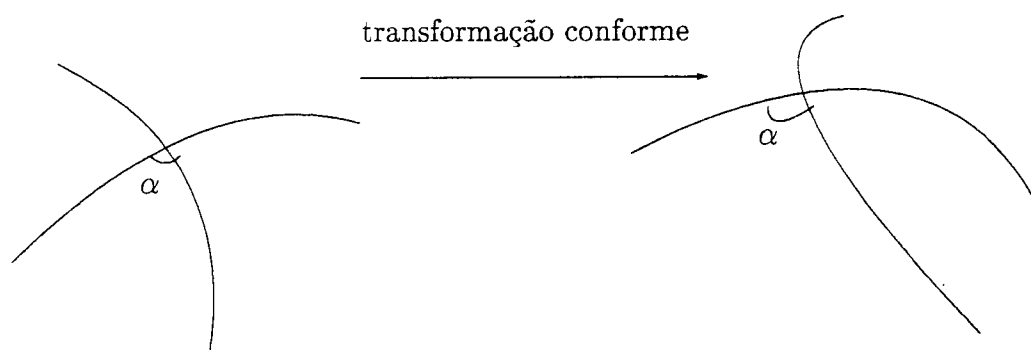


FIGURA 1.1.1. As transformações conformes preservam o ângulo de intersecção entre duas curvas.

número infinito de parâmetros para especificar uma transformação. No plano complexo, por exemplo, as transformações conformes são todas as transformações holomorfas. O sucesso da teoria de campo conforme a duas dimensões deve-se a esta grande abundância de transformações conformes, que torna a invariância conforme muito poderosa e permite determinar as funções de correlação em muitos sistemas críticos.

## 1.2. Fenómenos críticos

Na Física Estatística, a teoria de campo conforme é muito útil na descrição de fenômenos críticos a duas dimensões. Esclarece-se a seguir o que se entende por fenômeno crítico. Considere-se, por exemplo, um ferromagnete uniaxial submetido a um campo magnético exterior. Entre as várias forças em presença neste sistema, escolha-se apenas a interação magnética que emparelha "spins" de átomos vizinhos e a interação provocada pelo campo magnético exterior. Este sistema é descrito pelo modelo de Ising e o seu Hamiltoniano é dado por

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - B \sum_i \sigma_i, \quad (1.2.1)$$

onde  $B$  é o campo magnético, os spins  $\sigma_i, \sigma_j$  só podem tomar os valores  $\pm 1$  e a soma é restringida a átomos vizinhos ( $j = i \pm 1$ ). É possível variar a temperatura e o campo magnético externo  $B$ . A invariância sob transformações de escala só é válida se não existirem comprimentos no sistema que sejam afectados pelas transformações de escala. Num sólido existe um comprimento característico – a distância entre dois átomos do sólido, que se representa por  $a$ . Outra escala importante neste sistema é o comprimento de correlação que é definido como a distância típica até onde os spins podem estar estatisticamente correlacionados. Este comprimento denota-se por  $\xi$  e define-se pela relação

$$G_{ij} \equiv \langle \sigma_i \sigma_j \rangle \sim \exp\left(-\frac{|i-j|}{\xi}\right), \quad (1.2.2)$$

onde  $\langle \dots \rangle$  denota o valor médio térmico a uma temperatura  $T$  e  $|i-j|$  é a distância entre os átomos  $i$  e  $j$ .

Para valores genéricos da temperatura e do campo magnético não existe invariância sob transformações de escala no sistema, pois os comprimentos  $a$  e  $\xi$  modificam-se sob essas transformações. Contudo, para determinados valores dos parâmetros externos ( $B$  e  $T$ , neste caso), o comprimento de correlação torna-se infinito. Esta divergência identifica aquilo a que se chama uma *transição de fase de segunda ordem*. Os valores dos parâmetros, para os quais isto acontece, dizem-se pontos críticos e o estudo dos sistemas na vizinhança destes pontos críticos designa-se por estudo dos fenômenos críticos. Quando um sistema se encontra no ponto crítico, para funções de correlação definidas para distâncias muito maiores que o comprimento  $a$  e muito menores que o comprimento de correlação, estes dois comprimentos perdem a relevância e o sistema torna-se invariante sob transformações de escala.



No exemplo aqui tratado, as quantidades termodinâmicas (como o calor específico, por exemplo) são funções analíticas de  $T$  e  $B$ , excepto na linha  $B = 0, T < T_c$  (ver figura 1.2.2).

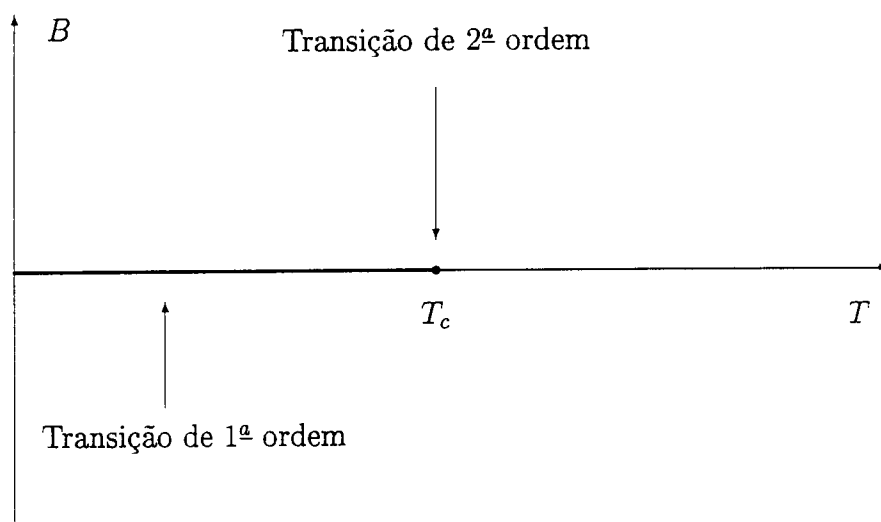


FIGURA 1.2.2. Diagrama de fase.

A magnetização  $M$  é uma função de  $B$  e de  $T$ . A baixa temperatura ( $T < T_c$ ),  $M$  é descontínua ao longo da linha  $B = 0$ , o que caracteriza uma transição de fase de primeira ordem. A alta temperatura ( $T > T_c$ ),  $M$  é contínua e a sua derivada em ordem a  $B$  é finita (o comprimento de correlação é finito). À medida que  $T$  se aproxima de  $T_c$ , o comprimento de correlação vai aumentando até ser infinito em  $T = T_c$ , onde a magnetização  $M$  é contínua mas a sua derivada em ordem a  $B$  é divergente no ponto  $B = 0$  (ver figura 1.2.3).

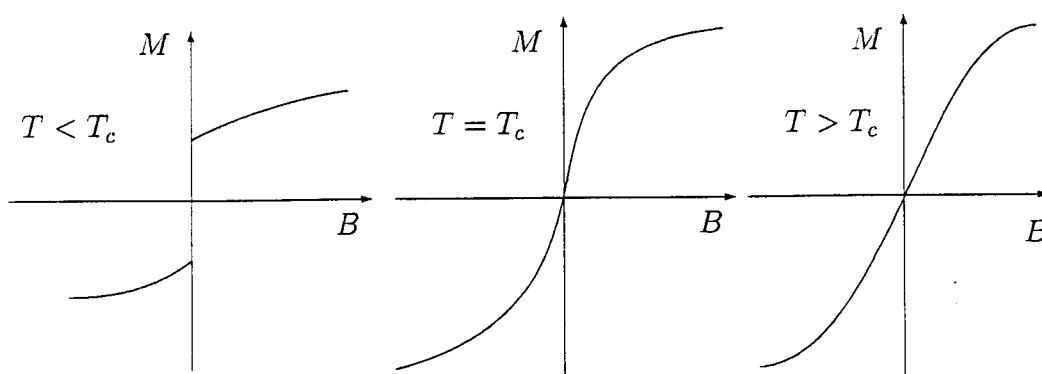


FIGURA 1.2.3. Magnetização em função de  $B$  para vários valores de  $T$ .

No ponto crítico  $T = T_c, B = 0$ , ocorre uma transição de fase de segunda ordem e existem flutuações a todas as escalas. Isto significa que dentro de regiões de spin  $+1$  encontram-se regiões de spin  $-1$ , sendo esta estrutura auto-semelhante (o aspecto geral destas regiões é sempre semelhante, quer se observem zonas do espaço muito grandes ou muito pequenas, desde que o comprimento dessas zonas seja menor que  $\xi$ ). No ponto crítico, as funções de correlação não seguem o comportamento (1.2.2), mas seguem antes uma lei polinomial do tipo

$$G_{ij} \sim \frac{1}{|i-j|^\eta}, \quad (1.2.3)$$

onde  $\eta$  se designa por *expoente crítico*.

O modelo de Ising aqui descrito é apenas um dos muitos modelos que permitem a descrição de sistemas físicos complexos com interações locais. Uma das ideias mais importantes no estudo dos fenómenos críticos é a ideia de universalidade, que se pode exprimir da seguinte forma: apesar da grande variedade de modelos que possuem pontos críticos, os seus comportamentos no ponto crítico pertencem a um conjunto discreto de classes de universalidade que são caracterizadas pelos expoentes críticos. A teoria de campo conforme permite classificar parcialmente estas classes de universalidade (ver [25, 32]).

Existe uma classe particular de sistemas críticos, onde a temperatura crítica é nula ou muito baixa quando comparada com as energias relevantes dos sistemas – são os sistemas críticos quânticos. Uma descrição quântica destes sistemas é indispensável. A diferença essencial relativamente a sistemas clássicos é que as flutuações que originam as funções de correlação não são de origem térmica mas quântica. Em sistemas quânticos unidimensionais com temperatura crítica  $T = 0K$ , as funções de correlação no ponto crítico seguem uma lei polinomial semelhante a (1.2.3).

O trabalho fundamental que desvendou a natureza da relação entre os fenómenos críticos e a teoria de campo conforme foi um artigo de Belavin, Polyakov e Zamolodchikov [2]. Outras referências importantes sobre o assunto são [7, 8, 25, 32, 35, 37, 39, 55, 56].

### 1.3. Aplicações a modelos electrónicos unidimensionais

Um exemplo importante de um sistema quântico unidimensional é o modelo de Hubbard unidimensional ou a cadeia de Hubbard. Na segunda parte desta tese, aplica-se a teoria de campo conforme a este modelo, que é muito importante para o estudo das correlações electrónicas porque é um modelo aparentemente muito simples, mas onde se consideram algumas das características fundamentais dos fenómenos que ocorrem na Física da matéria condensada [45, 59]. O modelo descreve electrões num sólido unidimensional. Estes electrões interactuam fortemente e na definição do modelo consideram-se interacções não lineares entre electrões. A solução exacta deste modelo pode ser obtida através do método designado na literatura por "Bethe Ansatz". É possível aplicar a teoria de campo conforme ao modelo de Hubbard unidimensional usando a solução obtida através do método "Bethe Ansatz" e a álgebra de operadores de pseudopartículas, que foi introduzida em [12, 17, 18, 19]. Esta álgebra gera todos os estados próprios do Hamiltoniano do modelo a partir do vácuo electrónico e permite descrever os fenómenos críticos do sistema, para determinados valores finitos da energia, usando a teoria de campo

conforme. De facto, combinando os resultados obtidos a partir da aplicação da teoria de campo conforme com o número infinito de leis de conservação associadas à integrabilidade do modelo prova-se que, para determinadas energias finitas  $\omega_0$ , é possível determinar os expoentes críticos para as funções de correlação dos campos físicos definidas para energias  $(\omega - \omega_0)$  pequenas. Até agora, apenas os sistemas críticos de baixa energia (com  $\omega_0 = 0$ ) tinham sido estudados através da teoria de campo conforme. Os resultados apresentados na segunda parte desta tese foram introduzidos em [9, 15] e são uma generalização do estudo a baixa energia descrito em [12]. A teoria apresentada pode ser aplicada a qualquer modelo electrónico unidimensional integrável e permite obter informação relevante sobre as propriedades electrónicas a energias finitas de sólidos quasi-unidimensionais.

#### 1.4. Organização da tese

Esta tese divide-se em duas partes. Na parte I, são apresentados os conceitos e resultados básicos da teoria de campo conforme. A apresentação da teoria segue de perto as referências [32, 55, 56]. No capítulo 2 define-se, de forma matemática rigorosa, o conceito de transformação conforme, apresentam-se alguns exemplos e classificam-se os tipos de transformações conformes para as situações mais importantes. No capítulo 3 estuda-se um grupo importante de transformações conformes – as transformações conformes globais – e prova-se que os geradores das transformações conformes infinitesimais formam uma álgebra de Lie de dimensão infinita – a álgebra de Witt. No capítulo 4 é discutida a forma como a invariância conforme é utilizada em modelos da física quântica. Define-se o tensor energia-momento, descrevem-se as leis de transformação de alguns campos "especiais" da teoria – os campos primários e quasi-primários –, estuda-se a álgebra de Virasoro, que é a álgebra de Lie dos geradores das transformações conformes, apresenta-se um método para determinar as dimensões conformes (ou expoentes críticos) dos campos primários da teoria e, finalmente, descreve-se resumidamente a axiomática da teoria de campo conforme. No capítulo 5 estuda-se, de forma matemática rigorosa, a teoria de representação da álgebra de Virasoro.

A parte II é dedicada à aplicação da teoria apresentada na parte I ao problema quântico do modelo de Hubbard unidimensional. No capítulo 6 define-se o modelo de Hubbard unidimensional, introduz-se a álgebra de operadores de pseudopartículas, discutem-se as consequências da infinidade de leis de conservação do sistema e apresenta-se o Hamiltoniano do modelo no ponto crítico. No capítulo 7 estuda-se a teoria de campo conforme associada ao modelo. Determina-se a representação das álgebras de Virasoro do modelo, determinam-se as dimensões conformes dos campos primários e apresenta-se a fórmula geral para as funções de correlação dos campos físicos. Finalmente, no último capítulo, apresentam-se as conclusões desta tese.



Parte I

Teoria de campo conforme



## CAPÍTULO 2

### Transformações conformes

#### 2.1. Variedades semi-Riemannianas

Nesta secção define-se o conceito de variedade semi-Riemanniana, que é suficientemente geral para definir os espaços de base para a teoria de campo conforme. Apresenta-se um exemplo que, ao longo dos próximos capítulos, vai servir para exemplificar os conceitos e que é muito importante nas aplicações da teoria de campo conforme.

**DEFINIÇÃO 2.1.1.** Uma *variedade semi-Riemanniana* é um par  $(M, g)$ , onde  $M$  é uma variedade diferencial de classe  $C^\infty$  e  $g$  é um campo tensorial diferenciável que associa a cada ponto  $a \in M$  uma forma bilinear, não degenerada e simétrica<sup>1</sup>, definida no espaço tangente à variedade  $M$  no ponto  $a$ :

$$g_a : T_a M \times T_a M \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2.1.3)$$

**OBSERVAÇÃO 2.1.2.** Considerem-se coordenadas locais,  $x^1, x^2, \dots, x^n$ , da variedade semi-Riemanniana  $M$ , de dimensão  $n$ , dadas por uma carta de coordenadas:

$$\begin{aligned} \varphi : U &\rightarrow V \\ \varphi(a) &= (x^1(a), \dots, x^n(a)), \end{aligned}$$

onde  $U$  é um subconjunto aberto de  $M$  e  $V$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ . A forma bilinear referida na definição anterior pode ser representada por

$$g_a(X, Y) = g_{\mu\nu}(a)X^\mu Y^\nu, \quad (2.1.4)$$

onde os vectores  $X, Y$  pertencem a  $T_a M$  e, na base

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (\mu = 1, \dots, n),$$

têm a representação  $X = X^\mu \partial_\mu$  e  $Y = Y^\nu \partial_\nu$ . A forma bilinear pode ser representada matricialmente, da seguinte forma:

$$g_a = [g_{\mu\nu}(a)]_{\mu, \nu=1, \dots, n}. \quad (2.1.5)$$

---

<sup>1</sup>Na forma matricial, a forma  $g_a$  é não degenerada se e só se

$$\det [g_{\mu\nu}(a)] \neq 0, \quad \text{para } a \in M, \quad (2.1.1)$$

e é simétrica se e só se

$$[g_{\mu\nu}(a)]^T = [g_{\mu\nu}(a)] \quad \text{para } a \in U. \quad (2.1.2)$$

A diferenciabilidade do campo tensorial  $g$  implica a diferenciabilidade dos coeficientes de matriz  $g_{\mu\nu}(a)$  relativamente a  $a$ . Esta matriz é frequentemente designada na literatura por métrica.

EXEMPLO 2.1.3. Os espaços  $\mathbb{R}^{p,q}$  definem-se da seguinte forma:

$$\mathbb{R}^{p,q} \equiv (\mathbb{R}^{p+q}, g^{p,q}) \quad (p, q \in \mathbb{N}_0), \quad (2.1.6)$$

onde

$$g^{p,q}(X, Y) \equiv \sum_{i=1}^p X^i Y^i - \sum_{i=p+1}^{p+q} X^i Y^i. \quad (2.1.7)$$

De acordo com a observação anterior, a representação matricial da forma bilinear  $g^{p,q}$  é diagonal e dada por

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1}_q \end{bmatrix}. \quad (2.1.8)$$

onde  $\mathbf{1}_p$  e  $\mathbf{1}_q$  são as matrizes unidade de dimensão  $p$  e  $q$ , respectivamente, e  $\mathbf{0}$  representa matrizes com todas as entradas nulas e com as dimensões convenientes, de forma a que a matriz (2.1.8) tenha dimensões  $(p+q) \times (p+q)$ . De acordo com a definição 2.1.1 e com a observação 2.1.2, os espaços  $\mathbb{R}^{p,q}$  são variedades semi-Riemannianas. Ao espaço  $\mathbb{R}^{1,1}$  chama-se *espaço de Minkowski* bidimensional e o espaço  $\mathbb{R}^{2,0}$  designa-se por *espaço Euclideano* bidimensional.

## 2.2. Transformações conformes e campos de Killing conformes

Nesta secção definem-se os conceitos de transformação conforme e de campos de Killing conformes. Este último conceito é útil para classificar as transformações conformes, como se verá na próxima secção.

DEFINIÇÃO 2.2.1. Considerem-se duas variedades semi-Riemannianas, que se representam por  $(M, g)$  e  $(M', g')$ . Sejam  $U$  e  $V$  dois subconjuntos abertos de  $M$  e de  $M'$ , respectivamente. Uma aplicação diferenciável  $\varphi : U \rightarrow V$  diz-se uma *transformação conforme* se existir uma função diferenciável  $\Omega : U \rightarrow \mathbb{R}_+$ , tal que

$$\varphi^* g' = \Omega^2 g, \quad (2.2.1)$$

onde se define

$$\varphi^* g'(X, Y) \equiv g'(D\varphi(X), D\varphi(Y)), \quad (2.2.2)$$

e  $D\varphi : TU \rightarrow TV$  representa a derivada de  $\varphi$ . A função  $\Omega$  chama-se *factor conforme* de  $\varphi$ .

A seguir apresenta-se uma outra forma de caracterizar uma transformação conforme que é muito útil na prática.

TEOREMA 2.2.2. Considerem-se duas variedades semi-Riemannianas, que se representam por  $(M, g)$  e  $(M', g')$  e representem-se por  $U$  e  $V$  dois subconjuntos abertos de  $M$  e de  $M'$ , respectivamente. Suponha-se que a aplicação  $\varphi : U \rightarrow V$  é uma aplicação diferenciável. Então, a aplicação  $\varphi$  é conforme se e só se

$$\Omega^2 g_{\mu\nu} \equiv (g'_{ij} \circ \varphi) \partial_\mu \varphi^i \partial_\nu \varphi^j. \quad (2.2.3)$$



DEMONSTRAÇÃO. De acordo com a observação 2.1.2 as formas bilineares  $g$  e  $g'$  podem ser representadas, em coordenadas locais das variedades  $M$  e  $M'$ , respectivamente, por

$$g_a(X, Y) = g_{\mu\nu}(a)X^\mu Y^\nu$$

$$g'_{\varphi(a)}(D\varphi(X), D\varphi(Y)) = g'_{ij}(\varphi(a))(D\varphi(X))^i (D\varphi(Y))^j,$$

onde  $a \in U$ . A condição de transformação conforme (2.2.1) é dada, nesta representação, por

$$g'_{ij}(\varphi(a))\partial_\mu\varphi^i\partial_\nu\varphi^j X^\mu Y^\nu = \Omega^2 g_{\mu\nu}(a)X^\mu Y^\nu$$

Como esta equação tem que ser válida para qualquer ponto  $a \in U$ , é natural escrever

$$\Omega^2 g_{\mu\nu} = (g'_{ij} \circ \varphi)\partial_\mu\varphi^i\partial_\nu\varphi^j.$$

□

Apresenta-se agora o primeiro resultado teórico que descreve o conjunto de transformações conformes, num subconjunto aberto e conexo, do plano Euclidiano  $\mathbb{R}^{2,0}$ .

TEOREMA 2.2.3. *Seja  $M$  um subconjunto aberto e conexo do conjunto dos números complexos,  $\mathbb{C}$ . As transformações conformes definidas em  $M$  e com valores em  $\mathbb{C}$ , considerando que  $M$  e  $\mathbb{C}$  estão equipadas com a estrutura do plano Euclidiano, são as funções holomorfas ou anti-holomorfas localmente invertíveis e o seu factor conforme é dado pelo Jacobiano da transformação.*

DEMONSTRAÇÃO. Identifique-se o plano Euclidiano  $\mathbb{R}^{2,0}$  com o plano complexo  $\mathbb{C}$  e represente-se um ponto do plano complexo na forma  $z = x + iy$ , onde  $x$  e  $y$  são números reais. Seja a aplicação  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $\varphi(z) = u(z) + iv(z)$ , onde  $u(z)$  e  $v(z)$  são funções reais de variável complexa. De acordo com o teorema 2.2.2,  $\varphi$  é conforme se e só se

$$\Omega^2 g_{\mu\nu} \equiv (g'_{ij} \circ \varphi)\partial_\mu\varphi^i\partial_\nu\varphi^j.$$

Por outro lado, pela equação (2.1.8), no plano Euclidiano a métrica é dada por

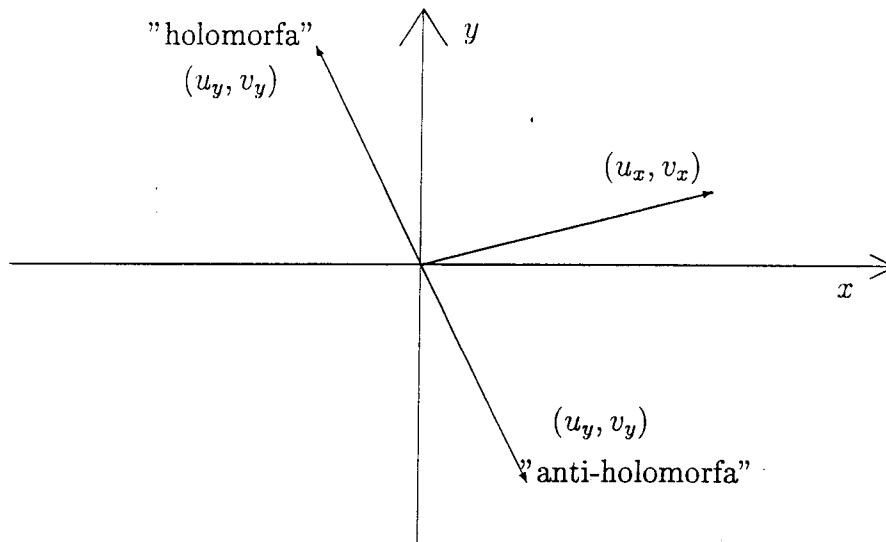
$$[g_{\mu\nu}] = [g'_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Substituindo na condição de transformação conforme, surgem as seguintes equações

$$\begin{aligned} u_x^2 + v_x^2 &= \Omega^2 \\ u_y^2 + v_y^2 &= \Omega^2 \\ u_x u_y + v_x v_y &= 0. \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Portanto,  $\varphi$  é conforme se e só se as equações (2.2.4) são verificadas e se  $\Omega^2 = u_x^2 + v_x^2 = u_y^2 + v_y^2 \neq 0$ .

Supondo que  $\varphi$  é conforme, as equações (2.2.4) implicam que os vectores  $(u_x, v_x)$ ,  $(u_y, v_y)$ , considerados como vectores do plano Euclidiano, sejam perpendiculares e tenham norma  $\Omega^2$ . A partir da figura 2.2.1, é óbvio que isto só acontece em duas situações: quando  $u_x = v_y$  e  $u_y = -v_x$ , isto é, quando a função  $\varphi$  é holomorfa, ou então quando  $u_x = -v_y$  e  $u_y = v_x$ , ou seja, quando a função  $\varphi$  é anti-holomorfa. Como se admite que  $\Omega^2 = u_x^2 + v_x^2 = u_y^2 + v_y^2 \neq 0$ , e porque  $\varphi$  é holomorfa ou anti-holomorfa, então o jacobiano da aplicação  $\varphi$  (determinante da derivada ou da matriz jacobiana) é não nulo e consequentemente, pelo

FIGURA 2.2.1. Vetores  $(u_x, v_x), (u_y, v_y)$ 

teorema da aplicação inversa, a aplicação  $\varphi$  é localmente invertível. Provou-se portanto que, se  $\varphi$  é conforme, então  $\varphi$  é holomorfa ou anti-holomorfa, e tem inversa local.

Prova-se agora o resultado recíproco. Se  $\varphi$  é holomorfa e localmente invertível, então  $u_x = v_y$ ,  $u_y = -v_x$  e  $u_x v_y - u_y v_x \neq 0$  e portanto,

$$\begin{aligned} u_x^2 + v_x^2 &= u_y^2 + v_y^2 = u_x v_y - u_y v_x \neq 0 \\ u_x u_y + v_x v_y &= 0. \end{aligned}$$

Então, a partir destas últimas equações, é fácil ver que as condições (2.2.4) são satisfeitas e portanto a aplicação  $\varphi$  é uma transformação conforme.  $\square$

EXEMPLO 2.2.4. Considerem-se agora apenas as aplicações lineares definidas em todo o plano  $\mathbb{R}^{2,0} \cong \mathbb{C}$ , i.e., o conjunto das aplicações lineares  $\varphi : \mathbb{R}^{2,0} \mapsto \mathbb{R}^{2,0}$ . Como estas aplicações são lineares, admitem uma representação matricial do tipo

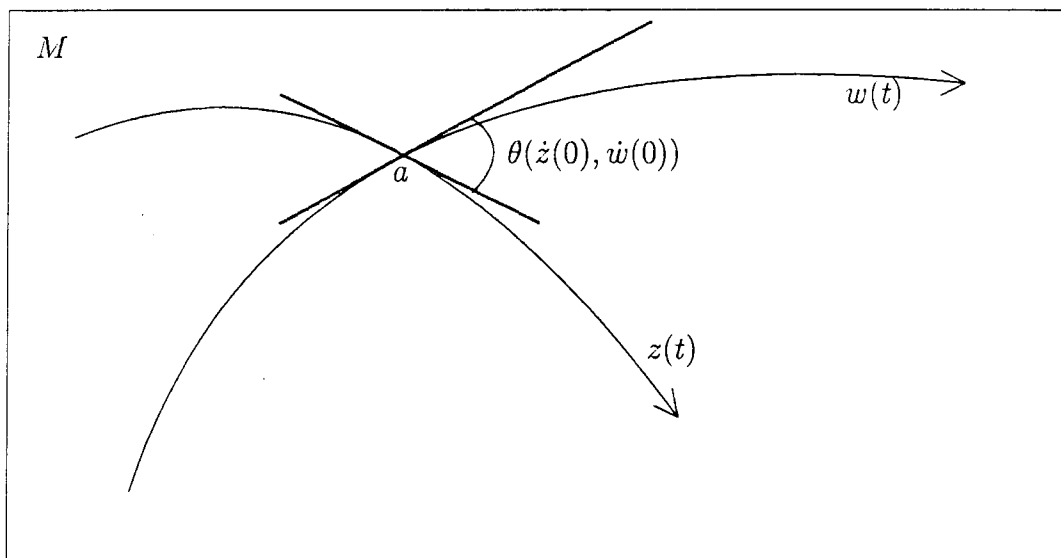
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad (2.2.5)$$

onde  $a, b, c, d$  são números reais. Pelo teorema anterior, a transformação  $\varphi$  é conforme se e só se  $a^2 + c^2 \neq 0$  e  $a = d, b = -c$  ou  $a = -d, b = c$ . As transformações conformes correspondentes, definidas no plano complexo, são dadas por

$$\varphi(z) = \varphi(x + iy) = (ax + by) + i(cx + dy) = (a + ic)(x + iy) = \zeta z, \quad (2.2.6)$$

ou por

$$\varphi(z) = \varphi(x + iy) = (ax + by) + i(cx + dy) = (a + ic)(x - iy) = \zeta \bar{z}, \quad (2.2.7)$$

FIGURA 2.2.2. Ângulo entre curvas no ponto  $a$ .

respectivamente, onde  $\zeta \equiv a + ic \neq 0$ .

Define-se o *ângulo* entre dois números complexos,  $z$  e  $w$ , pela fórmula:

$$\theta(z, w) \equiv \frac{z\bar{w}}{|zw|}. \quad (2.2.8)$$

Considerando as transformações lineares conformes  $\varphi(z) = \zeta z$  e  $\varphi(z) = \zeta \bar{z}$ , é claro que

$$\theta(\varphi(z), \varphi(w)) = \theta(z, w). \quad (2.2.9)$$

Tem-se também que, se  $\theta(\varphi(z), \varphi(w)) = \theta(z, w)$  para aplicações lineares, então a aplicação  $\varphi(z) = u(z) + iv(z)$  é anti-holomorfa localmente invertível ou é holomorfa localmente invertível. Então, pelo teorema 2.2.3, a aplicação  $\varphi$  é conforme. Conclui-se portanto que as aplicações lineares conformes  $\varphi : \mathbb{R}^{2,0} \mapsto \mathbb{R}^{2,0}$  são precisamente as aplicações que preservam os ângulos.

Considerem-se agora as transformações conformes,  $\varphi$ , definidas num conjunto aberto e conexo,  $M \subset \mathbb{C}$ , e com valores em  $\mathbb{C}$ . Definam-se, em  $M$ , as funções diferenciáveis ou curvas,  $z(t)$  e  $w(t)$ , que partem do ponto  $a \in M$ , i.e.,  $z(0) = w(0) = a$ , e tais que  $\dot{z}(0) \neq \dot{w}(0)$ . O ângulo entre as duas curvas no ponto  $a$  é obviamente dado por  $\theta(\dot{z}(0), \dot{w}(0))$ . A definição que se segue surge agora naturalmente (ver figura 2.2.2).

**DEFINIÇÃO 2.2.5.** Considere-se uma aplicação  $\varphi$ , definida num conjunto aberto e conexo,  $M \subset \mathbb{C}$ , e com valores em  $\mathbb{C}$ . Definam-se, em  $M$ , as funções diferenciáveis ou curvas,  $z(t)$  e  $w(t)$ , que partem do ponto  $a \in M$ , i.e.,  $z(0) = w(0) = a$ , e tais que  $\dot{z}(0) \neq 0 \neq \dot{w}(0)$ . Defina-se  $z_\varphi \equiv \varphi \circ z$ ,  $w_\varphi \equiv \varphi \circ w$ . Então, diz-se que  $\varphi$  preserva localmente os ângulos, se e só se

$$\theta(\dot{z}(0), \dot{w}(0)) = \theta(\dot{z}_\varphi(0), \dot{w}_\varphi(0)). \quad (2.2.10)$$

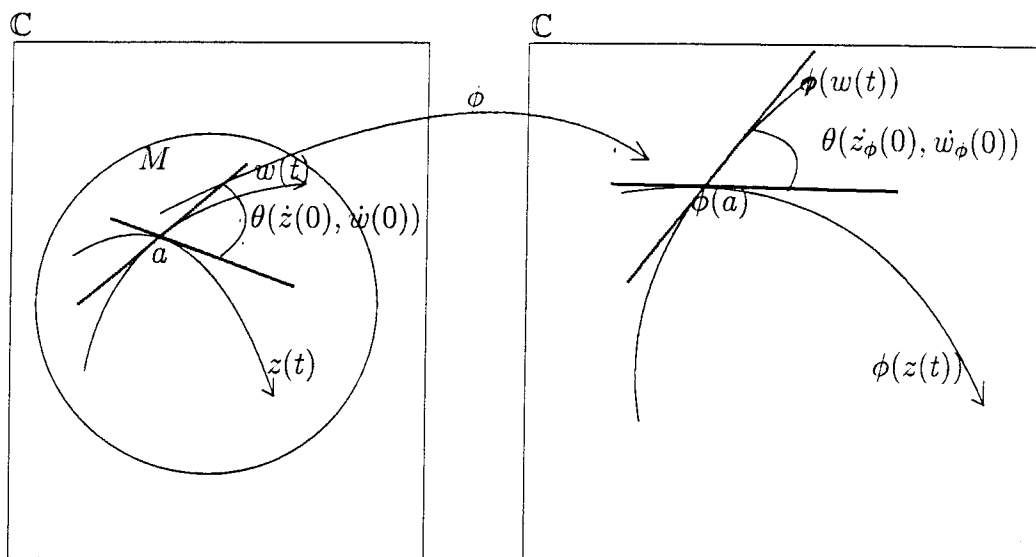


FIGURA 2.2.3. Preservação local de ângulos.

para todos os pontos  $a \in M$  e para todas as curvas  $z(t), w(t)$  definidas em  $M$ .

Para uma ilustração geométrica desta definição, observe-se a figura 2.2.3.

É agora possível uma outra caracterização das transformações conformes no plano euclidiano.

**TEOREMA 2.2.6.** *Considere-se uma aplicação  $\varphi : M \mapsto \mathbb{C}$ , onde  $M \subset \mathbb{C}$  é um conjunto aberto e conexo. Então  $\varphi$  é uma transformação conforme se e só se  $\varphi$  preserva ângulos localmente.*

**DEMONSTRAÇÃO.** Suponha-se que  $\varphi$  preserva os ângulos localmente, i.e. ,

$$\theta(\dot{z}(0), \dot{w}(0)) = \theta(\dot{z}_\varphi(0), \dot{w}_\varphi(0)).$$

Como  $\dot{z}_\varphi(0) = D\varphi(a)(\dot{z}(0))$  e uma expressão análoga é válida para  $\dot{w}_\varphi(0)$ , tem-se que

$$\theta(\dot{z}(0), \dot{w}(0)) = \theta(D\varphi(a)(\dot{z}(0)), D\varphi(a)(\dot{w}(0))).$$

Como esta última igualdade é válida para qualquer ponto  $a \in M$ , e para quaisquer curvas  $z(t), w(t)$  com  $z(0) = w(0) = a$  e  $\dot{z}(0) \neq 0 \neq \dot{w}(0)$ , tem-se que

$$\theta(\dot{z}(0), \dot{w}(0)) = \theta(D\varphi(a)(\xi), D\varphi(a)(\eta)) \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

ou seja  $D\varphi$ , que é obviamente linear, preserva os ângulos e portanto, pelo que se disse no exemplo 2.2.4, é conforme para qualquer  $a \in M$ . Mas se

$$D\varphi(a) = \begin{bmatrix} u_x(a) & u_y(a) \\ v_x(a) & v_y(a) \end{bmatrix} \quad (2.2.11)$$

é conforme então, como é linear, tem-se que  $u_x^2 + v_x^2 \neq 0$  e,  $u_x = v_y, u_y = -v_x$  ou  $u_x = -v_y, u_y = v_x$ , i.e. ,  $\varphi$  é localmente invertível holomorfa ou anti-holomorfa, e portanto, de acordo com o teorema 2.2.3, é conforme.

Prova-se agora o resultado recíproco. Supondo que  $\varphi$  é conforme, pelo teorema 2.2.3 tem-se que  $\varphi$  é holomorfa ou anti-holomorfa localmente invertível e portanto  $u_x^2 + v_x^2 \neq 0$ ,  $u_x = v_y, u_y = -v_x$  ou  $u_x = -v_y, u_y = v_x$ . Por outro lado a aplicação  $D\varphi(a) : M \rightarrow \mathbb{C}$  é linear e, de acordo com a sua representação matricial (2.2.11) e com o exemplo 2.2.4, tem-se que  $D\varphi(a)$  é uma transformação linear conforme pelo que preserva ângulos. Pode portanto escrever-se

$$\theta(\dot{z}(0), \dot{w}(0)) = \theta(D\varphi(a)(\dot{z}(0)), D\varphi(a)(\dot{w}(0))),$$

para quaisquer curvas diferenciáveis  $z(t), w(t)$  com  $z(0) = w(0) = a$  e  $\dot{z}(0) \neq 0 \neq \dot{w}(0)$ . Esta última expressão pode escrever-se na forma

$$\theta(\dot{z}(0), \dot{w}(0)) = \theta(\dot{z}_\varphi(0), \dot{w}_\varphi(0)).$$

Como esta análise é válida para qualquer ponto  $a \in M$ , tem-se que  $\varphi$  preserva os ângulos localmente.  $\square$

Para caracterizar as transformações conformes nos espaços  $\mathbb{R}^{p,q}$ , é útil introduzir o conceito de grupo local associado a um campo vectorial. É o que se apresenta de seguida.

DEFINIÇÃO 2.2.7. Considere-se um campo vectorial diferenciável  $X : M \mapsto \mathbb{R}^n$ , onde  $M \subset \mathbb{R}^{p,q}$  é um conjunto aberto. Considere-se ainda a equação diferencial autónoma

$$\dot{\gamma} = X(\gamma), \quad (2.2.12)$$

para curvas  $\gamma = \gamma(t) \in M$ . Designa-se por *grupo local a um parâmetro* ou *fluxo*, e representa-se por  $(\varphi_t^X)_{t \in \mathbb{R}}$ , o grupo cujos elementos são as soluções das equações diferenciais

$$\frac{d}{dt} (\varphi^X(t, a)) = X(\varphi^X(t, a)), \quad (2.2.13)$$

com a condição inicial  $\varphi^X(0, a) = a$ .

OBSERVAÇÃO 2.2.8. Um resultado fundamental da teoria de equações diferenciais ordinárias, conhecido como o teorema de existência e unicidade (ver, por exemplo, [57]), garante que para cada  $a \in M$ , a solução da equação (2.2.12) existe e é única num intervalo máximo  $]t_a^-, t_a^+[$ . Definindo  $M_t \equiv \{a \in M : t_a^- < t < t_a^+\}$ , é natural escrever  $\varphi_t^X(a) \equiv \varphi^X(t, a)$  para qualquer valor  $a \in M_t$ .

Introduz-se agora o conceito de campo de Killing conforme, que vai permitir classificar as transformações conformes nos espaços  $\mathbb{R}^{p,q}$ .

DEFINIÇÃO 2.2.9. Um campo vectorial  $X$ , definido num conjunto  $M \subset \mathbb{R}^{p,q}$ , diz-se um *campo de Killing conforme* se  $\varphi_t^X$  é uma transformação conforme numa vizinhança de 0 (em  $t$ ).

Na literatura da Física, utiliza-se o conceito de "transformação conforme infinitesimal" [2, 7, 25, 32, 55]. A relação entre este conceito e o campo de Killing conforme é explicitada na próxima definição.

DEFINIÇÃO 2.2.10. Uma transformação conforme,  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^{p,q}$ , definida num conjunto aberto  $M \subset \mathbb{R}^{p,q}$ , diz-se uma *transformação conforme infinitesimal* associada ao campo de Killing conforme  $X$ , se

$$\varphi(z) = z + tX(z), \quad (2.2.14)$$

onde  $t$  é um valor suficientemente pequeno, definido numa vizinhança de  $t = 0$ .

Esta definição faz sentido, pois desenvolvendo  $\varphi^X(t, z)$  em série de Taylor, até à primeira ordem em  $t$ , em torno de  $t = 0$  e utilizando a equação de fluxo (2.2.13), obtém-se a expressão (2.2.14). É clara a importância dos campos de Killing conformes na classificação das transformações conformes, pois estas são apenas a versão "finita" das transformações conformes infinitesimais.

Antes de apresentar o próximo resultado teórico, defina-se a seguinte notação, para funções diferenciáveis  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  e campos vectoriais  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^{p,q}$ , onde  $M$  é um subconjunto de  $\mathbb{R}^{p,q}$ ,

$$f_{,\nu} \equiv \partial_\nu f \quad (2.2.15)$$

$$X_\mu \equiv g_{\mu\nu} X^\nu. \quad (2.2.16)$$

TEOREMA 2.2.11. *Considere-se um conjunto aberto  $M \subset \mathbb{R}^{p,q}$  e seja  $X$  um campo de Killing conforme, com coordenadas*

$$X = (X^1, \dots, X^n) = X^\nu \partial_\nu \quad (2.2.17)$$

na base das coordenadas cartesianas em  $\mathbb{R}^n$ . Então, existe uma função diferenciável  $\kappa : M \rightarrow \mathbb{R}$ , que verifica a condição

$$X_{\mu,\nu} + X_{\nu,\mu} = \kappa g_{\mu\nu}. \quad (2.2.18)$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja  $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$  o grupo local associado ao campo de Killing conforme  $X$ . Então, pela definição 2.2.9,  $\varphi_t$  é uma transformação conforme desde que  $t$  esteja numa vizinhança de 0. Seja  $M_t$  essa vizinhança. Então, por definição de transformação conforme, tem-se que

$$(\varphi_t^* g)_{\mu\nu}(a) = g_{ij}(\varphi_t(a)) \partial_\mu \varphi_t^i \partial_\nu \varphi_t^j = (\Omega_t(a))^2 g_{\mu\nu}(a).$$

Derivando esta expressão em ordem à variável  $t$ , no ponto  $t = 0$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( (\Omega_t(a))^2 g_{\mu\nu}(a) \right) \Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} \left( g_{ij}(\varphi_t(a)) \partial_\mu \varphi_t^i \partial_\nu \varphi_t^j \right) \Big|_{t=0} \\ &= g_{ij} \left( \partial_\mu \dot{\varphi}_0^i \partial_\nu \varphi_0^j + \partial_\mu \varphi_0^i \partial_\nu \dot{\varphi}_0^j \right) \\ &= \partial_\mu g_{\nu i} X^i(a) + \partial_\nu g_{\mu j} X^j(a) \\ &= X_{\nu,\mu}(a) + X_{\mu,\nu}(a). \end{aligned}$$

Definindo a função  $\kappa(a) = \frac{d}{dt} \Omega_t^2(a) \Big|_{t=0}$ , como  $g_{\mu\nu}(a)$  não depende de  $t$ , tem-se que

$$X_{\mu,\nu}(a) + X_{\nu,\mu}(a) = \kappa(a) g_{\mu\nu}(a).$$

□

Considerando este último teorema é natural definir uma função  $\kappa$  associada a um campo de Killing conforme. É o que se faz na próxima definição.

DEFINIÇÃO 2.2.12. Considere-se uma função diferenciável  $\kappa : M \mapsto \mathbb{R}$ , onde  $M \subset \mathbb{R}^{p,q}$  é um conjunto aberto. Esta função designa-se por *factor de Killing conforme*, se existir um campo de Killing conforme,  $X$ , tal que

$$X_{\mu,\nu} + X_{\nu,\mu} = \kappa g_{\mu\nu}. \quad (2.2.19)$$

Na literatura da Física [2, 7, 25, 32, 55] é usual designar a equação (2.2.19) por *equação de Killing-Cartan*.

É agora possível enunciar e demonstrar um resultado muito útil, na prática, para classificar transformações conformes. Este resultado permite determinar os factores de Killing conformes a partir de uma equação diferencial.

TEOREMA 2.2.13. *Considere-se uma função diferenciável  $\kappa : M \mapsto \mathbb{R}$ , onde  $M$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^{p,q}$ . A função  $\kappa$  é um factor de Killing conforme se e só se*

$$(n - 2)\kappa_{,\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Delta_g\kappa = 0, \quad (2.2.20)$$

onde  $\Delta_g = g^{kl}\partial_k\partial_l$  e  $n = p + q$ .

DEMONSTRAÇÃO. (no sentido  $\Rightarrow$ ) Seja  $\kappa : M \rightarrow \mathbb{R}$  um factor de Killing conforme. Então, pela definição anterior, existe um campo de Killing conforme  $X$ , para o qual se verifica

$$X_{\mu,\nu} + X_{\nu,\mu} = \kappa g_{\mu\nu},$$

e é portanto claro que se tem a igualdade

$$\partial_k\partial_l(X_{\mu,\nu} + X_{\nu,\mu}) = \kappa_{,kl}g_{\mu\nu}. \quad (2.2.21)$$

É trivial provar que

$$\partial_k\partial_l(X_{\mu,\nu} + X_{\nu,\mu}) + \partial_\mu\partial_\nu(X_{k,l} + X_{l,k}) - \partial_l\partial_\mu(X_{k,\nu} + X_{\nu,k}) - \partial_\nu\partial_k(X_{\mu,l} + X_{l,\mu}) = 0. \quad (2.2.22)$$

Aplicando agora a igualdade (2.2.21) à expressão (2.2.22) e multiplicando a expressão anterior por  $g^{\kappa\ell}$ , tem-se

$$\begin{aligned} g^{kl}g_{\mu\nu}\kappa_{,kl} + g^{kl}g_{kl}\kappa_{,\mu\nu} - g^{kl}g_{k\nu}\kappa_{,l\mu} - g^{kl}g_{\mu l}\kappa_{,\nu k} &= 0 \\ \Leftrightarrow g_{\mu\nu}\Delta_g\kappa + \delta_l^l\kappa_{,\mu\nu} - \delta_\nu^l\kappa_{,l\mu} - \delta_\mu^k\kappa_{,\nu k} &= 0 \\ \Leftrightarrow g_{\mu\nu}\Delta_g\kappa + (n - 2)\kappa_{,\mu\nu} &= 0, \end{aligned}$$

onde se usou o facto de  $g_{\mu\nu}$  ser simétrico. A implicação  $\Rightarrow$  fica assim provada. O resultado recíproco vai ser provado para o caso  $p + q > 2$ , na secção seguinte. Para o caso do plano euclidiano e do plano de Minkowski, a demonstração encontra-se em [56].  $\square$

### 2.3. A classificação das transformações conformes

Nesta secção classificam-se as transformações conformes definidas em  $\mathbb{R}^{p,q}$  e determina-se a forma dos campos de Killing associados a essas transformações conformes. Para tal, recorre-se ao teorema 2.2.13. Analisam-se separadamente os casos  $p + q > 2$ ,  $p = 2, q = 0$  e  $p = 1, q = 1$ .

TEOREMA 2.3.1. *Considere-se um conjunto, aberto e conexo,  $M \subset \mathbb{R}^{p+q}$ , onde  $p+q > 2$ . Então, qualquer campo de Killing conforme,  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^{p+q}$  tem a forma*

$$X(x) = 2\langle x, b \rangle x^\mu - \langle x, x \rangle b^\mu + \lambda x + \alpha + \omega x, \quad (2.3.1)$$

onde  $b, c \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\langle x, b \rangle = g_{\mu\nu} x^\mu b^\nu$  e  $\omega$  é uma matriz que verifica a equação

$$\omega^T g^{p,q} + g^{p,q} \omega^T = 0, \quad (2.3.2)$$

onde  $\omega^T$  é a matriz transposta de  $\omega$ .

DEMONSTRAÇÃO. A partir do teorema 2.2.13 e da equação (2.2.20), considerando  $\mu = \nu$ , tem-se que

$$(n-2)\kappa_{,\mu\mu} + g_{\mu\mu}\Delta_g\kappa = 0. \quad (2.3.3)$$

Multiplicando esta equação por  $g^{\mu\mu}$  e somando sobre o índice  $\mu$ , obtém-se

$$\Leftrightarrow \Delta_g\kappa = 0,$$

onde se utilizou a propriedade de  $g_{\mu\nu}$  ser uma matriz diagonal. Substituindo este resultado em (2.3.3), tem-se que  $\kappa_{,\mu\mu} = 0$ . Para  $\mu \neq \nu$ ,  $g_{\mu\nu} = 0$  e a equação (2.2.20) resulta em  $\kappa_{,\mu\nu} = 0$ . Conclui-se então que  $\kappa_{,\mu\nu} = 0 \forall \mu, \nu$ , ou seja,

$$\partial_\nu \partial_\mu \kappa = 0 \Rightarrow \partial_\mu \kappa = c_\mu,$$

onde  $c_\mu$ ,  $\mu = 1, \dots, n$  são constantes reais. Primitivando a expressão anterior em ordem à variável  $\mu$ , determinam-se as seguintes soluções para os factores de Killing conformes

$$\kappa(q) = \lambda + c_\mu q^\mu, \quad (2.3.4)$$

onde  $q \equiv (q^1, \dots, q^n) \in M$  e  $\lambda$  é um número real. Suponha-se que  $\kappa = 0$  é identicamente nula em  $M$ . Então, substituindo  $\kappa = 0$  na equação (2.2.19), que define o factor de Killing conforme, e considerando  $\mu = \nu$ , tem-se que

$$X_{\mu,\mu} = 0 \Rightarrow \partial_\mu g^{\mu\mu} g_{\mu r} X^r = 0 \Leftrightarrow \partial_\mu X^\mu = 0,$$

e portanto  $X^\mu$  não depende de  $q^\mu$ . Considerando agora que  $\mu \neq \nu$ , a equação (2.2.19) resulta (com  $\kappa = 0$ ) em

$$X_{\mu,\nu} + X_{\nu,\mu} = 0 \Leftrightarrow \partial_\nu g_{\mu r} X^r + \partial_\mu g_{\nu r} X^r = 0.$$

Primitivando as componentes do campo, determina-se o campo associado para  $\kappa = 0$ ,

$$X^\mu(q) = \alpha^\mu + \omega_\nu^\mu q^\nu, \quad (2.3.5)$$

onde  $\omega_\nu^\mu$  são constantes reais. Se  $\omega_\nu^\mu = 0$ , para todos os valores de  $\nu$ , então  $X^\mu(q) = \alpha^\mu$  e portanto o fluxo, correspondente a este campo, que é dado pela equação (2.2.13), é determinado pela solução da equação diferencial

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\varphi^X(t, q)) &= \alpha \\ \varphi^X(0, q) &= q, \end{aligned}$$

que é dada por

$$\varphi^X(t, q) = q + t\alpha \quad (2.3.6)$$



e que é globalmente definida. É claro que as translações  $\varphi^X(t, q) = q + t\alpha$  são conformes em  $\mathbb{R}^{p,q}$ . Conclui-se portanto que, de acordo com a definição 2.2.9,  $X(q) = \alpha$  é um campo de Killing conforme. Considerando agora que  $\alpha = 0$  e  $\omega = (\omega_k^\mu)$ , a equação (2.2.19) resulta em  $\partial_\nu g_{\mu r} \omega_k^r q^k + \partial_\mu g_{\nu r} \omega_k^r q^k = 0$  e daqui conclui-se imediatamente que

$$g_{\mu r} \omega_\nu^r + g_{\nu r} \omega_\mu^r = 0.$$

O conjunto de soluções  $\omega$  destas equações podem representar-se na forma matricial como

$$\mathfrak{g}_0(p, q) \equiv \{\omega : \omega^T g^{p,q} + g^{p,q} \omega = 0\}.$$

O fluxo associado ao campo  $X = \omega q$  é determinado pela solução da equação diferencial

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\varphi^X(t, q)) &= \omega q \\ \varphi^X(0, q) &= q, \end{aligned}$$

que é dada por

$$\varphi^X(t, q) = e^{t\omega} q \quad (2.3.7)$$

e que é globalmente definida. Como se verifica facilmente a partir da expressão (2.2.3), estas aplicações são transformações conformes. Conclui-se, portanto, que os campos  $X = \omega q$  são campos de Killing.

Considere-se agora o caso em que o factor de Killing conforme é constante, ou seja,  $\kappa = \lambda \neq 0$ . A equação (2.2.19) é, neste caso, dada por

$$X_{\mu,\nu} + X_{\nu,\mu} = \lambda g_{\mu\nu}.$$

Para  $\mu \neq \nu$ , a equação já foi analisada. Para  $\mu = \nu$ , determina-se facilmente que

$$X^\mu = \frac{\lambda}{2} q^\mu + \alpha^\mu,$$

mas como o segundo termo deste campo já foi analisado, determina-se agora apenas o fluxo associado ao primeiro termo deste campo, que é claramente dado por

$$\varphi^X(t, q) = e^{\frac{\lambda}{2}t} q. \quad (2.3.8)$$

A partir da expressão (2.2.3), prova-se facilmente que estas aplicações são conformes. Conclui-se portanto que  $X = \frac{\lambda}{2} q$  é um campo de Killing conforme.

Considere-se, finalmente, o caso em que o factor de Killing conforme não tem termo constante. Como se observa na expressão (2.3.4),  $\kappa(q)$  é uma função linear de  $q$  e, portanto, pode-se escrever

$$\kappa(q) = 4\langle q, b \rangle,$$

onde  $q \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e a forma bilinear é definida por  $\langle q, b \rangle = g_{\mu\nu} q^\mu b^\nu$ . Usando o campo

$$X^\mu(q) = 2\langle q, b \rangle q^\mu - \langle q, q \rangle b^\mu, \quad (2.3.9)$$

prova-se facilmente que

$$X_{\mu,\nu} + X_{\nu,\mu} = \kappa(q) g_{\mu\nu}.$$

Conclui-se que o campo associado a  $\kappa(q) = 4\langle q, b \rangle$  é o campo (2.3.9). O fluxo associado a este campo vectorial é determinado pela solução da equação diferencial

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\varphi^X(t, q)) &= 2\langle q, b \rangle q - \langle q, q \rangle b \\ \varphi^X(0, q) &= q, \end{aligned}$$

que é dada por

$$\varphi^X(t, q) = \frac{q - \langle q, q \rangle tb}{1 - 2\langle q, tb \rangle + \langle q, q \rangle \langle tb, tb \rangle}. \quad (2.3.10)$$

Esta solução só está definida num intervalo máximo, em torno de  $t = 0$ , que esteja contido no conjunto  $\{t \in \mathbb{R} : 1 - 2\langle q, tb \rangle + \langle q, q \rangle \langle tb, tb \rangle \neq 0\}$ . A partir da expressão (2.2.3) é fácil provar que estas aplicações são conformes em torno de  $t = 0$ . Conclui-se assim que o campo (2.3.9) é um campo de Killing conforme. Combinando as expressões para os campos de Killing conformes, encontradas para as várias situações, determina-se a forma geral para um campo de Killing conforme, que é dada por (2.3.1).  $\square$

**OBSERVAÇÃO 2.3.2.** Na análise efectuada na demonstração do teorema anterior partiu-se sempre da equação que relaciona o factor de Killing conforme com o campo de Killing conforme, concluindo que para funções  $\kappa$  que obedeçam à equação (2.2.20) existe sempre associado um campo de Killing conforme. Provou-se portanto a implicação  $\Leftarrow$  do teorema 2.2.13, para  $n = p + q > 2$ .

A partir do teorema 2.3.1 e da sua demonstração torna-se fácil classificar as transformações conformes em  $\mathbb{R}^{p,q}$ , com  $p + q > 2$ . É o que se faz no teorema que agora se apresenta.

**TEOREMA 2.3.3.** *Considere-se um conjunto aberto e conexo  $M \subset \mathbb{R}^{p,q}$ . Qualquer transformação conforme,  $\varphi : M \mapsto \mathbb{R}^{p,q}$ ,  $n = p + q > 2$ , é uma composição das seguintes transformações:*

- (i) *translações  $x \mapsto x + c$ , onde  $c \in \mathbb{R}^n$ ,*
- (ii) *transformações ortogonais  $x \mapsto \Lambda x$ , onde  $\Lambda \in O(p, q)^2$ .*
- (iii) *dilatações  $x \mapsto e^\lambda x$ , onde  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,*
- (iv) *transformações conformes especiais:*

$$x \mapsto \frac{x - \langle x, x \rangle b}{1 - 2\langle x, b \rangle + \langle x, x \rangle \langle b, b \rangle}, \quad \text{onde } b \in \mathbb{R}^n. \quad (2.3.11)$$

**DEMONSTRAÇÃO.** Recordando as transformações conformes associadas aos campos de Killing conformes determinados na demonstração do teorema 2.3.1, estas são de quatro tipos diferentes,

(i) As transformações conformes associadas ao fluxo (2.3.6) são do tipo  $\varphi(q) = q + \alpha$ .

(ii) As transformações conformes associadas ao fluxo (2.3.7) são do tipo  $\varphi(q) = e^\omega q$ .

Como se viu na demonstração do teorema 2.3.1, a matriz  $\omega$  pertence aos elementos da álgebra de Lie<sup>3</sup>  $\mathfrak{g}_0(p, q)$ ,  $e^\omega$  pertence ao grupo de Lie associado, que é o grupo  $O(p, q)$  das

<sup>2</sup> $O(p, q)$  simboliza o grupo das matrizes ortogonais, i.e.,  $O(p, q) \equiv \{\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n} : \langle \Lambda x, \Lambda x' \rangle = \langle x, x' \rangle\}$ , onde a forma bilinear simétrica é dada por  $g^{p,q}$ .

<sup>3</sup>Uma álgebra de Lie é um espaço vectorial  $\mathfrak{g}$ , equipado com uma operação bilinear  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  que verifica as propriedades

matrizes ortogonais (ver [22]), e as transformações conformes são do tipo  $\varphi(q) = \Lambda q$ , onde  $\Lambda \in O(p, q)$ .

(iii) As transformações conformes associadas ao fluxo (2.3.8) são do tipo  $\varphi(q) = e^\lambda q$ .

(iv) As transformações conformes associadas ao fluxo (2.3.10) são do tipo  $\varphi(q) = \frac{q - \langle q, q \rangle b}{1 - 2\langle q, b \rangle + \langle q, q \rangle \langle b, b \rangle}$ .

Por outro lado, as composições de transformações conformes são transformações conformes, como se deduz facilmente a partir da definição de transformação conforme. Conclui-se portanto que as transformações conformes  $\varphi : M \mapsto \mathbb{R}^{p,q}$ ,  $n = p+q > 2$  são composições das transformações (i), (ii), (iii) e (iv).  $\square$

Recorde-se que a classificação das transformações conformes no plano Euclideano ( $\mathbb{R}^{2,0}$ ) já foi apresentada e discutida no teorema 2.2.3. Neste caso, as transformações conformes são todas as transformações holomorfas e anti-holomorfas localmente invertíveis.

Apresenta-se agora a última situação interessante: a classificação das transformações conformes no plano de Minkowski  $\mathbb{R}^{1,1}$ .

**TEOREMA 2.3.4.** *Seja  $M \subset \mathbb{R}^{1,1}$  um conjunto aberto e conexo. Uma aplicação diferenciável  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^{1,1}$ , onde  $\varphi = (u, v)$ , diz-se uma transformação conforme se e só se*

$$u_x^2 - v_x^2 > 0 \quad (2.3.12)$$

$$u_x = v_y, u_y = v_x \text{ ou } u_x = -v_y, u_y = -v_x. \quad (2.3.13)$$

**DEMONSTRAÇÃO.** Considere-se que a aplicação  $\varphi = (u, v)$  é uma transformação conforme, ou seja, de acordo com a definição 2.2.1, verifica-se a condição

$$g_{ij}(\varphi(a)) \partial_\mu \varphi^i \partial_\nu \varphi^j = \Omega^2 g_{\mu\nu},$$

que, na presente situação, é equivalente a

$$\begin{aligned} u_x^2 - v_x^2 &= \Omega^2 \\ u_y^2 - v_y^2 &= -\Omega^2 \\ u_x u_y - v_x v_y &= 0, \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

onde  $\Omega^2 > 0$ . A partir destas equações deduz-se facilmente que  $u_x = v_y$  e  $u_y = v_x$  ou  $u_x = -v_y$  e  $u_y = -v_x$ .

Prova-se agora a implicação  $\Leftarrow$ . Considere-se que  $\Omega^2 \equiv u_x^2 - v_x^2 > 0$ . Então, como  $u_x = v_y$ ,  $u_y = v_x$  ou  $u_x = -v_y$ ,  $u_y = -v_x$ , tem-se que  $\varphi = (u, v)$  verifica as equações (2.3.14) e é portanto uma transformação conforme.  $\square$

1)  $[x, x] = 0, \forall x \in \mathfrak{g}$  (anti-simetria),

2)  $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0, \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$  (identidade de Jacobi).

Os elementos de uma base de uma álgebra de Lie designam-se por *geradores da álgebra*. A operação bilinear  $[\cdot, \cdot]$  designa-se por *comutador* ou *parêntesis de Lie*. É possível associar a uma álgebra de Lie, um grupo de Lie. Um *grupo de Lie* é basicamente uma variedade diferenciável que também é um grupo, sendo as duas estruturas compatíveis (ver [22, 34, 61, 62]). A associação entre uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  e um grupo de Lie  $G$  é feita através de uma aplicação "exp", que define uma carta de coordenadas para o grupo de Lie em torno do seu elemento identidade, de forma que um elemento  $X \in G$ , definido numa vizinhança da identidade de  $G$ , é representado através da fórmula  $X = \exp(x)$ , onde  $x \in \mathfrak{g}$ . Se os elementos da álgebra de Lie são matrizes, então a aplicação "exp" é simplesmente a série de potências da exponencial  $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n / n!$ , onde  $x^n$  representa o produto matricial  $x \times x \times \dots \times x$  com  $n$  factores.

Confirma-se portanto aquilo que se disse na introdução: as transformações conformes no plano euclideo ou no plano de Minkowski são em muito maior número que as transformações conformes em dimensão  $n > 2$ . É este facto que explica o "sucesso" que o conceito de invariância conforme tem tido nas aplicações a espaços bidimensionais em Física e a sua ineficácia quando o espaço considerado é de dimensão  $n > 2$ . [2, 32, 56]

## CAPÍTULO 3

### O grupo conforme

#### 3.1. A álgebra de Witt

Pelo teorema 2.2.3, as transformações conformes no plano euclideo são precisamente as funções holomorfas ou anti-holomorfas localmente invertíveis. É claro que a classe das transformações holomorfas não forma um grupo sob a operação da composição, como se diz (erradamente) nalguma literatura de física [2, 37]. De facto, considerando as transformações holomorfas

$$\begin{aligned}\varphi_1(z) &: U \rightarrow V \\ \varphi_2(z) &: W \rightarrow Z,\end{aligned}$$

onde  $U, V, W, Z \subset \mathbb{C}$  são conjuntos abertos, não se pode garantir que  $\varphi_2 \circ \varphi_1$  esteja bem definida, pois não se pode garantir à partida que  $\varphi_1(U) \cap W \neq \emptyset$ . Por outro lado, existem aplicações holomorfas não injectivas e portanto não se pode definir, nestes casos, a inversa. A transformação conforme

$$\varphi(z) = z^2,$$

por exemplo, não é injectiva, como é óbvio. Conclusão: a classe das funções holomorfas não forma um grupo com a composição de aplicações. O mesmo se aplica à classe das funções anti-holomorfas. Torna-se portanto necessário definir de forma objectiva o que se entende por grupo conforme em  $\mathbb{R}^{2,0}$  e desenvolver um procedimento para estudar este grupo. Esse procedimento baseia-se na consideração das transformações conformes infinitesimais (ou campos de Killing conformes), a partir das quais se definem as transformações conformes globais. Como se verá mais adiante, são apenas as transformações conformes globais que formam a estrutura de grupo com a composição de funções.

DEFINIÇÃO 3.1.1. Uma *transformação conforme global* definida em  $\mathbb{R}^{2,0}$  é uma transformação conforme associada a um campo de Killing conforme não singular na compactificação de  $\mathbb{C}$ .

A compactificação referida na definição anterior é a compactificação obtida identificando o plano complexo com a esfera de Riemann  $S^2 \subset \mathbb{R}^{3,0}$ . A identificação é feita através da aplicação  $\varphi : \mathbb{R}^{2,0} \rightarrow S^2$ , definida por

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{1+r^2}(2x, 2y, r^2 - 1) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^{2,0}, \quad (3.1.1)$$

onde  $r \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$ . A aplicação inversa é definida por

$$\pi(u, v, w) = \frac{1}{1-w}(u, v) \quad \forall (u, v, w) \in S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}. \quad (3.1.2)$$

Ambas as transformações são conformes (a demonstração encontra-se em [56]). Considerando o ponto  $(0, 0, 1)$  na esfera e identificando-o com " $\infty$ ", tem-se uma compactificação de  $\mathbb{C}$  que se representa por  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

Prova-se agora que os geradores dos campos de Killing conformes formam uma álgebra de Lie de dimensão infinita<sup>1</sup>.

**TEOREMA 3.1.2.** *Os campos de Killing conformes holomorfos  $X : M \rightarrow \mathbb{C}$ , onde  $M \subset \mathbb{C}$  é aberto, formam uma álgebra de Lie de dimensão infinita, sendo os seus geradores  $L_n = -z^{n+1}\partial_z$  com  $n \in \mathbb{Z}$ , enquanto os campos de Killing anti-holomorfos formam uma outra álgebra de Lie de dimensão infinita, cujos geradores são  $\bar{L}_n = -\bar{z}^{n+1}\partial_{\bar{z}}$ . As relações de comutação dos geradores das álgebras são*

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= (n - m)L_{n+m} \\ [\bar{L}_n, \bar{L}_m] &= (n - m)\bar{L}_{n+m} \\ [L_n, \bar{L}_m] &= 0. \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

**DEMONSTRAÇÃO.** Prova-se facilmente a partir do teorema 2.2.13, que os campos de Killing conformes, no caso do plano euclideo, são funções holomorfas ou anti-holomorfas. Um campo de Killing conforme holomorfo, pode representar-se através da expansão de Laurent

$$X = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^{n+1} \partial_z, \tag{3.1.4}$$

com série de Laurent convergente. É portanto claro que uma base para o espaço dos campos de Killing conformes é formada pelos geradores  $L_n = -z^{n+1} \frac{d}{dz}$ , onde se introduziu o sinal  $-$ , para a notação estar de acordo com a notação "standard" na literatura. É claro que os campos de Killing conformes definem um espaço vectorial complexo. Calcula-se agora o comutador destes geradores.

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= L_n L_m - L_m L_n \\ &= (m+1)z^{n+1} z^m \partial_z + z^{n+1} z^{m+1} \partial_z^2 - (n+1)z^{m+1} z^n \partial_z - z^{m-1} z^{n+1} \partial_z^2 \\ &= (n - m)L_{n+m}. \end{aligned}$$

Como é óbvio, o comutador obedece à condição de anti-simetria, ou seja,  $[L_n, L_m] = -[L_m, L_n]$ . O comutador obedece também à identidade de Jacobi, ou seja,

$$[L_n, [L_m, L_k]] + [L_k, [L_n, L_m]] + [L_m, [L_k, L_n]] = 0,$$

Então, como os campos de Killing conformes formam um espaço vectorial e existe uma aplicação bilinear  $[\cdot, \cdot]$  que é anti-simétrica e obedece à identidade de Jacobi, esta estrutura (campo vectorial+aplicação bilinear) forma uma álgebra de Lie.

De forma perfeitamente análoga prova-se que os geradores de campos de Killing anti-holomorfos são do tipo  $\bar{L}_n = -\bar{z}^{n+1}\partial_{\bar{z}}$ , obedecem às relações de comutação

$$[\bar{L}_n, \bar{L}_m] = (n - m)\bar{L}_{n+m},$$

<sup>1</sup>Diz-se que uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  tem dimensão infinita se o número de geradores da álgebra é infinito.

e também geram uma álgebra de Lie de dimensão infinita. Determina-se facilmente que a relação de comutação entre os geradores das duas álgebras é nula, ou seja

$$[L_n, \bar{L}_m] = 0.$$

□

As álgebras de Lie de dimensão infinita com relações de comutação dadas por (3.1.3), são designadas na literatura por *álgebras de Witt* ou por *álgebras de Virasoro clássicas*.

### 3.2. O grupo conforme de $\mathbb{R}^{2,0}$

Determina-se agora quais são os campos de Killing conformes não singulares no plano complexo compactificado  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Para tal, basta verificar quais são os geradores dos campos de Killing não singulares em  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , pois estes formam uma base do espaço vectorial dos campos de Killing conformes. Para o caso holomorfo (o tratamento do caso anti-holomorfo é análogo) os geradores  $L_n = -z^{n+1}\partial_z$  são singulares em  $\mathbb{C}$  para o caso em que  $n < -1$ . Para tratar o problema no ponto  $\infty$ , que existe no plano compactificado (corresponde ao ponto  $(0,0,1)$  na esfera  $S^2$ ), é possível aplicar a transformação

$$\varphi(z) \equiv w \equiv \frac{1}{z},$$

que é conforme, pois é holomorfa em  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , e analisar os geradores que se modificam sob esta transformação conforme no ponto  $w = 0$ . A transformação dos geradores sob esta transformação é

$$L_n = -\left(\frac{1}{w}\right)^{n+1} \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \partial_w = w^{1-n} \partial_w,$$

que são singulares em  $w = 0$ , ou seja, em " $z = \infty$ ", quando  $n > 1$ . Conclui-se portanto que os campos de Killing conformes só são não singulares quando gerados por  $\{L_{-1}, L_0, L_1\}$ . Então, de acordo com a definição 3.1.1, as transformações conformes globais são as associadas a campos de Killing conformes gerados por  $\{L_{-1}, L_0, L_1\}$ . O *grupo conforme* em  $\mathbb{R}^{2,0}$  é o grupo formado pelas transformações conformes globais com a composição de funções. No próximo teorema investiga-se que tipo de grupo é este.

**TEOREMA 3.2.1.** *As transformações conformes globais definidas em  $\mathbb{C}$  são as transformações*

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{com } cz + d \neq 0, \quad (3.2.1)$$

onde

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}), \quad (3.2.2)$$

e  $SL(2, \mathbb{C})$  é o grupo das matrizes  $2 \times 2$  de entradas complexas e com determinante 1. Estas transformações são vulgarmente denominadas na literatura por transformações de Möbius e formam um grupo isomorfo ao grupo  $Mb \equiv SL(2, \mathbb{C})/\{\pm 1\}$ .

DEMONSTRAÇÃO. As transformações conformes globais são as transformações associadas aos geradores dos campos de Killing  $\{L_{-1}, L_0, L_1\}$  e composições destas. Em primeiro lugar, estuda-se a transformação conforme associada ao campo de Killing  $X(z) = kL_{-1}(z) = -k\partial_z(z) = -k$ , onde  $k \in \mathbb{C}$  é uma constante. Pela equação (2.2.13), tem-se

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\varphi_{-1}(t, z) &= -k \\ \varphi_{-1}(t, 0) &= z,\end{aligned}$$

cujas soluções são obviamente  $\varphi_{-1}(t, z) = z - kt$ . Escolhendo o valor  $t = 1$  e definindo  $\alpha = -k$  tem-se que as transformações conformes globais associadas são do tipo

$$\varphi_{-1}(z) = z + \alpha \quad \text{com } \alpha \in \mathbb{C}. \quad (3.2.3)$$

Trata-se agora o caso  $X(z) = kL_0(z) = -kz\partial_z(z) = -kz$ . A equação de fluxo associada é

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\varphi_0(t, z) &= -kz \\ \varphi_0(t, 0) &= z,\end{aligned}$$

cujas soluções são obviamente  $\varphi_0(t, z) = e^{-kt}z$ . Escolhendo  $t = 1$ , as transformações conformes globais associadas são do tipo

$$\varphi_0(z) = \lambda z \quad \text{com } \lambda \in \mathbb{C}, \quad (3.2.4)$$

onde se definiu  $\lambda = e^{-k}$ .

Para o caso  $X(z) = kL_1(z) = -kz^2\partial_z(z) = -kz^2$ , a equação (2.2.13) é dada por

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\varphi_1(t, z) &= -kz^2 \\ \varphi_1(t, 0) &= z,\end{aligned}$$

cujas soluções são

$$\varphi_1(z) = \frac{z}{1 + \gamma z} \quad \text{com } \gamma \in \mathbb{C}, \quad 1 + \gamma z \neq 0, \quad (3.2.5)$$

onde se definiu  $t = 1$  e  $\gamma = k$ .

A composição destas transformações é a transformação conforme global associada a um campo de Killing conforme  $X(z) = k_{-1}L_{-1}(z) + k_0L_0(z) + k_1L_1(z)$  e é dada por

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

onde  $a, b, c, d$  são constantes complexas com a restrição  $ad - bc = 1$ . Prova-se agora que as transformações (3.2.1) formam de facto um grupo. Cada transformação tem uma inversa que é dada por

$$\varphi^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a},$$

que também é uma transformação conforme global. A composição destas transformações é obviamente associativa, pelo que o conjunto das transformações, com a operação da



composição, define claramente um grupo. Prova-se finalmente que este grupo é isomorfo a  $SL(2, \mathbb{C})/\{\pm 1\}$ . A cada matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}) \quad (3.2.6)$$

corresponde obviamente uma transformação de Möbius, mas é claro que à matriz simétrica, que também pertence a  $SL(2, \mathbb{C})$ , corresponde a mesma transformação. Só neste caso, a duas matrizes diferentes de  $SL(2, \mathbb{C})$  correspondem transformações de Möbius iguais. Conclui-se então que existe um isomorfismo entre o grupo das transformações de Möbius e o grupo  $SL(2, \mathbb{C})/\pm 1$ .  $\square$

Como se viu, afinal o grupo das transformações conformes globais no plano Euclideano tem dimensão finita e não infinita, como se afirma nalguma literatura da Física - por exemplo em [37]. O que tem dimensão infinita é a álgebra de Lie dos geradores dos campos de Killing conformes ou dos geradores das transformações conformes infinitesimais.



## CAPÍTULO 4

### A invariância conforme clássica e quântica

Neste capítulo apresentam-se os conceitos básicos da teoria de campo conforme: A invariância conforme tem implicações importantes para a Física, como se explicou na introdução. Nas quatro primeiras secções deste capítulo estudam-se essas implicações e apresentam-se os resultados teóricos mais importantes da teoria de campo conforme. Nas duas últimas secções apresenta-se a axiomática da teoria de campo e da teoria de campo conforme apenas para mostrar como é possível definir estas teorias sobre fundamentos matemáticos sólidos e para esclarecer a natureza matemática de alguns conceitos que são, por vezes, usados de forma obscura na literatura da Física.

#### 4.1. O tensor energia-momento

Nesta secção define-se o tensor energia-momento para um determinado sistema físico, a partir da acção. Como se verá, a invariância da acção sob transformações conformes das coordenadas implica que o tensor energia-momento tenha traço nulo.

Considerem-se duas variedades diferenciáveis,  $M$  e  $N$ , e seja  $M$  de dimensão  $n$ . Denota-se por  $\phi : M \rightarrow N$  um campo, o que num contexto clássico pode ser interpretado como uma aplicação diferenciável de classe  $C^1$  (o conceito de campo em mecânica quântica será introduzido de forma rigorosa na secção 4.5). Denota-se por  $\partial_\mu \phi(x)$  a derivada de  $\phi$  em ordem á variável  $x^\mu$ . Designa-se por densidade de Lagrangeano a função  $\mathcal{L}(x, \partial_\mu \phi(x), \phi(x))$  que se supõe de classe  $C^2$  e que tem valores em  $\mathbb{R}$ . As coordenadas  $x = x^\mu$ ,  $\mu = 1, \dots, n$  são as coordenadas locais na variedade  $M$ . Como os campos podem ser mais que um,  $\phi(x)$  denota, de facto, uma colecção de campos da teoria. Então, a acção associada ao sistema é dada pelo integral<sup>1</sup>

$$S(\phi) = \int_M d^n x \mathcal{L}(x, \partial_\mu \phi(x)). \quad (4.1.1)$$

A acção deve ser interpretada como um funcional dos campos  $\phi$ .

Um dos resultados fundamentais da mecânica analítica afirma que um campo obedece a leis de movimento de forma a que a acção seja mínima - este resultado é conhecido como o princípio de Hamilton. De facto, o que normalmente se exige é apenas que a acção seja estacionária, mas com mais algumas hipóteses prova-se que esse ponto estacionário é de facto um mínimo (ver [5]). Enuncia-se a seguir o o princípio de Hamilton.

---

<sup>1</sup>Para que o integral exista é necessário garantir algumas condições, como sejam a compacticidade de  $N \cup \partial N$  (ver [23]).

TEOREMA 4.1.1. *A acção  $S(\phi) = \int_M d^n x \mathcal{L}(x, \partial_\mu, \phi(x))$  é estacionária num campo  $\phi$  se e só se este satisfaz as equações*

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_\mu \phi^\alpha} = 0. \quad (4.1.2)$$

*Estas equações designam-se por equações do movimento ou equações de Euler-Lagrange.*

Também é um resultado clássico o seguinte: se a densidade de Lagrangeano é invariante sob transformações infinitesimais de um determinado tipo, aparece associada a essa invariância uma quantidade que se conserva - corrente conservada. Este é o conteúdo do teorema de Noether. Antes de enunciar este resultado é conveniente introduzir uma série de conceitos. Considere-se um grupo de Lie de difeomorfismos<sup>2</sup> com 1 parâmetro  $f_\epsilon : M \times N \rightarrow M \times N$ , cujo gerador associado é dado pelo campo vectorial diferenciável  $Y = \left. \frac{\partial f_\epsilon}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0}$ . Nas coordenadas locais  $x^\mu, y^\nu$  das variedades  $M$  e  $N$  respectivamente, os difeomorfismos representam-se por

$$f_\epsilon : (x^\mu, y^\nu) \mapsto (f_\epsilon^j(x^\mu), f_\epsilon^\beta(x^\mu, y^\nu)), \quad (4.1.3)$$

o gerador  $Y$  representa-se por  $Y = (X, \xi)$ , com

$$X^i = \left. \frac{\partial f_\epsilon^i}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \quad \xi^\alpha = \left. \frac{\partial f_\epsilon^\alpha}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0}$$

e tem-se que

$$\frac{d}{d\epsilon} (f(\epsilon, x, y)) = Y(f(\epsilon, x, y)), \quad (4.1.4)$$

com a condição inicial  $f(0, x, y) = (x, y)$ . Os campos  $Y$  são os campos associados às transformações infinitesimais

$$\begin{aligned} x^\mu &\mapsto \dot{\varphi}(x) = x^\mu + \epsilon X^\mu(x) \\ y^\nu &\mapsto \Phi(x, y) = y^\nu + \epsilon \xi^\nu(x, y) \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

onde se considerou a série de Taylor de  $f_\epsilon$  até à primeira ordem em  $\epsilon$ . Na literatura de Física é usual representar estas transformações infinitesimais por

$$\begin{aligned} x^\mu &\mapsto x'^\mu \equiv x^\mu + \epsilon X^\mu(x) \\ \phi(x) &\mapsto \phi'(x') \equiv \phi(x) + \delta\phi(x). \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

Enuncia-se a seguir o célebre Teorema de Noether, que se encontra demonstrado em [5, 23].

TEOREMA 4.1.2. *Considere-se uma densidade de Lagrangeano  $\mathcal{L}(x, \partial_\mu, \phi(x))$  com valores em  $\mathbb{R}$  e de classe  $C^2$ . A acção correspondente é dada por (4.1.1). Se a acção é invariante sob as transformações infinitesimais (4.1.5), associadas ao grupo a 1 parâmetro (4.1.3), então existe uma corrente conservada associada a esta simetria que é dada por*

$$J^\mu \equiv \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \partial_\nu \phi^\alpha - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right\} X^\nu - \xi^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)}, \quad (4.1.7)$$

<sup>2</sup>Um difeomorfismo é, basicamente, uma aplicação contínua, bijectiva e diferenciável.

onde  $\phi^\alpha$  representa o valor do campo  $\phi(x)$  nas coordenadas locais  $y^\alpha$  da variedade  $N$ . A conservação da corrente  $J^\mu$  significa simplesmente que

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (4.1.8)$$

Define-se o tensor energia-momento como a corrente conservada associada à invariância da acção sob as transformações infinitesimais de translação

$$\begin{aligned} x^\mu &\mapsto x'^\mu \equiv x^\mu + \epsilon^\mu \\ \phi(x) &\mapsto \phi'(x') \equiv \phi(x), \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

onde o vector  $\epsilon^\mu$  é pequeno.

DEFINIÇÃO 4.1.3. A corrente associada à invariância da acção sob transformações infinitesimais do tipo (4.1.9) designa-se por *tensor energia-momento*.

Como corolário do teorema 4.1.2, deduz-se facilmente, pela expressão (4.1.7), que o tensor energia-momento tem a forma

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \partial^\nu \phi^\alpha - g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (4.1.10)$$

onde  $g^{\mu\nu}$  é a métrica,  $\delta_\nu^\mu \delta_\mu^\nu = g^{\mu\nu}$  e a lei de conservação associada é dada por

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (4.1.11)$$

Define-se agora o conceito de carga conservada.

DEFINIÇÃO 4.1.4. Considere-se uma corrente conservada  $J^\mu$  obtida pelo teorema de Noether. Define-se a carga conservada associada a esta corrente pela fórmula

$$Q \equiv \int_M d^{n-1}x J^0, \quad (4.1.12)$$

onde a integração é feita apenas nas últimas  $(n-1)$  variáveis, e  $J^0$  é a primeira componente da corrente conservada.

Esta notação deve-se ao facto de, em Física, se considerar normalmente a variável  $x^0$  como sendo o tempo. A partir da equação (4.1.8) é fácil provar que  $\dot{Q} \equiv \partial_0 Q = 0$  (ver [32]). Então, a carga conservada associada à conservação do tensor energia-momento é dada por

$$P^\nu = \int_M d^{n-1}x T^{0\nu}, \quad (4.1.13)$$

onde

$$P^0 = \int_M d^{n-1}x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^\alpha} \dot{\phi}^\alpha - \mathcal{L} \right\} \quad (4.1.14)$$

representa a energia e define o Hamiltoniano do sistema (a expressão integranda designa-se por densidade de Hamiltoniano), e  $P^\nu$ , com  $\nu = 1, 2, 3$ , representa as várias componentes do momento.

OBSERVAÇÃO 4.1.5. Em geral o tensor energia-momento não é simétrico. Contudo, é possível modificar este tensor adicionando a divergência de um outro tensor  $B^{\rho\mu\nu}$  que seja anti-simétrico nos dois primeiros índices, de tal forma que o novo tensor seja simétrico e conservado. Para mais detalhes sobre este assunto, consultar [32]. Uma forma alternativa de definir o tensor energia-momento e que se traduz sempre num tensor simétrico é considerando as transformações infinitesimais do tempo

$$x^\mu \mapsto x'^\mu \equiv x^\mu + \epsilon X^\mu(x). \quad (4.1.15)$$

A variação infinitesimal na acção que é provocada por estas transformações é dada por (ver [32])

$$\delta S = \frac{1}{2} \int_M d^n x T^{\mu\nu} (\partial_\mu X^\nu + \partial_\nu X^\mu).$$

Por outro lado, a transformação de coordenadas infinitesimal (4.1.15) provoca no tensor da métrica a transformação seguinte

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu} &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta} \\ &= (\delta_\mu^\alpha - \partial_\mu X^\alpha) (\delta_\nu^\beta - \partial_\nu X^\beta) \\ &= g_{\mu\nu} - (\partial_\mu X^\nu + \partial_\nu X^\mu), \end{aligned}$$

pelo que se pode escrever  $\delta g_{\mu\nu} = -\partial_\mu X^\nu + \partial_\nu X^\mu$ , e portanto

$$\delta S = -\frac{1}{2} \int_M d^n x T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (4.1.16)$$

permite uma definição alternativa para o tensor energia-momento, com a vantagem desta definição fornecer sempre um tensor simétrico.

#### 4.2. A invariância conforme clássica

Nesta secção apresentam-se as consequências para um sistema físico clássico que seja invariante sob transformações conformes infinitesimais. De acordo com a definição 2.2.1, considerando uma transformação conforme infinitesimal e a demonstração do teorema 2.2.11, conclui-se que sob uma transformação conforme infinitesimal do tipo

$$x \mapsto x' + \epsilon X(x), \quad (4.2.1)$$

com  $\epsilon$  pequeno e onde  $X$  é um campo de Killing conforme, a métrica muda de acordo com

$$g_{\mu\nu} \mapsto g_{\mu\nu} + \kappa(x) g_{\mu\nu}, \quad (4.2.2)$$

onde  $\kappa$  é o factor de Killing conforme associado ao campo de Killing conforme  $X$ . Uma transformação da métrica do tipo (4.2.2) diz-se uma transformação de Weyl. De acordo com a definição (4.1.16) para o tensor energia-momento, conclui-se que um sistema físico é invariante sob transformações conformes infinitesimais se e só se

$$\begin{aligned} \delta S &= -\frac{1}{2} \int_M d^n x T^{\mu\nu} \kappa(x) g_{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2} \int_M d^n x T^{\mu\mu} \kappa(x) = 0 \end{aligned}$$

Daqui resulta que, se o tensor energia-momento tem traço nulo, i.e.

$$\sum_{\mu} T^{\mu\mu} = 0,$$

então o sistema é invariante sob transformações conformes infinitesimais. Quando um sistema é invariante sob transformações conformes infinitesimais, pelo teorema de Noether, existe uma corrente conservada. Esta corrente conservada é dada por

$$J^{\mu} = T_{\mu\nu} X^{\nu}. \quad (4.2.3)$$

Recordando a conservação do tensor energia-momento e supondo que ele tem traço nulo, verifica-se facilmente que esta corrente é conservada, ou seja,

$$\begin{aligned} \partial_{\mu} J^{\mu} &= \frac{1}{2} T_{\mu\nu} (\partial_{\mu} X^{\nu} + \partial_{\nu} X^{\mu}) \\ &= \frac{1}{2} T_{\mu}^{\mu} \kappa(x) = 0. \end{aligned}$$

Em termos de aplicações à Física, a situação mais interessante é a que ocorre no espaço euclídeo a duas dimensões, pois neste caso as transformações conformes são definidas por quaisquer funções holomorfas no plano complexo. Considera-se inicialmente uma teoria Física definida num espaço real bidimensional de coordenadas  $(x, y)$ . Para formular a teoria no plano complexo é útil definir

$$\begin{cases} z &= x + iy \\ \bar{z} &= x - iy, \end{cases} \quad (4.2.4)$$

o que é equivalente a definir

$$\begin{cases} x &= \frac{z + \bar{z}}{2} \\ y &= \frac{z - \bar{z}}{2i}. \end{cases} \quad (4.2.5)$$

Nas novas coordenadas os operadores diferenciais tomam a forma

$$\begin{cases} \partial_z &= \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y) \\ \partial_{\bar{z}} &= \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y). \end{cases} \quad (4.2.6)$$

Um vector  $V$  exprime-se, nas novas coordenadas, de acordo com

$$\begin{cases} V_z &= \frac{1}{2}(V_x - iV_y) \\ V_{\bar{z}} &= \frac{1}{2}(V_x + iV_y), \end{cases} \quad (4.2.7)$$

e a métrica  $g_{\mu\nu} = g^{p,q}$ , com  $p + q = 2$ , fica

$$\begin{cases} g_{zz} &= \frac{1}{4}(g_{11} - g_{22}) \\ g_{\bar{z}\bar{z}} &= \frac{1}{4}(g_{11} - g_{22}) \\ g_{z\bar{z}} &= g_{\bar{z}z} = \frac{1}{4}(g_{11} + g_{22}), \end{cases} \quad (4.2.8)$$

o que no caso do plano euclídeo se traduz em

$$\begin{cases} g_{zz} &= g_{\bar{z}\bar{z}} = 0 \\ g_{z\bar{z}} &= g_{\bar{z}z} = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (4.2.9)$$

O tensor energia-momento representa-se, nas novas coordenadas, por

$$\begin{cases} T_{z\bar{z}} &= T_{\bar{z}z} = 0 \\ T^{zz} &= 4T_{\bar{z}\bar{z}} \text{ e } T^{\bar{z}\bar{z}} = 4T_{zz} \\ \partial_z T_{\bar{z}\bar{z}} &= \partial_{\bar{z}} T_{zz} = 0. \end{cases} \quad (4.2.10)$$

e a corrente conservada é dada por

$$\begin{cases} J_z &= T_{zz} X^z = 0 \\ J_{\bar{z}} &= T_{\bar{z}\bar{z}} \bar{X}_{\bar{z}}. \end{cases} \quad (4.2.11)$$

Conclui-se que o tensor energia-momento é diagonal,  $T_{zz}$  e  $J_z$  são funções holomorfas enquanto  $T_{\bar{z}\bar{z}}$  e  $J_{\bar{z}}$  são funções anti-holomorfas. Para referência futura, definem-se as funções holomorfas e anti-holomorfas seguintes:

$$\begin{aligned} T(z) &= -2\pi T_{zz} \\ \bar{T}(\bar{z}) &= -2\pi \bar{T}_{\bar{z}\bar{z}}. \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

É conveniente considerar as teorias de campo conforme no espaço euclidiano bidimensional e não no espaço de Minkowski, pois como se acabou de observar com o tensor energia-momento e com as correntes conservadas, várias grandezas são separáveis em componentes holomorfas e anti-holomorfas, facilitando assim os cálculos se estes forem efectuados sobre o plano complexo euclidiano. É possível proceder desta forma, considerando que as coordenadas complexas  $z$  e  $\bar{z}$  não são complexas conjugadas, mas coordenadas complexas independentes. Neste contexto é fácil transformar um plano de Minkowski num plano Euclidiano: basta transformar a coordenada  $y \mapsto y' = -iy$ . Esta transformação designa-se por rotação de Wick. Considerando que as variáveis  $z$  e  $\bar{z}$  são independentes é também possível analisar as álgebras de Witt geradas pelos geradores  $L_n$  e  $\bar{L}_n$ , referidas no teorema 3.1.2, de forma independente. Deve ter-se em conta, porém, que o espaço físico é real e coincide portanto com a subvariedade bidimensional (também designada superfície real) definida por  $z = z^*$ , onde  $z^*$  representa o complexo conjugado de  $z$ . Esta condição, normalmente referida na literatura como condição de realidade pode, no entanto, ser imposta à posteriori.

### 4.3. A invariância conforme quântica

Nesta secção apresentam-se alguns resultados importantes da teoria de campo conforme, no contexto da mecânica quântica. A novidade mais importante, em relação ao caso clássico, é que na álgebra de Witt surge um termo novo – a anomalia conforme – que aparece devido a efeitos quânticos.

Como já se referiu, cada corrente conservada tem associada uma carga conservada e, pela equação (4.1.12), essa carga é dada por

$$Q = \int dx J^0(x, y), \quad (4.3.1)$$

no caso bidimensional. Para tornar o cálculo deste integral mais simples é conveniente efectuar uma rotação no plano complexo definida por

$$w = \varphi(z) = -iz,$$



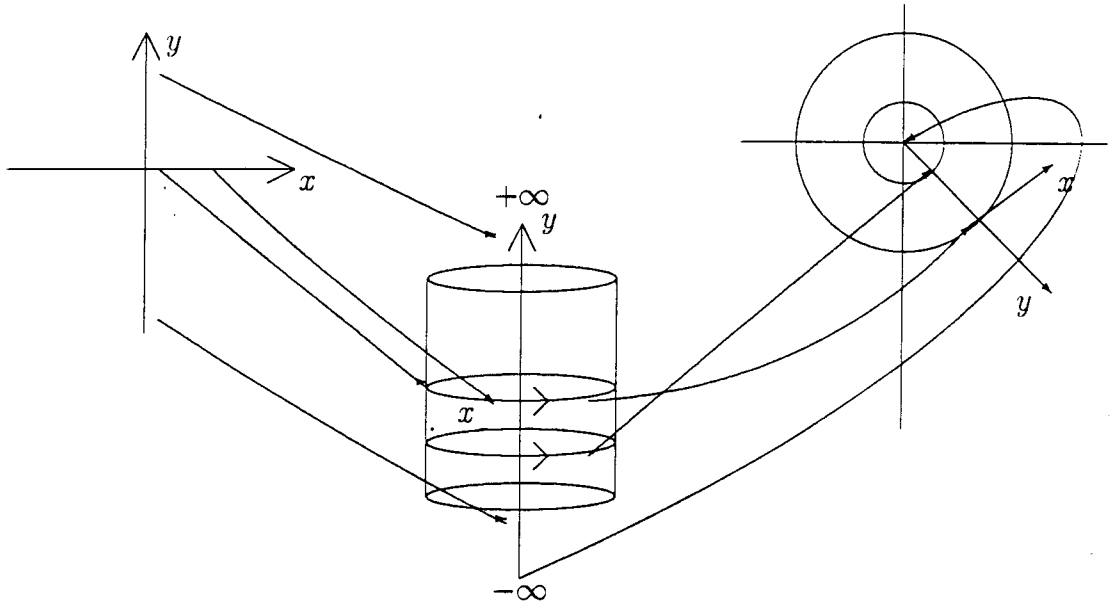


FIGURA 4.3.1. Transformações sucessivas.

que é claramente uma transformação conforme. Sob esta transformação tem-se que

$$z = x + iy \mapsto w = y - ix$$

e de forma perfeitamente análoga tem-se

$$\bar{z} = x - iy \mapsto \bar{w} = y + ix,$$

para a transformação conforme (anti-holomorfa)  $\bar{w} = iz$ . Sob esta transformação, a variável temporal euclideana passa a ser a parte real da variável  $w$ ,  $\Re(w) = y$ , cujo domínio é  $\mathbb{R}$ . A seguir torna-se a dimensão espacial finita, impondo condições fronteira periódicas sobre a variável  $x$ , ou seja, impõe-se que  $x + 2\pi = x$  com  $0 \leq x < 2\pi$ . A nova coordenada  $w$  pode ser interpretada como uma coordenada no cilindro (ver figura 4.3.1). É conveniente aplicar uma outra transformação conforme para mapear o sistema no plano complexo. Para esse efeito, usa-se a transformação

$$\begin{aligned} w \mapsto u &= e^w = e^{y-ix} \\ \bar{w} \mapsto \bar{u} &= e^{\bar{w}} = e^{y+ix}. \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

Com esta transformação, um círculo sobre o cilindro com  $y$  fixo transforma-se num círculo sobre o plano complexo centrado na origem. Quanto maior o valor de  $y$  maior o raio do círculo. O centro do círculo corresponde à superfície de tempo euclideano  $y = -\infty$ . A ordenação do tempo euclideano na variável  $y$  passa portanto a ser interpretada como uma ordenação radial no plano complexo (ver figura 4.3.1).

Apresentam-se agora as consequências da ordenação radial para os produtos de operadores no espaço de Hilbert. Estes produtos de operadores definem-se, na representação

de Heisenberg, por

$$O_1(x_1, t_1)O_2(x_2, t_2) = e^{iHt_1}O_1(x_1, 0)e^{-iHt_1}e^{iHt_2}O_2(x_2, 0)e^{-iHt_2},$$

onde  $O_1, O_2$  são operadores,  $x$  é a variável espacial,  $t$  é a variável temporal e  $H$  é o Hamiltoniano do sistema. Sob uma rotação de Wick, i.e. sob a transformação  $t \mapsto -i\tau$ , onde  $\tau$  é o tempo euclideano, tem-se que um factor típico do produto de operadores é modificado da seguinte forma:

$$e^{-iH(t_1-t_2)} \mapsto e^{-H(\tau_1-\tau_2)}.$$

O Hamiltoniano é geralmente limitado inferiormente<sup>3</sup> mas não o é superiormente, pelo que, se  $\tau_1 < \tau_2$ , a exponencial anterior pode não ser limitada superiormente e nesse caso o produto de operadores não fica bem definido. Para resolver este problema, define-se uma ordem para o produto de operadores, designada por ordem temporal e dada pela fórmula

$$T[O_1(x_1, t_1)O_2(x_2, t_2)] = \begin{cases} O_1(x_1, t_1)O_2(x_2, t_2) & \text{se } t_1 > t_2 \\ O_2(x_2, t_2)O_1(x_1, t_1) & \text{se } t_1 < t_2. \end{cases} \quad (4.3.3)$$

Considerando agora a transformação do cilindro para o plano complexo, onde a variável temporal é radial, a ordem temporal toma a forma de uma ordem radial e define-se pela fórmula

$$R[O_1(z_1, \bar{z}_1)O_2(z_2, \bar{z}_2)] = \begin{cases} O_1(z_1, \bar{z}_1)O_2(z_2, \bar{z}_2) & \text{se } |z_1| > |z_2| \\ O_2(z_2, \bar{z}_2)O_1(z_1, \bar{z}_1) & \text{se } |z_1| < |z_2|, \end{cases} \quad (4.3.4)$$

onde  $z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2$  são valores das variáveis  $u$  e  $\bar{u}$  referidas no parágrafo anterior. Interpreta-se agora o conceito de função de correlação de operadores em teoria de campo, do ponto de vista da Física. Uma função de correlação de  $n$  pontos é representada por

$$\langle 0|T[O_1(x_1, t_1)O_2(x_2, t_2) \cdots O_n(x_n, t_n)]|0\rangle,$$

onde a ordenação temporal do produto de operadores é definida pela generalização óbvia de (4.3.3), de forma a que na ordenação final os operadores estejam ordenados por ordem decrescente da variável temporal  $t$ . Denota-se por  $|0\rangle$  o vector do espaço de Hilbert correspondente ao vácuo físico ou ao estado fundamental, e por  $\langle .|. \rangle$  representa-se o produto interno no espaço de Hilbert. Quando os operadores se encontram definidos no plano complexo e o ordenamento do seu produto é radial, define-se uma função de correlação de  $n$  pontos como

$$\langle 0|R[O_1(z_1, \bar{z}_1)O_2(z_2, \bar{z}_2) \cdots O_n(z_n, \bar{z}_n)]|0\rangle$$

Na literatura Física faz-se normalmente a seguinte interpretação intuitiva: o estado  $|0\rangle$  corresponde ao "estado de entrada" no instante " $t = -\infty$ " (ou no círculo de raio  $z = 0$ ) enquanto  $\langle 0|$  corresponde ao "estado de saída" em " $t = \infty$ " (ou no círculo de raio " $z = +\infty$ ", respectivamente).

Definem-se a seguir os conceitos de campo primário e campo quasi-primário.

<sup>3</sup>O Hamiltoniano é limitado inferiormente pois considera-se, por razões físicas, que o seu menor valor próprio, que corresponde á energia do estado fundamental de um sistema físico, é finito.

DEFINIÇÃO 4.3.1. Um campo diz-se *quasi-primário* se, sob transformações conformes globais,  $z \mapsto w(z)$ ,  $\bar{z} \mapsto \bar{w}(\bar{z})$ , a sua transformação é da forma

$$\phi'(w, \bar{w}) = \left(\frac{dw}{dz}\right)^{-h} \left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}\right)^{-\bar{h}} \phi(z, \bar{z}), \quad (4.3.5)$$

onde  $h$  e  $\bar{h}$  são números designados por *dimensões conformes* do campo  $\phi$ . Um campo diz-se *primário* se a sua transformação sob quaisquer transformações conformes infinitesimais, é da forma (4.3.5). Um campo que não seja primário diz-se *secundário*.

OBSERVAÇÃO 4.3.2. Pela definição anterior, e relembrando que, no plano Euclideano, as transformações conformes globais são as transformações do grupo  $SL(2, \mathbb{C})/\{\pm 1\}$  e que as transformações conformes infinitesimais são todas as transformações conformes, é claro que qualquer campo primário é também um campo quasi-primário, mas um campo quasi-primário não é necessariamente primário.

Considere-se novamente a definição de carga conservada num sistema bidimensional (definição 4.3.1). Nas novas coordenadas no plano, que se passam a designar por  $z, \bar{z}$  em vez de  $u, \bar{u}$ , a integração sobre a variável espacial  $x$  passa a uma integração de contorno sob um círculo centrado em  $z = 0$ . Por outro lado, a corrente conservada é dada por (4.2.11) e portanto, a carga conservada é dada por

$$Q = \frac{1}{2\pi i} \oint dz T(z) X(z), \quad (4.3.6)$$

e por uma expressão análoga para a carga associada à corrente anti-holomórfica <sup>4</sup>.

OBSERVAÇÃO 4.3.3. Prova-se facilmente (ver [32, 55]) que, em termos quânticos, o comutador entre os operadores  $Q_\epsilon$  e  $\phi$  é dado por

$$[Q_\epsilon, \phi] = \delta_\epsilon, \quad (4.3.7)$$

onde  $\delta_\epsilon \phi(z, \bar{z}) = \phi'(z, \bar{z}) - \phi(z, \bar{z})$  é a "variação infinitesimal" do campo  $\phi$  sob uma transformação infinitesimal  $z \mapsto w = z + \epsilon X(z)$ . As transformações infinitesimais em causa são aquelas para as quais a acção é invariante, e portanto estão associadas à corrente conservada  $J_\epsilon$  e, conseqüentemente, à carga  $Q_\epsilon$ .

A seguir apresenta-se um teorema que permite representar o produto de operadores radialmente ordenado entre o tensor energia-momento e um campo primário através de uma série de Laurent.

TEOREMA 4.3.4. *No plano complexo, o produto de operadores entre o tensor energia-momento,  $T(z)$ , e um campo primário,  $\phi(z)$ , é dado pela expansão de Laurent*

$$R[T(z)\phi(w, \bar{w})] = \frac{h}{(z-w)^2} \phi(w, \bar{w}) + \frac{1}{z-w} \partial_\omega \phi(w, \bar{w}) + O(z-w), \quad (4.3.8)$$

onde  $O(z, w, \bar{w})$  é regular, desde que se suponha que o produto radialmente ordenado  $R[T(z)\phi(w, \bar{w})]$  é holomorfo num anel em torno de  $w$ , ou seja, no conjunto  $\{z : R_1 < |z-w| < R_2\}$ , onde  $R_1, R_2 > 0$  são constantes reais.

<sup>4</sup>O factor  $1/(2\pi i)$  foi introduzido apenas porque é uma constante de normalização conveniente.

DEMONSTRAÇÃO. Se  $\phi$  é primário, então, sob uma transformação conforme infinitesimal do tipo  $w \mapsto u = w + \epsilon(w)$ , onde  $\epsilon(w) = \epsilon X(w)$ , a transformação do campo é tal que

$$\phi(w, \bar{w}) \mapsto \phi'(w, \bar{w}) = \left( \frac{\partial u}{\partial w} \right)^h \phi(u, \bar{w}),$$

e tem-se, em primeira ordem em  $\epsilon(w)$ ,

$$\begin{aligned} \phi'(w, \bar{w}) &= \left( \frac{\partial(w + \epsilon(w))}{\partial w} \right)^h \phi(w + \epsilon(w), \bar{w}) \\ &= (1 + \partial_w \epsilon)^h (\phi(w, \bar{w}) + \epsilon(w) \partial_w \phi(w, \bar{w})) \\ &= \phi(w, \bar{w}) + h(\partial_w \epsilon(w)) \phi(w, \bar{w}) + \epsilon(w) \partial_w \phi(w, \bar{w}), \end{aligned}$$

pelo que

$$\phi'(w, \bar{w}) = \phi(w, \bar{w}) + \delta_\epsilon \phi(w, \bar{w}),$$

onde se define o operador

$$\delta_\epsilon \equiv h(\partial_w \epsilon(w)) + \epsilon(w) \partial_w. \quad (4.3.9)$$

Então, pela equação (4.3.7), obtém-se

$$[Q_\epsilon, \phi(w, \bar{w})] = h(\partial_w \epsilon(w)) + \epsilon(w) \partial_w. \quad (4.3.10)$$

e, pela equação (4.3.6), obtém-se a expressão

$$[Q_\epsilon, \phi(w, \bar{w})] = \frac{1}{2\pi i} \oint dz \epsilon(z) (T(z) \phi(w, \bar{w}) - \phi(w, \bar{w}) T(z)).$$

Como já se discutiu, o produto de operadores só está bem definido, em mecânica quântica, quando se considera a ordem temporal ou radial. Como neste caso, o sistema está definido no plano complexo, considera-se a ordem radial. A expressão anterior fica

$$[Q_\epsilon, \phi(w, \bar{w})] = \frac{1}{2\pi i} \left( \oint_{\{z:|z|>|w|\}} dz \epsilon(z) T(z) \phi(w, \bar{w}) - \oint_{\{z:|z|<|w|\}} dz \epsilon(z) \phi(w, \bar{w}) T(z) \right),$$

pois o contorno de integração é qualquer um em torno de  $z = 0$ . É portanto possível escrever

$$[Q_\epsilon, \phi(w, \bar{w})] = \frac{1}{2\pi i} \left( \oint_{\{z:|z|>|w|\}} - \oint_{\{z:|z|<|w|\}} \right) dz \epsilon(z) R[T(z) \phi(w, \bar{w})],$$

onde  $R$  é o operador de ordenação radial. Deformando os contornos numa vizinhança de  $w$ , de acordo com o esquema da figura 4.3.2, a expressão anterior simplifica-se para

$$[Q_\epsilon, \phi(w, \bar{w})] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\circ(w)} dz \epsilon(z) R[T(z) \phi(w, \bar{w})], \quad (4.3.11)$$

onde  $\circ(w)$  representa o contorno de  $w$ .

Por hipótese, o produto radialmente ordenado  $R[T(z) \phi(w, \bar{w})]$  é holomorfo num anel em torno de  $w$ , pelo que pode ser representado por uma série de Laurent do tipo (ver [1])

$$R[T(z) \phi(w, \bar{w})] = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (z - w)^n O_n(w, \bar{w}),$$

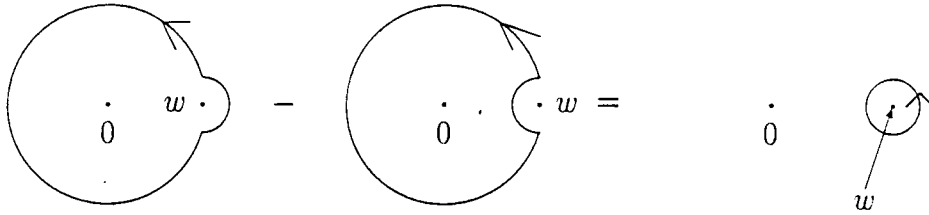


FIGURA 4.3.2. Contornos de integração

onde os coeficientes  $O_n(w, \bar{w})$  da série são operadores independentes da variável  $z$ . Substituindo esta expressão em (4.3.11) obtém-se

$$[Q_\epsilon, \phi(w, \bar{w})] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\sigma(w)} dz \epsilon(z) \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (z-w)^n O_n(w, \bar{w}).$$

Quando  $n \geq 0$ , os termos são regulares, pelo que o integral de contorno desses termos não contribui (é nulo). Quando  $n = -1$  tem-se que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\sigma(w)} dz \frac{\epsilon(z)}{z-w} O_{-1}(w, \bar{w}) = \epsilon(w) O_{-1}(w, \bar{w}), \quad (4.3.12)$$

onde se aplicou a fórmula integral de Cauchy (ver [1, 26]). Para  $n = -2$ , aplicando o teorema dos resíduos, tem-se que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\sigma(w)} dz \frac{\epsilon(z)}{(z-w)^2} O_{-2}(w, \bar{w}) = O_{-2}(w, \bar{w}) \partial_w \epsilon(w). \quad (4.3.13)$$

Comparando os termos que surgem das contribuições de (4.3.12) e (4.3.13) com os termos de (4.3.10), conclui-se que

$$O_{-1}(w, \bar{w}) = \partial_w \phi(w, \bar{w})$$

$$O_{-2}(w, \bar{w}) = h\phi(w, \bar{w}).$$

Os restantes termos, com  $n < -2$ , não podem contribuir pois todos os factores de (4.3.10) já apareceram. Conclui-se portanto que

$$R[T(z)\phi(w, \bar{w})] = \frac{h}{(z-w)^2} \phi(w, \bar{w}) + \frac{1}{z-w} \partial_w \phi(w, \bar{w}) + O(z, w, \bar{w}),$$

e o teorema fica provado. □

Prova-se da mesma forma o resultado análogo para a parte anti-holomorfa do tensor energia momento. Uma expansão do tipo (4.3.8) designa-se por *expansão do produto de operadores* (EPO).<sup>5</sup>

**OBSERVAÇÃO 4.3.5.** É possível provar (ver [32, 40]) que a EPO do tensor energia-momento com ele próprio é dada por

$$T(z)T(w) \sim \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w T(w)}{(z-w)}, \quad (4.3.14)$$

<sup>5</sup>Na literatura anglo-saxónica, estas expansões designam-se por *operator product expansion* (OPE).

onde a relação  $\sim$  significa = a menos de expressões regulares quando  $z \rightarrow w$  e  $c$  é uma constante real que depende do modelo físico. Esta constante denomina-se *anomalia conforme* ou *carga central* e surge devido a um efeito puramente quântico. Fisicamente, a anomalia conforme descreve a forma como um sistema reage à introdução de um comprimento macroscópico, como por exemplo, condições fronteira. Mais especificamente, considere que se mapeia uma teoria de campo conforme, definida em todo o plano complexo, num cilindro de perímetro  $L$  e de altura infinita. Então, a introdução do comprimento  $L$  vai modificar o valor esperado do tensor energia-momento no vácuo. Esse valor deixa de ser 0, como era no plano, e passa a ser uma constante a multiplicar pelo valor da anomalia conforme. Para campos livres, a anomalia surge quando se consideram os operadores normalmente ordenados relativamente a um estado de referência, de forma a evitar divergências quando se aplicam esses operadores aos estados. No capítulo 7 e apêndice B apresenta-se um exemplo de como a ordem normal faz surgir a anomalia conforme. Nas referências [7, 32] a relação (4.3.14) é discutida em detalhe, e prova-se que o tensor momento energia é um campo quasi-primário com dimensão conforme  $h = 2$ .

Como se viu atrás (eq. (4.2.11)), a corrente conservada associada à invariância conforme é dada por

$$J(z) = T(z)X(z),$$

onde  $X(z)$  é um campo de Killing conforme que, no caso euclideano, é uma função holomorfa. A função  $X(z)$  pode, portanto, representar-se através da série de Laurent

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \epsilon_n z^{n+1}$$

e a corrente conservada é dada por

$$J(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \epsilon_n J_n(z),$$

onde  $J_n(z) = T(z)z^{n+1}$ . A carga conservada associada a esta corrente representa-se pelo integral

$$L_n \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_{\sigma(0)} dz z^{n+1} T(z), \quad (4.3.15)$$

onde o contorno da integração é em torno de  $z = 0$ . Pelo teorema integral de Cauchy (ver [1, 26]) esta relação pode ser invertida de forma a obter-se

$$T(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^{-(n+2)} L_n. \quad (4.3.16)$$

**OBSERVAÇÃO 4.3.6.** Uma expressão alternativa a (4.3.16), que é muito útil na prática, é a expansão do tensor energia-momento no espaço de Minkowski. Neste espaço definem-se as variáveis "cone de luz", que são dadas por

$$x^\iota = t + \iota \frac{x}{v}, \quad (4.3.17)$$

onde  $v$  representa a velocidade da luz no espaço de Minkowski – esta velocidade pode, eventualmente, ser uma velocidade de Fermi [60] – e  $\iota = \pm 1$ . Estas variáveis consideram-se

definidas apenas num cilindro de altura infinita e perímetro  $L$ , onde  $|x| \leq \frac{L}{2}$  é uma variável periódica ( $x + L = x$ ). Neste espaço as componentes diagonais do tensor energia-momento são dadas por

$$T_{\mu}(x^t) = \frac{2\pi}{L^2} \sum_n L_n^t \exp \left[ -\frac{2\pi i n x^t}{L} \right]. \quad (4.3.18)$$

Aplicando a transformação  $x^t \rightarrow w^t = i(x^t) = \tau + i t \frac{x}{v}$ , onde  $t = -i\tau$  (tempo  $t$  imaginário), com  $\tau$  real, tem-se que, pela lei de transformação (4.3.5) e pelo facto do tensor energia-momento ser um campo quasi-primário, com dimensões conformes  $h^{-1} = h^1 = 2$ , o tensor energia-momento é dado por

$$T_{\mu}(w^t) = (i)^{-2} T_{\mu}(x^t). \quad (4.3.19)$$

Aplicando de seguida a transformação  $w^t \rightarrow z^t = \exp 2\pi w^t/L$ , obtém-se, pelas mesmas razões, a lei de transformação

$$T_{\mu}(z^t) = - \left( \frac{2\pi}{L} z^t \right)^{-2} T_{\mu}(x^t). \quad (4.3.20)$$

Substituindo (4.3.18) em (4.3.20), tem-se que

$$T_{\mu}(z^t) = - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (z^t)^{-(n+2)} L_n^t, \quad (4.3.21)$$

onde os geradores das álgebras de Virasoro verificam  $L_n^1 = L_n$ ,  $L_n^{-1} = \bar{L}_n$  e  $z^{+1} = z$ ,  $z^{-1} = \bar{z}$ . Recordando as definições de  $T(z)$  e de  $\bar{T}(\bar{z})$ , dada em (4.2.12), conclui-se que

$$T(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} z^{-(n+2)} L_n, \quad (4.3.22)$$

que é precisamente a expressão (4.3.16). Considerando  $\iota = -1$  em (4.3.21) obtém-se uma expressão análoga para  $\bar{T}(\bar{z})$ . Fica portanto provado que a expressão (4.3.18) é válida no espaço de Minkowski.

Determina-se agora o comutador entre os operadores  $L_n$  e  $L_m$ .

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\sigma(0)} dz z^{n+1} T(z), \frac{1}{2\pi i} \oint_{\sigma(0)} dw w^{m+1} T(w) \right] \\ &= \left( \oint_{\sigma(0)} \frac{dz}{2\pi i} \oint_{\sigma(0)} \frac{dw}{2\pi i} - \oint_{\sigma(0)} \frac{dw}{2\pi i} \oint_{\sigma(0)} \frac{dz}{2\pi i} \right) z^{n+1} T(z) w^{m+1} T(w). \end{aligned}$$

Procedendo de forma análoga ao método utilizado no cálculo do comutador  $[Q_\epsilon, \phi(w, \bar{w})]$  na demonstração do teorema 4.3.4, consideram-se a ordenação radial dos operadores e os contornos da figura 4.3.2. Tendo ainda em conta a EPO (4.3.14), tem-se

$$[L_n, L_m] = \oint_{\sigma(0)} \frac{dw}{2\pi i} \oint_{\sigma(w)} \frac{dz}{2\pi i} \left( \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w T(w)}{(z-w)} \right).$$

Calculando os integrais anteriores pelo teorema de Cauchy e pelo teorema dos resíduos, determina-se que

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12} n(n^2-1)\delta_{n+m,0}. \quad (4.3.23)$$

Se o número  $c$  fôr interpretado como o valor próprio de um operador que comuta com todos os operadores  $L_n$ , ou seja, considerando  $c$  uma carga central, as relações (4.3.23) definem uma álgebra - a álgebra de Virasoro. Analogamente, prova-se que existe uma álgebra associada à parte anti-holomórfica da corrente e do tensor energia-momento, que também é uma álgebra de Virasoro. Concluindo, os geradores das transformações conformes infinitesimais no espaço de Hilbert do problema quântico obedecem a duas álgebras de Virasoro que comutam entre si, de acordo com as relações:

$$\begin{aligned}
[L_n, L_m] &= (n - m)L_{n+m} + \frac{Z}{12}n(n^2 - 1)\delta_{n+m,0} \\
[L_n, Z] &= 0 \\
[\bar{L}_n, \bar{L}_m] &= (n - m)\bar{L}_{n+m} + \frac{Z}{12}n(n^2 - 1)\delta_{n+m,0} \\
[\bar{L}_n, Z] &= 0 \\
[L_n, \bar{L}_m] &= 0,
\end{aligned} \tag{4.3.24}$$

onde  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $Z$  é o operador que, quando aplicado a qualquer estado no espaço de Hilbert, tem valor próprio  $c$  e os operadores  $\bar{L}_n$  são os geradores das transformações conformes infinitesimais anti-holomorfas. Verifica-se facilmente que as álgebras verificam a identidade de Jacobi e que a operação  $[\cdot, \cdot]$  é anti-simétrica. As álgebras definidas por (4.3.24) são álgebras de Lie de dimensão infinita.

#### 4.4. As dimensões conformes e os efeitos de tamanho finito

Nesta secção apresenta-se um método bastante eficaz para determinar os pesos conformes dos campos primários de uma teoria de campo conforme. O método baseia-se na relação entre as propriedades de transformação dos campos primários em regiões de tamanho finito e as funções de correlação destes campos. Considere-se uma teoria de campo, que representa um sistema Físico no ponto crítico, definida num cilindro de perímetro  $L$  e de altura infinita. Aplicando a transformação do plano complexo infinito para o cilindro, dada por

$$w = \frac{L}{2\pi} \ln z, \quad \text{ou} \quad z = e^{2\pi w/L}, \tag{4.4.1}$$

os campos primários transformam-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \phi(w_1) \phi(w_2) | 0 \rangle &= \left( \frac{dw}{dz} \right)_{w=w_1}^{-h} \left( \frac{dw}{dz} \right)_{w=w_2}^{-h} \langle 0 | \phi(z_1) \phi(z_2) | 0 \rangle \\
&= \left( \frac{2\pi}{L} \right)^{2h} \frac{e^{2\pi h(w_1 + w_2)/L}}{(z_1 - z_2)^{2h}} \\
&= \left( \frac{2\pi}{L} \right)^{2h} (2 \sinh [\pi(w_1 - w_2)/L])^{-2h}.
\end{aligned} \tag{4.4.2}$$

Na segunda igualdade usou-se o teorema 4.6.2 que será demonstrado na próxima secção. A função de correlação completa é dada pelo produto desta expressão com a expressão



associada à parte anti-holomorfa:

$$\begin{aligned} \langle 0|\phi(w_1, \bar{w}_1)\phi(w_2, \bar{w}_2)|0\rangle = \\ \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{2h+2\bar{h}} (2\sinh[\pi(w_1 - w_2)/L])^{-2h} (2\sinh[\pi(\bar{w}_1 - \bar{w}_2)/L])^{-2\bar{h}}. \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

Para simplificar os cálculos, considera-se que  $h = \bar{h} = \Delta/2$ . Então, a equação anterior reduz-se a

$$\langle 0|\phi(w_1, \bar{w}_1)\phi(w_2, \bar{w}_2)|0\rangle = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{2\Delta} \left[4\sinh\frac{\pi w}{L}\sinh\frac{\pi \bar{w}}{L}\right]^{-\Delta}, \quad (4.4.4)$$

onde  $w \equiv w_1 - w_2$  e  $\bar{w} \equiv \bar{w}_1 - \bar{w}_2$  são coordenadas relativas. Exprimem-se estas variáveis em termos de coordenadas reais, i.e.  $w = u + iv$  e  $\bar{w} = u - iv$ , com  $u$  e  $v$  reais. Depois de usar algumas fórmulas para simplificar as funções hiperbólicas, obtém-se

$$\langle 0|\phi(u_1, v_1)\phi(u_2, v_2)|0\rangle = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{2\Delta} \left[2\cosh\frac{2\pi u}{L} - 2\cosh\frac{2\pi v}{L}\right]^{-\Delta}. \quad (4.4.5)$$

Se  $u \gg L$ , então  $2\cosh(2\pi u)/L \sim e^{2\pi u/L}$  e a função de correlação fica

$$\langle 0|\phi(u_1, v_1)\phi(u_2, v_2)|0\rangle \sim \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{2\Delta} e^{-\frac{2\pi u}{L}}. \quad (4.4.6)$$

Então, conclui-se que as funções de correlação decaem exponencialmente, com um comprimento de correlação  $\xi = L/2\pi\Delta$ , proporcional ao comprimento  $L$ . Quando se analisa um modelo quântico unidimensional, a geometria no cilindro, aqui considerada, pode corresponder a (i) uma rede unidimensional de comprimento finito, a temperatura  $T = 0K$  com condições fronteira periódicas, ou a (ii) uma rede unidimensional infinita a uma temperatura  $T = 1/L$  [7, 32]. No caso (i), o comprimento de correlação  $\xi = L/2\pi\Delta$  está relacionado com a existência de uma diferença finita entre a energia do estado fundamental do sistema e a energia do primeiro estado excitado – esta diferença ou "energy gap" é induzida pelo tamanho finito do sistema. Para explicitar mais este ponto, considere-se uma função de correlação de dois pontos  $\langle 0|\phi(x, 0)\phi(x, \tau)|0\rangle$ , onde  $x$  é a variável espacial e  $\tau$  é a coordenada do tempo imaginário. É possível exprimir esta correlação da seguinte forma

$$\begin{aligned} \langle 0|\phi(x, 0)\phi(x, \tau)|0\rangle &= \langle 0|\phi(x, 0)e^{-H\tau}\phi(x, 0)e^{H\tau}|0\rangle \\ &= \sum_n \langle 0|\phi(x, 0)e^{-H\tau}|n\rangle \langle n|\phi(x, 0)e^{H\tau}|0\rangle \\ &= \sum_n e^{-(E_n - E_0)\tau} |\langle 0|\phi(x, 0)|n\rangle|^2, \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

onde  $H$  é o Hamiltoniano, os estados  $|n\rangle$  são os estados próprios da energia (por ordem crescente de energia) com valores próprios associados  $E_n$ . O conjunto destes valores próprios designa-se por espectro crítico da energia. No desenvolvimento da expressão anterior, o operador  $\phi(x, \tau)$  foi descrito na representação de Heisenberg e usou-se a base dos estados próprios de  $H$  para fazer uma partição da unidade. Quando  $\tau$  é grande, o termo que domina na última soma da expressão (4.4.7) é o termo associado ao estado

excitado de mais baixa energia, ou seja, é o termo associado a  $|1\rangle$  e a  $E_1$ . Então, no ponto crítico, tem-se

$$\langle 0|\phi(x,0)\phi(x,\tau)|0\rangle \propto e^{-\delta E\tau}, \quad (4.4.8)$$

onde  $\delta E = E_1 - E_0$  é a diferença entre a energia do primeiro estado excitado e a energia do estado fundamental. Comparando (4.4.8) com (4.4.6), conclui-se que

$$\delta E = \frac{2\pi\Delta}{L}. \quad (4.4.9)$$

Esta relação é válida quando a velocidade característica do sistema ("velocidade da luz" do sistema) é a unidade. Para obter a expressão correcta para outros valores da velocidade  $v$ , é necessário multiplicar o lado direito por  $v$ . Por outro lado, sem a simplificação de considerar  $\hbar = \bar{\hbar} = \Delta/2$ , a expressão anterior também se modifica. No caso geral, temos

$$\delta E = \frac{2\pi v(\hbar + \bar{\hbar})}{L}. \quad (4.4.10)$$

Esta expressão é muito útil, pois permite determinar as dimensões conformes dos campos primários de uma teoria de campo conforme se o espectro crítico da energia fôr conhecido.

#### 4.5. Axiomática da teoria de campo

Nesta secção define-se axiomáticamente o que é uma teoria de campo. Em Física, as formulações da teoria de campo variam bastante de autor para autor e nem sempre é claro qual o significado que é atribuído ao conceito de campo. A axiomática apresentada é a de Osterwalder e Schrader [50, 51]. Apresenta-se também uma breve discussão do conceito de campo.

A teoria de campo nasceu nos anos vinte e foi uma tentativa para conciliar a mecânica quântica e a teoria da relatividade restrita. Apesar do seu sucesso relativo, os fundamentos matemáticos desta teoria permaneceram durante muito tempo obscuros e a principal razão para este estado de coisas foi, desde logo, a definição de campo que era muito vaga e subjectiva. Apenas em 1964 é publicado o primeiro trabalho científico, de Wightman e Garding [63], onde é definido de forma rigorosa o conceito de campo. Antes deste trabalho, um campo no espaço-tempo quadridimensional era definido como uma função cujos valores eram operadores no espaço de Hilbert: a expressão  $\phi(x)$  representava o campo  $\phi$  no ponto  $x \in \mathbb{R}^4$  e o seu valor era um determinado operador num espaço de Hilbert adequado. Do ponto de vista da mecânica quântica esta interpretação era contraditória com o princípio da incerteza de Heisenberg, pois este implica que o valor de um campo num ponto  $x$  determinado não pode ser medido exactamente. Foi então que Wightman definiu um campo como uma distribuição, da seguinte forma:

**DEFINIÇÃO 4.5.1.** Seja  $H$  um espaço de Hilbert separável e seja  $D \subset H$  um subespaço denso em  $H$ . Denote-se por  $\mathcal{O}(H)$  o conjunto dos operadores (limitados ou ilimitados) em  $H$  e por  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$  o espaço de Schwartz das funções rapidamente decrescentes. A aplicação  $\phi : \mathcal{S}(\mathbb{R}^4) \rightarrow \mathcal{O}(H)$  diz-se um *campo* se

(i) Para cada elemento  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ , tem-se que  $D \subset D(\phi(f))$ ,  $D \subset D(\phi(f)^*)$  e  $\phi(f)^*|_D = \phi(f)|_D$ .

(ii) O vector  $|0\rangle$  (vácuo) é um vector que pertence ao conjunto  $D$  e  $\phi(f)|v\rangle \in D$ , para qualquer vector  $|v\rangle \in D$

(iii) Para um vector fixo  $|v\rangle \in D$ , a aplicação  $f \mapsto \phi(f)|v\rangle$  é linear.

Um campo é assim definido como uma distribuição com valores no conjunto dos operadores simétricos ou hermíticos em  $D \subset H$ . Simbolicamente, pode escrever-se  $\phi(f) = \int_{\mathbb{R}^4} \phi(x)f(x)dx$ . Intuitivamente,  $\phi(f)$  pode interpretar-se como uma "média ponderada" no espaço-tempo do valor de " $\phi(x)$ ", onde o factor de ponderação é dado pela função  $f$ .

A teoria de campo pode ser definida axiomáticamente através de uma série de propriedades a que os campos devem obedecer: os axiomas de Garding-Wightman (para uma discussão destes axiomas ver, por exemplo, [54]).

Numa teoria de campo, definem-se também as distribuições de Wightman, que são distribuições temperadas definidas por

$$\mathcal{W}_n(f_1, \dots, f_n) \equiv \langle 0 | \phi(f_1), \dots, \phi(f_n) | 0 \rangle, \quad (4.5.1)$$

onde  $f_1, \dots, f_n$  são funções de teste do espaço  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ . As distribuições de Wightman também são conhecidas por funções de correlação ou por valores esperados no vácuo.

O espaço das funções de teste escolhido é o espaço de Schwartz pois, neste espaço, a transformada de Fourier é uma aplicação bijectiva e limitada (a inversa da transformada de Fourier está em "pé de igualdade" com a própria transformada de Fourier), o que implica a possibilidade de prolongar a transformada de Fourier ao espaço das distribuições temperadas (dual do espaço de Schwartz). Este prolongamento é essencial para a teoria de campo, pois a transformada de Fourier é a "ferramenta" mais importante a utilizar na dedução de consequências dos axiomas da teoria de campo. Tem-se, por exemplo, que a transformada de Fourier das distribuições de Wightman pode ser analiticamente prolongada de forma a obterem-se as funções de correlação no espaço euclideano.

Para além das consequências que se podem deduzir dos axiomas, uma outra linha de investigação directamente relacionada com a axiomática da teoria de campo é a construção de teorias de campo que verifiquem esta axiomática. É possível provar que as teorias de campos livres (que descrevem sistemas de partículas que não interagem entre si), obedecem aos axiomas de Garding-Wightman (ver [54]).

Nesta tese, apresenta-se uma outra axiomatização da teoria de campo, a de Osterwalder e Schrader [29, 50, 51, 56], que é equivalente à axiomatização de Garding-Wightman e é mais adequada ao desenvolvimento da teoria de campo conforme euclideana bidimensional. Denote-se por  $\langle v | \phi(z) | w \rangle$  o produto interno, no espaço de Hilbert, dado por  $\langle v, \phi(z)w \rangle$ . O campo  $\phi(z)$  interpreta-se como uma distribuição, de acordo com a definição 4.5.1, mas agora considera-se um espaço-tempo bidimensional. Nesta axiomatização, as entidades fundamentais não são os campos mas as funções de correlação, que se definem a seguir.

**DEFINIÇÃO 4.5.2.** Considerem-se os pontos  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ , e os campos  $\phi_{i_1}, \dots, \phi_{i_n}$ . Seja  $|0\rangle$  o vector no espaço de Hilbert que representa o vácuo. Então, define-se a *função de correlação*

$$G_{i_1 \dots i_n}(z_1, \dots, z_n) \equiv \langle 0 | \phi_{i_1}(z_1) \dots \phi_{i_n}(z_n) | 0 \rangle. \quad (4.5.2)$$

Uma função de correlação também se designa por função de Green ou por função de  $n$  pontos. Estas funções de correlação são, em termos físicos, os valores médios no vácuo do produto de operadores ordenado no tempo  $\phi_{i_1}(z_1) \dots \phi_{i_n}(z_n)$ . A ordenação temporal faz-se da seguinte forma:

- se  $z = t + ix$ , então  $Re(z_n) > \dots > Re(z_1)$  (ordenação temporal)
- se  $z = e^{\tau + i\alpha}$ , então  $|z_n| > \dots > |z_1|$  (ordenação radial).

Admite-se que estas funções de correlação estão definidas no conjunto

$$M_n = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : z_i \neq z_j \text{ se } i \neq j\}.$$

Definam-se os conjuntos seguintes

$$\begin{aligned} M_n^+ &\equiv \{(z_1, \dots, z_n) \in M_n : Re(z_j) > 0 \text{ para } j = 1, \dots, n\} \\ \mathcal{S}_0^+ &\equiv \mathbb{C} \\ \mathcal{S}_n^+ &\equiv \{f \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^n) : Supp(f) \subset M_n^+\}, \end{aligned}$$

onde  $\mathcal{S}(\mathbb{C}^n)$  é o espaço de Schwartz das funções rapidamente decrescentes, i.e. ,

$$\mathcal{S}(\mathbb{C}^n) \equiv \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{C}^n) : \sup_{|\alpha| \leq p} \sup_{x \in \mathbb{R}^{2n}} |\partial^\alpha f(x)| (1 + |x|^2)^k < +\infty \text{ para qualquer } p, k \in \mathbb{N} \right\},$$

e  $Supp(f)$  é o fecho do conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^{2n} : f(x) \neq 0\}$ . Considere-se agora um conjunto de índices  $B_0$ , que é contável e represente-se o conjunto de multi-índices  $(i_1, \dots, i_n)$ , onde  $i_j \in B_0$ , por  $B_0^n$ . Seja  $B \equiv \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} B_0^n$ .

Apresenta-se a seguir o primeiro axioma a que as funções de correlação devem obedecer:

AXIOMA 4.5.3. Para qualquer multi-índice  $(i_1, \dots, i_n) \in B_0^n$ , para quaisquer pontos  $(z_1, \dots, z_n) \in M_n$  e para qualquer permutação de índices  $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ , tem-se

$$G_{i_1 \dots i_n}(z_1, \dots, z_n) = G_{i_{\pi(1)} \dots i_{\pi(n)}}(z_{\pi(1)}, \dots, z_{\pi(n)}).$$

Designa-se por *grupo dos movimentos euclidianos* o grupo de transformações que são composições de

- rotações:  $r_\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , definidas por  $r_\alpha(z) \equiv e^{i\alpha}z$ , onde  $\alpha \in \mathbb{R}$
- translações:  $t_a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , definidas por  $t_a(z) = z + a$ , onde  $a \in \mathbb{C}$ .

Enuncia-se a seguir um axioma que caracteriza as propriedades de transformação das funções de correlação sob movimentos euclidianos.

AXIOMA 4.5.4. Sob movimentos euclidianos  $w$ , as funções de correlação são transformadas de acordo com a fórmula:

$$G_{i_1 \dots i_n}(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n) = \prod_{j=1}^n \left( \frac{dw(z_j)}{dz} \right)^{h_j} \left( \frac{d\bar{w}(z_j)}{d\bar{z}} \right)^{\bar{h}_j} G_{i_1 \dots i_n}(w_1, \bar{w}_1, \dots, w_n, \bar{w}_n), \quad (4.5.3)$$

onde  $h_j, \bar{h}_j \in \mathbb{R}$ ,  $w_j \equiv w(z_j)$  e  $\bar{w}_j \equiv \overline{w(z_j)}$ . As quantidades  $h_j, \bar{h}_j$  são designadas por dimensões dos campos  $\phi_{i_j}$ .

O axioma seguinte está relacionado com a positividade do produto interno no espaço de Hilbert (ver [56]). Exige-se que as funções de correlação obedeam a uma propriedade de reflexão, designada positividade da reflexão. Esta propriedade define-se fixando um eixo de reflexão - o eixo imaginário - e obrigando a função de correlação do produto de campos, definidos de um lado do eixo, com a sua imagem reflectida do outro lado do eixo, a ser não negativa. Antes de enunciar o axioma, define-se a notação  $i \equiv i_1 \dots i_n \equiv (i_1, \dots, i_n)$ .

AXIOMA 4.5.5. Existe uma aplicação  $*$  :  $B_0 \rightarrow B_0$ , onde  $*^2$  representa a identidade em  $B_0$  e com uma continuação  $*$  :  $B \rightarrow B$ ,  $i \rightarrow i^*$ , tal que

(i)  $G_i(z) = G_{i^*}(-z^*)$ , onde  $i \in B$  e  $z^*$  é o complexo conjugado de  $z$ .

(ii)  $\langle \underline{f}, \underline{f} \rangle \geq 0$  para qualquer  $\underline{f} \in \underline{\mathcal{S}}^+$ .

Representa-se por  $\underline{\mathcal{S}}^+$  o conjunto de todas as funções  $\underline{f} \equiv (f_i)_{i \in B}$  com  $f_i \in \mathcal{S}_n^+$ ,  $i \in B_0^n$  e  $f_i \neq 0$  excepto para um número finito de índices  $i \in B$ . Define-se também

$$\langle \underline{f}, \underline{f} \rangle \equiv \sum_{i,j \in B} \sum_{n,m} \int_{M_{n+m}} G_{i^*j}(-z_1^*, \dots, -z_n^*, w_1, \dots, w_m) f_i(z)^* f_j(w) d^n z d^m w.$$

A partir deste axioma é possível provar que existe uma forma hermítica semi-definida positiva em  $\underline{\mathcal{S}}^+$  pelo que, retirando a este espaço o núcleo da forma semidefinida positiva, obtém-se um espaço de Hilbert onde a forma (definida positiva) fornece o produto interno (ver [50, 51, 56]).

#### 4.6. Axiomática da teoria de campo conforme

Na secção anterior apresentou-se, de forma breve, a axiomática para uma teoria de campo euclideana bidimensional. A seguir apresentam-se os axiomas para a teoria de campo conforme euclideana bidimensional. Considerem-se as dilatações definidas por

$$d_\tau : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$d_\tau(z) = e^\tau z,$$

onde  $\tau \in \mathbb{R}$ . O primeiro axioma da teoria de campo conforme generaliza o axioma 4.5.4 para dilatações.

AXIOMA 4.6.1. Sob dilatações  $w = e^\tau z$ , as funções de correlação  $G_i$ , com  $i \in B$ , são transformadas de forma covariante, de acordo com a fórmula (4.5.3). Neste caso, as dimensões dos campos designam-se por *dimensões conformes*.

Prova-se agora um resultado importante para funções de correlação de dois pontos.

TEOREMA 4.6.2. *As funções de correlação que verificam os axiomas da teoria de campo, assim como o axioma 4.6.1, são da forma*

$$G_{ij}(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) = C_{ij} z_{12}^{-(h_i+h_j)} \bar{z}_{12}^{-(\bar{h}_i+\bar{h}_j)}, \quad (4.6.1)$$

onde  $z_{12} = z_1 - z_2$ ,  $\bar{z}_{12} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$  e  $C_{ij} \in \mathbb{C}$  é uma constante.

DEMONSTRAÇÃO. Pelo axioma 4.5.4, a função de correlação  $G_{ij}$  submetida a uma transformação do tipo translação  $z \mapsto z - z_2$  transforma-se da forma seguinte

$$G_{ij}(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) = G_{ij}(z_1 - z_2, \bar{z}_1 - \bar{z}_2, 0, 0).$$

Representando  $z_1 - z_2 = re^{i\alpha} = e^\tau e^{i\alpha}$ , pelos axiomas 4.5.4 e 4.6.1, tem-se que

$$G_{ij}(1, 1, 0, 0) = (e^{\tau+i\alpha})^{h_i} (e^{\tau-i\alpha})^{\bar{h}_i} (e^{\tau+i\alpha})^{h_j} (e^{\tau-i\alpha})^{\bar{h}_j} G(e^{\tau+i\alpha} 1, e^{\tau-i\alpha} 1, 0, 0)$$

e invertendo esta relação, conclui-se que

$$G_{ij}(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) = C_{ij} z_{12}^{-(h_i+h_j)} \bar{z}_{12}^{-(\bar{h}_i+\bar{h}_j)}.$$

□

OBSERVAÇÃO 4.6.3. Note-se que a função de correlação de 2 pontos  $G_{ii}$  (função de correlação entre um campo definido num ponto e o mesmo campo definido noutra ponto) é dada simplesmente por

$$G(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) = \langle 0 | \phi(z_1, \bar{z}_1) \phi(z_2, \bar{z}_2) | 0 \rangle = C z_{12}^{-2h} \bar{z}_{12}^{-2\bar{h}}, \quad (4.6.2)$$

onde  $C \in \mathbb{C}$  é uma constante. As funções de correlação de 3 pontos são da forma

$$\begin{aligned} & G_{ijk}(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3) \\ &= C_{ijk} z_{12}^{-h_i-h_j+h_k} z_{23}^{-h_j-h_k+h_i} + z_{13}^{-h_k-h_i+h_j} \bar{z}_{12}^{-\bar{h}_i-\bar{h}_j+\bar{h}_k} \bar{z}_{23}^{-\bar{h}_j-\bar{h}_k+\bar{h}_i} \bar{z}_{13}^{-\bar{h}_k-\bar{h}_i+\bar{h}_j}, \end{aligned} \quad (4.6.3)$$

onde  $C_{ijk} \in \mathbb{C}$  é uma constante. Este resultado prova-se de forma análoga à demonstração do teorema 4.6.2. Conclui-se portanto que as funções de correlação de 2 pontos e de 3 pontos são completamente determinadas pelas constantes  $C_{ij}$ ,  $C_{ijk}$  e pelas dimensões conformes dos campos. As funções de correlação de  $n$  pontos, com  $n > 3$ , não são tão simples, pois não são determinadas por constantes mas por funções (ver [25, 56]).

A seguir apresenta-se mais um axioma da teoria de campo conforme. Este axioma garante a existência de quatro campos na teoria, designados em conjunto como o tensor energia-momento.

AXIOMA 4.6.4. Entre os campos  $\{\phi_i : i \in B_0\}$ , existem quatro campos  $T_{\mu\nu}$ , com  $\mu, \nu \in \{0, 1\}$ , que verificam as condições:

- (i) Simetria:  $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$ ,  $T_{\mu\nu}(z)^* = T_{\nu\mu}(-z^*)$ .
- (ii) Conservação:  $\partial_0 T_{\mu 0} + \partial_1 T_{\mu 1} = 0$ , onde  $\partial_0 \equiv \frac{\partial}{\partial t}$ ,  $\partial_1 \equiv \frac{\partial}{\partial x}$ .
- (iii)  $d(T_{\mu\nu}) \equiv h_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\nu} = 2$ , onde  $d$  se designa por dimensão de escala.  $s(T_{00} - T_{11} \pm 2iT_{01}) = \pm 2$ , onde  $s(\phi_j) \equiv h_j - \bar{h}_j$  se designa por spin conforme. O tensor  $T_{\mu\nu}$  designa-se tensor energia-momento.

OBSERVAÇÃO 4.6.5. Os axiomas da teoria de campo, juntamente com os axiomas 4.6.1 e 4.6.4 implicam um resultado teórico demonstrado em [29]. Esse resultado teórico afirma que:

- (i) O tensor energia-momento tem traço nulo, i.e.,  $tr(T_{\mu\nu}) = T_{00} + T_{11} = 0$ .
- (ii) A quantidade  $T \equiv T_{00} - iT_{01} = \frac{1}{2}(T_{00} - T_{11} - 2iT_{01})$  é independente de  $\bar{z}$ , ou seja,  $T$  é holomorfa. Da mesma forma,  $\bar{T} \equiv T_{00} + iT_{01}$  é independente de  $z$ , ou seja, é anti-holomorfa. As dimensões conformes de  $T$  e de  $\bar{T}$  são dadas por  $h(T) = \bar{h}(\bar{T}) = 2$  e  $\bar{h}(T) = h(\bar{T}) = 0$ .

(iii) Definam-se os seguintes operadores no espaço de Hilbert  $H$ :

$$\begin{aligned} L_{-n} &\equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1} \frac{T(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \\ \bar{L}_{-n} &\equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1} \frac{\bar{T}(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta, \end{aligned} \quad (4.6.4)$$

onde  $n \in \mathbb{Z}$ . Estes operadores obedecem às relações de comutação de duas álgebras de Virasoro que comutam e que possuem a mesma anomalia conforme, ou seja,

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= (n-m)L_{n+m} + \frac{Z}{12}n(n^2-1)\delta_{n+m,0} \\ [\bar{L}_n, \bar{L}_m] &= (n-m)\bar{L}_{n+m} + \frac{Z}{12}n(n^2-1)\delta_{n+m,0} \\ [L_n, \bar{L}_m] &= 0, \end{aligned} \quad (4.6.5)$$

onde  $Z$  é um operador cujo valor próprio é um número real  $c$ . Este número designa-se por *anomalia conforme* ou *carga central*.

(iv) Tem-se que  $L_n^\dagger = L_{-n}$  e  $\bar{L}_n^\dagger = \bar{L}_{-n}$ , onde  $L_n^\dagger$  é o operador adjunto de  $L_n$  e  $\bar{L}_n^\dagger$  é o operador adjunto de  $\bar{L}_n$ .

Define-se agora o conceito de campo primário. A partir de agora apenas se consideram a dependência em  $z$  nos campos e os geradores da álgebra de Virasoro  $L_n$ . Para todas as definições e todos os resultados que se seguem, existem definições e resultados análogos para a dependência em  $\bar{z}$  nos campos e para os geradores  $\bar{L}_n$ .

DEFINIÇÃO 4.6.6. Um campo  $\phi$  diz-se um *campo primário* se

$$[L_n, \phi(z)] = z^{n+1}\partial_z\phi(z) + h(n+1)z^n\phi(z), \quad (4.6.6)$$

para qualquer  $n \in \mathbb{Z}$ , com  $h \in \mathbb{R}$ .

DEFINIÇÃO 4.6.7. Considere-se uma teoria de campo que verifique todos os axiomas até agora enunciados. Denote-se o conjunto de campos primários por

$$B_p \equiv \{i \in B_0 : \phi_i \text{ é um campo primário}\}.$$

A *família conforme* associada a  $\phi_i$ , com  $i \in B_p$ , é o espaço vectorial complexo gerado por

$$\phi_i^k(z) \equiv L_{-k_1}(z) \dots L_{-k_N}(z)\phi_i(z), \quad (4.6.7)$$

com  $k = (k_1, \dots, k_N) \in \mathbb{N}^N$ ,  $k_1 \geq \dots \geq k_N > 0$  e

$$L_{-n}(z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{T(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta,$$

onde  $z \in \mathbb{C}$  e a integração é feita sobre um contorno do ponto  $z$ . Os operadores  $\phi_i^k(z)$  dizem-se *campos secundários* ou *campos descendentes*.

Finalmente, enuncia-se o último axioma da teoria de campo conforme, que determina a expansão do produto de campos primários, de acordo com o trabalho fundamental [2]

AXIOMA 4.6.8. Os campos primários obedecem à seguinte expansão do produto

$$\phi_i(z_1)\phi_i(z_2) \sim \sum_{k \in B_p} C_{ijk} z_{12}^{h_k - h_i - h_j} \phi_k(z_2), \quad (4.6.8)$$

onde a expansão deve ser interpretada como assintótica, i.e. , a menos de uma função regular de  $z_1, z_2$ , e as constantes  $C_{ijk}$  são as mesmas da função de correlação de 3 pontos (4.6.3).

A apresentação da axiomática da teoria de campo fica assim concluída. A partir dos axiomas aqui referidos é possível construir exemplos de teorias de campo conforme, embora esta tarefa não seja simples (ver [29] para alguns exemplos destas construções). Nesta tese, não se seguiu a abordagem axiomática para deduzir os resultados teóricos importantes pois, apesar de rigorosa e matematicamente mais sólida, parece-nos bastante mais "técnica" e complexa que a abordagem seguida nas primeiras secções deste capítulo, onde se recorreu apenas aos resultados dos capítulos anteriores, a considerações físicas e à análise complexa. Escusado será dizer que apenas se aflorou a teoria de campo conforme e alguns dos seus resultados mais importantes, pois o assunto é muito vasto e mais desenvolvimentos não teriam cabimento nesta tese. Alerta-se o leitor para a muita literatura que existe sobre o assunto, destacando as referências [2, 8, 32, 35, 37, 39, 40, 55, 56].



## CAPÍTULO 5

# Teoria da representação da Álgebra de Virasoro

### 5.1. Representações e módulos

Uma representação de uma álgebra de Lie é essencialmente uma forma de associar cada elemento da álgebra a um operador linear que actua num determinado espaço vectorial. Ao longo deste capítulo, denota-se por  $V$  um espaço vectorial sobre  $\mathbb{C}$ . Recorde-se que uma representação de uma álgebra de Lie consiste num homomorfismo<sup>1</sup> dessa álgebra de Lie para a álgebra de Lie dos endomorfismos<sup>2</sup> de um espaço linear  $V$ . A seguir apresenta-se a definição de representação unitária.

DEFINIÇÃO 5.1.1. Uma representação  $\rho : \mathcal{V} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$  diz-se *unitária* se existir uma forma hermitica<sup>3</sup>, semi-definida positiva, denotada  $H : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ , tal que

$$H(\rho(L_n)|v\rangle, |w\rangle) = H(|v\rangle, \rho(L_{-n})|w\rangle) \quad (5.1.1)$$

$$H(\rho(Z)|v\rangle, |w\rangle) = H(|v\rangle, \rho(Z)|w\rangle), \quad (5.1.2)$$

para quaisquer vectores  $|v\rangle, |w\rangle \in V$  e qualquer inteiro  $n \in \mathbb{Z}$ . Nesta definição denota-se por  $\mathcal{V}$  a álgebra de Virasoro, cujos geradores obedecem às regras de comutação (4.3.24).

OBSERVAÇÃO 5.1.2. Note-se que por definição, o que se exige é que  $\rho(L_n)$  e  $\rho(L_{-n})$  sejam operadores formalmente adjuntos. Na literatura de Física é usual omitir a aplicação  $\rho$  que simboliza a representação e escrever a primeira propriedade da definição de representação unitária na forma  $L_n^+ = L_{-n}$ . A exigência de uma representação unitária traduz-se, em termos de Física, pela necessidade de concretizar os geradores  $L_n$  como operadores num espaço de Hilbert (numa representação não unitária surgem estados com "norma" negativa [32]) e com a condição  $L_n^+ = L_{-n}$ , o tensor momento energia é hermitico, como se deseja numa teoria física.

---

<sup>1</sup>Um *homomorfismo* de uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  para uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}'$  é uma aplicação linear  $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$  que preserva os parêntesis de Lie:

$$\varphi : [x, y] \mapsto \varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$$

para qualquer  $x \in \mathfrak{g}$ . Se além disso, a aplicação  $\varphi$  fôr bijectiva, então diz-se um isomorfismo [34, 44, 61, 62].

<sup>2</sup>Uma aplicação linear definida no espaço vectorial  $V$ ,  $\varphi : V \rightarrow V$ , diz-se um *endomorfismo* e o conjunto dos endomorfismos de  $V$  ( $\text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ ), com a operação bilinear

$$\begin{aligned} [.,.] : \text{End}_{\mathbb{C}}(V) \times \text{End}_{\mathbb{C}}(V) &\rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(V) \\ (\varphi, \psi) &\mapsto [\varphi, \psi] \equiv \varphi \circ \psi - \psi \circ \varphi, \end{aligned}$$

é uma álgebra de Lie e designa-se por álgebra de Lie dos endomorfismos de  $V$  [34, 44, 61, 62].

<sup>3</sup>Uma forma  $H : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  diz-se hermitica se  $H(v, w) = \overline{H(w, v)}$ ,  $\forall v, w \in V$ .

DEFINIÇÃO 5.1.3. Um vector  $|v\rangle \in V$  diz-se um *vector cíclico* para uma representação  $\rho$  da Álgebra de Virasoro  $\mathcal{V}$ , se a expansão linear do conjunto  $\{\rho(L)|v\rangle : L \in \mathcal{V}\}$  é o espaço vectorial  $V$ .

DEFINIÇÃO 5.1.4. Uma representação  $\rho : \mathcal{V} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$  diz-se uma *representação de peso máximo* se existirem números complexos  $h, c$  e um vector cíclico  $|h\rangle \in V$ , que verifiquem

$$\rho(Z)|h\rangle = c|h\rangle, \quad (5.1.3)$$

$$\rho(L_0)|h\rangle = h|h\rangle \quad \text{e} \quad (5.1.4)$$

$$\rho(L_n)|h\rangle = 0, \quad (5.1.5)$$

para  $n$  inteiro e  $n \geq 1$ . Se uma representação deste tipo existir, então diz-se que  $|h\rangle$  é um *vector de peso máximo* (em Física é usual designar-se por estado de peso máximo) e que  $V$  é um *módulo de Virasoro* para  $(c, h)$ .

OBSERVAÇÃO 5.1.5. Em termos de Física, a importância de uma representação de peso máximo justifica-se pelo facto de ser necessário existir um estado para o qual  $L_0$  toma um valor mínimo<sup>4</sup>, porque este gerador está intimamente relacionado com o Hamiltoniano<sup>5</sup> e o Hamiltoniano é limitado inferiormente, por razões Físicas.

## 5.2. Módulos de Verma

Define-se agora o conceito de módulo de Verma, que se revela muito importante para os desenvolvimentos teóricos seguintes.

DEFINIÇÃO 5.2.1. Um *módulo de Verma* para  $\{c, h\} \in \mathbb{C}$  é um espaço vectorial complexo  $V(c, h)$  com uma representação de peso máximo  $\rho : \mathcal{V} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(V(c, h))$  e com um estado de peso máximo  $|h\rangle \in V(c, h)$ , tal que o conjunto

$$\{\rho(L_{-n_1}) \dots \rho(L_{-n_k})|h\rangle : 0 < n_k \leq n_{k-1} \leq \dots \leq n_1, k \in \mathbb{N}\} \cup \{|h\rangle\} \quad (5.2.1)$$

é uma base do espaço vectorial  $M(c, h)$ .

É claro que um módulo de Verma é também um módulo de Virasoro. Contudo, o resultado recíproco não é necessariamente verdadeiro mas o próximo lema afirma que dado um módulo de Virasoro, existe um módulo de Verma associado com o mesmo estado de peso máximo caracterizado pelo par de números complexos  $c, h$ .

LEMA 5.2.2. *Para cada par  $\{c, h\} \in \mathbb{C}$  existe um módulo de Verma  $M(c, h)$ .*

<sup>4</sup>As designações são confusas mas, por razões históricas, são as que normalmente aparecem na literatura.

<sup>5</sup>Na álgebra de Witt (3.1.3), a representação de  $L_0 + \bar{L}_0$  é dada por  $-z\partial_z - \bar{z}\partial_{\bar{z}}$  que é o gerador das translações temporais, pois tomando  $z$  e  $\bar{z}$  como variáveis complexas após o mapeamento do cilindro para o plano tem-se, de acordo com (4.3.2), que  $L_0 + \bar{L}_0 = -\partial_y$ , onde  $y$  é a variável temporal. Em Física define-se o Hamiltoniano de um sistema como a carga conservada associada à invariância de um sistema sob translações temporais. É portanto natural a identificação entre os operadores  $L_0 + \bar{L}_0$  e o Hamiltoniano do sistema.

DEMONSTRAÇÃO. Esta prova é construtiva. Dado um par  $c, h \in \mathbb{C}$ , vamos construir um módulo de Verma  $M(c, h)$ . Considere-se o espaço vectorial complexo gerado pelo conjunto de vectores  $\{|h\rangle_{n_1 \dots n_k}, k \in \mathbb{N}\} \cup \{|h\rangle\}$ , onde  $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k > 0$ , e designe-se esse espaço por  $M(c, h)$ . Dados  $c, h \in \mathbb{C}$ , defina-se a representação

$$\rho : \mathcal{V} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(M(c, h))$$

por

$$\rho(Z)|v\rangle \equiv c|v\rangle, \quad \forall |v\rangle \in M(c, h), \quad (5.2.2)$$

$$\rho(L_n)|h\rangle \equiv 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (5.2.3)$$

$$\rho(L_0)|h\rangle \equiv h|h\rangle, \quad (5.2.4)$$

$$\rho(L_0)|h\rangle_{n_1 \dots n_k} \equiv \left( \sum_{j=1}^k n_j + h \right) |h\rangle_{n_1 \dots n_k} \quad (5.2.5)$$

$$\rho(L_{-n})|h\rangle \equiv |h\rangle_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (5.2.6)$$

$$\rho(L_{-n})|h\rangle_{n_1 \dots n_k} \equiv |h\rangle_{nn_1 \dots n_k} \quad \text{para } n \geq n_1. \quad (5.2.7)$$

A definição da representação fica completa determinando  $\rho(L_{-n})|h\rangle_{n_1 \dots n_k}$ , para  $1 \leq n < n_1$ , e  $\rho(L_n)|h\rangle_{n_1 \dots n_k}$  para  $n \in \mathbb{N}$ , o que se consegue recorrendo às relações de comutação da álgebra de Virasoro. Apresentam-se a seguir dois exemplos. Considerando  $n_2 \leq n < n_1$ , tem-se que

$$\begin{aligned} \rho(L_{-n})|h\rangle_{n_1 \dots n_k} &= \rho(L_{-n})\rho(L_{-n_1})|h\rangle_{n_2 \dots n_k} \\ &= \left( \rho(L_{-n_1})\rho(L_{-n}) + (-n + n_1)\rho(L_{-(n+n_1)}) \right) |h\rangle_{n_2 \dots n_k} \\ &= |h\rangle_{n_1 n_2 \dots n_k} + (n_1 - n)|h\rangle_{(n_1+n)n_2 \dots n_k}, \end{aligned}$$

onde se usaram as relações de comutação da álgebra de Virasoro e as equações (5.2.2). Outro exemplo:

$$\begin{aligned} \rho(L_n)|h\rangle_{n_1} &= \rho(L_n)\rho(L_{-n_1})|h\rangle \\ &= (n + n_1)\rho(L_{n-n_1})|h\rangle \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } n > n_1 \\ 2nh + \frac{c}{12}n(n^2 - 1) & \text{se } n = n_1 \\ (n + n_1)|h\rangle_{(n_1-n)} & \text{se } n = n_1. \end{cases} \quad (5.2.8) \end{aligned}$$

A aplicação  $\rho$  está portanto bem definida. Para verificar que ela é de facto uma representação da álgebra de Virasoro são necessários muitos cálculos, devido à diferente representação dos vários tipos de geradores  $L_n$ . Como estes cálculos são repetitivos, mas fáceis, e o procedimento é sempre o mesmo, calcula-se apenas, a título de exemplo, o

seguinte comutador, para  $n \geq m \geq n_1$ ,

$$\begin{aligned}
[\rho(L_{-n}), \rho(L_{-m})]|h\rangle_{n_1 \dots n_k} &= \\
&= \rho(L_{-n})\rho(L_{-m})|h\rangle_{n_1 \dots n_k} - \rho(L_{-m})\rho(L_{-n})|h\rangle_{n_1 \dots n_k} \\
&= |h\rangle_{nmn_1 \dots n_k} - \rho(L_{-m})|h\rangle_{nn_1 \dots n_k} \\
&= |h\rangle_{nmn_1 \dots n_k} - |h\rangle_{nmn_1 \dots n_k} - (n - m)|h\rangle_{(n+m)n_1 \dots n_k} \\
&= (m - n)|h\rangle_{(n+m)n_1 \dots n_k} \\
&= (m - n)\rho(L_{-(n+m)})|h\rangle_{n_1 \dots n_k} \\
&= \rho([L_{-n}, L_{-m}])|h\rangle_{n_1 \dots n_k}.
\end{aligned}$$

Efectuando cálculos semelhantes a este, prova-se que  $[\rho(L_n), \rho(L_m)] = \rho([L_n, L_m])$ , para quaisquer  $n, m \in \mathbb{Z}$ , e portanto  $\rho$  é uma representação da álgebra de Virasoro e, pela sua definição, é claro que  $M(c, h)$  é um módulo de Verma.  $\square$

OBSERVAÇÃO 5.2.3. Seja  $V$  um módulo de Virasoro para  $c, h \in \mathbb{C}$  e com o estado de peso máximo  $|h\rangle$ . Então, pode decompor-se

$$V = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} V_N, \quad (5.2.9)$$

onde se define  $V_0 = \mathbb{C}|h\rangle$ , e  $V_N$  é o espaço vectorial complexo gerado pelos vectores

$$\rho(L_{-n_1}) \dots \rho(L_{-n_k})|h\rangle,$$

com  $n_1 \geq \dots \geq n_k > 0$  e  $\sum_{j=1}^k n_j = N$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Nestas condições, os espaços  $V_N$  são espaços próprios de  $\rho(L_0)$ :

$$\rho(L_0)|v\rangle = (N + h)|v\rangle, \quad \forall |v\rangle \in V_N.$$

Este resultado deduz-se facilmente a partir da definição de módulo de Virasoro e a partir das relações de comutação dos geradores da álgebra de Virasoro [56].

LEMA 5.2.4. *Seja  $V$  um módulo de Virasoro para  $\{c, h\} \in \mathbb{C}$ . Considere-se que  $U$  é um submódulo de  $V$ . Então,*

$$U = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} (V_N \cap U). \quad (5.2.10)$$

DEMONSTRAÇÃO. Considere-se um vector  $|v\rangle = |v_0\rangle \oplus \dots \oplus |v_s\rangle \in U$ , onde  $|v_j\rangle \in V_j$  para  $j \in \{1, \dots, s\}$ . Então, pela observação anterior, tem-se que

$$\begin{aligned}
|v\rangle &= |v_0\rangle + \dots + |v_s\rangle \\
\rho(L_0)|v\rangle &= h|v_0\rangle + \dots + (s + h)|v_s\rangle \\
[\rho(L_0)]^2|v\rangle &= h^2|v_0\rangle + \dots + (s + h)^2|v_s\rangle \\
&\vdots \\
[\rho(L_0)]^{s-1}|v\rangle &= h^{s-1}|v_0\rangle + \dots + (s + h)^{s-1}|v_s\rangle.
\end{aligned}$$

Estas equações formam um sistema de  $s$  equações lineares com  $s$  incógnitas:  $|v_0\rangle, \dots, |v_s\rangle$ . É portanto óbvio que  $|v_0\rangle, \dots, |v_s\rangle$  são combinações lineares de

$$|v\rangle, \rho(L_0)|v\rangle, [\rho(L_0)]^2|v\rangle, \dots, [\rho(L_0)]^{s-1}|v\rangle. \quad (5.2.11)$$

Como  $U$  é um submódulo de  $V$ , tem-se que  $\rho(D)U \subset U$ , pelo que os vectores (5.2.11) são vectores de  $U$  e portanto  $|v_j\rangle \in V_j \cap U$ . Conclui-se portanto que  $U = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} (V_N \cap U)$ .  $\square$

### 5.3. Unitariedade e irreductibilidade das representações

As representações relevantes da álgebra de Virasoro para a teoria de campo conforme são as representações unitárias, pelos motivos avançados na observação 5.1.2. Pela definição de representação unitária, é necessário determinar uma forma hermítica  $H$  definida num módulo de Verma com propriedades adequadas. Esta forma hermítica será definida com base no conceito de valor médio de um vector  $|v\rangle \in M(c, h)$ . Recorde-se que, pelo lema 5.2.3, o módulo de Verma decompõe-se na soma directa de vários subespaços  $V = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} V_N$ , onde  $V_0 = \mathbb{C}|h\rangle$ .

**DEFINIÇÃO 5.3.1.** Considere-se um módulo de Verma  $M(c, h)$  e um vector  $|v\rangle \in M(c, h)$ . Designa-se por *valor médio de  $|v\rangle$* , o coeficiente complexo  $\langle v|$  da componente  $|v\rangle' \in V_0$  definida no subespaço  $V_0$  de  $M(c, h)$ , relativamente à base  $|h\rangle$  desse subespaço. Tem-se portanto que

$$|v\rangle' = \langle v|h\rangle.$$

Esta definição também faz sentido para módulos de Virasoro.

Define-se agora a forma hermítica relevante para a discussão das representações unitárias que se apresenta nesta secção.

**DEFINIÇÃO 5.3.2.** Considere-se um módulo de Verma  $M(c, h)$ . Define-se a forma hermítica  $H : M(c, h) \times M(c, h) \rightarrow \mathbb{C}$  na base  $B \equiv \{|h\rangle_{n_1 \dots n_k}, k \in \mathbb{N}\} \cup \{|h\rangle\}$ , onde  $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k > 0$ , através da fórmula:

$$H(|h\rangle_{n_1 \dots n_k}, |h\rangle_{m_1 \dots m_j}) \equiv \langle L_{n_1} \dots L_{n_k} L_{-m_1} \dots L_{-m_j} |h\rangle \rangle.$$

A forma  $H$  é obviamente bilinear e hermítica. A generalização da fórmula que define a forma para quaisquer vectores  $|v\rangle = \sum_j \lambda_j |v_j\rangle$ ,  $|w\rangle = \sum_k \mu_k |w_k\rangle$ , definidos na base  $B$ , com  $|v_j\rangle, |w_k\rangle \in B$ , é dada por

$$H(|v\rangle, |w\rangle) \equiv \sum_j \sum_k \lambda_j \bar{\mu}_k H(|v_j\rangle, |w_k\rangle) \quad \forall |v\rangle, |w\rangle \in M(c, h).$$

É no entanto necessário verificar se a forma  $H$  é semi-definida positiva, para garantir que a representação é unitária. Para investigar esta condição é conveniente apresentar primeiro as seguintes propriedades de  $H$ .

**TEOREMA 5.3.3.** *Considerem-se valores reais  $h$  e  $c$ . Seja  $M(c, h)$  o módulo de Verma associado. Tem-se então que:*

(i)  $H : M(c, h) \times M(c, h) \rightarrow \mathbb{C}$  é a única forma hermítica que satisfaz as condições  $H(|h\rangle, |h\rangle) = 1$ ,  $H(L_n |v\rangle, |w\rangle) = H(|v\rangle, L_{-n} |w\rangle)$ ,  $H(Z |v\rangle, |w\rangle) = H(|v\rangle, Z |w\rangle)$  para quaisquer vectores  $|v\rangle, |w\rangle \in M$  e para qualquer inteiro  $n \in \mathbb{Z}$ .

(ii)  $H(|v\rangle, |w\rangle) = 0 \quad \forall |v\rangle \in V_N, \forall |w\rangle \in V_M, \text{ com } N \neq M$ .

(iii) O núcleo de  $H$ ,  $Nuc(H) \equiv \{|w\rangle \in M(c, h) : H(|v\rangle, |w\rangle) = 0 \quad \forall |v\rangle \in M(c, h)\}$ , é o maior submódulo próprio de  $M(c, h)$ .

DEMONSTRAÇÃO. (i) É claro que a forma hermítica  $H$  referida na definição 5.3.2 verifica as relações

$$H(L_n|v\rangle, |w\rangle) = H(|v\rangle, L_{-n}|w\rangle),$$

para quaisquer vectores  $v, w \in M(c, h)$ . Para provar esta igualdade, basta exprimir os vectores  $|v\rangle$  e  $|w\rangle$  na base  $B$  e usar as relações de comutação entre os vários geradores da álgebra de Virasoro. Tem-se também que

$$H(|h\rangle, |h\rangle) = \langle h | h \rangle = 1,$$

decorrendo esta igualdade da definição da forma  $H$ . Prova-se também que  $H(Z|v\rangle, |w\rangle) = H(|v\rangle, Z|w\rangle)$ , bastando para tal recordar que o operador  $Z$  comuta com todos os geradores da álgebra de Virasoro. Esta forma hermítica é única pois, considerando apenas os vectores da base  $B$ , tem-se, pela propriedade  $H(L_n|v\rangle, |w\rangle) = H(|v\rangle, L_{-n}|w\rangle)$ , que

$$H(|h\rangle_{n_1 \dots n_k}, |h\rangle_{m_1 \dots m_j}) = H(|h\rangle, L_{n_k} \dots L_{n_1} |h\rangle_{m_1 \dots m_j})$$

e portanto, esta forma depende do vector  $|h\rangle$  e do vector  $L_{n_k} \dots L_{n_1} |h\rangle_{m_1 \dots m_j}$ . A única forma bilinear hermítica nestas condições é a forma explicitada na definição 5.3.2.

(ii) Admita-se que  $N = n_1 + n_2 + \dots + n_k > m_1 + m_2 + \dots + m_j = M$ . Pela definição da forma hermítica  $H$  e pela definição dos vectores  $|h\rangle_{m_1 \dots m_j} \in B$ , tem-se que

$$H(|h\rangle_{n_1 \dots n_k}, |h\rangle_{m_1 \dots m_j}) = \langle L_{n_k} \dots L_{n_1} L_{-m_1} \dots L_{-m_j} h \rangle.$$

É fácil verificar (basta aplicar as relações de comutação dos geradores da álgebra de Virasoro) que

$$\langle L_{n_k} \dots L_{n_1} L_{-m_1} \dots L_{-m_j} h \rangle = \langle \sum_l P_l h \rangle,$$

onde os operadores  $P_l$  são operadores cujo primeiro operador é do tipo  $L_{s_l}$  com  $s_l \geq 1$ , ou seja,  $P_l \equiv Q_l L_{s_l}$ , onde  $Q_l$  é um operador. Como  $L_{s_l} |h\rangle = 0$  para qualquer valor  $s_l \geq 1$ , conclui-se que  $H(|h\rangle_{n_1 \dots n_k}, |h\rangle_{m_1 \dots m_j}) = 0$ . É claro que este resultado generaliza-se para quaisquer vectores  $|v\rangle \in V_N$  e  $|w\rangle \in V_M$ , pois  $|v\rangle$  exprime-se na base de  $V_N$  e  $|w\rangle$  exprime-se na base de  $V_M$ . Para a situação em que  $N < M$  a demonstração é análoga.

(iii)  $Nuc(H)$  é um submódulo de  $M(c, h)$  pois se  $|v\rangle \in M(c, h)$  então  $L_n |v\rangle \in M(c, h)$  para qualquer  $n \in \mathbb{Z}$ . Para provar esta afirmação basta usar o resultado provado na alínea (i) que implica  $H(|w\rangle, L_n |v\rangle) = H(L_{-n} w, v) = 0$ . Por outro lado, tem-se que  $Nuc(H) \neq M(c, h)$ , pois  $|h\rangle \notin Nuc(H)$  devido à igualdade  $H(|h\rangle, |h\rangle) = 1$  e portanto  $Nuc(H)$  é um submódulo próprio de  $M(c, h)$ . Prova-se agora que  $Nuc(H)$  é de facto o maior submódulo próprio de  $M(c, h)$ . Suponha-se que  $U \subset M(c, h)$  é um submódulo próprio de  $M(c, h)$ . Considere-se um vector  $w \in U$ . Sejam os números naturais  $n_1, n_2, \dots, n_k$  tais que  $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k > 0$ . Pela definição da forma  $H$  tem-se que

$$H(|h\rangle_{n_1 \dots n_k}, |w\rangle) = H(|h\rangle, L_{n_k} \dots L_{n_1} |w\rangle).$$

Se  $H(|h\rangle_{n_1 \dots n_k}, |w\rangle) \neq 0$ , ou seja  $\langle L_{n_k} \dots L_{n_1} w \rangle \neq 0$ , então, pelo lema 5.2.4, temos que  $|h\rangle \in U$  pois  $L_{n_k} \dots L_{n_1} |w\rangle \in U$  e  $L_{n_k} \dots L_{n_1} |w\rangle = \langle L_{n_k} \dots L_{n_1} w \rangle |h\rangle$ . Como  $|h\rangle \in U$  e  $U$  é um submódulo de  $M(c, h)$ , qualquer vector da base de  $M(c, h)$ , como por exemplo  $|h\rangle_{m_1 \dots m_j} = L_{-m_1} \dots L_{-m_j} |h\rangle$ , é um vector que pertence a  $U$  e portanto  $U = M(c, h)$ , em contradição com o facto de  $U$  ser um submódulo próprio de  $M(c, h)$  pelo que se conclui

$H(|h\rangle_{n_1 \dots n_k}, |w\rangle) = 0$ . Como este raciocínio é válido para qualquer vector da base  $B$ , conclui-se que  $H(|v\rangle, |w\rangle) = 0, \forall v \in M(c, h)$  e portanto  $w \in Nuc(H)$ .  $\square$

A partir deste resultado prova-se facilmente o seguinte corolário.

**COROLÁRIO 5.3.4.** *Considerem-se valores reais  $h$  e  $c$ . Seja  $M(c, h)$  o módulo de Verma associado. Se a forma hermítica  $H : M(c, h) \times M(c, h) \rightarrow \mathbb{C}$  referida no teorema anterior é semi-definida positiva então  $c \geq 0$  e  $h \geq 0$ .*

**DEMONSTRAÇÃO.** Por definição, se  $H$  é semi-definida positiva então

$$H(|v\rangle, |w\rangle) \geq 0.$$

Considerando  $n \geq 1$  tem-se, portanto, que

$$\begin{aligned} H(|h_n\rangle, |h_n\rangle) &= H(|h\rangle, L_n L_{-n} |h\rangle) \\ &= H(|h\rangle, \left(2L_0 + \frac{n}{12}(n^2 - 1)Z\right) |h\rangle) \\ &= 2nh + \frac{n}{12}(n^2 - 1)c \geq 0, \end{aligned}$$

onde se usaram as regras de comutação dos operadores  $L_n$ . Substituindo na expressão anterior  $n = 1$  tem-se que

$$h \geq 0,$$

e como  $2nh + \frac{n}{12}(n^2 - 1)c \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , conclui-se que  $c \geq 0$ .  $\square$

Uma representação unitária de um módulo de Verma obedece necessariamente às condições  $c \geq 0$  e  $h \geq 0$ , de acordo com o corolário anterior.

Descrevem-se no próximo teorema as regiões no plano  $c, h$  nas quais a representação de um módulo de Verma é unitária. Não se demonstra este resultado, pois a prova é muito complexa e utiliza diversas ferramentas matemáticas ainda não discutidas nesta tese. A demonstração encontra-se em [33] e [36].

**TEOREMA 5.3.5.** *Sejam  $h, c \in \mathbb{R}$  e  $M(c, h)$  o módulo de Verma associado. Então*

- (i) *A representação de  $M(c, h)$  é unitária ( $H$  é definida positiva) se  $c > 1$  e  $h > 0$ .*
- (ii) *A representação de  $M(c, h)$  é unitária ( $H$  é semi-definida positiva) se  $c \geq 1$  e  $h \geq 0$ .*
- (iii) *A representação de  $M(c, h)$  é unitária na região  $0 \leq c < 1, h > 0$  se e só se existir um natural  $m \in \mathbb{N}$ , tal que  $c = c(m)$  e  $h = h_{p,q}(m)$ , onde  $p, q \in \mathbb{N}$  tais que  $1 \leq p \leq q < m$*

$$\begin{aligned} h_{p,q}(m) &\equiv \frac{((m+1)p - mq)^2 - 1}{4m(m+1)}, \quad m \in \mathbb{N}, \\ c(m) &\equiv 1 - \frac{6}{m(m+1)}, \quad m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

Estuda-se agora a questão da indecomponibilidade e da irredutibilidade das representações. Definem-se estes conceitos já de seguida.

DEFINIÇÃO 5.3.6. Seja  $M(c, h)$ <sup>6</sup> um módulo de Verma. Diz-se que  $M(c, h)$  é *indecomponível* se não existirem dois subespaços próprios invariantes  $V, W \subset M(c, h)$ , tais que  $M(c, h) = V \oplus W$ . Caso contrário,  $M(c, h)$  diz-se *decomponível*.

DEFINIÇÃO 5.3.7. Diz-se que um módulo de Verma  $M(c, h)$  é *irredutível* se não existir um subespaço próprio invariante  $V \subset M(c, h)$ . Se um tal subespaço próprio invariante existir diz-se que  $M(c, h)$  é *reduzível*.

O resultado fundamental sobre a indecomponibilidade e irredutibilidade de módulos de Verma é apresentado a seguir.

TEOREMA 5.3.8. *Sejam  $c, h \in \mathbb{C}$ . Então tem-se que:*

(i) *O módulo de Verma  $M(c, h)$  é indecomponível.*

(ii) *Se  $M(c, h)$  é reduzível então existe um subespaço invariante máximo  $I(c, h)$ , tal que  $M(c, h) \setminus I(c, h)$  é uma representação de peso máximo irredutível.*

(iii) *Qualquer representação de peso máximo unitária e definida positiva é irredutível.*

DEMONSTRAÇÃO. (i) Considerem-se dois subespaços invariantes de  $M(c, h)$  que se representam por  $V$  e  $W$  e são de forma a que  $M(c, h)$  seja a soma directa destes subespaços, i.e.,  $M(c, h) = V \oplus W$ . Pelo lema 5.2.4, tem-se que

$$V = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}_0} (M_j \cap V)$$

$$W = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}_0} (M_j \cap W).$$

Como  $\dim(M_0) = 1$ , pois  $M_0 = \mathbb{C}|h\rangle$ , tem-se que  $(M_0 \cap V) = 0$  ou  $(M_0 \cap W) = 0$ . Sendo assim, é claro que  $|h\rangle \in V$  ou  $|h\rangle \in W$  mas  $|h\rangle \notin (V \cap W)$ .  $V$  e  $W$  são invariantes, pelo que

$$\begin{aligned} \rho(D)V &\subset V, \quad \forall D \in \mathcal{V} \\ \rho(D)W &\subset W, \quad \forall D \in \mathcal{V}. \end{aligned}$$

Como qualquer vector da base  $B$  do espaço  $M(c, h)$  pode ser obtido aplicando operadores  $D \in \mathcal{V}$ , é necessário que  $B \in V$  ou que  $B \in W$  mas  $B \notin (V \cap W)$ . Conclui-se que  $V = M$  ou que  $W = M$  e, portanto, não existem dois subespaços próprios invariantes  $V$  e  $W$  tais que

$$M = V \oplus W,$$

pelo que  $M(c, h)$  é indecomponível.

(ii) Considere-se que  $I(c, h)$  é a soma directa de todos os subespaços invariantes de  $M(c, h)$ . É óbvio que  $I(c, h)$  é também um subespaço próprio invariante de  $M(c, h)$  e que o quociente  $M(c, h)/I(c, h)$  é irredutível pois não possui subespaços próprios invariantes.

(iii) Suponha-se que  $M(c, h)$  é uma representação unitária de peso máximo e que  $H$  é uma forma hermítica definida em 5.3.2. Considere-se também que  $U \subset M(c, h)$  é um subespaço próprio invariante de  $M(c, h)$ . Defina-se o conjunto

$$U^\perp \equiv \{|v\rangle \in M(c, h) : H(|u\rangle, |v\rangle) = 0 \forall |u\rangle \in U\}.$$

<sup>6</sup>Considera-se que  $M(c, h)$  representa não só o módulo de Verma como denota também a representação de peso máximo associada, i.e., a representação  $\rho : \mathcal{V} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(M(c, h))$ . Este abuso de notação é muito usado na literatura.



Este conjunto é obviamente um subespaço linear de  $M(c, h)$ . Pelo teorema 5.3.3 tem-se que

$$H(|u\rangle, L_n|v\rangle) = H(L_{-n}|u\rangle, |v\rangle) = 0, \quad \forall |u\rangle \in U, \forall |v\rangle \in U^\perp,$$

e portanto  $L_n|v\rangle \in U^\perp$ . Daqui resulta que  $\rho(D)U^\perp \subset U^\perp, \forall D \in \mathcal{V}$ , pelo que  $U^\perp$  é um subespaço invariante. Por outro lado, é claro que  $U \oplus U^\perp = M(c, h)$ , pois  $U$  e  $U^\perp$  são subespaços lineares ortogonais em  $M(c, h)$ . Pela demonstração do ponto (i) conclui-se que  $M(c, h) = U$  ou  $M(c, h) = U^\perp$ , pelo que, não existem subespaços próprios invariantes de  $M(c, h)$  e, portanto,  $M(c, h)$  é irredutível.  $\square$

**OBSERVAÇÃO 5.3.9.** Se uma representação  $M(c, h)$  é unitária e semi-definida positiva, então a representação  $W(c, h) \equiv M(c, h) \setminus Nuc(H)$  é uma representação unitária definida positiva e irredutível. Este resultado decorre naturalmente dos teoremas 5.3.3 e 5.3.8. Em particular tem-se, pelo teorema 5.3.5, que  $W(c, h) \equiv M(c, h) \setminus Nuc(H)$  é uma representação unitária definida positiva, indecomponível e irredutível se  $c \geq 1$  e  $h \geq 0$  [56].



## Parte II

# Aplicação da teoria de campo conforme ao modelo de Hubbard unidimensional



## O modelo de Hubbard unidimensional

### 6.1. Introdução ao modelo de Hubbard

O modelo de Hubbard é talvez o modelo mais usado no estudo das correlações entre electrões pois é um modelo simples onde se consideram algumas das características fundamentais de sistemas electrónicos [45, 59]. Aparentemente, o modelo de Hubbard é um modelo muito simples que descreve electrões num sólido que interaccionam fortemente - o modelo descreve o movimento dos electrões e as interacções de Coulomb entre electrões. Em termos de aplicações a materiais, existem muitos materiais quasi-unidimensionais (é o modelo unidimensional que nos interessa nesta tese) como, por exemplo, os compostos de óxido de cobre  $Sr_2CuO_3$  e  $SrCuO_2$  ou o acetileno, cujas propriedades electrónicas podem ser descritas pelo modelo de Hubbard unidimensional [52]. Apesar da sua aparente simplicidade, o modelo de Hubbard não é fácil de analisar. Algumas das suas características mais importantes como, por exemplo, a sua relação com a supercondutividade a alta temperatura, ainda não são hoje bem conhecidas. O modelo de Hubbard tem também uma importância fundamental para os desenvolvimentos de técnicas matemáticas e físicas pois, tal como o modelo de Ising que descreve interacções entre spins, é um bom protótipo para desenvolver novos conceitos e novas técnicas em Física-Matemática e em Física da matéria condensada.

Antes de se apresentar a definição geral do modelo de Hubbard, é conveniente introduzir alguns detalhes de notação. Um conjunto de pontos  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \in \mathbb{R}^n$  diz-se uma rede de dimensão  $n$  e representa-se por  $\Lambda_n$ . No caso  $n = 1$  temos uma rede ou cadeia unidimensional, o caso  $n = 2$  corresponde a uma rede bidimensional e o caso  $n = 3$  descreve uma rede tridimensional. Cada ponto  $x_j \in \Lambda_n$  corresponde, em termos físicos, à localização de um átomo num cristal. O Hamiltoniano geral que permite a descrição de um sistema numa rede tridimensional é dado por

$$\hat{H} \equiv \sum_{x_i \in \Lambda_n} = \left[ \frac{\hbar^2}{2m} \left( -i\nabla_i - \frac{e\vec{A}_i}{c\hbar} \right)^2 + V(x_i) \right] + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{e^2}{|x_i - x_j|}, \quad (6.1.1)$$

onde  $m$  é a massa do electrão,  $\hbar$  representa a constante de Planck (dividida por  $2\pi$ ),  $e$  é a carga do electrão,  $c$  é a velocidade da luz,  $\vec{A}_i$  é o potencial vector no ponto  $x_i$  da rede e  $V(x_i)$  é o potencial de rede no mesmo ponto.

No modelo de Hubbard considera-se que cada átomo possui apenas uma orbital electrónica e que a interacção de Coulomb entre os electrões só é não nula quando os dois electrões ocupam o mesmo ponto da rede, o que vai tornar o Hamiltoniano (6.1.1) bastante mais simples. No formalismo da segunda quantificação [3, 49], denota-se por  $c_{x,\sigma}^\dagger$  o operador no espaço de Hilbert que cria um electrão de spin  $\sigma = \uparrow, \downarrow$  no ponto  $x \in \Lambda_n$  e por

$c_{x,\sigma}$  o operador que destrói um electrão de spin  $\sigma = \uparrow, \downarrow$  no ponto  $x \in \Lambda_n$ . É usual chamar a  $c_{x,\sigma}^\dagger$  operador de criação, e a  $c_{x,\sigma}$  operador de destruição. Estes operadores obedecem às relações de anticomutação <sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \{c_{x,\sigma}^\dagger, c_{x',\sigma'}\} &= \delta_{x,x'} \delta_{\sigma,\sigma'} \\ \{c_{x,\sigma}^\dagger, c_{x',\sigma'}^\dagger\} &= \{c_{x,\sigma}, c_{x',\sigma'}\} = 0, \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

onde  $\delta_{a,b}$  é o símbolo de Kronecker. Denota-se por  $|V\rangle$  o estado quântico de um sistema sem electrões - o vácuo. Define-se também

$$\begin{aligned} c_{x,\sigma}|V\rangle &= 0 \quad \forall x \in \Lambda_n, \forall \sigma \in \{\uparrow, \downarrow\} \\ (c_{x,\sigma}^\dagger)^2|v\rangle &= 0 \quad \forall x \in \Lambda_n, \forall \sigma \in \{\uparrow, \downarrow\} \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

onde  $|v\rangle$  é um estado qualquer do espaço de Hilbert. Define-se agora o operador  $\hat{n}_{x,\sigma}$  através da fórmula

$$\hat{n}_{x,\sigma} = c_{x,\sigma}^\dagger c_{x,\sigma}, \quad (6.1.4)$$

cujo valor próprio é o número de electrões com spin  $\sigma$  na posição  $x \in \Lambda_n$ . A partir das equações (6.1.3) é fácil provar que  $\hat{n}_{x,\sigma}$  só pode ter como valores próprios os valores 0 ou 1 <sup>2</sup>. Define-se agora o modelo de Hubbard.

DEFINIÇÃO 6.1.1. Considerem-se os operadores de criação e destruição com as relações de anticomutação (6.1.2) e com as propriedades (6.1.3). O espaço de Hilbert do *modelo de Hubbard* é gerado pelos estados obtidos a partir da aplicação sucessiva do operador de criação ao vácuo. O Hamiltoniano do modelo, no formalismo da segunda quantificação, é definido pelo operador

$$\hat{H}_{hub} \equiv \hat{H}_{hop} + \hat{H}_{int}, \quad (6.1.5)$$

onde

$$\hat{H}_{hop} \equiv - \sum_{x,x' \in \Lambda_n} \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} t_{x,x'} c_{x,\sigma}^\dagger c_{x',\sigma} \quad (6.1.6)$$

representa a energia cinética e

$$\hat{H}_{int} \equiv \sum_{x \in \Lambda_n} U_x \left( \hat{n}_{x,\uparrow} - \frac{1}{2} \right) \left( \hat{n}_{x,\downarrow} - \frac{1}{2} \right) \quad (6.1.7)$$

representa a interacção entre os electrões. A função  $t_{x,x'} = t_{x',x}^*$  denota a amplitude de probabilidade associada à transição de um electrão do ponto  $x$  para o ponto  $x'$  e a função  $U_x$  representa a interacção electrão - electrão <sup>3</sup> no ponto  $x$ .

A relação entre  $t_{x,x'}$  e os operadores do Hamiltoniano (6.1.1) é dada por

$$t_{x,x'} = - \int dy \phi^*(y-x) \left[ -\frac{\hbar^2 2m^2}{\nabla_y} + V(y) \right] \phi(y-x').$$

<sup>1</sup>Um anticomutador entre dois operadores define-se pela fórmula  $\{O_1, O_2\}|v\rangle \equiv (O_1 O_2 + O_2 O_1)|v\rangle$ , onde  $|v\rangle$  é um estado do espaço de Hilbert.

<sup>2</sup>Este resultado é conhecido na literatura por "princípio de exclusão de Pauli".

<sup>3</sup>Se  $U_x \geq 0$  diz-se que a interacção é repulsiva. Se  $U_x < 0$ , diz-se que a interacção é atractiva.

Quanto à interação electrão-electrão, ela define-se pela expressão

$$U_x = \int \int dydw \phi^*(y-x) \phi^*(w-x) \frac{e^2}{|y-w|} \phi(w-x) \phi(y-x),$$

onde as funções de onda  $\phi(x)$  são funções de onda atômicas. Estas funções de onda são usadas na representação dos campos dos electrões que estão localizados sobre os pontos da rede. Estes campos têm a forma [49, 52]:

$$\Psi_\sigma^\dagger(x) = \sum_{x_i \in \Lambda_n} \phi(x-x_i) \exp\left(-i \frac{e}{c\hbar} \int_{x_i}^x dx \vec{A}(x)\right) c_{i,\sigma}^\dagger.$$

Cada ponto  $x \in \Lambda_n$  pode estar "vazio", "ocupado" por um electrão de spin  $\uparrow$ , "ocupado" por um electrão de spin  $\downarrow$  ou "ocupado" por dois electrões (com spin diferente). Então, para cada ponto da rede existem 4 estados individuais diferentes. Considerando que a rede tem  $N_a$  pontos diferentes, então o número de estados independentes é dado por  $4^{N_a}$ .

## 6.2. O modelo de Hubbard unidimensional

No caso unidimensional surge uma noção de ordem "natural" associada aos pontos da rede. Essa ordem é parametrizada por um índice  $j$  que pode tomar valores inteiros  $j = 1, 2, \dots, N_a$ , onde  $N_a$  é o número de pontos da rede. Considerando que as amplitudes de transição  $t_{j,k}$  só são não nulas para transições entre pontos vizinhos da rede e tomando essas amplitudes como constantes, ou seja

$$t_{j,k} = t \delta_{k,j \pm 1},$$

e considerando que o potencial de interação electrão - electrão também é constante e igual a  $U \geq 0$ , o modelo descrito na definição 6.1.1 torna-se bastante mais simples e o Hamiltoniano fica

$$\hat{H}_{hub} = -t \sum_{j,\sigma} (c_{j,\sigma}^\dagger c_{j+1,\sigma} + c_{j+1,\sigma}^\dagger c_{j,\sigma}) + U \sum_j \left( \hat{n}_{j,\uparrow} - \frac{1}{2} \right) \left( \hat{n}_{j,\downarrow} - \frac{1}{2} \right). \quad (6.2.1)$$

Apresentam-se agora algumas definições de operadores muito úteis na prática. Assim, define-se o operador "número total"

$$\hat{N} \equiv \sum_{j,\sigma} \hat{n}_{j,\sigma}, \quad (6.2.2)$$

cujo valor próprio é dado pelo número de electrões na rede. Define-se também o operador "número total com spin  $\sigma$ ",

$$\hat{N}_\sigma \equiv \sum_j \hat{n}_{j,\sigma}, \quad (6.2.3)$$

cujo valor próprio é dado pelo número de electrões na rede com spin  $\sigma = \uparrow, \downarrow$ . Introduzem-se ainda os seguintes operadores

$$\begin{aligned} \hat{S}_z^c &\equiv -\frac{1}{2}(N_a - \hat{N}) \\ \hat{S}_z^s &\equiv -\frac{1}{2}(\hat{N}_\uparrow - \hat{N}_\downarrow), \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

que representam a carga e a magnetização do sistema, respectivamente. Prova-se facilmente [65, 66] que o Hamiltoniano (6.2.1) é invariante sob as transformações  $c_{i,\sigma}^\dagger \rightarrow c_{i,-\sigma}^\dagger$  (troca de spin) e  $c_{i,\sigma} \rightarrow (-1)^i c_{i,\sigma}^\dagger$  (transformação partícula-buraco). A estas transformações estão associadas duas álgebras, sendo os seus geradores

$$\hat{S}_z^s \equiv -\frac{1}{2}(\hat{N}_\uparrow - \hat{N}_\downarrow), \quad \hat{S}_-^s \equiv \sum_j c_{j,\uparrow}^\dagger c_{j,\downarrow}, \quad \hat{S}_+^s \equiv \sum_j c_{j,\downarrow}^\dagger c_{j,\uparrow} \quad (6.2.5)$$

e

$$\hat{S}_z^c \equiv -\frac{1}{2}(N_a - \hat{N}), \quad \hat{S}_-^c \equiv \sum_j (-1)^j c_{j,\uparrow} c_{j,\downarrow}, \quad \hat{S}_+^c \equiv \sum_j (-1)^j c_{j,\downarrow}^\dagger c_{j,\uparrow}^\dagger, \quad (6.2.6)$$

respectivamente. A álgebra gerada por  $\{\hat{S}_z^s, \hat{S}_-^s, \hat{S}_+^s\}$  designa-se por álgebra de spin, enquanto a álgebra gerada por  $\{\hat{S}_z^c, \hat{S}_-^c, \hat{S}_+^c\}$  designa-se por álgebra de  $\eta$ -spin. Relacionados com estes geradores, definem-se os operadores

$$(\hat{S}^\alpha)^2 \equiv \frac{1}{2}(\hat{S}_+^\alpha \hat{S}_-^\alpha + \hat{S}_-^\alpha \hat{S}_+^\alpha) + (\hat{S}_z^\alpha)^2, \quad (6.2.7)$$

onde  $\alpha = c, s$ . Os operadores do conjunto  $\{\hat{S}_z^s, \hat{S}_z^c, (\hat{S}^s)^2, (\hat{S}^c)^2\}$  comutam com o Hamiltoniano [65, 66] e os seus valores próprios (números quânticos) podem ser usados para classificar os estados próprios do Hamiltoniano (6.2.1).

Apresenta-se a seguir o modelo de Hubbard unidimensional na presença de um campo magnético externo e de um potencial químico.

**DEFINIÇÃO 6.2.1.** O *modelo de Hubbard unidimensional na presença de um campo magnético externo  $H$  e de um potencial químico  $\mu$*  define-se através do Hamiltoniano

$$\hat{H} = \hat{H}_{hub} + 2 \sum_\alpha \mu_\alpha^h \hat{S}_z^\alpha, \quad (6.2.8)$$

onde  $\hat{H}_{hub}$  é o Hamiltoniano (6.2.1),  $\alpha = c, s$ ,  $\mu_c^h \equiv \mu$ ,  $\mu_s^h = \mu_0 H$  e  $\mu_0$  representa o magnetão de Bohr.

Descrevem-se agora, finalmente, algumas das propriedades conhecidas do modelo de Hubbard (6.2.1). Como os parâmetros relevantes do modelo são apenas os parâmetros  $U$  e  $t$ , descreve-se o comportamento do modelo em função destes parâmetros. Sabe-se que o modelo de Hubbard não interactivo ( $U=0$ ) representa um metal para qualquer densidade electrónica, excepto quando a densidade é  $N = 2N_a$  e que o modelo de Hubbard no limite atómico, i.e. quando  $t = 0$ , representa um isolador. No caso unidimensional, sabe-se ainda que o modelo é um isolador para qualquer valor  $U \neq 0$ , quando  $N = N_a$ . Este é o conteúdo do teorema de Lieb e Wu (1968) [46]. Para estudar o modelo de Hubbard quando  $U/t$  não toma valores muito pequenos nem muito grandes, é necessário resolver o modelo exactamente, pois técnicas de aproximação como a teoria de perturbações, não fornecem resultados fiáveis. A técnica conhecida na literatura como "Bethe Ansatz" fornece um método eficaz para determinar a solução exacta do modelo de Hubbard unidimensional.



### 6.3. A álgebra de operadores de pseudopartículas

A técnica "Bethe Ansatz" foi introduzida por Bethe em 1931 [4], que a aplicou ao modelo de Heisenberg unidimensional. A solução para o modelo de Hubbard unidimensional, utilizando esta técnica, foi obtida a partir das contribuições de Yang (1967) [64], Lieb e Wu (1968) [46] e M. Takahashi (1972) [58]. Como o método "Bethe Ansatz" é bastante complexo e está fora do âmbito desta tese, remete-se o leitor interessado para as referências [47, 52]. A solução do modelo de Hubbard unidimensional, obtida através da técnica "Bethe Ansatz", fornece estados do espaço de Hilbert que são estados de peso mínimo para as álgebras de spin e  $\eta$ -spin<sup>4</sup>. Actuando sobre estes estados com os operadores  $\hat{S}_+^\alpha$  determinam-se todos os estados próprios do Hamiltoniano do modelo de Hubbard [27, 28]. Estes estados próprios podem ser representados utilizando um conjunto de operadores: os operadores de pseudopartículas e de pseudoburacos, que se representam por  $b_{q,\alpha,\gamma}^\dagger$ ,  $b_{q,\alpha,\gamma}$  para a criação e destruição de pseudopartículas, respectivamente e por  $a_{q,\alpha,\beta}^\dagger$ ,  $a_{q,\alpha,\beta}$  para a criação e destruição de pseudoburacos, respectivamente. Os índices destes operadores devem ser interpretados da seguinte forma:

- $q$  representa o momento das pseudopartículas ou pseudoburacos, designa-se por pseudomomento e pode apenas tomar valores discretos.
- $\alpha$  representa a "côr" das pseudopartículas ou pseudoburacos e pode tomar os valores  $\alpha = s$  ou  $\alpha = c$ , que estão relacionadas com a carga e o spin, respectivamente.
- $\gamma$  representa a banda das pseudopartículas e pode tomar os valores discretos  $\gamma = 0, 1, \dots, +\infty$ . As pseudopartículas na banda  $\gamma = 0$  dizem-se leves, enquanto as restantes são designadas por pseudopartículas pesadas.
- $\beta$  é um índice que pode tomar os valores  $\beta = \pm 1/2$ .

Os conceitos de pseudopartícula e de pseudoburaco foram introduzidos por Carmelo *et al.* em [16, 20]. As álgebras de operadores de pseudopartículas e a representação algébrica do espaço de Hilbert do problema quântico foram estudados em detalhe por Carmelo e Peres [17, 18, 19, 52]. Estes operadores obedecem às relações de anticomutação

$$\begin{aligned} \{b_{q,\alpha,\gamma}^\dagger, b_{q,\alpha,\gamma}\} &= \delta_{q,q'} \delta_{\alpha,\alpha'} \delta_{\gamma,\gamma'}, & \{b_{q,\alpha,\gamma}^\dagger, b_{q,\alpha,\gamma}^\dagger\} &= 0, & \{b_{q,\alpha,\gamma}, b_{q,\alpha,\gamma}\} &= 0, \\ \{a_{q,\alpha,\beta}^\dagger, a_{q,\alpha,\beta}\} &= \delta_{q,q'} \delta_{\alpha,\alpha'} \delta_{\beta,\beta'}, & \{a_{q,\alpha,\beta}^\dagger, a_{q,\alpha,\beta}^\dagger\} &= 0, & \{a_{q,\alpha,\beta}, a_{q,\alpha,\beta}\} &= 0. \end{aligned} \quad (6.3.1)$$

É conveniente definir os operadores  $\hat{N}_\alpha^h \equiv \sum_q \sum_\beta a_{q,\alpha,\beta}^\dagger a_{q,\alpha,\beta}$ , cujo valor próprio associado,  $N_\alpha^h$ , é o número de pseudoburacos,  $\hat{N}_{\alpha,\gamma}(q) \equiv b_{q,\alpha,\gamma}^\dagger b_{q,\alpha,\gamma}$ , cujo valor próprio,  $N_{\alpha,\gamma}(q)$ , é o número de pseudopartículas  $\alpha, \gamma$  com pseudomomento  $q$  e  $\hat{N}_{\alpha,\gamma} = \sum_q \hat{N}_{\alpha,\gamma}(q)$ , cujo valor próprio associado é o número total de pseudopartículas na banda  $\alpha, \gamma$ . O pseudomomento  $q$  de uma pseudopartícula ou pseudoburaco  $\alpha, \gamma$  pode tomar os valores

$$q_j = \frac{2\pi}{N_a} I_j^{\alpha,\gamma}, \quad (6.3.2)$$

onde  $j = 1, 2, 3, \dots, d_{\alpha,\gamma}$  e os números quânticos  $I_j^{\alpha,\gamma}$  são inteiros consecutivos ou semi-inteiros de números ímpares consecutivos (ver apêndice A). O valor de  $d_{\alpha,\gamma}$  é determinado

<sup>4</sup>Um estado  $|\psi\rangle$  é um estado de peso mínimo das álgebras de spin e de  $\eta$ -spin se  $\hat{S}_-^\alpha |\psi\rangle = 0$ , com  $\alpha = c, s$ .

pelas expressões (A.1.1) do apêndice A. Para cada banda  $\alpha, \gamma$ , o pseudomomento é limitado de acordo com  $q_{\alpha, \gamma}^{(-1)} \leq q \leq q_{\alpha, \gamma}^{(+1)}$  onde os limites das zonas de Brillouin (no contexto das pseudopartículas, também designadas por pseudo-zonas de Brillouin) são dados pelas expressões (A.1.4)-(A.1.7).

Introduzem-se agora os números  $N_{\alpha}^z \equiv S^{\alpha} - |S_z^{\alpha}|$ , onde os geradores das álgebras de spin e de  $\eta$ -spin foram definidos nas Eqs. (6.2.5) e (6.2.6). Estes números são números quânticos, pois todos os estados próprios do Hamiltoniano são caracterizados por valores constantes de  $S^{\alpha}$  e de  $S_z^{\alpha}$ . O conhecimento dos números  $N_{\alpha, \beta}^h$  e  $N_{\alpha, \gamma > 0}$  permite conhecer todos os números  $N_{\alpha, \gamma}$  ( $\gamma = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) e  $N_{\alpha}^z$  e a afirmação recíproca também é verdadeira. Portanto, os números  $N_{\alpha}^z$  e as quantidades relacionadas com as pseudopartículas pesadas  $N_{\alpha, \gamma > 0}$  ( $\gamma = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) constituem uma representação alternativa relativamente à representação baseada nos números de pseudoburacos  $\alpha, \beta$  e de pseudopartículas pesadas  $\alpha, \gamma > 0$  [19]. Para o modelo (6.2.8), quando definido em todo o espaço de Hilbert, apenas a representação baseada nos pseudoburacos  $\alpha, \beta$  e nas pseudopartículas pesadas  $\alpha, \gamma > 0$  é completa [19]. Contudo, a representação baseada nas pseudopartículas leves e pesadas,  $\alpha, \gamma = 0, \dots, +\infty$ , também é completa em cada subespaço do espaço de Hilbert em que os números  $N_{\alpha}^z$  são constantes. Como, nesta tese, se consideram apenas estes subespaços no estudo das teorias críticas, adopta-se esta última representação [15]. Também se considera, por uma questão de simplicidade, que a densidade electrónica,  $n = N/N_a$ , é tal que  $0 < n < 1$  e que a densidade de spin,  $m \equiv (N_{\uparrow} - N_{\downarrow})/N_a$ , é tal que  $0 < m < n$ .

#### 6.4. O conceito de estado fundamental generalizado

Nesta secção apresentam-se os conceitos de estado fundamental e de estado fundamental generalizado, introduzidos em [19], que se representam por  $|EF\rangle$  e  $|EFG\rangle$ , respectivamente. Apresenta-se a seguir a definição do primeiro conceito.

**DEFINIÇÃO 6.4.1.** Considere-se que o número de electrões com spin  $\uparrow$ ,  $N_{\uparrow}$ , e o número de electrões com spin  $\downarrow$ ,  $N_{\downarrow}$ , estão fixos. Nesta situação designa-se por *estado fundamental* do modelo de Hubbard unidimensional, e representa-se por  $|EF\rangle$ , o estado próprio do Hamiltoniano (6.2.8) ao qual corresponde o menor valor próprio. Por outras palavras, o estado fundamental é o estado de energia mínima, para valores de  $N_{\uparrow}$  e  $N_{\downarrow}$  fixos.

Quando os valores  $N_{\uparrow}$  e  $N_{\downarrow}$  são fixos, o número de electrões é fixo e o espaço de parâmetros associado designa-se por *colectividade canónica*. Considerando que não só os valores  $N_{\uparrow}$  e  $N_{\downarrow}$  estão fixos, mas que também os números  $N_{\alpha, \gamma}$  e  $N_{\alpha}^z$  são constantes, então o espaço de parâmetros caracterizado por estes números designa-se por *colectividade sub-canónica* [19]. É possível dividir o espaço de Hilbert em subespaços gerados pelos estados próprios do Hamiltoniano com os mesmos valores de  $\{N_{\alpha, \gamma}\} \equiv \{N_{\alpha, \gamma} | \alpha = c, s, \gamma = 1, \dots, +\infty\}$  e de  $\{N_{\alpha}^z\} \equiv \{N_{\alpha}^z | \alpha = c, s\}$ . A uma colectividade canónica, caracterizada por valores  $N_{\uparrow}$  e  $N_{\downarrow}$  fixos estão associadas várias colectividades sub-canónicas diferentes.

Considere-se que os números  $\{N_{\alpha, \gamma}\}$  e  $\{N_{\alpha}^z\}$  estão fixos. Então, designa-se por *estado fundamental generalizado*, e representa-se por  $|EFG\rangle$ , um estado próprio do Hamiltoniano (6.2.8) no qual a distribuição de pseudopartículas ou pseudoburacos, em cada uma das bandas  $(\alpha, \gamma)$ , é de um dos tipos seguintes:

(i) distribuição compacta e simétrica de pseudopartículas em torno do pseudomomento  $q = 0$ .

(ii) distribuição compacta e simétrica de pseudoburacos em torno do pseudomomento  $q = 0$ .

Para distinguir as distribuições do tipo (i) das do tipo (ii), recorre-se a um índice  $\lambda$  que associa às primeiras o valor  $\lambda = 1$  e às segundas o valor  $\lambda = -1$ . As distribuições dos tipos  $\lambda = 1$  e  $\lambda = -1$  são casos extremos, no contexto de uma determinada banda  $(\alpha, \gamma)$  e de uma colectividade sub-canónica, de possíveis configurações de ocupação de pseudomomentos pelas pseudopartículas. É, por exemplo, possível obter a partir de um estado fundamental generalizado (EFG) com uma distribuição do tipo  $\lambda = 1$  numa determinada banda  $(\alpha, \gamma)$ , um outro EFG com uma distribuição do tipo  $\lambda = -1$  na mesma banda, fazendo actuar sobre o primeiro estado operadores de criação e destruição de pseudopartículas - processos pseudopartícula-pseudoburaco. Os estados obtidos através destes processos formam um conjunto que se designa por torre de estados.

Nesta tese, consideram-se apenas subespaços de Hilbert obtidos a partir da expansão linear de estados fundamentais generalizados e dos estados obtidos, a partir destes, através de uma pequena densidade de processos pseudopartícula-pseudoburaco, em que as pseudopartículas e os pseudoburacos envolvidos são caracterizados por uma baixa energia e pequeno momento relativamente ao estado fundamental generalizado inicial. Isto significa que não se considera toda a torre de estados intermédios entre um EFG com uma banda  $(\alpha, \gamma)$  caracterizada por uma distribuição do tipo  $\lambda = +1$  e o EFG, associado à mesma colectividade sub-canónica, com a mesma banda caracterizada por uma distribuição do tipo  $\lambda = -1$ . É, portanto, possível considerar separadamente, na mesma colectividade sub-canónica, os subespaços de Hilbert correspondentes aos dois estados fundamentais generalizados distintos: o EFG associado à distribuição  $\lambda = +1$  e o EFG associado à distribuição  $\lambda = -1$ . Esta separação dos subespaços de Hilbert permite que se identifiquem as pseudopartículas intervenientes numa banda do tipo  $\lambda$  de um EFG e nos processos pseudopartícula-pseudoburaco, de baixa energia e pequeno momento relativamente ao EFG, como sendo do tipo  $\lambda$ .

Considerando uma banda  $(\alpha, \gamma)$ , o número quântico  $\lambda$  só pode tomar um dos valores,  $\lambda = +1$  ou  $\lambda = -1$ , pelo que  $\lambda = \lambda(\alpha, \gamma)$ . Note-se que este número quântico está apenas bem definido em cada subespaço associado a um EFG e não no espaço de Hilbert total, ao contrário dos números quânticos  $\alpha, \gamma$ . Numa determinada colectividade sub-canónica, existem limites no pseudomomento para a distribuição simétrica de pseudopartículas ou de pseudoburacos - esses limites são os pseudo-pontos de Fermi e são denotados por  $q_{F_{\alpha, \gamma, \lambda}}^{(\pm 1)}$ . As expressões que permitem determinar os pseudopontos de Fermi são dadas por (A.2.1)-(A.2.4).

Existem leis de conservação para as pseudopartículas com pseudomomento positivo e com pseudomomento negativo [12, 13, 15]. A esta lei de conservação corresponde um número quântico

$$\iota \equiv \text{sgn}(q) = \pm 1, \quad (6.4.1)$$

que associa o valor  $\iota = 1$  às pseudopartículas com pseudomomento positivo e o valor  $\iota = -1$  às pseudopartículas com pseudomomento negativo. É também conveniente redefinir o pseudomomento relativamente aos pseudo-pontos de Fermi. O novo pseudomomento é

dado por

$$\kappa \equiv \begin{cases} q - q_{F_{\alpha,\gamma,\lambda}}^{(+1)} & \text{se } 0 < q < q_{\alpha,\gamma}^{(+1)}, \quad \iota = +1 \\ q - q_{F_{\alpha,\gamma,\lambda}}^{(-1)} & \text{se } q_{\alpha,\gamma}^{(-1)} < q < 0, \quad \iota = -1, \end{cases} \quad (6.4.2)$$

onde os pseudo-pontos de Fermi  $q_{F_{\alpha,\gamma,\lambda}}^{(\pm 1)}$  são definidos no apêndice A. Com as definições (6.4.1) e (6.4.2), é possível redefinir o conceito de EFG. Assim, um EFG é um estado com uma distribuição de pseudopartículas, onde os pseudomomentos ocupados para cada tipo de pseudopartículas- $\alpha, \gamma, \lambda, \iota$  são tais que  $\lambda\iota\kappa < 0$ . Para tornar a notação mais simples e clara consideram-se, no que resta desta tese, apenas subespaços de Hilbert associados a EFG's onde as bandas são do tipo  $\lambda = 1$ . Para o caso  $\lambda = -1$  as modificações a fazer são mínimas – o caso geral foi estudado na referência [15].

Introduzem-se agora novos operadores de criação e destruição de pseudopartículas, que estão definidos, em cada subespaço associado a um estado fundamental generalizado. Estes operadores,  $b_{\kappa,\alpha,\gamma,\iota}^\dagger$  ( $b_{\kappa,\alpha,\gamma,\iota}$ ), criam (aniquilam) uma pseudopartícula do tipo  $\alpha, \gamma, \iota$  com pseudomomento  $\kappa$ . É claro que, pelas relações de comutação (6.3.1) e pelas definições de  $\iota$  e  $\kappa$ , estes operadores obedecem às relações de anticomutação

$$\begin{aligned} \{b_{\kappa,\alpha,\gamma,\iota}^\dagger, b_{\kappa',\alpha',\gamma',\iota'}\} &= \delta_{\kappa,\kappa'} \delta_{\alpha,\alpha'} \delta_{\gamma,\gamma'} \delta_{\iota,\iota'}, \\ \{b_{\kappa,\alpha,\gamma,\iota}^\dagger, b_{\kappa',\alpha',\gamma',\iota'}^\dagger\} &= \{b_{\kappa,\alpha,\gamma,\iota}, b_{\kappa',\alpha',\gamma',\iota'}\} = 0. \end{aligned} \quad (6.4.3)$$

Definem-se agora os operadores "número de pseudopartículas do tipo  $\alpha, \gamma, \iota$ ",

$$\hat{N}_{\alpha,\gamma,\iota}(\kappa) \equiv b_{\kappa,\alpha,\gamma,\iota}^\dagger b_{\kappa,\alpha,\gamma,\iota}, \quad (6.4.4)$$

e

$$\hat{N}_{\alpha,\gamma,\iota} \equiv \sum_{\kappa} \hat{N}_{\alpha,\gamma,\iota}(\kappa). \quad (6.4.5)$$

O estado fundamental (EF) pode ser representado na base das pseudopartículas por [15]:

$$|EF\rangle = \prod_{\alpha,\iota} \prod_{\iota\kappa < 0} b_{\kappa,\alpha,0,+1,\iota}^\dagger |V\rangle, \quad (6.4.6)$$

onde  $|V\rangle$  representa o vácuo de pseudopartículas. No EF não existem, portanto, pseudopartículas pesadas. A partir da Eq. (6.4.6), deduz-se facilmente que a distribuição de pseudopartículas em função do pseudomomento é dada por

$$N_{\alpha,\gamma,\iota}^0(\kappa) = \begin{cases} 1 & \text{se } \gamma = 0, \quad \iota\kappa < 0, \\ 0 & \text{nos restantes casos.} \end{cases} \quad (6.4.7)$$

### 6.5. O Hamiltoniano nos pontos críticos

Nesta secção mostra-se que a base das pseudopartículas, descrita nas secções anteriores, é extremamente adequada para exprimir o Hamiltoniano nos seus pontos críticos.

Associadas à integrabilidade do modelo de Hubbard unidimensional, existem infinitas leis de conservação que podem ser expressas, na base das pseudopartículas, através da conservação dos valores próprios dos operadores [9, 15]

$$\hat{N}_{\alpha,\gamma} \equiv \sum_{\iota} \hat{N}_{\alpha,\gamma,\iota}, \quad (6.5.1)$$

$$\hat{J}_{\alpha,\gamma} \equiv \frac{1}{2} \sum_{\iota} \iota \hat{N}_{\alpha,\gamma,\iota}. \quad (6.5.2)$$

As leis de conservação associadas aos operadores (6.5.1) designam-se por leis de conservação das cargas generalizadas  $(\alpha, \gamma)$  e as leis de conservação associadas aos operadores (6.5.2) designam-se por leis de conservação das correntes generalizadas  $(\alpha, \gamma)$ . A forma simples de (6.5.1) e (6.5.2) revela que a base das pseudopartículas permite uma representação muito simples para o conjunto infinito de leis de conservação do modelo. Esta é uma das principais razões para utilizar esta base na descrição do problema quântico definido pelo Hamiltoniano (6.2.8). As relações de comutação entre os operadores (6.5.1), (6.5.2) e  $\hat{H}_{hub}$  são nulas

$$[\hat{H}_{hub}, \hat{N}_{\alpha,\gamma}] = [\hat{H}_{hub}, \hat{J}_{\alpha,\gamma}] = 0, \quad (6.5.3)$$

pelo que cada estado próprio do Hamiltoniano tem números  $N_{\alpha,\gamma}$  e  $J_{\alpha,\gamma}$  constantes. As cargas generalizadas estão também relacionadas com os valores de spin e  $\eta$ -spin, através da regra de soma [15]

$$2S^\alpha = -2S_z^\alpha + 2N_\alpha^z = N_\alpha^h - \sum_{\gamma>0} 2\gamma N_{\alpha,\gamma}, \quad (6.5.4)$$

onde os números  $N_\alpha^h$  são definidos no apêndice A, pela expressão (A.1.2).

O Hamiltoniano (6.2.1) normalmente ordenado<sup>5</sup> relativamente ao EF, é dado por [19]

$$: \hat{H}_{hub} := \sum_{j=1}^{\infty} \hat{H}^{(j)}, \quad (6.5.5)$$

onde o primeiro termo e o segundo termo da série são dados por

$$\hat{H}^{(1)} = \sum_{q,\alpha,\gamma} \epsilon_{\alpha,\gamma}^0(q) : \hat{N}_{\alpha,\gamma}(q) : \quad (6.5.6)$$

e

$$\hat{H}^{(2)} = \frac{1}{N_a} \sum_{q,\alpha,\gamma} \sum_{q',\alpha',\gamma'} \frac{1}{2} f_{\alpha,\gamma;\alpha',\gamma'}(q, q') : \hat{N}_{\alpha,\gamma}(q) :: \hat{N}_{\alpha',\gamma'}(q') : , \quad (6.5.7)$$

respectivamente, onde os operadores estão normalmente ordenados relativamente ao EF e  $\epsilon_{\alpha,\gamma}^0(q)$  representa as bandas de energia das pseudopartículas que são definidas em [19]. As funções  $f$  são definidas, no apêndice A, pela fórmula (A.2.5)

Define-se também a velocidade de grupo das pseudopartículas, através da fórmula

$$v_{\alpha,\gamma}(q) = \frac{d\epsilon_{\alpha,\gamma}^0(q)}{dq}. \quad (6.5.8)$$

<sup>5</sup>A ordem normal é um conceito que permite definir a energia de um estado relativamente ao vácuo ou a um estado de referência. Quando um operador do tipo  $: b_k b_k^\dagger :$  está normalmente ordenado relativamente ao vácuo, então os operadores de destruição passam para a direita, i.e.  $: b_k b_k^\dagger := b_k^\dagger b_k$ . Por definição, o valor esperado, no vácuo, de um operador normalmente ordenado é nulo. Este procedimento é utilizado para evitar divergências [32]. A ordem normal define-se mais detalhadamente no apêndice B.

As funções  $f$  da Eq. (A.2.5) e as velocidades de grupo desempenham um papel fundamental nos pontos críticos do modelo, como se verá mais adiante.

Considere-se uma transição entre o EF e um determinado EFG. De acordo com [19, 9, 15], os estados do espaço de Hilbert relevantes, associados a uma transição EF→EFG, são precisamente os estados do subespaço de Hilbert associado ao EFG final. O Hamiltoniano (6.5.5) é obtido através de um desenvolvimento em série, feito em torno da densidade de partículas no EF, e onde o termo de perturbação é uma pequena densidade de pseudopartículas. Como a teoria de perturbações que permite representar o Hamiltoniano na forma (6.5.5) é uma teoria onde o parâmetro de perturbação é a densidade de pseudopartículas definida relativamente à densidade de pseudopartículas no EF, para tomar apenas os dois primeiros termos (6.5.6)-(6.5.7), é necessário que as transições EF→EFG consideradas envolvam uma pequena densidade de pseudopartículas

$$n_{\alpha,\gamma,\mu} \equiv \frac{\Delta N_{\alpha,\gamma,\mu}}{N_a},$$

onde  $\Delta N_{\alpha,\gamma,\mu}$  representa a variação da quantidade de pseudopartículas do tipo  $\alpha, \gamma, \mu$ , que caracteriza a transição EF→EFG. Como no EF não existem pseudopartículas pesadas, tem-se que  $\Delta N_{\alpha,\gamma,\mu} = N_{\alpha,\gamma,\mu}$  para  $\gamma > 0$ . A teoria de perturbações de pseudopartículas é estudada detalhadamente em [19, 52]. Uma transição EF→EFG em vez de ser caracterizada pelos valores  $\Delta N_{\alpha,\gamma,\mu}$  pode, alternativamente, ser especificada pelos valores próprios dos operadores:

$$: \hat{N}_{\alpha,\gamma} :, \quad : \hat{J}_{\alpha,\gamma} :, \quad (6.5.9)$$

onde a ordem normal é tomada relativamente ao EF. Os valores próprios associados a estes operadores denotam-se por  $\Delta N_{\alpha,\gamma}$  e  $\Delta J_{\alpha,\gamma}$ , respectivamente.

Define-se agora um outro problema quântico. Como se verá mais tarde, este problema quântico fornece informação relevante sobre o problema original. O novo problema quântico é descrito pelo Hamiltoniano

$$\hat{H}_{conf} \equiv \hat{H}_{hub} + \sum_{\alpha,\gamma} \mu_{\alpha,\gamma} \hat{N}_{\alpha,\gamma}, \quad (6.5.10)$$

onde  $\mu_{\alpha,\gamma} = -\epsilon_{\alpha,\gamma}^0(q_{F_{\alpha,\gamma}})$ . No segundo termo deste Hamiltoniano introduzem-se explicitamente os operadores (6.5.1) que definem as leis de conservação das cargas generalizadas. A relação entre este Hamiltoniano e o Hamiltoniano original (6.2.8) é dada por

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{conf}. \quad (6.5.11)$$

onde

$$\hat{H}_0 \equiv \sum_{\alpha} \left[ 2\mu_{\alpha}^h \hat{S}_z^{\alpha} - \sum_{\gamma} \mu_{\alpha,\gamma} \hat{N}_{\alpha,\gamma} \right]. \quad (6.5.12)$$

É fácil verificar que os operadores  $\hat{H}$ ,  $\hat{H}_{hub}$ ,  $\hat{H}_{conf}$  e  $\hat{H}_0$  comutam entre si, razão pela qual os seus estados próprios são idênticos. Estes estados próprios denotam-se por  $|\psi\rangle$ . Tem-se que [15, 19]:

$$\hat{H}_0|\psi\rangle = \omega_0|\psi\rangle, \quad (6.5.13)$$

onde os estados  $|\psi\rangle$  são estados do subespaço de Hilbert associados a um determinado EFG e

$$\omega_0 \equiv \sum_{\alpha} \left( 2\mu_{\alpha}^h \left[ \sum_{\gamma>0} \gamma N_{\alpha,\gamma} + N_{\alpha}^z \right] - \sum_{\gamma>0} \left[ \mu_{\alpha,\gamma} - 2\delta_{\alpha,s} \mu_{\alpha}^h \right] N_{\alpha,\gamma} \right). \quad (6.5.14)$$

Prova-se em [19] que a expressão (6.5.14) fornece os valores para a diferença de energia entre o EF e o EFG, ou seja  $\omega_0 = \lim_{N_a \rightarrow \infty} [E_{EFG} - E_{EF}]$ , quando a transição  $EF \rightarrow EFG$  envolve uma pequena densidade de pseudopartículas. O limite  $N_a \rightarrow \infty$  representa o limite termodinâmico.

Existe uma expressão análoga para o momento, que fornece os valores possíveis para a diferença de momento entre um EFG e o EF. A expressão para essa diferença de momento<sup>6</sup> é dada por [15, 19]:

$$k_0 = \lim_{N_a \rightarrow \infty} [P_{EFG} - P_{EF}] = \sum_{\alpha,\gamma} 2\Delta J_{\alpha,\gamma} q_{F\alpha,\gamma} + \pi \left[ \sum_{\gamma>0} (1 + \gamma) N_{c,\gamma} + N_c^z \right] \quad (6.5.16)$$

e  $P_{EFG}$ ,  $P_{EF}$  são os momentos totais no EFG e no EF, respectivamente. As expressões (6.5.14)-(6.5.16) são importantes pois permitem determinar as energias e os momentos possíveis para as transições  $EF \rightarrow EFG$  [15, 19].

Quando  $\omega_0 = 0$ , o ponto crítico já foi estudado em [30, 31] e é um caso particular da teoria aqui apresentada. Para energia finita,  $\omega_0 > 0$ , é necessário combinar a teoria de campo conforme com as leis de conservação associadas à integrabilidade do modelo, para descrever os pontos críticos da teoria. Começamos por estudar a teoria crítica do modelo associado ao Hamiltoniano  $\hat{H}_{conf}$ . No próximo capítulo prova-se que, a baixa energia, este modelo pode ser mapeado numa teoria de campo conforme que é descrita por várias álgebras de Virasoro. Para já, determina-se a forma do Hamiltoniano  $\hat{H}_{conf}$  no ponto crítico. Para construir este Hamiltoniano basta considerar a definição (6.5.10), substituir em (6.5.7) as funções  $f$  pelos seus valores nos pseudo-pontos de Fermi e linearizar, em (6.5.6), as bandas de energia  $\epsilon_{\alpha,\gamma}^0(q)$  nos mesmos pontos [13, 21]. Considerando apenas os dois primeiros termos da série (6.5.5), o que equivale a considerar a expansão até à segunda ordem na densidade de pseudopartículas, o Hamiltoniano crítico, normalmente

<sup>6</sup>De forma perfeitamente análoga ao procedimento utilizado para decompor o Hamiltoniano  $\hat{H}$ , é possível definir os operadores de momento  $\hat{P}$ ,  $\hat{P}_{hub}$ ,  $\hat{P}_{conf}$  e  $\hat{P}_0$ , onde os operadores usados na definição de  $\hat{P}_{conf}$  não são os operadores associados às leis de conservação das cargas generalizadas, mas os operadores associados às leis de conservação das correntes generalizadas (6.5.2) [15, 19]. Tal como no caso dos operadores  $\hat{H}$ ,  $\hat{H}_{conf}$  e  $\hat{H}_0$ , tem-se que

$$\hat{P} = \hat{P}_{conf} + \hat{P}_{hub} \quad (6.5.15)$$

e  $\hat{P}_0|\psi\rangle = k_0|\psi\rangle$ .

ordenado relativamente ao EF, é dado por

$$\begin{aligned}
: \hat{H}_c : &= \sum_{\kappa, \alpha, \gamma, \mu} \mu \kappa v_{\alpha, \gamma} : \hat{N}_{\alpha, \gamma, \mu}(\kappa) : \\
&+ \frac{1}{N_a} \sum_{\kappa, \kappa'} \sum_{\alpha, \alpha'} \sum_{\gamma, \gamma'} \sum_{\mu} \frac{1}{2} [f_{\alpha, \gamma; \alpha', \gamma'}^{\mu} : \hat{N}_{\alpha, \gamma, \mu}(\kappa) :: \hat{N}_{\alpha', \gamma', \mu}(\kappa') : \\
&+ f_{\alpha, \gamma; \alpha', \gamma'}^{-\mu} : \hat{N}_{\alpha, \gamma, \mu}(\kappa) :: \hat{N}_{\alpha', \gamma', -\mu}(\kappa') :], \tag{6.5.17}
\end{aligned}$$

onde

$$v_{\alpha, \gamma} \equiv v_{\alpha, \gamma}(q_{F_{\alpha, \gamma}}), \tag{6.5.18}$$

e

$$f_{\alpha, \gamma; \alpha', \gamma'}^l = f_{\alpha, \gamma; \alpha', \gamma'}(q_{F_{\alpha, \gamma}}, l q_{F_{\alpha', \gamma'}}). \tag{6.5.19}$$

Os pseudomomentos  $q_{F_{\alpha, \gamma}}$  são dados pela fórmula (A.2.2) e  $l = \pm 1$ .

O Hamiltoniano (6.5.17) define a teoria crítica do modelo associado ao Hamiltoniano (6.5.10), mas também permite determinar os expoentes críticos das funções de correlação do modelo de Hubbard unidimensional (6.5.11), como se verá no próximo capítulo.



## CAPÍTULO 7

### Aplicação da teoria de campo conforme ao modelo de Hubbard

Em [13] mostra-se que o modelo de Hubbard é invariante conforme a baixa energia ( $\omega_0 = 0$ ) e que os operadores de pseudopartículas podem ser usados para a representação das álgebras de Virasoro. Nesse trabalho, os autores concluíram que a teoria de campo conforme, associada ao modelo de Hubbard unidimensional, é descrita por quatro álgebras de Virasoro que comutam entre si e que possuem anomalia conforme  $c = 1$  – duas álgebras associadas a pseudopartículas do tipo  $\alpha = c$  e outras duas associadas a pseudopartículas do tipo  $\alpha = s$  (não foram consideradas pseudopartículas pesadas). Neste capítulo, prova-se que o modelo associado ao Hamiltoniano  $\hat{H}_{conf}$ , no ponto crítico, definido num subespaço de Hilbert associado a um EFG, pode ser mapeado numa teoria de campo invariante sob transformações conformes. Considerando as leis de conservação associadas à integrabilidade do modelo de Hubbard unidimensional, assim como a relação entre este modelo e o modelo associado ao Hamiltoniano  $H_{conf}$ , determina-se a forma geral das funções de correlação para os campos físicos.

#### 7.1. As álgebras de Virasoro do modelo

Para estudar os geradores das álgebras de Virasoro associados aos processos pseudopartícula-pseudoburaco em torno de um EFG, redefine-se o Hamiltoniano crítico (6.5.17). Como estes processos são em torno do EFG, o Hamiltoniano crítico é normalmente ordenado relativamente a este estado. Por outro lado, quando actua em estados excitados (estados obtidos através de processos pseudopartícula-pseudoburaco), o segundo termo do Hamiltoniano anula-se [13, 15], pelo que o Hamiltoniano crítico tem a forma

$$: \hat{H}_0 := \sum_{\alpha, \gamma} \Theta(N_{\alpha, \gamma}) \hat{H}_0^{\alpha, \gamma} \quad (7.1.1)$$

onde  $\Theta(x) = 1$  se  $x > 0$ ,  $\Theta(x) = 0$  se  $x \leq 0$  e

$$\hat{H}_0^{\alpha, \gamma} = \sum_{\kappa, \iota} \iota \kappa v_{\alpha, \gamma, 1} : \hat{N}_{\alpha, \gamma, 1, \iota}(\kappa) : \quad (7.1.2)$$

O pseudomomento  $\kappa$ , definido pela expressão (6.4.2), está definido relativamente aos pseudo-pontos de Fermi do EFG.

O facto de o Hamiltoniano (7.1.1) se decompor numa soma, em que cada parcela se refere a um tipo diferente de pseudopartículas  $\alpha, \gamma$  vai permitir determinar os geradores da álgebra de Virasoro e a estrutura da teoria de campo conforme associada ao Hamiltoniano crítico (6.5.17). Para baixas energias, o sistema aproxima-se do ponto crítico e o modelo pode ser mapeado numa teoria de campo. Este mapeamento é feito de acordo com o método standard de passagem ao contínuo [3, 32, 38]. Introduzindo a notação  $\rho \equiv \{\alpha, \gamma\}$ ,

a teoria de campo resultante é descrita pela densidade de Lagrangeano

$$\hat{\mathcal{L}} = \sum_{\rho,\iota} \Theta(N_\rho) \hat{\mathcal{L}}_{\rho,\iota}, \quad (7.1.3)$$

onde cada termo da soma é dado por

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}_{\rho,\iota} &= \frac{1}{2} \psi_{\rho,\iota}^\dagger(x,t) i \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \iota v_\rho \frac{\partial}{\partial x} \right] \psi_{\rho,\iota}(x,t) \\ &- \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \iota v_\rho \frac{\partial}{\partial x} \right] \psi_{\rho,\iota}^\dagger(x,t) \right\} i \psi_{\rho,\iota}(x,t). \end{aligned} \quad (7.1.4)$$

Os números quânticos  $\alpha$ ,  $\gamma$ , e  $\iota$  desempenham o papel de "cores" dos campos e  $\psi_{\rho,\iota}^\dagger$  representa o operador conjugado hermitico de  $\psi_{\rho,\iota}(x,t)$  (recorde-se que um campo toma valores no espaço de operadores). A partir da Eq. (6.4.3) e da relação entre a teoria de campo e o modelo de rede que lhe deu origem, determinam-se as seguintes relações de anticomutação para os campos:

$$\left\{ \psi_{\rho,\iota}^\dagger(x,t), \psi_{\rho',\iota'}(x',t') \right\} = \delta_{\rho,\rho'} \delta_{\iota,\iota'} \delta(x-x') \delta(t-t'). \quad (7.1.5)$$

Introduzem-se agora novas variáveis: as variáveis "cone de luz", que são definidas por

$$x_\rho^\iota \equiv t + \iota \frac{x}{v_\rho}, \quad (7.1.6)$$

e que correspondem à métrica

$$g_{\iota,\iota'} = \frac{\delta_{\iota,-\iota'}}{2}. \quad (7.1.7)$$

Nestas variáveis, a densidade de Lagrangeano (7.1.4) é dada por

$$\hat{\mathcal{L}}_{\rho,\iota} = i \left\{ \psi_{\rho,\iota}^\dagger \partial_\iota^\rho \psi_{\rho,\iota} - \left[ \partial_\iota^\rho \psi_{\rho,\iota}^\dagger \right] \psi_{\rho,\iota} \right\}, \quad (7.1.8)$$

onde  $\psi_{\rho,\iota}^\dagger = \psi_{\rho,\iota}^\dagger(x_\rho^{+1}, x_\rho^{-1})$ ,  $\psi_{\rho,\iota} = \psi_{\rho,\iota}(x_\rho^{+1}, x_\rho^{-1})$  e

$$\partial_\iota^\rho \equiv \frac{\partial}{\partial x_\rho^\iota}. \quad (7.1.9)$$

As equações de movimento para os campos ou equações de Euler-Lagrange, apresentadas no teorema 4.1.2, são dadas por

$$\partial_\iota^\rho \psi_{\rho,\iota} = 0; \quad \partial_\iota^\rho \psi_{\rho,\iota}^\dagger = 0, \quad (7.1.10)$$

pelo que  $\psi_{\rho,\iota}$  e  $\psi_{\rho,\iota}^\dagger$  dependem apenas da variável  $x_\rho^{-\iota}$ , i.e.  $\psi_{\rho,\iota} = \psi_{\rho,\iota}(x_\rho^{-\iota})$  e  $\psi_{\rho,\iota}^\dagger = \psi_{\rho,\iota}^\dagger(x_\rho^{-\iota})$ .

Usando as Eqs. (4.1.10), (7.1.8) e (7.1.10) é fácil determinar a expressão para o tensor energia-momento, que pode ser escrita na forma

$$\hat{T}_{\iota,\iota} = \sum_\rho \Theta(N_\rho) \hat{T}_{\iota,\iota}^\rho(x_\rho^\iota), \quad (7.1.11)$$

onde

$$\hat{T}_{\iota,\iota}^\rho(x_\rho^\iota) = \frac{i}{2} : \left\{ \psi_{\rho,-\iota}^\dagger \partial_\iota^\rho \psi_{\rho,-\iota} - \left[ \partial_\iota^\rho \psi_{\rho,-\iota}^\dagger \right] \psi_{\rho,-\iota} \right\} : . \quad (7.1.12)$$

A ordem normal é tomada relativamente ao EFG de referência.

Cada termo  $\hat{T}_{\iota,\iota}^\rho(x_\rho^t)$  refere-se a uma teoria de campo independente, que é identificada pelo índice  $\rho$ , e corresponde a um espaço de Minkowski independente, onde a velocidade da luz é dada por  $v_\rho$ , pelo que cada componente  $\hat{T}_{\iota,\iota}^\rho$  está associada a uma álgebra de Virasoro  $\mathcal{V}_{\rho,\iota}$ . Recordando a expressão para a expansão do tensor energia-momento no espaço de Minkowski, que é dada por (4.3.18), verifica-se facilmente que os geradores da álgebra de Virasoro são os coeficientes da seguinte expansão do tensor:

$$\hat{T}_{\iota,\iota}^\rho(x_\rho^t) = \frac{2\pi}{N_a^2} \sum_j L_{ij}^{\rho,\iota} e^{-i\frac{2\pi}{N_a}\iota j x_\rho^t}, \quad (7.1.13)$$

onde  $j \in \mathbb{Z}$ .

Considerando a relação entre os campos e os operadores de pseudopartículas originais do modelo [32], os campos podem ser expandidos nas séries de Fourier

$$\psi_{\rho,-\iota}(x_\rho^t) = \frac{1}{\sqrt{N_a}} \sum_\kappa b_{\kappa,\rho,\iota} e^{-i\frac{2\pi}{N_a}\kappa x_\rho^t}, \quad (7.1.14)$$

$$\psi_{\rho,-\iota}^\dagger(x_\rho^t) = \frac{1}{\sqrt{N_a}} \sum_\kappa b_{-\kappa,\rho,\iota}^\dagger e^{-i\frac{2\pi}{N_a}\kappa x_\rho^t}, \quad (7.1.15)$$

onde os operadores de pseudopartículas,  $b_{\rho,\iota,\kappa}$  e  $b_{\rho,\iota,\kappa}^\dagger$ , obedecem às relações de anticomutação (6.4.3). Substituindo estes campos na Eq. (7.1.11), efectuando alguns cálculos e tendo em conta a ordem normal relativamente ao EFG, determina-se facilmente que os geradores para a álgebra de Virasoro  $\mathcal{V}_{\rho,\iota}$  são dados por

$$L_j^{\rho,\iota} = \sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} \iota(\kappa - \frac{j}{2}) b_{\kappa-\iota j,\rho,\iota}^\dagger b_{\kappa,\rho,\iota} + \frac{1}{8} \delta_{j,0}. \quad (7.1.16)$$

Considerando a ordem normal relativamente ao EFG determina-se, após alguns cálculos (ver a secção 1 do apêndice B), que

$$[L_j^{\rho,\iota}, L_m^{\rho',\iota'}] = \delta_{\rho,\rho'} \delta_{\iota,\iota'} \left[ (j-m) L_{j+m}^{\rho,\iota} + \frac{1}{12} (j^3 - j) \delta_{m+j,0} \right], \quad (7.1.17)$$

O resultado (7.1.17) confirma que os operadores  $L_m^{\rho',\iota'}$  são os geradores de uma álgebra de Virasoro e, de acordo com (4.3.24), cada álgebra de Virasoro  $\mathcal{V}_{\rho,\iota}$  tem anomalia conforme ou carga central  $c = 1$ . Devido ao facto de cada álgebra de Virasoro estar associada apenas a pseudopartículas do tipo  $\rho$ , a teoria de campo conforme associada ao Hamiltoniano  $\hat{H}_{conf}$ , definido no ponto crítico, é algebricamente descrita por um número  $N_V \equiv \sum_{\rho,\iota} \Theta(N_\rho)$  de álgebras de Virasoro que comutam entre si. O facto das anomalias conformes associadas às álgebras de Virasoro tomarem os valores  $c = 1$  pode ser confirmado através de uma análise das correcções de tamanho finito no EFG [15] ou através da análise do EPO do tensor energia-momento (4.3.14) [13].

## 7.2. As dimensões conformes dos campos primários

Na realidade, os geradores  $L_0^{\rho,\iota}$  não são da forma (7.1.16), pois estes geradores desempenham um papel especial, já que estão relacionados com o Hamiltoniano (ver observação 5.1.5) e, a não ser que se defina o Hamiltoniano crítico relativamente ao EFG, a expressão de  $L_0^{\rho,\iota}$  deve ser modificada. Como o Hamiltoniano crítico (6.5.17) foi definido

relativamente ao EF, é necessário determinar  $L_0^{\rho,\iota}$  de uma forma diferente. A forma mais simples de determinar o gerador  $L_0^{\rho,\iota}$ , definido relativamente ao EF, é através da relação existente entre a teoria de campo conforme e os efeitos de tamanho finito. Utilizando esta relação, também se determinam as dimensões conformes dos campos primários. Para calcular estas dimensões é necessário saber qual é o espectro de energias correspondente ao Hamiltoniano crítico (6.5.17). Este espectro foi estudado na referência [15] e é dado pela expressão:

$$\begin{aligned} \Delta E &= E(\{\Delta N_\rho\}, \{\Delta J_\rho\}) - E_{EF} \\ &= \frac{2\pi}{N_a} \sum_\rho \Theta(N_\rho) v_\rho \{ [\sum_{\rho'} \Theta(N_{\rho'}) \xi_{\rho;\rho'}^1 \Delta J_{\rho'}]^2 \\ &\quad + [\sum_{\rho'} \Theta(N_{\rho'}) \xi_{\rho;\rho'}^0 \frac{\Delta N_{\rho'}}{2}]^2 + \sum_\iota N_{\rho,\iota}^{ph} \} + O\left(\frac{1}{N_a}\right), \end{aligned} \quad (7.2.1)$$

onde as funções  $\xi_{\rho;\rho'}^0$ ,  $\xi_{\rho;\rho'}^1$  são dadas pela expressão

$$\xi_{\rho;\rho'}^j = \delta_{\rho,\rho'} + \sum_{l=\pm 1} [l]^j \Phi_{\alpha,\gamma;\alpha',\gamma'}(q_{F_\rho}, lq_{F_{\rho'}}) \quad (7.2.2)$$

e  $\Delta N_\rho$ ,  $\Delta J_\rho$  são os valores próprios dos operadores (6.5.9). As constantes  $N_{\rho,\iota}^{ph}$  representam o número de processos pseudopartícula-pseudoburaco do tipo  $\iota$ , de baixa energia e pequeno momento, em torno do EFG caracterizado por  $\rho$ . Estes processos dão origem a uma "torre" de estados excitados.

Para encontrar as dimensões conformes dos campos primários da teoria de campo conforme, considera-se a diferença de energias

$$\delta E = E' - E_{EF} = \frac{2\pi}{N_a} \sum_{\rho,\iota} \Theta(N_\rho) v_\rho h_\rho^\iota + O\left(\frac{1}{N_a}\right), \quad (7.2.3)$$

onde  $E'$  é a menor energia do espectro (7.2.1) no subespaço associado ao EFG de referência. Essa energia é precisamente a energia do estado fundamental generalizado, ou seja, é a energia que se obtém de (7.2.1), não considerando processos pseudopartícula-pseudoburaco, i.e.  $N_{\rho,\iota}^{ph} = 0$ . Comparando (7.2.3) com a expressão (4.4.10), determinam-se as dimensões conformes dos campos, que são dadas por<sup>1</sup>

$$h_\rho^\iota = \frac{1}{2} \{ [\Gamma_\rho^0]^2 + [\Gamma_\rho^1]^2 + \iota N_\rho \Delta J_\rho \}, \quad (7.2.4)$$

<sup>1</sup>Nas expressões para as dimensões conformes  $h_\rho^\iota$  surge o termo  $\iota N_\rho \Delta J_\rho$  devido ao facto das dimensões conformes, para  $\iota = +1$  e  $\iota = -1$ , serem diferentes. Na dedução da expressão (4.4.10) considerou-se que elas eram iguais por uma questão de simplificação da análise. No caso geral, basta considerar o espectro do operador momento no ponto crítico para além do espectro de energias. A análise que permite relacionar o momento no ponto crítico com as dimensões conformes dos campos primários é análoga à análise efectuada na dedução da expressão (4.4.10). O espectro do momento no ponto crítico é apresentado em [15], onde se prova que é necessário adicionar o termo  $\iota N_\rho \Delta J_\rho$  às expressões das dimensões conformes dos campos primários.

onde

$$\Gamma_{\rho}^0 \equiv \sum_{\rho'} \Theta(N_{\rho'}) \xi_{\rho;\rho'}^0 \frac{\Delta N_{\rho'}}{2}, \quad (7.2.5)$$

e

$$\Gamma_{\rho}^1 \equiv \sum_{\rho'} \Theta(N_{\alpha',\gamma'}) \xi_{\rho;\rho'}^1 \Delta J_{\rho'}. \quad (7.2.6)$$

Determinam-se agora os geradores  $L_0^{\rho,\iota}$ , definidos relativamente ao EF. O Hamiltoniano crítico (6.5.17) pode ser expresso em termos destes geradores na forma [15]:

$$: \hat{H}_c := \sum_{\rho,\iota} v_{\rho} : L_0^{\rho,\iota} : . \quad (7.2.7)$$

A partir da expressão para o espectro do Hamiltoniano crítico (7.2.1), é fácil concluir que:

$$: \hat{L}_0^{\rho,\iota} := \iota \sum_{\kappa} \kappa : \hat{N}_{\rho,\iota}(\kappa) : + \frac{1}{2} \sum_{j=0,1} [\hat{\Gamma}_{\rho}^j]^2, \quad (7.2.8)$$

onde

$$\hat{\Gamma}_{\rho}^0 = \frac{1}{2} \sum_{\rho'} \Theta(N_{\rho'}) \xi_{\rho;\rho'}^0 : \hat{N}_{\rho'} :, \quad (7.2.9)$$

e

$$\hat{\Gamma}_{\rho}^1 = \sum_{\rho'} \Theta(N_{\rho'}) \xi_{\rho;\rho'}^1 : \hat{J}_{\rho'} :, \quad (7.2.10)$$

são os operadores cujos valores próprios são dados pelas Eqs. (7.2.5) e (7.2.6), respectivamente. A ordem normal é tomada relativamente ao EF.

Se um determinado EFG tem a banda  $\rho \equiv \alpha, \gamma$  ocupada por pseudopartículas, então é um estado próprio dos geradores  $L_0^{\rho,\iota}$  e, pela Eq. (7.2.8), tem-se que

$$L_0^{\rho,\iota} |EFG\rangle = h_{\rho}^{\iota} |EFG\rangle, \quad (7.2.11)$$

onde  $h_{\rho}^{\iota}$  é a dimensão conforme (7.2.4). De acordo com a representação da álgebra de Virasoro, que foi apresentada na demonstração do teorema (5.2.2), a expressão (7.2.11) significa que  $|EFG\rangle$  é um estado de peso máximo de todas as álgebras de Virasoro associadas à teoria conforme. A partir da expressão (7.1.16), também se verifica facilmente que:

$$L_j^{\rho,\iota} |EFG\rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } \iota j > 0 \\ |EFG\rangle_{\rho,\iota,j} & \text{se } \iota j < 0, \end{cases} \quad (7.2.12)$$

onde o estado  $|EFG\rangle_{\rho,\iota,j}$  representa um estado excitado (um estado que pertence ao subespaço de Hilbert associado ao EFG de referência, mas de maior energia). Estes estados são obtidos a partir do EFG através de processos pseudopartícula-pseudoburaco.

### 7.3. As funções de correlação

Um campo primário da teoria conforme discutida na secção anterior define-se generalizando a definição de campo primário (4.3.5) para o caso em que a teoria conforme é descrita por um número  $N_V$  de álgebras de Virasoro. Esta generalização é discutida na secção 2 do apêndice B. Um campo primário da teoria conforme associada ao Hamiltoniano (6.5.17) é um campo que, sob quaisquer transformações conformes infinitesimais  $z_t^\rho \rightarrow w_t^\rho = z_t^\rho + \epsilon(z_t^\rho)$ , verifica a lei de transformação

$$(\phi^{conf})'(x, \tau) \equiv \prod_{\rho, \iota} \left( \frac{dw_t^\rho}{dz_t^\rho} \right)^{-h_\rho^\iota} \phi_\rho^{conf}(z_{+1}^\rho, z_{-1}^\rho), \quad (7.3.1)$$

onde  $\tau$  é definido pela transformação  $t \rightarrow -i\tau$  e denota o tempo euclideo.

Na secção 2 do apêndice B descrevem-se os cálculos que permitem determinar as funções de correlação de dois pontos para os campos primários, que são dadas por:

$$G_{i,i}(x, \tau, 0, 0) \equiv \langle EF | \prod_\rho \phi_\rho^{conf}(z_{+1}^\rho, z_{-1}^\rho) \phi_\rho^{conf}(0, 0) | EF \rangle = \frac{C}{\prod_{\rho, \iota} (x - i\iota v_\rho \tau)^{2h_\rho^\iota}}, \quad (7.3.2)$$

onde  $C$  é uma constante. A introdução do tempo euclideo  $\tau$  permite considerar a função de correlação definida no espaço euclideo.

A teoria de campo conforme é extremamente poderosa porque todas as funções de correlação (de dois pontos) dos campos físicos são determinadas a partir das funções de correlação dos campos primários. De facto, os campos físicos exprimem-se através de campos primários ou campos secundários da teoria. Um campo secundário, que pertence à família conforme de um campo primário  $\phi(z)$ , pode representar-se na forma  $(\phi^{conf})^k(z) \equiv L_{-k_1}(z) \dots L_{-k_N}(z) \phi(z)$  (ver definição (4.6.7)). Com base na comparação entre o espectro de energia crítico e a representação de Lehmann para as funções de correlação de campos secundários conclui-se que os campos secundários são campos com dimensões conformes dadas por  $\Delta \equiv h + \sum_{j=1}^N (k_j)$  [7, 41]. Então, de acordo com as expressões (7.2.1), (7.2.4) e (7.3.2), as funções de correlação de dois pontos para um campo secundário (ou primário) da teoria conforme associada a (6.5.17), são dadas por

$$G_{i,i}(x, \tau, 0, 0) \equiv \langle EF | \phi^{conf}(x, \tau) \phi^{conf}(0, 0) | EF \rangle = \frac{C}{\prod_{\rho, \iota} (x - i\iota v_\rho \tau)^{2\Delta_\rho^\iota}}, \quad (7.3.3)$$

onde  $\Delta_\rho^\iota = h_\rho^\iota + N_{\rho, \iota}^{ph}$ .

Acontece que as funções de correlação (7.3.3) são válidas para momentos ( $k_0$ ) finitos e, como se prova em [6], usando um método de análise independente da teoria de campo conforme – método da bozonização – surge um factor oscilante na função de correlação quando se consideram estes momentos finitos. Esse factor é dado por  $e^{-ik_0 x}$ , onde os valores  $k_0$  representam os momentos associados às transições  $EF \rightarrow EFG$  e são dados por (6.5.16). Além disso, as funções de correlação (de dois pontos) para os campos físicos associados a  $H_{conf}$  são somas de funções de correlação de campos primários e campos secundários da teoria de campo conforme [30, 31], ou seja, são somas de termos do tipo

$$\langle EF | \phi_\nu^{conf}(x, \tau) \phi_\nu^{conf}(0, 0) | EF \rangle = \frac{e^{-ik_0 x}}{\prod_{\rho, \iota} (x - i\iota v_\rho \tau)^{2\Delta_\rho^\iota}}, \quad (7.3.4)$$

onde  $\nu$  identifica um determinado campo físico.

A teoria de campo conforme aqui discutida só descreve o ponto crítico do Hamiltoniano  $H_{conf}$ , definido por (6.5.10). As funções de correlação (7.3.4) não representam portanto as funções de correlação dos campos físicos do modelo de Hubbard unidimensional. Na descrição de Heisenberg, um campo físico associado ao Hamiltoniano (6.2.8) é dado por

$$\phi_\nu(x, t) = e^{-i\hat{H}t} \phi_\nu(x, 0) e^{i\hat{H}t}, \quad (7.3.5)$$

onde o tempo  $t$  é real.

O facto dos Hamiltonianos (6.2.8), (6.5.10) e (6.5.12) comutarem é uma consequência das leis de conservação associadas à integrabilidade. Para se obterem expressões para as funções de correlação do modelo de Hubbard unidimensional, a partir da expressão (7.3.6), utilizam-se estas relações de comutação. Considere-se um subespaço de Hilbert associado a um EFG. Este subespaço de Hilbert pode ser obtido a partir da expansão linear dos estados próprios do Hamiltoniano (6.2.8) com números  $N_{\alpha,\gamma}$  e  $N_\alpha^z$  fixos. Denotem-se esses estados próprios por  $|\psi(j)\rangle$ . Considerem-se transições do EF para o EFG referido. Então, a partir de (7.3.5) e de (6.5.11), tem-se que

$$\begin{aligned} \langle EF | \phi_\nu(x, t) \phi_\nu(0, 0) | EF \rangle &= \langle EF | e^{-i\hat{H}_0 t} \phi_\nu^{conf}(x, t) e^{i\hat{H}_0 t} \phi_\nu^{conf}(0, 0) | EF \rangle \\ &= \sum_j \langle EF | \phi_\nu^{conf}(x, t) e^{i\hat{H}_0 t} |\psi(j)\rangle \langle \psi(j) | \phi_\nu^{conf}(0, 0) | EF \rangle \\ &= e^{i\omega_0 t} \langle EF | \phi_\nu^{conf}(x, t) \phi_\nu^{conf}(0, 0) | EF \rangle \\ &= \frac{e^{-i[k_0 x - \omega_0 t]}}{\prod_{\rho,\nu} (x + \nu v_\rho t)^{2\Delta_\rho^\nu}}, \end{aligned} \quad (7.3.6)$$

onde se usou a relação de comutação  $[\hat{H}_{conf}, \hat{H}_0] = 0$ , a representação  $\phi_\nu^{conf}(x, t) = e^{-i\hat{H}_{conf}t} \phi_\nu^{conf}(x, 0) e^{i\hat{H}_{conf}t}$ , a expressão (6.5.13) e o facto de  $\hat{H}_0 |EF\rangle = 0$ . Na última igualdade usou-se a expressão (7.3.4), mas com o tempo real  $t$ . Conclui-se portanto que as funções de correlação dos campos físicos são somas de termos do tipo (7.3.6). Esta expressão permite calcular as funções de correlação, como por exemplo a função de correlação densidade-densidade, representada por  $\langle EF | n(x, t) n(0, 0) | EF \rangle$ , onde  $n(x, t)$  é o campo que mede a densidade electrónica [31]. Outro exemplo de uma função de correlação que pode ser calculada a partir de (7.3.6) é a função de correlação da condutividade em função da frequência [10]. Neste caso, o formalismo aqui apresentado aplica-se para energias finitas ( $\omega_0 > 0$ ), pelo que a determinação desta função de correlação é uma aplicação da teoria discutida nesta tese e introduzida em [9, 15].





## CAPÍTULO 8

### Conclusões

Nesta tese apresentaram-se os resultados básicos da teoria de campo conforme e aplicou-se esta teoria ao modelo de Hubbard unidimensional, representado algebricamente na base das pseudopartículas.

A teoria de campo conforme é um assunto muito vasto para se esgotar numa tese. Não se abordaram facetas muito interessantes desta teoria como, por exemplo, a classificação dos modelos mínimos – que são modelos com um número de famílias conformes finito e que descrevem modelos da física estatística, agrupando-os em classes de universalidade –, ou as álgebras de Lie afins<sup>1</sup>, que são álgebras de Lie de dimensão infinita, que descrevem as simetrias em sistemas físicos onde, além da conservação do tensor energia-momento, se consideram novas correntes conservadas. Estes sistemas físicos possuem outras simetrias além da invariância conforme. Estes assuntos e outros são detalhadamente estudados em [32, 34, 37, 42, 43]. Existem até "aplicações" da teoria de campo conforme à matemática pura. Um exemplo destas "aplicações" é a fórmula de Verlinde, que é uma fórmula que determina as dimensões dos espaços dos blocos conformes<sup>2</sup> e as dimensões dos espaços de funções  $\Theta$  generalizadas [56]. Estas funções  $\Theta$  são de grande importância na matemática e, antes do aparecimento da fórmula de Verlinde (1988), as dimensões dos seus espaços eram desconhecidas. A fórmula de Verlinde foi apresentada como um resultado da Física e, em particular, da teoria de campo conforme. Os argumentos de ordem física que levaram Verlinde a obter a fórmula e as suas justificações estão, actualmente, a ser estudadas por vários matemáticos, que pretendem chegar a uma demonstração formal. Estes exemplos servem para mostrar que a teoria de campo conforme tem muitas ramificações e aplicações, para além da teoria básica apresentada na primeira parte desta tese.

Como se mostra na parte II, a teoria de campo conforme fornece uma técnica muito poderosa que permite determinar as funções de correlação de um sistema quântico. Estas funções de correlação são as grandezas físicas relevantes, pois são elas que se podem medir experimentalmente. Mostrou-se que a utilização da base de pseudopartículas, no modelo de Hubbard unidimensional, permite estabelecer uma correspondência entre o problema quântico definido pelo Hamiltoniano  $\hat{H}_{conf}$ , dado pela expressão (6.5.10), e uma série de teorias de campo independentes, definidas em espaços de Minkowski diferentes (cada espaço de Minkowski é caracterizado por uma velocidade  $v_\rho$ ). A partir destas teorias de campo e utilizando a teoria de campo conforme, foram determinadas representações para os geradores das álgebras de Virasoro. Existe um número  $N_\nu$  destas álgebras e todas possuem uma anomalia conforme  $c = 1$ . A partir da expressão para o espectro

---

<sup>1</sup>Na literatura da Física estas álgebras são normalmente designadas por álgebras de Kac-Moody.

<sup>2</sup>Os blocos conformes são funções complexas que permitem determinar as funções de correlação de 4 pontos para campos primários [56].

crítico de energias e da relação entre os efeitos de tamanho finito e a teoria de campo conforme, calcularam-se as dimensões conformes dos campos primários. Combinando estes resultados com as leis de conservação, associadas à integrabilidade do modelo, relacionou-se o problema original, definido pelo Hamiltoniano (6.2.8), com o problema descrito pela teoria de campo conforme. Esta relação tornou possível a determinação da forma geral para as funções de correlação dos campos físicos do modelo de Hubbard unidimensional.

A teoria apresentada é válida a baixa energia em torno das energias finitas  $\omega_0$ , ou seja, é válida para energias  $(\omega - \omega_0)$  pequenas. Em [10], determina-se a função de correlação para a parte da condutividade que depende da frequência, de acordo com a teoria apresentada nesta tese. Os resultados obtidos são comparados com resultados experimentais que se referem a condutores quasi-unidimensionais com características adequadas ao modelo de Hubbard, e conclui-se que os valores para os expoentes críticos determinados pela teoria se ajustam de forma muito razoável aos expoentes críticos determinados experimentalmente.

Após estas conclusões, apresentam-se algumas sugestões de investigação futura nesta área.

Na área da teoria de campo conforme e da Física-Matemática, as álgebras de Lie afins ou álgebras de Kac-Moody referidas anteriormente são, seguramente, um objecto de estudo importante. Os fundamentos matemáticos desta teoria e a sua aplicação a modelos concretos como, por exemplo, o modelo de Hubbard unidimensional fornecem possibilidades de investigação potencialmente muito produtiva.

O cálculo de funções de correlação de campos físicos para o modelo de Hubbard unidimensional, com base na teoria descrita nesta tese, é imprescindível pois os resultados desses cálculos, quando confrontados com resultados experimentais, permitem avaliar a real importância do estudo aqui apresentado e podem fornecer informações importantes para uma melhor compreensão das propriedades dos materiais quasi-unidimensionais.

A relação entre as leis de conservação, a integrabilidade dos modelos unidimensionais e a invariância conforme foi extremamente importante para o desenvolvimento da teoria apresentada. O estudo mais profundo desta relação é certamente um assunto a merecer atenção e que pode fornecer importantes resultados teóricos.

O estudo efectuado nesta tese pode ser generalizado para quaisquer modelos unidimensionais de muitos electrões, que sejam solúveis pelo método "Bethe Ansatz". Portanto, outra possibilidade de investigação, é a aplicação da teoria a outros modelos unidimensionais de muitos electrões.

## APÊNDICE A

### Algumas definições

Neste apêndice, apresentam-se as definições de algumas funções referidas no capítulo 6.

#### A.1. Os limites das pseudo-zonas de Brillouin

Definem-se, para já, os números

$$\begin{aligned} d_{c,0} &\equiv N_a \\ d_{\alpha,\gamma} &\equiv N_\alpha^h + N_{\alpha,\gamma} - \sum_{\gamma' > 0} [\gamma + \gamma' - |\gamma - \gamma'|] N_{\alpha',\gamma'} \quad \text{se } \alpha, \gamma \neq c, 0, \end{aligned} \quad (\text{A.1.1})$$

onde

$$N_c^h \equiv N_a - N_{c,0}, \quad N_s^h = N_{c,0} - 2N_{s,0} - 2 \sum_{\gamma' > 0} N_{s,\gamma'}. \quad (\text{A.1.2})$$

É também necessário apresentar as definições

$$\begin{aligned} \bar{N}_{c,0} &\equiv \frac{N_a}{2} - N_{s,0} - \sum_{\alpha,\gamma=1}^{\infty} N_{\alpha,\gamma} \\ \bar{N}_{\alpha,\gamma} &\equiv d_{\alpha,\gamma} \quad \text{se } \alpha, \gamma \neq c, 0. \end{aligned} \quad (\text{A.1.3})$$

Os números  $I_j^{\alpha,\gamma}$ , que aparecem na expressão (6.3.2) são inteiros consecutivos se  $\bar{N}_{\alpha,\gamma}$  fôr ímpar ou semi-inteiros de números ímpares consecutivos se  $\bar{N}_{\alpha,\gamma}$  fôr par.

Os limites das pseudo-zonas de Brillouin são dadas por

$$q_{c,0}^{(\pm 1)} = \pm \pi \left[ 1 - \frac{1}{N_a} \right], \quad (\text{A.1.4})$$

para  $\bar{N}_{c,0}$  par e por

$$q_{c,0}^{(+1)} = \pi, \quad q_{c,0}^{(-1)} = -\pi \left[ 1 - \frac{2}{N_a} \right], \quad (\text{A.1.5})$$

ou

$$q_{c,0}^{(+1)} = \pi \left[ 1 - \frac{2}{N_a} \right], \quad q_{c,0}^{(-1)} = -\pi, \quad (\text{A.1.6})$$

para  $\bar{N}_{c,0}$  ímpar. Para as restantes bandas  $\alpha, \gamma$ , os limites das pseudo-zonas de Brillouin são dadas por

$$q_{\alpha,\gamma}^{(\pm 1)} \equiv \pm \frac{\pi}{N_a} [d_{F_{\alpha,\gamma}} - 1]. \quad (\text{A.1.7})$$

### A.2. Os pseudo-pontos de Fermi e as funções $f$

Os pseudo-pontos de Fermi determinam-se a partir das expressões:

$$q_{F_{\alpha,\gamma,\lambda}}^{(\pm 1)} = \pm [q_{F_{\alpha,\gamma,\lambda}} - \lambda \frac{\pi}{N_a}], \quad (\text{A.2.1})$$

quando (i)  $\lambda = -1$  e  $N_{\alpha,\gamma}$  é par ou (ii)  $\lambda = +1$  e  $N_{\alpha,\gamma}$  é ímpar (par) e  $I_j^{\alpha,\gamma}$  são inteiros (semi-inteiros de ímpares), onde

$$q_{F_{\alpha,\gamma,\lambda}} = \frac{\pi[\delta_{\lambda,-1}d_{\alpha,\gamma} + \lambda N_{\alpha,\gamma}]}{N_a}. \quad (\text{A.2.2})$$

Por outro lado, quando (i)  $\lambda = -1$  e  $N_{\alpha,\gamma}$  é ímpar ou (ii) quando  $\lambda = +1$  e  $N_{\alpha,\gamma}$  é ímpar (par) e  $I_j^{\alpha,\gamma}$  são semi-inteiros de ímpares (inteiros), então os pseudo-pontos de Fermi são dados por

$$q_{F_{\alpha,\gamma,\lambda}}^{(+1)} = q_{F_{\alpha,\gamma,\lambda}}, \quad q_{F_{\alpha,\gamma,\lambda}}^{(-1)} = -[q_{F_{\alpha,\gamma,\lambda}} - \lambda \frac{2\pi}{N_a}], \quad (\text{A.2.3})$$

ou

$$q_{F_{\alpha,\gamma,\lambda}}^{(+1)} = q_{F_{\alpha,\gamma,\lambda}} - \lambda \frac{2\pi}{N_a}, \quad q_{F_{\alpha,\gamma,\lambda}}^{(-1)} = -q_{F_{\alpha,\gamma,\lambda}}. \quad (\text{A.2.4})$$

As funções  $f$ , que aparecem na expressão (6.5.7), são definidas por

$$\begin{aligned} f_{\alpha,\gamma;\alpha',\gamma'}(q, q') &\equiv 2\pi v_{\alpha,\gamma}(q) \Phi_{\alpha,\gamma;\alpha',\gamma'}(q, q') + 2\pi v_{\alpha',\gamma'}(q') \Phi_{\alpha',\gamma';\alpha,\gamma}(q', q) \\ &+ 2\pi \sum_{j=\pm 1} \sum_{\alpha''} \sum_{\gamma''=0}^{\infty} \Theta(N_{\alpha'',\gamma''}) v_{\alpha'',\gamma''} \Phi_{\alpha'',\gamma'';\alpha,\gamma}(jq_{F_{\alpha'',\gamma''}}, q) \\ &\times \Phi_{\alpha'',\gamma'';\alpha',\gamma'}(jq_{F_{\alpha'',\gamma''}}, q'). \end{aligned} \quad (\text{A.2.5})$$

As funções  $\Phi_{\alpha,\gamma;\alpha',\gamma'}(q, q')$  são definidas por equações integrais em [19].

## APÊNDICE B

### Cálculos auxiliares

Neste apêndice apresentam-se os cálculos necessários para se obterem as relações de comutação (7.1.17) para os geradores das álgebras de Virasoro e as funções de correlação para os campos primários (7.3.2).

#### B.1. As relações de comutação das álgebras de Virasoro

Para determinar as relações de comutação entre os geradores (7.1.16), utiliza-se a igualdade algébrica [25]

$$[AB, CD] = A\{B, C\}D - \{A, C\}BD + CA\{B, D\} - C\{A, D\}B. \quad (\text{B.1.1})$$

e representam-se os operadores normalmente ordenados relativamente ao EFG. Esta ordem normal define-se colocando os operadores de destruição,  $b_{\kappa, \rho, \nu}$ , à direita (à esquerda) dos operadores de criação,  $b_{\kappa, \rho, \nu}^\dagger$ , se  $\kappa > 0$  (se  $\kappa < 0$ ) e tendo em conta o sinal da permutação necessária para colocar os operadores nesta ordem. Assim, define-se a ordem normal, relativamente ao EFG, pela fórmula [25]:

$$: b_{\kappa_1, \rho, \nu}^\dagger b_{\kappa_2, \rho, \nu} : \equiv b_{\kappa_1, \rho, \nu}^\dagger b_{\kappa_2, \rho, \nu} - \delta_{\kappa_1, \kappa_2} \Theta(-\kappa_1) \quad (\text{B.1.2})$$

onde os operadores obedecem a relações de comutação análogas às definidas em (6.4.3). A ordem normal é tomada relativamente ao EFG, pois este é o estado de referência que verifica

$$\begin{aligned} b_{\kappa, \rho, \nu} |EFG\rangle &= 0 \quad \text{se } i \geq 0 \\ b_{\kappa, \rho, \nu}^\dagger |EFG\rangle &= 0 \quad \text{se } i < 0, \end{aligned}$$

o que significa que todos os "estados" com  $\kappa < 0$  estão "ocupados" e todos os "estados" com  $\kappa > 0$  estão "desocupados". A ordem normal é usada para evitar divergências na aplicação dos operadores pois se, por exemplo, o operador não ordenado  $\sum_{\kappa} b_{\kappa, \rho, \nu}^\dagger b_{\kappa, \rho, \nu}$  fôr aplicado ao EFG, então este operador vai destruir e criar pseudopartículas, desde  $\kappa = -\infty$  até  $\kappa = 0$ , o que resulta numa contagem infinita de pseudopartículas. Se o operador normalmente ordenado  $\sum_{\kappa} : b_{\kappa, \rho, \nu}^\dagger b_{\kappa, \rho, \nu} :$  fôr aplicado ao EFG, então o seu resultado é 0, pois ele só conta pseudopartículas que ocupem "estados" diferentes dos "estados" ocupados no EFG.

Nesta secção, consideram-se apenas estados fundamentais generalizados associados a  $\nu = 1$ , de forma a tornar os cálculos mais simples. O caso geral trata-se de forma análoga.

Tendo em conta (7.1.16), (B.1.1) e (B.1.2), tem-se que

$$\begin{aligned} [L_j^{\rho,+1}, L_m^{\rho,+1}] &= \sum_{\kappa} (j-m) \left( \kappa - \frac{j+m}{2} \right) : b_{\kappa-(j+m),\rho,+1}^{\dagger} b_{\kappa,\rho,+1} : \\ &\quad + \delta_{j+m,0} \sum_{\kappa=0}^{j-1} \left( \kappa - \frac{j}{2} \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{B.1.3})$$

Considerando  $j \neq m$ , obtém-se imediatamente

$$\begin{aligned} [L_j^{\rho,+1}, L_m^{\rho,+1}] &= \sum_{\kappa} (j-m) \left( \kappa - \frac{j+m}{2} \right) : b_{\kappa-(j+m),\rho,+1}^{\dagger} b_{\kappa,\rho,+1} : \\ &= (j-m) L_{n+m}^{\rho,+1}. \end{aligned} \quad (\text{B.1.4})$$

Supondo agora que  $j = m$  e que  $j > 0$  (para  $j < 0$ , os cálculos são semelhantes), resulta de (B.1.3) que

$$\begin{aligned} [L_j^{\rho,+1}, L_j^{\rho,+1}] &= 2j \sum_{\kappa} : b_{\kappa,\rho,+1}^{\dagger} b_{\kappa,\rho,+1} : + \frac{1}{6} (j^2 - j) (2j - 1) + \frac{j^3}{4} - \frac{j^3 - j^2}{2} \\ &= 2j \left( \sum_{\kappa} : b_{\kappa,\rho,+1}^{\dagger} b_{\kappa,\rho,+1} : + \frac{1}{8} \right) + \frac{j^3 - j}{12} \\ &= 2j L_0^{\rho,+1} + \frac{j^3 - j}{12}. \end{aligned} \quad (\text{B.1.5})$$

Juntando as expressões obtidas em (B.1.4) e em (B.1.5), determinam-se imediatamente as relações de comutação (7.1.17) para o caso  $\iota = 1$ . A anomalia conforme  $c = 1$  é identificada a partir dessas relações e aparece no termo  $\frac{j^3 - j}{12}$ . Estes cálculos ilustram a forma como a ordem normal é responsável pelo aparecimento da anomalia conforme.

## B.2. As funções de correlação dos campos primários

Nesta secção determinam-se as funções de correlação de campos primários da teoria conforme descrita no capítulo 7.

Explica-se, antes de mais, o que se vai considerar por campo primário desta teoria conforme. A propriedade básica que define um campo primário numa teoria de campo conforme é a lei de transformação (4.3.5) sob transformações conformes. Na generalização que se vai fazer deste conceito é necessário preservar esta propriedade, pois é ela que torna os campos primários "especiais". Como na nossa teoria conforme, existem várias teorias de campo independentes, com velocidades  $v_{\rho}$  diferentes, é natural definir um campo primário como o produto de  $\sum_{\rho} \Theta(N_{\rho})$  campos primários "standard" – um campo primário  $\phi_{\rho}$  por cada teoria de campo, ou seja,

$$\phi(x, t) \equiv \prod_{\rho} \phi_{\rho}(x_{+1}^{\rho}, x_{-1}^{\rho}), \quad (\text{B.2.1})$$

onde o produto tem  $\sum_{\rho} \Theta(N_{\rho})$  factores. Considerando a transformação  $t \rightarrow -i\tau$ , passa-se do plano de Minkowski para o plano euclideano e as variáveis de cone de luz transformam-se de acordo com a fórmula

$$x_i^{\rho} \rightarrow z_i^{\rho} = -i\tau + \iota \frac{x}{v_{\rho}}. \quad (\text{B.2.2})$$

Nas novas coordenadas, o campo primário (B.2.1) fica

$$\phi(x, \tau) \equiv \prod_{\rho} \phi_{\rho}(z_{+1}^{\rho}, z_{-1}^{\rho}). \quad (\text{B.2.3})$$

Aplicando as transformações conformes

$$z_l^{\rho} \rightarrow w_l^{\rho}, \quad (\text{B.2.4})$$

pela propriedade (4.3.5), o campo primário da teoria conforme generalizada, transforma-se de acordo com

$$\phi'(x, \tau) \equiv \prod_{\rho, \iota} \left( \frac{dw_l^{\rho}}{dz_l^{\rho}} \right)^{-h_{\rho}^{\iota}} \phi_{\rho}(z_{+1}^{\rho}, z_{-1}^{\rho}), \quad (\text{B.2.5})$$

sendo esta a generalização adequada da expressão (4.3.5).

E quanto às funções de correlação? A generalização óbvia da expressão (4.5.3), para a transformação das funções de correlação de dois pontos dos campos primários (B.2.3), é dada por

$$\begin{aligned} G_{i,i}(x, \tau, 0, 0) &\equiv \langle EF | \prod_{\rho} \phi_{\rho}(z_{+1}^{\rho}, z_{-1}^{\rho}) \phi(0, 0) | EF \rangle \\ &= \prod_{\rho, \iota} \left( \frac{dw_l^{\rho}}{dz_l^{\rho}} \right)^{h_{\rho}^{\iota}} \langle EF | \prod_{\rho} \phi_{\rho}(w_{+1}^{\rho}, w_{-1}^{\rho}) \phi(0, 0) | EF \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.2.6})$$

Apresenta-se agora a forma geral para as funções de correlação de dois pontos de campos primários. Recorde-se a demonstração do teorema (4.6.2). Procedendo de forma análoga, mas considerando as funções de correlação (B.2.6), obtém-se

$$G_{i,i}(x, \tau, 0, 0) \equiv \langle EF | \prod_{\rho} \phi_{\rho}(z_{+1}^{\rho}, z_{-1}^{\rho}) \phi(0, 0) | EF \rangle = \frac{C}{\prod_{\rho, \iota} (z_l^{\rho})^{2h_{\rho}^{\iota}}}, \quad (\text{B.2.7})$$

Recorde-se que  $z_l^{\rho} = -i\tau + \iota \frac{x}{v_{\rho}}$ . Aplicando as transformações conformes  $z_l^{\rho} \rightarrow w_l^{\rho} = v_{\rho} \iota z_l^{\rho}$ , tem-se, de acordo com (B.2.6) e (7.3.2), que

$$G_{i,i}(x, \tau, 0, 0) \equiv \langle EF | \prod_{\rho} \phi_{\rho}(z_{+1}^{\rho}, z_{-1}^{\rho}) \phi(0, 0) | EF \rangle = \frac{C'}{\prod_{\rho, \iota} (x - i\iota v_{\rho} \tau)^{2h_{\rho}^{\iota}}}, \quad (\text{B.2.8})$$

onde  $C'$  é uma constante.





## Bibliografia

- [1] Lars V. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1979.
- [2] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, and A. B. Zamolodchikov, *Infinite Conformal Symmetry in Two-Dimensional Quantum Field Theory*, Nucl. Phys. B **241** (1984), 333–380.
- [3] M. Bellac, *Quantum and Statistical Field Theory*, Oxford Science Publications, New York, 1991.
- [4] H. A. Bethe, *Theorie der Metalle. Erster Teil. Eigenwerte und Eigenfunktionen der Linearen Atomischen Kette*, Z. Phys. **71** (1931), 205.
- [5] Philippe Blanchard and Erwin Brüning, *Variational Methods in Mathematical Physics*, Springer-Verlag, 1992.
- [6] N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin and N. Y. Reshetikhin, *Finite-Size Effects and Infrared Asymptotics of the Correlation Functions in Two Dimensions*, J. Phys. A **20** (1987), 5361–5369.
- [7] D. Boyanovsky and C. M. Naon, *An Introduction to Conformal Invariance in Quantum Field Theory and Statistical Mechanics*, Rev. Nuo. Cim. **13**, N. 2 (1990).
- [8] John L. Cardy, *Conformal Invariance*, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, vol. 11. Eds. C. Domb and J. L. Lebowitz, Academic Press, London, 1987, 55–126.
- [9] J. M. P. Carmelo, *Conformal Field Theories and Finite-Energy Correlation Functions for (1+1) Dimensional Electronic Quantum Liquids*, Preprint (1997).
- [10] J. M. P. Carmelo, D. Baeriswyl, N. M. R. Peres and P. D. Sacramento, *Optical absorption edge in one-dimensional conductors*, Preprint (1998).
- [11] J. M. P. Carmelo and H. Castro Neto, *Dynamical Decoupling and Kac-Moody Current Representation in Multicomponent Integrable Systems*, Phys. Rev. Lett. **70** (1993), 1904–1907.
- [12] J. M. P. Carmelo, H. Castro Neto and D. K. Campbell, *Perturbation Theory of Low-Dimensional Quantum Liquids. I. The Pseudoparticle Operator Basis*, Phys. Rev. B **50** (1994), 3667–3682.
- [13] J. M. P. Carmelo, H. Castro Neto and D. K. Campbell, *Perturbation Theory of Low-Dimensional Quantum Liquids. II. Operator Description of the Virasoro Algebras in Integrable Systems*, Phys. Rev. B **50** (1994), 3683–3695.
- [14] J. M. P. Carmelo, H. Castro Neto, Y.-H. Chen and H. Q. Lin *Pseudoparticle Operator Description of an Interacting Bosonic Gas*, Phys. Rev. B **50** (1994), 14032–14047.
- [15] J. M. P. Carmelo, J. M. E. Guerra and L. M. Martelo, *Complete Set of Critical Theories of (1+1) Dimensional Many-Electron Solvable Models*, Submitted to Nucl. Phys. B.
- [16] J. Carmelo, P. Horsch, P.-A. Bares and A. A. Ovchinnikov, *Renormalized Pseudoparticle Description of the One Dimensional Hubbard Model Thermodynamics*, Phys. Rev. B **44** (1991), 9967.
- [17] J. M. P. Carmelo and N. M. R. Peres, *Ground States of Integrable Quantum Liquids*, Phys. Rev. B **51** (1995), 7481–7496.
- [18] J. M. P. Carmelo and N. M. R. Peres, *Topological Ground-States Excitations and Symmetry in the Many-Electron One-Dimensional Problem*, Nucl. Phys. B **458** (1996), 579–608.
- [19] J. M. P. Carmelo and N. M. R. Peres, *Complete Pseudohole and Heavy-Pseudoparticle Operator Representation for the Hubbard Chain*, Phys. Rev. B **56** (1997), 3717–3741.
- [20] J. Carmelo and A. A. Ovchinnikov, *Generalization of the Landau Liquid Concept: Example of the Luttinger Liquids*, J. Phys. Condens. Matter **3** (1991), 757.
- [21] C. Di Castro, C. Castellani and W. Metzner, *Conservation Laws in Normal Metals: Luttinger Liquid Vs. Fermi Liquid* in *Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop, The Hubbard Model:*

- Its Physics and Mathematical Physics*, Eds. D. Baeriswyl, D. K. Campbell, J. M. P. Carmelo, F. Guinea and E. Louis, NATO ASI Series, Series B, Volume 343, Plenum Press, New York, 1995.
- [22] Jin-Quan Chen, *Group Representation Theory for Physicists*, World Scientific, Singapore, 1989.
- [23] Yvonne Choquet-Bruhat and Cécile DeWitt-Morette, *Analysis, Manifolds and Physics, Part II: 92 Applications*, Elsevier Science Publishers, 1989.
- [24] Yvonne Choquet-Bruhat, Cécile DeWitt-Morette and Margaret Dillard-Bleick, *Analysis, Manifolds and Physics, Part I: Basics*, Revised Edition, Elsevier Science Publishers, 1982.
- [25] P. Christe and M. Henkel, *Introduction to Conformal Invariance and Its Applications to Critical Phenomena*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [26] R. V. Churchill and J. W. Brown, *Complex Variables and Applications*, McGraw-Hill, 1990.
- [27] Fabian H. L. Essler and Vladimir E. Korepin, *Completeness of the  $SO(4)$  Extended Bethe Ansatz for the One-Dimensional Hubbard Model*, Nucl. Phys. B **384** (1992), 431.
- [28] Fabian H. L. Essler, Vladimir E. Korepin and Kareljan Schoutens *New Eigenstates of the 1-Dimensional Hubbard Model*, Nucl. Phys. B **372** (1992), 559–596.
- [29] G. Felder, J. Fröhlich, and J. Keller, *On the structure of unitary conformal field theory, I. Existence of conformal blocks*, Comm. Math. Phys. **124** (1989), 417–463.
- [30] Holger Frahm and Vladimir E. Korepin, *Critical Exponents for the One-Dimensional Hubbard Model*, Phys. Rev. B **42** (1990), 10553–10565.
- [31] Holger Frahm and Vladimir E. Korepin, *Correlation Functions of the One-Dimensional Hubbard Model in a Magnetic Field*, Phys. Rev. B **43** (1991), 5643–5662.
- [32] Philippe Di Francesco, Pierre Mathieu and David Sénéchal, *Conformal Field Theory*, Springer-Verlag, New-York, 1997.
- [33] D. Friedan, Z. Qiu, and S. Shenker, *Details of the non-unitary proof for highest weight representations of the Virasoro algebra*, Comm. Math. Phys. **107** (1986), 535–542.
- [34] M. Fuchs, *Affine Lie Algebras and Quantum Groups*, Cambridge University Press, 1995.
- [35] P. Ginsparg, *Applied Conformal Field Theory in Les Houches, Session XLIX, Champes, Cordes et Phénomènes Critiques/Fields, Strings and Critical Phenomena*, Eds. E. Brézin and J. Zinn-Justin, Elsevier, New York, 1989.
- [36] P. Goddard, A. Kent and D. Olive, *Unitary Representations of the Virasoro and Super-Virasoro Algebras*, Comm. Math. Phys. **103** (1986), 105–119.
- [37] P. Goddard and D. Olive, *Kac-Moody and Virasoro algebras in relation to quantum mechanics*, Int. J. Mod. Physics A **1** (1989), 303-414.
- [38] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 2<sup>nd</sup> ed., 1980.
- [39] Y. Grandati, *Éléments d'Introduction à l'Invariance Conforme*, Ann. Phys. **17** (1992), 159–300.
- [40] C. Itzykson and J.-M. Drouffe, *Statistical Field Theory - Vol. 2*, Cambridge University Press, New York, 1989.
- [41] A. G. Izergin, V. E. Korepin and N. Yu Reshetikhin, *Conformal dimensions in Bethe ansatz solvable models*, J. Phys. A **22** (1989), 2615–2620.
- [42] V. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, Cambridge University Press, 3<sup>rd</sup> ed., 1990.
- [43] V. Kac and A. K. Raina, *Bombay Lectures on Highest Weight Representations of Infinite Dimensional Lie Algebras*, World Scientific, Singapore, 1987.
- [44] S. Lang, *Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 3<sup>rd</sup> ed., 1993.
- [45] Elliott H. Lieb, *The Hubbard Model: Some Rigorous Results and Open Problems* in *Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop, The Hubbard Model: Its Physics and Mathematical Physics*, Eds. D. Baeriswyl, D. K. Campbell, J. M. P. Carmelo, F. Guinea and E. Louis, NATO ASI Series, Series B, Volume 343, Plenum Press, New York, 1995.
- [46] Elliott H. Lieb and F. Y. Wu, *Absence of Mott Transition in an Exact Solution of a Short-Range, One-Band Model in One Dimension*, Phys. Rev. Lett. **20** (1968), 1445.
- [47] John H. Lowenstein, *Introduction to the Bethe Ansatz Approach in (1+1)-Dimensional Models*, in *Les Houches, Session XXXIX, 1982: Recent Advances in Field Theory and Statistical Mechanics*, Elsevier, 1984.
- [48] Luís T. Magalhães, *Integrais em Variedades e Aplicações*, Texto Editora, Lisboa, 1993.

- [49] Gerald D. Mahan, *Many-Particle Physics*, 2<sup>nd</sup> Ed., Plenum Press, New York, 1990.
- [50] K. Osterwalder and R. Schrader, *Axioms for Euclidean Green's functions I*, *Comm. Math. Phys.* **31** (1973), 83–112.
- [51] K. Osterwalder and R. Schrader, *Axioms for Euclidean Green's functions II*, *Comm. Math. Phys.* **42** (1975), 281–305.
- [52] Nuno Miguel Machado Reis Peres, *The Many-Electron Problem in Novel Low-Dimensional Materials*. Tese de Doutoramento, Universidade de Évora, 1998.
- [53] M. Postnikov, *Lições de Geometria - Vol. 2*, Editora Mir, Moscovo, 1990.
- [54] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics* (4 volumes), Academic Press, 1972-1979.
- [55] A. N. Schellekens, *Conformal Field Theory*, Lecture notes, "Grundlagen and neue methoden der Theoretische Physic", Saalburg, Germany, 1998, Preprint, [ftp : //ftp.nikhef.nl/pub/aio - school/CFT.ps.gz](ftp://ftp.nikhef.nl/pub/aio-school/CFT.ps.gz).
- [56] M. Schottenloher, *A Mathematical Introduction to Conformal Field Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [57] J. Sotomayor, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.
- [58] M. Takahashi, *One-Dimensional Hubbard Model at Finite Temperature*, *Prog. Theor. Phys.* **47** (1972), 69.
- [59] Hal Tasaki, *The Hubbard Model: Introduction and Some Rigorous Results*, 1995, Preprint [http : //babbage.sissa.it/cond - mat/9512169](http://babbage.sissa.it/cond-mat/9512169).
- [60] Alexei M. Tselik, *Quantum Field Theory in Condensed Matter Physics*, Cambridge University Press, 1995.
- [61] V. S. Varadarajan, *Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations*, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [62] Frank W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [63] A. S. Wightman and L. Garding, *Fields as operator-valued distributions*, *Ark. Phys.* **28** (1964), 129–189.
- [64] C. N. Yang, *Some Exact Results for the Many-Body Problem in One-Dimension with Repulsive Delta Function Interaction*, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967), 1312–1315.
- [65] C. N. Yang and S. C. Zhang, *SO(4) Symmetry in a Hubbard Model*, *Int. J. Mod. Phys. B* **5** (1991), 977–984.
- [66] S. C. Zhang, *SO(4) Symmetry of the Hubbard Model and its Experimental Consequences*, *Int. J. Mod. Phys. B* **5** (1991), 153–167.

