

*UNIVERSIDADE DE ÉVORA*

**ANÁLISE CONJUNTA  
PESADA  
DE  
REGRESSÕES  
EM  
REDES DE ENSAIOS**

*por*

*Dulce Gamito Santinhos Pereira*

Dissertação apresentada na Universidade  
de Évora para obtenção do grau de Doutor  
em Matemática

**Orientador : *Professor Doutor João Tiago Praça Nunes Mexia***

“Esta tese não inclui as críticas e sugestões feitas pelo júri”

*Évora*

**2003**

## *Errata*

<b>Pág.</b>	<b>Linha</b>	<b>✗ Onde se lê:</b>	<b>☞ Deve ler-se:</b>
3	30	abscissas	abcissas
30	20	para $H_0 : m \leq t$	para $H_0 : m \leq t$ (formalmente por esta hipótese queremos dizer $H_0 : \beta_{t+1} = 0$ )

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

ANÁLISE CONJUNTA  
PESADA  
DE  
REGRESSÕES  
EM  
REDES DE ENSAIOS



por

*Dulce Gamito Santinhos Pereira*

166 301

Dissertação apresentada na Universidade  
de Évora para obtenção do grau de Doutor  
em Matemática

Orientador : *Professor Doutor João Tiago Praça Nunes Mexia*

“Esta tese não inclui as críticas e sugestões feitas pelo júri”

*Évora*

2003

*Aos meus pais e ao Ricardo*

## AGRADECIMENTOS

Os meus sinceros agradecimentos a todos aqueles que, de algum modo, me apoiaram e ajudaram durante a realização deste trabalho. Salientando, em particular, aqueles que me acompanharam mais de perto na sua evolução, indo para eles o meu profundo agradecimento:

- ✧ Ao meu orientador, Professor Doutor João Tiago Mexia, pelas sábias sugestões, esclarecimentos e críticas essenciais visando o alargamento dos meus conhecimentos e contribuindo para a melhoria deste trabalho. Agradeço, ainda, a sua total dedicação e disponibilidade que sempre demonstrou, principalmente nos momentos mais difíceis.
  
- ✧ Aos Professores Stanisław Mejza e Tadeusz Caliński pelas suas sugestões e comentários.
  
- ✧ Ao Professor Carlos Braumann pelo apoio e ajuda prestada.
  
- ✧ Aos Professores Pilarczyk Wiesław e Jiří Hartmann pelo envio de dados utilizados neste trabalho.
  
- ✧ À equipa do Departamento de Cereais da *Estação Nacional de Melhoramento de Plantas de Elvas*, pela recolha e compilação dos dados utilizados neste trabalho.
  
- ✧ Aos meus pais e ao meu irmão, pelo apoio, interesse e incentivo que sempre me deram, transmitindo-me força, coragem e amor em todos os momentos.
  
- ✧ Ao Ricardo, pela paciência, total apoio, compreensão e carinho com que sempre me ajudou ao longo deste trabalho, mas acima de tudo pelo incentivo.

À Ao meu sobrinho que, ao longo destes anos, contou com a minha presença limitada. Espero que venha a descobrir que afinal valeu a pena e que não brincámos tanto quanto gostaríamos, mas ainda vamos a tempo!

À Aos meus familiares e amigos que de alguma forma me acompanharam, apoiaram e incentivaram no decorrer deste trabalho.

À À Manuela Eloi, pelas sugestões e ensinamentos de Inglês.

À Ao PRODEP-FSE pelo financiamento que me foi atribuído.

A todos, o meu sincero reconhecimento e um muito obrigada

Bem hajam

## RESUMO

A *Análise Conjunta de Regressões (ACR)*, é uma técnica muito utilizada para a avaliação de cultivares, integrando numa variável (o *índice ambiental*) a capacidade produtiva para cada par (local , ano).

O principal objectivo desta dissertação é estender o âmbito de aplicação da ACR a redes conectadas de delineamentos em blocos incompletos, ultrapassando, assim, o caso clássico das redes de blocos casualizados. Com efeito, actualmente, os ensaios de comparação de cultivares são do tipo “ $\alpha$ -designs”; logo, com blocos incompletos.

A extensão pretendida é feita através da introdução dos *índices ambientais*  $L_2$ . Consegue-se assim, a integração, como veremos, da ACR na inferência estatística para modelos normais. Observe-se que, a introdução dos *índices ambientais*  $L_2$  permite, ainda, abordar duma forma satisfatória as interações específicas que se verificam quando um cultivar se comporta anormalmente bem ou anormalmente mal, num dado local e ano.

Abordaremos, ainda, através da ACR, o problema da elaboração e actualização de listas de cultivares recomendados.

De salientar, ainda, a importância da criação de um algoritmo apropriado que foi desenvolvido para o uso de *índices ambientais*  $L_2$ , o *algoritmo ziguezague* e a validação da aplicabilidade da técnica. Em particular, mostrar-se-á como obter zonas equipotenciais de adaptação, nas quais se podem implantar redes de ensaios a interpretar pela técnica.

## SUMMARY

Joint Regression Analysis (JRA), is a widely used technique for evaluation of cultivars, integrating in a variable (the environmental index) the productive capacity for each (location , year) pair.

The main goal of this dissertation is to extend the application range of JRA to connected series of designs in incomplete blocks, thus going beyond the classic case of series of randomized blocks. Nowadays, comparison trials for cultivars are mainly  $\alpha$ -designs, which have incomplete blocks.

The intended extension is made through the introduction of the  $L_2$  *environmental indexes*. Moreover, the introduction of these indexes:

- enables the integration of JRA into the statistical inference for normal models;
- allows a better approach to the study of specific interactions. These interactions occur when a cultivar behaves abnormally well or abnormally badly, for a (location , year) pair.

We will also, use JRA to obtain and update of lists of recommended cultivars.

An appropriate algorithm has been developed for the adjustments and it is shown how to check for model suitability. As part of model checking we have considered the definition of zones in which series of experiments, to be jointly analyzed, may be carried out.

## Simbologia e Notações

As matrizes e os vectores são representados a negrito, sendo que:

$\mathbf{y}^m$	Representa o vector com $m$ coordenadas, ou seja, uma matriz com $m$ linhas e 1 coluna.
$y_i$	Representa a coordenada número $i$ , do vector $\mathbf{y}^m$ .
$\mathbf{A}^T$	Representa a transposta da matriz $\mathbf{A}$ .

As referências, ao elemento da matriz  $\mathbf{X}$ , na linha  $i$  e coluna  $j$ , representar-se-ão por  $x_{i,j}$ .

$J$	Representa o número de cultivares.
$b$	Representa o número de blocos.
$n$	Representa o número de parcelas por bloco.
$w$	Representa o número total das parcelas.
$a$	Representa o número de super-blocos por ensaio.
$r_h$	Representa o número de blocos no $h$ -ésimo super-bloco.
$K$	Representa o número de ensaios.
$b_j ; j = 1, \dots, J$	Representa o número de blocos em que o $j$ -ésimo cultivar está presente.
$p_{ij} ; i = 1, \dots, b ; j = 1, \dots, J$	Representa o peso atribuído ao $j$ -ésimo cultivar, no $i$ -ésimo bloco.
$p_i ; i = 1, \dots, b$	Representa o peso atribuído a um cultivar se estiver presente no $i$ -ésimo bloco.
$Y_{ij} ; i = 1, \dots, b ; j = 1, \dots, J$	Representa a produção do $j$ -ésimo cultivar, no $i$ -ésimo bloco.
$\mathbf{x}^b \left[ \tilde{\mathbf{x}}^b \right]$	Representa o vector dos <i>índices ambientais</i> [estimados].
$(\boldsymbol{\alpha}^J, \boldsymbol{\beta}^J) \left[ (\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^J, \tilde{\boldsymbol{\beta}}^J) \right]$	Representa os vectores dos coeficientes [ajustados] para as regressões.
$\hat{\theta}^b$	Representa o estimador de máxima verosimilhança do vector dos <i>índices ambientais</i> .
$(\hat{\boldsymbol{\alpha}}^J, \hat{\boldsymbol{\beta}}^J)$	Representa os estimadores de máxima verosimilhança

	dos vectores dos coeficientes para as regressões.
$\mathbf{I}_n$	Representa a matriz identidade de ordem $n$ .
$\mathbf{D}(r_1, \dots, r_s)$	Representa a matriz diagonal $s \times s$ , cujos elementos da diagonal principal correspondem a $r_1, \dots, r_s$ .
$Hes S$	Representa a matriz hessiana de $S$ .
$m$	Representa o grau do polinómio ajustado.
$L$	Representa o número de sub-redes conectadas.
$A_\ell$	Representa o conjunto dos índices dos blocos para a $\ell$ -ésima, sub-rede conectada, $\ell = 1, \dots, L$ .
$D_i$	Representa o conjunto dos índices dos cultivares presentes no $i$ -ésimo bloco, $i = 1, \dots, b$
$C_j$	Representa o conjunto dos índices dos blocos em que está presente o $j$ -ésimo cultivar
$L(\cdot)$	Representa a função de verosimilhança.
$\ell(\cdot)$	Representa o logaritmo da função de verosimilhança.
$\bar{\ell}_m(\cdot)$	Representa o supremo do logaritmo da função de verosimilhança.
$\omega$	Representa o espaço paramétrico correspondente à hipótese $H_0$ .
$\Omega$	Representa o espaço paramétrico total.
$E(\cdot)$	Representa o vector médio.
$\Sigma(\cdot)$	Representa a matriz de covariância.
$\dim(\cdot)$	Dimensão de um subespaço.
$R(\mathbf{A})$	Representa o espaço imagem da matriz $\mathbf{A}$ .
$R(\mathbf{A})^\perp$	Representa o complemento ortogonal do espaço imagem da matriz $\mathbf{A}$ .
$car(\mathbf{A})$	Representa a característica da matriz $\mathbf{A}$ , ou seja, a dimensão de $R(\mathbf{A})$ .

$\ \mathbf{y}^b\ $	Representa a norma euclidiana do vector $\mathbf{y}^b$ .
$ a $	Representa o módulo do valor $a$ .
$Int\left(\frac{k}{s}\right)$	Representa a parte inteira de $\frac{k}{s}$ .
$pr(a)$	Representa a probabilidade de acontecer $a$ .
$c$	Representa o menor <i>índice ambiental</i> observado.
$d$	Representa o maior <i>índice ambiental</i> observado.
$u$	Representa o número de pares (ano , local)
$\kappa$	Representa o número de grupos de $r$ blocos, que se podem formar.
$p$	Representa o número de anos.
$t$	Representa o número de locais.
$\sim$	Representa que um vector distribui-se como.
$S$	Representa a soma das somas dos quadrados dos resíduos.
$\tilde{\theta}_{j,j'}$	Representa a abcissa da intersecção entre as rectas ajustadas com índices $j$ e $j'$ .
$\ell_p(\ )$	Representa a função de perfil.
$\mathbf{X}$	Representa o produto cartesiano.
$\chi_g^2$	Representa a distribuição qui-quadrado, central, com $g$ graus de liberdade.
$\chi_{g,\delta}^2$	Representa a distribuição qui-quadrado, com $g$ graus de liberdade e parâmetro de não centralidade $\delta$ .
$N(\mu, \sigma^2)$	Representa a distribuição normal, com valor esperado $\mu$ e variância $\sigma^2$ .
$N(\boldsymbol{\mu}^b, \sigma^2\mathbf{V})$	Representa a distribuição normal com vector esperado $\boldsymbol{\mu}^b$ e matriz de variância-covariância $\sigma^2\mathbf{V}$ .
$t_g$	Representa a distribuição <i>t-Student</i> , com $g$ graus de liberdade.

$t_{1-\frac{\alpha}{2},g}$	Representa o quantil para a probabilidade $1 - \frac{\alpha}{2}$ da distribuição <i>t-Student</i> , com $g$ graus de liberdade.
$T_{1-\alpha,k,g}$	Representa o quantil para a probabilidade $1-\alpha$ da amplitude Studentizada, com $k$ e $g$ graus de liberdade.
$F(z r,s)$	Representa a distribuição <i>F</i> central, com $r$ e $s$ graus de liberdade.
$F(z r,s,\delta)$	Distribuição <i>F</i> central, com $r$ e $s$ graus de liberdade e parâmetro de não centralidade $\delta$ .
$f_{1-\alpha,r,g}$	Representa o valor crítico da distribuição <i>F</i> ao nível de significância $\alpha$ , com $r$ e $g$ graus de liberdade.
$\bar{f}_{1-\alpha,r,s}$	Representa o quantil para a probabilidade $1-\alpha$ da distribuição do quociente de dois qui-quadrados centrais independentes, com $r$ and $s$ graus de liberdade, $\chi_r^2$ e $\chi_s^2$ .
$\mathbf{0}_{r,s}$	Representa a matriz nula de ordem $r \times s$ .
$[\mathbf{u}^b]_{\xi}$	Representa a classe de equivalência $\xi$ contendo $\mathbf{u}^b$ .
q.c.	Representa convergência quase certa.
$\nabla^{\perp}$	Representa o complemento ortogonal de $\nabla$ .
$\mathbf{Q}(\nabla)$	Representa a matriz de projecção ortogonal em $\nabla$ .
$\mathbf{u}_{\nabla}^b$	Projecção ortogonal do vector $\mathbf{u}^b$ em $\nabla$ .
<i>i.i.d.</i>	Independentes e identicamente distribuídos.
<i>sse</i>	Se e só se.
$\#(A)$	Representa o cardinal do conjunto $A$ .
$C$	Representa o conjunto dos índices dos cultivares para os quais no mesmo ensaio não exista <i>interacção específica</i> <sup>1</sup> significativa.
$Y(C)$	Representa a média das produções dos cultivares sem <i>interacção específica</i> .

<sup>1</sup> Denota-se por *interacção específica*, num dado ano, relativo a um cultivar e num determinado local, se nesse local e ano, o cultivar produzir anormalmente bem ou anormalmente mal.

$\rho$	Representa o coeficiente de correlação usual.
$R^2$	Representa o coeficiente de determinação.
$\ln$	Representa o logaritmo natural.
$\mathfrak{R}$	Representa o conjunto dos números reais.
$\mathfrak{R}^b$	Representa o espaço euclidiano de dimensão $b$ .
□	Representa o final de demonstração.
UMP	Uniformemente mais potente.
ACR	Análise Conjunta de Regressões.
ACRL	Análise Conjunta de Regressões Linear.
ANOVA	Análise de Variância.
ZEA	Zona Equipotencial de Adaptação.
Dem.	Demonstração.
pg.	Página.

# CONTEÚDO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	1
<b>2</b>	<b>Resultados Preliminares</b>	6
2.1	Perspectiva global da ACRL	6
2.2	Conexão	8
2.3	“ $\alpha$ -Designs”	9
<b>3</b>	<b>Índices ambientais <math>L_2</math></b>	12
3.1	Considerações prévias	12
3.2	Regressões lineares, caso geral	13
3.3	Regressões lineares, caso completo	23
3.4	Regressões polinomiais	26
3.5	Estimadores de máxima verosimilhança	29
3.6	Testes de quociente de verosimilhanças, caso geral	30
3.7	Testes de quociente de verosimilhanças, caso completo	40
3.8	Comparação dos <i>índices ambientais clássicos</i> e $L_2$ no caso completo	43
3.9	Convergência quase-certa dos estimadores	47
<b>4</b>	<b>Interacções específicas</b>	49
4.1	Detecção, caso com repetições	49
4.2	Detecção, caso geral	51
4.3	Ajustamento na presença de interacções específicas	53
<b>5</b>	<b>Contorno superior e selecção</b>	56
5.1	Geometria do contorno superior	56
5.2	Comparação e selecção de cultivares	60
5.3	Intervalos de dominância	64
5.4	Comparação dos <i>índices ambientais clássicos</i> e dos <i>índices ambientais <math>L_2</math></i> no caso completo	66
5.5	Testes $F$ selectivos	72

<b>6 Validação do modelo</b> .....	84
<b>6.1</b> Considerações preliminares .....	84
<b>6.2</b> Técnica dos resíduos .....	84
<b>6.3</b> Linearidade das regressões .....	88
<b>6.4</b> Medida do ajustamento .....	91
<b>6.5</b> Zonas equipotenciais de adaptação .....	92
<b>7 Estruturação dos <i>índices ambientais</i></b> .....	94
<b>7.1</b> Considerações prévias .....	94
<b>7.2</b> Modelo aditivo .....	95
<b>7.3</b> Comparações múltiplas .....	98
<b>7.4</b> Verificação da aditividade .....	100
<b>7.5</b> Blocos agrupados .....	101
<b>8 Cultivares recomendados</b> .....	109
<b>8.1</b> Listas de cultivares.....	109
<b>8.2</b> Exemplo de escolha de cultivares recomendados.....	110
<b>9 Conclusões gerais</b> .....	115
<b>10 Bibliografia</b> .....	117

## ÍNDICE DE FIGURAS

<b>Figura 5.1</b>	Rectas paralelas .....	57
<b>Figura 5.2</b>	Abcissa da intersecção entre rectas ajustadas com índices $j e j'$ .....	57
<b>Figura 5.3</b>	Traçado do contorno superior quando $\bar{\theta}_1 > d$ .....	57
<b>Figura 5.4</b>	Traçado do contorno superior quando $c < \bar{\theta}_1 < d$ .....	58
<b>Figura 5.5</b>	Traçado do contorno superior quando $\bar{\theta}_1 < c$ .....	58
<b>Figura 5.6</b>	Traçado do contorno superior com dois cultivares dominantes .....	60
<b>Figura 5.7</b>	Comparação de cultivares .....	61
<b>Figura 5.8</b>	Análise conjunta de regressões com <i>índices ambientais clássicos</i> .....	67
<b>Figura 5.9</b>	Análise conjunta de regressões com <i>índices ambientais L<sub>2</sub></i> .....	68
<b>Figura 5.10</b>	Regressões ajustadas, utilizando <i>índices ambientais L<sub>2</sub></i> para os 16 ensaios .....	80
<b>Figura 6.1</b>	Mapa das zonas equipotenciais de adaptação .....	93
<b>Figura 7.1</b>	Densidade da $t$ central .....	98
<b>Figura 8.1</b>	Regressões ajustadas, utilizando <i>índices ambientais L<sub>2</sub></i> para os 17 ensaios .....	112

## ÍNDICE DE TABELAS

<b>Tabela 3.1</b>	Regressões ajustadas e coeficientes de determinação, usando os <i>índices ambientais clássicos</i> e $L_2$ .....	44
<b>Tabela 5.1</b>	Cultivares dominantes e (significativamente) dominados .....	69
<b>Tabela 5.2</b>	Cultivares significativamente dominados .....	71
<b>Tabela 5.3</b>	Nome dos cultivares estudados .....	77
<b>Tabela 5.4</b>	Locais onde se realizaram os ensaios .....	77
<b>Tabela 5.5</b>	Coeficientes ajustados e coeficientes de determinação .....	78
<b>Tabela 5.6</b>	Cultivares com declives significativamente inferiores ao nível de 5% ao do cultivar Prestige, utilizando o método de Scheffé .....	79
<b>Tabela 5.7</b>	Cultivares com declives significativamente inferiores ao nível de 5% ao do cultivar Prestige, utilizando o método de Bonferroni .....	79
<b>Tabela 5.8</b>	Cultivares dominantes e dominados .....	81
<b>Tabela 5.9</b>	Cultivares significativamente dominados .....	83
<b>Tabela 6.1</b>	Regressões Ajustadas .....	90
<b>Tabela 6.2</b>	Estatísticas de teste $t$ .....	90
<b>Tabela 7.1</b>	Locais e anos onde foram efectuados os ensaios .....	104
<b>Tabela 7.2</b>	Efeitos estimados e testes $t$ .....	106
<b>Tabela 7.3</b>	Diferenças significativas entre locais, utilizando o método de comparação múltipla de Scheffé .....	106
<b>Tabela 7.4</b>	Diferenças significativas entre locais, utilizando o método de comparação múltipla de Bonferroni .....	107
<b>Tabela 8.1</b>	Nome dos cultivares estudados .....	110
<b>Tabela 8.2</b>	Locais e anos onde se realizaram os ensaios .....	111
<b>Tabela 8.3</b>	Coeficientes ajustados e de determinação .....	111
<b>Tabela 8.4</b>	Cultivares dominantes e dominados .....	113
<b>Tabela 8.5</b>	Cultivares significativamente dominados, utilizando o método de Scheffé e Bonferroni .....	114



## 1 - Introdução

*“The object of testing varieties of cereals is to find out which ones will pay the farmers the best.”*

*Student, 1923*

As conclusões dum ensaio isolado só se aplicam às condições em que o mesmo foi realizado. Assim, cada vez mais se recorre à interpretação conjunta de ensaios de forma a ter conclusões aplicáveis a regiões. Muitas vezes, as *redes de ensaios* são realizadas em anos sucessivos para também se ter em consideração o efeito dos anos.

Normalmente, os ensaios que integram uma *rede* foram delineados no seu conjunto. Apesar disso, a Meta-análise, ver Hedges & Olkin (1985), permite ultrapassar a falta desse delineamento conjunto.

No entanto, no que se segue tenderemos a considerar *redes de ensaios* conjuntamente delineados para comparação de cultivares. O nosso objectivo fundamental é estender a técnica da *Análise Conjunta de Regressões (ACR)*, de maneira a englobar *redes de ensaios* com blocos incompletos. Este ponto é importante, pois os ensaios que, cada vez mais, se usam para comparar cultivares são “ $\alpha$ -designs”, logo ensaios com blocos incompletos.

A ACR pode, aliás, ser considerada como uma técnica para análise da interacção genótipo  $\times$  ambiente. No artigo de revisão, Aastveit & Mejza (1992) classificam os modelos utilizados para o estudo da interacção referida em três classes:

- modelos para a estabilidade de resposta quando há mudanças de ambiente;
- modelos que se obtiveram usando clustering;
- modelos em que são consideradas variáveis ambientais específicas.

A primeira classe é ainda dividida em duas, consoante a técnica dominante utilizada é a Análise de Regressão ou a Análise de Variância (ANOVA). A ACR pertence à primeira destas sub-classes. No entanto, a perspectiva que adoptaremos para a nossa abordagem, difere da usual, já que poremos ênfase na capacidade de aproveitamento das potencialidades produtivas e não numa estabilidade de resposta.

Aliás, actualmente, procura-se obter cultivares com capacidade de aproveitamento de situações de maior fertilidade.

A ACR tem sido uma técnica muito utilizada para interpretar *redes de ensaios* destinadas à comparação de cultivares. Na Secção 2.1 é apresentado um breve resumo da história da técnica.

Observe-se que, este tipo de experimentação é realizado através de *redes de ensaios*, de forma a permitir seleccionar cultivares aplicáveis a uma zona suficientemente grande, de forma a tornar rentável o trabalho de melhoramento. Os delineamentos individuais foram inicialmente do tipo de blocos casualizados; no entanto, actualmente, na Europa, os delineamentos mais utilizados para comparar cultivares são “ $\alpha$ -designs”. Nestes delineamentos, os blocos apenas contêm parte dos cultivares. Assim, a técnica usual de estimar os *índices ambientais* dos blocos, ver Gusmão (1985) e (1986a), através das respectivas produções médias, deixa de ser aplicável. No entanto, recentemente, Mexia et al. (1999), introduziram os *índices ambientais*  $L_2$  aplicáveis a *redes* de delineamentos de blocos incompletos.

No que segue, começaremos por dar uma perspectiva global da ACR e, dada a sua importância presente nos ensaios de comparação de cultivares, introduziremos sumariamente os “ $\alpha$ -designs”.

No terceiro capítulo, introduziremos os *índices ambientais*  $L_2$ , utilizando-os no ajustamento de regressões lineares e polinomiais à produção dos cultivares na *rede de ensaios*. A ACR clássica assenta no ajustamento de regressões lineares, uma por cultivar, das produções nos *índices ambientais*; assim, as regressões polinomiais representariam uma generalização natural do uso de regressões lineares. No entanto, Mexia et al. (1999) e (2001) mostraram que a precisão pouco aumenta com o grau da regressão. Esta observação é importante, pois valida empiricamente a utilização de regressões lineares; por outro lado, as regressões lineares são mais simples de ajustar individualmente e o contorno superior definido pelas regressões lineares ajustadas, ver Mexia et al. (1997), tem possibilidades interessantes para seleccionar cultivares.

A utilização dos *índices ambientais*  $L_2$  permitir-nos-á ainda:

- obter estimadores de máxima verosimilhança;
- realizar testes de quociente de verosimilhança.

Em particular, testaremos a linearidade das regressões, obtendo-se, assim, um processo seguro de validação do uso de regressões lineares. Quando se aceita a linearidade das

regressões, realiza-se uma ACR linear (ACRL). Este tipo de análise desempenhará um papel central no nosso trabalho. Assim, se nada for dito as regressões utilizadas são lineares.

Por outro lado, a utilização dos *índices ambientais*  $L_2$  permite, ver Mexia et al. (2001), atribuir pesos distintos aos pares (local, ano) que correspondem aos ensaios individuais. Estes pesos medirão a representatividade agronómica e valor económico dos vários pares.

Compararemos ainda, no caso em que se utilizam blocos completos, os *índices ambientais* clássicos dados por médias dos blocos e os *índices ambientais*  $L_2$ . Muitas vezes, ver por exemplo Mexia et al. (1999), os dois tipos de *índices ambientais* diferem pouco. Procuraremos analisar a razão desta concordância aproximada.

Segue-se um quarto capítulo onde consideraremos a interacção específica. Esta interacção verifica-se, ver Gusmão et al. (1992a), quando, num dado par (local, ano), um ou mais cultivares se comportam anormalmente bem ou anormalmente mal. Testaremos a existência de tais interacções, no caso em que para os pares (local, ano) existem repetições para todos os cultivares em estudo e indicaremos como fazê-lo, no caso geral. Consideraremos, em seguida, o ajustamento das regressões na presença de interacções específicas significativas. Como veremos, os *índices ambientais*  $L_2$  permitem uma mais completa utilização dos dados para realizar estes ajustamentos do que era possível com os *índices ambientais* clássicos, mesmo quando os blocos são completos.

A ACRL é uma técnica flexível, já que para cada valor da produtividade, medida pelo *índice ambiental*, selecciona um ou mais cultivares. O conjunto dos cultivares seleccionados variará, em geral, com o *índice ambiental*. Como referido anteriormente, o contorno superior definido pelas linhas das regressões ajustadas pode ser usado para esta selecção. No quinto capítulo, estudaremos estes contornos. Começaremos pela geometria destes contornos, mostrando que os mesmos constituem uma poligonal convexa. Os *índices ambientais*  $L_2$  permitem utilizar o método do perfil, ver McCullagh & Tibshirani (1990), Currie & Durban (2000) e Durban & Currie (2000), para estudar as abscissas dos vértices da poligonal. Os cultivares, cujas rectas de regressão contribuem para o contorno superior, serão os cultivares dominantes. A cada um destes estará associado um intervalo de variação do *índice ambiental*. Os outros cultivares terão de ser comparados com os cultivares dominantes. Aplicaremos testes  $t$  e métodos de comparação múltipla para realizar a selecção de cultivares. Inicialmente, ver Mexia

et al. (1997), apenas os testes  $t$  eram utilizados; no entanto, optamos agora por incluir os métodos de comparação múltipla de forma a robustecer o nosso processo de decisão.

O troço da direita do contorno superior é particularmente interessante por corresponder ao cultivar que melhor responde em situações altamente produtivas. Observe-se que, numa regressão linear  $\alpha + \beta x$ ,  $\beta$  mede a taxa de resposta à variação da variável controlada, neste caso, o *índice ambiental*. Terá, pois, interesse comparar a taxa correspondente ao cultivar dominante no troço da direita, ou ao cultivar com maior declive com os restantes. Assim, será de utilizar um teste  $F$  selectivo, ver Dias (1994); como para os testes  $F$  habituais, a hipótese testada será a de igualdade de coeficientes  $\beta$ . O que é novo, como veremos, são as alternativas, nas quais o coeficiente  $\beta$  para o cultivar dominante é superior aos restantes.

Para além dos bem conhecidos erros de primeira e segunda espécie, é importante considerar, ver Tiago de Oliveira (1990), o erro de terceira espécie. Este erro corresponde à utilização dum modelo errado. Convém, pois, validar (adequar) sempre o modelo que usamos. No sexto capítulo, apresentaremos duas técnicas para validar os modelos da ACR e ACRL. A primeira destas técnicas utiliza os resíduos das regressões ajustadas e pode ser aplicada mesmo quando se utilizam regressões não lineares. Quanto à segunda técnica, é restrita à ACRL, assentando nos testes atrás referidos de linearidade.

Sob o tópico da validação da ACRL consideraremos medidas do ajustamento obtido. Com efeito, quanto mais alta for essa medida, tanto mais é de aceitar o ajustamento e consequentemente o modelo usado.

A concluir este capítulo, consideraremos o conceito de zona equipotencial de adaptação introduzido por Gusmão et al. (1989). Estas zonas são regiões tão extensas quanto possível, nas quais se pode aplicar a ACRL. Isto é, uma *rede de ensaios* implantados numa tal região pode ser interpretada por esta técnica, deixando a mesma de ser aplicável quando os ensaios se encontram em duas ou mais dessas zonas. Estas regiões constituem, pois, os domínios geográficos naturais em que se pode implantar uma *rede de ensaios* a analisar pela ACRL. Se uma *rede de ensaios* inclui delineamentos em mais do que uma destas zonas, esta deveria ser dividida em *sub-redes*, uma para cada zona.

Até aqui, temos associado os *índices ambientais* aos pares (local, ano). Convém estruturar essa correspondência, o que faremos no sétimo capítulo. Nessa estruturação

seguiremos Caliński et al. (1987a), (1987b), (1995a) e (1995b) admitindo haver aditividade nos efeitos de local e de ano. Adoptaremos, no entanto, ao contrário desses autores, modelos de efeitos fixos, enquanto que Caliński et al. (1987a), (1987b), (1995a) e (1995b) usam modelos de efeitos aleatórios. A razão da nossa escolha é que, com efeito, o número de anos com que se trabalha é, em geral, reduzido e os locais tendem a repetir-se e não podem ser escolhidos livremente. Temos, no entanto, de considerar separadamente os casos em que todas as combinações local  $\times$  ano estejam presentes, daqueles em que isso não acontece, ou seja, daqueles em que só parte das combinações estão disponíveis.

Finalmente, no oitavo capítulo, consideraremos a utilização da ACRL para seleccionar, dentro da lista dos cultivares certificados, cultivares recomendados para serem utilizados.

Resumindo, com a utilização dos *índices ambientais*  $L_2$  foi possível:

- aplicar a ACRL sem ser no caso completo, e apresentar algumas aplicações novas como, por exemplo, escolher cultivares recomendados;
- integrar a ACRL na teoria da verosimilhança da inferência estatística.

A concluir, refiramos que os programas utilizados na interpretação dos dados foram escritos em BASIC. Optou-se por esta linguagem devido a mesma facilitar a utilização de notação matricial.

## 2 - Resultados Preliminares

### 2.1 - Perspectiva global da ACRL

No melhoramento vegetal pretende-se obter variedades que possam ser utilizadas em zonas tão amplas quanto possível. Assim, os ensaios de comparação de cultivares (também chamados de ensaios de variedades) tendem a ser integrados em *redes de ensaios*, que representam bem estas zonas e para as quais se procura uma interpretação conjunta.

As técnicas usadas na análise de *redes de ensaios* são apresentadas em Aastveit & Mejza (1992). Como referimos, a primeira classe de técnicas considerada por Aastveit & Mejza (1992) dividia-se em duas, consoante a técnica base utilizada era a ANOVA ou a Análise de Regressão. Interessa-nos fundamentalmente a segunda opção na qual se integra a ACRL. Dentro da primeira sub-classe podem citar-se, por exemplo, os trabalhos de Plaisted & Peterson (1959), Plaisted (1960), Allard & Bradshaw (1964), Fox & Rosielle (1982), Wricke (1962) e Shukla (1972) em que a ANOVA foi utilizada para estudar questões de estabilidade das produções. Como já referimos, recentemente, a ênfase passou de cultivares estáveis para cultivares capazes de responderem a boas capacidades de produção. Além disso, uma avaliação global do genótipo, através da interacção do ambiente, pode ser consultada no conjunto dos artigos editados por Kang & Gauch (1996).

Passemos às técnicas baseadas em regressões e em particular à ACRL. O problema crucial dos métodos baseados em regressões está na escolha das variáveis controladas, já que normalmente se toma a produção como variável dependente. Na ACRL utiliza-se uma variável sintética, o *índice ambiental*, para medir a capacidade produtiva de cada par (local, ano).

Os trabalhos clássicos de Mooers (1921) e de Yates & Cochran (1938) estiveram na origem da ACRL, tendo sido relevantes os aperfeiçoamentos incrementados para esta, por Finlay & Wilkinson (1963) e por Eberhart & Russel (1966), que tornaram possível utilizar a ACRL para comparar o desempenho de cultivares quando sujeitos a uma extensa gama de capacidades produtivas dos pares (local, ano). Além disso, Gusmão (1985), (1986a) e (1986b) mostrou que a precisão da análise dos delineamentos

em blocos casualizados aumentava significativamente, considerando *índices ambientais* para os blocos individuais em vez de um só *índice ambiental* por ensaio. A razão para tal vem do facto de, havendo  $K$  ensaios com  $b$  blocos cada, passa a ter-se  $Kb$  pontos em vez de só  $K$  pontos por regressão.

Mais tarde, a ACRL foi criticada por Westcott (1986) e Lin et al. (1986) por não considerar variáveis ambientais específicas, mas outros autores, por exemplo Becker & Leon (1988), argumentaram que essas críticas não eram suficientemente fortes para justificar pôr de lado a ACRL. Com efeito, uma abordagem holística da capacidade produtiva integrada nesta técnica tem-se revelado promissora na experiência portuguesa, ver por exemplo Gusmão (1986b), (1990), Gusmão et al. (1991a), (1991b) (1992a), (1992b), (1993a), (1993b), (1995), Ferreira et al. (1990), Maças et al. (1990), Mexia et al. (1991) e Dias (2000). Observe-se que, o estudo da interação específica, que adiante apresentaremos, permite colmatar as insuficiências desta aproximação.

Na base da ACRL, na sua variante clássica, está a ideia de utilizar a média das produções para um par (local, ano) para medir a correspondente capacidade produtiva. Gusmão (1985), (1986a), (1986b) e (1988) mostrou a vantagem de, no caso dos delineamentos em blocos casualizados, se tomar as médias bloco a bloco em vez de, para cada cultivar, se ter uma única média por ensaio.

Assim, classicamente, a ACRL era aplicada a *redes de ensaios* normalmente do tipo de blocos casualizados. Para cada bloco obtinha-se a média das produções, ajustando-se, cultivar a cultivar, regressões lineares das produções nas médias. Este modo de proceder tem várias limitações:

- ser apenas aplicável quando os blocos são completos, o que não se verifica nos “ $\alpha$ -designs” hoje largamente divulgados na Europa comunitária;
- ser difícil de aceitar as produções médias como valores duma variável controlada.

No entanto, como acima referimos, apesar destas limitações, a técnica tem conduzido a bons resultados. Adiante, ao compararmos os *índices ambientais clássicos*, agora considerados, com os *índices ambientais*  $L_2$  retomaremos este ponto.

Ambas as dificuldades referidas são ultrapassadas quando se passa a trabalhar com *índices ambientais*  $L_2$ . Como veremos, existe um algoritmo que permite aplicá-los ao caso de blocos incompletos, a utilização dos mesmos permite obter estimadores de máxima verosimilhança, não só dos *índices ambientais*, mas também dos restantes

parâmetros, assim como realizar testes de quociente de verosimilhanças. Consegue-se, assim, como principais resultados do presente trabalho:

- a ampliação do campo de aplicação da ACRL, de forma a englobar os tipos mais frequentes de *redes de ensaios*;
- a integração da ACRL na inferência estatística.

Para terminar, observamos que Digby (1979) elaborou um método numérico iterativo para ajustar um modelo de regressão conjunta, para uma tabela incompleta de dupla entrada sem repetições, não analisando, no entanto, as propriedades estatísticas dos estimadores obtidos. Outro método iterativo para ajustamento de regressões conjuntas foi apresentado por Ng & Grunwald (1997). Ambos os métodos são comparados em Ng & Williams (2001).

## 2.2 – Conexão

Dado um delineamento em blocos, um conjunto ordenado de blocos é uma cadeia, se nesse conjunto, os blocos adjacentes tiverem tratamentos comuns. Tais cadeias conectam os tratamentos do seu primeiro bloco com os do bloco final. Quando existe uma cadeia conectando os tratamentos  $t_i$  e  $t_j$ , escrevemos  $t_i \zeta t_j$  e dizemos que estes tratamentos estão conectados no delineamento. Quando  $t_i = t_j = t$  podemos considerar uma cadeia constituída por um único bloco, contendo  $t$ ; assim, escrevemos  $t \zeta t$  e a relação  $\zeta$ , entre tratamentos, goza da propriedade reflexiva.

Quando todo o par de tratamentos num delineamento de blocos é conectado, o delineamento é conectado, ver Bose (1950), Raghavarao (1971), definição (4.2.3) e Kageyama (1984).

Tendo-se a

### **Proposição 1.**

A relação  $\zeta$ , entre tratamentos num delineamento de blocos, é uma relação de equivalência.

**Dem.:** Vimos que  $\zeta$  goza da propriedade reflexiva. Por outro lado, se  $t_i \zeta t_j$  basta inverter a ordem dos blocos da cadeia conectando  $t_i$  e  $t_j$  para obter uma cadeia

conectando  $t_j$  e  $t_i$ , vindo  $t_j \zeta t_i$  o que mostra que  $\zeta$  goza da propriedade simétrica. Finalmente, se  $t_i \zeta t_j$  e  $t_j \zeta t_k$  unindo-se as cadeias conectando  $t_i$  e  $t_j$  e,  $t_j$  e  $t_k$  obtém-se uma cadeia conectando  $t_i$  e  $t_k$ , pelo que  $t_i \zeta t_k$  e  $\zeta$  goza da propriedade transitiva, o que completa a demonstração.  $\square$

Assim, pode-se decompor o conjunto de tratamentos em classes de equivalência  $\zeta$ . Esta relação permite decompor qualquer delineamento não conectado em sub-delineamentos conectados.

### 2.3 – “ $\alpha$ -Designs”

Dizemos que um delineamento de blocos é  $\alpha$ -resolúvel se os blocos podem ser separados em  $a$  conjuntos (super-blocos) de  $r_h$  blocos cada  $\left( b = \sum_{h=1}^a r_h \right)$ , de modo que o  $h$ -ésimo super-bloco contém todos os tratamentos exactamente  $\alpha$  vezes, com  $h = 1, 2, \dots, a$ .

Quando se utilizam blocos incompletos convém-nos considerar delineamentos nos quais os blocos se agrupem em super-blocos, contendo uma vez cada cultivar. Consegue-se assim ter produções, obtidas em condições que variam pouco, para todos os cultivares. Os delineamentos que satisfazem esta condição serão resolúveis no sentido de Shrikhande & Raghavarao (1963, 1964) com  $\alpha = 1$  e tendem a ser cada vez mais utilizados na agricultura, especialmente na comparação de cultivares. Uma família muito flexível de tais delineamentos é precisamente a dos “ $\alpha$ -designs” introduzida por Patterson & Williams (1976). Embora se pudesse tomar  $\alpha > 1$ , em geral escolhe-se  $\alpha = 1$  de forma a reduzir a dimensão dos super-blocos e a aumentar a homogeneidade dentro dos mesmos. Por ensaio haverá, então,  $a$  super-blocos. Assim, para cada cultivar, haverá  $\alpha$  repetições por ensaio. Como veremos, a opção  $\alpha = 1$  não levanta qualquer problema quando se utiliza *indices ambientais*  $L_2$ .

Sendo  $J$  o número de cultivares, cada um deles está presente  $\alpha$  vezes em cada super-bloco, e se os super-blocos forem divididos em  $r$  blocos de  $n$  parcelas em geral obter-se-á

$$\alpha J = nr \tag{2.1}$$

expressão esta que, quando  $\alpha = 1$ , se reduz a

$$J = nr . \tag{2.2}$$

Observe-se que, como todos os cultivares estão presentes em cada super-bloco, estes delineamentos são conexos, se se equipararem os super-blocos aos blocos da discussão anterior. Além disso, para realizar uma ACR há, nestes delineamentos, equilíbrio suficiente na medida de que, em cada ensaio, cada cultivar estará representada  $a$  vezes. Como veremos, isto permitirá a utilização dos *índices ambientais*  $L_2$  e assim efectuar a ACR para estes delineamentos.

A construção destes delineamentos pode ser feita com ajuda do computador, por exemplo podendo ser usado o programa CycDesigN elaborado no CSIRO (Commonwealth Scientific & Industrial Research Organisation) por D. Whitaker, E. R. Williams e J. A. John. Este programa é baseado no livro de John & Williams (1995) e pode gerar a maioria das classes de delineamentos discutidas no livro. Também há listas de tais delineamentos, bastantes completas, na tese de doutoramento de Williams, ver Williams (1975).

Um exemplo típico destes delineamentos é, ver Patterson & Williams (1976) dado por

	Super-bloco I				Super-bloco II				Super-bloco III			
Blocos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Cultivares	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
	4	5	6	7	5	6	7	4	6	7	4	5
	8	9	10	11	10	11	8	9	11	8	9	10
	12	13	14	15	15	12	13	14	13	14	15	12
	16	17	18	19	19	16	17	18	18	19	16	17

Neste caso,  $a = 3$ ,  $J = 20$ ,  $r = 4$ , e  $n = 5$ . Para deduzir este delineamento numeramos, ver Patterson & Williams (1976), os cultivares de 0 a  $J - 1$ . Seja  $U(r) = \{0, \dots, r - 1\}$ , o conjunto dos restos da divisão por  $r$ , também chamado de conjunto das classes dos restos (modulo ( $r$ )). Na sua construção, parte-se duma matriz  $n \times a$  cujos elementos pertencem a  $U(r)$ , ou seja, às classes dos restos. Cada coluna desta matriz  $[a]$  origina, por permutação cíclica,  $r - 1$  outras colunas, as quais originarão outras tantas sub-matrizes  $n \times r$  duma matriz  $[a^*]$  de tipo  $n \times ar$ . No exemplo que estamos a considerar, parte-se da matriz

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

para, utilizando as permutações,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

obter, de cada das colunas da matriz anterior, as sub-matrizes  $n \times r$  da matriz  $n \times ar$ ,

$$[\alpha^*] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & | & 0 & 1 & 2 & 3 & | & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & | & 1 & 2 & 3 & 0 & | & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & | & 2 & 3 & 0 & 1 & | & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & | & 3 & 0 & 1 & 2 & | & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & | & 3 & 0 & 1 & 2 & | & 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por último, para completar a dedução do delineamento, adiciona-se,  $r(i-1)$  aos elementos da  $i$ -ésima linha de  $[\alpha^*]$ ,  $i=1, \dots, n$ , obtendo-se, assim, o delineamento anteriormente considerado.

Observe-se que esta técnica se pode aplicar para todo o  $J$  múltiplo de  $n$ . O exemplo anterior era interessante, pois  $n = r + 1$ , levando a que os super-blocos fossem quase quadrados, com uma só linha em excesso. Como veremos, os *índices ambientais*  $L_2$  adaptam-se bem a *redes* de delineamentos deste tipo.

### 3 - Índices ambientais $L_2$

#### 3.1 - Considerações prévias

Como vimos, ao passar-se a utilizar “ $\alpha$ -designs” deixa de se ter blocos completos, isto é, blocos contendo todos os cultivares. Assim, a utilização de médias das produções nos vários blocos, como medidas de *índices ambientais* (*índices ambientais clássicos*), deixa de ser aceitável, na medida em que conduz a estimativas fortemente enviesadas desses *índices*. Estas estimam algum efeito dos blocos e algum efeito das combinações dos tratamentos, mas não têm nenhum significado estatístico. As médias são diferentes, para cada bloco, por causa dos diferentes conjuntos de tratamento que ocorrem nos blocos incompletos, significando que estas médias não podem ser usadas como *índices ambientais*. Para ultrapassar esta dificuldade passaremos a utilizar *índices ambientais*  $L_2$ . Começamos por considerar o caso de regressões lineares, estendendo em seguida a utilização destes *índices* para regressões polinomiais. Os *índices ambientais*  $L_2$  são utilizados para minimizar a soma das somas dos quadrados dos resíduos para as regressões, existindo uma regressão por cultivar. Estes *índices* são chamados de *índices ambientais*  $L_2$  porque é usada a norma  $L_2$ . Sendo uma alternativa aos *índices ambientais clássicos* mencionados anteriormente, ver Mexia et al. (1999).

Uma vez resolvido o problema do ajustamento e para completar as nossas considerações relativas às regressões, introduzimos o pressuposto de que as observações dos rendimentos (produções) são normais, independentes e homocedásticas. Pode então obter-se estimadores de máxima verosimilhança e construir testes de quociente de verosimilhanças. As hipóteses testadas incidirão sobre os coeficientes duma ou mais das regressões ajustadas. Na primeira classe de hipóteses, encontram-se as de linearidade das regressões que serão de novo consideradas quando se valida o modelo. A segunda classe de hipóteses diz respeito à comparação dos comportamentos de vários cultivares.

### 3.2 - Regressões lineares, caso geral

Estudaremos o caso geral e o caso completo em que todos os cultivares estão presentes em todos os blocos. Nesta secção trataremos do caso geral, onde não exigiremos que todos os cultivares estejam presentes em todos os blocos, reservando o caso completo para a secção seguinte. Considerando  $p_{ij}$  o peso atribuído ao  $j$ -ésimo cultivar,  $j = 1, \dots, J$ , no  $i$ -ésimo bloco,  $i = 1, \dots, b$ , se um cultivar estiver ausente [presente] no  $i$ -ésimo bloco o seu peso será 0 [ $p_i$ ],  $i = 1, \dots, b$ . Como referimos, estes últimos pesos  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, b$ , introduzidos por Dias (2000), no caso linear completo, podem ser usados para medir a importância agronómica do local do bloco. Havendo vários blocos no mesmo local, os seus pesos serão iguais. Estes pesos devem ser escolhidos com a ajuda dos agrónomos que efectuem os ensaios de campo. Normalmente, usamos os valores 1 e 0 para os pesos, mas podemos usar qualquer outro valor alternativo não negativo, indicando a relevância dos blocos. Observe-se que, por um lado, os locais onde se realizam os ensaios e são efectuadas as comparações dos cultivares, deverão cobrir a região, o mais possível; por outro lado, devem esses mesmos locais, dentro de certos limites, diferir o mais possível, devem ser considerados como fixos e não como o resultado de uma escolha aleatória. Desta forma, no modelo, só o erro deverá ser considerado como aleatório.

Assumiremos que os vectores das produções são normais, homocedásticos e que, se o  $j$ -ésimo cultivar estiver presente no  $i$ -ésimo bloco, teremos o modelo

$$E(Y_{ij}) = \alpha_j + \beta_j x_i, \quad j = 1, \dots, J, \quad i = 1, \dots, b.$$

Os parâmetros a serem estimados são os vectores de intersecções  $\boldsymbol{\alpha}^J = (\alpha_1, \dots, \alpha_J)$ , de declives  $\boldsymbol{\beta}^J = (\beta_1, \dots, \beta_J)$  e de *índices ambientais*  $\mathbf{x}^b = (x_1, \dots, x_b)$ .

Utilizaremos estimadores de mínimos quadrados para minimizar

$$S(\mathbf{x}^b, \boldsymbol{\alpha}^J, \boldsymbol{\beta}^J) = \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^J p_{ij} (Y_{ij} - \alpha_j - \beta_j x_i)^2, \quad (3.1)$$

onde  $Y_{ij}$  é a produção do  $j$ -ésimo cultivar no  $i$ -ésimo bloco, caso esse cultivar esteja presente. Se não estiver presente, como  $p_{ij} = 0$ ,  $Y_{ij}$  poderá tomar qualquer valor. Nesta expressão utilizámos índices superiores para indicar as dimensões dos vectores. A

minimização é feita simultaneamente em ordem aos vectores  $\alpha^J$  e  $\beta^J$  de coeficientes e  $\mathbf{x}^b$  de *índices ambientais*. Na minimização da soma das somas dos quadrados dos resíduos, minimizamos a norma  $L_2$ , donde o nome adoptado para estes *índices*.

Os trios  $(\mathbf{x}^b, \alpha^J, \beta^J)$  pertencerão ao produto cartesiano  $\mathfrak{R}^b \times \mathfrak{R}^J \times \mathfrak{R}^J$ . Definimos agora uma relação de equivalência  $\tau$  entre estes trios, escrevendo  $(\mathbf{x}^b, \alpha^J, \beta^J) \tau (\mathbf{x}'^b, \alpha'^J, \beta'^J)$  quando existe  $\varepsilon$  e  $\delta \neq 0$  tal que  $\mathbf{x}'^b = \varepsilon \mathbf{1}^b + \delta \mathbf{x}^b$ ,  $\alpha'^J = \alpha^J - \frac{\varepsilon}{\delta} \beta^J$  e  $\beta'^J = \frac{1}{\delta} \beta^J$ . Seja  $[(\mathbf{x}^b, \alpha^J, \beta^J)]_{\tau}$  a classe de equivalência  $\tau$  a que  $(\mathbf{x}^b, \alpha^J, \beta^J)$  pertence.

A razão de introduzirmos esta relação de equivalência é porque a função objectivo toma valor constante para todos os trios de vectores numa classe de equivalência  $\tau$ .

Com  $x_o = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^b x_i$  e  $D(\mathbf{x}^b) = \sqrt{\sum_{i=1}^b (x_i - x_o)^2}$  temos  $D(\mathbf{x}^b) = 0$  se e só se todas as componentes do vector  $\mathbf{x}^b$  são iguais. Isto acontece quando  $\mathbf{x}^b$  pertence ao espaço imagem  $R(\mathbf{1}^b)$  da matriz coluna  $\mathbf{1}^b$ .

Sendo  $\mathbf{V} = \left\{ (\mathbf{x}^b, \alpha^J, \beta^J); (x_o = 0) \wedge (\|\mathbf{x}^b\| = 1) \right\}$ , estabeleçamos agora

**Lema 1.**

Se  $\mathbf{x}^b \in R(\mathbf{1}^b)$ ,  $[(\mathbf{x}^b, \alpha^J, \beta^J)]_{\tau}$  não tem nenhum trio em  $\mathbf{V}$  enquanto, se  $\mathbf{x}^b \notin R(\mathbf{1}^b)$ ,  $[(\mathbf{x}^b, \alpha^J, \beta^J)]_{\tau}$  tem dois trios em  $\mathbf{V}$ .

**Dem.:** Se  $\mathbf{x}^b \in R(\mathbf{1}^b)$  temos  $x_1 = \dots = x_b = x_o$  de forma que, quando  $x_o = 0$  temos  $\mathbf{x}^b = \mathbf{0}^b$  e assim  $[(\mathbf{x}^b, \alpha^J, \beta^J)]_{\tau}$  não pode ter nenhum trio em  $\mathbf{V}$ . Além disso, quando  $\mathbf{x}^b \notin R(\mathbf{1}^b)$ , se  $(\mathbf{x}^b, \alpha^J, \beta^J) \tau (\mathbf{x}'^b, \alpha'^J, \beta'^J)$ ,  $\mathbf{x}'^b = \varepsilon \mathbf{1}^b + \delta \mathbf{x}^b$  de forma que  $x'_o = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^b x'_i = \varepsilon + \delta x_o$  e  $D(\mathbf{x}'^b) = |\delta| D(\mathbf{x}^b)$ . Agora, para  $(\mathbf{x}'^b, \alpha'^J, \beta'^J) \in \mathbf{V}$ , é necessário e suficiente que  $x'_o = 0$  e que  $D(\mathbf{x}'^b) = 1$  o que acontece quando  $\delta = \pm D(\mathbf{x}^b)^{-1}$  e  $\varepsilon = -\delta x_o$ , e assim  $[(\mathbf{x}^b, \alpha^J, \beta^J)]_{\tau}$  conterà dois trios em  $\mathbf{V}$ . □

Podemos estabelecer agora a

**Proposição 2.**

A função objectivo toma valor constante nas classes de equivalência  $\tau$ , tomando todos os seus valores, para  $\mathbf{x}^b \notin R(\mathbf{1}^b)$ , em  $\mathbf{V}$ . O mínimo absoluto da função objectivo é saturado para  $\tau$  sendo a união de classes de equivalência  $\tau$  que intersectam  $\mathbf{V}$ .

*Dem.:* Quando  $(\mathbf{x}^b, \boldsymbol{\alpha}^J, \boldsymbol{\beta}^J) \tau (\mathbf{x}^{b'}, \boldsymbol{\alpha}^{J'}, \boldsymbol{\beta}^{J'})$ , temos  $Y_{ij} - \alpha_j - \beta_j x_i = Y_{ij} - \alpha'_j - \beta'_j x'_i$ ,  $i = 1, \dots, b, j = 1, \dots, J$ , vindo  $S(\mathbf{x}^b, \boldsymbol{\alpha}^J, \boldsymbol{\beta}^J) = S(\mathbf{x}^{b'}, \boldsymbol{\alpha}^{J'}, \boldsymbol{\beta}^{J'})$ , logo a função objectivo toma valor constante nas classes de equivalência  $\tau$  e, de acordo com o *Lema 1*, toma todos os seus valores, para  $\mathbf{x}^b \notin R(\mathbf{1}^b)$ , em  $\mathbf{V}$ .

Além disso, com  $(\mathbf{x}^b, \boldsymbol{\alpha}^J, \boldsymbol{\beta}^J) \in \mathbf{V}$ , temos  $S(\mathbf{x}^b, \boldsymbol{\alpha}^J, \boldsymbol{\beta}^J) \geq S(\mathbf{x}^b, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^J(\mathbf{x}^b), \tilde{\boldsymbol{\beta}}^J(\mathbf{x}^b))$

com

$$\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^J(\mathbf{x}^b) \\ \tilde{\boldsymbol{\beta}}^J(\mathbf{x}^b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^b p_{ij} & \sum_{i=1}^b p_{ij} x_i \\ \sum_{i=1}^b p_{ij} x_i & \sum_{i=1}^b p_{ij} x_i^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^b p_{ij} Y_{ij} \\ \sum_{i=1}^b p_{ij} x_i Y_{ij} \end{bmatrix}; \quad j = 1, \dots, J$$

e, de acordo com o teorema de Weirstrass,  $\bar{S}(\mathbf{x}^b) = S(\mathbf{x}^b, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^J(\mathbf{x}^b), \tilde{\boldsymbol{\beta}}^J(\mathbf{x}^b))$ , atinge pelo menos um mínimo absoluto em  $\Theta_1 = \{\mathbf{x}^b : (x_s = 0) \wedge (\|\mathbf{x}^b\| = 1)\}$ . Ora, estes mínimos absolutos de  $\bar{S}(\mathbf{x}^b)$  correspondem aos mínimos absolutos de  $S(\mathbf{x}^b, \boldsymbol{\alpha}^J, \boldsymbol{\beta}^J)$  para  $\mathbf{x}^b \notin R(\mathbf{1}^b)$ . Correspondem também aos mínimos absolutos de  $S(\mathbf{x}^b, \boldsymbol{\alpha}^J, \boldsymbol{\beta}^J)$  para  $\mathbf{x}^b \in \mathbb{R}^b$  visto que, quando  $\mathbf{x}^b \in R(\mathbf{1}^b)$ , tomando  $\delta = 1$  e  $\varepsilon = -x_s$  temos  $(\mathbf{x}^b, \boldsymbol{\alpha}^J, \boldsymbol{\beta}^J) \tau (\mathbf{0}^b, \boldsymbol{\alpha}^{J'}, \boldsymbol{\beta}^{J'})$  obtendo-se, com  $\mathbf{x}^{+b} \notin R(\mathbf{1}^b)$ ,  $S(\mathbf{x}^b, \boldsymbol{\alpha}^J, \boldsymbol{\beta}^J) = S(\mathbf{0}^b, \boldsymbol{\alpha}^{J'}, \boldsymbol{\beta}^{J'}) = S(\mathbf{x}^{+b}, \boldsymbol{\alpha}^{J'}, \mathbf{0}^J) \geq S(\mathbf{x}^{+b}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^J(\mathbf{x}^{+b}), \tilde{\boldsymbol{\beta}}^J(\mathbf{x}^{+b}))$ .

Assim, o mínimo absoluto de  $S(\mathbf{x}^b, \boldsymbol{\alpha}^J, \boldsymbol{\beta}^J)$  será atingido em  $\mathbf{V}$ . Como a função objectivo  $S$  é constante nas classes de equivalência  $\tau$ , o seu mínimo absoluto é saturado para esta relação de equivalência, e a demonstração está assim completa.  $\square$

Uma *rede de ensaios* pode ser considerada como um ensaio único, o qual pode ser conectado ou não. No caso de não ser conectado, o mesmo pode ser decomposto em sub-ensaios conectados. Diremos que a *rede de ensaios* original foi decomposta em *sub-redes* conectadas. Neste contexto, interessa-nos estabelecer a

**Proposição 3.**

Quando a *rede de ensaios* não é conectada, os conjuntos de cultivares nas *sub-redes* conectadas são disjuntos e o mínimo absoluto da função objectivo contém mais de uma classe de equivalência  $\tau$ .

*Dem.*: A primeira parte da tese advém da definição de delineamento conectado, visto que se um cultivar estiver presente em duas *sub-redes*, poderíamos conectar os cultivares presentes em ambas as *sub-redes*, unindo-as. Sejam  $A_\ell, \ell = 1, \dots, L$ , os conjuntos dos índices dos blocos para as *sub-redes* conectadas, com  $L \geq 2$ , nas quais a

*rede de ensaios* se divide. Então  $S(\mathbf{x}^b, \boldsymbol{\alpha}^j, \boldsymbol{\beta}^j) = \sum_{\ell=1}^L S_\ell(\mathbf{x}^b, \boldsymbol{\alpha}^j, \boldsymbol{\beta}^j)$  com

$$S_\ell(\mathbf{x}^b, \boldsymbol{\alpha}^j, \boldsymbol{\beta}^j) = \sum_{i \in A_\ell} \sum_{j=1}^J p_{ij} (Y_{ij} - \alpha_j - \beta_j x_i)^2, \quad \ell = 1, \dots, L.$$

Dado os cultivares e os blocos serem distintos para as diferentes *sub-redes* o mínimo de  $S$  será a soma dos mínimos para  $S_\ell, \ell = 1, \dots, L$ . Ora, a *Proposição 2* mostrar-nos que esses mínimos para as  $S_\ell, \ell = 1, \dots, L$ , podem ser escolhidos

satisfazendo as condições  $\sum_{i \in A_\ell} x_i = a_\ell$ , e  $\sum_{i \in A_\ell} x_i^2 = g_\ell, \ell = 1, \dots, L$ , com  $\sum_{\ell=1}^L a_\ell = 0$  e

$\sum_{\ell=1}^L g_\ell = 1$ . Reunindo estes mínimos parciais, obtemos mínimos para  $S$  que pertencem a

$\mathbf{V}$ , mas não são equivalentes  $\tau$ , o que estabelece a tese. □

Este resultado mostra que se tem de exigir que a *rede de ensaios* seja conectada para se poder realizar uma análise integrada da mesma. As redes de ensaios não conectadas devem ser decompostas nas respectivas *sub-redes* conectadas maximais e estas, analisadas separadamente.

No que se segue, admitiremos que as *redes de ensaios* com que se trabalha são conectadas. Ora, mesmo para estas *redes de ensaios*, podemos ter mínimos absolutos de  $S$  que não são equivalentes  $\tau$ , ou seja, podemos ter o problema do mínimo absoluto de  $S$  conter mais de uma classe de equivalência  $\tau$ . Assim, com  $b$  blocos e  $J$  cultivares,

teremos  $b+2J$  parâmetros a estimar ( $b$  *índices ambientais* e  $2J$  coeficientes de regressão). Como podemos considerar as restrições  $\sum_{i=1}^b x_i = 0$  e  $\sum_{i=1}^b x_i^2 = 1$  nos *índices ambientais*, sendo  $w$  o número total das parcelas, teremos de ter

$$b + 2J - 2 \leq w \quad (3.2)$$

para efectuar a estimação, vindo

$$J \leq \text{Int} \left( \frac{w - b + 2}{2} \right). \quad (3.3)$$

Vejamos um exemplo muito simples em que esta restrição é violada. Admitamos que  $J = 2$  coincidindo os dois cultivares apenas no  $h$ -ésimo bloco,  $h < b$ . Os primeiros  $h - 1$  [últimos  $b - h$ ] conterão uma única parcela, ocupada pelo primeiro [segundo] cultivar. Ter-se-á a função objectivo

$$\begin{aligned} S(\mathbf{x}^b, \boldsymbol{\alpha}^2, \boldsymbol{\beta}^2) &= \sum_{i=1}^h (Y_{i1} - \alpha_1 - \beta_1 x_i)^2 + \sum_{i=h}^b (Y_{i2} - \alpha_2 - \beta_2 x_i)^2 \\ &\geq \sum_{\ell=1}^2 \left( Y_{h\ell} - \frac{Y_{h1} + Y_{h2}}{2} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

sendo o mínimo atingido, quando, para além das restrições  $\sum_{i=1}^b x_i = 0$  e  $\sum_{i=1}^b x_i^2 = 1$ , temos

$$\begin{cases} Y_{i1} = \alpha_1 + \beta_1 x_i ; & i = 1, \dots, h-1 \\ Y_{i2} = \alpha_2 + \beta_2 x_i ; & i = h+1, \dots, b \\ \frac{Y_{h1} + Y_{h2}}{2} = \alpha_1 + \beta_1 x_h = \alpha_2 + \beta_2 x_h \end{cases} \quad (3.5)$$

podendo-se obter vários trios  $(\mathbf{x}^b, \boldsymbol{\alpha}^2, \boldsymbol{\beta}^2)$  que satisfazem estas condições, mas não são equivalentes  $\tau$ . Estas condições mostram a parte desempenhada pela conexão para a possibilidade de alcançar o mínimo.

Quando os mínimos absolutos de  $S$  são equivalentes  $\tau$  podemos utilizar qualquer deles, podendo-se escolher, em particular, o vector dos *índices ambientais*,  $\mathbf{x}^b$ , de forma a que o menor e o maior dos *índices ambientais* ajustados coincidam, no caso de se estar a trabalhar com “ $\alpha$ -designs”, com a menor e a maior das produções médias para super-blocos.

Vamos, agora, construir um algoritmo para obter o mínimo  $(\tilde{\mathbf{x}}^b, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^J, \tilde{\boldsymbol{\beta}}^J)$  da função objectivo  $S(\mathbf{x}^b, \boldsymbol{\alpha}^J, \boldsymbol{\beta}^J)$ . A função objectivo  $S$  tem gradiente

$$\text{grad}(S) = \begin{bmatrix} \frac{\partial S}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial S}{\partial x_b} \\ \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial S}{\partial \alpha_J} \\ \frac{\partial S}{\partial \beta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial S}{\partial \beta_J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \sum_{j=1}^J p_{1,j} (Y_{1j} - \alpha_j - \beta_j x_1) \beta_j \\ \vdots \\ -2 \sum_{j=1}^J p_{bj} (Y_{bj} - \alpha_j - \beta_j x_b) \beta_j \\ -2 \sum_{i=1}^b p_{i1} (Y_{i1} - \alpha_1 - \beta_1 x_i) \\ \vdots \\ -2 \sum_{i=1}^b p_{iJ} (Y_{iJ} - \alpha_J - \beta_J x_i) \\ -2 \sum_{i=1}^b p_{i1} (Y_{i1} - \alpha_1 - \beta_1 x_i) x_i \\ \vdots \\ -2 \sum_{i=1}^b p_{iJ} (Y_{iJ} - \alpha_J - \beta_J x_i) x_i \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

e matriz hessiana

$$\text{Hes } S = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 S}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 S}{\partial x_1 \partial x_b} & \frac{\partial^2 S}{\partial x_1 \partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial^2 S}{\partial x_1 \partial \alpha_J} & \frac{\partial^2 S}{\partial x_1 \partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial^2 S}{\partial x_1 \partial \beta_J} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 S}{\partial x_b \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 S}{\partial x_b^2} & \frac{\partial^2 S}{\partial x_b \partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial^2 S}{\partial x_b \partial \alpha_J} & \frac{\partial^2 S}{\partial x_b \partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial^2 S}{\partial x_b \partial \beta_J} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_1 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_1 \partial x_b} & \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_J} & \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_1 \partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_1 \partial \beta_J} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_J \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_J \partial x_b} & \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_J \partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_J^2} & \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_J \partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_J \partial \beta_J} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial \beta_1 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 S}{\partial \beta_1 \partial x_b} & \frac{\partial^2 S}{\partial \beta_1 \partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial^2 S}{\partial \beta_1 \partial \alpha_J} & \frac{\partial^2 S}{\partial \beta_1^2} & \ddots & \frac{\partial^2 S}{\partial \beta_1 \partial \beta_J} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 S}{\partial \beta_J \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 S}{\partial \beta_J \partial x_b} & \frac{\partial^2 S}{\partial \beta_J \partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial^2 S}{\partial \beta_J \partial \alpha_J} & \frac{\partial^2 S}{\partial \beta_J \partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial^2 S}{\partial \beta_J^2} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$= 2 \left[ \begin{array}{ccc|c} \sum_{j=1}^J p_{1j} \beta_j^2 & \cdots & 0 & \mathbf{A} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \cdots & \sum_{j=1}^J p_{bj} \beta_j^2 & \\ \hline & & \mathbf{A}^T & \mathbf{B} \end{array} \right]$$

com

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} p_{11} \beta_1 & \cdots & p_{1J} \beta_J & p_{11} [x_1 \beta_1 - (Y_{11} - \alpha_1 - \beta_1 x_1)] & \cdots & p_{1J} [x_1 \beta_J - (Y_{1J} - \alpha_J - \beta_J x_1)] \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{b1} \beta_1 & \cdots & p_{bJ} \beta_J & p_{b1} [x_b \beta_1 - (Y_{b1} - \alpha_1 - \beta_1 x_b)] & \cdots & p_{bJ} [x_b \beta_J - (Y_{bJ} - \alpha_J - \beta_J x_b)] \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^b p_{i1} & \cdots & 0 & \sum_{i=1}^b p_{i1} x_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sum_{i=1}^b p_{iJ} & 0 & \cdots & \sum_{i=1}^b p_{iJ} x_i \\ \sum_{i=1}^b p_{i1} x_i & \cdots & 0 & \sum_{i=1}^b p_{i1} x_i^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sum_{i=1}^b p_{iJ} x_i & 0 & \cdots & \sum_{i=1}^b p_{iJ} x_i^2 \end{bmatrix}$$

Estabeleçamos agora o

**Lema 2.**

A sub-matriz inferior direita,  $\mathbf{B}$ , (contendo as derivadas em ordem aos coeficientes) é definida positiva.

**Dem.:** A correspondente forma quadrática é

$$\begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_j & v_1 & \cdots & v_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^b p_{i1} & \cdots & 0 & \sum_{i=1}^b p_{i1}x_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sum_{i=1}^b p_{iJ} & 0 & \cdots & \sum_{i=1}^b p_{iJ}x_i \\ \sum_{i=1}^b p_{i1}x_i & \cdots & 0 & \sum_{i=1}^b p_{i1}x_i^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sum_{i=1}^b p_{iJ}x_i & 0 & \cdots & \sum_{i=1}^b p_{iJ}x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_j \\ v_1 \\ \vdots \\ v_j \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^J \left( u_j^2 \sum_{i=1}^b p_{ij} + 2u_j v_j \sum_{i=1}^b p_{ij}x_i + v_j^2 \sum_{i=1}^b p_{ij}x_i^2 \right) = \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^J p_{ij} (u_j^2 + 2x_i u_j v_j + x_i^2 v_j^2)$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^J p_{ij} (u_j + x_i v_j)^2 > 0, \text{ para qualquer vector n\~{a}o nulo } [u_1 \ \cdots \ u_j \ v_1 \ \cdots \ v_j]^T, 0$$

que estabelece a tese.  $\square$

Este lema \u00e9 interessante, visto que as fun\u00e7\u00f5es

$$\begin{cases} S_1(\boldsymbol{\alpha}^J, \boldsymbol{\beta}^J \mid \mathbf{x}^b) = S(\mathbf{x}^b, \boldsymbol{\alpha}^J, \boldsymbol{\beta}^J) \\ S_2(\mathbf{x}^b \mid \boldsymbol{\alpha}^J, \boldsymbol{\beta}^J) = S(\mathbf{x}^b, \boldsymbol{\alpha}^J, \boldsymbol{\beta}^J) \end{cases}, \quad (3.8)$$

obtidas da fun\u00e7\u00e3o objectivo, fixando os *indices ambientais* ou os coeficientes de regress\u00e3o, t\u00eam matrizes hessianas definidas positivas. Assim, ver Bazaraa et al. (1992, p\u00e1g.113), estas fun\u00e7\u00f5es ter\u00e3o m\u00ednimos absolutos \u00fanicos. Para  $S_1$  esse m\u00ednimo \u00e9, como vimos  $(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^J(\mathbf{x}^b), \tilde{\boldsymbol{\beta}}^J(\mathbf{x}^b))$  e  $S_1(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^J(\mathbf{x}^b), \tilde{\boldsymbol{\beta}}^J(\mathbf{x}^b) \mid \mathbf{x}^b) = \bar{S}(\mathbf{x}^b)$ . Al\u00e9m disto

$$S_2(\mathbf{x}^b \mid \boldsymbol{\alpha}^J, \boldsymbol{\beta}^J) = \sum_{i=1}^b h_i(x_i \mid \boldsymbol{\alpha}^J, \boldsymbol{\beta}^J), \quad (3.9)$$

com

$$h_i(x_i \mid \boldsymbol{\alpha}^J, \boldsymbol{\beta}^J) = \sum_{j=1}^J p_{ij} (Y_{ij} - \alpha_j - \beta_j x_i)^2; \quad i = 1, \dots, b,$$

(3.10)

pelo que

$$h'_i(x_i \mid \boldsymbol{\alpha}^J, \boldsymbol{\beta}^J) = -2 \sum_{j=1}^J p_{ij} (Y_{ij} - \alpha_j - \beta_j x_i) \beta_j; \quad i = 1, \dots, b \quad (3.11)$$

$$x_i(\alpha^J, \beta^J) = \frac{\sum_{j=1}^J p_{ij} \beta_j Y_{ij} - \sum_{j=1}^J p_{ij} \alpha_j \beta_j}{\sum_{j=1}^J p_{ij} \beta_j^2}; \quad i = 1, \dots, b. \quad (3.12)$$

Assim, partindo-se de  $\mathbf{x}_1^b$ , com componentes  $x_{ij}$ ;  $i = 1, \dots, b$ , obtém-se  $\tilde{\alpha}_1^J = \tilde{\alpha}^J(\mathbf{x}_1^b)$  e  $\tilde{\beta}_1^J = \tilde{\beta}^J(\mathbf{x}_1^b)$  e utilizamos a expressão (3.12) para obter as componentes de  $\mathbf{x}_1^b$ . Como temos

$$S(\varepsilon \mathbf{1}^b + \delta \mathbf{x}_1^b, \alpha^J, \beta^J) = S(\mathbf{x}_1^b, \alpha^J + \varepsilon \beta^J, \delta \beta^J), \quad (3.13)$$

podemos substituir  $\mathbf{x}_1^b$  por  $\mathbf{x}_2^b = \varepsilon \mathbf{1}^b + \delta \mathbf{x}_1^b$  com  $(\varepsilon, \delta)$ , escolhidos por forma a que a menor e a maior das componentes de  $\mathbf{x}_1^b$  e  $\mathbf{x}_2^b$  sejam idênticas. Podemos repetir este processo, minimizando primeiro  $S_1(\alpha^J, \beta^J \mid \mathbf{x}_h^b)$  e seguidamente  $S_2(\mathbf{x}^b \mid \tilde{\alpha}^J(\mathbf{x}_h^b), \tilde{\beta}^J(\mathbf{x}_h^b))$ , estandardizando em seguida  $\mathbf{x}_h^b$ , de forma a manter invariantes a menor e maior componentes do vector dos *índices ambientais*; uma vez que alternamos minimizações para os coeficientes  $(\alpha^J, \beta^J)$  com minimizações para o *índice ambiental*  $\mathbf{x}^b$ , chamaremos este algoritmo de *zigzague*.

Como é fácil de ver, a escolha dum bom ponto de partida  $\mathbf{x}_1^b$  é extremamente importante. No caso completo, o problema simplifica-se pois, ver por exemplo Mexia et al. (1999), pode-se muitas vezes tomar  $\mathbf{x}_1^b$  como o vector das produções médias dos blocos. Adiante regressaremos a este ponto, limitando-nos agora a observar que nos “ $\alpha$ -designs”, com super-blocos completos, se está numa situação análoga. Agora, parte-se do vector das médias para os super-blocos. Neste vector, serão idênticas as componentes correspondentes aos blocos contidos no mesmo super-bloco. Havendo  $r$  blocos por super-bloco, se agruparmos os *índices ambientais* de acordo com os super-blocos,  $\mathbf{x}_1^b$  terá grupos de  $r$  componentes contíguas idênticas.

Recentemente, ver Mexia & Pinto (2003), o *algoritmo zigzague* foi aplicado a casos pouco estruturados, em que se interpretaram em conjunto ensaios de comparação de classes de videira. Esses ensaios tinham sido delineados separadamente, embora, quando considerados em conjunto, verificassem a condição de conexão. Tomando como valores iniciais as médias dos blocos, o algoritmo convergiu, embora o número de

iterações crescesse duma média de 2 a 3, para *redes* de “ $\alpha$ -designs”, para 11 a 13, nos casos pouco estruturados.

Consideremos, agora, que se conseguiram bons ajustamentos finais, sendo  $\tilde{x}_i$ ,  $i = 1, \dots, b$ ,  $(\tilde{\alpha}_j, \tilde{\beta}_j)$ ,  $j = 1, \dots, J$  os valores ajustados para os *índices ambientais* e coeficientes de regressão, respectivamente, após um certo número de iterações. Então, os resíduos pesados

$$d_{ij} = p_{ij} (Y_{ij} - \tilde{\alpha}_j - \tilde{\beta}_j \tilde{x}_i) \approx 0 ; \quad i = 1, \dots, b; \quad j = 1, \dots, J, \quad (3.14)$$

serão pequenos, vindo

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial \beta_j} = -2p_{ij} (Y_{ij} - \alpha_j - \beta_j x_i) + 2p_{ij} \beta_j x_i \approx 2p_{ij} \tilde{\beta}_j \tilde{x}_i. \quad (3.15)$$

Assim, poderemos aproximar a matriz hessiana de  $S$  pela matriz

$$\mathbf{W} = 2 \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^J p_{1j} \tilde{\beta}_j^2 & \cdots & 0 & p_{11} \tilde{\beta}_1 & \cdots & p_{1J} \tilde{\beta}_J & p_{11} \tilde{\beta}_1 \tilde{x}_1 & \cdots & p_{1J} \tilde{\beta}_J \tilde{x}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sum_{j=1}^J p_{bj} \tilde{\beta}_j^2 & p_{b1} \tilde{\beta}_1 & \cdots & p_{bJ} \tilde{\beta}_J & p_{b1} \tilde{\beta}_1 \tilde{x}_b & \cdots & p_{bJ} \tilde{\beta}_J \tilde{x}_b \\ \hline p_{11} \tilde{\beta}_1 & \cdots & p_{b1} \tilde{\beta}_1 & \sum_{i=1}^b p_{i1} & \cdots & 0 & \sum_{i=1}^b p_{i1} \tilde{x}_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1J} \tilde{\beta}_J & \cdots & p_{bJ} \tilde{\beta}_J & 0 & \cdots & \sum_{i=1}^b p_{iJ} & 0 & \cdots & \sum_{i=1}^b p_{iJ} \tilde{x}_i \\ p_{11} \tilde{\beta}_1 \tilde{x}_1 & \cdots & p_{b1} \tilde{\beta}_1 \tilde{x}_b & \sum_{i=1}^b p_{i1} \tilde{x}_i & \cdots & 0 & \sum_{i=1}^b p_{i1} \tilde{x}_i^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1J} \tilde{\beta}_J \tilde{x}_1 & \cdots & p_{bJ} \tilde{\beta}_J \tilde{x}_b & 0 & \cdots & \sum_{i=1}^b p_{iJ} \tilde{x}_i & 0 & \cdots & \sum_{i=1}^b p_{iJ} \tilde{x}_i^2 \end{bmatrix}.$$

Estabeleçamos a

**Proposição 4.**

A matriz  $\mathbf{W}$  é definida positiva.

*Dem.*: Com  $\mathbf{m}^{b+2JT} = [\mathbf{u}^{bT}, \mathbf{v}^{JT}, \mathbf{z}^{JT}]$  obtemos

$$\begin{aligned}
 \mathbf{m}^{b+2JT} \mathbf{W} \mathbf{m}^{b+2J} &= 2 \left[ \sum_{i=1}^b \left( \sum_{j=1}^J p_{ij} \tilde{\beta}_j^2 \right) u_i^2 + 2 \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^J p_{ij} \tilde{\beta}_j u_i v_j + 2 \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^J p_{ij} \tilde{\beta}_j \tilde{x}_i u_i z_j + \sum_{j=1}^J \left( \sum_{i=1}^b p_{ij} \right) v_j^2 \right] \\
 &+ 2 \left[ 2 \sum_{j=1}^J \left( \sum_{i=1}^b p_{ij} \tilde{x}_i \right) v_j z_j + \sum_{j=1}^J \left( \sum_{i=1}^b p_{ij} \tilde{x}_i^2 \right) z_j^2 \right] \\
 &= 2 \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^J p_{ij} \left( \tilde{\beta}_j^2 u_i^2 + 2 \tilde{\beta}_j u_i (v_j + z_j \tilde{x}_i) + v_j^2 + 2 v_j z_j \tilde{x}_i + z_j^2 \tilde{x}_i^2 \right) \\
 &= 2 \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^J p_{ij} \left[ \tilde{\beta}_j u_i + (v_j + z_j \tilde{x}_i) \right]^2, \text{ o que estabelece a tese.} \quad \square
 \end{aligned}$$

Assim, numa vizinhança do óptimo pode admitir-se que a matriz hessiana da função objectivo é definida positiva, tendo portanto um mínimo local único. Esta observação faz com que, nos casos de *redes de ensaios* bem ajustadas, seja de prever um bom comportamento do método, ou seja, do *algoritmo ziguezague*.

### 3.3 - Regressões lineares, caso completo

Vamos, agora, considerar o caso em que todos os cultivares estão presentes em todos os blocos. Assim, para este caso tem-se a função objectivo

$$S(\mathbf{x}^b, \boldsymbol{\alpha}^J, \boldsymbol{\beta}^J) = \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^J p_i (Y_{ij} - \alpha_j - \beta_j x_i)^2, \quad (3.16)$$

sendo idênticos os pesos  $p_i$  correspondentes a blocos do mesmo ensaio. Ponhamos

$$k = \sum_{i=1}^b p_i, \quad T_x = \sum_{i=1}^b p_i x_i, \quad T_{jY} = \sum_{i=1}^b p_i Y_{ij}, \quad j = 1, \dots, J, \text{ bem como}$$

$$Y_{ij}^o = \left( Y_{ij} - \frac{T_{jY}}{k} \right); \quad i = 1, \dots, b, \quad j = 1, \dots, J, \quad (3.17)$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^b p_i x_i^2, \quad S_{jxY} = \sum_{i=1}^b p_i x_i Y_{ij} \quad \text{e} \quad S_{jY} = \sum_{i=1}^b p_i Y_{ij}^2. \text{ Obtendo-se as somas corrigidas}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s_{xx} = S_{xx} - \frac{1}{k} T_x^2 = \sum_{i=1}^b p_i \left( x_i - \frac{T_x}{k} \right)^2 \\ s_{jxY} = S_{jxY} - \frac{1}{k} T_x T_{jY} = \sum_{i=1}^b p_i \left( x_i - \frac{T_x}{k} \right) Y_{ij}^{\circ} ; j = 1, \dots, J, \\ s_{jYY} = S_{jYY} - \frac{1}{k} T_{jY}^2 = \sum_{i=1}^b p_i Y_{ij}^{\circ 2} ; j = 1, \dots, J \end{array} \right. \quad (3.18)$$

podemos, para cada vector  $\mathbf{x}^b$ , obter os estimadores condicionais dos coeficientes

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\beta}_j(\mathbf{x}^b) = \frac{S_{jxY}}{S_{xx}} ; j = 1, \dots, J \\ \tilde{\alpha}_j(\mathbf{x}^b) = \frac{1}{k} (T_{jY} - \tilde{\beta}_j(\mathbf{x}^b) T_x) ; j = 1, \dots, J \end{array} \right. , \quad (3.19)$$

juntamente com o mínimo condicional para a soma dos quadrados dos resíduos,

$$\bar{S}(\mathbf{x}^b) = S(\mathbf{x}^b, \tilde{\alpha}^J(\mathbf{x}^b), \tilde{\beta}^J(\mathbf{x}^b)) = \sum_{j=1}^J S_{jYY} - \sum_{j=1}^J \frac{S_{jxY}^2}{S_{xx}}, \quad (3.20)$$

já que se verifica

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^b p_i \left( Y_{ij} - \tilde{\alpha}_j(\mathbf{x}^b) - \tilde{\beta}_j(\mathbf{x}^b) x_i \right)^2 &= \sum_{i=1}^b p_i \left[ \left( Y_{ij} - \frac{T_{jY}}{k} \right) - \tilde{\beta}_j(\mathbf{x}^b) \left( x_i - \frac{T_x}{k} \right) \right]^2 = \\ &= \sum_{i=1}^b p_i \left( Y_{i,j} - \frac{T_{jY}}{k} \right)^2 - 2 \sum_{i=1}^b p_i \tilde{\beta}_j(\mathbf{x}^b) \left( Y_{ij} - \frac{T_{jY}}{k} \right) \left( x_i - \frac{T_x}{k} \right) + \sum_{i=1}^b p_i \tilde{\beta}_j(\mathbf{x}^b)^2 \left( x_i - \frac{T_x}{k} \right)^2 = \\ &= s_{jYY} - 2 \tilde{\beta}_j(\mathbf{x}^b) s_{jxY} + \tilde{\beta}_j(\mathbf{x}^b)^2 s_{xx} = s_{jYY} - \tilde{\beta}_j(\mathbf{x}^b) \frac{S_{jxY}^2}{S_{xx}} ; j = 1, \dots, J. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Para escolhermos os *índices ambientais* minimizamos  $\bar{S}(\mathbf{x}^b)$ . Como se verifica

$$\begin{aligned} S(\varepsilon \mathbf{1}^b + \delta \mathbf{x}^b, \boldsymbol{\alpha}^J, \boldsymbol{\beta}^J) &= \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^b p_i \left( Y_{ij} - \alpha_j - \beta_j (\varepsilon + \delta x_i) \right)^2 = \\ &= \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^b p_i \left( Y_{ij} - (\alpha_j - \varepsilon \beta_j) - (\delta \beta_j) x_i \right)^2 = S(\mathbf{x}^b, \boldsymbol{\alpha}^J + \varepsilon \boldsymbol{\beta}^J, \delta \boldsymbol{\beta}^J) \end{aligned} \quad (3.22)$$

podemos, com  $\bar{Y}_i = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J Y_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, b$ ,  $T_{\bar{Y}} = \sum_{i=1}^b p_i \bar{Y}_i$  e  $S_{\bar{Y}, \bar{Y}} = \sum_{i=1}^b p_i \bar{Y}_i^2$  restringir-nos aos

vectores  $x^b$ , que satisfazem quer as restrições

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^b p_i x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^b p_i x_i^2 = 1 \end{cases} \quad (3.23)$$

quer as

$$\begin{cases} T_x = T_{\bar{Y}} \\ S_{xx} = S_{\bar{Y}\bar{Y}} \\ S_{x\bar{Y}} = \sum_{i=1}^b p_i x_i \bar{Y}_i > 0 \end{cases}, \quad (3.24)$$

sendo fácil de se passar dum conjunto de restrições para o outro. Como  $\sum_{j=1}^J s_{jY}$  não depende de  $\mathbf{x}^b$  o que se tem de maximizar é  $\sum_{j=1}^J \frac{s_{jY}^2}{S_{xx}}$ . Quando se adoptam as restrições

(3.23) tem-se  $s_{xx} = 1$ , reduzindo-se o problema a maximizar

$$G(\mathbf{x}^b) = \sum_{j=1}^J s_{jY}^2 = \sum_{j=1}^J \left( \sum_{i=1}^b p_i (x_i - x_o) Y_{ij}^o \right)^2, \quad (3.25)$$

onde  $x_o = \frac{1}{k} T_x$ . Verificando-se

$$\sum_{i=1}^b p_i Y_{ij}^o = 0; \quad j = 1, \dots, J, \quad (3.26)$$

e sendo  $\mathbf{Y}_j^{+b}$  o vector com componentes  $p_i Y_{ij}^o$ ,  $i = 1, \dots, b$ ,  $j = 1, \dots, J$ , tem-se

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}^b) &= \sum_{j=1}^J \left( \sum_{i=1}^b p_i x_i Y_{ij}^o \right)^2 = \sum_{j=1}^J (\mathbf{x}^{bT} \mathbf{Y}_j^{+b})^2 = \sum_{j=1}^J (\mathbf{x}^{bT} \mathbf{Y}_j^{+b}) (\mathbf{Y}_j^{+bT} \mathbf{x}^b) \\ &= \sum_{j=1}^J \mathbf{x}^{bT} (\mathbf{Y}_j^{+b} \mathbf{Y}_j^{+bT}) \mathbf{x}^b = \mathbf{x}^{bT} \mathbf{Z} \mathbf{x}^b \end{aligned} \quad (3.27)$$

com

$$\mathbf{Z} = \sum_{j=1}^J \mathbf{Y}_j^{+b} \mathbf{Y}_j^{+bT}. \quad (3.28)$$



Estabeleçamos agora a

**Proposição 5.**

Considerando que os pesos são todos iguais a 1, o vector  $\mathbf{x}^b$  que, satisfazendo as restrições (3.23), maximiza  $G(\mathbf{x}^b)$  é o primeiro vector próprio da matriz  $\mathbf{Z}$ .

*Dem.:* Devido a (3.26), vê-se que  $\mathbf{Z}\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\mathbf{1}^b\right) = \sum_{j=1}^J \mathbf{Y}_j^{+b} \left(\mathbf{Y}_j^{+bT} \frac{1}{\sqrt{b}}\mathbf{1}^b\right) = 0$ ; logo,  $\frac{1}{\sqrt{b}}\mathbf{1}^b$  é

um vector próprio de  $\mathbf{Z}$  estando-lhe associado um valor próprio nulo. Por outro lado,

tendo-se  $\mathbf{u}^{bT} \mathbf{Z} \mathbf{u}^b = \sum_{j=1}^J (\mathbf{u}^{bT} \mathbf{Y}_j^{+b}) (\mathbf{Y}_j^{+bT} \mathbf{u}^b) = \sum_{j=1}^J (\mathbf{u}^{bT} \mathbf{Y}_j^{+b})^2 \geq 0$ , conclui-se que  $\mathbf{Z}$  é semi-

-definida positiva. Como  $\mathbf{Z}$  não é matriz nula, o seu maior valor próprio  $\lambda$ , ver Pollock (1979, pg. 129), a que estará associado o primeiro vector próprio  $\gamma_1^b$  será positivo.

Assim, ver Giraldes et al. (1995, pg. 236),  $\gamma_1^b$  terá de ser ortogonal a  $\frac{1}{\sqrt{b}}\mathbf{1}^b$ , tendo soma

das componentes nula. Basta, agora, observar que  $\|\gamma_1^b\| = 1$ , para se completar a

demonstração, já que  $\gamma_1^b$  satisfaz as duas condições (3.23) e maximiza  $G(\mathbf{x}^b)$  na família de todos os vectores, que satisfazem a segunda destas condições.  $\square$

Quando os blocos completos estão agrupados, é natural dar-se o mesmo peso aos blocos de cada grupo, o que não introduz dificuldade alguma adicional.

### 3.4 - Regressões polinomiais

Voltamos agora ao caso geral. O peso do  $j$ -ésimo cultivar no  $i$ -ésimo bloco será  $p_{ij} = p_i$  ou  $p_{ij} = 0$ , consoante o cultivar está ou não presente  $j = 1, \dots, J$ ,  $i = 1, \dots, b$ . Se os blocos estiverem agrupados em super-blocos, continuará a ser natural igualar os pesos  $p_i$  dentro de cada super-bloco.

Sendo  $m$  o grau do polinómio a ser ajustado, assumindo que os vectores das produções são normais homocedásticos e que, se o  $j$ -ésimo cultivar está presente no  $i$ -ésimo bloco, temos o modelo

$$E(Y_{ij}) = \sum_{\ell=0}^m \beta_{\ell j} x^\ell.$$

Temos agora a função objectivo

$$S(\mathbf{x}^b, \mathbf{B}^{(m+1) \times J}) = \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^J p_{ij} \left( Y_{ij} - \sum_{\ell=0}^m \beta_{\ell j} x_i^\ell \right)^2, \quad (3.29)$$

onde  $\mathbf{B}$  é a matriz, cujos vectores coluna são os vectores dos coeficientes para as regressões. Sendo  $\Psi(m+1, J)$ , a família de matrizes  $(m+1) \times J$  com elementos reais, a função objectivo está definida em  $\mathbb{R}^b \times \Psi(m+1, J)$ . Vamos, agora, obter uma generalização da *Proposição 2* para o que, dado o escalar  $\delta$ , representamos por  $\delta^{[m]}$  o vector com componentes  $\delta^0, \delta, \dots, \delta^m$  e por  $\mathbf{D}_m(\delta)$  a matriz diagonal com estes elementos principais. Temos então a

**Proposição 6.**

Pondo-se  $(\mathbf{x}_1^b, \mathbf{B}_1) \tau (\mathbf{x}_2^b, \mathbf{B}_2)$  com  $\delta \neq 0$ ,  $\mathbf{x}_1^b = \delta^{-1} \mathbf{x}_2^b$  e  $\mathbf{B}_1 = \mathbf{D}_m(\delta) \mathbf{B}_2$  estabelece-se uma relação de equivalência em  $\mathbb{R}^b \times \Psi(m+1, J)$ . A função objectivo toma valor constante nas classes de equivalência  $\tau$ , tomando todos os seus valores para  $\mathbf{x}^b \neq \mathbf{0}^b$  em  $\mathbf{V}^+ = \{(\mathbf{x}^b, \mathbf{B}); \|\mathbf{x}^b\| = 1\}$  e tem um conjunto de mínimos absolutos saturado para  $\tau$ .

*Dem.*: Vê-se, facilmente, que  $\tau$  é uma relação de equivalência e que, se se verifica

$$(\mathbf{x}_1^b, \mathbf{B}_1) \tau (\mathbf{x}_2^b, \mathbf{B}_2), \text{ com } \mathbf{B}_u = [\boldsymbol{\beta}_{1u}^{m+1}, \dots, \boldsymbol{\beta}_{ju}^{m+1}] = [\beta_{\ell, j, u}], \quad u = 1, 2 \text{ ter-se-á}$$

$$Y_{ij} - \sum_{\ell=0}^m \beta_{\ell, j, 2} \left( \frac{x_{i2}}{\delta} \right)^\ell = Y_{ij} - \sum_{\ell=0}^m \beta_{\ell, j, 1} x_{i1}^\ell; \quad i = 1, \dots, b; \quad j = 1, \dots, J,$$

vindo  $S(\mathbf{x}_2^b, \mathbf{B}_2) = S(\mathbf{x}_1^b, \mathbf{B}_1)$ . Dados  $(\mathbf{x}_2^b, \mathbf{B}_2)$  com  $\delta = \|\mathbf{x}_2^b\| > 0$  e  $\mathbf{B}_2 \in \Psi(m+1, J)$ ,

tomando-se  $\mathbf{x}_1^b = \delta^{-1} \mathbf{x}_2^b$  e  $\mathbf{B}_1 = \mathbf{D}_m(\delta) \mathbf{B}_2$ , tem-se  $(\mathbf{x}_1^b, \mathbf{B}_1) \tau (\mathbf{x}_2^b, \mathbf{B}_2)$ , bem como

$(\mathbf{x}_1^b, \mathbf{B}_1) \in \mathbf{V}^+$ . Assim,  $S(\mathbf{x}^b, \mathbf{B})$  atingirá todos os seus valores que toma, quando

$\mathbf{x}^b \neq \mathbf{0}^b$ , em  $\mathbf{V}^+$ . Por outro lado, dado  $\mathbf{x}^b = (x_1, \dots, x_b)^T \neq \mathbf{0}^b$ , e sendo

$\mathbf{X}(\mathbf{x}^b) = [\mathbf{x}_1^{[m]}, \dots, \mathbf{x}_b^{[m]}]^T$  e  $\mathbf{D}$  matriz diagonal com elementos principais  $p_1, \dots, p_b$ , o

mínimo  $\bar{S}(\mathbf{x}^b)$  de  $S(\mathbf{x}^b, \mathbf{B})$  para  $\mathbf{x}^b$  é  $S(\mathbf{x}^b, \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x}^b))$ , com  $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x}^b) = [\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1(\mathbf{x}^b), \dots, \tilde{\boldsymbol{\beta}}_J(\mathbf{x}^b)]$

vindo  $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_j^{m+1}(\mathbf{x}^b) = [\mathbf{X}(\mathbf{x}^b)^T \mathbf{D} \mathbf{X}(\mathbf{x}^b)]^{-1} \mathbf{X}(\mathbf{x}^b)^T \mathbf{D} \mathbf{Y}_j^b; \quad j = 1, \dots, J.$

Ora, atendendo ao teorema de Weierstrass,  $\bar{S}(\mathbf{x}^b)$  atinge um mínimo absoluto  $S_o$ , que será o mínimo de  $S(\mathbf{x}^b, \mathbf{B})$  para  $\mathbf{x}^b \neq \mathbf{0}^b$ . Sendo  $\boldsymbol{\eta}_1^J, \boldsymbol{\eta}_2^J, \dots, \boldsymbol{\eta}_{m+1}^J$  os vectores linha de  $\mathbf{B}$ , as componentes de  $\boldsymbol{\eta}_h^J$  serão os coeficientes dos termos de grau  $h-1$  para as várias regressões,  $h=1, \dots, m+1$ . Ter-se-á  $\mathbf{B} = [\boldsymbol{\eta}_1^J, \dots, \boldsymbol{\eta}_{m+1}^J]^T$ , bem como  $S(\mathbf{0}^b, [\boldsymbol{\eta}_1^J, \boldsymbol{\eta}_2^J, \dots, \boldsymbol{\eta}_{m+1}^J]^T) = S(\mathbf{x}^b, [\boldsymbol{\eta}_1^J, \mathbf{0}^J, \dots, \mathbf{0}^J]^T) \geq \bar{S}(\mathbf{x}^b) \geq S_o$ . Assim,  $S_o$  será o mínimo absoluto de  $S(\mathbf{x}^b, \mathbf{B})$ .

Para completar a demonstração, basta observar que  $S(\mathbf{x}^b, \mathbf{B})$  é constante nas classes de equivalência  $\tau$ . □

Vamos, agora, adaptar o *algoritmo zigzague* e continuar a utilizar as notações introduzidas para estabelecer a *Proposição 6*. O vector inicial  $\tilde{\mathbf{x}}_1^b$  de *índices ambientais* pode ser escolhido como para o caso das regressões lineares. No  $H$ -ésimo ciclo parte-se dum vector  $\tilde{\mathbf{x}}_H^b$ , obtendo-se  $\tilde{\mathbf{B}}_H = \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x}_H^b) = [\tilde{\beta}_{\ell,j,H}]$ , bem como

$$S_{2H}(\mathbf{x}^b) = S(\mathbf{x}^b, \tilde{\mathbf{B}}_H) = \sum_{i=1}^b h_{iH}(x_i), \quad (3.30)$$

com

$$h_{iH}(x) = \sum_{j=1}^J p_{ij} \left( Y_{ij} - \sum_{\ell=0}^m \tilde{\beta}_{\ell,j,H} x^\ell \right)^2; \quad i=1, \dots, b; \quad H=1, \dots \quad (3.31)$$

Minimizando separadamente as funções  $h_{iH}(x)$ ,  $i=1, \dots, b$ , obtêm-se as componentes dum vector  $\tilde{\mathbf{x}}_H^b$  que, em seguida, é substituído por

$$\tilde{\mathbf{x}}_{H+1}^b = \varepsilon_H \mathbf{1}^b + \delta_H \tilde{\mathbf{x}}_H^b, \quad (3.32)$$

com  $\varepsilon_H$  e  $\delta_H$  escolhidos de forma a manter constantes o intervalo de variação dos *índices ambientais*  $L_2$ .

O ajustamento de regressões polinomiais pode ser útil para validar a ACRL. Assim, só vale a pena deixar de utilizar regressões lineares, se o aumento de precisão conseguido for elevado. Adiante, aprofundaremos este ponto.

### 3.5 – Estimadores de máxima verosimilhança

A noção de verosimilhança desempenha um papel central na inferência estatística, havendo desenvolvimentos recentes muito importantes, ver por exemplo Severine (2000).

A primeira aplicação da noção de verosimilhança que faremos será a reinterpretção dos estimadores obtidos, quando se utilizam *índices ambientais*  $L_2$ . Admitamos que os rendimentos são realizações de variáveis normais, independentes, com variâncias inversamente proporcionais aos pesos. Sendo  $N$  o número de observações e começando pelas regressões lineares, representemos por  $(\alpha_j, \beta_j)$  os pares de coeficientes,  $j = 1, \dots, J$ , por  $\theta_1, \dots, \theta_b$  os *índices ambientais* e por  $D_i$  o conjunto dos índices dos cultivares presentes no  $i$ -ésimo bloco,  $i = 1, \dots, b$ . Tem-se, então, a função de verosimilhança

$$L(\boldsymbol{\alpha}^J, \boldsymbol{\beta}^J, \boldsymbol{\theta}^b, \sigma^2) = \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij} (Y_{ij} - \alpha_j - \beta_j \theta_i)^2}}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \sigma^N} \sqrt{\prod_{i=1}^b \prod_{j \in D_i} p_{ij}}, \quad (3.33)$$

onde  $\sigma^2$  é um factor de proporcionalidade das variâncias. O logaritmo da verosimilhança será então

$$\ell(\boldsymbol{\alpha}^J, \boldsymbol{\beta}^J, \boldsymbol{\theta}^b, \sigma^2) = -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij} (Y_{ij} - \alpha_j - \beta_j \theta_i)^2 - \frac{N}{2} \ln \sigma^2 + k, \quad (3.34)$$

onde

$$k = -\frac{N}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} \ln p_{ij}, \quad (3.35)$$

já que  $p_{ij} = 0$ , quando  $j \notin D_i$ . Como

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2} = \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij} (Y_{ij} - \alpha_j - \beta_j \theta_i)^2 - \frac{N}{2\sigma^2}, \quad (3.36)$$

tem-se

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij} (Y_{ij} - \hat{\alpha}_j - \hat{\beta}_j \hat{\theta}_i)^2, \quad (3.37)$$

onde utilizamos “ $\hat{\phantom{x}}$ ” para indicar os estimadores de máxima verosimilhança. Observe-se, agora, que para obter  $(\hat{\alpha}_j, \hat{\beta}_j)$ ,  $j = 1, \dots, J$ , e  $\hat{\theta}_i$ ,  $i = 1, \dots, b$ , haverá que minimizar

$\sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij} (Y_{ij} - \alpha_j - \beta_j \theta_i)^2$ . Assim, os estimadores de mínimos quadrados são também

estimadores de máxima verosimilhança, quando a normalidade é assumida.

Estes resultados estendem-se, naturalmente, às regressões polinomiais.

Assim:

- os estimadores de máxima verosimilhança dos coeficientes e dos *índices ambientais* coincidem com os dos mínimos quadrados, quando a normalidade é assumida;
- além disso, sendo  $m$  o grau das regressões polinomiais obtém-se

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij} \left( Y_{ij} - \sum_{\ell=0}^m \hat{\beta}_{ij} \hat{\theta}_i^\ell \right)^2.$$

onde, como anteriormente,  $\sigma^2$  é um factor de proporcionalidade das variâncias.

Observe-se ainda, que agora consideramos o caso geral, mas estes resultados também se verificam para o caso completo, ou seja, a discussão feita para as regressões lineares, no caso completo, continua a ser válida.

Propriedades de consistência e de normalidade assintótica são neste caso difíceis de estabelecer, pois o número de parâmetros a estimar cresce com o número de blocos, já que, para cada bloco, se tem um *índice ambiental* a estimar.

### 3.6 – Testes de quociente de verosimilhanças, caso geral

Como os polinómios de grau  $t$  são um caso particular dos polinómios de grau  $t+1$  podemos, ver Fisz (1963, pg. 580), construir um teste de quociente de verosimilhanças para  $H_0 : m \leq t$ , admitindo-se para isso que  $m \leq t+1$ . Representemos por  $\omega$  o espaço paramétrico correspondente a  $H_0$  e por  $\Omega$  o espaço paramétrico total.

Sendo  $S_m$  a soma dos quadrados dos desvios, quando se ajustam polinómios de grau  $m$ , tem-se o supremo do logaritmo da verosimilhança dado por

$$\begin{aligned} \bar{\ell}_m &= -\frac{1}{2\hat{\sigma}_m^2} S_m - \frac{N}{2} \ln(2\pi) - \frac{N}{2} \ln \hat{\sigma}_m^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} \ln p_{ij} \\ &= -\frac{N}{2} - \frac{N}{2} \ln(2\pi) - \frac{N}{2} \ln \frac{S_m}{N} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} \ln p_{ij} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Observe-se que a distribuição limite, quando  $N \rightarrow +\infty$ , de

$$\lambda = -2(\bar{\ell}_t - \bar{\ell}_{t+1}) = N \ln \frac{S_t}{S_{t+1}} \quad (3.39)$$

é, ver Mood (1974, pg. 441), a distribuição do qui-quadrado central com  $J$  graus de liberdade, já que os últimos coeficientes das  $J$  regressões são nulos, quando  $H_0$  se verifica.

O caso particular mais importante é aquele em que  $t = 1$ , sendo então este um teste de linearidade. Adiante, na Secção 6.3, voltaremos a este ponto, ao considerarmos a validação (adequação) do modelo.

No que segue, restringir-nos-emos a regressões lineares, com pares de coeficientes  $(\alpha_j, \beta_j)$ ,  $j = 1, \dots, J$ . Começaremos por testar a hipótese

$$H_0 : \beta_1 = \dots = \beta_J, \quad (3.40)$$

representando por  $\beta$  o valor comum a estes coeficientes quando  $H_0$  se verifica. Redefinamos os espaços paramétricos  $\omega$  e  $\Omega$  de acordo com a nova hipótese testada. O supremo do logaritmo da verosimilhança, quando não se está a admitir  $H_0$  é dado por  $\bar{\ell}_1$ , ou seja, o supremo associado a  $\Omega$ . Por outro lado, para obtermos o supremo da verosimilhança associado a  $H_0$  temos de maximizar

$$\begin{aligned} \ell(\alpha^J, \beta \mathbf{1}^J, \theta^b, \sigma^2) = & -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij} (Y_{ij} - \alpha_j - \beta \theta_i)^2 - \frac{N}{2} \ln(2\pi) - \frac{N}{2} \ln \sigma^2 \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} \ln p_{ij} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Observe-se que

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2} = \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij} (Y_{ij} - \alpha_j - \beta \theta_i)^2 - \frac{N}{2\sigma^2} \quad (3.42)$$

vindo

$$\hat{\sigma}_\omega^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij} (Y_{ij} - \hat{\alpha}_{j\omega} - \hat{\beta}_\omega \hat{\theta}_{i\omega})^2, \quad (3.43)$$

onde o “índice”  $\omega$  indica que são os estimadores que maximizam a verosimilhança em  $\omega$ . Assim, para os obtermos temos de minimizar

$$S_\omega(\alpha^J, \beta \mathbf{1}^J, \theta^b) = \sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij} (Y_{ij} - \alpha_j - \beta \theta_i)^2, \quad (3.44)$$

podendo proceder-se numa forma análoga à que se fez anteriormente. Para aligeirar a escrita, omitimos o “índice”  $\omega$  nos estimadores. Vamos, assim, aplicar de novo o

algoritmo zigzag, minimizando em cada ciclo, primeiro em ordem a  $(\alpha^j, \beta 1^j)$  e em seguida em ordem a  $\theta^b$ . Como ponto de partida, pode tomar-se  $\theta_1^b = \hat{\theta}^b$ , isto é, utilizar-se os valores dos estimadores de máxima verosimilhança sem restrições para os índices ambientais. Obtêm-se assim

$$\begin{cases} \frac{\partial S_\omega}{\partial \alpha_j} = -2 \sum_{i=1}^b p_{ij} (Y_{ij} - \alpha_j - \beta \theta_i); j = 1, \dots, J \\ \frac{\partial S_\omega}{\partial \beta} = -2 \sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij} \theta_i (Y_{ij} - \alpha_j - \beta \theta_i) \end{cases} \quad (3.45)$$

Anulando-se as primeiras derivadas,  $\frac{\partial S_\omega}{\partial \alpha_j}$ ,  $j = 1, \dots, J$ , obtêm-se

$$\beta = a_j - b_j \alpha_j; j = 1, \dots, J \quad (3.46)$$

com

$$\begin{cases} a_j = \frac{\sum_{i=1}^b p_{ij} Y_{ij}}{\sum_{i=1}^b p_{ij} \theta_i}; j = 1, \dots, J \\ b_j = \frac{\sum_{i=1}^b p_{ij}}{\sum_{i=1}^b p_{ij} \theta_i}; j = 1, \dots, J \end{cases}, \quad (3.47)$$

vindo  $a_j - b_j \alpha_j = a_1 - b_1 \alpha_1$ ;  $j = 2, \dots, J$ , e, conseqüentemente

$$\alpha_j = c_j \alpha_1 + d_j; j = 2, \dots, J, \quad (3.48)$$

onde  $c_j = \frac{b_1}{b_j}$  e  $d_j = \frac{(a_j - a_1)}{b_j}$ ;  $j = 2, \dots, J$ .

Igualando a zero  $\sum_{j \in D_i} \frac{\partial S_\omega}{\partial \alpha_j}$ , obtêm-se ainda

$$-\sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij} Y_{ij} + \sum_{j \in D_i} \left( \sum_{i=1}^b p_{ij} \right) \alpha_j + \left( \sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij} \theta_i \right) \beta = 0 \quad (3.49)$$

vindo, com  $c_1 = 1$  e  $d_1 = 0$

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij} Y_{ij} - \sum_{j \in D_i} \left( \sum_{i=1}^b p_{ij} \right) (c_j \alpha_1 + d_j)}{\sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij} \theta_i} \quad (3.50)$$

Por outro lado, igualando também a zero  $\frac{\partial S_\omega}{\partial \beta}$  chegamos à segunda expressão para  $\beta$

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij} \theta_i Y_{ij} - \sum_{j \in D_i} \left( \sum_{i=1}^b p_{ij} \theta_i \right) (c_j \alpha_1 + d_j)}{\sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij} \theta_i^2}; \quad (3.51)$$

logo, de ambas as expressões para  $\beta$ , obtemos

$$\alpha_1 = \frac{A_1 - A_2}{B_1 - B_2} \quad (3.52)$$

com

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = \frac{\sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij} Y_{ij} - \sum_{j \in D_i} \left( \sum_{i=1}^b p_{ij} \right) d_j}{\sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij} \theta_i} \\ A_2 = \frac{\sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij} \theta_i Y_{ij} - \sum_{j \in D_i} \left( \sum_{i=1}^b p_{ij} \theta_i \right) d_j}{\sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij} \theta_i^2} \\ B_1 = \frac{\sum_{j \in D_i} \left( \sum_{i=1}^b p_{ij} \right) c_j}{\sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij} \theta_i} \\ B_2 = \frac{\sum_{j \in D_i} \left( \sum_{i=1}^b p_{ij} \theta_i \right) c_j}{\sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij} \theta_i^2} \end{array} \right. \quad (3.53)$$

A partir daqui obtêm-se os  $\alpha_2, \dots, \alpha_J$  e  $\beta$  correspondentes à primeira iteração. Há agora que maximizar em ordem aos *índices ambientais*. O problema é mais simples, pois a função a minimizar é  $\sum_{i=1}^b h_i(\theta_i)$ , com

$$h_i(\theta_i) = \sum_{j \in D_i} p_{ij} (Y_{ij} - \alpha_j - \beta \theta_i)^2 ; i = 1, \dots, b, \quad (3.54)$$

obtendo-se, facilmente,

$$\theta_i = \frac{\sum_{j \in D_i} p_{ij} (Y_{ij} - \alpha_j)}{\beta \sum_{j \in D_i} p_{ij}} ; i = 1, \dots, b. \quad (3.55)$$

Podemos, tal como anteriormente, estandardizar estes valores para manter inalterado o intervalo de variação dos *índices ambientais* e efectuar uma segunda iteração e assim sucessivamente. Repete-se a iteração até que o valor de  $S_\omega$  decresça suficientemente pouco.

Sendo  $S_\omega^\circ$  o valor final de  $S_\omega$ , obtém-se  $\hat{\sigma}_\omega^2 = \frac{S_\omega^\circ}{N}$  e o supremo do logaritmo da verosimilhança em  $\omega$  é dado por

$$\bar{\ell}_\omega = -\frac{N}{2} - \frac{N}{2} \ln(2\pi) - \frac{N}{2} \ln \frac{S_\omega^\circ}{N} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} \ln p_{ij}. \quad (3.56)$$

Quando  $N$  é grande, ver uma vez mais Mood et al. (1974, pg. 441),

$$\lambda = N \ln \frac{S_\omega^\circ}{S_1} \quad (3.57)$$

tem distribuição qui-quadrado central com  $J-1$  graus de liberdade, quando  $H_0 : \beta_1 = \dots = \beta_J$  se verifica.

Em seguida, testamos a hipótese

$$H'_0 : \alpha_1 = \dots = \alpha_J = \alpha, \quad (3.58)$$

representando por  $\alpha$  o valor comum das ordenadas na origem, quando  $H'_0$  se verifica e por  $\omega$  o espaço paramétrico que lhe corresponde. Por outro lado,  $\Omega$  é o mesmo que para o teste anterior, continuando pois  $\bar{\ell}_1$  a ser o supremo do logaritmo da verosimilhança em  $\Omega$ .

Temos agora que maximizar

$$\begin{aligned} \ell(\alpha \mathbf{1}^J, \boldsymbol{\beta}^J, \boldsymbol{\theta}^b, \sigma^2) = & -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij} (Y_{ij} - \alpha - \beta_j \theta_i)^2 - \frac{N}{2} \ln(2\pi) - \frac{N}{2} \ln \sigma^2 \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} \ln p_{ij} \end{aligned} \quad (3.59)$$

Como

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2} = \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij} (Y_{ij} - \alpha - \beta_j \theta_i)^2 - \frac{N}{2\sigma^2}, \quad (3.60)$$

obtem-se

$$\hat{\sigma}_\omega^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij} (Y_{ij} - \hat{\alpha}_\omega - \hat{\beta}_{j\omega} \hat{\theta}_{i\omega})^2. \quad (3.61)$$

Assim, tal como para o teste anterior, temos apenas de obter  $\hat{\alpha}_\omega$ ,  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_\omega^J$  e  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_\omega^b$ , minimizando para isso

$$S_\omega(\alpha \mathbf{1}^J, \boldsymbol{\beta}^J, \boldsymbol{\theta}^b) = \sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij} (Y_{ij} - \alpha - \beta_j \theta_i)^2. \quad (3.62)$$

À semelhança dos casos anteriores, voltamos a usar o *algoritmo zigzag*, minimizando alternadamente para  $(\alpha \mathbf{1}^J, \boldsymbol{\beta}^J)$  e para  $\boldsymbol{\theta}^b$ , começando por tomar  $\boldsymbol{\theta}_1^b = \hat{\boldsymbol{\theta}}^b$ .

Para aligeirar a escrita, voltamos a omitir os “índices”  $\omega$ .

Temos agora

$$\begin{cases} \frac{\partial S_\omega}{\partial \alpha} = -2 \sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij} (Y_{ij} - \alpha - \beta_j \theta_i) \\ \frac{\partial S_\omega}{\partial \beta_j} = -2 \sum_{i=1}^b p_{ij} \theta_i (Y_{ij} - \alpha - \beta_j \theta_i); \quad j = 1, \dots, J \end{cases} \quad (3.63)$$

Anulando as derivadas em ordem aos  $\beta_j$ ,  $\frac{\partial S_\omega}{\partial \beta_j}$ ,  $j = 1, \dots, J$ , obtém-se

$$\alpha = a_j - b_j \beta_j; \quad j = 1, \dots, J \quad (3.64)$$

com

$$\left\{ \begin{array}{l} a_j = \frac{\sum_{i=1}^b p_{ij} Y_{ij} \theta_i}{\sum_{i=1}^b p_{ij} \theta_i} ; j = 1, \dots, J \\ b_j = \frac{\sum_{i=1}^b p_{ij} \theta_i^2}{\sum_{i=1}^b p_{ij} \theta_i} ; j = 1, \dots, J \end{array} \right. , \quad (3.65)$$

vindo  $a_j - b_j \beta_j = a_1 - b_1 \beta_1 ; j = 2, \dots, J$ , e, conseqüentemente,

$$\beta_j = c_j \beta_1 + d_j ; j = 2, \dots, J, \quad (3.66)$$

onde  $c_j = \frac{b_1}{b_j}$  e  $d_j = \frac{(a_j - a_1)}{b_j}$ ;  $j = 2, \dots, J$ .

Igualando a zero  $\sum_{j \in D_1} \frac{\partial S_\omega}{\partial \beta_j}$ , obtém-se, ainda,

$$-\sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_1} p_{ij} \theta_i Y_{ij} + \left( \sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_1} p_{ij} \theta_i \right) \alpha + \sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_1} p_{ij} \theta_i^2 \beta_j = 0, \quad (3.67)$$

vindo, com  $c_1 = 1$  e  $d_1 = 0$ , e de acordo com (3.66)

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_1} p_{ij} \theta_i Y_{ij} - \sum_{j \in D_1} \sum_{i=1}^b p_{ij} \theta_i^2 (c_j \beta_1 + d_j)}{\sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_1} p_{ij} \theta_i}. \quad (3.68)$$

Por outro lado, igualando também a zero  $\frac{\partial S_\omega}{\partial \alpha}$  chegamos a

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_1} p_{ij} Y_{ij} - \sum_{j \in D_1} \sum_{i=1}^b p_{ij} \theta_i (c_j \beta_1 + d_j)}{\sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_1} p_{ij}}. \quad (3.69)$$

Logo, obter-se-á

$$\beta_1 = \frac{A_1 - A_2}{B_1 - B_2} \quad (3.70)$$

com

$$\left. \begin{aligned}
 A_1 &= \frac{\sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij} \theta_i Y_{ij} - \sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij} \theta_i^2 d_j}{\sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij} \theta_i} \\
 A_2 &= \frac{\sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij} Y_{ij} - \sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij} \theta_i d_j}{\sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij}} \\
 B_1 &= \frac{\sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij} \theta_i^2 c_j}{\sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij} \theta_i} \\
 B_2 &= \frac{\sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij} \theta_i c_j}{\sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij}}
 \end{aligned} \right\} \quad (3.71)$$

É agora directo obter o  $\alpha$  e os  $\beta_2, \dots, \beta_b$  correspondentes à primeira iteração. Há, agora, que maximizar em ordem aos *índices ambientais* o que é fácil, pois a função a minimizar é  $\sum_{i=1}^b h_i(\theta_i)$ , com

$$h_i(\theta_i) = \sum_{j \in D_i} p_{ij} (Y_{ij} - \alpha - \beta_j \theta_i)^2 ; \quad i = 1, \dots, b, \quad (3.72)$$

obtendo-se, facilmente,

$$\theta_i = \frac{\sum_{j \in D_i} p_{ij} (Y_{ij} - \alpha) \beta_j}{\sum_{j \in D_i} p_{ij} \beta_j^2} ; \quad i = 1, \dots, b. \quad (3.73)$$

Podemos, tal como anteriormente, standardizar e repetir as iterações. Repete-se a iteração até o valor de  $S_\omega$  decrescer suficientemente pouco. Sendo  $S_\omega^\circ$  o valor final de  $S_\omega$ , obtém-se  $\hat{\sigma}_\omega^2 = \frac{S_\omega^\circ}{N}$  e o supremo do logaritmo da verosimilhança em  $\omega$  será

$$\bar{\ell}_\omega = -\frac{N}{2} - \frac{N}{2} \ln(2\pi) - \frac{N}{2} \ln \frac{S_\omega^\circ}{N} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} \ln p_{ij}. \quad (3.74)$$

Quando  $N$  é grande e a hipótese testada se verifica, à semelhança dos casos anteriores

$$\lambda = N \ln \frac{S_\omega}{S_1} \quad (3.75)$$

tem distribuição qui-quadrado central com  $J - 1$  graus de liberdade.

Embora de menor interesse pode ainda considerar-se a hipótese

$$H_0' : \begin{cases} \alpha_1 = \dots = \alpha_J = \alpha \\ \beta_1 = \dots = \beta_J = \beta \end{cases} \quad (3.76)$$

de regressões “iguais”.

Observe-se que o espaço paramétrico total  $\Omega$  e, conseqüentemente, o correspondente supremo do logaritmo da verosimilhança são os mesmos que para os dois últimos testes.

Temos, agora, que maximizar

$$\begin{aligned} \ell(\alpha \mathbf{1}^J, \beta \mathbf{1}^J, \boldsymbol{\theta}^b, \sigma^2) &= -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij} (Y_{ij} - \alpha - \beta \theta_i)^2 - \frac{N}{2} \ln(2\pi) - \frac{N}{2} \ln \sigma^2 \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} \ln p_{ij} \end{aligned} \quad (3.77)$$

Como

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2} = \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij} (Y_{ij} - \alpha - \beta \theta_i)^2 - \frac{N}{2\sigma^2} \quad (3.78)$$

obtem-se

$$\hat{\sigma}_\omega^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij} (Y_{ij} - \hat{\alpha}_\omega - \hat{\beta}_\omega \hat{\theta}_{i\omega}^b)^2. \quad (3.79)$$

Assim, teremos apenas de obter  $\hat{\alpha}_\omega$ ,  $\hat{\beta}_\omega$  e  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_\omega^b$ , usando uma vez mais o *algoritmo zigzag*, minimizando

$$S_\omega(\alpha \mathbf{1}^J, \beta \mathbf{1}^J, \boldsymbol{\theta}^b) = \sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij} (Y_{ij} - \alpha - \beta \theta_i)^2 \quad (3.80)$$

alternadamente em ordem a  $(\alpha \mathbf{1}^J, \beta \mathbf{1}^J)$  e a  $\boldsymbol{\theta}^b$ . Tal como atrás, tomamos  $\boldsymbol{\theta}_1^b = \hat{\boldsymbol{\theta}}^b$  e, para aligeirar a escrita, omitimos o “índice”  $\omega$ .

Temos, agora,

$$\begin{cases} \frac{\partial S_\omega}{\partial \alpha} = -2 \sum_{i=1}^b p_{ij} (Y_{ij} - \alpha - \beta \theta_i) \\ \frac{\partial S_\omega}{\partial \beta} = -2 \sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij} \theta_i (Y_{ij} - \alpha - \beta \theta_i) \end{cases} \quad (3.81)$$

Anulando-se estas derivadas, obtém-se um sistema

$$\begin{cases} a_{11} \alpha + a_{12} \beta = b_1 \\ a_{21} \alpha + a_{22} \beta = b_2 \end{cases} \quad (3.82)$$

com  $a_{11} = \sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij}$ ,  $a_{12} = a_{21} = \sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij} \theta_i$ ,  $a_{22} = \sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij} \theta_i^2$ ,  $b_1 = \sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij} Y_{ij}$  e

$$b_2 = \sum_{i=1}^b \sum_{j \in D_i} p_{ij} \theta_i Y_{ij}.$$

Tomando  $d = a_{11} a_{22} - a_{12}^2$ , a solução do sistema é

$$\begin{cases} \alpha = \frac{a_{22} b_1 - a_{12} b_2}{d} \\ \beta = \frac{a_{11} b_2 - a_{12} b_1}{d} \end{cases} \quad (3.83)$$

Passando à segunda parte da iteração temos de minimizar  $\sum_{i=1}^b h_i(\theta_i)$ , com

$$h_i(\theta_i) = \sum_{j \in D_i} p_{ij} (Y_{ij} - \alpha - \beta \theta_i)^2; \quad i = 1, \dots, b, \quad (3.84)$$

vindo

$$\theta_i = \frac{\sum_{j \in D_i} p_{ij} (Y_{ij} - \alpha)}{\beta \sum_{j \in D_i} p_{ij}}; \quad i = 1, \dots, b. \quad (3.85)$$

Tal como nos casos anteriores, estandardizamos os *índices ambientais* estimados e realizamos iterações até  $S_\omega$  ter estabilizado. Sendo  $S_\omega^\circ$  o valor final de  $S_\omega$ , tem-se

$\hat{\sigma}_\omega^2 = \frac{S_\omega^\circ}{N}$  e, se  $N$  for grande e  $H'_0$  se verifica então a estatística

$$\lambda = N \ln \frac{S_\omega^\circ}{S_1} \quad (3.86)$$

tem distribuição qui-quadrado central, com  $2(J-1)$  graus de liberdade.

### 3.7 – Testes de quociente de verosimilhanças, caso completo

A teoria destes tem  $N = bJ$  e  $p_{ij} = p_i$ ,  $j = 1, \dots, J$ ,  $i = 1, \dots, b$ , simplificando-se as fórmulas anteriores consideravelmente. A adaptação dos testes, para hipóteses referentes ao grau das regressões, é directa. Novamente, o teste mais importante é aquele para  $t = 1$ , isto é, o teste de linearidade.

Consideraremos em especial os testes para as três últimas hipóteses nos coeficientes de regressão. Começando pelo teste para

$$H_0 : \beta_1 = \dots = \beta_J = \beta \quad (3.87)$$

teremos

$$\hat{\sigma}_\omega^2 = \frac{1}{bJ} \sum_{i=1}^b p_i \sum_{j=1}^J \left( Y_{ij} - \hat{\alpha}_{j\omega} - \hat{\beta}_\omega \hat{\theta}_{i\omega} \right)^2, \quad (3.88)$$

o que, procedendo como atrás, nos leva a minimizar

$$S_\omega(\alpha^J, \beta 1^J, \theta^b) = \sum_{i=1}^b p_i \sum_{j=1}^J \left( Y_{ij} - \alpha_j - \beta \theta_i \right)^2. \quad (3.89)$$

Só que agora se tem

$$\begin{cases} a_j = \frac{\sum_{i=1}^b p_i Y_{ij}}{k} ; j = 1, \dots, J \\ b_j = \delta = \frac{\sum_{i=1}^b p_i}{k} ; j = 1, \dots, J \end{cases} \quad (3.90)$$

com  $k = \sum_{i=1}^b p_i \theta_i$ , vindo

$$\alpha_j = \alpha_1 + d_j ; j = 2, \dots, J, \quad (3.91)$$

onde

$$d_j = \frac{\alpha_j - \alpha_1}{\delta} = \frac{\sum_{i=1}^b p_i (Y_{ij} - Y_{i1})}{\sum_{i=1}^b p_i} ; j = 2, \dots, J. \quad (3.92)$$

Neste caso, com  $T_i = \sum_{j=1}^J Y_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, b$ , tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = \frac{\sum_{i=1}^b p_i T_i - \sum_{i=1}^b p_i \sum_{j=1}^J d_j}{Jk} \\ A_2 = \frac{\sum_{i=1}^b p_i \theta_i T_i - \sum_{i=1}^b p_i \theta_i \sum_{j=1}^J d_j}{J \sum_{i=1}^b p_i \theta_i^2} \\ B_1 = \frac{\sum_{i=1}^b p_i}{k} \\ B_2 = \frac{\sum_{i=1}^b p_i \theta_i}{\sum_{i=1}^b p_i \theta_i^2} \end{array} \right. \quad (3.93)$$

o que simplifica, consideravelmente, em relação ao caso geral, a primeira parte das iterações. Na segunda parte os cálculos também se simplificam já que se pode tomar

$$\theta_i = \frac{\sum_{j=1}^J (Y_{ij} - \alpha_j)}{J\beta} ; i = 1, \dots, b. \quad (3.94)$$

Passando ao teste para

$$H'_0 : \alpha_1 = \dots = \alpha_J = \alpha \quad (3.95)$$

teremos

$$\hat{\sigma}_\omega^2 = \frac{1}{bJ} \sum_{i=1}^b p_i \sum_{j=1}^J (Y_{ij} - \hat{\alpha}_\omega - \hat{\beta}_{j\omega} \hat{\theta}_{i\omega})^2, \quad (3.96)$$

o que, procedendo como atrás, nos leva a minimizar

$$S_\omega(\alpha \mathbf{1}', \boldsymbol{\beta}^J, \boldsymbol{\theta}^b) = \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^J p_i (Y_{ij} - \alpha - \beta_j \theta_i)^2. \quad (3.97)$$

Neste caso, temos

$$\left\{ \begin{array}{l} a_j = \frac{\sum_{i=1}^b p_i Y_{ij} \theta_i}{k} ; j = 1, \dots, J \\ b_j = \delta = \frac{\sum_{i=1}^b p_i \theta_i^2}{k} ; j = 1, \dots, J \end{array} \right. \quad (3.98)$$

vindo

$$\beta_j = \beta_1 + d_j ; j = 2, \dots, J \quad (3.99)$$

com

$$d_j = \frac{a_j - a_1}{\delta} = \frac{\sum_{i=1}^b p_i \theta_i (Y_{ij} - Y_{i1})}{\sum_{i=1}^b p_i \theta_i^2} ; j = 2, \dots, J . \quad (3.100)$$

Teremos, ainda

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = \frac{\sum_{i=1}^b p_i \theta_i T_i - \sum_{i=1}^b p_i \theta_i^2 \sum_{j=1}^J d_j}{J \sum_{i=1}^b p_i \theta_i} \\ A_2 = \frac{\sum_{i=1}^b p_i T_i - \sum_{i=1}^b p_i \theta_i \sum_{j=1}^J d_j}{J \sum_{i=1}^b p_i} \\ B_1 = \frac{\sum_{i=1}^b p_i \theta_i^2}{k} \\ B_2 = \frac{\sum_{i=1}^b p_i \theta_i}{k} \end{array} \right. \quad (3.101)$$

o que, tal como no caso anterior, conduz à simplificação, em relação ao caso geral, da primeira parte das iterações. Na segunda parte, os cálculos também se simplificam dado poder tomar-se

$$\theta_i = \frac{\sum_{j=1}^J (Y_{ij} - \alpha) \beta_j}{\sum_{j=1}^J \beta_j^2} ; i = 1, \dots, b . \quad (3.102)$$

Finalmente, temos o teste para

$$H_0' : \begin{cases} \alpha_1 = \dots = \alpha_J = \alpha \\ \beta_1 = \dots = \beta_J = \beta \end{cases} . \quad (3.103)$$

Como se obtém

$$\hat{\sigma}_\omega^2 = \frac{1}{bJ} \sum_{i=1}^b p_i \sum_{j=1}^J (Y_{ij} - \hat{\alpha}_\omega - \hat{\beta}_\omega \hat{\theta}_{i\omega})^2 \quad (3.104)$$

teremos de, procedendo como atrás, minimizar

$$S_\omega(\alpha \mathbf{1}^J, \beta \mathbf{1}^J, \boldsymbol{\theta}^b) = \sum_{i=1}^b p_i \sum_{j=1}^J (Y_{ij} - \alpha - \beta \theta_i)^2. \quad (3.105)$$

Neste caso, tem-se  $a_{11} = J \sum_{i=1}^b p_i$ ,  $a_{12} = a_{21} = J \sum_{i=1}^b p_i \theta_i$ ,  $a_{22} = J \sum_{i=1}^b p_i \theta_i^2$ ,  $b_1 = \sum_{i=1}^b p_i T_i$  e

$b_2 = \sum_{i=1}^b p_i \theta_i T_i$ , vindo

$$d = J^2 \left[ \left( \sum_{i=1}^b p_i \right) \left( \sum_{i=1}^b p_i \theta_i^2 \right) - \left( \sum_{i=1}^b p_i \theta_i \right)^2 \right], \quad (3.106)$$

o que simplifica os cálculos da primeira parte da iteração. Na segunda parte, obtém-se directamente

$$\theta_i = \frac{1}{J\beta} \sum_{j=1}^J (Y_{ij} - \alpha); \quad i = 1, \dots, b. \quad (3.107)$$

Observe-se que o procedimento iterativo converge sempre, porque obtemos mínimos cada vez mais pequenos, limitados inferiormente por zero.

### 3.8 – Comparação dos *índices ambientais clássicos* e $L_2$ no caso completo

Por vezes, os resultados obtidos, usando os dois tipos de *índices ambientais* no caso completo, são muito próximos. Isso verifica-se, no conjunto de dados referentes à cultura do trigo, que a seguir analisamos.

Esses dados, gentilmente cedidos pela Estação Nacional de Melhoramento de Plantas, reportam-se a onze ensaios realizados em 1992/93 e 1993/94. Por ensaio havia quatro blocos.

No conjunto dos ensaios estavam presentes os cultivares: CELTA, HELVIO, TE9006, TE9007, TE9008, TE9110, TE9115, TE9204 e TROVADOR.

Na Tabela 3.1, apresentamos os resultados obtidos para os *índices ambientais clássicos* e os *índices ambientais  $L_2$* .

Tabela 3.1. Regressões ajustadas e coeficientes de determinação, usando os *índices ambientais clássicos* e  $L_2$ .

Cultivar	Índices ambientais clássicos			Índices ambientais $L_2$			
	$\tilde{\alpha}_j$	$\tilde{\beta}_j$	$R_j^2$	$\tilde{\alpha}_j$	$\tilde{\beta}_j$	$R_j^2$	
CELTA	-471.68	1.23	0.91	-544	1.24	0.92	
HELVIO	-112.01	1.05	0.92	-153.90	1.06	0.93	
TE9006	-361.24	1.10	0.86	-415.29	1.11	0.87	
TE9007	-491.48	1.11	0.92	-543.89	1.12	0.92	
TE9008	403.30	0.95	0.90	376.54	0.95	0.90	
TE9110	-51.14	0.88	0.78	-37.26	0.88	0.77	
TE9115	1232.13	0.56	0.54	1296.73	0.54	0.51	
TE9204	58.34	1.07	0.90	15.57	1.08	0.90	
TROVADOR	-206.15	1.06	0.89	-243.96	1.06	0.89	
			$\sum_{j=1}^j R_j^2 = 7.62$				$\sum_{j=1}^j R_j^2 = 7.61$

As somas das somas dos quadrados dos resíduos são 207347800 para os *índices ambientais clássicos* e 205534200 para os *índices ambientais  $L_2$* .

Destes resultados, ressalta a semelhança acima referida entre os ajustamentos conseguidos, utilizando os dois tipos de *índices ambientais*. Para interpretar essa semelhança, vamos completar o tratamento dado, na Secção 3.3, ao ajustamento de regressões lineares no caso completo.

Classicamente, estes resultados obtidos seriam discutidos em termos de maior ou menor estabilidade das produções. No entanto, a ênfase da ACRL é a selecção de cultivares mais produtivos para os vários valores do *índice ambiental*; assim, a discussão que segue será feita em termos do contorno superior. Diferentes cultivares podem ser seleccionados para distintos intervalos de variação do *índice ambiental*. Assim, usaremos o contorno superior para comparar os dois tipos de *índices ambientais*.

Adiante, na Secção 5.4, indicaremos quais os cultivares seleccionados, utilizando uns e outros *índices ambientais*.

Como vimos, podemos restringir-nos ao conjunto  $\Theta$  de vectores de *índices ambientais*  $\mathbf{x}^b = (x_1, \dots, x_b)$  que satisfazem as condições

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^b p_i x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^b p_i x_i^2 = 1 \end{cases} \quad (3.108)$$

Por outro lado, escrevendo-se  $\mathbf{u}^{b\xi} \mathbf{v}^b$  quando existem constantes  $\varepsilon$  e  $\delta$ , tais que

$$\mathbf{v}^b = \varepsilon \mathbf{1}^b + \delta \mathbf{u}^b \quad (3.109)$$

estabelecemos uma relação de equivalência em  $\mathfrak{R}^b$ . Sendo  $[\mathbf{u}^b]_\xi$  a classe de equivalência  $\xi$  a que  $\mathbf{u}^b$  pertence, se  $\mathbf{u}^b \neq \mathbf{0}^b$  em  $[\mathbf{u}^b]_\xi$ , existe um e só um vector que satisfaz as condições (3.108), com primeira componente não nula positiva.

Vimos ainda que, uma vez restringidos aos vectores que satisfazem (3.108), para minimizarmos a soma  $S$  das somas dos quadrados dos resíduos, se tinha de maximizar  $\mathbf{x}^{bT} \mathbf{Z} \mathbf{x}^b$ , estando a matriz  $\mathbf{Z}$  definida em (3.28). Convém, ainda, observar que, quando as restrições (3.108) se verificam, se tinha  $s_{xx} = 1$  e, atendendo as expressões (3.20) e (3.27) da Secção 3.3, obtém-se

$$\bar{S}(\mathbf{x}^b) = \sum_{j=1}^J s_{jY} - \mathbf{x}^{bT} \mathbf{Z} \mathbf{x}^b. \quad (3.110)$$

Sendo  $(\lambda_i, \boldsymbol{\alpha}_i^b)$ ,  $i = 1, \dots, b$ , os pares de valores e vectores próprios associados de  $\mathbf{Z}$ , podemos admitir que  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_b$  e que os  $\boldsymbol{\alpha}_i^b$ ,  $i = 1, \dots, b$ , são normalizados e mutuamente ortogonais. Além disso, de acordo com (3.110),  $\boldsymbol{\alpha}_1^b$  será o vector de  $\Theta$  que minimiza  $\bar{S}(\mathbf{x}^b)$ ; assim, o vector  $\mathbf{x}^{*b}$  dos índices ambientais  $L_2$  ajustados será equivalente  $\xi$  de  $\boldsymbol{\alpha}_1^b$ .

Como os  $\boldsymbol{\alpha}_1^b, \dots, \boldsymbol{\alpha}_b^b$  constituem uma base ortonormada para  $\square^b$ , dado  $\boldsymbol{\gamma}^b \in \square^b$  ter-se-á

$$\boldsymbol{\gamma}^b = \sum_{j=1}^b (\boldsymbol{\alpha}_j^{bT} \boldsymbol{\gamma}^b) \boldsymbol{\alpha}_j^b, \quad (3.111)$$

vindo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}^{bT} \mathbf{Z} \boldsymbol{\gamma}^b &= \left[ \sum_{j=1}^b (\boldsymbol{\alpha}_j^{bT} \boldsymbol{\gamma}^b) \boldsymbol{\alpha}_j^b \right]^T \mathbf{Z} \left[ \sum_{i=1}^b (\boldsymbol{\alpha}_i^{bT} \boldsymbol{\gamma}^b) \boldsymbol{\alpha}_i^b \right] = \\ &= \left[ \sum_{j=1}^b (\boldsymbol{\alpha}_j^{bT} \boldsymbol{\gamma}^b) \boldsymbol{\alpha}_j^b \right]^T \left[ \sum_{i=1}^b (\boldsymbol{\alpha}_i^{bT} \boldsymbol{\gamma}^b) \lambda_i \boldsymbol{\alpha}_i^b \right] = \sum_{i=1}^b \lambda_i (\boldsymbol{\alpha}_i^{bT} \boldsymbol{\gamma}^b)^2. \end{aligned} \quad (3.112)$$

Assim, tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} S(\boldsymbol{\alpha}_1^b) = \sum_{j=1}^J s_{j,Y,Y} - \lambda_1 \\ S(\boldsymbol{\gamma}^b) = \sum_{j=1}^J s_{j,Y,Y} - \sum_{i=1}^b \lambda_i (\boldsymbol{\alpha}_i^{bT} \boldsymbol{\gamma}^b)^2 \end{array} \right. \quad (3.113)$$

Se  $\boldsymbol{\gamma}^b$  for equivalente  $\zeta$  ao vector dos *índices ambientais clássicos*, com

$\|\boldsymbol{\gamma}^b\|^2 = \sum_{j=1}^b (\boldsymbol{\alpha}_j^{bT} \boldsymbol{\gamma}^b)^2 = 1$  e dado  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_b$ , ter-se-á

$$S(\boldsymbol{\gamma}^b) \geq \sum_{j=1}^J s_{j,Y,Y} - \lambda_1 (\boldsymbol{\alpha}_1^{bT} \boldsymbol{\gamma}^b)^2 - \lambda_2 \left[ 1 - (\boldsymbol{\alpha}_1^{bT} \boldsymbol{\gamma}^b)^2 \right], \quad (3.114)$$

vindo

$$S(\boldsymbol{\gamma}^b) - S(\boldsymbol{\alpha}_1^b) \geq (\lambda_1 - \lambda_2) \left[ 1 - (\boldsymbol{\alpha}_1^{bT} \boldsymbol{\gamma}^b)^2 \right]. \quad (3.115)$$

Quando se verifica  $\lambda_1 > \lambda_2$ , obtém-se

$$\boldsymbol{\alpha}_1^{bT} \boldsymbol{\gamma}^b \geq \sqrt{1 - \frac{S(\boldsymbol{\gamma}^b) - S(\boldsymbol{\alpha}_1^b)}{\lambda_1 - \lambda_2}}. \quad (3.116)$$

Por outro lado, como  $\|\boldsymbol{\alpha}_1^b\| = \|\boldsymbol{\gamma}^b\| = 1$ , vem

$$\|\boldsymbol{\alpha}_1^b - \boldsymbol{\gamma}^b\|^2 = (\boldsymbol{\alpha}_1^b - \boldsymbol{\gamma}^b)^T (\boldsymbol{\alpha}_1^b - \boldsymbol{\gamma}^b) = \boldsymbol{\alpha}_1^{bT} \boldsymbol{\alpha}_1^b - 2\boldsymbol{\alpha}_1^{bT} \boldsymbol{\gamma}^b + \boldsymbol{\gamma}^{bT} \boldsymbol{\gamma}^b \quad (3.117)$$

$$= 2(1 - \boldsymbol{\alpha}_1^{bT} \boldsymbol{\gamma}^b) \leq 2 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{S(\boldsymbol{\gamma}^b) - S(\boldsymbol{\alpha}_1^b)}{\lambda_1 - \lambda_2}} \right),$$

isto é, quando  $S(\boldsymbol{\gamma}^b) - S(\boldsymbol{\alpha}_1^b)$  é pequena relativamente a  $\lambda_1 - \lambda_2$ ,  $\boldsymbol{\alpha}_1^b$  e  $\boldsymbol{\gamma}^b$  terão de estar próximos. No exemplo atrás considerado, tinha-se

$$2 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{S(\boldsymbol{\gamma}^b) - S(\boldsymbol{\alpha}_1^b)}{\lambda_1 - \lambda_2}} \right) = 0.00137.$$

Sejam, respectivamente,  $x_1, \dots, x_b$  e  $x_1^*, \dots, x_b^*$  os *índices ambientais clássicos* e os *índices ambientais  $L_2$  ajustados*. Os vectores  $\mathbf{x}^b$  e  $\mathbf{x}^{*b}$ , com estas componentes, são equivalentes  $\zeta$  ao  $\boldsymbol{\gamma}^b$  e ao  $\boldsymbol{\alpha}_1^b$ , respectivamente, existindo assim pares de constantes  $(\varepsilon, \delta)$  e  $(\varepsilon^*, \delta^*)$  com  $\delta > 0$  e  $\delta^* > 0$ , tais que

$$\begin{cases} \mathbf{x}^b = \varepsilon \mathbf{1}^b + \delta \boldsymbol{\gamma}^b \\ \mathbf{x}^{*b} = \varepsilon^* \mathbf{1}^b + \delta^* \boldsymbol{\alpha}_1^b \end{cases} \quad (3.118)$$

Então, se todos os blocos têm pesos iguais  $p_1, \dots, p_b = 1$ , com  $x_o = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^b x_i$  e  $x_o^* = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^b x_i^*$ , tem-se

$$\frac{\sum_{i=1}^b (x_i - x_o)(x_i^* - x_o^*)}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^b (x_i - x_o)^2\right)\left(\sum_{i=1}^b (x_i^* - x_o^*)^2\right)}} = \boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\alpha}_1, \quad (3.119)$$

visto as somas das componentes dos vectores  $\boldsymbol{\gamma}^b$  e  $\boldsymbol{\alpha}_1^b$  serem nulas e as suas normas 1.

Assim, quando  $\boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\alpha}_1 \approx 1$  tende a haver uma forte correlação entre os dois tipos de *índices ambientais*. No exemplo que temos estado a considerar, tem-se o coeficiente de correlação usual  $\rho = 0.9999998$ .

### 3.9 – Convergência quase-certa dos estimadores

Quando realizamos os ajustamentos a partir de  $b$  blocos, na penúltima iteração do *algoritmo ziguezague*, obtemos as estimativas  $x_1, \dots, x_b$  dos *índices ambientais*, as quais nos permitem obter as matrizes  $X_{bj}$ , usadas na última iteração para obter as estimativas

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}}_{bj}^{m+1} = \left(\mathbf{X}_{bj}^T \mathbf{X}_{bj}\right)^{-1} \mathbf{X}_{bj}^T \mathbf{Y}_j^{b_j}, \quad j = 1, \dots, J, \quad (3.120)$$

quando o grau da regressão a ser ajustada é  $m$ .

Vamos agora admitir as seguintes condições:

- existe um intervalo  $[c; d]$ , tal que todos os *índices ambientais* estimados, lhe pertencem. Observe-se que este intervalo pode ser arbitrariamente amplo e que, em geral, os *índices ambientais* estimados são positivos;

- sendo  $\phi(\mathbf{M})$  o raio espectral da matriz  $\mathbf{M}$ , admitamos ainda que  $b_j \xrightarrow[b \rightarrow \infty]{} +\infty$ ,  $j = 1, \dots, J$ , e que

$$\phi \left( \frac{1}{b_j} \mathbf{X}_{b_j}^T \mathbf{X}_{b_j} \right) \xrightarrow[b \rightarrow \infty]{q. c.} k_j > 0 \quad , \quad j = 1, \dots, J, \quad (3.121)$$

onde  $\xrightarrow{q. c.}$  indica convergência quase certa e  $b_j$  o número de blocos nos quais o  $j$ -ésimo cultivar está presente.

Bastará, então, admitir

$$\mathbf{Y}_j^{b_j} = \mathbf{X}_{b_j} \boldsymbol{\beta}_j^{m+1} + \mathbf{e}_j^{b_j} \quad , \quad j = 1, \dots, J \quad (3.122)$$

com  $\mathbf{e}_j^{b_j}$  vetores com valor médio nulo e matrizes de covariância  $\Sigma(\mathbf{e}_j^{b_j}) = \sigma^2 \mathbf{I}_{b_j}$ , para, se ter, ver Mexia & Real (2001a) e (2001b),

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}}_{b_j}^{m+1} \xrightarrow[b \rightarrow \infty]{q. c.} \boldsymbol{\beta}_j^{m+1} \quad , \quad j = 1, \dots, J. \quad (3.123)$$

Com efeito, verificar-se-ão então com probabilidade 1 as condições exigidas, ver Mexia & Corte Real (2001a) e (2001b), para a extensão da lei forte dos grandes números de Kolmogorov a regressões lineares. Observe-se que (3.121) equivale a saber-se que, com probabilidade 1, o raio espectral de  $\frac{1}{b_j} \mathbf{X}_{b_j}^T \mathbf{X}_{b_j}$  converge para  $k_j$ ;  $j = 1, \dots, J$ .

Isto mostra-nos a convergência quase-certa do procedimento.

## 4 - Interações específicas

### 4.1 – Detecção, caso com repetições

Começemos por considerar o caso em que há  $b$  blocos [super-blocos] completos, em todos os locais e anos. Suporemos que se ajustaram as regressões lineares para os  $J$  cultivares considerados. Ora, neste caso, temos para os  $J$  cultivares, amostras emparelhadas de  $b$  resíduos, em cada ano e local. Este caso foi primeiro estudado por Gusmão et al. (1992a), para *redes* de delineamentos em blocos casualizados.

As interações específicas verificam-se em certo ano e em determinado local, quando, para o correspondente par, um ou mais cultivares se comportam anormalmente bem ou anormalmente mal. Assim, os correspondentes resíduos para o ou os cultivares tomarão valores anormalmente altos ou anormalmente baixos. Tornando a análise dos dados mais complicada. Por isso, no princípio, é melhor conferirmos a existência de tais interações específicas na *rede de ensaios*. Há vários modos de fazer isto. Um deles, será descrito abaixo, e é bastante geral, mas o mais correcto teoricamente é o baseado na abordagem da ACR, o qual será descrito na próxima secção.

Para cada bloco [super-bloco] e para cada cultivar temos um resíduo. O conjunto dos resíduos relativos a um bloco [super-bloco] constituirá uma amostra. Estas amostras estarão emparelhadas, já que se pode fazer corresponder os resíduos que se têm para o mesmo cultivar. Assim, para testar a hipótese de existência de interações específicas, deveremos testar se as amostras de resíduos de um par (local, ano) correspondentes aos diferentes  $J$  cultivares, provêm de populações identicamente distribuídas, podendo utilizar o teste de Friedman, ver Friedman (1937) e (1940). Observe-se que essas amostras podem ser combinadas em amostras globais para toda a *rede*, continuando estas últimas a estarem emparelhadas. Pode-se assim aplicar o teste à totalidade da *rede*. No entanto, na presença de interação específica, os resíduos relativos ao cultivar para o qual existe interação deverão apresentar-se, de forma significativa, afastados dos restantes. Para efectuar este teste, podem consultar-se as tabelas contidas no livro de Siegel & Castellan (1988, pg. 353) ou uma aproximação qui-quadrado com  $J - 1$  graus de liberdade. Pode ser interessante considerar brevemente como é que este teste é executado. Ordenam-se os resíduos para os  $J$  cultivares em cada bloco [super-bloco] e

obtêm-se as somas  $R_j, j = 1, \dots, J$ , dos números de ordem para os diferentes cultivares. A estatística de teste será então

$$F_b = \frac{12}{bJ(J+1)} \sum_{j=1}^J R_j^2 - 3b(J+1), \quad (4.1)$$

caso  $b \geq 4$  ou  $J \geq 8$ .

É interessante reescrever esta fórmula, pois a soma dos números de ordem para cada bloco [super-bloco] é  $\frac{J(J+1)}{2}$ , pelo que

$$\sum_{j=1}^J R_j = \frac{bJ(J+1)}{2}; \quad (4.2)$$

logo,  $R_o = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J R_j = \frac{b(J+1)}{2}$ , vindo

$$\sum_{j=1}^J (R_j - R_o)^2 = \sum_{j=1}^J R_j^2 - \frac{1}{J} \left( \sum_{j=1}^J R_j \right)^2 = \sum_{j=1}^J R_j^2 - \frac{b^2 J(J+1)^2}{4} \quad (4.3)$$

e assim

$$F_b = \frac{12}{bJ(J+1)} \sum_{j=1}^J (R_j - R_o)^2, \quad (4.4)$$

o que "justifica" a utilização deste bem conhecido teste não paramétrico, pois esta última expressão sugere-nos claramente o uso desta estatística. Quando, para um determinado ano e um certo local, o valor calculado excede o tabelado, conclui-se pela existência de interação específica significativa. Elimina-se o ou os cultivares com  $|R_j - R_o|$  máximo e repete-se o teste até não se encontrarem mais interações específicas. Ao fim dum certo número de aplicações, fica-se a saber quais os cultivares em que, nesse local, não existem [existem] interações específicas.

Convém, no entanto, ter no final pelo menos 9 cultivares, para garantir a estabilidade da técnica. Se isso não for possível, dever-se-ão interpretar os resultados a que se chega com muito cuidado.

Nos casos considerados, em que há repetições e os delineamentos individuais são equilibrados, pode-se começar por aplicar o teste de Friedman ao conjunto da *rede*. A inexistência de interações específicas significativas a esse nível confirmará estar a *rede* implantada numa zona equipotencial de adaptação<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Região suficientemente homogénea em que se pode implantar uma rede de ensaios e na qual a ACRL pode ser aplicada.

Para uma *rede* polaca de 17 “ $\alpha$ -designs”, cada um com 4 super-blocos, contendo 5 blocos de 4 parcelas, em que se comparam 20 cultivares de centeio de Inverno, obteve-se  $F_b = 6,43$ . Como este valor não é significativo, considerou-se que a *rede* estava bem implantada. Adiante, na Secção 8.2, retomamos o estudo desta *rede de ensaios*, descrevendo-a então em mais detalhe. Reservaremos essa descrição para então, por julgarmos mais conveniente, já que trataremos nessa secção da selecção de cultivares.

Quando este primeiro teste é significativo, pode aplicar-se o teste ensaio a ensaio para detectar aqueles com interacções significativas aplicando, em seguida, a técnica descrita na Secção 4.3.

## 4.2 – Detecção, caso geral

Um método alternativo de detectar interacções específicas baseia-se nas bandas de confiança das regressões ajustadas. Assim, escolhido um nível de confiança, as produções que caírem fora da respectiva banda corresponderão a situações de interacção específica.

Nesta secção, admitiremos que se seguiu o método de ajustamento atrás descrito, para o caso geral de regressões lineares, representando por  $\mathbf{x}^b$  o vector de *índices ambientais*  $L_2$  ajustados. Sendo  $\mathbf{X}_j$  a sub-matriz de  $\mathbf{X} = [\mathbf{1}^b \ : \ \mathbf{x}^b]$ , cujas linhas correspondem aos blocos que contêm o  $j$ -ésimo cultivar e  $\mathbf{D}_j$  a matriz diagonal dos pesos desses blocos,  $j = 1, \dots, J$ , teremos

$$\begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_j \\ \tilde{\beta}_j \end{bmatrix} = (\mathbf{X}_j^T \mathbf{D}_j \mathbf{X}_j)^{-1} \mathbf{X}_j^T \mathbf{D}_j \mathbf{Y}_j^{b_j}, \quad j = 1, \dots, J, \quad (4.5)$$

sendo  $\mathbf{Y}_j^{b_j}$  o vector de produção para o  $j$ -ésimo cultivar (respeitando a convenção atrás introduzida para o caso de falhas). Com os  $p_{ij}, i = 1, \dots, b, j = 1, \dots, J$ , definidos como atrás, temos as somas dos quadrados dos resíduos para as regressões

$$S_j = \sum_{i=1}^b p_{ij} Y_{ij}^2 - \tilde{\alpha}_j \sum_{i=1}^b p_{ij} Y_{ij} - \tilde{\beta}_j \sum_{i=1}^b p_{ij} x_i Y_{ij}, \quad j = 1, \dots, J, \quad (4.6)$$

onde  $x_1, \dots, x_b$  são os *índices ambientais* ajustados. Podemos assumir que as somas  $S_j, j = 1, \dots, J$ , distribuem-se como os produtos de  $\sigma^2$  (admite-se que a variância do

erro é a mesma para todos os cultivares) por qui-quadrados centrais com  $b_j - 2$  graus de liberdade, sendo  $b_j$  o número de blocos em que o  $j$ -ésimo cultivar está presente,  $j = 1, \dots, J$ . Admitamos que os  $\mathbf{Y}_j^{b_j}$ ,  $j = 1, \dots, J$  são independentes e, conseqüentemente, que os  $S_j$ ,  $j = 1, \dots, J$ , também o são. Assim, de acordo com a reprodutibilidade do qui-quadrado, teremos

$$S = \sum_{j=1}^J S_j \sim \sigma^2 \chi_g^2, \quad (4.7)$$

isto é,  $S$  é o produto de  $\sigma^2$  por um qui-quadrado central com

$$g = \sum_{j=1}^J b_j - 2J \quad (4.8)$$

graus de liberdade. Por outro lado, ver Mexia (1995, pag. 75 e 76), os vectores de coeficientes estimados  $[\tilde{\alpha}_j, \tilde{\beta}_j]^T$ ,  $j = 1, \dots, J$  serão normais, com vectores médios  $[\alpha_j \quad \beta_j]^T$ ,  $j = 1, \dots, J$ , e matrizes de variância-covariância

$$\Sigma \left( \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_j \\ \tilde{\beta}_j \end{bmatrix} \right) = \sigma^2 (\mathbf{X}_j^T \mathbf{D}_j \mathbf{X}_j)^{-1}, \quad j = 1, \dots, J, \quad (4.9)$$

independentes entre si e das  $S_j$ ,  $j = 1, \dots, J$ , logo de  $S$ . Com

$$k_j(x) = [1 \quad x] (\mathbf{X}_j^T \mathbf{D}_j \mathbf{X}_j)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}; \quad j = 1, \dots, J, \quad (4.10)$$

$\tilde{\alpha}_j + \tilde{\beta}_j x$  serão normais, com valores médios  $\alpha_j + \beta_j x$  e variâncias  $\sigma^2 k_j(x)$ , independentes de  $S$ ,  $j = 1, \dots, J$ , definindo-se assim a estatística

$$t_j(x) = \frac{(\tilde{\alpha}_j + \tilde{\beta}_j x) - (\alpha_j + \beta_j x)}{\sqrt{k_j(x) \frac{S}{g}}}; \quad j = 1, \dots, J, \quad (4.11)$$

tendo esta distribuição  $t$  central com  $g$  graus de liberdade. Obtemos ao nível de confiança escolhido  $1 - \alpha$  as bandas de confiança  $(\tilde{\alpha}_j + \tilde{\beta}_j x) \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}, g} \sqrt{k_j(x) \frac{S}{g}}$ , com

$\left[ -t_{1-\frac{\alpha}{2}, g}; t_{1-\frac{\alpha}{2}, g} \right]$  o intervalo de confiança de nível  $1 - \alpha$ , centrado na origem para a

distribuição  $t$  com  $g$  graus de liberdade. Um ponto, ou seja, uma produção fora das bandas de confiança, corresponderá a uma interação específica, significativa ao nível

$\alpha$  . No caso de pontos "junto" dos limites, poderá reajustar-se as regressões, eliminando esses pontos e verificando se caíram fora ou não das novas bandas.

O tratamento aqui descrito, mais pesado do que o da secção anterior, é necessário nos casos em que os delineamentos não são equilibrados.

### 4.3 – Ajustamento na presença de interacções específicas

Uma vez detectadas as interacções específicas, por qualquer um dos métodos referidos anteriormente, podem-se eliminar as produções que originam tais interacções e utilizar os *índices ambientais*  $L_2$ , para efectuar o ajustamento. Ao contrário do método clássico, ver Gusmão et al. (1992a), agora só se eliminam os casos em que se verifica existirem interacções significativas, sem se ter o risco de pôr de parte ensaios completos.

Esta é uma melhoria da situação que tínhamos quando eram usados *índices ambientais clássicos*, pois tínhamos que eliminar blocos, sempre que, para um ou mais dos cultivares presentes, eram detectadas interacções específicas significativas.

A existência de interacções específicas pode abrir interessantes campos de estudo, visto que produções irregularmente altas ou baixas podem indicar reacções diferentes entre cultivares a condições específicas.

As novas regressões são chamadas, seguindo Gusmão et al. (1992a), de regressões rectificadas.

Do que foi dito anteriormente, resulta um pior ajustamento das regressões conjuntas na presença de *interacção específica*. No trabalho de Gusmão et al. (1992a), além do estudo da detecção de interacções específicas, propõe-se um método para ajustamento das regressões na presença de interacções específicas significativas - método das regressões conjuntas rectificadas. Este método baseia-se no seguinte procedimento:

- 1- ajustamento de regressões conjuntas;
- 2- identificação de situações de interacção específica;
- 3- ajustamento das regressões rectificadas, por exclusão dos dados referentes aos pares (cultivares , ensaios), para os quais se detectaram interacções específicas (primeiro passo);

4- ajustamento de novas regressões conjuntas, com base na matriz corrigida<sup>2</sup>.

O primeiro passo é executado, como atrás se referiu, aplicando-se uma das técnicas apresentadas para detectar situações de interacção específica. Em seguida, eliminam-se os dados correspondentes aos pares (cultivares , ensaios) para os quais se detectaram as interações específicas e ajustam-se, também pelo *algoritmo ziguezague*, as regressões rectificadas. Obtemos, assim, as regressões corrigidas de primeiro passo, ajustadas a partir da matriz reduzida<sup>3</sup>. Estas regressões são utilizadas para estimar a matriz corrigida.

Assim, sejam  $(\tilde{\alpha}_j, \tilde{\beta}_j)$  para  $j = 1, \dots, \ell < J$ , os coeficientes ajustados para as regressões de primeiro passo. Estes coeficientes ajustados são obtidos a partir da matriz reduzida e serão utilizados para calcular os valores corrigidos, para situações de interacção específica.

Consideremos um bloco pertencente a um ensaio onde existem interações específicas significativas. Seja C o conjunto dos índices dos cultivares para os quais, no mesmo ensaio, não foi detectada interacção específica significativa e sendo  $\#(C)$  o cardinal de C, tomar-se-á

$$\tilde{\alpha}(C) = \frac{1}{\#(C)} \sum_{j \in C} \tilde{\alpha}_j \quad (4.12)$$

e

$$\tilde{\beta}(C) = \frac{1}{\#(C)} \sum_{j \in C} \tilde{\beta}_j, \quad (4.13)$$

com o objectivo de estimar

$$\alpha(C) = \frac{1}{\#(C)} \sum_{j \in C} \alpha_j \quad (4.14)$$

e

$$\beta(C) = \frac{1}{\#(C)} \sum_{j \in C} \beta_j. \quad (4.15)$$

Já que, pelo menos, um cultivar tem interacção específica, no ensaio a que pertence o bloco, não se utilizará, mesmo no caso completo, a média de produção de todos os cultivares no bloco, para estimar o respectivo *índice ambiental*.

<sup>2</sup> A matriz corrigida é obtida substituindo na matriz inicial os dados correspondentes aos pares (cultivares , ensaios), para os quais foram detectadas *interações específicas* pelos valores corrigidos adiante estimados.

<sup>3</sup> Matriz reduzida é obtida da matriz inicial eliminando os dados referentes aos pares (cultivares , ensaios) para os quais foi detectada interacção específica.

Com o objectivo de estimar  $x$  (*índice ambiental* de um dos blocos do ensaio), consideremos  $Y(C)$  a média das produções dos cultivares sem interacção específica; logo, com índices em  $C$ , admitamos que, nesse bloco

$$Y(C) \approx \tilde{\alpha}(C) + \tilde{\beta}(C)x, \quad (4.16)$$

o que justifica estimar-se  $x$  através de

$$\tilde{x} = \frac{Y(C) - \tilde{\alpha}(C)}{\tilde{\beta}(C)}, \quad (4.17)$$

obtendo-se então os valores corrigidos

$$\tilde{Y}_j = \tilde{\alpha}_j + \tilde{\beta}_j \tilde{x}, \quad j \notin C, \quad (4.18)$$

para as produções, nesse bloco, dos cultivares para os quais, nesse ensaio, foram detectadas interações específicas. Estes valores são integrados na matriz corrigida, substituindo os dados correspondentes aos cultivares com interações específicas, ajustando-se em seguida as novas regressões, denominadas regressões conjuntas rectificadas.

Este método foi aplicado a uma *rede de ensaios de Triticale*, ver de novo Gusmão, et al. (1992a), onde se detectaram interações específicas significativas através do teste de Friedman, constatando-se que os resultados sofreram um apreciável aumento de precisão, o que pode ser atribuído à eliminação das interações.

Pode-se prosseguir com o processo de iteração, no intuito de que um mais correcto ajustamento das regressões conjuntas poderia, possivelmente, pôr em evidência situações de interacção específica, ocultas na primeiro passo.

Observe-se, ainda, que o método das regressões conjuntas rectificadas pode ser aplicado para prever o comportamento relativo da produção da coorte de cultivares, sob diferentes ambientes, dentro da mesma zona equipotencial de adaptação. O método permite actuar a dois níveis:

- o primeiro nível permite considerar as situações de interacção específica detectadas;
- o segundo nível utiliza as regressões conjuntas rectificadas, e pode ser usado para estimar o comportamento relativo da produção de cultivares, para diferentes *índices ambientais*, desde que se ignorem as interações específica detectadas.

## 5 - Contorno superior e selecção

### 5.1 - Geometria do contorno superior

A utilização do contorno superior definido pelas regressões lineares ajustadas para selecção de cultivares foi introduzida por Mexia et al. (1997). A discussão desta secção segue de perto a desse trabalho, já que a geometria do contorno não depende do peso e da completação dos blocos. Sejam

$$\tilde{Y}_j = \tilde{\alpha}_j + \tilde{\beta}_j x; \quad j = 1, \dots, J \quad (5.1)$$

as regressões ajustadas e  $[c; d]$  o intervalo cujos extremos são o menor e o maior dos *índices ambientais* (agora serão ajustados, no tratamento inicial podia dizer-se observados dado tratar-se de médias).

Dado as regressões ajustadas serem lineares, o contorno superior conjunto será uma poligonal composta por troços, que pertencem a essas regressões e em que as intersecções ocorrem quando duas rectas ajustadas se intersectam. Estas intersecções delimitam sub-intervalos, que correspondem aos cultivares com máxima produção para os valores do *índice ambiental*, no sub-intervalo correspondente.

Os cultivares que integram o contorno superior, tendo produções máximas para certos valores do *índice ambiental*, devem ser seleccionados. Diremos que esses cultivares são *dominantes*. Os restantes cultivares deverão ser comparados com os *dominantes* para ver se estão significativamente "*dominados*" pelos do contorno superior ao longo o intervalo  $[c; d]$ , devendo nesse caso ser eliminados.

Comecemos por estabelecer a

#### **Proposição 7.**

O contorno superior é convexo.

*Dem.*: Quando duas rectas com declives diferentes se cruzam, aquela com menor [maior] coeficiente angular fica por "cima", à esquerda [direita]. Assim, os coeficientes angulares dos troços, que constituem o contorno superior, crescem da esquerda para a direita, o que estabelece a tese.  $\square$

Ordenam-se as regressões ajustadas, por ordem decrescente dos seus coeficientes angulares, de forma que  $\tilde{\beta}_1 \geq \tilde{\beta}_2 \geq \dots \geq \tilde{\beta}_J$  e, quando  $\tilde{\beta}_j = \tilde{\beta}_{j+1}$ , ter-se-á

$\tilde{\alpha}_j > \tilde{\alpha}_{j+1}$ . Daqui para a frente, os cultivares serão referidos pelo índice da regressão correspondente. Observe-se que, se houver um grupo de rectas ajustadas com idêntico coeficientes angulares, apenas a primeira do grupo poderá integrar o contorno superior, já que com  $\tilde{\beta}_j = \tilde{\beta}_{j+1}$  e  $\tilde{\alpha}_j > \tilde{\alpha}_{j+1}$ , apenas o cultivar  $j$  pode ser dominante, visto que

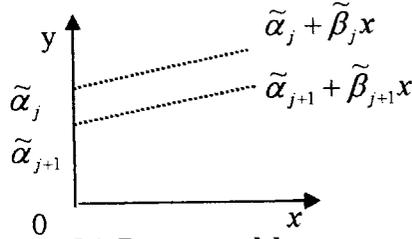


Figura 5.1. Rectas paralelas.

e, como se pode ver na Figura 5.1, temos um par de rectas paralelas.

Quando  $\tilde{\beta}_j \neq \tilde{\beta}_{j'}$ , a abcissa da intersecção das duas rectas é dada por

$$\tilde{\theta}_{j,j'} = \frac{\tilde{\alpha}_j - \tilde{\alpha}_{j'}}{\tilde{\beta}_{j'} - \tilde{\beta}_j}; \quad j \neq j', \quad (5.2)$$

sendo este o valor de separação para *índices ambientais*, em que um dos cultivares do par é superior ao outro. Com  $j' < j$  ter-se-á

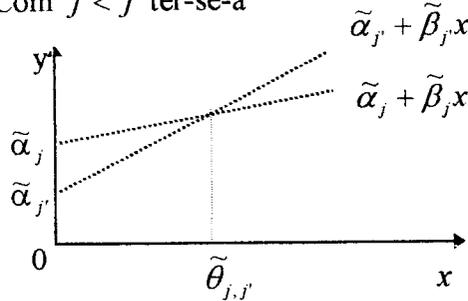


Figura 5.2. Abcissa da intersecção entre rectas ajustadas com índices  $j$  e  $j'$ .

Sendo  $\bar{\theta}_1 = \text{Max}\{\tilde{\theta}_{1,j}; j = 2, \dots, J\}$ , se  $\bar{\theta}_1 > d$  pelo menos uma das rectas ajustadas,  $\tilde{Y}_j = \tilde{\alpha}_j + \tilde{\beta}_j x; j = 2, \dots, J$ , permanece “por cima” de  $\tilde{Y}_1 = \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\beta}_1 x$ , em todo o intervalo  $[c; d]$ , pelo que o primeiro cultivar não pode ser dominante. Com  $J = 3$  ter-se-ia, por exemplo, uma situação do tipo

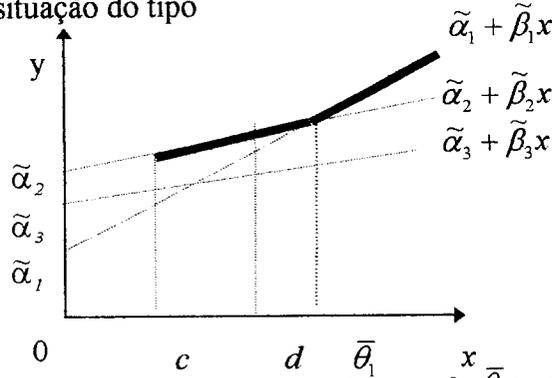


Figura 5.3. Traçado do contorno superior quando  $\bar{\theta}_1 > d$ .

em que o cultivar 2 é dominante em todo o intervalo  $[c; d]$  dos *índices ambientais* ajustados. Pelo contrário, se  $c < \bar{\theta}_1 < d$ , então, no intervalo  $[\bar{\theta}_1; d]$ , ter-se-á

$$\tilde{\alpha}_j + \tilde{\beta}_j x < \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\beta}_1 x, \quad j = 2, \dots, J \quad (5.3)$$

e haverá, além do primeiro, um ou mais cultivares dominantes. Por exemplo, também com  $J = 3$ , pode ter-se a situação apresentada na figura seguinte

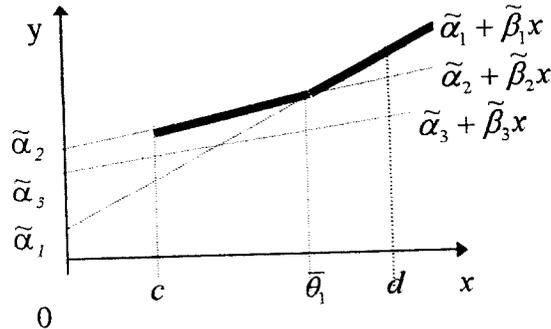


Figura 5.4. Traçado do contorno superior quando  $c < \bar{\theta}_1 < d$ .

em que os cultivares 1 e 2 são dominantes.

Finalmente, se  $\bar{\theta}_1 < c$ , apenas o primeiro cultivar será dominante, obtendo-se com  $J = 3$ :

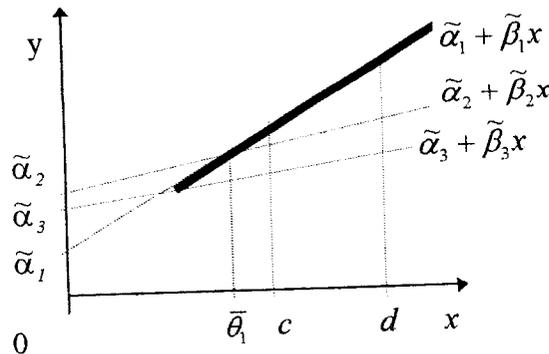


Figura 5.5. Traçado do contorno superior quando  $\bar{\theta}_1 < c$ .

Observe-se que estas figuras reflectem apenas alguns exemplos possíveis, não se tendo pretendido ser exaustivo. Assim, para além de nos três casos se tomar  $J = 3$ , teve-se sempre  $\tilde{\theta}_{1,3} < \tilde{\theta}_{1,2}$ , o que poderá não se verificar.

Podemos concluir da discussão anterior que, qualquer que seja  $J$ :

- se  $\bar{\theta}_1 < c$ , o contorno superior reduz-se à primeira recta de regressão ajustada;
- se  $\bar{\theta}_1 > d$ , o cultivar 1 não é dominante, ter-se-á de considerar o intervalo  $[c; d]$  e as regressões com índices  $j = 2, \dots, J$ ;

- se  $c < \bar{\theta}_1 < d$ , haverá mais de um cultivar dominante, ou seja, o contorno superior conterá a primeira regressão, mas não se reduz só a ela. No intervalo  $[c; \bar{\theta}_1]$ , o cultivar 1 não tem produções ajustadas maiores e haverá que procurar outros cultivares dominantes. Temos que repetir o procedimento para o intervalo  $[c; \bar{\theta}_1]$  e, se  $\bar{\theta}_1 = \tilde{\theta}_{1,j'}$ , para os cultivares com índices,  $j = j', \dots, J$ , maiores que o do cultivar que intersecta o primeiro cultivar.

Estabelecemos a

**Proposição 8.**

Se  $\bar{\theta}_1 = \tilde{\theta}_{1,j'}$  e para  $j \neq 1, j'$ ,  $\tilde{\theta}_{1,j'} > \tilde{\theta}_{1,j}$  o cultivar  $j'$  é dominante.

*Dem.:* A tese resulta de se ter  $\tilde{\alpha}_{j'} + \tilde{\beta}_{j'}x > \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\beta}_1x > \tilde{\alpha}_j + \tilde{\beta}_jx$ , sempre que  $\tilde{\theta}_{1,j} < x < \tilde{\theta}_{1,j'}$ , e que  $j \neq 1, j'$ . □

Quando em  $x = \bar{\theta}_1$ , mais do que uma das regressões  $\tilde{\alpha}_j + \tilde{\beta}_jx$ ,  $j = 2, \dots, J$ , intersecta  $\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\beta}_1x$ , sendo  $j'$  o maior índice das regressões que se intersectam.

Temos agora,

**Proposição 9.**

Se  $j'$  é o maior índice para o qual  $\bar{\theta}_1 = \tilde{\theta}_{1,j'}$ , o cultivar  $j'$  é dominante.

*Dem.:* Começamos observando que  $\tilde{\beta}_{j'} < \tilde{\beta}_1$ , desde que  $\tilde{\alpha}_{j'} + \tilde{\beta}_{j'}x$  e  $\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\beta}_1x$  se intersectem. Além disso, se  $1 < j < j'$ ,  $\tilde{\beta}_{j'} < \tilde{\beta}_j$ ,  $j = 2, \dots, j'-1$ , já que doutra forma se teria  $\tilde{\alpha}_{j'} < \tilde{\alpha}_j$  e  $\tilde{\theta}_{1,j'} < \tilde{\theta}_{1,j}$ , o que é impossível, visto que  $\tilde{\theta}_{1,j'} = \bar{\theta}_1$ . Sendo  $\varphi$  o conjunto de índices das regressões que intersectam  $\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\beta}_1x$  em  $\bar{\theta}_1$ , o maior índice em  $\varphi$  é claramente  $j'$ , se  $j$  é outro índice em  $\varphi$ , tem-se  $\tilde{\beta}_{j'} < \tilde{\beta}_j$ , vindo  $\tilde{\alpha}_j + \tilde{\beta}_jx < \tilde{\alpha}_{j'} + \tilde{\beta}_{j'}x$ , para  $x < \bar{\theta}_1$  e  $j \in \varphi$ . Por último, quando  $j \notin \varphi$ ,  $\tilde{\theta}_{1,j} < \tilde{\theta}_{1,j'} = \bar{\theta}_1$ , e, sempre que  $\tilde{\theta}_{1,j} < x < \tilde{\theta}_{1,j'} = \bar{\theta}_1$ , verifica-se  $\tilde{\alpha}_{j'} + \tilde{\beta}_{j'}x > \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\beta}_1x > \tilde{\alpha}_j + \tilde{\beta}_jx$ . Assim, à esquerda de  $\bar{\theta}_1$ , haverá um intervalo de dominância para o cultivar  $j'$ . □

De seguida temos

**Proposição 10.**

Quando  $1 < j < j'$ , com  $j'$  o maior índice no conjunto  $\varphi$ , definido acima, o cultivar  $j$  não é dominante.

*Dem.:* Se  $j \in \varphi$  vimos que, para  $x > \bar{\theta}_1$  tem-se  $\tilde{\alpha}_j + \tilde{\beta}_j x < \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\beta}_1 x$  e, para  $x < \bar{\theta}_1$  tem-se  $\tilde{\alpha}_j + \tilde{\beta}_j x < \tilde{\alpha}_{j'} + \tilde{\beta}_{j'} x$ ; assim, o cultivar  $j$  não será dominante. Se  $j \notin \varphi$  teremos  $\tilde{\beta}_{j'} < \tilde{\beta}_j$  e  $\tilde{\theta}_{1,j} < \tilde{\theta}_{1,j'}$  de forma que, para  $x > \tilde{\theta}_{1,j}$ , verifica-se  $\tilde{\alpha}_j + \tilde{\beta}_j x < \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\beta}_1 x$ . Por último, como  $\tilde{\theta}_{1,j} < \tilde{\theta}_{1,j'}$ ,  $\tilde{\alpha}_{j'} + \tilde{\beta}_{j'} \tilde{\theta}_{1,j'} = \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\beta}_1 \tilde{\theta}_{1,j'} > \tilde{\alpha}_j + \tilde{\beta}_j \tilde{\theta}_{1,j'}$  e, atendendo a  $\tilde{\beta}_{j'} < \tilde{\beta}_j$ , teremos  $\tilde{\theta}_{1,j'} \leq \tilde{\theta}_{1,j}$ , assim como  $\tilde{\alpha}_j + \tilde{\beta}_j x < \tilde{\alpha}_{j'} + \tilde{\beta}_{j'} x$  para  $x < \tilde{\theta}_{1,j'}$ , pelo que o cultivar  $j$  não pode ser dominante.  $\square$

Graficamente esta demonstração pode ser esquematizada da seguinte forma

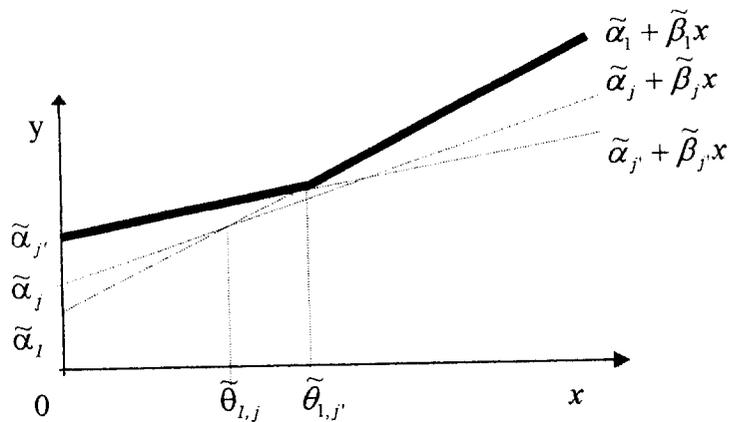


Figura 5.6. Traçado do contorno superior com dois cultivares dominantes.

Os resultados precedentes permitem restringir-nos aos cultivares  $j = j', \dots, J$ , sendo  $j'$  o maior índice em  $\varphi$ , e para o sub-intervalo  $[c, \bar{\theta}_1]$ , procedemos como anteriormente, para obter um segundo cultivar dominante e assim sucessivamente.

## 5.2 - Comparação e selecção de cultivares

Até agora, temos seguido de perto o trabalho inicial de Mexia et al. (1997), atrás referido, no uso do contorno superior. Nesse trabalho utilizavam-se os *índices ambientais clássicos*, mas a partir de agora o nosso tratamento irá diferir do

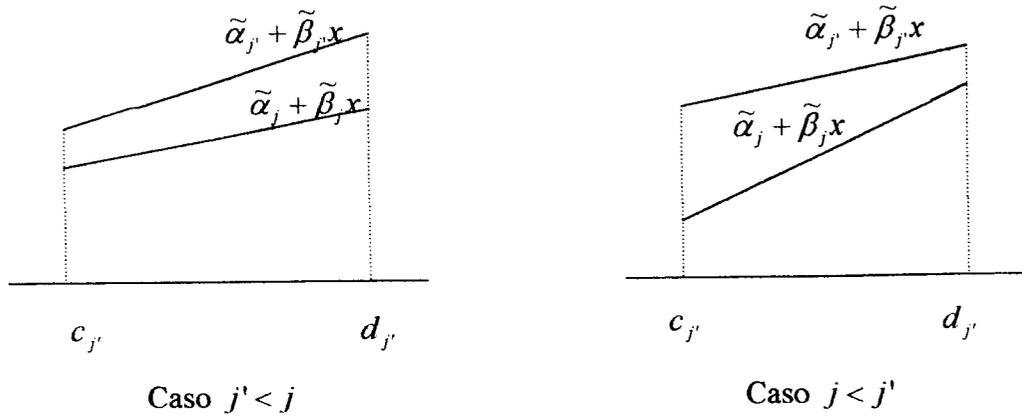
apresentado. Nesta secção, passamos a admitir que se utilizaram *índices ambientais*  $L_2$ , sendo os mesmos componentes de  $\mathbf{x}^b$ .

Usaremos a mesma notação da Secção 4.2 e assumimos que

$$\begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_j \\ \tilde{\beta}_j \end{bmatrix} \sim N \left( \begin{bmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \end{bmatrix} ; \sigma^2 \mathbf{W}_j \right); j = 1, \dots, J, \quad (5.4)$$

com  $\mathbf{W}_j = (\mathbf{X}_j^T \mathbf{D}_j \mathbf{X}_j)^{-1}$ ,  $j = 1, \dots, J$ , independente de  $S \sim \sigma^2 \chi_g^2$  onde, como anteriormente,  $g = \sum_{j=1}^J b_j - 2J$ .

Se  $j'$  o índice dum dos cultivares dominantes e  $[c_{j'}; d_{j'}]$  o respectivo intervalo de dominância, teremos o caso  $j' < j$  ou  $j < j'$ . Tem-se, então



Vê-se, facilmente, que quando  $j' < j$  [ $j < j'$ ] as duas rectas estão mais próximas, se nos restringirmos a  $c_{j'} \leq x \leq d_{j'}$ , para  $x = c_{j'}$  [ $x = d_{j'}$ ]. Assim, para compararmos os cultivares  $j'$  e  $j$ , somos levados, caso  $j' < j$ , a testar a hipótese

$$H_{0,j,j'} : \alpha_j + \beta_j c_{j'} = \alpha_{j'} + \beta_{j'} c_{j'} \quad (5.5)$$

contra

$$H_{1,j,j'} : \alpha_j + \beta_j c_{j'} < \alpha_{j'} + \beta_{j'} c_{j'}; \quad (5.6)$$

quando se verificar  $j' > j$ , somos levados a testar a hipótese

$$H_{0,j,j'} : \alpha_j + \beta_j d_{j'} = \alpha_{j'} + \beta_{j'} d_{j'} \quad (5.7)$$

contra

$$H_{1,j,j'} : \alpha_j + \beta_j d_{j'} < \alpha_{j'} + \beta_{j'} d_{j'}. \quad (5.8)$$

No caso do primeiro [último] cultivar dominante  $d_{j'} = d$  [ $c_{j'} = c$ ] e só se considera o primeiro [segundo] par de hipóteses. Estes testes são casos particulares de para um dado  $x_0$

$$\begin{cases} H_{0,j,j'}(x_0): U_j(x_0) = U_{j'}(x_0) \\ H_{1,j,j'}(x_0): U_j(x_0) < U_{j'}(x_0) \end{cases} \quad (5.9)$$

com

$$U_\ell(x_0) = \alpha_\ell + \beta_\ell x_0, \quad \ell = 1, \dots, J. \quad (5.10)$$

Considerando

$$\begin{cases} k_\ell(x_0) = [1 \quad x_0] \mathbf{W}_\ell \begin{bmatrix} 1 \\ x_0 \end{bmatrix}; \quad \ell = 1, \dots, J \\ \tilde{U}_\ell(x_0) = \tilde{\alpha}_\ell + \tilde{\beta}_\ell x_0, \quad \ell = 1, \dots, J \end{cases} \quad (5.11)$$

usaremos a estatística de teste  $t$

$$t_{j,j'}(x_0) = \frac{(\tilde{\alpha}_{j'} + \tilde{\beta}_{j'} x_0) - (\tilde{\alpha}_j + \tilde{\beta}_j x_0)}{\sqrt{\frac{S}{g}(k_j(x_0) + k_{j'}(x_0))}}. \quad (5.12)$$

Como os  $\tilde{U}_\ell(x_0)$  serão normais com valores médios  $U_\ell(x_0)$  e variâncias  $\sigma^2 k_\ell(x_0)$ ,  $\ell = 1, \dots, J$ , independentes entre si e de  $S \sim \sigma^2 \chi_g^2$  vemos que, quando  $H_{0,j,j'}(x_0)$  se verifica,  $t_{j,j'}(x_0)$  tem distribuição  $t$  central com  $g$  graus de liberdade. Assim, podemos usar testes  $t$  unilaterais direitos, ou, se queremos obter uma maior robustez, podemos aplicar os métodos de comparação múltipla, como os de Scheffé e Bonferroni. Então, ver Scheffé (1959, pg. 66 a 70), sendo  $f_{1-\alpha, r, g}$  o valor crítico da distribuição  $F$  ao nível de significância  $\alpha$ , com  $r$  e  $g$  graus de liberdade, os  $U_1(x_0), \dots, U_{j'-1}(x_0)$ , tais que

$$|\tilde{U}_j(x_0) - \tilde{U}_{j'}(x_0)| > \sqrt{(j'-1)(k_j(x_0) + k_{j'}(x_0))} f_{1-\alpha, j'-1, g} \frac{S}{g}; \quad j = 1, \dots, j'-1 \quad (5.13)$$

são conjunta e significativamente inferiores a  $U_{j'}(x_0)$  ao nível  $\alpha$ , e os  $U_{j'+1}(x_0), \dots, U_J(x_0)$ , tais que

$$|\tilde{U}_j(x_o) - \tilde{U}_{j'}(x_o)| > \sqrt{(J-j')(k_j(x_o) + k_{j'}(x_o)) f_{1-\alpha, J-j', g} \frac{S}{g}} ; j = j'+1, \dots, J \quad (5.14)$$

são conjunta e significativamente inferiores a  $U_{j'}(x_o)$  ao nível  $\alpha$ . Observe-se que todas as diferenças significativas se verificam conjuntamente ao mesmo nível de significância  $\alpha$ . Os factores  $j'-1$  e  $J-j'$  surgem, ver Scheffé (1959, pg.68), da possibilidade de usar, em vez de valores ajustados, as diferenças entre estes valores e as suas médias, decrescendo de 1 o número de valores linearmente independentes a serem comparados.

Quando queremos usar o método de Bonferroni, (cf. Seber, (1977)), as quantidades  $\sqrt{(j'-1)f_{1-\alpha, j'-1, g}}$  e  $\sqrt{(J-j')f_{1-\alpha, J-j', g}}$ , nas desigualdades (5.13) e (5.14), devem ser substituídas pelos valores críticos da distribuição de  $t$ , com  $g$  graus de liberdade, nos níveis de significância  $\frac{\alpha}{2(j'-1)}$  e  $\frac{\alpha}{2(J-j')}$ , respectivamente.

No caso completo, podemos usar também, ver Scheffé (1959, pg. 73), o método de Tukey. Então, os  $U_1(x_o), \dots, U_{j'-1}(x_o)$  para os quais se verifica

$$|\tilde{U}_j(x_o) - \tilde{U}_{j'}(x_o)| > T_{1-\alpha, j', g} \sqrt{k(x_o) \frac{S}{g}} ; j = 1, \dots, j'-1, \quad (5.15)$$

onde  $T_{1-\alpha, k, g}$  é o quantil para a probabilidade  $1-\alpha$  da amplitude Studentizada com  $k$  e  $g$  graus de liberdade, são conjunta e significativamente inferiores a  $U_{j'}(x_o)$  ao nível  $\alpha$ .

Por último, os  $U_{j'+1}(x_o), \dots, U_J(x_o)$  tais que

$$|\tilde{U}_j(x_o) - \tilde{U}_{j'}(x_o)| > T_{1-\alpha, J-j'+1, g} \sqrt{k(x_o) \frac{S}{g}} ; j = j'+1, \dots, J, \quad (5.16)$$

são conjunta e significativamente inferiores a  $U_{j'}(x_o)$  ao nível  $\alpha$ . Observe-se que, no caso completo  $\mathbf{X}_\ell = \mathbf{X} = [\mathbf{1}^b, \mathbf{x}^b]$ ,  $\ell=1, \dots, J$ , os coeficientes  $k_\ell(x_o)$ ,  $\ell=1, \dots, J$  são iguais.

Para medir a eficiência de selecção, podemos usar os seguintes quocientes

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1 = \frac{\text{Número de cultivares dominantes}}{\text{Número de cultivares}} = \frac{L}{J} \\ r_2 = \frac{\text{Número de cultivares não dominados}}{\text{Número de cultivares}} = \frac{K}{J} \end{array} \right.$$

### 5.3 – Intervalos de dominância

Vimos na Secção 5.1 que, aos cultivares dominantes correspondem intervalos de variação dos *índices ambientais*, nos quais as suas produções ajustadas são máximas. Os extremos desses intervalos correspondem às intersecções de regressões lineares no contorno superior, ou seja, são onde as rectas ajustadas para os cultivares dominantes se intersectam. Um primeiro estudo das intersecções das regressões ajustadas foi efectuado por Mexia et al. (1996).

O método dos perfis será agora utilizado para melhorar, no caso completo, a estimação das abcissas de tais intersecções. Este método, ver McCullagh & Tibshirani (1990), é baseado na standardização do gradiente da função logaritmo da verosimilhança e permite melhorar os estimadores de máxima verosimilhança de parâmetros  $\psi^r$ , na presença de parâmetros perturbadores  $\lambda^s$ . O logaritmo da verosimilhança  $\ell(\psi^r, \lambda^s)$  é primeiro maximizado, enquanto função de  $\lambda^s$  para  $\psi^r$  fixo. Obtém-se, assim, um estimador condicional  $\hat{\lambda}_{\psi^r}^s$ , o que, por substituição no logaritmo da verosimilhança, permite obter a função de perfil

$$\ell_p(\psi^r) = \ell(\psi^r, \hat{\lambda}_{\psi^r}^s). \quad (5.17)$$

Em seguida, standardiza-se o  $\text{grad}(\ell_p(\psi^r))$ . No caso em que  $r = 1$ , que é o caso que nos interessa, começa por calcular-se

$$V(\psi) = \frac{d\ell_p(\psi)}{d\psi}, \quad (5.18)$$

de forma a obter-se o gradiente standardizado

$$\dot{V}(\psi) = w(\psi)^{-1}(V(\psi) - m(\psi)), \quad (5.19)$$

onde  $m(\psi)$  e  $w(\psi)$  são o valor médio e o desvio padrão de  $V(\psi)$ , calculados no ponto  $(\psi, \hat{\lambda}_{\psi}^s)$ . Estes momentos são obtidos em condições muito gerais em Durban & Currie (2000).

Vejamos como aplicar esta abordagem ao problema que nos interessa. Para aligeirar a escrita consideremos um par de regressões a que damos os índices 1 e 2 e standardizamos os *índices ambientais* de forma a ter-se  $\sum_{i=1}^b p_i x_i = 0$  e  $\sum_{i=1}^b p_i x_i^2 = b$ .

Uma vez realizada a estimação, é fácil de inverter a estandardização, regressando aos índices originais. A abcissa da intersecção é dada por

$$\theta = -\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\beta_2 - \beta_1}, \quad (5.20)$$

enquanto que  $\lambda = \beta_2 - \beta_1$ , é o parâmetro perturbador. Por causa das restrições nos  $x_1, \dots, x_b$ , teremos

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_i \\ \hat{\beta}_i \end{bmatrix} \sim N \left( \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix}, \frac{\sigma^2}{b} I_2 \right); \quad i = 1, 2, \quad (5.21)$$

e como estes estimadores são independentes, temos

$$\begin{bmatrix} (\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_1) \\ (\hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2) \end{bmatrix} \sim N \left( \begin{bmatrix} (\beta_2 - \beta_1) \\ (\alpha_1 - \alpha_2) \end{bmatrix}, \frac{2\sigma^2}{b} I_2 \right). \quad (5.22)$$

Assim, o problema reduz-se à estimação do quociente dos valores médios de duas variáveis normais, independentes com a mesma variância. Este problema foi estudado por Currie & Durban (2000), que mostraram ter de se maximizar

$$\dot{V}(\theta) = \ell_p(\theta) - \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{2\ell_p(\theta)}{1 + b(z_1^2 + z_2^2)} \right) \quad (5.23)$$

com  $z_1 = \hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_1$ ,  $z_2 = \hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2$  e

$$\ell_p(\theta) = -\frac{b}{2(1+\theta^2)} (z_2 - \theta z_1)^2 < 0, \quad (5.24)$$

para obter o estimador. Tomando  $c = 1 + b(z_1^2 + z_2^2)$  e

$$g(u) = u - \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{2u}{c} \right), \quad (5.25)$$

tem-se

$$\dot{V}(\theta) = g(\ell_p(\theta)), \quad (5.26)$$

vindo

$$\frac{d\dot{V}(\theta)}{d\theta} = \left( \frac{dg}{du} \right)_{u=\ell_p(\theta)} \frac{d\ell_p(\theta)}{d\theta}. \quad (5.27)$$

Assim, somos levados a resolver a equação  $\frac{d\ell_p(\theta)}{d\theta} = 0$ .

Como

$$\frac{d\ell_p(\theta)}{d\theta} = \frac{b(z_2 - \theta z_1)(\theta z_2 + z_1)}{(1 + \theta^2)^2} \quad (5.28)$$

a equação tem as soluções  $\frac{z_2}{z_1}$  e  $-\frac{z_1}{z_2}$ , a primeira das quais corresponde ao resultado atrás obtido. Validamos, assim, o nosso tratamento anterior.

#### **5.4 – Comparação dos índices ambientais clássicos e dos índices ambientais $L_2$ no caso completo**

Na Secção 3.8, utilizamos um conjunto de dados para mostrar que, no caso completo, pode haver uma boa concordância entre os resultados obtidos, utilizando os *índices ambientais clássicos* e os *índices ambientais  $L_2$* .

Vamos, agora, utilizar o mesmo conjunto de dados para comparar os dois tipos de *índices ambientais*, através da aplicação do método do contorno superior, atrás introduzido.

Nas figuras 5.8 e 5.9 são apresentados os contornos superiores para os *índices ambientais clássicos* e  $L_2$ .

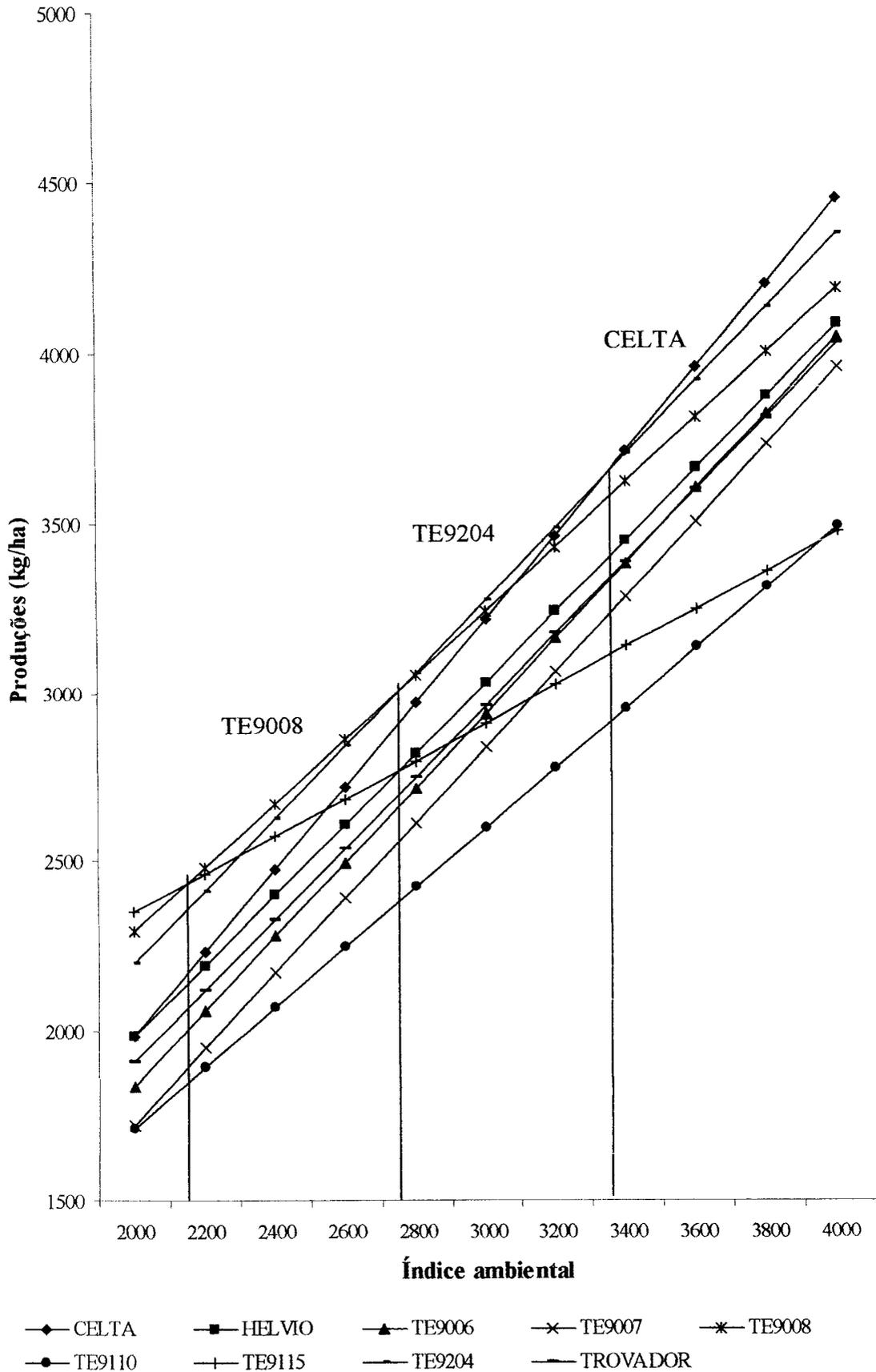


Figura 5.8. Análise conjunta de regressões com *índices ambientais* clássicos.

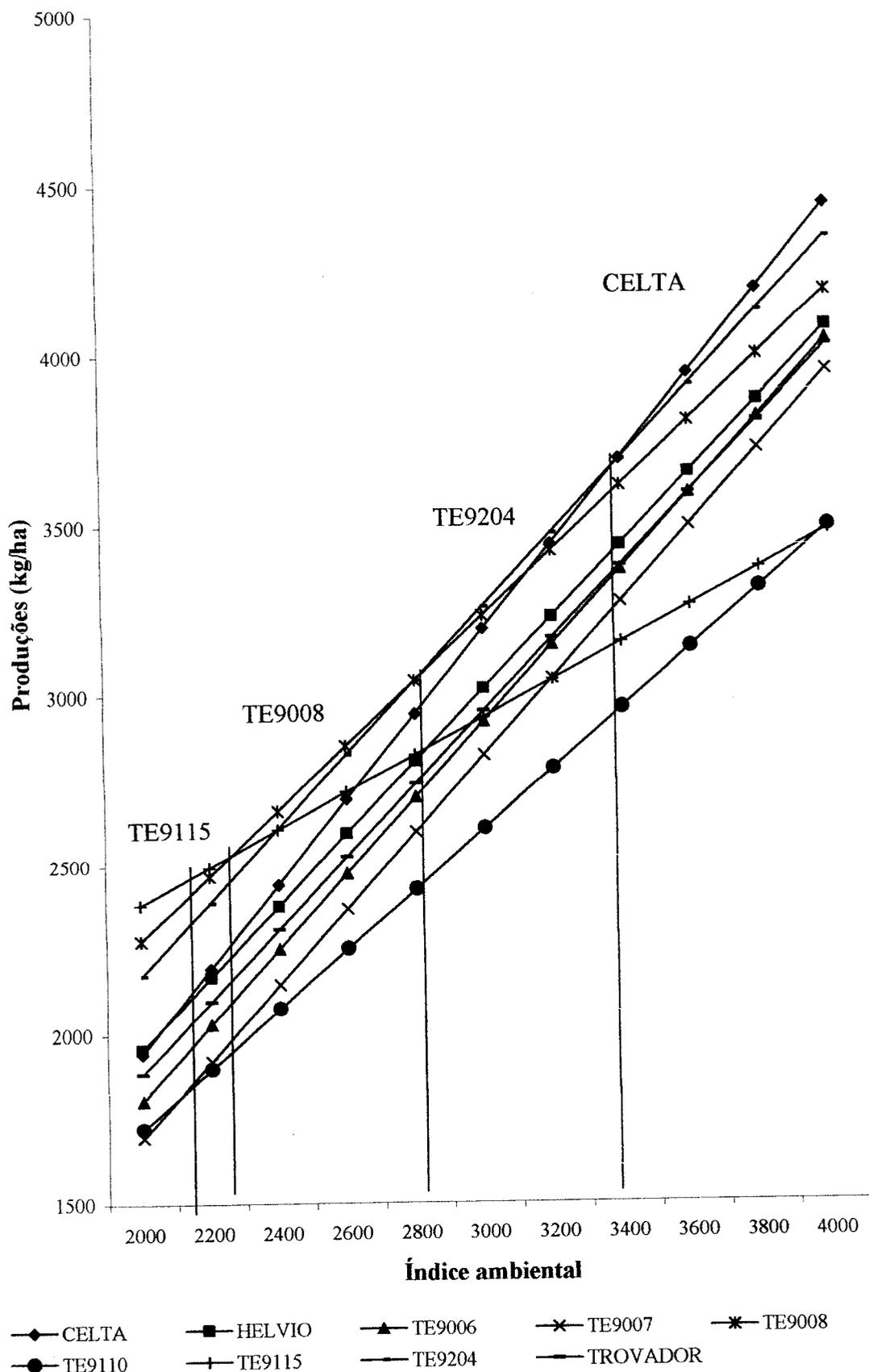


Figura 5.9. Análise conjunta de regressões com *índices ambientais*  $L_2$ .

Na Tabela 5.1 encontram-se os resultados a que a selecção, utilizando uns e outros *índices ambientais*, conduz, quando se aplicam testes *t* unilaterais direitos (valores significativos ao nível de 5% de probabilidade de erro).

Tabela 5.1. Cultivares dominantes e (significativamente) dominados.

<i>Índices ambientais clássicos</i>			<i>Índices ambientais L<sub>2</sub></i>		
Cultivares dominantes	Intervalos de dominância	Cultivares dominados	Cultivares dominantes	Intervalos de dominância	Cultivares dominados
CELTA	[3349.66;8838.49]	TE9006 TE9007 TE9110 TE9115 TROVADOR	CELTA	[3396.37;8838.49]	TE9006 TE9007 TE9110 TE9115 TROVADOR
TE9204	[2747.73;3349.66]	TE9006 TE9007 TE9110	TE9204	[2796.72;3396.37]	TE9006 TE9007 TE9110
TE9008	[2212.59;2743.7]	TE9007 TE9110	TE9008	[2265.95;2796.72]	TE9007 TE9110
			TE9115	[2212.59;2265.95]	TE9006 TE9007 TE9110

Observe-se que, tal como vem referido em Mexia et al. (1999), os *índices ambientais L<sub>2</sub>* manifestam um poder separador ligeiramente superior. Assim, mesmo num caso em que havia boa concordância os novos *índices ambientais* trouxeram vantagem. No entanto, os quocientes de eficiência são  $r_1 = \frac{3}{9}$  e  $r_2 = \frac{7}{9}$  para os *índices ambientais clássicos* e  $r_1 = \frac{4}{9}$  e  $r_2 = \frac{7}{9}$  para os *índices ambientais L<sub>2</sub>*.

Quando queremos obter uma maior robustez, utilizamos os métodos de comparação múltipla, tais como os de Scheffé e Bonferroni, e no caso completo podemos usar também o método de Tukey.

Para vermos quais os cultivares dominados pelos cultivares dominantes, utilizando os *índices ambientais clássicos*, efectuámos as seguintes comparações múltiplas:

- no ponto  $x_0 = 2212.59$  comparámos o cultivar TE9008 com os de menor declive ajustado;
- no ponto  $x_0 = 2747.73$  comparámos o cultivar TE9008 com os de maior declive ajustado;
- no ponto  $x_0 = 2747.73$  comparámos o cultivar TE9204 com os de menor declive ajustado;
- no ponto  $x_0 = 3349.66$  comparámos o cultivar TE9204 com os de maior declive ajustado;
- finalmente, no ponto  $x_0 = 3349.66$  comparámos o cultivar CELTA com os de menor declive ajustado.

Quando utilizamos os *índices ambientais*  $L_2$ , temos de efectuar as seguintes comparações múltiplas:

- no ponto  $x_0 = 2265.95$  comparámos o cultivar TE9115 com os de maior declive ajustado;
- no ponto  $x_0 = 2265.95$  comparámos o cultivar TE9008 com os de menor declive ajustado;
- no ponto  $x_0 = 2796.72$  comparámos o cultivar TE9008 com os de maior declive ajustado;
- no ponto  $x_0 = 2796.72$  comparámos o cultivar TE9204 com os de menor declive ajustado;
- no ponto  $x_0 = 3396.37$  comparámos o cultivar TE9204 com os de maior declive ajustado;
- finalmente, no ponto  $x_0 = 3396.37$  comparámos o cultivar CELTA com os de menor declive ajustado.

As comparações foram efectuadas usando os métodos de Scheffé, Bonferroni e Tukey.

Na Tabela 5.2, encontram-se os resultados a que a selecção, utilizando uns e outros *índices ambientais*, conduz, quando se aplicam estes métodos de comparação múltipla (valores significativos ao nível de 5% de probabilidade de erro).

Tabela 5.2. Cultivares significativamente dominados.

<i>Índices Ambientais Clássicos</i>						
Método	TE9008 1º Intervalo (extremo esquerdo) $x_0 = 2212.59$	TE9008 1º Intervalo (extremo direito) $x_0 = 2747.73$	TE9204 2º Intervalo (extremo esquerdo) $x_0 = 2747.73$	TE9204 2º Intervalo (extremo direito) $x_0 = 3349.66$	CELTA 3º Intervalo (extremo esquerdo) $x_0 = 3349.66$	CELTA 3º Intervalo (extremo direito) $x_0 = 8838, 49$
Scheffé	Nenhum cultivar significativamente dominado	Nenhum cultivar significativamente dominado	Nenhum cultivar significativamente dominado	Nenhum cultivar significativamente dominado	Nenhum cultivar significativamente dominado	Nenhum cultivar significativamente dominado, pois não existe nenhum cultivar com maior declive
Bonferroni	TE9110 Nenhum cultivar significativamente dominado	Nenhum cultivar significativamente dominado	TE9110 Nenhum cultivar significativamente dominado	Nenhum cultivar significativamente dominado	TE9110, TE9115	
Tukey	Nenhum cultivar significativamente dominado	Nenhum cultivar significativamente dominado	Nenhum cultivar significativamente dominado	Nenhum cultivar significativamente dominado	TE9110	
<i>Índices Ambientais L<sub>2</sub></i>						
Método	TE9115 1º Intervalo (extremo esquerdo) $x_0 = 2265.95$	TE9115 1º Intervalo (extremo direito) $x_0 = 2265.95$	TE9008 2º Intervalo (extremo esquerdo) $x_0 = 2265.95$	TE9008 2º Intervalo (extremo direito) $x_0 = 2796.72$	TE9204 3º Intervalo (extremo esquerdo) $x_0 = 2796.72$	TE9204 3º Intervalo (extremo direito) $x_0 = 3396.37$
Scheffé	Nenhum cultivar significativamente dominado, pois não existe nenhum cultivar com menor declive	Nenhum cultivar significativamente dominado	Nenhum cultivar significativamente dominado	Nenhum cultivar significativamente dominado	Nenhum cultivar significativamente dominado	Nenhum cultivar significativamente dominado, pois não existe nenhum cultivar com maior declive
Bonferroni		Nenhum cultivar significativamente dominado	TE9110	Nenhum cultivar significativamente dominado	TE9110	CELTA 4º Intervalo (extremo esquerdo) $x_0 = 3396.37$
Tukey		Nenhum cultivar significativamente dominado	Nenhum cultivar significativamente dominado	Nenhum cultivar significativamente dominado	TE9110	CELTA 4º Intervalo (extremo esquerdo) $x_0 = 3396.37$

Assim podemos concluir que:

- o método de Bonferroni tem um maior poder discriminativo, o que seria de esperar, uma vez que assenta em pressupostos menos restritivos;
- usando o método de Bonferroni, para produções altas (fertilidade elevada), conclui-se que os cultivares HELVIO, TE9006, TE9007, TE9008, TE9204 e TROVADOR não estão dominados pelo cultivar CELTA, no intervalo mais à direita;
- nos restantes intervalos, há menos cultivares dominados, mesmo quando o método de Bonferroni é usado, visto que só o cultivar TE9110 está dominado;

Assim, se só um número muito restrito de cultivares tivesse de ser recomendado o caso de CELTA, TE9204 e TE9008 é bastante forte, sendo o caso do cultivar TE9115 menos recomendado.

## 5.5 - Testes $F$ selectivos

Pode ser interessante testar

$$H_0 : \beta_1 = \text{Max}\{\beta_2, \dots, \beta_J\} \quad (5.29)$$

contra

$$H_1 : \beta_1 > \text{Max}\{\beta_2, \dots, \beta_J\}, \quad (5.30)$$

para ver se há um cultivar que responde significativamente melhor ao crescimento dos *índices ambientais*, isto é, ao aumento da capacidade produtiva. Os testes  $F$  selectivos, ver Dias (1994), são bastante adequados, para testarmos  $H_0$  contra  $H_1$ . Com

$$\mathbf{A} = [\mathbf{1}^{J-1} \quad , \quad - \mathbf{I}_{J-1}], \quad (5.31)$$

e sendo  $\Psi^{J-1} = \mathbf{A}\beta^J$  e  $\tilde{\Psi}^{J-1} = \mathbf{A}\tilde{\beta}^J$  obtemos, no caso completo,

$$\tilde{\Psi}^{J-1} \sim N\left(\Psi^{J-1}; \sigma^2 \left(\frac{1}{s_{xx}} \mathbf{A}\mathbf{A}^T\right)\right), \text{ com}$$

$$s_{xx} = \sum_{i=1}^b (x_i - \bar{x})^2, \quad (5.32)$$

onde  $x_1, \dots, x_b$  são os *índices ambientais* ajustados e  $\bar{x} = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^b x_i$ . Ora, verificando-se

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{1}^{J-1} \mathbf{1}^{J-1T} + \mathbf{I}_{J-1}, \quad (5.33)$$

e, sendo a soma das componentes de  $\mathbf{u}^{J-1}$  nula, tem-se  $\mathbf{1}^{J-1T} \mathbf{u}^{J-1} = 0$ , vindo  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T \mathbf{u}^{J-1} = \mathbf{u}^{J-1}$ . Assim, se os vectores  $\alpha_2^{J-1}, \dots, \alpha_{J-1}^{J-1}$  constituírem uma base ortonormada para o sub-espaço

$$\Upsilon_{J-1} = \left\{ \mathbf{u}^{J-1} : \mathbf{1}^{J-1T} \mathbf{u}^{J-1} = 0 \right\}, \quad (5.34)$$

os mesmos serão  $J-2$  vectores próprios de  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ , mutuamente ortogonais, a que corresponde o valor próprio 1. Como  $\mathbf{1}^{J-1T} \mathbf{1}^{J-1} = J-1$  tem-se  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T \mathbf{1}^{J-1} = J\mathbf{1}^{J-1}$ ; logo,  $\alpha_1^{J-1} = \frac{1}{\sqrt{J-1}} \mathbf{1}^{J-1}$  será vector próprio de  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ , estando-lhe associado o valor próprio  $J$ .

Sendo  $\mathbf{P}$  uma matriz ortogonal de ordem  $J$ , cujos vectores linha são  $\alpha_1^{J-1}, \alpha_2^{J-1}, \dots, \alpha_{J-1}^{J-1}$ , ter-se-á  $\mathbf{P}^T = [\alpha_1^{J-1}, \dots, \alpha_{J-1}^{J-1}]$ , bem como

$$\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{P}^T = \mathbf{P} \left( \mathbf{A}\mathbf{A}^T [\alpha_1^{J-1}, \alpha_2^{J-1}, \dots, \alpha_{J-1}^{J-1}] \right) = \mathbf{P} [J\alpha_1^{J-1}, \alpha_2^{J-1}, \dots, \alpha_{J-1}^{J-1}] \quad (5.35)$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1^{J-1T} \\ \alpha_2^{J-1T} \\ \vdots \\ \alpha_{J-1}^{J-1T} \end{bmatrix} [J\alpha_1^{J-1}, \alpha_2^{J-1}, \dots, \alpha_{J-1}^{J-1}] = \begin{bmatrix} J & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{D}(J, 1, \dots, 1) .$$

Assim,  $\mathbf{P}$  é diagonalizadora ortogonal de  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ , tendo-se ainda

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{P}^T \mathbf{D}(J, 1, \dots, 1) \mathbf{P} \\ (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} = \mathbf{P}^T \mathbf{D}(J^{-1}, 1, \dots, 1) \mathbf{P} . \end{array} \right. \quad (5.36)$$

Interessa-nos, agora, seguindo Dias (1994, pg. 9 a 14), introduzir coordenadas polares generalizadas. Para aligeirar a escrita, ponhamos  $s = J-1$ . Ao ponto, com coordenadas cartesianas  $v_1, \dots, v_s$ , corresponderão as coordenadas polares generalizadas  $r, \theta_1, \dots, \theta_{s-1}$  tendo-se

$$\begin{cases} v_1 = r \cos \theta_1 \cdots \cdots \cos \theta_{s-1} = r \ell_1(\boldsymbol{\theta}^{s-1}), \\ v_2 = r \cos \theta_1 \cdots \cdots \sin \theta_{s-1} = r \ell_2(\boldsymbol{\theta}^{s-1}), \\ \vdots \\ v_j = r \cos \theta_1 \cdots \cdots \cos \theta_{s-j} \sin \theta_{s-j+1} = r \ell_j(\boldsymbol{\theta}^{s-1}), \\ \vdots \\ v_s = r \sin \theta_1 = r \ell_s(\boldsymbol{\theta}^{s-1}), \end{cases} \quad (5.37)$$

sendo os ângulos ao centro  $\theta_1, \dots, \theta_{s-1}$ , as componentes de  $\boldsymbol{\theta}^{s-1}$ . Para as coordenadas polares generalizadas, temos os limites  $r \geq 0$  e

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \theta_j \leq \frac{\pi}{2}; j = 1, \dots, s-2 \\ 0 \leq \theta_{s-1} \leq 2\pi \end{cases} \quad (5.38)$$

Vê-se, facilmente, que  $r = \sum_{j=1}^s v_j^2$  e, ver Kendal (1961, pg.17), o jacobiano da

transformação (5.37) é

$$J(r, \boldsymbol{\theta}^{s-1}) = r^{s-1} h(\boldsymbol{\theta}^{s-1}) \quad (5.39)$$

com  $h(\boldsymbol{\theta}^{s-1}) = (\cos \theta_1)^{s-2} \cdots \cos \theta_{s-2}$ .

Sendo  $\boldsymbol{\theta}^{s-1}(\mathbf{v}^s)$  o vector de ângulos ao centro, que corresponde a  $\mathbf{v}^s$ , se  $\tilde{\Psi}^s$  for independente de  $S \sim \sigma^2 \chi_g^2$ , a densidade conjunta de

$$\mathcal{G} = \frac{g s_{xx}}{s} \frac{\tilde{\Psi}^{sT} (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1} \tilde{\Psi}^s}{S} \quad (5.40)$$

e de  $\Theta^{s-1} = \boldsymbol{\theta}^{s-1}(\tilde{\Psi}^s)$ , será, ver Dias (1994, pg. 10),

com  $z > 0$  e  $\theta^{s-1}$ , satisfazendo as desigualdades (5.38), e verificando-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda^s = \frac{1}{\sigma} \Psi^s \\ k(\theta^{s-1}) = \ell^s(\theta^{s-1})^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \ell^s(\theta^{s-1}) \\ a(\theta^{s-1}) = \lambda^{sT} (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \ell^s(\theta^{s-1}) \end{array} \right. \quad (5.42)$$

Observemos, agora, que a hipótese testada  $H_0$  pode ser reescrita como

$$H_0 : \Psi^s = \mathbf{0}^s. \quad (5.43)$$

Quando  $H_0$  se verifica, temos  $\lambda^s = \mathbf{0}^s$  e  $a(\theta^{s-1}) = 0$ , obtendo-se a densidade conjunta

$$f(z, \theta^{s-1} | \mathbf{A}\mathbf{A}^T, g, s, \mathbf{0}^s) = \frac{\sqrt{\frac{s}{g} \frac{h^2(\theta^{s-1})}{k(\theta^{s-1})} z}}{2\pi^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{g}{2}\right) \sqrt{J}} \times \frac{\Gamma\left(\frac{g+s}{2}\right) \left(\frac{s}{g} \frac{z}{k(\theta^{s-1})}\right)^{\frac{s-1}{2}}}{\left(1 + \frac{s}{g} z\right)^{\left(\frac{g+s}{2}\right)}}, \quad (5.44)$$

com  $z > 0$  e  $\theta^{s-1}$ , satisfazendo as desigualdades (5.38). Além disso, teremos também

$$f(z, \theta^{s-1} | \mathbf{A}\mathbf{A}^T, g, s, \mathbf{0}^s) = f(z | s, g, 0) f^\circ(\theta^{s-1}) \quad (5.45)$$

com  $f(z|s, g, 0)$  a densidade  $F$  central com  $s$  e  $g$  graus de liberdade e

$$f^\circ(\theta^{s-1}) = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) h(\theta^{s-1})}{2\pi^{\frac{s}{2}} \sqrt{Jk(\theta^{s-1})}}, \quad (5.46)$$

onde  $\theta^{s-1}$  satisfaz as desigualdades (5.38). Assim, quando  $H_0$  se verifica,  $\mathcal{F}$  e  $\Theta^{s-1}$  são independentes.

Observe-se que as alternativas a  $H_0$ , que nos interessam, correspondem a ter-se  $\Psi^s > \mathbf{0}^s$ , isto é, a  $\Psi_j > 0$ ,  $j = 1, \dots, s$ . Em termos de coordenadas polares generalizadas é equivalente a ter-se  $\ell_j(\theta^{s-1}) > 0$ ,  $j = 1, \dots, s$ . Como  $\cos(\theta_j) > 0$  e  $\sin(\theta_j) > 0$  se e só se  $0 < \theta_j < \frac{\pi}{2}$ ,  $j = 1, \dots, s-1$ , teremos  $\Psi^s > \mathbf{0}^s$ , se e só se  $r > 0$  e

$0 < \theta_j < \frac{\pi}{2}$ ,  $j = 1, \dots, s-1$ . Somos, assim, levados a utilizar como estatística de teste o par  $(\mathcal{F}, \Theta^{s-1})$ , rejeitando-se  $H_0$  quando se verifica

$$\begin{cases} \mathcal{F} > vc \\ \Theta^{s-1} \in \prod_{j=1}^{s-1} (0 ; \frac{\pi}{2}), \end{cases} \quad (5.47)$$

onde  $\mathbf{X}$  indica produto cartesiano.

Devido à independência de  $\mathcal{F}$  e  $\Theta^{s-1}$  quando  $H_0$  se verifica, o nível do teste será

$$\begin{aligned} \alpha &= (1 - F(vc | J-1, g)) \text{pr} \left( \Theta^{s-1} \in \prod_{j=1}^{s-1} (0 ; \frac{\pi}{2}) \right) = \\ &= (1 - F(vc | J-1, g)) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dots \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^\circ(\theta^{s-1}) \prod_{j=1}^{s-1} d\theta_j, \end{aligned} \quad (5.48)$$

onde  $F(\cdot | J-1, g)$  é a distribuição  $F$  central com  $J-1$  e  $g$  graus de liberdade.

O último integral podia ser calculado analiticamente; no entanto, isso não é necessário, já que  $\Theta^{s-1} \in \prod_{j=1}^{s-1} (0 ; \frac{\pi}{2})$  se e só se  $\tilde{\beta}_1 > \text{Max}\{\tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_J\}$ . Ora, quando  $H_0$  se verifica os  $\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_J$  são *iid*, tendo-se

$$\text{pr} \left( \Theta^{s-1} \in \prod_{j=1}^{s-1} (0 ; \frac{\pi}{2}) \right) = \text{pr} \left( \tilde{\beta}_1 > \text{Max}\{\tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_J\} \right) = \frac{1}{J}, \quad (5.49)$$

visto haver  $J!$  ordenações possíveis para os  $\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_J$  e apenas  $(J-1)!$  satisfazem a condição  $\tilde{\beta}_1 > \text{Max}\{\tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_J\}$ .

Quando, em vez do caso completo, estamos perante um caso de “ $\alpha$ -designs”, é possível estender a exposição prévia. Assumindo, para isso, que os *índices ambientais* ajustados variam pouco dentro dos super-blocos. Podemos, então, substituí-los pelas médias dos super-blocos e utilizar estas médias para calcular  $s_{xx}$ .

Utilizámos dados de 16 “ $\alpha$ -designs”, realizados na República Checa durante o ano de 2002, gentilmente cedidos pelo Central Institute for Supervising and Testing in Agriculture em Brno. Nestes ensaios, eram comparados cultivares de cevada de Primavera. Em cada delineamento havia 3 super-blocos, tendo cada um 6 blocos de 7 parcelas. Cada cultivar estava presente numa parcela por super-bloco; assim, temos 42 cultivares, cujos nomes se encontram listados na tabela seguinte:

**Tabela 5.3. Nome dos cultivares estudados.**

<b>Nome dos cultivares</b>			
Amulet	Kompakt	Olbram	Pejas
Tolar	Scarlett	Heris	Nordus
Madonna	Orthegea	Madeira	Jersey
Annabell	Sabel	Saloon	Prestige
Philadelphia	Diplom	Malz	Candidate_01
Candidate_02	Candidate_03	Candidate_04	Candidate_05
Candidate_06	Candidate_07	Candidate_08	Candidate_09
Candidate_10	Candidate_11	Candidate_12	Candidate_13
Candidate_14	Candidate_15	Candidate_16	Candidate_17
Candidate_18	Candidate_19	Candidate_20	Candidate_21
Candidate_22	Candidate_23		

enquanto que os locais para os diferentes ensaios são:

**Tabela 5.4. Locais onde se realizaram os ensaios.**

<b>Ensaio</b>	<b>Local / Estação Experimental</b>
1	Branisovice
2	Lednice
3	Uhersky Ostroh
4	Caslav
5	Hrubcice
6	Chrlice
7	Puste Jakartice
9	Sedlec
10	Verovany
11	Jaromerice
12	Stankov
13	Chrastava
14	Hradec nad Svitavou
15	Lipa
16	Vysoka

Os resultados finais dos ajustamentos realizados, aplicando o *algoritmo ziguezague*, são apresentados na tabela seguinte:

**Tabela 5.5. Coeficientes ajustados e coeficientes de determinação.**

Cultivar	$\tilde{\alpha}$	$\tilde{\beta}$	$R^2$
Prestige	-2,32	1,39	0,94
Candidate 06	-2,71	1,38	0,96
Saloon	-2,06	1,35	0,92
Sabel	-2,11	1,35	0,92
Candidate 03	-1,73	1,31	0,95
Candidate 14	-1,72	1,29	0,89
Candidate 09	-2,18	1,27	0,87
Kompakt	-2,23	1,26	0,93
Candidate 05	-1,56	1,25	0,92
Candidate 19	-1,28	1,25	0,93
Candidate 02	-1,72	1,24	0,91
Candidate 18	-1,30	1,22	0,92
Candidate 01	-1,48	1,21	0,92
Candidate 16	-1,05	1,20	0,92
Candidate 22	-1,18	1,19	0,87
Heris	-1,27	1,19	0,92
Nordus	-1,32	1,18	0,95
Madonna	-0,90	1,15	0,89
Malz	-0,91	1,14	0,95
Annabell	-0,62	1,14	0,91
Candidate 17	-0,89	1,14	0,92
Candidate 23	-1,20	1,14	0,85
Jersey	-0,96	1,13	0,91
Candidate 11	-0,91	1,13	0,90
Candidate 21	-0,66	1,13	0,81
Candidate 04	-0,97	1,12	0,92
Pejas	-0,92	1,12	0,92
Candidate 20	-0,42	1,11	0,93
Diplom	-0,69	1,10	0,93
Candidate 13	-0,83	1,10	0,94
Tolar	-0,43	1,09	0,88
Candidate 10	-0,47	1,09	0,90
Candidate 15	-0,77	1,09	0,91
Olbram	-0,94	1,08	0,92
Philadelphia	-0,28	1,07	0,89
Scarlett	-0,55	1,07	0,92
Amulet	-0,99	1,06	0,89
Orthega	-0,01	1,03	0,80
Madeira	-0,41	1,03	0,43
Candidate 08	-0,20	1,02	0,92
Candidate 07	0,18	1,01	0,83
Candidate 12	0,19	1,00	0,91

Aplicou-se a estes dados testes  $F$  selectivos, e uma vez que os *índices ambientais* individuais variam pouco dentro dos super-blocos, podemos substituí-los pelas médias dos super-blocos, tendo-se obtido o valor significativo de  $\mathcal{F} = 11,48$ . Pode concluir-se, assim, que o cultivar com maior declive ajustado (Prestige) responde significativamente melhor ao aumento dos *índices ambientais*, ou seja, ao aumento da fertilidade, do que alguns dos outros.

Para se detectar diferenças significativas, relativamente ao cultivar Prestige, aplicaram-se os métodos de comparação múltipla de Scheffé e Bonferroni. Para isso, basta substituir nas fórmulas respectivas os estimadores das variâncias dos  $\tilde{\alpha}_j + \tilde{\beta}_j x$  pelos das variâncias dos  $\tilde{\beta}_j$ ,  $j=1, \dots, J$ . Os resultados obtidos foram:

**Tabela 5.6. Cultivares com declives significativamente inferiores ao nível de 5% ao do cultivar Prestige, utilizando o método de Scheffé.**

Nordus;	Madonna	Malz	Annabell	Candidate_17
Candidate_23	Jersey	Candidate_11	Candidate_04	Pejas
Candidate_20	Diplom	Candidate_13	Tolar	Candidate_10
Candidate_15	Olbram	Philadelphia	Scarlett	Amulet
Orthega	Candidate_08	Candidate_07	Candidate_12	

**Tabela 5.7. Cultivares com declives significativamente inferiores ao nível de 5% ao do cultivar Prestige, utilizando o método de Bonferroni.**

Candidate_09	Kompakt	Candidate_05	Candidate_19	Candidate_02	Candidate_18
Candidate_01	Candidate_16	Candidate_22	Heris	Nordus;	Madonna
Malz	Annabell	Candidate_17	Candidate_23	Jersey	Candidate_11
Candidate_21	Candidate_04	Pejas	Candidate_20	Diplom	Candidate_13
Tolar	Candidate_10	Candidate_15	Olbram	Philadelphia	Scarlett
Amulet	Orthega	Madeira	Candidate_08	Candidate_07	Candidate_12

Este estudo não substitui o realizado a partir do contorno superior. Neste caso, as regressões ajustadas estão representadas na figura seguinte.

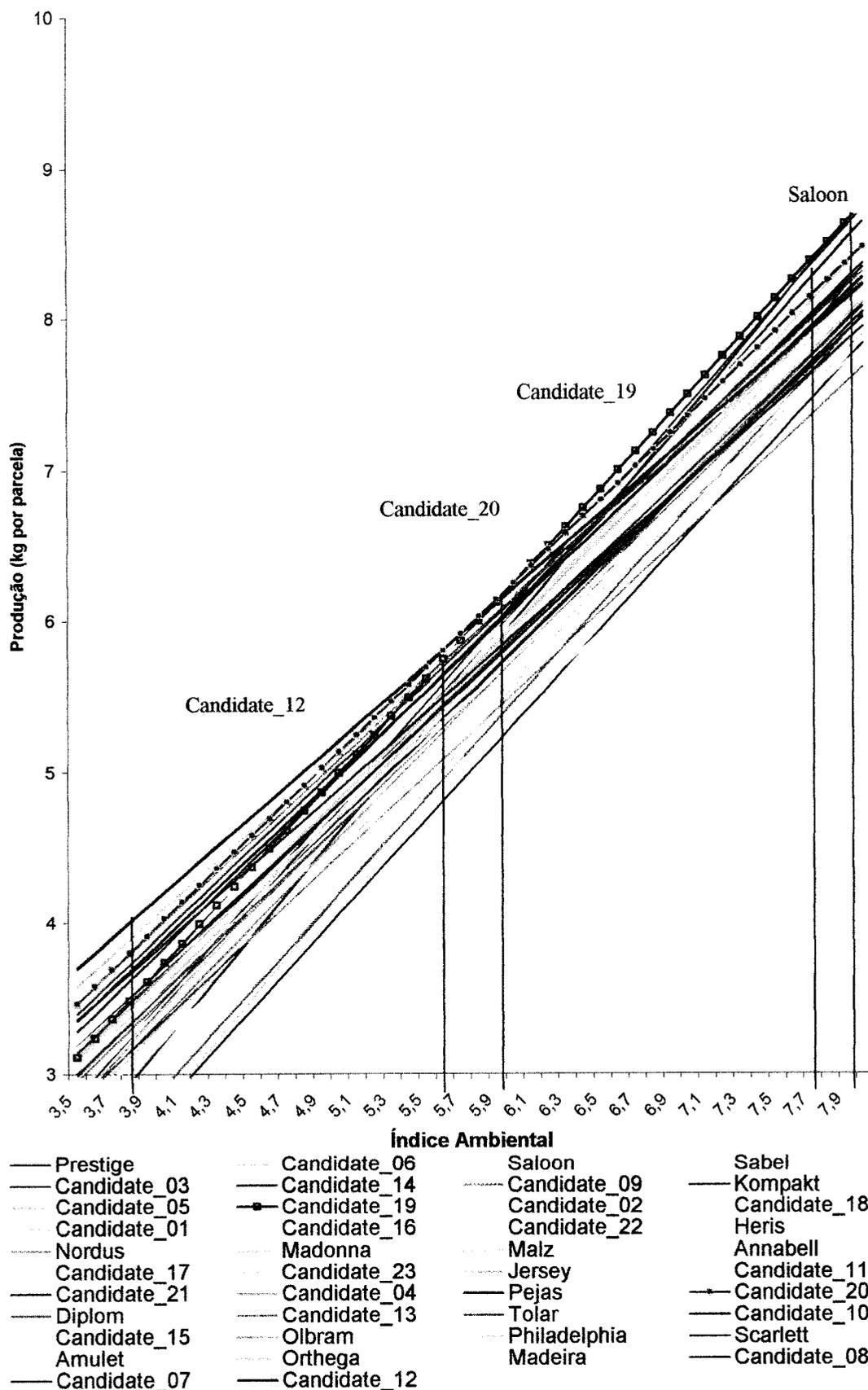


Figura 5.10. Regressões ajustadas, utilizando *índices ambientais*  $L_2$  para os 16 ensaios.

Podemos verificar pelo exame do contorno superior que o cultivar Prestige não é dominante. No entanto, para compararmos os cultivares que integram o contorno superior (dominantes) com os restantes, começamos por usar testes unilaterais *t*. Os resultados são os que se seguem

**Tabela 5.8. Cultivares dominantes e dominados.**

Cultivar dominante	Intervalo de Dominância	Cultivares dominados ao nível de 5%
Saloon	[7.75 ; 7.94]	Candidate_06; Candidate_09; Kompakt; Candidate_05; Candidate_02; Candidate_18; Candidate_01; Candidate_22; Heris; Nordus; Madonna; Malz; Annabell; Candidate_17; Candidate_23; Jersey; Candidate_11; Candidate_21; Candidate_04; Pejas; Candidate_20; Diplom; Candidate_13; Tolar; Candidate_10; Candidate_15; Olbram; Philadelphia; Scarlett; Amulet; Orthega; Madeira; Candidate_08; Candidate_07; Candidate_12
Candidate_19	[6.02 ; 7.75]	Candidate_06; Candidate_09; Kompakt; Candidate_05; Candidate_02; Candidate_18; Candidate_01; Candidate_22; Heris; Nordus; Madonna; Malz; Candidate_17; Candidate_23; Jersey; Candidate_11; Candidate_04; Pejas; Diplom; Candidate_13; Candidate_10; Candidate_15; Olbram;; Scarlett; Amulet; Madeira; Candidate_08
Candidate_20	[5.70 ; 6.02]	Prestige; Candidate_06; Saloon; Sabel; Candidate_14; Candidate_09; Kompakt; Candidate_05; Candidate_02; Candidate_18; Candidate_01; Candidate_22; Heris; Nordus; Madonna; Malz; Candidate_17; Candidate_23; Jersey; Candidate_11; Candidate_04; Pejas; Diplom; Candidate_13; Candidate_15; Olbram; Scarlett; Amulet; Madeira; Candidate_08
Candidate_12	[3.89 ; 5.70]	Prestige; Candidate_06; Saloon; Sabel; Candidate_03; Candidate_14; Candidate_09; Kompakt; Candidate_05; Candidate_02; Candidate_18; Candidate_01; Candidate_22; Heris; Nordus; Madonna; Malz; Candidate_17; Candidate_23; Jersey; Candidate_11; Candidate_04; Pejas; Diplom; Candidate_13; Candidate_15; Olbram; Scarlett; Amulet; Madeira; Candidate_08

podemos ver facilmente que, além dos cultivares dominantes (Saloon, Candidate\_19, Candidate\_20 e Candidate\_12), só o cultivar Candidate\_16 não está significativamente

dominado ao nível de 5% no intervalo de variação das médias dos super-blocos [3.89 ; 7.94]. Observa-se ainda, que, nos dois troços da direita, o cultivar Prestige não é dominado. Assim, este cultivar terá possibilidades de sobressair se, através de progressos produtivos, os *índices ambientais* vierem a subir.

Tendo-se neste caso os quocientes de eficiência  $r_1 = \frac{4}{42}$  e  $r_2 = \frac{2}{42}$ .

Se utilizarmos os métodos de comparação múltipla de Scheffé e Bonferroni, uma vez que estes são métodos mais robustos, os resultados obtidos encontram-se na Tabela 5.9, observando-se que enquanto que  $r_1$  continua a ser  $\frac{4}{42}$ ,  $r_2$  aumenta consideravelmente.

Tabela 5.9. Cultivares significativamente dominados.

	Candidate_12	Candidate_12	Candidate_20	Candidate_20	Candidate_19	Candidate_19	Saloon	Saloon
Método	1º Intervalo (extremo esquerdo) $x_0 = 3.89$	1º Intervalo (extremo direito) $x_0 = 5.70$	2º Intervalo (extremo esquerdo) $x_0 = 5.70$	2º Intervalo (extremo direito) $x_0 = 6.02$	3º Intervalo (extremo esquerdo) $x_0 = 6.02$	3º Intervalo (extremo direito) $x_0 = 7.75$	4º Intervalo (extremo esquerdo) $x_0 = 7.75$	4º Intervalo (extremo direito) $x_0 = 7.94$
Scheffé	Nenhum cultivar significativamente dominado, pois não existe nenhum cultivar com menor declive.	Kompakt	Olbram; Amulet	Candidate_06; Candidate_09; Kompakt; Candidate_23	Olbram; Amulet	Candidate_09; Kompakt	Kompakt; Olbram; Amulet; Madeira	Nenhum cultivar significativamente dominado
Bonferroni	Nenhum cultivar significativamente dominado, pois não existe nenhum cultivar com menor declive.	Candidate_06; Candidate_09; Kompakt; Candidate_02; Candidate_01; Heris; Nordus; Candidate_23; Jersey; Candidate_11; Candidate_04; Pejas; Candidate_13; Candidate_13; Candidate_04; Pejas; Candidate_13; Scarlett; Amulet; Candidate_15; Olbram; Scarlett; Amulet; Madeira	Diplom; Candidate_13; Candidate_15; Olbram; Scarlett; Amulet; Madeira	Candidate_06; Candidate_09; Kompakt; Candidate_02; Candidate_01; Heris; Nordus; Candidate_17; Candidate_23; Jersey; Candidate_11; Candidate_04; Pejas; Diplom; Candidate_13; Candidate_15; Olbram; Scarlett; Amulet; Candidate_11; Candidate_04; Pejas	Candidate_02; Candidate_01; Heris; Nordus; Candidate_17; Candidate_23; Jersey; Candidate_11; Candidate_04; Pejas; Diplom; Candidate_13; Candidate_15; Olbram; Scarlett; Amulet; Madeira; Candidate_08	Candidate_06; Candidate_09; Kompakt	Candidate_09; Kompakt; Candidate_02; Candidate_22; Heris; Nordus; Madonna; Malz; Candidate_17; Candidate_23; Jersey; Candidate_11; Candidate_04; Pejas; Diplom; Candidate_13; Candidate_10; Candidate_15; Olbram; Philadelphia; Scarlett; Amulet; Orthega; Madeira; Candidate_08; Candidate_07; Candidate_12	Nenhum cultivar significativamente dominado

## 6 – Validação do modelo

### 6.1 – Considerações preliminares

A inferência estatística assenta no par (modelo , observações). O modelo deve conter a informação que se dispõe sobre o problema em estudo, antes de se colherem as observações. No entanto, podemos estar enganados quanto ao que se julga saber. Além dos bem conhecidos erros de primeira e segunda espécie, tem também relevância o erro de terceira espécie. Este erro verifica-se, ver Tiago de Oliveira (1990, Vol. II), quando se escolhe um modelo errado. Quando um modelo errado é escolhido, a inferência é “enviesada”. Este “enviesamento” é a origem do erro de terceira espécie que, conjuntamente com os erros de primeira e segunda espécie, constituem os principais erros estatísticos. É, assim, importante podermos validar os modelos utilizados. Para realizar essa validação, deduzem-se do modelo consequências testáveis e verifica-se, a partir daí, a conformidade do modelo.

A ACRL assenta na suposição de que, utilizando os *índices ambientais*  $L_2$ , se pode ajustar por cultivar uma regressão linear, da produção nos *índices ambientais*. Apresentaremos duas técnicas para testar esta suposição. A primeira destas técnicas utiliza os resíduos ajustados, enquanto que, na segunda, se testa a linearidade das regressões.

### 6.2 - Técnica dos resíduos

Á semelhança da Secção 5.2, admitiremos que se utilizaram *índices ambientais*  $L_2$  e que temos os vectores de coeficientes ajustados

$$\begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_j \\ \tilde{\beta}_j \end{bmatrix} \sim N \left( \begin{bmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \end{bmatrix}, \sigma^2 \mathbf{W}_j \right); j = 1, \dots, J. \quad (6.1)$$

Estes vectores são independentes entre si e da soma das somas dos quadrados dos resíduos  $S \sim \sigma^2 \chi_g^2$ . Seja  $C_j$  o conjunto dos índices dos blocos em que está presente o  $j$ -ésimo cultivar, e as matrizes  $\mathbf{X}_j$  e  $\mathbf{D}_j$ ,  $j = 1, \dots, J$  definidas como na Secção 4.2.

Consideramos, ainda,  $\mathbf{X}'_j = \mathbf{D}_j^{1/2} \mathbf{X}_j$  e representamos o respectivo espaço imagem por  $\Omega'_j = R(\mathbf{X}'_j)$ ,  $j = 1, \dots, J$ . Sendo  $b_j = \#(C_j)$ ,  $j = 1, \dots, J$ , tanto  $\Omega'_j$  como o respectivo complemento ortogonal  $\Omega'^{\perp}_j = R(\mathbf{X}'_j)^{\perp}$ , são sub-espços de  $\mathfrak{R}^{b_j}$ , a que correspondem as matrizes de projecção ortogonal  $\mathbf{Q}(\Omega'_j)$  e  $\mathbf{Q}(\Omega'^{\perp}_j)$ ,  $j = 1, \dots, J$ .

Estabeleçamos a

**Proposição 11.**

Com  $\mathbf{W}_j = (\mathbf{X}_j^T \mathbf{D}_j \mathbf{X}_j)^{-1}$  tem-se  $\mathbf{W}_j = (\mathbf{X}'_j{}^T \mathbf{X}'_j)^{-1}$ ,  $\mathbf{Q}(\Omega'_j) = \mathbf{X}'_j \mathbf{W}_j \mathbf{X}'_j{}^T$  e  $\mathbf{Q}(\Omega'^{\perp}_j) = \mathbf{I}_{b_j} - \mathbf{X}'_j \mathbf{W}_j \mathbf{X}'_j{}^T$ ,  $j = 1, \dots, J$ .

*Dem.:* Para estabelecer a primeira parte da tese, basta observar que  $\mathbf{X}_j^T \mathbf{D}_j \mathbf{X}_j = \mathbf{X}'_j{}^T \mathbf{X}'_j$ ;  $j = 1, \dots, J$ . Por outro lado,  $\mathbf{X}'_j \mathbf{W}_j \mathbf{X}'_j{}^T$  é simétrica e idempotente, logo matriz de projecção ortogonal. Assim, para que fique estabelecida a segunda parte da tese, ou seja, que  $\mathbf{Q}(\Omega'_j) = \mathbf{X}'_j \mathbf{W}_j \mathbf{X}'_j{}^T$  basta mostrar que  $\Omega'_j = R(\mathbf{X}'_j \mathbf{W}_j \mathbf{X}'_j{}^T)$ .

Dado  $\mathbf{v}^{b_j} \in \Omega'_j$ , tem-se  $\mathbf{v}^{b_j} = \mathbf{X}'_j \mathbf{u}^2$ , vindo  $\mathbf{X}'_j \mathbf{W}_j \mathbf{X}'_j{}^T \mathbf{v}^{b_j} = \mathbf{X}'_j (\mathbf{X}'_j{}^T \mathbf{X}'_j)^{-1} \mathbf{X}'_j{}^T \mathbf{X}'_j \mathbf{u}^2 = \mathbf{X}'_j \mathbf{u}^2 = \mathbf{v}^{b_j}$ , pelo que  $\Omega'_j$  é sub-espço de  $R(\mathbf{X}'_j \mathbf{W}_j \mathbf{X}'_j{}^T)$ ,  $j = 1, \dots, J$ . Mas é evidente que  $R(\mathbf{X}'_j \mathbf{W}_j \mathbf{X}'_j{}^T)$  é sub-espço de  $\Omega'_j = R(\mathbf{X}'_j)$ ; logo  $\Omega'_j = R(\mathbf{X}'_j \mathbf{W}_j \mathbf{X}'_j{}^T)$ , vindo  $\mathbf{Q}(\Omega'_j) = \mathbf{X}'_j \mathbf{W}_j \mathbf{X}'_j{}^T$  e, consequentemente  $\mathbf{Q}(\Omega'^{\perp}_j) = \mathbf{I}_{b_j} - \mathbf{X}'_j \mathbf{W}_j \mathbf{X}'_j{}^T$ ,  $j = 1, \dots, J$ , o estabelece a tese.  $\square$

**Corolário**

Temos  $\text{car}(\mathbf{Q}(\Omega'_j)) = 2$  e  $\text{car}(\mathbf{Q}(\Omega'^{\perp}_j)) = b_j - 2$ ,  $j = 1, \dots, J$ .

Aplicando-se o processo de orto-normalização de Gram-Schmidt aos vectores coluna de  $\mathbf{Q}(\Omega'^{\perp}_j)$  obtêm-se, ver Guerreiro (1970), os vectores duma base ortonormada para  $\Omega'^{\perp}_j$ , seja  $\mathbf{K}_j$  a matriz que tem esses vectores como vectores linha,  $j = 1, \dots, J$ . Segue-se a

**Proposição 12.**

Se  $\mathbf{Y}_j^{b_j} \sim N(\mathbf{X}_j \boldsymbol{\gamma}_j^2, \sigma^2 \mathbf{D}_j^{-1})$ , com  $\mathbf{Y}_j^{b_j}$  o vector das produções do  $j$ -ésimo cultivar, e  $\boldsymbol{\gamma}_j^2$  o correspondente vector dos coeficientes, temos

$$\mathbf{r}_j^{b_j-2} = \mathbf{K}_j \mathbf{D}_j^{1/2} \mathbf{Y}_j^{b_j} \sim N(\mathbf{0}^{b_j-2}, \sigma^2 \mathbf{I}_{b_j-2}), \quad j = 1, \dots, J.$$

**Dem.:** Tem-se, ver Seber (1980, pg. 5),  $\mathbf{r}_j^{b_j-2} \sim N(\mathbf{K}_j \mathbf{D}_j^{1/2} \mathbf{X}_j \boldsymbol{\gamma}_j^2, \sigma^2 \mathbf{K}_j \mathbf{D}_j^{1/2} \mathbf{D}_j^{-1} \mathbf{D}_j^{1/2} \mathbf{K}_j^T)$ , pelo que a tese resulta de, pertencendo os vectores coluna de  $\mathbf{X}'_j = \mathbf{D}_j^{1/2} \mathbf{X}_j$  a  $\Omega'_j$ ,  $\mathbf{K}_j \mathbf{X}'_j$  será matriz nula, já que os vectores linha de  $\mathbf{K}_j$  pertencem a  $\Omega'_j^\perp$  e  $\mathbf{K}_j \mathbf{D}_j^{1/2} \mathbf{X}_j \boldsymbol{\gamma}_j^2 = \mathbf{K}_j \mathbf{X}'_j \boldsymbol{\gamma}_j^2 = \mathbf{0}^{b_j-2}$ ,  $j = 1, \dots, J$ . Por último,  $\mathbf{K}_j \mathbf{D}_j^{1/2} \mathbf{D}_j^{-1} \mathbf{D}_j^{1/2} \mathbf{K}_j^T = \mathbf{K}_j \mathbf{I}_{n_j} \mathbf{K}_j^T = \mathbf{K}_j \mathbf{K}_j^T = \mathbf{I}_{n_j-2}$ ,  $j = 1, \dots, J$ , já que os vectores linha de  $\mathbf{K}_j$  são mutuamente ortonormais.  $\square$

Assim, com  $g = \sum_{j=1}^J b_j - 2J$ , o vector

$$\mathbf{r}^g = [\mathbf{r}_1^{b_1-2T}, \dots, \mathbf{r}_J^{b_J-2T}]^T \quad (6.2)$$

será  $N(\mathbf{0}^g, \sigma^2 \mathbf{I}_g)$ , visto a independência dos  $\mathbf{Y}_1^{b_1}, \dots, \mathbf{Y}_J^{b_J}$  implicar a independência dos  $\mathbf{r}_1^{b_1-2}, \dots, \mathbf{r}_J^{b_J-2}$ .

Admitamos, agora, o pressuposto

$$P \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Y}_1^{b_1} \quad (i) \quad \dots \quad (i) \quad \mathbf{Y}_J^{b_J} \\ \mathbf{Y}_j^{b_j} \sim N(\mathbf{X}_j \boldsymbol{\gamma}_j^2, \sigma^2 \mathbf{D}_j^{-1}), \quad j=1, \dots, J \end{array} \right. \quad (6.3)$$

Podemos considerar (6.3) como definindo um modelo. Enquanto a primeira parte, incidindo sobre a independência dos vectores, é perfeitamente natural, a segunda parte, referente a ter-se  $\mathbf{Y}_j^{b_j} \sim N(\mathbf{X}_j \boldsymbol{\gamma}_j^2, \sigma^2 \mathbf{D}_j^{-1})$ ,  $j = 1, \dots, J$ , é introduzida para se poder utilizar regressões pesadas, chegando a resultados manejáveis. No entanto, se os pesos não variarem excessivamente, a robustez dos modelos lineares normais torna este modelo aceitável. Quando estas suposições se verificam, o vector  $\mathbf{r}^g$  dos resíduos ajustados é normal com vector médio nulo e variância-covariância  $\sigma^2 \mathbf{I}_g$ , escrevendo-se  $\mathbf{r}^g \sim N(\mathbf{0}^g, \sigma^2 \mathbf{I}_g)$ .

Sendo  $r_1, \dots, r_g$  as componentes de  $\mathbf{r}^g$ , vemos que, quando  $P$  se verifica, a hipótese

$$H_0 : r_1, \dots, r_g \text{ iid} \sim N(0, \sigma^2) \quad (6.4)$$

também se verifica. Assim, para verificarmos se as suposições (6.3) se verificam, testamos (6.4). Na escolha de um teste para  $H_0$  temos que considerar as alternativas que são de considerar. Observe-se que, quando não podemos ajustar correctamente regressões lineares, usando os *índices ambientais*  $L_2$ , o vector médio de  $\mathbf{r}^g$  não será nulo. Para este tipo de alternativas, o teste desenvolvido por Mexia (1989) é bastante potente. Ao aplicar este teste, calculam-se primeiro  $T_1 = \sum_{j=1}^g r_j$  e  $T_2 = \sum_{j=1}^g r_j^2$  obtendo-se a partir daqui a estatística de teste

$$\mathcal{T} = g \frac{T_2 - T_1^2 / g}{T_1^2} \quad (6.5)$$

que, ver Mexia (1989), quando  $H_0$  se verifica se distribui como o quociente  $\chi_{g-1}^2 / \chi_1^2$  de dois qui-quadrados centrais independentes, com  $g-1$  e  $1$  graus de liberdade. Sendo  $\bar{f}_{1-\alpha, g-1, 1}$  o quantil para a probabilidade  $1-\alpha$  da distribuição deste quociente, o teste de nível  $\alpha$  com região de aceitação  $\left[ \bar{f}_{\alpha/2, g-1, 1}, \bar{f}_{1-\alpha/2, g-1, 1} \right]$  comporta-se bastante bem, ver Mexia (1989). A razão para se usar um teste cuja região crítica tem duas caudas é, ver de novo Mexia (1989), quando  $\mathbf{r}^g \sim N(\boldsymbol{\mu}^g, \sigma^2 \mathbf{I}_g)$ , ter-se  $T_2 - \frac{T_1^2}{g} \sim \sigma^2 \chi_{g-1, \delta_1}^2$  independente de  $\frac{T_1^2}{g} \sim \sigma^2 \chi_{1, \delta_2}^2$ , com

$$\begin{cases} \delta_1 = \frac{1}{\sigma^2} \left[ \sum_{j=1}^g \mu_j^2 - \frac{1}{g} \left( \sum_{j=1}^g \mu_j \right)^2 \right] \\ \delta_2 = \frac{1}{g\sigma^2} \left( \sum_{j=1}^g \mu_j \right)^2 \end{cases} \quad (6.6)$$

contudo há alternativas a  $H_0$  em que  $\delta_1$  predomina sobre  $\delta_2$  e em que  $\mathcal{T}$  tende a tomar valores superiores aos que toma quando  $H_0$  se verifica; há ainda outras alternativas em que  $\delta_2$  predomina sobre  $\delta_1$  e em que  $\mathcal{T}$  tende a tomar valores inferiores, visto que os valores dos qui-quadrados não centrais tendem a aumentar com os parâmetros de não centralidade.

### 6.3 – Linearidade das regressões

Para testarmos a linearidade começamos por ajustar regressões cúbicas. A razão da escolha de regressões cúbicas é por serem estas as regressões de grau mais baixo, que podem apresentar um ponto de inflexão, o que é sugerido pela lei dos rendimentos decrescentes (quando aumenta a fertilidade a curva das produções tem um comportamento em S com um ponto de inflexão). As matrizes  $\mathbf{X}_j$ ,  $j = 1, \dots, J$ , serão as sub-matrizes da matriz do tipo  $b \times 4$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_b & x_b^2 & x_b^3 \end{bmatrix}, \quad (6.7)$$

cujas linhas correspondem aos blocos que contêm o cultivar  $j$ ,  $j = 1, \dots, J$ . Definindo-se  $\mathbf{D}_j$  como atrás e com  $\mathbf{X}'_j = \mathbf{D}_j^{1/2} \mathbf{X}_j$ ,  $\mathbf{Y}'^{b_j} = \mathbf{D}_j^{1/2} \mathbf{Y}_j$ , e  $\mathbf{W}_j = (\mathbf{X}'^{t_j} \mathbf{X}'_j)^{-1}$ ,  $j = 1, \dots, J$ , obtemos os estimadores

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}}_j^4 = \mathbf{W}_j \mathbf{X}'_j{}^T \mathbf{Y}'^{b_j} ; j = 1, \dots, J \quad (6.8)$$

e as somas dos quadrados dos resíduos

$$S_j = \mathbf{Y}'^{b_j T} \mathbf{Y}'^{b_j} - \mathbf{Y}'^{b_j T} \mathbf{X}'_j \tilde{\boldsymbol{\beta}}_j^4 ; j = 1, \dots, J. \quad (6.9)$$

Se admitimos que  $\mathbf{Y}'^{b_j} \sim N(\mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta}_j^4, \sigma^2 \mathbf{D}_j^{-1})$  temos, ver ainda Mexia (1995, pg. 75 e 76),  $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_j^4 \sim N(\boldsymbol{\beta}_j^4, \sigma^2 \mathbf{W}_j)$  independente de  $S_j \sim \sigma^2 \chi_{b_j-4}^2$ ,  $j = 1, \dots, J$ . Da independência dos vectores  $\mathbf{Y}'^{b_j}$  e da reprodutibilidade dos qui-quadrados resulta serem os  $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_j^4$

independentes entre si e de  $S = \sum_{j=1}^J S_j \sim \sigma^2 \chi_g^2$ , onde agora  $g = \sum_{j=1}^J b_j - 4J$ .

Ponhamos  $\boldsymbol{\beta}_j^4 = [\boldsymbol{\gamma}_j^{2T} ; \boldsymbol{\theta}_j^{2T}]^T$  bem como  $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_j^4 = [\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_j^{2T} ; \tilde{\boldsymbol{\theta}}_j^{2T}]^T$  e representemos por  $\mathbf{U}_j$  a sub-matriz  $2 \times 2$  inferior direita de  $\mathbf{W}_j$ ,  $j = 1, \dots, J$ . De  $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_j^4 \sim N(\boldsymbol{\beta}_j^4, \sigma^2 \mathbf{W}_j)$  obtemos  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_j^2 \sim N(\boldsymbol{\theta}_j^2, \sigma^2 \mathbf{U}_j)$ ,  $j = 1, \dots, J$ , sendo estes estimadores independentes entre si e de  $S \sim \sigma^2 \chi_g^2$ .

A hipótese de linearidade das regressões pode ser escrita como

$$H_0 : \boldsymbol{\theta}_1^2 = \dots = \boldsymbol{\theta}_J^2 = \mathbf{0}^2. \quad (6.10)$$

Quando esta hipótese se verifica, ou seja, quando  $\theta_j^2 = \mathbf{0}^2$ ,  $j = 1, \dots, J$ , tem-se

$$Q_j = \tilde{\theta}_j^{2T} \mathbf{U}_j^{-1} \tilde{\theta}_j^2 \sim \sigma^2 \chi_2^2, \quad j = 1, \dots, J, \quad (6.11)$$

vindo, devido à independência dos  $\mathbf{Y}_1^{b_1}, \dots, \mathbf{Y}_J^{b_J}$ , logo dos  $Q_1, \dots, Q_J$ , e à reprodutibilidade dos qui-quadrados,  $Q = \sum_{j=1}^J Q_j \sim \sigma^2 \chi_{2J}^2$ . Além disso, este qui-quadrado,  $Q$ , será independente de  $S$ , e tem-se a estatística de teste

$$\mathcal{F} = \frac{g}{2J} \frac{Q}{S}, \quad (6.12)$$

que terá distribuição  $F$  central, com  $2J$  e  $g$  graus de liberdade, quando  $H_0$  se verifica.

Observemos que, se os  $b_1, \dots, b_J$  não forem muito diferentes, estaremos num caso, pelo menos aproximadamente, equilibrado. Neste caso, os testes  $F$  são, ver Scheffé (1959, pág. 345) e Ito (1980), muito robustos para a heterocedasticidade e até mesmo mais para a não normalidade. De facto, quando usamos blocos casualizados ou “ $\alpha$ -designs” estamos no caso equilibrado. Além disso os testes  $F$  são UMP (uniformemente mais potentes), ver Mexia (1989), na família dos testes, cuja potência é função de parâmetros de não centralidade e são invariantes para transformações lineares regulares.

Quando a hipótese de linearidade é rejeitada, podemos estar interessados em ver quais os cultivares que são responsáveis por essa rejeição. Uma possibilidade é usar os testes  $t$  bilaterais para as sub-hipóteses

$$\begin{cases} H_{0,3,j} : \beta_{3j} = 0 ; j = 1, \dots, J \\ H_{0,4,j} : \beta_{4j} = 0 ; j = 1, \dots, J, \end{cases} \quad (6.13)$$

onde  $\beta_{3,j}$  e  $\beta_{4,j}$  são os dois últimos coeficientes para a  $j$ -ésima regressão.

Uma vez identificadas as regressões responsáveis pela rejeição, pode valer a pena comparar as somas dos quadrados dos resíduos para as regressões lineares e cúbicas correspondentes. Se não há um aumento considerável na precisão pode ser conveniente continuar a usar regressões lineares. Isto permite-nos usar um modelo mais fácil de tratar, apesar de ser possível ter um melhor ajustamento.

Vamos efectuar esta análise ao exemplo considerado nas Secções 3.8 e 5.4 em que se tem uma *rede de ensaios*, que inclui onze ensaios em blocos casualizados, cada

ensaio tendo quatro blocos e nove cultivares. Assim, temos quarenta e quatro pontos por regressão. As regressões ajustadas obtidas são apresentadas na tabela seguinte:

Tabela 6.1. Regressões Ajustadas.

Cultivar	Regressões lineares			Regressões cúbicas				
	$\tilde{\alpha}_j$	$\tilde{\beta}_j$	$R_j^2$	$\tilde{\beta}_{1,j}$	$\tilde{\beta}_{2,j}$	$\tilde{\beta}_{3,j}$	$\tilde{\beta}_{4,j}$	$R_j^2$
CELTA	-544	1.24	0.92	823.84	1.31	$1.61 \times 10^{-5}$	$-2.29 \times 10^{-9}$	0.92
HELVIO	-153.90	1.06	0.93	-226.48	0.85	$9.82 \times 10^{-5}$	$-8.81 \times 10^{-9}$	0.93
TE9006	-415.29	1.11	0.87	10990.22	-6.43	$1.49 \times 10^{-3}$	$-8.91 \times 10^{-8}$	0.89
TE9007	-543.89	1.12	0.92	-3504.50	2.94	$-3.28 \times 10^{-4}$	$1.81 \times 10^{-8}$	0.94
TE9008	376.54	0.95	0.90	570.35	0.34	$2.26 \times 10^{-4}$	$-1.92 \times 10^{-8}$	0.92
TE9110	-37.26	0.88	0.77	9888.10	-5.31	$1.15 \times 10^{-3}$	$-6.43 \times 10^{-8}$	0.83
TE9115	1296.73	0.54	0.51	170.91	0.69	$9.63 \times 10^{-5}$	$-1.27 \times 10^{-8}$	0.60
TE9204	15.57	1.08	0.90	3555.55	-1.15	$4.20 \times 10^{-4}$	$-2.37 \times 10^{-8}$	0.91
TROVADOR	-243.96	1.06	0.89	4426.89	-1.96	$5.88 \times 10^{-4}$	$-3.44 \times 10^{-8}$	0.89

A estatística de teste  $\mathcal{F}$  obtida para a linearidade é 5.04 a qual é significativa ao nível 0.1%, de probabilidade de erro, o que nos leva a realizar os testes  $t$  para  $\beta_3$  e  $\beta_4$ .

Os resultados destes testes foram os apresentados na tabela seguinte:

Tabela 6.2. Estatísticas de teste  $t$ .

Cultivar	$\begin{cases} H_{0,3,j} : \beta_{3,j} = 0 \\ H_{1,3,j} : \beta_{3,j} \neq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} H_{0,4,j} : \beta_{4,j} = 0 \\ H_{1,4,j} : \beta_{4,j} \neq 0 \end{cases}$
CELTA	0.05	-0.12
HELVIO	0.31	-0.45
TE9006	4.72*	-4.60*
TE9007	-1.04	0.93
TE9008	0.71	-0.99
TE9110	3.63*	-3.32*
TE9115	0.30	-0.65
TE9204	1.33	-1.22
TROVADOR	1.86	-1.78

Assim, podemos rejeitar a linearidade para os cultivares TE9006 e TE9110.

Apesar disto, quando comparamos os valores de  $R_j^2$ ,  $j = 1, \dots, J$ , vemos que o aumento de precisão não é acentuado de forma que, para fins práticos, podemos utilizar as regressões lineares, que são muito mais fáceis de se tratar.

## 6.4 - Medida do ajustamento

Para uma única regressão linear pesada o ajustamento pode ser medido por

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^b p_i (Y_i - \tilde{\alpha} - \tilde{\beta} x_i)^2}{\sum_{i=1}^b p_i (Y_i - Y_o)^2}, \quad (6.14)$$

onde  $Y_o = \frac{1}{\sum_{i=1}^b p_i} \sum_{i=1}^b p_i Y_i$ . Esta medida estende-se directamente à ACRL, com

$p_j^+ = \sum_{i=1}^b p_{ij}$ , a soma dos pesos dos blocos contendo o  $j$ -ésimo cultivar, e

$Y_{o,j} = \frac{1}{p_j^+} \sum_{i=1}^b p_{ij} Y_{ij}$ ,  $j = 1, \dots, J$ , considerando

$$R_j^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^b p_{ij} (Y_{ij} - \tilde{\alpha}_j - \tilde{\beta}_j x_i)^2}{\sum_{i=1}^b p_{ij} (Y_{ij} - Y_{o,j})^2}, \quad j = 1, \dots, J \quad (6.15)$$

bem como

$$\bar{R}^2 = \frac{1}{\sum_{j=1}^J p_j^+} \sum_{j=1}^J p_j^+ R_j^2. \quad (6.16)$$

Os  $x_1, \dots, x_b$  podem ser ou os *índices ambientais clássicos* ou os *índices ambientais  $L_2$* . Quando é usado o *algoritmo ziguezague*, podemos efectuar iterações até o  $\bar{R}^2$  estabilizar.

Incluimos esta pequena secção neste capítulo, visto que um elevado grau de ajustamento pode ser considerado como uma indicação clara que a ACRL é aplicável, evitando a necessidade de usar as técnicas descritas atrás.

## 6.5 – Zonas equipotenciais de adaptação

Zonas equipotenciais de adaptação (ZEA) são entendidas neste trabalho como regiões tão grandes quanto possível, nas quais a ACRL pode ser aplicada. Quando uma *rede de ensaios* cobre mais de uma ZEA, as técnicas apresentadas nas Secções 6.2 e 6.3 são úteis, visto que conduzirão á rejeição da possibilidade de ajustar uma regressão linear por cultivar, para toda a *rede de ensaios*. Então, a *rede de ensaios* deveria ser decomposta em *sub-redes* e estas serem tratadas separadamente. Para realizar esta decomposição, os melhoradores deverão ser consultados e a possibilidade de usar a ACRL em cada *sub-rede* verificada.

O conceito de ZEA foi introduzido no trabalho já referido de Gusmão et al. (1989), vindo a sua aplicabilidade também discutida em Mexia et al. (1990). Este conceito foi aplicado na interpretação duma *rede* de 31 ensaios, de *Triticale* (híbrido entre trigo e centeio), cobrindo Portugal continental, realizados pela Estação Nacional de Melhoramento de Plantas. O método dos resíduos mostrou que a ACRL não pode ser aplicada a toda a *rede de ensaios*. De seguida, duas ZEA foram propostas:

ZEA I – Nordeste Transmontano;

ZEA II – Sul de Montejunto-Estrela.

As correspondentes *sub-redes* continham 6 e 25 ensaios. A adequação do uso da ACRL foi verificada pelo método dos resíduos. Além disso, delineamentos regressionais múltiplos, ver Mexia (1987), foram usados para mostrar que as regressões para as duas ZEA diferiam significativamente. Estas ZEA são apresentadas na Figura 6.1.

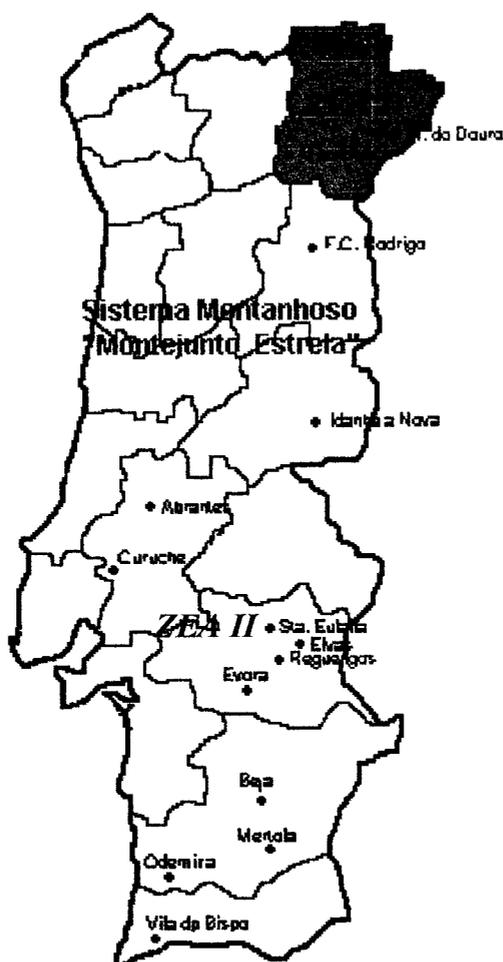


Figura 6.1 - Mapa das zonas equipotenciais de adaptação.

A introdução dos *índices ambientais*  $L_2$  permite utilizar o conceito de ZEA quando são efectuados delineamentos em blocos incompletos, por exemplo, “ $\alpha$ -designs”. Caso se conclua pela existência de mais duma ZEA, deverá proceder-se à decomposição da *rede de ensaios* em *sub-redes*. Na realização desta decomposição é fundamental a colaboração com especialistas em melhoramento da espécie com que se está a trabalhar. Testa-se em seguida, usando as técnicas apresentadas nas Secções 6.2 e 6.3, cada uma das *sub-redes* até se ter uma decomposição aceitável.

O ideal será ter-se as mesmas ZEA para classes de culturas, por exemplo, culturas arvenses. Aliás, as duas ZEA, inicialmente estabelecidas a partir do *Triticale*, têm-se revelado úteis no contexto mais geral das culturas arvenses em Portugal Continental, ver por exemplo Gusmão et al. (1991b) e (1992b).

## 7 – Estruturação de *índices ambientais*

### 7.1 – Considerações prévias

Os ensaios numa *rede de ensaios* são usualmente efectuados usando técnicas agrícolas uniformes. Assim, de ensaio para ensaio, as principais diferenças estarão relacionadas com o local e o ano. Note-se que Caliński et al. (1987a), (1987b), (1995a) e (1995b) admitem que estes dois factores são aditivos no modelo que apresentaram para *redes de ensaios*.

Começemos, pois, por admitir essa aditividade ao estudar a acção dos factores local e ano sobre os *índices ambientais*. Veremos em seguida como testar esse pressuposto de aditividade. Esta forma de proceder justifica-se, ver Mexia (1989, pg. 38 a 39), pois quando a aditividade não se verifica, o qui-quadrado, que figura na soma de quadrados para o erro, não é central. Resulta daqui que os testes  $F$  perdem potência e assim todas as conclusões significativas continuam a sê-lo (pelo menos ao mesmo nível), embora a perda de potência possa levar a que não se obtenham todos os resultados significativos, de que outra maneira se detectaria. De qualquer forma, o pressuposto de aditividade é altamente conveniente para se poder realizar a análise, podendo considerar-se como uma heurística útil.

Vimos que no caso completo, quando se aplica a ACRL, os *índices ambientais clássicos* e os *índices ambientais*  $L_2$  podem conduzir a resultados quase idênticos. Apesar disso, no que se segue, utilizamos os *índices ambientais*  $L_2$ , dado o maior rigor da teoria correspondente, visto que estes *índices ambientais* conduzem a estimadores de máxima verosimilhança. Admitiremos apenas que, no caso completo, os *índices ambientais*  $L_2$  foram estandardizados de forma a terem o mesmo intervalo de variação, que se teria caso se tivessem utilizado os *índices ambientais clássicos*. Se forem utilizados “ $\alpha$ -designs”, podemos assumir que a estandardização assegura que o intervalo dos *índices ambientais* é o mesmo que o definido pelas médias dos super-blocos.

## 7.2 – Modelo aditivo

No que segue admitiremos que o vector dos *índices ambientais*  $L_2$  é normal e homocedástico, bem como, o pressuposto atrás referido, de aditividade entre local e ano. Mais tarde, veremos como testar este último pressuposto. Este pressuposto permite-nos considerar situações em que os locais de experimentação não são os mesmos todos os anos. Assim, nesta secção, assumiremos um modelo aditivo para os *índices ambientais*. Suponhamos que há  $u$  pares (ano, local) e representemos por  $k_i$  e  $h_i$  os índices do ano e do local para o  $i$ -ésimo par,  $i = 1, \dots, b$ . Indicando por  $\gamma_{k_i}$  e  $\tau_{h_i}$  os efeitos para ano e local, respectivamente, podemos expressar os valores médios, das combinações ano  $\times$  local, por

$$\mu_i = \mu + \gamma_{k_i} + \tau_{h_i}, \quad i = 1, \dots, b, \quad (7.1)$$

sendo  $\mu$  o valor médio geral. Para  $p$  anos e  $t$  locais teremos as restrições

$$\sum_{k=1}^p \gamma_k = \sum_{h=1}^t \tau_h = 0. \quad (7.2)$$

Este modelo, ver Mexia & Pinto (2001), pode ser ajustado pelo método dos mínimos quadrados. As restrições (7.2) permitem-nos tomar  $\gamma_p = -\sum_{k=1}^{p-1} \gamma_k$  e  $\tau_t = -\sum_{h=1}^{t-1} \tau_h$ , evitando-se assim situações de multicolineariedade, ver Mexia (1995, pg. 57 a 61). A matriz  $\mathbf{Z}$  do modelo terá  $1 + (p-1) + (t-1) = p + t - 1$  colunas; a primeira coluna corresponderá a  $\mu$ , as seguintes  $p-1$  colunas estão associadas aos  $\gamma_1, \dots, \gamma_{p-1}$  e as últimas  $t-1$  colunas associadas aos  $\tau_1, \dots, \tau_{t-1}$ . Na linha  $i$  da matriz  $\mathbf{Z}$  o primeiro elemento é sempre 1. Se  $k_i < p$ , os seguintes  $p-1$  elementos serão nulos, com excepção do situado na coluna  $k_i + 1$  que é 1. Se  $k_i = p$  os elementos situados nas colunas, com índices 2 a  $p$ , serão iguais a -1. Da mesma forma, se  $h_i < t$ , nas últimas  $t-1$  colunas os elementos serão nulos, com excepção do situado na coluna com índice  $p + h_i$  que é 1, e, se  $h_i = t$ , todos esses elementos serão iguais a -1.

Eliminando  $\gamma_p$  e  $\tau_t$ , evitamos a multicolineariedade pelo que os vectores coluna de  $\mathbf{Z}$  são linearmente independentes, vindo

$$\text{car}(\mathbf{Z}) = p + t - 1, \quad (7.3)$$

e, para  $\boldsymbol{\lambda}^{p+t-1} = (\mu, \gamma_1, \dots, \gamma_{p-1}, \tau_1, \dots, \tau_{t-1})^T$ , teremos, ver Mexia (1995, pg. 75 a 76), o estimador

$$\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^{p+t-1} = (\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{X}^b \sim N(\boldsymbol{\lambda}^{p+t-1}, \sigma^{2*} (\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1}) \quad (7.4)$$

independente de

$$S = \mathbf{X}^T \mathbf{X} - \mathbf{X}^T \mathbf{Z} \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^{p+t-1} \sim \sigma^{2*} \chi_{b-(p+t-1)}^2, \quad (7.5)$$

desde que o vector  $\mathbf{X}^b$  de *índices ambientais* tenha distribuição  $N(\mathbf{Z} \boldsymbol{\lambda}^{p+t-1}, \sigma^{2*} \mathbf{I}_b)$ .

Dada a matriz  $\mathbf{B}$  do tipo  $s \times (p+t-1)$  com característica  $s$ , tem-se, ver Seber (1980, pg. 5),

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}^s = \mathbf{B} \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^{p+t-1} \sim N(\boldsymbol{\psi}^s, \sigma^{2*} \mathbf{U}), \quad (7.6)$$

com  $\boldsymbol{\psi}^s = \mathbf{B} \boldsymbol{\lambda}^{p+t-1}$  e  $\mathbf{U} = \mathbf{B} (\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{B}^T$  matriz definida positiva. Além disso, ver Mexia (1995, pg. 78),

$$\mathcal{F}^s = \frac{b-(p+t-1)}{s} \frac{(\tilde{\boldsymbol{\psi}}^s - \boldsymbol{\psi}_0^s)^T \mathbf{U}^{-1} (\tilde{\boldsymbol{\psi}}^s - \boldsymbol{\psi}_0^s)}{S} \quad (7.7)$$

terá distribuição  $F$  com  $s$  e  $b-(p+t-1)$  graus de liberdade e parâmetro de não centralidade

$$\delta = \frac{1}{\sigma^{2*}} (\boldsymbol{\psi}^s - \boldsymbol{\psi}_0^s)^T \mathbf{U}^{-1} (\boldsymbol{\psi}^s - \boldsymbol{\psi}_0^s), \quad (7.8)$$

escrevendo-se  $\mathcal{F}^s \sim F(z | s, b-(p+t-1), \delta)$ . Este parâmetro de não centralidade só se anula, se a hipótese

$$H_0 : \boldsymbol{\psi}^s = \boldsymbol{\psi}_0^s \quad (7.9)$$

se verificar. Assim, ver Mexia (1995, pg. 50 a 51), o teste  $F$  com estatística  $\mathcal{F}^s$  será não distorcido, visto o teste de nível  $\alpha$  ter potência crescente com  $\delta$

$$Pot_\alpha(\delta) = 1 - F(f_{1-\alpha, s, b-(p+t-1)} | s, b-(p+t-1), \delta). \quad (7.10)$$

Como

$$\mathcal{F}^s = \frac{b-(p+t-1)}{s} \frac{(\boldsymbol{\psi}^s - \tilde{\boldsymbol{\psi}}^s)^T \mathbf{U}^{-1} (\boldsymbol{\psi}^s - \tilde{\boldsymbol{\psi}}^s)}{S} \sim F(z | s, b-(p+t-1)) \quad (7.11)$$

obtem-se

$$pr \left( (\boldsymbol{\psi}^s - \tilde{\boldsymbol{\psi}}^s)^T \mathbf{U}^{-1} (\boldsymbol{\psi}^s - \tilde{\boldsymbol{\psi}}^s) \leq sf_{1-\alpha, s, b-(p+t-1)} \frac{S}{b-(p+t-1)} \right) = 1 - \alpha, \quad (7.12)$$

definindo a desigualdade que figura nesta expressão, ver Scheffé (1959, pg. 406 a 411), um elipsóide de confiança de nível  $1 - \alpha$  para  $\boldsymbol{\psi}^s$ . O teste apresentado atrás goza de dualidade, já que  $H_0$  não é rejeitada pelo teste de nível  $\alpha$ , se e só se  $\boldsymbol{\psi}_0^s$  pertencer ao elipsóide de confiança de nível  $1 - \alpha$ .

Consideramos, agora, algumas aplicações destes testes. Começamos por testar a hipótese

$$H_0 : \boldsymbol{\gamma}^p = \mathbf{0}^p. \quad (7.13)$$

De acordo com a primeira das restrições (7.2), esta hipótese pode ser reescrita como

$$H_0 : \gamma_1 = \dots = \gamma_{p-1} = 0, \quad (7.14)$$

ou, sendo

$$\mathbf{B}_1 = \left[ \mathbf{0}^{p-1} \mid \mathbf{I}_{p-1} \mid \mathbf{0}_{p-1,t-1} \right], \quad (7.15)$$

onde  $\mathbf{0}_{r,s}$  é a matriz nula de ordem  $r \times s$  e  $\boldsymbol{\psi}_1^{p-1} = \mathbf{B}_1 \boldsymbol{\lambda}^{p+t-1}$ , pode reescrever-se como

$$H_0 : \boldsymbol{\psi}_1^{p-1} = \mathbf{0}^{p-1}. \quad (7.16)$$

Do mesmo modo, com

$$\mathbf{B}_2 = \left[ \mathbf{0}^{t-1} \mid \mathbf{0}_{t-1,p-1} \mid \mathbf{I}_{t-1} \right] \quad (7.17)$$

e  $\boldsymbol{\psi}_2^{t-1} = \mathbf{B}_2 \boldsymbol{\lambda}^{p+t-1}$  a hipótese

$$H_0 : \boldsymbol{\tau}^t = \mathbf{0}^t \quad (7.18)$$

pode ser reescrita como

$$H_0 : \boldsymbol{\psi}_2^{t-1} = \mathbf{0}^{t-1}. \quad (7.19)$$

Quando  $s = 1$ , tem-se  $\mathbf{B} = \mathbf{a}^T$ , podendo também obter-se testes  $t$  para a hipótese

$$H_0 : \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}_0, \quad (7.20)$$

onde  $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{a}^T \boldsymbol{\lambda}$ . Dado  $\tilde{\boldsymbol{\psi}} = \mathbf{a}^T \tilde{\boldsymbol{\lambda}}$ , a estatística de teste

$$t(\boldsymbol{\psi}_0) = \frac{\tilde{\boldsymbol{\psi}} - \boldsymbol{\psi}_0}{\sqrt{\frac{S}{b - (p+t-1)} \mathbf{a}^T (\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{a}}} \quad (7.21)$$

terá a distribuição *t-Student* com  $b - (p+t-1)$  graus de liberdade, quando  $H_0$  se verifica.

Podemos agora, para além de testes bilaterais para  $H_0$ , nos quais testamos  $H_0$  contra

$$H_1 : \boldsymbol{\psi} \neq \boldsymbol{\psi}_0. \quad (7.22)$$

ter testes unilaterais direitos e esquerdos. No primeiro caso testamos  $H_0$  contra

$$H_1 : \psi > \psi_0 \quad (7.23)$$

e, no segundo caso, contra

$$H_1 : \psi < \psi_0 \quad (7.24)$$

O teste  $t$  bilateral goza da propriedade de dualidade, visto que, ver Mexia (1995, pg. 80),  $H_0$  não é rejeitada ao nível  $\alpha$ , se e só se  $\psi_0$  pertence ao intervalo de confiança de nível  $1 - \alpha$  para  $\psi = \mathbf{a}^T \boldsymbol{\lambda}$  dado por

$$\left[ \tilde{\psi} - t_{1-\frac{\alpha}{2}, b-(p+t-1)} C ; \tilde{\psi} + t_{1-\frac{\alpha}{2}, b-(p+t-1)} C \right], \quad (7.25)$$

onde  $C = \sqrt{\frac{S}{b-(p+t-1)} \mathbf{a}^T (\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{a}}$  e  $t_{1-\frac{\alpha}{2}, g}$  é o quantil para a probabilidade  $1 - \frac{\alpha}{2}$  da distribuição  $t$ -Student, com  $g$  graus de liberdade. Estes intervalos de confiança resultam da simetria da densidade  $t$ -Student

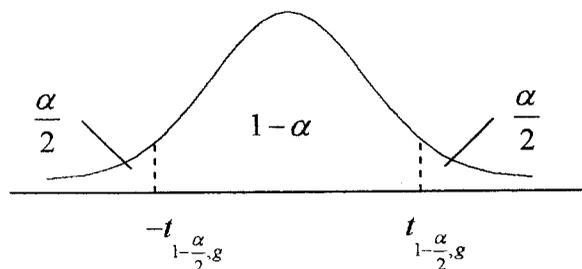


Figura 7.1. Densidade da  $t$  central.

Além disso, ambos os testes unilaterais são não enviesados, ver Mexia (1995, pg. 81).

### 7.3 – Comparações múltiplas

Tal como atrás, os métodos de Scheffé e de Bonferroni podem ser aplicados. No entanto, a aplicação neste caso é um pouco mais complicada do que no caso usual.

Para evitar repetições, consideramos os efeitos dos locais,  $\tau_1, \dots, \tau_{t-1}$ . Sendo  $\mathbf{V}$  a sub-matriz inferior direita de  $(\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1}$ , contendo os elementos das últimas  $t - 1$  linhas e colunas, ter-se-á

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}^{t-1} = \begin{bmatrix} \tilde{\tau}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\tau}_{t-1} \end{bmatrix} \sim N \left( \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_{t-1} \end{bmatrix}, \sigma^2 \mathbf{V} \right) = N(\boldsymbol{\tau}^{t-1}, \sigma^2 \mathbf{V}), \quad (7.26)$$

independente de  $S \sim \sigma^2 \chi_{b-(p+t-1)}^2$ . Assim, quando utilizamos o método de Scheffé, temos os intervalos de confiança simultâneos

$$pr \left[ \bigcap_{\mathbf{d}^{t-1}} \left( \left| \mathbf{d}^T \boldsymbol{\tau}' - \mathbf{d}^T \tilde{\boldsymbol{\tau}} \right| \leq \sqrt{(t-1) f_{1-\alpha, t-1, b-(p+t-1)}} \mathbf{d}^T \mathbf{V} \mathbf{d} \frac{S}{b-(p+t-1)} \right) \right] = 1 - \alpha; \quad (7.27)$$

logo, quando

$$\Delta(\mathbf{d}) = \sqrt{(t-1) f_{1-\alpha, t-1, b-(p+t-1)}} \mathbf{d}^T \mathbf{V} \mathbf{d} \frac{S}{b-(p+t-1)} < \left| \mathbf{d}^{T-1} \tilde{\boldsymbol{\tau}}^{t-1} \right|, \quad (7.28)$$

a probabilidade de ter-se  $\mathbf{d}^{T-1} \boldsymbol{\tau}^{t-1} = 0$  será, no máximo,  $\alpha$ . Diremos, então, que  $\mathbf{d}^T \boldsymbol{\tau}'$  é significativamente diferente de zero ao nível  $\alpha$ .

Os principais casos de aplicação serão para as diferenças  $\tau_i - \tau_\ell = \mathbf{d}_{i,\ell}^T \boldsymbol{\tau}$ . Seja  $\mathbf{d}_{i,\ell}$ , com  $i < \ell < t-1$ , o vector com todas as componentes nulas, salvo a  $i$ -ésima que é 1, e a  $\ell$ -ésima que é  $-1$ . Assim, com  $\mathbf{V} = [v_{j,h}]; j, h = 1, \dots, t-1$ , ter-se-á

$$\mathbf{d}_{i,\ell}^T \mathbf{V} \mathbf{d}_{i,\ell} = v_{i,i} - 2v_{i,\ell} + v_{\ell,\ell} \quad ; \quad i < \ell < t-1. \quad (7.29)$$

Quando  $\ell = t$ , temos  $\tau_i - \tau_t = \tau_i - \sum_{j=1}^{t-1} (-\tau_j) = \tau_i + \sum_{j=1}^{t-1} \tau_j$ , de forma que todas as componentes de  $\mathbf{d}_{i,t}$  serão 1, salvo a  $i$ -ésima que será 2, vindo

$$\mathbf{d}_{i,t}^T \mathbf{V} \mathbf{d}_{i,t} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{t-1} \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq i}}^{t-1} v_{j,h} + 4 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{t-1} v_{i,j} + 4v_{i,i}. \quad (7.30)$$

Substituindo as formas quadráticas dadas por (7.29) e (7.30) na expressão (7.28) obtemos os valores críticos ao nível de significância  $\alpha$ , para as diferenças entre os parâmetros  $\tau_1, \dots, \tau_t$ .

Para aplicar o método de Bonferroni temos apenas que substituir, ver Seber (1977),  $\sqrt{(t-1) f_{1-\alpha, t-1, b-(p+t-1)}}$  por  $t \frac{\alpha}{1-2(t-1) \alpha}$ . Observe-se que, os métodos de

comparação múltipla utilizados asseguram que todas as diferenças significativas se verificam conjuntamente ao nível de significância  $\alpha$ , ou seja, em ambos os métodos a probabilidade de todas as diferenças significativas encontradas serem reais é  $1 - \alpha$ .

## 7.4 – Verificação da aditividade

Vamos agora testar, seguindo Mexia & Pinto (2002), o pressuposto de aditividade. Caso  $b-(p+t-1)$  seja suficientemente grande, pode proceder-se, como a seguir se indica, a um teste para verificar se há interacção entre os dois factores. Com  $\Omega = R(\mathbf{Z})$ , seja  $\mathbf{L}$  uma matriz cujos vectores linha constituem uma base ortonormada para  $\Omega^\perp$ . Quando o pressuposto se verifica, o vector médio de  $\mathbf{X}^b = (X_1, \dots, X_b)^T$  pertence a  $\Omega$ , vindo  $E(\mathbf{LX}^b) = \mathbf{0}^q$ , com  $q = b - (p+t-1)$ . Sendo  $\tilde{\eta}_1, \dots, \tilde{\eta}_q$  as componentes de  $\tilde{\boldsymbol{\eta}}^q = \mathbf{LX}^b$ , os respectivos valores médios,  $\eta_1, \dots, \eta_q$ , serão as componentes de  $\boldsymbol{\eta}^q = E(\tilde{\boldsymbol{\eta}}^q)$ . Como  $\Sigma(\mathbf{X}^b) = \sigma^{2*} \mathbf{I}_b$ , teremos, ver Seber (1980, pg. 5),

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}}^q \sim N(\boldsymbol{\eta}^q, \sigma^{2*} \mathbf{I}_q), \quad \text{vindo} \quad \Sigma(\mathbf{LX}^b) = \sigma^{2*} \mathbf{I}_q \quad \text{bem como} \quad \left( \sum_{j=1}^q \tilde{\eta}_j \right)^2 \sim q\sigma^{2*} \chi_{1, \delta_1}^2,$$

independente de  $\sum_{j=1}^q (\tilde{\eta}_j - \tilde{\eta}_o)^2 \sim \sigma^{2*} \chi_{q-1, \delta_2}^2$ . Ter-se-á  $\tilde{\eta}_o = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q \tilde{\eta}_j$  e os parâmetros de não centralidade

$$\begin{cases} \delta_1 = \frac{1}{q\sigma^{2*}} \left( \sum_{j=1}^q \eta_j \right)^2 \\ \delta_2 = \frac{1}{\sigma^{2*}} \sum_{j=1}^q (\eta_j - \eta_o)^2, \end{cases} \quad (7.31)$$

com  $\eta_o = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q \eta_j$ . Assim,

$$\mathcal{F} = \frac{q-1}{q} \frac{\left( \sum_{j=1}^q \tilde{\eta}_j \right)^2}{\sum_{j=1}^q (\tilde{\eta}_j - \tilde{\eta}_o)^2} \quad (7.32)$$

terá distribuição  $F$  duplamente não central com 1 e  $q-1$  graus de liberdade e parâmetros de não centralidade  $\delta_1$  e  $\delta_2$ .

Quando a aditividade se verifica, a hipótese

$$H_o : \eta_1 = \dots = \eta_q = 0 \quad (7.33)$$

também se verifica. Segundo Mexia (1989, pg. 41), esta hipótese pode ser reescrita como

$$\delta_1 = \delta_2 = 0. \quad (7.34)$$

Este ponto é importante visto a razão da região crítica ter duas caudas reside no facto de haver alternativas a  $H_0$ , em que  $\delta_1$  predomina sobre  $\delta_2$ , e em que  $\mathcal{F}$  tende a tomar valores maiores, e outras em que  $\delta_2$  predomina sobre  $\delta_1$  e em que  $\mathcal{F}$  tende a tomar valores menores do que quando  $H_0$  se verifica.

O teste de nível de significância  $\alpha$ , com região de não rejeição  $[f_{\alpha/2,1,q-1} ; f_{1-\alpha/2,1,q-1}]$  tem, ver Mexia (1989, pg. 41), potência que cresce rapidamente com  $\delta_1$  e  $\delta_2$ .

## 7.5 – Blocos agrupados

Por vezes os blocos estão agrupados em ensaios locais no caso completo ou em super-blocos no caso incompleto. Pode interessar considerar os índices, para tais grupos de blocos, como constituindo amostras normais, para utilizarmos os resultados bem conhecidos dos modelos normais. Os níveis do factor local passam a corresponder aos ensaios locais ou aos super-blocos. É evidente que, no caso incompleto, os elementos destas amostras são obtidos pelo método dos mínimos quadrados.

Em geral, pode admitir-se que as amostras têm todas dimensão  $r$ . Estaremos, pois, no caso equilibrado em que, ver Ito (1980) e Scheffé (1959, pág. 345), os testes  $F$  e técnicas relacionadas são robustos relativamente à heterocedasticidade e ainda mais relativamente à falta de normalidade. Podemos, assim, tratar as amostras como normais homocedásticas, com variâncias  $\sigma^{2*}$ , quando efectuamos estas técnicas para hipóteses relativas aos valores médios. Estes valores médios corresponderão aos blocos dos ensaios locais ou aos super-blocos. Sendo  $\mathbf{z}^k$  o vector das médias amostrais multiplicadas por  $\sqrt{r}$ , e  $S$  a soma, para todas as amostras, das somas dos quadrados dos resíduos para a média. Como referimos atrás, podemos assumir que o vector  $\mathbf{z}^k$  é normal com vector médio  $\boldsymbol{\mu}^k$  e matriz de variância-covariância  $\Sigma(\mathbf{z}^k) = \sigma^{2*} \mathbf{I}_k$  independente de  $S \sim \sigma^{2*} \chi_g^2$ , com  $g = \kappa(r-1)$ . Sendo  $\tilde{\boldsymbol{\psi}}^s = \mathbf{A}\mathbf{z}^k$  e  $\boldsymbol{\psi}^s = \mathbf{A}\boldsymbol{\mu}^k$ , onde a matriz  $\mathbf{A}$  é do tipo  $s \times \kappa$  com característica  $s$ , teremos, ver Seber (1980, pg. 5),  $\tilde{\boldsymbol{\psi}}^s \sim N(\boldsymbol{\psi}^s, \sigma^{2*} \mathbf{A}\mathbf{A}^T)$  independente de  $S$ . Então, para testarmos

$$H_0: \boldsymbol{\psi}^s = \boldsymbol{\psi}_0^s \quad (7.35)$$

temos a estatística de teste

$$\mathcal{F} = \frac{g}{s} \frac{(\tilde{\boldsymbol{\psi}}^s - \boldsymbol{\psi}_0^s)^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} (\tilde{\boldsymbol{\psi}}^s - \boldsymbol{\psi}_0^s)}{S}, \quad (7.36)$$

que tem distribuição  $F$ , com  $s$  e  $g$  graus de liberdade e parâmetro de não-centralidade

$$\delta = \frac{1}{\sigma^{2s}} (\boldsymbol{\psi}^s - \boldsymbol{\psi}_0^s)^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} (\boldsymbol{\psi}^s - \boldsymbol{\psi}_0^s), \quad (7.37)$$

anulando-se apenas se  $H_0$  se verifica; logo, ver Mexia (1995, pg. 81), este teste é não enviesado.

Além disso,

$$\mathcal{F}' = \frac{g}{s} \frac{(\boldsymbol{\psi}^s - \tilde{\boldsymbol{\psi}}^s)^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} (\boldsymbol{\psi}^s - \tilde{\boldsymbol{\psi}}^s)}{S} \quad (7.38)$$

também terá distribuição  $F$  central com  $s$  e  $g$  graus de liberdade, de forma que

$$pr\left( (\boldsymbol{\psi}^s - \tilde{\boldsymbol{\psi}}^s)^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} (\boldsymbol{\psi}^s - \tilde{\boldsymbol{\psi}}^s) \leq sf_{1-\alpha, s, g} \frac{S}{g} \right) = 1 - \alpha \quad (7.39)$$

define um elipsóide de confiança de nível  $1 - \alpha$  para  $\boldsymbol{\psi}^s$ . Visto que o teste  $F$  de nível de significância  $\alpha$  não rejeita  $H_0$ , se e só se este elipsóide contém  $\boldsymbol{\psi}_0^s$ , o mesmo goza de dualidade.

Muitas vezes os grupos de blocos correspondem a diferentes combinações de locais e anos. Pretendemos então, agora, estimar e testar os efeitos dos diferentes locais e anos. Para isso, podemos adoptar, seguindo de novo Mexia & Pinto (2001), uma aproximação regressional. Nesta aproximação, seguindo Caliński et al. (1987a), (1987b), (1995a) e (1995b), admitiremos que existe aditividade entre locais e anos.

Se há  $p$  anos e  $t$  locais, assumiremos para os valores médios dos *índices ambientais* o modelo

$$\mu_{ij} = \mu + \gamma_i + \tau_j, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, t \quad (7.40)$$

com  $\mu$  a média geral,  $\gamma_i$  o efeito do  $i$ -ésimo ano e  $\tau_j$  o efeito do  $j$ -ésimo local. Visto

que  $\sum_{i=1}^p \gamma_i = 0$  e  $\sum_{j=1}^t \tau_j = 0$ , tomamos  $\gamma_p = -\sum_{i=1}^{p-1} \gamma_i$  e  $\tau_t = -\sum_{j=1}^{t-1} \tau_j$  de forma que temos o

vector  $\boldsymbol{\lambda}^{p+t-1} = (\mu, \gamma_1, \dots, \gamma_{p-1}, \tau_1, \dots, \tau_{t-1})$  de parâmetros. Sendo  $\mathbf{M}$  a matriz do modelo, obtemos os estimadores

$$\tilde{\lambda}^s = (\mathbf{M}^T \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T \mathbf{x}^b \sim N\left(\lambda^s, \sigma^2 (\mathbf{M}^T \mathbf{M})^{-1}\right), \quad (7.41)$$

com  $s = p + t - 1$  componentes independentes de  $S \sim \sigma^2 \chi_g^2$ .

Como é natural agrupar os *índices ambientais*, ou seja as componentes de  $\mathbf{x}^b$ , de acordo com os pares  $(i, j)$ , a matriz  $\mathbf{M}$  terá grupos de  $r$  linhas contíguas idênticas. Sendo  $\mathbf{M}^\circ$  a matriz obtida, tomando uma linha de cada grupo e  $\mathbf{x}_\circ^\kappa$  o vector das médias dos *índices ambientais* tomadas para os  $\kappa$  pares  $(i, j)$ , ter-se-á  $b = \kappa r$  e  $g = \kappa(r-1)$ , bem como

$$\begin{cases} \mathbf{M}^T \mathbf{M} = r \mathbf{M}^{\circ T} \mathbf{M}^\circ \\ \mathbf{M}^T \mathbf{x}^b = r \mathbf{M}^{\circ T} \mathbf{x}_\circ^\kappa \end{cases}, \quad (7.42)$$

vindo  $(\mathbf{M}^T \mathbf{M})^{-1} = \frac{1}{r} (\mathbf{M}^{\circ T} \mathbf{M}^\circ)^{-1}$ , assim como

$$\tilde{\lambda}^s = (\mathbf{M}^{\circ T} \mathbf{M}^\circ)^{-1} \mathbf{M}^{\circ T} \mathbf{x}_\circ^\kappa. \quad (7.43)$$

Para abreviarmos a notação, pomos  $\mathbf{V} = (\mathbf{M}^{\circ T} \mathbf{M}^\circ)^{-1} = [v_{\ell, h}]$ ,  $\ell, h = 1, \dots, s$ , e para testarmos a nulidade de qualquer uma das componentes de  $\lambda^s$ , podemos usar a estatística

$$t_i = \frac{\tilde{\lambda}_i}{\sqrt{\frac{S}{g} v_{i,i}}}, \quad i = 1, \dots, s. \quad (7.44)$$

O problema é ligeiramente mais complicado quando testamos a nulidade de  $\gamma_p$  ou de  $\tau_t$ . Temos, agora

$$\begin{cases} \text{Var}(\tilde{\gamma}_p) = \text{Var}\left(-\sum_{i=1}^{p-1} \tilde{\gamma}_i\right) = \text{Var}\left(-\sum_{i=2}^p \tilde{\lambda}_i\right) = \sigma^2 \sum_{i=2}^p \sum_{\ell=2}^p v_{i,\ell} \\ \text{Var}(\tilde{\tau}_t) = \text{Var}\left(-\sum_{j=1}^{t-1} \tilde{\tau}_j\right) = \text{Var}\left(-\sum_{i=p+1}^s \tilde{\lambda}_i\right) = \sigma^2 \sum_{i=p+1}^s \sum_{\ell=p+1}^s v_{i,\ell} \end{cases} \quad (7.45)$$

e  $v_{i,i}$  deve ser substituído na expressão (7.44) por  $\sum_{i=2}^p \sum_{\ell=2}^p v_{i,\ell}$  ou por  $\sum_{i=p+1}^s \sum_{\ell=p+1}^s v_{i,\ell}$ .

Podemos também efectuar comparações múltiplas. Para evitarmos repetições, consideramos o caso dos efeitos dos locais. Enquanto que, para o método de Scheffé, as mínimas diferenças significativas para os pares  $(j, j')$  com  $j < j' < t$  são

$$d_{\alpha, j, j'} = \sqrt{(t-1) f_{1-\alpha, t-1, g} (v_{j+2, j+2} - 2v_{j+2, j'+2} + v_{j'+2, j'+2})} \frac{S}{g} \quad ; j < j' < t \quad (7.46)$$

e

$$d_{\alpha, j, t} = \sqrt{(t-1) f_{1-\alpha, t-1, g} \left( 4v_{j+2, j+2} + 4 \sum_{\substack{j'=2 \\ j' \neq j}}^s v_{j+2, j'+2} + \sum_{\substack{j'=2 \\ j' \neq j}}^s \sum_{\substack{j''=2 \\ j'' \neq j}}^s v_{j'+2, j''+2} \right)} \frac{S}{g} \quad ; j < t, \quad (7.47)$$

para o primeiro caso temos o vector usual de diferenças com apenas duas componentes não nulas, 1 e -1, enquanto que no segundo caso temos um vector com componentes iguais a 1, salvo a  $j$ -ésima componente, que é igual a 2, visto que

$$\tau_j - \tau_t = \tau_j - \left( - \sum_{j'=1}^{t-1} \tau_{j'} \right) = \sum_{\substack{j'=1 \\ j' \neq t}}^{t-1} \tau_{j'} + 2\tau_j, \quad (7.48)$$

vindo

$$[1 \quad \dots \quad 2 \quad \dots \quad 1] \begin{bmatrix} v_{3,3} & \dots & v_{3,s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{s,3} & \dots & v_{s,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 2 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = 4v_{j+2, j+2} + 4 \sum_{\substack{j'=2 \\ j' \neq j}}^s v_{j+2, j'+2} + \sum_{\substack{j'=2 \\ j' \neq j}}^s \sum_{\substack{j''=2 \\ j'' \neq j}}^s v_{j'+2, j''+2} \quad (7.49)$$

Quando aplicamos o método de Boferroni devemos substituir  $\sqrt{(t-1) f_{1-\alpha, t-1, g}}$  por  $t^{1-\frac{\alpha}{2(t-1)g}}$ .

Vamos agora efectuar esta análise para o exemplo de aplicação que consideramos nas Secções 3.8, 5.4 e 6.3.

Os locais onde se realizaram os ensaios variam consoante o ano de cultura em estudo, sendo:

**Tabela 7.1. Locais e anos onde foram efectuados os ensaios.**

Ensaio	Ano	Local	Ensaio	Ano	Local
1	1992/93	Benavila	7	1993/94	Herdade da Casa Velha (Elvas)
2	1992/93	Revilheira	8	1993/94	Tavira
3	1992/93	Évora	9	1993/94	Herdade da Comenda (Elvas)
4	1992/93	E.N.M.P. (Elvas)	10	1993/94	Benavila
5	1992/93	Beja	11	1993/94	Beja
6	1992/93	Tavira			

Como tínhamos apenas dois anos,  $\gamma [-\gamma]$  será o efeito do primeiro ano [segundo ano] e os efeitos dos locais serão

$\tau_1$  - Benavila

$\tau_2$  - Revilheira

$\tau_3$  - Évora

$\tau_4$  - E. N. M. P. (Elvas)

$\tau_5$  - Beja

$\tau_6$  - Tavira

$\tau_7$  - Herdade da Casa Velha (Elvas)

$\tau_8$  - Herdade da Comenda (Elvas),

recordando que  $\tau_8 = -\sum_{h=1}^7 \tau_h$ .

Estamos perante um caso completo, já que os  $J = 9$  cultivares estavam presentes nos 44 blocos da *rede de ensaios*.

Como referimos atrás, haverá que ajustar uma regressão linear dos *índices ambientais* nos parâmetros: média geral e efeito de ano e local acima referidos.

A matriz do sistema é

$$\mathbf{M}^\circ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.50)$$

Apresentamos os efeitos estimados e os correspondentes testes  $t$ , indicando por \* os valores significativos ao nível 5% de probabilidade de erro, na tabela seguinte:

Tabela 7.2. Efeitos estimados e testes  $t$ .

	Estimativas	Testes $t$
$\bar{y}$	653,80	4,27*
$\bar{t}_1$	-979,20	-3,77*
$\bar{t}_2$	-2362,85	-6,36*
$\bar{t}_3$	-2043,14	-5,50*
$\bar{t}_4$	424,53	1,14
$\bar{t}_5$	1748,85	6,73*
$\bar{t}_6$	2830,38	10,89*
$\bar{t}_7$	62,12	0,16
$\bar{t}_8$	319,31	0,83

sendo a soma das somas de quadrados de resíduos 4649728.

Concluindo-se então, ao nível 5% de probabilidade de erro, que:

- os anos são significativamente diferentes, ou seja, o primeiro ano difere do segundo, sendo-lhe significativamente superior;
- os locais Benavila, Revilheira e Évora têm uma capacidade produtiva significativamente abaixo da média do conjunto;
- os locais Beja e Tavira têm uma capacidade produtiva significativamente acima da média do conjunto.

Para os efeitos do local, aplicou-se o método de comparação múltipla de Scheffé. As diferenças significativas encontradas apresentam-se na tabela seguinte:

Tabela 7.3. Diferenças significativas entre locais, utilizando o método de comparação múltipla de Scheffé.

$ \bar{t}_j - \bar{t}_l , j \neq l, j, l = 1, \dots, 8$							
Local	Benavila	Revilheira	Évora	E.N.M.P.	Beja	Tavira	Herdade da Casa Velha
Revilheira	1383,65						
Évora	1063,95	319,70					
E.N.M.P.	1403,72	2787,37*	2467,67*				
Beja	2728,05*	4111,69*	3791,99*	1324,32			
Tavira	3809,57*	5193,22*	4873,52*	2405,85*	1081,53		
Herdade da Casa Velha	1041,31	2424,96*	2105,26	362,41	1686,73	2768,26*	
Herdade da Comenda	1298,51	2682,16	2362,46	105,21	1429,54	2511,06	257,19

onde \* indica os valores significativos ao nível de significância de 5% de probabilidade de erro.

Concluindo-se então, ao nível 5% que:

- o local Benavila difere dos locais Beja e Tavira;
- o local Revilheira difere dos locais E. N. M. P. (Elvas), Beja, Tavira e Herdade da Casa Velha (Elvas);
- Évora difere dos locais E. N. M. P. (Elvas), Beja e Tavira;
- E. N. M. P. (Elvas) difere de Tavira;
- Tavira difere de Herdade da Casa Velha (Elvas).

Além disso, aplicando agora o método de comparação múltipla de Bonferroni, obtemos os resultados apresentados na tabela seguinte:

**Tabela 7.4. Diferenças significativas entre locais, utilizando o método de comparação múltipla de Bonferroni.**

$ \tilde{\tau}_j - \tilde{\tau}_\ell , j \neq \ell, j, \ell = 1, \dots, 8$							
Local	Benavila	Revilheira	Évora	E.N.M.P.	Beja	Tavira	Herdade da Casa Velha
Revilheira	1383,65*						
Évora	1063,95	319,70					
E.N.M.P.	1403,72*	2787,37*	2467,67*				
Beja	2728,05*	4111,69*	3791,99*	1324,32*			
Tavira	3809,57*	5193,22*	4873,52*	2405,85*	1081,53*		
Herdade da Casa Velha	1041,31	2424,96*	2105,26*	362,41	1686,73*	2768,26*	
Herdade da Comenda	1298,51	2682,16	2362,46	105,21	1429,54	2511,06*	257,19

Concluindo-se , ao nível 5% que:

- Benavila difere de E. N. M. P. (Elvas), Beja e Tavira;
- Revilheira difere de E. N. M. P. (Elvas), Beja, Tavira e Herdade da Casa Velha (Elvas);
- Évora difere de E. N. M. P. (Elvas), Beja, Tavira e Herdade da Casa Velha (Elvas);
- E. N. M. P. (Elvas) difere de Beja e Tavira;
- Beja difere de Tavira e Herdade da Casa Velha (Elvas);
- Tavira difere de Herdade da Casa Velha (Elvas) e Herdade da Comenda (Elvas).

Assim, podemos concluir que o método de Bonferroni tem um maior poder discriminativo.

Note-se que todas as comparações efectuadas foram feitas conjuntamente ao nível de significância de 5%.

Observe-se ainda que podemos, ver Mexia & Pinto (2002), adaptar o método dos resíduos para verificar a aditividade entre local e ano.

Aplicando o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt aos vectores coluna das matrizes  $\mathbf{M}$  e  $[\mathbf{M} ; \mathbf{I}_b]$ , com  $b = \kappa r$ , obtemos os vectores que constituem uma base ortonormada para  $R(\mathbf{M})$  e para  $R(\mathbf{M})^\perp$ . Sendo  $\mathbf{K}$  uma matriz, cujos vectores linha constituem uma base ortonormada para  $R(\mathbf{M})^\perp$ , podemos aplicar o teste descrito na Secção 6.2 às componentes de  $\mathbf{Kx}^b$ .

Obteve-se o valor  $T = 1.78$  da estatística de teste, que, comparado com os valores críticos para o nível de significância 5% (6.18 e 34102), levou a rejeitar-se o pressuposto de aditividade entre locais e anos.

Como já referimos anteriormente, quando a aditividade não se verifica o qui-quadrado que figura na soma de quadrados para o erro não é central, perdendo assim os testes  $F$  potência, com as consequências atrás referidas.

## 8 – Cultivares recomendados

### 8.1 – Listas de cultivares

A certificação de cultivares é obrigatória na maioria dos países nomeadamente nos integrados na UPOV (International Union for the Protection of New Varieties of Plants). O procedimento base assenta em ensaios DUS (Distinctness, uniformity and stability), nos quais são avaliadas a identidade, uniformidade e estabilidade dos cultivares e verificada a sanidade da planta.

A selecção de um cultivar individual, para admissão definitiva à certificação e para utilização comercial como material certificado, é obrigatória na legislação europeia. As exigências relativas ao material de propagação estão definidas pela legislação.

Em muitos países, para além de uma lista de cultivares certificados, existe, para as principais colheitas, uma segunda lista mais restrita de cultivares recomendados. Todos os anos são certificados novos cultivares. Impõe-se, pois, um processo permanente de actualização da lista dos cultivares recomendados. Este processo deverá incidir sobre comparação de cultivares recomendados com cultivares recém-certificados. No final, haverá cultivares recomendados “despromovidos” e cultivares recém-certificados “promovidos”.

Dada a sua flexibilidade, a ACR pode desempenhar um papel importante nesta área, ver Mexia & Pereira (2001), Pereira & Mexia (2002), (2003a) e (2003b). Se tivermos um conjunto restrito de cultivares recomendados poderíamos usá-los como verificadores, os quais deveriam ser comparados com cultivares recém-certificados.

Dado um cultivar, para ser recomendado, tem de ser utilizável numa zona suficientemente vasta sendo a ACR uma técnica a utilizar na comparação atrás referida entre cultivares.

As comparações fazem-se em *redes* separadas de ensaios que têm em comum o grupo dos cultivares dominantes recomendados. Como critério para avaliar os resultados de tais comparações, propomos:

- um cultivar recém-certificado passa a cultivar recomendado só se é dominante, isto é, se a sua regressão ajustada participa no contorno superior;

- um cultivar previamente recomendado perde essa categoria, quando é significativamente dominado ao longo de todo o intervalo de *índices ambientais*.

Além disso, na ausência duma lista de cultivares recomendados, pode utilizar-se a ACR na construção da mesma. Em geral, tem-se alguma informação sobre os cultivares certificados que permite agrupar os mesmos em  $J$  grupos de, digamos para simplificar,  $k$  cultivares. Tira-se ao acaso um cultivar de cada grupo de forma a construir-se um primeiro lote e repete-se o processo até se ter  $k$  lotes. Os lotes terão, assim, uma composição equilibrada uns em relação aos outros. Para cada lote de cultivares, haverá que realizar uma *rede de ensaios*. Os cultivares dominantes dos vários lotes constituem a lista inicial de cultivares recomendados.

Por último, a ACR pode ser usada na rectificação de uma lista excessivamente longa de cultivares recomendados.

Para mostrarmos as possibilidades da ACR nesta área, adiante daremos um exemplo de aplicação especialmente interessante para Portugal, em que ainda não existem listas de cultivares recomendados, e no qual obtivemos valores muito baixos dos quocientes de selecção  $r_1$  e  $r_2$ .

## 8.2 - Exemplo de escolha de cultivares recomendados

Nesta aplicação, utilizamos os dados obtidos em 17 “ $\alpha$ -designs” efectuados pelo Research Centre for Cultivar Testing de Supia Wielka (Polónia) nos anos de 1997 e 1998.

Nestes ensaios, eram comparados cultivares de centeio de Inverno. Por delineamento, havia 4 super-blocos, tendo cada um 5 blocos de 4 parcelas. Cada cultivar estava presente numa parcela por super-bloco. Os 20 cultivares sobre os quais incidiu o estudo foram:

Tabela 8.1. Nome dos cultivares estudados.

Nome dos cultivares			
01AMILO	1WARKO	1MARDER	ADAR
02ZDUNO	1SMH 1094	1SMH 1195	1SMH 1295
03NAD 195	ESPRIT	RAH 496	CHD 296
04 CHD 396	1RAH 596	WID 196	RAH 697
05RAPID	RAH 797	RAH 897	URSUS

tendo-se os pares (local , ano) a seguir indicados:

**Tabela 8.2. Locais e anos onde se realizaram os ensaios.**

Ensaio	Local / Estação Experimental	Ano
1	Lubinicko	1998
2	Pokój	1997/98
3	Dukla	1998
4	Uhnin	1998
5	Ruska wieś	1997
6	Łopuszna	1998
7	Kawęczyn	1998
8	Rychliki	1998
9	Głodowo	1998
10	Rarwino	1998
11	Masłowice	1998
12	Lubliniec Nowy	1998
13	Krościna Mała	1998
14	Seroczyn	1998
15	Cicibór	1998
16	Kochcice	1998
17	Sulejów	1998

Os resultados finais dos ajustamentos realizados, aplicando o *algoritmo ziguezague* estão apresentados, na seguinte tabela:

**Tabela 8.3. Coeficientes ajustados e de determinação.**

Cultivar	$\tilde{\alpha}$	$\tilde{\beta}$	$R^2$
URSUS	-1,59	1,29	0,96
RAH 797	-1,60	1,22	0,97
05RAPID	-0,78	1,12	0,97
1MARDER	-0,73	1,12	0,94
RAH 897	-0,55	1,09	0,95
ESPRIT	-0,22	1,07	0,92
WID 196	-0,38	1,06	0,96
03NAD 195	-0,68	1,05	0,93
02ZDUNO	-0,82	1,02	0,97
1RAH 596	-0,15	1,01	0,95
RAH 496	0,20	1,00	0,95
1WARKO	-0,63	0,99	0,96
CHD 296	-0,55	0,98	0,93
04CHD 396	-0,54	0,98	0,95
1SMH 1195	-0,45	0,96	0,93
ADAR	-0,35	0,96	0,96
RAH 697	0,77	0,95	0,91
01AMILO	-0,27	0,93	0,93
1SMH 1295	-0,16	0,93	0,96
1SMH 1094	0,65	0,80	0,90

As regressões ajustadas estão representadas no gráfico seguinte:

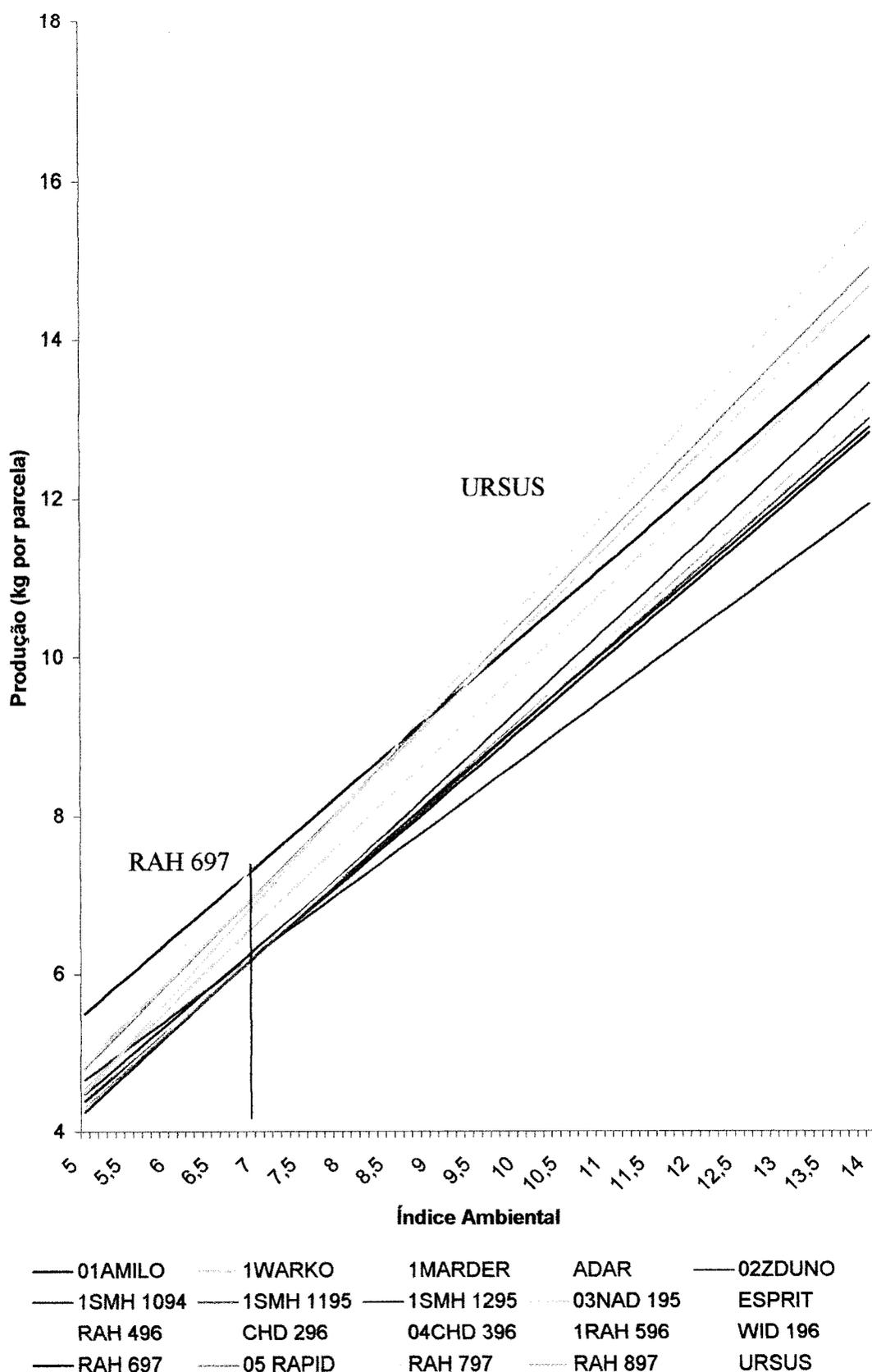


Figura 8.1. Regressões ajustadas, utilizando *índices ambientais*  $L_2$  para os 17 ensaios.

Para compararmos os cultivares que integram o contorno superior (dominantes) com os restantes, começamos por usar testes unilaterais  $t$ . Os resultados são os que se seguem

**Tabela 8.4. Cultivares dominantes e dominados.**

Cultivares dominantes	Intervalo de Dominância	Cultivares dominados ao nível de 5%
URSUS	[6.84 ; 13.47]	RAH 797, 05RAPID, 1MARDER, RAH 897, WID 196, 03NAD 195, 02ZDUNO, 1RAH 596, 1WARKO, CHD 296, 04CHD 396, 1SMH 1195, ADAR, 01AMILO, 1SMH 1295, 1SMH 1094
RAH 697	[5.42 ; 6.84]	RAH 797, 05RAPID, 1MARDER, RAH 897, WID 196, 03NAD 195, 02ZDUNO, 1RAH 596, 1WARKO, CHD 296, 04CHD 396, 1SMH 1195, ADAR, 01AMILO, 1SMH 1295, 1SMH 1094

Podemos ver, facilmente, que além dos cultivares dominantes (URSUS e RAH 697) apenas os cultivares ESPRIT e RAH 496 não estão significativamente dominados ao nível de 5% de probabilidade de erro, no intervalo de variação das médias dos super-blocos [5.42 ; 13.47]. Se trabalharmos ao nível de 1%, teremos de incluir também o cultivar 1MARDER como não significativamente dominado. Assim, neste caso obtiveram-se os quocientes de eficiência  $r_1 = 0.1$  e  $r_2 = 0.20$  (0.25 se trabalharmos ao nível de 1%).

Se quiséssemos utilizar métodos mais robustos, poderíamos aplicar os métodos de comparação múltipla de Scheffé e Bonferroni. Neste caso temos:

Tabela 8.5. Cultivares significativamente dominados, utilizando o método de Scheffé e Bonferroni.

Método	RAH 697	RAH 697	URSUS	URSUS
	Intervalo esquerdo (extremo esquerdo) $x_0 = 5.42$	Intervalo esquerdo (extremo direito) $x_0 = 6.84$	Intervalo direito (extremo esquerdo) $x_0 = 6.84$	Intervalo direito (extremo direito) $x_0 = 13.47$
Scheffé	01AMILO, 1SMH 1295, 1SMH 1094	03NAD 195, 02ZDUNO, 1WARKO, CHD 296, 04CHD 396, 1SMH 1195, ADAR	03NAD 195, 02ZDUNO, 1WARKO, CHD 296, 04CHD 396, 1SMH 1195, ADAR, 01AMILO, 1SMH 1295, 1SMH 1094	Nenhum cultivar significativamente dominado, pois não existe nenhum cultivar com maior declive
Bonferroni	01AMILO, 1SMH 1295, 1SMH 1094	RAH 797, WID 196, 03NAD 195, 02ZDUNO, 1RAH 596, 1WARKO, CHD 296, 04CHD 396, 1SMH 1195, ADAR	RAH 797, WID 196, 03NAD 195, 02ZDUNO, 1RAH 596, 1WARKO, CHD 296, 04CHD 396, 1SMH 1195, ADAR, 01AMILO, 1SMH 1295, 1SMH 1094	

Enquanto que o quociente de eficiência  $r_1$  continua a ser 0.1,  $r_2$  aumenta consideravelmente. Estes resultados apontariam para um elevado desempenho, a ser requerido para um novo cultivar vir a ser recomendado e a tomarem-se decisões robustas, quando os cultivares previamente recomendados perderem essa categoria. Esta perspectiva parece bastante aceitável, devido aos custos para se obterem os cultivares a serem usados.

## 9 – Conclusões gerais

Para resumir, sublinhamos as principais realizações apresentadas neste trabalho. A maioria delas está baseada nos *índices ambientais*  $L_2$ . Em particular, o trabalho precedente mostrou que a utilização dos *índices ambientais*  $L_2$  permitiu:

- ★ construir uma fundamentação teórica da ACR, integrando-a na inferência estatística para modelos normais. Foi assim possível:
  - obter estimadores de máxima verosimilhança para os *índices ambientais* e os coeficientes das regressões, melhorando assim o ajustamento;
  - realizar testes de quociente de verosimilhança;
  - utilizar o método do perfil na determinação dos intervalos associados aos cultivares dominantes;
  - ajustar, duma forma eficiente, as regressões na presença de interacções específicas significativas;
  - estudar a acção dos factores local e ano sobre os *índices ambientais*;
  - verificar o ajustamento do modelo base da ACR a *redes* determinadas de ensaios;
- ★ aplicar a técnica a *redes* conectadas de blocos incompletos, aumentando assim o número de cultivares a ser comparados e possibilitando a aplicação da técnica às *redes* de “ $\alpha$ -designs”, hoje maioritariamente utilizados na experimentação;
- ★ utilizar o conceito de ZEA, quando são efectuados delineamentos em blocos incompletos.

Note-se ainda que, através da utilização de pesos aos pares (local, ano), é possível atender à importância agronómica dos vários locais.

O alargamento do âmbito de aplicação da ACR foi conseguido sem perda da flexibilidade desta, enquanto técnica de selecção de cultivares. Observe-se que foi possível mostrar como aplicar a ACR na elaboração de listas de cultivares recomendados.

Por último, referimos que um algoritmo apropriado foi desenvolvido para o ajustamento de *índices ambientais*  $L_2$ , o *algoritmo zigzag*.

Pretendemos continuar o estudo desta técnica. O primeiro objectivo será verificar se a mesma é reprodutiva ou não. Em seguida, pretendemos elaborar um “Package” que permita a aplicação da técnica por cientistas, trabalhando em Institutos de Melhoramento Vegetal, retribuindo, assim, o apoio que deles recebemos.

## 10 - Bibliografia

-  Aastveit, A. H. and Mejza, S. (1992) – *A selected bibliography on statistical methods for the analysis of genotype × environment interaction*. Biuletyn Oceny Odmian, 24-25 : 83 – 97.
-  Allard, R. W. and Bradshaw, A. D. (1964) – *Implications of genotype-environment interactions in applied plant breeding*. Crop. Sci. 4 : 503 – 508.
-  Bazarra, M. S., Sherali, H. D. and Shetty, C. M. (1992) – *Nonlinear programming, Theory and Algorithms*. 2<sup>nd</sup> ed., John Wiley and Sons, New York.
-  Becker, H. C. and J. Leon (1988) – *Stability analysis in plant breeding*. Plant Breeding, 101 : 1 – 23.
-  Bose, R. C. (1950) – *Least squares aspects of analysis of variance*. Mimeo Series 9, Institute of Statistics, University of North Carolina, Chapel Hill.
-  Caliński, T., Czajka, S. and Kaczmarek, Z. (1987a) – *A model for the analysis of a series of experiments repeated at several places over a period of years, I. Theory*. Biuletyn Oceny Odmian, 17-18 : 7 – 33.
-  Caliński, T., Czajka, S. and Kaczmarek, Z. (1987b) – *A model for the analysis of a series of experiments repeated at several places over a period of years, II. Example*. Biuletyn Oceny Odmian, 17-18 : 35 – 71.
-  Caliński, T., Czajka, S., Kaczmarek, Z. and Lejeune, M. (1995a) – *The application of factor analysis in interpreting results of a series of variety trials, I. Theory*. Biuletyn Oceny Odmian, 26-27 : 7 – 22.
-  Caliński, T., Czajka, S., Kaczmarek, Z. and Lejeune, M. (1995b) – *The application of factor analysis in interpreting results of a series of variety trials, II. Example*. Biuletyn Oceny Odmian, 26-27 : 23 – 38.
-  Currie, I. D. and Durban, M. (2000) – *Adjusted profile score: some applications*. Statistical Modelling. Proceedings of the 15<sup>th</sup> International Workshop on Statistical Modelling, Bilbao, Spain, July 17 - 21 : 404 – 407.
-  Dias, G. C. (1994) – *Selective F tests*. Trabalhos de Investigação, n°1. FCT/UNL.
-  Dias, C. P. (2000) – *Análise Conjunta Pesada de Regressões*. Tese de Mestrado. Universidade de Évora.

- 📖 Digby, P. G. N. (1979) – *Modified joint regression analysis for incomplete variety  $\times$  environment data*. J. Agric. Sci., Camb., 93 : 81 – 86.
- 📖 Durban, M. and Currie, I. D. (2000) – *Adjustment of the profile Likelihood for a class of normal regression models*. Scandinavian Journal of Statistics, 27 : 535 – 542.
- 📖 Eberhart, S. A. and Rusell, W. A. (1966) - *Stability parameters for comparing varieties*. Crop. Sci, 6 : 36 - 40.
- 📖 Ferreira, T.; Mexia, J. T.; Baeta, J.; Maças, B.; Gusmão, L.; Bagulho, F. and Coutinho, J., (1990) - *Comportamento relativo das cultivares de triticales produzidas na E. N. M. P., no período 1987/88 e 1988/89 : II. Aferido pela análise de regressão conjunta*. In “V Reunião Portuguesa sobre Triticales” - Elvas, Maio 1990 – Melhoramento, vol. 32.
- 📖 Finlay, K. W. and Wilkinson, G. N. (1963) - *The analysis of adaptation in a plant-breeding programme*. Aust. J. Agric. Res., 14 : 742 - 754.
- 📖 Fisz, M. (1963) – *Probability theory and mathematical statistics*. 3<sup>rd</sup> ed. John Wiley and Sons, New York.
- 📖 Fox, P. N. and Rosielle, A. A. (1982) – *Reducing the influence of environmental main-effects on pattern analysis of plant breeding environments*. Euphytica 31 : 645 – 656.
- 📖 Friedman, M. (1937) - *The use of ranks to avoid the assumption of normality implicit in the analysis of variance*. J. Am. Statist. Assoc., 32 : 675 - 701.
- 📖 Friedman, M. (1940) – *A comparison of alternative tests of significance for the problem of  $m$  rankings*. Annals of Mathematical Statistics, 11 : 86 – 92.
- 📖 Giraldes, E.; Fernandes, V. H.; Smith, M. P. M. (1995) - *Álgebra linear e geometria analítica*. McGraw-Hill, Lisboa.
- 📖 Guerreiro, J. S. (1970) - *Curso de Matemáticas Gerais: Noções de Álgebra Linear*. Vol. IV - Escolar Editora, Lisboa.
- 📖 Gusmão, L. (1985) - *An adequate design for regression analysis of yield trials*. Theor. Appl. Genet., 71 : 314 - 319.
- 📖 Gusmão, L. (1986a) - *Inadequacy of blocking in cultivar yield trials*. Theor. Appl. Genet., 72 : 98 - 104.
- 📖 Gusmão, L. (1986b) - *A interação genótipo  $\times$  ambiente e a comparação de cultivares de cereais*. Tese de doutoramento. Instituto Superior de Agronomia. Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa.

- ☞ Gusmão, L. (1988) - *Assessing small grain cultivars for yields in variable environments through Joint Regression Analysis*. *Rachis*, 7 : 22 - 25.
- ☞ Gusmão, L.; Mexia, J. T. and Gomes, M. L. (1989) - *Mapping of equipotential zones for cultivar yield pattern evolution*. *Plant Breeding*, 103 : 293 - 298.
- ☞ Gusmão, L. (1990) - *Avaliação de cultivares (uma perspectiva experimental diferente)*. *Revista de Ciências Agrárias - nº2*, vol. 13 : 11 - 18.
- ☞ Gusmão, L.; Baeta, J. and Mexia, J. T. (1991a) - *Avaliação da aptidão agronómica relativa em cultivares de cereais*. In "I.ªs Jornadas de Estatística e Aplicações". Universidade do Minho - Braga, 22 a 24 de Abril.
- ☞ Gusmão, L.; Rebelo, D. C.; Miranda, M. J. and Silva, A. F. (1991b) - *Year interaction on interplant competition in white Lupin (*Lupinus Albus L.*)*. In: Martins, J. M. N. and Costa, M. L.: (eds) *Advances in Lupin Research* Rd. ISA, Lisboa, pg. 409 - 412.
- ☞ Gusmão, L.; Mexia, J. T. and Baeta, J. (1992a) - *Trimmed Joint Regression: a new approach to the Joint Regression Analysis for cultivar relative performance evaluation*. *Theoretical and Applied Genetics*, 84 : 735 - 738.
- ☞ Gusmão, L.; Baeta, J.; Mexia J. T.; Bagulho, F.; Maçãs, B. and Coutinho, J. (1992b) - *Statistical analysis of randomized complete block designs for Barley cultivar yield trials*. *Rachis*, 11 : 14 - 18.
- ☞ Gusmão, L.; Rebelo, D. C.; Miranda, M. J.; Baeta, J. and Vaz, F. (1993a) - *Assessment of specific genotype  $\times$  environment interactions in *Lupinus luteus L.**. *Brotéria Genética*, Lisboa, 14 : 141 - 144.
- ☞ Gusmão, L.; Rebelo, D. C. and Mexia J. T. (1993b) - *Increasing the precision of relative yield behavior evaluation of *Lupinus Luteus L.* cultivars, in the presence of specific interactions*. *ABST. - VII International Lupin Conference*, Évora, 18 a 23 de Outubro, Theme : 3 nº 32.
- ☞ Gusmão, L.; Fernandes, D.; Maçãs, B.; Mexia J. T.; and Gusmão, M. R. (1995) - *Análise pela "RECOR" dos resultados de produção numa rede regional de ensaios de adaptação de aveias (*Avena Sativa L.*) da E. N. M. P., de 1990/91 a 1991/92*. *Revista de Ciências Agrárias*, vol. 18, 2 : 25 - 33.
- ☞ Hedges, L. V., Olkin, I. (1985) - *Statistical Methods for Meta-Analysis*. Academic Press, London.
- ☞ Ito, K. (1980) - *Robustness of ANOVA and Macanova test procedures*. P. R. Krishnaiah (ed), *Handbook of statistics*, vol. I. North Holland.

-  John, J. A. and Williams, E. R. (1995) – *Cyclic and computer generated designs*. Chapman and Hall, London, 2<sup>nd</sup> ed..
-  Kageyama, S. (1984) – *Connected designs with the minimum number of experimental units*. *Linear Statistical Inference*. Lecture Notes in Statistics n° 35, Springer Verlag, New York : 99 – 117.
-  Kang, M. S. and Gauch, H. G. (1996) – *Genotype by Environmental Interaction*. CRC Press, New York.
-  Kendal, M. (1961) - *A course in the Geometry of n dimension*. Charles Griffin and Co., London.
-  Lin, C. S., Binns, M. R. and Lefkovitch, L. P. (1986) - *Stability analysis: Where Do We Stand?*. *Crop. Sci.*, 26 : 894 - 900.
-  Maçãs, B.; Coutinho, J.; Bagulho, F.; Mexia, J. T.; Baeta, J.; Gusmão, L. and Ferreira, T. (1990) - *Comportamento relativo das cultivares de triticale produzidas na E. N. M. P., no período 1987/88 e 1988/89: I. Aferido pela análise convencional*. In “V Reunião Portuguesa sobre *Triticale*” - Elvas, Maio 1990 – Melhoramento, vol. 32.
-  McCullagh, P. And Tibshirani, R. (1990) – *A simple method for the adjustment of profile likelihoods*. *J. R. Statist. Soc. B*, 52 , No. 2 : 325 – 344.
-  Mexia , J. T. (1987) - *Multi-Treatment Regression Designs*. *Trabalhos de Investigação*, n°1. FCT/UNL.
-  Mexia , J. T. (1989) - *Controlled heteroscedasticity , quotient vector spaces and F tests for hypothesis on mean vectors*. *Trabalhos de Investigação*, n°1. FCT/UNL.
-  Mexia , J. T.; Gusmão, L.; Ferreira, M. T. and Baeta, J. (1990) - *Homogeneidade numa zona equipotencial de adaptação e suas implicações no delineamento de ensaios de adaptação*. *Garcia de Orta, Série de Estudos Agronómicos*, vol. 16 : 65 - 70.
-  Mexia , J. T.; Gusmão, L. and Baeta, J. (1991) - *Analysis of cultivar yield trials designed in Randomize Complete Blocks*. *Revista de Ciências Agrárias*, 14 : 59 - 63.
-  Mexia, J. T. (1995) - *Introdução à Inferência Estatística Linear*. Edições Lusófonas, Lisboa.

- ☞ Mexia, J. T.; Dias, G. C. and Neves, M. (1996) - *Roots of linear regressions, extensions and applications to joint regression analysis*. Trabalhos de Investigação, nº1. FCT/UNL.
- ☞ Mexia, J. T., Amaro, A. P., Gusmão, L. and Baeta J. (1997) - *Upper contour of a Joint Regression Analysis*, J. Genet. & Breed., 51 : 253 – 255.
- ☞ Mexia, J. T., Pereira, D. G. and Baeta, J. (1999) –  *$L_2$  environmental indexes*. Biometrical Letters, 36 : 137 – 143.
- ☞ Mexia, J. T., Pereira, D. G. and Baeta, J. (2001) – *Weighted linear joint regression analysis*. Biometrical Letters, 38 : 33 - 40.
- ☞ Mexia, J. T. and Pereira, D. G. (2001) – *Joint regression analysis for winter rye cultivars using  $L_2$  indexes*. Colloquium Biometryczne, 31 : 207 – 212.
- ☞ Mexia, J. T. and Pinto, I. (2001) – *Generalized additivity and incomplete unbalanced designs*. Colloquium Biometryczne, 31 : 201 – 206.
- ☞ Mexia, J. T. and Corte Real, P. (2001a) – *Extension of Kolmogorov's Strong Law to Multiple Regression*. 23<sup>rd</sup> European Meeting of Statisticians, Funchal - Madeira. Revista de Estatística, vol. II, 2<sup>o</sup> Quadrimestre de 2001 : 277 – 278.
- ☞ Mexia, J. T. and Corte Real, P. (2001b) – *Strong Law of Large Numbers for Additive Extremum Estimators*. Discussiones Mathematicae, Probability and Statistics 21 : 81 – 88.
- ☞ Mexia, J. T. and Pinto, I. (2002) – *Test for linear restrictions, generalized additivity and consequences of restrictions violations*. Colloquium Biometryczne, 32 : 197 – 204.
- ☞ Mexia, J. T. and Pinto, I. (2003) – *Joint Regression Analysis and connectedness. Application to grapevines*. Colloquium Biometryczne, 33 : 235 - 248.
- ☞ Mood, A. M., Graybill, F. A. and Boes, D. C. (1974) – *Introduction to the theory of statistics*. McGraw-Hill, Singapore, 3<sup>rd</sup> ed..
- ☞ Mooers, C. A. (1921) - *The agronomic placement of varieties*. J. Amer. Soc. Agron., 13 : 337 - 352.
- ☞ Ng, M. P. and Grunwald, G. K. (1997) – *Nonlinear regression analysis of the joint-regression model*. Biometrics, 53 : 1366 – 1372.
- ☞ Ng, M. P. and Williams, E. R. (2001) – *Joint-regression analysis for incomplete two-way tables*. Aust. N. Z. J. Stat., 43(2) : 201 – 206.
- ☞ Patterson, H. D. and Williams, E. R. (1976) – *A new class of resolvable incomplete block designs*. Biometrika, 63 : 83 – 92.

- 📖 Pereira, D. G. and Mexia, J. T. (2002) – *Multiple comparison in Joint Regression Analysis with special reference to variety selection*. Scientific papers of the Agricultural University of Poznan, Agriculture, Vol. 3, 67 – 74.
- 📖 Pereira, D. G. and Mexia, J. T. (2003a) – *The use of Joint Regression Analysis in selecting recommended cultivars*. Biuletyn Oceny Odmian (Cultivar Testing Bulletin), 31 : 19 – 25.
- 📖 Pereira, D. G. and Mexia, J. T. (2003b) – *Reproducibility of Joint Regression Analysis*. Colloquium Biometryczne, 33 : 279 – 291.
- 📖 Plaisted, R. L. and Peterson, L. C. (1959) – *A technique for evaluating the ability of selections to yield consistently in different locations or seasons*. American Potato Journal, 36 : 381 – 385.
- 📖 Plaisted, R.L. (1960). *A shorter method for evaluating the ability of selections to yield consistently over locations*. American Potato Journal, 37:166-172.
- 📖 Pollock, D. S. G. (1979) – *The algebra of econometrics*. John Wiley and Sons, New York.
- 📖 Raghavarao, D. (1971) – *Constructions and Combinatorial Problems in Design of Experiments*. John Wiley, New York. Reprinted (1988) by Dover with some addendum.
- 📖 Scheffé, H. (1959) - *The Analysis of Variance*. John Wiley and Sons, New York.
- 📖 Seber, G. A. F. (1977) – *Linear Regression Analysis*. John Wiley and Sons, New York.
- 📖 Seber, G. A. F. (1980) – *The Linear Hypothesis: A General Theory*. Charles Griffin and Co., London.
- 📖 Severine, T. A. (2000) – *Likelihood methods in statistics*. Oxford University Press, New York.
- 📖 Shrikhande, S. S and Raghavarao, D. (1963) – *A method of construction of incomplete block designs*. Sankhya Ser. A 25, 399 – 402.
- 📖 Shrikhande, S. S and Raghavarao, D. (1964) – *Affine  $\alpha$ -resolvable incomplete block designs*. In: C. R. Rao (ed.), Contributions to Statistics. Pregamon Press, Statistical Publishing Society, Calcutta, 471 – 480.
- 📖 Shukla, G. K. (1972) – *Some statistical aspects of partitioning genotype-environment components of variability*. Heredity, 29 : 237 – 245.

-  Siegel, S. and Castellan, J. (1988) – *Nonparametric statistics for the behavioral science*. 2<sup>nd</sup> ed., Mc Graw-Hill, New York.
-  Tiago de Oliveira, J. (1990) - *Probabilidades e Estatística: Conceitos, Métodos e Aplicações*. Vol. II. McGraw-Hill, Lisbon.
-  Westcott, B. (1986) - *Some methods of analysing genotype-environment interaction*. *Heredity*, 56 : 243 - 253.
-  Williams, E. R. (1975) – *A new class of resolvable block designs*. Ph'D thesis. University of Edinburgh.
-  Wricke, G. (1962) – *Über eine Methode zur Erfassung der ökologischen Streubreite in Feldversuchen*. *Zeitschrift für Pflanzenzüchtung*. 47 : 92 – 96.
-  Yates, F. and Cochran, W. G. (1938) - *The analysis of groups experiments*. *J. Agric. Sci., Cambridge*, 28 : 556 - 580.

