UNIVERSIDADE DE ÉVORA
ESCOLA DE CIÊNCIAS SOCIAIS


**Mestrado em Ciências da Educação – Supervisão Pedagógica**

**Dissertação**

# O contributo do GeoGebra no desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas de alunos do 8.º ano do Ensino Básico


Anabela de Jesus Machado Lavado

**Orientadora**:
Professora Doutora Ana Paula Canavarro



2012

**Mestrado em Ciências da Educação – Supervisão Pedagógica**

**Dissertação**

# O contributo do GeoGebra no desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas de alunos do 8.º ano do Ensino Básico

Anabela de Jesus Machado Lavado

**Orientadora**:
Professora Doutora Ana Paula Canavarro

## Resumo

### O contributo do GeoGebra no desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas de alunos do 8.º ano do Ensino Básico

O presente estudo tem como objetivo compreender como pode um contexto de sala de aula apoiado pelo GeoGebra contribuir para promover o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas de alunos do 8.º ano do Ensino Básico. Esta capacidade transversal é especialmente importante nas atuais orientações curriculares.

O estudo, pelos objetivos definidos e natureza dos dados recolhidos, constitui uma investigação qualitativa, concretizada pela modalidade de estudo de caso de uma turma participante numa intervenção didática centrada na resolução de problemas geométricos. Conclui-se que as resoluções dos problemas apresentadas pelos alunos com o Geogebra são, na maioria, adequadas e rigorosas mas não apresentam robustez. Em relação às estratégias de resolução, as duas mais utilizadas pelos alunos foram *Fazer um diagrama ou esquema* e *Fazer tentativa* mas alguns conciliaram diversas estratégias. Em relação à formulação de problemas, a maioria optou por fazer variações dos problemas iniciais, variando o contexto ou os dados.

**Palavras-Chave:** Tecnologias no ensino da Matemática; Resolução de problemas; estratégias de resolução de problemas; formulação de problemas; GeoGebra.

## Abstract

### GeoGebra contribution to the development of problem solving abilities in 8th grade students

The objective of this study is to determine how GeoGebra, used in classroom situations, can contribute to the development of problem solving abilities in 8th grade students. This ability is specially important in current curricula guidelines and it is present in mathematics syllabus for basic school.

Due to the nature of its objectives and collected data, this study is a qualitative investigation, a case study of a class that was involved in a didactic intervention based on geometric problem solving.

We conclude that the resolutions presented by students to problems in GeoGebra are for the most part adequate and rigorous but lacking robustness. As for problem solving strategies, the most used were *How to make a diagram* and *Making Tries*. However, some students used a combination of several strategies. Considering problem formulation, most students preferred to use initial problem variations, changing context or data.



**Key words:** Teaching Mathematics with technologies; problem solving strategies; problem formulation; GeoGebra.

## Agradecimentos

À minha orientadora, Professora Doutora Ana Paula Canavarro, pelas críticas e sugestões construtivas, pelo apoio e incentivo constantes e pela disponibilidade revelada.

À turma do 8.º ano de escolaridade que participou nesta investigação, pelo empenho, entusiasmo e carinho demonstrados.

Aos meus pais, pelo apoio incondicional e pelas palavras de incentivo atribuídas nos momentos mais complicados.

À Marisa, pela sua amizade bem como por toda a ajuda disponibilizada e pelo apoio e incentivo dado nos momentos mais difíceis.

Aos meus amigos e familiares pela paciência demonstrada e pelo tempo que tive de abdicar para puder realizar a presente dissertação.

## Índice

**Índice de anexos**

## Índice de Figuras

## Índice de Tabelas

## Capítulo I

# Introdução

No presente capítulo apresenta-se a investigação realizada. Inicialmente são expostas as razões que motivaram o estudo, bem como a sua importância, tendo por base as orientações curriculares atuais para o ensino da Matemática. Posteriormente é apresentado o objetivo e as questões da investigação, bem como a estrutura organizativa da dissertação.

## Razões que motivaram o estudo

Nos dias de hoje, muitas vezes se referem os novos desafios com que o professor de Matemática é confrontado, nomeadamente o de conquistar a vontade e disponibilidade dos alunos para aprender Matemática e fazer com que estes se tornem matematicamente competentes. A cada ano que passa deparo-me cada vez mais com alunos que me perguntam para que serve a Matemática, porque têm de aprender determinados conteúdos, uma vez que nunca os vão utilizar na vida – consideram eles. Cabe-me a mim explicar em que circunstâncias do dia-a-dia os alunos podem aplicar determinados conhecimentos, mostrando assim a utilidade da disciplina de Matemática, de forma a motivá-los e fomentar o gosto por esta disciplina, o que nem sempre é fácil.

Ao longo da minha experiência profissional, tenho constatado que quando os alunos são confrontados com um problema matemático, geralmente desistem de o resolver esperando que algum colega ou a professora o faça por eles, pois consideram que os problemas são sempre muito difíceis. Esta dificuldade prende-se com o facto de os alunos não conseguirem encontrar uma estratégia de resolução eficaz, para além de na maioria dos casos não interpretarem de forma correta os dados. Sempre procurei encontrar estratégias que ajudassem os alunos a colmatar essa dificuldade, refletindo sobre a minha prática, discutindo com colegas possíveis estratégias de ensino/aprendizagem, mas a dificuldade dos alunos persistia.

Com a homologação do Programa de Matemática do Ensino Básico, em 2007, a resolução de problemas aparece como uma capacidade transversal que deve ser trabalhada ao longo de todo o Ensino Básico. Mas como se poderia trabalhar esta capacidade transversal de forma eficaz, motivando realmente os alunos para a resolução de problemas?

Hoje em dia há vários *softwares* matemáticos que permitem explorar de forma mais eficaz os diferentes temas com os alunos, permitindo que estes trabalhem autonomamente e consigam estabelecer conjeturas. Um dos *softwares* matemáticos existentes é o GeoGebra. Este *software* é muito fácil de aprender a trabalhar e os alunos, quando são confrontados com uma tarefa em que o têm de o usar, apresentam geralmente uma atitude positiva e as aprendizagens são mais facilmente adquiridas.

Ao longo da minha experiência profissional, sempre tentei diversificar as estratégias de ensino/aprendizagem, fazendo uso das tecnologias na sala de aula, nomeadamente a calculadora e por vezes o computador, utilizando o GeoGebra para abordar determinados conteúdos. Quando os meus alunos tinham a possibilidade de trabalhar com este *software*, verificava que eles eram mais autónomos na realização das tarefas propostas. Mas tenho consciência que essas utilizações eram pontuais, uma vez que nem sempre as condições das escolas onde já lecionei permitiam uma utilização mais constante.

Durante a parte curricular do Mestrado em Ciências da Educação - Supervisão Pedagógica, nomeadamente na disciplina de Metodologias de Ensino da Especialidade II, lecionada pela Professora Doutora Ana Paula Canavarro, fiz algumas explorações com o Geogebra e surgiu a ideia de utilizar este *software* na resolução de problemas.

Esta investigação surge assim, para tentar perceber de que forma um Ambiente de Geometria Dinâmica, o GeoGebra, pode contribuir para desenvolver a capacidade de resolução de problemas nos alunos.

## Pertinência do estudo

É importante que o professor motive o aluno para a aprendizagem da Matemática e utilize todos os recursos disponíveis para isso, diversificando o mais possível o ensino desta disciplina.

Vários documentos oficiais, nomeadamente os *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2007) e o *Programa de Matemática do Ensino Básico* (Ponte, Serrazina, Guimarães, Breda, Guimarães, Sousa, Menezes, Martins, & Oliveira, 2007), referem que os alunos devem ter oportunidade de usar frequentemente recursos diversificados, onde se incluem as tecnologias, pois só assim podem desenvolver, de forma eficaz, algumas das competências da disciplina de Matemática. Tal como é referido por Ponte *et al.* (2007), o ensino da Matemática

> deve ser orientado por duas finalidades fundamentais: a) Promover a aquisição de informação, conhecimento e experiência em Matemática e o desenvolvimento da capacidade da sua integração e mobilização em contextos diversificados. (…) b) Desenvolver atitudes positivas face à Matemática e a capacidade de apreciar esta ciência (p. 3).

São também vários os autores que apresentam vantagens para a utilização das tecnologias em sala de aula, nomeadamente Smith (2002), Ponte (1995), Azevedo (2002) e Associação de Professores de Matemática (2003), que consideram que com o uso das tecnologias, o aluno pode envolver-se em atividades matemáticas significativas e investir em aprendizagens e capacidades de nível superior.

Tem-se verificado grandes evoluções ao nível das tecnologias para o ensino da Matemática, existindo atualmente vários *softwares* indicados, como é o caso dos Ambientes de Geometria Dinâmica. São várias as vantagens apontadas aos Ambientes de Geometria Dinâmica. Paiva (2009), por exemplo, afirma que:

> O *software* dinâmico permite que facilmente apareçam vários procedimentos para o mesmo tipo de resultados. Por outro lado, leva a que os alunos construam a Matemática e não a olhem como um produto final, estático, um conjunto de resultados impostos e de exercícios mecanizados. Quando bem explorados, os ambientes de geometria dinâmica, vêm influenciar a forma como o aluno olha para a Matemática, aumentando o seu poder de raciocínio e de argumentação, levando a alterações na metodologia seguida no desenvolvimento do currículo de Matemática (p. 46).

Esta opinião é também partilhada por Gafanhoto (2011), a qual reconhece que o uso de tecnologias em sala de aula influencia as opiniões dos alunos relativamente à Matemática e confere-lhes um papel mais ativo na construção das suas aprendizagens.

Por outro lado, atualmente verifica-se que os documentos oficiais, NCTM (2007) e o Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte *et al.*, 2007) dão um grande destaque à resolução de problemas. Esta aparece como uma competência transversal a desenvolver ao longo do Ensino Básico e deve fazer parte integrante de toda a aprendizagem matemática. O Departamento do Ensino Básico (DEB, 2001) afirma que:

> A resolução de problemas constitui, em Matemática, um contexto universal de aprendizagem e deve, por isso, estar sempre presente, associada ao raciocínio e à comunicação e integrada naturalmente nas atividades. (…) A formulação de problemas deve igualmente integrar a experiência matemática dos alunos (p. 68).

Boavida, Paiva, Cebola, Vale e Pimentel (2008) consideram que a resolução de problemas

> proporciona o recurso a diferentes representações e incentiva a comunicação; fomenta o raciocínio e a justificação; permite estabelecer conexões entre vários temas matemáticos e entre a Matemática e outras áreas curriculares; apresenta a Matemática como uma disciplina útil na vida quotidiana (p. 14).

Não só a resolução de problemas mas também a sua formulação é apontada como trazendo mais-valias ao aluno. Assim, Ernest (1991) considera que a formulação de problemas estimula o aluno a produzir conhecimentos. Vale e Pimentel (2004) referem que a formulação de problemas possibilita aos alunos a invenção de problemas utilizando a sua linguagem própria, proporcionando desta forma uma alternativa ao ensino tradicional.

O grupo de trabalho que elaborou o *Matemática 2001* (Abrantes, Precatada, Lopes, Baeta, Loureiro, Ferreira, Guimarães, Almiro, Ponte, Reis, Serrazina, Pires & Teixeira, 1998) recomenda que os alunos devem ser confrontados com tarefas que fomentem o desenvolvimento do seu pensamento matemático, como é o caso da resolução de problemas, que se diversifiquem as formas de interação em sala de aula e que os alunos utilizem materiais que lhes permitam um forte envolvimento na sua aprendizagem, nomeadamente os computadores.

No Princípio da Tecnologia que consta no NCTM (2007), destaca-se que quando o aluno tem a possibilidade de usar ferramentas tecnológicas, pode concentrar-se de forma mais eficaz nas decisões que terá de tomar, nas reflexões que terá de fazer, no raciocínio e na resolução de problemas. É ainda referido que com o auxílio das tecnologias os alunos podem resolver problemas mais complexos e investigar as propriedades de determinada figura através da utilização de um programa informático de geometria dinâmica.

Em 2001, o Departamento do Ensino Básico (DEB) apresenta um conjunto de competências matemáticas que todos os alunos devem desenvolver ao longo da educação básica. Assim, salienta-se:

> A predisposição para procurar entender a estrutura de um problema e a aptidão para desenvolver processos de resolução, assim como para analisar os erros cometidos e ensaiar estratégias alternativas; a aptidão para decidir sobre a razoabilidade de um resultado e de usar, consoante os casos, o cálculo mental, os algoritmos de papel e lápis e os instrumentos tecnológicos (p. 57).

Os autores do Programa de Matemática do Ensino Básico, Ponte *et al.* (2007), referem que:

> Os alunos devem recorrer a *software* de Geometria Dinâmica, sobretudo na realização de tarefas exploratórias e de investigação. Os materiais manipuláveis (por exemplo, tangram, peças poligonais encaixáveis e sólidos de enchimento em acrílico) constituem recursos cuja utilização complementa a abordagem dinâmica ao estudo da Geometria. Tanto os recursos computacionais como os modelos geométricos concretos permitem desenvolver a intuição geométrica, a capacidade de visualização e uma relação mais afetiva com a Matemática (p. 51).

Por outro lado, Ponte *et al.* (2007) referem que o uso adequado de recursos tecnológicos para apoiar a resolução de problemas possibilita que os alunos se centrem nos aspetos estratégicos do pensamento matemático.

Tendo em conta a importância da resolução de problemas e o uso das tecnologias no ensino da Matemática e de acordo com as orientações curriculares nacionais e internacionais, é pertinente efetuar um estudo que contribua, de algum modo, para ampliar o conhecimento sobre o supramencionado assunto.

## Objetivo e questões do estudo

O presente estudo tem como objetivo compreender como pode, um contexto de sala de aula apoiado pelo GeoGebra, contribuir para promover o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas em alunos do 8.º ano do Ensino Básico.

Assim, este estudo procurará responder às seguintes questões:

a) Como se caracterizam as resoluções apresentadas pelos alunos?

b) Que estratégias de resolução de problemas usam os alunos para resolver os problemas?

c) Que formulação de novos problemas surge a partir dos problemas resolvidos?

## Organização do estudo

O presente estudo está estruturado em seis capítulos. No primeiro capítulo apresentam-se as razões que motivaram o estudo, a sua importância, o objetivo e as questões da investigação. No segundo e terceiro capítulos é feita a revisão da literatura que serviu de suporte teórico à presente investigação, nomeadamente sobre as tecnologias e a resolução de problemas no ensino da Matemática. O quarto capítulo, sobre a metodologia, tem a finalidade de apresentar e justificar as opções metodológicas que foram tomadas no âmbito da presente investigação. No quinto capítulo é apresentado o estudo de caso da turma participante na presente investigação. Por fim, no sexto capítulo apresentam-se as conclusões.

# Capítulo II

# Tecnologia no ensino da Matemática

O presente capítulo, dedicado à revisão de literatura encontra-se dividido em cinco secções. A primeira secção apresenta, com base na literatura existente, a evolução do ensino da Matemática com o uso das tecnologias, desde a década de 60 do século passado até à atualidade. A segunda secção é dedicada aos Ambientes de Geometria Dinâmica em geral e, em particular, ao GeoGebra, apresentando-se as suas características. Na terceira secção é apresentada a caracterização das construções efetuadas em Ambientes de Geometria Dinâmica. Na quarta secção são apresentadas algumas investigações realizadas em Portugal e no estrangeiro, com a finalidade de perceber as potencialidades e as vantagens de utilização dos Ambientes de Geometria Dinâmica. Por fim, na última secção, apresentam-se as orientações internacionais, seguidas das nacionais sobre a utilização das tecnologias no ensino da Matemática.

## Evolução do ensino da Matemática com o uso das tecnologias

Na década de 60, apesar de o computador ser ainda muito raro na maioria das escolas e ao mesmo tempo difícil de operar, vários projetos tentaram inseri-lo no ensino de várias disciplinas, incluindo na Matemática (Ponte & Canavarro, 1997). Esta década fica marcada pelo Ensino Assistido por Computador. Neste tipo de ensino, segundo Ponte e Canavarro (1997), o computador desempenha o papel de professor, "procurando transmitir aos alunos conhecimentos matemáticos pré-definidos e proporcionar o desenvolvimento de destrezas básicas." (p. 26).

Nos anos 70, as calculadoras assumem um papel importante no dia-a-dia das pessoas e no desempenho da sua atividade profissional, no entanto, não são bem vistas enquanto ferramenta a utilizar no ensino da Matemática (Ponte & Canavarro, 1997). Muitos viam--na com bastante desconfiança, pois consideravam que iria prejudicar o desenvolvimento das destrezas de cálculo e a aprendizagem da Matemática. Esta opinião é partilhada por Crato (2004). Como referem Ponte e Cebola (2008),

> os opositores dizem que o uso da calculadora tem efeitos perniciosos sobre a aprendizagem dos alunos – diminuindo drasticamente a sua capacidade de cálculo e, por consequência, as suas faculdades de raciocínio matemático. Do outro lado, os defensores do uso da calculadora apontam diversas vantagens ao uso deste instrumento como a possibilidade de utilização de dados realistas nos problemas a propor aos alunos, o estímulo à exploração de relações e regularidades e a libertação dos alunos do trabalho penoso (p. 91).

Ponte e Canavarro (1997) referem que inicialmente a calculadora apenas era utilizada em sala de aula para verificar os resultados dos cálculos efetuados pelos alunos. Posteriormente, muitos docentes começaram a tirar partido da calculadora e das suas funcionalidades, utilizando-a como uma ferramenta importantíssima nas atividades de investigação, na resolução de problemas, entre outros. As calculadoras assumem um papel importante, uma vez que o aluno não fica preso aos cálculos morosos e assim pode-se preocupar com a resolução do problema propriamente dito e fazer investigações de forma mais eficaz. Como referem Ponte e Canavarro (1997) "as calculadoras não são apenas poderosos instrumentos de cálculo. Elas são também materiais com muitas potencialidades para promover uma melhor aprendizagem da Matemática" (p. 96). Algumas investigações, como as realizadas por Hembree e Dessart (1992), Dunham e Dick (1994), Farrel (1996), Dunham (2000) e por Pereira e Guerreiro (2008) reforçam a ideia de que a calculadora gráfica pode e deve exercer um importante papel no ensino da Matemática, originando outra dinâmica na sala de aula.

De acordo com Ponte e Canavarro (1997), na década de 80 os computadores passaram a ser acessíveis à sociedade em geral, fazendo com que muitas pessoas começassem a usar os programas de processamento de texto e as folhas de cálculo. Ao nível do ensino, o computador sempre foi encarado como uma mais-valia e como uma fonte de progresso, uma vez que os professores podiam fugir um pouco às aulas expositivas e torná-las mais interessantes e dinâmicas. Nesta altura foram criados vários Clubes de

Informática e de Matemática, onde se utilizava o computador para trabalhar diversas atividades matemáticas com os alunos. Aqui verificou-se que os alunos ficavam mais interessados e empenhados em sala de aula o que contribuía para uma melhoria na aprendizagem. No final desta década, com o desenvolvimento de *software* específico para o ensino da Matemática, os docentes começam a usar as novas tecnologias diretamente nas aulas de Matemática, tirando proveito das suas potencialidades, facultando a integração de novas abordagens dos vários conteúdos curriculares (Ponte & Canavarro, 1997).

No entanto, apesar das potencialidades dos *softwares* específicos para o ensino da Matemática, reconhecidas pelos professores, Candeias (2005) refere que se verificava em 2001, através de um inquérito realizado pelo Grupo de Trabalho de Geometria da Associação de Professores de Matemática a 228 professores, que apenas 43% deles fazia uso destes *softwares* para lecionar os conteúdos referentes à Geometria, no ano letivo anterior, o que revelava a dificuldade em introduzir este tipo de tecnologia em sala de aula.

Uma outra tecnologia que se pode utilizar no ensino da Matemática são as *applets*. Como referem Ventura e Oliveira (2008), "as *applets* são programas escritos em linguagem JAVA que podem ser incluídos em páginas HTML" (p. 382). Estas aplicações estão disponíveis na *Internet* para serem utilizadas *on-line*, e existe um grande número que se centra em conteúdos matemáticos específicos, permitindo ao aluno aprofundar os seus conhecimentos e a compreensão de vários conceitos e relações. Sendo as *applets* aplicações interativas, permitem que o aluno se sinta à vontade para experimentar e explorar, sem ter receio de errar, pois não é o professor que avalia as respostas, mas sim o computador.

Mais recentemente, as escolas começaram a ser equipadas com uma outra tecnologia – os Quadros Interativos. De acordo com Fitas e Costa (2008), o primeiro quadro interativo surge em 1991, através da Smart Technologies, mas em Portugal, apenas recentemente se começou a falar neles, em especial devido ao Plano de Ação para a Matemática, que teve início no ano letivo de 2006/2007 e ao Plano Tecnológico para a Educação. Estes quadros permitem a utilização de uma grande variedade de instrumentos de apoio ao ensino, como por exemplo os *softwares* específicos de Matemática, fazendo com que aumente a motivação, o interesse e a participação dos alunos. Meireles (2006) descreve o quadro interativo como sendo uma tecnologia que ambiciona modificar a vida do professor na sala de aula e tornar mais atrativo o processo de ensino/aprendizagem, melhorando as aprendizagens e captando a atenção dos alunos. Vários autores, como por exemplo Bell (2002) e Miller e Glover (2002) referem várias vantagens para a utilização dos quadros interativos em sala de aula, nomeadamente o facto de este recurso se adequar facilmente a diferentes níveis etários e a diferentes áreas curriculares, permitir a interação e discussão em contexto de sala de aula e, permitir a utilização de vários recursos num mesmo suporte, levando à motivação dos alunos e a uma maior dinâmica nas aulas.

Tal como foi referido e de acordo com o Plano Tecnológico da Educação (2010), verifica-se atualmente que existem várias iniciativas no sentido de melhorar os meios tecnológicos existentes na escola, nomeadamente através das ações de formação para professores sobre a implementação das novas tecnologias em sala de aula e a implementação do Plano Tecnológico para a Educação, o qual assentava em três aspetos fundamentais de atuação: tecnologia, formação e conteúdos e pretendia dotar a escola de um computador com ligação à internet, por cada cinco alunos; um videoprojector por sala de aula e um quadro interativo por três salas de aula.

Muitos autores apontam benefícios que advêm da utilização das tecnologias em sala de aula e motivos pelos quais o professor não deve descurar este tipo de recursos. Assim, Ponte (1997) considera que,

> O ensino na sala de aula não se pode basear exclusivamente no quadro e giz mas tem de tirar partido de tecnologia como o *viewscreen* e os computadores. Ensinar não se pode reduzir ao binómio de expor a matéria e passar exercícios, sendo necessário propor tarefas diversificadas, incluindo problemas, projetos e investigações, e estimular diferentes formas de trabalho e de interação entre os alunos. O professor não pode monopolizar o discurso na sala de aula mas tem de ser capaz de a transformar numa verdadeira comunidade de aprendizagem (p. 1).

O professor tem de utilizar todos os recursos disponíveis para tornar as aulas mais interessantes e com significado, de forma a motivar os alunos para a aprendizagem e o querer saber e aprender mais.

Para Smith (2002), as tecnologias podem trazer muitos benefícios para a aprendizagem quando devidamente integradas no currículo e em articulação com metodologias adequadas. Também Ponte (1995) considera que as tecnologias e o seu uso influenciam não só os objetivos como as formas de trabalhar em sala de aula. Para este autor, o computador e a calculadora levam a que não se dê tanta importância às competências de cálculo e de simples manipulação simbólica; estimula o desenvolvimento do raciocínio, a resolução de problemas e a capacidade crítica; dá ênfase ao papel da linguagem gráfica, pois não se fica cingido aos processos formais de cunho algébrico e analítico; fomenta a realização de projetos e de atividades de investigação, exploração e modelação matemática; e, permite o envolvimento dos alunos em atividades matemáticas significativas.

Azevedo (2002) aponta as novas tecnologias de informação e o computador em particular, como sendo um recurso extremamente importante, uma vez que facilita a organização das atividades curriculares e extracurriculares, podendo estimular o sucesso escolar. Também Hoyles e Noss (2003) consideram que as tecnologias permitem facilitar o trabalho mais rotineiro e monótono, possibilitando, assim, o investimento em aprendizagens e capacidades de nível superior, como formular conjeturas, por exemplo.

Segundo a Associação de Professores de Matemática (2003),

> A educação com recurso à tecnologia é um direito dos alunos, que todos os intervenientes no sistema educativo devem respeitar. A negação deste direito contraria a desejada igualdade de oportunidades de acesso aos bens da educação. A tecnologia tem influenciado e alterado as formas de ver, utilizar e produzir matemática. A educação matemática não pode permanecer indiferente a esta situação. É fundamental que as ferramentas tecnológicas sejam integradas de forma consistente nas atividades letivas, proporcionando aos alunos verdadeiras e significativas aprendizagens matemáticas (p. 1).

## Ambientes de Geometria Dinâmica e GeoGebra

Atualmente existem vários *softwares* disponíveis para o ensino da Matemática, onde se incluem os Ambientes de Geometria Dinâmica. Entre os Ambientes de Geometria Dinâmica encontram-se o *Cinderella*, o *Cabri-Géomètre* (Cabri), o *Geometer´s Sketchpad* (GSP) e o *GeoGebra*.

De acordo com Ferreira (2005), o *Cinderella* foi criado por J. Richter-Gebert e H. Kurtenkamp e é um programa que permite criar pontos, retas, circunferências, polígonos, cónicas, fazer medições de comprimentos e ângulos, determinar áreas, criar exercícios interativos, entre outros. É um programa fácil de utilizar, muito intuitivo e que permite ainda trabalhar a geometria euclidiana e as geometrias hiperbólica e esférica. Como desvantagem surge o facto de não podermos trabalhar as transformações geométricas e não nos permitir aceder ao histórico das construções efetuadas.

Ferreira (2005) e Machado (2005) referem que o *Cabri-Géomètre* foi criado por Jean--Marie Laborde e Franck Bellemain e o *Geometer´s Sketchpad* nasceu a partir de um amplo projeto dirigido por Eugene Klotz e Doris Schattschneider. Os dois programas anteriormente referidos permitem fazer todas as construções habitualmente efetuadas com régua e compasso, tal como acontecia com o programa *Cinderella*. No entanto, têm a particularidade de se poder fazer construções utilizando outras já existentes que podem ser gravadas e utilizadas posteriormente. Outra das vantagens destes programas é o facto de se poder fazer transformações geométricas nos objetos sem que estes percam as características iniciais, permitindo assim a procura de relações matemáticas e a testagem de conjeturas.

Segundo Hohenwarter e Hohenwarter (2009), o GeoGebra é um *software* gratuito criado por Markus Hohenwarter e desenvolvido por este e uma equipa internacional de programadores. O facto de ser gratuito faz com que possa ser utilizado pelos alunos tanto em sala de aula, com o auxílio e a supervisão do professor, como em casa. Este programa junta a geometria, a álgebra e o cálculo num só programa. Apresenta três vistas diferentes dos objetos matemáticos: a Zona Gráfica, a Zona Algébrica e a Folha de Cálculo (esta apenas está disponível nas versões mais recentes). Em baixo apresenta--se uma imagem do ecrã do GeoGebra, onde são visíveis as três zonas.

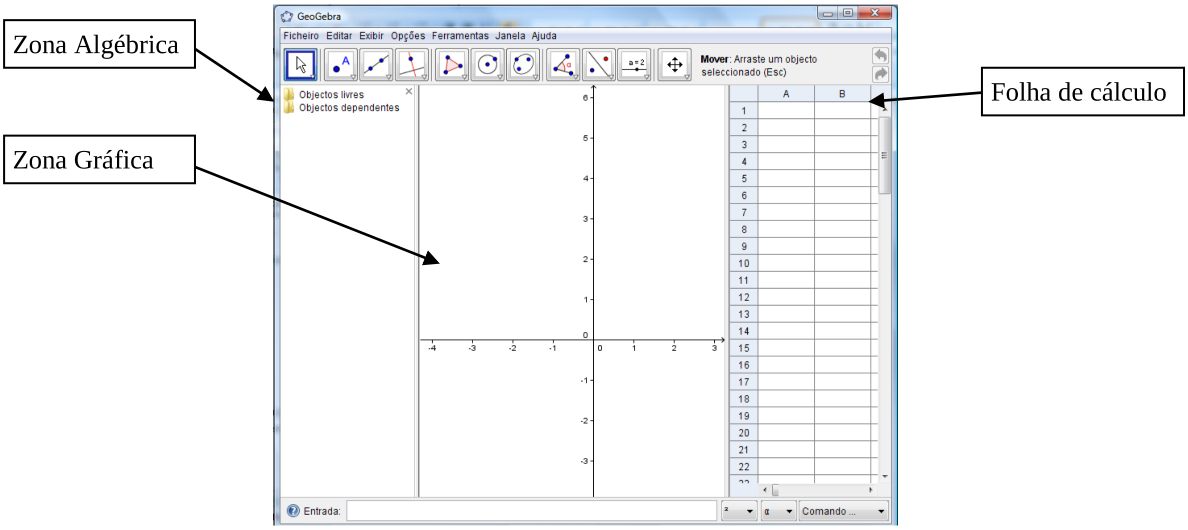



**Figura 1: Ecrã do GeoGebra**

Ainda de acordo com Hohenwarter e Hohenwarter (2009), cada uma destas zonas tem funções diferentes. A zona gráfica permite apresentar representações gráficas, por exemplo, as construções básicas da geometria euclidiana, gráficos de funções, entre outras. Na zona algébrica, podemos apresentar a expressão algébrica de funções, equações, coordenadas de pontos, entre outras. Por fim, na folha de cálculo podemos inserir não apenas números mas também todo o tipo de objetos matemáticos que o GeoGebra suporta, nomeadamente coordenadas de pontos, funções, entre outras. Todas as representações de um mesmo objeto podem ser vistas numa só janela e adaptam-se automaticamente às mudanças realizadas. Este programa tem a possibilidade de podermos aceder a todos os passos utilizados na construção de algum objeto matemático, o que é uma mais-valia, uma vez que os alunos podem de forma autónoma tentar fazer as construções realizadas na sala de aula, no seu próprio computador, em casa. Para isso basta aceder ao protocolo de construção, como se pode observar na figura em baixo.

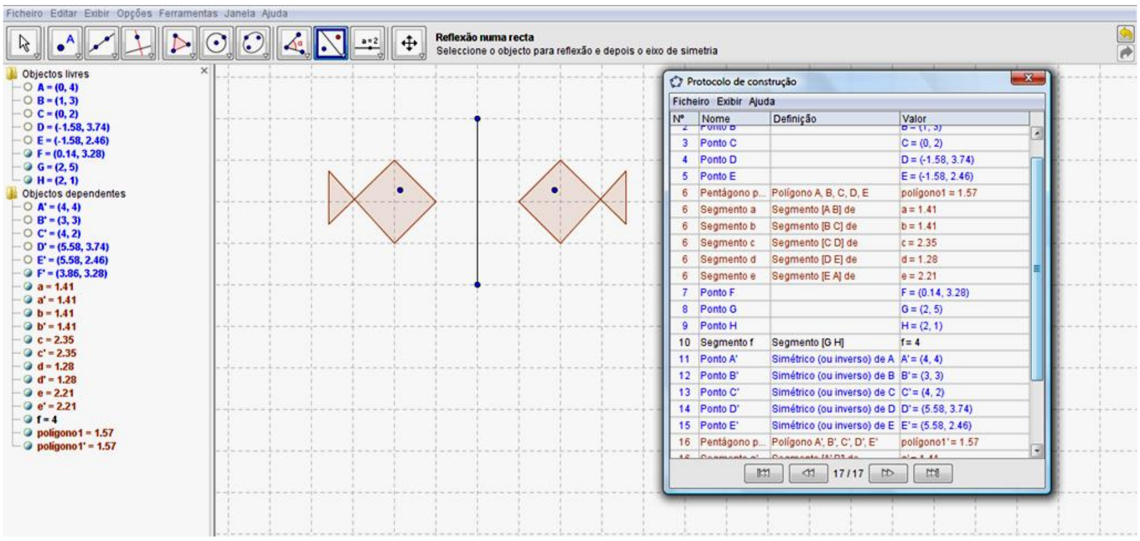



**Figura 2: Protocolo de construção**

Todos os programas anteriormente referidos podem ser utilizados pelos alunos em qualquer nível de ensino. Qualquer um deles apresenta benefícios na sua utilização, pois permitem fazer construções geométricas rigorosas, medições, transformar figuras já construídas, entre outros. Com estes programas os alunos têm a possibilidade de explorar e conjeturar relações entre figuras geométricas e resolver problemas geométricos de uma forma mais simples do que aconteceria com papel e material de desenho habitual.

Para Laborde (1993), este tipo de programas permite um maior número de ações e objetos que podem ser facilmente manipulados, facilitando a visualização de propriedades e relações geométricas possibilitando assim a realização de outras tarefas mais complexas, como por exemplo conjeturar. Os alunos deixam de se ter de preocupar com tarefas mecânicas e automáticas, para poderem refletir sobre elas e fortalecer o seu raciocínio e os processos de pensamento. Esta opinião é partilhada por Cuoco e Goldenberg (2003), pois estes autores consideram que os *softwares* de geometria dinâmica podem levar a que o aluno, de forma autónoma, faça conjeturas e exercite o seu raciocínio.

Veloso (1998) considera que os *softwares* de geometria dinâmica ajudam na aquisição dos conceitos matemáticos, tornando-os mais intuitivos e dinâmicos. Laborde (2001) refere ainda que os Ambientes de Geometria Dinâmica podem assumir papéis distintos quando são utilizados em sala de aula. Podem facilitar a apresentação da tarefa matemática, facilitar a resolução da tarefa, modificar a tarefa dada e, por fim, potenciar a realização de tarefas que só podem existir com o auxílio destes programas.

Machado (2005) destaca três formas de usar os Ambientes de Geometria Dinâmica em sala de aula. A primeira seria como uma ferramenta de apresentação a ser usada pelo professor para introduzir conceitos de modo dinâmico; outra seria para explorar ou construir modelos, por parte do aluno; e, a última seria para auxiliar o aluno na resolução de um problema ou na investigação de propriedades das figuras geométricas.

Ferreira (2005) considera que as vantagens da utilização dos Ambientes de Geometria Dinâmica são várias:

> Desde a sua fácil utilização à possibilidade de permitirem uma abordagem dos conceitos assente na descoberta e na exploração, desde o encorajamento à criatividade e ao processo de descoberta, onde os alunos visualizam, analisam, fazem conjeturas e até demonstram, até ao aprofundamento do conhecimento e do desenvolvimento do trabalho cooperativo e da resolução de problemas (p. 34).

Esta autora enumera várias vantagens que, como já referimos, são partilhadas por outros autores e investigadores, como é o caso de Candeias (2005), que considera que os ambientes de geometria associados a atividades matemáticas significativas, nomeadamente atividades de exploração e investigação podem fomentar o desenvolvimento de capacidades relacionadas com a construção de figuras e a análise das suas propriedades, com a argumentação e a resolução de problemas geométricos, bem como desenvolver a predisposição para procurar padrões e realizar investigações.

Também Paiva (2009) afirma que:

> O *software* dinâmico permite que facilmente apareçam vários procedimentos para o mesmo tipo de resultados. Por outro lado, leva a que os alunos construam a Matemática e não a olhem como um produto final, estático, um conjunto de resultados impostos e de exercícios mecanizados. Quando bem explorados, os ambientes de geometria dinâmica, vêm influenciar a forma como o aluno olha para a Matemática, aumentando o seu poder de raciocínio e de argumentação, levando a alterações na metodologia seguida no desenvolvimento do currículo de Matemática (p. 46).

Esta opinião é também partilhada por Gafanhoto (2011), que reconhece que o uso de tecnologias em sala de aula influencia as opiniões dos alunos relativamente à Matemática e confere-lhes um papel mais ativo na construção das suas aprendizagens.

O facto destes Ambientes de Geometria Dinâmica darem um *feedback* constante ao aluno, faz com que estes sejam muito mais ativos e críticos aquando da realização das tarefas e consequentemente adquiram mais facilmente as competências pretendidas.

## Caracterização das construções efetuadas com o auxílio de Ambientes de Geometria Dinâmica

Candeias (2005) salienta que uma das principais funções que estão disponíveis nos Ambientes de Geometria Dinâmica é a possibilidade de se arrastar um ponto ou uma parte das figuras construídas. Este autor considera que esta função constitui uma mais-valia para a aprendizagem de conceitos geométricos, e é uma poderosa ferramenta que expõe a diferença entre desenhar no papel e lápis e construir figuras nos Ambientes de Geometria Dinâmica.

Jones (2000) concluiu, através de um estudo realizado com alunos de doze anos, que estes, quando começam a utilizar um Ambiente de Geometria Dinâmica, apenas desenham as figuras em vez de as construir, mas que a partir dessas experiências iniciais conseguem construir outras figuras mais complexas. Por outro lado, o facto de os alunos poderem mover objetos livres e arrastar elementos das construções, permiti-lhes procurar invariantes.

Junqueira (1995) refere que quando se fazem construções geométricas utilizando um Ambiente de Geometria Dinâmica, fica registado o processo de construção que determina quais as manipulações que se podem efetuar na construção e quais as diversas aparências que podem ver visualizadas através dessa manipulação. Esta autora refere que as construções ou são *resistentes* ou *desmancham-se*. As construções são *resistentes* quando, ao serem manipuladas, conservam a sua aparência e mantém as propriedades utilizadas na sua construção. Por outro lado, as figuras *desmancham-se* quando, ao se mover um objeto livre, perdem as suas propriedades. Junqueira (1995) considera

> A descrição explícita de uma figura geométrica em termos de propriedades e relações, concretizada num determinado algoritmo de construção, é determinante na investigação de outras propriedades e relações da figura representada. (…) As descrições das figuras geométricas materializadas em diferentes algoritmos de construção num AGD patrocinam o que se pode considerar uma multiplicação de figuras geométricas (p. 55).

Junqueira (1995) refere que assim surgem novas propriedades dinâmicas que se podem desmanchar ou resistir à manipulação, de acordo com o algoritmo utilizado, e que possibilitam investigações diversificadas.

Laborde, Kynigos, Hollebrands e Strasser (2006) referem que as construções feitas por manipulação ou arrastamento de objetos livres, não são apenas uma parte da solução de problemas, mas servem de apoio para uma construção robusta. Estes autores consideram assim que a manipulação de objetos livres desempenha um papel importante na passagem de uma solução puramente visual, para uma solução integralmente baseada em propriedades geométricas.

Domènech (2009) salienta que as construções robustas e as não robustas são complementares, indo assim ao encontro do que Healy demonstrou em 2000. Este autor argumenta que a generalização de propriedades surge através da exploração de construções que se desmancham e podem ser verificadas através das construções robustas.

## Investigação sobre Ambientes de Geometria Dinâmica

A nível internacional e nacional muito se tem investigado sobre as potencialidades e as vantagens da utilização dos Ambientes de Geometria Dinâmica, como veremos em seguida.

A nível internacional apresenta-se o trabalho realizado por Garry (2003), com alunos do ensino secundário, no qual refere que com a ajuda de um Ambiente de Geometria Dinâmica, o aluno consegue formular e testar conjeturas. Os alunos envolvem-se nas suas aprendizagens, visualizando e compreendendo mais facilmente os conteúdos matemáticos que estão a investigar.

Um outro estudo realizado por Keyton (2003) com alunos do 9.º ano e utilizando o *Geometer's Sketchpad,* veio também corroborar as conclusões anteriormente referidas, uma vez que, refere que, com a ajuda deste *software* os alunos foram capazes de formular um elevado número de conjeturas.

Em 1995, Sutherland, Ippolito, Porcaro e Healy (1995) realizaram uma investigação com alunos do Ensino secundário, na qual concluíram que a utilização do *Cabri-Géomètre* permitiu aos alunos formular conjeturas e escrevê-las.

A partir de 1994 realizaram-se, em Portugal, vários estudos os quais confirmam as potencialidades dos Ambientes de Geometria Dinâmica, como é o caso de Junqueira (1995), Rodrigues (1997), Piteira (2000), Barbosa (2002), Ferreira (2005), Machado (2005), Candeias (2005), Paiva (2009) e Gafanhoto (2011). Assim, no estudo realizado por Junqueira (1995), com uma turma do 9.º ano de escolaridade, verificou-se que os alunos aderiram de forma bastante satisfatória à construção geométrica utilizando o *Cabri-Géométre*, encontrando processos de construção das figuras propostas de uma forma quase autónoma. Nos seus processos de construção salientou-se a "aparência das figuras geométricas" (p. 222), uma vez que na realização da maioria das fichas de trabalho, os alunos procuravam reproduzir os desenhos propostos. A autora refere ainda que,

> Os alunos manipulavam as suas construções para as explorarem, no sentido de descobrirem processos de as obter, de as justificar e/ou de investigar propriedades das figuras. Na maioria das vezes a exploração incluía fases de

> validação em que a construção era arrastada para verificar se conservava as características pretendidas (p. 230).

Aqui salienta-se uma das potencialidades deste tipo de *software*, ou seja, a possibilidade de formular conjeturas e verificá-las de uma forma mais rápida e eficaz, constituindo assim uma "estratégia de intervenção poderosa para a aprendizagem da Geometria" (p. 235).

Rodrigues (1997) observou as aulas de um grupo de alunos de uma turma de 8.º ano de escolaridade, os quais utilizaram o *Cabri-Géométre* no estudo da unidade didática Lugares Geométricos. A autora refere que o facto de os alunos poderem visualizar as transformações geométricas ocorridas e as relações existentes entre elas, faz com que os alunos elaborem conjeturas, procurem as justificações teóricas para essas conjeturas e discutam as suas ideias matemáticas. Esta autora considera ainda que as interações sociais fomentam a aprendizagem.

A Associação de Professores de Matemática com o apoio do Instituto de Inovação Educacional realiza, em 1998, um estudo intitulado *Matemática 2001*, onde se faz um diagnóstico e refere um conjunto de recomendações sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática em Portugal. Nesta altura constatou-se que a maioria dos professores continuava a dar ênfase a um ensino tradicional, baseado essencialmente na exposição por parte do docente e na resolução de exercícios. A maioria dos professores raramente ou nunca utilizava o computador na sala de aula. Uma das considerações efetuadas na altura refere que "a utilização de materiais diversos, de novas tecnologias e a integração da História da Matemática são elementos importantes para garantir uma aprendizagem significativa por parte dos alunos." (Abrantes *et al*., 1998, p. 32). Assim, o *Matemática 2001* recomenda que,

> A prática pedagógica deve utilizar situações de trabalho que envolvam contextos diversificados (nomeadamente, situações da realidade e da história da Matemática) e a utilização de materiais que proporcionem um forte envolvimento dos alunos na aprendizagem, nomeadamente, materiais manipuláveis, calculadoras e computadores. (Abrantes *et al.*, 1998, p. 44)

No entanto, os professores e a escola debatiam-se com o problema de falta de recursos na escola, nomeadamente com falta de computadores e calculadoras para poderem utilizar em sala de aula com os alunos. A equipa de trabalho que elaborou o *Matemática 2001* (Abrantes *et al.*, 1998), recomenda que todas as escolas devem ser equipadas com materiais e recursos diversificados, importantes para o ensino e aprendizagem da Matemática e "devem dispor de recursos tecnológicos específicos para a sua atividade, nomeadamente, calculadoras e computadores." (p. 68). Hoje em dia verifica-se que algumas escolas ainda estão muito aquém das expectativas relativamente ao número de computadores disponíveis para trabalhar em sala de aula com os alunos, uma vez que o número de computadores disponíveis é muito reduzido.

Em 2000, Piteira realizou um estudo com duas turmas de escolas diferentes, uma de 8.º ano e outra de 9.º ano, utilizando aquilo a que chama de Ambientes Dinâmicos de Geometria Dinâmica e não Ambientes de Geometria Dinâmica. Esta autora concluiu que este tipo de *software* é facilitador da aprendizagem, no entanto, se não for potencializado de forma adequada, não é suficiente para tornar a aprendizagem efetiva. Segundo esta autora, a consciencialização geométrica por parte dos alunos depende dos vários recursos cognitivos colocados à disposição dos alunos, nomeadamente os Ambientes de Geometria Dinâmica, os professores e a interação com os outros alunos Piteira (2000). Tal como Rodrigues (1997), também Piteira considera que as interações sociais entre os colegas do grupo fomentam as aprendizagens.

Barbosa (2002) realizou um estudo numa turma do 9.º ano de escolaridade, utilizando o *Geometer's Sketchpad*, tendo também concluído que a utilização deste tipo de *software* facilita a aprendizagem tornando-a mais intuitiva e auxilia os alunos a atingir objetivos mais complexos. Os alunos consideram que os Ambientes de Geometria Dinâmica são instrumentos poderosos levando a que nunca ponham em causa a validade das suas conjeturas.

No mesmo ano, Freixo (2002) realizou um estudo envolvendo duas turmas de 8.º ano, sujeitas a métodos de ensino diferentes. Uma foi sujeita ao ensino dito tradicional e a outra recorreu ao uso do *Cabri-Géométre*. Esta autora concluiu que a utilização do Ambiente de Geometria Dinâmica levou a que fossem respeitados os diferentes ritmos de trabalho e de aprendizagem e fomentou o espírito crítico dos alunos, para além de os tornar mais ativos e criativos. Por outro lado, a utilização deste tipo de *software* permitiu uma aprendizagem mais eficaz e sólida comparativamente com o ensino dito tradicional. Também Gorgulho (2005) obteve conclusões idênticas aquando da realização do seu estudo com duas turmas, uma de 6.º ano e outra de 7.º ano.

Machado (2005) concluiu, com base num estudo realizado com alunos de uma turma de 8.º ano de escolaridade, que estes referem como potencialidades dos Ambientes de Geometria Dinâmica, a facilidade e o rigor nas construções, o facto de permitir "realizar muitas experiências rapidamente" e ser "útil para arranjar contraexemplos ou para confirmar as conjeturas" (p. 244). Assim, a autora concluiu que os alunos usavam este *software* para formular e testar conjeturas, tal como já tinha sido referido também nos trabalhos realizados por Junqueira (1995) e Rodrigues (1997).

Candeias (2005), no estudo realizado com alunos do 8.º ano, concluiu que a utilização do *Geometer's Sketchpad* permitiu que os alunos conseguissem fazer descobertas por si próprios, seguissem "vários caminhos na investigação, analisando vários casos" (p. 237) e superassem de forma rápida os obstáculos que surgiam. Os alunos destacaram o facto de o Ambiente de Geometria Dinâmica lhes ter facilitado a aprendizagem da geometria. Este autor salienta que "na realidade, os Ambientes de Geometria Dinâmica são por excelência ferramentas que permitem que os desafios e as investigações geométricas assumam o papel principal" (Candeias, 2005, p. 240).

Ferreira (2005) realizou um estudo com uma turma de alunos do 9.º ano de escolaridade, no qual foi trabalhado o conteúdo *Circunferência e Polígonos. Rotação*, com a ajuda do *Geometer's Sketchpad.* Com base neste estudo, a autora verificou que este *software* dinâmico "facilitou a descoberta das propriedades e das relações geométricas" (p. 179), tal como também já tinha sido verificado noutros estudos anteriormente referidos. Concluiu ainda, que os alunos visualizavam mais facilmente "as transformações obtidas, confirmavam ideias e verificavam relações para mais facilmente poderem estabelecer conjeturas e procederem à manipulação para as validarem e explicarem." (p. 182). Por outro lado, a utilização de um Ambiente de Geometria Dinâmica levou à construção do seu próprio conhecimento, ajudou a tornar o ambiente de trabalho mais motivador e,

> O facto de os alunos terem de discutir entre si a resolução das tarefas, a tomada de decisões, as conclusões obtidas e o seu registo, levou os alunos a participar mais ativamente e a clarificar as suas ideias, a tomar consciência das suas ações, a dar sentido ao conhecimento matemático e a estruturarem o seu pensamento através da comunicação (p. 185).

Para Gomes (2006) a análise dos resultados da investigação realizada com alunos do 9.º ano de escolaridade permitiu concluir que o *software* de geometria dinâmica fomenta a motivação dos alunos, levando-os a participar ativamente na sua aprendizagem, facilitando a compreensão de processos e ideias, o que conduz a que estes construam uma visão positiva da Matemática.

Paiva (2009) realizou um estudo com alunos de 9.º ano, onde pretendia investigar, entre outras questões, a forma como os alunos encaram e a importância que dão à utilização de Ambientes de Geometria Dinâmica em sala de aula. Este autor concluiu que, apesar de os alunos manifestarem interesse em trabalhar com este tipo de *software* e de considerarem que aprendem melhor desta forma, revelam alguma preocupação relativamente à utilidade deste recurso para a sua preparação para a avaliação externa. Este autor salienta ainda o facto de "os alunos terem a sensação de que os conhecimentos matemáticos estão ausentes das atividades realizadas com recurso ao computador" (p. 261). O autor considera que este tipo de pensamento se deve ao facto de os alunos raramente trabalharem com o computador em sala de aula e que apesar de não o reconhecerem, a exploração de atividades com *software* de geometria dinâmica são uma mais-valia para o processo de ensino/aprendizagem.

Gafanhoto (2011) realizou um estudo com uma turma de alunos do 9.º ano de escolaridade, onde pretendia investigar as diferentes formas de representação de Funções usando o *software* de geometria dinâmica GeoGebra. A autora concluiu que,

> O GeoGebra nesta intervenção pedagógica assumiu um papel de facilitador da resolução das tarefas matemáticas, permitindo aos alunos experimentarem as suas ideias, verificarem as propriedades e garantirem a legitimidade das suas resoluções. (p. 121)

Note-se que poucas investigações foram ainda realizadas usando o Geogebra como Ambiente de Geometria Dinâmica.

## Orientações curriculares sobre utilização das tecnologias

Em seguida iremos apresentar o que é referido relativamente à utilização das tecnologias no ensino da Matemática em termos de orientações curriculares, quer nacionais, quer internacionais.

A nível internacional destaca-se o National Council of Teachers of Mathematics que, em 2000, elaborou um conjunto de princípios e normas que devem servir de recurso e orientação para o ensino da Matemática. Os princípios que se encontram referidos neste documento são: Equidade, Currículo, Ensino, Aprendizagem, Avaliação e Tecnologia.

Num dos princípios referidos no NCTM, o da tecnologia, é salientado que "a tecnologia é essencial no ensino e na aprendizagem da Matemática; influencia a Matemática que é ensinada e melhora a aprendizagem dos alunos." (NCTM, 2007, p. 11). As tecnologias são fundamentais para o ensino-aprendizagem da Matemática, uma vez que os alunos através delas podem visualizar imagens das suas ideias matemáticas, podem organizar e analisar dados de forma mais fácil e realizar cálculos de modo mais eficaz. As tecnologias podem ser utilizadas para apoiar as investigações dos próprios alunos, em todas a áreas da Matemática e ajudam os alunos a concentrar-se na tomada de decisões, na reflexão, no raciocínio e na resolução de situações problemáticas.

Segundo o NCTM "a tecnologia enriquece a extensão e a qualidade das investigações, ao fornecer um meio de visualizar noções matemáticas sob múltiplas perspetivas." (NCTM, 2007, p. 27), uma vez que permite utilizar procedimentos mais complexos que apenas com o auxílio do papel e lápis seria impossível. Os alunos podem, com o auxílio das tecnologias fazer conexões entre vários tópicos matemáticos e interligá-los de uma forma muito mais fácil do que se tivesse apenas a utilizar os métodos tradicionais. Para além disso, as atividades de investigação a propor podem ser muito mais diversificadas, uma vez que os alunos podem analisar todas as perspetivas e hipóteses por eles colocadas de uma forma muito mais rápida e fácil. Por outro lado, a tecnologia permite ao professor adaptar o ensino às necessidades dos alunos. Assim, os alunos que se distraem com mais facilidade podem concentrar-se mais com a ajuda das atividades realizadas com o auxílio do computador. Os que apresentam dificuldades nos procedimentos básicos, conseguem desenvolver e mostrar outros conhecimentos matemáticos, que não seriam capazes sem a ajuda do computador. Ao longo das Normas para a Geometria, incluídas no NCTM (2007), é referido que o aluno deve fazer uso dos programas de geometria dinâmica para construir figuras bidimensionais, investigar relações e fazer conjeturas, como por exemplo:

> Um professor poderá pedir aos alunos que desenhem diversos paralelogramos numa grelha de coordenadas ou recorrendo à utilização de programas de geometria dinâmica. Os alunos deverão fazer e registar as medições dos lados e dos ângulos, com o fim de observarem algumas características de cada tipo de paralelogramo (p. 275).

É ainda referido neste documento que:

> Os alunos poderão utilizar um programa de geometria dinâmica para testar as suas conjeturas com outros exemplos. Os alunos podem formular argumentos dedutivos acerca das suas conjeturas (NCTM, 2007, p. 277).

> Os alunos analisem, construam, componham e decomponham objetos bi e tridimensionais, o que poderão fazer recorrendo a uma diversidade de meios, incluindo desenhos com papel e lápis, modelos geométricos e programas de geometria dinâmica (NCTM, 2007, p. 280).

A nível nacional, o Departamento da Educação Básica (DEB), em 2001, aponta diversos aspetos da competência da disciplina que devem ser adquiridas com recurso às tecnologias. Assim, uma das competências matemáticas que todos os alunos, em todos os ciclos, deverão desenvolver no domínio da geometria é "a aptidão para realizar construções geométricas e para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas, nomeadamente recorrendo a materiais manipuláveis e a *software* geométrico" (p. 62). Outra das competências matemáticas a adquirir, referida no domínio da Estatística e Probabilidades é "a predisposição para recolher e organizar dados relativos a uma situação ou a um fenómeno e para os representar de modos adequados, nomeadamente através de tabelas e gráficos e utilizando as novas tecnologias" (p. 64). Quanto ao domínio da Álgebra e das funções, uma das competências matemáticas a desenvolver, deverá ser "a aptidão para construir e interpretar tabelas de valores, gráficos, regras verbais e outros processos que traduzam relações entre variáveis, assim como para passar de umas formas de representação para outras, recorrendo ou não a instrumentos tecnológicos" (p. 66).

Estas competências apenas se desenvolvem se os alunos tiverem oportunidade de vivenciar um conjunto diversificado de experiências matemáticas e de refletir sobre essas experiências. Assim, o DEB (2001) recomenda que os alunos devem ter a possibilidade de utilizar frequentemente recursos de natureza diversa nomeadamente a utilização das tecnologias na aprendizagem da Matemática. Refere ainda:

> Quanto ao computador, os alunos devem ter oportunidade de trabalhar com a folha de cálculo e com diversos programas educativos, nomeadamente de gráficos de funções e de geometria dinâmica, assim como de utilizar capacidades educativas da rede Internet (DEB, 2001, p. 71).

De acordo com os autores do Programa de Matemática do Ensino Básico, Ponte *et al.* (2007) e no que se refere ao estudo da Geometria,

> Os alunos devem recorrer a *software* de Geometria Dinâmica, sobretudo na realização de tarefas exploratórias e de investigação. Os materiais manipuláveis (por exemplo, tangram, peças poligonais encaixáveis e sólidos de enchimento em acrílico) constituem recursos cuja utilização complementa a abordagem dinâmica ao estudo da Geometria. Tanto os recursos computacionais como os modelos geométricos concretos permitem desenvolver a intuição geométrica, a capacidade de visualização e uma relação mais afetiva com a Matemática (p. 51).

Em síntese, podemos dizer que todas as orientações curriculares apontam as tecnologias como sendo um recurso a utilizar em sala de aula. Hoje em dia, o professor tem ao seu dispor muitos *softwares* específicos para o ensino da Matemática, que poderá utilizar em sala de aula sempre que o considere pertinente.

## Síntese

Vários autores têm apontado inúmeras vantagens para a utilização dos Ambientes de Geometria Dinâmica em sala de aula. Assim, Laborde (1993) e Cuoco e Goldenbeg (2003) referem que o uso destes *softwares* em sala de aula permitem que os alunos, de forma autónoma, realizem tarefas mais complexas, tais como as que envolvem a produção e teste de conjeturas. Ferreira (2005) e Candeias (2005) referem que os Ambientes de Geometria Dinâmica podem fomentar o desenvolvimento de capacidades relacionadas com a resolução de problemas.

Candeias (2005) e Junqueira (1995) salientam que o facto de se trabalhar com Ambientes de Geometria Dinâmica permite fazer construções geométricas que se podem manipular. Como foi referido por Junqueira (1995) estas construções podem ser resistentes ou desmancharem-se, no entanto, Domènech (2009) e Laborde, Kynigos, Hollebrands e Strasser (2006) consideram que estes dois tipos de construção são complementares.

A partir da década de 90 realizaram-se, em Portugal, vários estudos os quais confirmam as potencialidades dos Ambientes de Geometria Dinâmica, como é o caso de Junqueira (1994), Rodrigues (1997), Piteira (2000), Barbosa (2002), Ferreira (2005), Machado (2005), Candeias (2005), Paiva (2009) e Gafanhoto (2011).

Relativamente às orientações curriculares, nacionais e internacionais, verificou-se, através do NCTM (2007) e do Programa de Matemática do ensino Básico (Ponte *et al*, 2007) que as tecnologias são apontadas como sendo um recurso essencial para a disciplina de Matemática e deve ser utilizado em sala de aula.

# Capítulo III

# Resolução de problemas

Tal como já foi anteriormente referido, o presente estudo pretende compreender como pode, um contexto de sala de aula apoiado por um programa de geometria dinâmica, neste caso o GeoGebra, contribuir para promover o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas. Assim, o presente capítulo, sobre resolução de problemas, encontra-se dividido em sete secções. Na primeira explicita-se a distinção entre exercício e problema, tendo por base a literatura existente. As três seguintes são dedicadas aos tipos de problemas, onde se apresentam categorizações diferentes para os problemas; à formulação de problemas e, ao processo de resolução dos mesmos, baseados em diferentes autores. Na quinta e sexta secções apresentam-se vários modelos e estratégias de resolução de problemas, bem como as dificuldades que os alunos apresentam na sua resolução, baseados em vários autores. Por fim, na sétima secção, apresentam-se as orientações curriculares, nacionais e internacionais, sobre resolução de problemas.

## Problema versus exercício

Muitas vezes utilizam-se os termos "exercício" e "problema" de forma indistinta, confundindo-se quando se está perante um ou outro. É importante fazer a distinção entre eles, pois um problema permite desenvolver as capacidades matemáticas dos alunos e explorar conceitos matemáticos fundamentais.

Borralho (1990) considera que um problema é uma questão com a qual um aluno se defronta e não consegue responder utilizando os conhecimentos imediatamente disponíveis. Borralho (1990) acrescenta ainda que, um problema deve despertar curiosidade à pessoa a quem ele é proposto e o desejo de o solucionar.

Para Polya (1980) estar perante um problema implica ter de procurar conscientemente uma forma apropriada de alcançar um objetivo que foi claramente definido mas que não é imediatamente alcançável. Também Lester (1983) aponta a sua definição de problema neste sentido, afirmando que se está perante um problema quando alguém tem de realizar uma tarefa para a qual não conheça um método que indique completamente o método de resolução. Lester (1983) considera que determinada situação só é um problema se o indivíduo que for confrontado com a realização da tarefa a desejar resolver.

Segundo Ponte e Serrazina (2000), uma determinada questão é um problema para o aluno se ele não conhecer uma forma rápida de encontrar a sua solução, caso contrário estará perante um exercício. Ponte (2005) reforça ainda que,

> Não é pelo facto de uma questão ser ou não colocada num contexto extra--matemático que ela é um exercício ou um problema. A questão fundamental é saber se o aluno dispõe, ou não, de um processo imediato para a resolver. Caso conheça esse processo e seja capaz de o usar, a questão será um exercício. Caso contrário, a questão será antes um problema (p. 14).

Ponte (2005) refere ainda que tanto um exercício como um problema são tarefas fechadas, uma vez que se conhecem os dados e o que é pedido, no entanto, um problema apresenta um grau de desafio bastante elevado, ao contrário do exercício.

Vale e Pimentel (2004) referem também que “só se tem um problema se não se sabe como chegar até à solução”, por outro lado, está-se perante um exercício “se uma questão não tem surpresas e pode ser resolvida confortavelmente utilizando procedimentos rotineiros e familiares, não interessando quão complicados sejam” (p. 13).

De acordo com Boavida, Paiva, Cebola, Vale e Pimentel (2008) é importante que um problema seja compreensível para o aluno, apesar de a solução não ser imediatamente acessível; seja motivador e estimulante intelectualmente; tenha mais do que um processo de resolução e possa abranger vários conteúdos.

Cada questão poderá ser um problema ou um exercício dependendo dos conhecimentos que o aluno já tenha adquirido ou da vontade que o aluno manifeste para resolver determinada questão.

## Tipos de problemas

Vários investigadores propõem categorizações diferentes para os problemas. Vejamos algumas delas.

Charles e Lester (1986) identificam cinco tipos de problemas:

i) *Problemas de um passo* - podem-se resolver aplicando diretamente uma das quatro operações básicas da aritmética;
ii) *Problemas de dois ou mais passos* - podem-se resolver aplicando diretamente duas ou mais das quatro operações básicas da aritmética;
iii) *Problemas de processo* - podem-se resolver utilizando uma ou mais estratégias de resolução, no entanto não podem ser resolvidos por processos mecanizados;
iv) *Problemas de aplicação* - utilizam uma ou mais estratégias de resolução e requerem a recolha de dados e a tomada de decisão;
v) *Problemas de puzzle* - utilizam vários pontos de vista.

Palhares (1997) identifica sete tipos de problemas:

i) *Problemas de processos* - necessitam de utilização de estratégias de resolução;
ii) *Problemas de conteúdo* - utilizam conhecimentos matemáticos que ainda não estão totalmente adquiridos ou que foram adquiridos há pouco tempo;
iii) *Problemas de capacidades* - utilizam as capacidades de cálculo mental e estimativa;
iv) *Problemas tipo puzzle* - necessitam do aumento do espaço de resolução;
v) *Problemas de aplicação* - necessitam de recolha e tratamento de informação;
vi) *Problemas abertos* - necessitam de uma escolha ponderada de entre as várias possibilidades de estratégia;
vii) *Problemas de aparato experimental* - necessitam de utilizar esquemas investigativos.

Segundo Vale e Pimentel (2004), o Grupo de Investigação em Resolução de Problemas, constituído por Domingos Fernandes, António Borralho, Ana Leitão, Helena Fernandes, Isabel Cabrita, Isabel Vale, Lina Fonseca e Pedro Palhares, apresenta, em 2002, outra categorização diferente onde não se considera a inclusão de cada problema apenas num tipo. Assim, consideram que um *Problema de Processo* é um problema que necessita de utilizar estratégias de resolução de problemas, como por exemplo, descobrir padrões, fazer esquemas ou desenhos, trabalhar no problema do fim para o inicio, elaborar uma lista ordenada e metódica, transformar o problema num mais simples, formular e testar conjeturas. Estes problemas podem ou não estar relacionados com os conteúdos programáticos. Os *Problemas de conteúdo* são aqueles que utilizam os conteúdos programáticos, os conceitos e as definições matemáticas. O *Problema de aplicação* emprega dados da vida real, mostrados ao indivíduo ou por ele recolhidos. Aqui a tomada de decisões assume um papel importante e aparece como resultado da análise de dados. Este tipo de problemas pode utilizar mais do que uma estratégia de resolução e admitir mais do que uma solução. Por fim, os *Problemas de aparato experimental* permitem desenvolver a capacidade de planificar, organizar e interpretar dados, bem como medir, pesar e contar. É um tipo de problemas que permite a utilização de métodos próprios das ciências experimentais.

Boavida, Paiva, Cebola, Vale e Pimentel (2008) optaram por uma categorização considerando apenas três tipos de problemas: *Problemas de cálculo*, *Problemas de processo* e *Problemas abertos*. Para estes autores, os *problemas de cálculo*, são os que aparecem, normalmente, nos manuais escolares, no final de cada conteúdo matemático. Estes permitem aos alunos aplicar conceitos e destrezas previamente aprendidos. Por outro lado, os *problemas de processo*

> estão embutidos em contextos mais complexos e requerem um maior esforço para compreender a Matemática necessária para chegar à solução, uma vez que tem de se recorrer a estratégias de resolução mais criativas para descobrir o caminho a seguir. Requerem persistência, pensamento flexível e uma boa dose de organização (Boavida, Paiva, Cebola, Vale & Pimentel, 2008, p. 19).

Por fim, os *Problemas abertos* podem ter mais do que uma resposta e mais do que uma estratégia de resolução, “para os resolverem, os alunos têm de fazer explorações para descobrir regularidades e formular conjeturas, apelando, por isso, ao desenvolvimento do raciocínio, do espírito crítico e da capacidade de reflexão" (Boavida, Paiva, Cebola, Vale & Pimentel, 2008, p. 20).

## Formulação de problemas

Palhares (1997) refere que a formulação de problemas acontece quando uma pessoa produz um problema.

Vale e Pimentel (2004) referem que quando é o professor a formular antecipadamente o problema ou a questão está a limitar as finalidades do trabalho escolar, por outro lado, quando são os alunos a formular o problema, acabam por se envolver "em situações do seu contexto social, problematizando-as e processando a formulação dessas situações problemáticas." (p. 39), dando significado aos problemas. É ainda referido por estas autoras, que a formulação de problemas possibilita aos alunos a invenção de problemas utilizando a sua linguagem própria, proporcionando desta forma uma alternativa ao ensino tradicional.

Ernest (1991) considera que a formulação de problemas estimula o aluno a produzir conhecimentos.

Para Silver (1995), a formulação de um problema pode acontecer antes da resolução de um determinado problema; durante a resolução de um problema, ou seja, quando se alteram, de forma intencional, as condições ou os objetivos do problema inicial; e depois da resolução do problema, quando se alteram as condições ou se aplicam as experiências realizadas a novas situações.

Vale e Pimentel (2004) apresentam várias estratégias para a formulação de problemas:

i) Aceitando os dados – onde se formulam perguntas a partir de uma definição, uma condição, um objeto, uma tabela, entre outras;

ii) E se em vez de – neste caso identificam-se as propriedades de uma determinada situação e a partir dai formulam-se novas perguntas a partir da negação de uma ou mais dessas propriedades;

iii) Variação de um problema – aqui, o novo problema é formulado a partir da decomposição, de conexão, de particularização e generalização do problema inicial;

iv) Recontextualização – o novo problema é formulado, depois de o inicial ter sido resolvido e ter sido identificada alguma característica, mantendo essa característica e modificando o contexto.

## O processo de resolução de problemas

Até agora tem-se falado sobre o conceito de problema e as várias categorizações existentes. Mas em que consiste a resolução de problemas? Como é que ela tem sido perspetivada? Porque será que alguns alunos reagem mal à resolução de problemas? Quais os modelos que se devem usar na resolução de problemas? Vejamos a opinião de alguns investigadores.

Polya (1981) considerava que, uma das condições fundamentais para que os alunos possam desenvolver o gosto pela Matemática e perceber a natureza da mesma, seria confrontá-los com a resolução de problemas. Desta forma os alunos são desafiados a desenvolver as suas capacidades matemáticas e experimentam o gosto pela disciplina.
Para Ponte e Serrazina (2000), "a resolução de problemas constitui um processo de elevado nível de complexidade, que envolve os processos mais simples de representar e relacionar." (p. 52). Também Vale e Pimentel (2004) referem que a resolução de problemas é uma atividade complexa, que utiliza capacidades cognitivas de ordem superior e onde se combinam "a organização da informação, o conhecimento de estratégias, as diferentes formas de representação, a tradução de linguagens, a aplicação de vários conhecimentos, a tomada de decisões, a interpretação de soluções, etc." (p. 11). Estas autoras consideram ainda que, a resolução de problemas ajuda na aprendizagem de novos conceitos e capacidades matemáticas e ajuda a evidenciar a importância da matemática no quotidiano dos alunos.

De acordo com GAVE (2004), o grupo de trabalho que elaborou o estudo PISA 2003, considera que:

> A resolução de problemas é a capacidade de um indivíduo usar processos cognitivos para confrontar e resolver situações reais e interdisciplinares, nas quais o caminho para a solução não é imediatamente óbvio e em que os domínios de literacia ou áreas curriculares passíveis de aplicação não se inserem num único domínio, seja o da matemática, das ciências ou da literatura (p. 10).

Em 2001, a equipa de trabalho que elaborou o *Matemática 2001* recomenda que seja dada "ênfase na realização, pelos alunos, de atividades matemáticas significativas, como a resolução de problemas e a aplicação da Matemática a situações da vida real." (Abrantes *et al*., 1998, p. 32). Estes autores salientam, que o professor deve proporcionar situações de aprendizagem diversificadas, que incluam momentos de discussão entre os próprios alunos e entre os alunos e o professor, pois estes momentos permitem ao aluno expor as suas ideias, exercitando a comunicação matemática e ao mesmo tempo aprender e desenvolver o seu pensamento matemático, interagindo com os colegas e o professor.

Ferreira (2005) considera que:

> A resolução de problemas e investigações, por parte dos alunos, permite dar asas à imaginação e à criatividade, desenvolvendo capacidades que vão além do cálculo e da memorização, como a comunicação, o espírito crítico, a modelação, a capacidade de analisar dados e situações complexas, de realizar demonstrações, de planear, gerir e avaliar o seu próprio trabalho (p. 6).

Também Boavida, Paiva, Cebola, Vale e Pimentel (2008) consideram que a resolução de problemas

> proporciona o recurso a diferentes representações e incentiva a comunicação; fomenta o raciocínio e a justificação; permite estabelecer conexões entre vários temas matemáticos e entre a Matemática e outras áreas curriculares; apresenta a Matemática como uma disciplina útil na vida quotidiana (p. 14).

A resolução de problemas tem sido perspetivada de várias formas por vários investigadores. Para Stanick e Kilpatrick (1989), a resolução de problemas pode ser caracterizada por três temas gerais: como contexto; como capacidade e como arte. Para estes autores, na resolução de problemas como contexto aparece subjacente a perceção de que os problemas e a resolução de problemas são instrumentos para alcançar fins importantes e engloba cinco subtemas sendo eles a resolução de problemas: como justificação; como motivação; como atividade lúdica; como veículo e como prática. A resolução de problemas como capacidade está relacionada com as capacidades a adquirir pelos alunos, fazendo a distinção entre resolução de problemas de rotina e não rotineiros. Segundo esta perspetiva, nem todos poderiam resolver problemas não rotineiros, uma vez que apenas alguns alunos que dominavam os pré-requisitos poderiam ser confrontados com este tipo de problemas. Por fim, a resolução de problemas como arte, surge do trabalho desenvolvido por George Polya. Para Polya (2003), a resolução de problemas é uma arte prática, que se aprende por imitação e através da prática.

Borralho (1990) distingue três funções dos problemas e da resolução de problemas no processo de ensino/aprendizagem da Matemática, estando todas elas relacionadas com a atividade cognitiva dos alunos. Assim, a primeira função que este autor refere é a função de ensino, uma vez que os problemas e a resolução de problemas são uma forma de adquirir, exercitar e consolidar os conhecimentos matemáticos dos alunos, para além de permitir o desenvolvimento de capacidades e hábitos de pensamento matemático. A segunda função é a função educativa, uma vez que os problemas influenciam a construção da personalidade do aluno, desenvolvendo a sua visão científica do mundo e levando a que este tenha uma atitude ativa e crítica relativamente aos fenómenos naturais e sociais. Por fim, a última função é a de desenvolvimento, uma vez que a resolução de problemas influencia o desenvolvimento intelectual. É de notar que um mesmo problema pode realizar diversas funções, cabendo ao professor decidir qual deverá ser a função principal daquele problema.

Por outro lado, Diniz (2001) perspetiva a resolução de problemas como uma meta; como um processo; ou como uma habilidade básica. Já Vale e Pimentel (2004) defende a resolução de problemas como:

i) um processo – “quando pretendemos dotar os alunos com estratégias de resolução tornando-os solucionadores cada vez mais aptos de problemas” (p. 11);

ii) uma finalidade – “quando tentamos atender aos aspetos matemáticos como explorar, questionar, investigar, descobrir e usar raciocínios plausíveis” (p. 11);

iii) um método de ensino – “que surge para introduzir conceitos envolvendo exploração e descoberta, de acordo com as finalidades do ensino da Matemática e de factos, conceitos e procedimentos matemáticos” (p. 11).

## Modelos e estratégias de resolução de problemas

É essencial que o aluno perceba que não existe apenas um único modelo ou uma estratégia correta para resolver um determinado problema. O aluno terá de perceber qual o melhor caminho a seguir para obter a solução do problema proposto.

Polya, em 1945, publicou pela primeira vez o livro *How To Solve It – A new Aspect of Mathematical Method*, onde se expõe um método para a resolução de problemas, matemáticos ou não. Segundo Polya (2003), devem ser consideradas quatro fases na resolução de problemas:

i) Compreensão do problema – é importante compreender o problema, identificando a incógnita, os dados e as condições apresentadas, mas também é importante que o aluno o deseje resolver;
ii) Elaboração de um plano – é importante perceber a relação que existe entre os dados e a incógnita e a partir dai delinear estratégias para descobrir a incógnita, para isso o aluno poderá utilizar problemas que já tenha resolvido anteriormente e que lhe sejam úteis, por exemplo;
iii) Execução do plano – realiza-se o plano elaborado inicialmente, verificando-se cada passo seguido;
iv) Verificação dos resultados – verifica-se o resultado obtido em função do problema inicial e a estratégia de resolução utilizada.

O aluno deve em cada uma das fases colocar questões a si próprio de forma a organizar o seu pensamento de uma forma mais eficaz.

Hayes, em 1981, propõe um modelo semelhante ao de Polya, mas com seis fases:

i) Deteção do problema – onde se irá fazer um reconhecimento do mesmo e admiti-lo como tal;
ii) Representação do problema – na qual se irá compreender o tipo de problema que se tem à frente;
iii) Planificação da resolução – na qual se irá elaborar o plano a seguir para alcançar a solução do problema;

iv) Implementação do plano – na qual se irá executar o plano anteriormente elaborado;

v) Avaliação da resolução e da solução – na qual se analisará a solução obtida e o plano estabelecido;

vi) Consolidação do que se aprendeu – na qual se pretende que o aluno, a partir da experiência adquirida, consiga transferir o que aprendeu para outros problemas.

Por outro lado, Borralho (1990) refere ainda que Lester, em 1980, apresenta um modelo baseado numa perspetiva inovadora ao nível da análise dos processos mentais envolvidos na resolução de problemas. Este modelo é constituído por seis fases:

i) Consciencialização – nesta fase o aluno é confrontado e analisa a situação problemática, mas esta só se torna um problema quando o aluno se consciencializar de que a situação apresentada não pode ser resolvida de forma imediata. O aluno terá de manifestar interesse e desejo de tentar resolver o problema, caso contrário deixar de fazer sentido a elaboração de qualquer plano;

ii) Compreensão – é nesta fase que o aluno irá fazer uma representação interna do problema. Numa primeira fase o aluno interpreta a informação fornecida pelo problema e, numa segunda fase, o aluno seleciona a informação relevante e percebe a forma como a informação está interligada;

iii) Análise do (s) objetivo (s) – nesta fase identifica-se e analisa-se os objetivos. A análise dos objetivos inclui a discriminação da informação dada, a discriminação da interligação da informação e a discriminação das operações que podem ser necessárias;

iv) Desenvolvimento do plano – nesta fase pretende-se que o aluno elabore um plano, mas elaborar um plano não significa apenas identificar possíveis estratégias. O aluno pode encontrar um padrão ou então resolver um problema mais simples que esteja relacionado com o problema dado. O aluno deve ordenar os objetivos ou sub-objetivos do problema e discriminar as operações que poderão ser utilizadas;

v) Implementação do plano – nesta fase o aluno irá colocar em prática o plano que elaborou. Esta fase deve estar bastante interligada com a fase seis, uma vez que durante a implementação do plano poderão surgir erros imprevistos;

vi) Avaliação dos procedimentos e da solução – durante o processo de resolução de um problema deve-se ir avaliando os procedimentos que estão a ser adotados e ir-se examinando criteriosamente os resultados obtidos, pois disso depende o sucesso na resolução de um determinado problema.

Palhares (1997) define as estratégias de resolução de problemas como sendo um conjunto de técnicas que o indivíduo usa para obter a solução de um determinado problema. Por outro lado, Ponte e Serrazina (2000) referem que uma estratégia de resolução é uma forma de abordar vários tipos de problema. Um mesmo problema pode ser resolvido por várias estratégias, havendo umas que são mais vantajosas que outras.

Borralho (1990) apresenta como estratégia de resolução de problemas as heurísticas. Este autor define como heurísticas as ações destinadas a resolver um problema pelo uso de regras que permitem chegar de forma rápida à solução ou aproximar-se dela.

Polya (2003) apresenta aquilo a que ele chama um "pequeno dicionário de heurística" (p. 57). Aqui iremos apresentar algumas das heurísticas destacadas por este autor. Assim, Polya (2003) refere que uma das heurísticas que se poderá usar é recordar um problema relacionado com o problema proposto:

> É difícil imaginar um problema completamente novo, sem qualquer semelhança ou relação com qualquer outro que já tenha sido resolvido (…) quando resolvemos um problema, sempre aproveitamos algum problema previamente resolvido, utilizando o seu resultado, ou o seu método, ou a experiência adquirida ao resolvê-lo (p. 68).

Outras heurísticas consistem em usar um problema conhecido que tenha uma incógnita de natureza igual ou semelhante; transformar o problema num outro cuja resolução se conheça, mantendo a incógnita e mudando os dados e as condições; dividir o problema em partes e trabalhar sobre uma parte mais acessível, mas fundamental do problema.

Hayes (1981) apresenta quatro heurísticas diferentes para a deteção do problema e para a consolidação do que aprendeu:

i) Método de ensaio e erro, no qual o indivíduo verifica os ensaios de modo a evitar repetições, fazendo com que a resolução seja um processo sistemático;

ii) Método das proximidades, no qual o indivíduo efetua passos de ensaio, vai verificando se ficou mais perto do objetivo e assim avança de forma gradual até alcançar a solução;

iii) Análise de meios e fins, no qual o indivíduo vai procurando reduzir as diferenças entre o estado atual da resolução do problema e o objetivo a que quer chegar;

iv) Método do fracionamento, no qual se constroem sub-objetivos para resolver partes do problema.

Vale e Pimentel (2004) sugerem como estratégias de resolução de problemas as seguintes:

i) Descobrir um padrão/descobrir uma regra ou lei de formação – a estratégia centra-se apenas nalguns passos do problema e a solução obtém-se através da generalização de soluções específicas;

ii) Fazer tentativas/fazer conjeturas – a estratégia consiste em determinar a solução, através de tentativas, tendo em conta os dados e as condições do problema;

iii) Trabalhar do fim para o princípio – a estratégia consiste em iniciar a resolução pelo que se quer provar ou então do fim do problema;

iv) Usar dedução lógica/fazer eliminação – a estratégia consiste na eliminação das hipóteses que não são factíveis;

v) Reduzir a um problema mais simples/decomposição/simplificação – a estratégia consiste na resolução de um caso particular do problema, ou seja, em dividi-lo em várias partes de forma a torná-lo mais fácil e acessível;

vi) Fazer uma simulação/fazer uma experimentação/fazer uma dramatização – a "estratégia consiste em utilizar objetos, criar um modelo ou fazer dramatização que traduza o problema a ser resolvido" (p. 46);

vii) Fazer um desenho, diagrama, gráfico ou esquema;

viii) Fazer uma lista organizada ou uma tabela – a estratégia consiste na utilização de tabelas ou listas para representar, organizar ou guardar a informação contida no problema.

É fundamental que os alunos tenham oportunidade de resolver problemas e que possam discutir e refletir sobre as suas estratégias de resolução, pois só assim ficarão motivados para a resolução de problemas. Segundo Cândido (2001), quando os alunos refletem sobre as estratégias, os conceitos e os procedimentos utilizados na resolução de um problema, podem rever o que não perceberam, ampliar o que já aprenderam e expor as suas dúvidas e dificuldades. Também Cavalcanti (2001) refere que admitir as várias estratégias de resolução dos alunos ajuda-os a aprender através da reflexão e a ter maior confiança na sua capacidade de pensar matematicamente. Ao criar uma estratégia pessoal de resolução de um determinado problema, o aluno poderá estar a refletir sobre um determinado conceito matemático e a fomentar um maior envolvimento com o problema proposto, beneficiando assim a formação do seu pensamento matemático.

Os modelos anteriormente apresentados ajudam a maioria dos alunos a resolver, de forma eficaz, os problemas matemáticos com que são confrontados, no entanto nem todos os conseguem resolver.

## Dificuldades na resolução de problemas

Para Lester (1994), grande parte dos alunos não consegue resolver problemas devido ao facto de a resolução de problemas ser "uma forma de atividade intelectual extremamente complexa" (p. 15); não se saber concretamente o que é que o processo de resolução de problemas envolve; e de os alunos serem poucas vezes confrontados com a resolução de problemas e de se envolverem nelas.

Também Garofalo e Lester (1985) e Schoenfeld (1987) consideram que os alunos têm dificuldade em resolver problemas devido à deficiente utilização dos conhecimentos matemáticos e não pelo facto de não terem os conhecimentos matemáticos necessários. Por outro lado, Kroll e Miller (1993) referem que o facto de os alunos terem ou não sucesso na resolução de problemas se deve às suas próprias convicções acerca da resolução de problemas, das suas capacidades para resolver problemas e das formas de abordar a sua resolução. Para ajudar os alunos a ultrapassar estas dificuldades é fundamental que eles observem e analisem o problema antes de o tentar resolver. "A essência da resolução de problemas consiste em saber o que fazer perante problemas não habituais" (NCTM, 2007, p. 306).

Para Polya (2003), uma das causas da dificuldade na resolução de problemas é a deficiente compreensão do problema, devido à falta de concentração dos alunos. Por outro lado, os alunos apresentam dificuldade na elaboração do plano e na visualização de uma estratégia de resolução porque começam a fazer cálculos e esquemas sem terem elaborado qualquer plano ou então ficam à espera que a estratégia surja por si só. Ainda de acordo com Polya, os alunos durante a execução do plano não verificam cada passo e quando chegam a um resultado não refletem sobre o mesmo, nem verificam se ele faz sentido no contexto do problema apresentado.

### Orientações curriculares sobre resolução de problemas

Todas as orientações curriculares, quer nacionais quer internacionais, referem que a resolução de problemas deve ser uma prática constante no ensino da Matemática.

A publicação de *An Agenda for Action* em 1980 e *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematícs* em 1989, pelo NCTM, têm um papel importante para o desenvolvimento curricular e investigação em resolução de problemas, uma vez que, o primeiro pretendia sugerir orientações para o desenvolvimento curricular e, o segundo estabelecia Normas para o currículo e para o ensino da Matemática, funcionando como uma proposta de política nacional, para os Estados Unidos.

Em 1989, o NCTM recomenda que a resolução de problemas seja o foco do currículo de Matemática, ou seja, a resolução de problemas não deverá ser um tópico separado, mas sim deverá fazer parte de todo o programa de Matemática (NCTM, 1991).

Com a elaboração de *Principles and Standards for School Mathematics*, em 2000, são apresentados seis princípios, que salientam as características de uma educação Matemática de qualidade elevada e normas, que "descrevem os conteúdos e processos matemáticos que os alunos deverão aprender" (NCTM, 2007, p.vii). Aqui aparece a resolução de problemas como um dos processos matemáticos a ter em conta e que deverá constituir uma parte integrante de toda a aprendizagem Matemática. Assim, o NCTM (2007) refere que a resolução de problemas para além de ser um objetivo da aprendizagem Matemática é também um meio através do qual os alunos aprendem a própria matemática. Salienta-se ainda que, é importante que, os alunos sejam confrontados várias vezes com situações em que tenham de formular, discutir e resolver problemas complexos e que depois deverão refletir sobre raciocínios por si utilizados. Afirma, ainda, que "ao aprender a resolver problemas em Matemática, os alunos irão adquirir modos de pensar, hábitos de persistência e curiosidade, e confiança perante situações desconhecidas, que lhes serão muito úteis fora da sala de aula" (p. 57). A resolução de problemas não deve ser apresentada como uma unidade à parte do programa de Matemática, mas sim ser parte integrante de toda a aprendizagem.

De acordo com as normas para a resolução de problemas do NCTM (2007), os programas de Matemática devem preparar os alunos para:

> - Construir novos conhecimentos matemáticos através da resolução de problemas;
> - Resolver problemas que surgem em Matemática e em outros contextos;
> - Aplicar e adaptar uma diversidade de estratégias adequadas para resolver problemas;
> - Analisar e refletir sobre o processo de resolução matemática de problemas (p. 57).

O NCTM (2007), refere ainda que:

> A resolução de problemas deverá promover a aprendizagem Matemática. Os alunos poderão aprender e aprofundar a sua compreensão sobre conceitos matemáticos, através da resolução de problemas criteriosamente selecionados e que permitam a aplicação da matemática em outros contextos. (p.302)

Por outro lado, o NCTM (2007) salienta ainda que é importante que o aluno tenha oportunidade de formular problemas relacionados com diversas situações e que possam explicar as suas estratégias de resolução e respetivas respostas. Desta forma será incutido no aluno

> uma verdadeira predisposição para a resolução de problemas – uma tendência para identificar e colocar problemas; um interesse e uma capacidade para explicar e generalizar e uma propensão para refletir sobre o trabalho e avaliar as suas soluções (p. 304).

O Departamento da Educação Básica, em 2001, refere que uma das competências gerais que um aluno do ensino básico deve alcançar é "adotar estratégias adequadas à resolução de problemas e à tomada de decisões" (p.10). Afirmando que a operacionalização transversal deverá ter em conta que o aluno seja capaz de:

> - Identificar situações problemáticas em termos de levantamento de questões;
> - Selecionar informação e organizar estratégias criativas face às questões colocadas por um problema;
> - Debater a pertinência das estratégias adotadas em função de um problema;
> - Confrontar diferentes perspetivas face a um problema, de modo a tomar decisões adequadas;
> - Propor situações de intervenção, individual e, ou coletiva, que constituam tomadas de decisão face a um problema, em contexto (DEB, 2001, p. 23).

DEB (2001) salienta ainda que todos os alunos devem ter a possibilidade de "desenvolver a capacidade de usar a matemática para analisar e resolver situações problemáticas, para raciocinar e comunicar, assim como a autoconfiança necessária para fazê-lo." (p. 57), bem como, desenvolver a "predisposição para procurar entender a estrutura de um problema e a aptidão para desenvolver processos de resolução, assim como para analisar os erros cometidos e ensaiar estratégias de resolução alternativas" (p. 57). Considera ainda que:

> A resolução de problemas constitui, em Matemática, um contexto universal de aprendizagem e deve, por isso, estar sempre presente, associada ao raciocínio e à comunicação e integrada naturalmente nas atividades. (…) A formulação de problemas deve igualmente integrar a experiência matemática dos alunos (DEB, 2001, p. 68),

Em 2007, como o reajuste do Programa de Matemática do Ensino Básico, a resolução de problemas passou ainda a ter maior destaque no currículo desta disciplina.

De acordo com os autores do Programa de Matemática do Ensino Básico, Ponte *et al.* (2007), um dos objetivos gerais da disciplina de Matemática é o de os alunos serem capazes de resolver problemas, isto é:

> - Compreender problemas em contextos matemáticos e não matemáticos e de os resolver utilizando estratégias apropriadas;
> - Apreciar a plausibilidade dos resultados obtidos e a adequação ao contexto das soluções a que chegam;
> - Monitorizar o seu trabalho e refletir sobre a adequação das suas estratégias, reconhecendo situações em que podem ser utilizadas estratégias diferentes;
> - Formular problemas (p. 5).

De acordo com os autores do Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte *et al.*, 2007*)*, a resolução de problemas é uma forma de os alunos consolidarem, aumentarem e aprofundarem os seus conhecimentos. Ao resolverem problemas, os alunos devem perceber que um problema matemático pode ser resolvido utilizando várias estratégias e devem ter a capacidade de analisar a sua resolução e as soluções obtidas.

Outro dos objetivos gerais da disciplina de Matemática, de acordo com o Programa de Matemática do Ensino Básico, é o dos alunos serem capazes de fazer Matemática autonomamente, isto é:

> - organizar informação por eles recolhida;

> - identificar por si próprios questões e problemas em contextos variados e de os resolver autonomamente;
> - explorar regularidades e formular e investigar conjeturas matemáticas (Ponte *et al*., 2007, p. 6).

Os alunos devem conseguir resolver problemas, bem como explorar regularidades, de forma autónoma, fazendo com que se sintam mais envolvidos na construção do seu conhecimento matemático levando a uma apropriação mais consistente do mesmo.

A resolução de problemas aparece como uma capacidade transversal a todo o programa de Matemática e "fundamental para a aprendizagem dos diversos conceitos, representações e procedimentos" (Ponte *et al.,* 2007, p. 8). Os alunos devem ser confrontados com situações em que tenham de resolver problemas e analisar e discutir a sua resolução com os colegas. Os discentes devem alcançar

> desembaraço a lidar com problemas matemáticos e também problemas relativos a contextos do seu dia-a-dia e de outros domínios do saber. Trata-se de ser capaz de resolver e de formular problemas, e de analisar diferentes estratégias e efeitos de alterações no enunciado de um problema (Ponte *et al.*, 2007, p. 8).

Os alunos não devem apenas limitar-se a resolver problemas, mas devem também analisar as diferentes estratégias de resolução, verificando as que são mais eficazes e ainda formular novos problemas.

Os autores do Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte *et al.*, 2007), apresentam um conjunto de orientações metodológicas gerais, onde se inclui as orientações metodológicas a desenvolver em sala de aula, no que concerne à resolução de problemas. Assim considera-se que o docente deverá propiciar frequentemente situações em que os alunos tenham a possibilidade de resolver problemas, analisar e refletir sobre as suas resoluções e as dos colegas. O professor deverá

> dar atenção aos raciocínios dos alunos, valorizando-os, procurando que eles os explicitem com clareza, que analisem e reajam aos raciocínios dos colegas. Através da discussão oral na aula, os alunos confrontam as suas estratégias de resolução de problemas e identificam os raciocínios produzidos pelos seus colegas. Através da escrita de textos, os alunos têm oportunidade de clarificar e elaborar de modo mais aprofundado as suas estratégias e os seus argumentos, desenvolvendo a sua sensibilidade para a importância do rigor no uso da linguagem matemática (Ponte *et al*, 2007, p. 9).

Para Ponte *et al.* (2007), ter a capacidade de resolver problemas traduz a aptidão para realizar com êxito atividades como compreender o problema e identificar a incógnita; escolher as estratégias e os recursos adequados e aplicá-los, explorando conexões matemáticas para ultrapassar dificuldades; e analisar soluções e rever processos. Os alunos devem ser confrontados, frequentemente, com diversos tipos de problemas nomeadamente com problemas que tenham mais do que uma solução, que tenham excesso de dados ou problemas que não tenham solução e deve-lhes ser pedido que utilizem diversas estratégias, pois assim estimula-se o desenvolvimento da autoconfiança e da autonomia na realização de situações não familiares. Refere-se ainda que

> A discussão do problema, tanto em pequenos grupos como em coletivo, é uma via importante para estimular a reflexão dos alunos, conduzir à sistematização de ideias e processos matemáticos e estabelecer relações com outros problemas ou com extensões do mesmo problema (Ponte *et al*, 2007, p. 62).

## Síntese

A resolução de problemas aliada às tecnologias traz vantagens para o ensino/ aprendizagem da Matemática, como tem sido referido por vários autores, tais como Laborde (1993), Laborde e Laborde (1992), Veloso (1998), Carreira (2003), Fonseca (2004), Candeias (2005), entre outros.

Assim, Laborde (1993) considerava que uma das ferramentas usada na resolução de problemas geométricos é a visualização. Para ela, os Ambientes de Geometria Dinâmica proporcionam, na fase de procura de solução de um problema e na fase de verificação da solução, um *feedback* visual, devido à manipulação das construções realizadas. Laborde e Laborde (1992) consideravam que a utilização de Ambientes de Geometria Dinâmica auxilia o aluno na resolução de problemas e levam-no a refletir sobre os processos de resolução.

Veloso (1998) considera que os Ambientes de Geometria Dinâmica são “instrumentos poderosos na resolução de problemas e nas atividades de exploração, investigação e descoberta da geometria e na Matemática em geral” (p.91).

Para Carreira (2003), a resolução de problemas aliada ao uso das tecnologias traz vantagens significativas, uma vez que a tecnologia altera o modo como um problema de Matemática é compreendido e resolvido e, por outro lado, o raciocínio e as ideias matemáticas são desenvolvidas de acordo com as especificidades e capacidades das ferramentas usadas. Esta autora refere ainda que um dos fatores que distingue a utilização adequada da tecnologia em sala de aula é permitir o aparecimento de várias formas de abordar a resolução do mesmo problema. O acréscimo do poder matemático do aluno não se deve unicamente àquilo que a tecnologia tem para oferecer, mas à junção entre a resolução de problemas e a tecnologia com a introdução de atividades adequadas

Fonseca (2004) afirmava que os computadores, para além de apelarem para a visualização, possibilitam a utilização da resolução de problemas como pano de fundo para o ensino da Matemática

Cuoco e Goldenberg (2003) consideravam que os Ambientes de Geometria Dinâmica permitem diversificar o tipo de problemas que os alunos podem trabalhar, como por exemplo, resolver problemas de otimização.

Num estudo realizado por Hazzan e Goldenberg (1997), concluiu-se que os alunos não resolveram os problemas propostos utilizando um plano inicialmente elaborado, mas sim de uma forma interativa com várias etapas, nas quais eles verificavam, refletiam e aperfeiçoavam as ideias matemáticas que utilizaram. Os Ambientes de Geometria Dinâmica facilitaram este processo, pois os alunos poderam arrastar as figuras ou partes levando-os a verificar e refletir sobre a sua forma de pensar acerca da matemática envolvida.

Coelho (1997) realizou um estudo com alunos do 6.º ano de escolaridade no qual pretendia perceber os processos utilizados pelos alunos na resolução de problemas geométricos, utilizando o Cabri-géomètre. Tal como tinha acontecido com a investigação levada a cabo por Hazzan e Goldenberg, Coelho concluiu que os alunos não elaboravam um plano inicial, resolvendo os problemas por fases, mas verificando sempre os resultados obtidos. O uso do *software* dinâmico foi importante para a aquisição de competências e aprendizagens dos alunos, motivando-os para a resolução de problemas.

Piteira (2000), num estudo realizado em duas turmas de diferentes escolas, uma de 8.º ano e outra de 9.º ano, concluiu que os Ambientes Dinâmicos de Geometria Dinâmica são uma mais-valia na resolução de problemas, uma vez que os alunos podem pesquisar relações, fazer inferências, manipular e explorar objetos dinamicamente e ainda relacionar conhecimentos, sentido a necessidade de usar uma linguagem matemática rigorosa.

Segundo um estudo realizado por Freixo (2002), a atitude relativamente à resolução de problemas melhorou com a utilização de Ambientes de Geometria Dinâmica, levando a que os alunos a vejam como sinónimo de investigação. Por outro lado, os alunos melhoraram a sua autoestima e a confiança uma vez que tinham de resolver os problemas sozinhos, ou seja, sem o auxílio do professor.

Candeias (2005), no estudo realizado com alunos do 8.º ano, concluiu que estes utilizam os Ambientes de Geometria de Dinâmica, para resolver problemas geométricos, mesmo quando o podem fazer sem o seu auxílio:

> Todos os alunos preferiram resolver os problemas nas páginas do programa informático, sendo comum a resolução de vários problemas ao mesmo tempo, existindo dinamismo na reformulação de respostas e na descrição dos processos utilizados (p. 237).

Verificou-se ainda que os alunos preocupavam-se em "escrever o processo de resolução e a verificar se a resposta que estavam a pensar dar verificava todas as condições do problema." (Candeias, 2005, p. 238).

O NCTM (2007) salienta que os Ambientes de Geometria Dinâmica são ferramentas bastante úteis para a formulação de problemas significativos, pois podem-se formular problemas baseados no quotidiano dos alunos.

Assim, a literatura existente tem referido que os Ambientes de Geometria Dinâmica favorecem não só a resolução de problemas como a formulação dos mesmos, sendo uma mais-valia para os alunos.

## Capítulo IV

# Metodologia

O presente capítulo tem a finalidade de apresentar e justificar as opções metodológicas que foram tomadas no âmbito da presente investigação. É ainda feita uma descrição do contexto da investigação, onde se apresenta a escola, a sala de aula e os grupos de alunos que, enquanto turma, constituem o estudo de caso. Posteriormente explica-se a intervenção didática, em que é apresentado o tema trabalhado, como foi feita a organização do trabalho e as tarefas utilizadas. Por fim são referidas as técnicas de recolha e análise de dados utilizadas na investigação.

## Opções metodológicas

O estudo apresentado enquadra-se numa investigação de natureza qualitativa. Bogdan e Biklen (1994) referem que neste tipo de investigação, o investigador é o instrumento principal de recolha de dados, e o ambiente natural constitui a fonte direta de dados. Estes autores consideram ainda que a investigação de natureza qualitativa caracteriza-se por ser descritiva, pois os dados recolhidos são descritos, tendo a forma de imagens ou palavras que assumem importantes papéis. Este tipo de investigação requer que o investigador tenha em atenção todos os detalhes do ambiente que o circunda, pois tudo pode ser importante para uma melhor perceção do seu objeto de estudo. Bogdan e Biklen (1994) salientam que neste tipo de investigação, o investigador está mais interessado nos processos do que nos resultados ou produtos. A análise dos dados, na investigação de natureza qualitativa, é feita de forma indutiva, isto é, o investigador ao recolher os dados, não tem como objetivo confirmar hipóteses inicialmente construídas.

Estes autores referem que outra característica deste tipo de investigação é o facto de os investigadores qualitativos se preocuparem em compreender o significado que os participantes atribuem às suas experiências.

O presente estudo decorreu nas aulas de Matemática de uma turma de 8.º ano de escolaridade, no qual foi trabalhada a resolução de problemas com o auxílio de um Ambiente de Geometria Dinâmica, o GeoGebra. Tendo em conta que a professora da turma é simultaneamente a investigadora, o presente estudo é também uma investigação sobre a minha prática pedagógica. Ponte (2002) refere que a investigação sobre a prática profissional do professor aliada à sua participação no desenvolvimento curricular é um elemento fundamental da sua identidade enquanto docente. Alarcão (2001) realça que a ideia do professor-investigador surgiu com Lawrence Stenhouse, em 1975, e salienta que todo o docente deve refletir e questionar-se sobre as suas próprias práticas. Para Ponte (2002), esta investigação é um método excecional de construção do conhecimento profissional. Este autor afirma ainda que:

> A investigação sobre a sua prática é, por consequência, um processo fundamental de construção do conhecimento sobre essa mesma prática e, portanto, uma atividade de grande valor para o desenvolvimento profissional dos professores que nela se envolvem ativamente (Ponte, 2002, p. 6).

Também Sierpinska e Kilpatrick (1998) afirmam que os docentes que são ao mesmo tempo investigadores estão numa posição privilegiada, pois para além de ensinar e planificar o seu trabalho, refletem e analisam as suas aulas.

Ponte (2004) considera que o que distingue a investigação sobre a prática da reflexão sobre a prática é o facto de a investigação se iniciar com a identificação de um problema relevante e seguir uma metodologia rigorosa, através da qual se procura uma resposta convincente. A investigação termina quando é apresentada, discutida e validada no seio de uma comunidade educativa, ou seja, quando é tornada pública. Esta opinião é partilhada por Beillerot (2001).

Ponte (2002) salienta que uma investigação sobre a prática deve obedecer a um conjunto de critérios de qualidade, que são apresentados na tabela seguinte:

| Critério | A investigação |
| --- | --- |
| Vínculo com a prática | Reporta-se a uma questão prática vivenciada pelos atores. |
| Autenticidade | Expressa o ponto de vista pessoal dos atores e sua articulação com os vários contextos em que estão inseridos. |
| Novidade | Inclui elementos novos, que podem ser relacionados com a formulação de questões, a metodologia utilizada ou com a interpretação dos dados. |
| Qualidade metodológica | Apresenta de forma clara, questões e procedimentos de recolha de dados, assim como conclusões apoiadas nos dados recolhidos. |
| Qualidade dialógica | É pública e foi discutida por diversos atores |

**Tabela 1: Critérios de qualidade da investigação sobre a prática**

Assim, Ponte (2002) considera que uma investigação sobre a prática deve merecer o respeito e o interesse da comunidade académica, sempre que respeita os critérios indicados no quadro anterior, uma vez que poderá ser importante para toda a comunidade.

Tendo em conta que o objetivo do presente estudo é compreender como é que o uso do GeoGebra, em sala de aula, pode contribuir para promover o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas em alunos do 8.º ano do Ensino Básico, optei pela modalidade de estudo de caso para concretizar o meu estudo pois pretendo obter uma descrição rica e pormenorizada de como a turma se revela nesta intervenção didática.

Para Ponte (2006), um estudo de caso é uma investigação acerca de uma entidade bem definida, na qual se pretende conhecer em profundidade essa entidade, realçando as suas próprias características e identidade. O investigador não pretende alterar uma determinada situação mas sim compreendê-la – por isso, o estudo de caso não é experimental. Como o estudo tem por base o trabalho de campo realizado e a análise documental, trata-se de uma investigação de natureza empírica. Num estudo de caso é elaborada uma descrição pormenorizada, factual, literal e o mais completa possível do objeto de estudo de modo a compreender a entidade definida inicialmente.

Ponte (1994) considera que:

> (…) os estudos de caso não se usam quando se quer conhecer propriedades gerais de toda uma população. Pelo contrário, usam-se para compreender a especificidade de uma dada situação ou fenómeno, para estudar os processos e as dinâmicas da prática, com vista à sua melhoria, ou para ajudar um dado

> organismo ou decisor a definir novas políticas, ou ainda para formular novas teorias (p. 17).

Ponte (2006) classifica os estudos de caso, de acordo com o propósito a que se destinam, como exploratórios, descritivos ou analíticos. Os estudos exploratórios têm como objetivo obter informação prévia acerca do respetivo objeto de interesse. Os estudos descritivos têm como finalidade descrever o estudo de caso. Por fim, os estudos analíticos, pretendem problematizar o objeto do estudo, desenvolver ou construir nova teoria ou então, confrontá-la com teoria que já existe. Assim, o presente estudo é um estudo de caso de natureza descritiva com características analíticas.

É de salientar que as investigações desta natureza devem ter em conta questões de ordem ética, nomeadamente no que se refere ao anonimato dos participantes e ao consentimento informado dos participantes do estudo. Assim, antes da realização deste estudo solicitei, por escrito, autorização ao Diretor do Agrupamento de Escolas onde foi realizada a investigação, informando-o sobre a finalidade da mesma, os objetivos, o tipo de dados a recolher e a forma como se iria proceder a essa recolha. Posteriormente solicitei, por escrito, autorização aos pais e encarregados de educação dos alunos da turma que participou na investigação, tendo sido facultada toda a informação anteriormente descrita. Quanto ao anonimato da escola e dos alunos envolvidos no estudo, este foi mantido durante todo o processo que envolveu a presente investigação.

## Contexto da investigação

De seguida faz-se uma apresentação da escola, onde decorreu a investigação, da sala de aula e da turma participante.

### A escola

A escola onde se realizou a investigação é a sede de um Agrupamento de Escolas, situado no distrito de Setúbal. Esta escola faz parte de um concelho, que segundo os Censos 2001, tinha 14 287 habitantes, dos quais 12,9% eram jovens, com menos de quinze anos. Grande parte da população dedica-se ao sector primário, ou seja, à agricultura e pecuária. No ano em que se realizou a investigação, a escola sede incluía turmas do Pré-escolar ao 3.º ciclo de escolaridade. É de salientar o facto de haver dez turmas do 3.º ciclo, onde estão incluídas duas turmas do Curso de Educação e Formação de Jovens e uma turma de Programa Individual de Educação e Formação. A escola apresenta no seu Projeto Educativo, o insucesso escolar, o absentismo/ assiduidade e o abandono escolar e a indisciplina, como sendo os principais problemas dos alunos.

A escola encontra-se relativamente equipada de infraestruturas e materiais didáticos, sendo que a maioria das salas apresenta-se equipada com um computador e um projetor de vídeo e algumas delas possuem também quadro interativo.

**A sala de aula**

A sala onde decorreu a intervenção didática é uma sala de informática, equipada com computadores, videoprojector, uma tela de projeção e várias mesas e cadeiras. A sala encontrava-se relativamente cuidada, estando dois computadores avariados. A maioria dos computadores tinha instalado o Ambiente de Geometria Dinâmico GeoGebra.

Esta sala está disponível para ser utilizada, mediante a realização de uma requisição feita antecipadamente, pelo que foi fácil conseguir as condições logísticas para esta intervenção. Cada um dos seis grupos de alunos em que a turma foi dividida tinha um computador com o *software* GeoGebra instalado, à sua disposição, e ao longo da intervenção didática ocuparam sempre o mesmo computador, salvo em raras exceções.

**A turma**

A turma participante no estudo é de 8.º ano de escolaridade, constituída por dezoito alunos, dez do sexo masculino e oito do sexo feminino. A maioria dos alunos reside na localidade onde está inserida a escola sede do Agrupamento e têm idades compreendidas entre os treze e os dezassete anos, não havendo alunos repetentes. A turma tem dois alunos com Necessidades Educativas Especiais, um deles com um Currículo Específico Individual e outro com adequações curriculares individuais e adequações no processo de avaliação. O primeiro aluno não participou no estudo, dadas as suas características, mas o segundo participou.

A investigadora já conhecia a turma, uma vez que foi sua professora também no ano letivo anterior à recolha dos dados. No ano letivo anterior o comportamento e aproveitamento da turma tinham sido considerados, pelo conselho de turma, como bastante satisfatórios mas, no final do primeiro período, do presente ano letivo, 2011/2012, o comportamento foi considerado como satisfatório e o aproveitamento pouco satisfatório, dado o número de alunos com três ou mais níveis inferiores a três. É de referir que no final do primeiro período, foram atribuídos, à disciplina de Matemática, sete níveis inferiores a três, dois níveis três e oito níveis quatro. Grande parte dos alunos da turma refere que a sua disciplina preferida é a Matemática, verificando-se isso na forma como se empenham na realização das tarefas propostas e no gosto de querer saber mais.

De forma a realizar a presente investigação, a turma foi dividida em seis pequenos grupos. Os grupos foram formados pela docente da turma que, como já foi referido, também é a investigadora. Ao constituir os grupos houve o cuidado de ter em atenção a afinidade dos elementos que iriam constituir o grupo, para além do seu comportamento e empenho em sala de aula. Um grupo era constituído por dois elementos e todos os outros tinham três elementos.

Grupo 1: Este grupo era o mais pequeno, sendo composto por duas alunas, ambas com um comportamento exemplar. Uma das alunas apresentava algumas dificuldades na disciplina de Matemática, era pouco autónoma e pouco participativa mas era empenhada. A outra aluna era muito esforçada, empenhada, autónoma e muito participativa. Apresentava um nível de conhecimentos matemáticos bastante satisfatório e alguma facilidade ao nível da comunicação matemática. Estavam muito habituadas a trabalhar juntas, em contexto de sala de aula. A primeira aluna apresentava bastantes dificuldades na resolução de problemas, desistindo à primeira dificuldade, enquanto que a segunda era muito mais persistente na resolução de problemas.

Grupo 2: O grupo era constituído por três elementos, duas raparigas e um rapaz, tendo todos os alunos um comportamento satisfatório, em sala de aula. Uma das alunas era muito participativa, empenhada e autónoma, apesar de ser um pouco distraída. Era uma aluna que expressava a sua opinião sem problemas e tinha vontade de aprender e querer saber mais. Tinha um bom nível de conhecimentos matemáticos e conseguia-os aplicar sem grandes dificuldades. Gostava de resolver problemas matemáticos, apesar de ter alguma tendência para desistir quando não os conseguia resolver logo à primeira tentativa. Os outros dois alunos não eram tão autónomos, mas participavam ativamente nas tarefas propostas. Eram alunos muito inconstantes em termos de aproveitamento, principalmente devido à falta de métodos de estudo. Em relação à resolução de problemas, apresentavam algumas dificuldades, principalmente devido à dificuldade de interpretação do problema.

Grupo 3: Este grupo, tal como o anterior, era formado por duas raparigas e um rapaz. As duas alunas eram muito empenhadas e trabalhadoras, apresentando um aproveitamento entre o bom e o muito bom à disciplina de Matemática. Uma das alunas tinha muita facilidade em termos de comunicação matemática, era muito participativa e raramente ficava satisfeita com a sua prestação em sala de aula, pois queria sempre fazer e saber mais. As duas alunas gostavam de resolver problemas, apesar de nem sempre conseguirem chegar à sua solução, pois nem sempre definiam a estratégia mais adequada. O aluno era pouco empenhado na realização das tarefas propostas e apresentava um aproveitamento bastante insatisfatório. Raramente cumpria as tarefas dentro do prazo, mesmo com a ajuda de colegas ou da docente. Era muito pouco participativo e distraia-se com bastante facilidade. Apresentava grandes dificuldades na resolução de problemas.

Grupo 4: O grupo era constituído por uma rapariga e dois rapazes. A aluna, no ano letivo anterior era muito trabalhadora e empenhada, mas no presente ano letivo demonstrou-se menos participativa e menos concentrada. Apesar de ter capacidades, distraia-se com muita facilidade e na maioria das vezes não terminava as tarefas propostas dentro do prazo estabelecido. Relativamente aos rapazes, um deles era muito trabalhador e empenhado, apesar de ser pouco participativo. O outro aluno era muito conflituoso em sala de aula, nem sempre realizava as tarefas propostas e várias vezes fazia comentários despropositados. Nenhum dos colegas da turma gostava de trabalhar com este aluno em sala de aula, uma vez que ele ficava à espera que os colegas realizassem as atividades por ele e quando era chamado à atenção referia que eram os colegas que não o deixavam trabalhar. Os três alunos sentiam alguma dificuldade na resolução de problemas, sendo que a sua maior dificuldade era na definição da estratégia a usar.

Grupo 5: Este grupo era constituído por dois alunos e uma aluna. Um dos alunos era hiperativo e tomava medicação para a hiperatividade. Apresentava um comportamento pouco adequado, essencialmente devido à sua patologia. Distraia-se com bastante facilidade e tinha muita dificuldade em se concentrar nas tarefas propostas quando trabalhava individualmente. Quando trabalhava em grupo a sua postura melhorava um pouco, devido ao incentivo e apoio dado pelos colegas do grupo. Apresentava algumas dificuldades ao nível dos conhecimentos matemáticos essencialmente devido à falta de hábitos de estudo e métodos de trabalho e à falta de atenção e concentração em sala de aula. Os outros dois alunos apresentavam um aproveitamento entre o bom e o muito bom, eram muito empenhados e muito trabalhadores. Eram alunos autónomos e apresentavam um bom raciocínio matemático. Estes dois alunos gostavam de resolver problemas e consideravam-nos como um desafio.

Grupo 6: Este grupo era constituído por três alunos. Um dos alunos tinha necessidades educativas especiais, com adaptações curriculares e condições especiais de avaliação. Era um aluno com um comportamento instável e com poucos hábitos de estudo. Os outros dois alunos apresentavam um aproveitamento muito bom, eram muito empenhados e tinham vontade de saber mais. Eram alunos muito autónomos e geralmente terminavam as tarefas dentro dos prazos previstos, no entanto, distraiam-se com alguma facilidade. Eram alunos que tinham um bom nível de raciocínio matemático e tinham alguma facilidade em aplicar e relacionar conhecimentos matemáticos. Consideravam a resolução de problemas como um desafio, pelo que se empenhavam bastante na sua resolução.

As características comuns a todos os grupos eram o empenho na realização das tarefas propostas e o gosto pela resolução de problemas. Todos os alunos já tinham trabalhado com o *software* GeoGebra nas aulas de Matemática, no presente ano letivo e no ano letivo anterior.

## A intervenção didática

De seguida será apresentado o tema explorado na intervenção didática, tendo por base o Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte *et al*., 2007). Apresenta-se ainda, as tarefas exploradas e a forma como foi organizada a intervenção didática.

## O tema

O presente estudo pretende perceber como se caracterizam as resoluções dos problemas apresentadas pelos alunos, que tipo de estratégias de resolução de problemas estes utilizam, e que formulação de novos problemas surge a partir dos problemas resolvidos. Assim, o objetivo do presente estudo é perceber de que forma o GeoGebra pode contribuir para desenvolver a capacidade de resolução de problemas nos alunos, uma das capacidades transversais a toda a aprendizagem da Matemática valorizada nas orientações curriculares do ensino básico.

Assim, com esta intervenção pretende-se desenvolver os seguintes objetivos gerais e específicos, explicitados no Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte *et al.*, 2007)

Objetivos gerais:

> OG1 - Interpretar enunciados matemáticos formulados;
> OG 2 - Usar a linguagem matemática para expressar as ideias matemáticas com precisão;
> OG3 - Descrever e explicitar, oralmente e por escrito, as estratégias e procedimentos matemáticos que utilizam e os resultados a que chegam;
> OG4 - Argumentar e discutir as argumentações dos outros;
> OG5 - Compreender problemas em contextos matemáticos e não matemáticos e de os resolver utilizando estratégias apropriadas;
> OG6 - Apreciar a plausibilidade dos resultados obtidos e a adequação ao contexto das soluções a que chegam;
> OG7 - Monitorizar o seu trabalho e refletir sobre a adequação das suas estratégias, reconhecendo situações em que podem ser utilizadas estratégias diferentes (p. 5).

Objetivos específicos:

> OE1 - Identificar os dados, as condições e o objetivo do problema;
> OE2 - Conceber e pôr em prática estratégias de resolução de problemas, verificando a adequação dos resultados obtidos e dos processos utilizados;
> OE3 - Averiguar a possibilidade de abordagens diversificadas para a resolução de um problema;
> OE4 - Formular problemas a partir de situações matemáticas e não matemáticas (p. 63-64).

Optou-se por escolher problemas geométricos, um domínio temático que em geral oferece dificuldades aos alunos, por um lado atendendo às possibilidades que o

GeoGebra oferece neste domínio, por outro lado pela maior facilidade de integração curricular que oferecia em termos da concretização do programa nesta turma de 8.º ano.

### Organização do trabalho

Tal como foi anteriormente referido, a intervenção didática foi realizada numa sala de informática devidamente apetrechada. Ao longo da intervenção didática foram realizadas sete tarefas, em sete aulas de 90 minutos de Matemática, de acordo com calendarização seguinte:

| Data | Tarefa | Duração |
|---|---|---|
| 31/10/2011 | Tarefa 1: Os três amigos | 90 minutos |
| 07/11/2011 | Tarefa 2: As jogadoras de basquete | 90 minutos |
| 14/11/2011 | Tarefa 3: O logótipo | 90 minutos |
| 21/11/2011 | Tarefa 4: A estrada circular | 90 minutos |
| 28/11/2011 | Tarefa 5: Os náufragos | 90 minutos |
| 9/12/2011 | Tarefa 6: Um quadrado inscrito num triângulo | 90 minutos |
| 06/01/2012 | Tarefa 7: O moinho de vento | 90 minutos |

**Tabela 2: Calendarização das tarefas**

Como se pode observar, as primeiras cinco tarefas foram realizadas com uma semana de intervalo entre elas e as duas últimas foram aplicadas com um intervalo de tempo superior, devido à existência de outras atividades programadas no Plano Anual de Atividades da escola e inseridas no Projeto Curricular da Turma.

As aulas foram estruturadas tendo em conta três fases. Na primeira fase da aula era apresentada aos alunos a tarefa a resolver e em seguida distribuía-se a cada aluno uma fotocópia com o enunciado da mesma. Esta primeira fase demorava cerca de cinco minutos. Numa segunda fase, que correspondia a cerca de 50 minutos, os alunos resolviam o problema, com o auxílio do GeoGebra, registavam as suas conclusões e formulavam um novo problema inspirados no que tinha sido acabado de resolver. A última fase, correspondente a cerca de 30 minutos, era dedicada à exploração e discussão das várias resoluções elaboradas pelos diferentes grupos e à apresentação dos problemas formulados.

No final de cada aula, a docente/investigadora recolhia a resolução dos alunos através dos ficheiros do GeoGebra, guardados em cada computador e recolhia também os registos escritos feitos pelos grupos na fotocópia inicialmente fornecida.

## As tarefas

No decorrer da intervenção didática foram propostas sete tarefas, as quais são consideradas como problemas para estes alunos, uma vez que em todas as tarefas propostas os alunos não conhecem um método que indique completamente o método de resolução (Lester, 1983), ou não sabem imediatamente como chegar até à solução (Vale & Pimentel, 2004).

As sete tarefas propostas tinham uma estrutura idêntica, a qual foi adotada com o propósito de permitir desenvolver os diversos objetivos associados à resolução de problemas, incluindo a formulação de problemas. Iniciava-se a tarefa com o enunciado do problema. Depois, era pedido na alínea a), que o grupo resolvesse o problema usando o GeoGebra e que gravasse no final o ficheiro com essa resolução. Na alínea b) era perguntado ao grupo qual era a solução do problema apresentado e como a tinham descoberto, explicando a estratégia utilizada. Por fim, na alínea c), era pedido ao grupo que formulassem um outro problema, inspirado no problema que tinham terminado de resolver. É de salientar ainda que todas as tarefas propostas podiam ser resolvidas com recurso a diferentes estratégias.

A tarefa 1 (ANEXO I), “Os três amigos”, era um problema em que eram dadas algumas informações acerca de três amigos que estavam a brincar às escondidas no pátio da escola e pedia-se aos alunos que, com base nos dados, descobrissem onde estava um dos amigos.

Na tarefa 2 (ANEXO II), “As jogadoras de basquete”, os alunos tinham de descobrir a que distância estavam três jogadoras de basquetebol, sabendo que estavam todas à mesma distância umas das outras e a uma determinada distância do centro do campo. A resolução deste problema era facilitada se os alunos fizessem a conexão entre vários conceitos matemáticos, nomeadamente se utilizassem os conhecimentos acerca das propriedades dos triângulos equiláteros.

A tarefa 3 (ANEXO III), “O logótipo”, para além de ser um problema geométrico incentivava a criatividade dos alunos. Era apresentado um concurso para um logótipo do Clube da Matemática de uma determinada escola, que tinha de obedecer a duas regras: ser um polígono regular e ter $\frac{2}{3}$ da área total pintada. Perguntava-se aos alunos qual poderia ser o logótipo, ou seja, os alunos teriam de construir um logótipo que satisfizesse as regras inicialmente estabelecidas.

Na tarefa 4 (ANEXO IV), “A estrada circular”, os alunos tinham de descobrir onde deveria passar uma estrada circular, sabendo que estava a igual distância de quatro castelos. Os alunos teriam de colocar os castelos aleatoriamente e depois descobrir onde deveria ficar a estrada e concluir que havia apenas uma única solução para cada quatro castelos. É de salientar que apenas haveria uma infinidade de soluções para o caso particular, em que os quatro castelos estão sobre os vértices de um quadrado.

Na tarefa 5 (ANEXO V), “Os náufragos”, os alunos tinham de descobrir onde deveriam ser construídas as casas de dois náufragos, sabendo que a ilha tinha a forma de um triângulo equilátero, e que um deles queria ir todos os dias à praia e que havia três praias na ilha, que correspondiam a cada um dos lados do triângulo e que o outro queria ir todos os dias a cada vértice da ilha. Os alunos poderiam optar por várias estratégias para resolver este problema.

A tarefa 6 (ANEXO VI), “ Um quadrado num triângulo”, questionava os alunos sobre se era sempre possível inscrever um quadrado num triângulo. Os alunos teriam de verificar para cada tipo de triângulo, se conseguiam ou não inscrever um quadrado e depois generalizar. Os alunos deveriam encontrar a estratégia mais adequada para conseguirem concluir que é sempre possível inscrever um quadrado num triângulo.

Na tarefa 7 (ANEXO VII), “O moinho de vento”, era apresentado um moinho de vento formado por seis triângulos geometricamente iguais, igualmente espaçados e perguntava-se aos alunos como se poderia construir o moinho de vento e se haveria apenas uma forma de o construir. Neste problema os alunos poderiam utilizar os conhecimentos acerca das isometrias, cujo conteúdo já tinha sido lecionado, mas que ainda não estava consolidado.

## Recolha de dados

A recolha de dados foi realizada integralmente por mim. Tendo em conta o que é recomendado por Yin (2003), procurei recolher os dados através de diferentes fontes, nomeadamente através da observação acompanhada de gravação vídeo das aulas, da análise documental dos documentos escritos pelos alunos, dos ficheiros do GeoGebra gravados pelos alunos e dos registos livres elaborados por mim enquanto investigadora.

No início da investigação, foi solicitada autorização ao Diretor do Agrupamento de Escolas (ANEXO VIII) e aos pais e encarregados de educação (ANEXO IX), para que as aulas pudessem ser filmadas.

De acordo com Stake (2009), o investigador do estudo de caso de natureza qualitativa deve manter, durante a observação, um bom registo dos acontecimentos de forma a garantir uma descrição fidedigna para analisar posteriormente e para elaborar o relatório final. Assim, nesta investigação, as observações ocorreram durante toda a intervenção didática, tendo sido filmadas todas estas aulas. A câmara de vídeo foi colocada num canto da sala, em cima de uma estante de forma a captar todas as intervenções dos alunos da turma alvo do estudo de caso e estava ligada durante os noventa minutos de duração da aula. A principal função da câmara de vídeo era captar as questões colocadas pelos alunos, as afirmações proferidas e a exploração e discussão das conclusões entre os vários alunos da turma.

A análise documental foi outra das técnicas de recolha de dados utilizada. Assim, a análise documental teve em conta as resoluções dos diferentes grupos, em papel e no GeoGebra, dos problemas propostos e os registos livres dos acontecimentos efetuados por mim, enquanto investigadora. É de salientar que as resoluções dos grupos em suporte papel foram posteriormente guardadas e organizadas em suporte digital, tal como aconteceu com os ficheiros do Geogebra produzidos pelos alunos.

## Análise de dados

A análise de dados está diretamente ligada à recolha de dados, sendo um processo principalmente descritivo e interpretativo e teve por base o problema, as questões de investigação, a revisão da literatura e os dados recolhidos. Assim, a análise de dados foi realizada em duas fases, durante a presente investigação. Numa primeira fase, e após a realização de cada tarefa, analisei os dados obtidos a partir da gravação vídeo, dos registos efetuados, e das resoluções dos alunos em suporte papel e no GeoGebra. De forma a melhor evidenciar o trabalho desenvolvido por cada um dos grupos, em cada uma das tarefas, optei por iniciar a sua análise apresentando alguns comentários proferidos pelos alunos durante a resolução da mesma. Depois apresento a resolução descrita pelo grupo, seguida da sua resolução no GeoGebra, optando, na maioria dos casos por seguir a ordem dos grupos, isto é, apresentando a resolução do grupo 1 e terminando na resolução do grupo 6. Posteriormente é apresentado o problema formulado por cada um dos grupos, seguindo novamente a ordem dos grupos. Esta primeira análise permitiu-me consolidar ideias sobre a investigação que estava a realizar bem como avaliar expectativas e validar interpretações.

A segunda fase decorreu após a recolha de todos os dados. Tendo em conta a revisão da literatura e a primeira análise efetuada, defini as categorias de análise (ANEXO X), tendo considerado três domínios: caracterização das resoluções; estratégias de resolução; formulação de problemas. Relativamente ao primeiro domínio, caracterização das resoluções, considerei três categorias: a) Adequação; b) Rigor; c) Robustez. Para o segundo domínio, estratégias de resolução, considerei oito categorias: a) Descobrir um padrão/descobrir uma regra ou lei de formação; b) Fazer tentativas/ Fazer conjeturas; c) Trabalhar do fim para o princípio; d) Usar dedução lógica/fazer eliminação; e) Reduzir a um problema mais simples; f) Fazer uma simulação ou uma experimentação; g) Fazer um diagrama ou esquema; h) Fazer uma lista organizada ou uma tabela. No que concerne ao último domínio, formulação de problemas, defini duas categorias: a) Variação do problema dado, onde se incluiu três subcategorias: i) variar os dados; ii) variar as condições; iii) variar o contexto; b) Problema novo.

Com base nas categorias atrás referidas, analisei todos os dados recolhidos de cada grupo relativamente a cada tarefa e posteriormente realizei uma análise cruzada, tendo em conta as questões do estudo, de modo a encontrar analogias e divergências, formulando então as conclusões. É de salientar que, em relação às estratégias de resolução dos problemas, os dados recolhidos revelaram a irrelevância de algumas das categorias inicialmente definidas, uma vez que não foram utilizadas por nenhum dos grupos, por este motivo, na apresentação das conclusões deste estudo, apenas são referidas as estratégias pertinentes.

## Capítulo V

# A turma e a resolução de problemas com o GeoGebra

No presente capítulo irei apresentar o estudo de caso da turma participante na intervenção didática. Os resultados serão apresentados por tarefa de modo a permitir uma descrição e análise mais aprofundada acerca do desempenho de cada grupo participante.

### Tarefa 1: Os três amigos

Na tarefa 1 (ANEXO I) os alunos tinham de descobrir onde estava um dos amigos, o Luís, tendo em conta os dados do problema. Durante a realização deste problema, tive a necessidade de explicar aos alunos como podiam dar um novo nome aos pontos que tinham marcado, para tornar mais percetível a sua resolução, uma vez que eles ainda não tinham utilizado esta função do GeoGebra. Foi ainda necessário explicar, que podiam recuperar os passos utilizados na sua resolução, utilizando o protocolo de construção, uma vez que, quando era pedido para explicar como tinha sido resolvido o problema, os alunos sentiam alguma dificuldade em recordar todos os passos seguidos.

Enquanto os alunos resolviam o problema, ouviam-se os comentários:

> **Margarida (grupo 5):** Isto não se endireita!
> **Anaísa (grupo 2):** Há sempre um que não dá!
> **Andreia (grupo 1):** Este ponto não mexe!

No decorrer da resolução do problema os alunos foram fazendo várias tentativas, tentando mover alguns dos pontos, que representavam cada um dos amigos, de forma a verificarem as condições do problema.

O grupo 1, depois de várias tentativas descreve de seguida a sua resolução do problema apresentado.

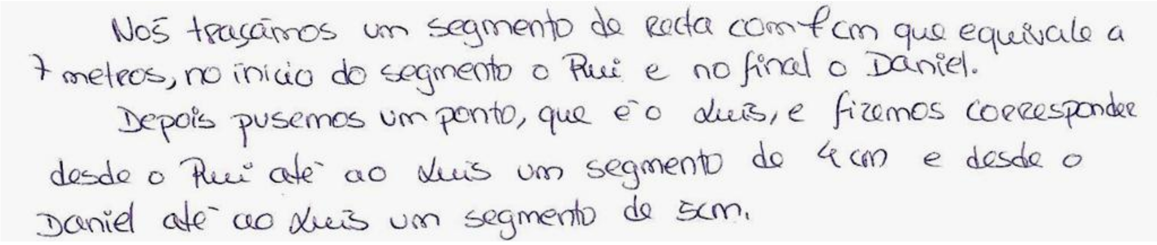



**Figura 3: Resolução descrita pelo grupo 1**

Apesar de o grupo não ter referido quando relatou a sua resolução, pode-se verificar, através do protocolo de construção que a seguir se apresenta, que os alunos determinaram a distância entre o Rui e o Daniel, entre o Daniel e o Luís e entre o Rui e o Luís, e depois moveram os vários pontos, até que as distâncias verificassem as condições do problema.

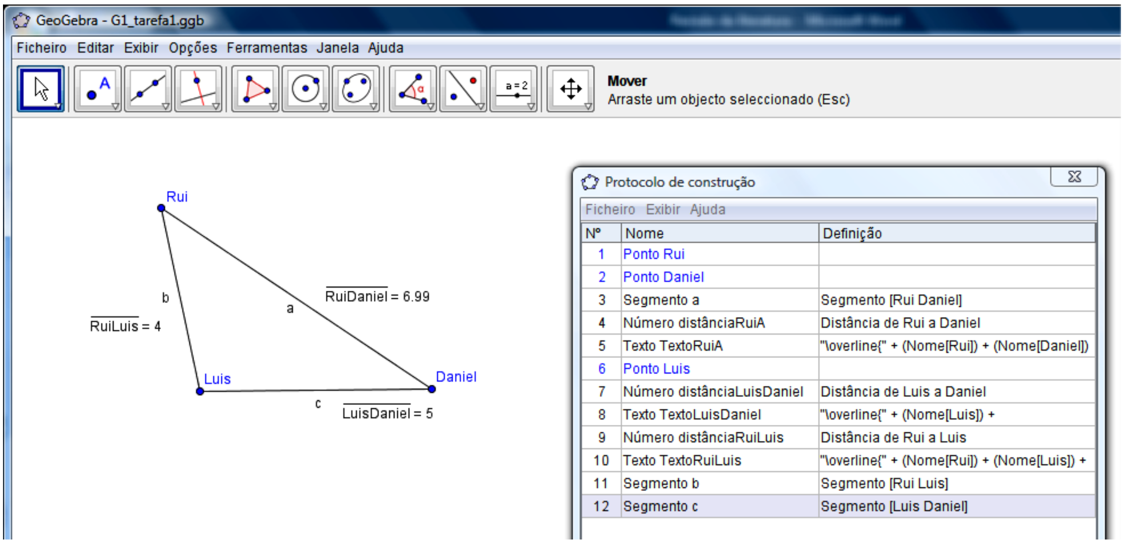



**Figura 4: Resolução do grupo 1 no GeoGebra**

Este grupo apenas conseguiu encontrar uma solução para o problema.

O grupo 2 começou por construir uma circunferência com centro no Rui e raio sete unidades, de seguida marcaram um ponto Daniel, que pertencia à circunferência e posteriormente traçaram o segmento de reta [RuiDaniel]. Depois traçaram um segmento de reta com origem no ponto Rui e com quatro unidades de comprimento e um segmento com origem no ponto Daniel e com cinco unidades de comprimento, obtendo assim dois novos pontos, o ponto C e o ponto que definiram como sendo o Luís. Depois moveram os pontos C e Luís, até encontrar a intersecção desses dois pontos o qual correspondia ao local onde estaria o Luís. O grupo teve alguma dificuldade em explicar a forma como chegaram à solução do problema, como se pode verificar na figura abaixo.

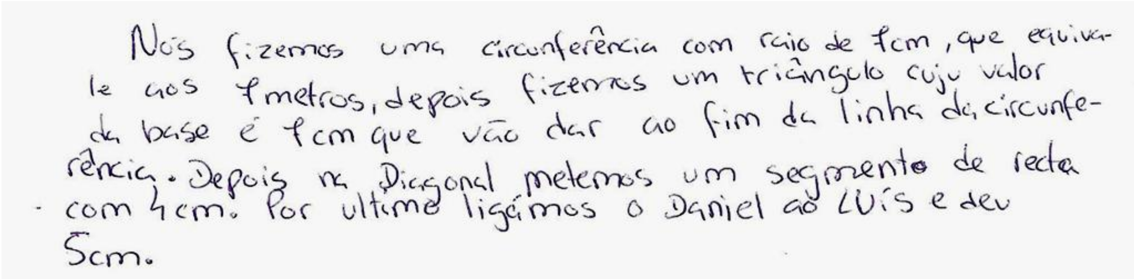

Nós fizemos uma circunferência com raio de 7cm, que equivale aos 7metros, depois fizemos um triângulo cujo valor da base é 7cm que vão dar ao fim da linha da circunferência. Depois na Diagonal metemos um segmento de recta com 4cm. Por ultimo ligámos o Daniel ao LUÍS e deu 5cm.

**Figura 5: Resolução descrita pelo grupo 2**

Mas com o auxílio do protocolo de construção do GeoGebra, a resolução está bem evidente, como se pode verificar na figura seguinte.

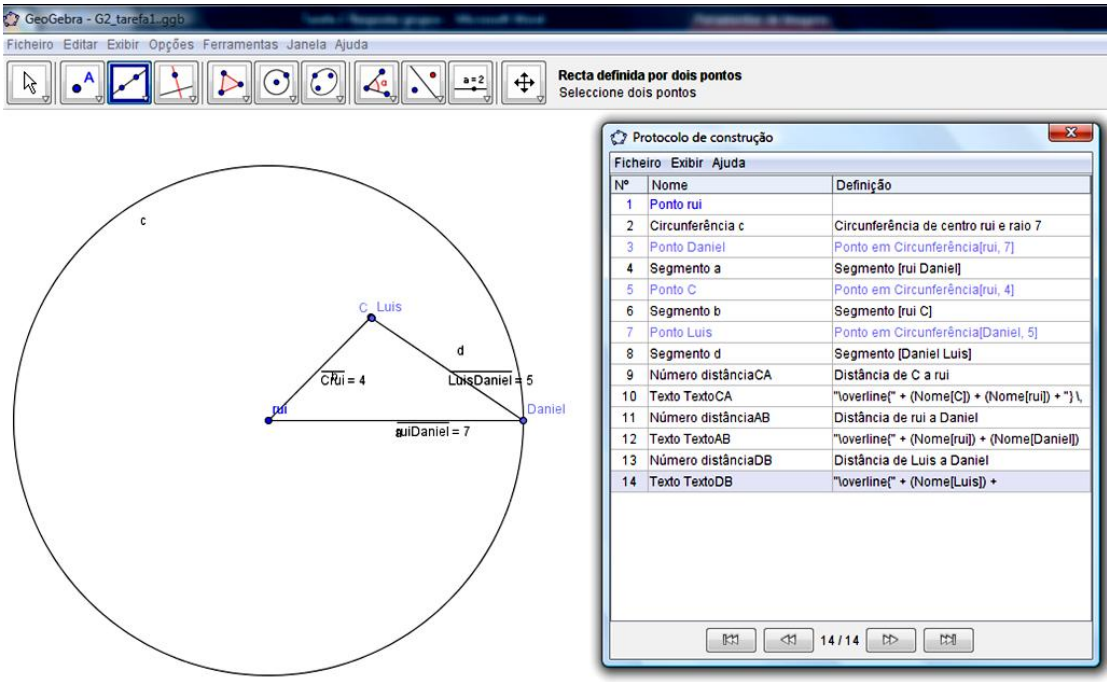



**Figura 6: Resolução do grupo 2 no GeoGebra**

Este grupo apenas encontrou uma solução para o problema.

O grupo 3 também utilizou, no decorrer da resolução do problema, a construção de uma circunferência, tal como é referido na figura seguinte.

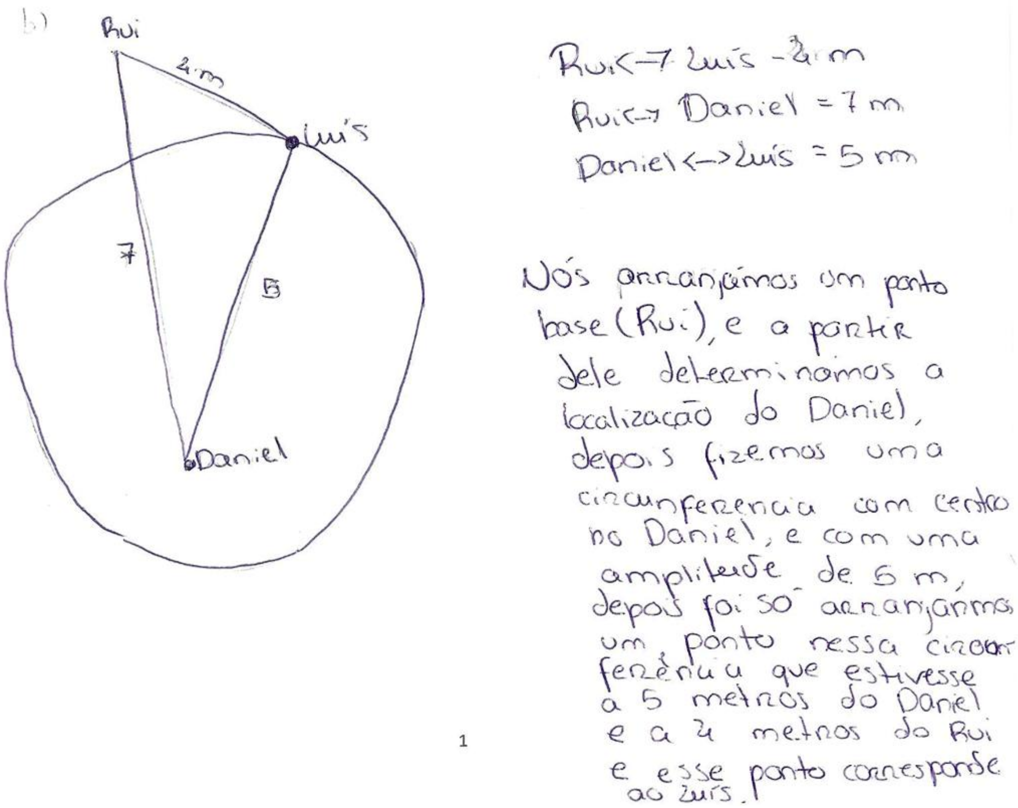



**Figura 7: Resolução descrita pelo grupo 3**

Este grupo apenas encontrou uma solução para o problema e a resolução realizada no GeoGebra pode ser observada na figura abaixo.

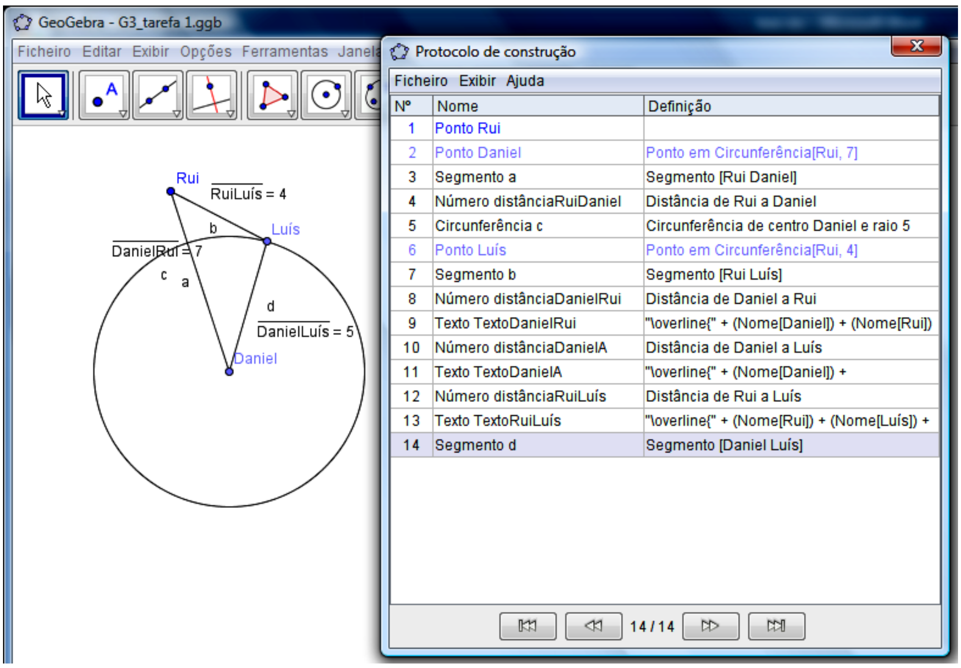



**Figura 8: Resolução do grupo 3 no GeoGebra**

O grupo 4 não conseguiu resolver o problema. Os elementos do grupo iniciaram uma resolução, baseada na construção de vários segmentos de reta com um comprimento fixo, mas depois abandonaram essa resolução, por não conseguirem mover os pontos e encontrar uma solução que satisfizesse os dados do problema. Em seguida apresenta-se a resolução apresentada pelo grupo, no GeoGebra:

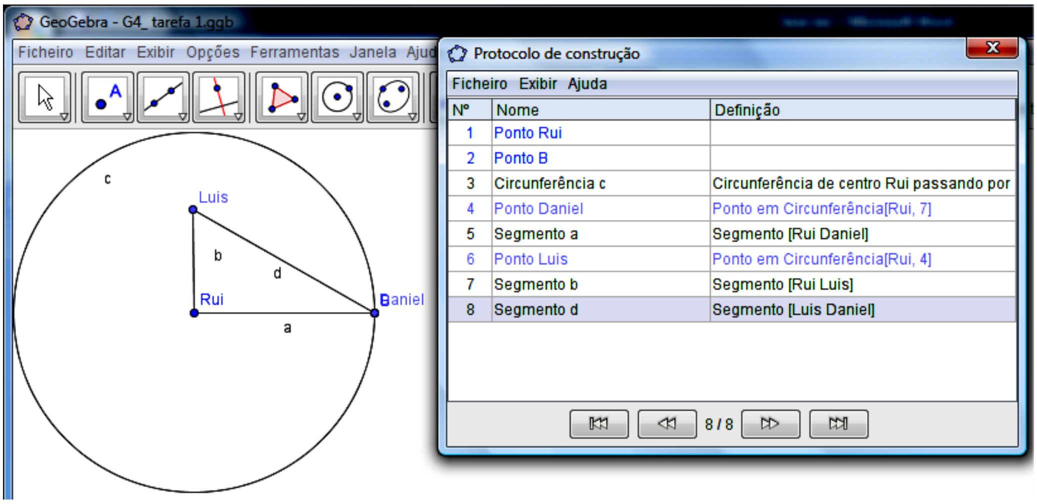



**Figura 9: Resolução apresentada pelo grupo 4 no GeoGebra**

É de salientar que se o grupo tivesse determinado a distância entre os vários amigos, verificavam que movendo apenas o Daniel, conseguiriam chegar rapidamente à solução do problema. Este grupo demonstrou durante toda a realização da tarefa, grandes dificuldades em trabalhar colaborativamente.

Resolução idêntica à do grupo 1 foi apresentada pelo grupo 5, como se pode constatar pela descrição feita pelo grupo, na figura abaixo.

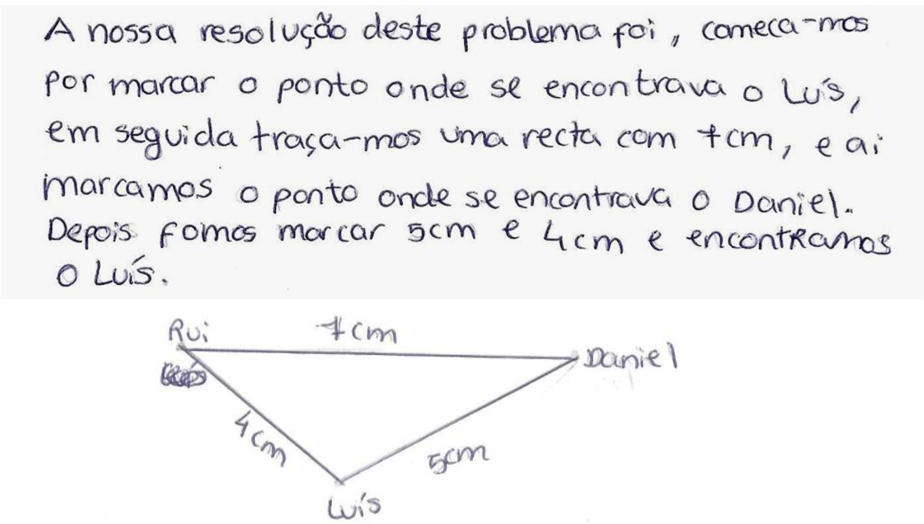



**Figura 10: Resolução descrita pelo grupo 5**

Salienta-se o facto de os alunos terem confundido reta com segmento de reta, apesar de isso não ter influenciado a sua resolução final. Mais uma vez os alunos não referem que tiveram de mover os pontos para que as distâncias entre os vários amigos satisfizessem as condições do problema. Verifica-se também que os alunos primeiro marcaram os pontos que correspondiam ao Daniel e ao Luís, de seguida traçaram os vários segmentos de reta e calcularam os seus comprimentos. Depois de terem chegado a esta solução, os alunos ainda tentaram resolver o problema de outra forma, mas não tiveram tempo de concluir. A segunda resolução consistia na construção de circunferências dado um ponto e o raio, como se pode verificar na figura seguinte.

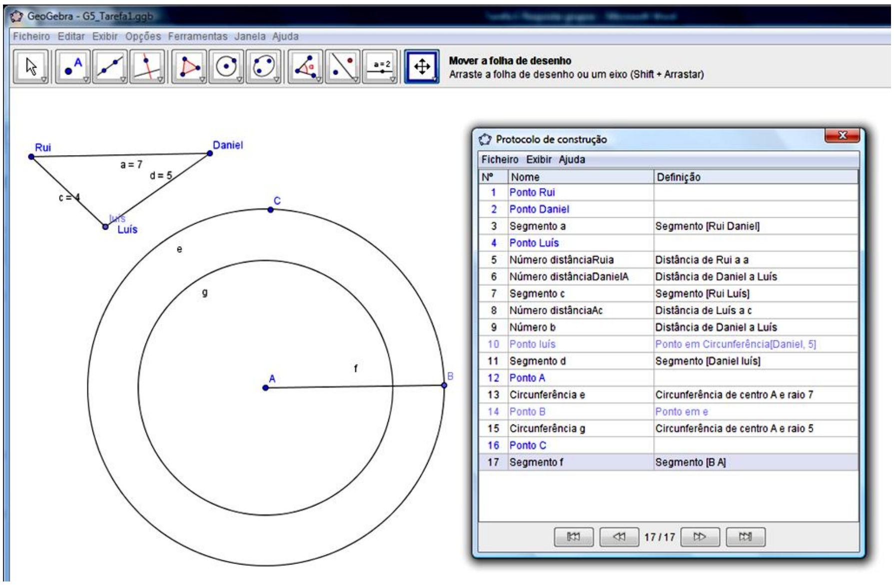



**Figura 11: Resolução do grupo 5 no GeoGebra**

Este grupo também encontrou apenas uma solução para o problema dado.

O grupo 6 fez também uma resolução semelhante. A qual é explicada pelos alunos na figura seguinte.

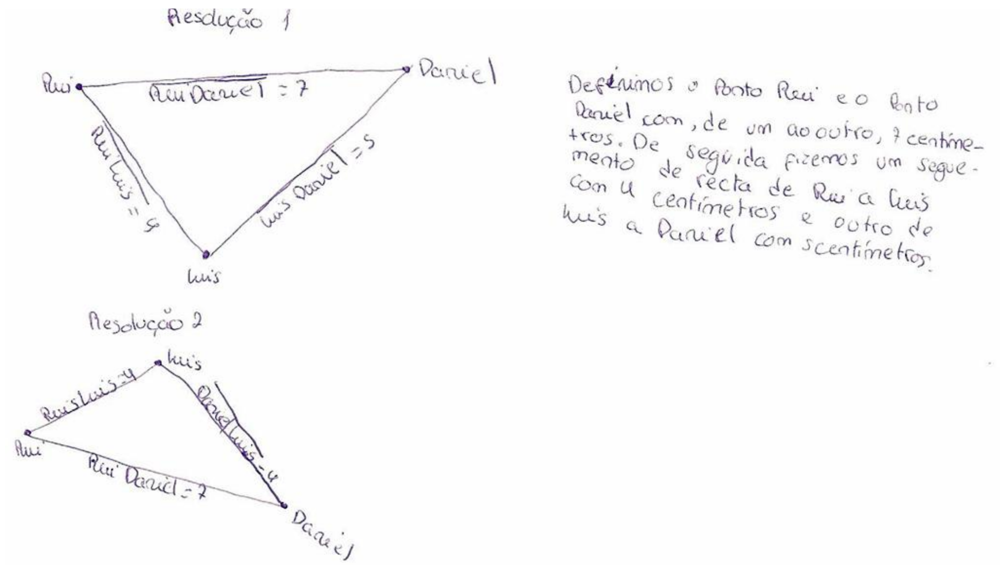



**Figura 12: Resolução descrita pelo grupo 6**

Mais uma vez a resolução descrita pelos alunos não refere o facto de estes terem de mover os pontos de forma a verificarem as condições do problema. Quando questionei os mesmos sobre qual o motivo que os tinha levado a fazer duas resoluções, os alunos explicaram que não eram duas resoluções diferentes, mas sim duas soluções diferentes, uma vez que o Luís poderia estar em dois locais distintos. Este foi o único grupo que conseguiu chegar a esta conclusão. Salienta-se ainda o facto de os alunos terem gravado as duas soluções em ficheiros do GeoGebra separados. As duas resoluções efetuadas no GeoGebra podem-se observar nas figuras abaixo.

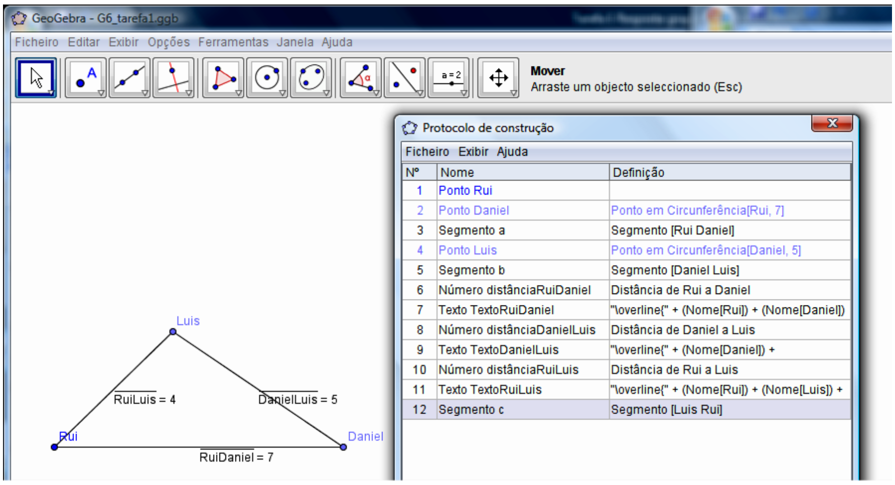



**Figura 13: Resolução 1 do grupo 6 no GeoGebra**

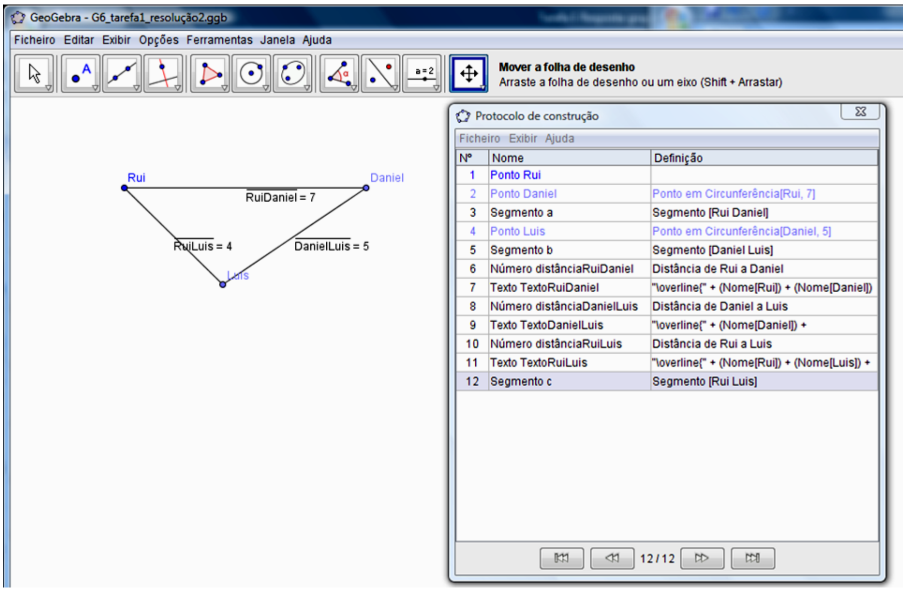



**Figura 14: Resolução 2 do grupo 6 no GeoGebra**

Depois de os alunos terem terminado de resolver o problema, passou-se ao momento da discussão da resolução do mesmo. Durante a discussão solicitei aos vários grupos que apresentassem as suas resoluções aos colegas e explicassem como o fizeram, deixando para último a apresentação da resolução do grupo 6, uma vez que foi o único grupo que conseguiu descobrir os dois locais onde poderia estar o Luís. Durante a apresentação do grupo 3 questionei a turma sobre se o Luís apenas podia estar num único local. A Bárbara (grupo 3) referiu que, olhando para a resolução do grupo dela, o Luís poderia estar em dois locais diferentes, mas ambos sobre a circunferência construída pelo grupo e mostrou, usando o GeoGebra, o outro local onde ela achava que o Luís também se poderia encontrar. A Ana (grupo 4) referiu que o Luís poderia estar sobre qualquer ponto daquela circunferência. Nessa altura a Bárbara (grupo 3) respondeu que isso não estava correto, porque assim, o Rui já não iria ficar a quatro metros do Luís. Toda a turma concordou com a sua resposta. É de salientar que até ao momento da discussão, apenas o grupo 6 tinha concluído que o problema tinha duas soluções.

Após a apresentação dos diferentes grupos, apresentei mais duas possíveis resoluções do problema. Uma das resoluções consistia em marcar inicialmente o ponto correspondente ao Rui e de seguida traçar uma circunferência de centro Rui e raio sete unidades. Depois, marcou-se um ponto sobre essa circunferência a que se chamou Daniel e posteriormente traçou-se uma circunferência com centro em Rui e raio quatro unidades e outra de centro em Daniel e raio cinco unidades. Os locais onde poderia estar o Luís correspondem aos pontos de intersecção destas duas circunferências, tal como se mostra na figura seguinte.

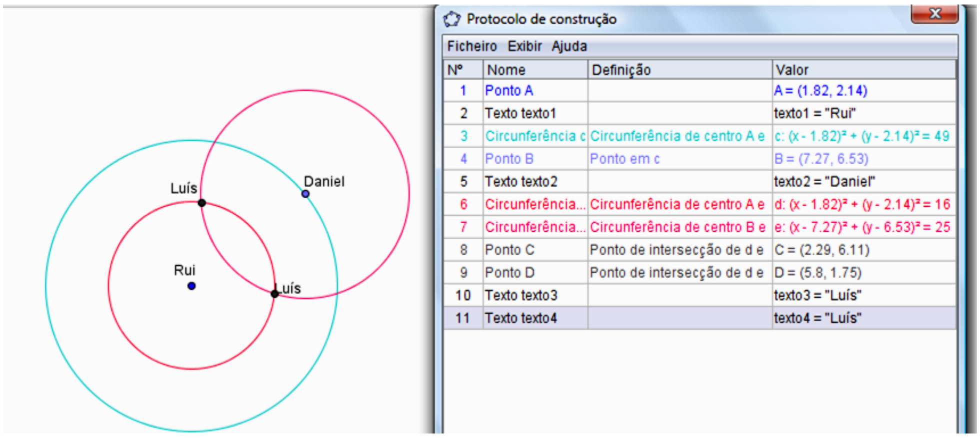



**Figura 15: Resolução 1 com o GeoGebra**

Na outra resolução, também é marcado inicialmente o ponto correspondente ao Rui e de seguida marcou-se o ponto Daniel, que estava a uma distância de sete unidades do Rui. Posteriormente traçaram-se uma circunferência com centro em Rui e raio quatro unidades e outra de centro em Daniel e raio cinco unidades. Os locais onde poderia estar o Luís correspondem aos pontos de intersecção destas duas circunferências, tal como se mostra na figura seguinte.

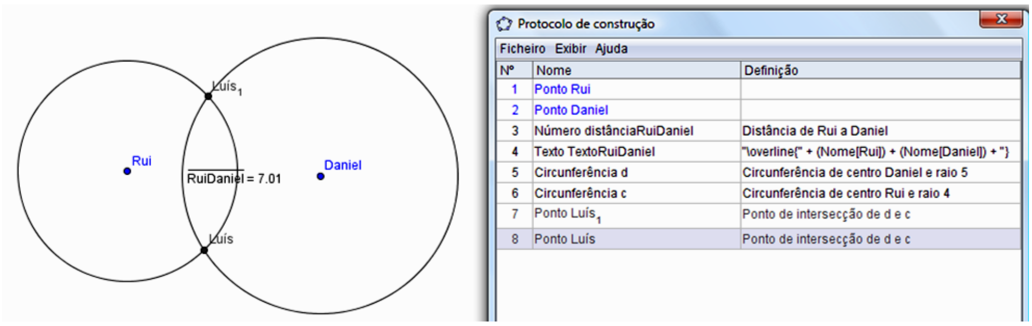



**Figura 16: Resolução 2 com o GeoGebra**

Depois de terem sido apresentadas as resoluções dos vários grupos, onde estavam implícitas as várias estratégias, os alunos consideraram que a mais fácil e eficaz seria a resolução 1 por mim apresentada, uma vez que não teriam de ir por tentativa.

Questionei ainda os alunos sobre se seria possível alterar as condições do problema, para que o Luís pudesse estar apenas num único local, ou seja, que o problema tivesse apenas uma única solução. Os alunos responderam que se teria de aumentar a distância entre o Rui e o Daniel para que o problema tivesse apenas uma solução. A Anaísa (grupo 2) acrescentou que teriam de estar a uma distância de nove metros um do outro. Perguntei então se não haveria outra forma de alterar as condições do problema inicial para que se obtivesse apenas uma solução. Após alguns momentos de silêncio, perguntei o que aconteceria se a distância entre o Rui e o Daniel diminuísse. Metade dos alunos responderam que tinham mais soluções e a outra metade afirmou que continuavam a ter duas soluções, não tendo nenhum aluno conseguido chegar à conclusão que com uma distância de um metro entre os dois amigos, o problema apenas teria uma solução. Com o auxílio do GeoGebra movi um dos pontos de forma a que a distância entre o Rui e o Daniel fosse de uma unidade e só assim os alunos responderam que o Luís só poderia estar num local. De seguida questionei a turma sobre se, alterando os dados, o problema seria sempre possível, tendo os alunos respondido que não, bastava aumentar a distância entre o Rui e o Daniel, para um valor superior a nove metros, mantendo os restantes dados, para que o problema não tivesse nenhuma solução.

De seguida apresenta-se a análise da caracterização das resoluções efetuadas pelos alunos e das estratégias de resolução utilizadas pelos mesmos, para resolver o problema proposto na presente tarefa.

| | | | G1 | G2 | G3 | G4 | G5 | G6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Caracterização das resoluções** | Adequação | Sim | X | X | X | NC | X | X |
| | | Não | | | | | | |
| | Rigor | Sim | | | X | X | X | X |
| | | Não | X | X | | | | |
| | Robustez | Sim | | | | | | |
| | | Não | X | X | X | X | X | X |

**Tabela 3: Caracterização das resoluções relativas à tarefa 1**

Observando a tabela 3, pode-se verificar que apenas o grupo 4 não conseguiu concluir o problema, pelo que é o único grupo cuja sua resolução não é adequada, ou seja, não exprime corretamente o problema. Analisando agora a linha relativamente ao rigor, verifica-se que as resoluções apresentadas pelos grupos 1 e 2 não permitem uma resposta rigorosa, ao contrário dos restantes grupos. É de salientar o facto de que, apesar do grupo 4 não ter concluído a sua resolução, a mesma permitia uma resposta rigorosa. Por fim, relativamente à robustez, nenhum dos grupos conseguiu fazer uma construção robusta, uma vez que manipulando qualquer um dos objetos livres, a construção não mantém as suas propriedades.

Na tabela seguinte, pode-se observar as estratégias de resolução utilizadas pelos diferentes grupos.

| | | G1 | G2 | G3 | G4 | G5 | G6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Estratégias de resolução** | Descobrir um padrão, uma regra ou lei de formação | | | | | | |
| | Fazer tentativas/ Fazer conjeturas | X | X | X | X | X | X |
| | Trabalhar do fim para o princípio | | | | | | |
| | Usar dedução lógica ou fazer eliminação | | | | | | |
| | Reduzir a um problema mais simples | | | | | | |
| | Fazer uma simulação ou uma experimentação | | | | | | |
| | Fazer um diagrama ou esquema | X | X | X | X | X | X |
| | Fazer uma lista organizada ou uma tabela | | | | | | |

**Tabela 4: Estratégias de resolução utilizadas na tarefa 1**

Analisando a tabela 4, relativa às estratégias de resolução utilizadas pelos diferentes grupos na resolução do problema da tarefa 1, pode-se observar que todos os grupos optaram por *Fazer um diagrama ou esquema* e ao mesmo tempo *Fazer tentativas/Fazer conjeturas*.

Os alunos para além de resolverem o problema e explicar a sua estratégia tinham ainda de formular um outro problema inspirado no que tinham terminado de resolver. Os grupos 1 e 2 pegaram no problema inicial e limitaram-se a alterar as distâncias entre os três amigos. O grupo 3, em vez de referir os três amigos, usou três elefantes e alterou as distâncias relativamente ao problema inicialmente dado. Os grupos 4 e 5 optaram por formular um problema com um único animal, preso a um ponto fixo com uma trela, que quer apanhar um objeto que está a uma determinada distância. O grupo 6 formulou um problema bastante diferente do inicialmente proposto, que pode ser resolvido sem o auxílio do GeoGebra. Em seguida apresentam-se os problemas formulados por cada um dos grupos.

Três amigos estão a brincar às escondidas no pátio da escola. O Rui tem de descobrir o Luís. Sabe que o Daniel está a 10 metros de si. O Luís está a 3 metros do Daniel e a 7 metros de si. Onde está o Luís?

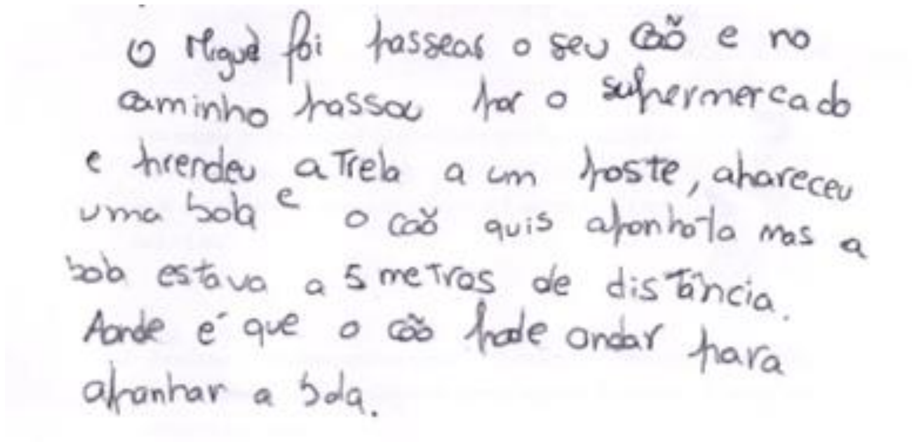
**Figura 17: Problema formulado pelo grupo 1**

Três amigos estão a brincar às escondidas no pátio da escola, A Joaquina tem de descobrir o Gonçalo. Sabe que a Teresa está a 3 metros de si. O Gonçalo está a 2 metros da Teresa e a 3 metros de si. Onde está o Gonçalo?

**Figura 18: Problemas formulado pelo grupo 2**

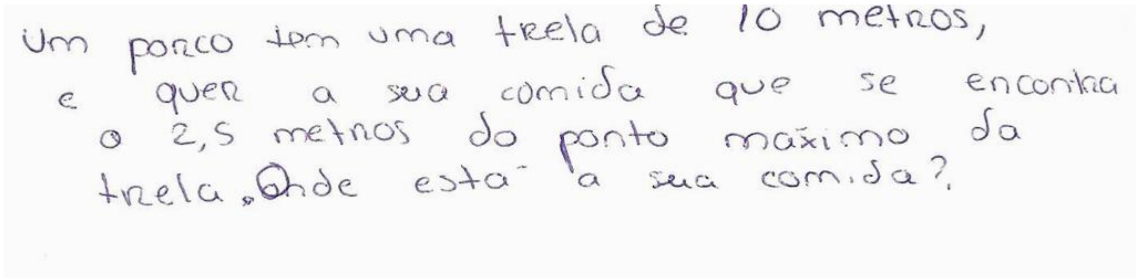
3 elefantes estão perdidos na selva. O Jumbo tem de descobrir a sua mãe. Sabe que o seu irmão Larry está a 10 metros de si. A sua mãe está a 8 metros do Larry e a 5 metros de si. Onde está a mãe?

**Figura 19: Problema formulado pelo grupo 3**



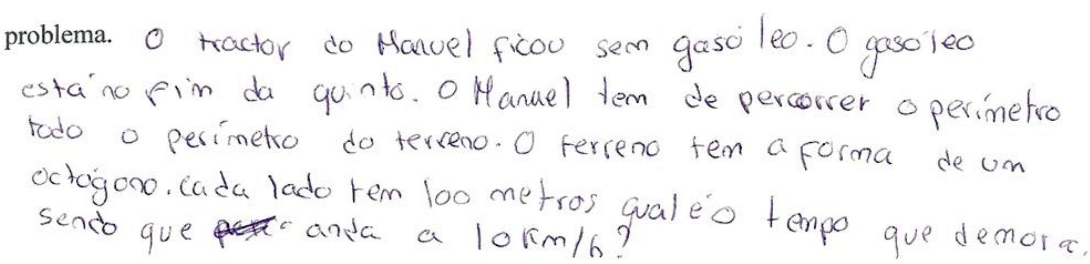
O Miguel foi passear o seu cão e no
caminho passou por o supermercado
e prendeu a trela a um poste, apareceu
uma bola e o cão quis apanhá-la mas a
bola estava a 5 metros de distância.
Aonde é que o cão hade andar para
apanhar a bola.

**Figura 20: Problema formulado pelo grupo 4**



Um porco tem uma trela de 10 metros,
e quer a sua comida que se encontra
a 2,5 metros do ponto máximo da
trela. Onde está a sua comida?

**Figura 21: Problema formulado pelo grupo 5**



problema. O tractor do Manuel ficou sem gasóleo. O gasóleo
está no fim da quinta. O Manuel tem de percorrer o perímetro
todo o perímetro do terreno. O terreno tem a forma de um
octógono. Cada lado tem 100 metros Qual é o tempo que demora,
sendo que ~~...~~ anda a 10km/h?

**Figura 22: Problema formulado pelo grupo 6**

Na tabela seguinte apresenta-se a análise referente aos problemas formulados pelos alunos.

<table>
<tr><th></th><th></th><th></th><th>G1</th><th>G2</th><th>G3</th><th>G4</th><th>G5</th><th>G6</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Formulação de problemas</td><td rowspan="3">Variação do problema dado</td><td>Variar os dados</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td></td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Variar as condições</td><td></td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Variar o contexto</td><td></td><td></td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Problema Novo</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>X</td></tr>
</table>

**Tabela 5: Formulação de problemas (Tarefa 1)**

Ao analisar a tabela 5 referente à formulação de problemas efetuada pelos alunos, pode--se verificar que os grupos 1 e 2 optaram por alterar os dados do problema inicial. Os grupos 3 e 5 optaram por alterar o contexto e os dados do problema inicial. O grupo 4 fez variar o contexto e as condições do problema inicial. Apenas o grupo 6, formulou um problema que nada tinha a ver com o problema inicialmente proposto, tendo apresentado criatividade no mesmo.

É de salientar que a turma se mostrou empenhada durante a aula, mas muito nervosos por quererem resolver de forma correta e o mais rápido possível o problema proposto. Notou-se durante o decorrer da aula a tensão existente entre alguns grupos, por não estarem a conseguir chegar à solução do problema. Nessa altura a professora tentou acalmar os grupos explicando que quanto mais nervosos estivessem maior dificuldade teriam em se concentrar e aplicar a estratégia definida pelo grupo para chegar à solução do problema.

## Tarefa 2: As jogadoras de basquete

Na segunda tarefa (ANEXO II) os alunos tinham de descobrir a que distância estavam três jogadoras de basquete, sabendo que estavam todas à mesma distância umas das outras e que respeitavam os dados do enunciado.

Durante a resolução do problema, o grupo 4, chamou-me para perguntar se podiam marcar os pontos correspondentes às três amigas em qualquer local e depois movê-los. Respondi que eles podiam resolver o problema da forma que considerassem mais fácil. Pouco tempo depois, o mesmo grupo perguntou se as atletas tinham de estar todas à mesma distância do centro, evidenciando que não tinham feito uma correta interpretação dos dados do problema. Foi-lhes então solicitado que lessem novamente o problema. Depois de nova leitura responderam: "Ah! Têm é de estar à mesma distância umas das outras!".

Cerca de oito minutos depois de os alunos terem iniciado a resolução do problema, o grupo 6, chamou-me para dizer que já tinha terminado.

> **Grupo 6:** Conseguimos! Professora venha cá ver!
> **Professora:** Sim, a vossa resolução respeita os dados do problema, mas eu quero que me expliquem como chegaram a esta solução.
> **Grupo 6:** Podemos tentar resolver o problema de outra forma e depois explicamos na folha de resposta a estratégia utilizada?

**Professora:** Claro que sim! Mas quero que me gravem todas as vossas resoluções.

O grupo 2 também me chamou logo de seguida, para dizer que já tinha conseguido resolver o problema, mas quando fui analisar a resolução dos alunos, verifiquei que uma das atletas não satisfazia os dados do problema. O grupo 3 também ia afirmando que apenas conseguia colocar duas das atletas à mesma distância.

O grupo 6 voltou a fazer uma outra resolução, apenas colocando as jogadoras em locais diferentes. Pedi-lhes então que resolvessem o problema mas utilizando uma estratégia diferente. No final este grupo conseguiu apresentar três resoluções para este problema, mas apenas escreveu uma das resoluções na folha de resposta.

Apresenta-se de seguida as resoluções apresentadas pelos diferentes grupos. É de salientar que apenas o grupo 4 não conseguiu chegar à solução do problema.

O grupo 1 começou por marcar um ponto correspondente ao centro do campo e de seguida construíram três circunferências com centro no ponto inicialmente definido e raio com três, cinco e oito unidades de comprimento, respetivamente. Posteriormente marcaram um ponto sobre cada uma das circunferências definidas, que correspondia a cada uma das jogadoras e foram determinar a distância entre cada uma delas, tal como é descrito por este grupo na figura abaixo.

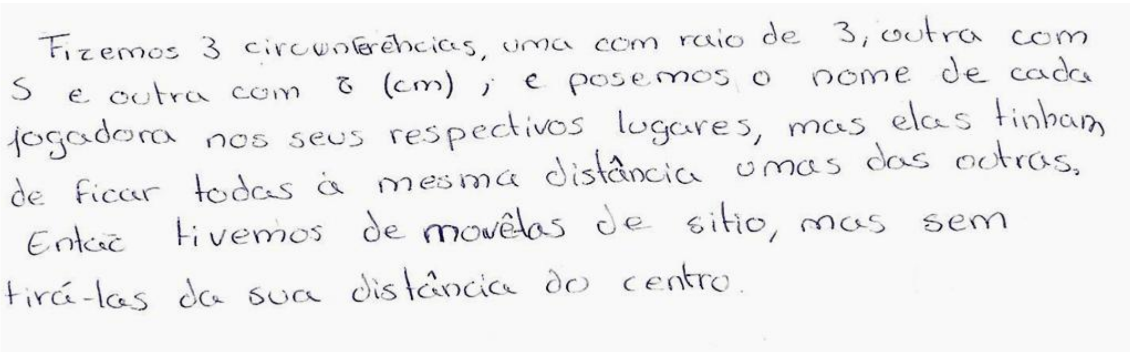

Fizemos 3 circunferências, uma com raio de 3, outra com 5 e outra com 8 (cm) ; e posemos o nome de cada jogadora nos seus respectivos lugares, mas elas tinham de ficar todas à mesma distância umas das outras. Então tivemos de movê-las de sitio, mas sem tirá-las da sua distância do centro.

**Figura 23: Resolução apresentada pelo grupo 1**

Este grupo não escreveu qual era a distância entre as três jogadoras, mas através do ficheiro do GeoGebra gravado pelo grupo, verifica-se que conseguiram concluir que as três tinham de estar a sete metros de distância umas das outras, tal como se pode comprovar pela imagem a seguir apresentada.

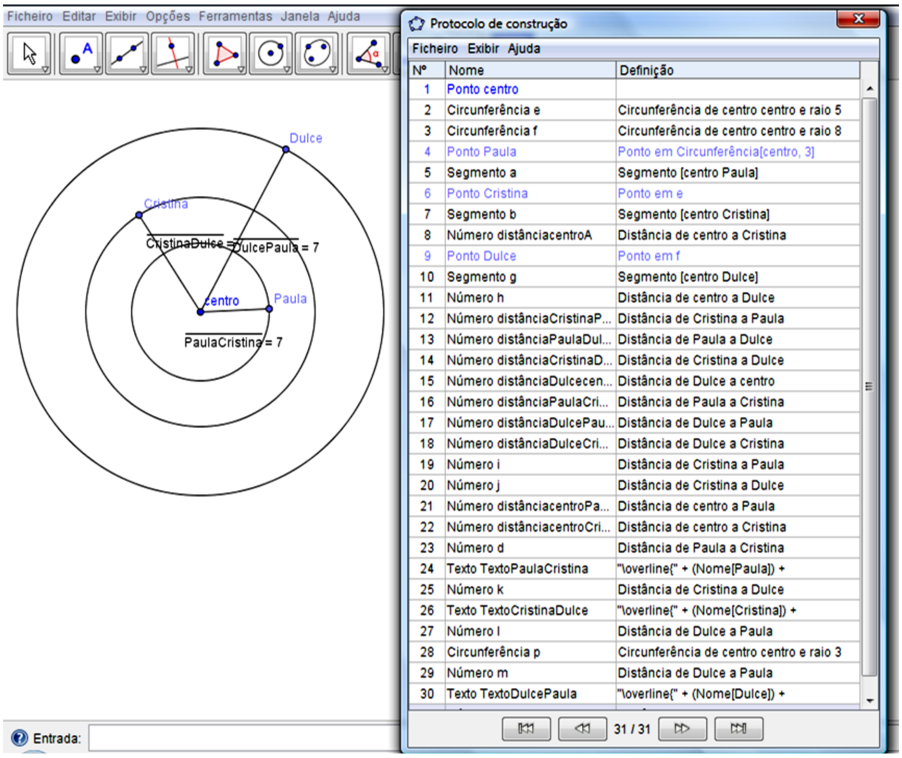



**Figura 24: Resolução do grupo 1 com o GeoGebra**

O grupo 2, tal como tinha acontecido com o grupo 1, começou por definir o centro do campo e de seguida construiu as três circunferências, com três, cinco e oito unidades de raio, respetivamente. Este grupo, a meio da sua resolução, achou que não estava a utilizar uma estratégia adequada e decidiram fazer um esboço na sua folha e só depois continuaram a estratégia inicialmente delineada. Assim, depois de terem construído as três circunferências, e como as três jogadoras tinham de estar à mesma distância, construíram um triângulo equilátero tendo como medida dos lados, a distância entre a Dulce e a Paula, tal como se pode verificar na figura seguinte.

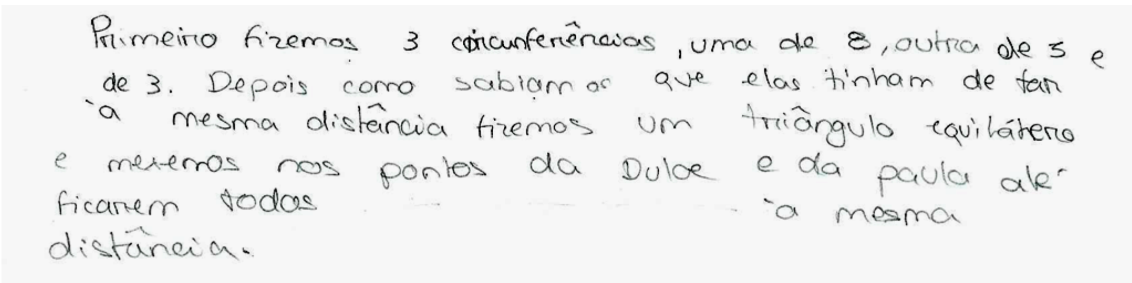

Primeiro fizemos 3 circunferências, uma de 8, outra de 5 e de 3. Depois como sabiam os que elas tinham de ficar à mesma distância fizemos um triângulo equilátero e metemos nos pontos da Dulce e da paula até ficarem todas à mesma distância.

**Figura 25:Resolução apresentada pelo grupo 2**

Apesar de este grupo não ter referido na sua resolução, qual a distância a que estavam as três jogadoras pode-se verificar, através do ficheiro do GeoGebra gravado por este grupo, que elas estariam a sete metros de distância.

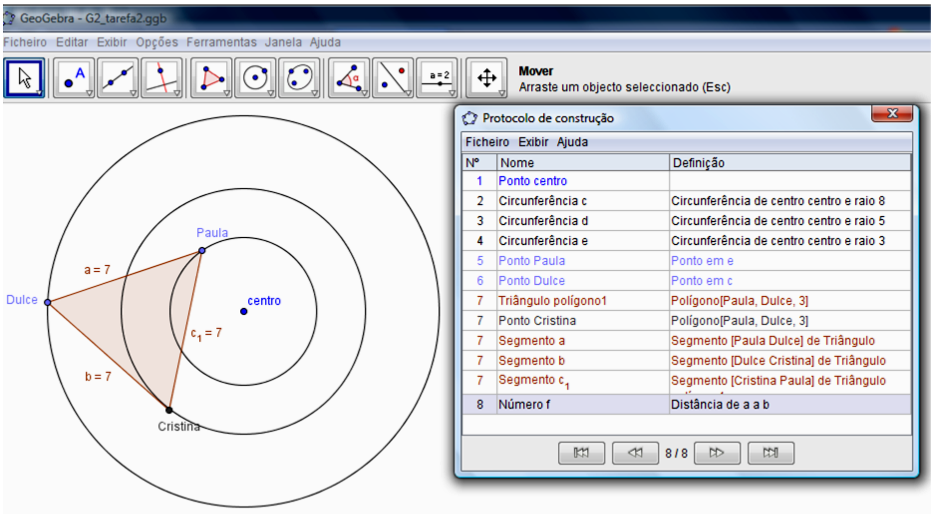



**Figura 26: Resolução do grupo 2 no GeoGebra**

O grupo 3 conseguiu resolver o problema, mas não foi capaz de explicar toda a sua resolução, uma vez que, observando o que foi descrito por ele, fica-se com a ideia de que a resolução partiu da marcação de um ponto correspondente ao centro do campo, tendo-se de seguida marcado os pontos correspondentes a cada uma das jogadoras e foi-se movendo esses pontos até estarem de acordo com as condições do problema. Depois verifica-se que o grupo construiu duas circunferências, mas não explicou porque as teve de construir nem qual o centro de cada uma delas. Apresenta-se de seguida a resolução descrita pelo grupo.

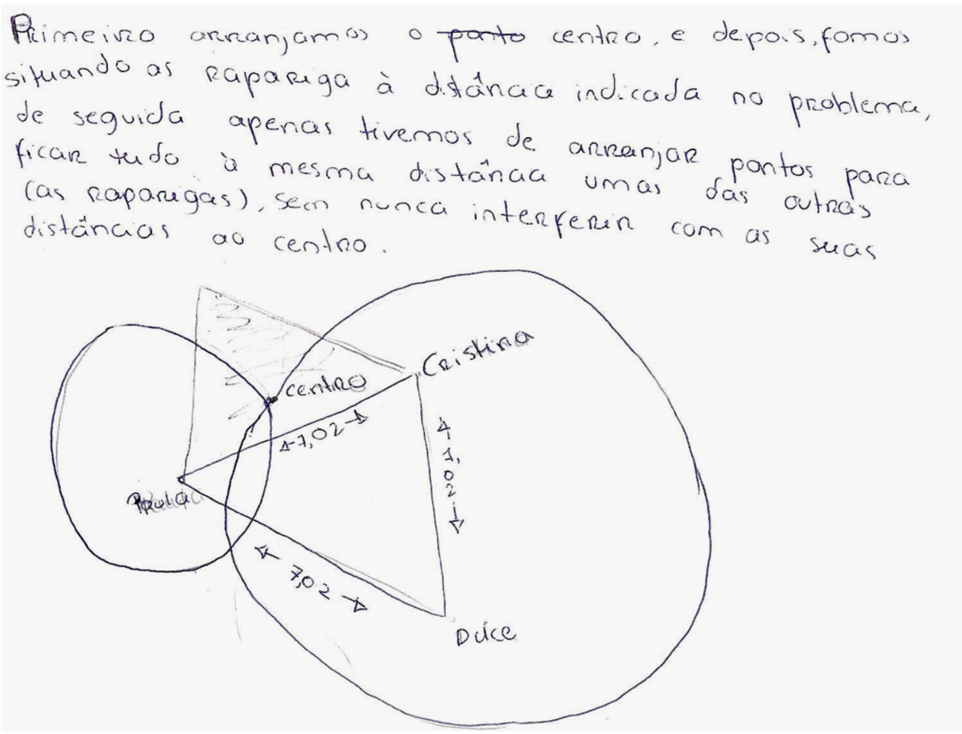



**Figura 27: Resolução apresentada pelo grupo 3**

Após a visualização do ficheiro do GeoGebra, onde foi gravada a resolução deste grupo, verifica-se que o grupo inicialmente marcou o ponto correspondente à localização da Paula. De seguida construiu uma circunferência com centro no ponto Paula e raio com três unidades de comprimento, de forma a encontrar um ponto correspondente ao centro do campo. Depois de marcarem o centro do campo, construíram um segmento de reta definido por um ponto (centro) e com cinco unidades de comprimento, de forma a encontrar o local onde poderia estar a Cristina. De seguida, apagaram o segmento de reta, deixando apenas visível os dois extremos desse segmento de reta (ponto centro e ponto Cristina), tendo posteriormente construído a circunferência de centro no ponto Cristina e com cinco unidades de raio. Seguidamente, os alunos foram encontrar o local onde estaria a Dulce, utilizando o mesmo processo descrito anteriormente. Depois de marcados os pontos correspondentes às três atletas, foram determinar a distância entre cada uma delas, e definir os segmentos de reta [DulceCristina], [PaulaCristina] e [CristinaPaula]. De seguida construíram um triângulo equilátero, tomando para medida do comprimento dos lados do triângulo, a distância entre a Cristina e a Paula, tendo renomeado cada segmento de reta correspondente a cada um dos lados do triângulo. Através do protocolo de construção que a seguir se apresenta, não se percebe o motivo que levou este grupo a construir o triângulo equilátero.

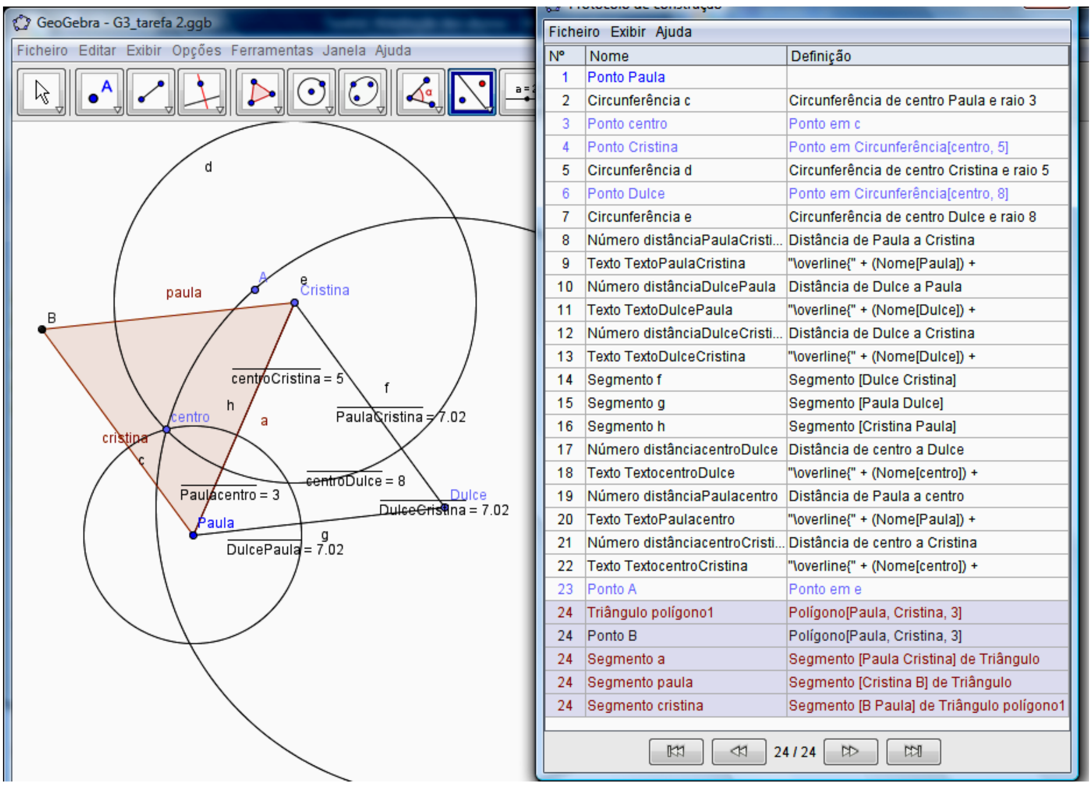



**Figura 28: Resolução do grupo 3 no GeoGebra**

Durante a apresentação à turma da resolução feita por este grupo, eles explicaram que tiveram de construir o triângulo equilátero porque movendo os pontos correspondentes à Cristina, Dulce e Paula, não estavam a conseguir colocá-las todas à mesma distância. Daí terem posteriormente construído o triângulo para facilitar a resolução do problema. O grupo conseguiu concluir que as três jogadoras estavam a sete metros de distância umas das outras.

O Grupo 4 começou por marcar um ponto correspondente ao centro do campo (ponto A) e de seguida construiu três circunferências, todas com centro no ponto A e raio com três, cinco e oito unidades de comprimento respetivamente. Depois foram marcar, em cada uma das circunferências, um ponto correspondente a cada uma das jogadoras, não tendo, ao contrário dos restantes grupos, renomeado esses pontos. De seguida construiu um polígono definido por esses três pontos e foi movendo os pontos até conseguirem colocar os três pontos à mesma distância. Apesar de o grupo ter iniciado a resolução do problema, não a conseguiram concluir, tal como se pode verificar na figura seguinte.

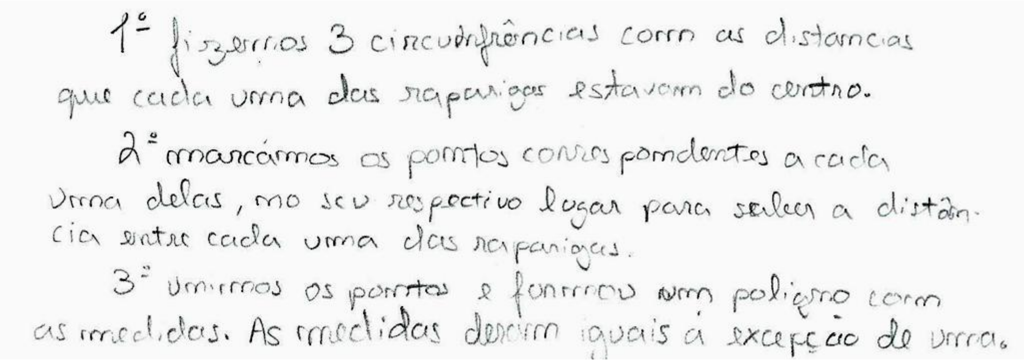
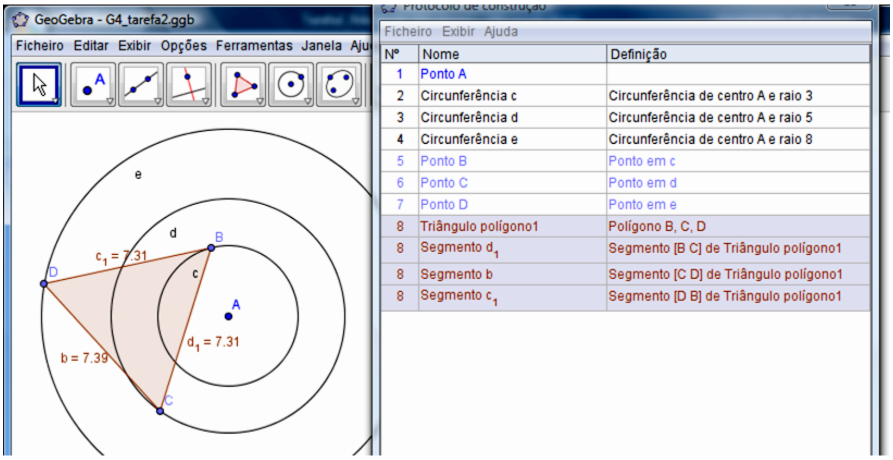

1º fizemos 3 circunferências com as distancias que cada uma das raparigas estavam do centro.
2º marcámos os pontos correspondentes a cada uma delas, no seu respectivo lugar para saber a distân-cia entre cada uma das raparigas.
3º unimos os pontos e formou um polígono com as medidas. As medidas deviam iguais à excepção de uma.

**Figura 29: Resolução apresentada pelo grupo 4**

De seguida apresenta-se o protocolo de construção utilizado no GeoGebra por este grupo.




| Nº | Nome | Definição |
|---|---|---|
| 1 | Ponto A | |
| 2 | Circunferência c | Circunferência de centro A e raio 3 |
| 3 | Circunferência d | Circunferência de centro A e raio 5 |
| 4 | Circunferência e | Circunferência de centro A e raio 8 |
| 5 | Ponto B | Ponto em c |
| 6 | Ponto C | Ponto em d |
| 7 | Ponto D | Ponto em e |
| 8 | Triângulo polígono1 | Polígono B, C, D |
| 8 | Segmento $d_1$ | Segmento [B C] de Triângulo polígono1 |
| 8 | Segmento b | Segmento [C D] de Triângulo polígono1 |
| 8 | Segmento $c_1$ | Segmento [D B] de Triângulo polígono1 |

**Figura 30: Resolução do grupo 4 no GeoGebra**

É de salientar que o grupo 4 foi um dos grupos que apresentou, tanto na resolução da primeira tarefa como na resolução da segunda tarefa, maior dificuldade em trabalhar em grupo e em resolver os problemas propostos.

O grupo 5 conseguiu descrever corretamente a sua resolução, faltando apenas referir que teve de mover os pontos correspondentes à Paula, Cristina e Dulce, de forma a ficarem todas à mesma distância. A seguir pode-se observar a resolução descrita por este grupo e a sua resolução utilizando o GeoGebra.

A nossa resolução começou por marcámos o ponto centro, e fazer
uma circunferência de raio 3, em seguida, fizemos novamente
uma circunferência mas desta vez com raio de 5, em seguida
marcámos a ultima circunferência com raio 8.
Concluímos a nossa tarefa encontrando a distância comum
entre os 3 pontos (as 3 raparigas), vimos que a distância
comum entre elas foi de 7,03.

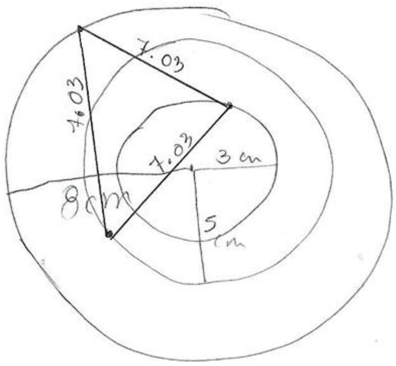



**Figura 31: Resolução apresentada pelo grupo 5**

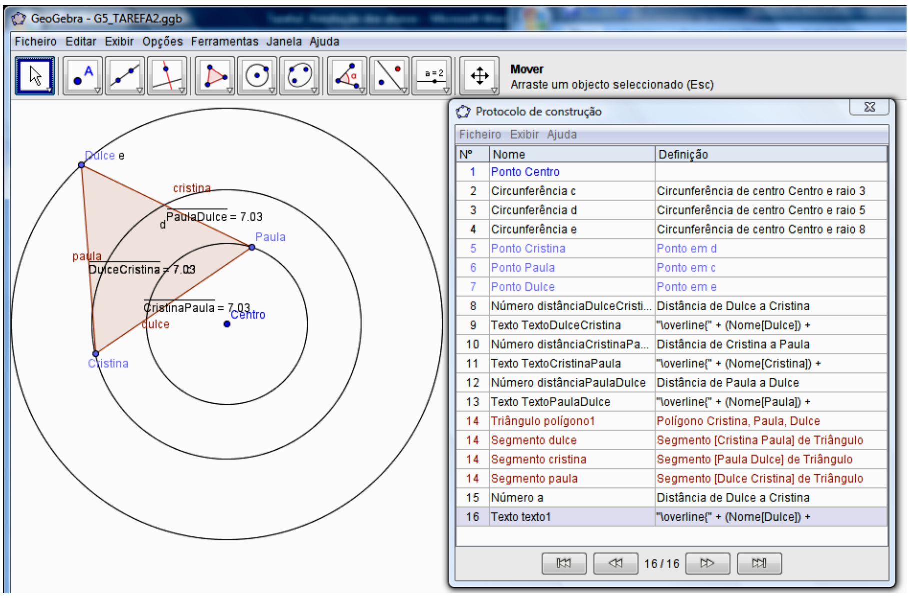



**Figura 32: Resolução do grupo 5 no GeoGebra**

Tal como tinha sido referido anteriormente, o grupo 6 apresentou três resoluções diferentes, sendo que duas delas são muito semelhantes. Assim, nas duas primeiras resoluções, os alunos começaram por definir o ponto onde estaria o centro do campo, de seguida traçaram a circunferência de centro no ponto correspondente ao centro do campo e com oito unidades de raio e marcaram um ponto sobre essa circunferência a que deram o nome de Dulce. Depois traçaram um segmento de reta definido pelos pontos Centro e Dulce e determinaram o comprimento desse segmento de reta. De seguida foram construir dois segmentos de reta, ambos com início no ponto Centro e um com três unidades de comprimento e outro com cinco unidades, respetivamente, tendo assim obtido a localização da Paula e da Cristina. Depois foram unir os pontos Paula e Cristina, Cristina e Dulce e por fim Paula e Dulce e calcular os comprimentos de cada um dos segmentos de reta definidos. Por fim, moveram alguns dos pontos definidos, até encontrar a solução do problema. As duas primeiras resoluções são apresentadas nas figuras seguintes.

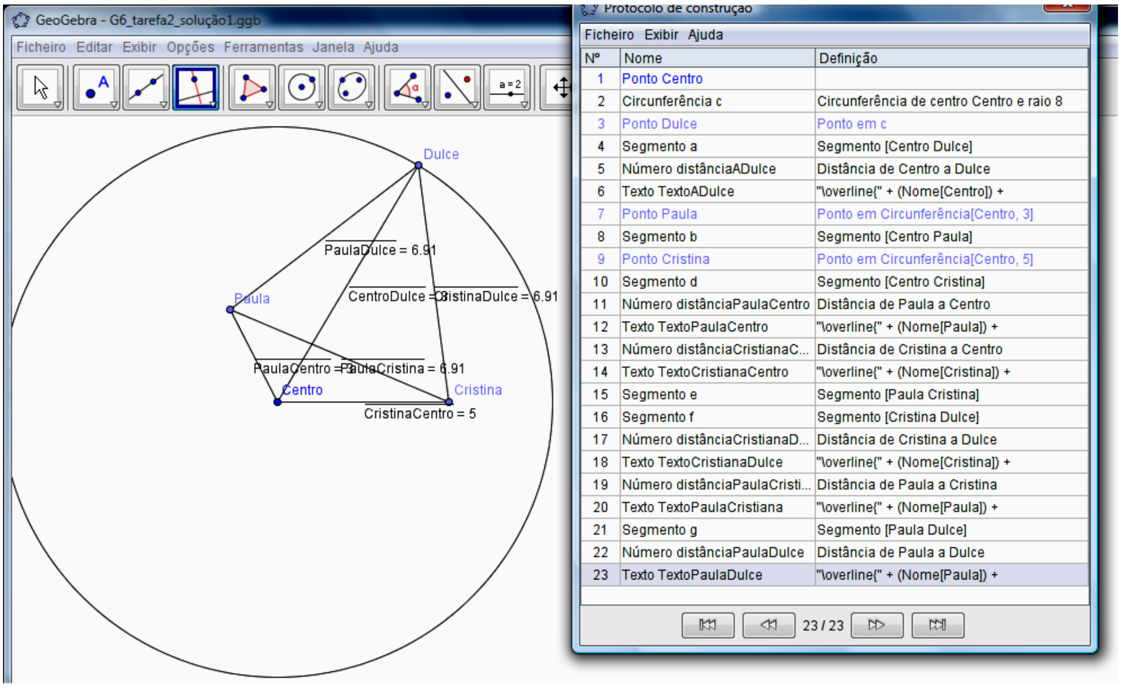


**Figura 33: Resolução 1 do grupo 6 no GeoGebra**

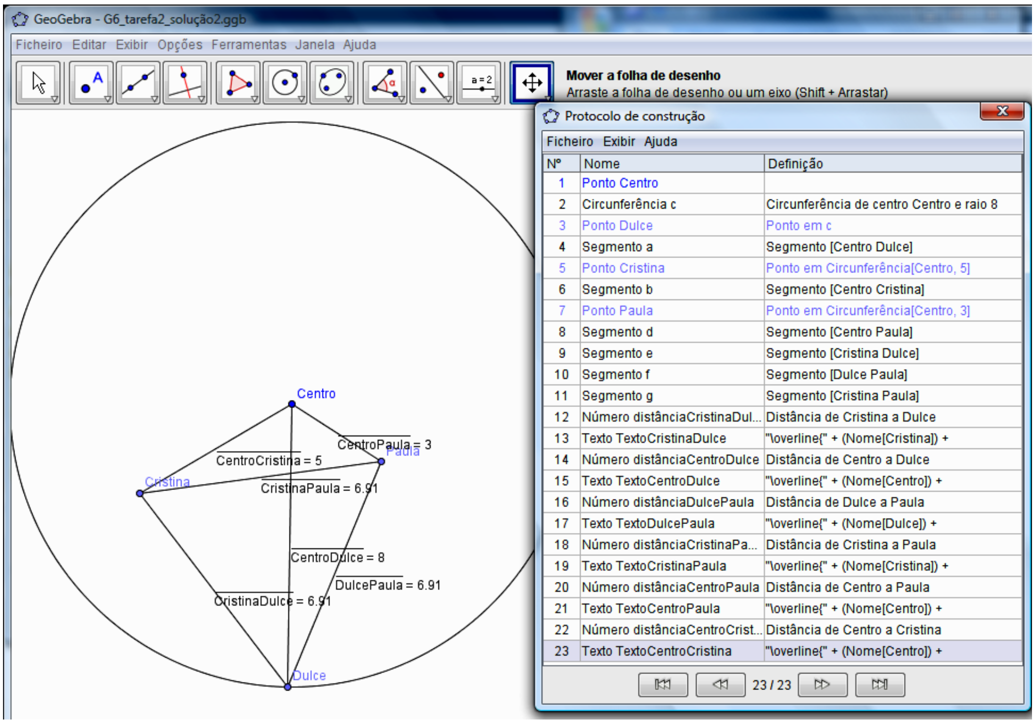



**Figura 34:Resolução 2 do grupo 6 no GeoGebra**

A terceira resolução apresentada por este grupo encontra-se descrita nas figuras seguintes.

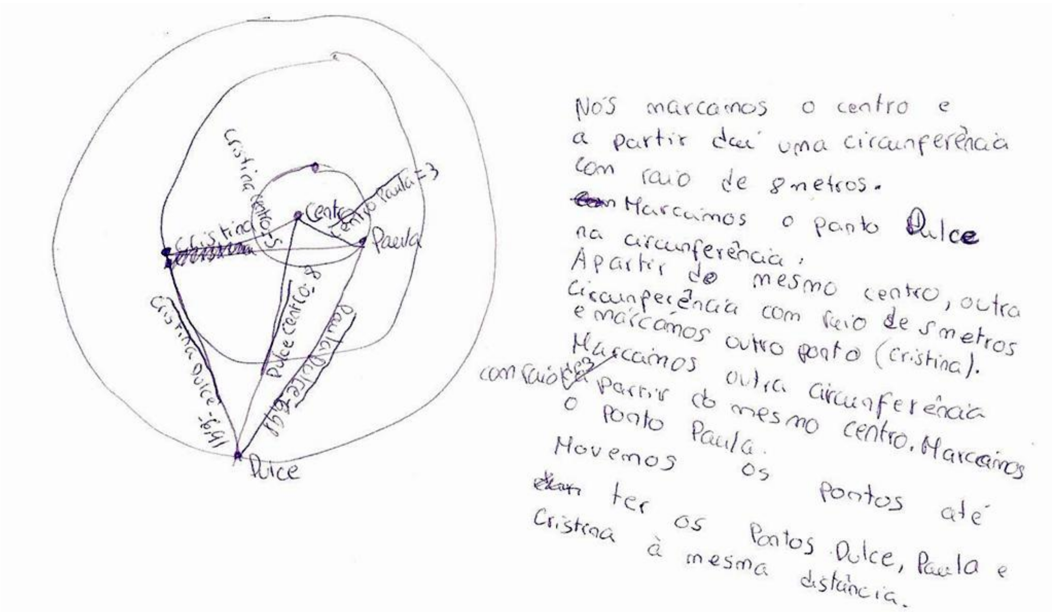



**Figura 35: Resolução apresentada pelo grupo 6**

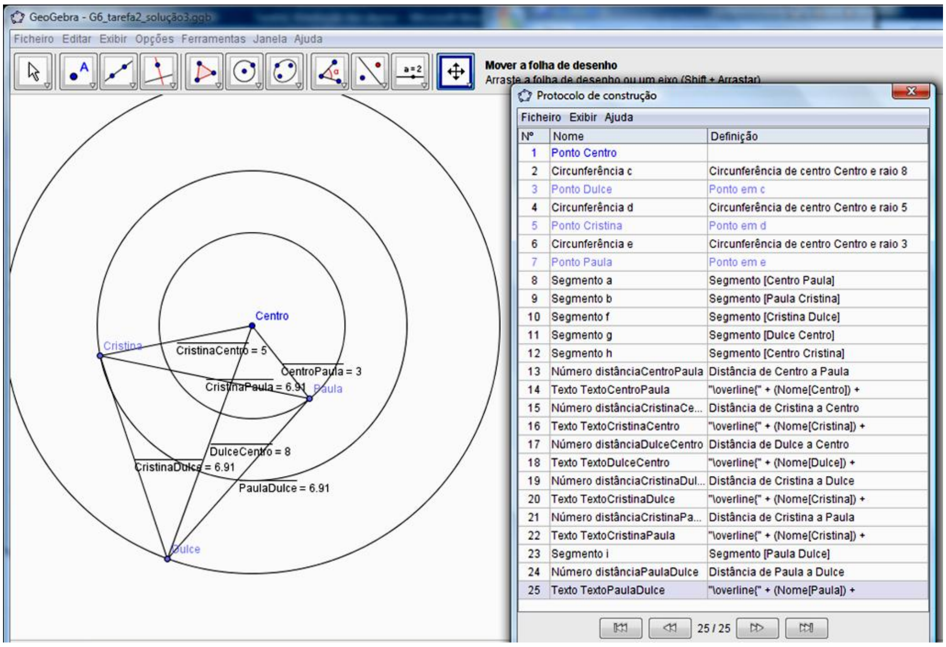



**Figura 36: Resolução 3 do grupo 6 no GeoGebra**

Depois de todos os grupos terem apresentado a sua resolução, a maioria dos alunos da turma consideraram que a resolução mais eficiente e rápida de chegar à solução do problema era a resolução apresentada pelo grupo 2, que utilizou o triângulo equilátero para descobrir onde estavam as três amigas.

De seguida apresenta-se a análise da caracterização das resoluções efetuadas pelos alunos e das estratégias utilizadas pelos mesmos, para resolver o problema proposto na presente tarefa.

| | | | G1 | G2 | G3 | G4 | G5 | G6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Caracterização das resoluções** | Adequação | Sim | X | X | X | NC | X | X |
| | | Não | | | | | | |
| | Rigor | Sim | X | X | X | X | X | X |
| | | Não | | | | | | |
| | Robustez | Sim | | X | | | | |
| | | Não | X | | X | X | X | X |

**Tabela 6: Caracterização das resoluções relativas à tarefa 2**

Observando a tabela 6, pode-se verificar que o grupo 4 não conseguiu concluir o problema, pelo que é o único grupo cuja sua resolução não é adequada, tal como já tinha acontecido no problema da tarefa 1. Analisando agora as resoluções quanto ao rigor, verifica-se que todas as resoluções apresentadas pelos grupos diferentes grupos permitem uma resposta rigorosa. Mais uma vez se salienta o facto de que, apesar do grupo 4 não ter concluído a sua resolução, a mesma permitia uma resposta rigorosa. Por fim, relativamente à robustez, apenas o grupo 2 conseguiu uma construção robusta, pois manipulando um dos objetos livres, a construção mantém as suas propriedades, o que não acontece nos restantes grupos.

Na tabela seguinte, pode-se observar as estratégias de resolução utilizadas pelos diferentes grupos.

| | | G1 | G2 | G3 | G4 | G5 | G6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Estratégias de resolução** | Descobrir um padrão, uma regra ou lei de formação | | | | | | |
| | Fazer tentativas/ Fazer conjeturas | X | | | X | X | X |
| | Trabalhar do fim para o princípio | | | | | | |
| | Usar dedução lógica ou fazer eliminação | | | | | | |
| | Reduzir a um problema mais simples | | | | | | |
| | Fazer uma simulação ou uma experimentação | | X | X | | | |
| | Fazer um diagrama ou esquema | X | X | X | X | X | X |
| | Fazer uma lista organizada ou uma tabela | | | | | | |

**Tabela 7: Estratégias de resolução utilizadas na tarefa 2**

Analisando a tabela 7, relativa às estratégias de resolução utilizadas pelos diferentes grupos na resolução do problema da tarefa 2, pode-se observar que a maioria dos grupos optou por *Fazer um diagrama ou esquema* e ao mesmo tempo *Fazer tentativas/Fazer conjeturas*. Em relação ao grupo 2 e 3, pode-se verificar que as estratégias utilizadas foram *Fazer uma simulação ou uma experimentação* e *Fazer um diagrama ou esquema*.

Em relação à formulação de novos problemas, todos os grupos pegaram no problema inicial e fizeram-lhe pequenas alterações como se pode constatar nas imagens a seguir apresentadas.

A Paula está a 5 m de distância do centro do campo, a Cristina está a 9 e a Dulce está a 13.
As distancias entre elas são absolutamente iguais.
Qual é essa distancia?

**Figura 37: Problema formulado pelo grupo 1**

Três jogadoras estão num campo de basquete. A Vanda está a 6 metros do centro do campo, a Liliana a 3 e a Bela a 10. As distâncias entre elas são iguais.
Qual é essa distância?

**Figura 38: Problema formulado pelo grupo 2**

3 amigos estão numa festa, todos ao mesmo comprimento (8 m). Neste momento, estão a jogar um jogo em que o objectivo é apanhar um ramo de flores que está a 5,5 m de um dos amigos. A que distância está dos outros amigos? E onde está o ramo?

**Figura 39: Problema formulado pelo grupo 3**

Num jogo de futebol, o Ronaldo estava a 10 metros do meio campo, o Rolando estava a 15, e o Elizeu estava a 30 metros.
As distâncias entre eles são exactamente iguais
Qual é a distância?.

**Figura 40: Problema formulado pelo grupo 4**

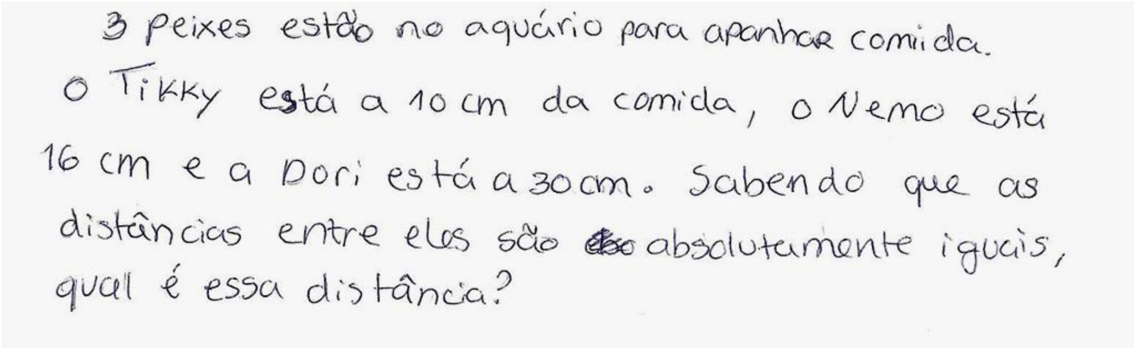

3 peixes estão no aquário para apanhar comida.
O Tikky está a 10 cm da comida, o Nemo está 16 cm e a Dori está a 30 cm. Sabendo que as distâncias entre elos são ~~as~~ absolutamente iguais, qual é essa distância?

**Figura 41: Problema formulado pelo grupo 5**

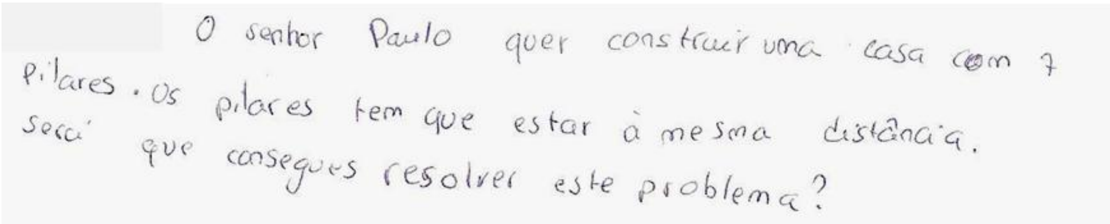

O senhor Paulo quer construir uma casa com 7 pilares. Os pilares tem que estar à mesma distância. Será que consegues resolver este problema?

**Figura 42: Problema formulado pelo grupo 6**

O grupo 1, depois de ter formulado o problema tentou resolvê-lo, mas sem êxito concluindo que o problema era impossível. Aquando da apresentação dos vários problemas formulados pelos grupos, perguntei à restante turma se o problema do grupo 1 seria impossível. Os alunos ficaram um pouco a pensar e depois responderam que deveria ser possível, bastando para isso aplicar a estratégia utilizada pelo grupo 2, o que se veio a verificar depois. A Margarida (grupo 5) afirmou que, independentemente da distância das três amigas ao centro, seria sempre possível encontrar um local em que todas estivessem à mesma distância, utilizando para isso o triângulo equilátero.

Na tabela seguinte apresenta-se a análise referente aos problemas formulados pelos alunos.

<table>
<tr><td colspan="3"></td><td>G1</td><td>G2</td><td>G3</td><td>G4</td><td>G5</td><td>G6</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Formulação de problemas</td><td rowspan="3">Variação do problema dado</td><td>Variar os dados</td><td>X</td><td>X</td><td></td><td>X</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Variar as condições</td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Variar o contexto</td><td></td><td></td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td></tr>
<tr><td colspan="2">Problema Novo</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>X</td></tr>
</table>

**Tabela 8: Formulação de problemas (Tarefa 2)**

Analisando a tabela 8 referente à formulação de problemas efetuada pelos alunos, pode--se verificar que os grupos 4 e 5 alteraram o contexto e os dados do problema inicial. Os grupos 1 e 2 optaram por alterar apenas dados do problema inicial, modificando apenas as distâncias a que estavam as várias jogadoras. O grupo 3 fez variar as condições do problema inicial e o seu contexto. O grupo 6 voltou a formular um problema novo, que nada tinha a ver com o inicialmente proposto.

É de referir que nesta aula os alunos estavam mais calmos e menos ansiosos e que consideraram este problema mais acessível do que o realizado na aula anterior.

**Tarefa 3: O logótipo**

A tarefa 3 (ANEXO III) consistia na construção de um logótipo que correspondesse a duas regras inicialmente definidas. Este problema tinha várias soluções e apelava à criatividade dos alunos. Depois de ter lido o problema, o Francisco (grupo 5) perguntou-me se podia ser um quadrado ao qual respondi que podia ser qualquer polígono regular. No decorrer da aula foi necessário explicar aos alunos como se poderia calcular a área de um polígono usando o GeoGebra, uma vez que havia vários grupos com essa dúvida.

Enquanto os alunos iam tentando resolver o problema, ia-se ouvindo alguns comentários:

> **Bárbara (Grupo 3):** Este problema é muito difícil!
> **Anaísa (Grupo 2):** Isto não dá!
> **Carolina (grupo 2):** Estamos a complicar!

Alguns dos grupos iam-me chamando e afirmavam que já tinham terminado, mas quando eram questionados sobre se o logótipo deles satisfazia as regras inicialmente definidas, verificavam que se tinham esquecido de um dos dados. Apenas o Grupo 3 não conseguiu chegar a uma solução do problema porque quiseram ser muito originais e, depois, não conseguiram aplicar todas as potencialidades do GeoGebra, como se verá mais à frente.

O grupo 1 utilizou um quadrado para a partir dele construir o seu logótipo. A seguir apresenta-se a resolução descrita por este grupo.

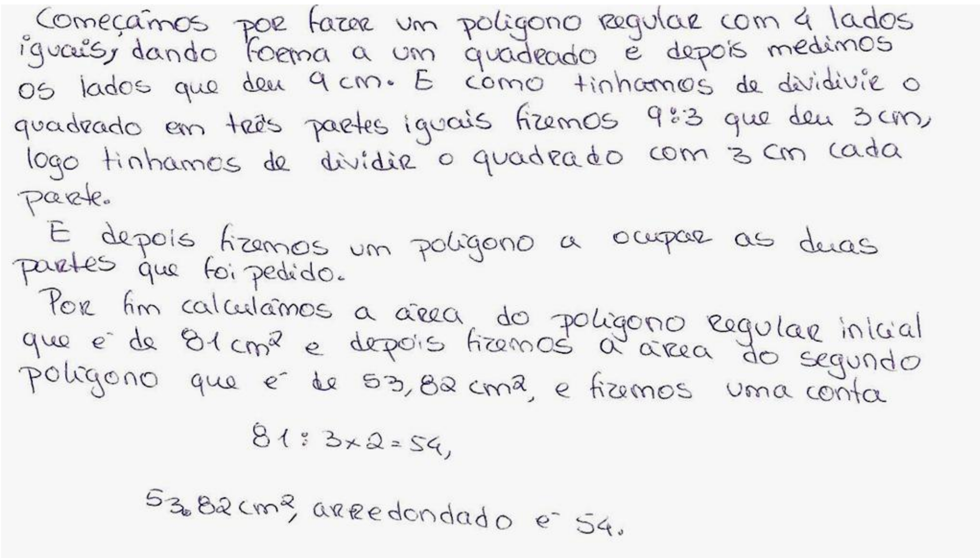

Começámos por fazer um polígono regular com 4 lados iguais, dando forma a um quadrado e depois medimos os lados que deu 9 cm. E como tínhamos de dividir o quadrado em três partes iguais fizemos 9:3 que deu 3 cm, logo tínhamos de dividir o quadrado com 3 cm cada parte.
E depois fizemos um polígono a ocupar as duas partes que foi pedido.
Por fim calculámos a área do polígono regular inicial que é de 81 cm² e depois fizemos a área do segundo polígono que é de 53,82 cm², e fizemos uma conta
81 : 3 × 2 = 54,
53,82 cm², arredondado é 54.

**Figura 43: Resolução descrita pelo grupo 1**

Lendo apenas o que o grupo escreveu, há passos da construção que não foram descritos e que são visíveis quando se analisa o ficheiro do GeoGebra gravado por este grupo, tal como se pode observar na figura seguinte.

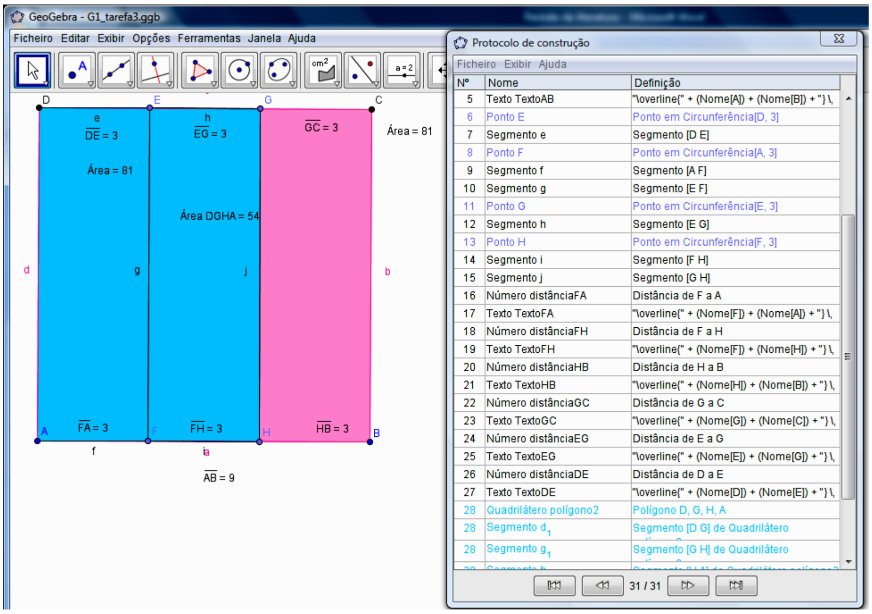


**Figura 44: Resolução 1 do grupo 1 no GeoGebra**

Assim, este grupo começou a sua construção marcando dois pontos A e B. De seguida construiu um polígono regular com quatro lados (quadrado), cujas medidas dos comprimentos dos lados são iguais à distância entre o ponto A e o ponto B. Posteriormente foram determinar a distância entre o ponto A e o ponto B e moveram esses dois pontos até à distância ser igual a nove unidades, de forma a ficarem com um múltiplo de três, tornando a sua resolução mais fácil. Depois, construíram um segmento de reta definido pelo ponto D e com três unidades de comprimento, tendo marcado de seguida o ponto E, que correspondia à extremidade desse segmento de reta e utilizaram o mesmo processo para marcar o ponto F, o ponto G e o ponto H. Posteriormente construíram o polígono [DGHA] e selecionaram uma cor para esse polígono. Por fim, foram determinar a área dos vários polígonos construídos para provar que estavam de acordo com o que era pedido no enunciado do problema. Na resolução deste grupo, se se aumentar a medida do comprimento dos lados do quadrado, o logótipo já não verifica as condições iniciais do problema, uma vez que a construção do polígono [DGHA], não depende da medida do lado do quadrado.

Tendo em conta que este grupo terminou relativamente cedo a resolução do problema proposto, cerca de quinze minutos após o início da aula, pedi aos elementos do grupo que construíssem um outro logótipo usando agora outro polígono regular. A segunda resolução é apresentada na figura seguinte.

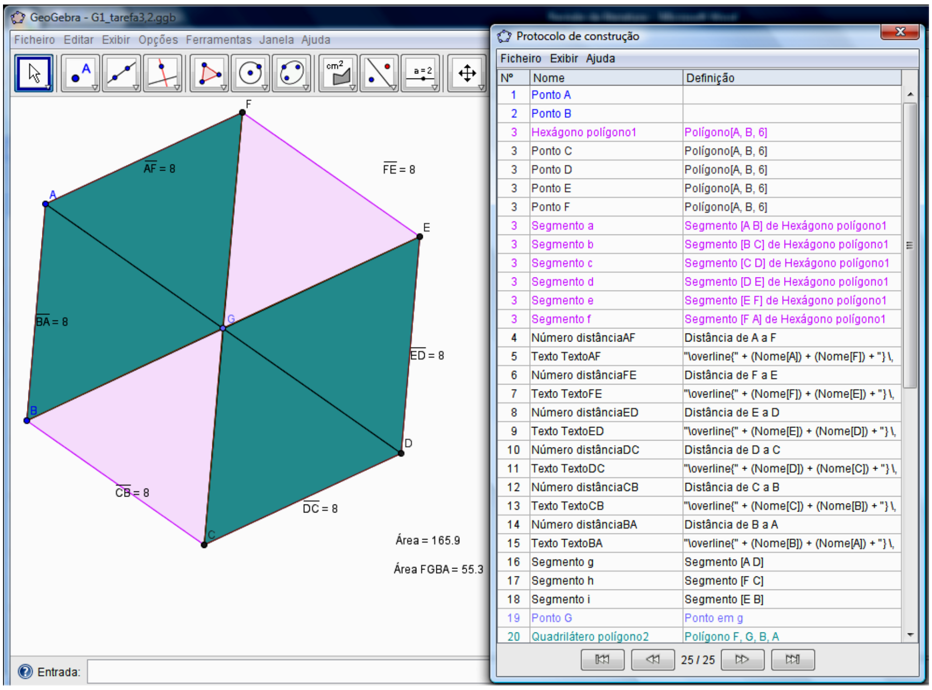
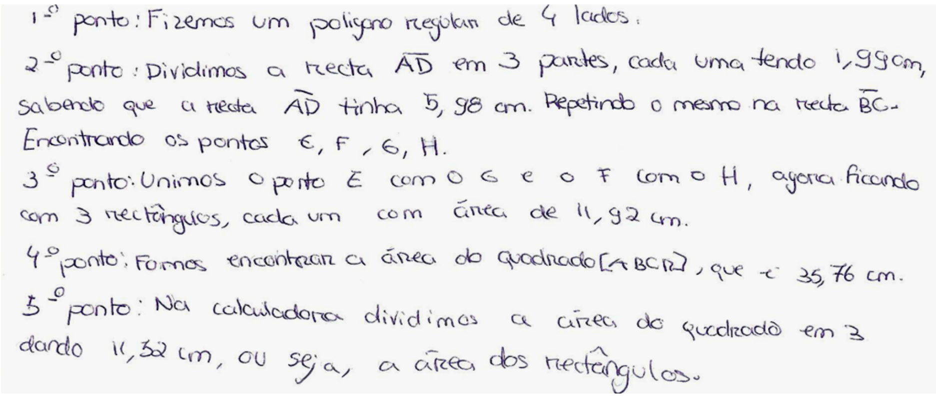


**Figura 45: Resolução 2 do grupo 1 no Geogebra**

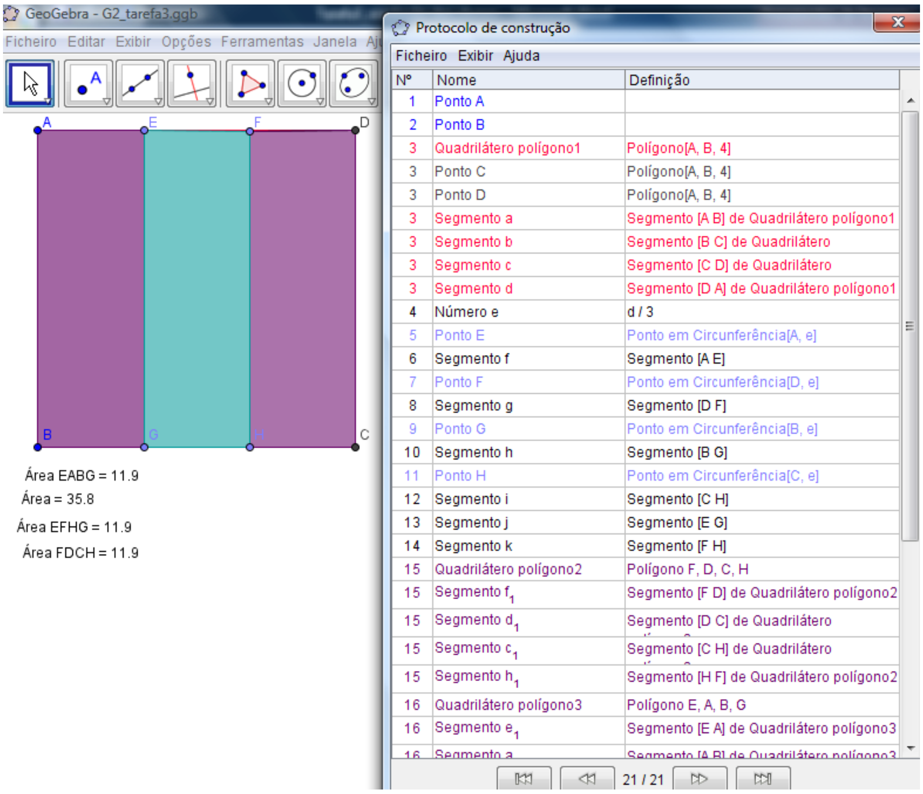
Nesta resolução os alunos construíram um hexágono regular e determinaram o comprimento dos seus lados. Depois foram unindo os vértices opostos do hexágono, construindo assim seis triângulos equiláteros. Por fim, foram construir os polígonos [FGBA] e [EGCD] e pintaram-nos da mesma cor, de forma a satisfazer as condições do logótipo. Aqui, se aumentarmos as medidas do lado do hexágono, a figura continua a satisfazer as condições do problema.

O grupo 2 fez uma resolução muito semelhante à realizada pelo grupo 1 na sua primeira resolução, salientando-se apenas que este grupo não moveu os pontos do quadrado para que a medida do comprimento dos seus lados fosse um múltiplo de três. Utilizaram sim, as potencialidades do GeoGebra para determinar a terça parte da medida do comprimento dos lados do quadrado, tal como se pode verificar nas duas figuras seguintes.



1.º ponto: Fizemos um poligono regular de 4 lados.
2.º ponto: Dividimos a recta $\overline{AD}$ em 3 partes, cada uma tendo 1,99 cm, sabendo que a recta $\overline{AD}$ tinha 5,98 cm. Repetindo o mesmo na recta $\overline{BC}$. Encontrando os pontos E, F, G, H.
3.º ponto: Unimos o ponto E com o G e o F com o H, agora ficando com 3 rectângulos, cada um com área de 11,92 cm.
4.º ponto: Fomos encontrar a área do quadrado [ABCD], que é 35,76 cm.
5.º ponto: Na calculadora dividimos a área do quadrado em 3 dando 11,92 cm, ou seja, a área dos rectângulos.

**Figura 46: Resolução descrita pelo grupo 2**





| Nº | Nome | Definição |
|---|---|---|
| 1 | Ponto A | |
| 2 | Ponto B | |
| 3 | Quadrilátero polígono1 | Polígono[A, B, 4] |
| 3 | Ponto C | Polígono[A, B, 4] |
| 3 | Ponto D | Polígono[A, B, 4] |
| 3 | Segmento a | Segmento [A B] de Quadrilátero polígono1 |
| 3 | Segmento b | Segmento [B C] de Quadrilátero |
| 3 | Segmento c | Segmento [C D] de Quadrilátero |
| 3 | Segmento d | Segmento [D A] de Quadrilátero polígono1 |
| 4 | Número e | d / 3 |
| 5 | Ponto E | Ponto em Circunferência[A, e] |
| 6 | Segmento f | Segmento [A E] |
| 7 | Ponto F | Ponto em Circunferência[D, e] |
| 8 | Segmento g | Segmento [D F] |
| 9 | Ponto G | Ponto em Circunferência[B, e] |
| 10 | Segmento h | Segmento [B G] |
| 11 | Ponto H | Ponto em Circunferência[C, e] |
| 12 | Segmento i | Segmento [C H] |
| 13 | Segmento j | Segmento [E G] |
| 14 | Segmento k | Segmento [F H] |
| 15 | Quadrilátero polígono2 | Polígono F, D, C, H |
| 15 | Segmento $f_1$ | Segmento [F D] de Quadrilátero polígono2 |
| 15 | Segmento $d_1$ | Segmento [D C] de Quadrilátero |
| 15 | Segmento $c_1$ | Segmento [C H] de Quadrilátero |
| 15 | Segmento $h_1$ | Segmento [H F] de Quadrilátero polígono2 |
| 16 | Quadrilátero polígono3 | Polígono E, A, B, G |
| 16 | Segmento $e_1$ | Segmento [E A] de Quadrilátero polígono3 |

**Figura 47: Resolução do grupo 2 no GeoGebra**

É de salientar que nesta construção, se aumentarmos ou diminuirmos o comprimento do lado do quadrado inicial, a medida do comprimento dos lados dos retângulos [EABG] e [FDCH], também aumenta na mesma proporção, apesar de a figura se “desmontar”.

Apesar do grupo 3 não ter conseguido chegar à solução do problema, apresentaram duas resoluções diferentes. Na primeira resolução, os alunos construíram um quadrado e de seguida foram encontrar o ponto médio de um dos lados do quadrado. Posteriormente construíram dois triângulos isósceles, unindo dois vértices do quadrado e o ponto médio do lado oposto. Depois calcularam a área de cada um dos polígonos e tentaram mover um dos vértices do triângulo de forma a que a área dos dois triângulos satisfizessem as condições do problema. De seguida, foram traçar as diagonais do quadrado e acabaram por abandonar esta resolução, tal como se pode verificar na figura seguinte.

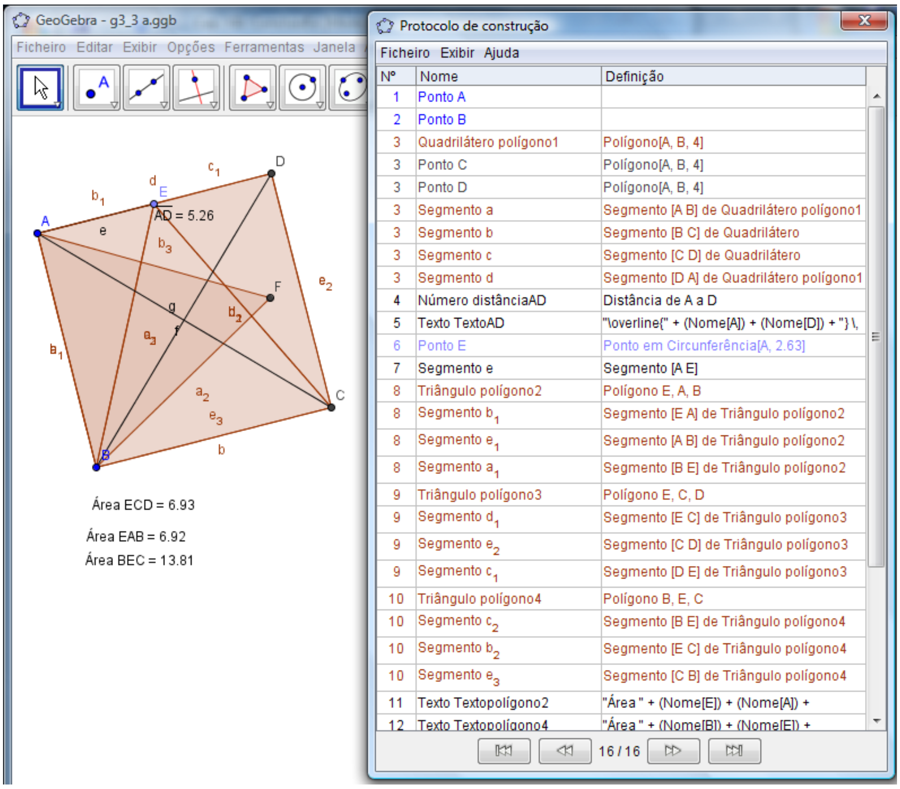



**Figura 48: Resolução 1 apresentada pelo grupo 3 no GeoGebra**

De seguida foram tentar outra resolução, a qual foi descrita pelo grupo da seguinte forma:

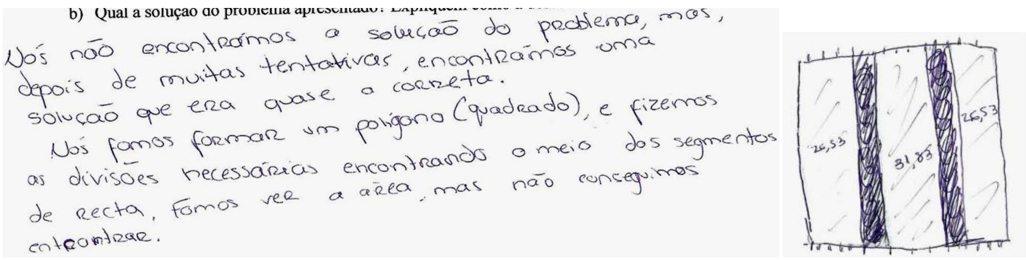



**Figura 49:Resolução descrita pelo grupo 3**

Apresenta-se de seguida a resolução apresentada por este grupo no Geogebra.

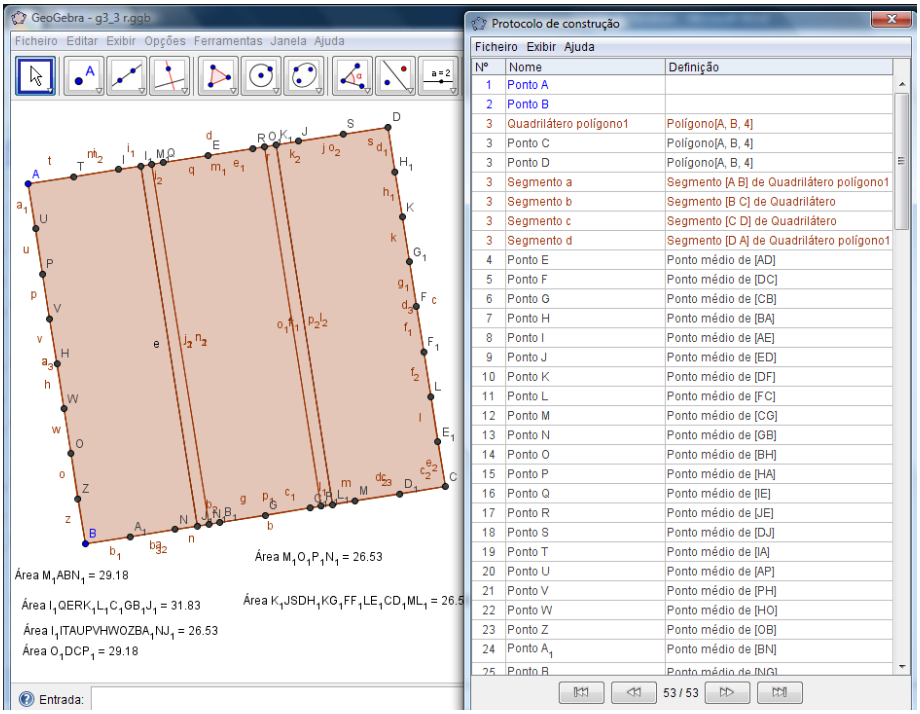



**Figura 50: Resolução 2 apresentada pelo grupo 3 no GeoGebra**

Observando o ficheiro do GeoGebra construído pelo grupo 3, verifica-se que os alunos foram encontrar o ponto médio de cada segmento de reta definido, não se preocupando com o facto de que o logótipo deveria ter dois terços da área total pintada, daí não terem conseguido chegar à solução do problema.

O Grupo 4 apresentou a sua resolução de uma forma muito resumida, não explicando todos os passos que teve de realizar, como se pode verificar de seguida.

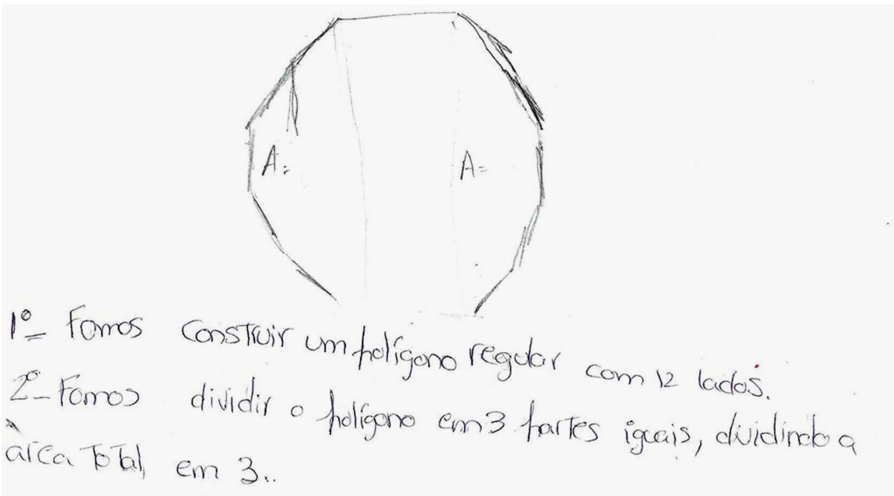



**Figura 51: Resolução descrita pelo grupo 4**

Ao analisar o ficheiro do GeoGebra gravado por este grupo, percebe-se que os alunos começaram por construir um dodecágono regular. De seguida, usando os vértices do dodecágono, construíram dois hexágonos e um retângulo. Posteriormente foram determinar a área de cada polígono definido e concluíram, com a ajuda da calculadora, que a soma das áreas dos dois hexágonos era igual a dois terços da área total do dodecágono, tal como se pode verificar pela figura seguinte.

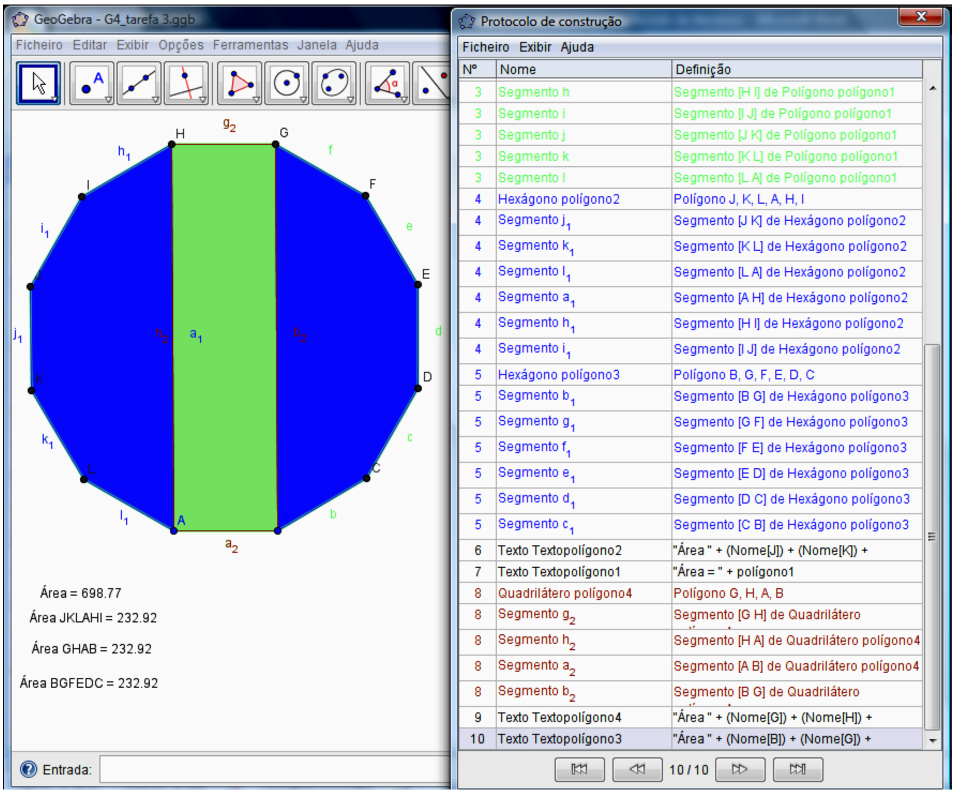



**Figura 52: Resolução do grupo 4 no GeoGebra**

Se aumentarmos a medida do comprimento dos lados do dodecágono, o logótipo aumenta na mesma porção, não se "desmanchando".

O grupo 5 apresentou duas resoluções diferentes. Na primeira construiu um eneágono regular e foi determinar a sua área, com o auxílio do GeoGebra. De seguida foi determinar quanto eram dois terços dessa área, construíram um novo eneágono regular, no interior do primeiro e foram movendo os pontos até que a área fosse igual a dois terços da área do polígono inicial. Essa resolução pode-se verificar nas duas figuras seguintes.

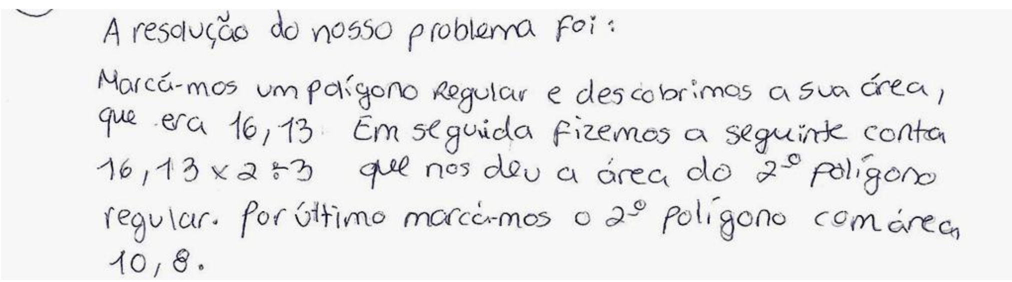

A resolução do nosso problema foi:
Marcá-mos um polígono Regular e descobrimos a sua área, que era 16,13. Em seguida fizemos a seguinte conta 16,13 x 2 ÷ 3 que nos deu a área do 2º polígono regular. Por último marcá-mos o 2º polígono com área 10,8.

**Figura 53: Resolução 1 descrita pelo grupo 5**

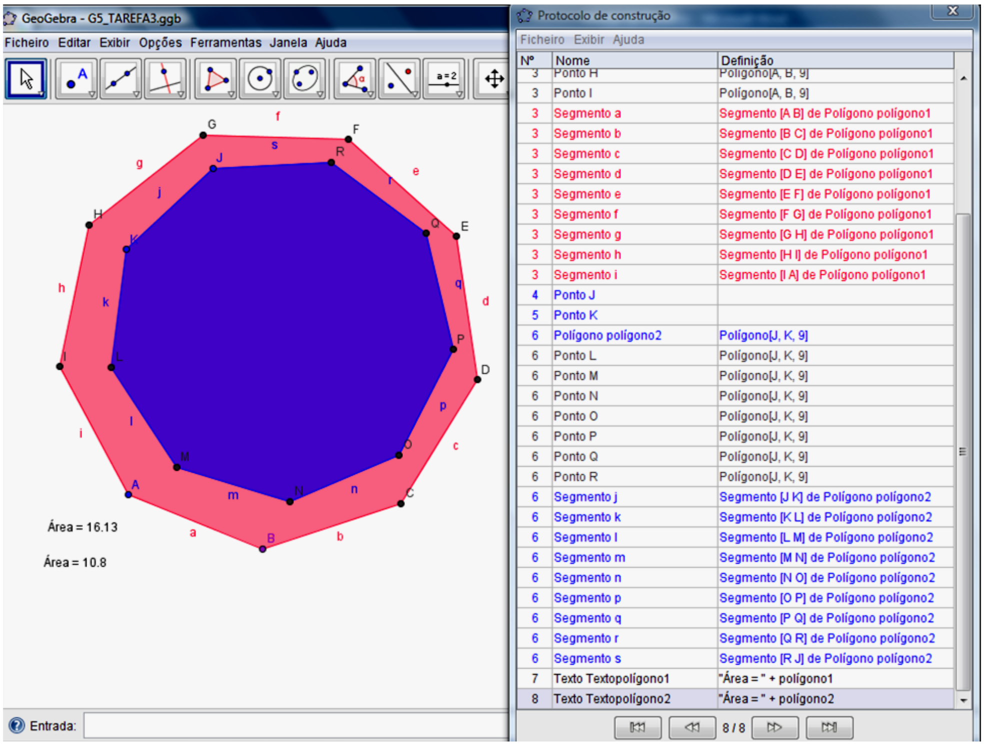



**Figura 54: Resolução 1 do grupo 5 no GeoGebra**

A segunda resolução foi semelhante, mas nesta o grupo partiu de um quadrado, tal como se pode observar nas figuras seguintes.

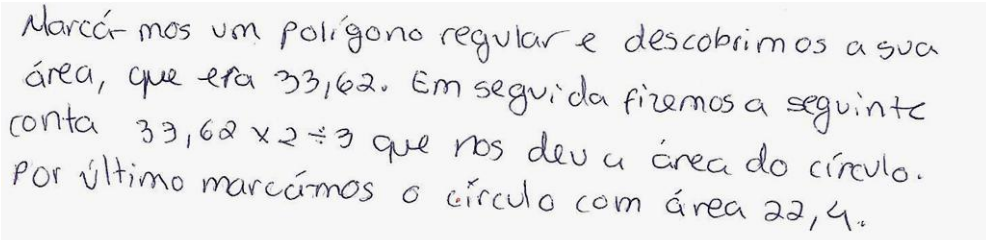

Marcámos um polígono regular e descobrimos a sua área, que era 33,62. Em seguida fizemos a seguinte conta 33,62 x 2 ÷ 3 que nos deu a área do círculo. Por último marcámos o círculo com área 22,4.

**Figura 55: Resolução 2 descrita pelo grupo 5**

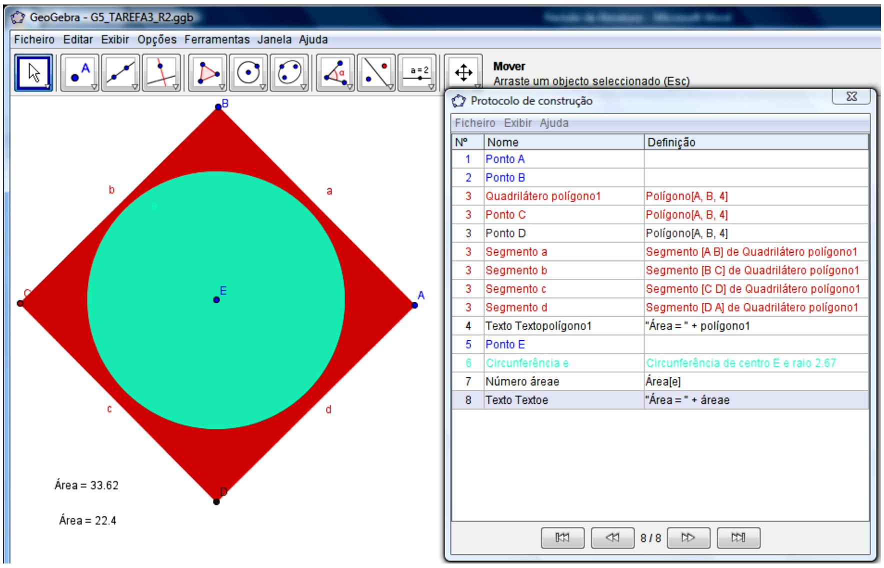



**Figura 56: Resolução 2 do grupo 5 no GeoGebra**

É de salientar que nesta construção, se aumentarmos ou diminuirmos o comprimento do lado do quadrado inicial, a área do quadrado aumenta, mas a do círculo mantém-se, ou seja, este grupo não usou todas as potencialidades do GeoGebra para fazer o seu logótipo.

O grupo 6 também apresentou duas soluções. Na primeira resolução, começou por desenhar um quadrado, tendo depois movido um dos lados do quadrado, de forma a que a medida do comprimento dos lados fosse de seis unidades. Depois construíram dois segmentos de reta com duas unidades de comprimento, uma vez que esse valor correspondia a um terço de seis unidades, partindo de dois dos vértices do quadrado. De seguida, partindo dos extremos desses segmentos de reta, construíram mais dois segmentos de reta, de forma a conseguirem construir o polígono [DJKA], cuja sua área correspondia a dois terços da área total do quadrado, tal como se pode verificar na figura seguinte.

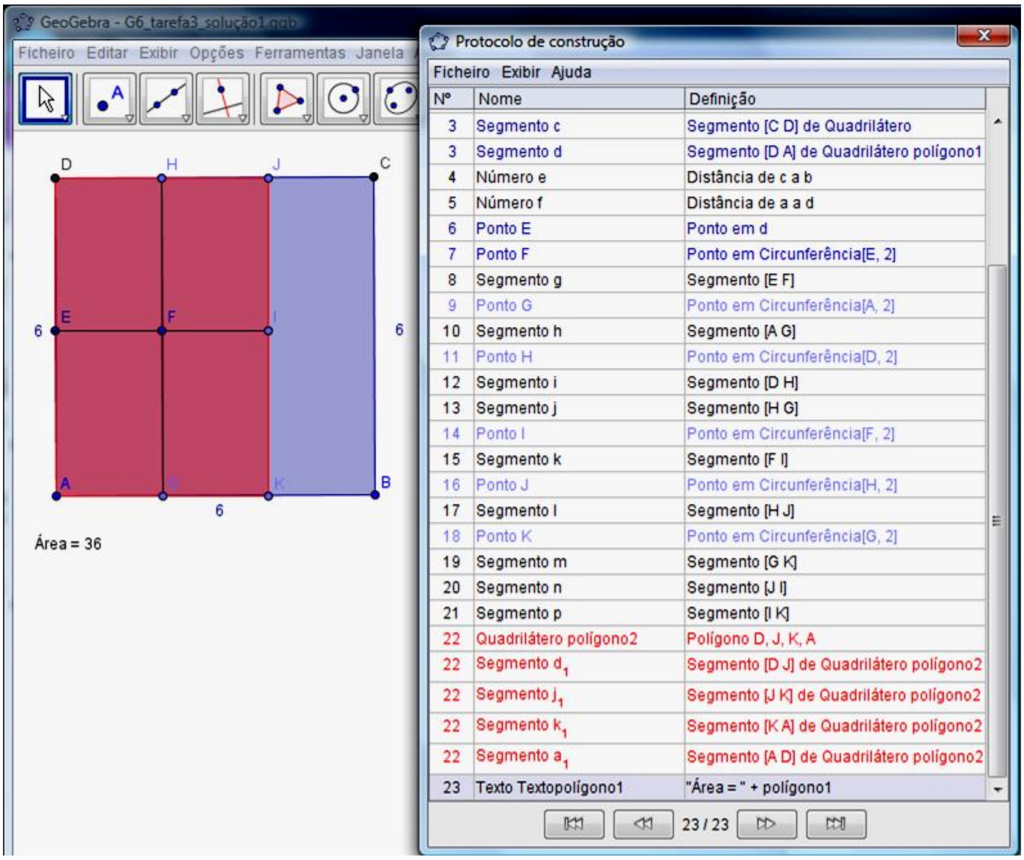



Figura 57: Resolução 1 do grupo 6 no GeoGebra

Na segunda resolução este grupo partiu de um triângulo equilátero com quinze unidades de área, tal como é explicado pelo grupo na figura seguinte.

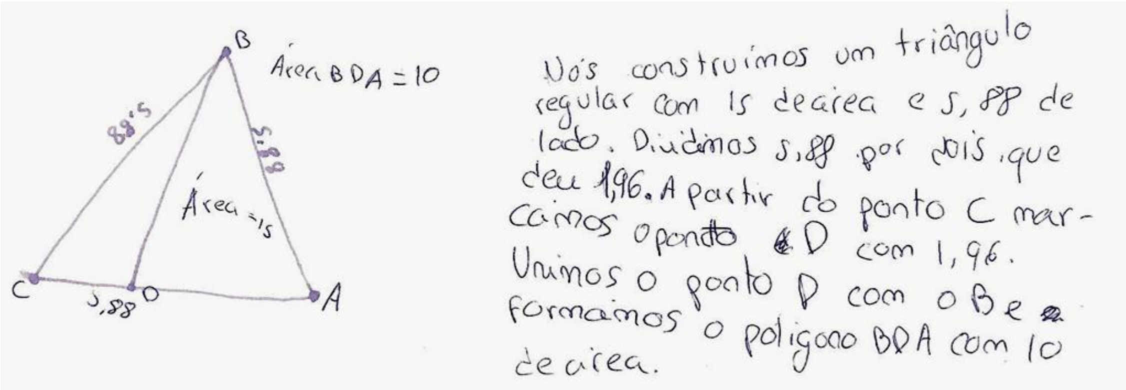



**Figura 58: Resolução apresentada pelo grupo 6**

A resolução descrita pelos alunos anteriormente pode ser confirmada, através da figura seguinte.

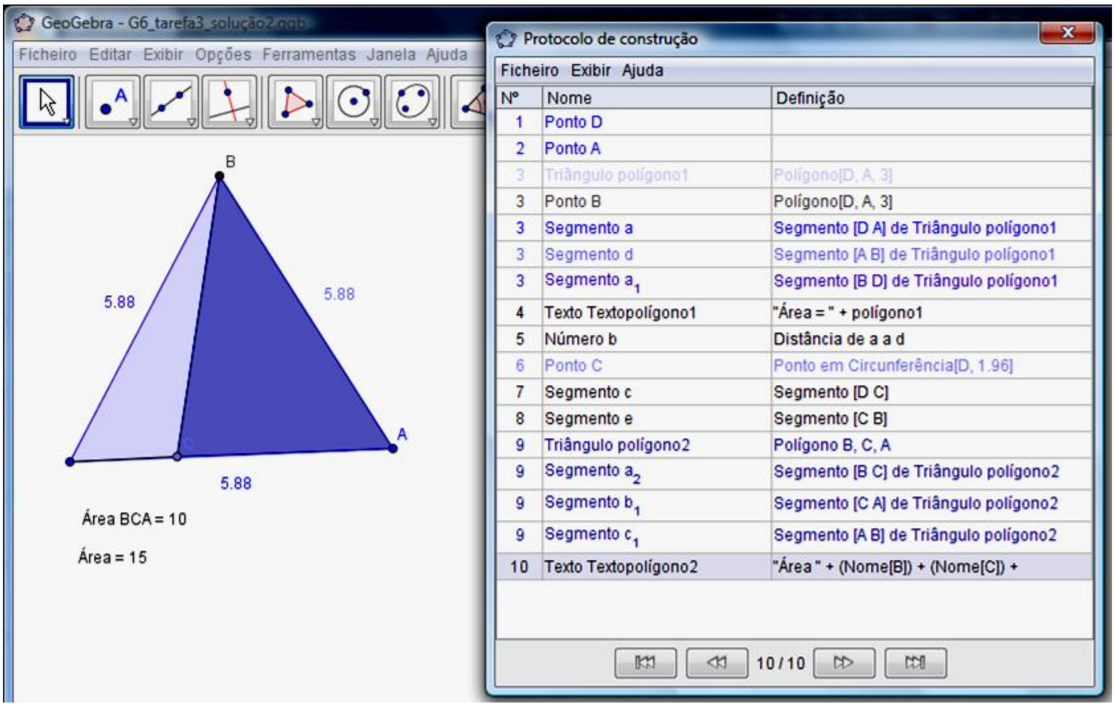



**Figura 59: Resolução 2 do grupo 6 no GeoGebra**

Tal como acontecia na maioria dos logótipos anteriormente apresentados, se aumentarmos a área do triângulo inicial, a área pintada não aumenta na mesma proporção. Isto deve-se ao facto de, mais uma vez, os alunos não terem utilizado todas as potencialidades do GeoGebra.

Durante a apresentação do logótipo dos vários grupos à restante turma, questionei após cada apresentação, o que aconteceria se a medida do comprimento dos lados do polígono inicial aumentasse. Os alunos conseguiram perceber que na maioria dos logótipos, ao aumentar a medida do comprimento dos lados, a parte pintada não aumentava na mesma proporção e que isso se devia à forma como fizeram toda a construção.

Na tabela seguinte apresenta-se a análise da caracterização das resoluções efetuadas pelos alunos.

| | | | G1 | | G2 | G3 | G4 | G5 | G6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | R1 | R2 | | | | | |
| Caracterização das resoluções | Adequação | Sim | X | X | X | | X | X | X |
| | | Não | | | | X | | | |
| | Rigor | Sim | X | X | X | NC | X | X | X |
| | | Não | | | | NC | | | |
| | Robustez | Sim | | X | X | NC | X | | |
| | | Não | X | | | NC | | X | X |

**Tabela 9: Caracterização das resoluções relativas à tarefa 3**

Ao fazer a caracterização das várias resoluções dos alunos, houve a necessidade de caracterizar as duas resoluções do grupo 1 separadamente, uma vez que, apesar das duas serem adequadas, isto é, exprimirem os dados e ao mesmo tempo a construção permite uma resposta rigorosa, a segunda resolução é robusta, o que não acontece com a primeira. Salienta-se o facto de que apenas o grupo 3 não conseguiu concluir o problema, pelo que é o único grupo cuja sua resolução não é adequada, apesar de ter entregue vários ficheiros do GeoGebra, com as diferentes tentativas de resolução. Analisando agora a linha relativamente ao rigor, verifica-se que todas as resoluções apresentadas, à exceção das do grupo 3, permitem uma resposta rigorosa. Em relação à robustez, os grupos 1, 2 e 4 conseguiram fazer uma construção robusta, uma vez que manipulando qualquer um dos objetos livres, a construção mantém as suas propriedades.

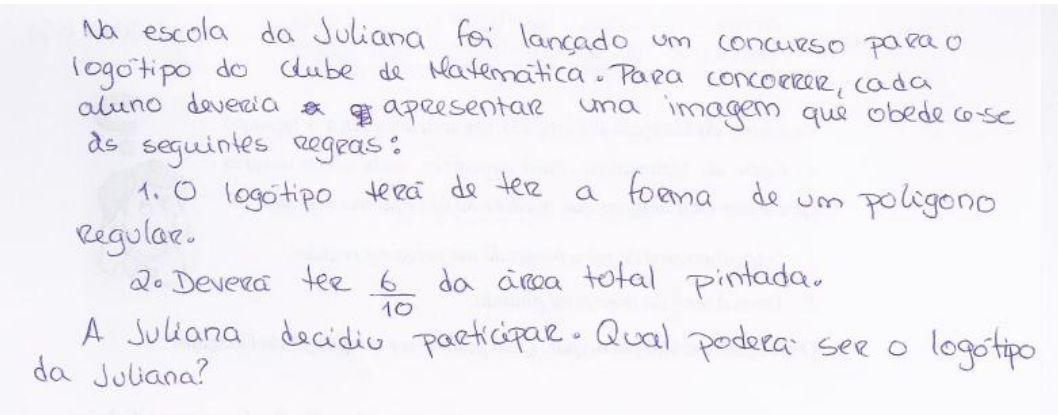
Na tabela seguinte, pode-se observar as estratégias de resolução utilizadas pelos diferentes grupos.

| | | G1 | | G2 | G3 | G4 | G5 | G6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | R1 | R2 | | | | | |
| Estratégias de resolução | Descobrir um padrão, uma regra ou lei de formação | | | | | | | |
| | Fazer tentativas/ Fazer conjeturas | | | | X | | X | |
| | Trabalhar do fim para o princípio | | | | | | | |
| | Usar dedução lógica ou fazer eliminação | | | | | | | |
| | Reduzir a um problema mais simples | X | | | | | | X |
| | Fazer uma simulação ou uma experimentação | | X | X | | | | |
| | Fazer um diagrama ou esquema | X | X | X | X | X | X | X |
| | Fazer uma lista organizada ou uma tabela | | | | | | | |

**Tabela 10: Estratégias de resolução utilizadas na tarefa 3**

Ao fazer a caracterização das estratégias de resolução utilizadas pelos alunos, na resolução do presente problema, houve novamente a necessidade de caracterizar as duas resoluções do grupo 1 separadamente, uma vez que, utilizaram estratégias diferentes. Assim, observando a tabela anterior, verifica-se que todos os grupos utilizaram a estratégia *Fazer um diagrama ou esquema* e os grupos 3 e 5 optaram ainda por *Fazer tentativas/Fazer conjeturas*. O grupo 6 e o grupo 1, na sua primeira resolução, utilizaram, ainda, como estratégia *Reduzir a um problema mais simples* e o grupo 2 e o grupo 1, na sua segunda resolução, utilizaram ainda a estratégia *Fazer uma simulação ou uma experimentação*.

Em relação à formulação de novos problemas, a maioria dos grupos pegaram no problema inicial e fizeram-lhe pequenas alterações como se pode constatar nas imagens a seguir apresentadas.


Na escola da Juliana foi lançado um concurso para o logotipo do clube de Matemática. Para concorrer, cada aluno deveria apresentar uma imagem que obedece-se às seguintes regras:

1. O logótipo terá de ter a forma de um polígono regular.
2. Deverá ter $\frac{6}{10}$ da área total pintada.

A Juliana decidiu participar. Qual poderá ser o logótipo da Juliana?

**Figura 60: Problema formulado pelo grupo 1**

Na escola do Tintin foi lançado um concurso para o logótipo do Clube da Matemática. Para concorrer, cada aluno deveria apresentar uma imagem que obedece-se às seguintes regras:

1. O logótipo terá de ter a forma de um polígono regular.

2. Deverá ter $\frac{3}{4}$ da área total pintada.

O Tintim decidiu participar, qual poderar ser o logotipo do Timtim?

**Figura 61: Problema formulado pelo grupo 2**

A Marta quer fazer uma pizza com dois sabores, em que $\frac{4}{5}$ tem que estar com fiambre e o resto com chouriço.

Como ficara a pizza?

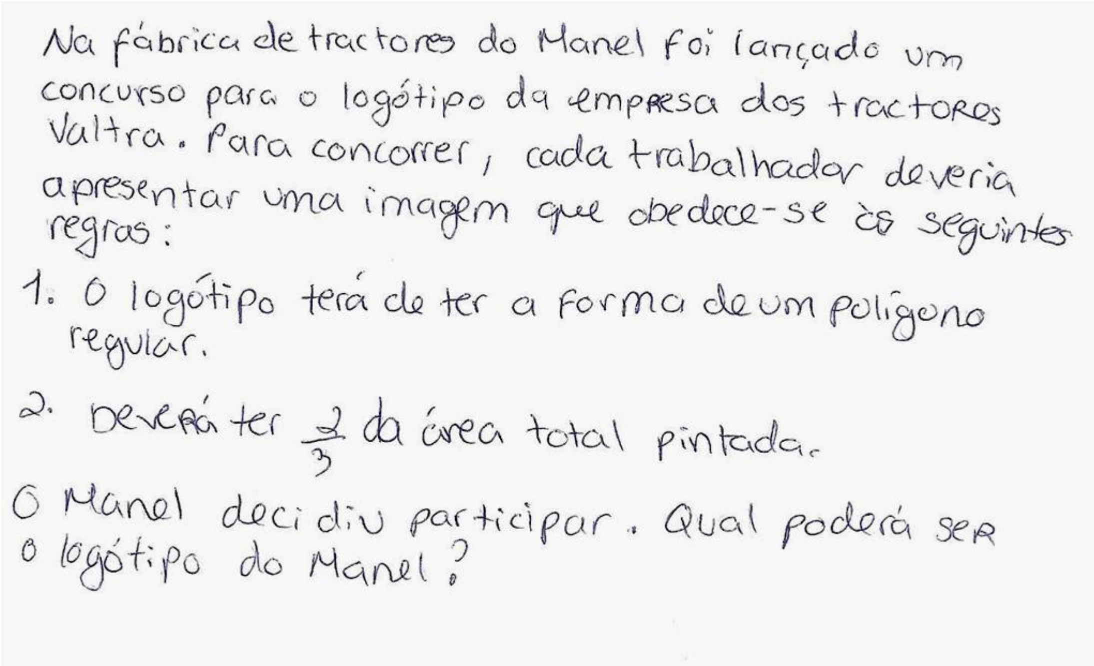
**Figura 62: Problema formulado pelo grupo 3**

No dia de Natal, no centro comercial, estava uma loja a fazer uma promoção para umas blusas novas e estavam a querer um logotipo que chamà-se a atenção, mas tinham que obedecer às regras:

1º- Tinha de ter a forma de um polígono regular.

2º- $\frac{1}{3}$ da área total pintada.

**Figura 63: Problema formulado pelo grupo 4**


Na fábrica de tractores do Manel foi lançado um concurso para o logótipo da empresa dos tractores Valtra. Para concorrer, cada trabalhador deveria apresentar uma imagem que obedece-se às seguintes regras:

1. O logótipo terá de ter a forma de um polígono regular.
2. Deverá ter $\frac{2}{3}$ da área total pintada.

O Manel decidiu participar. Qual poderá ser o logótipo do Manel?

**Figura 64: Problema formulado pelo grupo 5**

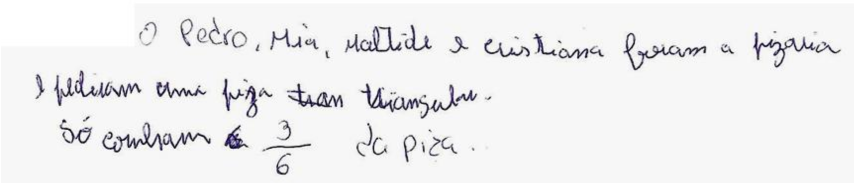

O Pedro, Mia, Matilde e Cristiana foram a pizaria e pediram uma piza ~~tran~~ triangular.
Só comeram $\frac{3}{6}$ da piza.

**Figura 65: Problema formulado pelo grupo 6**

Na tabela seguinte apresenta-se a análise referente aos problemas formulados pelos alunos.

<table>
<tr><th></th><th></th><th></th><th>G1</th><th>G2</th><th>G3</th><th>G4</th><th>G5</th><th>G6</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Formulação de problemas</td><td rowspan="3">Variação do problema dado</td><td>Variar os dados</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Variar as condições</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Variar o contexto</td><td></td><td></td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X<br>(NC)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Problema Novo</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

**Tabela 11: Formulação de problemas (Tarefa 3)**

Ao analisar a tabela 11 referente à formulação de problemas efetuada pelos alunos, pode-se verificar que os dois primeiros grupos optaram por apenas variar os dados do problema inicial. Os grupos 3 e 4 variaram os dados e o contexto do problema inicial. O grupo 5 apenas alterou o contexto do problema inicial, mantendo as condições e os dados. Em relação ao grupo 6, apesar de ter iniciado a formulação do problema, este está incompleto, uma vez que não faz qualquer questão, não se sabendo assim o que é pedido.

### Tarefa 4: A estrada circular

Na tarefa 4 (ANEXO IV) era pedido aos alunos que descobrissem onde deveria ser construída uma estrada circular, sabendo que estava a igual distância de quatro castelos. A maioria dos grupos começou por construir primeiro a estrada circular e depois colocaram os castelos sobre essa estrada. Depois de chamar a atenção de que os quatro castelos teriam de ser marcados inicialmente e só depois é que iriam construir a estrada circular, todos os alunos foram construir um quadrado e sobre os seus vértices marcaram os pontos correspondentes aos quatros castelos, depois desenharam a circunferência correspondente ao local onde estaria a estrada, a qual passava pelos vértices do quadrado.

Depois de alguns grupos terem conseguido construir a estrada circular para o caso particular do quadrado, pedi-lhes que colocassem os quatro pontos, correspondentes a cada castelo, em qualquer local e só depois tentassem construir a circunferência correspondente à estrada circular. Mais uma vez se verificou que alguns alunos marcaram os quatro pontos, traçaram uma circunferência e depois moveram os pontos de forma a colocá-los de acordo com o que era pedido no problema. Houve então a necessidade de explicar que depois de marcar os pontos correspondentes aos castelos, não se poderia mover mais esses pontos.

Durante a resolução, ouviam-se alguns comentários:

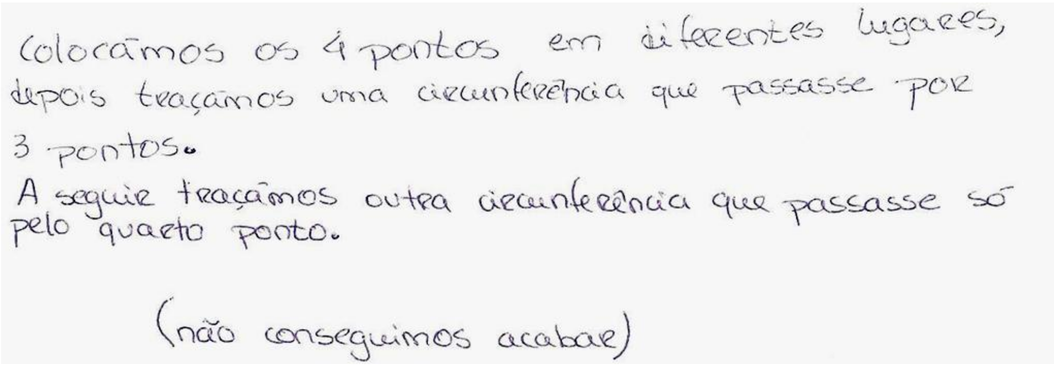
> **Anaísa (grupo 2):** Professora, os castelos podem estar aqui?
> **Professora:** Sim, os castelos podem estar em qualquer local, mas depois de marcarem os pontos correspondentes a eles não os podem mover.
> **Daniela (grupo 3)**: Professora, nós marcámos os castelos, depois construímos a estrada e agora verificámos que os castelos têm de estar aqui!
> **Professora:** Isso significa que vão ter de mover os castelos?
> **Daniela (grupo 3):** Sim!
> **Professora:** Vocês não conseguem mudar os castelos de sítio, porque são muito pesados! Os castelos têm de ficar fixos!
> **Bárbara (grupo 3)**: Este problema é muito difícil professora!
> **Paulo (grupo 6)**: Este problema é impossível!
> **Pedro (grupo 6):** Professora, nós conseguimos!

**Professora:** E não moveram os castelos?
**Pedro (grupo 6):** Só os mexemos um pouco! Não faz mal, pois não?
**Professora:** Não podem mover os castelos!

Os alunos tiveram ainda dificuldade em descobrir o centro da circunferência que passa por três pontos, pois perceberam que para construir a estrada circular teriam primeiro de construir essa circunferência. Decidi então explicar para toda a turma, como poderiam descobrir o centro dessa circunferência.

Tal como já foi referido, a grande maioria dos alunos teve muita dificuldade em resolver o problema quando os quatro pontos não estavam sobre um quadrado, sendo poucos os alunos que conseguiram concluir a tarefa para este caso geral.

O grupo 1 apenas gravou o ficheiro referente ao caso geral, apesar de não ter conseguido concluir a resolução do problema, tal como é explicado por este grupo de seguida.


Colocámos os 4 pontos em diferentes lugares, depois traçámos uma circunferência que passasse por 3 pontos.
A seguir traçámos outra circunferência que passasse só pelo quarto ponto.

(não conseguimos acabar)

**Figura 66: Resolução apresentada pelo grupo 1**

Este grupo iniciou a resolução marcando inicialmente os quatro pontos correspondentes aos castelos. Em seguida construíram a circunferência que passava por três desses castelos e determinaram o seu centro. Depois foram determinar o raio dessa circunferência e construíram uma nova circunferência com o mesmo centro da anterior e que passava pelo quarto castelo, tendo também calculado o raio desta circunferência. A partir daqui não conseguiram continuar, tal como se pode verificar pela figura seguinte.

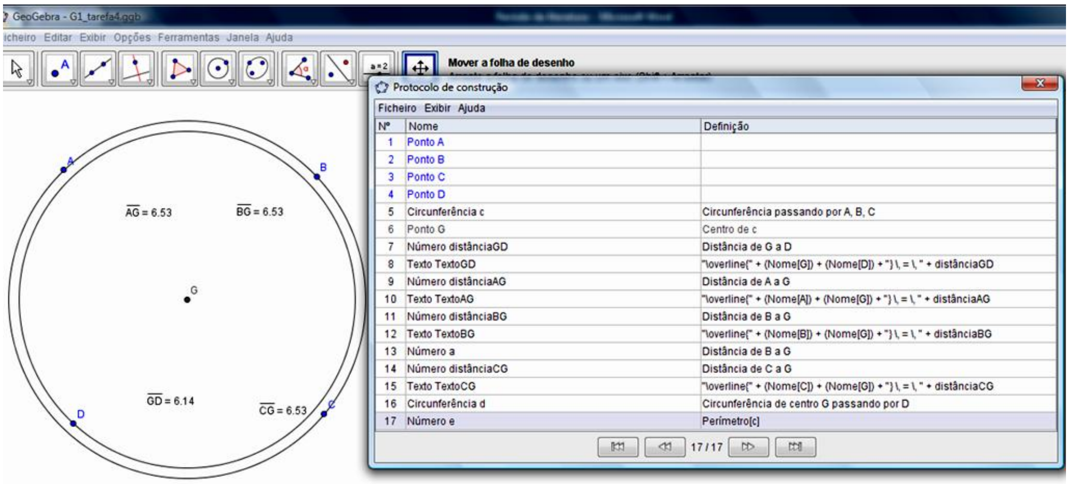



Figura 67: Resolução do grupo 1 no GeoGebra

O grupo 2 começou a sua resolução pelo caso particular, em que os castelos estão sobre os vértices de um quadrado, tal como se pode verificar na figura seguinte.

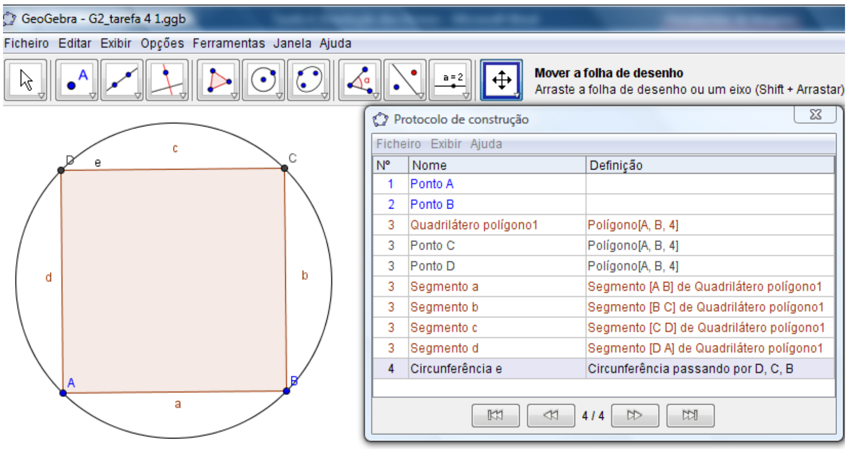



Figura 68: Resolução 1 do grupo 2 no GeoGebra

Como se pode verificar, este grupo começou por definir dois pontos. De seguida construiu um quadrado, cuja medida do comprimento dos lados é igual à distância do ponto A ao ponto B e traçou a circunferência que passava por três desses pontos. Assim, a estrada iria passar pelos quatro castelos que correspondiam aos vértices do quadrado. Quando questionei se a estrada apenas poderia passar pelos vértices do quadrado, os alunos pensaram um pouco e depois responderam que não, bastava encontrar o centro desta circunferência e depois aumentar ou reduzir o tamanho do raio da circunferência inicialmente construída.

Pedi posteriormente para que fizessem uma nova resolução mas sem colocar os castelos sobre um quadrado. Apesar de os alunos não terem escrito como resolveram o problema, verifica-se através do ficheiro do GeoGebra, que a resolução é adequada, uma vez que conseguiram concluir o problema. Assim, este grupo começou por definir os quatro pontos correspondentes aos quatro castelos. Depois, tal como aconteceu com os outros grupos, construiu a circunferência que passava por três desses pontos, neste caso, pelos pontos A, D e C. Depois foram descobrir o centro da circunferência e determinar a distância do ponto E ao ponto C e do Ponto E ao ponto B. Apesar de não se verificar através do ficheiro, os alunos fizeram várias tentativas para perceber o que deveriam fazer de seguida, tendo-me chamado várias vezes, para perguntar como podiam usar o GeoGebra como calculadora. Ao fim de várias tentativas, perceberam que a estrada teria de estar a meio da distância entre a circunferência e o ponto B e foram determinar qual seria essa distância. Depois traçaram uma nova circunferência com centro igual ao centro da primeira circunferência e raio igual à distância anteriormente determinada, tal como se pode verificar na figura seguinte.

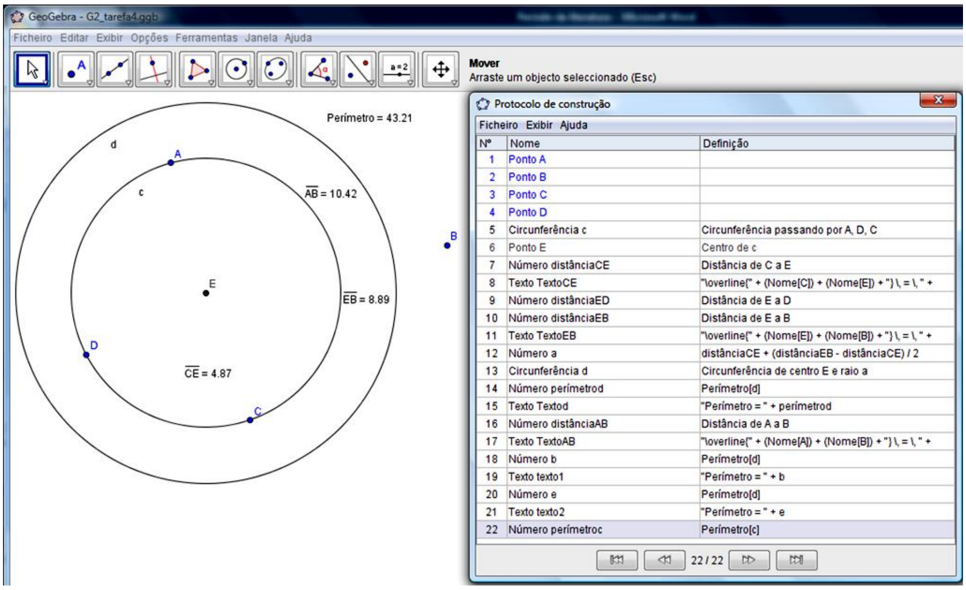



**Figura 69: Resolução 2 do grupo 2 no GeoGebra**

O grupo 3 também não conseguiu concluir a resolução para o caso geral. O grupo descreve a sua resolução da seguinte forma:

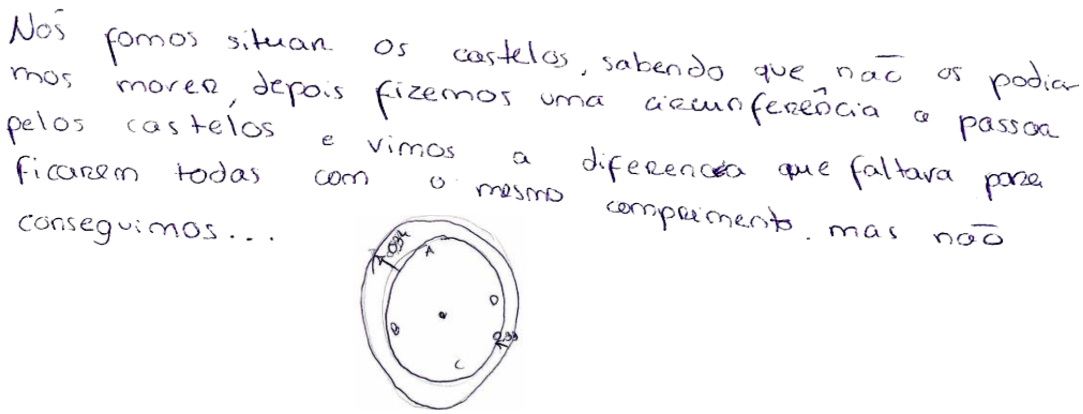



**Figura 70: Resolução apresentada pelo grupo 3**

Este grupo apresentou três ficheiros diferentes com as várias tentativas de resolução. Na primeira resolução, os alunos começaram por marcar dois pontos, construíram a circunferência que passava por esses dois pontos e descobriram o seu centro. Por fim construíram vários segmentos de reta com quatro unidades de comprimento, onde foram colocar os vários castelos. Nesta resolução, primeiro era construída a estrada e só depois se colocariam lá os castelos, apesar de ao analisar o ficheiro do GeoGebra se verificar que os castelos não estavam à mesma distância da estrada circular. Na segunda resolução os alunos foram marcar os quatro pontos, correspondentes aos quatro castelos, de seguida construíram a circunferência que passava por três desses pontos e determinaram o seu centro. Depois construíram uma nova circunferência com centro no ponto E e que passava pelo quarto ponto. De seguida, como não conseguiam determinar a distância entre as duas circunferências, foram marcar dois novos pontos sobre a última circunferência e determinaram a distância entre o Ponto B, da primeira circunferência, e o ponto F, da segunda circunferência. Não tendo prosseguido com esta resolução. Na última resolução os alunos marcaram os quatro pontos correspondentes aos quatro castelos. Depois foram traçar segmentos de reta que passavam por cada um dos pontos inicialmente definidos e com três unidades de comprimento. Posteriormente foram construir as circunferências com centro nos pontos inicialmente definidos e com três unidades de raio, tendo abandonado de seguida esta resolução. As várias resoluções anteriormente relatadas podem ser analisadas nas figuras seguintes:

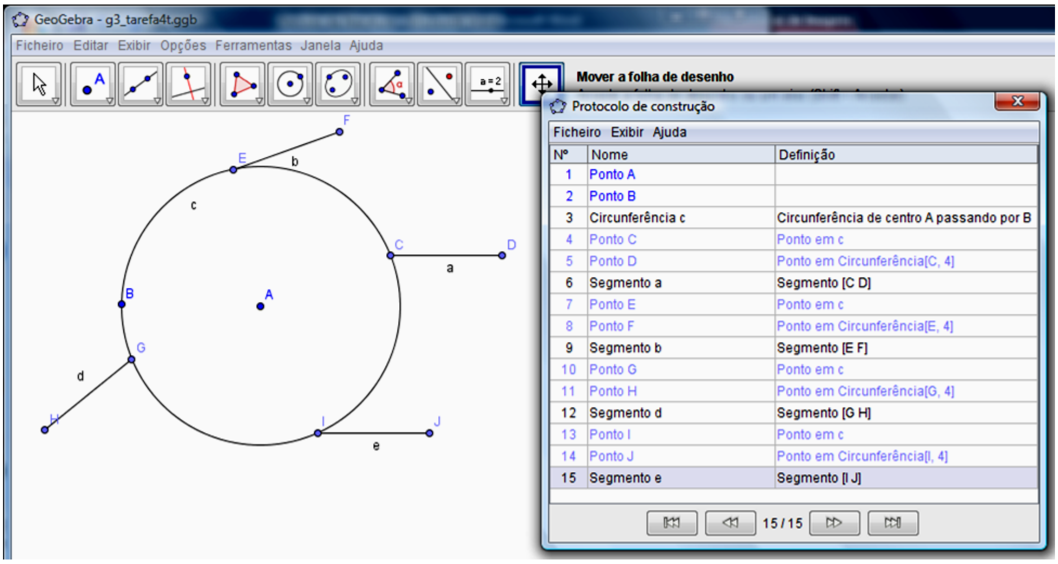



**Figura 71:Resolução 1 do grupo 3 no GeoGebra**

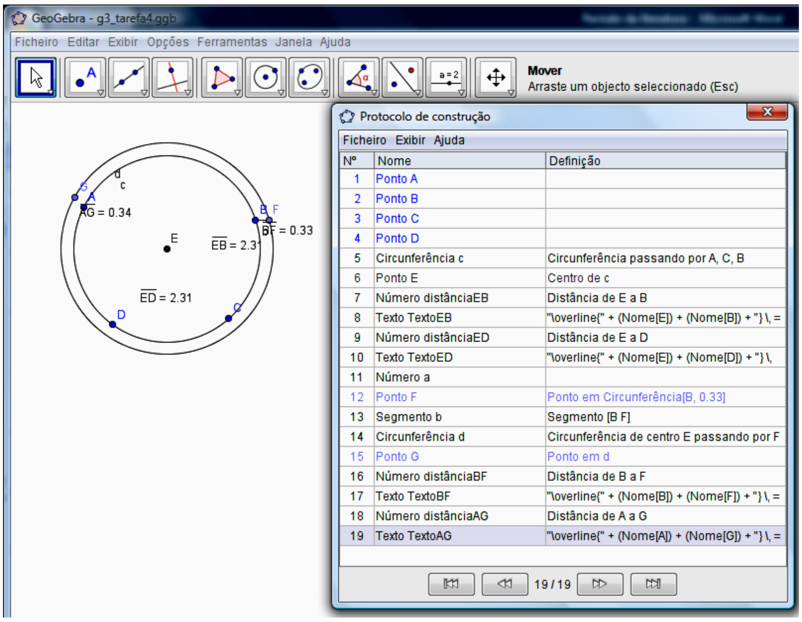


**Figura 72: Resolução 2 do grupo 3 no GeoGebra**

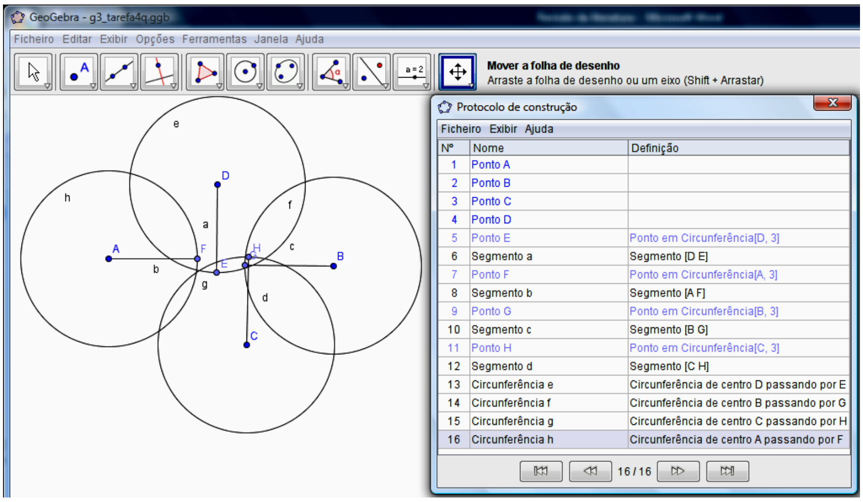
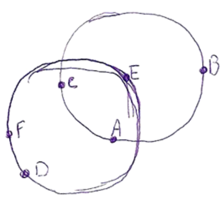


**Figura 73: Resolução 3 do grupo 3 no GeoGebra**

O grupo 4 também não conseguiu concluir a sua resolução. Na imagem seguinte pode--se verificar a resolução descrita por este grupo.



Primeiro dispusemos 4 pontos em distância diferentes e, depois traçamos uma circunferência que passa-se por 3 pontos.
Em seguida fomos determinar o raio dessa circunferência. Depois fomos determinar o comprimento do centro ao ponto A. A partir dessas medidas fomos traçar outra circunferência.

**Figura 74: Resolução apresentada pelo grupo 4**

Analisando o ficheiro do GeoGebra gravado pelos alunos, verifica-se que depois de determinarem a distância do centro ao ponto A, foram ainda determinar a distância do centro ao ponto D, que era um ponto exterior à circunferência e que correspondia ao quarto castelo. Depois marcaram um novo ponto, o ponto F e foram então construir uma nova circunferência que passa pelo centro da primeira circunferência e pelos pontos D e F, não tendo continuado esta resolução, como se pode verificar através da figura seguinte.

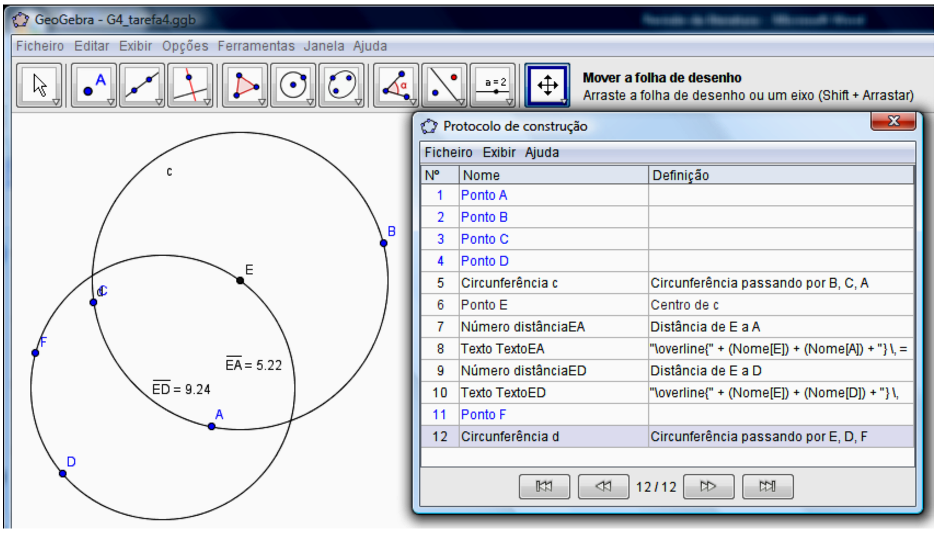


**Figura 75: Resolução do grupo 4 no GeoGebra**

Este grupo teve alguma dificuldade em trabalhar em conjunto e em respeitar as ideias uns dos outros.

O grupo 5 iniciou as suas primeiras resoluções, marcando um ponto e construindo a circunferência com centro nesse ponto e com um raio de comprimento fixo. Só depois foi identificar os quatro castelos. Como se pode verificar pelas figuras seguintes.

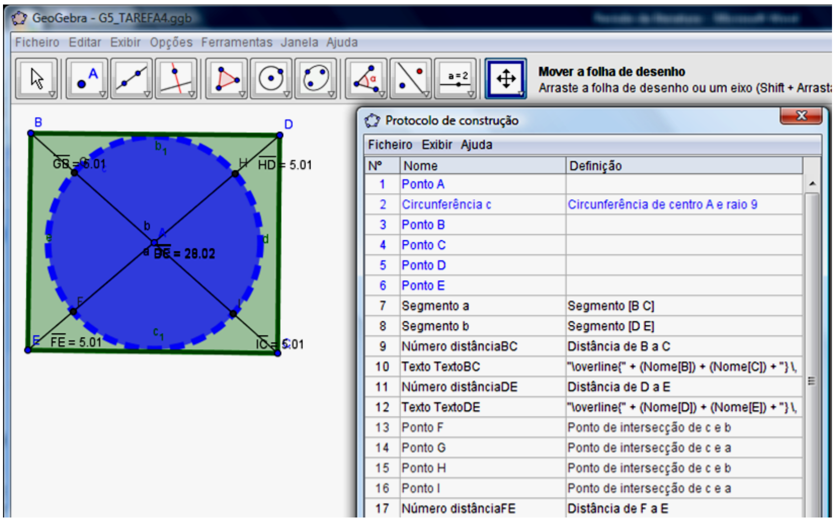


**Figura 76: Resolução 1 do grupo 5 no GeoGebra**

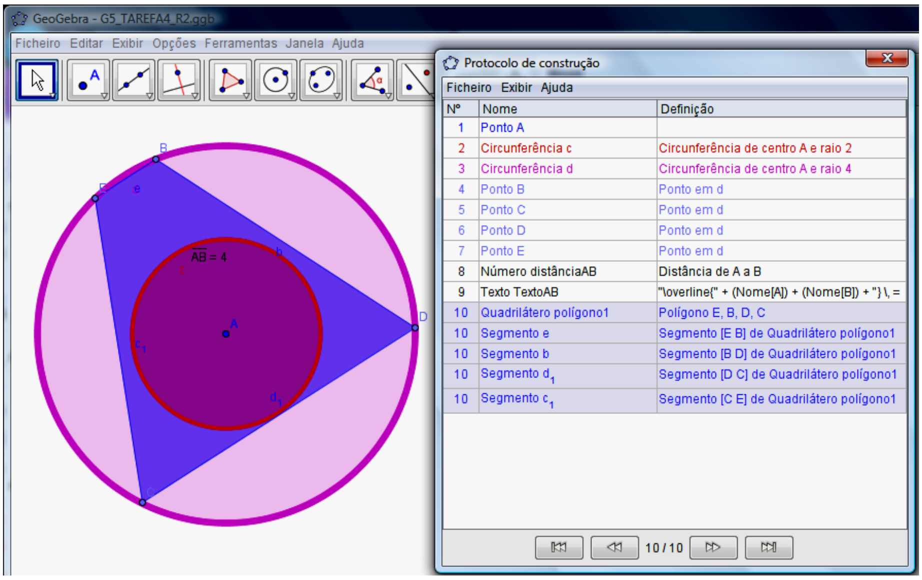



**Figura 77: Resolução 2 do grupo 5 no GeoGebra**

Como eu lhes disse que não podiam construir a estrada antes de os castelos estarem definidos, foram então marcar os quatro pontos e depois construíram a circunferência que passava por três desses pontos, ou seja, pelos pontos A, B e C. De seguida encontraram o centro dessa circunferência, determinaram a distância entre o centro E e o ponto B e entre o centro E e o ponto D, tendo posteriormente somado essas distâncias. Depois, foram construir uma nova circunferência, com centro em E e com raio igual à soma das duas distâncias. Por fim, marcaram novos pontos sobre essa circunferência e determinaram as distâncias desses pontos aos pontos inicialmente definidos, não tendo continuado a sua resolução. Esta resolução pode ser observada nas duas figuras seguintes.

Nós começá-mos por marcar o ponto A, em seguida o ponto B, ponto C e D, e marcámos uma circunferência, passando por A, B e C e encontrá-mos o ponto central, marcámos outra circunferência com raio de 13,99.

**Figura 78: Resolução apresentada pelo grupo 5**

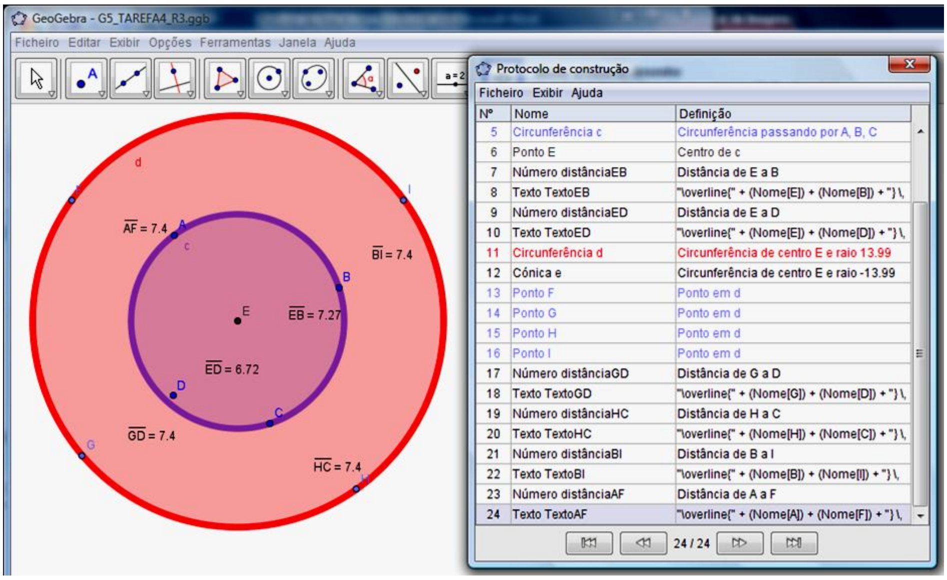



**Figura 79: Resolução 3 apresentada pelo grupo 5 no GeoGebra**

O grupo 6, tal como tinha acontecido com os grupos 2 e 3, começou por marcar dois pontos e depois construiu um quadrado com medida do comprimento do lado igual à distância entre os dois pontos inicialmente marcados. Depois determinou a distância entre os vértices opostos do quadrado, traçou os segmentos de reta correspondentes e encontrou o ponto de intersecção entre eles, ponto E. Posteriormente marcou um novo ponto, exterior ao quadrado e traçou a circunferência de centro em E e que passava por esse ponto. De seguida, os alunos marcaram novos pontos sobre essa circunferência e foram determinar a distância de cada um dos pontos aos vértices do quadrado inicialmente definido, para provarem que a estrada podia ser construída naquele local. Esta resolução é apresentada na figura seguinte.

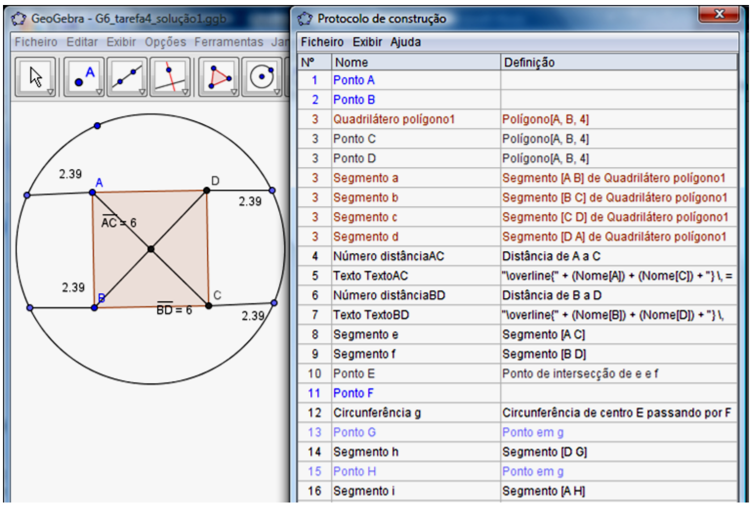



**Figura 80:Resolução 1 apresentada pelo grupo 6 no GeoGebra**

Na segunda resolução apresentada por este grupo, limitaram-se a construir a circunferência no interior do quadrado inicialmente construído, tal como se pode verificar de seguida.

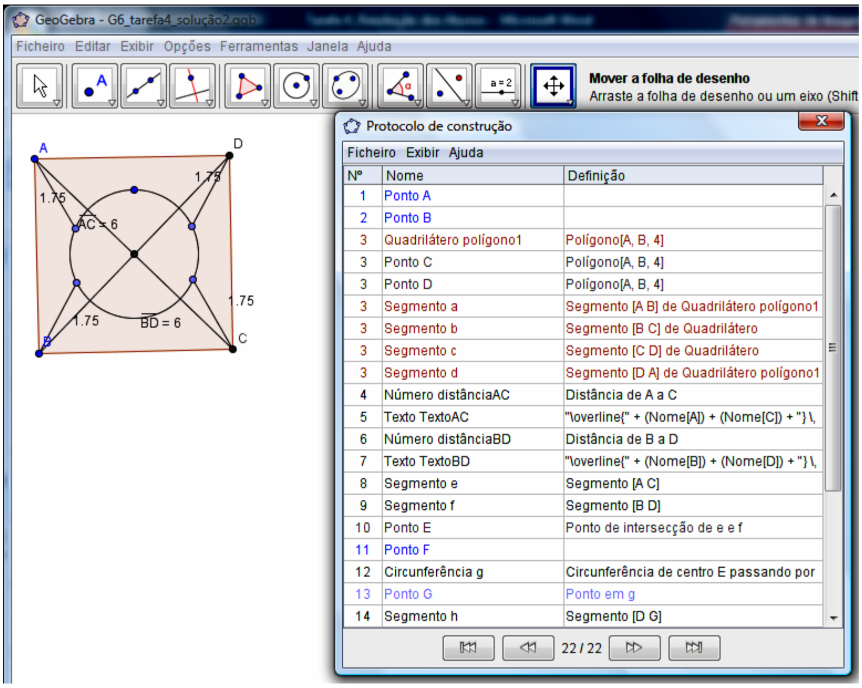


**Figura 81: Resolução 2 do grupo 6 no GeoGebra**

Na última resolução apresentada por este grupo, os alunos marcaram inicialmente os quatro pontos, correspondentes aos quatro castelos. De seguida traçaram a circunferência passando por três desses pontos e foram determinar o seu centro (ponto E) e o seu raio. Depois determinaram a distância do ponto E ao ponto B e traçaram a circunferência de centro E e que passa pelo ponto B. Posteriormente definiram novos pontos sobre as circunferências anteriormente construídas, foram determinar as distâncias entre esses dois pontos e construíram os respetivos segmentos de reta. Como a estrada deveria estar a igual distância entre os quatro castelos, foram encontrar o ponto médio entre os extremos de um dos segmentos de reta definidos anteriormente e construir uma nova circunferência com centro em E e que passava por esse novo ponto, tendo assim descoberto o local onde deveria estar a estrada. A resolução descrita por este grupo pode ser verificada nas duas figuras seguintes.


**Figura 82: Resolução apresentada pelo grupo 6**

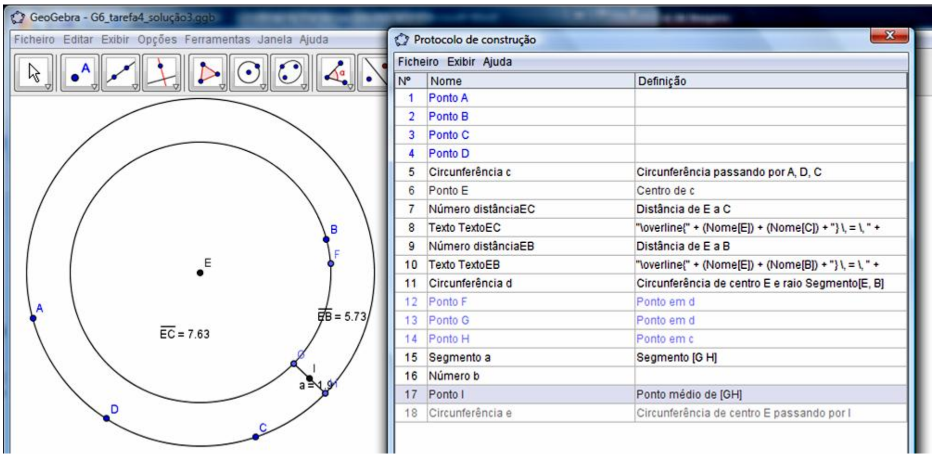



**Figura 83: Resolução 3 apresentada pelo grupo 6 no GeoGebra**

Durante a discussão todos os grupos foram apresentar as suas resoluções e explicar a forma como resolveram ou tentaram resolver o problema. Todos os alunos elegeram a segunda resolução do grupo 2 como sendo a mais rápida e a mais eficaz. Conseguiram também perceber que para cada quatro castelos havia apenas uma solução para este problema.

Na tabela seguinte apresenta-se a análise da caracterização das resoluções efetuadas pelos alunos.

| | | | G1 | G2 | | G3 | G4 | G5 | | | G6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | R1 | R2 | | | R1 | R2 | R3 | R1, 2 | R3 |
| **Caracterização das resoluções** | Adequação | Sim | | X | X | | | X | X | | X | X |
| | | Não | X | | | X | X | | | X | | |
| | Rigor | Sim | NC | X | X | NC | NC | X | X | NC | X | X |
| | | Não | NC | | | NC | NC | | | NC | | |
| | Robustez | Sim | NC | X | X | NC | NC | | X | NC | X | X |
| | | Não | NC | | | NC | NC | X | | NC | | |

**Tabela 12: Caracterização das resoluções relativas à tarefa 4**

Observando a tabela 12, pode-se verificar que os grupos 1, 3 e 4 não concluíram as suas resoluções, pelo que as suas construções não exprimem os dados do problema. Em relação aos restantes grupos, dado o número de resoluções que os alunos apresentaram houve a necessidade de as caracterizar separadamente. Assim, em relação à adequação, apenas a resolução número três apresentada pelo grupo 5 não é adequada, ou seja, não expressa o problema, o mesmo se verificando em relação ao rigor. Quanto ao rigor e à robustez verifica-se que as resoluções apresentadas pelos grupos 2 e 6 e na segunda resolução do grupo 5, permitem uma resposta rigorosa e mantêm as suas propriedades quando se manipula qualquer objeto livre.

Na tabela seguinte, pode-se observar as estratégias de resolução utilizadas pelos diferentes grupos.

| | | G1 | G2 | | G3 | G4 | G5 | | | G6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | R1 | R2 | | | R1 | R2 | R3 | R1.2 | R3 |
| **Estratégias de resolução** | Descobrir um padrão, uma regra ou lei de formação | | | | | | | | | | |
| | Fazer tentativas/ Fazer conjeturas | | | | X | | | | | | |
| | Trabalhar do fim para o princípio | | | | | | x | x | | | |
| | Usar dedução lógica ou fazer eliminação | | | | | | | | | | |
| | Reduzir a um problema mais simples | | X | | | | | | | X | |
| | Fazer uma simulação ou uma experimentação | | | X | | | | | | | X |
| | Fazer um diagrama ou esquema | X | X | X | X | X | x | x | x | X | X |
| | Fazer uma lista organizada ou uma tabela | | | | | | | | | | |

**Tabela 13: Estratégias de resolução utilizadas na tarefa 4**

Tal como já foi referido anteriormente, os grupos 2, 5 e 6 apresentaram várias resoluções, pelo que houve necessidade de as analisar separadamente. Por outro lado, os grupos 1, 3 e 4 não conseguiram concluir o problema, mas apresenta-se aqui as estratégias utilizadas. Assim, analisando a tabela 13, verifica-se que todos os grupos optaram pela estratégia *Fazer um diagrama ou esquema*. O grupo 2 e 6, nas suas primeiras resoluções utilizaram ainda como estratégia *Reduzir a um problema mais simples*. Os mesmos grupos, nas últimas resoluções apresentadas utilizaram ainda como estratégia *Fazer uma simulação ou uma experimentação*. O grupo 5 nas duas primeiras resoluções optaram por utilizar ainda, como estratégia, *Trabalhar do fim para o* *princípio* e o grupo 3 foi o único que para além da estratégia de *Fazer um diagrama ou esquema*, utilizou ao mesmo tempo *Fazer tentativas/Fazer conjeturas*.

Em relação à formulação de novos problemas, os grupos 1 e 4 não conseguiram formular um novo problema, por não terem tempo, uma vez que demoraram muito na resolução do problema inicialmente dado. Os restantes grupos pegaram no problema inicial e fizeram-lhe pequenas alterações como se pode constatar nas figuras a seguir apresentadas.

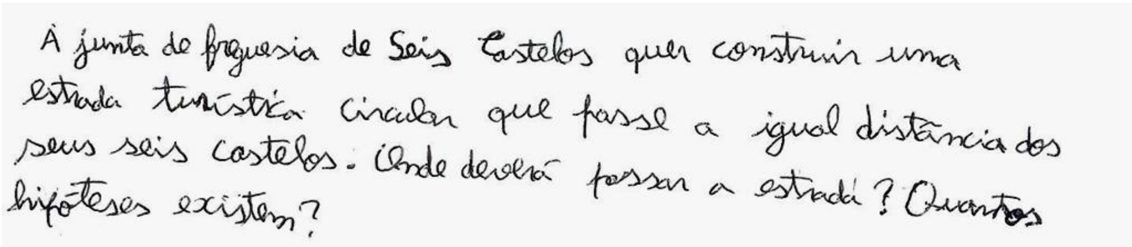

À junta de freguesia de Seis Castelos quer construir uma
estrada turística circular que passe a igual distância dos
seus seis castelos. Onde deverá passar a estrada? Quantos
hipóteses existem?

**Figura 84: Problema formulado pelo grupo 2**

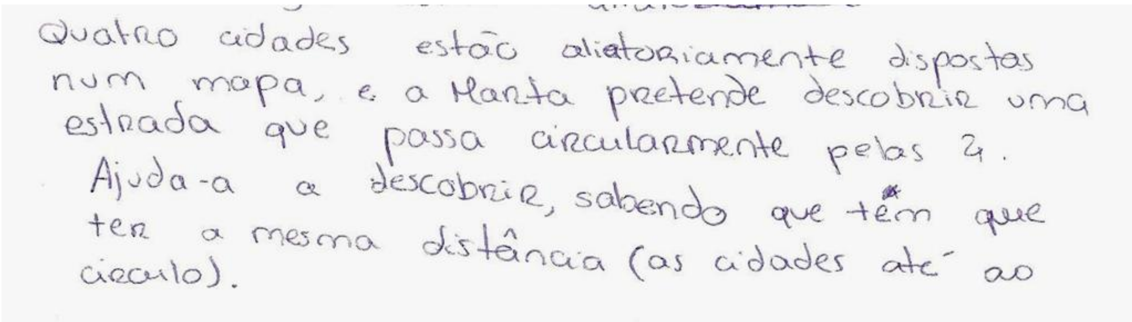

Quatro cidades estão aliatoriamente dispostas
num mapa, e a Marta pretende descobrir uma
estrada que passa circularmente pelas 4.
Ajuda-a a descobrir, sabendo que têm que
ter a mesma distância (as cidades até ao
circulo).

**Figura 85: Problema formulado pelo grupo 3**

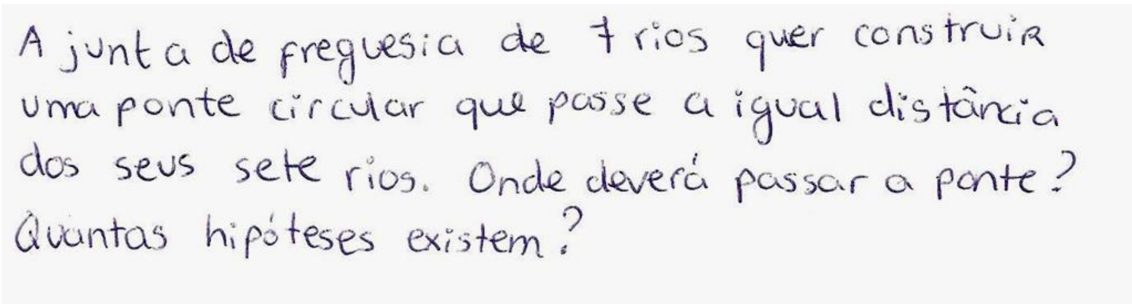

A junta de freguesia de 7 rios quer construir
uma ponte circular que passe a igual distância
dos seus sete rios. Onde deverá passar a ponte?
Quantas hipóteses existem?

**Figura 86: Problema formulado pelo grupo 5**

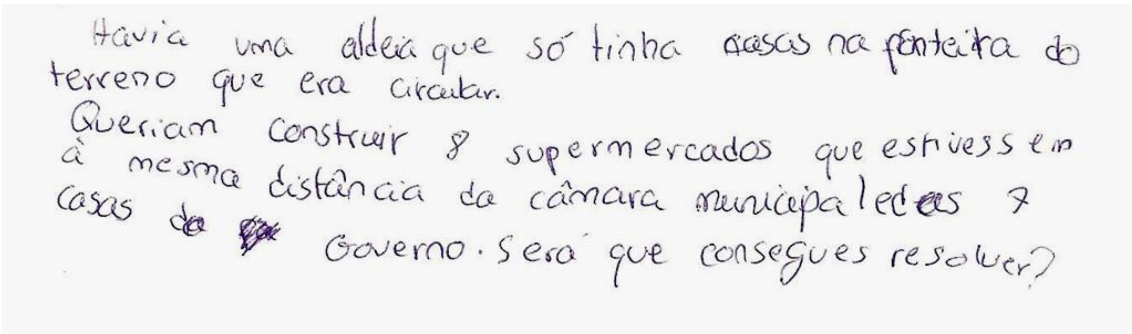

Havia uma aldeia que só tinha casas na fronteira do
terreno que era circular.
Queriam construir 8 supermercados que estivessem
à mesma distância da câmara municipal e das 7
casas do
Governo. Será que consegues resolver?

**Figura 87: Problema formulado pelo grupo 6**

Na tabela seguinte apresenta-se a análise referente aos problemas formulados pelos alunos.

| | | | G1 | G2 | G3 | G4 | G5 | G6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Formulação de problemas** | Variação do problema dado | Variar os dados | | X | | | X | X |
| | | Variar as condições | | | | | | |
| | | Variar o contexto | | | X | | X | X |
| | Problema Novo | | | | | | | |

**Tabela 14: Formulação de problemas (Tarefa 4)**

Ao analisar a tabela 14, pode-se verificar que os grupos 1 e 4 não formularam nenhum problema. O grupo 2 apenas fez uma variação do problema proposto, alterando os dados. O grupo 3 manteve os dados, tendo apenas modificado o contexto do problema inicial. Os grupos 5 e 6 optaram por modificar o contexto do problema proposto e ao mesmo tempo alterar os dados do problema inicial.

No final da aula perguntei aos alunos qual a sua opinião relativamente a este problema. A maioria dos alunos respondeu que este tinha sido o problema mais difícil até ao momento. Todos consideraram que para o caso particular do quadrado era fácil e que havia uma infinidade de soluções, mas que para o caso geral em que os castelos não estavam sobre os vértices de um quadrado era muito mais difícil.

## Tarefa 5: Os náufragos

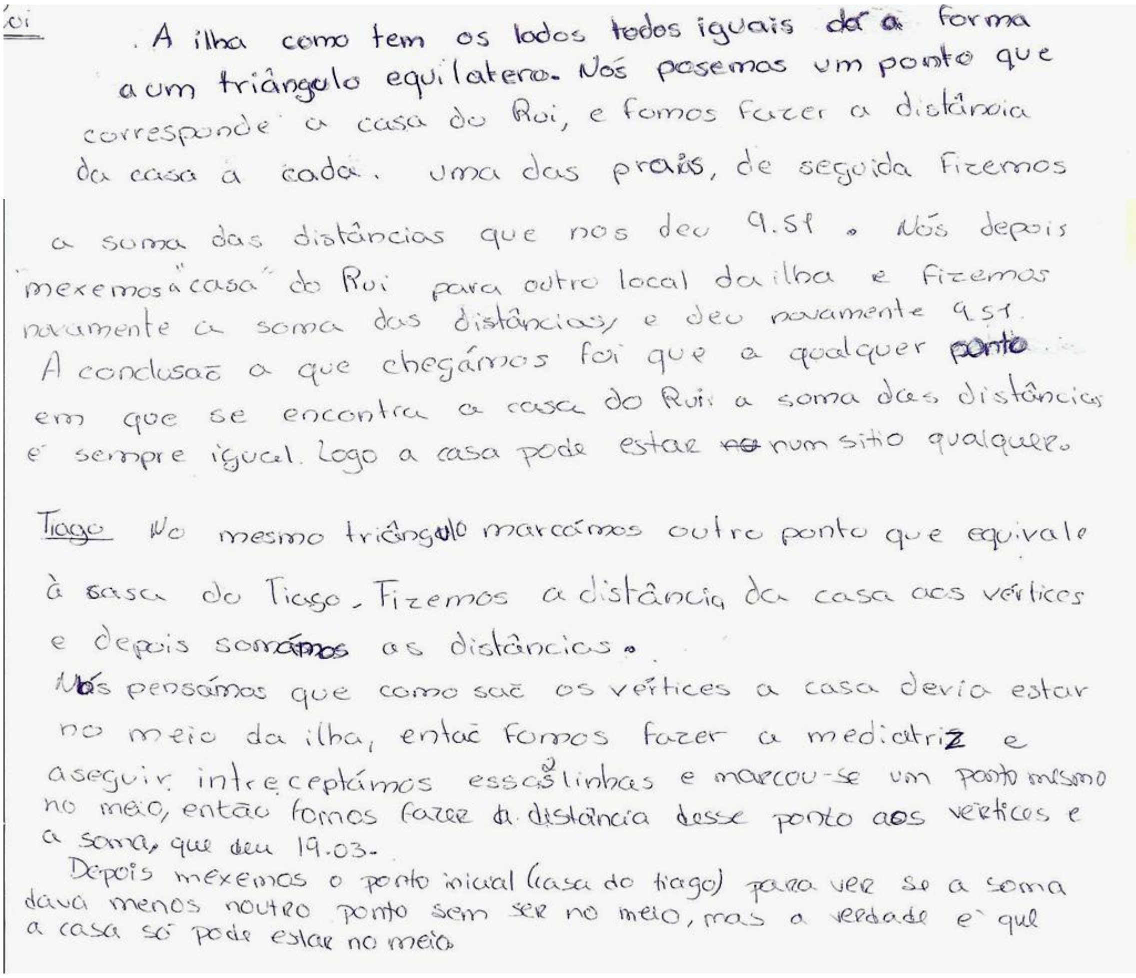
Na tarefa 5 (ANEXO V) os alunos tinham de descobrir onde deveria ser construída a casa de dois náufragos, tendo em conta os dados do problema. Enquanto iam resolvendo o problema, ouviam-se os comentários:

**Anaísa (grupo 2)**: Professora, ele (Rui) só pode ter uma casa?
**Professora**: O que vocês querem descobrir é onde pode ser construída a casa dele.
**Anaísa (grupo 2)**: Professora, estamos a fazer corretamente a soma? A soma é este valor?
**Professora**: Sim, mas podem renomear, para saberem o que estão a calcular.
**Daniela (grupo 3)**: Temos de somar as distâncias, não é?
**Professora**: Sim, e depois vejam o que têm de fazer a seguir.
**Daniela (grupo 3)**: Temos de pensar….
**Grupo 6**: Professora, a soma das distâncias dá zero!
**Professora**: Será que isso é possível?
**Grupo 6**: Sim! É o que está a dar!

**Professora**: Mas isso será possível?
**Pedro (grupo 6)**: Não! Estamos a fazer aqui qualquer coisa mal!
**Anaísa (grupo 2)**: Professora a soma dá sempre igual!
**Daniela (grupo 3)**: Dá sempre igual!
**Grupo 1**: Este problema é fácil!

Durante a resolução o grupo 2 perguntou se podia, para não ficar muito confuso, mover o triângulo inicial por translação e encontrar a casa do Tiago nesse triângulo. É de referir que nesta altura, os alunos estavam a aprender as isometrias e as suas propriedades. Achei curioso o facto de este grupo querer utilizar esses conhecimentos e respondi-lhes que sim, que podiam fazer a segunda resolução nesse triângulo.

O grupo 1 conseguiu descrever corretamente a sua resolução e a solução do problema, como se pode verificar a seguir.



ói . A ilha como tem os lados todos iguais dá a forma a um triângulo equilatero. Nós pasemos um ponto que corresponde a casa do Rui, e fomos fazer a distância da casa à cada uma das praias, de seguida fizemos a soma das distâncias que nos deu 9.51 . Nós depois mexemos "a casa" do Rui para outro local da ilha e fizemos novamente a soma das distâncias, e deu novamente 9.51. A conclusaõ a que chegámos foi que a qualquer ponto em que se encontra a casa do Rui a soma das distâncias é sempre igual. Logo a casa pode estar num sitio qualquer.

Tiago No mesmo triângulo marcámos outro ponto que equivale à casa do Tiago. Fizemos a distância da casa aos vértices e depois somámos as distâncias.

Nós pensámos que como saõ os vértices a casa devia estar no meio da ilha, entaõ fomos fazer a mediatriz e aseguir intreceptámos essas linhas e marcou-se um ponto mesmo no meio, então fomos fazer a distância desse ponto aos vértices e a soma, que deu 19.03.

Depois mexemos o ponto inicial (casa do tiago) para ver se a soma dava menos noutro ponto sem ser no meio, mas a verdade é que a casa só pode estar no meio.

**Figura 88: Resolução apresentada pelo grupo 1**

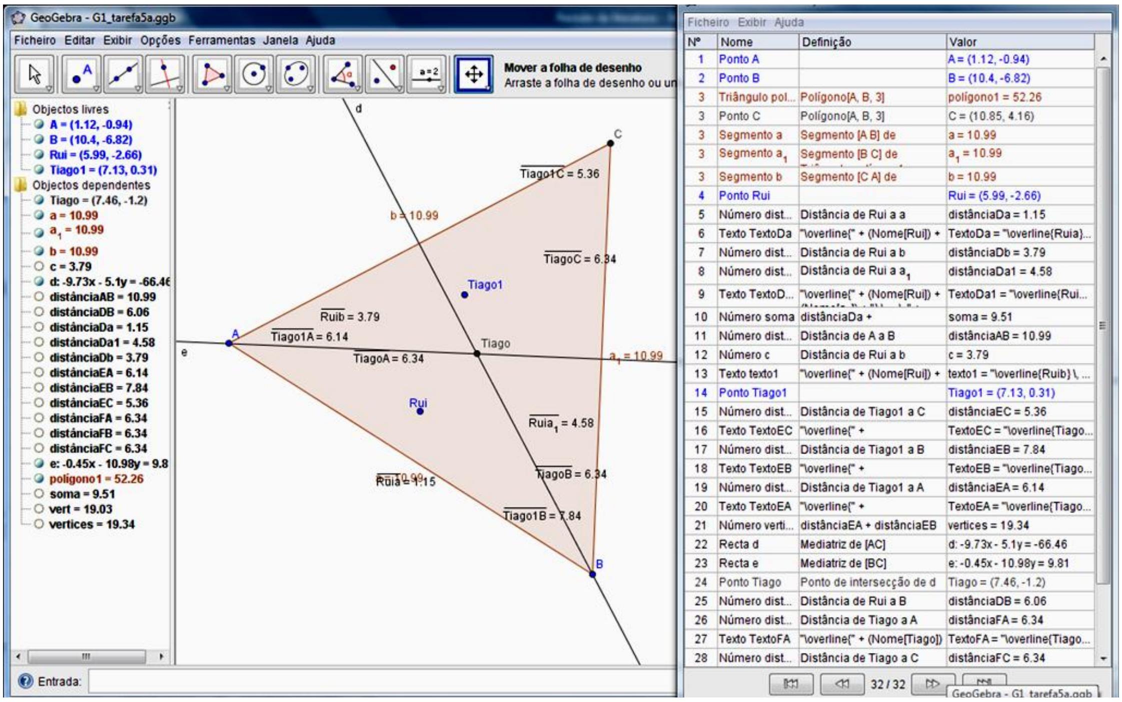
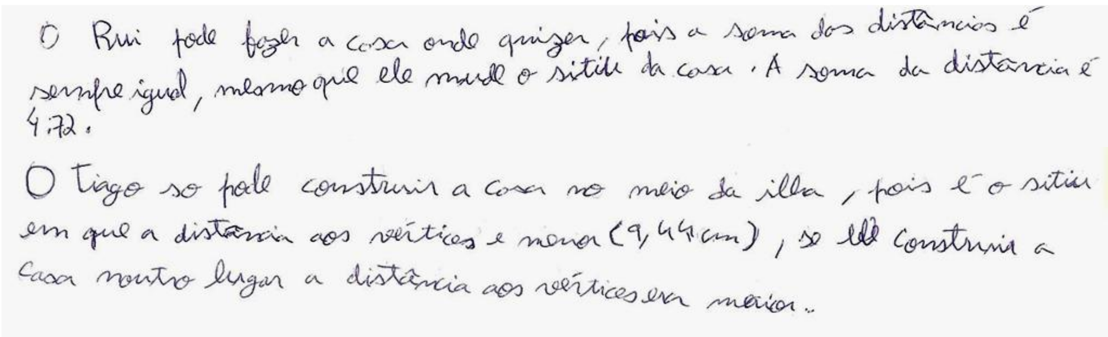



**Figura 89: Resolução do grupo 1 no GeoGebra**

O grupo 2 fez uma resolução semelhante à do grupo 1, a única diferença foi o facto de ter optado por fazer as resoluções em dois triângulos geometricamente iguais, utilizando a translação para construir o segundo triângulo. Este grupo não descreveu a sua resolução, apenas apresentou a solução, tal como se pode verificar na figura seguinte, apesar de a resolução ser visível no ficheiro do GeoGebra, criado por este grupo.


O Rui pode fazer a casa onde quizer, pois a soma das distâncias é sempre igual, mesmo que ele mude o sítio da casa. A soma da distância é 4.72.

O Tiago so pode construir a casa no meio da ilha, pois é o sítio em que a distância aos vértices é menor (9,44 cm), se ele construir a casa noutro lugar a distância aos vértices era maior.

**Figura 90: Solução descrita pelo grupo 2**

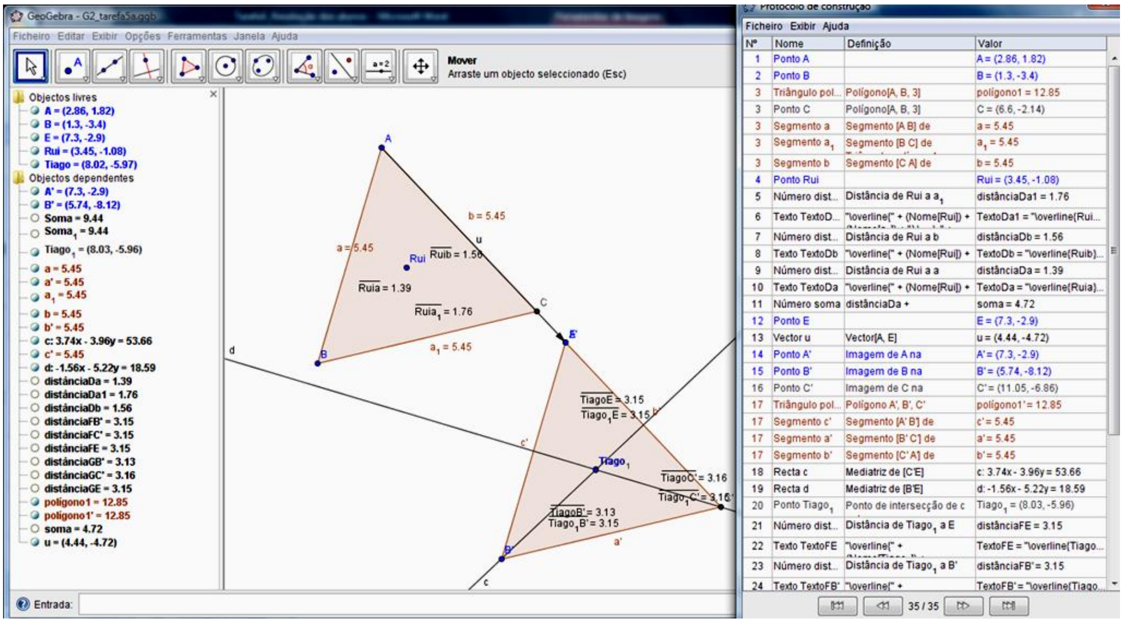



Figura 91: Resolução do grupo 2 no GeoGebra

O grupo 3 apresentou as duas resoluções em ficheiros separados. Na primeira resolução, para o Rui, construíram um triângulo equilátero, depois foram determinar os pontos médios dos lados do triângulo, uniram esses pontos com os vértices opostos do triângulo e construíram dois novos triângulos. De seguida marcaram um ponto sobre o lado comum aos dois triângulos anteriormente marcados e foram determinar a distância desse ponto a cada um dos vértices do triângulo, tendo determinado a soma dessas distâncias. Como, na altura em que estavam a resolver o problema, lhes perguntei se o Rui só poderia estar sobre aquele segmento de reta, os alunos decidiram marcar um novo ponto e determinaram as distâncias desse ponto aos vértices. Depois moveram o ponto e chegaram à conclusão seguinte:

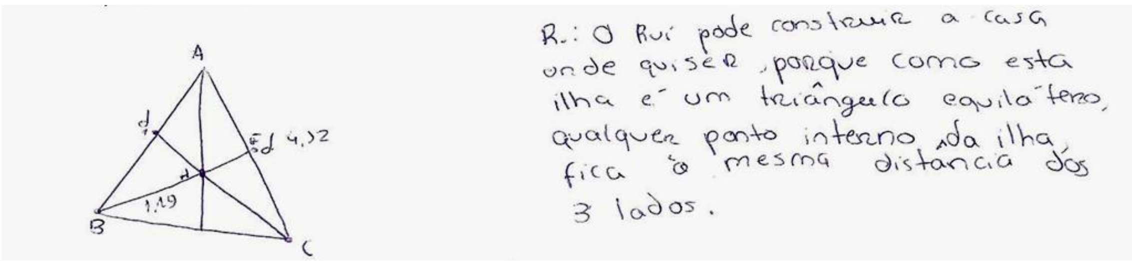



Figura 92: Solução 1 descrita pelo grupo 3

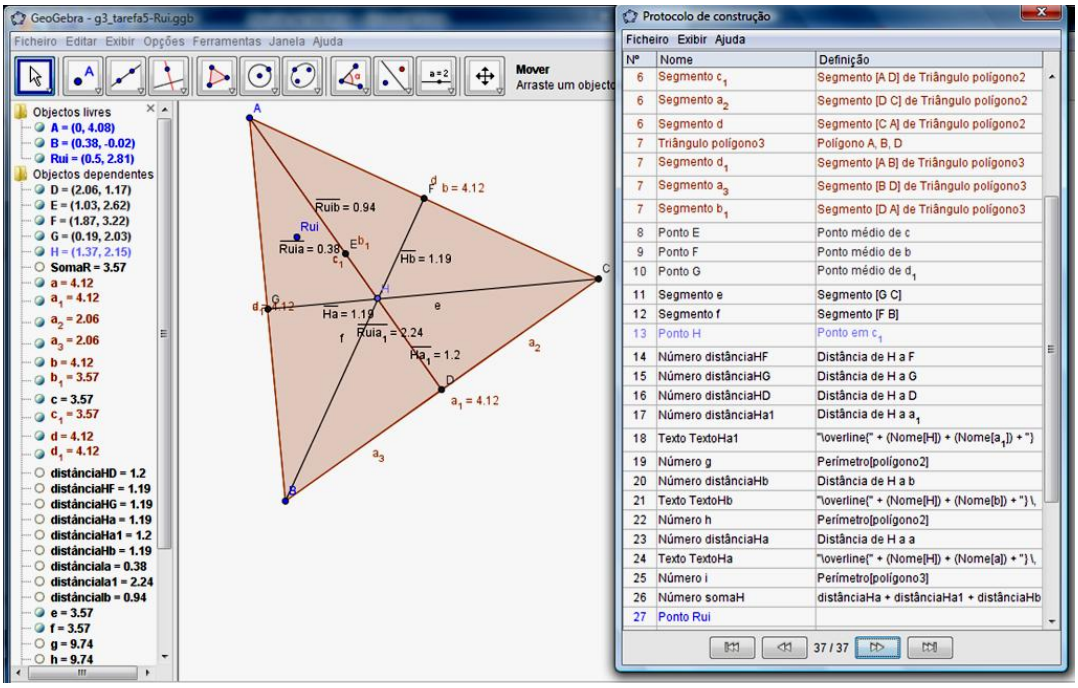



**Figura 93: Resolução 1 do grupo 3 no GeoGebra**

Na segunda resolução, para o Tiago, os alunos construíram o triângulo equilátero e foram determinar os pontos médios dos lados do triângulo. De seguida uniram esses pontos com os vértices opostos do triângulo e no ponto de intersecção desses segmentos de reta marcaram o ponto correspondente ao Tiago. De seguida foram determinar a distância desse ponto a cada um dos lados do triângulo e determinaram a soma dessas distâncias. Depois, foram marcar um outro ponto, no interior do triângulo e determinaram a soma das distâncias desse ponto a cada um dos lados do triângulo, tendo movido esse ponto de seguida. Assim, chegaram à seguinte conclusão:

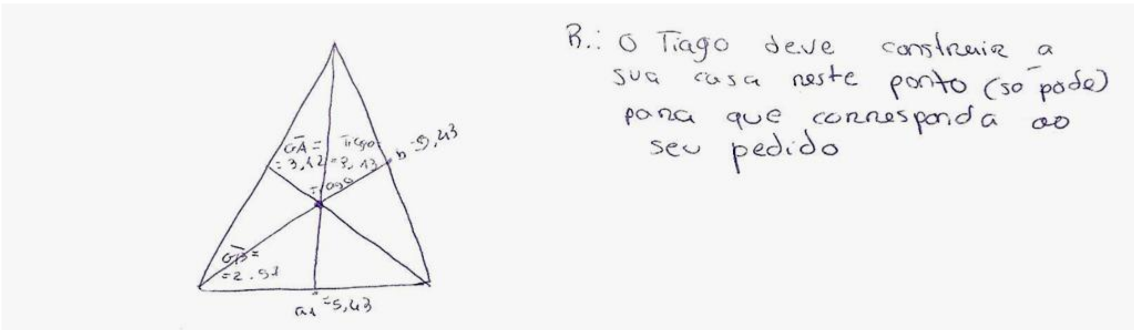



**Figura 94: Solução 2 apresentada pelo grupo 3**

A resolução no GeoGebra pode ser verificada através da figura seguinte.

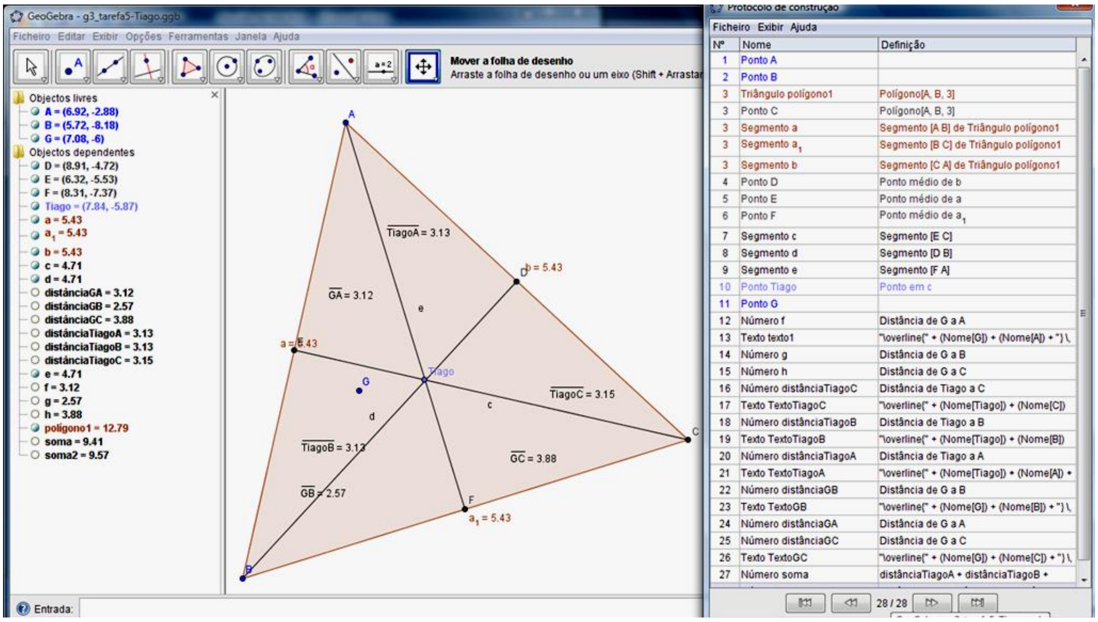


Figura 95: Resolução 2 do grupo 3 no GeoGebra

O grupo 4 não conseguiu concluir a sua resolução. Os alunos começaram por construir um triângulo equilátero. Depois marcaram novos pontos sobre os lados do triângulo e uniram um dos pontos com o vértice oposto. Sobre esse segmento de reta marcaram os pontos correspondentes ao Tiago e ao Rui. De seguida foram unir o ponto correspondente ao Tiago com dois dos vértices do triângulo, determinaram as distâncias do Tiago a cada um dos vértices e fizeram a soma desses valores. De seguida determinaram a distância do Rui a cada um dos lados do triângulo e somaram esses valores, não tendo apresentado nenhuma conclusão de seguida. Na figura seguinte apresenta-se a resolução deste grupo no GeoGebra.

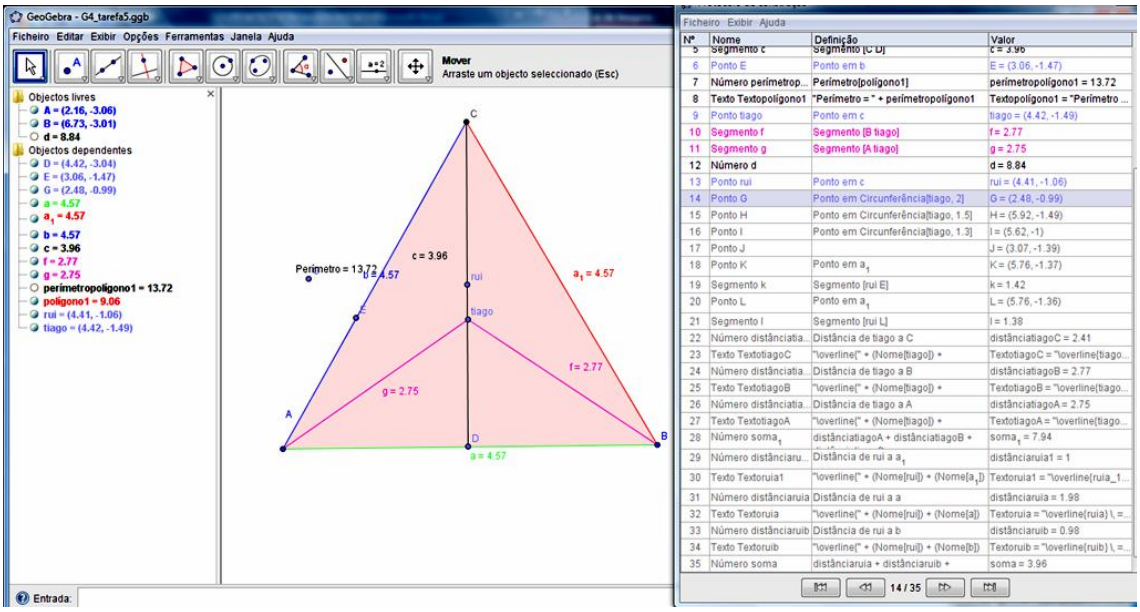
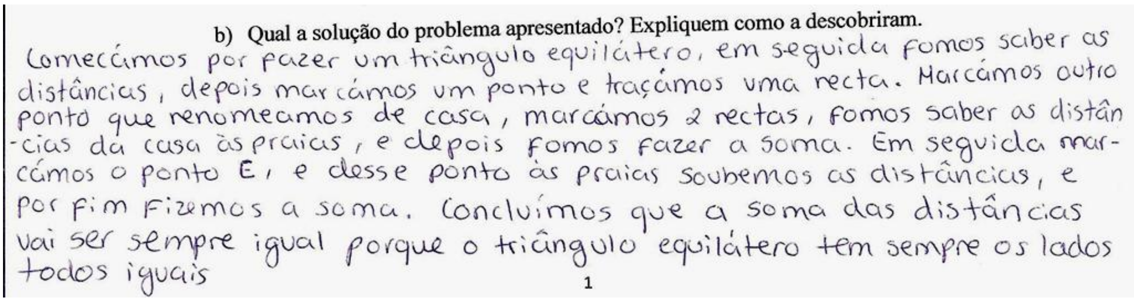


Figura 96: Resolução do grupo4 no GeoGebra

O grupo 5, tal como tinha acontecido com outros grupos, optaram por fazer a sua resolução em separado. Assim, a primeira resolução apresentada era a referente à casa do Rui. Começaram por construir um triângulo equilátero, definiram um ponto, ponto D, pertencente a um dos lados do triângulo e uniram esse ponto com o vértice oposto do triângulo. Depois sobre esse segmento de reta marcaram um ponto que chamaram casa, uniram esse ponto com os vértices do triângulo e calcularam a soma das distâncias da casa a cada uma das praias. Como eu perguntei se a casa só poderia ficar sobre aquele segmento de reta, os alunos decidiram marcar um outro ponto, calcular a soma das distâncias desse ponto a cada uma das praias e mover o ponto para ver o que acontecia. Chegaram então à conclusão que poderia ser construída em qualquer ponto do triângulo. Nas duas figuras seguintes apresentam-se a resolução descrita pelos alunos e a resolução no GeoGebra.


b) Qual a solução do problema apresentado? Expliquem como a descobriram.

Começámos por fazer um triângulo equilátero, em seguida fomos saber as distâncias, depois marcámos um ponto e traçámos uma recta. Marcámos outro ponto que renomeamos de casa, marcámos 2 rectas, fomos saber as distân-cias da casa às praias, e depois fomos fazer a soma. Em seguida mar-cámos o ponto E, e desse ponto às praias soubemos as distâncias, e por fim fizemos a soma. Concluímos que a soma das distâncias vai ser sempre igual porque o triângulo equilátero tem sempre os lados todos iguais

1

Figura 97: Resolução apresentada pelo grupo 5

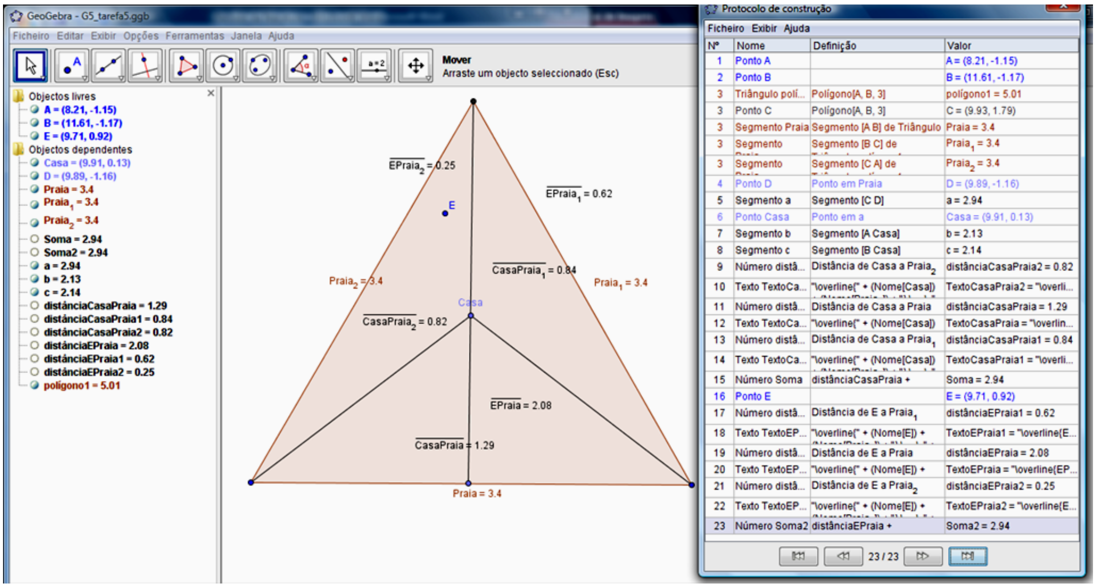



Figura 98: Resolução 1 do grupo 5 no GeoGebra

Para encontrar o local onde o Tiago deveria construir a sua casa, os alunos utilizaram uma resolução idêntica, mas no final determinaram a soma das distâncias do ponto aos vértices do triângulo. Este grupo não conseguiu concluir esta resolução, como se pode verificar pela imagem seguinte:

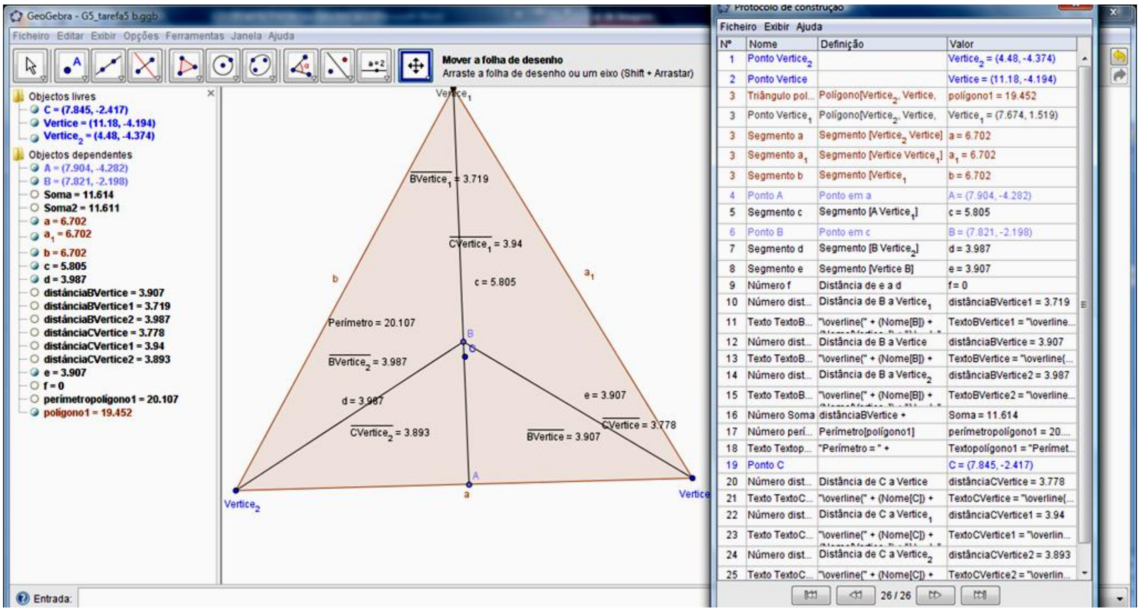


**Figura 99: Resolução 2 do grupo 5 no GeoGebra**

O grupo 6 também apresentou a sua resolução em dois ficheiros diferentes. Para determinar o local onde deveria ficar a casa do Rui, começaram por construir um triângulo equilátero. Depois marcaram um ponto correspondente à casa do Rui, determinaram as distâncias desse ponto a cada um dos lados do triângulo e somaram essas distâncias. Ao moverem o ponto verificaram que a casa poderia ser construída em qualquer local. Apesar de o grupo não ter explicado onde deveria ficar a casa, ao descrever a sua resolução, quando lhes perguntei se só podia ficar num sítio eles referiram que podia ser construída em qualquer local do triângulo. A resolução e o ficheiro do GeoGebra são apresentados nas figuras abaixo.

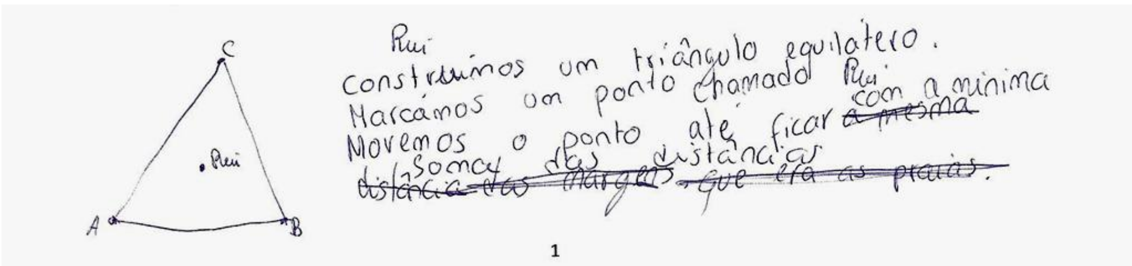



**Figura 100: Resolução 1 apresentada pelo grupo 6**

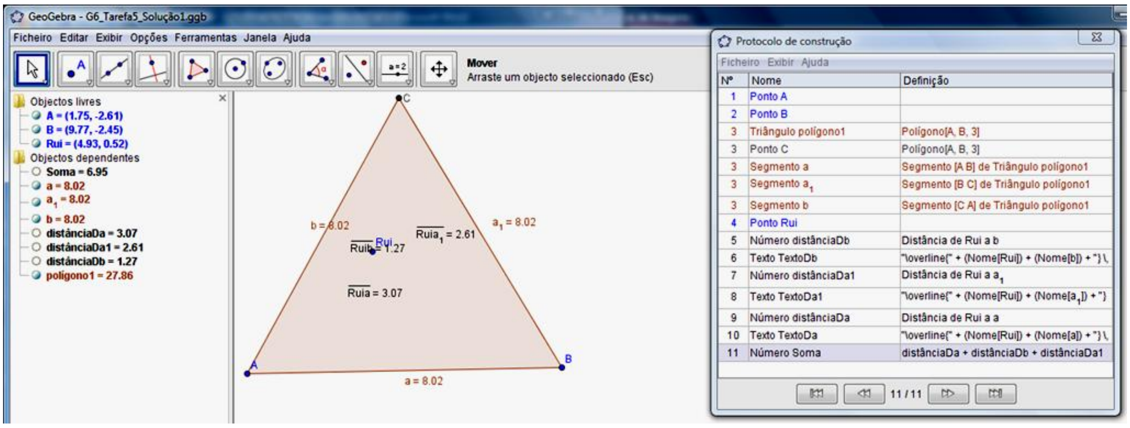



**Figura 101: Resolução 1 do grupo 6 no GeoGebra**

Para resolver o problema referente ao Tiago, os alunos procederam de forma semelhante, mas não conseguiram determinar o local exato onde deveria ficar a casa do Tiago, uma vez que se consegue encontrar um local onde a distância é menor. Apresenta-se de seguida a resolução descrita pelos alunos e a resolução no GeoGebra.

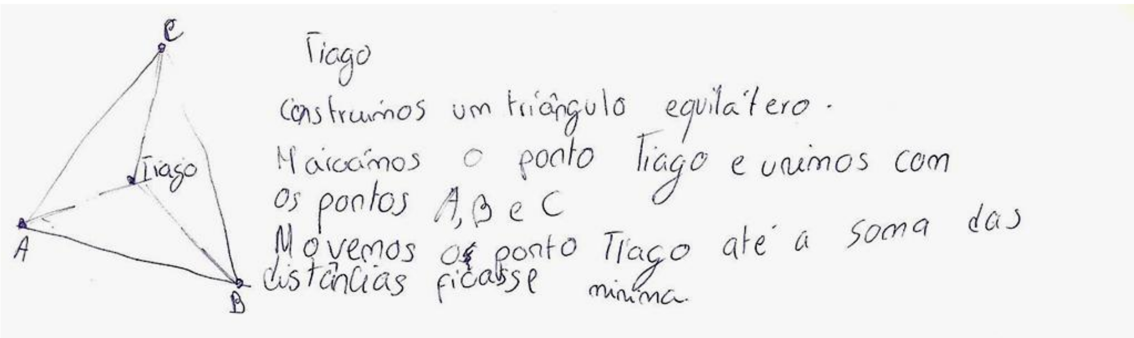



**Figura 102: Resolução 2 apresentada pelo grupo 6**

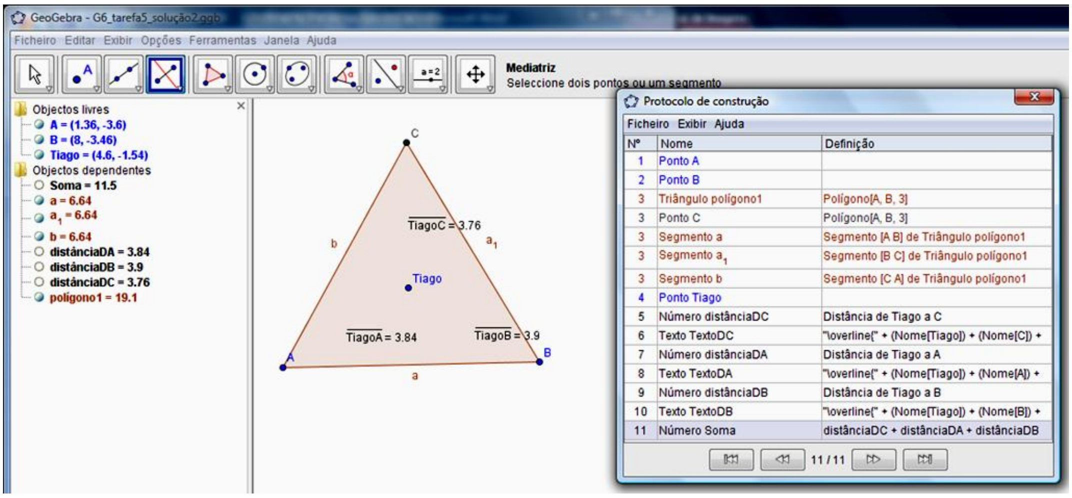



**Figura 103: Resolução 2 do grupo 6 no GeoGebra**

Durante a apresentação das resoluções dos diferentes grupos, perguntei o que é a mediatriz, uma vez que estes alunos ainda não aprenderam o que são lugares geométricos. A Anaísa, do grupo 2, respondeu que era uma reta que divide um segmento de reta ao meio. Eu acrescentei que a mediatriz de um segmento de reta é de facto uma reta em que todos os pontos estão a igual distância dos extremos do segmento de reta.

Questionei ainda os alunos se, para o caso do Rui, a casa poderia ser construída no exterior do triângulo. Os alunos riram-se e responderam que não, porque a casa iria ser construída dentro de água e para além disso a soma das distâncias ia ser superior à pretendida.

Na tabela seguinte apresenta-se uma análise da caracterização das resoluções efetuadas pelos alunos.

| | | | **G1** | **G2** | **G3** | **G4** | **G5** | | **G6** | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | **Rui** | **Tiago** | **Rui** | **Tiago** |
| **Caracterização das resoluções** | Adequação | Sim | X | X | X | | X | | X | |
| | | Não | | | | X | | X | | X |
| | Rigor | Sim | X | X | X | NC | X | NC | X | NC |
| | | Não | | | | NC | | NC | | NC |
| | Robustez | Sim | X | X | X | NC | X | NC | X | NC |
| | | Não | | | | NC | | NC | | NC |

**Tabela 15: Caracterização das resoluções relativas à tarefa 5**

Observando a tabela 15, pode-se verificar que apenas o grupo 4 não concluiu a sua resolução, pelo que as suas construções não exprimem os dados do problema. Em relação aos restantes grupos, uma vez que os grupos 5 e 6 apresentaram dois ficheiros diferentes para a resolução referente ao *Rui* e o *Tiago*, houve a necessidade de as analisar separadamente. Assim, em relação à adequação, apenas as resoluções dos grupos 5 e 6 relativas ao Tiago e a resolução do grupo 4 não são adequadas, não exprimindo o problema dado, isto porque estes alunos não completaram as suas resoluções. Quanto à robustez e ao rigor, verifica-se que as resoluções apresentadas pelos grupos 1, 2 e 3 e as dos grupos 5 e 6 relativas ao Rui, mantêm as suas propriedades quando se manipula qualquer objeto livre e permitem uma resposta rigorosa.

Na tabela seguinte, pode-se observar as estratégias de resolução utilizadas pelos diferentes grupos.

| | | G1 | G2 | G3 | G4 | G5 | G6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Estratégias de resolução** | Descobrir um padrão, uma regra ou lei de formação | | | | | | |
| | Fazer tentativas/ Fazer conjeturas | | | | | | |
| | Trabalhar do fim para o princípio | | | | | | |
| | Usar dedução lógica ou fazer eliminação | | | | | | |
| | Reduzir a um problema mais simples | | | | | | |
| | Fazer uma simulação ou uma experimentação | X | X | X | | X | X |
| | Fazer um diagrama ou esquema | X | X | X | X | X | X |
| | Fazer uma lista organizada ou uma tabela | | | | | | |

**Tabela 16: Estratégias de resolução utilizadas na tarefa 5**

Analisando a tabela 16 pode-se observar que o grupo 4 apenas utilizou a estratégia de *Fazer um diagrama ou esquema*, enquanto que os outros grupos optaram por utilizar ao mesmo tempo *Fazer uma simulação ou uma experimentação*.

Em relação à formulação de novos problemas, mais uma vez se verificou que a maioria dos alunos pegou no problema inicial e fez-lhe pequenas alterações como se pode constatar nas figuras a seguir apresentadas.

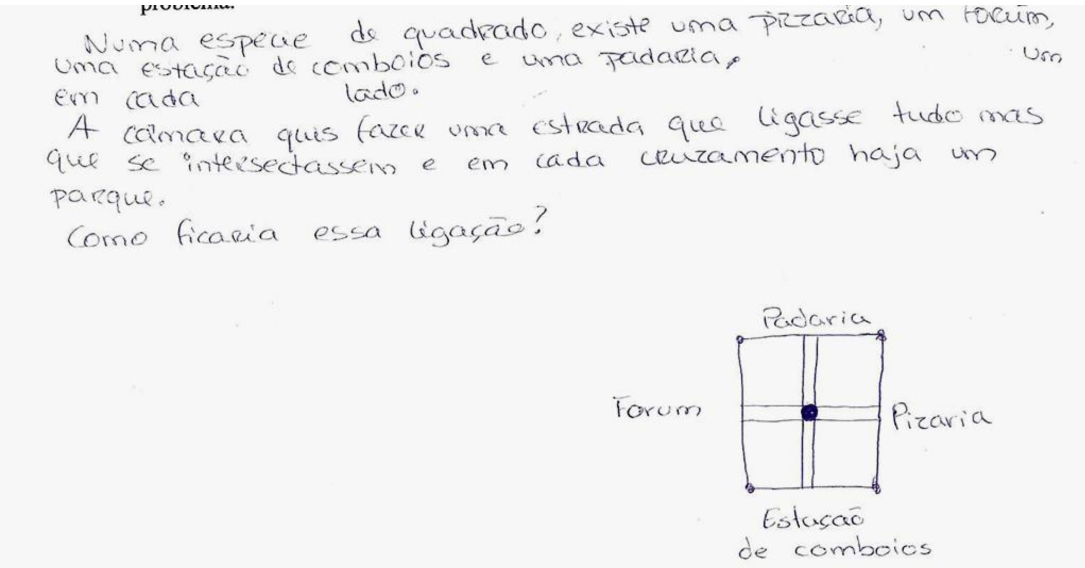



**Figura 104: Problema formulado pelo grupo 1**

Duas senhoras, Carolina e Amaísa compraram casas num bairro
em forma de quadrado, a Amaísa gostava muito de compras mas a
Carolina gostava de viajar. Resolveram comprar cada uma a sua casa e
começaram a pensar qual era o melhor lugar, como o bairro estava
coberto de muitas casas, tinham que comprar a casa que tinha
melhor deslocação. A Amaísa queria ir todos os dias ao centro comercial
lareira quatro centros comerciais correspondendo cada um a um lado do
quadrado, para ter o menor trabalho a escolher a casa, a Amaísa decidiu
escolher a que estivesse num ponto do bairro tal que a soma das
distâncias da casa aos quatro centros comerciais fosse a menor possível.
A Carolina queria ir todos os dias viajar e as estradas ficavam em
cada vértice do bairro. Queria por isso construir a casa num local
tal que a soma que a soma das distâncias aos vértices fosse a
menor possível.

2

Em que local deveria a Amaísa construir a casa? E a Carolina?

**Figura 105: Problema formulado pelo grupo 2**

c) Inspirados no problema que acabaram de resolver, formulem um outro problema. Uma mosca está presa por uma teia e quer pousar numa tarte que está a três metros. Como a teia pesa muito, a mosca demora 0,5 s ~~a cada~~ cada vez que bate as asas.
Quanto tempo é que vai demorar ao todo?

**Figura 106: Problema formulado pelo grupo 3**

c) Inspirados no problema que acabaram de resolver, formulem um outro problema. ~~Doi~~ Duas meninas, Anabela e Rita, foram parar ~~ao mar~~ a um deserto em forma de triângulo equilátero. A Anabela gostava muito de apanhar sol e resolveu passar uns anos no deserto. A Rita só pensava em salvar-se, pelo que estava sempre em cima de um monte para ver se passava alguém. Resolveram construir cada uma a sua casa e começaram a pensar qual seria o melhor lugar. Como deserto estava coberto de cactos sem picos, ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ A Anabela queria todos os dias apanhar sol. Havia 3 lugares no deserto que apanhavam muito sol correspondendo cada um a um dos lados do triângulo. Para ter o menor ~~trabalho~~ andar possível, a Anabela decidiu construir a sua casa no ponto do deserto que apanhava mais horas de sol, tal que a soma do tempo que ela demora-se a chegar à zona. A Rita queria ir todos os dias para o monte ver se passa alguém. Queria por isso construir a casa num local onde fosse mais alto, tal que a soma das distâncias ao monte fosse a menor possível. Em que local deveria a Anabela construir a casa? E a Rita?

**Figura 107: Problema formulado pelo grupo 5**

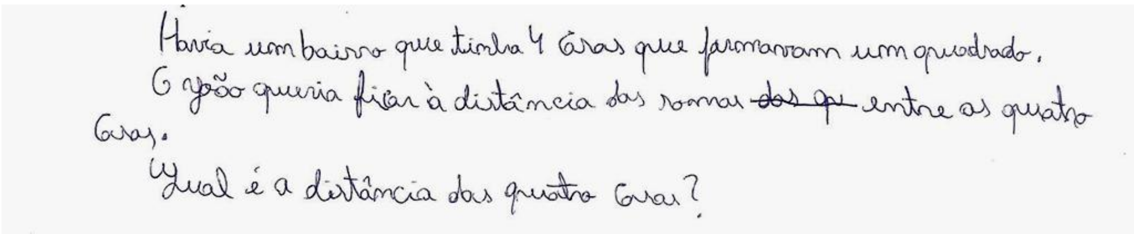

Havia um bairro que tinha 4 casas que formavam um quadrado.
O João queria ficar à distância das ruas ~~dos que~~ entre as quatro casas.
Qual é a distância das quatro casas?

**Figura 108: Problema formulado pelo grupo 6**

É de salientar que o grupo 4 não formulou nenhum problema, mais uma vez devido à falta de tempo e à dificuldade em respeitar as opiniões dos colegas. Analisando os problemas formulados pelos grupos 3 e 6, parece que faltam dados para que seja possível resolver esses problemas.

Na tabela seguinte apresenta-se a análise referente aos problemas formulados pelos alunos.

| | | | G1 | G2 | G3 | G4 | G5 | G6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Formulação de problemas** | Variação do problema dado | Variar os dados | | X | | | | X(NC) |
| | | Variar as condições | | | | | | |
| | | Variar o contexto | | X | | | X | X(NC) |
| | Problema Novo | | X | | X(NC) | | | |

**Tabela 17: Formulação de problemas (Tarefa 5)**

Após a análise da tabela 17 verifica-se que os problemas formulados pelos grupos 3 e 6 não estão muito percetíveis, aparentando faltar dados. O grupo 2 optou por modificar o contexto do problema proposto e ao mesmo tempo alterar os dados. O grupo 5 alterou apenas o contexto do problema inicialmente proposto. O grupo 1 formulou um problema que nada tinha a ver com o problema inicial, tendo apresentado criatividade no mesmo.

No final da aula os alunos referiram que este problema tinha sido fácil, ao contrário do que tinha acontecido com o problema anterior.

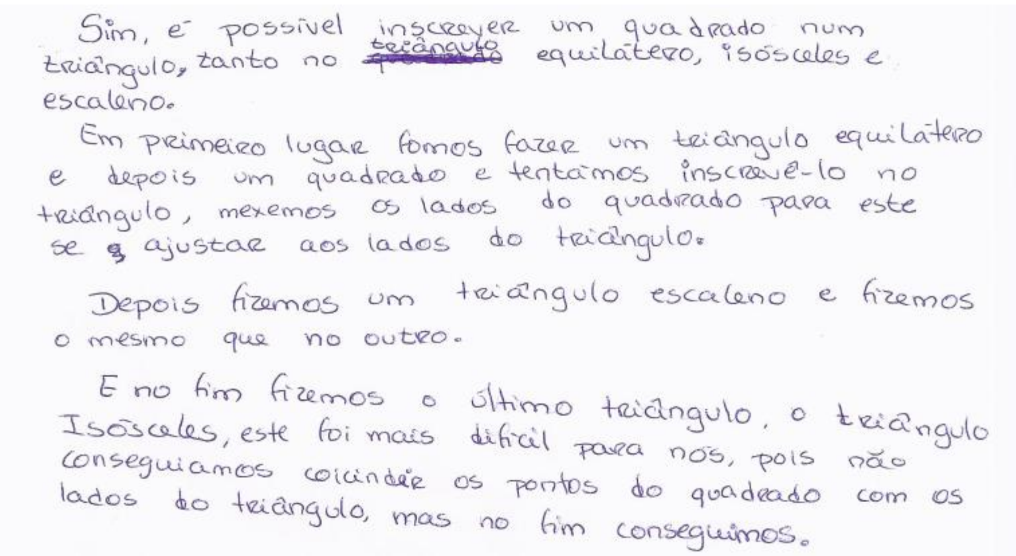
### Tarefa 6: Um quadrado inscrito num triângulo

Nesta tarefa os alunos tinham de descobrir se é sempre possível, ou não, inscrever um quadrado num triângulo. Inicialmente alguns alunos começaram por construir um quadrado e depois o triângulo e moviam um e outro até conseguirem inscrever o quadrado no triângulo. Tive de chamar a atenção para que construíssem primeiro um triângulo e só depois tentassem inscrever um quadrado sem mexer mais no triângulo. A maioria dos grupos fez apenas para um caso específico e chamaram-me para dizer que já tinham terminado. Quando lhes perguntei se era sempre possível inscrever um quadrado num triângulo, os alunos perceberam que tinham de verificar para diferentes casos e continuaram a fazer construções. Durante a resolução deste problema foram-se ouvindo vários comentários e feitas várias questões, como por exemplo:

**António (grupo 4):** Pode ser um triângulo qualquer ou tem de ser equilátero?
**Professora:** A pergunta é se será sempre possível inscrever um quadrado num triângulo, por isso vejam o que têm de fazer.
**Margarida (grupo 5):** Já fizemos três triângulos! É preciso fazer mais?
**Grupo 2:** Isto é muito fácil!
**Grupo 1:** Já fizemos para o triângulo equilátero e para o isósceles, falta para o escaleno! Mas vai dar de certeza!
**Micaela (grupo 1):** Professora, deu certo!

Todos os grupos concluíram que era sempre possível inscrever um quadrado num triângulo e apresentaram vários exemplos para justificar esta afirmação.

O grupo 1 começou a sua resolução por construir um triângulo equilátero. De seguida marcaram dois pontos sobre dois lados do triângulo e foram construir um quadrado cuja medida do comprimento dos lados é igual à distância de A a B. Depois moveram os lados do quadrado de forma a que os lados deste ficassem sobre os lados do triângulo. Os alunos descrevem de seguida a sua resolução para cada tipo de triângulo.


Sim, é possível inscrever um quadrado num triângulo, tanto no triângulo equilátero, isósceles e escaleno.

Em primeiro lugar fomos fazer um triângulo equilátero e depois um quadrado e tentámos inscrevê-lo no triângulo, mexemos os lados do quadrado para este se ajustar aos lados do triângulo.

Depois fizemos um triângulo escaleno e fizemos o mesmo que no outro.

E no fim fizemos o último triângulo, o triângulo Isósceles, este foi mais difícil para nós, pois não conseguíamos coincidir os pontos do quadrado com os lados do triângulo, mas no fim conseguimos.

**Figura 109: Resolução apresentada pelo grupo 1**

Ao observar a resolução realizada no GeoGebra, verifica-se que ao mover um dos lados do triângulo, o quadrado não se move também, ou seja, a construção “desmancha-se”. Isto deve-se ao facto de os alunos não terem construído o quadrado a partir dos lados do triângulo. A resolução dos alunos no GeoGebra pode ser verificada de seguida.

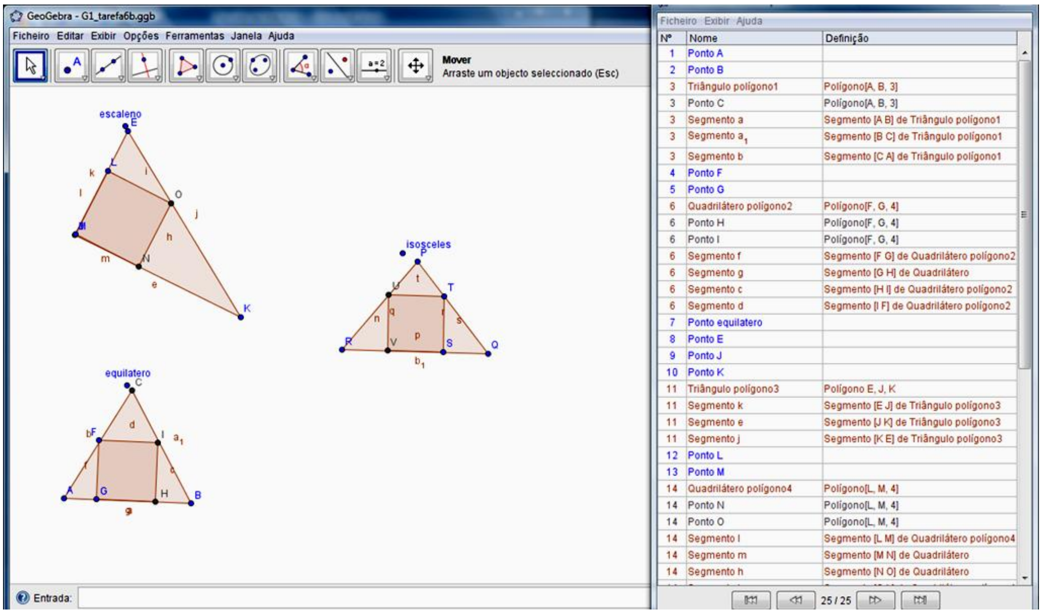



**Figura 110: Resolução do grupo 1 no GeoGebra**

O grupo 2 tentou fazer várias resoluções. Numa delas os alunos perguntaram-me se não haveria outra forma de construir o quadrado sem ser através do polígono regular, pois já tinham procedido dessa forma para inscrever o quadrado no triângulo equilátero e no triângulo isósceles. Perguntei-lhes então, o que é que caracteriza um quadrado. Os alunos responderam que os lados têm de ser todos iguais e paralelos dois a dois e cada ângulo interno do quadrado tem de amplitude 90º. Então disse-lhes para usarem esse conhecimento. Depois de várias tentativas os alunos construíram o triângulo. De seguida marcaram um ponto, ponto R, sobre um dos lados do triângulo e construíram uma reta paralela a um dos outros dois lados do triângulo e que passava por esse ponto. Posteriormente construíram a reta perpendicular à reta anteriormente traçada e que passava pelo ponto R e foram descobrir o ponto de intersecção dessa reta com o lado do triângulo (ponto S). Depois foram construir o quadrado cuja medida do comprimento dos lados é igual à distância do ponto R ao ponto S e moveram esse quadrado até que ele ficasse inscrito no triângulo. A resolução descrita pelo grupo e no GeoGebra apresenta-se nas figuras seguintes.

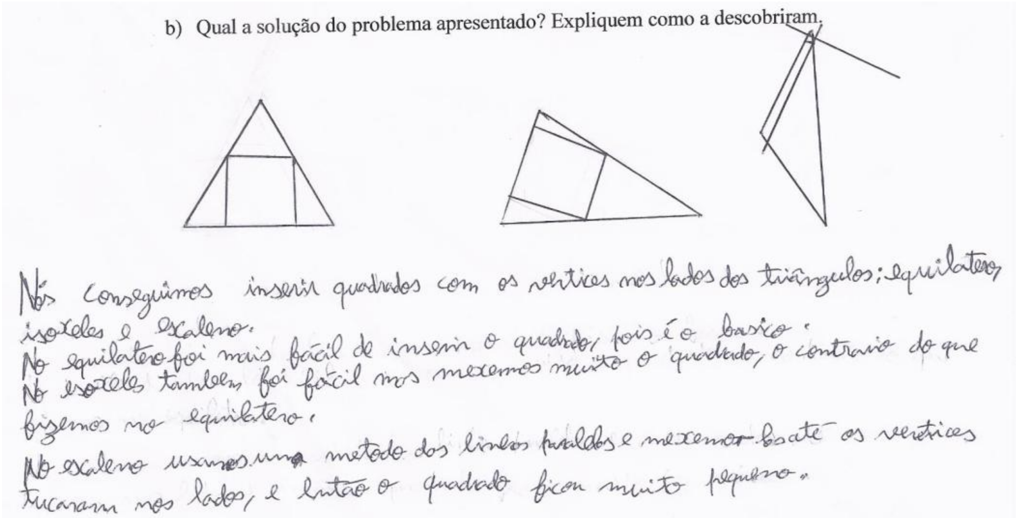



**Figura 111: Resolução apresentada pelo grupo 2**

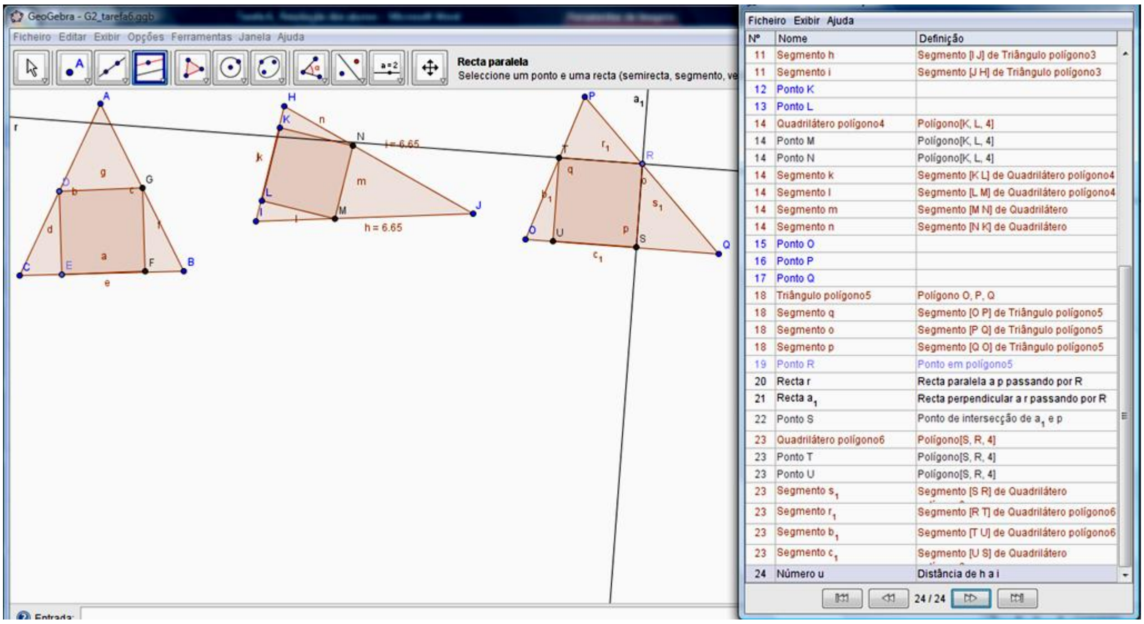



**Figura 112: Resolução do grupo 2 no GeoGebra**

O grupo 3 também construiu vários triângulos e depois foi tentar inscrever, em cada um deles, um quadrado. Para os triângulos escaleno e isósceles, os alunos construíram o triângulo, marcaram dois pontos sobre um dos lados do triângulo, e construíram o quadrado correspondente, que tinha como medida do comprimento dos lados a distância entre esses dois pontos. Por fim, tiveram de mover o quadrado até conseguirem inscrevê-lo no triângulo. Esta resolução pode ser visualizada na figura seguinte.

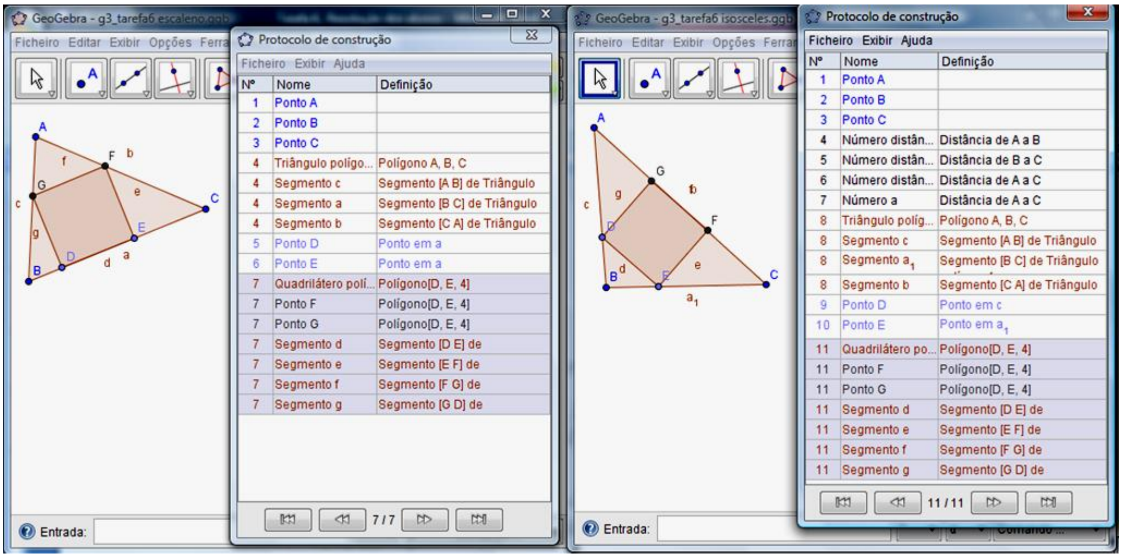



**Figura 113: Resolução 1 do grupo 3 no GeoGebra**

Para o caso do triângulo retângulo, este grupo optou por construir o segmento de reta definido por dois pontos. De seguida os alunos traçaram a reta perpendicular a esse segmento de reta que passa por um dos seus extremos. Sobre essa reta marcaram um ponto (ponto D) e construíram o triângulo retângulo. Depois, marcaram um ponto sobre um dos lados do triângulo e construíram o quadrado cuja medida do comprimento dos seus lados é igual à distância desse ponto a um dos vértices do triângulo. Por fim moveram o quadrado até que ele ficasse inscrito no triângulo. A seguir apresenta-se as conclusões a que o grupo chegou e a resolução anteriormente descrita no GeoGebra.

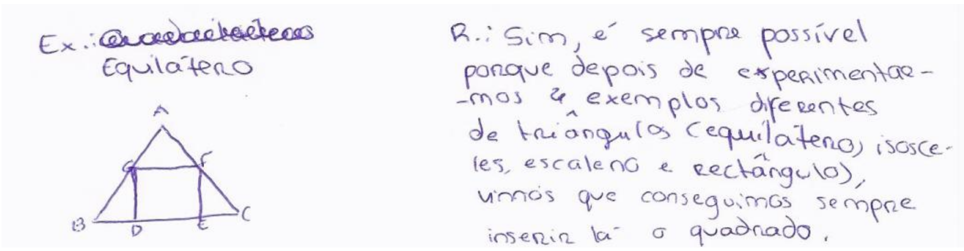



**Figura 114: Conclusões apresentadas pelo grupo 3**

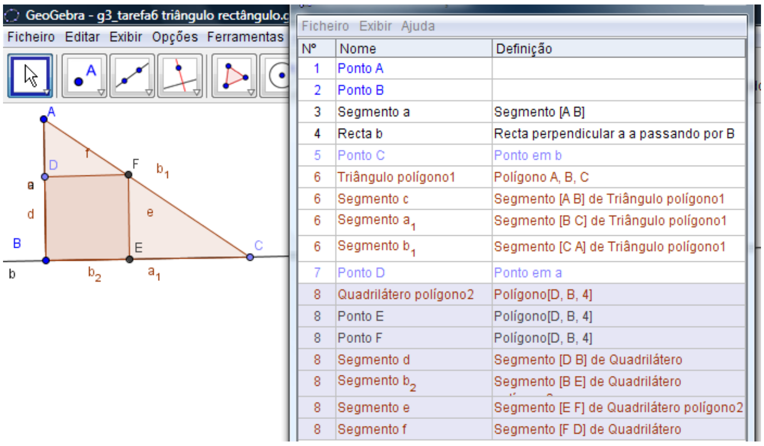



**Figura 115: Resolução 2 do grupo 3 no GeoGebra**

O grupo 4 optou, tal como tinha acontecido com outros grupos, por construir um triângulo qualquer, depois marcou dois pontos sobre um dos lados do triângulo e construiu o quadrado cuja medida do comprimento dos lados do quadrado era igual à distância entre esses dois pontos. Por fim moveram o quadrado de forma a inscreve-lo no triângulo. Nas figuras seguintes pode-se observar a resolução e as conclusões descrita por este grupo bem como a resolução efetuada no GeoGebra.

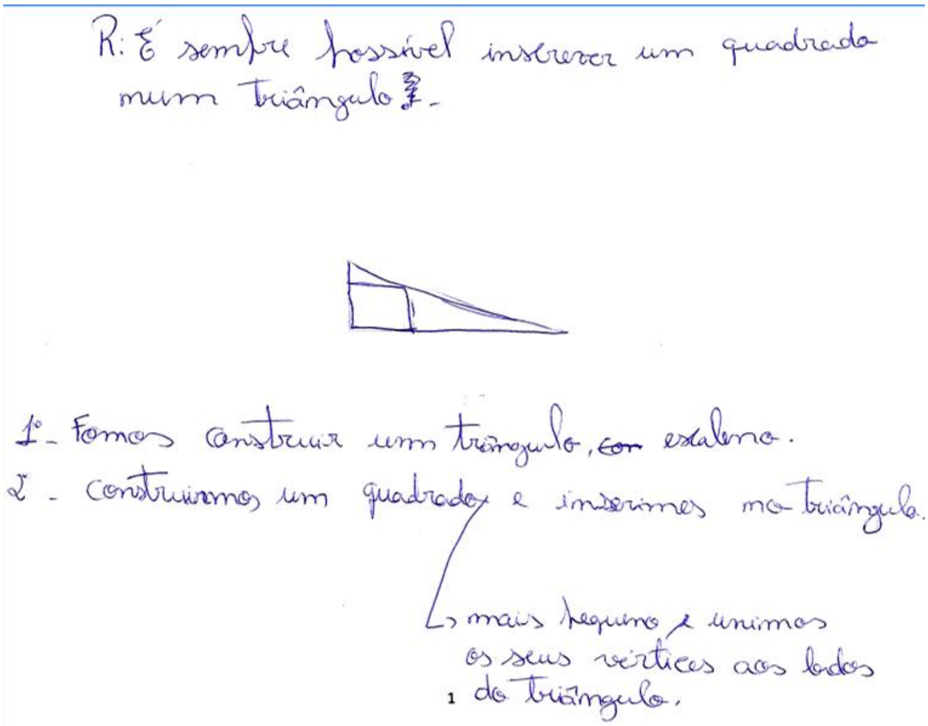



**Figura 116: Resolução apresentada pelo grupo 4**

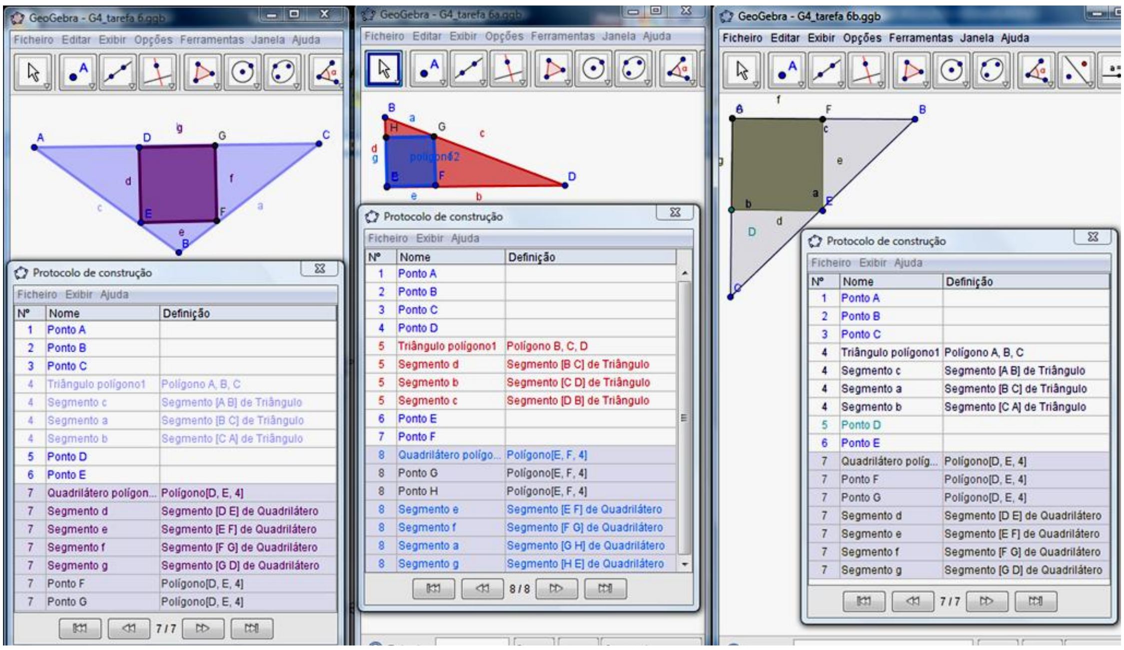



**Figura 117: Resolução do grupo 4 no GeoGebra**

A resolução adotada pelo grupo 5 foi idêntica à utilizada pelo grupo 4. O grupo descreve de seguida a sua resolução e as conclusões a que chegaram.

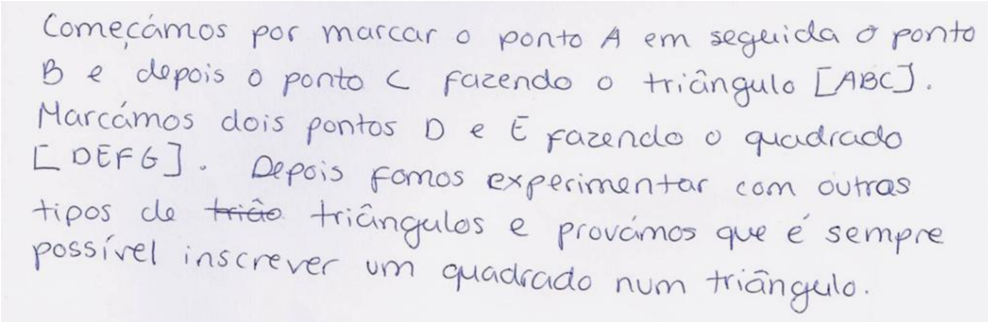

Começámos por marcar o ponto A em seguida o ponto B e depois o ponto C fazendo o triângulo [ABC]. Marcámos dois pontos D e E fazendo o quadrado [DEFG]. Depois fomos experimentar com outros tipos de ~~triâo~~ triângulos e provámos que é sempre possível inscrever um quadrado num triângulo.

**Figura 118: Resolução apresentada pelo grupo 5**

De seguida apresentam-se as resoluções deste grupo utilizando o GeoGebra, para os vários triângulos que construíram.

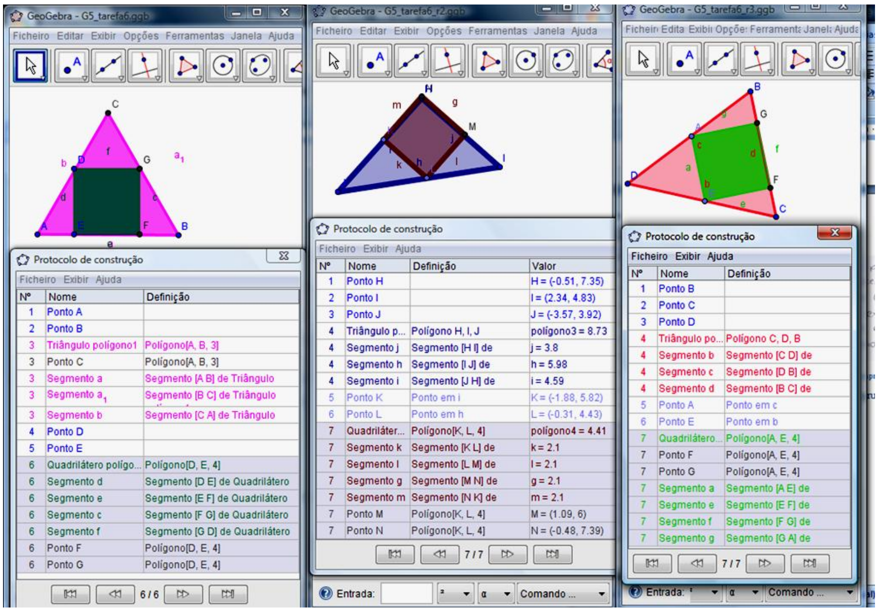



**Figura 119: Resolução do grupo 5 no GeoGebra**

Também o grupo 6 adotou o mesmo tipo de resolução apresentada pelos dois grupos anteriores. Como se pode verificar nas duas figuras a seguir apresentadas.

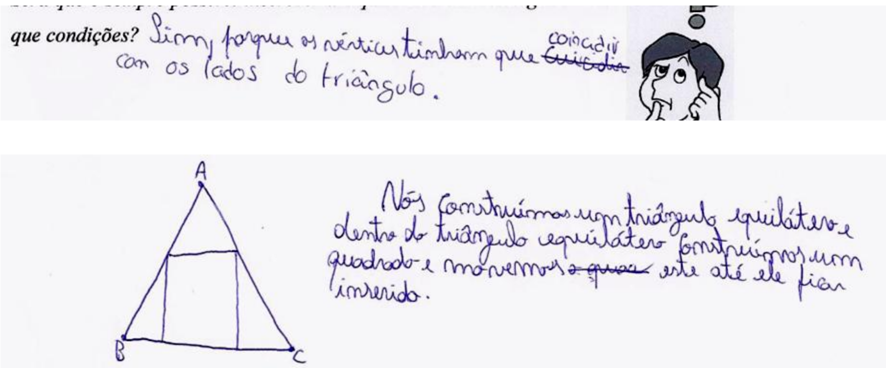



**Figura 120: Resolução apresentada pelo grupo 6**

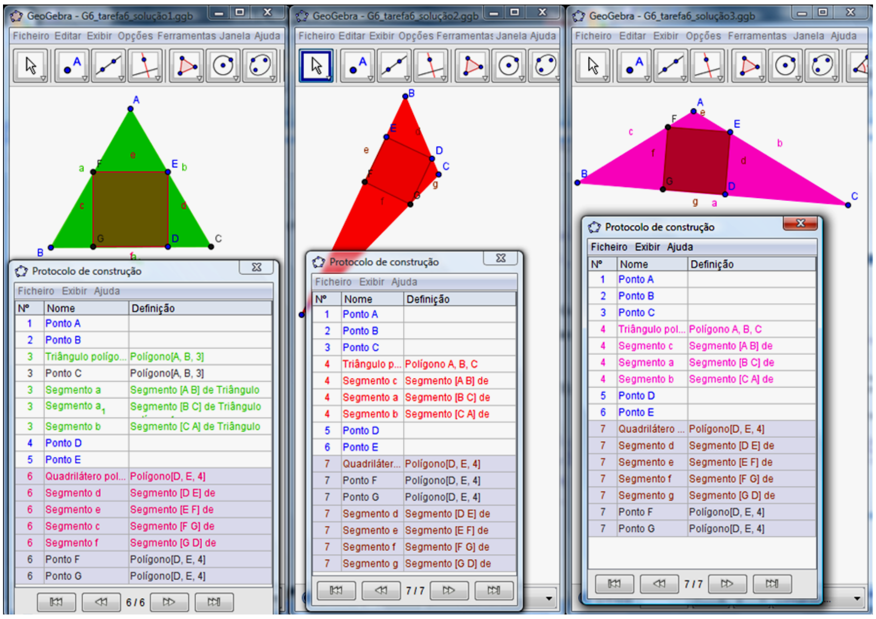


**Figura 121: Resolução do grupo 6 no GeoGebra**

Durante a apresentação das várias resoluções, os alunos foram-se apercebendo que quando se movia o triângulo, na maioria das construções efetuadas, o quadrado mantinha-se fixo, ou seja, a construção efetuada "desmanchava-se". Assim, depois de todos os grupos apresentarem as suas resoluções, a turma elegeu a resolução do grupo 2 como a mais eficaz e mais rápida.

Na tabela seguinte apresenta-se uma análise da caracterização das resoluções efetuadas pelos alunos.

| | | | G1 | G2 | G3 | | G4 | G5 | G6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | T qq | T rect | | | |
| Caracterização das resoluções | Adequação | Sim | X | X | X | X | X | X | X |
| | | Não | | | | | | | |
| | Rigor | Sim | X | X | X | X | X | X | X |
| | | Não | | | | | | | |
| | Robustez | Sim | | | | X | | | |
| | | Não | X | X | X | | X | X | X |

**Tabela 18: Caracterização das resoluções relativas à tarefa 6**

Analisando a tabela 18, pode-se verificar que todas as resoluções apresentadas são adequadas e permitem uma resposta rigorosa. Em relação à robustez, apenas o grupo 3, na resolução referente ao triângulo retângulo, conseguiu fazer uma construção robusta, uma vez que, na construção dos restantes grupos, manipulando um dos objetos livres, a construção não mantém as suas propriedades.

Na tabela seguinte, pode-se observar as estratégias de resolução utilizadas pelos diferentes grupos.

| | | G1 | G2 | G3 | G4 | G5 | G6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Estratégias de resolução** | Descobrir um padrão, uma regra ou lei de formação | | | | | | |
| | Fazer tentativas/ Fazer conjeturas | X | X | X | X | X | X |
| | Trabalhar do fim para o princípio | | | | | | |
| | Usar dedução lógica ou fazer eliminação | | | | | | |
| | Reduzir a um problema mais simples | | | | | | |
| | Fazer uma simulação ou uma experimentação ou uma dramatização | | | | | | |
| | Fazer um diagrama ou esquema | X | X | X | X | X | X |
| | Fazer uma lista organizada ou uma tabela | | | | | | |

**Tabela 19: Estratégias de resolução utilizadas na tarefa 6**

Analisando a tabela 19, relativa às estratégias de resolução utilizadas pelos diferentes grupos na resolução do problema da tarefa 6, pode-se observar que todos os grupos optaram por *Fazer um diagrama ou esquema* e ao mesmo tempo *Fazer tentativas/ Fazer conjeturas*.

Em relação à formulação de novos problemas, os alunos voltaram a ser pouco criativos, limitando-se, na sua maioria, a fazer pequenas alterações ao problema inicial, como se pode verificar nas imagens a seguir apresentadas.

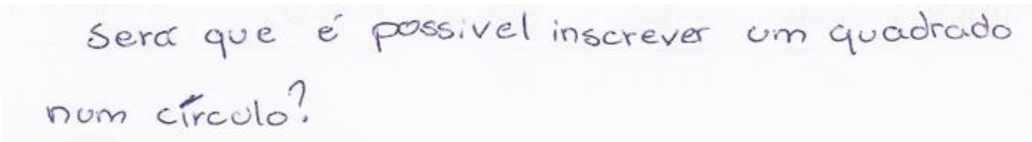

Será que é possível inscrever um quadrado num círculo?

**Figura 122: Problema formulado pelo grupo 1**

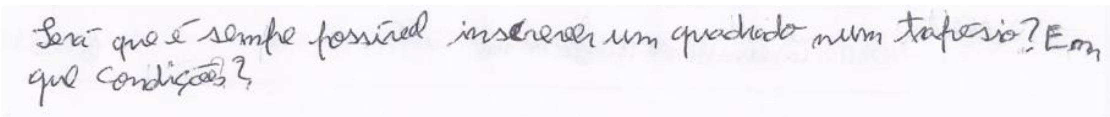

Será que é sempre possível inscrever um quadrado num trapézio? Em que condições?

**Figura 123: Problema formulado pelo grupo 2**

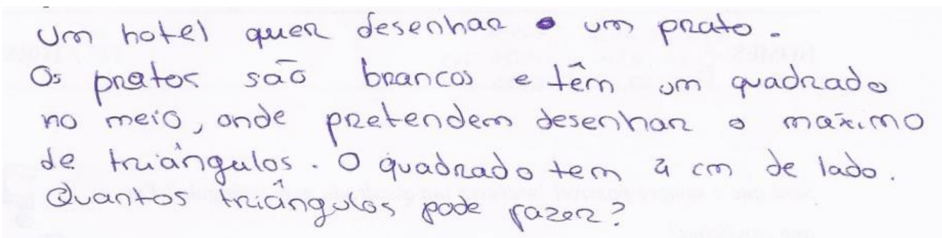

Um hotel quer desenhar o um prato.
Os pratos são brancos e têm um quadrado no meio, onde pretendem desenhar o máximo de triângulos. O quadrado tem 4 cm de lado.
Quantos triângulos pode fazer?

**Figura 124: Problema formulado pelo grupo 3**

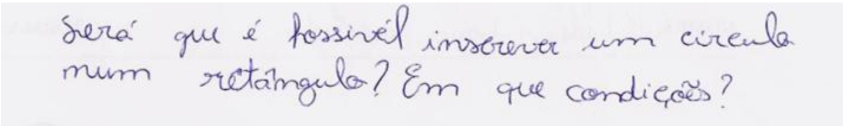

Será que é possivél inscrever um circulo num retângulo? Em que condições?

**Figura 125: Problema formulado pelo grupo 4**

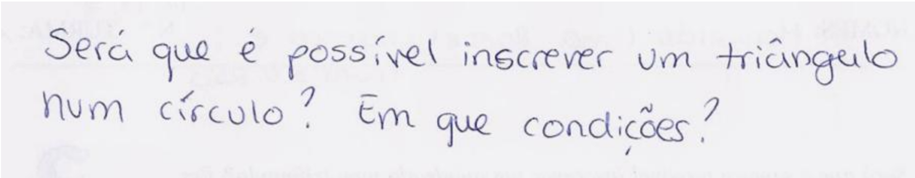

Será que é possível inscrever um triângulo num círculo? Em que condições?

**Figura 126: Problema formulado pelo grupo 5**

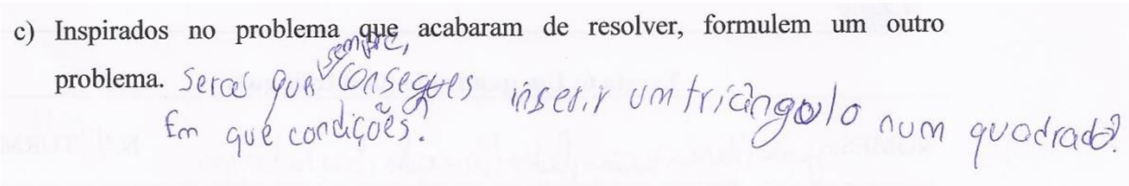

c) Inspirados no problema que acabaram de resolver, formulem um outro problema. Seras que consegues sempre, inserir um triângulo num quadrado? Em que condições?

**Figura 127: Problema formulado pelo grupo 6**

Na tabela seguinte apresenta-se a análise referente aos problemas formulados pelos alunos.

| | | | G1 | G2 | G3 | G4 | G5 | G6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Formulação de problemas** | Variação do problema dado | Variar os dados | | | | | | |
| | | Variar as condições | X | X | X | X | X | X |
| | | Variar o contexto | | | X | | | |
| | Problema Novo | | | | | | | |

**Tabela 20: Formulação de problemas (Tarefa 6)**

Observando a tabela 20 relativa à formulação de problemas efetuada pelos alunos, verifica-se que a maioria dos grupos optaram por variar as condições relativamente ao problema inicial, o grupo 3 optou ainda por fazer variar o contexto do problema inicial.

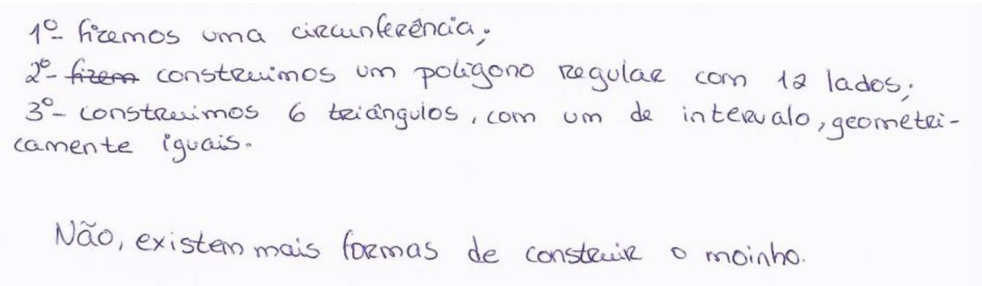
Nesta aula, notou-se que os alunos estavam um pouco mais agitados que o normal, mas estavam empenhados na resolução do problema. A maioria dos alunos da turma considerou o problema fácil e não teve grandes dificuldades na sua resolução.

## Tarefa 7: O moinho de vento

Nesta tarefa os alunos tinham de construir um moinho de vento e descobrir se haveria apenas uma única forma de fazer essa construção. Uma das questões que os alunos me fizeram logo no início foi se os espaços entre cada triângulo tinham de ser sempre iguais, à qual eu respondi afirmativamente. A grande dificuldade dos alunos foi manter fixa a distância entre os vários triângulos que formam o moinho de vento. Apesar dessa dificuldade todos os alunos conseguiram apresentar uma solução para o problema.

Alguns grupos concluíram que havia apenas uma única forma de construir o moinho de vento, outros disseram que havia outras formas, apesar de não terem explicado quais eram essas formas.

O grupo 1, começou por construir uma circunferência dados o centro e um ponto e depois construiu um triângulo, mas como não conseguiam copiar o triângulo para construir o moinho, abandonaram essa resolução. Depois acabaram por construir um dodecágono regular no interior da circunferência e foram unindo dois dos vértices desse polígono com o centro da circunferência, tal como é relatado por este grupo de seguida.


1º- fizemos uma circunferência;
2º- ~~fizem~~ construimos um polígono regular com 12 lados;
3º- construimos 6 triângulos, com um de intervalo, geometricamente iguais.

Não, existem mais formas de construir o moinho.

**Figura 128: Resolução apresentada pelo grupo 1**

Como se pode verificar este grupo afirmou que existem outras formas de construir o moinho de vento, apesar de não explicado ou ter apresentado outra resolução. De seguida apresenta-se a resolução deste grupo no GeoGebra.

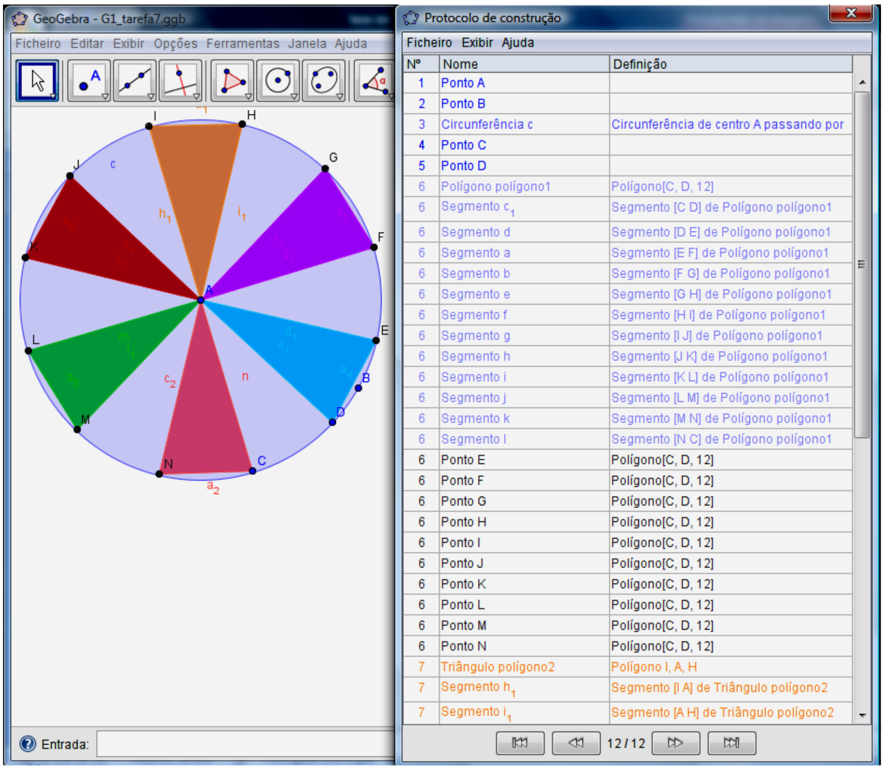
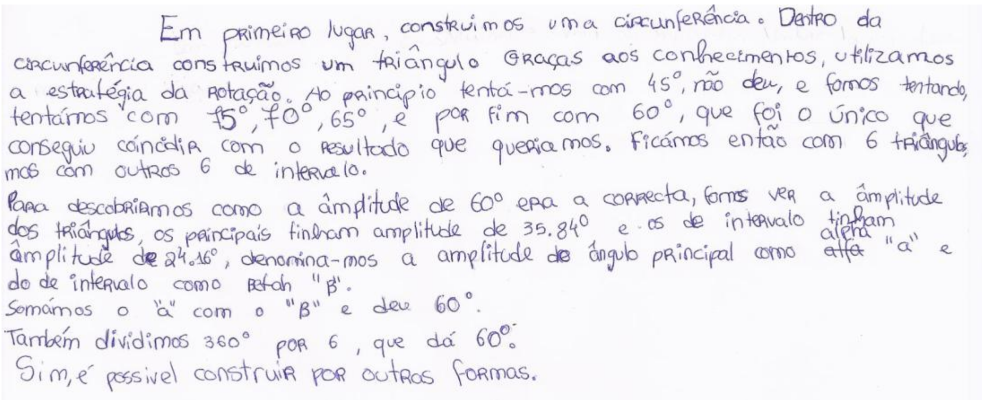



**Figura 129: Resolução do grupo 1 no GeoGebra**

O grupo 2 começou por construir uma circunferência e dentro dessa circunferência construiu um triângulo isósceles. De seguida, os alunos foram fazer a rotação desse triângulo em torno de um ponto fixo (centro da circunferência). Tal como referem na descrição da sua resolução, a seguir apresentada, tentaram utilizar várias amplitudes, mas apenas conseguiram construir o moinho de vento fazendo uma rotação com uma amplitude de 60º.



Em primeiro lugar, construimos uma circunferência. Dentro da circunferência construimos um triângulo Graças aos conhecimentos, utilizamos a estratégia da rotação. Ao principio tentá-mos com 45°, não deu, e fomos tentando, tentámos com 15°, 70°, 65°, e por fim com 60°, que foi o único que conseguiu cóincidir com o resultado que queriamos. Ficámos então com 6 triângulos mas com outros 6 de intervalo.

Para descobriamos como a âmplitude de 60° era a correcta, fomos ver a âmplitude dos triângulos, os principais tinham amplitude de 35.84° e os de intervalo tinham âmplitude de 24.16°, denomina-mos a amplitude do ângulo principal como ~~alfa~~ alpha "α" e do de intervalo como betah "β".

Somámos o "α" com o "β" e deu 60°.

Também dividimos 360° por 6, que dá 60°.

Sim, é possivel construir por outros formas.

**Figura 130: Resolução apresentada pelo grupo 2**

É de salientar que durante a resolução questionei os alunos sobre qual seria o motivo pelo qual apenas dava com uma amplitude de 60º, dai eles explicarem como descobriram essa amplitude. De seguida apresenta-se a resolução deste grupo no GeoGebra.

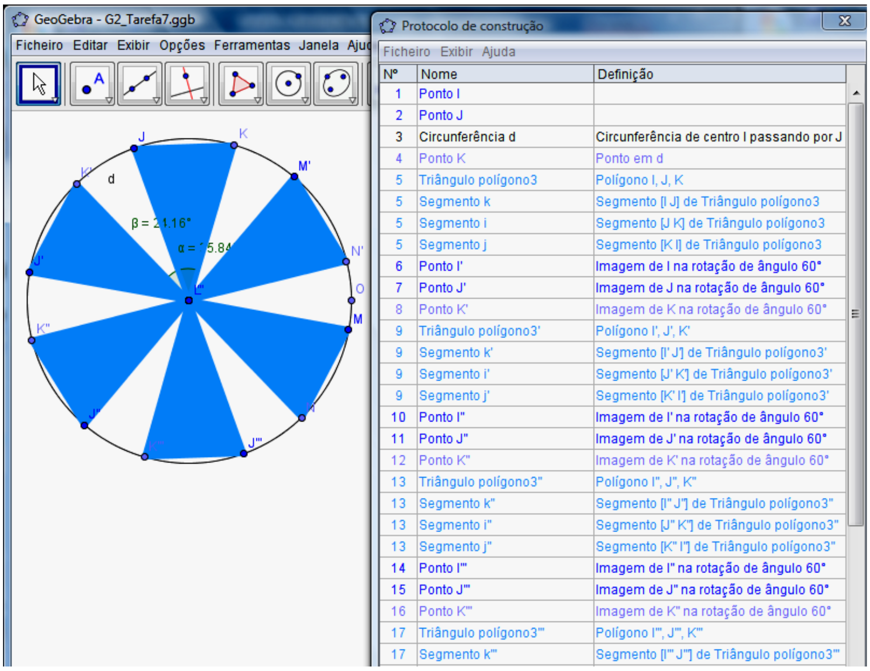



**Figura 131: Resolução do grupo 2 no GeoGebra**

O grupo 3 teve alguma dificuldade em delinear uma estratégia para a resolução deste problema. O grupo refere, que tentou construir o moinho de vento por vários processos, mas acabavam por desistir a meio. Depois optaram por construir a circunferência dado o centro e um ponto e de seguida marcar mais três pontos, dois sobre a circunferência e outro a coincidir com o centro da circunferência. Com esses três pontos construíram um triângulo. De seguida, foram descobrir a imagem de cada ponto anteriormente definido através da rotação de centro no centro da circunferência e com uma amplitude de 60º. Depois uniram esses pontos e repetiram o processo anterior até terem os seis triângulos construídos. Nas duas figuras seguintes pode-se observar a resolução descrita pelos alunos e a sua resolução no GeoGebra.

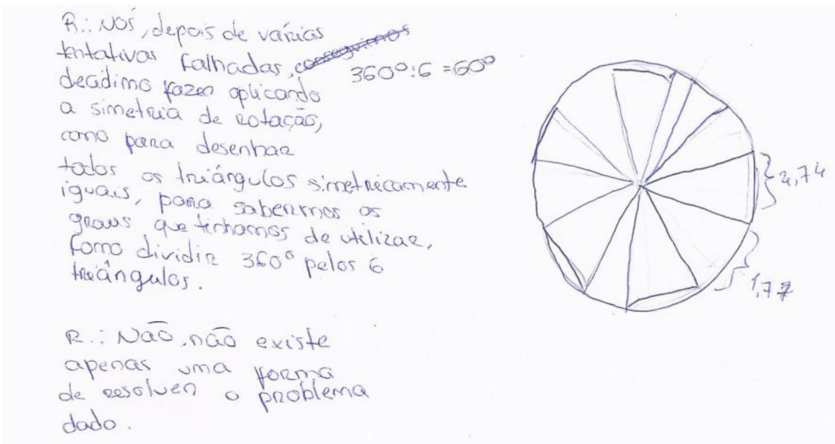



**Figura 132: Resolução apresentada pelo grupo 3**

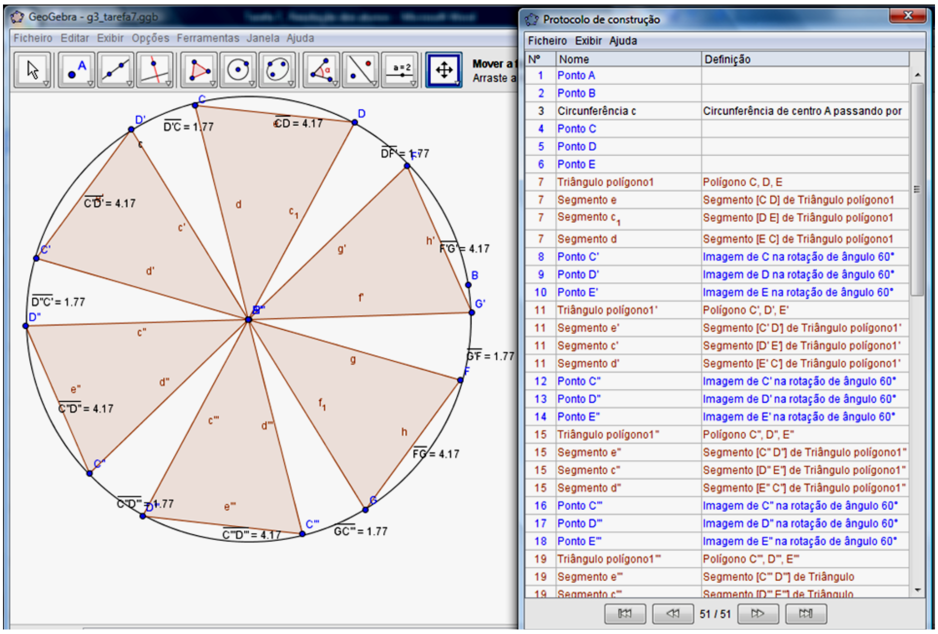



**Figura 133: Resolução do grupo 3 no GeoGebra**

O grupo 4 adotou uma resolução idêntica à do grupo 3, mas concluiu que apenas havia uma forma de construir o moinho de vento, tal como se pode observar nas figuras seguintes.

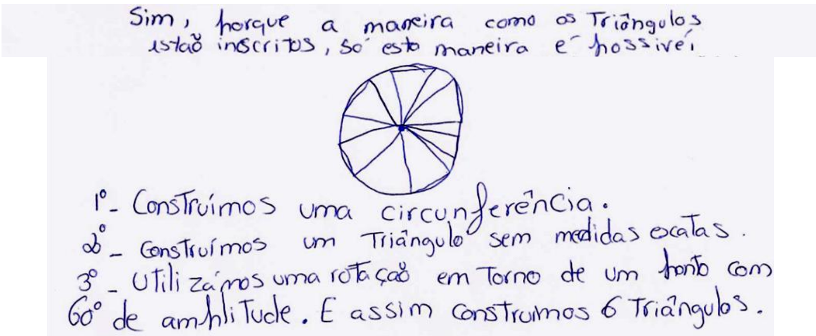



**Figura 134: Resolução apresentada pelo grupo 4**

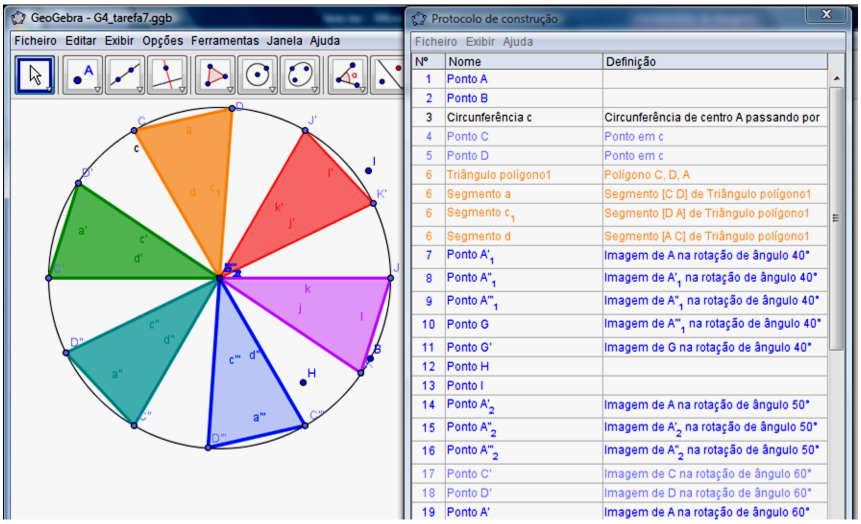



**Figura 135: Resolução do grupo 4 no GeoGebra**

O grupo 5, também utilizou a rotação para construir o moinho de vento, mas foi tentar descobrir qual seria a amplitude de rotação, em vez de ir por tentativa e erro. O grupo descreve de seguida a sua resolução.

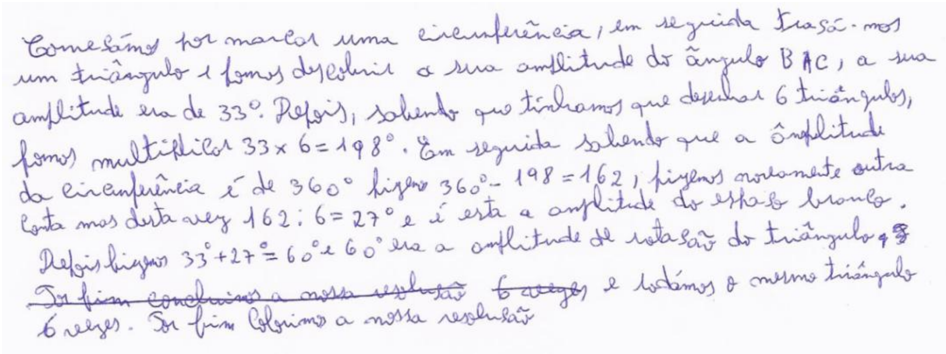
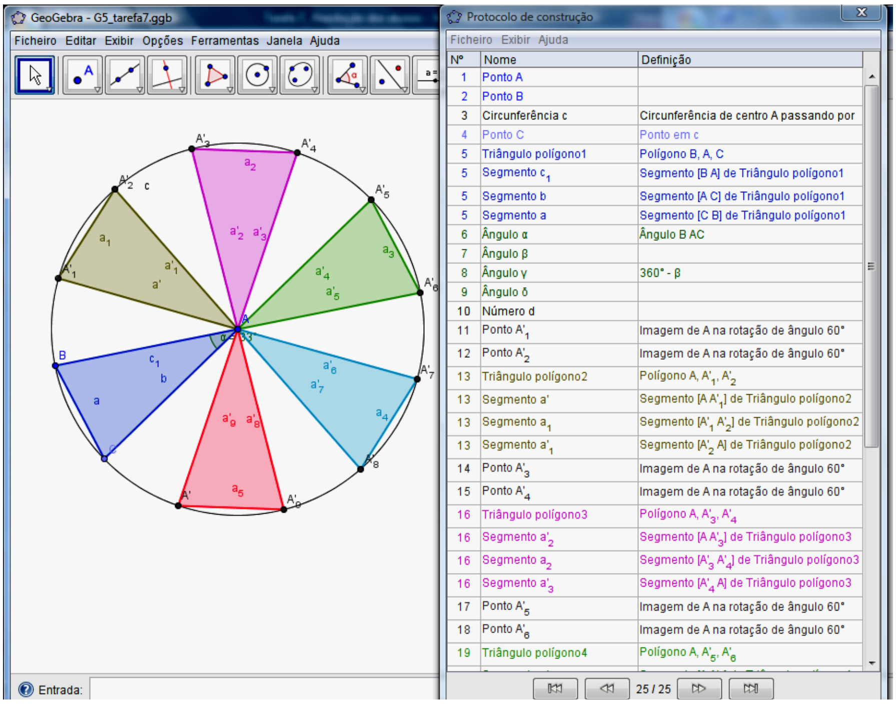

Comesámos por marcar uma circunferência, em seguida traçá-mos um triângulo e fomos descobrir a sua amplitude do ângulo BAC, a sua amplitude era de 33°. Depois, sabendo que tinhamos que desenhar 6 triângulos, fomos multiplicar 33 x 6 = 198°. Em seguida sabendo que a âmplitude da circunferência é de 360° fizemos 360° - 198 = 162, fizemos novamente outra conta mas desta vez 162 : 6 = 27° e é esta a amplitude do espaço branco. Depois fizemos 33° + 27° = 60° e 60° era a amplitude de rotação do triângulo ~~Por fim concluimos a nossa resolução~~ ~~6 vezes~~ e rodámos o mesmo triângulo 6 vezes. Por fim concluimos a nossa resolução

Figura 136: Resolução apresentada pelo grupo 5

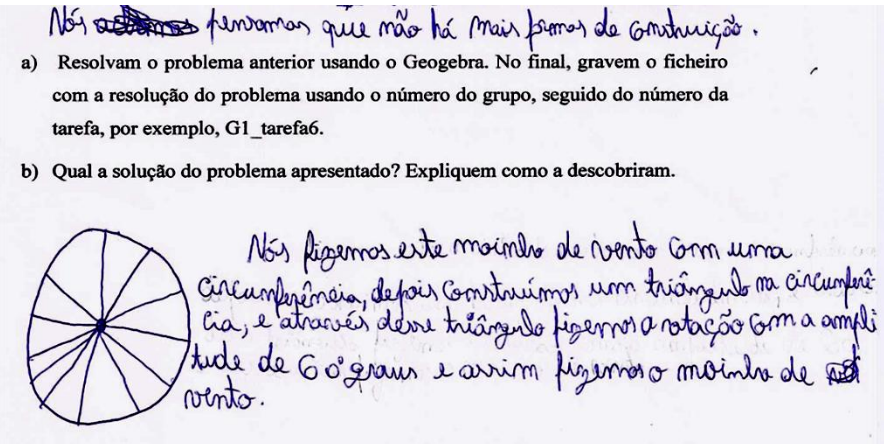
Este grupo, depois de ter descoberto a amplitude de rotação, resolveu o problema de forma idêntica aos grupos anteriores, tal como se pode verificar na figura seguinte.




| Nº | Nome | Definição |
|---|---|---|
| 1 | Ponto A | |
| 2 | Ponto B | |
| 3 | Circunferência c | Circunferência de centro A passando por |
| 4 | Ponto C | Ponto em c |
| 5 | Triângulo polígono1 | Polígono B, A, C |
| 5 | Segmento $c_1$ | Segmento [B A] de Triângulo polígono1 |
| 5 | Segmento b | Segmento [A C] de Triângulo polígono1 |
| 5 | Segmento a | Segmento [C B] de Triângulo polígono1 |
| 6 | Ângulo α | Ângulo B AC |
| 7 | Ângulo β | |
| 8 | Ângulo γ | 360° - β |
| 9 | Ângulo δ | |
| 10 | Número d | |
| 11 | Ponto $A'_1$ | Imagem de A na rotação de ângulo 60° |
| 12 | Ponto $A'_2$ | Imagem de A na rotação de ângulo 60° |
| 13 | Triângulo polígono2 | Polígono A, $A'_1$, $A'_2$ |
| 13 | Segmento a' | Segmento [A $A'_1$] de Triângulo polígono2 |
| 13 | Segmento $a_1$ | Segmento [$A'_1$ $A'_2$] de Triângulo polígono2 |
| 13 | Segmento $a'_1$ | Segmento [$A'_2$ A] de Triângulo polígono2 |
| 14 | Ponto $A'_3$ | Imagem de A na rotação de ângulo 60° |
| 15 | Ponto $A'_4$ | Imagem de A na rotação de ângulo 60° |
| 16 | Triângulo polígono3 | Polígono A, $A'_3$, $A'_4$ |
| 16 | Segmento $a'_2$ | Segmento [A $A'_3$] de Triângulo polígono3 |
| 16 | Segmento $a_2$ | Segmento [$A'_3$ $A'_4$] de Triângulo polígono3 |
| 16 | Segmento $a'_3$ | Segmento [$A'_4$ A] de Triângulo polígono3 |
| 17 | Ponto $A'_5$ | Imagem de A na rotação de ângulo 60° |
| 18 | Ponto $A'_6$ | Imagem de A na rotação de ângulo 60° |
| 19 | Triângulo polígono4 | Polígono A, $A'_5$, $A'_6$ |

Figura 137: Resolução do grupo 5 no GeoGebra

O grupo 6, apesar de ter descrito na resolução que tinha utilizado apenas a rotação para construir o moinho de vento, verifica-se, ao analisar o ficheiro do GeoGebra gravado, que os alunos depois de terem construído o primeiro triângulo, foram utilizar a reflexão num ponto, para construir um segundo triângulo. De seguida, foram determinar a amplitude que teriam de utilizar para fazer uma rotação do primeiro triângulo em torno do centro da circunferência, tendo concluído que teria de ser 60º. Depois foram descobrir a imagem de cada um dos pontos do primeiro triângulo construído através da rotação de centro, no centro da circunferência e amplitude de 60º. Posteriormente uniram esses pontos para construir o triângulo e repetiram a resolução anteriormente descrita para construir um novo triângulo. Por fim, fizeram a reflexão dos dois triângulos anteriormente construídos. Este grupo concluiu que havia apenas uma forma de construir o moinho de vento. De seguida apresenta-se a resolução descrita pelo grupo e a sua resolução no GeoGebra.


Nós ~~achamos~~ pensamos que não há mais formas de construção.

a) Resolvam o problema anterior usando o Geogebra. No final, gravem o ficheiro com a resolução do problema usando o número do grupo, seguido do número da tarefa, por exemplo, G1_tarefa6.

b) Qual a solução do problema apresentado? Expliquem como a descobriram.

Nós fizemos este moinho de vento com uma circunferência, depois construímos um triângulo na circunferência, e através desse triângulo fizemos a rotação com a amplitude de 60 graus e assim fizemos o moinho de ~~vento~~ vento.

**Figura 138: Resolução apresentada pelo grupo 6**

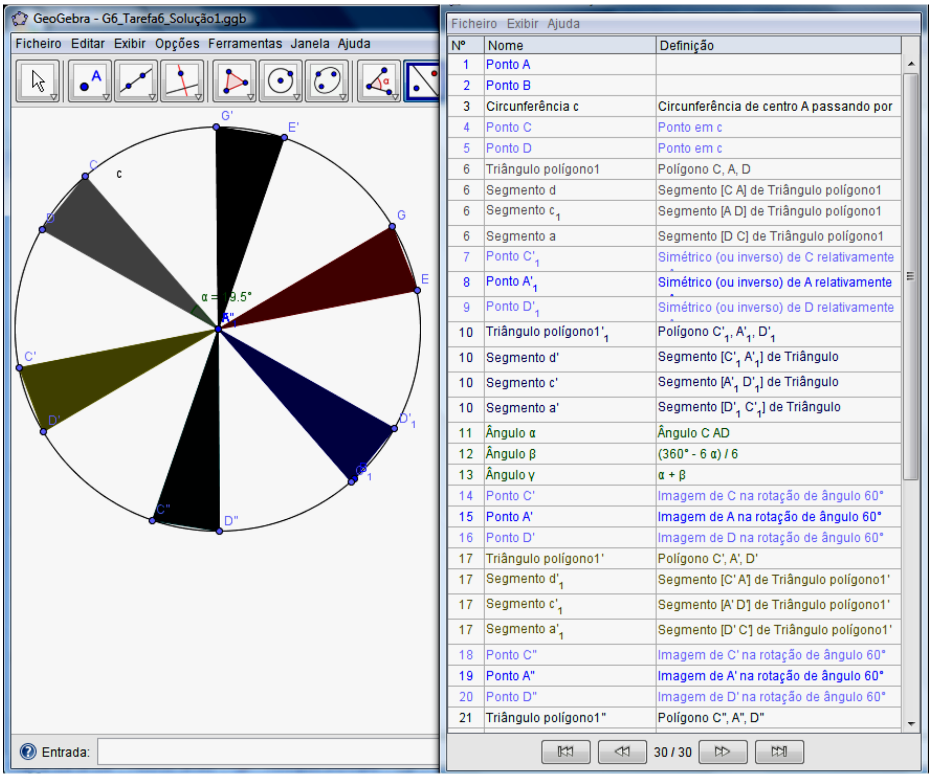


**Figura 139: Resolução do grupo 6 no GeoGebra**

Durante a apresentação das várias resoluções todos os alunos perceberam que não havia apenas uma única forma de construir o moinho de vento. Os alunos não apresentaram grande dificuldade na resolução deste problema.

Na tabela seguinte apresenta-se uma análise da caracterização das resoluções efetuadas pelos alunos.

| | | | G1 | G2 | G3 | G4 | G5 | G6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Caracterização das resoluções** | Adequação | Sim | X | X | X | X | X | X |
| | | Não | | | | | | |
| | Rigor | Sim | X | X | X | X | X | X |
| | | Não | | | | | | |
| | Robustez | Sim | | X | | X | X | X |
| | | Não | X | | X | | | |

**Tabela 21: Caracterização das resoluções relativas à tarefa 7**

Observando a tabela anterior, pode-se verificar que as resoluções apresentadas pelos diferentes grupos são adequadas e permitem uma resposta rigorosa. Em relação à robustez, apenas os grupos 1 e 3 apresentaram construções que não eram robustas, uma vez que manipulando um dos objetos livres, as construções não mantêm as suas propriedades.

Na tabela seguinte, pode-se observar as estratégias de resolução utilizadas pelos diferentes grupos.

| | | G1 | G2 | G3 | G4 | G5 | G6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Estratégias de resolução** | Descobrir um padrão, uma regra ou lei de formação | | | | | | |
| | Fazer tentativas/ Fazer conjeturas | | | | X | | |
| | Trabalhar do fim para o princípio | | | | | | |
| | Usar dedução lógica ou fazer eliminação | | | | | | |
| | Reduzir a um problema mais simples | | | | | | |
| | Fazer uma simulação ou uma experimentação | X | X | X | X | X | X |
| | Fazer um diagrama ou esquema | X | X | X | X | X | X |
| | Fazer uma lista organizada ou uma tabela | | | | | | |

**Tabela 22: Estratégias de resolução utilizadas na tarefa 7**

Analisando a tabela 22, pode-se observar que todos os grupos optaram por *Fazer um diagrama ou esquema* e ao mesmo tempo *Fazer uma simulação ou uma experimentação.* O grupo 4 utilizou ainda como estratégia *Fazer tentativas/ Fazer conjeturas*.

Em relação à formulação de novos problemas, mais uma vez os alunos foram pouco criativos, tal como se pode verificar através das figuras seguintes.

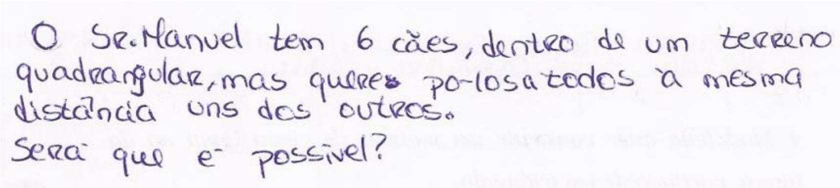
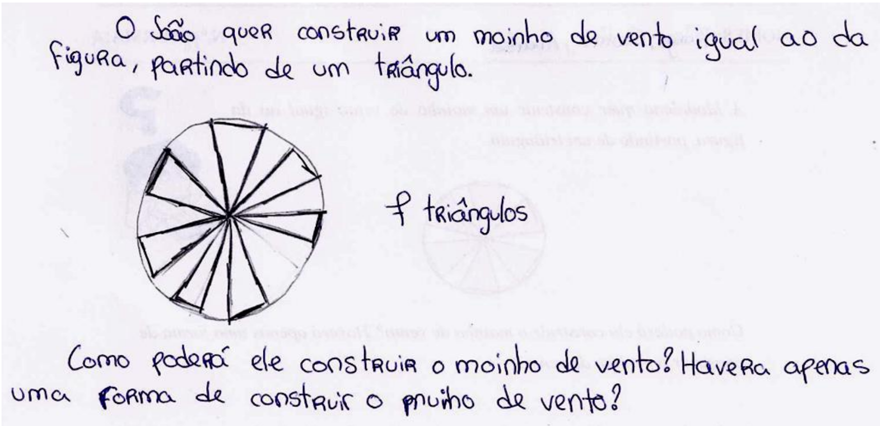

O Sr. Manuel tem 6 cães, dentro de um terreno quadrangular, mas querer pô-los a todos à mesma distância uns dos outros.
Será que é possível?

**Figura 140: Problema formulado pelo grupo 1**


O João quer construir um moinho de vento igual ao da figura, partindo de um triângulo.



Como poderá ele construir o moinho de vento? Haverá apenas uma forma de construir o moinho de vento?

**Figura 141: Problema formulado pelo grupo 2**

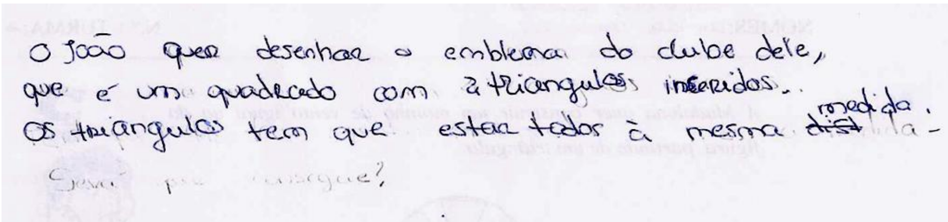

O João quer desenhar o emblema do clube dele, que é um quadrado com 2 triângulos inseridos. Os triângulos tem que estar todos à mesma ~~dist~~ medida.
Será que consegue?

**Figura 142: Problema formulado pelo grupo 3**

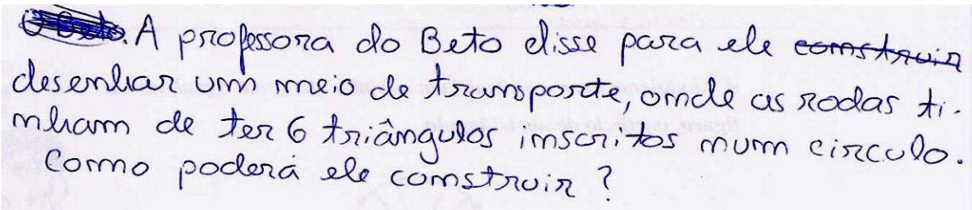

~~O Beto~~ A professora do Beto disse para ele ~~construir~~ desenhar um meio de transporte, onde as rodas tinham de ter 6 triângulos inscritos num circulo.
Como poderá ele construir ?

**Figura 143: Problema formulado pelo grupo 4**

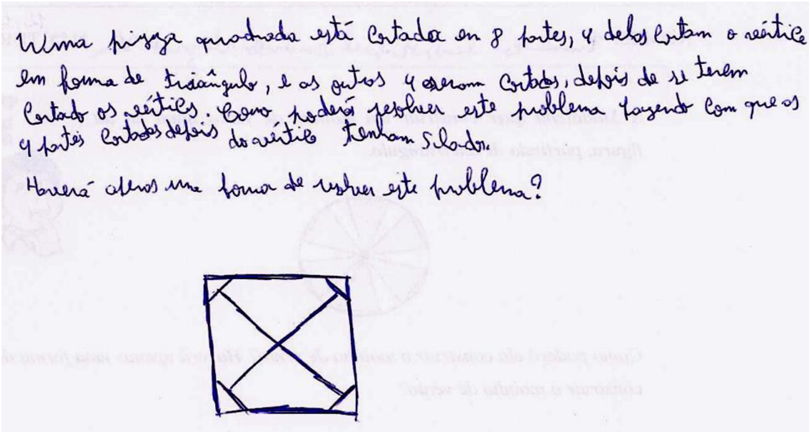

Uma pizza quadrada está cortada em 8 partes, 4 delas cortam o vértice em forma de triângulo, e os outros 4 serem cortados, depois de se terem cortado os vértices. Como poderás resolver este problema fazendo com que as 4 partes cortadas depois dos vértices tenham 5 lados.
Haverá apenas uma forma de resolver este problema?

**Figura 144: Problema formulado pelo grupo 5**

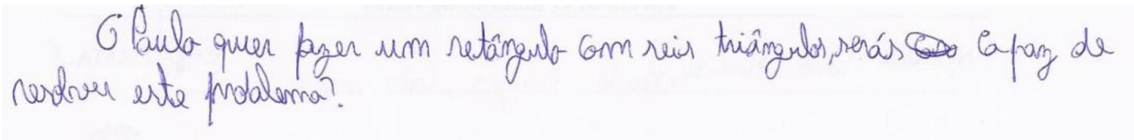

O Paulo quer fazer um retângulo com seis triângulos, serás capaz de resolver este problema?

**Figura 145: Problema formulado pelo grupo 6**

Na tabela seguinte apresenta-se a análise referente aos problemas formulados pelos alunos.

| | | | G1 | G2 | G3 | G4 | G5 | G6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Formulação de problemas | Variação do problema dado | Variar os dados | X | X | X | | | X |
| | | Variar as condições | | | | | | |
| | | Variar o contexto | X | | X | X | | |
| | Problema Novo | | | | | | X | |

**Tabela 23: Formulação de problemas (Tarefa 7)**

Após a análise da tabela anterior verifica-se que os grupos 1 e 3 optaram por modificar o contexto do problema proposto e ao mesmo tempo fazer uma variação do mesmo, alterando os dados. O grupo 2 optou por fazer uma variação do problema inicialmente proposto, alterando os dados e o grupo 4 fez variar o contexto do problema inicialmente proposto. O grupo 5 formulou um novo problema que nada tinha a ver com o problema inicial, tendo apresentado criatividade no mesmo.

# Capítulo VI

# Conclusão

O presente capítulo inicia-se com a apresentação de uma síntese do estudo, de seguida são apresentadas as principais conclusões como resposta às questões inicialmente formuladas, sintetizando os resultados obtidos pelos diferentes grupos da turma que constitui o estudo de caso. Não se pretende efetuar generalizações dos resultados, mas sim compreender o caso em estudo (a turma) identificando pontos fundamentais e refletindo sobre eles. Por fim, serão apresentadas algumas considerações finais relacionadas com o ensino da Matemática e com o contributo do GeoGebra, para promover o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas nos alunos.

## Recordando o objetivo do estudo

Este estudo procurou compreender como pode, um contexto de sala de aula apoiado pelo GeoGebra, contribuir para promover o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas em alunos do 8.º ano do Ensino Básico.

Assim, este estudo procurará responder às seguintes questões:

a) Como se caracterizam as resoluções apresentadas pelos alunos?

b) Que estratégias de resolução de problemas usam os alunos para resolver os problemas?

c) Que formulação de novos problemas surge a partir dos problemas resolvidos?

A fundamentação teórica procurou ir ao encontro do problema formulado e centrou-se em dois temas, que constituem um capítulo cada: As tecnologias no ensino da Matemática e a resolução de problemas. No primeiro capítulo fez-se uma abordagem à evolução do ensino da Matemática com o uso das tecnologias, seguida da apresentação de vários Ambientes de Geometria Dinâmica, em geral e do GeoGebra, em particular, onde se apresentou as suas características. Neste capítulo foram ainda apresentadas algumas investigações realizadas em Portugal e no Estrangeiro, com a finalidade de perceber as potencialidades e as vantagens de utilização dos Ambientes de Geometria Dinâmica e por fim, apresentaram-se as orientações internacionais, seguidas das nacionais sobre a utilização das tecnologias no ensino da Matemática. No segundo capítulo explicitou-se a distinção entre exercício e problema e de seguida foram apresentadas categorizações diferentes para os problemas, a forma como se pode perspetivar a formulação de problemas e o processo de resolução dos mesmos, baseados em diferentes autores. Foram ainda apresentados os vários modelos e estratégias de resolução de problemas, bem como as dificuldades que os alunos apresentam na sua resolução. Por fim, apresentaram-se as orientações curriculares, nacionais e internacionais, sobre resolução de problemas.

O estudo apresentado enquadra-se numa investigação de natureza qualitativa. Bogdan e Biklen (1994) referem que neste tipo de investigação, o investigador é o instrumento principal de recolha de dados, e o ambiente natural constitui a fonte direta de dados Assim, tendo em conta que a professora da turma é simultaneamente a investigadora, o presente estudo é também uma investigação sobre a sua prática pedagógica. Optou-se pela modalidade de estudo de caso para concretizar o estudo, tendo em conta o objetivo da presente investigação.

A recolha de dados envolveu diferentes fontes, nomeadamente observação acompanhada de gravação vídeo das aulas, análise documental dos documentos escritos pelos alunos, dos ficheiros do GeoGebra gravados pelos mesmos e dos registos livres elaborados pela investigadora. A análise de dados realizou-se em duas fases. Numa primeira fase foram analisados os dados recolhidos através das várias fontes e numa segunda fase, foram definidas as categorias de análise, tendo em conta a revisão da literatura e as questões do estudo e foi feita a análise de dados de acordo com essas categorias.

## Como se caracterizam as resoluções apresentadas pelos alunos?

É importante recordar que, em todos os problemas propostos, era solicitado aos grupos que fizessem a sua resolução usando o GeoGebra. Assim, ao longo das várias aulas em que decorreu a intervenção didática, foram gravados os ficheiros referentes às resoluções dos vários grupos.

De modo a fazer uma análise consistente da forma como se caracterizam as resoluções apresentadas pelos diferentes grupos, comecei por sistematizar a informação recolhida ao longo da resolução das várias tarefas, como se pode observar na tabela seguinte.

| Caracterização das resoluções | | | G1 | G2 | G3 | G4 | G5 | G6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Adequação | Tarefa 1 | Sim | Sim | Sim | NC | Sim | Sim |
| | | Tarefa 2 | Sim | Sim | Sim | NC | Sim | Sim |
| | | Tarefa 3 | R1: Sim; R2: Sim | Sim | Não | Sim | Sim | Sim |
| | | Tarefa 4 | Não | R1: Sim; R2: Sim | Não | Não | R1: Sim; R2: Sim; R3: Não | R1, 2: Sim; R3: Sim |
| | | Tarefa 5 | Sim | Sim | Sim | Não | Rui: Sim; Tiago: Não | Rui: Sim; Tiago: Não |
| | | Tarefa 6 | Sim | Sim | $T_{qq}$: Sim; $T_{rect}$: Sim | Sim | Sim | Sim |
| | | Tarefa 7 | Sim | Sim | Sim | Sim | Sim | Sim |
| | Rigor | Tarefa 1 | Não | Não | Sim | Sim | Sim | Sim |
| | | Tarefa 2 | Sim | Sim | Sim | Sim | Sim | Sim |
| | | Tarefa 3 | R1: Sim; R2: Sim | Sim | NC | Sim | Sim | Sim |
| | | Tarefa 4 | NC | R1: Sim; R2: Sim | NC | NC | R1: Sim; R2: Sim; R3: NC | R1, 2: Sim; R3: Sim |
| | | Tarefa 5 | Sim | Sim | Sim | NC | Rui: Sim; Tiago: NC | Rui: Sim; Tiago: NC |
| | | Tarefa 6 | Sim | Sim | $T_{qq}$: Sim; $T_{rect}$: Sim | Sim | Sim | Sim |
| | | Tarefa 7 | Sim | Sim | Sim | Sim | Sim | Sim |
| | Robustez | Tarefa 1 | Não | Não | Não | Não | Não | Não |
| | | Tarefa 2 | Não | Sim | Não | Não | Não | Não |
| | | Tarefa 3 | R1: Não; R2: Sim | Sim | NC | Sim | Não | Não |
| | | Tarefa 4 | NC | R1: Sim; R2: Sim | NC | NC | R1: Não; R2: Sim; R3: NC | R1, 2: Sim; R3: Sim |
| | | Tarefa 5 | Sim | Sim | Sim | NC | Rui: Sim; Tiago: NC | Rui: Sim; Tiago: NC |
| | | Tarefa 6 | Não | Não | $T_{qq}$: Não; $T_{rect}$: Sim | Não | Não | Não |
| | | Tarefa 7 | Não | Sim | Não | Sim | Sim | Sim |

**Tabela 24: Caracterização das resoluções apresentadas pelos seis grupos**

Para fazer a análise da caracterização das resoluções dos alunos, considerei três categorias de análise. A primeira, adequação, refere-se ao facto de a resolução ser ou não adequada aos dados do problema, ou seja, se a resolução expressa ou não os dados. A segunda, rigor, refere-se ao facto de a resolução permitir, ou não, uma resposta rigorosa ao problema. Por fim, a última categoria, robustez, reporta-se ao facto de as construções permitirem que se mova os objetivos livres sem que as propriedades da construção se alterem.

Fazendo então uma análise vertical à tabela anterior, pode-se constatar a forma como se caracterizam as resoluções dos problemas apresentadas, por grupo.

Assim, em relação ao grupo 1, pode-se verificar que apenas a resolução da tarefa quatro não foi adequada, uma vez que não expressa os dados do problema proposto. No que concerne ao rigor, verificou-se que somente a resolução da tarefa um, executada por este grupo, não permite uma resposta rigorosa. Constata-se ainda que, a maioria das resoluções elaboradas por este grupo não são robustas, ou seja, não mantêm as propriedades quando se move um objeto livre. Em relação à tarefa quatro, como a resolução efetuada não era adequada, então não se pode inferir quanto ao rigor e à robustez.

O grupo 2 foi o único cujas resoluções apresentadas para as sete tarefas exprimiam os dados. Em relação ao rigor, este grupo apenas não conseguiu fazer uma construção que permitisse uma resposta rigorosa para a tarefa um. Verifica-se ainda, que o grupo 2 foi o que obteve um maior número de construções robustas, não o conseguindo apenas nas tarefas um e seis. Este grupo aparenta ser o que fez uma melhor utilização do GeoGebra, na resolução das várias tarefas propostas, utilizando a maioria das suas potencialidades

O grupo 3 não apresentou uma resolução adequada para as tarefas três e quatro, pelo que estas resoluções não se podem caracterizar quanto ao rigor e à robustez, mas as restantes resoluções apresentadas permitem uma resposta rigorosa, embora a maioria das resoluções não sejam robustas.

O grupo 4 apenas conseguiu apresentar uma resolução adequada para três dos sete problemas, uma vez que estas eram as únicas que exprimiam os dados, no entanto, verifica-se que apenas as resoluções das tarefas quatro e cinco, não se podem caracterizar quanto ao rigor, uma vez que nos restantes casos, a resolução iria permitir uma resposta rigorosa. Relativamente à robustez, constata-se que, a maioria das resoluções efetuadas pelo grupo, não são robustas.

Os grupos 5 e 6 conseguiram que a maioria das suas resoluções exprimisse os dados do problema, pelo que a maioria são adequadas. Em relação ao rigor e à robustez, estes dois grupos também tiveram um desempenho semelhante, verificando-se que a grande parte das suas resoluções permitem uma resposta rigorosa mas não são robustas.

É de salientar que quando os grupos não apresentavam uma resolução adequada, não se podia concluir quanto ao rigor e à robustez.

Verifica-se ainda que, todos os grupos, à exceção do grupo 4, apresentaram durante a intervenção didática, mais do que uma resolução em pelo menos uma tarefa proposta. Isto deveu-se ao facto de os grupos terminarem de forma rápida a resolução da respetiva tarefa e eu lhes ter solicitado que tentassem resolver o problema de outra forma.

Fazendo agora uma análise horizontal da tabela, verifica-se que em relação à adequação, a tarefa que originou maior número de resoluções inadequadas, ou seja, que não expressavam os dados foi a tarefa quatro, seguida da tarefa cinco. Nas tarefas seis e sete todos os grupos apresentaram uma resolução adequada ao problema proposto.

No que concerne ao rigor das resoluções dos problemas apresentados, a tarefa um foi a que originou um maior número de resoluções que não permitiam obter uma resposta rigorosa. No entanto, é importante referir que a maioria das resoluções apresentadas para a tarefa quatro e algumas das resoluções relativas à tarefa cinco não puderam ser analisadas quanto ao rigor, uma vez que as mesmas não eram adequadas ao problema proposto.

Em relação à robustez, pode-se verificar que a grande maioria das resoluções efetuadas pelos alunos não eram robustas, verificando-se que a tarefa cinco foi a que originou um maior número de resoluções que mantinham as propriedades quando se movia um objeto livre, seguida da tarefa sete. É importante referir que, apesar de a maioria das resoluções não serem robustas, isso não influenciou ou não serviu de constrangimento à resolução dos problemas dados.

Em suma, pode-se dizer que as resoluções, dos grupos participantes na intervenção didática, referentes aos sete problemas propostos são na maioria adequadas e rigorosas mas não apresentam robustez.

**Que estratégias de resolução de problemas usam os alunos para resolver os problemas?**

Irei agora fazer uma análise das estratégias usadas pelos alunos no decorrer da resolução dos problemas propostos. Para facilitar a referida análise irei sintetizar a informação recolhida na tabela seguinte.

| Estratégias de resolução | | | G1 | G2 | G3 | G4 | G5 | G6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Fazer um diagrama ou esquema | Tarefa 1 | X | X | X | X | X | X |
| | | Tarefa 2 | X | X | X | X | X | X |
| | | Tarefa 3 | X ($R_{1,2}$) | X | X | X | X | X |
| | | Tarefa 4 | X | X | X | X | X ($R_{1,2,3}$) | X |
| | | Tarefa 5 | X | X | X | X | X | X |
| | | Tarefa 6 | X | X | X | X | X | X |
| | | Tarefa 7 | X | X | X | X | X | X |
| | Fazer tentativas/ Fazer conjeturas | Tarefa 1 | X | X | X | X | X | X |
| | | Tarefa 2 | X | | | X | X | X |
| | | Tarefa 3 | | | X | | X | |
| | | Tarefa 4 | | | X | | | |
| | | Tarefa 5 | | | | | | |
| | | Tarefa 6 | X | X | X | X | X | X |
| | | Tarefa 7 | | | | X | | |
| | Fazer uma simulação ou uma experimentação | Tarefa 1 | | | | | | |
| | | Tarefa 2 | | X | X | | | |
| | | Tarefa 3 | X($R_2$) | X | | | | |
| | | Tarefa 4 | | X ($R_2$) | | | | X ($R_3$) |
| | | Tarefa 5 | X | X | X | | X | X |
| | | Tarefa 6 | | | | | | |
| | | Tarefa 7 | X | X | X | X | X | X |
| | Reduzir a um problema mais simples | Tarefa 1 | | | | | | |
| | | Tarefa 2 | | | | | | |
| | | Tarefa 3 | X ($R_1$) | | | | | X |
| | | Tarefa 4 | | X ($R_1$) | | | | X($R_{1,2}$) |
| | | Tarefa 5 | | | | | | |
| | | Tarefa 6 | | | | | | |
| | | Tarefa 7 | | | | | | |
| | Trabalhar do fim para o princípio | Tarefa 1 | | | | | | |
| | | Tarefa 2 | | | | | | |
| | | Tarefa 3 | | | | | | |
| | | Tarefa 4 | | | | | X ($R_{1,2}$) | |
| | | Tarefa 5 | | | | | | |
| | | Tarefa 6 | | | | | | |
| | | Tarefa 7 | | | | | | |

**Tabela 25: Estratégias de resolução de problemas utilizadas pelos seis grupos**

Das oito categorias inicialmente consideradas para a análise das estratégias de resolução de problemas utilizadas pelos alunos, no âmbito do presente estudo, apenas constam na tabela anterior cinco, pois foram as que se revelaram no decurso da presente investigação.

Fazendo uma análise vertical da tabela anterior, verifica-se que a estratégia mais utilizada pelo grupo 1 foi *Fazer um diagrama ou esquema*, seguida de *Fazer tentativas/Fazer conjeturas* e de *Fazer uma simulação ou uma experimentação*. Este grupo apenas utilizou a estratégia de *Reduzir a um problema mais simples* na sua primeira resolução da tarefa três. O facto de o GeoGebra dar um *feedback* constante aos alunos e permitir que eles movam pontos, ou objetos livres, fez com este grupo utiliza-se preferencialmente as estratégias anteriormente referidas.

O grupo 2 usou preferencialmente como estratégia de resolução dos problemas dados, *Fazer um diagrama ou esquema*, seguida de *Fazer uma simulação ou uma experimentação*. Este grupo apenas utilizou a estratégia *Fazer tentativas/Fazer conjeturas* na resolução das tarefas um e seis. Na primeira resolução da tarefa quatro optou ainda pela estratégia *Reduzir a um problema mais simples*. É de salientar que foi o grupo que utilizou um menor número de vezes a estratégia de *Fazer tentativas/Fazer conjeturas* e recorde-se, que foi o único grupo que conseguiu apresentar uma resolução adequada para todos os problemas propostos e ao mesmo tempo obteve um maior número de construções robustas, tal como se tinha verificado através da análise da tabela 24.

O grupo 3 optou por utilizar preferencialmente, como estratégia de resolução de problemas, por *Fazer um diagrama ou esquema*, seguida de *Fazer tentativas/Fazer conjeturas*. Nas tarefas dois, cinco e sete, este grupo optou por utilizar como estratégia *Fazer uma simulação ou uma experimentação*. Assim, pode-se verificar que este grupo apenas utilizou três das oito categorias inicialmente consideradas para as estratégias de resolução de problemas.

O grupo 4, tal como tinha acontecido com o grupo 3, optou por utilizar preferencialmente, como estratégia de resolução de problemas, por *Fazer um diagrama ou esquema*, seguida de *Fazer tentativas/Fazer conjeturas*. Na tarefa sete, este grupo optou por utilizar como estratégia *Fazer uma simulação ou uma experimentação.* Recorde-se que este grupo apresentou, ao longo de toda a intervenção didática, grandes problemas em trabalhar colaborativamente em grupo, tendo apenas concluído adequadamente as tarefas três, seis e sete.

No grupo 5 também se verifica que a estratégia preferencial é *Fazer um diagrama ou esquema*, seguida da estratégia *Fazer tentativas/Fazer conjeturas*. As estratégias caracterizadas por *Trabalhar do fim para o princípio* e *Reduzir a um problema mais simples*, foram as menos utilizadas, por este grupo, na resolução dos problemas propostos.

Em relação ao grupo 6, mais uma vez se observa que a estratégia mais utilizada foi *Fazer um diagrama ou esquema*. Este grupo utilizou as estratégias *Fazer tentativas/Fazer conjeturas*, na resolução de três tarefas diferentes e *Fazer uma simulação ou uma experimentação* na resolução de outras três tarefas. Este grupo foi o que utilizou um maior número de vezes a estratégia de resolução de problemas caracterizar por *Reduzir a um problema mais simples*.

É importante referir que os diferentes grupos optaram por utilizar mais do que uma estratégia de resolução de problemas na maioria das tarefas propostas.

Fazendo agora uma análise horizontal, verifica-se que todos os grupos utilizaram a estratégia de resolução de problemas caracterizada como *Fazer um diagrama ou esquema*. Isto deve-se ao facto de, no início da resolução de cada tarefa, ser solicitado que os alunos fizessem a resolução do problema usando o GeoGebra, obrigando a que tivessem de *Fazer um diagrama ou esquema*. Assim, esta estratégia pode considerar-se uma estratégia de base mas é interessante notar que ela servia a propósitos diferenciados consoante o uso que os alunos davam ao diagrama ou esquema, o que se percebe a partir da conciliação com outras estratégias.

Assim, a segunda estratégia mais utilizada, pelos diferentes grupos, na resolução dos problemas propostos foi *Fazer tentativas/Fazer conjeturas,* seguida de *Fazer uma simulação ou uma experimentação*. O facto de o GeoGebra permitir mover os vários objetos de uma forma fácil e ao mesmo tempo devolver um *feedback* constante aos alunos, fez com que estas fossem estratégias muito utilizadas pelos diferentes grupos. A estratégia caracterizada por *Reduzir a um problema mais simples*, apenas foi utilizada por dois grupos na resolução das tarefas três e quatro. Apenas o grupo 5, em duas das resoluções apresentadas para a tarefa quatro, optou por utilizar a estratégia *Trabalhar do fim para o princípio*.

Um outro dado curioso é o facto de se verificar que, quando o grupo utilizou como estratégia *Fazer tentativas/Fazer conjeturas*, apenas conseguiu apresentar uma resolução para o problema proposto, mas quando utilizavam como estratégia *Reduzir a um problema mais simples* ou *Fazer uma simulação ou uma experimentação*, os alunos tinham tempo de realizar mais do que uma resolução para o mesmo problema, uma vez que a resolução do problema se tornava mais rápida com a utilização desta estratégia.

Fazendo uma análise cruzada da tabela 24 com a tabela 25, verifica-se que os grupos que utilizaram preferencialmente a estratégia *Fazer tentativas/Fazer conjeturas*, são aqueles que apresentaram um maior número de resoluções que não eram adequadas aos dados do problema inicialmente proposto. Isto deve-se ao facto de, apesar de ser uma estratégia que permite resolver todos os problemas dados, os alunos perderam muito tempo na sua resolução, uma vez que tinham de ir movendo os vários pontos até conseguirem obter a solução correta. Em relação à tarefa cinco, recorde-se que foi aquela que originou um maior número de resoluções robustas, verifica-se que foi também aquela em que a estratégia mais utilizada foi *Fazer uma simulação ou uma experimentação*. Isto poderá indiciar que quando os alunos utilizam esta estratégia de resolução de problemas, produzem, na maioria das vezes, uma resolução robusta, na qual se pode mover os objetos livres sem que as propriedades da resolução se alterem.

**Que formulação de novos problemas surge a partir dos problemas resolvidos?**

A última questão refere-se aos problemas que os vários grupos formularam após a resolução dos vários problemas por mim propostos. De forma a facilitar a análise desta questão foi elaborada a tabela seguinte, com a caracterização dos problemas formulados por cada grupo de alunos.

| | | | | G1 | G2 | G3 | G4 | G5 | G6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Formulação de problemas** | Variação do problema dado | Variar os dados | Tarefa 1 | X | X | X | | X | |
| | | | Tarefa 2 | X | X | | X | X | |
| | | | Tarefa 3 | X | X | X | X | | |
| | | | Tarefa 4 | | X | | | X | X |
| | | | Tarefa 5 | | X | | | | X(NC) |
| | | | Tarefa 6 | | | | | | |
| | | | Tarefa 7 | X | X | X | | | X |
| | | Variar as condições | Tarefa 1 | | | | X | | |
| | | | Tarefa 2 | | | X | | | |
| | | | Tarefa 3 | | | | | | |
| | | | Tarefa 4 | | | | | | |
| | | | Tarefa 5 | | | | | | |
| | | | Tarefa 6 | X | X | X | X | X | X |
| | | | Tarefa 7 | | | | | | |
| | | Variar o contexto | Tarefa 1 | | | X | X | X | |
| | | | Tarefa 2 | | | X | X | X | X |
| | | | Tarefa 3 | | | X | X | X | X (NC) |
| | | | Tarefa 4 | | | X | | X | X |
| | | | Tarefa 5 | | X | | | X | X(NC) |
| | | | Tarefa 6 | | | X | | | |
| | | | Tarefa 7 | X | | X | X | | |
| | Problema Novo | | Tarefa 1 | | | | | | X |
| | | | Tarefa 2 | | | | | | X |
| | | | Tarefa 3 | | | | | | |
| | | | Tarefa 4 | | | | | | |
| | | | Tarefa 5 | X | | X (NC) | | | |
| | | | Tarefa 6 | | | | | | |
| | | | Tarefa 7 | | | | | X | |

**Tabela 26**: **Formulação de problemas efetuada pelos seis grupos**

Fazendo uma análise vertical da tabela anterior, verifica-se que o grupo 1 optou, para formular a maioria dos problemas, por fazer uma variação do problema inicialmente proposto, variando os dados. No caso dos problemas formulados após a resolução das tarefas seis e sete, verifica-se que no primeiro os alunos variaram as condições do problema inicialmente proposto e no segundo apenas variaram o contexto em relação ao inicial. Este grupo formulou um novo problema, que não estava relacionado com o problema inicial, após a resolução da tarefa cinco, tendo assim demonstrado criatividade. Este grupo não teve tempo para formular o problema relativo à tarefa quatro.

Em relação ao grupo 2, pode-se verificar que na maioria dos problemas formulados, os alunos optaram por fazer variar os dados relativamente aos fornecidos inicialmente. No caso do problema formulado após a tarefa cinco, verifica-se que este grupo variou apenas o contexto em relação ao problema inicial e no problema formulado após a tarefa seis, os alunos variam as condições relativamente ao inicialmente proposto. Este grupo conseguiu formular todos os problemas solicitados.

O grupo 3 optou, na maioria dos casos, por variar o contexto em relação ao problema inicial e posteriormente variar, ou os dados ou as condições, dependendo das tarefas. Apenas não conseguiu completar a formulação do problema relativo à tarefa cinco, apesar de ter tentado formular um problema novo.

O grupo 4 não conseguiu formular dois problemas, os referentes às tarefas quatro e cinco. Em relação aos problemas formulados, verifica-se que este grupo na maioria dos casos alterou o contexto do problema inicial e posteriormente fez variar os dados ou as condições do mesmo.

Relativamente ao grupo 5, pode-se observar que na formulação dos problemas referentes às cinco primeiras tarefas, os alunos optaram por variar o contexto do problema inicial e, nas tarefas um, dois e quatro fizeram ainda variar os dados. Na tarefa seis fizeram variar as condições. Este grupo optou por formular um novo problema após a resolução da tarefa sete.

Em relação ao grupo 6, pode-se constatar que, por um lado foi o grupo que formulou o maior número de novos problemas, mas por outro lado, formulou dois problemas incompletos, os referentes às tarefas três e cinco. Apenas no caso da formulação do problema relativo à tarefa seis, os alunos optaram por fazer variar as condições. Em relação ao problema referente à tarefa quatro fizeram variar os dados e o contexto do problema inicial, tendo optado por apenas variar os dados no problema referente à tarefa sete e apenas variar o contexto no problema referente à tarefa dois.

Fazendo agora uma análise horizontal da tabela 26, pode-se verificar que a maioria dos alunos optou por fazer uma variação do problema inicialmente dado, fazendo variar o contexto ou os dados do mesmo. Apenas na tarefa seis se verifica que todos os grupos optaram por variar as condições do problema inicial. Em relação às tarefas um, dois, cinco e sete, verifica-se que, pelo menos um grupo, em cada uma delas, formulou um novo problema distinto do inicial.

Fazendo uma análise cruzada das tabelas 24, 25 e 26, verifica-se que na maioria dos casos em que os grupos não conseguiram formular um problema, também não tinham conseguido concluir a resolução do problema inicial ou a sua resolução não exprimia os dados do mesmo. Isto talvez se deva ao facto de os alunos terem perdido muito tempo na resolução de algumas tarefas, devido ao tipo de estratégia utilizada, nomeadamente *Fazer tentativas/Fazer conjeturas*.

## Considerações finais

As considerações finais aqui apresentadas referem-se ao contributo do GeoGebra para desenvolver a capacidade de resolução de problemas nos alunos e enquadram-se no âmbito do ensino da Matemática.

Antes de mais, é importante salientar que os problemas propostos não incidiam concretamente num tópico específico do programa de Matemática do 8.º ano, uma vez que o programa refere que esta deve ser uma capacidade transversal a ser desenvolvida ao longo dos vários ciclos de ensino.

Através do trabalho desenvolvido no decorrer da presente investigação, pode-se concluir que o GeoGebra desempenhou um papel fundamental durante a realização de todas as tarefas propostas. O facto de os alunos poderem usar de forma autónoma o GeoGebra, manipulando objetos, estabelecendo relações entre eles e relações com vários conhecimentos, fez com que, no geral, todos os grupos conseguissem resolver de forma eficaz a maioria dos problemas propostos.

O GeoGebra permitiu a construção de desenhos ou esquemas que serviam de base para a resolução do problema proposto, de uma forma rápida, contrastando com a resolução utilizando apenas papel e lápis que seria mais morosa. Com a utilização do GeoGebra os alunos têm a possibilidade de ir avaliando as soluções obtidas e reformulando as mesmas sempre que necessário.

É importante referir que construir figuras de forma robusta demora algum tempo, pois os alunos não estão habituados a pensar em termos de construção mas sim de figura desenhada, mas ficou explícito que, mesmo quando ainda não conseguem realizar construções robustas, o GeoGebra ajuda-os na resolução do problema.

O facto de se ter verificado que a maioria dos grupos conseguiu apresentar mais do que uma resolução para o problema proposto em pelo menos uma tarefa, indicia uma vantagem clara da utilização do GeoGebra na resolução de problemas, ou seja, permitir resolver problemas num curto espaço de tempo. Por outro lado, o GeoGebra aparenta potenciar a capacidade de os alunos resolverem os problemas propostos por processos diversos.

No final da resolução de cada tarefa, os vários grupos apresentavam à turma a sua resolução e as conclusões a que tinham chegado, de forma a trabalhar também a comunicação matemática. Verificou-se que os alunos, nessas apresentações, recorriam ao protocolo de construção, pois assim tinham acesso a todos os procedimentos utilizados na resolução dos vários problemas. Uma vez que o GeoGebra permite a recuperação dos passos de construção utilizados para resolver um determinado problema, através do protocolo de construção, este aparece aqui como mais uma vantagem, uma vez que assim, os alunos têm hipótese de refletir sobre os procedimentos utilizados ao longo da resolução e reformular os mesmos sempre que considerem necessário.

Como os vários grupos podiam utilizar a estratégia que preferissem para resolver os vários problemas apresentados, no final de cada aula e após as apresentações dos vários grupos, era eleita a resolução mais eficaz, ou seja, aquela que permitia uma resposta correta de forma mais rápida. Isto fez com que os alunos, ao verem outras resoluções, refletissem sobre os procedimentos adotados por eles e os colegas e ao mesmo tempo alargassem os seus conhecimentos.

Uma outra vantagem que ficou patente acerca da utilização do GeoGebra para desenvolver a capacidade de resolução de problemas nos alunos, prende-se com o facto de no momento da discussão se poder fazer generalizações do problema inicial, alterando algumas das condições inicialmente dadas.

Em relação à formulação de problemas, verificou-se que todos os grupos conseguiram formular a maioria dos problemas solicitados, na maioria dos casos fazendo variar o contexto e/ou os dados do problema inicial. É de salientar que alguns grupos tentaram, no decorrer da aula, e utilizando o GeoGebra, resolver o problema que tinham formulado.

Os resultados da presente investigação indiciam que o GeoGebra potencia a capacidade de resolução de problemas nos alunos, permitindo que estes utilizem estratégias diversificadas, tornando-os mais flexíveis e poderosos em resolução de problemas.

Considero que seria interessante continuar a investigação neste tema de forma a compreender como evoluem os alunos quando já conseguem realizar construções robustas.

**Referências bibliográficas**


Abrantes, P., Precatada, A., Lopes, A., Baeta, A., Loureiro, C., Ferreira, E., Guimarães, H.; Almiro, J.; Ponte, J. P.; Reis, L.; Serrazina, L.; Pires, M.; Teixeira, P. (1998). *Matemática 2001 - Diagnóstico e Recomendações para o Ensino e Aprendizagem da Matemática.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional.

Alarcão, I. (2001). Professor-investigador: Que sentido? Que formação? In B. P. Campos(Org.), *Formação profissional de professores no ensino superior* (Vol. 1, pp. 21-31). Porto: Porto Editora.

APM. (2003). Que cor tem o ano Matemática e Tecnologia. APMinformação, 67, 1.

Azevedo, M. (2002). Matemática em Movimento: Uma experiência de utilização das novas tecnologias. Em Grupo de Trabalho sobre Investigação (Org.). *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 155-175). Lisboa: APM.

Barbosa, A. (2002). *Geometria no plano numa turma do 9º ano de escolaridade: uma abordagem sociolinguística à teoria de Van Hiele usando o computador.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Beillerot, J. (2001). A "pesquisa": Esboço de uma análise. In M. André(Ed.), *O papel da pesquisa na formação e na prática dos professores* (pp. 71-90). Campinas: Papirus.

Bell, M. A. (2002). *Why use an interactive whiteboaard? A baker's dozen reasons!* . Obtido em 12 de Novembro de 2011, de http://teachers.net/gazette/Jan02/mabell.html

Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico. Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Borralho, A. (1990). *Aspectos Metacognitivos na Resolução de Problemas de Matemática.* Lisboa: APM.

Candeias, N. (2005). *Aprendizagem em Ambientes de Geometria Dinâmica (8.º Ano).* Lisboa: APM.

Cândido, P. T. (2001). Comunicação em Matemática. In K.Smole, & M. Diniz (Eds.), *Ler, escrever e resolver problemas: Habilidades básicas para aprender matemática* (pp. 15-28). Porto Alegre: Artmed.

Carreira, S. (2003). Problem solving with technology: how it changes students' mathematical activity. In T. Triandafillidis & K. Hatzikiriakou (Eds.), *Proceedings of the 6th International Conference on Technology in Mathematics Teaching* (pp. 67-74). Volos: University of Thessaly.

Cavalcanti, C. T. (2001). Diferentes formas de resolver problemas. In K. Smole, & M. Diniz (Eds.), *Ler, escrever e resolver problemas. Habilidades básicas para aprender matemática* (pp. 121-149). Porto Alegre: Artmed.

Charles, R., & Lester, F. (1986). *Mathematical problem solving.* Springhouse: Learning Institute.

Coelho, M. (1997). *O Cabri-Geometre na resolução de problemas: Estudo sobre processos evidenciados e construção de conhecimentos por alunos do 6º ano de escolaridade.* Lisboa: APM.

Crato, N. (2004). A tabuada e a máquina de calcular. *Expresso* de 24 de Dezembro. Obtido em 20 de Julho de 2011, de http://pt.scribd.com/martex/d/7518634-Nuno-Crato-Maquina-de-Calcular

Cuoco, A. A., & Godenberg, P. (2003). Geometria dinâmica: uma ponte entre a geometria euclidiana e a análise. In E. Veloso, & N. Candeias (Orgs), *Geometria dinâmica. Selecção de textos do livro Geometry turned on - Dynamic software in learning, teaching and research* (pp. 55-68). Lisboa: APM.

DEB. (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico - competências Essenciais.* Obtido em 15 de Novembro de 2010, de http://www.dgidc.min-edu.pt/recursos/Lists/Repositrio%20Recursos2/Attachments/84/Curriculo_Nacional.pdf

Diniz, M. I. (2001). Resolução de problemas e comunicação. In K. Somel, & M. Diniz (Eds.), *Ler, escrever e resolver problemas: Habilidades básicas para aprender matemática* (pp. 87-97). Porto Alegre: Artmed.

Domènech, N. (2009). Influence of dynamic geometry, software on plane geometry problem solving. *(Tese de doutoramento)* . Barcelona: Departament de Didáctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals. Univertitat Autònoma de Barcelona. Obtida em 12 de Março de 2012, de http://www.geogebra.org/publications/2009-06-30-Nuria-Iranzo-Dissertation.pdf

Dunham, P. (2000). Hand-held calculators in mathematics education: A research perspective. In E. Laughbaum (Ed.), *Hand-held technology in mathematics and science education: a collection of papers* (pp. 39-47). Columbus: OH: The Ohio State University.

Dunham, P., & Dick, T. (1994). Research on graphing calculators. *Mathematics Teachers, 87 (6)*, 440-445.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education.* London: Falmer.

Farrel, A. (1996). Roles and behaviours in technology-integrated precalculus classrooms. *Journal of Mathematical Behavior, 15,* 35-53.

Ferreira, E. (2005). Ensino e aprendizagem de geometria em ambientes Geométricos Dinâmicos: O tema de Geometria do Plano no 9º ano de escolaridade. *(Tese de Mestrado não publicada da Universidade do Minho.).* Obtido em 15 de Novembro de 2010, de http://repositorium.sdum.uminho.pt

Fitas, E., & Costa, C. (2008). Quadros Interactivos: Relato de investigações realizadas no âmbito do ensino e aprendizagem da Matemática. In A. Canavarro, D. Moreira, & M. Rocha (Orgs.), *Tecnologias e Educação Matemática* (pp. 340-353). Vieira de Leiria: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Fonseca, L. (2004). *Formação inicial de professores de Matemática: A demonstração em geometria*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Freixo, E. (2002). *A formulação de problemas para uma aprendizagem da geometria com recurso às novas tecnologias. Um estudo comparativo sobre a construção de conhecimento em duas turmas de 8.º ano de escolaridade, com uma das turmas sujeitas a um ensino recorrendo ao Cabri-GéomètreII, e a outra sujeita a um ensino dito tradicional.* (Tese de Mestrado não publicada da Universidade do Minho)

Gafanhoto, A. (2011). *Integração das diferentes representações das funções no contexto de utilização de um ambiente de geometria dinâmica (Geogebra).* Lisboa: APM.

Garofalo, J., & Lester Jr., F. K. (1985). Metacognition, Cognitive Monitoring, and Mathematical Performance. *Journal for Research in Mathematics Education 16* , 163-176.

Garry, T. (2003). The Geometer's Sketchpad na sala de aula. In E. Veloso, & N. Candeias (Orgs), *Geometria Dinâmica: Selecção de textos do livro Geometry Turned On!* (pp. 69-78). Lisboa: APM.

GAVE. (2004). *Pisa 2003 - Conceitos fundamentais em jogo na avaliação de resolução de problemas.* Obtido em 20 de Julho de 2011, de http://www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=33&fileName=conceitos_fundamentais_avaliacao_pisa2003.pdf

Gomes, I. (2006). *As tecnologias e o ensino/aprendizagem da Matemática: O contributo do programa Geometer's Sketchpad na aquisição de competências ao nível da geometria dos alunos do nono ano do ensino básico.* Obtido em 20 de Julho de 2011, de http://hdl.handle.net/1822/6650

Gorgulho, I. (2005). *Actividades de carácter investigativo em ambientes de geometria dinâmica - Um estudo com alunos de 6.º e 7.º anos.* Obtido em 20 de Julho de 2011, de http://cie.fc.ul.pt/teses_cie/mestrados_cie/m-imrgorgulho.pdf

Hayes, J. (1981). *The complete problem solver.* Philadelphia, Pennsylvania: The Franklin Intitute Press.

Hazzan, O., & Goldenberg, P. (1997). An expression of the idea of sucessive refinement in dynamic geometry environments. In E. Penkonen (Ed.), *Procedings of the 21 st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics* (Vol. 3, pp. 49-56). Helsinki: PME.

Hembree, R., & Dessart, D. (1992). Research on calculators in mathematics educacion. In J. Fey, & C. Hirsch (Eds.), *Calculators in Mathematics Education* (pp. 23-32). Reston: Va.:NCTM.

Hohenwarter, M., & Hohenwarter, J. (2009). *Ajuda GeoGebra.* (A. Ribeiro, Trans.) Obtido em 10 de Agosto de 2011, de http://www.geogebra.org/help/docupt_PT.pdf

Hoyles, C., & Noss, R. (2003). What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education? In A. Bishop, M. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds), *Second International Handbook of Mathematics Education.* pp. 323-249. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Students' interpretation when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics, 44* , 55-85.

Junqueira, M. (1995). *Aprendizagem da geometria em ambientes computacionais dinâmicos: Um estudo no 9.º ano de escolaridade*. Lisboa: APM.

Keyton, M. (2003). Alunos descobrem a geometria usando software de geometria dinâmica. In E. Veloso, & N. Candeias (Orgs), *Geometria Dinâmica: selecção de textos do livro Geometry Turned on!* (pp. 79-86). Lisboa: APM.

Kroll, D., & Miller, T. (1993). Insights from Research on Mathematical Problem Solving in the Middle Grades. In NCTM Research Interpretacion Project, *Research Ideas for the Classroom, Middle Grades Mathematics* (pp. 58-77). New York: Macmillan Publishing Co.

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with cabry-geometry. *International Journal of Computers of Mathematical Learning*, 283-317.

Laborde, C. (1993). The computer as part of learning environment: The case of Geometry. In C. Keitel, & K. Ruthen (Eds.), *Learning from computers: Mathematics Education and Tecnology* (pp. 48-67). Berlim: Springer-Verlag.

Laborde, C., & Laborde, J.-M. (1992). Problem solving in geometry:from microworlds to intelligent computer environments. In J. Ponte, J. F. Matos, & D. Fernandes (Eds), *Mathematical problem solving and new information technologies, research in contexts of pratice* (pp. 177-192). Berlim: Spring-Verlag.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., & Strasser, R. (2006). Teaching ang learning geometry with technology. In A. Gutierrez, & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, Present and Future* (pp. 275-304). Rotterdam: Sense Publishers.

Lester, F. (1994). O que aconteceu à investigação em resolução de problemas de Matemática? A situação nos Estados Unidos. In A. B. D. Fernandes (Ed.), *Resolução de Problemas: Processos Cognitivos, Concepções de Professores e Desenvolvimento Curricular* (pp. 13-31). Lisboa: IIE.

Lester (1983). *Trends and Issumes in Mathematical Problem Solving Research*. In R. Lesh & M. Landau (Eds). Acquisition of Mathematics Concepts and Processes. New York: Academic Press.

Machado, S. (2005). *A demonstração matemática no 8.º ano no contexto de utilização do Geometer's Sketchpad*. Lisboa: APM.

Meireles, A. (2006). Uso dos quadros interactivos em educação: uma experiência em Físico-Químicas com vantagens e "resistências". *(Tese de Mestrado não publicada da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto)*

Miller, D., & Glover, D. (2002). The interactive whiteboard as a force for pedagogic change: The experience of five elementary schools in an english education authority. *Information Technology in Childhood Education Annual* , 5-20.

NCTM. (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar.* Lisboa: APM e IIE.

NCTM. (2007). *Principíos e Normas para a Matemática Escolar.* Lisboa: APM.

Paiva, J. (2009). *Uma Experiência Educacional: Avaliação do Trabalho com o Geometer´s Sketchpad na Aula de Matemática*. Lisboa: APM.

Palhares, P. (1997). Histórias com problemas construídas por futuros professores de matemática. In D. Fernandes, F. Lester, A. Borralho, & I. Vale (Coords.), *Resolução de Problemas na Formação Inicial de Professores de Matemática: múltiplos contextos e perspectivas* (pp. 159-188). Aveiro: GIRP.

Pereira, M., & Guerreiro, A. (2008). Calculadoras na sala de aula. Uma investigação no 3.º ano de escolaridade. In A. Canavarro, D. Moreira, & M. Rocha (Orgs.), *Tecnologias e Educação Matemática* (pp. 110-122). Vieira de Leiria: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Piteira, G. (2000). *Actividade matemática emergente com os ambientes dinâmicos de geometria dinâmica*. Lisboa: APM.

*Plano Tecnológico da Educação*. (2010). Obtido em 10 de Agosto de 2011, de http://www.pte.gov.pt/pte/PT/Projectos/Projecto/Apresentação/index.htm?proj=6

Polya, G. (2003). *Como resolver problemas - Um aspecto novo do método matemático.* Lisboa: Gradiva.

Polya, G. (1981). *Mathematical discovery.* New York: Wiley.

Polya (1980). On solving mathematical problems in high school. In S. Krulik e R. Reys (Eds.) Problem solving in school mathematics, pp.1-2, Reston: NCTM

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema, 25,* 105-132.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2004). Investigar a nossa prática: Uma estratégia de formação e de construção do conhecimento profissional. In E. Castro, & E. Torre (Eds), *Investigación en educación matematica* (pp. 61-84). Coruña: Universidad da Coruña.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria práctica. In GTI (Org.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM

Ponte, J. P. (1997). O Ensino da Matemática na Sociedade da Informação. *Educação e Matemática,* 1-2.

Ponte, J. P. (1995). Novas tecnologias na aula de Matemática. *Educação e Matemática, 34,* 2-7.

Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante, 3(1),* 3-18.

Ponte, J. P., & Canavarro, A. P. (1997). *Matemática e Novas Tecnologias.* Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., & Cebola, G. (2008). O uso da calculadora básica e científica no Ensino da Matemática: Uma questão ainda por resolver. In A. Canavarro, D. Moreira, & M. Rocha (Orgs.), *Tecnologias e Educação matemática* (pp. 91-97). Vieira de Leiria: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da matemática no 1.º ciclo.* Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L.; Martins, M.; Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico. Ministério da Educação.* Lisboa: Direcção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Rodrigues, M. (1997). A aprendizagem da Matemática enquanto processo de construção de significado mediado pela utilização do computador. Lisboa: APM.

Schoenfeld, A. (1987). What's All the Fuss about Metacognition? In A. Schoenfeld, *Cognitive Science and Mathematics Education* (pp. 189-215). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Sierpinska, A., & Kilpatrick, J. (1998). *Mathematics education as a research domain.* Dordrecht: Kluwer.

Silver, E. (1995). The nature and use of open problems in mathematics education: Mathematical and pedagogical perspectives. *Internacional Reviews on Mathematical Education , 27 (2),* 67-72.

Smith, D. (2002). How People Learn...Mathematics. In D. H. Hallett & C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the Undergraduate level).* University of Crete, Greece (published online at http://www.math.uoc.gr/~ictm2/).

Stake, R. E. (2009). *A Arte da Investigação em Estudos de Caso.* Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Stanic, G., & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R. I. Charles, & E. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 1-22). Reston, VA: NCTM e Lawrence Erlbaum.

Sutherland, R., Ippolito, D., Porcaro, R., & Healy, L. (1995). Making sense of Cabri with A-level students. *Micromath, 11 (1)*, 25-29.

Vale, I., & Pimentel, T. (2004). Resolução de problemas. In P. Palhares (Ed.), *Elementos de matemática para professores do Ensino Básico* (pp. 7-51). Lisboa: Lidel.

Veloso, E. (1998). *Geometria. Temas actuais.* Lisboa: IIE.

Veloso, E., & Candeias, N. (2003). Prefácio. In J. King, & D. Schattschneider (Eds), *Geometria dinâmica. Selecção de textos do livro Geometry turned on!* Lisboa: APM.

Ventura, H., & Oliveira, H. (2008). Conexões entre fracções números decimais e percentagens no 5.º ano: Explorações com uma applet. In A. Canavarro, D. Moreira, & M. Rocha (Orgs), *Tecnologias e Educação Matemática* (pp. 379-392).Vieira de Leiria: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Vieira, L., Cebolo, V., & Araújo, F. (2006). Resolução de Problemas. In P. Palhares, & A. Gomes (Eds), *Mat1C, desafios para um novo rumo* (pp. 39-47). Braga: IEC.

Yin, R. K. (2003). *Case study research: Design and methods (3ª ed.).* London: Sage.

# ANEXOS

**ANEXO I**

**Tarefa 1: Os três amigos**

*Três amigos estão a brincar às escondidas no pátio da escola. O Rui tem de descobrir o Luís. Sabe que o Daniel está a 7 metros de si. O Luís está a 5 metros do Daniel e a 4 metros de si. Onde está o Luís?*

a) Resolvam o problema anterior usando o Geogebra. No final, gravem o ficheiro com a resolução com o número do grupo seguido do número da tarefa, por exemplo, G1_tarefa1.

b) Qual a solução do problema apresentado? Expliquem como a descobriram.

c) Inspirados no problema que acabaram de resolver, formulem um outro problema.

## ANEXO II

### Tarefa 2: As jogadoras de basquete

*Três jogadoras estão num campo de basquete. A Paula está a três metros do centro do campo, a Cristina está a cinco e a Dulce está a oito. As distâncias entre elas são absolutamente iguais. Qual é essa distância?*

a) Resolvam o problema anterior usando o Geogebra. No final, gravem o ficheiro com a resolução do problema usando o número do grupo, seguido do número da tarefa, por exemplo, G1_tarefa2.

b) Qual a solução do problema apresentado? Expliquem como a descobriram.

c) Inspirados no problema que acabaram de resolver, formulem um outro problema.

## ANEXO III

### Tarefa 3: O logótipo

*Na escola do Gonçalo foi lançado um concurso para o logótipo do Clube da Matemática. Para concorrer, cada aluno deveria apresentar uma imagem que obedecesse às seguintes regras:*

1. *O logótipo terá de ter a forma de um polígono regular.*

2. *Deverá ter* $\frac{2}{3}$ *da área total pintada.*

*O Gonçalo decidiu participar. Qual poderá ser o logótipo do Gonçalo?*

a) Resolvam o problema anterior usando o Geogebra. No final, gravem o ficheiro com a resolução do problema usando o número do grupo, seguido do número da tarefa, por exemplo, G1_tarefa3.

b) Qual a solução do problema apresentado? Expliquem como a descobriram.

c) Inspirados no problema que acabaram de resolver, formulem um outro problema.

## ANEXO IV

### Tarefa 4: A estrada circular

*A junta de freguesia de Quatro Castelos quer construir uma estrada turística circular que passe a igual distância dos seus quatro castelos. Onde deverá passar a estrada? Quantas hipóteses existem?*


a) Resolvam o problema anterior usando o Geogebra. No final, gravem o ficheiro com a resolução do problema usando o número do grupo, seguido do número da tarefa, por exemplo, G1_tarefa4.

b) Qual a solução do problema apresentado? Expliquem como a descobriram.

c) Inspirados no problema que acabaram de resolver, formulem um outro problema.

# ANEXO V

## Tarefa 5: Os náufragos

*Dois náufragos, Rui e Tiago, foram parar a uma ilha deserta em forma de triângulo equilátero. O Rui gostava muito de praia e resolveu passar uns anos na ilha. O Tiago só pensava em ir-se embora, pelo que estava sempre a ver se via algum barco passar ao largo da ilha.*

*Resolveram construir cada um a sua casa e começaram a pensar qual seria o melhor local. Como a ilha estava coberta de uma vegetação muito densa, tinham não só que construir as casas mas também abrir caminhos para se deslocarem na ilha.*

*O Rui queria ir todos os dias à praia. Havia três praias na ilha, correspondendo cada uma a um dos lados do triângulo. Para ter o menor trabalho possível a abrir caminhos, o Rui decidiu construir a sua casa num ponto da ilha tal que a soma das distâncias da casa às três praias fosse a menor possível.*

*O Tiago queria ir todos os dias a cada vértice da ilha para ver se passava algum barco. Queria por isso construir a casa num local tal que a soma das distâncias aos vértices fosse a menor possível.*

*Em que local deveria o Rui construir a casa? E o Tiago?*

a) Resolvam o problema anterior usando o Geogebra. No final, gravem o ficheiro com a resolução do problema usando o número do grupo, seguido do número da tarefa, por exemplo, G1_tarefa5.

b) Qual a solução do problema apresentado? Expliquem como a descobriram.

c) Inspirados no problema que acabaram de resolver, formulem um outro problema.

## ANEXO VI

### Tarefa 6: Um quadrado num triângulo

*Será que é sempre possível inscrever um quadrado num triângulo? Em que condições?*

a) Resolvam o problema anterior usando o Geogebra. No final, gravem o ficheiro com a resolução do problema usando o número do grupo, seguido do número da tarefa, por exemplo, G1_tarefa6.

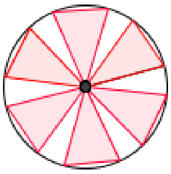
b) Qual a solução do problema apresentado? Expliquem como a descobriram.

c) Inspirados no problema que acabaram de resolver, formulem um outro problema.

## ANEXO VII

### Tarefa 7: O moinho de vento

*A Madalena quer construir um moinho de vento igual ao da figura, partindo de um triângulo.*



*Como poderá ela construir o moinho de vento? Haverá apenas uma forma de construir o moinho de vento?*

a) Resolvam o problema anterior usando o Geogebra. No final, gravem o ficheiro com a resolução do problema usando o número do grupo, seguido do número da tarefa, por exemplo, G1_tarefa7.

b) Qual a solução do problema apresentado? Expliquem como a descobriram.

c) Inspirados no problema que acabaram de resolver, formulem um outro problema.

## ANEXO VIII

### Pedido de autorização ao Diretor do Agrupamento de Escolas

Ex. mo Sr. Diretor

Durante o 1.º e 2.º período do presente ano letivo ir-se-á realizar uma investigação subordinada ao tema "*O contributo do Geogebra no desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas de alunos do 8.º ano de escolaridade*", em algumas aulas da disciplina de Matemática, da turma X do 8.º ano. Tal investigação encontra-se integrada no desenvolvimento do mestrado de Supervisão Pedagógica da Universidade de Évora. Para a recolha de dados é necessário gravar algumas aulas em vídeo, as quais não serão divulgadas. Destinando-se apenas ao fim acima mencionado, serão um suporte para a investigadora realizar a sua tese. Assim, solicito que me seja permitido pedir autorização aos encarregados de educação para que as referidas aulas sejam filmadas.
Pede deferimento

A docente

______________________

*(Anabela Lavado)*

## ANEXO IX

### Pedido de autorização aos pais e encarregados de educação

# Informação/Autorização

Durante o 1.º e 2.º período do presente ano letivo irá realizar-se uma investigação subordinada ao tema "*O contributo do Geogebra no desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas de alunos do 8.º ano de escolaridade*", em algumas aulas da disciplina de Matemática do seu educando. Tal investigação encontra-se integrada no desenvolvimento do mestrado de Supervisão Pedagógica da Universidade de Évora. Para a recolha de dados é necessário gravar algumas aulas em vídeo, as quais não serão divulgadas. Destinando-se apenas ao fim acima mencionado, serão um suporte para a investigadora realizar a sua tese.

Para se poder gravar as aulas é necessária a autorização de todos os encarregados de educação dos alunos da turma, pelo que se pede que devolva a parte destacável desta informação.

A professora/investigadora

__________________________

Obrigada.

---------------------------------------------------------------------------------------------------

Eu, ______________________________________________________, Encarregado de Educação do aluno _______________________________________, declaro que tomei conhecimento e autorizo que se gravem as aulas necessárias à concretização da investigação subordinada ao tema "*O contributo do Geogebra no desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas de alunos do 8.º ano de escolaridade*".

Assinatura do Encarregado de Educação:______________________________________

Data: _____/ ______/2011

## ANEXO X

### Categorias de análise

| Domínios | Categorias | Subcategoria |
|---|---|---|
| Caracterização das resoluções | a) Adequação | |
| | b) Rigor | |
| | c) Robustez | |
| Estratégias de resolução | a) Descobrir um padrão/descobrir uma regra ou lei de formação | |
| | b) Fazer tentativas/Fazer conjeturas | |
| | c) Trabalhar do fim para o princípio | |
| | d) Usar dedução lógica/fazer eliminação | |
| | e) Reduzir a um problema mais simples | |
| | f) Fazer uma simulação ou uma experimentação | |
| | g) Fazer um diagrama ou esquema | |
| | h) Fazer uma lista organizada ou uma tabela. | |
| Formulação de problemas | a) Variação do problema dado | i) Variar os dados |
| | | ii) Variar as condições |
| | | iii) Variar o contexto |
| | b) Problema novo | |