

# Equações Diferenciais na Física

Carla Alexandra Estima Simões

Dissertação apresentada na Universidade de Évora para a obtenção  
do grau de Mestre em Matemática para o Ensino sob  
orientação Professor Doutor Luís Miguel Zorro Bandeira  
co-orientação Professor Doutor Carlos Correia Ramos

Departamento de Matemática  
Universidade de Évora  
2014

Março de 2014

# Equações Diferenciais na Física

Dissertação de Mestrado  
Carla Alexandra Estima Simões

Dissertação apresentada na Universidade de Évora para a obtenção do grau de Mestre em Matemática para o Ensino sob a orientação Professor Doutor Luís Miguel Zorro Bandeira e co-orientação Professor Doutor Carlos Correia Ramos

Departamento de Matemática  
Universidade de Évora  
2014



Um agradecimento especial:  
Aos meus pais por tudo o que sou!  
Ao meu namorado pelo apoio e paciência.  
Ao Professor Luís Bandeira pela  
orientação, disponibilidade e motivação  
para finalizar o trabalho.

# Equações Diferenciais na Física

## Resumo

A modelação matemática fornece modelos que permitem descrever, interpretar e prever a evolução de situações reais nas mais diversas áreas do conhecimento.

As equações diferenciais são uma das ferramentas matemáticas usadas na modelagem de fenómenos físicos. O estudo da segunda lei de Newton e a lei de Hooke permite deduzir que certos sistemas envolvendo massas e molas apresentem um comportamento de oscilador harmónico.

O estudo de múltiplos osciladores acoplados e a ligação ao problema da corda vibrante leva-nos ao estudo das equações diferenciais parciais, das séries de Fourier e do método da separação das variáveis.

## Differential equations in Physics

### **Abstract**

The mathematical modeling offer us models that allow us to describe, interpret and predict the evolution of real situations in various fields of knowledge. The differential equations are one of the mathematic tools when modeling physic phenomena. The study of Newton's second law and Hooke's law allow us to deduct that certain systems which involve masses and springs show an oscillator and harmonious behaviour.

The study of multiple coupled oscillators and the connection to the vibrating string lead us to the study of the partial differential equations, the series of Fourier and to the method of the separation of variables.

# Conteúdo

<b>Introdução</b>	<b>11</b>
<b>Nota histórica</b>	<b>13</b>
<b>1 Equações Diferenciais</b>	<b>17</b>
1.1 Classificação das equações diferenciais . . . . .	18
1.2 Problema de valor inicial . . . . .	20
1.3 Solução de uma equação diferencial . . . . .	21
1.4 Equações diferenciais de primeira ordem . . . . .	23
1.4.1 Análise qualitativa de equações autónomas . . . . .	25
1.4.2 Aproximação de soluções . . . . .	26
1.4.3 Equações Diferenciais Separáveis . . . . .	33
<b>2 Equações Diferenciais Lineares Homogéneas de Coeficientes Constantes</b>	<b>37</b>
2.1 Sistemas de EDO lineares homogéneas de coeficientes constantes	38
2.2 Equações diferenciais lineares homogéneas de segunda ordem com coeficientes constantes . . . . .	48
2.2.1 Método de redução de ordem . . . . .	49
2.2.2 Sistemas de equações diferenciais lineares homogéneas de segunda ordem com coeficientes constantes . . . . .	51
<b>3 Movimento Harmónico</b>	<b>63</b>
3.1 Oscilador harmónico . . . . .	64
3.1.1 Oscilador harmónico . . . . .	65
3.1.2 Pêndulo simples . . . . .	69
3.1.3 Oscilador harmónico com amortecimento . . . . .	71
3.2 Osciladores acoplados . . . . .	78

<b>4</b>	<b>Séries de Fourier</b>	<b>89</b>
4.1	Generalidades . . . . .	90
4.1.1	Continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade de funções . . . . .	90
4.1.2	Funções trigonométricas . . . . .	91
4.1.3	Convergência de séries . . . . .	100
4.2	Coefficientes de Fourier . . . . .	106
4.3	Série de Fourier . . . . .	109
4.4	Estimativa dos coeficientes de Fourier . . . . .	110
4.5	Séries de Fourier para funções pares e ímpares . . . . .	113
4.6	Forma complexa da série de Fourier . . . . .	116
4.7	Convergência das séries de Fourier . . . . .	118
4.7.1	Convergência pontual das séries de Fourier . . . . .	118
4.7.2	Convergência uniforme das séries de Fourier . . . . .	125
4.8	Integração de séries de Fourier . . . . .	127
<b>5</b>	<b>Equações Diferenciais Parciais de Segunda Ordem</b>	<b>133</b>
5.1	Equação do Calor . . . . .	134
5.1.1	Definições e generalidades . . . . .	134
5.1.2	Dedução da equação do calor . . . . .	135
5.1.3	Solução da equação do calor . . . . .	137
5.1.4	Discretização da equação do calor . . . . .	144
5.2	Equação da onda . . . . .	145
5.2.1	Definições e generalidades . . . . .	146
5.2.2	Equação geral das ondas . . . . .	147
5.2.3	Equação da corda vibrante . . . . .	150
5.2.4	Corda com extremidades fixas . . . . .	152
5.2.5	Discretização da equação da onda . . . . .	157
<b>6</b>	<b>Osciladores Harmônicos na Sala de Aula</b>	<b>159</b>
6.1	Plano de aula: Oscilador harmônico . . . . .	159
6.1.1	Atividade Laboratorial - Pêndulo gravítico . . . . .	160
6.1.2	Atividade Prática - Pêndulo . . . . .	161
6.2	Plano de aula: Sistema massa-mola . . . . .	165
6.2.1	Atividade Laboratorial - Lei de Hooke . . . . .	166
6.2.2	Atividade Prática - Sistema massa-mola . . . . .	167
	<b>Considerações Finais</b>	<b>173</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>175</b>

# Lista de Figuras

1.1	Exemplo de um pêndulo de comprimento $L$ e massa $m$ . . . . .	18
1.2	Representação gráfica da solução 1.16 no caso de $a > 0$ e $a < 0$ . . . . .	23
1.3	Representação gráfica dos diferentes pontos de equilíbrio. . . . .	25
1.4	Decomposição do intervalo $[t_0, t_n]$ . . . . .	27
1.5	Aproximação pela área do retângulo. . . . .	30
1.6	Aproximação pela área do trapézio. . . . .	31
2.1	Classificação do ponto de equilíbrio no caso de valores próprios complexos. . . . .	58
2.2	Classificação do ponto de equilíbrio no caso em que o valor próprio é real. . . . .	59
3.1	Exemplo de oscilador harmónico massa-mola . . . . .	65
3.2	a) Representação gráfica do deslocamento de um oscilador harmónico com $v_0 < 0$ e $v_0 > 0$ . b) Retrato de fase de um oscilador harmónico. . . . .	67
3.3	Exemplo de um pêndulo simples de comprimento $L$ e massa $m$ . . . . .	70
3.4	Exemplo de um oscilador amortecido. . . . .	72
3.5	a) Representação gráfica do comportamento da solução de um oscilador com amortecimento forte para diversas condições iniciais. b) Retrato de fase de um oscilador com amortecimento forte. . . . .	73
3.6	a) Representação gráfica do comportamento da solução do oscilador com amortecimento crítico para diversas condições iniciais. b) Retrato de fase do oscilador com amortecimento crítico. . . . .	75

3.7	a) Representação gráfica do comportamento da solução de um oscilador com amortecimento fraco para diversas condições iniciais. b) Retrato de fase de um oscilador com amortecimento fraco. . . . .	76
3.8	Representação gráfica dos diferentes tipos de amortecimento. . . . .	78
3.9	Exemplo de dois osciladores acoplados . . . . .	79
3.10	Exemplo de três osciladores acoplados . . . . .	84
3.11	Exemplo de $n$ osciladores acoplados. . . . .	85
5.1	Condução de calor numa barra de metal. . . . .	135
5.2	Malha de discretização temporal e espacial . . . . .	145
5.3	Exemplo de um pedaço de corda de comprimento $L$ . . . . .	150
5.4	Discretização temporal e espacial. . . . .	158
6.1	Representação gráfica do comportamento do pêndulo: amplitude constante e variação do comprimento do fio. . . . .	162
6.2	Representação gráfica do comportamento do pêndulo: comprimento constante e variação da amplitude. . . . .	163
6.3	Representação gráfica do comportamento do pêndulo: variação da aceleração. . . . .	164
6.4	Retrato de fase de um pêndulo não linear. . . . .	165
6.5	Exemplo sistema massa mola. . . . .	166
6.6	Retrato de fase da aplicação do método de Euler para $w = 1$ .	169
6.7	Representação gráfica do comportamento da solução de um oscilador com amortecimento. . . . .	170
6.8	Retrato de fase de oscilador com amortecimento a) $w = \sqrt{5}$ e b) $w = 1$ . . . . .	171

# Introdução

A modelação matemática consiste num conjunto de ferramentas matemáticas que permitem descrever diversos fenómenos da realidade.

As equações diferenciais são um dos ramos da matemática mais usados na aplicação e modelação de fenómenos físicos.

A temática proposta para a presente dissertação passa pela abordagem de alguns problemas físicos, tais como, o movimento de osciladores simples e acoplados, equação do calor e equação das ondas, aplicando a teoria das equações diferenciais.

O presente trabalho começa com uma pequena nota histórica da evolução do estudo das equações diferenciais, seguido de uma abordagem às equações diferenciais em geral, apresentando-se definições e conceitos básicos. Na última secção deste primeiro capítulo estudaremos algumas equações diferenciais de primeira ordem e métodos de aproximação de soluções.

O problema dos osciladores não forçados é modelado por uma equação diferencial linear homogénea de coeficientes constantes. É feito o estudo deste tipo de equações recorrendo à teoria de sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Primeiro com a análise de um caso geral de um sistema de  $n$  equações diferenciais de primeira ordem, seguido do caso particular de um sistema de duas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

No capítulo do movimento harmónico é apresentado o estudo do oscilador harmónico simples e sujeito a força de amortecimento. Os sistemas massa-mola podem ser simples ou acoplados e como tal deduzimos as equações que modelam o movimento para os diversos casos.

As equações do calor e das ondas são apresentadas como exemplos de aplicação das equações diferenciais parciais. A primeira é deduzida no caso da condução de calor numa barra e a última é estudada na formulação dos problemas da corda vibrante e da corda com extremidades fixas. Na resolução destas duas equações é usado o método da separação das variáveis e as séries de Fourier.

A proposta de novo programa de matemática para o ensino secundário salienta a modelação e a aplicação da Matemática no mundo real como uma das finalidades da disciplina de Matemática. É dada relevância a diversas aplicações da Matemática, tais como, o uso de funções trigonométricas na modelação de alguns sistemas que exibem comportamento oscilatório. No 11.º ano de escolaridade pretende-se que o aluno entenda o conceito de oscilador harmónico e reconheça a equação  $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ . No 12.º ano de escolaridade o estudo dos osciladores harmónicos faz parte do tema da diferenciação de funções trigonométricas. Neste seguimento, são propostas algumas atividades a aplicar em contexto de sala de aula que envolvem o oscilador harmónico.

# Nota histórica

O desenvolvimento da teoria das equações diferenciais começou no final do século *XVII* quando G.W. Leibniz, I. Barrow, I. Newton, Jacob Bernoulli e seu irmão Johann Bernoulli determinaram soluções de algumas equações diferenciais de primeira e segunda ordem muito simples, associadas a problemas de mecânica e geometria. A formulação desses problemas aparece com recurso às equações diferenciais, com destaque para a equação de Newton para o movimento, que esteve na origem do próprio desenvolvimento do cálculo diferencial e integral.

Newton classificou as equações diferenciais de primeira ordem de acordo com as formas

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad \frac{dy}{dx} = f(x) \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx} = f(y).$$

Desenvolveu, também, um método para resolver a equação de primeira ordem  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  no caso em que  $f(x, y)$  é um polinómio em  $x$  e  $y$  usando séries infinitas.

A Leibniz devemos a notação matemática de derivada assim como o sinal de integral. Em 1691 desenvolve a teoria das equações diferenciais separáveis e em 1694 descobre como resolver equações lineares de primeira ordem.

O século *XVIII* foi uma época de intenso desenvolvimento da teoria das equações diferenciais. Esta tornou-se no núcleo da análise matemática e de praticamente toda a ciência matemática. Foi desenvolvido um conjunto de truques e métodos sistemáticos para determinar soluções de equações diferenciais em termos de funções elementares, resultados que ainda hoje fazem parte da teoria qualitativa das equações diferenciais.

Jakob Bernoulli estudou e escreveu equações diferenciais para o movimento planetário, usando os princípios de gravidade e momento desenvolvidos por Newton. Johann Bernoulli foi provavelmente o primeiro matemático a entender o cálculo de Leibniz e os princípios de mecânica para modelar matematicamente fenómenos físicos usando equações diferenciais e a encontrar as suas soluções.

Mais nomes de grandes matemáticos da época aparecem associados às equações diferenciais: Clairaut, D'Alembert, Lagrange, Riccati, Laplace, Euler, Gauss, Bessel, entre outros.

Entre 1734 e 1736, Euler identificou a condição para que equações diferenciais de primeira ordem sejam consideradas exatas e usou séries de potências para resolver equações diferenciais. Num artigo publicado em 1734, Euler desenvolveu a teoria dos fatores integrantes e encontrou a solução geral para equações diferenciais de coeficientes constantes homogêneas. Por volta do ano de 1751 determina a resolução de equações não homogêneas. O uso de aproximações numéricas e o desenvolvimento de métodos numéricos para a aproximação de soluções também se deve ao seu trabalho.

O estudo das propriedades da equação das ondas resulta do trabalho de alguns dos maiores matemáticos do século *XVIII* como D'Alembert, Daniel Bernoulli (filho de Johann), Euler e Joseph-Louis Lagrange.

A equação das ondas, também chamada de equação das cordas vibrantes, apareceu em 1747 num artigo do filósofo e matemático D'Alembert. Euler e D'Alembert chegaram à conclusão que as soluções da equação deveriam ser a sobreposição da propagação de duas funções em sentidos opostos com velocidades iguais. Já D. Bernoulli, entre 1751 e 1753, apresentou as soluções por séries trigonométricas. Este usou os métodos de Euler para estudar oscilações e as equações diferenciais que produzem estes tipos de soluções. O trabalho de D'Alembert em física matemática envolveu equações diferenciais parciais e explorações por soluções das formas mais elementares destas equações.

Entre os anos de 1762 e 1765, Lagrange mostrou que a solução geral de uma equação diferencial linear homogênea de grau  $n$  é uma combinação linear de  $n$  soluções independentes. A observação que uma equação diferencial de coeficientes constantes de ordem  $n$  é equivalente a um sistema de primeira ordem foi feita pela primeira vez por D'Alembert e a noção de conjunto fundamental deve-se a Lagrange. A redução de ordem de uma equação diferencial linear a partir de uma solução conhecida foi aplicada pela primeira vez, também, por D'Alembert.

O matemático Lagrange desenvolveu a análise teórica das vibrações de uma corda de comprimento  $L$  fixa nas extremidades. Esteve perto de chegar ao resultado de que qualquer forma da corda entre os seus extremos pode ser escrita por uma soma infinita. Mas, foi Jean Fourier quem chegou ao resultado enquanto estudava o problema da condução de calor por um material em que seja mantida uma diferença constante entre duas das suas extremidades.

A primeira prova da convergência de séries de Fourier em condições relativamente gerais foi feita em 1829 por Dirichlet, com a introdução do núcleo

de Dirichlet para representar as somas parciais da série.

Cauchy foi o primeiro a definir completamente as ideias de convergência e convergência absoluta de séries infinitas e iniciou uma análise rigorosa de cálculo e equações diferenciais.

Gauss reconheceu que a teoria das funções de uma variável complexa era a chave para entender muitos dos resultados importantes das equações diferenciais aplicadas.

Em 1835, Liouville estabeleceu que apenas uma classe restrita de equações diferenciais pode ser resolvida em termos de funções elementares.

O teorema de existência e unicidade de Picard tem raízes no trabalho de Cauchy por volta de 1820 e de Lipschitz em 1876. A demonstração baseada em aproximações sucessivas, no caso geral, deve-se a Picard e a Lindelof. Já a prova de existência de soluções de problemas de valor inicial para equações diferenciais ordinárias de primeira ordem quando a função que define a equação é contínua deve-se a Peano, em 1886 para equações escalares e em 1890 para equações vetoriais.

A partir dos meados do século *XX*, com o progressivo aumento das capacidades de cálculo com recurso aos computadores, tornou-se possível resolver numericamente uma grande classe de equações diferenciais.

O aparecimento de métodos numéricos mais robustos e eficientes deu-se com Carl Runge que, juntamente com Martin Kutta, desenvolveu métodos numéricos para a resolução de problemas de valores iniciais.

O estudo das equações diferenciais originou o desenvolvimento de muitas outras áreas como, por exemplo, Álgebra Linear, Análise Funcional, Análise Numérica, Cálculo de Variações, Dinâmica de Fluidos, Teoria do Controlo, Mecânica Quântica, entre outras.



# Capítulo 1

## Equações Diferenciais

As equações diferenciais aparecem em importantes aplicações nas áreas da Biologia, da Ecologia, da Sociologia, da Economia, da Termodinâmica, da Física, entre outras.

Muitos problemas reais, tais como, crescimento populacional, movimento de um pêndulo, propagação de doenças, movimento de corpos celestes, circuitos elétricos, corpos em movimento harmônico simples, são modelados por equações diferenciais.

No decorrer deste trabalho iremos estudar alguns problemas de modelização de situações físicas, como o movimento de um pêndulo ou o movimento de uma mola.

Nas equações diferenciais que aparecem ligadas a problemas de movimento, a variável independente é usualmente representada por  $t$  e a função que desejamos encontrar, a variável dependente, é representada por  $x$ .

Vejamos exemplos de alguns modelos físicos que recorrem às equações diferenciais:

- De acordo com a segunda lei de Newton, a força é proporcional à aceleração  $a$  de um corpo de massa  $m$

$$F = ma. \quad (1.1)$$

Esta equação é conhecida, também, como a equação do movimento de Newton e pode ser representada na forma de equação diferencial como

$$mx'' = f(t, x, x'), \quad (1.2)$$

em que temos um objeto de massa  $m$  em movimento ao longo do eixo  $x$  na posição  $x(t)$  no momento  $t$ , com força  $f(t, x(t), x'(t))$  que atua no objeto no tempo  $t$ .

- No oscilador harmónico a equação do movimento de uma partícula de massa  $m$  e constante  $k$ , é dada por

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0. \quad (1.3)$$

- O movimento de um pêndulo simples de massa  $m$ , de comprimento  $L$  e de ângulo  $\theta$  formado com a linha vertical, como mostra a figura 1.1, é descrito pela função  $\theta(t)$ , que satisfaz a equação diferencial

$$\theta'' + \frac{g}{l} \sin \theta = 0. \quad (1.4)$$

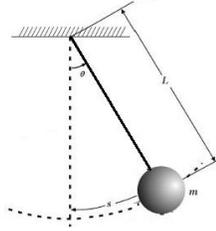


Figura 1.1: Exemplo de um pêndulo de comprimento  $L$  e massa  $m$ .

Tendo este trabalho como objetivo o estudo de algumas equações diferenciais que modelizam situações físicas de movimento, comecemos por ver alguns conceitos básicos das mesmas.

## 1.1 Classificação das equações diferenciais

As equações diferenciais podem ser classificadas por tipo, ordem e linearidade.

Quanto ao tipo podem ser equações diferenciais ordinárias ou equações diferenciais parciais.

**Definição 1** *A equação diferencial que relaciona uma função dependente  $x$ , as suas derivadas ordinárias e a variável independente  $t$ , apresenta-se como uma equação do tipo,*

$$F(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = g(t), \quad (1.5)$$

com  $g$  função a depender apenas de  $t$  e  $F = F(t, x_0, \dots, x_n)$  função conhecida de valores reais de  $n + 2$  variáveis.

Este tipo de equação designa-se por equação diferencial ordinária (EDO) de ordem  $n$ .

O estudo das EDO é de extrema importância na aplicação das leis da Física, sendo muitas destas traduzidas matematicamente através deste tipo de equações.

As equações diferenciais do movimento de um oscilador harmónico 1.3 e de um pêndulo 1.4 são EDO.

Existe outro tipo de equações diferenciais que envolvem derivadas parciais da variável dependente e que modelam diversos fenómenos mecânicos, físicos, biológicos, entre outros.

**Definição 2** *Uma equação que envolve as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes em ordem a duas ou mais variáveis independentes é designada por equação diferencial parcial (EDP).*

Podemos apresentar a EDP para a função  $x = x(t_1, \dots, t_n)$  como

$$F\left(t, x, \frac{\partial x}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial x}{\partial t_n}, \frac{\partial^2 x}{\partial t_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 x}{\partial t_1 \partial t_n}, \dots\right) = g(t), \quad (1.6)$$

em que  $F$  é uma equação dada que depende das variáveis independentes  $t_1, \dots, t_n$ , de  $x$  e das suas derivadas parciais.

A variável independente  $t$  está definida em  $\mathbb{R}^n$ , com  $n > 1$ .

A ordem de uma equação diferencial parcial é a maior das ordens das derivadas da incógnita presente na equação.

Exemplo de uma aplicação de uma EDP é a chamada equação do calor ou difusão

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}. \quad (1.7)$$

As equações 1.4 e 1.7 são equações diferenciais de segunda ordem, em que a primeira é uma EDO e a segunda EDP.

**Definição 3** *A equação diferencial ordinária 1.5 diz-se linear se a função  $F$  for uma função linear, isto é, podemos assumir que é combinação linear das variáveis  $x, x', \dots, x^{(n)}$ .*

Uma EDO linear de ordem  $n$  pode ser escrita como

$$a_0(t)x + a_1(t)x' + \dots + a_n(t)x^{(n)} = g(t), \quad (1.8)$$

onde os coeficientes  $a_0, \dots, a_n$  são funções contínuas, independentes de  $x$  e das suas derivadas.

A equação diferencial parcial 1.6 diz-se linear se for linear em  $t$  e nas suas derivadas parciais.

A equação do pêndulo 1.4 é classificada como uma equação diferencial não linear de segunda ordem devido à presença de  $\sin \theta$ .

Iremos fazer o estudo mais adiante da equação do pêndulo, aproximando a equação não linear por uma linear. Este processo é designado por linearização.

**Definição 4** *Uma equação diferencial é designada de equação autónoma quando a variável independente não aparece explicitamente. Isto é, são equações da forma*

$$F(x, x', \dots, x^{(n)}) = 0. \quad (1.9)$$

*Caso contrário, diz-se que a equação diferencial é não autónoma.*

**Definição 5** *As equações diferenciais em que o segundo membro é identicamente nulo designam-se por equações homogêneas. Ou seja, se  $g(t) \equiv 0$  na equação 1.5*

$$F(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0, \quad (1.10)$$

*diz-se homogênea.*

*Caso contrário, a equação diz-se não homogênea.*

No decorrer do trabalho iremos aprofundar o estudo de algumas equações diferenciais lineares de primeira e segunda ordem homogêneas.

## 1.2 Problema de valor inicial

Em diversas situações para a descrição de determinado fenómeno além de uma equação diferencial temos que impor certas condições iniciais, previamente estabelecidas. Condições iniciais são condições relativas à função incógnita e suas derivadas dadas para o mesmo valor da variável independente.

**Definição 6** *A um problema definido do modo seguinte*

$$\begin{cases} F(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = g(t), \\ x(t_0) = x_0, \\ x'(t_0) = x_1, \\ \vdots, \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{cases} \quad (1.11)$$

*chamamos problema de valor inicial (PVI) ou problema de Cauchy.*

Neste tipo de problema temos como objetivo encontrar as soluções da equação diferencial que satisfazem o conjunto de condições iniciais num dado instante  $t_0$ .

### 1.3 Solução de uma equação diferencial

Uma equação diferencial pode não ter solução, ter uma única solução ou ter mais do que uma solução, pode mesmo ter uma infinidade de soluções.

Dada uma determinada equação diferencial algumas questões se levantam quanto à sua solução. Existirá ou não solução? Se existir, será única?

Na prática, mesmo sem conhecimento da solução, é possível obter aproximações precisas da mesma. Tal só faz sentido no caso em que a solução existe e é única. Assim, é fundamental estudar a questão da unicidade e existência de soluções.

A equação diferencial mais simples é da forma

$$x'(t) = ax(t), \quad (1.12)$$

com  $a$  constante,  $x(t)$  função real de variável real desconhecida e derivada  $x'(t)$ .

A solução da equação diferencial 1.12, num intervalo  $I$ , é uma função  $\phi(t)$  definida em  $I$  tal que a sua derivada está definida nesse mesmo intervalo e satisfaz identicamente a equação.

Facilmente, verificamos que a função  $\phi(t) = e^{at}$  é uma solução da equação 1.12, assim como,  $\phi(t) = 4e^{at}$  também é solução.

Em geral, uma EDO pode ter um número infinito de soluções.

**Definição 7** *Uma solução de uma EDO é uma função  $\phi$ , definida num intervalo  $I$ , que tem pelo menos  $n$  derivadas e verifica*

$$F(t, \phi(t), \phi'(t), \dots, \phi^{(n)}(t)) = g(t), \text{ para todo } t \in I. \quad (1.13)$$

A função  $\phi(t) \equiv 0$  também é solução da equação 1.12.

**Definição 8** *A solução de uma equação diferencial identicamente nula num intervalo  $I$  é chamada solução trivial.*

**Definição 9** *Uma função diferenciável é uma solução do PVI 1.11 num intervalo  $I$  se para além de satisfazer a equação diferencial dada, para todo  $t \in I$ , satisfaz também as condições iniciais definidas em 1.11.*

No caso da equação 1.12, obtemos para qualquer valor de  $a$  e  $K$ , como solução da equação diferencial

$$x(t) = Ke^{at}. \quad (1.14)$$

Ou seja, para cada valor de  $K$ , temos uma solução. Ao resolver a equação obtemos uma família de curvas ou funções contendo um parâmetro arbitrário que ao ser formalizado é uma solução da equação.

Neste sentido aparecem duas noções de soluções: a solução particular e a solução geral da equação diferencial.

**Definição 10** *A solução geral de uma EDO de ordem  $n$  é uma família de soluções  $\phi$ , dependendo de constantes, tal que qualquer solução particular pode ser obtida da solução geral ao atribuir valores às constantes.*

Uma solução particular pode ser obtida a partir das condições iniciais do problema.

**Definição 11** *Uma solução particular de uma equação diferencial num intervalo  $I$  é uma função  $\phi$  definida no intervalo  $I$ , que não depende de parâmetros arbitrários, tal que as suas derivadas de ordem  $n$  estão também definidas no mesmo intervalo e satisfazem a equação nesse mesmo intervalo.*

As soluções das equações diferenciais podem ainda ser divididas em soluções explícitas e implícitas.

**Definição 12** *Uma solução de uma EDO da forma  $y = \phi(t)$  é chamada de solução explícita.*

*Uma solução implícita de uma equação diferencial ordinária é uma relação  $G(t, y) = 0$  que define uma ou mais soluções explícitas num intervalo  $I$ .*

**Definição 13** *O gráfico de uma solução  $\phi$  de uma EDO é chamado de curva integral.*

Sendo a solução uma função diferenciável, a curva integral é contínua no intervalo  $I$ .

A solução da equação pode ser classificada de acordo com o seu comportamento perante perturbações do valor inicial.

**Definição 14** *A solução da EDO é considerada estável se as soluções resultantes da perturbação do valor inicial se mantiverem próximas da solução original.*

*Classificamos a solução de assintoticamente estável se as soluções resultantes da perturbação do valor inicial convergirem para a solução original.*

*Se as soluções resultantes da perturbação do valor inicial divergirem da solução original sem limites dizemos que a solução da EDO é instável.*

Retomemos o exemplo da equação 1.12 com valor inicial conhecido  $x_0$  para  $t_0 = 0$ ,

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1.15)$$

Neste caso temos solução, para  $a$  constante,

$$x(t) = x_0 e^{at}. \quad (1.16)$$

No caso de  $a$  ser número real positivo, todas as soluções crescem exponencialmente logo cada solução é instável. Se  $a$  for um número real negativo, todas as soluções decrescem exponencialmente, sendo cada solução assintoticamente estável.

No caso da constante  $a$  ser um número imaginário com parte real positiva temos soluções instáveis. As soluções serão assintoticamente estáveis se a parte real for negativa. No caso da parte real nula temos soluções estáveis.

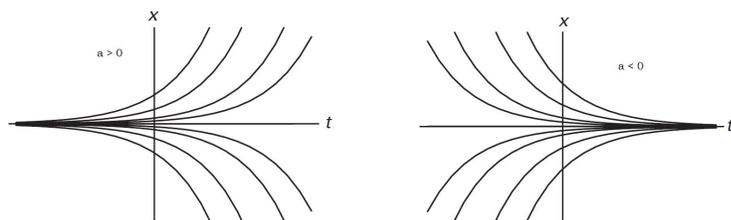


Figura 1.2: Representação gráfica da solução 1.16 no caso de  $a > 0$  e  $a < 0$ .

## 1.4 Equações diferenciais de primeira ordem

Consideremos a EDO de primeira ordem

$$x'(t) = f(t, x), \quad (1.17)$$

com  $f$  uma função real.

O problema de valor inicial no caso das EDO de primeira ordem toma a forma

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.18)$$

Geometricamente, resolver o PVI 1.18 consiste em determinar a função  $x(t)$  que satisfaz a equação 1.17, para todo o  $t \in \mathbb{R}$  e que passa no ponto  $(t_0, x_0)$ . Uma das primeiras questões que surge ao trabalhar com problemas de valor inicial diz respeito à existência e unicidade da solução.

O seguinte teorema apresenta apenas uma condição suficiente para a existência e unicidade da solução do PVI 1.18. Se as condições não se verificarem, o PVI 1.18 pode ter ou não uma ou mais soluções.

**Teorema 1 (Teorema de Picard)** *Seja  $R$  região definida por*

$R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : a < t < b, c < x < d\}$  *que contém o ponto  $(t_0, x_0)$ .*

*Se  $f(t, x)$  e  $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$  são funções contínuas em  $R$ , então existe um intervalo  $I$  centrado no ponto  $t_0$  e uma única função  $x = x(t)$  definida em  $I$  que satisfaz o PVI 1.18.*

**Demonstração:** ver [3] ■

O teorema anterior dá-nos uma condição suficiente para verificar a existência de solução mas não nos diz como a calcular.

A solução de um PVI da forma 1.18 pode ser determinada com recurso à primitiva da função  $x(t)$ . Mas, como sabemos, nem todas as funções possuem primitivas, o que nos leva a um número reduzido de EDO que podem ser resolvidas deste modo.

O estudo qualitativo das equações diferenciais ajuda a identificar características importantes das soluções da equação sem a resolver, em que procuramos encontrar o máximo de informações sem conhecer explicitamente a solução. Pode ser usado no estudo de equações diferenciais lineares mas é um dos métodos de maior importância no estudo de equações diferenciais não lineares. Geometricamente, as soluções da equação 1.17 definem um conjunto de curvas integrais no plano  $tx$ . Cada uma das curvas integrais é solução de um determinado PVI. Para cada ponto  $(t, x)$  a equação diferencial define  $x'$ , ou seja, conhecemos o valor do declive da reta tangente ao gráfico da curva integral que passa no ponto.

A equação diferencial 1.17 gera um campo de direções no plano  $tx$ . Ao representar em cada ponto  $(t, x)$  a reta com declive  $f(t, x)$  obtemos uma representação do campo de direções associado à equação diferencial.

A análise do campo de direções associado a uma equação diferencial permite conhecer propriedades das soluções sem as calcular.

As soluções da equação diferencial são curvas em que as tangentes em cada ponto são definidas por esses declives.

### 1.4.1 Análise qualitativa de equações autónomas

No caso das EDO da forma 1.9, as chamadas equações diferenciais autónomas, através da análise qualitativa conseguimos descrever de uma forma mais pormenorizada as soluções da equação.

O teorema 1 garante a existência e unicidade da solução para qualquer condição inicial, assim as curvas integrais no caso de uma equação autónoma de primeira ordem não se intersectam.

No caso autónomo  $f(t, x) = f(x)$ .

**Definição 15** *Um ponto  $x_0$  é um ponto de equilíbrio da equação 1.17 se e só se  $f(x_0) = 0$ . No caso dos sistemas diferenciais autónomos, os pontos de equilíbrio definem as soluções constantes.*

Podemos classificar os pontos de equilíbrio com base no comportamento da solução da equação.

**Definição 16** *O ponto de equilíbrio  $x = x_0$  é um escoadouro se toda a solução com condição inicial suficientemente próxima de  $x_0$  tende para  $x_0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ . Neste caso a solução de equilíbrio diz-se estável.*

*No caso da solução com condição inicial suficientemente próxima de  $x_0$  tender para  $x_0$  quando  $t \rightarrow -\infty$ , o ponto é classificado como fonte e está associado a uma solução de equilíbrio instável.*

*O ponto de equilíbrio que não seja nem fonte nem escoadouro é chamado por ponto de sela.*

Na figura 1.3 podemos observar exemplos de ponto de sela, escoadouro e fonte.

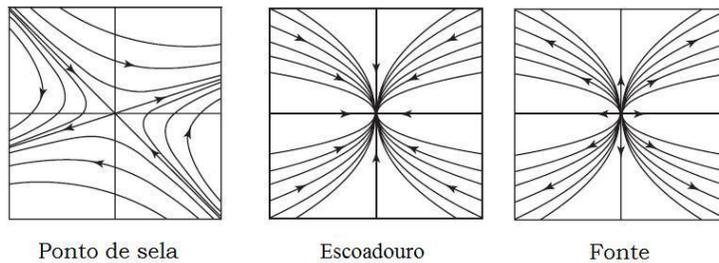


Figura 1.3: Representação gráfica dos diferentes pontos de equilíbrio.

### 1.4.2 Aproximação de soluções

Vamos ver como podemos obter uma aproximação das soluções de um PVI da forma 1.18 recorrendo ao método de iteração de Picard e aos métodos numéricos baseados na série de Taylor.

Suponhamos que nos encontramos nas condições do teorema 1, tendo assim uma única solução  $x(t)$  do PVI dado num intervalo  $I$  em torno do ponto  $t_0$ .

#### Método de iteração de Picard

O método de iteração de Picard determina uma fórmula recursiva, que verificando certas condições, converge para a solução do PVI 1.18.

**Lema 1** *A função  $x(t)$  é solução do PVI 1.18 num intervalo  $I$  se e só se for uma solução da equação integral*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds, \quad (1.19)$$

num intervalo  $I$ .

#### Demonstração:

Seja  $x(t)$  solução do PVI 1.18 num intervalo  $I$ .

Então  $x$  é diferenciável em  $I$  e  $x'(t) = f(t, x(t))$ .

Integrando de  $t_0$  a  $t$  ambos os membros da equação  $x'(t) = f(t, x(t))$  obtemos

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t x'(s)ds &= \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds \Leftrightarrow x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds \\ &\Leftrightarrow x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds \end{aligned}$$

e como  $x(t_0) = x_0$ ,  $x(t)$  é solução de 1.19.

Suponhamos agora que  $x(t)$  é a solução da equação integral 1.19. Derivando em relação a  $t$ , chegamos a

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

e

$$x(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s, x(s))ds = x_0.$$

Donde  $x(t)$  é solução do PVI 1.18. ■

**Definição 17** A seqüência de funções  $x_1(t), x_2(t), \dots$ , onde

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_{n-1}(s)) ds \quad (1.20)$$

é chamada de aproximações sucessivas ou de iterações de Picard.

### Métodos numéricos para a solução do PVI

Os métodos numéricos são usados para obter uma aproximação precisa da solução de um PVI. São métodos muito úteis principalmente em casos de EDO não lineares, mas também podem ser usados em EDO lineares.

Este tipo de métodos para resolver PVI determinam aproximações  $x_1, x_2, \dots, x_n$  para a solução exata  $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)$ , com  $t_1, t_2, \dots, t_n \in I = [a, b]$ . Os pontos  $t_1, t_2, \dots, t_n$  são designados pontos da malha. Estes métodos são designados por métodos discretos.

Consideremos  $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$  equidistantes e passo da malha  $h = \frac{b-a}{n}$ ,  $t_i = t_0 + ih, i = 1, \dots, n$  com  $n$  subintervalos do intervalo  $I$  (ver figura 1.4).

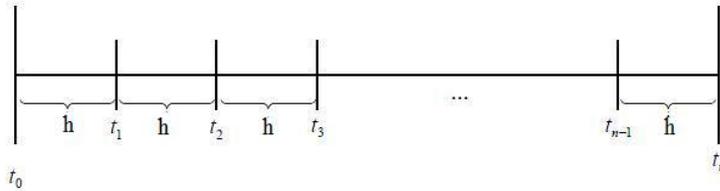


Figura 1.4: Decomposição do intervalo  $[t_0, t_n]$

Os métodos numéricos permitem determinar valores  $x_i \approx x(t_i)$  através de processos de recorrência a partir dos dados do PVI. Os que determinam o valor de  $x_{i+1}$  apenas à custa de  $x_i$  são designados de métodos de passo único e tomam a forma geral

$$x_{i+1} = x_i + \phi h, \quad (1.21)$$

com  $\phi$  função de iteração.

Os métodos de passo múltiplo determinam o valor de  $x_{i+1}$  à custa de outros  $x_j$ , com  $j \leq i$ .

Os métodos em que o valor de  $x_{i+1}$  é calculado diretamente a partir de  $x_i$  são designados de métodos explícitos. No caso de  $x_{i+1}$  depender implicitamente de si próprio através da função de iteração, o método diz-se ser implícito.

Admitamos que  $x(t)$  tem derivadas de ordem  $s + 1$  em  $]t_0, t_n[$  com  $x^{(n)}$  contínua em  $[t_0, t_n]$ .

A fórmula de Taylor em torno do ponto  $t_0$  é dada por

$$x_s(t) = x(t_0) + x'(t_0)(t-t_0) + x''(t_0)\frac{(t-t_0)^2}{2!} + \dots + x^{(s)}(t_0)\frac{(t-t_0)^s}{s!} + R_s(t, t_0), \quad (1.22)$$

em que  $R_s(t, t_0) = x^{(s+1)}(\xi)\frac{(t-t_0)^{s+1}}{(s+1)!}$  e  $\xi$  pertencente ao intervalo de extremos de  $t$  e  $t_0$ , é o chamado resto de Lagrange.

No caso da EDO primeira ordem,  $x'(t) = f(t, x)$ , com passo  $h = t_{i+1} - t_i$ , então podemos reescrever 1.22 e obtemos a fórmula do método de Taylor de ordem  $s$

$$x_{i+1} \approx x_i + f(t_i, x_i)h + \frac{h^2}{2!}f'(t_i, x_i) + \dots + f^{(s-1)}(t_i, x_i)\frac{h^s}{s!}. \quad (1.23)$$

O resto de Lagrange verifica  $|R_{i+1}| \leq \frac{M}{(s+1)!}h^{s+1}$  para  $M$  e  $k$  não negativos.

Podemos dizer que o método é de ordem  $s$ , isto é,  $|R_{i+1}| = O(h^{s+1})$ , e que o erro é proporcional a  $h^{s+1}$ .

Ao escrever o método de Taylor de ordem  $s = 1$  obtemos

$$x_{i+1} \approx x_i + f(t_i, x_i)h, \quad (1.24)$$

com erro

$$R_1 = \frac{h^2}{2}f'(\xi_i, x(\xi_i)). \quad (1.25)$$

Esta fórmula recursiva é conhecida como método de Euler, como iremos ver adiante.

Para obter uma fórmula mais precisa devemos usar mais termos na série de Taylor e usando o resto de Taylor podemos estimar o erro cometido nesta aproximação.

O método da série de Taylor de segunda ordem é dado, para  $n = 0, 1, \dots$ ,

$$x_{i+1} \approx x_i + f(t_i, x_i)h + \frac{h^2}{2!}f'(t_i, x_i) \quad (1.26)$$

com

$$f'(t_i, x_i) = \frac{\partial f(t_i, x_i)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_i, x_i)}{\partial x}f(t_i, x_i). \quad (1.27)$$

Os métodos que usam o desenvolvimento em série de Taylor aproximam a solução de EDO, mas quanto maior a ordem do método mais complicado se pode tornar o cálculo das derivadas envolvidas.

### Método de Euler

O método de Euler usa a informação do instante  $t_n$  para calcular uma aproximação da solução no instante seguinte  $t_{n+1}$ . O PVI transmite a informação do valor inicial e do valor da derivada de  $x$  em cada ponto.

Sabemos que o gráfico da solução passa pelo ponto  $(t_0, x_0)$  com inclinação igual a  $f(t_0, x_0)$ . O método também é conhecido pelo método da tangente pois podemos aproximar a solução que procuramos pela função cujo gráfico é a reta tangente ao gráfico da solução no ponto  $(t_0, x_0)$ , isto é,

$$x = x_0 + f(t_0, x_0)(t - t_0). \quad (1.28)$$

A reta tangente é uma boa aproximação da curva solução num intervalo  $[t_0, t_1]$  pequeno, seguindo ao longo da reta chegamos ao ponto  $(t_1, x_1)$ , onde

$$x_1 = x_0 + f(t_0, x_0)(t_1 - t_0). \quad (1.29)$$

Utilizando agora o ponto de partida  $(t_1, x_1)$  podemos obter o valor de  $x_2$ ,

$$x_2 \approx x_1 + f(t_1, x_1)(t_2 - t_1). \quad (1.30)$$

Repetindo o processo usamos o valor de  $x$  usado em cada passo para calcular o valor de  $f$  na próxima aproximação. Assim, chegamos a uma expressão geral para  $x_{n+1}$  em função de  $t_n$  e  $t_{n+1}$  e  $x_n$ ,

$$x_{n+1} \approx x_n + f(t_n, x_n)(t_{n+1} - t_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.31)$$

**Definição 18** *O algoritmo numérico 1.31 fornece as aproximações das soluções  $x_k$  recursivamente nos instantes  $t_1, \dots, t_k$ , dado  $x(t_0) = x_0$ .*

*Fazendo  $h = t_{n+1} - t_n$  na equação 1.31, obtemos*

$$x_{n+1} \approx x_n + f(t_n, x_n)h, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.32)$$

*A equação 1.32 é a chamada fórmula para o método explícito de Euler.*

O método consiste em calcular, repetidamente, a equação 1.31, usando o resultado de cada passo para executar o passo seguinte, obtendo uma sequência de valores  $x_0, x_1, \dots$  que aproximam o valor da solução do PVI 1.18 nos pontos  $t_0, t_1, \dots$

Podemos escrever a EDO de primeira ordem 1.17 no ponto  $t_n$

$$x'(t_n) = f(t_n, x(t_n)) \quad (1.33)$$

e aproximar a derivada pelo quociente das diferenças, com  $h$  passo da malha suficientemente pequeno,

$$\begin{aligned} \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{t_{n+1} - t_n} \approx f(t_n, x(t_n)) &\Leftrightarrow \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{h} \approx f(t_n, x(t_n)) \\ &\Leftrightarrow x(t_{n+1}) \approx x(t_n) + hf(t_n, x(t_n)), \end{aligned}$$

obtendo a fórmula iterativa de Euler 1.32.

Utilizando a equação integral 1.20, obtemos

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, x(s)) ds, \quad (1.34)$$

em que o integral do segundo membro pode ser entendido como a área do gráfico de  $f(s, x(s))$  entre  $t_n$  e  $t_{n+1}$ .

Aproximando a área pela área do retângulo com dimensões  $f(t_n, x(t_n))$  por  $(t_{n+1} - t_n)$  (figura 1.5), vem que

$$x(t_{n+1}) \approx x(t_n) + f(t_n, x(t_n))(t_{n+1} - t_n). \quad (1.35)$$

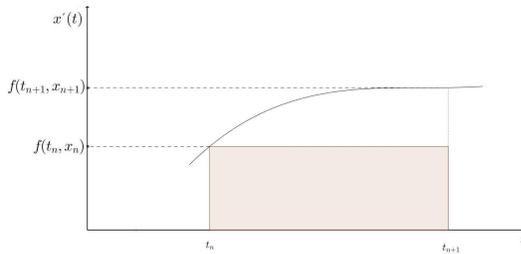


Figura 1.5: Aproximação pela área do retângulo.

Fazendo  $x_k = x(t_k)$  e  $h = t_{n+1} - t_n$  obtemos,

$$x_{n+1} \approx x_n + f(t_n, x_n)h, \quad (1.36)$$

conhecendo o valor inicial  $x_0 = x(t_0)$  e incrementos  $t_n = t_0 + nh$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . A simplicidade do método é a sua maior vantagem, mas para os resultados obtidos serem mais precisos teríamos que utilizar o passo de malha cada vez mais pequeno, tornando o método demasiado lento.

Podemos melhorar o método de Euler tentando uma aproximação mais precisa, aproximando o integral da equação integral 1.20 pela regra do trapézio.

Consideremos o trapézio de vértices (figura 1.6)

$$(t_n, 0), (t_{n+1}, 0), (t_n, f(t_n, x_n)), (t_{n+1}, f(t_{n+1}, x_{n+1})), \quad (1.37)$$

cuja área é dada por

$$\frac{f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_{n+1})}{2}(t_{n+1} - t_n). \quad (1.38)$$

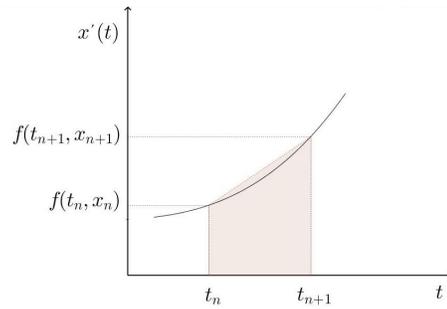


Figura 1.6: Aproximação pela área do trapézio.

Donde,

$$x(t_{n+1}) \approx x(t_n) + \frac{f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_{n+1})}{2}(t_{n+1} - t_n). \quad (1.39)$$

Esta equação não é tão simples de aplicar pois  $x_{n+1}$  aparece como um dos argumentos da função do lado direito da igualdade. Este tipo de equação é chamada de equação implícita, não temos o valor de  $x_{n+1}$  explicitamente em função do valor de  $x_n$ . Em cada passo teríamos que resolver a função do lado direito para  $x_{n+1}$  o que poderia tornar o método muito lento e demorado.

Vamos tentar colmatar esta dificuldade aproximando  $x(t_{n+1})$  pela fórmula de Euler 1.36.

Assim,

$$x(t_{n+1}) \approx x(t_n) + \frac{f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x(t_n)) + f(t_n, x_n)(t_{n+1} - t_n)}{2}(t_{n+1} - t_n). \quad (1.40)$$

Fazendo  $x_n = x(t_n)$ ,  $t_{n+1} = t_n + h$  e  $h = t_{n+1} - t_n$  temos,

$$x_{n+1} \approx x_n + \frac{f(t_n, x_n) + f(t_n + h, x_n + hf(t_n, x_n))}{2}h. \quad (1.41)$$

Para a aplicação da fórmula primeiro necessitamos de calcular

$$x_n + hf(t_n, x_n) \quad (1.42)$$

pela fórmula de Euler 1.36 e depois usamos esse resultado para calcular  $x_{n+1}$  em 1.41.

**Definição 19** *A equação 1.41 é conhecida como fórmula de Euler melhorada ou fórmula de Heun.*

Neste caso temos um erro proporcional a  $h^3$ , enquanto na fórmula de Euler 1.36 tínhamos um erro proporcional a  $h^2$ .

### Método de Runge-Kutta

O método de Runge-Kutta de ordem  $n$  é caracterizado por não exigir o cálculo de derivadas parciais de  $f(t, x)$  e apenas necessitar do cálculo de  $f(t, x)$  no número de pontos que depende a ordem dos métodos. A expressão do método coincide com a expressão do método de Taylor em torno de  $(t, x_i)$  de mesma ordem, quando agrupados os termos em relação às potências de  $h$ . A desvantagem do método é o não conhecimento da estimativa do erro, o que poderá não facilitar a escolha do passo  $h$ .

O método de Euler 1.36 é um método de Runge-Kutta de primeira ordem e o método de Euler melhorado 1.41 é um método de Runge-Kutta de segunda ordem.

É dos métodos mais usados, sendo o método de Runge-Kutta de quarta ordem o mais eficiente para obter soluções aproximadas de PVI.

No nosso caso iremos ver somente a aplicação do método de segunda ordem.

### Método de Runge-Kutta de segunda ordem

Consideremos o polinômio de Taylor de segunda ordem com resto  $\frac{h^3}{6} f'''(\xi)$  pequeno,

$$x_{i+1} \approx x_i + f(t_i, x_i)h + \frac{h^2}{2} \left[ \frac{\partial f(t_i, x_i)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_i, x_i)}{\partial x} f(t_i, x_i) \right]. \quad (1.43)$$

O método de Runge-Kutta de segunda ordem consiste em encontrar constantes  $a_1, a_2, b_1, b_2$  tais que a fórmula

$$x_{n+1} = x_n + a_1 k_1 + a_2 k_2, \quad (1.44)$$

em que

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_n, x_n); \\ k_2 &= hf(t_n + b_1h, x_n + b_2k_1), \end{aligned} \quad (1.45)$$

coincida com a expressão 1.43 do desenvolvimento do polinómio de Taylor. Começemos por desenvolver  $k_2 = hf(t_n + b_1h, x_n + b_2k_1)$  com recurso ao polinómio de Taylor,

$$\begin{aligned} k_2 &= hf(t_n + b_1h, x_n + b_2k_1) \\ &= hf(t_n, x_n) + b_1h^2 \frac{\partial f(t_n, x_n)}{\partial t} + b_2h^2 f(t_n, x_n) \frac{\partial f(t_n, x_n)}{\partial x}. \end{aligned}$$

Substituindo na expressão 1.44, vem que

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + a_1f(t_n, x_n) + a_2 \left[ hf(t_n, x_n) + b_1h^2 \frac{\partial f(t_n, x_n)}{\partial t} + b_2hf(t_n, x_n) \frac{\partial f(t_n, x_n)}{\partial x} \right] \\ &= x_n + (a_1 + a_2)hf(t_n, x_n) + h^2 \left[ ha_2b_1 \frac{\partial f(t_n, x_n)}{\partial t} + a_2b_2f(t_n, x_n) \frac{\partial f(t_n, x_n)}{\partial x} \right]. \end{aligned}$$

Comparando as expressões 1.43 e 1.44, resulta

$$a_1 + a_2 = 1, \quad a_2b_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2b_2 = \frac{1}{2}. \quad (1.46)$$

No caso de  $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}, b_1 = b_2 = 1$  estamos perante o método de Euler melhorado 1.41,

$$x(t_{n+1}) \approx x(t_n) + \frac{h}{2} [f(t_n, x(t_n)) + f(t_n + h, x(t_n) + hf(t_n, x(t_n)))]. \quad (1.47)$$

### 1.4.3 Equações Diferenciais Separáveis

Uma EDO de primeira ordem é separável se for possível, através de manipulação algébrica, reescrever a equação de modo que todas as variáveis dependentes estejam num membro da equação e as variáveis independentes do outro.

**Definição 20** *As equações que se podem escrever na forma*

$$\frac{dx}{dt} = f(t)h(x), \quad (1.48)$$

com  $h$  e  $f$  funções contínuas, são designadas de EDO separáveis.

As equações diferenciais que se podem escrever na forma 1.48 são de fácil resolução. O processo de determinação da solução deste tipo de equações é designado de método de separação de variáveis.

Sejam  $f$  e  $h$  funções contínuas e consideremos que  $h$  não se anula.

A equação 1.48 pode tomar a forma

$$\frac{1}{h(x)} \frac{dx}{dt} = f(t) \Leftrightarrow g(x)dx = f(t)dt, \quad (1.49)$$

onde  $g(x) = \frac{1}{h(x)}$ .

Definamos  $G(x) = \int g(x)dx$ , donde

$$\begin{aligned} g(x)dx = f(t)dt &\Leftrightarrow \frac{dG}{dx}dx = f(t)dt \\ &\Leftrightarrow \frac{dG}{dx} \frac{dx}{dt} = f(t). \end{aligned}$$

Da aplicação da regra da cadeia, vem

$$\frac{d}{dt}G(x(t)) = f(t). \quad (1.50)$$

Esta equação é facilmente resolvida integrando ambos os membros,

$$\int \frac{d}{dt}G(x(t))dt = \int f(t)dt \Leftrightarrow G(x(t)) = \int f(t)dt + c. \quad (1.51)$$

Temos então a solução geral implícita da equação 1.48 dada por

$$\int g(x)dx = \int f(t)dt + C, \quad (1.52)$$

em que  $C$  é uma constante.

**Proposição 1** *A solução geral da equação diferencial 1.48, é dada, de forma implícita, pela equação integral,*

$$\int g(x)dx = \int f(t)dt + C, \quad (1.53)$$

onde  $g(x) = \frac{1}{h(x)}$ .

Se pretendermos uma solução particular da equação tal que  $x(t_0) = x_0$ , temos

$$C = G(x_0) - F(t_0).$$

Reescrevendo a equação 1.52,

$$\begin{aligned} \int g(x)dx = \int f(t)dt + C &\Leftrightarrow \int g(x)dx = \int f(t)dt + G(x_0) - F(t_0) \\ &\Leftrightarrow G(x) - G(x_0) = F(t) - F(t_0) \\ &\Leftrightarrow \int_{x_0}^x g(s)ds = \int_{t_0}^t f(r)dr. \end{aligned}$$

Obtemos uma curva que passa pelo ponto  $(t_0, x_0)$  e que define implicitamente a solução da equação 1.48 sujeita à condição inicial  $x(t_0) = x_0$ .

Consideremos a EDO de primeira ordem

$$x'(t) = f(t). \quad (1.54)$$

Aplicando o método de resolução de separação de variáveis, temos

$$\int \frac{dx}{dt} dt = \int f(t)dt \Leftrightarrow x(t) = \int f(t)dt + C. \quad (1.55)$$

Ou seja, a solução geral da equação é dada, com  $C$  constante, por

$$x(t) = \int f(t)dt + C. \quad (1.56)$$



## Capítulo 2

# Equações Diferenciais Lineares Homogêneas de Coeficientes Constantes

As equações diferenciais lineares homogêneas de primeira ordem são equações da forma

$$a_1(t)x' + a_0(t)x = 0 \quad (2.1)$$

com  $a_1, a_0$  funções contínuas definidas num intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  dependentes apenas de  $t$ .

Assumindo que a função  $a_1(t)$  nunca se anula em  $I$  podemos simplificar a expressão que define a equação diferencial dividindo ambos os membros por  $a_1(t)$  e podemos reescrever a equação 2.1 como

$$x'(t) + p(t)x(t) = 0, \quad (2.2)$$

com  $p$  função contínua em  $I$ .

Podemos resolver a equação 2.2 aplicando o método descrito para as equações separáveis,

$$\begin{aligned} x'(t) + x(t)p(t) = 0 &\Leftrightarrow \frac{x'(t)}{x(t)} = -p(t), \text{ supondo que } x(t) \text{ não se anula} \\ &\Leftrightarrow \int \frac{dx}{x} dt = \int -p(t) dt \\ &\Leftrightarrow \ln |x(t)| = - \int p(t) dt + c \\ &\Leftrightarrow |x(t)| = e^{- \int p(t) dt + c} \\ &\Leftrightarrow |x(t)| = Ce^{- \int p(t) dt}. \end{aligned}$$

A solução geral para a equação homogênea é

$$x(t) = Ce^{-\int p(t)dt}, \quad (2.3)$$

em que, para cada valor  $C$ , teremos uma solução particular da equação.

Para um PVI definido da forma

$$\begin{cases} x'(t) + p(t)x(t) = 0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.4)$$

a solução será então dada por

$$x(t) = x_0 e^{-\int_{t_0}^t p(t)dt}. \quad (2.5)$$

**Definição 21** *A equação homogênea linear de ordem  $n$  escrita do seguinte modo*

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x = 0, \quad (2.6)$$

*$a_0, a_1, \dots, a_n$  constantes reais com  $a_n \neq 0$ , designa-se por equação diferencial linear com coeficientes constantes.*

**Definição 22** *Para uma EDO linear de ordem  $n$  homogênea de coeficientes constantes um PVI toma a forma*

$$\begin{cases} a_0 x + a_1 x' + \dots + a_n x^{(n)} = 0 \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{cases} \quad (2.7)$$

*com  $t_0, x_0, \dots, x_{n-1}, a_0, \dots, a_n$  constantes.*

**Definição 23** *Ao conjunto de soluções linearmente independentes  $x_1, \dots, x_n$  de uma EDO linear homogênea de ordem  $n$ , num intervalo  $I$ , designamos de conjunto de soluções fundamentais. A combinação linear de soluções ainda é uma solução.*

## 2.1 Sistemas de EDO lineares homogêneas de coeficientes constantes

Podemos reduzir a ordem das equações a serem estudadas usando a escrita de equações diferenciais em sistemas.

Um sistema de EDO lineares de coeficientes constantes de primeira ordem é, geralmente, representado por

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + \dots + a_{2n}x_n(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) \end{cases} \quad (2.8)$$

com  $a_{ij}, i, j = 1, \dots, n$  constantes, que podemos escrever na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

ou na forma

$$X'(t) = AX(t), \quad (2.10)$$

com

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad e \quad X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Trata-se de um sistema com derivadas  $x_1', \dots, x_n'$  dadas explicitamente.

Consideremos uma EDO linear homogênea de ordem  $n$  de coeficientes constantes escrita na forma mais usual

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0 \quad (2.12)$$

com  $a_i, i = 0, \dots, n-1$  constantes.

A equação 2.12 pode ser escrita na forma de um sistema de  $n$  equações diferenciais de primeira ordem, para tal, usamos as seguintes mudanças de variável:

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = y' \\ \vdots \\ x_{n-1} = y^{(n-2)} \\ x_n = y^{(n-1)} \end{cases} \quad (2.13)$$

então, obtemos um sistema equivalente à equação 2.12

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ \vdots \\ x'_{n-1} = x_n \\ x'_n = -a_{n-1}x_n - a_{n-2}x_{n-1} - \dots - a_1x_2 - a_0x_1 \end{cases} \quad (2.14)$$

O sistema anterior pode ser escrito matricialmente como,

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_{n-1} \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

**Definição 24** *O vetor solução de um sistema é dado pela matriz coluna*

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

*cujos elementos são  $n$  funções diferenciáveis definidas em  $\mathbb{R}$  com valores reais ou complexos, que satisfazem o sistema 2.10 no intervalo  $I$ .*

**Teorema 2 (Princípio da sobreposição para sistemas lineares homogêneos)**

*Sejam  $X_1(t), \dots, X_n(t)$  um conjunto de vetores solução do sistema de ordem  $n$  homogêneo 2.10 num intervalo  $I$ .*

*Então a combinação linear*

$$X(t) = c_1X_1(t) + \dots + c_nX_n(t) \quad (2.17)$$

*também é solução do sistema em  $I$ .*

**Demonstração:**

Por hipótese, para cada  $i = 1, \dots, n$ , temos  $AX_i(t) = X'_i(t)$ .

Portanto,

$$\begin{aligned} X'(t) &= c_1X'_1(t) + \dots + c_nX'_n(t) \\ &= c_1AX_1(t) + \dots + c_nAX_n(t) \\ &= A(c_1X_1(t) + \dots + c_nX_n(t)) \end{aligned}$$

donde  $X'(t) = AX(t)$ . ■

O seguinte resultado apresenta um teste à independência linear das soluções.

**Teorema 3 (Teste de independência linear)** *Sejam  $X_1(t), \dots, X_n(t)$  soluções de 2.10 e  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Então  $X_1(t), \dots, X_n(t)$  são soluções linearmente independentes se e só se  $X_1(t_0), \dots, X_n(t_0)$  são vetores linearmente independentes em  $\mathbb{R}^n$ .*

**Demonstração:**

Suponhamos que  $X_1(t), \dots, X_n(t)$  são soluções linearmente dependentes. Então existem constantes  $c_1, \dots, c_n$  não todos nulos, tais que

$$c_1 X_1(t) + \dots + c_n X_n(t) = 0, \text{ para todo o } t.$$

No caso de  $t = t_0$ ,

$$c_1 X_1(t_0) + \dots + c_n X_n(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim  $X_1(t_0), \dots, X_n(t_0)$  são vetores linearmente dependentes em  $\mathbb{R}^n$ .

Concluimos que se  $\{X_1(t_0), \dots, X_n(t_0)\}$  é linearmente independente, então  $\{X_1(t), \dots, X_n(t)\}$  é linearmente independente.

Suponhamos, agora, que  $X_1(t), \dots, X_n(t)$  em algum instante  $t = t_0$  são vetores linearmente dependentes em  $\mathbb{R}^n$ . Então existem constantes  $c_1, \dots, c_n$ , não todas nulas, tais que

$$c_1 X_1(t_0) + \dots + c_n X_n(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Com esta escolha de constantes podemos considerar a função vetorial

$$X(t) = c_1 X_1(t) + \dots + c_n X_n(t).$$

Esta função é combinação linear de soluções e além disso, a solução nula também é solução de 2.10 com  $X(t_0) = 0$ , logo  $X(t) = 0$ , para todo o  $t$ , o que implica que  $X_1(t), \dots, X_n(t)$  são soluções linearmente dependentes. ■

**Teorema 4** *Uma matriz  $X(t)$  é uma solução fundamental de 2.10 se e só se*

$$X'(t) = AX(t) \text{ e } \det X(t_0) \neq 0. \quad (2.18)$$

**Demonstração:**

Sejam  $X_1(t), \dots, X_n(t)$  as  $n$  colunas de  $X(t)$ ,

$$X'(t) = [ X'_1(t) \quad \dots \quad X'_n(t) ]$$

e

$$AX(t) = [ AX_1(t) \quad \dots \quad AX_n(t) ]$$

donde as  $n$  equações vetoriais

$$\begin{aligned} X'_1(t) &= AX_1(t), \\ &\vdots \\ X'_n(t) &= AX_n(t). \end{aligned}$$

são equivalentes à equação matricial  $X'(t) = AX(t)$ .

Além disso, as  $n$  soluções de 2.10 são linearmente independentes se e só se  $X_1(t_0), \dots, X_n(t_0)$  são vetores linearmente independentes, o que acontece se e só se  $\det X(t_0) \neq 0$ . ■

**Teorema 5** *Sejam  $X_1(t), \dots, X_n(t)$  um conjunto de vetores solução do sistema de ordem  $n$  e  $\det X(t_0) \neq 0$ .*

*Então, o PVI*

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \quad (2.19)$$

*tem uma única solução, que é da forma*

$$X(t) = c_1 X_1(t) + \dots + c_n X_n(t). \quad (2.20)$$

**Demonstração:**

Consideremos a solução

$$X(t) = c_1 X_1(t) + \dots + c_n X_n(t).$$

Substituindo  $t = t_0$  obtemos

$$X(t_0) = X_0 = c_1 X_1(t_0) + \dots + c_n X_n(t_0)$$

que matricialmente fica

$$[ X_1(t_0) \quad \dots \quad X_n(t_0) ] \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = X_0.$$

Se a matriz  $B = \begin{bmatrix} X_1(t_0) & \dots & X_n(t_0) \end{bmatrix}$  for invertível então existe uma única solução e é da forma  $B^{-1}X_0$ , para toda a condição inicial  $X(t_0) = X_0$ . Mas uma matriz quadrada é invertível se e só se o seu determinante é diferente de zero. Logo se  $\det X(t_0) \neq 0$  então para toda a condição inicial  $X(t_0) = X_0$  existem constantes  $c_1, \dots, c_n$  tais que

$$X(t) = c_1 X_1(t) + \dots + c_n X_n(t)$$

é a solução do PVI 2.19. ■

O nosso objetivo é encontrar  $n$  soluções linearmente independentes do sistema 2.10. Para tal iremos recorrer à teoria matricial da resolução de sistemas.

**Definição 25** Dizemos que  $\lambda$  é valor próprio da matriz  $A_{n \times n}$  se existir um vetor  $V$  não nulo tal que

$$AV = \lambda V. \quad (2.21)$$

O vetor  $V$  é designado de vetor próprio de  $A$  associado ao valor próprio  $\lambda$ .

Temos que se  $AV = \lambda V$  então, para  $\alpha \neq 0$ ,

$$A(\alpha V) = \alpha AV = \lambda(\alpha V), \quad (2.22)$$

isto é, qualquer escalar  $\alpha \neq 0$ , múltiplo de  $V$  é também vetor próprio da matriz  $A$  com valor próprio  $\lambda$ .

Vimos que as EDO lineares homogêneas de primeira ordem têm como soluções funções exponenciais.

**Teorema 6** Para  $V$  um vetor constante não nulo e  $\lambda$  constante não nula, temos que

$$X(t) = e^{\lambda t} V, \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.23)$$

é solução do sistema 2.10.

**Demonstração:**

Seja  $V$  um vetor constante não nulo e  $\lambda$  constante não nula. Consideremos  $x(t) = e^{\lambda t} V$ , donde para  $t \in \mathbb{R}$ , substituindo em 2.10, obtemos

$$\begin{aligned} X'(t) &= \lambda e^{\lambda t} V \\ &= e^{\lambda t} \lambda V \\ &= e^{\lambda t} AV \\ &= A e^{\lambda t} V \\ &= AX(t). \end{aligned}$$

Portanto,  $x(t) = e^{\lambda t}V$  é solução do sistema 2.10. ■

Vejam como determinar os vetores próprios da matriz  $A$  associados aos respectivos valores próprios.

**Teorema 7** *Os valores próprios de uma matriz  $A_{n \times n}$  são as soluções de*

$$\det(A - \lambda I) = 0. \quad (2.24)$$

*Uma matriz  $n \times n$  tem no máximo  $n$  valores próprios distintos.*

*Os vetores próprios  $V$  associados aos respectivos valores próprios são soluções do sistema*

$$(A - \lambda I)V = 0. \quad (2.25)$$

**Demonstração:**

Para calcular um vetor próprio  $V$  temos que encontrar soluções diferentes de zero, tais que  $AV = \lambda V$ , donde

$$AV = \lambda V \Leftrightarrow AV - \lambda V = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I)V = 0.$$

Então,  $V$  deve ser tal que verifique 2.25.

Ora, como o sistema 2.25 é um sistema homogêneo, então terá soluções não nulas se e só se  $\det(A - \lambda I)V = 0$ .

Os valores próprios  $\lambda$  da matriz  $A$  são as soluções da equação 2.24 e os vetores próprios são as soluções (diferentes de zero) do sistema 2.25 para os respectivos valores próprios  $\lambda$ .

A expressão  $\det(A - \lambda I) = 0$  é um polinómio de grau  $n$  designado por polinómio característico de  $A$ . Assim sendo, a matriz  $A$  não pode ter mais do que  $n$  valores próprios diferentes. ■

Pelo teorema 6 sabemos que para cada vetor próprio  $V$  da matriz  $A$  associado ao valor próprio  $\lambda$  temos como solução

$$X(t) = e^{\lambda t}V.$$

Se a matriz  $A$  tiver  $n$  vetores próprios  $V_1, \dots, V_n$  linearmente independentes com valores próprios  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  então, pelo teorema 3, temos  $n$  soluções

$$X_i(t) = e^{\lambda_i t}V_i, \quad i = 1, \dots, n$$

linearmente independentes.

O seguinte resultado garante que quando a matriz  $A$  tiver  $n$  valores próprios distintos, os seus vetores próprios associados são linearmente independentes.

**Teorema 8** *Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$  com  $n$  valores próprios  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  distintos. Então os  $n$  vetores próprios  $V_1, \dots, V_n$  associados aos respectivos valores próprios, são linearmente independentes.*

**Demonstração:** ver [3] ■

Se a matriz dos coeficientes  $A$  do sistema 2.10 for diagonal podemos resolver independentemente das outras cada uma das equações. Deste modo queremos transformar o sistema 2.10 num em que a matriz  $A$  seja diagonal.

**Definição 26** *Uma matriz  $A$  é diagonalizável se for semelhante a uma matriz diagonal  $D$ . Dizemos que  $A$  é semelhante a  $D$ , se existe uma matriz invertível  $P$  tal que*

$$D = P^{-1}AP. \quad (2.26)$$

**Teorema 9** *Uma matriz  $A_{n \times n}$  é diagonalizável se e só se tiver  $n$  vetores próprios linearmente independentes.*

**Demonstração:**

Suponhamos  $A$  é uma matriz diagonalizável, isto é, existe uma matriz  $P$  invertível tal que  $D = P^{-1}AP$ .

Suponhamos que existem as matrizes

$$P = [ V_1 \quad V_2 \quad \dots \quad V_n ] \quad e \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

em que  $V_j$  é a coluna  $j$  de  $P$  com  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  tais que

$$D = P^{-1}AP. \quad (2.28)$$

Multiplicando à esquerda por  $P$  ambos os membros da equação 2.28, vem que

$$PD = AP \quad (2.29)$$

com

$$AP = A [ V_1 \quad V_2 \quad \dots \quad V_n ] = [ AV_1 \quad AV_2 \quad \dots \quad AV_n ]$$

e

$$PD = [ V_1 \quad V_2 \quad \dots \quad V_n ] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = [ \lambda_1 V_1 \quad \lambda_2 V_2 \quad \dots \quad \lambda_n V_n ].$$

Podemos então reescrever 2.29 como

$$[ AV_1 \quad AV_2 \quad \dots \quad AV_n ] = [ \lambda_1 V_1 \quad \lambda_2 V_2 \quad \dots \quad \lambda_n V_n ].$$

Portanto,

$$AV_j = \lambda_j V_j, \text{ para } j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.30)$$

isto é, as colunas de  $P$  são vetores próprios de  $A$ . Como a matriz  $P$  é invertível as suas colunas são linearmente independentes. Temos então  $n$  vetores próprios linearmente independentes de  $A$ .

Suponhamos agora que existem  $n$  vetores próprios linearmente independentes  $V_1, \dots, V_n$  tais que

$$AV_j = \lambda_j V_j, \text{ para } j = 1, 2, \dots, n.$$

Definamos a matriz  $P$  tal que

$$P = [ V_1 \quad V_2 \quad \dots \quad V_n ].$$

Como as colunas de  $P$  são linearmente independentes temos que a matriz  $P$  é invertível.

Fazendo

$$\begin{aligned} AP &= A [ V_1 \quad V_2 \quad \dots \quad V_n ] \\ &= [ AV_1 \quad AV_2 \quad \dots \quad AV_n ] \\ &= [ \lambda_1 V_1 \quad \lambda_2 V_2 \quad \dots \quad \lambda_n V_n ] \\ &= [ V_1 \quad V_2 \quad \dots \quad V_n ] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \\ &= PD, \end{aligned}$$

com

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Chegamos a  $AP = PD$  e multiplicando ambos os membros por  $P^{-1}$  obtemos  $P^{-1}AP = D$ . ■

Para diagonalizar a matriz  $A$  precisamos de determinar os seus valores próprios e vetores próprios associados. Mas antes vejamos um resultado importante usado na construção da solução geral do sistema 2.10.

**Teorema 10** *Se  $A = PDP^{-1}$  então  $Y(t)$  é solução de  $Y'(t) = DY(t)$  se e só se  $PY(t)$  é solução de  $X'(t) = AX(t)$ .*

**Demonstração:**

Suponhamos que  $Y(t)$  é solução de  $Y'(t) = DY(t)$  e  $A = PDP^{-1}$ . Consideremos  $X(t) = PY(t)$  e  $AP = PD$ , então

$$\begin{aligned} X'(t) &= PY'(t) \\ &= PDY(t) \\ &= APY(t) \\ &= AX(t). \end{aligned}$$

Logo  $X(t) = PY(t)$  é solução de  $X'(t) = AX(t)$ .

Suponhamos agora que  $X(t)$  é solução de  $X'(t) = AX(t)$  e consideremos  $Y(t) = P^{-1}X(t)$  e  $P^{-1}A = DP^{-1}$ .

Então

$$\begin{aligned} Y'(t) &= P^{-1}X'(t) \\ &= P^{-1}AX(t) \\ &= DP^{-1}X(t) \\ &= DY(t), \end{aligned}$$

isto é,  $Y(t)$  é solução de  $Y'(t) = DY(t)$ . ■

Retomando o sistema 2.10 vejamos como determinar a sua solução geral.

Suponhamos que existem as matrizes  $D$  e  $P$  nas condições da definição 26 tais que  $A = PDP^{-1}$ .

Substituindo em 2.10, vem que

$$X'(t) = PDP^{-1}X(t) \tag{2.31}$$

e multiplicando à esquerda por  $P^{-1}$ , obtemos

$$P^{-1}X'(t) = P^{-1}PDP^{-1}X(t) \Leftrightarrow P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X(t). \tag{2.32}$$

Fazendo uma mudança de variável tal que

$$Y(t) = P^{-1}X(t), \tag{2.33}$$

temos

$$Y'(t) = DY(t), \tag{2.34}$$

que na forma de sistema fica

$$\begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = \lambda_n y_n(t) \end{cases} \quad (2.35)$$

e podemos, assim, resolver as equações individualmente.

Pelo teorema 6 temos como solução do sistema 2.35

$$\begin{cases} y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ y_n(t) = c_n e^{\lambda_n t} \end{cases} \quad (2.36)$$

que satisfaz a condição inicial  $Y(0) = (c_1, \dots, c_n)$ .

Matricialmente, a solução do sistema 2.35 é

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

Da mudança de variável 2.33 vem que

$$PY(t) = X(t) \quad (2.38)$$

e obtemos a solução geral do sistema 2.10

$$X(t) = [V_1 \ \dots \ V_n] \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

$$= c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} V_n. \quad (2.40)$$

## 2.2 Equações diferenciais lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes

As equações diferenciais homogêneas definidas da forma 2.6 para  $n = 2$  designam-se de equações diferenciais de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes.

A forma mais usual de representação é dada por

$$x'' + px' + qx = 0. \quad (2.41)$$

Como já foi dito, as equações diferenciais lineares de segunda ordem homogêneas gozam de uma propriedade fundamental resultante da sua linearidade.

**Proposição 2 (Princípio da Sobreposição)** *Se  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  são soluções da equação 2.41, então*

$$x(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t), \quad (2.42)$$

com  $C_1$  e  $C_2$  constantes, também é solução.

**Demonstração:**

Pretendemos mostrar que a combinação linear de duas soluções é também uma solução.

Por hipótese,  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  são soluções da equação 2.41, então

$$\begin{aligned} x''(t) + px'(t) + qx(t) &= \\ &= [C_1x_1(t) + C_2x_2(t)]'' + p[C_1x_1(t) + C_2x_2(t)]' + q[C_1x_1(t) + C_2x_2(t)] \\ &= C_1x_1''(t) + C_2x_2''(t) + pC_1x_1'(t) + pC_2x_2'(t) + qC_1x_1(t) + qC_2x_2(t) \\ &= C_1[x_1''(t) + px_1'(t) + qx_1(t)] + C_2[x_2''(t) + px_2'(t) + qx_2(t)] \\ &= C_1 \times 0 + C_2 \times 0 = 0. \end{aligned}$$

■

A função  $x(t) \equiv 0$  é sempre uma solução e é designada de solução trivial.

### 2.2.1 Método de redução de ordem

Podemos simplificar as equações diferenciais lineares, reduzindo a ordem da EDO, conhecendo já uma solução não trivial da EDO homogênea, permitindo assim encontrar outra solução de modo que as duas sejam linearmente independentes. O método descrito é designado por método de redução de ordem.

Consideremos a EDO linear homogênea de segunda ordem 2.41.

Suponhamos ser  $x_1(t)$  uma solução conhecida da equação 2.41.

Consideremos uma segunda solução da equação definida por

$$x_2(t) = x_1(t)v(t). \quad (2.43)$$

Derivando,

$$x_2'(t) = x_1'(t)v(t) + x_1(t)v'(t) \quad (2.44)$$

e

$$x_2''(t) = x_1''(t)v(t) + x_1(t)v''(t) + 2v'(t)x_1'(t). \quad (2.45)$$

Substituindo 2.43, 2.44 e 2.45 na equação definida em 2.41, obtemos

$$\begin{aligned} x'' + px' + qx = 0 &\Leftrightarrow x_1''v + x_1v'' + 2v'x_1' + p(x_1'v + x_1v') + qx_1v = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1v'' + v'(2x_1' + px_1) + v(x_1'' + px_1' + qx_1) = 0. \end{aligned}$$

Como  $x_1$  é solução da equação temos

$$x_1'' + px_1' + qx_1 = 0, \quad (2.46)$$

portanto  $v(t)$  satisfaz a equação seguinte

$$\begin{aligned} x_1 v'' + v'(2x_1' + px_1) = 0 &\Leftrightarrow v'' + \frac{v'}{x_1}(2x_1' + px_1) = 0 \\ &\Leftrightarrow v'' + v' \left( \frac{2x_1' + px_1}{x_1} \right) = 0. \end{aligned}$$

Fazendo  $u = v'$  a equação pode ser escrita como uma equação linear de primeira ordem,

$$u' + u \left( \frac{2x_1' + px_1}{x_1} \right) = 0. \quad (2.47)$$

Esta última equação é uma equação separável,

$$\frac{u'}{u} = - \frac{2x_1' + px_1}{x_1}, \quad (2.48)$$

donde, integrando ambos os membros, obtemos

$$\begin{aligned} \int \frac{u'(t)}{u(t)} dt = - \int \frac{2x_1' + px_1}{x_1} dt &\Leftrightarrow \ln u(t) = -2 \ln x_1 - \int p dt + C \\ &\Leftrightarrow \ln(u(t)x_1^2) = - \int p dt + C \\ &\Leftrightarrow u(t)x_1^2 = e^{-\int p dt + C} \\ &\Leftrightarrow u(t) = \frac{ce^{-\int p dt}}{x_1^2}, \end{aligned}$$

para  $C$  constante arbitrária.

Como  $v' = u$ , temos que, para  $c, d \in \mathbb{R}$

$$v(t) = \int \frac{ce^{-\int p dt}}{x_1^2} dt + d = \int \frac{ce^{-pt}}{x_1^2} dt + d. \quad (2.49)$$

Por 2.43, vem que

$$\frac{x_2(t)}{x_1(t)} = \int \frac{ce^{-pt}}{x_1^2} dt + d \Leftrightarrow x_2(t) = \left[ \int \frac{ce^{-pt}}{x_1^2} dt + d \right] x_1(t). \quad (2.50)$$

Encontramos, deste modo, uma solução tal que  $x_2(t) = v(t)x_1(t)$  e fazendo  $d = 0$  e  $c = 1$ ,

$$v(t) = \int \frac{e^{-pt}}{x_1^2} dt. \quad (2.51)$$

Assim se  $x_1(t)$  é uma solução conhecida da equação 2.41 e

$$x_2(t) = x_1(t) \int \frac{e^{-pt}}{x_1^2} dt \quad (2.52)$$

então

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_1(t) \int \frac{e^{-pt}}{x_1^2} dt \quad (2.53)$$

é solução geral da equação 2.41.

### 2.2.2 Sistemas de equações diferenciais lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes

Consideremos a EDO de segunda ordem linear homogênea de coeficientes constantes 2.41.

Fazendo as mudanças de variável  $x' = y$  vem  $x'' = y'$  e podemos escrever a equação como um sistema linear de duas equações diferenciais de primeira ordem,

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -qx - py \end{cases} \quad (2.54)$$

que, na forma matricial, toma a forma

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}. \quad (2.55)$$

Seja  $A$  a matriz dos coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{bmatrix} \quad e \quad X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

O PVI toma a forma matricial,

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \quad (2.57)$$

com

$$X(t_0) = X_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

e tem uma única solução que é da forma

$$X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t). \quad (2.59)$$

No caso de  $n = 2$ , uma solução do sistema 2.54 pode ser considerada como uma representação paramétrica de uma curva no plano. O plano  $xy$  é chamado de plano de fase e um conjunto de trajetórias é designado por retrato de fase.

Os pontos para os quais  $AX = 0$  são chamados de pontos de equilíbrio do sistema. Admitindo que  $\det A \neq 0$ , a matriz  $A$  é invertível, tendo  $X = (0, 0)$  como único ponto de equilíbrio do sistema. O determinante da matriz é diferente de zero se e só se a matriz tiver valores próprios não nulos. O estudo do ponto de equilíbrio  $(0, 0)$  fica restrito ao sinal dos valores próprios da matriz de coeficientes  $A$ .

O ponto de equilíbrio  $(0, 0)$  será:

1. estável, se cada ponto  $(x(t), y(t))$  numa vizinhança da origem permanece limitado quando  $t \rightarrow +\infty$ ;
2. assintoticamente estável se cada ponto  $(x(t), y(t)) \rightarrow (0, 0)$  quando  $t \rightarrow +\infty$ ;
3. instável se  $x \rightarrow +\infty$  ou  $y \rightarrow +\infty$  quando  $t \rightarrow +\infty$ .

Começemos por determinar o polinómio característico  $\det(A - \lambda I) = 0$  e de seguida calculemos os valores próprios da matriz  $A$ .

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = 0 &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -q & -p - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda p + q = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \vee \lambda_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \end{aligned}$$

Dependendo do sinal de  $\Delta = p^2 - 4q$  temos três situações possíveis: dois valores próprios reais distintos, dois valores próprios complexos ou um único valor próprio real. Analisaremos de seguida cada um dos casos.

### Valores próprios reais distintos

Se  $\Delta > 0$  obtemos valores próprios distintos  $\lambda_1, \lambda_2$  reais.

Sejam  $V_1$  e  $V_2$  os vetores próprios associados aos valores próprios  $\lambda_1, \lambda_2$ , respetivamente.

Tendo em conta o processo utilizado na diagonalização da matriz  $A$  usada na demonstração do teorema 9, definamos as matrizes  $P$  e  $D$  tais que:

$$P = [ V_1 \quad V_2 ] = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} \quad e \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}. \quad (2.60)$$

Sabemos que  $A = PDP^{-1}$  e

$$X'(t) = PDP^{-1}X(t). \quad (2.61)$$

Donde, multiplicando à esquerda por  $P^{-1}$ , ficamos com

$$P^{-1}X'(t) = P^{-1}PDP^{-1}X(t) \Leftrightarrow P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X(t). \quad (2.62)$$

Fazendo a mudança de variável tal que

$$Y(t) = P^{-1}X(t), \quad (2.63)$$

temos

$$Y'(t) = P^{-1}X'(t) \quad (2.64)$$

e substituindo em 2.62 chegamos a

$$Y'(t) = DY(t) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}. \quad (2.65)$$

A equação 2.65 pode ser escrita como um sistema de equações desacopladas

$$\begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) \\ y_2'(t) = \lambda_2 y_2(t) \end{cases} \quad (2.66)$$

e assim podemos resolver as equações individualmente.

Como temos valores próprios  $\lambda_1, \lambda_2$  reais, pelo teorema 6, resulta que

$$\begin{cases} y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases} \Leftrightarrow Y(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

e

$$X(t) = PY(t) \Leftrightarrow P \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}. \quad (2.68)$$

Donde, a solução do sistema pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

$$= c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}. \quad (2.70)$$

Temos a solução geral do sistema, com

$$X_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

e

$$X_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

linearmente independentes.

Assim a solução particular do PVI pode ser obtida atribuindo valores adequados às constantes  $c_1, c_2$ .

Dadas as condições iniciais  $x(0), y(0)$  e se  $t = 0$ , obtemos

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow c_1 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 c_1 + w_1 c_2 = x_0 \\ v_2 c_1 + w_2 c_2 = y_0. \end{cases} \quad (2.74)$$

Resumindo, sejam  $\lambda_1, \lambda_2$  dois valores próprios reais distintos da matriz  $A$  com vetores próprios associados  $V_1, V_2$ . Então, a solução geral

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

do sistema 2.54 é dada por

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} V_2, \quad (2.76)$$

ou seja,

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} w_1 \\ y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_2 + c_2 e^{\lambda_2 t} w_2. \end{cases} \quad (2.77)$$

Neste caso temos ainda três situações que podem ocorrer:

Se ambos os valores próprios são positivos, as soluções tornam-se arbitrariamente grandes quando  $t \rightarrow +\infty$  e convergem para a origem quando  $t \rightarrow -\infty$ . O ponto crítico neste caso é chamado de nó instável ou repulsor (fonte, ver figura 1.3).

Se os valores próprios forem ambos negativos, as soluções aproximam-se de zero quando  $t \rightarrow +\infty$ , assim um ponto crítico é chamado de nó estável ou atrator (escoadouro).

No caso de valores próprios com sinais opostos, o ponto crítico é instável e é designado por ponto de sela (figura 1.3). Existem duas direções no espaço de fase onde o sistema evolui ao longo de retas paralelas aos vetores próprios, uma afastando-se do ponto crítico e outra em que se aproxima.

**Valores próprios complexos**

Se  $\Delta < 0$  obtemos duas soluções complexas conjugadas  $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = \alpha + i\beta$ . As soluções do sistema associado a valores próprios complexos transformam-se em duas soluções reais, como podemos constatar com o próximo teorema.

**Teorema 11** *Seja  $X(t) = Y(t) + iZ(t)$  uma solução do sistema 2.54 associada a valores próprios complexos.*

*Então  $Y(t)$  e  $Z(t)$  são soluções reais de 2.54.*

**Demonstração:**

Se  $X(t) = Y(t) + iZ(t)$  é uma solução do sistema 2.54 associada a valores próprios complexos, então

$$Y'(t) + iZ'(t) = A[Y(t) + iZ(t)] = AY(t) + iAZ(t).$$

Donde,

$$Y'(t) = AY(t) \text{ e } Z'(t) = AZ(t).$$

Temos assim soluções reais pois,

$$Y(t) = \operatorname{Re}(X(t))$$

$$Z(t) = \operatorname{Im}(X(t)).$$

As funções complexas das soluções pode ser escritas como,

$$\begin{aligned} X(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}(a+ib) &= (a+ib)e^{\alpha t+i\beta t} \\ &= (a+ib)e^{\alpha t}[\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)] \\ &= e^{\alpha t} \{ [a\cos(\beta t) - b\sin(\beta t)] + i[a\sin(\beta t) + b\cos(\beta t)] \}. \end{aligned}$$

Temos ainda que

$$Y(t) = e^{\alpha t} [a\cos(\beta t) - b\sin(\beta t)]$$

e

$$Z(t) = e^{\alpha t} [a\sin(\beta t) + b\cos(\beta t)]$$

são soluções reais, linearmente independentes, de 2.10 ■

Sabemos, pelo teorema 8, que vetores próprios associados a valores próprios distintos são linearmente independentes, então pelo teorema 9, a matriz  $A$  é diagonalizável.

Definamos as matrizes  $P$  e  $D$  tais que

$$P = \begin{bmatrix} v_1 + iw_1 & v_1 - iw_1 \\ v_2 + iw_2 & v_2 - iw_2 \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

e

$$D = \begin{bmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

tais que  $A = PDP^{-1}$ .

Procedendo de modo análogo ao caso anterior, depois de efetuadas as devidas substituições e mudança de variável, obtemos

$$\begin{aligned} Y'(t) = DY(t) &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y_1'(t) = (\alpha + i\beta)y_1(t) \\ y_2'(t) = (\alpha - i\beta)y_2(t). \end{cases} \end{aligned}$$

Podemos resolver as equações individualmente, chegando a

$$\begin{cases} y_1(t) = c_1 e^{(\alpha+i\beta)t} \\ y_2(t) = c_2 e^{(\alpha-i\beta)t}. \end{cases} \quad (2.80)$$

Donde,

$$X(t) = PY(t) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} v_1 + iw_1 & v_1 - iw_1 \\ v_2 + iw_2 & v_2 - iw_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{(\alpha+i\beta)t} \\ c_2 e^{(\alpha-i\beta)t} \end{bmatrix}. \quad (2.81)$$

Então a solução do sistema pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{(\alpha+i\beta)t} \begin{bmatrix} v_1 + iw_1 \\ v_2 + iw_2 \end{bmatrix} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)t} \begin{bmatrix} v_1 - iw_1 \\ v_2 - iw_2 \end{bmatrix}. \quad (2.82)$$

Sabemos que a solução geral do sistema é da forma

$$X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t), \quad (2.83)$$

com

$$X_1(t) = e^{(\alpha+i\beta)t} \begin{bmatrix} v_1 + iw_1 \\ v_2 + iw_2 \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

e

$$X_2(t) = e^{(\alpha-i\beta)t} \begin{bmatrix} v_1 - iw_1 \\ v_2 - iw_2 \end{bmatrix}, \quad (2.85)$$

isto é,

$$\begin{aligned} X_1(t) &= e^{\alpha t} [\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)] \begin{bmatrix} v_1 + iw_1 \\ v_2 + iw_2 \end{bmatrix} \\ &= e^{\alpha t} \begin{bmatrix} [v_1 \cos(\beta t) - w_1 \sin(\beta t)] + i [v_1 \sin(\beta t) + w_1 \cos(\beta t)] \\ [v_2 \cos(\beta t) - w_2 \sin(\beta t)] + i [v_2 \sin(\beta t) + w_2 \cos(\beta t)] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} X_2(t) &= e^{\alpha t} [\cos(\beta t) - i \sin(\beta t)] \begin{bmatrix} v_1 - iw_1 \\ v_2 - iw_2 \end{bmatrix} \\ &= e^{\alpha t} \begin{bmatrix} [v_1 \cos(\beta t) - w_1 \sin(\beta t)] - i [v_1 \sin(\beta t) + w_1 \cos(\beta t)] \\ [v_2 \cos(\beta t) - w_2 \sin(\beta t)] - i [v_2 \sin(\beta t) + w_2 \cos(\beta t)] \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} X(t) &= \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) \\ &= (c_1 + c_2) e^{\alpha t} \begin{bmatrix} v_1 \cos(\beta t) - w_1 \sin(\beta t) \\ v_2 \cos(\beta t) - w_2 \sin(\beta t) \end{bmatrix} + \\ &\quad + i(c_1 - c_2) e^{\alpha t} \begin{bmatrix} v_1 \cos(\beta t) + w_1 \sin(\beta t) \\ v_2 \cos(\beta t) + w_1 \sin(\beta t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Provemos agora que a matriz  $P$  é a matriz dos vetores próprios  $V$  e  $W = \bar{V}$  associados aos respectivos valores próprios  $\lambda_1$  e  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ , em que

$$V = \begin{bmatrix} v_1 + iw_1 \\ v_2 + iw_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \lambda_1 = \alpha + i\beta. \quad (2.86)$$

As matrizes  $P$  e  $D$  foram definidas tais que  $A = PDP^{-1}$ , donde

$$A = PDP^{-1} \Leftrightarrow AP = PD \quad (2.87)$$

$$\Leftrightarrow [AV \quad AW] = [\lambda_1 V \quad \lambda_2 W] \quad (2.88)$$

e comparando coluna a coluna obtemos

$$AV = \lambda_1 V \quad \text{e} \quad AW = \lambda_2 W \quad (2.89)$$

ou seja, por 2.21,  $\lambda_1, \lambda_2$  são valores próprios com vetores próprios associados  $V$  e  $W$ , respetivamente.

Sejam valores próprios  $\lambda_1, \lambda_2$  complexos, tais que

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta \quad (2.90)$$

com vetores próprios associados

$$V_1 = (v_1 + iw_1, v_2 + iw_2), \quad V_2 = (v_1 - iw_1, v_2 - iw_2). \quad (2.91)$$

A solução geral do sistema 2.54 é dada por

$$\begin{cases} x(t) = e^{\alpha t} v_1 [c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)] + e^{\alpha t} w_1 [c_2 \cos(\beta t) - c_1 \sin(\beta t)] \\ y(t) = e^{\alpha t} v_2 [c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)] + e^{\alpha t} w_2 [c_2 \cos(\beta t) - c_1 \sin(\beta t)]. \end{cases} \quad (2.92)$$

Tendo em conta os valores próprios complexos podemos classificar o ponto de equilíbrio (figura 2.1). Se  $\alpha > 0$  todas as trajetórias são espirais que se afastam da origem quando  $t$  cresce. Neste caso o ponto de equilíbrio é chamado de ponto espiral instável ou foco instável. Se  $\alpha < 0$  as soluções aproximam-se da origem e o ponto de equilíbrio é designado de ponto espiral estável ou foco estável.

No caso de valores próprios imaginários puros, isto é,  $\alpha = 0$ , temos soluções periódicas e as trajetórias são elipses centradas na origem. O ponto de equilíbrio designa-se por centro.

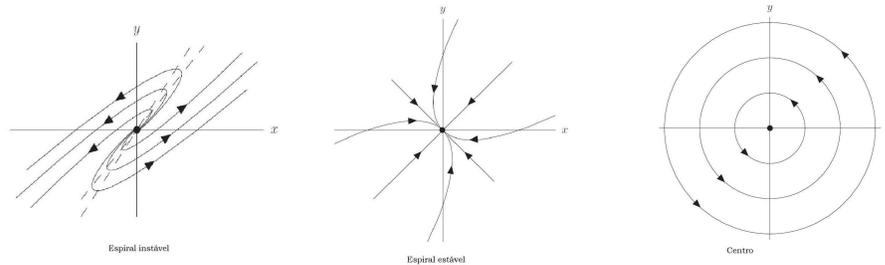


Figura 2.1: Classificação do ponto de equilíbrio no caso de valores próprios complexos.

### Uma única solução real

Se  $\Delta = 0$  o polinómio característico tem apenas uma raiz (de multiplicidade 2) e a matriz  $A$  pode não ter 2 vetores próprios linearmente independentes.

Da resolução do polinómio caraterístico obtemos  $\lambda = -\frac{p}{2}$  como valor próprio de multiplicidade 2. Se conseguirmos encontrar 2 vetores próprios linearmente independentes  $V_1, V_2$  correspondentes ao valor próprio  $\lambda$ , a solução geral do sistema será da forma

$$X(t) = V_1 c_1 e^{\lambda t} + V_2 c_2 e^{\lambda t}. \quad (2.93)$$

A trajetória está sobre uma reta que passa pela origem. No caso do valor próprio  $\lambda < 0$  as soluções convergem para a origem. Se  $\lambda > 0$  as soluções afastam-se da origem quando  $t$  cresce. No primeiro caso, a origem é designada por nodo próprio estável (figura 2.2). Quando  $\lambda > 0$  diz-se que a origem é um nodo próprio instável.

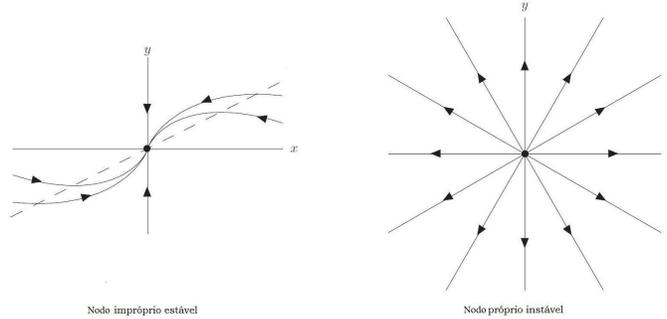


Figura 2.2: Classificação do ponto de equilíbrio no caso em que o valor próprio é real.

Se existir somente um vetor próprio associado ao valor próprio  $\lambda$ , teremos que procurar outras soluções.

Vimos que uma matriz pode ser diagonalizada se existir um conjunto de  $n$  vetores próprios linearmente independentes. No caso de existirem menos podemos transformar a matriz dos coeficientes  $A$  numa matriz quase diagonal, a chamada matriz de Jordan, que tem os valores próprios de  $A$  na diagonal, uns em determinadas posições acima da diagonal e zeros nos restantes posições. Consideremos novamente o sistema de equações diferenciais lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes 2.54.

Suponhamos que existem as matrizes  $2 \times 2$ ,

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} \quad e \quad J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

tais que

$$A = PJP^{-1}. \quad (2.95)$$

Donde,

$$X'(t) = PJP^{-1}X(t) \Leftrightarrow P^{-1}X'(t) = P^{-1}PJP^{-1}X(t) \quad (2.96)$$

$$\Leftrightarrow P^{-1}X'(t) = JP^{-1}X(t). \quad (2.97)$$

E fazendo mudança de variável  $Y(t) = P^{-1}X(t)$ , obtemos

$$Y'(t) = JY(t). \quad (2.98)$$

Escrevendo 2.98 na forma de sistema, vem que

$$\begin{cases} y_1'(t) = \lambda y_1(t) + y_2(t) \\ y_2'(t) = \lambda y_2(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1'(t) = \lambda y_1(t) + c_2 e^{\lambda t} \\ y_2(t) = c_2 e^{\lambda t}. \end{cases} \quad (2.99)$$

Para resolver a primeira equação precisamos de encontrar uma solução  $y_1$  que não seja um múltiplo de  $y_2$ .

Consideremos a solução  $y_2(t) = e^{-\frac{p}{2}t}$ , para  $c_2 = 1$ , podemos encontrar uma segunda solução linearmente independente  $y_1(t)$  tal que  $y_1(t) = u(t)e^{-\frac{p}{2}t}$ .

Procedendo de modo análogo ao método de redução de ordem usado na secção 2.2.1, vem que

$$u''(t)e^{-\frac{p}{2}t} = -u'(t) \left( -pe^{-\frac{p}{2}t} + pe^{-\frac{p}{2}t} \right) \Leftrightarrow \frac{u''(t)}{u'(t)} = 0 \quad (2.100)$$

e integrando ambos os membros,

$$\begin{aligned} \int \frac{u''(t)}{u'(t)} dt &= \int 0 dt \Leftrightarrow \ln(u'(t)) = k \\ &\Leftrightarrow u'(t) = e^k \\ &\Leftrightarrow u(t) = \int e^k dt \\ &\Leftrightarrow u(t) = te^k, \end{aligned}$$

onde fazendo  $k = 0$ , temos  $u(t) = t$ .

Logo podemos escrever a segunda solução  $y_1(t)$  da forma

$$y_1(t) = te^{\lambda t}. \quad (2.101)$$

Retomando o sistema 2.99, vem que

$$\begin{cases} y_1(t) = c_1te^{\lambda t} + c_2e^{\lambda t} \\ y_2(t) = c_2e^{\lambda t}. \end{cases} \quad (2.102)$$

E a solução do sistema 2.54 é

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1e^{\lambda t} + c_2te^{\lambda t} \\ c_2e^{\lambda t} \end{bmatrix} \\ &= (c_1e^{\lambda t} + c_2te^{\lambda t}) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + c_2e^{\lambda t} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = (c_1e^{\lambda t} + c_2te^{\lambda t})v_1 + c_2e^{\lambda t}w_1 \\ y(t) = (c_1e^{\lambda t} + c_2te^{\lambda t})v_2 + c_2e^{\lambda t}w_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = (c_1 + c_2t)e^{\lambda t}v_1 + c_2e^{\lambda t}w_1 \\ y(t) = (c_1 + c_2t)e^{\lambda t}v_2 + c_2e^{\lambda t}w_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Falta ver como determinar os elementos da matriz  $P$ . Comecemos por supor que existem as matrizes  $P$  e  $J$  definidas em 2.94 e tais que  $A = PJP^{-1}$ . Multiplicando à direita por  $P$  ambos os membros da equação  $A = PJP^{-1}$  obtemos  $AP = PJ$ .

Defina-se

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad e \quad W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}. \quad (2.103)$$

Então

$$AP = A [ V \quad W ] = [ AV \quad AW ] \quad (2.104)$$

e

$$PJ = [ \lambda V \quad V + \lambda W ]. \quad (2.105)$$

Donde,

$$AP = PJ \quad (2.106)$$

$$[ AV \quad AW ] = [ \lambda V \quad V + \lambda W ] \quad (2.107)$$

e comparando coluna a coluna chegamos a

$$AV = \lambda V \Leftrightarrow (A - \lambda I)V = 0 \quad (2.108)$$

e

$$AW = V + \lambda W \Leftrightarrow (A - \lambda I)W = V, \quad (2.109)$$

ou seja, a primeira dá-nos, por definição, o vetor próprio  $V$  associada ao valor próprio  $\lambda$  e na segunda equação temos que  $W$  é solução do sistema  $(A - \lambda I)W = V$ , o que depois de determinado o vetor  $V$ , permite calcular o vetor  $W$ .

Resumindo, se  $\lambda$  for o único valor próprio real da matriz de coeficientes  $A$  e  $V$  e  $W$ , vetores próprios, então a solução geral do sistema 2.54 é dada por

$$X(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t} V + c_2 e^{\lambda t} W. \quad (2.110)$$

Se  $\lambda < 0$  e  $t \rightarrow +\infty$  as trajetórias tendem para a origem, sendo o ponto crítico um nó estável impróprio. No caso de  $\lambda > 0$  a trajetória é uma assíntota do vetor próprio e o ponto crítico chamado de nó instável impróprio (figura 2.2).

## Capítulo 3

# Movimento Harmónico

O movimento efetuado por uma partícula de massa  $m$  sujeita a uma força que é proporcional ao deslocamento da partícula, mas com sinal oposto, é chamado de movimento harmónico simples.

Um corpo efetua um movimento harmónico simples quando oscila periodicamente em torno da posição de equilíbrio sob a ação de uma força restauradora. Os sistemas massa-mola com um corpo de massa  $m$  e constante da mola  $k$ , formam um oscilador harmónico linear simples, com frequência angular

$$w = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (3.1)$$

Uma propriedade importante do movimento oscilatório é a sua frequência  $f$ , isto é, o número de oscilações completas em cada segundo, cuja unidade de medida é o hertz -  $Hz$  ( $1hz =$  oscilação por segundo). O período  $T$  do movimento é o inverso da frequência.

O movimento de uma partícula é dada, como iremos ver adiante, como uma função do tempo por

$$x(t) = A \cos(\omega t - \phi) \quad (3.2)$$

onde  $A$ ,  $\phi$  e  $w$  são constantes.

O valor de  $A$  depende de como o movimento foi iniciado e chamamos amplitude do movimento, esta amplitude é a magnitude do deslocamento máximo da partícula em qualquer direção. Num movimento harmónico simples, a frequência e o período são independentes da amplitude.

A quantidade que varia com o tempo ( $\omega t - \phi$ ) é a fase do movimento e a constante  $\phi$  é a fase inicial ou ângulo de fase. O seu valor depende do deslocamento e da velocidade da partícula em  $t = 0$ .

O deslocamento  $x(t)$  volta ao seu valor inicial depois de um período  $T$  do movimento. Ou seja,

$$x(t) = x(t + T) \Leftrightarrow A \cos(\omega t) = A \cos[\omega(t + T)]. \quad (3.3)$$

Donde, para  $k$  inteiro,

$$\begin{aligned} \omega(t + T) &= \omega t + 2k\pi \\ \Leftrightarrow \omega T &= 2k\pi \\ \Leftrightarrow \omega &= \frac{2\pi}{T} = 2k\pi f. \end{aligned}$$

A quantidade

$$\omega = 2\pi f \quad (3.4)$$

é chamada frequência angular fundamental do movimento e a sua unidade de medida é o radiano por segundo.

### 3.1 Oscilador harmónico

Veamos um exemplo de movimento oscilatório periódico em que temos um corpo de massa  $m$  preso a uma mola de massa desprezível.

A mola exerce uma força restauradora proporcional e oposta ao deslocamento  $x(t)$ ,  $F = -kx$ . A equação de movimento oscilatório sem amortecimento é dada por

$$mx'' + \frac{k}{m}x = 0. \quad (3.5)$$

Alem disso, pode existir uma força de atrito proporcional à velocidade  $x'(t)$  na direção oposta ao movimento. Os parâmetros a ter em conta são; a massa  $m$  do oscilador, a constante de amortecimento  $b$  e a constante  $k$  da mola. Nestes casos dizemos que o movimento oscilatório é amortecido e a equação do movimento é da forma

$$mx'' + bx' + \frac{k}{m}x = 0. \quad (3.6)$$

No movimento harmónico simples, quando o sistema massa-mola é retirado do ponto de equilíbrio, a mola é deformada, age sobre o corpo de massa  $m$ , distendendo ou comprimindo, conforme a deformação.

De um modo mais geral, o sistema de massa mola pode ser submetido a uma força externa, dependente do tempo mas não da posição, tendo um sistema do oscilador harmónico forçado e com amortecimento

$$mx'' + bx' + kx = f(t). \quad (3.7)$$

### 3.1.1 Oscilador harmónico

As oscilações são descritas pelo deslocamento do corpo em relação à posição de equilíbrio  $x_0$ , que neste caso consideramos ser  $x_0 = 0$ .

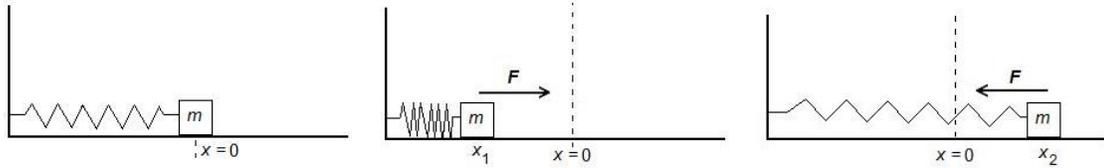


Figura 3.1: Exemplo de oscilador harmónico massa-mola

Quando o corpo está deslocado da posição de equilíbrio está sobre o efeito de uma força restauradora

$$F = -kx \quad (3.8)$$

conhecida por lei de Hooke para uma mola, com constante elástica  $k = mw^2$ . Usando a segunda lei de Newton obtemos a equação do movimento para um corpo de massa  $m$ , tal que

$$mx'' = -kx \Leftrightarrow x'' = -\frac{k}{m}x \Leftrightarrow x'' = -w^2x. \quad (3.9)$$

Esta equação é uma EDO linear de segunda ordem com coeficientes constantes.

Aplicando o processo de resolução de EDO lineares de segunda ordem com coeficientes constantes estudado na secção 2.2.2, comecemos por escrever a equação 3.9 na forma de sistema

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = x'' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = v \\ v' = -w^2x \end{cases} \quad (3.10)$$

e matricialmente,

$$\begin{bmatrix} x' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

O passo seguinte passa por determinar os valores próprios da matriz de coeficientes

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \det(C - \lambda I) = 0 &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -w^2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 + w^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda_1 = iw \vee \lambda_2 = -iw. \end{aligned}$$

Obtemos valores próprios imaginários conjugados, associados aos vetores próprios,  $V$  e  $Z$ , tais que

$$\begin{aligned} [C - \lambda I]V = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda v_1 + v_2 = 0 \\ -w^2 v_1 - \lambda v_2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} v_2 = \lambda v_1 \\ -w^2 v_1 - \lambda v_2 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Donde, os vetores próprios são da forma  $(v_1, \lambda_1 v_1)$  e  $(z_1, \lambda_2 z_1)$ .

Fazendo  $v_1 = 1, z_1 = 1$ ,

$$V = (1, -iw), \quad Z = (1, iw) \quad (3.13)$$

temos dois vetores próprios associados aos valores próprios  $\lambda_1 = -iw$  e  $\lambda_2 = iw$ , respetivamente.

Então, por 2.92, a solução geral do sistema é dada por

$$\begin{cases} x(t) = c_1 \cos(wt) + c_2 \sin(wt) \\ v(t) = w [c_2 \cos(wt) - c_1 \sin(wt)]. \end{cases} \quad (3.14)$$

Impondo as condições iniciais  $x(0) = x_0$  e  $v(0) = v_0$ , obtemos

$$\begin{cases} x(0) = c_1 \cos(0) = c_1 \\ v(0) = wc_2 \cos(0) = wc_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = c_1 \\ \frac{v_0}{w} = c_2. \end{cases} \quad (3.15)$$

Substituindo os valores de  $c_1$  e  $c_2$  na equação  $x(t)$  do sistema 3.14 temos

$$x(t) = x_0 \cos(wt) + \frac{v_0}{w} \sin(wt). \quad (3.16)$$

O gráfico da figura 3.2 apresenta um exemplo do comportamento da solução  $x(t)$  quando temos posição inicial  $x_0 = 0$  e velocidade inicial  $v_0 \neq 0$ .

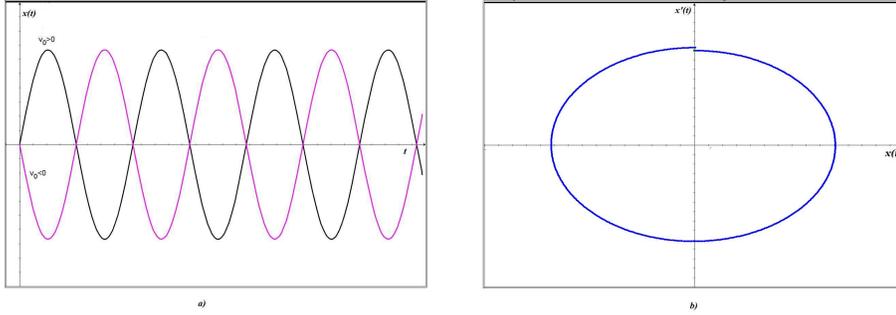


Figura 3.2: a) Representação gráfica do deslocamento de um oscilador harmónico com  $v_0 < 0$  e  $v_0 > 0$ . b) Retrato de fase de um oscilador harmónico.

O retrato de fase representado na figura 3.2 é um exemplo de uma trajetória de aproximação da solução em que o ponto de equilíbrio é classificado de centro.

Vejamos como escrever a equação 3.14 na forma da expressão 3.2, determinando a amplitude  $A$ , isto é, deslocamento máximo do corpo de massa  $m$  a partir da posição de equilíbrio.

Tendo em conta as constantes determinadas em 3.15, podemos escrever

$$A^2 = x_0^2 + \left(\frac{v_0}{w}\right)^2 \Leftrightarrow A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{w}\right)^2} \quad (3.17)$$

e  $\phi \in [0, 2\pi]$ , ângulo de fase que caracteriza as condições iniciais, tal que

$$\begin{cases} \cos \phi = \frac{c_1}{A} = \frac{x_0}{A} \\ \sin \phi = \frac{c_2}{A} = \frac{v_0}{wA}. \end{cases} \quad (3.18)$$

Substituindo no sistema 3.14, obtemos

$$x(t) = A \cos(wt) \cos \phi + A \sin(wt) \sin \phi \quad (3.19)$$

$$= A \cos(wt - \phi) \quad (3.20)$$

e

$$v(t) = -w[A \sin(wt) \cos \phi - A \cos(wt) \sin \phi] \quad (3.21)$$

$$= -Aw \sin(wt - \phi). \quad (3.22)$$

Estas equações descrevem o movimento oscilatório em torno da posição de equilíbrio  $x_0 = 0$  e  $v_0 = 0$  de amplitude  $A$  e de período  $T$  das oscilações. O período

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.23)$$

das oscilações é independente da amplitude e ângulo de fase  $\phi$ . O período  $T$  aumenta quando aumenta a massa  $m$ , de modo que corpos de massa maiores oscilam mais devagar, por outro lado,  $T$  diminui quando aumenta a constante  $k$  da mola, o que significa que molas mais duras fazem com que o sistema oscile mais rapidamente.

Resumindo, a solução geral da equação do oscilador 3.9 sujeito às condições iniciais pode ser escrita com deslocamento  $x(t)$  e velocidade  $v(t)$  tal que

$$\begin{cases} x(t) = A \cos(\omega t - \phi) \\ v(t) = -A\omega \sin(\omega t - \phi) \end{cases} \quad (3.24)$$

com amplitude  $A$  e ângulo de fase  $\phi$ .

### Energia do oscilador harmónico

Quando um corpo oscila com movimento harmónico simples, a energia potencial e energia cinética variam com o tempo e a sua energia total é constante. A energia cinética  $E_c$  do sistema está associada à massa da mola, dependendo da rapidez com que o bloco se move e é dada por

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) \\ &= \frac{1}{2}m(-A\omega \sin(\omega t - \phi))^2 \\ &= \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t - \phi) \\ &= \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t - \phi) \\ &= \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t - \phi). \end{aligned}$$

A energia potencial  $E_p$  de um oscilador com movimento harmónico simples é associada inteiramente à mola e o seu valor depende da distensão ou compressão da mola.

$$E_p(t) = - \int_0^x -ktdt = \frac{1}{2}kx^2 - E_p(0), \quad (3.25)$$

considerando  $E_p(0) = 0$  obtemos

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2}kx^2(t) \\ &= \frac{1}{2}kx^2(t) \\ &= \frac{1}{2}k(A \cos(\omega t - \phi))^2 \\ &= \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t - \phi). \end{aligned}$$

A energia mecânica total  $E_T$  associado a um movimento qualquer é a soma da energia potencial  $E_p$  e energia cinética  $E_c$ . Durante o movimento, a  $E_p$  transforma-se em  $E_c$  e vice-versa, mas a  $E_T$  permanece constante.

A energia total é dada pela fórmula

$$\begin{aligned} E &= E_c + E_p \\ &= \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t - \phi) + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t - \phi) \\ &= \frac{1}{2}kA^2 [\sin^2(\omega t - \phi) + \cos^2(\omega t - \phi)] \\ &= \frac{k}{2}A^2. \end{aligned}$$

sendo o sistema conservativo pois a energia total é um valor constante, dependente da amplitude e da constante da mola.

A energia total do movimento harmónico simples é proporcional ao quadrado da amplitude.

### 3.1.2 Pêndulo simples

Consideremos um pêndulo de comprimento  $l$ , sendo o arco descrito  $s = l\theta$ . A aceleração é dada pela segunda derivada da função em ordem ao tempo, isto é,

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = l \frac{d^2\theta}{dt^2} = l\theta''. \quad (3.26)$$

A massa  $m$  é livre de oscilar para a direita e para a esquerda e pela segunda lei de Newton, temos

$$F = ma = ml\theta''. \quad (3.27)$$

As forças que atuam no pêndulo são força de tensão

$$T = -mg \cos \theta \quad (3.28)$$

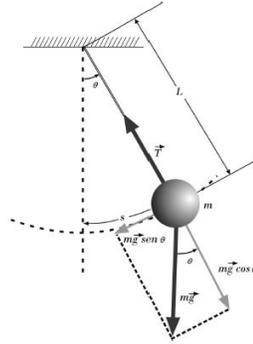


Figura 3.3: Exemplo de um pêndulo simples de comprimento  $L$  e massa  $m$

e peso

$$mg = mg \cos \theta - mg \sin \theta. \quad (3.29)$$

Substituindo em 3.27 obtemos,

$$\begin{aligned} mg + T = ml\theta'' &\Leftrightarrow mg \cos \theta - mg \sin \theta - mg \cos \theta = ml\theta'' \\ &\Leftrightarrow -mg \sin \theta = ml\theta'' \\ &\Leftrightarrow -g \sin \theta = l\theta'' \\ &\Leftrightarrow -\frac{g}{l} \sin \theta = \theta''. \end{aligned}$$

O movimento do pêndulo é definido pela equação

$$\theta'' = -\frac{g}{l} \sin \theta, \quad (3.30)$$

com força restauradora proporcional a  $\sin \theta$ .

O desenvolvimento da função seno é dado por

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \quad (3.31)$$

e para deslocamentos de  $\theta$  suficientemente pequenos temos  $\sin \theta \approx \theta$ , o que nos leva à equação do pêndulo linearizada

$$\theta'' = -\frac{g}{l} \theta. \quad (3.32)$$

Fazendo  $w = \sqrt{\frac{g}{l}}$  temos uma equação diferencial de segunda ordem equivalente à que vimos em 3.9, para o oscilador harmónico,

$$\theta'' + w^2 \theta = 0 \quad (3.33)$$

e que podemos escrever na forma

$$\begin{cases} \theta' = v \\ v' = -w^2\theta. \end{cases} \quad (3.34)$$

Aplicando o mesmo processo do oscilador sem amortecimento, obtemos como solução geral do sistema

$$\begin{cases} \theta(t) = A \cos(\omega t - \phi) \\ v(t) = -A\omega \sin(\omega t - \phi) \end{cases} \quad (3.35)$$

com período de oscilação  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$  e  $A$  amplitude angular, isto é, ângulo máximo de oscilação.

O período do pêndulo em pequenas oscilações é independente da amplitude da oscilação, dependendo apenas do comprimento do pêndulo  $l$  e da aceleração da gravidade, característica do movimento harmónico simples. Temos que quanto maior for o comprimento  $l$  do pêndulo, maior é o período  $T$  da oscilação.

### 3.1.3 Oscilador harmónico com amortecimento

As oscilações harmónicas simples que vimos ocorrem em sistemas conservativos. Na prática existe sempre dissipação da energia. Sempre que um sistema físico é posto a oscilar livremente, as oscilações decaem com o tempo até desaparecerem por completo.

No caso de um pêndulo as oscilações são amortecidas devido principalmente à resistência do ar. As oscilações de um sistema massa-mola colocado num meio aquático são amortecidas pela resistência da água.

A força de amortecimento, com  $b$  constante de amortecimento, é dada por  $F_a = -bv$ , é proporcional à velocidade e opõe-se ao movimento.

A equação diferencial homogénea para o oscilador amortecido com constante de amortecimento  $b$  e constante da mola  $k$  é da forma

$$mx'' + bx' + kx = 0 \Leftrightarrow x'' + \frac{b}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0. \quad (3.36)$$

Fazendo  $w^2 = \frac{k}{m}$  e  $\gamma = \frac{b}{m}$ , a equação 3.36 toma a forma

$$x'' + \gamma x' + w^2 x = 0. \quad (3.37)$$

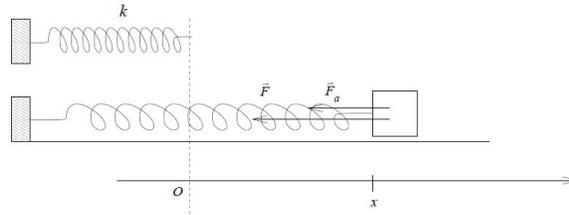


Figura 3.4: Exemplo de um oscilador amortecido.

A constante  $\gamma$  caracteriza o amortecimento. Quando é nula, não há amortecimento e o corpo oscila com frequência angular  $w$ .

A equação 3.37 é uma equação diferencial de segunda ordem linear de coeficientes constantes  $\gamma$  e  $w^2$  e o processo de resolução foi estudado na secção 2.2.2.

Começemos por transformar a equação 3.37 num sistema de equações diferenciais de primeira ordem, tal que

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = -\gamma v - w^2 x \end{cases} \quad (3.38)$$

e obtemos como equação característica

$$\lambda^2 + \lambda\gamma + w^2 = 0 \quad (3.39)$$

cujas soluções são

$$\lambda_1 = \frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4w^2}}{2} \vee \lambda_2 = \frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4w^2}}{2} \quad (3.40)$$

A equação da solução geral do sistema depende do sinal de  $\gamma^2 - 4w^2$ .

### Amortecimento forte

No caso de  $\gamma^2 > 4w^2$  temos soluções do polinómio característico reais e a solução geral do sistema 3.38 é dada

$$\begin{cases} x(t) = c_1 v_1 e^{\frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4w^2}}{2} t} + c_2 w_1 e^{\frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4w^2}}{2} t} \\ v(t) = c_1 v_2 e^{\frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4w^2}}{2} t} + c_2 w_2 e^{\frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4w^2}}{2} t} \end{cases} \quad (3.41)$$

Os vetores próprios associados aos valores próprios  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são da forma  $V = (1, \lambda_1)$  e  $W = (1, \lambda_2)$ , respetivamente.

Simplificando as equações do sistema 3.41 obtemos a solução geral dada por

$$\begin{cases} x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left( Ae^{-\frac{\sqrt{\gamma^2-4w^2}}{2}t} + Be^{\frac{\sqrt{\gamma^2-4w^2}}{2}t} \right) \\ v(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left( Ce^{-\frac{\sqrt{\gamma^2-4w^2}}{2}t} + De^{\frac{\sqrt{\gamma^2-4w^2}}{2}t} \right) \end{cases} \quad (3.42)$$

com constantes  $A = c_1$ ,  $B = c_2$ ,  $C = c_1\lambda_1$  e  $D = c_2\lambda_2$  determinadas pelas condições iniciais.

Todas as soluções tendem exponencialmente para zero, devido ao atrito, sem oscilações.

Neste caso dizemos que o movimento é fortemente amortecido, dado que o coeficiente  $b$  é grande quando comparado com a constante da mola  $k$ . Nesta situação o oscilador retoma a posição de equilíbrio lentamente devido ao amortecimento forte e quanto menor for o valor do coeficiente  $b$ , mais rápido se atinge a posição de equilíbrio.

No caso de  $v_0 > 0$  a mola é distendida até determinado ponto e vai regressando à sua posição natural, com a passagem do tempo. Ao comprimir a mola ( $v_0 < 0$ ) estamos a empurrar o corpo para uma posição inferior à de equilíbrio.

Consideremos agora o caso em que esticamos a mola até uma posição  $x_0$ , isto é,  $x(0) = x_0$  e aplicamos uma velocidade inicial  $v_0$ .

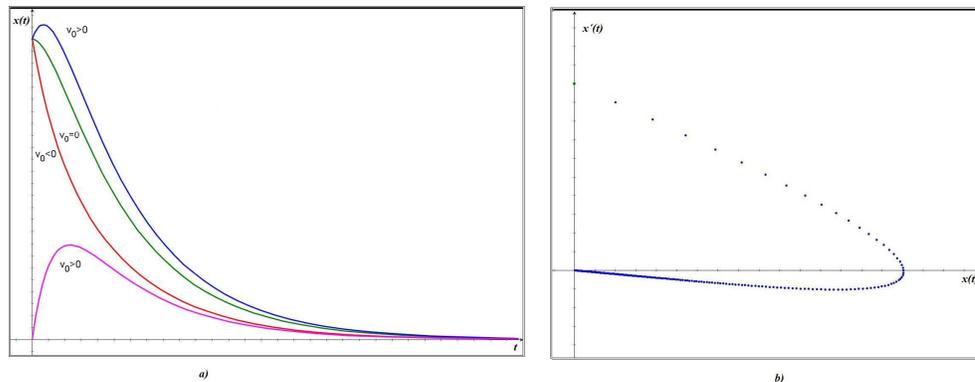


Figura 3.5: a) Representação gráfica do comportamento da solução de um oscilador com amortecimento forte para diversas condições iniciais. b) Retrato de fase de um oscilador com amortecimento forte.

Observando a representação gráfica da figura 3.5 ficamos com uma ideia de como se comporta a solução  $x(t)$  quando é aplicada uma determinada velocidade inicial  $v(0) = v_0$ .

No caso em que a velocidade inicial é nula, a posição do corpo diminui monotonamente em direção à zero. No caso de velocidade inicial positiva a mola é distendida, atingindo um máximo começando a diminuir até atingir a sua posição natural. No caso da velocidade inicial ser negativa, a mola é comprimida, empurrando a massa  $m$  e o movimento vai decaindo monotonamente até à sua posição inicial.

Na figura 3.5 podemos observar um retrato de fase de um oscilador fortemente amortecido e em que ambos os valores próprios são negativos, ou seja, o ponto de equilíbrio é um nó estável.

### Amortecimento crítico

No caso de  $\gamma^2 = 4w^2$ , temos uma única solução real.

A solução  $\lambda = -\frac{\gamma}{2}$  da equação característica 3.39 tem como vetor próprio associado  $V = (1, \lambda)$ . A equação 2.109 permite determinar um vetor próprio  $W = (w_1, w_2)$ , conhecido o vetor  $V$ .

Assim temos,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -w^2 & -\gamma - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda w_1 + w_2 = 1 \\ -w^2 w_1 - (\gamma + \lambda) w_2 = \lambda \end{cases} \\ &\Leftrightarrow w_2 = 1 + \lambda w_1. \end{aligned}$$

e encontramos um segundo vetor próprio  $W = (1, 1 + \lambda)$ .

Estamos em condições de escrever a solução geral do sistema 3.38

$$\begin{cases} x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\frac{\gamma}{2}t} + c_2 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \\ v(t) = \lambda (c_1 + c_2 t) e^{-\frac{\gamma}{2}t} + (1 + \lambda) c_2 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} (A + Bt) \\ v(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} (C + Dt) \end{cases} \quad (3.43)$$

com constantes  $A = c_1 + c_2$ ,  $B = c_2$ ,  $C = (c_1 + c_2)\lambda + c_2$  e  $D = c_2\lambda$  determinadas pelas condições iniciais.

Neste caso o movimento atinge o equilíbrio mais rapidamente e o movimento do oscilador é designado por amortecimento crítico. O sistema volta à posição de equilíbrio sem oscilar e a massa pode passar pela posição de equilíbrio no máximo uma vez.

As representações gráficas da figura 3.6 são exemplos do comportamento da solução  $x(t)$  para diferentes condições iniciais.

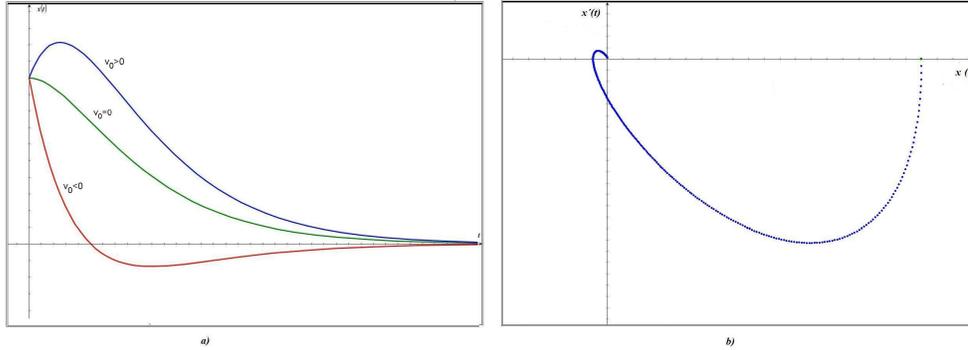


Figura 3.6: a) Representação gráfica do comportamento da solução do oscilador com amortecimento crítico para diversas condições iniciais. b) Retrato de fase do oscilador com amortecimento crítico.

No caso do movimento ser fortemente amortecido ou na situação em que temos um amortecimento crítico, a solução  $x(t)$  tende a atingir a posição natural de equilíbrio com a passagem do tempo, independentemente das constantes  $A$  e  $B$ .

Na figura 3.6 b) observa-se um exemplo de um retrato de fase da trajetória da solução do oscilador quando temos como solução da equação característica um valor próprio negativo. O ponto de equilíbrio é classificado de nodo estável.

### Amortecimento fraco

No caso de  $\gamma^2 < 4w^2$  o coeficiente de amortecimento  $b$  é pequeno em relação à constante da mola e dizemos que o sistema tem amortecimento fraco.

As soluções da equação característica 3.39 são números complexos da forma

$$\lambda_1 = \frac{-\gamma - i\sqrt{-\gamma^2 + 4w^2}}{2} \quad \vee \quad \bar{\lambda}_1 = \frac{-\gamma + i\sqrt{-\gamma^2 + 4w^2}}{2}. \quad (3.44)$$

Temos vetores próprios associados aos valores próprios  $\lambda_1$  e  $\bar{\lambda}_1$  da forma  $V = (1, \lambda_1)$  e  $W = (1, \bar{\lambda}_1)$ , respetivamente.

Por 2.92 sabemos que a solução geral do sistema 3.38 é dada por

$$\begin{cases} x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left[ c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{-\gamma^2 + 4w^2}}{2}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{-\gamma^2 + 4w^2}}{2}t\right) \right] \\ v(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left[ c_3 \cos\left(\frac{\sqrt{-\gamma^2 + 4w^2}}{2}t\right) + c_4 \sin\left(\frac{\sqrt{-\gamma^2 + 4w^2}}{2}t\right) \right] \end{cases} \quad (3.45)$$

com  $c_1, c_2, c_3 = -\frac{\gamma}{2}c_1 + \frac{\sqrt{-\gamma^2 + 4w^2}}{2}c_2$  e  $c_4 = -\frac{\gamma}{2}c_2 - \frac{\sqrt{-\gamma^2 + 4w^2}}{2}c_1$  constantes determinadas com as condições iniciais.

Na representação gráfica da figura 3.7 a) observamos o comportamento da solução  $x(t)$  quando temos posição inicial  $x_k$  e velocidade inicial negativa e nula e o caso em que a posição inicial é a de equilíbrio com velocidade inicial negativa.

O retrato de fase da figura 3.7 b) representa a situação em temos um ponto de equilíbrio estável, com trajetória da solução em espiral.

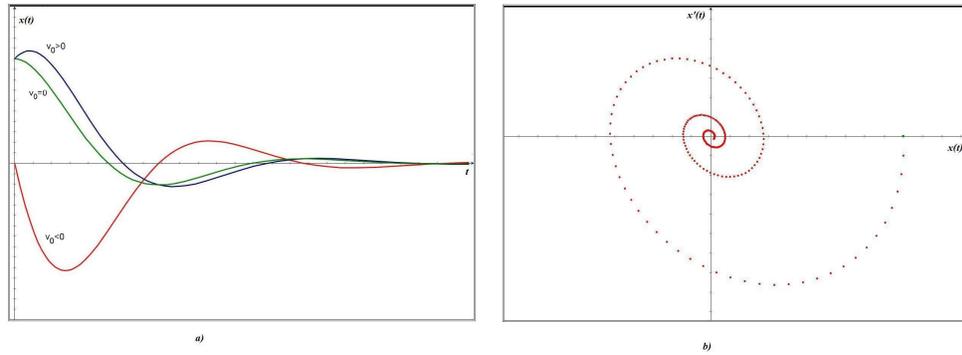


Figura 3.7: a) Representação gráfica do comportamento da solução de um oscilador com amortecimento fraco para diversas condições iniciais. b) Retrato de fase de um oscilador com amortecimento fraco.

A curva referente à solução oscila indefinidamente com amplitude cada vez menor em torno do ponto de equilíbrio. Estamos perante um movimento oscilatório, portanto podemos escrever a uma solução da forma da equação 3.2.

Definamos as condições iniciais  $x(0) = x_0$  e  $v(0) = v_0$ , donde

$$\begin{cases} x_0 = c_1 \\ v_0 = c_3 = -\frac{\gamma}{2}x_0 + \frac{\sqrt{-\gamma^2 + 4w^2}}{2}c_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = c_1 \\ c_2 = \frac{2v_0 + \gamma x_0}{\sqrt{-\gamma^2 + 4w^2}} \end{cases} \quad (3.46)$$

De 3.18 vem que

$$c_1 = A \cos \phi \quad e \quad c_2 = A \sin \phi \quad (3.47)$$

com

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{2v_0 + \gamma x_0}{\sqrt{-\gamma^2 + 4w^2}}\right)^2} \quad (3.48)$$

Substituindo no sistema da solução geral 3.45, obtemos

$$\begin{cases} x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left[ A \cos\left(\frac{\sqrt{-\gamma^2 + 4w^2}}{2}t\right) \cos \phi + A \sin\left(\frac{\sqrt{-\gamma^2 + 4w^2}}{2}t\right) \sin \phi \right] \\ v(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left( -A\frac{\gamma}{2} \cos \phi + A \sin \phi \frac{\sqrt{-\gamma^2 + 4w^2}}{2} \right) \cos\left(\frac{\sqrt{-\gamma^2 + 4w^2}}{2}t\right) - \\ e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left( A\frac{\gamma}{2} \sin \phi + A \cos \phi \frac{\sqrt{-\gamma^2 + 4w^2}}{2} \right) \sin\left(\frac{\sqrt{-\gamma^2 + 4w^2}}{2}t\right) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{-\gamma^2 + 4w^2}}{2}t - \phi\right) \\ v(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t} \left[ -\frac{\gamma}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{-\gamma^2 + 4w^2}}{2}t - \phi\right) + \frac{\sqrt{-\gamma^2 + 4w^2}}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{-\gamma^2 + 4w^2}}{2}t - \phi\right) \right]. \end{cases}$$

O sistema oscila com uma amplitude  $A$  que vai diminuindo, devido ao fraco amortecimento, ao longo do tempo.

A figura 3.8 resume o comportamento dos três casos de amortecimento com posição inicial  $x_0 = 0$  e velocidade inicial  $v_0 > 0$ .

O único movimento oscilatório é o caso do movimento com amortecimento fraco. Nos outros dois casos temos uma diminuição sem oscilações em direção à posição de equilíbrio.

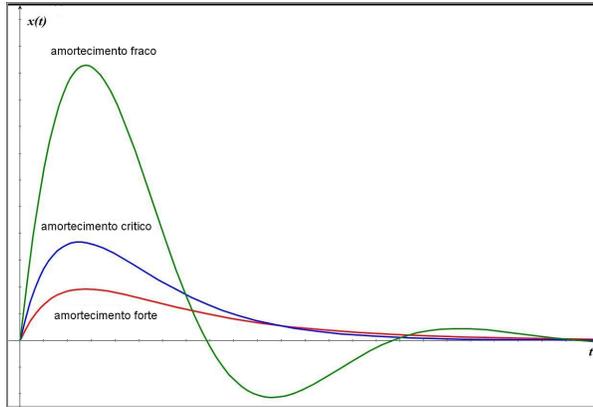


Figura 3.8: Representação gráfica dos diferentes tipos de amortecimento.

### Energia do oscilador harmónico amortecido

Nas oscilações amortecidas a força de amortecimento não é conservativa, a energia total vai se dissipando com a passagem do tempo.

Calculando a derivada da energia total, vem que

$$\begin{aligned}
 E'_t &= \left( \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right)' \\
 &= mvv' + kxx' \\
 &= mv \left( -\frac{b}{m}x' - \frac{k}{m}x \right) + kxx' \\
 &= -vbx' + kxv - kxv \\
 &= -v^2b.
 \end{aligned}$$

A taxa de perda de energia é proporcional ao quadrado da velocidade do corpo de massa  $m$ , ou seja, a diminuição da energia não é uniforme.

## 3.2 Osciladores acoplados

Geralmente os osciladores não existem isolados, eles interagem e fazem parte de um sistema que contém múltiplos osciladores.

Cada oscilador é caracterizado por uma equação de movimento que não é independente das equações dos outros osciladores. O objetivo é combinar as equações de movimento e construir novas coordenadas, designadas de coordenadas normais, que sejam combinações lineares das originais e que satisfaçam

EDO desacopladas. Associado a cada uma das coordenadas normais existe um modo de vibração, independente, designado de modo normal de vibração. Um sistema constituído por  $n$  osciladores acoplados é descrito por  $n$  EDO e terá  $n$  modos normais. Bernoulli chegou à conclusão que a oscilação do sistema por ser descrito como a sobreposição dos seus modos próprios, dado que as coordenadas originais de cada oscilador se podem escrever como uma combinação linear das coordenadas normais e descrevem movimentos com frequência bem definida.

### Dois osciladores acoplados

Comecemos por analisar o caso em que temos dois osciladores acoplados sem amortecimento e movimento apenas longitudinal.

Consideremos dois corpos de massas iguais  $m$  ligados entre si por uma mola de constante  $k$ , como mostra a figura 3.9.

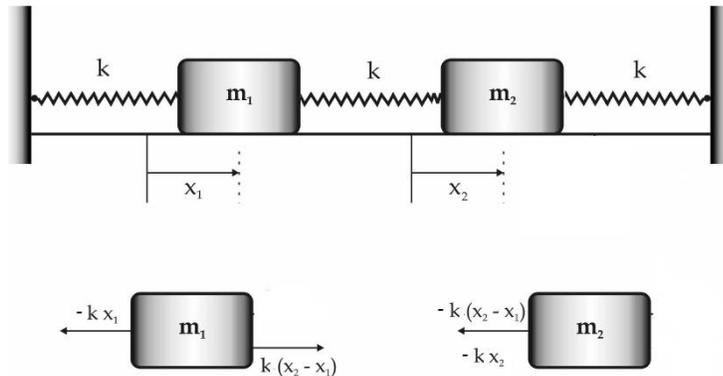


Figura 3.9: Exemplo de dois osciladores acoplados

O sistema é descrito por duas equações diferenciais acopladas, uma para cada massa e cada uma das massas está ligada a duas molas.

Relembrando o estudo feito no caso do oscilador harmónico sem amortecimento podemos escrever as equações de movimento para cada massa.

As forças que atuam no sistemas são

$$\begin{aligned} F_1 &= -kx_1 \\ F_2 &= -kx_2 \\ F_3 &= -k(x_1 - x_2) \end{aligned} \quad (3.49)$$

e pela segunda lei de Newton podemos escrever

$$\begin{cases} mx_1'' = -kx_1 + k(x_2 - x_1) \\ mx_2'' = -k(x_2 - x_1) - kx_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1'' = -\frac{2k}{m}x_1 + \frac{k}{m}x_2 \\ x_2'' = \frac{k}{m}x_1 - 2\frac{k}{m}x_2. \end{cases} \quad (3.50)$$

De 3.1 podemos escrever  $w^2 = \frac{k}{m}$  e temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} x_1'' = -2w^2x_1 + w^2x_2 \\ x_2'' = w^2x_1 - 2w^2x_2 \end{cases} \quad (3.51)$$

com duas equações diferenciais acopladas.

Escrevendo na forma de sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\begin{cases} x_1' = v_1 \\ v_1' = -2w^2x_1 + w^2x_2 \\ x_2' = v_2 \\ v_2' = w^2x_1 - 2w^2x_2 \end{cases} \quad (3.52)$$

obtemos quatro EDO lineares de primeira ordem com coeficientes constantes, desacopladas umas das outras.

Procedendo de modo análogo ao visto na secção 2.1, temos  $C$  matriz dos coeficientes do sistema

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2w^2 & 0 & w^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ w^2 & 0 & -2w^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

e pelo teorema 7 obtemos a equação característica e valores próprios da matriz  $C$ .

$$\begin{aligned} \det(C - \lambda I) = 0 &\Leftrightarrow \lambda^4 + 4w^2\lambda^2 + 3w^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda_1 = iw \vee \lambda_2 = -iw \vee \lambda_3 = \sqrt{3}iw \vee \lambda_4 = -\sqrt{3}iw. \end{aligned}$$

E seguidamente, determinamos os vetores próprios associados aos respetivos valores próprios da matriz  $C$ .

$$\begin{aligned} V_1 &= (1, iw, 1, iw); \\ V_2 &= (1, -iw, 1, -iw); \\ V_3 &= (1, \sqrt{3}iw, -1, -\sqrt{3}iw); \\ V_4 &= (1, -\sqrt{3}iw, -1, \sqrt{3}iw). \end{aligned} \quad (3.54)$$

A solução de cada equação diferencial é dada

$$X(t) = \sum_{n=1}^4 X_n(t) \quad (3.55)$$

com

$$X_n(t) = c_n V_n e^{\lambda_n t} \quad (3.56)$$

Donde,

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ v_1(t) \\ x_2(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{wt} \begin{bmatrix} 1 \\ iw \\ 1 \\ iw \end{bmatrix} + c_2 e^{-wt} \begin{bmatrix} 1 \\ -iw \\ 1 \\ -iw \end{bmatrix} + c_3 e^{\sqrt{3}wt} \begin{bmatrix} 1 \\ i\sqrt{3}w \\ -1 \\ -i\sqrt{3}w \end{bmatrix} + c_4 e^{-\sqrt{3}wt} \begin{bmatrix} 1 \\ -i\sqrt{3}w \\ -1 \\ i\sqrt{3}w \end{bmatrix}. \quad (3.57)$$

Só nos interessa as equações referentes ao deslocamento  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ ,

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{iwt} + c_2 e^{-iwt} + c_3 e^{\sqrt{3}iwt} + c_4 e^{-\sqrt{3}iwt} \\ x_2(t) = c_1 e^{iwt} + c_2 e^{-iwt} - c_3 e^{\sqrt{3}iwt} - c_4 e^{-\sqrt{3}iwt}. \end{cases} \quad (3.58)$$

A manipulação algébrica das equações 3.58 já não é tão simples.

Como estratégia para resolver o sistema de equações acopladas vamos ver como encontrar um novo sistema de coordenadas com equações diferenciais desacopladas.

Somando e subtraindo as equações do sistema 3.51 obtemos

$$x_1'' + x_2'' = -w^2(x_1 + x_2) \quad (3.59)$$

e

$$x_1'' - x_2'' = -3w^2(x_1 - x_2). \quad (3.60)$$

Podemos definir novas variáveis tais que

$$q_1 = x_1 + x_2 \quad e \quad q_2 = x_1 - x_2 \quad (3.61)$$

tendo, deste modo

$$q_1'' = -w^2 q_1 \quad e \quad q_2'' = -3w^2 q_2. \quad (3.62)$$

Nestas condições o sistema tem EDO lineares desacopladas, as novas coordenadas são chamadas de coordenadas normais. As suas soluções definem os modos normais nos quais as molas oscilam. Para duas massas existem

dois modos normais e a solução geral do movimento das massas é a soma das soluções dos modos normais.

As frequências dos modos normais são dadas pelos valores próprios da matriz  $C$  e por 3.2 sabemos que a solução de um oscilador harmónico é da forma

$$A \cos(\omega t - \phi). \quad (3.63)$$

Portanto, as soluções das equações 3.62 são

$$\begin{aligned} q_1(t) &= A_1 \cos(\omega t - \phi_1) \\ q_2(t) &= A_2 \cos(\sqrt{3}\omega t - \phi_2). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Pela transformação das coordenadas, a solução geral dos movimentos  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  é dada por:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{2} (q_1(t) + q_2(t)) = \frac{1}{2} [A_1 \cos(\omega t - \phi_1) + A_2 \cos(\sqrt{3}\omega t - \phi_2)] \\ x_2(t) &= \frac{1}{2} (q_1(t) - q_2(t)) = \frac{1}{2} [A_1 \cos(\omega t - \phi_1) - A_2 \cos(\sqrt{3}\omega t - \phi_2)]. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Estas soluções não correspondem a um movimento harmónico simples para  $x_1$  e  $x_2$ . Mas as coordenadas normais  $q_1$  e  $q_2$ , que são combinações lineares de  $x_1$  e  $x_2$ , oscilam harmonicamente,  $q_1$  oscila com frequência normal  $\omega$  e  $q_2$  com frequência normal  $\sqrt{3}\omega$ .

Fazendo  $A_2 = 0$  ou  $A_1 = 0$  em 3.65 as coordenadas  $x_1$  e  $x_2$  oscilam ambas com a mesma frequência.

No primeiro caso ( $A_2 = 0$ ) oscilam com frequência igual a  $\omega$  e as equações são iguais para as duas massas

$$x_1(t) = x_2(t) = \frac{A_1}{2} \cos(\omega t - \phi_1). \quad (3.66)$$

Neste caso a mola que liga os dois corpos não é comprimida nem esticada.

Na segunda situação ( $A_1 = 0$ ) com frequência igual a  $\sqrt{3}\omega$  os deslocamentos são contrários

$$x_1(t) = -x_2(t) = \frac{A_2}{2} \cos(\sqrt{3}\omega t - \phi_2). \quad (3.67)$$

A frequência é mais elevada devido à força restauradora da mola que liga as duas massas.

Temos que as duas massas oscilam com a mesma frequência e mesma amplitude e estão ou na mesma fase ou em oposição de fase.

As soluções com estas características designam-se de modos normais de vibração e, neste caso, temos dois modos normais de vibração.

A solução geral 3.65 resulta da sobreposição dos modos normais de oscilação com amplitude e fases que dependem das condições iniciais.

Consideremos o caso em que as massas partem do repouso e só temos o deslocamento da posição de equilíbrio de uma delas, isto é,

$$x_1(0) = A, \quad x_2(0) = 0, \quad x_1'(0) = 0, \quad x_2'(0) = 0. \quad (3.68)$$

Estas condições implicam que 3.61 e 3.62 sejam tais que

$$q_1(0) = x_1 = A, \quad q_2(0) = x_1 = A, \quad q_1''(0) = 0 \quad \text{e} \quad q_2''(0) = 0. \quad (3.69)$$

Logo

$$\begin{aligned} q_1(0) &= A_1 \cos(\phi_1) = A; \\ q_2(0) &= A_2 \cos(\phi_2) = A; \\ q_1''(0) &= -w^2 A_1 \sin(\phi_1) = 0; \\ q_2''(0) &= -3w^2 A_2 \sin(\phi_2) = 0. \end{aligned} \quad (3.70)$$

o que implica que  $\phi_1 = \phi_2 = 0$  e  $A_1 = A_2 = A$ .

Substituindo em 3.65, obtemos

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{A}{2} [\cos(wt) + \cos(\sqrt{3}wt)] \\ x_2(t) &= \frac{A}{2} [\cos(wt) - \cos(\sqrt{3}wt)]. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Cada uma das equações é a sobreposição de dois movimentos harmónicos simples com a mesma amplitude.

Recorrendo às propriedades trigonométricas podemos reescrever as equações 3.71 da forma

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A \cos\left(\frac{w - \sqrt{3}w}{2}t\right) \cos\left(\frac{w + \sqrt{3}w}{2}t\right) \\ x_2(t) &= -A \sin\left(\frac{w - \sqrt{3}w}{2}t\right) \sin\left(\frac{w + \sqrt{3}w}{2}t\right). \end{aligned} \quad (3.72)$$

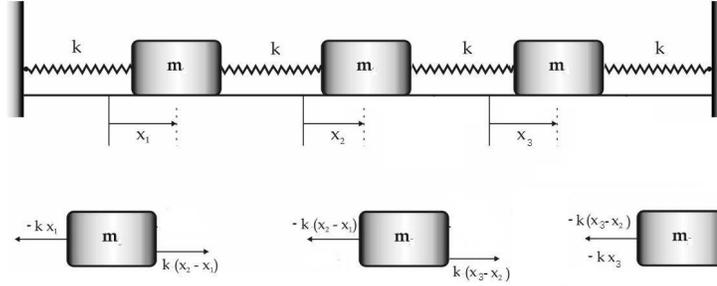


Figura 3.10: Exemplo de três osciladores acoplados

### Três e quatro osciladores acoplados

Vejam agora o caso em que temos quatro molas idênticas e três corpos de massa  $m$  acopladas, com atrito desprezável e com constante da mola  $k$ . Começemos por escrever as equações dos três osciladores,

$$\begin{cases} mx_1'' = -kx_1 + k(x_2 - x_1) \\ mx_2'' = -k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_2) \\ mx_3'' = -k(x_3 - x_2) - kx_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1'' = -\frac{2k}{m}x_1 + \frac{k}{m}x_2 \\ x_2'' = \frac{k}{m}x_1 - 2\frac{k}{m}x_2 + \frac{k}{m}x_3 \\ x_3'' = \frac{k}{m}x_2 - 2\frac{k}{m}x_3. \end{cases} \quad (3.73)$$

O sistema que modela o acoplamento das três massas é dada por

$$\begin{cases} x_1'' = -2w^2x_1 + w^2x_2 \\ x_2'' = w^2x_1 - 2w^2x_2 + w^2x_3 \\ x_3'' = w^2x_2 - 2w^2x_3 \end{cases} \quad (3.74)$$

que pode ser escrito como um sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\begin{cases} x_1' = v_1 \\ v_1' = -2w^2x_1 + w^2x_2 \\ x_2' = v_2 \\ v_2' = w^2x_1 - 2w^2x_2 + w^2x_3 \\ x_3' = v_3 \\ v_3' = w^2x_2 - 2w^2x_3. \end{cases} \quad (3.75)$$

No caso de cinco molas com quatro corpos de massa  $m$  acoplados, o sistema das equações será da forma

$$\begin{cases} mx_1'' = -kx_1 + k(x_2 - x_1) \\ mx_2'' = -k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_2) \\ mx_3'' = -k(x_3 - x_2) + k(x_4 - x_3) \\ mx_4'' = -k(x_4 - x_3) - kx_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1'' = -2w^2x_1 + w^2x_2 \\ x_2'' = w^2x_1 - 2w^2x_2 + w^2x_3 \\ x_3'' = w^2x_2 - 2w^2x_3 + w^2x_4 \\ x_4'' = w^2x_3 - 2w^2x_4. \end{cases} \quad (3.76)$$

Que na forma de sistema de equações diferenciais de primeira ordem fica

$$\begin{cases} x_1' = v_1 \\ v_1' = -2w^2x_1 + w^2x_2 \\ x_2' = v_2 \\ v_2' = w^2x_1 - 2w^2x_2 + w^2x_3 \\ x_3' = v_3 \\ v_3' = w^2x_2 - 2w^2x_3 + w^2x_4 \\ x_4' = v_4 \\ v_4' = w^2x_3 - 2w^2x_4. \end{cases} \quad (3.77)$$

### Múltiplos osciladores acoplados

Consideremos um sistema massa-mola constituído por  $n$  corpos de massa  $m$ , igualmente espaçados, acoplados por  $n + 1$  molas idênticas com constante da mola  $k$ .

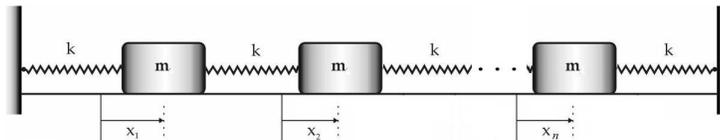


Figura 3.11: Exemplo de  $n$  osciladores acoplados.

Generalizando, quando não há equilíbrio, a massa  $j$  tem um desvio  $x_j$  relativamente à posição normal  $x = ja$  e fica sujeita às forças das molas vizinhas. Repetindo o processo da escrita do sistema que modela o sistema massa-mola para 6, 7, ... molas acopladas, obtemos

$$mx_i'' = -2kx_i + kx_{i+1} + kx_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.78)$$

e fazendo  $w^2 = \frac{k}{m}$  temos

$$x_i'' = w^2 x_{i-1} - 2w^2 x_i + w^2 x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.79)$$

Para  $n$  massas acopladas oscilando existem  $n$  modos normais de oscilação para o sistema, de modo que a solução geral para o movimento do sistema será a soma de todas as soluções dos  $n$  modos normais.

Seja  $x_p$  a equação do movimento harmónico com amplitude  $A_p$  e frequência da oscilação  $w$  da  $p$ -ésima massa,

$$x_p(t) = A_p \cos(wt), \quad p = 1, \dots, n \quad (3.80)$$

com velocidade

$$x_p'(t) = -wA_p \sin(wt), \quad p = 1, \dots, n. \quad (3.81)$$

Substituindo na equação 3.79, temos, para  $p = 1, \dots, n$ ,

$$-w^2 A_p \cos(wt) = w_0^2 A_{p-1} \cos(wt) - 2w_0^2 A_p \cos(wt) + w_0^2 A_{p+1} \cos(wt)$$

$$\Leftrightarrow (-w^2 + 2w_0^2)A_p = -w_0^2(A_{p-1} + A_{p+1}),$$

isto é,

$$\frac{-w^2 + 2w_0^2}{w_0^2} = \frac{A_{p-1} + A_{p+1}}{A_p}. \quad (3.82)$$

Suponhamos que a amplitude da  $p$ -ésima massa é dada, para certas condições  $C$  e  $\theta$ , por

$$A_p = C \sin(p\theta) \quad (3.83)$$

e definindo as amplitudes para os corpos nas posições  $p-1$  e  $p+1$  da mesma forma, temos

$$A_{p-1} + A_{p+1} = C [\sin((p-1)\theta) + \sin((p+1)\theta)] \quad (3.84)$$

$$= 2C \sin(p\theta) \cos \theta \quad (3.85)$$

donde,

$$\frac{A_{p-1} + A_{p+1}}{A_p} = 2 \cos \theta \quad (3.86)$$

é constante e independente de  $p$ .

Impondo como condições de fronteira

$$A_0 = 0 = A_{n+1}, \quad (3.87)$$

temos

$$A_0 = C \sin(0) = 0 \quad (3.88)$$

e

$$\begin{aligned} A_{n+1} = C \sin[(n+1)\theta] = 0 &\Leftrightarrow \sin((n+1)\theta) = 0 \\ &\Leftrightarrow (n+1)\theta = k\pi \\ &\Leftrightarrow \theta = \frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Retomando 3.83 obtemos a amplitude da  $p$ -ésima massa com frequência de oscilação  $w_p$

$$A_p = C \sin\left(p \frac{k\pi}{n+1}\right). \quad (3.89)$$

Podemos encontrar as restantes frequências de oscilação, a partir das expressões 3.82 e 3.86,

$$\frac{2w_0^2 - w^2}{w_0^2} = 2 \cos \theta = 2 \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \quad (3.90)$$

logo,

$$w^2 = 2w_0^2 \left[1 - \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right], \quad p = 1, \dots, n. \quad (3.91)$$

que podemos ainda simplificar recorrendo às propriedades trigonométricas,

$$w^2 = 4w_0^2 \sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right), \quad p = 1, \dots, n. \quad (3.92)$$

Resumindo, o sistema de  $n$  massas acopladas por  $n+1$  molas iguais, com condições de contorno 3.87, tem modos normais de oscilação com frequência dada por

$$w_p = 2w_0 \sin\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right), \quad p = 1, \dots, n \quad (3.93)$$

A equação de movimento é, geralmente, escrita como combinação linear das soluções correspondentes aos modos normais

$$\sum_{p=1}^n [A_p \sin(w_p t) + B_p \cos(w_p t)], \quad (3.94)$$

com coeficientes  $A_p$  e  $B_p$  determinados pelas condições iniciais e pelos vetores próprios da matriz de coeficientes do sistema.



## Capítulo 4

# Séries de Fourier

Neste capítulo vamos estudar as séries de Fourier para aplicação nas equações diferenciais parciais.

**Definição 27** *A série de senos e co-senos definida por*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \quad (4.1)$$

*é designada de **série trigonométrica** e  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$  são chamados de coeficientes da série.*

Considerando a variável  $x$  real temos que  $\cos(nx)$  e  $\sin(nx)$  são limitadas e se a série trigonométrica (4.1) convergir representará uma determinada função  $f$  tal que:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]. \quad (4.2)$$

Vamos ver mais adiante quais as funções que se podem representar desta forma.

Começemos por apresentar algumas definições e resultados aos quais iremos recorrer neste capítulo.

## 4.1 Generalidades

### 4.1.1 Continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade de funções

Os teoremas e definições seguintes serão úteis no entendimento de alguns resultados importantes da teoria da séries de Fourier.

**Teorema 12** *Seja  $f$  função variável real definida num intervalo  $I$ , integrável. Então  $|f(x)|$  é integrável e*

$$\left| \int_I f(x) dx \right| \leq \int_I |f(x)| dx. \quad (4.3)$$

**Demonstração:** Ver [11] ■

**Definição 28** *Uma função  $f$  real de variável real diz-se absolutamente integrável se  $|f|$  for integrável.*

**Definição 29** *Uma função  $f$  real de variável real diz-se quadrado integrável se  $f$  e  $|f|^2$  são integráveis.*

**Definição 30** *Uma função  $f$  diz-se Hölder contínua na vizinhança do ponto  $x$  se existem constantes  $k, \alpha, \delta$  positivas, tais que*

$$|f(t) - f(y)| \leq k|t - y|^\alpha, \quad (4.4)$$

para  $t, y \in [x - \delta, x + \delta]$ .

Iremos agora definir função seccionalmente contínua e função seccionalmente diferenciável.

**Observação 1** *Uma função  $f$  diz-se seccionalmente contínua se tiver apenas um número finito de descontinuidades, ou seja, dados  $a < b$ , existem  $a \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq b$ , tais que  $f$  é contínua em cada intervalo  $]a_j, a_{j+1}[$ ,  $j = 1, \dots, n - 1$  e existem os limites (finitos) laterais*

$$f(a_j^+) = \lim_{x \rightarrow a_j^+} f(x) \quad e \quad f(a_j^-) = \lim_{x \rightarrow a_j^-} f(x).$$

*Toda a função contínua é seccionalmente contínua.*

**Observação 2** *Uma função  $f$  diz-se seccionalmente diferenciável se for seccionalmente contínua e se a função derivada  $f'$  for também seccionalmente contínua.*

A aplicação desta definição requer algum cuidado pois existem situações em que  $f'$  pode não estar definida (não existe com certeza nos pontos onde a função  $f$  é descontínua e pode até não existir  $f'$  em pontos onde a função  $f$  é contínua).

O teorema do valor médio estabelece uma relação importante entre a função e a sua derivada.

**Teorema 13 (Teorema do Valor Médio)** *Seja  $f$  função real de variável real definida em  $[a, b]$  contínua.*

*Se  $f$  for diferenciável em  $]a, b[$ , então existe  $c \in ]a, b[$  tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad (4.5)$$

**Demonstração:** ver [11] ■

O teorema seguinte estabelece a ligação entre o cálculo diferencial e o cálculo integral.

**Teorema 14 (Teorema fundamental do cálculo)** *Seja  $f$  função real de variável real definida em  $I \subset \mathbb{R}$ , contínua, e seja  $a$  um ponto de  $I$ .*

*Consideremos a função  $F$ , definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \text{ para } x \in I. \quad (4.6)$$

*Então, para todo  $x \in I$*

$$F'(x) = f(x) \quad \text{e} \quad \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (4.7)$$

**Demonstração:** ver [11] ■

### 4.1.2 Funções trigonométricas

Como a série trigonométrica envolve as funções trigonométricas  $\sin x$  e  $\cos x$ , será vantajoso apresentar algumas das suas propriedades, assim como a noção de paridade e periodicidade.

**Propriedade 1** *Sabemos que, para quaisquer  $x$  e  $y$  reais,*

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y; \quad (4.8)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y; \quad (4.9)$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)]; \quad (4.10)$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)]; \quad (4.11)$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)]. \quad (4.12)$$

As funções trigonométricas  $\cos x$  e  $\sin x$  são funções periódicas de período  $2\pi$  e no respeito à sua paridade, a função  $\cos x$  é uma função par e  $\sin x$  é uma função ímpar.

**Propriedade 2** *Uma função  $f$ , real de variável real, é periódica de período  $T \in \mathbb{R}$  se*

$$f(x + T) = f(x), \text{ para qualquer } x \in \mathbb{R}. \quad (4.13)$$

Em geral, qualquer múltiplo de  $T$  é também um período. Ao menor período positivo chamamos período fundamental.

Para simplificar a escrita escreveremos só período em vez de período fundamental.

É-nos útil lembrar que

- que a soma de um número finito de funções periódicas de um dado período é uma função periódica desse período.
- se  $f$  é uma função periódica de período  $T$ , então

$$\int_0^T f(x) dx = \int_a^{T+a} f(x) dx, \quad a \in \mathbb{R}. \quad (4.14)$$

Já nos referimos à paridade das funções trigonométricas e facilmente se percebe a classificação dada tendo em conta a definição seguinte.

**Propriedade 3** *Consideremos  $f$  uma função real de variável real e  $x$  um número real.*

*Dizemos que  $f$  é função par se  $f(-x) = f(x)$  e que  $f$  é função ímpar se se verifica  $f(-x) = -f(x)$ .*

Como consequência da propriedade temos que a soma de funções pares é par, a soma de funções ímpares é ímpar, o produto de funções pares ou funções ímpares é uma função par e o produto de uma função par por uma função ímpar é ímpar.

Vamos também relacionar a paridade com a integrabilidade de funções do seguinte modo:

- se  $f$  ímpar e integrável verifica-se que

$$\begin{aligned}
 \int_{-L}^L f(x)dx &= \int_{-L}^0 f(x)dx + \int_0^L f(x)dx \\
 &= \int_0^L f(-x)dx + \int_0^L f(x)dx \\
 &= \int_0^L -f(x)dx + \int_0^L f(x)dx, \quad f \text{ é ímpar} \\
 &= -\int_0^L f(x)dx + \int_0^L f(x)dx \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

- sendo  $f$  par e integrável temos que

$$\begin{aligned}
 \int_{-L}^L f(x)dx &= \int_{-L}^0 f(x)dx + \int_0^L f(x)dx \\
 &= -\int_0^{-L} f(x)dx + \int_0^L f(x)dx \\
 &= -\int_0^L -f(-x)dx + \int_0^L f(x)dx \\
 &= \int_0^L f(-x)dx + \int_0^L f(x)dx \\
 &= \int_0^L f(x)dx + \int_0^L f(x)dx, \quad f \text{ é par} \\
 &= 2 \int_0^L f(x)dx.
 \end{aligned}$$

No caso concreto das funções trigonométricas, sendo a função seno uma função ímpar e a função co-seno uma função par, temos que,

$$\int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0 \quad (4.15)$$

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx = 0, \quad (4.16)$$

dado que

$$\begin{aligned}
 \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx &= 2 \int_0^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\
 &= \frac{2L}{n\pi} \int_0^L \frac{n\pi}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\
 &= \frac{2L}{n\pi} \left( \sin \frac{n\pi L}{L} - \sin 0 \right) \\
 &= \frac{2L}{n\pi} \sin(n\pi) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Um dos nossos objetivos é a determinação dos coeficientes da série trigonométrica 4.1. Para tal iremos necessitar de aplicar as propriedades da ortogonalidade das funções trigonométricas.

**Teorema 15 (Ortogonalidade das funções trigonométricas)**

Considerando as sucessões do tipo  $\sin \frac{n\pi x}{L}$  e  $\cos \frac{n\pi x}{L}$ , com  $n$  natural, são válidas as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
 \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx &= 0, \quad n, m \geq 1; \\
 \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx &= \begin{cases} L, & \text{se } n = m \geq 1 \\ 0, & \text{se } n \neq m \geq 1; \end{cases} \\
 \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx &= \begin{cases} L, & \text{se } n = m \geq 1 \\ 0, & \text{se } n \neq m \geq 1. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

**Demonstração:**

Suponhamos  $m, n \geq 1$ , sabendo que o produto de uma função par por uma função ímpar é uma função ímpar, vem que

$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0.$$

De modo análogo, consideremos  $m, n \geq 1$  e  $m \neq n$  e sabendo que o produto de funções pares é uma função par, vem que

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx &= 2 \int_0^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= 2 \int_0^L \frac{1}{2} \left[ \cos \left( \frac{m\pi x}{L} - \frac{n\pi x}{L} \right) + \cos \left( \frac{m\pi x}{L} + \frac{n\pi x}{L} \right) \right] dx \\ &= 0, \text{ por 4.16.} \end{aligned}$$

No caso de  $m = n$ , temos que

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx &= 2 \int_0^L \frac{1}{2} \left[ \cos 0 + \cos \left( \frac{(2n)\pi x}{L} \right) \right] dx \\ &= \int_0^L 1 dx + \int_0^L \cos \left( \frac{(2n)\pi x}{L} \right) dx \\ &= L + 0, \text{ por 4.16} \\ &= L. \end{aligned}$$

Para  $m, n \geq 1$  e  $m \neq n$ , vem que

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx &= 2 \int_0^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= 2 \int_0^L \frac{1}{2} \left[ \cos \left( \frac{m\pi x}{L} + \frac{n\pi x}{L} \right) - \cos \left( \frac{m\pi x}{L} - \frac{n\pi x}{L} \right) \right] dx \\ &= 0, \text{ por 4.16.} \end{aligned}$$

e para  $m = n$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx &= 2 \int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \int_0^L \left[ \cos \left( \frac{(2n)\pi x}{L} \right) - \cos 0 \right] dx \\ &= \int_0^L \cos \left( \frac{(2n)\pi x}{L} \right) dx - \int_0^L 1 dx \\ &= 0 + L, \text{ por 4.16} \\ &= L. \end{aligned}$$

■

Os resultados seguintes são necessários no estudo da convergência pontual e uniforme da série de Fourier.

**Lema 2** A expressão seguinte é designada por Núcleo de Dirichlet

$$D_n(x) = \frac{1}{L} \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi x}{L} \right) \quad (4.18)$$

e goza das seguintes propriedades:

1. é uma função par;
2.  $\int_{-L}^L D_n(x) dx = 1$ ;
3. é uma função contínua;
4. é uma função periódica de período  $2L$ ;
5.  $D_n(0) = \frac{n + \frac{1}{2}}{L}$ ;
6. para  $x \neq 0, \pm 2L, \pm 4L, \dots$

$$D_n(x) = \frac{1}{2L} \frac{\sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{L} \right]}{\sin \frac{\pi x}{2L}} \quad (4.19)$$

**Demonstração:**

As propriedades 1., 3., 4. facilmente se verificam sabendo que a função co-seno é contínua, periódica e par.

Como  $\cos \frac{k\pi x}{L}$  é uma função par,  $\cos \frac{k\pi x}{L} = \cos \frac{-k\pi x}{L}$ , donde

$$D_n(x) = \frac{1}{L} \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi x}{L} \right) = \frac{1}{L} \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \frac{-k\pi x}{L} \right) = D_n(-x).$$

A soma de funções contínuas é uma função contínua e  $\cos \frac{k\pi x}{L}$  é uma função contínua,  $\sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi x}{L}$  também será uma função contínua, portanto  $D_n(x)$  uma função contínua.

A função co-seno é uma função periódica de período  $2L$  e temos

$$\cos \frac{k\pi(x + 2L)}{L} = \cos \left( \frac{k\pi x}{L} + 2k\pi \right) = \cos \frac{k\pi x}{L},$$

donde

$$D_n(x + 2L) = D_n(x).$$

Integrando a expressão no intervalo  $[-L, L]$  provamos 2,

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \frac{1}{L} \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi x}{L} \right) dx &= \frac{1}{2L}(L + L) + \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n \int_{-L}^L \cos \frac{k\pi x}{L} dx \\ &= 1 + \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n 0, \text{ por 4.16} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Fazendo  $x = 0$ , temos

$$D_n(0) = \frac{1}{L} \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos 0 \right) = \frac{1}{L} \left( \frac{1}{2} + n \right),$$

como se pretendia na alínea 5.

Vamos agora provar a última propriedade. Consideremos a expressão definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} s_n(\theta) &= 1 + \sum_{k=1}^n \cos(k\theta) \\ &= \operatorname{Re} \left[ 1 + \sum_{k=1}^n [\cos(k\theta) + i \sin(k\theta)] \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[ 1 + \sum_{k=1}^n e^{ik\theta} \right], \end{aligned}$$

e sabendo que para  $z \neq 1$ ,

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z},$$

podemos escrever

$$1 + e^{k\theta} + e^{2k\theta} + \dots + e^{nk\theta} = \frac{1 - e^{i\theta(n+1)}}{1 - e^{i\theta}}.$$

Retomando o cálculo de  $s_n(\theta)$  e manipulando algebricamente, resulta que,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \left[ 1 + \sum_{k=1}^n e^{ik\theta} \right] &= \operatorname{Re} \left( \frac{1 - e^{i\theta(n+1)}}{1 - e^{i\theta}} \right) \\
&= \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{\frac{i\theta}{2}} (e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{i\theta(n+\frac{1}{2})})}{e^{\frac{i\theta}{2}} (e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}})} \right] \\
&= \operatorname{Re} \left( \frac{e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{i\theta(n+\frac{1}{2})}}{e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}} \right), \quad e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}} \neq 0.
\end{aligned}$$

E simplificando a expressão dentro de parêntesis,

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{i\theta(n+\frac{1}{2})}}{e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}} &= \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(\theta n + \frac{\theta}{2}\right) - i \sin\left(\theta n + \frac{\theta}{2}\right)}{-2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
&= \frac{i \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - i \cos\left(\theta n + \frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\theta n + \frac{\theta}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)},
\end{aligned}$$

temos que,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \left[ 1 + \sum_{k=1}^n e^{ik\theta} \right] &= \operatorname{Re} \left( \frac{e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{i\theta(n+\frac{1}{2})}}{e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}} \right) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\theta n + \frac{\theta}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \quad \theta \neq 0, \pm 2L, \pm 4L, \dots
\end{aligned}$$

Fazendo  $\theta = \frac{\pi x}{L}$ ,  $\theta \neq 0, \pm 2L, \pm 4L, \dots$  e substituindo na expressão 4.18, resulta que,

$$\begin{aligned}
D_n(x) &= \frac{1}{L} \left( -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \sin\left(\frac{\pi x}{L}n + \frac{\pi x}{L}\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)} \right) \\
&= \frac{1}{L} \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{\sin\frac{\pi x}{2L} + \sin\left[\frac{\pi x}{L}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right]}{2 \sin\frac{\pi x}{2L}} \right\} \\
&= \frac{1}{2L} \frac{\sin\left[\frac{\pi x}{L}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right]}{\sin\frac{\pi x}{2L}}.
\end{aligned}$$

■

**Lema 3** *Seja  $f$  uma função real de variável real definida em  $[a, b]$ , periódica e período  $2L$ , integrável e absolutamente integrável em  $[a, b]$ .*

Então

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin(tx) dx = 0; \quad (4.20)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \cos(tx) dx = 0. \quad (4.21)$$

**Demonstração:**

Iremos demonstrar o primeiro limite, sendo a demonstração do segundo limite análoga.

Seja  $f$  uma função contínua num intervalo  $[a, b]$ . O intervalo  $[a, b]$  pode ser subdividido num número finito de subintervalos tais que a função  $f$  seja contínua em cada um destes subintervalos.

Dividindo o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \sin(tx) dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \sin(tx) dx \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sin(tx) dx + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x) - f(x_i)] \sin(tx) dx. \end{aligned}$$

Se  $M = \max_{[a,b]} |f|$ , vem que

$$\left| \int_a^b f(x) \sin(tx) dx \right| \leq M \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sin(tx) dx + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x) - f(x_i)] dx.$$

Temos

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \sin(tx) dx = \frac{-\cos(tx)}{t} \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = \frac{1}{t} |-\cos(tx_{i+1}) + \cos(tx_i)| \leq \frac{2}{t}.$$

Além disso, se  $m_i = \min_{[x_i, x_{i+1}]} f$  e  $M_i = \max_{[x_i, x_{i+1}]} f$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x) - f(x_i)] dx &\leq \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i). \end{aligned}$$

Como a função  $f$  é contínua no intervalo  $[a, b]$  é também integrável no mesmo intervalo, assim tanto a soma superior quanto a soma inferior convergem para o valor do integral de  $f$  no intervalo, à medida que tomamos partições do intervalo  $[a, b]$  cada vez menores, isto é um número de  $n$  pontos cada vez maior. Dado  $\epsilon > 0$  arbitrário podemos encontrar  $n$  suficientemente grande para que tenhamos

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x) - f(x_i)] dx \leq \epsilon.$$

Donde,

$$\left| \int_a^b f(x) \sin(tx) dx \right| \leq \frac{2nM}{t} + \epsilon$$

e fazendo  $t \rightarrow +\infty$ , vem que

$$\left| \int_a^b f(x) \sin(tx) dx \right| \leq \epsilon.$$

Portanto

$$\int_a^b f(x) \sin(tx) dx = 0.$$

■

### 4.1.3 Convergência de séries

Nem sempre as séries convergem, donde se torna importante estudar condições de convergência para as mesmas.

**Definição 31** Uma série numérica  $\sum_{j=1}^{+\infty} a_j$  converge se a sucessão das somas parciais  $\sum_{j=1}^n a_j$  convergir.

**Definição 32** Uma série numérica  $\sum_{j=1}^{+\infty} a_j$  diz-se absolutamente convergente se a série  $\sum_{j=1}^{+\infty} |a_j|$  for convergente.

**Definição 33** Uma série de funções  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  com  $f_n$  funções reais de variável real definida em  $I \subset \mathbb{R}$ , converge pontualmente se, para cada  $x_0 \in I$  fixo, a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0)$  convergir. Ou seja, dados  $\epsilon > 0$  e  $x_0 \in I$ , existe  $N$  inteiro (dependente de  $\epsilon$  e  $x_0$ ) tal que

$$\left| \sum_{n=k}^m f_n(x_0) \right| < \epsilon, \quad k < m \text{ tais que } k \geq N. \quad (4.22)$$

Uma série de funções  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  converge uniformemente se, dado  $\epsilon > 0$ , existir um inteiro  $N$ , dependente apenas de  $\epsilon$ , tal que

$$\left| \sum_{n=k}^m f_n \right| < \epsilon, \quad \text{com } m > k \geq N. \quad (4.23)$$

**Teorema 16 (Critério de Cauchy)** Uma série de funções  $f_n$  definidas num intervalo  $I$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ , converge uniformemente se e só se para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $N$  tal que  $n \geq N$  implica  $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$ , para todo  $x \in I$ .

**Demonstração:** Ver [11] ■

**Teorema 17 (Teste de comparação)** Seja  $0 \leq a_n \leq b_n, n \in \mathbb{N}$ .

Se  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  é uma série convergente então  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é uma série convergente.

**Demonstração:** Ver [11] ■

O seguinte teorema, conhecido como o teste M de Weierstrass, é muito útil para verificar a convergência de séries pois reduz o problema do estudo da convergência uniforme de uma série de funções ao do estudo da série numérica.

**Teorema 18 (Teste M de Weierstrass)** *Seja  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  uma série de funções com  $f_n$  funções reais de variável real definida em  $I \subset \mathbb{R}$ . Suponhamos que existem constantes  $M_n \geq 0$  tais que:*

$$|f_n(x)| \leq M_n, \text{ para todo } x \in I$$

e que a série numérica  $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$  é convergente.

Então a série de funções  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  converge uniforme e absolutamente para  $f$ .

**Demonstração:**

Por hipótese  $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$  é convergente e  $|f_n(x)| \leq M_n$ , para qualquer  $x \in I$ .

Pelo teorema 17 temos que  $\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n|$  converge. Portanto  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  converge absolutamente.

Como a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$  converge, para todo o  $\epsilon > 0$ , temos

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) - \sum_{n=1}^k f_n(x) \right| &= \left| \sum_{n=k+1}^{+\infty} f_n(x) \right| \\ &\leq \sum_{n=k+1}^{+\infty} |f_n(x)|, \text{ critério de Cauchy} \\ &\leq \sum_{n=k+1}^{+\infty} M_n < \epsilon. \end{aligned}$$

Considerando a soma da série  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ , temos que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  converge uniforme e absolutamente para  $f$  em  $I$ . ■

**Proposição 3** *Suponhamos que as funções  $f_n$  são contínuas e que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  converge uniformemente para  $f$ .*

*Então a soma da série  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  é também uma função contínua.*

**Demonstração:**

A série  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  converge uniformemente para  $f$ , então dado  $\epsilon > 0$ , existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $n > k$  e todo  $x \in I$ ,

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Por hipótese, as funções  $f_n$  são contínuas no intervalo aberto  $I$ . Então para qualquer  $x_0 \in I$ , fixo, e para todo  $\epsilon > 0$ , existe um  $\delta_n > 0$  tal que:

$$|x - x_0| < \delta_n \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Para  $n > k$  e  $|x - x_0| < \delta_n$  temos que

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)|,$$

o que implica

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon,$$

ou seja, a soma da série  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  é também uma função contínua em  $x_0$ . Como  $x_0 \in I$  era arbitrário, temos que  $f$  é contínua em  $I$ . ■

**Teorema 19** *Suponhamos as funções  $f_n$  integráveis uniformemente convergentes para  $f$  num intervalo  $[a, b]$ . Então  $f$  é integrável e*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = \int_a^b f. \quad (4.24)$$

**Demonstração:**

Como  $f_n$  converge uniformemente no intervalo  $[a, b]$ , dado  $\epsilon > 0$ , existe  $N > 0$  tal que se  $n > N$ , então para todo  $x \in [a, b]$ ,

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{b-a}.$$

Como  $f_n$  é integrável em  $[a, b]$ , temos

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx \right| &= \left| \int_a^b [f(x) - f_n(x)]dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx \\ &< \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a} dx \\ &= \frac{\epsilon(b-a)}{b-a} = \epsilon. \end{aligned}$$

Logo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

■

**Proposição 4** *Suponhamos que as funções  $f_n$  são integráveis no intervalo  $I$  e que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  converge uniformemente.*

Então

$$\int_I \left( \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_I f_n(x) dx. \quad (4.25)$$

**Demonstração:**

Por hipótese, as funções  $f_n$  são integráveis num intervalo  $I$ , então para qualquer  $m \in \mathbb{N}$ , e para todo o  $x \in I$

$$\int_I f_1(x)dx + \int_I f_2(x)dx + \dots + \int_I f_m(x)dx = \int_I \left( \sum_{n=1}^m f_n(x) \right) dx.$$

Com  $m \rightarrow +\infty$ , vem que, para qualquer  $x \in I$ , pelo teorema 19,

$$\int_I \left( \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^m f_n(x) \right) dx = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^m \int_I f_n(x) dx.$$

Como a série  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  converge uniformemente, temos que

$$\int_I \left( \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_I f_n(x) dx.$$

■

**Proposição 5** *Suponhamos que as funções reais de variável real  $f_n$  definidas num intervalo  $I$  sejam continuamente diferenciáveis e que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x)$  das derivadas converge uniformemente.*

*Suponhamos ainda que, para um dado  $x_0 \in I$ , a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0)$  converge.*

Então

$$\frac{d}{dx} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x). \quad (4.26)$$

**Demonstração:**

Seja  $x \in I$ , pela proposição 4

$$\int_{x_0}^x \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{x_0}^x f'_n(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \Big|_{x_0}^x = \sum_{n=1}^{+\infty} [f_n(x) - f_n(x_0)],$$

ou seja,

$$\int_{x_0}^x \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) dx = f(x) - f(x_0) \Leftrightarrow f(x) = \int_{x_0}^x \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) dx + f(x_0).$$

Pela proposição 3,  $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x)$  é contínua e temos que

$$\frac{d}{dx} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} [f'_1(x) + \dots + f'_n(x)] = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x).$$

■

As desigualdades seguintes facilitam o estudo da convergência das séries.

**Proposição 6 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)** *Consideremos dois vetores de  $\mathbb{R}^n$ ,  $a = (a_1, \dots, a_n)$  e  $b = (b_1, \dots, b_n)$ , então*

$$\left| \sum_{j=1}^n a_j b_j \right| \leq \left( \sum_{j=1}^n a_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{j=1}^n b_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.27)$$

A desigualdade pode tomar outra forma se considerarmos duas funções quadrado integráveis  $f, g$  definidas em  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ .

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) \right| \leq \left[ \int_a^b |f(x)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_a^b |g(x)|^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.28)$$

**Demonstração:** ver [7] ■

Outra desigualdade importante no espaço de  $\mathbb{R}^n$  é a seguinte:

**Proposição 7 (Desigualdade de Minkowski)** *Sejam  $a = (a_1, \dots, a_n)$  e  $b = (b_1, \dots, b_n)$  dois vetores de  $\mathbb{R}^n$ , então*

$$\left[ \sum_{j=1}^n (a_j b_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left( \sum_{j=1}^n a_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{j=1}^n b_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.29)$$

**Demonstração:** ver [7] ■

**Proposição 8 (Desigualdade de Bessel)** *Seja  $f$  função de variável real definida em  $I \subset \mathbb{R}$  e  $f$  e  $|f|^2$  integráveis.*

*Então,*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx, \quad (4.30)$$

com  $a_0$ ,  $a_k$  e  $b_k$  coeficientes de Fourier.

**Demonstração:** ver [7] ■

## 4.2 Coeficientes de Fourier

Como já foi dito anteriormente, os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  da série trigonométrica são elementos importantes na convergência da série.

Começemos por estudar qual a relação de  $a_n$  e  $b_n$  com a função  $f$ .

Consideremos a função  $f$  escrita da forma

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (4.31)$$

Suponhamos que a relação 4.31 é verdadeira e que a série converge uniformemente.

Pela proposição 3, a função  $f$  é contínua e pela proposição 4 podemos integrar a função  $f$ , donde

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x)dx &= \int_{-L}^L \frac{1}{2}a_0 dx + \int_{-L}^L \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) dx \\ &= \frac{1}{2}a_0 \int_{-L}^L dx + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{1}{2}a_0 \int_{-L}^L dx, \text{ por 4.15 e 4.16} \\ &= \frac{1}{2}a_0(L+L) \\ &= a_0L. \end{aligned}$$

Determinamos assim o coeficiente  $a_0$ :

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)dx. \quad (4.32)$$

Vamos, agora, tentar obter os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$ .

Consideremos a função dada pela igualdade 4.31 à qual multiplicamos ambos os membros por  $\cos \frac{m\pi x}{L}$ , com  $m \geq 1$ , fixo e de seguida integramos entre  $-L$  e  $L$ :

$$\begin{aligned} &\int_{-L}^L \left[ f(x) \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \right] dx = \\ &= \int_{-L}^L \left\{ \frac{a_0}{2} \cos \frac{m\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ a_n \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) + b_n \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \right] \right\} dx \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ a_n \int_{-L}^L \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) dx + b_n \int_{-L}^L \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) dx \right]. \end{aligned}$$

Da aplicação da ortogonalidade das funções trigonométricas 15 e por 4.16, vem que

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \left[ f(x) \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \right] dx &= \begin{cases} \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) dx + 0, & m \neq n \geq 1 \\ \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) dx + a_n L, & m = n \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & m \neq n \geq 1 \\ a_n L, & m = n \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Logo,

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \left[ f(x) \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right] dx. \quad (4.33)$$

De modo análogo, multiplicando por  $\sin \frac{m\pi x}{L}$ , com  $m \geq 1$  e integrando, e por 4.17 e 4.15, temos que:

$$\begin{aligned} &\int_{-L}^L \left[ f(x) \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \right] dx = \\ &= \int_{-L}^L \left\{ \frac{a_0}{2} \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ a_n \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right) + b_n \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \right] \right\} dx \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right) dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ a_n \int_{-L}^L \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right) dx + b_n \int_{-L}^L \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right) dx \right] \\ &= \begin{cases} 0, & m \neq n \geq 1 \\ b_n L, & m = n \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Logo,

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \left[ f(x) \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right] dx. \quad (4.34)$$

**Definição 34** Os coeficientes  $a_n$ ,  $b_n$  e  $a_0$  definidos pelas expressões seguintes

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \left[ f(x) \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right] dx, \quad n \in \mathbb{N}; \quad (4.35)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \left[ f(x) \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right] dx, \quad n \in \mathbb{N}; \quad (4.36)$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx, \quad (4.37)$$

são denominados de coeficientes de Fourier.

Os coeficientes de Fourier verificam algumas propriedades, uma delas é a identidade de Parseval.

**Proposição 9 (Identidade de Parseval)** *Seja  $f$  uma função real de variável real, periódica de período  $2L$  e tal que  $f$  e  $|f|^2$  são integráveis. Então os coeficientes da série de Fourier de  $f$  satisfazem a chamada identidade de Parseval*

$$\frac{(a_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx. \quad (4.38)$$

**Demonstração:** ver [7] ■

### 4.3 Série de Fourier

**Definição 35 (Série de Fourier)** *Dada uma função real de variável real  $f$  periódica de período  $2L$ , integrável e absolutamente integrável, podemos calcular os seus coeficientes de Fourier pelas expressões constantes na definição 34 e escrever a relação seguinte:*

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (4.39)$$

À expressão do lado direito chamamos *Série de Fourier de  $f$*  e representamos por  $SF_f$ .

Não usamos o símbolo de igualdade pois a série de Fourier de  $f$  pode ser divergente.

Mas será que podemos atingir a igualdade? Iremos ver mais adiante quais as condições para que tal aconteça.

**Teorema 20 (Unicidade da série de Fourier)** *Sejam as funções  $f$  e  $g$  funções periódicas de período  $2L$ , integráveis e absolutamente integráveis em  $[-L, L]$ . Suponhamos que se verifica a convergência das respectivas séries de Fourier.*

*Se as respectivas séries de Fourier forem iguais, então  $f(x) = g(x)$  em todos os pontos de continuidade de  $f$  e  $g$ .*

**Demonstração:**

Definamos a função  $h$  tal que  $h(x) = f(x) - g(x)$ , donde, por hipótese, os coeficientes das séries de Fourier de  $h$  são nulos. Aplicando a identidade de Parseval 4.38, vem que

$$\begin{aligned} \frac{0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (0^2 + 0^2) &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L |h(x)|^2 dx \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{L} \int_{-L}^L |h(x)|^2 dx = 0 \\ &\Leftrightarrow h(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow f(x) = g(x). \end{aligned}$$

■

#### 4.4 Estimativa dos coeficientes de Fourier

O nosso objetivo nesta secção é encontrar estimativas para os coeficientes de Fourier.

Consideremos a função  $f$  periódica de período  $2L$ ,  $f$  e  $|f|$  integrável.

Donde

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left| \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L \left| f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \right| dx \\ &\leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)| dx = M, \text{ porque } \left| \cos \frac{n\pi x}{L} \right| \leq 1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
|b_n| &= \left| \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right| \\
&\leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L \left| f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \right| dx \\
&\leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)| dx = M, \text{ porque } \left| \sin \frac{n\pi x}{L} \right| \leq 1.
\end{aligned}$$

Resumindo, existe uma constante

$$M = \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)| dx,$$

tal que  $|a_n| \leq M$  e  $|b_n| \leq M$ , para qualquer  $n$  natural.

Consequimos obter uma melhor estimativa dos coeficientes, considerando  $f$  periódica de período  $2L$ , diferenciável, tal que a derivada  $f'$  e  $|f'|$  são integráveis.

Então integrando por partes, para  $n \geq 1$ , temos

$$\begin{aligned}
La_n &= \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\
&= \frac{L}{n\pi} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \Big|_{-L}^L - \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\
&= 0 - \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx,
\end{aligned}$$

isto é,

$$a_n = -\frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (4.40)$$

Ou seja,

$$|a_n| = \left| -\frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right| \leq \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L |f'(x)| dx. \quad (4.41)$$

Procedendo do mesmo modo para o coeficiente  $b_n$  e tendo em conta a peri-

odicidade de  $f$  e a paridade da função co-seno,

$$\begin{aligned} Lb_n &= \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= -\frac{L}{n\pi} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \Big|_{-L}^L + \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= 0 + \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \end{aligned}$$

vem que,

$$b_n = \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (4.42)$$

Ou seja,

$$|b_n| = \left| \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \right| \leq \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L |f'(x)| dx. \quad (4.43)$$

Concluimos assim que existe uma constante

$$N = \frac{1}{\pi} \int_{-L}^L |f'(x)| dx, \quad (4.44)$$

tal que, para todo o  $n \geq 1$ ,

$$|a_n| \leq \frac{N}{n} \quad \text{e} \quad |b_n| \leq \frac{N}{n}. \quad (4.45)$$

Podemos ainda tentar melhorar as estimativas dos coeficiente, supondo a função  $f$  periódica de período  $2L$  com  $f'$  contínua e  $f''$  e  $|f''|$  integrável.

Para tal, integremos por partes mais uma vez as expressões 4.40 e 4.42.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{-1}{n\pi} \left\{ \frac{-L}{n\pi} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \Big|_{-L}^L - \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L -f''(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \right\} \\ &= 0 - \frac{L}{(n\pi)^2} \int_{-L}^L f''(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx. \end{aligned}$$

Temos, assim

$$a_n = -\frac{L}{(n\pi)^2} \int_{-L}^L f''(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (4.46)$$

De modo análogo,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{n\pi} \left\{ \frac{-L}{n\pi} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \Big|_{-L}^L - \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f''(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right\} \\ &= 0 - \frac{L}{(n\pi)^2} \int_{-L}^L f''(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx. \end{aligned}$$

Resultando,

$$b_n = -\frac{L}{(n\pi)^2} \int_{-L}^L f''(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (4.47)$$

Donde, podemos estimar, cada um dos coeficientes como

$$|a_n| \leq \frac{L}{(n\pi)^2} \int_{-L}^L |f''(x)| dx = \frac{P}{n^2} \quad (4.48)$$

e

$$|b_n| \leq \frac{L}{(n\pi)^2} \int_{-L}^L |f''(x)| dx = \frac{P}{n^2}, \quad (4.49)$$

com  $P = \frac{L}{\pi^2} \int_{-L}^L |f''(x)| dx$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

## 4.5 Séries de Fourier para funções pares e ímpares

**Lema 4** *A série de Fourier de uma função par tem apenas os termos cosseno e a série de Fourier de uma função ímpar tem apenas os termos seno.*

**Demonstração:**

Consideremos a série de Fourier de uma função  $f$  par, então podemos reescrever os coeficientes de Fourier como:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \text{ produto de funções pares é uma função par} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{1}{L} \times 0 = 0, \text{ produto de função par por função ímpar é uma função ímpar.} \end{aligned}$$

Suponhamos, agora, que  $f$  é função ímpar, então

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= 0, \text{ produto de função par por função ímpar é uma função ímpar} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \text{ produto de funções pares é uma função par.} \end{aligned}$$

■

Com base no que acabamos de mostrar podemos reescrever os coeficientes de  $a_n$  e  $b_n$ .

Se  $f$  for uma função par,

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \in \mathbb{N}_0; \quad (4.50)$$

$$b_n = 0.$$

e se  $f$  for função ímpar,

$$a_n = 0;$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.51)$$

**Teorema 21** *Sejam  $f$  e  $f'$  seccionalmente contínuas no intervalo fechado  $[0, L]$ .*

*Então  $f(x)$  pode ser expandida em série de co-senos*

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad x \in [0, L] \quad (4.52)$$

*ou em série de senos*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad x \in [0, L], \quad (4.53)$$

*com os coeficiente  $a_n$  e  $b_n$  definidos por 4.50 e 4.51, respetivamente.*

**Demonstração:**

Suponhamos a função  $g$ , extensão par de  $f$ ,

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x < L \\ f(-x), & -L < x < 0. \end{cases}$$

Portanto, pelo lema 4, a série de Fourier de  $g(x)$  contém apenas co-senos

$$g(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \quad (4.54)$$

com

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L g(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Temos que  $g(x) \cos \frac{n\pi x}{L}$  é par, donde, por 4.50

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx.$$

E uma vez que  $g(x) = f(x)$  para  $x \in ]0, L[$ , então de 4.54 resulta

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}.$$

Consideremos agora a função  $h(x)$ , extensão ímpar de  $f$ ,

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x < L \\ -f(-x), & -L < x < 0. \end{cases}$$

Pelo lema 4, a série de Fourier de  $h(x)$  contém apenas senos

$$h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (4.55)$$

com

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L h(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Sabemos que o produto de funções ímpares é par, então  $h(x) \cos \frac{n\pi x}{L}$  é par, e de 4.51

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L h(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Como  $h(x) = f(x)$  para  $x \in ]0, L[$ , então de 4.55 vem que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

■

## 4.6 Forma complexa da série de Fourier

Nesta secção pretendemos estudar a teoria das séries de Fourier com recurso à teoria dos números complexos, tendo em conta a fórmula de Euler e consequências da mesma:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta); \quad (4.56)$$

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}; \quad (4.57)$$

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \quad (4.58)$$

**Teorema 22** *Seja  $f$  uma função real de variável real periódica de período  $2L$ , integrável e absolutamente integrável, então a série de Fourier de  $f$ ,*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (4.59)$$

*pode ser escrita na forma complexa*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i \frac{n\pi x}{L}}, \quad (4.60)$$

*com*

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i \frac{n\pi x}{L}} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.61)$$

**Demonstração:**

Tendo em conta as fórmulas 4.56, 4.58 e 4.57 podemos escrever:

$$\begin{aligned} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) &= \frac{a_n}{2} \left( e^{i\frac{n\pi x}{L}} + e^{-i\frac{n\pi x}{L}} \right) + \frac{b_n}{2i} \left( e^{i\frac{n\pi x}{L}} - e^{-i\frac{n\pi x}{L}} \right) \\ &= \left( \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right) e^{i\frac{n\pi x}{L}} + \left( \frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} \right) e^{-i\frac{n\pi x}{L}} \\ &= c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}} + \bar{c}_n e^{-i\frac{n\pi x}{L}} \end{aligned}$$

com

$$c_n = \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} = \frac{a_n}{2} - i\frac{b_n}{2} = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \quad (4.62)$$

e

$$\bar{c}_n = \frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} = \frac{a_n}{2} + i\frac{b_n}{2} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n). \quad (4.63)$$

De 4.35 e 4.36, vem que

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} (a_n - ib_n) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} - i \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \right] dx \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \left[ \cos \frac{n\pi x}{L} - i \sin \frac{n\pi x}{L} \right] dx \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\frac{n\pi x}{L}} dx. \end{aligned}$$

De modo análogo calculemos  $\bar{c}_n$ ,

$$\begin{aligned} \bar{c}_n &= \frac{1}{2} (a_n + ib_n) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} + i \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \right] dx \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \left[ \cos \frac{n\pi x}{L} + i \sin \frac{n\pi x}{L} \right] dx \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{i\frac{n\pi x}{L}} dx. \end{aligned}$$

Resumindo,

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-\frac{in\pi x}{L}} dx, & n > 0 \\ \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{\frac{in\pi x}{L}} dx, & n < 0 \\ \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{2} a_0, & n = 0. \end{cases}$$

Ou seja, podemos escrever o coeficiente  $c_n$  como

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{i\frac{n\pi x}{L}} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Então a série de Fourier pode ser escrita na sua forma complexa como

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}}. \quad (4.64)$$

■

## 4.7 Convergência das séries de Fourier

Vimos que para definir dos coeficientes de Fourier e os termos da série de Fourier tínhamos que verificar como hipóteses mínimas a periodicidade, integrabilidade e integrabilidade absoluta da função  $f$  no intervalo  $[-L, L]$ .

Mas a série de Fourier de uma função nem sempre converge. Para estudar a convergência da série de Fourier de uma função  $f$  necessitamos aplicar à função  $f$  condições adicionais. Analisaremos de seguida a convergência pontual e uniforme da série de Fourier.

### 4.7.1 Convergência pontual das séries de Fourier

Vejamus condições suficientes a aplicar à função  $f$  que garantam a convergência da série de Fourier num ponto fixo  $x$  para o valor  $f(x)$ , ou, em geral, que convirja para

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}. \quad (4.65)$$

**Teorema 23 (Teste de Dini)** *Seja  $f$  função periódica de período  $2L$ , com  $f$  e  $|f|$  integrável no intervalo  $[-L, L]$ .*

Suponhamos que existem e são finitos os limites laterais  $f(x^+)$  e  $f(x^-)$ , com  $x \in [-L, L]$ , e que existe  $\delta$  tal que

$$\int_0^\delta \left| \frac{g(x, y)}{y} \right| dy < \infty \quad (4.66)$$

com  $g(x, y) = f(x + y) - f(x^+) + f(x - y) - f(x^-)$ .

Então a série de Fourier de  $f$ ,  $SF_f$  é convergente em cada ponto  $x$  do intervalo  $[-L, L]$ , para

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}, \quad (4.67)$$

isto é, a soma parcial de ordem  $k$ ,  $SF_k$ , converge para 4.67 quando  $k \rightarrow +\infty$ .

**Demonstração:**

Consideremos a soma parcial de ordem  $k$  da série de Fourier  $SF_f$ ,

$$SF_k = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^k \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right).$$

Definamos

$$e_k(x) = SF_k(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}. \quad (4.68)$$

Comecemos por substituir os coeficientes de Fourier, já determinados, em  $SF_k$ .

$$\begin{aligned} SF_k &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx + \\ &+ \sum_{n=1}^k \left\{ \frac{1}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \left( \frac{n\pi t}{L} \right) dt + \frac{1}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \left( \frac{n\pi t}{L} \right) dt \right\} \\ &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^k \left( \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi t}{L} + \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi t}{L} \right) \right] dt \\ &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^k \cos \frac{n\pi(x-t)}{L} \right] dt. \end{aligned}$$

Do lema 2 de núcleo de Dirichlet, sabemos que

$$\frac{1}{L} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^k \cos \frac{n\pi(x-t)}{L} \right] = \frac{\sin \left[ \left( k + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi(x-t)}{L} \right]}{2L \sin \frac{\pi(x-t)}{2L}} = D_k(x-t).$$

Donde, fazendo as devidas substituições,

$$SF_k = \int_{-L}^L f(t) D_k(x-t) dt. \quad (4.69)$$

Façamos agora uma mudança de variável tal que  $y = t - x$ , o que implica que  $dy = dt$  e  $y \in ]-L-x, L-x[$ . A função  $f$  e  $D_k$  são periódicas de período  $2L$  e  $D_k$  é uma função par, então podemos reescrever 4.69 como,

$$\begin{aligned} SF_k &= \int_{-L-x}^{L-x} f(y+x) D_k(-y) dy \\ &= \int_{-L}^L f(y+x) D_k(y) dy \\ &= \int_{-L}^0 f(y+x) D_k(y) dy + \int_0^L f(y+x) D_k(y) dy \\ &= - \int_0^L -f(x-y) D_k(-y) dy + \int_0^L f(y+x) D_k(y) dy = \\ &= \int_0^L f(x-y) D_k(y) dy + \int_0^L f(y+x) D_k(y) dy \\ &= \int_0^L [f(x-y) + f(x+y)] D_k(y) dy. \end{aligned}$$

Do lema 2 sabemos que  $D_k(y)$  é par e  $\int_{-L}^L D_k(y) dy = 1$ , o que nos leva a

$$\int_{-L}^L D_k(y) dy = 1 \Leftrightarrow \int_0^L D_k(y) dy = \frac{1}{2}. \quad (4.70)$$

De 4.68 e 4.70, resulta

$$\begin{aligned} e_k(x) &= \int_0^L [f(x-y) + f(x+y)] D_k(y) dy - \int_0^L D_k(y) [f(x^+) + f(x^-)] dy \\ &= \int_0^L D_k(y) [f(x-y) + f(x+y) - f(x^+) - f(x^-)] dy. \end{aligned}$$

Definindo a função  $g(x, y)$  do seguinte modo

$$g(x, y) = f(x-y) - f(x^-) + f(x+y) - f(x^+), \quad (4.71)$$

temos que

$$e_k(x) = \int_0^L D_k(y) g(x, y) dy. \quad (4.72)$$

Queremos agora mostrar que  $e_k(x) \rightarrow 0$ , quando  $k \rightarrow +\infty$ .

Retomando a expressão 4.72 e considerando  $L > \delta > 0$ , decompos  $e_k(x)$  em duas partes,

$$\begin{aligned} e_k(x) &= \int_0^\delta \frac{\sin(k + \frac{1}{2})\frac{\pi y}{L}}{2L \sin \frac{\pi y}{2L}} g(x, y) dy + \int_\delta^L \frac{\sin(k + \frac{1}{2})\frac{\pi y}{L}}{2L \sin \frac{\pi y}{2L}} g(x, y) dy \\ &= \int_0^\delta y \frac{\sin(k + \frac{1}{2})\frac{\pi y}{L}}{2L \sin \frac{\pi y}{2L}} \frac{g(x, y)}{y} dy + \int_\delta^L \sin \left[ \left( k + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi y}{L} \right] \frac{g(x, y)}{2L \sin \frac{\pi y}{2L}} dy. \end{aligned}$$

Temos que  $\left| \sin \frac{\pi y}{2L} \right| \leq 1$  e para  $y \in [0, L]$ ,  $\frac{y}{2L} \leq \frac{1}{2}$ .

A função  $h(y) = \frac{y}{\sin \frac{\pi y}{2L}}$  é crescente no intervalo  $[0, L]$ , pois temos que

$$h'(y) = \frac{\sin \frac{\pi y}{2L} - \frac{\pi y}{2L} \cos \frac{\pi y}{2L}}{\sin^2 \frac{\pi y}{2L}} > 0,$$

dado que

$$\sin x > x \cos x, \text{ para } x \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right[.$$

O valor máximo de  $h$  no intervalo  $[0, L]$  é atingido em  $y = L$ , onde  $h(L) = L$ , portanto  $h(y) \leq L$ , para todo  $y \in [0, L]$ .

Donde, sendo a função  $\frac{y}{\sin \frac{\pi y}{2L}}$  crescente e contínua em  $[0, L]$ , temos que

$$\frac{y}{\sin \frac{\pi y}{2L}} \leq \frac{1}{2}.$$

Então, pela hipótese 4.66, dado  $\epsilon > 0$ , tomando  $\delta > 0$  suficientemente pequeno, temos

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\delta y D_k(x) \frac{g(x, y)}{y} dy \right| &\leq \int_0^\delta |y D_k(x)| \left| \frac{g(x, y)}{y} \right| dy \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^\delta \left| \frac{g(x, y)}{y} \right| dy \\ &\leq \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Vamos ver agora como se comporta o segundo integral,

$$\int_\delta^L \sin \left[ \left( k + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi y}{L} \right] \frac{g(x, y)}{2L \sin \frac{\pi y}{2L}} dy.$$

A função  $g(x, y)$  é uma função integrável e absolutamente integrável em  $[\delta, L]$  assim como  $\frac{g(x, y)}{L \sin \frac{\pi y}{2L}}$ , então pelo Lema 3 vem que, para  $k \rightarrow +\infty$ ,

$$\left| \frac{1}{2} \int_{\delta}^L \sin \left[ \left( k + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi y}{L} \right] \frac{g(x, y)}{L \sin \frac{\pi y}{2L}} dy \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} |e_k(x) - 0| &= \left| \int_0^{\delta} y D_k(y) \frac{g(x, y)}{y} dy + \frac{1}{2} \int_{\delta}^L \sin \left[ \left( k + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi y}{L} \right] \frac{g(x, y)}{L \sin \frac{\pi y}{2L}} dy \right| \\ &\leq \left| \int_0^{\delta} y d_k(y) \frac{g(x, y)}{t} dt \right| + \left| \frac{1}{2} \int_{\delta}^L \sin \left[ \left( k + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi y}{L} \right] \frac{g(x, y)}{L \sin \frac{\pi y}{2L}} dy \right| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Concluimos assim que  $|e_k(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ , isto é,

$$e_k(x) = SF_k(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \rightarrow 0, \text{ quando } k \rightarrow +\infty.$$

■

Os corolários seguintes mostram-nos como podemos utilizar o teste de Dini para obter condições suficientes para a convergência da série de Fourier mais simples de verificar.

**Corolário 1** *Suponhamos que a função  $f$  é Hölder contínua na vizinhança do ponto  $x$ . Então verifica-se a condição 4.66 do teste de Dini.*

**Demonstração:**

Por hipótese, a expressão 4.4 implica que a função  $f$  é contínua no ponto  $x$ , ou seja,  $f(x^-) = f(x^+) = f(x)$ , e existem  $\alpha$ ,  $k$  e  $\delta$  tal que a expressão 4.71 pode tomar a forma

$$\begin{aligned} |g(x, y)| &\leq |f(x - y) - f(x)| + |f(x + y) - f(x)| \\ &\leq k|x - y - x|^\alpha + k|x + y - x|^\alpha \\ &= k|-y|^\alpha + k|y|^\alpha \\ &= 2k|y|^\alpha, \end{aligned}$$

para  $y \in [x - \delta, x + \delta]$  donde

$$\begin{aligned} \int_0^\delta \left| \frac{g(x, y)}{y} \right| dy &\leq \int_0^\delta \left| \frac{2ky^\alpha}{y} \right| dy \\ &\leq 2k \int_0^\delta |y|^{\alpha-1} dy \\ &= 2k \left[ \frac{y^\alpha}{\alpha} \right]_0^\delta \\ &= 2k \frac{\delta^\alpha}{\alpha} < \infty. \end{aligned}$$

Portanto verifica a condição do teste de Dini. ■

**Corolário 2** *Se a função  $f$  tiver derivada no ponto  $x$ , então a série de Fourier  $SF_f$  converge pontualmente para  $f$ .*

**Demonstração:**

Se  $f$  tem derivada em  $x$ , então  $f$  é em particular Hölder contínua com  $\alpha = 1$ , donde pode ser usado diretamente o resultado do corolário anterior. ■

**Corolário 3** *Suponhamos que a função  $f$  é seccionalmente contínua e que as razões incrementais*

$$\frac{f(x+y) - f(x^+)}{y} \text{ e } \frac{f(x-y) - f(x^-)}{y} \quad (4.73)$$

são limitadas para  $y > 0$  suficientemente pequeno. Em particular isto é verdade se existirem as derivadas laterais de  $f$  em  $x$ ,

$$f'_+(x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(x+y) - f(x^+)}{y} \text{ e } f'_-(x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(x-y) - f(x^-)}{y} \quad (4.74)$$

então

$$SF_f(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}. \quad (4.75)$$

**Demonstração:**

Se  $f$  é seccionalmente contínua em  $[-L, L]$ , então em particular os limites laterais existem para todo o  $x \in [-L, L]$ . E se  $f'$  também é seccionalmente contínua em  $[-L, L]$ , então as derivadas laterais em  $x$  existem

$$f'_+(x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(x+y) - f(x^+)}{y},$$

$$f'_-(x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(x-y) - f(x^-)}{y}$$

e

$$\int_0^\delta \left| \frac{f(x-y) - f(x^-) + f(x+y) - f(x^+)}{y} \right| dt \leq \int_0^\delta \left| \frac{f(x-y) - f(x^-)}{y} \right| dt + \int_0^\delta \left| \frac{f(x+y) - f(x^+)}{y} \right| dt$$

é finito para algum  $\delta > 0$  suficientemente pequeno.

Donde, são válidas as hipóteses de Dini, logo

$$SF_f(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

■

Podemos então enunciar o seguinte resultado, que acabamos de demonstrar:

**Teorema 24 (Teorema de Fourier)** *Seja  $f$  uma função real de variável real seccionalmente diferenciável e de período  $2L$ .*

*Então a série de Fourier da função  $f$  dada por*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (4.76)$$

*converge, em cada ponto  $x$ , para  $\frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)]$ , isto é,*

$$\frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)] = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (4.77)$$

Uma função  $f$  para ser representável por uma série de Fourier deve ser periódica e seccionalmente diferenciável, sendo esta última condição uma condição suficiente mas não necessária para que se possa expandir a função  $f$  em série de Fourier. Isto é, toda a função periódica e seccionalmente diferenciável é representável em série de Fourier, mas existem funções representadas por série de Fourier que não são seccionalmente diferenciáveis.

A representação em série de Fourier de uma função é convergente para o ponto médio dos limites laterais de  $f$  para todo o  $x$ . Assim, nos pontos onde a função é contínua a série converge para a própria imagem de  $f(x)$  e onde é descontínua a série converge para a média

$$\frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)]. \quad (4.78)$$

### 4.7.2 Convergência uniforme das séries de Fourier

Nesta secção vamos obter condições sobre a função  $f$  para garantir a convergência uniforme da sua série de Fourier.

Da aplicação do teste M de Weierstrass surge o teorema seguinte:

**Teorema 25** *Consideremos  $f$  uma função periódica de período  $2L$ , contínua, com  $f'$  e  $|f'|$  integrável. Então a soma da série de Fourier  $SF_f$  converge absoluta e uniformemente para  $f$  em  $[-L, L]$  se  $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$  convergir.*

Neste caso temos  $f = SF_f$ .

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} |SF_f(x)| &= \left| \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left( \left| a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \right| + \left| b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right| \right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|). \end{aligned}$$

■

Assim vamos ver em que condições a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) \tag{4.79}$$

converge.

Tendo em conta 4.48 e 4.49 e pelo teorema 18, sabendo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq P \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \leq P \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

e que são ambas séries convergentes logo  $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$  também é convergente.

Os dois resultados seguintes dão nos condições suficientes sobre a função  $f$  e que garantem a convergência uniforme da série correspondente.

**Teorema 26** *Seja  $f$  uma função periódica de período  $2L$ , contínua e com  $f'$  e  $|f'|$  integrável, então a série de Fourier de  $f$  converge uniformemente para  $f$ .*

**Demonstração:**

Suponhamos  $f$  uma função periódica de período  $2L$ , contínua e com  $f'$  e  $|f'|$  integrável.

Já vimos em 4.40 e 4.42 que

$$a'_n = \frac{-L}{n\pi} b_n \quad \text{e} \quad b'_n = \frac{L}{n\pi} a_n,$$

onde  $a'_n$  e  $b'_n$  são os coeficientes de Fourier de  $f'$ .

Podemos substituir os coeficientes da série reduzida 4.79 de ordem  $n$  pelos anteriores e temos que, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e

$$(|a_j| + |b_j|)^2 \leq 2(a_j^2 + b_j^2),$$

vem que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (|a'_j| + |b'_j|) &= \frac{L}{\pi} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} (|a_j| + |b_j|) \\ &\leq \frac{L}{\pi} \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \sum_{j=1}^n (|a_j| + |b_j|)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{L}{\pi} \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \sum_{j=1}^n 2(a_j^2 + b_j^2) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}L}{\pi} \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \sum_{j=1}^n (a_j^2 + b_j^2) \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

O primeiro somatório é convergente e o segundo, tendo em conta a desigualdade de Parseval também o é. ■

Até aqui vimos que a série converge uniformemente quando  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}$  enquanto  $f'$  poderá ser descontínua. E se ocorrer o caso da função  $f$  ser apenas seccionalmente contínua?

**Teorema 27** *Seja  $f$  uma função periódica de período  $2L$ , seccionalmente contínua e com  $f'$  e  $|f'|$  integrável, então a série de Fourier de  $f$  converge uniformemente para  $f$  em todo o intervalo fechado sem pontos de descontinuidade.*

**Demonstração:**

Iremos aplicar o seguinte lema, cuja demonstração pode ser consultada em [7], na demonstração do teorema.

**Lema 5** *Seja  $\psi(x)$  a função periódica de período  $2L$  definida por:*

$$\psi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{L}\right) & , \quad -L \leq x < 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{L}\right) & , \quad 0 < x \leq L. \end{cases} \quad (4.80)$$

*Então a série de Fourier de  $\psi$  converge uniformemente para  $\psi$  em qualquer intervalo que não contenha pontos da forma  $2Ln$ , para  $n$  inteiro.*

Sejam  $x_1, \dots, x_k$  os pontos do intervalo  $[-L, L]$  onde a função  $f$  é descontínua, e sejam  $w_1, \dots, w_k$  os saltos de  $f$ , nesses pontos de descontinuidade, isto é,  $w_j = f(x_j^+) - f(x_j^-)$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Logo a função  $w_j\psi(x - x_j)$  é descontínua nos pontos da forma  $x_j \pm 2Ln$ ,  $n = 1, \dots, n$ . Então a função  $g(x) = f(x) - w_j\psi(x - x_j)$  é contínua nesses pontos e em todos os pontos onde  $f$  já era contínua.

Temos, assim, uma função com menos descontinuidades que a função  $f$ . Para eliminar todas as descontinuidades repetimos o processo  $k$  vezes e teremos a função

$$g(x) = f(x) - \sum_{j=1}^k w_j\psi(x - x_j), \quad (4.81)$$

contínua para todo o  $x$ .

Pelo teorema 26, a série de Fourier da função  $g$  converge uniformemente para  $g$ . Pelo lema 5, a série de Fourier da função  $\psi(x - x_j)$  converge uniformemente em qualquer intervalo que não contenha pontos da forma  $x_j \pm 2Ln$ .

Como a série de Fourier da função  $f$  é a soma das séries de Fourier das funções  $g$  e  $w_j\psi(x - x_j)$ , para  $j = 1, \dots, k$  então converge uniformemente em qualquer intervalo fechado que não contenha os pontos da forma  $x_j \pm 2Ln$ , que são os pontos de descontinuidade de  $f$ . ■

## 4.8 Integração de séries de Fourier

Vamos ver agora como proceder na integração de séries de Fourier.

**Teorema 28** *Seja  $f$  função real de variável real seccionalmente contínua de período  $2L$ .*

Suponha-se que a sua série de Fourier é dada por

$$SF_f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (4.82)$$

Então,

1. a série pode ser integrada termo a termo e o valor da série é

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \int_a^b a_n \cos \frac{n\pi x}{L} dx + \int_a^b b_n \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right); \quad (4.83)$$

2. a função

$$F(x) = \int_0^x \left( f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt \quad (4.84)$$

é periódica de período  $2L$ , contínua e com derivada  $F'$  seccionalmente contínua e é representada pela série de Fourier

$$\int_0^x f(t)dt - \frac{a_0}{2}x = \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{L}{n\pi} b_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \frac{L}{n\pi} a_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (4.85)$$

e

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L F(x)dx = \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n}. \quad (4.86)$$

### Demonstração:

Consideremos a função  $f$  real de variável real igual à sua série de Fourier, supondo que a mesma converge uniformemente.

Nestas condições podemos aplicar a proposição 4 para concluir que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \int_a^b a_n \cos \frac{n\pi x}{L} dx + \int_a^b b_n \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right). \quad (4.87)$$

O nosso objetivo nesta secção é mostrar que a igualdade continua a verificar-se mesmo que a série de Fourier não convirja uniformemente para a função  $f$ .

Começemos por supor  $f$  uma função real de variável real, seccionalmente contínua e de período  $2L$ .

Defina-se  $F$  função real de variável real contínua tal que

$$F(x) = \int_0^x \left( f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt. \quad (4.88)$$

Por hipótese  $F$  é contínua, e pelo teorema 14 temos que  $F'(x)$  existe em todos os pontos  $x$  onde  $f$  é contínua e

$$F'(x) = f(x).$$

Temos então que  $F'(x)$  é seccionalmente contínua.

Veremos agora que a função  $F$  também é periódica de período  $2L$ , isto é,

$$F(x + 2L) - F(x) = 0.$$

Se  $f(t)$  é periódica de período  $2L$ , então  $f(t) - \frac{a_0}{2}$  também o é, logo

$$F(x + 2L) - F(x) = \int_0^{2L} \left( f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt.$$

e como por definição

$$\int_{-L}^L f(t) dt = \frac{a_0}{2},$$

usando novamente a periodicidade de  $f(t)$  vem

$$\int_0^{2L} \left( f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt = 0.$$

Resumindo, temos a função  $F$  contínua, com derivada  $F'$  seccionalmente contínua e periódica de período  $2L$ .

Então pelo teorema de Fourier,

$$F(x) = \frac{1}{2} [F(x^+) + F(x^-)] = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{n\pi x}{L} + B_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (4.89)$$

com coeficientes

$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \left[ F(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \right] dx, \quad n \geq 0 \quad (4.90)$$

e

$$B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \left[ F(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \right] dx, \quad n \geq 1. \quad (4.91)$$

Integrando agora por partes cada um dos coeficientes  $A_n$  e  $B_n$ , mostramos a relação existente entre os coeficientes de Fourier da função  $F$  e os da função  $f$ .

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{L} \left[ \frac{L}{n\pi} F(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \Big|_{-L}^L - \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} F'(x) dx \right] \\ &= \frac{1}{L} \left[ 0 - \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} f(x) dx \right], \text{ porque } F'(x) = f(x) \\ &= -\frac{1}{L} \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} f(x) dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$A_n = -\frac{L}{n\pi} b_n, \quad n \geq 1. \quad (4.92)$$

Fazendo o cálculo análogo para o coeficiente  $B_n$ , temos que,

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{L} \left[ \frac{-L}{n\pi} F(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \Big|_{-L}^L - \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L -\cos \frac{n\pi x}{L} F'(x) dx \right] \\ &= \frac{1}{L} \left[ 0 + \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} f(x) dx \right], \text{ porque } F'(x) = f(x) \\ &= \frac{L}{n\pi L} \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} f(x) dx. \end{aligned}$$

Mostramos que,

$$B_n = \frac{L}{n\pi} a_n, \quad n \geq 1. \quad (4.93)$$

Para calcular o coeficiente  $A_0$ , faremos  $x = 0$  na série de Fourier 4.89,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \cos 0 + B_n \sin 0) &= \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \times 1 + B_n \times 0) \\ &= \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \\ &= \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( -\frac{L}{n\pi} b_n \right). \end{aligned}$$

Por definição da função  $F$  temos que  $F(0) = 0$ , donde

$$\begin{aligned} F(0) = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{L}{n\pi}b_n\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow A_0 = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n}. \end{aligned}$$

Da definição 4.88 da função  $F$  e substituindo na série de Fourier os coeficientes acabados de determinar, resulta que

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t)dt - \frac{a_0}{2}x &= \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{L}{n\pi}b_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \frac{L}{n\pi}a_n \sin \frac{n\pi x}{L}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[-\frac{L}{n\pi}b_n \left(\cos \frac{n\pi x}{L} - 1\right) + \frac{L}{n\pi}a_n \sin \frac{n\pi x}{L}\right]. \end{aligned}$$

Sendo as funções trigonométricas seno e co-seno diferenciáveis e integráveis, temos que,

$$\begin{aligned} \frac{L}{n\pi}a_n \sin \frac{n\pi x}{L} &= \frac{L}{n\pi}a_n \left(\sin \frac{n\pi x}{L} - \sin 0\right) \\ &= \frac{L}{n\pi}a_n \int_0^x \frac{n\pi}{L} \cos \frac{n\pi t}{L} dt \\ &= \int_0^x a_n \cos \frac{n\pi t}{L} dt \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} -\frac{L}{n\pi}b_n \left(\cos \frac{n\pi x}{L} - 1\right) &= -\frac{L}{n\pi}b_n \left(\cos \frac{n\pi x}{L} - \cos 0\right) \\ &= -\frac{L}{n\pi}b_n \int_0^x \frac{-n\pi}{L} \sin \frac{n\pi t}{L} dt \\ &= \int_0^x b_n \sin \frac{n\pi t}{L} dt. \end{aligned}$$

Deste modo, podemos escrever a expressão

$$\int_0^x f(t)dt - \frac{a_0}{2}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[-\frac{L}{n\pi}b_n \left(\cos \frac{n\pi x}{L} - 1\right) + \frac{L}{n\pi}a_n \sin \frac{n\pi x}{L}\right] \quad (4.94)$$

como

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{a_0}{2}dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^x a_n \cos \frac{n\pi t}{L} dt + \int_0^x b_n \sin \frac{n\pi t}{L} dt\right). \quad (4.95)$$

Fazendo  $x = a$ , resulta

$$\int_0^a f(t)dt = \int_0^a \frac{a_0}{2}dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \int_0^a a_n \cos \frac{n\pi t}{L} dt + \int_0^a b_n \sin \frac{n\pi t}{L} dt \right) \quad (4.96)$$

e se  $x = b$  vem que

$$\int_0^b f(t)dt = \int_0^b \frac{a_0}{2}dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \int_0^b a_n \cos \frac{n\pi t}{L} dt + \int_0^b b_n \sin \frac{n\pi t}{L} dt \right). \quad (4.97)$$

Tomemos agora a subtração das duas expressões anteriores e conseguimos concluir o que pretendemos.

$$\begin{aligned} \int_0^b f(t)dt - \int_0^a f(t)dt &= \int_0^b \frac{a_0}{2}dt + \\ &+ \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \int_0^b a_n \cos \frac{n\pi t}{L} dt + \int_0^b b_n \sin \frac{n\pi t}{L} dt \right) - \\ &- \left[ \int_0^a \frac{a_0}{2}dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \int_0^a a_n \cos \frac{n\pi t}{L} dt + \int_0^a b_n \sin \frac{n\pi t}{L} dt \right) \right] \\ &\Leftrightarrow \int_a^b f(t)dt = \int_a^b \frac{a_0}{2}dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \int_a^b a_n \cos \frac{n\pi t}{L} dt + \int_a^b b_n \sin \frac{n\pi t}{L} dt \right). \end{aligned}$$

■

## Capítulo 5

# Equações Diferenciais Parciais de Segunda Ordem

Na Física muitos dos problemas são formulados por equações diferenciais que contêm uma ou mais funções desconhecidas de duas ou mais variáveis e as suas derivadas parciais em relação a essas variáveis. Este tipo de equação designa-se por equação diferencial parcial (EDP).

Neste capítulo iremos analisar dois problemas clássicos da aplicação da teoria das equações diferenciais parciais lineares de segunda ordem: a equação do calor (ou difusão) usada para modelar a evolução da temperatura num determinado corpo e a equação da onda que descreve a propagação de uma onda num determinado meio.

**Definição 36** *Seja  $u(x, t)$  uma função com  $x, t$  variáveis independentes. Uma equação diferencial parcial contém as variáveis independentes  $x, t$ , a variável dependente  $u$  e as suas derivadas parciais.*

*Uma EDP linear de segunda ordem é da forma*

$$F\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = 0, \quad (5.1)$$

com  $F$  uma função dada.

A equação do calor aparece no estudo da condução do calor ou em processos de difusão. A temperatura  $u(x, t)$  numa barra homogênea, em função da posição  $x$  no tempo  $t$ , é uma equação que satisfaz a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (5.2)$$

em que  $K$  é constante de difusão térmica e que depende somente do material da barra.

A equação das ondas permite descrever diversos processos de propagação como o som, as ondas acústicas, as ondas de água, as ondas eletromagnéticas, entre outros.

Consideremos uma corda de comprimento  $L$  e a função  $u(x, t)$  que define o deslocamento da corda no ponto  $x$  no tempo  $t$ . Se todos os efeitos do amortecimento, como a resistência do ar forem desprezados e a amplitude do movimento não for grande, então a função  $u(x, t)$ , com  $0 \leq x \leq L$ , satisfaz a equação diferencial parcial,

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (5.3)$$

com  $\alpha^2 = \frac{H}{\rho}$ .

Iremos estudar a equação do calor e a equação das ondas usando o método da separação das variáveis e as séries de Fourier.

## 5.1 Equação do Calor

Consideremos uma barra de metal uniforme de comprimento  $L$  cuja superfície está isolada, isto é, nenhum calor escapa da barra nem é gerado dentro da barra.

**Definição 37** *Calor é a energia que é transferida entre um sistema e o seu meio envolvente, devido a uma diferença de temperatura que existe entre eles.*

Suponhamos que a temperatura  $u$ , dependente da posição de  $x$  e do tempo  $t$ , é constante em qualquer ponto da barra.

Consideremos que o fluxo de calor se verifica apenas na direção  $x$  e o calor específico  $c$  e a condutividade térmica  $k$  do material da barra são constantes. A condutividade térmica depende do material de que é feita a barra.

### 5.1.1 Definições e generalidades

**Definição 38** *A capacidade calorífica ou capacidade térmica  $C$  de um corpo relaciona a quantidade de calor  $Q$  necessária por unidade de variação de temperatura do corpo*

$$C = \frac{Q}{\Delta u}. \quad (5.4)$$

**Definição 39** O calor específico  $c$  da substância é a capacidade térmica por unidade de massa do corpo, isto é, quantidade de calor que é necessário fornecer à unidade de massa da substância para elevar a temperatura de um grau.

$$c = \frac{1}{m} \frac{Q}{\Delta u}. \quad (5.5)$$

O que nos leva à chamada equação fundamental da calorimetria - quantidade de calor  $Q$  num elemento com massa  $m$  e temperatura  $u$

$$Q = mc\Delta u. \quad (5.6)$$

Fisicamente sabe-se que, numa mesma área, duas secções paralelas separadas por uma distância  $\Delta x$  e com temperaturas  $T_1$  e  $T_2$ , uma quantidade do calor por unidade de tempo vai passar da parte mais quente para a mais fria.

**Definição 40** A lei da condução térmica diz-nos que a quantidade de calor por unidade de tempo  $q$  através de uma secção transversal é proporcional à área  $A$  da secção transversal e à diferença da temperatura e inversamente proporcional à distância  $\Delta x$ , isto é,

$$q = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{-kA|T_2 - T_1|}{\Delta x}, \quad (5.7)$$

com  $k$  constante de condutividade térmica.

Esta relação é conhecida por lei da condução do calor de Fourier.

### 5.1.2 Dedução da equação do calor

Consideremos uma parte da barra entre a posição  $x$  e  $x + \Delta x$ , como podemos observar na figura 5.1.

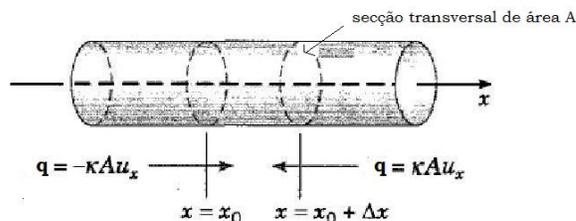


Figura 5.1: Condução de calor numa barra de metal.

A taxa instantânea de calor  $q(x, t)$ , para  $\Delta x$  pequeno, é dada por

$$q(x, t) = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} kA \frac{|u(x + \Delta x, t) - u(x, t)|}{\Delta x} \quad (5.8)$$

$$= -kA \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (5.9)$$

Como a barra está isolada, o calor só pode ser gasto a aquecer a barra no pedaço correspondente a  $\Delta x$  durante o intervalo de tempo  $\Delta t$ . O calor retido por unidade de tempo é a diferença entre o calor que entra e o calor que sai, ou seja,

$$\begin{aligned} q(x, t) - q(x + \Delta x, t) &= -kA \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + kA \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} \\ &= \frac{kA}{\Delta x} \left[ \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] \Delta x \\ &= kA \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \Delta x, \end{aligned}$$

isto é,

$$Q(x, t) = kA \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \Delta x \Delta t. \quad (5.10)$$

Consideremos o calor específico  $c$  e  $\rho$  a massa específica da barra. Temos que a massa contida em  $\Delta x$  é dada por  $\rho A \Delta x$  e, substituindo em 5.6, temos que na vizinhança do ponto  $x$ ,

$$Q(x, t) = \rho A c \Delta x \Delta u = \rho A c \Delta x \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Delta t. \quad (5.11)$$

A taxa segundo a qual o calor entra em qualquer parte da barra é igual à taxa segundo a qual o calor é absorvido nessa mesma parte da barra. Donde, igualando as expressões 5.10 e 5.11, vem que

$$\begin{aligned} kA \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \Delta x \Delta t = \rho A c \Delta x \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Delta t &\Leftrightarrow k \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \rho c \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\rho c}{k} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}. \end{aligned}$$

Fazendo  $K = \frac{k}{\rho c}$ , constante de difusão térmica que depende somente do material da barra e sendo  $u(x, t)$  a temperatura no ponto  $x$  no tempo  $t$ , para  $0 < x < L$ , obtemos a chamada equação do calor

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}. \quad (5.12)$$

A solução da equação será uma função  $u(x, t)$  que satisfaz a equação.

### 5.1.3 Solução da equação do calor

Para determinar a solução da equação do calor necessitamos de conhecer a temperatura inicial distribuída pela barra e de saber o que acontece nas extremidades da barra, isto é, teremos que definir algumas condições.

Suponhamos as extremidades mantidas à temperatura constante de  $0^\circ\text{C}$ . Pretendemos determinar a solução da equação

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \text{ para } t > 0 \text{ e } 0 < x < L, \quad (5.13)$$

sujeita às condições de fronteira

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, t > 0 \quad (5.14)$$

e condição inicial

$$u(x, 0) = f(x), 0 \leq x \leq L. \quad (5.15)$$

Ou seja, dados  $K$  e  $f(x)$  podemos escrever o seguinte problema de valor inicial e valor fronteira (PVIF):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & t > 0, \quad 0 < x < L \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L. \end{cases} \quad (5.16)$$

Começemos por definir solução, se existir, de um problema deste tipo e ver em que condições a solução existirá.

**Definição 41** *Defina-se o conjunto  $R^* = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq L, t \geq 0\}$ .*

*Uma função  $u : R^* \rightarrow \mathbb{R}$  é solução do PVIF 5.16 se for contínua em  $R^*$ , se existirem as derivadas parciais  $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$  e  $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$  em  $\mathbb{R}^2$  e se satisfizer as três condições definidas no PVIF 5.16.*

Poderemos nem sempre conseguir definir a função  $f$  com estas condições. A definição seguinte salvaguarda estas situações.

**Definição 42** Definamos o conjunto  $\widehat{R} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq L, t > 0\}$ .

Um função contínua  $u : \widehat{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma solução do PVIIF definido em 5.16 se se verifica

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= K \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad t > 0, 0 < x < L; \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0, \quad t > 0; \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^L u(x, t) \phi(x) dx = \int_0^L f(x) \phi(x) dx.$$

para toda a função  $\phi$  seccionalmente contínua no intervalo  $[0, L]$ .

Aplicando o método de separação de variáveis iremos reduzir as equações diferenciais parciais a pares de equações diferenciais ordinárias, sujeitas às condições iniciais e de fronteira.

Definamos a função  $u$  na forma de produto de uma função que depende apenas da variável  $x$  por uma função que depende apenas da variável  $t$ ,

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (5.18)$$

Temos que

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = X(x)T'(t) \quad e \quad \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = X''(x)T(t). \quad (5.19)$$

De 5.12, vem que

$$\begin{aligned} X(x)T'(t) &= KX''(x)T(t) \Leftrightarrow \frac{X(x)T'(t)}{KX(x)T(t)} = \frac{KX''(x)T(t)}{KX(x)T(t)} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{K} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \end{aligned}$$

O 1.º membro depende apenas de  $t$  e o 2.º membro depende apenas de  $x$ , que nos leva a concluir que para serem iguais têm que ser constantes.

Então, para qualquer  $\lambda$ ,

$$\frac{1}{K} \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda = \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (5.20)$$

A constante  $\lambda$  designa-se por constante de separação.

Juntando as condições iniciais e de fronteira definidas em (5.16) temos que, para todo o  $t \geq 0$

$$\begin{cases} 0 = u(0, t) = X(0)T(t) \\ 0 = u(L, t) = X(L)T(t). \end{cases} \quad (5.21)$$

Não nos interessa  $u(x, t) = 0$ , logo não podemos ter  $T(t) = 0$ , para todo o  $t$ , o que implica que  $X(0) = 0 = X(L)$ .

Então  $u(x, t) = X(x)T(t)$  é solução, para qualquer  $\lambda$ , se:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \text{ com } X(0) = 0 = X(L) \quad (5.22)$$

e

$$T'(t) + \lambda K T(t) = 0. \quad (5.23)$$

Concentremo-nos na primeira equação 5.22

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \text{ com } X(0) = 0 = X(L). \quad (5.24)$$

Temos três possibilidades para o cálculo da constante  $\lambda$ .

1. Suponhamos  $\lambda < 0$ , então a solução geral da equação 5.24 é

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}. \quad (5.25)$$

Para satisfazer  $X(0) = 0 = X(L)$ , temos que:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{\sqrt{\lambda}L} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}L} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -c_2 \\ c_2 \left( -e^{\sqrt{\lambda}L} + e^{-\sqrt{\lambda}L} \right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0, \quad \lambda, L \neq 0. \end{cases}$$

com solução única  $c_1 = c_2 = 0$ , o que implica que  $X(x) = 0$ , para todo o  $x$ , o que não nos interessa.

2. Veremos agora o caso em que  $\lambda = 0$ .

De 5.24 vem que

$$X''(x) = 0 \Leftrightarrow X(x) = c_1x + c_2 \quad (5.26)$$

donde  $c_2 = 0$  e  $c_1L + c_2 = 0$ , ou seja,  $c_1 = 0 = c_2$ , o que implica que  $X(x) = 0$ , para todo o  $x$ .

3. Se  $\lambda > 0$ , a solução geral da equação 5.24 é da forma

$$X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x). \quad (5.27)$$

Pretendemos que a solução satisfaça

$$\begin{aligned} \begin{cases} X(0) = 0 \\ X(L) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 \cos(\sqrt{\lambda}L) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ \sqrt{\lambda}L = n\pi, n = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

Donde, para  $c_2 \neq 0$  temos  $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$  e concluímos que o problema de valores de fronteira 5.22 tem soluções

$$X_n(x) = C_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.28)$$

Resumindo, a equação

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (5.29)$$

tem como solução, para  $c_2 \neq 0$ ,  $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$  para  $n$  natural. Aos valores de  $\lambda$  chamamos valores próprios.

As funções que satisfazem a equação diferencial e as condições de fronteira dadas designam-se de funções características e são do tipo

$$X_n(x) = C_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.30)$$

onde  $C_n$  é uma constante arbitrária.

Retomando a expressão 5.23, temos que

$$\begin{aligned} \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda K &\Leftrightarrow \int \frac{T'(t)}{T(t)} dt = \int -\lambda K dt \\ &\Leftrightarrow \ln |T(t)| = -\lambda K t + c \\ &\Leftrightarrow T(t) = e^{-\lambda K t + c} \\ &\Leftrightarrow T(t) = e^{-\lambda K t} \times e^c \\ &\Leftrightarrow T(t) = D e^{-\lambda K t}. \end{aligned}$$

Como a função  $T(t)$  deve satisfazer a equação diferencial com a mesma constante de separação  $\lambda$  que a função  $X(x)$ , temos para  $n$  natural,

$$T_n(t) = D_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 K}{L^2} t}. \quad (5.31)$$

As funções que satisfazem a equação diferencial

$$T'(t) + \lambda K T(t) = 0$$

são do tipo

$$T_n(t) = D_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 K}{L^2} t}, \quad n = 1, 2, 3 \quad (5.32)$$

onde  $D_n$  é uma constante arbitrária.

Procedendo às devidas substituições em 5.18, obtemos, para qualquer  $n$  natural, o conjunto de soluções fundamentais

$$u_n(x, t) = c_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{n^2 \pi^2 K}{L^2} t}. \quad (5.33)$$

A equação diferencial e as condições de fronteira são lineares e homogêneas, então, pelo princípio da sobreposição, qualquer combinação linear finita das soluções fundamentais também é solução da equação 5.16, com as respectivas condições de fronteira,

$$u_n(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{n^2 \pi^2 K}{L^2} t}. \quad (5.34)$$

Mas uma solução deste tipo pode não satisfazer a condição inicial para uma função  $f(x)$  mais geral.

Vamos supor que podemos escrever a solução como combinações lineares infinitas das soluções fundamentais,

$$u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{n^2 \pi^2 K}{L^2} t}. \quad (5.35)$$

Para satisfazer a condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$ , temos que verificar

$$u_n(x, 0) = f(x) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{n^2\pi^2 K}{L^2} \times 0} = f(x) \quad (5.36)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} = f(x). \quad (5.37)$$

Podemos concluir que a equação do calor definida em 5.16 só tem solução se se verificar 5.35 e se nos for dada como condição inicial a função  $f(x)$  na forma, isto é,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} = f(x). \quad (5.38)$$

Por 4.53, 5.38 define a série de Fourier de senos de  $f(x)$ .

Assim os coeficientes  $c_n$  devem ser os coeficientes da série de Fourier de senos para a função  $f(x)$ .

Pelo teorema de Fourier, se a função  $f$  for seccionalmente contínua no intervalo  $[0, L]$ ,  $f(0) = f(L) = 0$  e tal que a sua derivada seja seccionalmente contínua podemos escolher as constantes  $c_n$  definidas pela expressão dos coeficientes de Fourier

$$\frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.39)$$

da função  $f$ , ímpar e periódica de período  $2L$ .

Então,

$$u(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right] \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{n^2\pi^2 K}{L^2} t} \quad (5.40)$$

será a solução pretendida da equação do calor definida por 5.16.

Se o PVIF 5.16 tiver uma solução no sentido da definição 41, essa será solução também no sentido da definição 42, pois esta última é uma extensão da primeira definição. O teorema 29 garante a existência de solução da equação do calor no sentido da definição 42.

**Teorema 29** *Seja  $f$  e  $|f|^2$  integráveis em  $[0, L]$ , então a expressão 5.40 define uma função contínua em  $\tilde{R}$  que é solução do PVIF 5.16 no sentido da definição 42.*

**Demonstração:** ver em [7] ■

O teorema seguinte garante a existência da solução da equação do calor no sentido da definição 41.

**Teorema 30** *Seja  $f$  uma função contínua num intervalo  $I = [0, L]$  com  $f(0) = f(L) = 0$  e tal que a derivada  $f'$  exista no intervalo  $I$  e seja quadrado integrável. Então a expressão 5.40 define uma função contínua em  $R^*$  no sentido da definição 41.*

**Demonstração:** Como  $f$  é uma função contínua,  $f$  e  $|f|^2$  são integráveis estamos em condições de aplicar o teorema 29. Temos que 5.40 define uma função  $u(x, t)$  tal que verifica as condições definidas em 5.17, para toda a função  $\psi$  seccionalmente contínua em  $[0, L]$ .

Veremos que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{n^2\pi^2 K}{L^2} t}$$

define uma função contínua.

A série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{n^2\pi^2 K}{L^2} t} \quad (5.41)$$

é majorada pela série  $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$  para  $(x, t) \in R^*$ . Então se a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$  convergir, pelo teorema 18, a série 5.41 converge uniforme e absolutamente em  $[0, L]$ .

Integrando por partes o coeficiente  $c_n$  definido em 5.39, vem que

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2}{L} \left( -\frac{L}{n\pi} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \Big|_0^L - \int_0^L -\frac{L}{n\pi} f'(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \right) \\ &= \frac{-L}{n\pi} \frac{2}{L} \left( f(L) \cos(n\pi) - f(0) - \int_0^L f'(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \right). \end{aligned}$$

Como, por hipótese,  $f(L) = 0 = f(0)$ , temos

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{L}{n\pi} \frac{2}{L} \int_0^L f'(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{L}{n\pi} d_n, \quad \text{com } d_n = \frac{2}{L} \int_0^L f'(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx. \end{aligned}$$

Por 4.50,  $d_n$  define coeficientes de Fourier de  $f'(x)$ , função par e de período  $2L$ .

De  $c_n = \frac{L}{n\pi}d_n$ , obtemos

$$|c_n| \leq \frac{1}{2} \frac{L^2}{n^2\pi} + \frac{1}{2}d_n^2$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \leq \frac{L^2}{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} d_n^2. \quad (5.42)$$

Pela desigualdade de Bessel,

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \leq \frac{2}{L} \int_0^L |f'|^2$$

é convergente e como  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  também é convergente, concluímos que 5.42 é convergente. ■

### 5.1.4 Discretização da equação do calor

Nem sempre é fácil chegar à solução de uma EDP. Como já vimos existem alguns métodos numéricos de aproximação de soluções.

Podemos escrever a equação do calor discretizada, facilitando, caso necessário, a aproximação numérica de soluções.

Vamos aplicar o método das diferenças finitas em que a base é o processo de discretização. Este processo reduz o problema com número infinito de variáveis num problema discreto com número finito de variáveis.

Começemos por definir o conjunto finito de pontos da região a discretizar (figura 5.2).

O intervalo de tempo  $[t_0, t_N]$  tem uma amplitude de discretização constante  $t_n - t_{n-1} = \Delta t$ ,  $n = 1, \dots, N$  e  $\Delta t = \frac{t}{n}$ . A distância de discretização é

dada por  $x_i - x_{i-1} = \Delta x$  com  $\Delta x = \frac{L}{i}$ .

Como as derivadas parciais são dadas por

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} \quad (5.43)$$

e

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x - \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x + \Delta x, t)}{\Delta x^2} \quad (5.44)$$

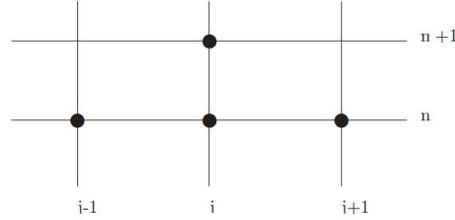


Figura 5.2: Malha de discretização temporal e espacial

Podemos aproximar a equação do calor por

$$\frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} \approx K \frac{u(x - \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x + \Delta x, t)}{\Delta x^2} \quad (5.45)$$

e fazendo  $k = \frac{K\Delta t}{(\Delta x)^2}$ , para  $i = 1, \dots, N$ ,  $n \geq 0$ ,

$$u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n) = k[u(x_{i-1}, t_n) - 2u(x_i, t_n) + u(x_{i+1}, t_n)] \quad (5.46)$$

$$\Leftrightarrow u(x_i, t_{n+1}) = u(x_i, t_n) + k[u(x_{i-1}, t_n) - 2u(x_i, t_n) + u(x_{i+1}, t_n)]. \quad (5.47)$$

As condições de fronteira especificam a temperatura na posição inicial e final

$$u(0, t_n) = 0 = u(x_N, t_n), \quad n \geq 0. \quad (5.48)$$

O processo inicializa com

$$u(x_i, 0) = 0 = f(x_i), \quad i = 1, \dots, N \quad (5.49)$$

e para  $i = 1, \dots, N$  e  $n \geq 0$ ,

$$u(x_i, t_{n+1}) = ku(x_{i-1}, t_n) + (1 - 2k)u(x_i, t_n) + ku(x_{i+1}, t_n). \quad (5.50)$$

## 5.2 Equação da onda

O conceito de onda aparece normalmente associado a sistemas oscilatórios, em que as oscilações aparecem como função do tempo num determinado lugar e que se propagam no espaço.

As perturbações oscilatórias em meios sólidos ou fluidos provocam as chamadas ondas mecânicas.

As ondas classificam-se de acordo com o tipo de movimento das partículas do meio em relação à direção de propagação. Se a direção de oscilação for perpendicular à direção de propagação da onda designamos por ondas transversais.

Caso a direção de oscilação das partículas do meio seja a mesma que a direção de propagação da onda chamamos de ondas longitudinais.

As oscilações do sistema contínuo dão origem à equação

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad (5.51)$$

que é designada por equação das ondas.

A velocidade de propagação  $c^2$  das ondas é uma constante determinada pelas propriedades do meio onde ocorre o fenómeno.

### 5.2.1 Definições e generalidades

**Definição 43** *Defina-se  $\phi$  a perturbação num determinado meio, sendo dependente da posição  $x$  e do instante  $t$ ,  $\phi(x, t)$ .*

*Temos que ter em conta que:*

1. *a perturbação  $\phi$  desloca-se com uma velocidade  $v$ , tal que  $x = vt$ ;*
2. *a perturbação  $\phi$  apresenta uma periodicidade no espaço, tal que  $\phi(x, t) = \phi(x + \lambda, t) = \phi(x + 2\lambda, t) = \dots$*

*A distância  $\lambda$  designa-se por comprimento de onda;*

3. *a perturbação  $\phi$  também apresenta uma periodicidade no tempo, tal que  $\phi(x, t) = \phi(x, t + T) = \phi(x, t + 2T) = \dots$*

*Ao tempo  $T$  chamamos período e o seu inverso chamamos de frequência.*

*Ao movermos com a mesma velocidade  $v$  da onda temos sempre a mesma perturbação  $\phi$ . Mas para que tal aconteça e para se verificar a condição de que a perturbação tem o mesmo valor em todos os pontos  $(x, t)$  com  $x = vt$ , a função  $\phi$  tem que tomar a forma*

$$\phi(x, t) = \phi(x - vt) \quad (5.52)$$

*no caso da onda a propagar-se no sentido positivo do eixo das abcissas, e no caso de se propagar no sentido negativo*

$$\phi(x, t) = \phi(x + vt) \quad (5.53)$$

O princípio de sobreposição determina o comportamento de ondas que coexistem num mesmo espaço.

Se num determinado momento duas ou mais ondas existirem simultaneamente num mesmo ponto, o deslocamento resultante será dado pela soma dos deslocamentos que ocorreriam em cada onda separadamente naquele ponto. Seja  $u(x, t)$  a posição da onda dependendo da posição  $x$  no tempo  $t$ .

Quando a onda se propaga para a direita com velocidade  $v$ ,

$$u(x, t) = F(x + vt) \quad (5.54)$$

e quando a onda se propaga para a esquerda,

$$u(x, t) = G(x - vt). \quad (5.55)$$

A equação que descreve o movimento combinado das duas ondas é

$$u(x, t) = F(x + vt) + G(x - vt). \quad (5.56)$$

### 5.2.2 Equação geral das ondas

Fisicamente a equação 5.56 representa a sobreposição de duas ondas unidimensionais tal que  $f = F(x - vt)$  permanece constante ao longo de cada reta  $x - vt$  e  $g = G(x + vt)$  permanece constante ao longo de cada reta  $x + vt$ . Sendo  $f$  a onda que se desloca com velocidade  $v$  para a direita e  $g$  a onda que se desloca com velocidade  $v$  para a esquerda.

Da proposição seguinte podemos concluir que a solução geral da onda  $u(x, t)$  pode ser escrita como a sobreposição de duas ondas, uma com propagação para a direita e outra com propagação para a esquerda.

**Proposição 10** *Seja  $u(x, t)$  solução da equação das ondas*

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad (5.57)$$

*com velocidade de propagação  $c$  constante, então existem funções  $F$  e  $G$  reais de variável real tais que*

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct). \quad (5.58)$$

#### **Demonstração:**

Introduzimos novas variáveis independentes  $\xi, \eta$  dadas por

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct,$$

e definimos a função  $v$  por

$$v(\xi, \eta) = v(x + ct, x - ct) = u(x, t).$$

Portanto

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial v}{\partial \xi} - c \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - 2c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}.$$

Substituindo na equação das ondas 5.51 resulta

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

isto é,

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) = 0.$$

Sendo  $\frac{\partial v}{\partial \eta}$  é independente de  $\xi$ , fazamos

$$\frac{\partial v}{\partial \eta}(\xi, \eta) = g(\eta).$$

E integrando esta última equação, obtemos

$$v(\xi, \eta) = \int \frac{\partial v}{\partial \eta}(\xi, \eta) d\eta = \int g(\eta) d\eta = F(\xi) + G(\eta),$$

sendo  $F(\xi)$  uma constante de integração arbitrária que depende de  $\xi$ .

Voltando às variáveis originais  $x, t$ , obtemos uma solução geral da equação da onda, dada pela forma

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct),$$

onde  $F$  e  $G$  são funções arbitrárias. ■

Procuremos determinar funções  $F$  e  $G$  de tal forma que a solução 5.58 satisfaça as condições iniciais

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x). \end{cases} \quad (5.59)$$

Assim,

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= F(x) + G(x) = f(x) \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= cF'(x) - cG'(x) = g(x). \end{aligned} \quad (5.60)$$

Derivando a primeira equação e multiplicando por  $c$ , obtemos

$$cF'(x) + cG'(x) = cf'(x). \quad (5.61)$$

Temos o sistema definido por

$$\begin{cases} cF'(x) - cG'(x) = g(x) \\ cF'(x) + cG'(x) = cf'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} G'(x) = \frac{f'(x)}{2} - \frac{g(x)}{2c} \\ F'(x) = \frac{f'(x)}{2} + \frac{g(x)}{2c} \end{cases} \quad (5.62)$$

e integrando, obtemos

$$\begin{aligned} G(x) &= G(0) - \frac{f(0)}{2} + \frac{f(x)}{2} - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds \\ F(x) &= F(0) - \frac{f(0)}{2} + \frac{f(x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds \end{aligned} \quad (5.63)$$

De 5.58 e das condições iniciais 5.59, vem que

$$F(0) + G(0) = u(0, 0) = f(0), \quad (5.64)$$

e

$$\begin{aligned} u(x, t) &= F(x + ct) + G(x - ct) \\ &= F(0) + G(0) - f(0) + \frac{f(x + ct) + f(x - ct)}{2} + \\ &+ \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} g(s) ds - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} g(s) ds \\ &= \frac{f(x + ct) + f(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} g(s) ds - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} g(s) ds \\ &= \frac{f(x + ct) + f(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds. \end{aligned}$$

A fórmula

$$u(x, t) = \frac{f(x + ct) + f(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \quad (5.65)$$

é conhecida como a fórmula de d'Alembert para a solução geral da equação das ondas.

### 5.2.3 Equação da corda vibrante

Consideremos uma corda flexível e elástica com comprimento  $L$ , entre dois pontos  $a$  e  $b$ .

Temos dois parâmetros importantes a ter em conta, a massa por unidade de comprimento  $\rho$  e a tensão representada pela força  $F$ .

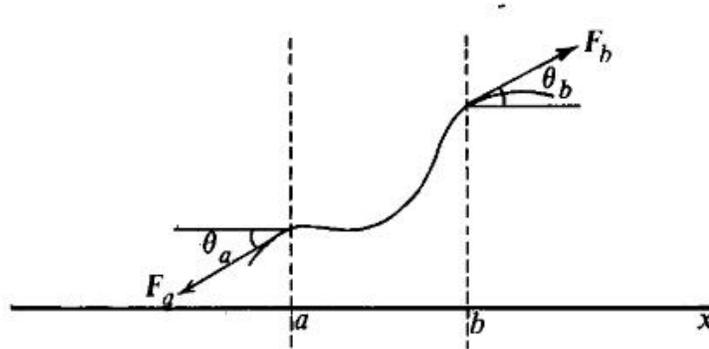


Figura 5.3: Exemplo de um pedaço de corda de comprimento  $L$ .

Designemos por  $\rho(x, t)$  a densidade da corda que apresenta uma vibração transversal, isto é, as partículas deslocam-se apenas em  $y$ , ou seja, não existe componente de velocidade na direção  $x$ , o que implica que a densidade seja independente de  $t$ , assim representemos apenas por  $\rho(x)$ .

O deslocamento do ponto de abcissa  $x$  no instante  $t$  é dado por  $u(x, t)$ , a velocidade vertical do ponto  $x$  da corda no instante  $t$  definida por  $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$

e a aceleração dada por  $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$ .

Como temos deslocamento só em  $x$  também se chama a este processo onda unidimensional.

Consideremos a ação da corda entre a posição  $a$  e a posição  $b$  representada por forças de tensão na direção das tangentes  $F_a(a, t)$  e  $F_b(b, t)$ .

Sejam  $\theta_a$  e  $\theta_b$  os ângulos das tangentes à corda com o eixo das abcissas nos pontos  $a$  e  $b$ , respetivamente.

O movimento é vertical, ou seja, não há quantidade de movimento na direção horizontal e temos amplitude de oscilação pequena, então

$$F_b(b, t) \cos \theta_b - F_a(a, t) \cos \theta_a = T_x = 0. \quad (5.66)$$

A componente horizontal da tensão  $T(t)$  é independente da posição  $x$ , é função apenas do tempo  $t$ , assim podemos representar por

$$F_b(b, t) \cos \theta_b = F_a(a, t) \cos \theta_a = T(t). \quad (5.67)$$

Donde, podemos escrever

$$F_b = \frac{T}{\cos \theta_b} \quad e \quad F_a = \frac{T}{\cos \theta_a}. \quad (5.68)$$

As componentes da força segundo a direção vertical é dada por

$$F_b(b, t) \sin \theta_b - F_a(a, t) \sin \theta_a = T_y. \quad (5.69)$$

De 5.67 e de 5.69,

$$\begin{aligned} F_b \sin \theta_b - F_a \sin \theta_a &= \frac{T}{\cos \theta_b} \sin \theta_b - \frac{T}{\cos \theta_a} \sin \theta_a \\ &= T \tan \theta_b - T \tan \theta_a \\ &= T(\tan \theta_b - \tan \theta_a) = T_y. \end{aligned}$$

Da resultante vertical das forças de tensão que atuam sobre o pedaço da corda entre  $a$  e  $b$  e sabendo que a derivada é igual ao declive da reta tangente, concluímos que

$$T_y = T \left( \frac{\partial u(b, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(a, t)}{\partial x} \right). \quad (5.70)$$

De  $\rho = \frac{m}{L}$  e tendo aceleração dada por  $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$ , a equação do movimento de Newton 1.1 pode ser escrita como

$$T_y = \rho L \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}. \quad (5.71)$$

Igualando as expressões 5.70 e 5.71, e sendo  $L = \Delta x = b - a$ , vem que

$$\begin{aligned} T \left( \frac{\partial u(b, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(a, t)}{\partial x} \right) = \rho L \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} &\Leftrightarrow \frac{\frac{\partial u(b, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(a, t)}{\partial x}}{b - a} = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Façamos  $c^2 = \frac{T}{\rho}$ , em que  $T$  é a componente horizontal da tensão da mola e  $\rho$  massa por unidade de comprimento da corda.

Esta relação leva-nos a concluir que o valor de  $c$  aumenta com a tensão na corda e diminui com a sua massa por unidade de comprimento  $\rho$ .

Fazendo as devidas substituições, vem que

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}. \quad (5.72)$$

#### 5.2.4 Corda com extremidades fixas

Supondo que a corda tem as extremidades fixas podemos definir o seguinte PVIF:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \text{ posição inicial} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L, \text{ velocidade inicial.} \end{array} \right. \quad (5.73)$$

Pretendemos determinar uma solução particular da equação 5.72 e que satisfaça as condições do PVIF 5.73.

Aplicando o método da separação das variáveis, definamos a função  $u$ ,

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (5.74)$$

e substituindo em 5.72 obtemos

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t) \Leftrightarrow c^2 \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\sigma,$$

onde  $\sigma$  é uma constante de separação.

$X(x)$  e  $T(t)$  satisfazem as seguintes equações diferenciais:

$$X''(x) + \sigma X(x) = 0 \quad (5.75)$$

e

$$T''(t) + c^2 \sigma T(t) = 0 \quad (5.76)$$

Da condição fronteira e de 5.74 vem que, para  $T(t) \neq 0$ ,

$$u(0, t) = 0 \Leftrightarrow X(0)T(t) = 0 \Leftrightarrow X(0) = 0 \quad (5.77)$$

e

$$u(L, t) = 0 \Leftrightarrow X(L)T(t) = 0 \Leftrightarrow X(L) = 0. \quad (5.78)$$

Se tivéssemos  $T(t) = 0$ , para todo o  $t$ , implicaria que  $u(x, t) = 0$ , para todo o  $x$  e  $t$ , o que não nos interessa.

Temos portanto o nosso problema de valores próprios definido por

$$X''(x) + \sigma X(x) = 0, \quad 0 < x < L, \quad X(0) = 0 = X(L) \quad (5.79)$$

e com soluções já determinadas aquando da equação do calor, isto é, existem valores próprios  $\sigma_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$  cujas funções características são da forma  $X_n(x) = C_n \sin \frac{n\pi x}{L}$ , para  $n$  natural.

Vamos agora determinar a solução geral da equação 5.76, para cada  $\sigma_n$ .

Como temos valores próprios complexos a solução geral da equação 5.76 é da forma,

$$T(t) = A_n \sin \frac{n\pi ct}{L} + B_n \cos \frac{n\pi ct}{L} \quad (5.80)$$

para  $\sigma_n$  e constantes quaisquer  $a_n$  e  $b_n$ .

Procedendo às devidas substituições na equação 5.74,

$$u_n(x, t) = C_n \sin \frac{n\pi x}{L} \left( A_n \sin \frac{n\pi ct}{L} + B_n \cos \frac{n\pi ct}{L} \right) \quad (5.81)$$

$$= C_n A_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} + C_n B_n \cos \frac{n\pi ct}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (5.82)$$

Logo as funções da forma

$$u_n(x, t) = a_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} + b_n \cos \frac{n\pi ct}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (5.83)$$

são soluções da equação da onda e satisfazem as condições de fronteira definidas no PVI 5.73.

Estas funções são chamadas modos normais de vibração e  $\frac{n\pi x}{L}$  são as chamadas frequências normais da corda. Logo os períodos fundamentais são da forma  $T = \frac{2L}{nx}$ .

Pelo princípio da linearidade que goza a equação de onda temos que as soluções satisfazem o princípio da sobreposição. Assim, sabendo que sendo a equação 5.83 solução também a soma finita das soluções é solução,

$$\sum_{n=1}^N u_n(x, t) = \sum_{n=1}^N \left[ a_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} + b_n \cos \frac{n\pi ct}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \right]. \quad (5.84)$$

Mas uma solução deste tipo pode não satisfazer a condição inicial para uma função  $f(x)$  qualquer.

Suponhamos que a soma infinita das soluções

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ a_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} + b_n \cos \frac{n\pi ct}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \right] \quad (5.85)$$

é também solução, desde que se verifiquem as condições do PVIF e que os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  sejam tais que a série convirja.

Consideremos que se verificam as condições da proposição 5, então podemos derivar  $u(x, t)$  em relação à variável  $t$ ,

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ a_n \frac{n\pi c}{L} \cos \frac{n\pi ct}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} - b_n \frac{n\pi c}{L} \sin \frac{n\pi ct}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \right]. \quad (5.86)$$

Retomando as condições iniciais, obtemos

$$\begin{aligned} u(x, 0) = f(x) &\Leftrightarrow u(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ a_n \sin \frac{n\pi c \times 0}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} + b_n \cos \frac{n\pi c \times 0}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \right] \\ &\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} = f(x), \end{aligned}$$

que é a série de Fourier de senos de  $f(x)$ .

E

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= g(x) \\ \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ a_n \frac{n\pi c}{L} \cos \frac{n\pi c \times 0}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} - b_n \frac{n\pi c}{L} \sin \frac{n\pi c \times 0}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \right] &= g(x) \\ \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{n\pi c}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} &= g(x). \end{aligned}$$

Resumindo, temos séries infinitas de senos a definir as funções  $f$  e  $g$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} = f(x) \quad (5.87)$$

e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{n\pi c}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} = g(x). \quad (5.88)$$

Sem impor, ainda, condições às funções  $f$  e  $g$ , e retomando o estudado nas séries de Fourier, podemos escrever os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  como

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (5.89)$$

e

$$\frac{n\pi c}{L} b_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \Leftrightarrow b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (5.90)$$

O teorema seguinte dá-nos algumas condições para que possamos encarar as funções acima determinadas como solução para a nossa equação da onda.

**Teorema 31** *Sejam  $f$  e  $g$ , definidas no intervalo  $[0, L]$ , funções contínuas, com  $f', f'', g'$  contínuas, e ainda com  $f'''$  e  $g''$  seccionalmente contínuas. Suponhamos que  $f(0) = f(L) = f''(0) = f''(L) = g(0) = g(L) = 0$ .*

Então

- i) *os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  estão bem definidos pelas expressões 5.89 e 5.90, respetivamente;*
- ii) *as igualdades 5.87 e 5.88 são válidas;*
- iii) *a expressão 5.85 define uma condição contínua em  $\mathbb{R}^*$ , de classe  $C^2$  em  $\mathbb{R}$  e satisfaz a equação da onda.*

**Demonstração:**

- i) Como as funções  $f$  e  $g$  são contínuas, por hipótese, no intervalo  $[0, L]$ , então os integrais definidos em 5.89 e 5.90 convergem.
- ii) Por hipótese as funções  $f$  e  $g$  são contínuas assim como a sua primeira derivada e  $f(0) = f(L) = f''(0) = f''(L) = g(0) = g(L) = 0$ , então as funções podem ser estendidas continuamente a toda a reta real de modo a serem ímpares e periódicas de período  $2L$ .

iii) Já vimos no estudo das séries de Fourier, que pelo teorema 26, para provar que a expressão 5.85 é contínua basta verificar a convergência da série  $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ . Adaptando o cálculo feito em 4.49, obtemos

$$a_n = -\frac{2L}{(n\pi)^2} \int_0^L f''(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

e integrando por partes mais uma vez, chegamos a

$$a_n = -\frac{2L^2}{(n\pi)^3} \int_0^L f'''(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (5.91)$$

No caso do coeficiente  $b_n$  e adaptando o já calculado em 4.49, vem que

$$b_n = -\frac{2L^2}{(n\pi)^3} \int_0^L g''(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (5.92)$$

Donde de 5.91 e 5.92,

$$|a_n| \leq \frac{2L^2}{(n\pi)^3} \int_0^L |f'''(x)| dx = \frac{k_1}{n^3}$$

e

$$|b_n| \leq \frac{2L^2}{(n\pi)^3} \int_0^L |g''(x)| dx = \frac{k_2}{n^3},$$

$$\text{com } k_1 = \frac{2L^2}{\pi^3} \int_0^L |f'''(x)| dx \text{ e } k_2 = \frac{2L^2}{\pi^3} \int_0^L |g''(x)| dx.$$

Temos portanto que

$$|a_n| \leq \frac{k_1}{n^3} \text{ e } |b_n| \leq \frac{k_2}{n^3}$$

e podemos escrever,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \leq k_1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \text{ e } \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n| \leq k_2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

e são ambas séries convergentes logo  $\sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n| + |b_n|)$  também é convergente.

■

Pela proposição 10 a equação 5.85 deve ser da forma 5.56 uma vez que 5.85 é solução da equação da onda. Usando as identidades trigonométricas 4.11 e 4.12,

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ a_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} + b_n \cos \frac{n\pi ct}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi(ct-x)}{L} - a_n \cos \frac{n\pi(ct+x)}{L} + \right. \\
&\quad \left. + b_n \sin \frac{n\pi(ct+x)}{L} + b_n \sin \frac{n\pi(x-ct)}{L} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi(x-ct)}{L} - a_n \cos \frac{n\pi(x+ct)}{L} + \right. \\
&\quad \left. + b_n \sin \frac{n\pi(ct+x)}{L} + b_n \sin \frac{n\pi(x-ct)}{L} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( -a_n \cos \frac{n\pi(x+ct)}{L} + b_n \sin \frac{n\pi(x+ct)}{L} + \right. \\
&\quad \left. + b_n \sin \frac{n\pi(x-ct)}{L} + a_n \cos \frac{n\pi(x-ct)}{L} \right) \\
&= F(x+ct) + G(x-ct),
\end{aligned}$$

onde

$$F(x+ct) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( -a_n \cos \frac{n\pi(x+ct)}{L} + b_n \sin \frac{n\pi(x+ct)}{L} \right)$$

e

$$G(x-ct) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi(x-ct)}{L} + b_n \sin \frac{n\pi(x-ct)}{L} \right).$$

### 5.2.5 Discretização da equação da onda

Apresentaremos de seguida a aplicação do método da discretização às derivadas na equação da onda.

Pensemos na corda como um conjunto de  $N$  partículas cada uma com massa  $m = \rho \Delta x$ , com distância entre elas dada por  $\Delta x = x_{i+1} - x_i$  situadas nas posições  $x = i\Delta x, i = 1, 2, \dots, N$  ao longo da corda. A extremidade inicial

da corda está situada na posição  $x_1 = 0$  e a outra extremidade na posição  $x_N = L\Delta x$ .

Iremos proceder à discretização em relação à posição  $x$  de modo análogo ao que foi feito no processo da discretização da equação do calor.

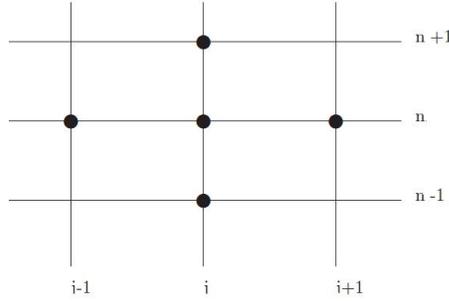


Figura 5.4: Discretização temporal e espacial.

Seja  $x = i\Delta x$  e  $t = n\Delta t$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ .

$$\frac{u(i, n+1) + u(i, n-1) - 2u(i, n)}{(\Delta t)^2} \approx c^2 \frac{u(i+1, n) + u(i-1, n) - 2u(i, n)}{(\Delta x)^2}. \quad (5.93)$$

Façamos  $K = \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} c\right)^2$

$$\begin{aligned} u(i, n+1) &= K[u(i+1, n) + u(i-1, n) - 2u(i, n)] - u(i, n-1) + 2u(i, n) \\ &= 2u(i, n)(1-k) + k[u(i+1, n) + u(i-1, n)] - u(i, n-1). \end{aligned}$$

As condições iniciais do PVIF 5.73 especificam a posição e velocidade inicial para cada partícula da corda, ou seja,  $u(i, 0) = f(i\Delta x)$  e  $\frac{du(i, 0)}{dt} = g(i\Delta x)$ , com  $f$  e  $g$  as funções dadas definidas no intervalo  $[0, L]$ .

O PVIF da equação da corda discretizada pode tomar a forma

$$\left\{ \begin{array}{ll} u(0, t) = u(L, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(i, 0) = f(i\Delta x), & i = 1, 2, \dots, N \\ \frac{\partial u}{\partial t}(i, 0) = g(i\Delta x), & i = 1, 2, \dots, N \\ u(i, n+1) = 2u(i, n)(1-k) + k[u(i+1, n) + u(i-1, n)] - u(i, n-1). & \end{array} \right. \quad (5.94)$$

## Capítulo 6

# Osciladores Harmônicos na Sala de Aula

Com base na proposta do novo programa de matemática do secundário apresentamos uma proposta de planificação do conteúdo referente à aplicação das funções trigonométricas no estudo dos osciladores harmônicos.

### 6.1 Plano de aula: Oscilador harmônico

- **Ano de escolaridade:** 11.º ano
- **Domínio de conteúdos:** Trigonometria
- **Pré-requisitos:**
  - Generalidade de funções reais de variável real (10.º/11.º)
  - Funções trigonométricas (11.º)
- **Conteúdos:** Aplicações aos osciladores harmônicos
  - Osciladores harmônicos: amplitude, frequência angular, frequência, período e fase.
  - Resolução de problemas envolvendo osciladores harmônicos.
- **Metas Curriculares:** Designar por oscilador harmônico um sistema constituído por um ponto que se desloca numa reta numérica em determinado intervalo de tempo  $I$ , de tal forma que a respetiva abscissa, como função de  $t \in I$ , seja dada por uma expressão da forma  $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ , onde  $A > 0$ ,  $\omega > 0$  e  $\phi \in [0, 2\pi]$ , designar estas

constantes, respetivamente, por amplitude, frequência angular e fase, justificar que a função  $x$  é periódica de período  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  e designar  $f = \frac{1}{T}$  por frequência do oscilador.

- **Número de aulas previstas:** 2 aulas (90 minutos)
- **Sumário:**
  - Atividade laboratorial - Pêndulo.
  - Resolução de atividade prática envolvendo osciladores harmónicos.

### 6.1.1 Atividade Laboratorial - Pêndulo gravítico

A atividade laboratorial tem como objetivo o estudo de propriedades do movimento oscilatório. Os alunos devem concluir que o período do movimento é independente da amplitude para oscilações de pequena amplitude (ângulos menores que  $10^\circ$ ). Devem ainda concluir que o período não depende da massa do pêndulo mas depende do seu comprimento.

#### Guião da atividade

**Objetivo:** Estudar o movimento periódico de oscilação de um pêndulo simples.

**Materiais:** Suporte de fixação, fio, cronómetro, esferas de diferentes massas, fita métrica, balança de precisão, transferidor, calculadora gráfica.

#### Procedimento:

1. Construir um pêndulo simples usando o suporte de fixação, uma esfera e o fio.
2. Medir o comprimento  $L$  do fio (massa desprezável e inextensível).
3. Medir a massa da esfera.
4. Largar o corpo de um certo ângulo (máximo de  $10^\circ$ ) e medir o tempo de 10 oscilações completas. Deve anotar o ângulo e o tempo das oscilações numa tabela.
5. Mudar o comprimento do fio, a amplitude do ângulo e trocar a esfera e repetir o processo.

6. Realizar o ensaio 5 vezes para cada amplitude de ângulo para cada um dos parâmetros definidos na alínea anterior.
7. Registrar todos os dados recolhidos.
8. Determinar o período  $T$  médio das oscilações.
9. Determinar a aceleração da gravidade  $g$  sabendo que  $T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{L}}$ .
10. Determinar a frequência angular das oscilações  $\omega^2 = \frac{g}{L}$ .
11. Fazer representação gráfica do período  $T$  em função da massa da esfera  $m$ .
12. Fazer representação gráfica do período  $T$  em função do comprimento do fio  $L$ .
13. Fazer representação gráfica de  $T^2$  em função do comprimento do fio  $L$ . Determinar o valor de  $g$  recorrendo à regressão linear.
14. Registrar as conclusões.

### 6.1.2 Atividade Prática - Pêndulo

As seguintes atividades têm como objetivo o estudo do movimento do pêndulo a partir da modelagem, análise e comparação da equação do seu movimento e variação de parâmetros físicos, com recurso à calculadora gráfica.

**Atividade 1** *Consideremos a amplitude inicial  $A$  de um pêndulo simples constante. Como se comporta o movimento do pêndulo quando o comprimento é variável?*

*Dados numéricos:*

$$A = \frac{2}{45}\pi, \quad \phi = 0, \quad g = 9.8, \quad L_1 = 0.5, \quad L_2 = 1, \quad L_3 = 1.5$$

#### Proposta de Resolução:

Pretendemos fazer a análise gráfica da equação do movimento do pêndulo, variando o comprimento do mesmo.

Tendo em conta as condições definidas as equações de movimento são da forma:

$$x_1(t) = \frac{2}{45}\pi \cos\left(\frac{9.8}{0.5}t\right), \quad x_2(t) = \frac{2}{45}\pi \cos\left(\frac{9.8}{1}t\right), \quad x_3(t) = \frac{2}{45}\pi \cos\left(\frac{9.8}{1.5}t\right)$$

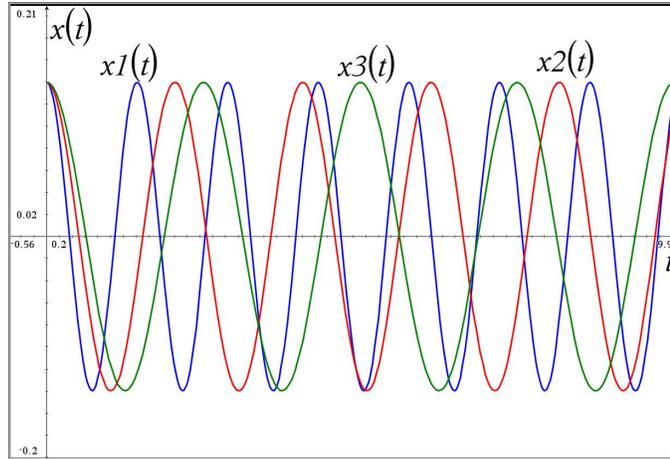


Figura 6.1: Representação gráfica do comportamento do pêndulo: amplitude constante e variação do comprimento do fio.

Da análise do gráfico 6.1 verifica-se que a amplitude de oscilação do pêndulo é mantida constante, observa-se que o aumento do comprimento do fio leva a uma aumento do período de movimento. ■

**Atividade 2** Consideremos o comprimento do fio do pêndulo constante. Como se comporta o movimento do pêndulo quando variamos a amplitude? Dados numéricos:

$$L = 1, \quad \phi = 0, \quad g = 9.8, \quad A_1 = \frac{\pi}{30}, \quad A_2 = \frac{\pi}{60}, \quad A_3 = \frac{\pi}{45}$$

**Proposta de Resolução:**

Tendo em conta as condições definidas as equações de movimento são da forma:

$$x_1(t) = \frac{\pi}{30} \cos(9.8t), \quad x_2(t) = \frac{\pi}{60} \cos(9.8t), \quad x_3(t) = \frac{\pi}{45} \cos(9.8t)$$

O período do movimento do pêndulo é o mesmo nas três opções, ou seja, para pequenas oscilações a variação da amplitude não influencia o período de oscilação, quando o comprimento do fio é mantido constante (ver gráfico 6.2). ■

**Atividade 3** O que podemos concluir quanto à variação da aceleração da gravidade  $g$ ?

Dados numéricos:

$$l = 0.6, \quad \phi = 0, \quad A = \frac{\pi}{36}, \quad g_1 = 9.8, \quad g_2 = 5.8; \quad g_3 = 10.2$$

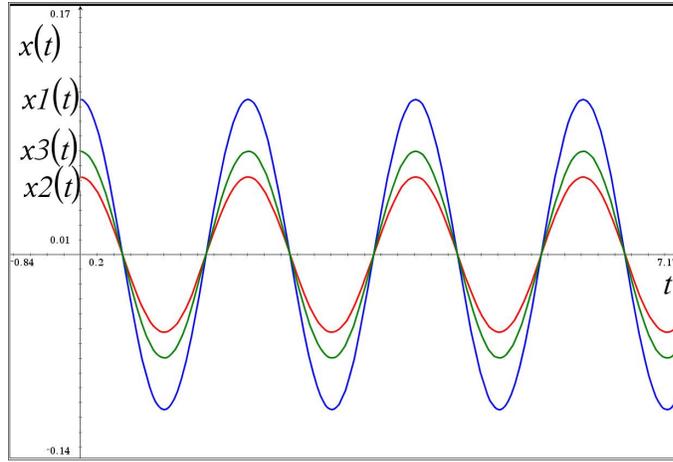


Figura 6.2: Representação gráfica do comportamento do pêndulo: comprimento constante e variação da amplitude.

#### Proposta de Resolução:

Tendo em conta as condições definidas as equações de movimento são da forma:

$$x_1(t) = \frac{\pi}{36} \cos\left(\frac{9.8}{0.6}t\right), \quad x_2(t) = \frac{\pi}{36} \cos\left(\frac{5.8}{0.6}t\right), \quad x_3(t) = \frac{\pi}{36} \cos\left(\frac{12.3}{0.6}t\right)$$

Neste caso observa-se uma alteração no período de oscilação (gráfico 6.3). ■

**Atividade 4** De acordo com a segunda lei de Newton, a equação que descreve o movimento do pêndulo é dada por

$$\theta''(t) = -\frac{g}{l} \sin \theta(t),$$

onde  $g \approx 9.8m/s^2$  é a aceleração da gravidade e  $l$  o comprimento do pêndulo. Consideremos que no instante inicial  $t = 0$  o pêndulo foi solto a partir da sua posição inicial  $\theta_0$ . Podemos definir o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \theta''(t) = -\frac{g}{l} \sin \theta(t) \\ \theta(0) = \theta_0 \\ \theta'(0) = 0. \end{cases} \quad (6.1)$$

Um dos métodos usados para a resolução de equações diferenciais é o método de Euler. O método consiste em escolher um intervalo de tempo  $h$  suficientemente pequeno e a partir daí calcular recursivamente a sucessão  $\theta_n$  através

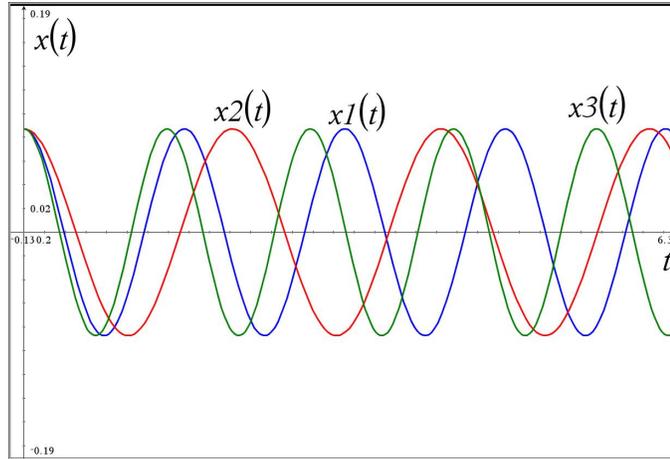


Figura 6.3: Representação gráfica do comportamento do pêndulo: variação da aceleração.

das fórmulas

$$\begin{cases} \theta_{n+1} = \theta_n + hv_n \\ v_{n+1} = v_n - h\frac{g}{l} \sin \theta_n \end{cases}$$

dados valores iniciais  $\theta(0) = \theta_0$  e  $v(0) = v_0$ .

Aplique o método de Euler com  $h = 0.001$  para encontrar uma aproximação para a solução do PVI 6.4 de um pêndulo não linear com  $l = 1$  e  $\theta_0 = \frac{\pi}{12}$  e

$$\theta_0 = \frac{\pi}{3}.$$

### Proposta de Resolução:

A equação diferencial a considerar é

$$\theta''(t) = -9.8 \sin \theta(t).$$

Representando graficamente

$$\begin{cases} \theta_{n+1} = \theta_n + 0.001v_n \\ v_{n+1} = v_n - 0.001 \times 9.8 \sin \theta_n \end{cases}$$

para as diferentes condições iniciais, obtemos o retrato de fase representado na figura 6.4.

■

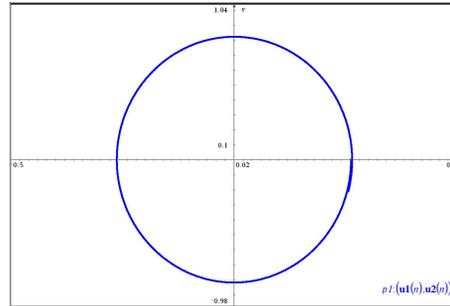


Figura 6.4: Retrato de fase de um pêndulo não linear.

## 6.2 Plano de aula: Sistema massa-mola

- **Ano de escolaridade:** 12.º ano
- **Domínio:** Diferenciação de funções trigonométricas
- **Pré-requisitos:**
  - Generalidade de funções reais de variável real (10.º/11.º)
  - Funções trigonométricas (11.º)
  - Continuidade e diferenciabilidade de funções (11.º)
  - Funções exponenciais (12.º)
  - Osciladores harmónicos (11.º/12.º)
  - Sucessões (11.º)
- **Conteúdos:** Aplicações aos osciladores harmónicos
  - Relação Fundamental da Dinâmica e lei de Hooke;
  - Os osciladores harmónicos como soluções de equações diferenciais da forma  $x'' = -w^2x$ ;
  - Resolução de problemas envolvendo osciladores harmónicos.
- **Metas Curriculares:** Justificar, dado  $w > 0$ , que as funções definidas por uma expressão da forma  $x(t) = A \cos(\sqrt{w}t + b)$ , onde  $A$  e  $B$  são constantes reais satisfazem a equação  $x'' = -w^2x$ , saber que todas as soluções desta equação são dessa forma, e reconhecer que um sistema constituído por uma mola e por um ponto material  $P$  colocada na respetiva extremidade constitui um oscilador harmónico. Ter em

atenção que existe uma deformação máxima das molas além da qual não há oscilador harmônico. Resolver problemas envolvendo derivadas de funções trigonométricas e osciladores harmônicos.

- **Número de aulas previstas:** 3 aulas (135 minutos)
- **Sumário:**
  - Atividade laboratorial.
  - Resolução de atividade prática envolvendo osciladores harmônicos.

### 6.2.1 Atividade Laboratorial - Lei de Hooke

Com esta atividade pretende-se que os alunos entendam a relação fundamental da dinâmica e lei de Hooke e que cheguem à equação diferencial que define o movimento harmônico.

#### Guião da atividade

**Objetivo:** Estudar o movimento periódico de oscilação de um sistema massa-mola.

**Materiais:** Suporte de fixação, mola, cronómetro, 10 blocos de diferentes massas, fita métrica, balança de precisão, calculadora gráfica.

#### Procedimento:

1. Construir um sistema massa-mola usando suporte de fixação, bloco e mola. (ver figura 6.5)



Figura 6.5: Exemplo sistema massa mola.

2. Medir a massa do bloco.
3. Medir o comprimento da mola (massa desprezável e inextensível) quando se encontra na posição de equilíbrio.

4. Deslocar o bloco  $1\text{cm}$  para baixo (distensão da mola) e soltar. Medir o tempo de 10 oscilações.
5. Deslocar o bloco  $1\text{cm}$  para cima (compressão da mola) e soltar. Medir o tempo de 10 oscilações.
6. Repetir o processo para um deslocamento de  $2\text{cm}$ .
7. Realizar o ensaio 5 vezes para cada deslocamento.
8. Determinar o período  $T$  médio das oscilações.
9. Repetir o processo para os 10 blocos.
10. Registrar todos os dados recolhidos.
11. Determinar o valor do peso para cada bloco, aplicando a segunda lei de Newton  $p = mg$ , considerando  $g = 9.8$ .
12. Fazer representação gráfica do peso  $p$  em função do alongamento da mola. Calcular por regressão linear o valor da constante elástica da mola  $k$ .

### 6.2.2 Atividade Prática - Sistema massa-mola

Da aplicação da lei de Hooke e da segunda lei de Newton temos

$$x''(t) = -w^2x(t). \quad (6.2)$$

**Atividade 5** A equação 6.2 é chamada de equação diferencial de segunda ordem.

Mostre que a equação  $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$  é solução da equação 6.2.

#### Proposta de Resolução:

Calculando a primeira derivada de 6.2 vem

$$x'(t) = v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi).$$

A segunda derivada do deslocamento dá-nos a aceleração

$$x''(t) = a(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi).$$

Substituindo em 6.2 obtemos

$$x''(t) = -\omega^2 x(t) \Leftrightarrow -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$$

o que mostra o que pretendíamos. ■

Sabendo que  $x' = v$  e  $v' = x''$  podemos reescrever a equação diferencial 6.2 como

$$v'(t) = -w^2x(t).$$

**Atividade 6** *Suponhamos que temos um sistema massa-mola com frequência angular  $w = 1$  e no instante inicial o bloco está na origem com velocidade 2.*

*Aplique o método de Euler para  $h = 0.1$  e  $h = 0.01$  e compare os resultados.*

**Proposta de Resolução:**

A fórmula recursiva para aplicação do método de Euler é dada por:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hv_n \\ v_{n+1} = v_n - hw^2x_n \end{cases}$$

para dados valores iniciais  $x(0) = x_0$  e  $v(0) = v_0$ .

Começemos por fazer a mudança de variável  $x' = v$ . Então  $v' = x''$  e

$$v'(t) = -1x(t).$$

Pelo método de Euler,

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hv_n \\ v_{n+1} = v_n - hx_n. \end{cases}$$

Na calculadora gráfica usando as capacidades de representação gráfica para sucessões:

$$\begin{cases} u_1(n) = u_1(n-1) + hu_2(n-1) \\ u_1(0) = 0 \\ u_2(n) = u_2(n-1) - hu_1(n-1) \\ u_2(0) = 2. \end{cases}$$

Repetimos o processo para  $h = 0.01$ .

No gráfico 6.6 a) podemos observar os primeiros 64 termos da sucessão. No gráfico 6.6 b) temos uma melhor aproximação da solução mas foi necessário calcular 630 termos.

Da análise da figura 6.6 somos levados a concluir que a solução tem a forma de circunferência.

Sabemos que a solução é da forma

$$x(t) = A \cos(t + \phi)$$

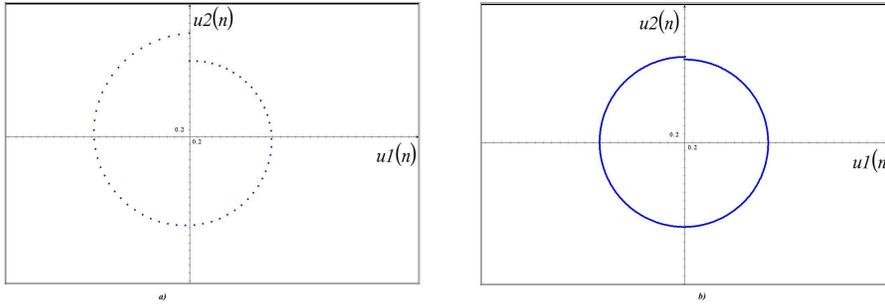


Figura 6.6: Retrato de fase da aplicação do método de Euler para  $w = 1$

com velocidade

$$x'(t) = v(t) = -A \sin(t + \phi).$$

Elevando ambas as expressões ao quadrado e somando obtemos

$$\begin{aligned} x^2(t) + v^2(t) &= A^2 \cos^2(t + \phi) + A^2 \sin^2(t + \phi) \\ &= A^2 [\cos^2(t + \phi) + \sin^2(t + \phi)] = A^2, \end{aligned}$$

ou seja, circunferências de centro na origem e raio igual a amplitude  $A$ . ■

**Atividade 7** Se considerarmos um sistema massa-mola sujeito a amortecimento a equação do movimento é dada pela equação diferencial

$$x''(t) = -w^2 x(t) - \beta x'(t), \quad (6.3)$$

com  $\beta$  constante de amortecimento.

No caso de  $\beta^2 < 4w^2$  dizemos que o amortecimento é fraco.

Verifica-se facilmente aplicando as propriedades da derivação que

$$x(t) = Ae^{-\frac{\beta}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{4w^2 - \beta^2}}{2}t + \phi\right) \quad (6.4)$$

é solução da equação diferencial 6.3.

Representa graficamente 6.4 para  $A = \sqrt{2}$ ,  $\phi = 0$ ,  $w = 8$  e  $\beta = 4$ .

### Proposta de Resolução:

Substituindo os valores dados em 6.4, obtemos

$$x(t) = \sqrt{2}e^{-2t} \cos\left(2\sqrt{15}t\right)$$

com representação gráfica na figura 6.7.

O sistema (figura 6.7) oscila com uma amplitude inicial de  $A = \sqrt{2}$  que devido ao amortecimento vai diminuindo ao longo do tempo. ■

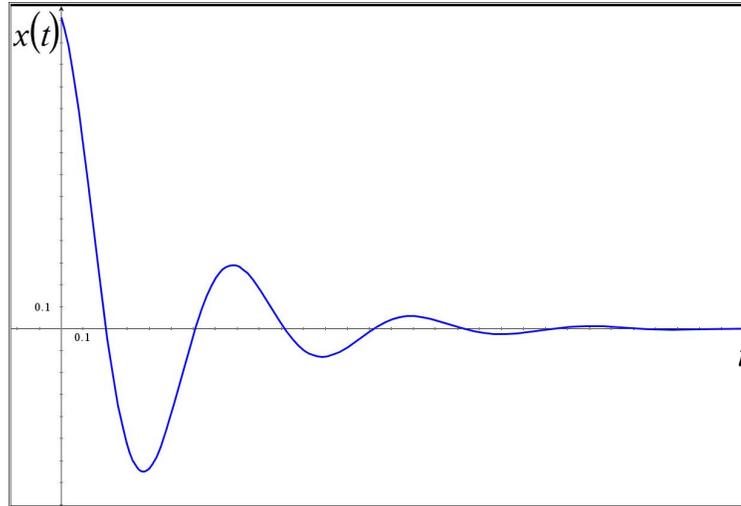


Figura 6.7: Representação gráfica do comportamento da solução de um oscilador com amortecimento.

**Atividade 8** Aplique o método de Euler com  $h = 0.01$  ao sistema massa-mola considerado na atividade 7 para  $w = \sqrt{5}$ ,  $\beta = 2$  e condições iniciais  $x(0) = 2$  e  $v(0) = 1$ .

Considere agora  $w = 1$  e  $\beta = 2$  e condições iniciais  $x(0) = 1$  e  $v(0) = 0$  e repita o processo.

**Proposta de Resolução:**

A primeira equação diferencial a considerar é

$$x''(t) = -5x(t) - 2x'(t).$$

Representando graficamente

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hv_n \\ v_{n+1} = v_n - h(5x_n + 2v_n) \end{cases}$$

obtemos o retrato de fase representado na figura 6.8 a), com gráfico a convergir para a origem devido ao amortecimento.

No caso de  $w = 1$  e  $\beta = 4$ , temos

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hv_n \\ v_{n+1} = v_n - h(x_n + 4v_n). \end{cases}$$

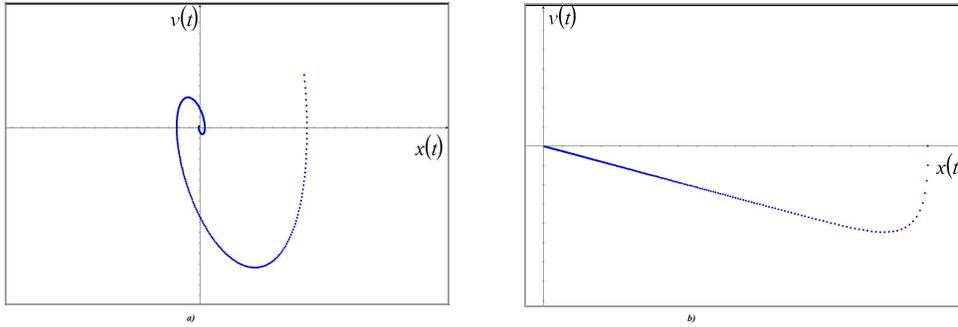


Figura 6.8: Retrato de fase de oscilador com amortecimento a)  $w = \sqrt{5}$  e b)  $w = 1$ .

No segundo caso estamos perante o que chamamos de amortecimento forte pois temos uma força de resistência grande. O oscilador retoma a posição de equilíbrio lentamente devido ao amortecimento. ■



## Considerações Finais

Muitas das aplicações da Matemática às ciências experimentais e à engenharia envolvem equações diferenciais. Torna-se fundamental uma abordagem mais teórica da temática das equações diferenciais para uma correta aplicação na modelação matemática de situações reais.

Para compreender os fenómenos que nos rodeiam muitas das vezes é necessário construir modelos, encontrar soluções e validar as mesmas. Transpondo este conceito para o ensino da Matemática, a modelação matemática em contexto de sala de aula pode ser usada como meio de motivação e de tornar a disciplina mais concreta aos olhos dos nossos alunos.

No estudo do movimento oscilatório diversas atividades podem ser desenvolvidas com os alunos, mesmo em interdisciplinaridade com a disciplina de Física. Estas atividades passam pela observação, interação ou mesmo construção de modelos à escala de sistemas massa-mola, simples ou acoplados e/ou de pêndulos.

O ensino da Matemática cada vez mais é feito com recurso à calculadora gráfica e às novas tecnologias, incentivando a espírito de análise e crítico dos alunos. E dado que os alunos deste nível de escolaridade não possuem conhecimentos de equações diferenciais, o recurso ao estudo qualitativo da solução e o uso dos métodos numéricos de aproximação de soluções será uma mais valia na resolução de problemas.

A proposta de novo programa de Matemática do ensino secundário é muito ambiciosa e, caso este seja aprovado, tenho algumas dúvidas na sua aplicabilidade e sucesso. Os programas são cada vez mais extensos e os alunos demonstram, na sua maioria, menos interesse em geral pelo ensino. Todavia, mantenho a esperança que a aplicação do estudo da Matemática a situações reais incentivem o interesse por parte dos alunos e que desenvolvam o gosto pela disciplina.



# Bibliografia

- [1] T. Apostol, Calculus, Volume 1, One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra, 2nd edition, Wiley and Sons, Inc (1961)
- [2] W. E. Boyce, R. DiPrima, Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Contorno, 8.º edição, LTC Editora (2006)
- [3] M. Braun, Differential Equations and Their Applications, Springer Verlag, 3rd edition (1983)
- [4] E. Butkov, Física Matemática, Guanabara Dois (1968)
- [5] H. Caldeira e outros, Ontem e Hoje 12, Parte 1, Porto Editora (2013)
- [6] J. Deus et al, Introdução à Física, McGrawHill (1992)
- [7] D. Figueiredo, Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais, IMPA (1977)
- [8] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Gravitação, Ondas e Termodinâmica, 4.º edição, LTC editora
- [9] M.W. Hirsch, S. Smale and R. L. Devaney, Differential Equations, Dynamical Systems e an introduction to chaos, Acad. Press, 2nd edition (1974)
- [10] W. G. Kelley, A. C. Peterson, The Theory of differential equations. Classical and qualitative. Second Edition. Springer (2010)
- [11] E. L. Lima, Curso de análise real vol.1, Projeto Euclides, (1995)
- [12] N. Maciel et al, Eu e a Física 12, Parte 1, Porto Editora (2013)
- [13] G. Smirnov, I. Rodrigues, Matemática. Origens e aplicações, Escolar Editora (2006)

- [14] J. Stewart, Cálculo, Volume II, 5.º edição, Thomson (2007)
- [15] K. Symon, Mechanics, 2nd edition, Addison-Wesley Publishing Company, Inc.(1960)
- [16] A. Tveito, R. Winther, Texts in applied mathematics. Introduction to partial differential equations. A computational approach. Springer (2005)
- [17] D. G. Zill, Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem, São Paulo, Pioneira Thomson Learning Ltda (2003)
- [18] Mathematics of the 19th Century: Function Theory According to Chebyshev Ordinary Differential Equations Calculus of Variations Theory of Finite Differences. Edited by A. N. Kolmogorov and A. P. Yushkevich, Birkhäuser (1998)
- [19] Programa e Metas Curriculares-Matemática A. Ensino Secundário. Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas. (2013)