



ESCOLA DE CIÊNCIAS SOCIAIS

DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

**Texto de Apoio**

# **Análise de Decisão Económica**

---

**Mestrado/Doutoramento em Economia**

ANTÓNIO B.R. CALEIRO

(2011/12)



# Índice

---

<b>1</b>	<b>PREÂMBULO – UM CASO SOBRE HORIZONTES TEMPORAIS</b>	<b>3</b>
1.1	A solução analítica . . . . .	6
<b>2</b>	<b>ANÁLISE DE DECISÃO EM CONTEXTO ESTÁTICO</b>	<b>9</b>
2.1	Teoria da Decisão . . . . .	9
2.2	Aplicações Económicas/Casos Particulares . . . . .	17
2.3	Teoria da Decisão: as variáveis exógenas não controláveis e os multiplicadores das variáveis de decisão . . . . .	20
2.3.1	Introdução . . . . .	20
2.3.2	O caso das variáveis exógenas não controláveis . . . . .	22
2.3.3	O caso dos multiplicadores das variáveis de decisão . . . . .	24
<b>3</b>	<b>ANÁLISE DE DECISÃO EM CONTEXTO DINÂMICO</b>	<b>31</b>
3.1	A Situação a Tempo Discreto . . . . .	31
3.1.1	Teoria da decisão . . . . .	31
3.1.2	Aplicações Económicas/Casos Particulares . . . . .	35
3.2	A Situação a Tempo Contínuo . . . . .	40
3.2.1	Teoria da decisão . . . . .	41
3.2.2	Aplicações Económicas/Casos Particulares . . . . .	43

# 1

## Preâmbulo – Um caso sobre horizontes temporais

---

O caso prático que se segue pretende ilustrar as possíveis consequências, ao nível de um horizonte temporal alargado (por exemplo, o longo prazo), de um comportamento típico de curto prazo. Assim, mostrar-se-á que a repetição de comportamentos de curto prazo, ainda que maximizadores da utilidade nesse horizonte temporal, não corresponde (regra geral) ao comportamento óptimo, ou seja maximizador da utilidade, para um horizonte temporal que vá para além do curto prazo.<sup>1</sup>

Assuma-se que o governo considera importantes a evolução da inflação ( $\pi$ ) e do desemprego ( $u$ ) de tal forma que a sua ‘desutilidade’, num dado momento  $t$ , é uma função dos desvios entre os valores efectivos ( $\pi_t, u_t$ ) e os valores desejados ( $\hat{\pi}, \hat{u}$ ) tal como se indica a seguir:

$$\Theta_t = \frac{1}{2} \left( \beta (\pi_t - \hat{\pi})^2 + (u_t - \hat{u})^2 \right), \quad (1.1)$$

onde  $\beta$  é uma constante positiva.<sup>2</sup>

Quanto à estrutura da economia, considere-se uma ‘curva de Phillips’ simplificada, em que a inflação corrente/actual,  $\pi_t$ , depende linearmente do desemprego corrente/actual,  $u_t$ , e da inflação esperada,  $\pi_t^e$ , sendo esta, de acordo com a hipótese das expectativas adaptativas, uma proporção  $a$  da inflação do momento anterior, ou seja:

$$\pi_t = a\pi_{t-1} - bu_t, \quad b > 0, \quad 0 \leq a \leq 1. \quad (1.2)$$

Note-se, desde já, um aspecto crucial para as conclusões que se irão obter, resultante da curva de Phillips, (1.2). Conforme a expressão claramente mostra, existe uma ligação entre o (momento) passado e o (momento) presente, a qual deriva do facto de se admitir que a taxa de inflação esperada para o momento presente, sendo esta uma proporção da taxa de inflação do momento anterior, influencia o valor registado, neste momento, pela taxa de inflação. Assim, aquilo que acontece no momento  $t - 1$ , ao nível

---

<sup>1</sup>Embora os exemplos mais flagrantes deste tipo de comportamento se encontrem na realidade quotidiana, iremos considerar um modelo económico para ilustrar este caso.

<sup>2</sup>Para simplificar assumamos que os valores desejados para ambas as variáveis são zero, *i.e.*  $\hat{\pi} = \hat{u} = 0$ .

da taxa de inflação, reflectindo o nível de taxa de desemprego nesse mesmo momento, é relevante para aquilo que acontece no momento  $t$ . Em termos simples, é esta ligação entre os momentos temporais que explica a conclusão a que iremos chegar.

Dito isto, nestas circunstâncias, qual deverá ser a decisão, neste caso a política económica, óptima a fixar por um governo cujo horizonte temporal corresponda a um único período? Por outras palavras, qual deverá ser o comportamento óptimo de um governo que considere importante somente o momento presente?

Admita-se, então, sem perda de generalidade, que  $t = 1$  e que o governo realiza a tarefa da política económica através da manipulação da taxa de desemprego. Assim, da optimização de

$$\Theta_1 = \frac{1}{2} (\beta\pi_1^2 + u_1^2)$$

sujeita à restrição

$$\pi_1 = a\pi_0 - bu_1,$$

resulta a política óptima:

$$\tilde{u}_1 = \frac{\beta ab}{\beta b^2 + 1} \pi_0, \quad (1.3)$$

a qual conduz ao nível de inflação

$$\tilde{\pi}_1 = \frac{a}{\beta b^2 + 1} \pi_0. \quad (1.4)$$

Considere-se agora o momento seguinte,  $t = 2$ . Qual a política e o resultado óptimos para o mesmo género de governo? Obviamente, os mesmos poderão ser encontrados ‘actualizando’ as expressões (1.3) e (1.4), ou seja

$$\tilde{u}_2 = \frac{\beta ab}{\beta b^2 + 1} \pi_1, \quad (1.5)$$

e

$$\tilde{\pi}_2 = \frac{a}{\beta b^2 + 1} \pi_1. \quad (1.6)$$

Claramente, em qualquer outro momento (posterior), o governo actuará de acordo com a mesma ‘regra’ óptima:

$$\tilde{u}_t = \frac{\beta ab}{\beta b^2 + 1} \pi_{t-1},$$

daí resultando

$$\tilde{\pi}_t = \frac{a}{\beta b^2 + 1} \pi_{t-1}.$$

A nossa conjectura é a de que tal não corresponde a um comportamento óptimo

para um horizonte temporal que comporte mais do que um período.<sup>3</sup> Para a sua confirmação (ou não) basta ‘extrapolar’ a análise do caso mais simples em que se consideram apenas dois períodos. Assim, pretende-se verificar a veracidade da seguinte afirmação:

A repetição dos comportamentos óptimos em  $t = 1$  e  $t = 2$  **não** é o comportamento óptimo de  $t = 1$  até  $t = 2$ .

Dado que a determinação analítica do comportamento óptimo de  $t = 1$  até  $t = 2$  se deve fazer recorrendo a uma técnica matemática particular que, de momento, se admite desconhecida, iremos prosseguir recorrendo a uma análise gráfica onde, para simplificar, se considerará  $a = b = \beta = 1$ .<sup>4</sup>

Começemos por analisar o comportamento assinalado na primeira parte da afirmação anterior. Dado que  $a = b = 1$ , sabe-se através da curva de Phillips (1.2) que  $\pi_t + u_t = \pi_{t-1}$ . Porque  $\beta = 1$ , os valores óptimos, período a período, para a inflação e o desemprego serão iguais; veja-se (1.3) e (1.4), (1.5) e (1.6). Quer isto dizer que as soluções óptimas estarão sempre sobre a linha de 45°, tal como se ilustra na figura 1.1 através dos pontos A e B. Começando no ponto A, a curva de Phillips deslocar-se-á para  $P_A$  conduzindo à solução B no momento seguinte. Estes pontos correspondem, então, às soluções óptimas para  $t = 1$  e  $t = 2$  se o horizonte temporal corresponder a um único período.

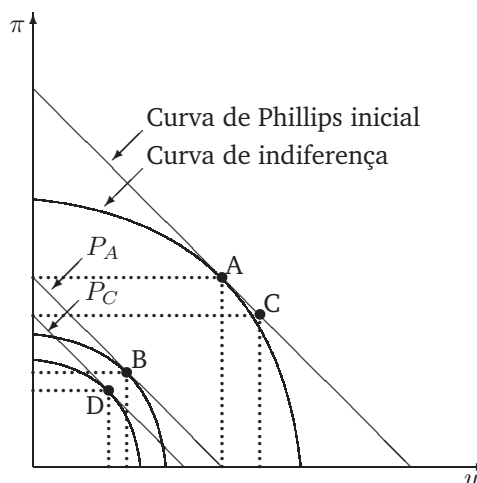


Figura 1.1: As diversas soluções

<sup>3</sup>Note-se que os aspectos relacionados com a taxa de actualização não serão considerados por agora. Saliente-se, no entanto, a sua crucial importância como se pode comprovar na solução analítica que apresentaremos no final deste preâmbulo.

<sup>4</sup>Veja-se, no entanto, a parte final deste preâmbulo.

No que diz respeito à segunda parte da afirmação, note-se que quanto menor for a inflação no período anterior, ou seja  $\pi_{t-1}$ , menor será  $\pi_t + u_t$ . Quer isto dizer que poderá compensar aceitar um valor superior para  $\beta\pi_t^2 + u_t^2$  através de uma solução ‘assimétrica’ caracterizada por  $\pi_t < u_t$  porque, no período seguinte, estará garantida uma menor soma de inflação e desemprego.<sup>5</sup> Assim, dever-se-á aceitar a solução dada pelo ponto  $C$  ainda que a mesma conduza a um nível de ‘desutilidade’ superior ao mínimo possível no momento  $t = 1$  porque, neste caso, a curva de Phillips deslocar-se-á para  $P_C$  o que torna possível uma solução (simétrica), dada pelo ponto  $D$ , relativamente melhor em  $t = 2$ .

Tendo em conta a análise anterior – note-se que a soma das distâncias entre a origem e os pontos  $A$  e  $B$  é superior à soma das distâncias entre a origem e os pontos  $C$  e  $D$  – podemos considerar verdadeira a afirmação de que a repetição de comportamentos de curto prazo (míopes), ainda que óptimos, não corresponde ao melhor comportamento a médio e longo prazos.<sup>6</sup>

### Exercício Prático

Considere  $\pi_0 = 0.1$ . De acordo com esta informação determine os valores de inflação e desemprego que se registarão se o governo utilizar as ‘regras’ (1.3), (1.4), (1.5) e (1.6) bem como os correspondentes níveis de desutilidade  $\Theta_1$  e  $\Theta_2$ . Verifique que  $\Theta_1 + \Theta_2$  representa um nível de desutilidade superior ao obtido se o governo implementasse  $\tilde{u}_1 = 0.06$  e  $\tilde{u}_2 = 0.02$ . ■

## 1.1

### A solução analítica

Como atrás foi considerado, a função de desutilidade em cada período  $t$  é

$$\Theta_t = \frac{1}{2} (\beta\pi_t^2 + u_t^2),$$

enquanto o funcionamento da economia se rege pela seguinte curva de Phillips:

$$\pi_t = a\pi_{t-1} - bu_t.$$

<sup>5</sup>Claramente, se o governo considerar como horizonte temporal somente o momento presente, será impossível ‘explorar’ este *trade-off*.

<sup>6</sup>Por outras palavras, “fazer hoje (e todos os dias) aquilo que nos dá mais prazer não é o que nos dará mais prazer ao longo da vida, a não ser que amanhã estejamos mortos”.

Se assim for, então para  $t = 2$ :

$$\begin{aligned}\Theta_2 &= \frac{1}{2} (\beta\pi_2^2 + u_2^2) \\ &= \frac{1}{2} \left( \beta (a\pi_1 - bu_2)^2 + u_2^2 \right)\end{aligned}$$

e, por isso, um governo que se preocupe com o que se passa em cada período (isoladamente) estabelecerá os seguintes planos:

$$\min \Theta_2 \Rightarrow u_2 = \frac{ab\beta}{\beta b^2 + 1} \pi_1 \Rightarrow \quad (1.7)$$

$$\pi_2 = a\pi_1 - b \frac{ab\beta}{\beta b^2 + 1} \pi_1 = \frac{a}{\beta b^2 + 1} \pi_1$$

e

$$\min \Theta_1 \Rightarrow u_1 = \frac{ab\beta}{\beta b^2 + 1} \pi_0 \Rightarrow \quad (1.8)$$

$$\pi_1 = a\pi_0 - b \frac{ab\beta}{\beta b^2 + 1} \pi_0 = \frac{a}{\beta b^2 + 1} \pi_0. \quad (1.9)$$

Um governo que tenha em conta o que se passa de  $t = 1$  até  $t = 2$ , terá como função objectivo:

$$\begin{aligned}\Theta &= \frac{1}{2} (\beta\pi_1^2 + u_1^2) + \rho \frac{1}{2} (\beta\pi_2^2 + u_2^2) \\ &= \frac{1}{2} (\beta\pi_1^2 + u_1^2) + \rho \frac{1}{2} \left( \beta \left( \frac{a}{\beta b^2 + 1} \pi_1 \right)^2 + \left( \frac{ab\beta}{\beta b^2 + 1} \pi_1 \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \beta (a\pi_0 - bu_1)^2 + u_1^2 \right) + \rho \frac{1}{2} \left( \beta \left( \frac{a}{\beta b^2 + 1} (a\pi_0 - bu_1) \right)^2 + \left( \frac{ab\beta}{\beta b^2 + 1} (a\pi_0 - bu_1) \right)^2 \right),\end{aligned}$$

onde  $\rho$  representa a taxa de actualização. Neste caso

$$\min \Theta \Rightarrow u_1 = \frac{\beta b^2 + 1 + \rho a^2}{\beta^2 b^4 + 2\beta b^2 + \rho \beta a^2 b^2 + 1} ab\beta \pi_0 \Rightarrow \quad (1.10)$$

$$\pi_1 = a\pi_0 - bu_1 = \frac{\beta b^2 + 1}{\beta^2 b^4 + 2\beta b^2 + \rho \beta a^2 b^2 + 1} a\pi_0.$$

Note-se, em primeiro lugar, que só se  $\rho = 0$ , ou seja se o momento futuro não for considerado importante, é que os planos, ou seja as regras de decisão (de tipo *feedback*) míopes (1.8) coincidem com as regras de decisão não-míopes (1.10).



Note-se, em segundo lugar, que se se considerar  $u_2 = k_2\pi_1$  e  $u_1 = k_1\pi_0$  então

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{\beta^2 b^4 + 2\beta b^2 + \rho\beta a^2 b^2 + 1}{\beta^2 b^4 + 2\beta b^2 + \rho\beta a^2 b^2 + 1 + \rho a^2} < 1,$$

o que significa que a política económica no momento 1 deve ser mais ‘agressiva’ no combate à inflação que aquela registada no momento 2 precisamente porque os ganhos resultantes de uma quebra na taxa de inflação se repercutem no momento seguinte.

# 2

## Análise de Decisão em Contexto Estático

---

### 2.1

#### Teoria da Decisão

De acordo com o esquema mais simples possível de decisão económica, o agente decisor (por exemplo, o governo, o banco central, os investidores, os consumidores, os produtores, *etc.*) usa variáveis de decisão,  $x$ , segundo uma escala de preferências,  $W$ , para influenciar variáveis objectivo,  $y$ , as quais podem depender de outros elementos de natureza exógena,  $z$ , não controláveis por parte do agente decisor em causa (ou mesmo por parte de qualquer outro agente decisor).<sup>1</sup>

Os *elementos básicos* deste esquema são:

- $x$ , o qual representa uma decisão (plano ou política) **possível** para o decisor, descrito como aquilo sobre o qual o decisor pode decidir directamente e não aquilo que o mesmo desejaria ou espera controlar. Quantitativamente,  $x$  pode ser encarado como um vector de (valores para os) instrumentos, variáveis instrumentais, de controlo ou de decisão.
- $X$ , representando o conjunto de todas as possíveis decisões económicas. Este conjunto está limitado por razões de ordem técnica, legal, física, *etc.*  
Assume-se então que, por definição,  $\forall x \in X$  representa uma decisão possível, enquanto que  $\forall x \notin X$  representa uma decisão impossível.
- $z$ , representando um estado **possível** para os factores que influenciam a situação relevante para o agente decisor mas que não são controláveis pelo mesmo. São variáveis ou factores exógenos não controláveis mas, neste capítulo, considerados previsíveis com certeza.<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup>Note-se, desde já, como é perceptível a partir desta linha de exemplos de agentes decisores, que a abordagem assumida permite considerar diversas vertentes, nomeadamente as de natureza micro- e macro-económicas.

<sup>2</sup>De ora em diante, sempre que tal não seja inconveniente, far-se-á referência a estes elementos como sendo

- $Z$ , representando o conjunto de todos os possíveis estados ou situações para aqueles factores exógenos não controláveis.

Assume-se então que, por definição,  $\forall z \in Z$  representa um estado possível para os factores exógenos não controláveis, enquanto que  $\forall z \notin Z$  representa um estado impossível para esses factores exógenos.

- $y$ , representando uma descrição do estado, da situação concreta dos aspectos (económicos) importantes, isto é, daqueles elementos que o decisor considerar relevantes para poder avaliar da maior ou menor desejabilidade daquele estado ou situação (económica). Quantitativamente,  $y$  pode ser encarado como um vector de (valores para as) variáveis objectivo do decisor.<sup>3</sup>
- $W(y)$ , representando a escala de preferências do decisor permitindo fazer a ordenação dos estados respeitantes às variáveis objectivo, tal que,  $\forall y_1, y_2, :$ 
  - Se  $y_1$  for igualmente desejável que  $y_2$ , então  $W(y_1) = W(y_2)$ ;
  - Se  $y_1$  for preferível a  $y_2$ , então  $W(y_1) > W(y_2)$ ;
  - Se  $y_2$  for preferível a  $y_1$ , então  $W(y_2) > W(y_1)$ .<sup>4</sup>
- $y = f(x, z)$ , representando o mecanismo (forma) como o sistema económico funciona. A cada par de elementos exógenos  $x$  e  $z$  corresponde um único  $y$ , enquanto elemento endógeno, o qual depende das decisões  $x$  e dos factores não controláveis  $z$ , de acordo com a relação  $f$ .
- $Y$ , representando o conjunto de todos os possíveis estados ou situações para os aspectos económicos relevantes para o agente decisor, isto é, aquilo que pode suceder para todos os  $x \in X$  e  $z \in Z$ . Assim,  $Y = \bigcup_{z \in Z} \bigcup_{x \in X} y$ .
- $Y_z$ , representando o conjunto dos possíveis estados  $y$  para um dado  $z$ , i.e.  $Y_z = \bigcup_{x \in X} y$  para aquele dado  $z$ . Assim,  $Y = \bigcup_{z \in Z} Y_z$  o que implica, naturalmente,  $Y_z \subseteq Y$ .

A figura 2.1 mostra como estes elementos se interligam.

Como se determina, então, a melhor decisão? As fases que se seguem são geralmente as necessárias para tal:<sup>5</sup>

os factores não controláveis, dado o seu, habitual, carácter exógeno, por natureza.

<sup>3</sup>Há casos em que as variáveis objectivo,  $y$ , coincidem com as variáveis de decisão,  $x$ . Neste caso, a questão associada à determinação da decisão ótima coloca-se porque existe alguma restrição ao nível das decisões.

<sup>4</sup>Note-se que, pela forma como a escala de preferências foi definida, esta é uma função de tipo utilidade ou de bem-estar, a qual, obviamente, se pretende maximizar. Se acaso a função objectivo do decisor for de tipo perda ou de desutilidade,  $L(y)$ , esta poderá ser considerada como o simétrico de  $W(y)$ , ou seja  $W(y) = -L(y)$ .

<sup>5</sup>A ordem, embora não sendo completamente arbitrária, pode ser alterada.

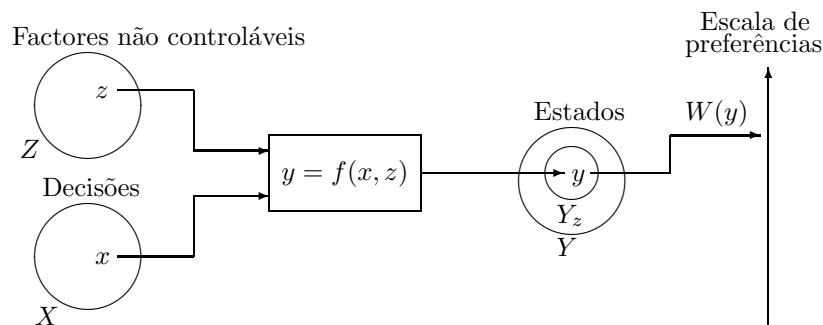


Figura 2.1: O esquema básico de decisão económica

1. Determinação do conjunto  $X$ .
2. Estabelecimento da escala  $W(y)$ . Em princípio, tal deve ser feito antes da determinação da relação  $y = f(x, z)$  pois aquela indica quais as variáveis endógenas relevantes, i.e. objectivo, para as quais se resolverá o modelo.
3. Determinação da forma reduzida do modelo,  $y = f(x, z)$ .
4. Eventual previsão do estado  $z$ , isto é, a determinação de  $\hat{z}$ , o que pode implicar a determinação do conjunto  $Z$ .<sup>6</sup>
5. De acordo com o modelo, eventualmente tendo em conta o valor previsto  $\hat{z}$ , determina-se, então, o elemento  $x$  que maximiza  $W(y)$ .<sup>7</sup>

A melhor decisão  $\tilde{x}$ , *a priori*, será aquela que levar a

$$W(\tilde{y}) = \max_{y \in Y_{\hat{z}}} W(y)$$

para o dado  $\hat{z}$ , onde  $\tilde{y} = f(\tilde{x}, \hat{z})$ .<sup>8</sup>

O exemplo que se segue pretende clarificar a análise anterior recorrendo a uma abordagem gráfica.

Suponha-se que, numa determinada economia, existem uma variável instrumental  $x$ , a qual deve assumir valores pertencentes ao conjunto  $X = [0, 3]$ , e uma variável exógena não controlável  $z$ , a qual deve assumir valores pertencentes ao conjunto  $Z =$

<sup>6</sup>Em algumas situações, esta previsão torna-se desnecessária como, por exemplo, quando, independentemente de  $z$ , a decisão óptima é sempre a mesma.

<sup>7</sup>Para esta fase é obviamente relevante ter-se determinado (previamente) o conjunto  $X$ .

<sup>8</sup>Note-se que **não** se trata de  $\max_{y \in Y} W(y)$  pois este máximo absoluto, isto é, o de maior preferência pode não ser alcançável dada a situação verificada pelos factores exógenos não controláveis.

$[0, 5]$ . Se o modo de funcionamento da economia for tal que  $x$  e  $z$  dão origem a um estado da economia  $y$  definido como

$$y = x^2 + z^2,$$

então o conjunto dos possíveis estados para a economia  $Y$  terá a representação gráfica que se apresenta na figura 2.2.

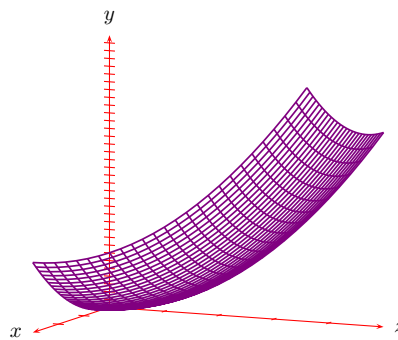


Figura 2.2: O conjunto dos possíveis valores,  $Y$

Suponha-se que se prevê que os factores não controláveis assumam o estado  $z = 1$ . Neste caso, o conjunto  $Y_{\hat{z}=1}$  poderá ser representado como se mostra na figura 2.3.

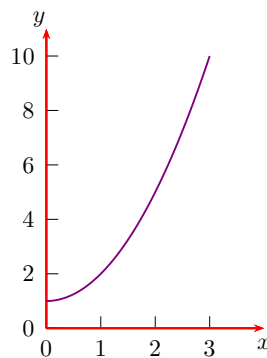


Figura 2.3: O conjunto dos possíveis valores,  $Y_{\hat{z}=1}$

Se a escala de preferências do decisor for

$$W(y) = -(y - 5)^2,$$

então, para  $\hat{z} = 1$ , a sua representação gráfica, em função dos valores de  $x$ , tal como se mostra na figura 2.4,

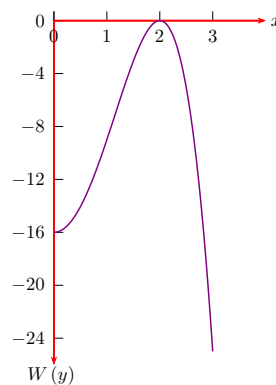


Figura 2.4: A escala de preferências,  $W(y)$

permite determinar a decisão económica óptima como sendo  $\tilde{x} = 2$ .

#### Exercício Prático

Considere um país, cujo estado da economia,  $y$ , é função de uma dada variável instrumental,  $x$ , e de um factor exógeno não controlável,  $z$ , de tal forma que:

$$y = 2x + z.$$

Sabendo que  $x \in [-5, -1]$  ou  $x \in [3, 7]$  e que  $z$  apenas pode tomar os valores 0 ou 1:<sup>a</sup>

1. Determine os conjuntos  $Y_{z=0}$ ,  $Y_{z=1}$  e  $Y$ .
2. Que decisão económica sugeria que se tomasse, sabendo que a função utilidade do agente decisor é

$$W = -|y - 2|$$

e se prevê que  $z$  tome o valor 0? E se  $\hat{z} = 1$ ?

<sup>a</sup>Note-se que, evidentemente, neste caso já não se estaria perante a situação de certeza.

**Questão**

Atrás admitimos, por hipótese, que a uma decisão,  $x$ , e a um estado para os factores exógenos,  $z$ , corresponde um único estado,  $y$ , para a economia, de acordo com a relação  $f(x, z)$ . Quais seriam os possíveis problemas se esta hipótese não se verificasse?

Ainda antes de passarmos para o campo das aplicações torna-se importante formalizar o modo de operacionalização de aplicação da abordagem anterior. Como é sabido, em muitos campos da Economia encontramos problemas de optimização, cuja formulação geral se pode colocar da seguinte forma:

$$\text{Maximizar } U(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ sujeito a } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in C.$$

Neste sistema,  $U(\cdot)$  denomina-se, muito frequentemente, por função objectivo, assumindo-se  $n$  variáveis de decisão  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , as quais estão sujeitas a um conjunto de restrições  $C$ .

No caso da optimização estática, as variáveis de decisão ‘não dependem do tempo’  $t$  e as restrições pertencem a um subconjunto no espaço euclideano  $R^n$ . Nos problemas de optimização dinâmica, como iremos estudar mais tarde, as variáveis de decisão são função do tempo  $t$  (chamadas variáveis de estado e variáveis de controle) enquanto que as restrições envolvem, normalmente, sistemas dinâmicos de equações diferenciais ou às diferenças. Nestes problemas, a função  $U(\cdot)$  toma valores reais, frequentemente expressos através de um integral ou um somatório ao longo do tempo.

Para introduzir o método de Lagrange num contexto estático, utilizemos um problema simples de optimização com três variáveis de decisão  $x_1, x_2, x_3$  e uma restrição de igualdade. Trata-se, pois, de:

$$\text{Max. } U(x_1, x_2, x_3) \text{ s.a. } F(x_1, x_2, x_3) = c.$$

A equação  $F(\cdot) = c$ , onde  $c$  é uma constante conhecida, é a restrição do problema e interpreta-se geometricamente como uma superfície que podemos denotar por  $S$ . Assim, o problema consiste em determinar o maior valor da função  $U(\cdot)$  para pontos pertencentes à superfície  $S$ .

O Lagrangiano,  $\mathcal{L}$ , associado a este problema de optimização será:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, x_3, \lambda) = U(x_1, x_2, x_3) - \lambda[F(x_1, x_2, x_3) - c]$$

onde o factor  $\lambda$  se denomina, habitualmente, por multiplicador de Lagrange. A condição necessária para resolver este problema é:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_3} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0; \text{ ou}$$

$$\mathcal{L}_{x_1} = \mathcal{L}_{x_2} = \mathcal{L}_{x_3} = \mathcal{L}_\lambda = 0.$$

Assim, obtemos, para este caso, o seguinte sistema:

$$U_{x_1} - \lambda F_{x_1} = 0; U_{x_2} - \lambda F_{x_2} = 0; U_{x_3} - \lambda F_{x_3} = 0; L_\lambda = -F(\cdot) + c = 0$$

Este será um sistema de quatro equações com quatro incógnitas  $(x_1, x_2, x_3, \lambda)$  que constituem as condições de primeira ordem para resolver o problema de optimização que foi colocado.

Podemos agora apresentar a forma geral de um problema de optimização com múltiplas restrições:

$$\text{Max } U(x_1, x_2, \dots, x_m) \text{ sujeito a } F_j(x_1, x_2, \dots, x_m) = c_j \text{ com } j = 1, 2, \dots, k.$$

O Lagrangiano associado a este problema será:

$$\mathcal{L} = U(\cdot) - \sum_{j=1}^k \lambda_j [F_j(\cdot) - c_j]$$

Note-se que cada uma das  $k$  restrições tem associado um multiplicador de Lagrange,  $\lambda_j$ .

As condições necessárias para este problema de optimização obtêm-se através do mesmo argumento de tangência, ou seja,  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ .

De forma explícita, aquelas equações serão:

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial F_j}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (2.1)$$

às quais se devem acrescentar as condições:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} = -F_j(\cdot) + c_j = 0 \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (2.2)$$

As equações (2.1) e (2.2) constituem um sistema de  $m + k$  equações com  $m + k$



incógnitas,  $x_1, x_2, \dots, x_m$  e  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ . Em princípio, este sistema pode ter múltiplas soluções, uma das quais será a solução do problema original de optimização (obviamente, se este tiver solução).

Antes de se avançar, façamos um breve comentário sobre a interpretação económica dos multiplicadores de Lagrange,  $\lambda_j$ . No problema geral anterior, os valores óptimos das variáveis de decisão dependem dos parâmetros  $c_1, c_2, \dots, c_k$  das restrições e, portanto, de estes parâmetros também dependerá o valor da função objectivo. De facto,

$$\frac{\partial U}{\partial c_i} = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial x_i}{\partial c_i} \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (2.3)$$

Se derivarmos as restrições com respeito aos parâmetros  $c_i$  teremos:

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial c_i} = \alpha_{j,i} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (2.4)$$

Combinando (2.3) com (2.4) teremos:

$$\frac{\partial U}{\partial c_i} = \sum_{j=1}^k \lambda_j \alpha_{j,i} = \lambda_i$$

Assim, o multiplicador de Lagrange  $\lambda_i$  é igual ao acréscimo marginal que experimenta a função objectivo perante uma variação no parâmetro  $c_i$  da restrição, ou, de outra forma,  $\lambda_i$  representa o valor marginal de relaxar a  $i$ -ésima restrição.

Até aqui tratámos problemas de optimização com restrições de igualdade. No entanto, em Economia é frequente encontrar problemas com, por exemplo, a seguinte formulação:

$$\text{Max. } U(x_1, x_2, x_3) \text{ sujeito a } F(x_1, x_2, x_3) \leq c.$$

Neste caso, o campo das restrições,  $c$ , consiste em qualquer ponto que se encontre sobre a superfície  $S$  ou num lado particular da mesma. Portanto, temos duas possibilidades:

1. O ponto de optimização  $(x_1, x_2, x_3)$  encontra-se num lado de  $S$  satisfazendo  $F(x_1, x_2, x_3) < c$  e  $\partial U/\partial x_1 = \partial U/\partial x_2 = \partial U/\partial x_3 = 0$ .
2. O ponto de optimização  $(x_1, x_2, x_3)$  encontra-se em  $S$ , satisfazendo  $F(x_1, x_2, x_3) =$

$c$ , em cujo caso se podem aplicar as condições de Lagrange  $\partial\mathcal{L}/\partial x_1 = \partial\mathcal{L}/\partial x_2 = \partial\mathcal{L}/\partial x_3 = 0$ , onde  $\mathcal{L} = U(\cdot) - \lambda[F(\cdot) - c]$ .

Ambos os casos se podem combinar sob as mesmas condições necessárias, chamadas condições de Kuhn-Tucker, as quais se podem exprimir como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_1} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_2} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_3} = 0 \text{ e} \\ \lambda = 0 \text{ se } F(\cdot) < c \\ \lambda \geq 0 \text{ se } F(\cdot) = c \end{aligned}$$

ou, de uma forma equivalente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_1} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_2} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_3} = 0; \\ \lambda[F(\cdot) - c] = 0; \lambda \geq 0. \end{aligned}$$

Em muitos casos, a estes problemas de optimização junta-se a restrição da não-negatividade das variáveis de decisão ( $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0$ ). Neste caso, as condições necessárias de Kuhn-Tucker serão:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_1} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_2} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_3} = 0; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; \\ \lambda[F(\cdot) - c] = 0; \lambda \geq 0. \end{aligned}$$

## 2.2

### Aplicações Económicas/Casos Particulares

Uma possível aplicação de natureza microeconómica é aquela que considera como agente decisor o consumidor, cujas variáveis de decisão,  $x$ , correspondem às quantidades consumidas, sendo estas também as suas variáveis objectivo dado que o seu nível de utilidade depende explicitamente daquelas quantidades, ou seja  $U(q_i)$ . Assim, a função de utilidade corresponde à sua escala de preferências, a qual deve ser optimizada sujeita à restrição orçamental:

$$\sum_{j=1}^m p_j q_j \leq R,$$

onde os preços  $p_j$  e o nível de rendimentos se assumem como variáveis exógenas não controláveis.

**Exercício Prático**

A ilustrar aquele tipo de aplicação considere-se o exercício 8.9 em Mills (1984), pg. 142.<sup>a</sup> Um consumidor de dois bens dispõe de preferências de acordo com a seguinte função de utilidade:

$$U(q_1, q_2) = 20q_1 + 16q_2 - 2q_1^2 - q_2^2,$$

onde as variáveis (contínuas)  $q_1$  e  $q_2$  representam as quantidades compradas e consumidas dos dois bens. Os preços (unitários) dos dois bens são, respectivamente, 1 e 2 unidades monetárias, dispondo o consumidor de 15 unidades monetárias para gastar nestes dois bens. Nestas circunstâncias:

1. Na ausência de qualquer restrição orçamental, quais as quantidades consumidas dos dois bens que maximizariam a utilidade deste consumidor?
2. No caso de se aplicar aquela restrição orçamental, estará o consumidor disposto a gastar todo o seu rendimento naqueles dois bens? Se sim, que quantidades deverá aquele consumir?

<sup>a</sup>MILLS, Gordon (1984), **Optimisation in Economic Analysis**, London: George Allen & Unwin.

No caso anterior, claramente, considerámos um único agente decisor. Quando existem vários agentes decisores uma das abordagens mais utilizadas em Economia é a da teoria dos jogos. Ilustre-se a situação correspondente à teoria dos jogos considerando dois agentes decisores, os quais controlam, respectivamente, as variáveis de decisão  $x_1$  e  $x_2$  por forma a influenciar o valor assumido pelas suas variáveis objectivo,  $y_1$  e  $y_2$  de acordo com as suas escalas de preferência,  $U_1$  e  $U_2$ . Note-se que a situação deve ser estudada do ponto de vista da teoria dos jogos sempre que as escalas de preferência,  $U_1$  e  $U_2$ , não garantam uma harmonia absoluta de interesses e que, naturalmente as decisões de cada agente sejam relevantes para o outro agente, ou seja que  $y_1 = f_1(x_1, x_2)$  e  $y_2 = f_2(x_1, x_2)$ .

Em teoria dos jogos, conceitos como linhas de reacção, equilíbrio não-cooperativo, linha de contrato e soluções cooperativas são fundamentais.

Em termos gráficos, as linhas de reacção correspondem às representações geométricas das melhores decisões de um dos agentes dadas as decisões do outro agente. Em termos formais, a linha de reacção do agente 1 será obtida resolvendo para  $x_1$  a seguinte expressão:

$$\frac{dU_1(\cdot)}{dx_1} = 0,$$

enquanto a linha de reacção do agente 2 será obtida resolvendo para  $x_2$  a seguinte expressão:

$$\frac{dU_2(\cdot)}{dx_2} = 0.$$

O equilíbrio não cooperativo, ou também designado equilíbrio de Nash, situa-se no ponto de intercepção das duas linhas de reacção. O par de decisões  $(x_1^N, x_2^N)$  constitui o equilíbrio não cooperativo se

$$\frac{dU_1(\cdot)}{dx_1} = 0 \Rightarrow x_1 = x_1^N \text{ se } x_2 = x_2^N$$

e

$$\frac{dU_2(\cdot)}{dx_2} = 0 \Rightarrow x_2 = x_2^N \text{ se } x_1 = x_1^N,$$

conduzindo, estas decisões, a níveis de utilidade, digamos,  $U_1^N$  e  $U_2^N$ .

Por ‘oposição’ ao equilíbrio não cooperativo temos, naturalmente, as soluções cooperativas. Estas obter-se-ão quando:

$$\max_{\{x_1, x_2\}} U = wU_1 + (1-w)U_2, \text{ onde } 0 \leq w \leq 1, \quad (2.5)$$

$$\text{s. a } U_1^C \geq U_1^N \text{ e } U_2^C \geq U_2^N. \quad (2.6)$$

A expressão (2.5) determina, implicitamente, a linha de contrato, – ou seja, os pares de decisões óptimas associados aos diversos pesos  $w$  –, a qual é a linha que une os pontos de tangência entre as linhas de iso-utilidade. A solução cooperativa situar-se-á sobre esta linha dado que fora dela é sempre possível melhorar a situação de um dos agentes sem piorar a de outro. A expressão (2.6) determina, implicitamente, a parte da linha de contrato que contém todas as possíveis soluções cooperativas.

As duas anteriores aplicações consideram a situação de certeza. Por nos parecer importante, a terceira aplicação, de âmbito macroeconómico, irá considerar a situação de risco, ou seja aquela em que, existindo variáveis aleatórias, se conhece integralmente a sua distribuição de probabilidades. Claramente, as duas formas mais evidentes e importantes de se considerarem variáveis daquele tipo são as que admitem que, ou se tratam das variáveis exógenas não controláveis ou se tratam dos multiplicadores das variáveis de decisão.

## 2.3

### Teoria da Decisão: as variáveis exógenas não controláveis e os multiplicadores das variáveis de decisão

#### 2.3.1 Introdução

Quando se faz a escolha da melhor decisão (plano ou política) económica podem existir quatro situações:

1. Certeza (completa) – Considerem-se:

- $y = [y_1 \cdots y_n]^T$  o vector de variáveis endógenas objectivo;
- $x = [x_1 \cdots x_m]^T$  o vector de variáveis de decisão económica ou instrumentais;
- $z = [z_1 \cdots z_q]^T$  o vector de variáveis exógenas não controláveis.

A relação entre os elementos anteriores admite-se ser da forma:

$$y = \underset{(n \times 1)}{\mathbf{F}} \underset{(n \times m)(m \times 1)}{x} + \underset{(n \times q)(q \times 1)}{\mathbf{G}} z$$

ou

$$y_i = \sum_{j=1}^m f_{ij} x_j + \sum_{j=1}^q g_{ij} z_j \quad i = 1, \dots, n.$$

Neste caso:

1.1. Se o número de variáveis objectivo for igual ao número de variáveis de decisão, i.e.  $n = m$ , e se  $\mathbf{F}^{-1}$  existir, então poder-se-ão fixar  $n$  objectivos/metastas  $[\tilde{y}_1 \cdots \tilde{y}_n]^T = \tilde{y}$ , e decidir de acordo com a seguinte expressão:

$$x = \mathbf{F}^{-1} (\tilde{y} - \mathbf{G}z).$$

1.2. Se existirem menos variáveis objectivo que variáveis de decisão, i.e.  $n < m$ , poder-se-ão fixar  $\tilde{y} = [\tilde{y}_1 \cdots \tilde{y}_n]^T$  objectivos/metastas e considerá-los, regra geral, atingidos através de  $n$  instrumentos, existindo  $(m - n)$  variáveis de decisão supérfluas.

1.3. Se existirem mais variáveis objectivo que variáveis de decisão, i.e.  $n > m$ , então, regra geral, não se conseguem atingir todos os objectivos. Há, assim, que proceder à sua ordenação por importância ou prioridade, o que pode

ser conseguido, por exemplo, se se ponderar aqueles objectivos numa função objectivo  $\Theta$ , que se admite ser quadrática. Assim:

$$\Theta = \sum_{i=1}^n w_i (y_i - \tilde{y}_i)^2, \quad (2.7)$$

onde  $w_1, \dots, w_n$  são constantes (positivas) que formam a matriz diagonal  $\mathbf{W}$ . Se se pretender

$$\min_x \Theta \text{ sujeito a } y = \mathbf{F}x + \mathbf{G}z,$$

ter-se-á como solução

$$x = (\mathbf{F}^T \mathbf{W} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{W} (\tilde{y} - \mathbf{G}z).$$

Mostre-se de seguida como se pode chegar à solução anterior. Considere-se a função objectivo ponderada:

$$\Theta = \sum_{i=1}^n w_i (\tilde{y}_i - y_i)^2,$$

a qual, em termos matriciais, se pode expressar como

$$\Theta = \varepsilon^T \mathbf{W} \varepsilon,$$

onde

$$\varepsilon = \tilde{y} - y = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \vdots \\ \tilde{y}_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad y = \mathbf{F}x + \mathbf{G}z \text{ e } \mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & w_n \end{bmatrix}.$$

Se assim for, então

$$\begin{aligned} \Theta &= \varepsilon^T \mathbf{W} \varepsilon \\ &= (\tilde{y} - y)^T \mathbf{W} (\tilde{y} - y) \\ &= (\tilde{y} - \mathbf{G}z - \mathbf{F}x)^T \mathbf{W} (\tilde{y} - \mathbf{G}z - \mathbf{F}x) \\ &= (\tilde{y} - \mathbf{G}z)^T \mathbf{W} (\tilde{y} - \mathbf{G}z) - 2x^T \mathbf{F}^T \mathbf{W} (\tilde{y} - \mathbf{G}z) + x^T \mathbf{F}^T \mathbf{W} \mathbf{F} x. \end{aligned}$$

Por forma a minimizar a função objectivo  $\Theta$ :

$$\frac{d(\varepsilon^T \mathbf{W} \varepsilon)}{dx} = -2\mathbf{F}^T \mathbf{W} (\tilde{y} - \mathbf{G}z) + 2\mathbf{F}^T \mathbf{W} \mathbf{F} x \stackrel{!}{=} \mathbf{0},$$

donde resulta o conjunto óptimo de decisões:

$$x = (\mathbf{F}^T \mathbf{W} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{W} (\tilde{y} - \mathbf{G}z).$$

2. Risco – Neste caso, existe o conhecimento da distribuição de probabilidades para os factores aleatórios. Este conhecimento permite utilizar os métodos ‘tradicionais’ de optimização mas agora em ambiente estocástico. É esta a situação que irá ser estudada neste capítulo.<sup>9</sup>
3. Incerteza – Neste caso, desconhecem-se as probabilidades de acontecimento para os vários estados das variáveis aleatórias, em particular dos factores exógenos não controláveis.<sup>10</sup>
4. Incerteza total – Pelas suas características, não analisaremos esta situação.

## 2.3.2

### O caso das variáveis exógenas não controláveis

Neste caso,  $z$  passa a ser um vector de variáveis aleatórias, o mesmo acontecendo a  $y$  já que  $y = \mathbf{F}x + \mathbf{G}z$ . Sendo assim, há a necessidade de trabalhar com o valor esperado da função objectivo (2.7),

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Theta] &= \sum_{i=1}^n w_i \mathbb{E}[(y_i - \tilde{y}_i)^2] \\ &= \sum_{i=1}^n w_i \mathbb{E}[y_i^2 - 2y_i \tilde{y}_i + \tilde{y}_i^2] \\ &= \sum_{i=1}^n w_i (\mathbb{E}[y_i^2] - 2\mathbb{E}[y_i] \tilde{y}_i + \tilde{y}_i^2) \\ &= \sum_{i=1}^n w_i \left( \underbrace{\mathbb{E}^2[y_i] - 2\mathbb{E}[y_i] \tilde{y}_i + \tilde{y}_i^2}_{(\mathbb{E}[y_i] - \tilde{y}_i)^2} + \underbrace{\mathbb{E}[y_i^2] - \mathbb{E}^2[y_i]}_{\sigma^2[y_i]} \right), \end{aligned}$$

onde

<sup>9</sup>Como forma de tornar mais fácil a compreensão desta situação, em anexo ao texto de apoio aos alunos apresenta-se uma breve nota sobre distribuições discretas de probabilidade, a qual pode (também) ser consultada no anexo deste documento.

<sup>10</sup>Esta situação irá ser ilustrada aquando do estudo do conceito de estratégia.

$$E[y_i] = \sum_{j=1}^m f_{ij}x_j + \sum_{j=1}^q g_{ij}E[z_j] \quad i = 1, \dots, n.$$

Como, neste caso,  $\sum_{i=1}^n w_i \sigma^2[y_i]$  é uma constante independente de  $x_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) então

$$\min E[\Theta] \equiv \min \sum_{i=1}^n w_i (E[y_i] - \tilde{y}_i)^2. \quad (2.8)$$

A partir da expressão (2.8) pode verificar-se que esta corresponde à obtida em condições de certeza onde se fez a substituição dos valores certos  $y_i$  e  $z_j$  pelos seus valores esperados  $E[y_i]$  e  $E[z_j]$ . Este é precisamente o chamado *princípio do equivalente certo* (de Theil-Simon). Por outras palavras, o princípio do equivalente certo diz-nos que a decisão económica óptima determinada em condições de risco (baseada nos valores esperados) corresponde à solução de certeza tendo sido substituídos, nesta, os valores certos pelos valores esperados.

Para a melhor compreensão do referido princípio, considere-se o caso de uma variável objectivo e uma variável instrumental. Neste caso, a relação  $y = \mathbf{F}x + \mathbf{G}z$  é simplesmente

$$y_1 = f_{11}x_1 + g_{11}z_1.$$

Sendo a função objectivo

$$\Theta = (y_1 - \tilde{y}_1)^2,$$

a solução/decisão óptima em condições de certeza será:

$$x_1^c = \frac{\tilde{y}_1 - g_{11}z_1}{f_{11}}. \quad (2.9)$$

Se  $z_1$  passar a ser uma variável aleatória com valor esperado  $E[z_1]$  então

$$\begin{aligned} E[\Theta] &= E[(y_1 - \tilde{y}_1)^2] \\ &= E[f_{11}^2 x_1^2 + 2f_{11}x_1g_{11}z_1 - 2f_{11}x_1\tilde{y}_1 + g_{11}^2 z_1^2 - 2g_{11}z_1\tilde{y}_1 + \tilde{y}_1^2] \\ &= f_{11}^2 x_1^2 + 2f_{11}x_1g_{11}E[z_1] - 2f_{11}x_1\tilde{y}_1 + g_{11}^2 E[z_1^2] - 2g_{11}E[z_1]\tilde{y}_1 + \tilde{y}_1^2. \end{aligned}$$



A minimização de  $E[\Theta]$ ,

$$\frac{dE[\Theta]}{dx_1} = 2f_{11}^2 x_1 + 2f_{11}g_{11}E[z_1] - 2f_{11}\tilde{y}_1 \stackrel{!}{=} 0$$

conduz à solução/decisão óptima (em condições de risco):

$$x_1^r = \frac{\tilde{y}_1 - g_{11}E[z_1]}{f_{11}}. \quad (2.10)$$

Por comparação entre as soluções (2.9) e (2.10) é evidente que esta última – risco – corresponde à primeira – certeza – onde o valor certo foi substituído pelo valor esperado.

#### Exercício Teórico-Prático

Suponha que a relação entre a única variável exógena não controlável  $z$ , a única variável instrumental  $x$  que um agente decisor dispõe para atingir um único objectivo  $y$  é dada por  $x = 0.5y - 2z$ . Admitindo que o agente decisor tem como função objectivo  $\Theta = (y - 100)^2$ :

1. Determine o valor óptimo a atribuir à variável instrumental, sabendo que  $z$  toma o valor de 10.
2. Se  $z$  passar a ser uma variável aleatória com distribuição de probabilidades:

$$z = 10 \text{ com probabilidade } 0.4$$

$$z = 13 \text{ com probabilidade } 0.6,$$

determine o valor óptimo para  $x$ .

3. “Embora óptima, a decisão encontrada na alínea anterior nunca conduzirá a melhores resultados que a encontrada na alínea 1.” Comente.



### 2.3.3

#### O caso dos multiplicadores das variáveis de decisão

As funções objectivo quadráticas são importantes na medida em que são uma condição necessária para a aplicação da regra do equivalente certo. Não são, no entanto, uma condição suficiente pois existem casos em que, mesmo com funções objectivo quadráticas, o princípio do equivalente certo não se pode aplicar. É o caso em que a matriz  $\mathbf{F}$  dos multiplicadores das variáveis de decisão passa a ser aleatória, com valor esperado  $E[\mathbf{F}]$ .

Neste caso,

$$E[y_i] = \sum_{j=1}^m E[f_{ij}]x_j + \sum_{j=1}^q g_{ij}z_j \quad i = 1, \dots, n,$$

e

$$\sigma^2[y_i] = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m x_j x_k \text{cov}[f_{ij}, f_{ik}].$$

Se se definir a matriz  $\mathbf{C} = \sum_{i=1}^n w_i \mathbf{C}_i$ , onde

$$\mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} \text{cov}[f_{i1}, f_{i1}] & \cdots & \text{cov}[f_{i1}, f_{im}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}[f_{im}, f_{i1}] & \cdots & \text{cov}[f_{im}, f_{im}] \end{bmatrix},$$

as decisões óptimas, ou seja a solução para o programa:

$$\min_{\{x\}} E[\Theta] = E \left[ \sum_{i=1}^n w_i (y_i - \tilde{y}_i)^2 \right],$$

onde a matriz  $\mathbf{F}$  em  $y = \mathbf{F}x + \mathbf{G}z$  é uma matriz de variáveis aleatórias, serão dadas por:

$$x = \left( E[\mathbf{F}]^T \mathbf{W} E[\mathbf{F}] + \mathbf{C} \right)^{-1} E[\mathbf{F}]^T \mathbf{W} (\tilde{y} - \mathbf{G}z), \quad (2.11)$$

a qual difere, obviamente, da obtida em condições de certeza – e também da obtida por aplicação da regra do equivalente certo – dada a existência da matriz de variâncias-covariâncias  $\mathbf{C}$ .

Para clarificar a impossibilidade de aplicação da regra do equivalente certo volte-se a considerar o caso de uma variável objectivo e uma variável instrumental em que, agora,  $f_{11}$  é uma variável aleatória. Assim, se  $\Theta = (y_1 - \tilde{y}_1)^2$ :

$$\begin{aligned} E[\Theta] &= E \left[ (f_{11}x_1 + g_{11}z_1 - \tilde{y}_1)^2 \right] \\ &= E \left[ f_{11}^2 x_1^2 + 2f_{11}x_1 (g_{11}z_1 - \tilde{y}_1) + (g_{11}z_1 - \tilde{y}_1)^2 \right] \\ &= E \left[ f_{11}^2 x_1^2 + 2f_{11}x_1 g_{11}z_1 - 2f_{11}x_1 \tilde{y}_1 + g_{11}^2 z_1^2 - 2g_{11}z_1 \tilde{y}_1 + \tilde{y}_1^2 \right] \\ &= E \left[ f_{11}^2 \right] x_1^2 + 2E[f_{11}] x_1 g_{11}z_1 - 2E[f_{11}] x_1 \tilde{y}_1 + g_{11}^2 z_1^2 - 2g_{11}z_1 \tilde{y}_1 + \tilde{y}_1^2 \end{aligned}$$

A decisão óptima resulta do seguinte programa:

$$\begin{aligned} \frac{dE[\Theta]}{dx_1} &= 2E[f_{11}^2]x_1 + 2E[f_{11}]g_{11}z_1 - 2E[f_{11}]\tilde{y}_1 \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow x_1^r &= \frac{E[f_{11}](\tilde{y}_1 - g_{11}z_1)}{E[f_{11}^2]}. \end{aligned}$$

Sendo

$$\sigma^2[f_{11}] = E[f_{11}^2] - E^2[f_{11}],$$

então

$$x_1^r = \frac{E[f_{11}](\tilde{y}_1 - g_{11}z_1)}{E^2[f_{11}] + \sigma^2[f_{11}]} \quad (2.12)$$

#### Exercício Teórico-Prático

Experimente usar a expressão (2.11) para verificar como é fácil o uso daquela expressão, por forma a obter a expressão (2.12).



Só se  $\sigma^2[f_{11}] = 0$  é que  $x_1^r$  corresponderia à aplicação da regra do equivalente certo.<sup>11</sup> Ora, na verdade,  $\sigma^2[f_{11}] \neq 0$ .

Se se considerar  $E[f_{11}] = f_{11}$ , então:

$$x_1^r = \frac{E^2[f_{11}]}{E^2[f_{11}] + \sigma^2[f_{11}]}x_1^c,$$

ou seja:

$$|x_1^r| < |x_1^c|.$$

O valor da variável instrumental em condições de incerteza quanto ao seu multiplicador será, em valor absoluto, inferior ao estabelecido em condições de certeza.

Para terminar este ponto, considere-se o caso de um objectivo e dois instrumentos. Neste caso,

$$y_1 = f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + g_{11}z_1,$$

onde  $f_{11}$  e  $f_{12}$  são ambas variáveis aleatórias.

<sup>11</sup>Comparem-se as expressões (2.9) e (2.12).

Quanto à função objectivo, ter-se-á

$$\begin{aligned} E[\Theta] &= E[(f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + g_{11}z_1 - \tilde{y}_1)^2] \\ &= E[f_{11}^2x_1^2 + 2f_{11}x_1f_{12}x_2 + f_{12}^2x_2^2 + 2(f_{11}x_1 + f_{12}x_2)(g_{11}z_1 - \tilde{y}_1) + (g_{11}z_1 - \tilde{y}_1)^2] \end{aligned}$$

Considerando  $f_{11}$  e  $f_{12}$  independentes,

$$E[\Theta] = E[f_{11}^2]x_1^2 + 2E[f_{11}]x_1E[f_{12}]x_2 + E[f_{12}^2]x_2^2 + 2(E[f_{11}]x_1 + E[f_{12}]x_2)(g_{11}z_1 - \tilde{y}_1) + (g_{11}z_1 - \tilde{y}_1)^2.$$

As condições de primeira ordem do problema de minimização de  $E[\Theta]$  são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E[\Theta]}{\partial x_1} &= 2E[f_{11}^2]x_1 + 2E[f_{11}]E[f_{12}]x_2 + 2E[f_{11}](g_{11}z_1 - \tilde{y}_1) \stackrel{!}{=} 0 \\ \frac{\partial E[\Theta]}{\partial x_2} &= 2E[f_{11}]x_1E[f_{12}] + 2E[f_{12}^2]x_2 + 2E[f_{12}](g_{11}z_1 - \tilde{y}_1) \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Após algumas transformações algébricas chega-se a

$$\begin{cases} \sigma^2[f_{11}]x_1 + E[f_{11}](E[f_{11}]x_1 + E[f_{12}]x_2 + g_{11}z_1 - \tilde{y}_1) = 0 \\ \sigma^2[f_{12}]x_2 + E[f_{12}](E[f_{11}]x_1 + E[f_{12}]x_2 + g_{11}z_1 - \tilde{y}_1) = 0 \end{cases}$$

#### Exercício Teórico-Prático

Experimente usar a expressão (2.11) para verificar como é fácil o uso daquela expressão, por forma a obter aquele sistema de equações.



Este sistema de duas equações permite, então, afirmar que só se  $\sigma^2[f_{11}] = \sigma^2[f_{12}] = 0$  é que ambas as equações se reduziram a uma única,

$$(E[f_{11}]x_1 + E[f_{12}]x_2 + g_{11}z_1 - \tilde{y}_1) = 0,$$

caso em que se poderia escolher, arbitrariamente,  $x_1$  ou  $x_2$  para minimizar  $E[\Theta]$ . Existindo incerteza, ou seja, tendo  $\sigma^2[f_{11}] \neq 0$  e  $\sigma^2[f_{12}] \neq 0$ , regra geral, ter-se-á uma solução única para aquele sistema, o que significa que, neste caso, é óptimo usar ambos os instrumentos para fazer face a um único objectivo. Mais, a intensidade relativa do uso dos instrumentos é inversamente proporcional à variância dos seus “multiplicadores” já que

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{E[f_{11}]\sigma^2[f_{12}]}{E[f_{12}]\sigma^2[f_{11}]}.$$

**Exercício Teórico-Prático**

Suponha que o governo de um determinado país dispõe de dois instrumentos de política económica  $x_1$  e  $x_2$  para influenciar uma única variável objectivo  $y_1$ , os quais estão relacionados da seguinte forma:

$$y_1 = f_{11}x_1 + f_{12}x_2.$$

Admita, também, que a função objectivo é  $\Theta = (y_1 - \tilde{y}_1)^2$ .

Se existir certeza quanto ao impacto do instrumento  $x_1$  e incerteza quanto ao impacto do instrumento  $x_2$ , ou seja se  $f_{11}$  for um valor certo e  $f_{12}$  uma variável aleatória, como deverá o governo usar os instrumentos para atingir o seu objectivo?

*Nota-bene:* A resposta deve basear-se, tanto quanto possível, numa demonstração analítica.

Para ilustrar as questões que atrás foram analisadas, considere-se o seguinte modelo Keynesiano:

$$\begin{cases} Y = C + I + G + X - M \\ C = a + bY_d \\ Y_d = Y - T \\ T = u + vY \\ I = \bar{I} \\ G = \bar{G} \\ X = \bar{X} \\ M = n + mY \end{cases}.$$

A equação da forma reduzida do modelo em ordem a  $Y$  é:

$$Y = k(a - bu + \bar{I} + \bar{G} + \bar{X} - n), \quad (2.13)$$

onde o multiplicador genérico  $k$  é dado por:

$$k = \frac{1}{1 - b + bv + m}.$$

Se o Governo dispuser da seguinte função objectivo:

$$\Theta = (Y - \tilde{Y})^2, \quad (2.14)$$

onde  $Y$  é dado por (2.13) torna-se fácil verificar que a decisão óptima, por parte do Governo, no que diz respeito aos gastos públicos, ou seja o nível de  $G$  que minimiza (2.14) é:

$$\begin{aligned} G^c &= (1 - b + bv + m) \tilde{Y} - a + bu - b\bar{R} - \bar{I} - \bar{X} + n \\ &= \frac{1}{k} \tilde{Y} - A, \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde  $A \equiv a - bu + b\bar{R} + \bar{I} + \bar{X} + n$ .

Se alguma das variáveis exógenas não controláveis como, por exemplo,  $\bar{I}$  ou  $\bar{X}$  for de natureza aleatória, a regra do equivalente certo permitir-nos-á imediatamente determinar como decisão óptima em condições de risco:

$$G^r = \frac{1}{k} \tilde{Y} - E[A],$$

o que, obviamente, significa que, se  $A = E[A]$  então, a decisão óptima em condições de risco coincide com a decisão óptima em condições de certeza. Tal não acontece se a variável aleatória for o próprio multiplicador da variável de decisão.

Admita-se, agora, que o multiplicador genérico,  $k$ , é uma variável aleatória com valor esperado  $E[k]$  e variância  $V[k]$ . Se assim for, a decisão óptima por parte do Governo deve resultar da minimização de:

$$\begin{aligned} E[\Theta] &= E \left[ \left( Y - \tilde{Y} \right)^2 \right] \\ &= E \left[ \left( k (a - bu + \bar{I} + \bar{G} + \bar{X} - n) - \tilde{Y} \right)^2 \right] \\ &= E \left[ \left( k^2 (a - bu + \bar{I} + \bar{G} + \bar{X} - n)^2 - 2k (a - bu + \bar{I} + \bar{G} + \bar{X} - n) \tilde{Y} + \tilde{Y}^2 \right) \right] \\ &= E \left[ k^2 \right] (a - bu + \bar{I} + \bar{G} + \bar{X} - n)^2 - 2E[k] (a - bu + \bar{I} + \bar{G} + \bar{X} - n) \tilde{Y} + \tilde{Y}^2. \end{aligned}$$

A condição de primeira ordem é dada por:

$$2E[k^2] (a - bu + \bar{I} + \bar{G} + \bar{X} - n) - 2E[k] \tilde{Y} = 0,$$

donde resulta:

$$\begin{aligned} G^r &= \frac{E[k]}{E[k^2]} \tilde{Y} - a + bu - \bar{I} - \bar{X} + n \\ &= \frac{E[k]}{V[k^2] + E^2[k]} \tilde{Y} - a + bu - \bar{I} - \bar{X} + n. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Se, por hipótese, se admitir que  $E[k] = k$ , então, da comparação entre o nível de gastos públicos em condições de certeza,  $G^c$ , dado por (2.15), e o nível de gastos públicos em condições de risco,  $G^r$ , dado por (2.16), resulta que o nível de gastos públicos em condições de certeza é superior ao nível de gastos públicos em condições de risco ('teorema' da precaução):

$$G^c - G^r > 0,$$

já que:

$$\frac{1}{k} > \frac{E[k]}{\sqrt{V[k^2] + E^2[k]}}.$$

# 3

## Análise de Decisão em Contexto Dinâmico

---

### 3.1

#### A Situação a Tempo Discreto

##### 3.1.1

##### Teoria da decisão

Um exemplo simples de um problema dinâmico em tempo discreto pode apresentar-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \max_{\{x_t\}} \sum_{t=0}^{T-1} U(y_t, x_t, t) + F(y_T) \\ \text{sujeito a } y_{t+1} - y_t = f(y_t, x_t); y_0 = \bar{y}_0, \text{ dado,} \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde  $t = 0, 1, \dots, T$  assinala os períodos de tempo, sendo  $t = 0$  o momento presente e  $t = T$  o período final ou terminal.

$U = U(x_t, y_t, t)$  é a função objectivo a maximizar.  $y_t$  representa a variável objectivo (ou de estado), a qual descreve o sistema no período  $t$ . A variável  $x_t$  denomina-se por variável de controle no período  $t$ .  $F(y_T)$  representa uma função final que indica o valor dos níveis alternativos da variável de estado no tempo terminal  $T$ . A equação às diferenças  $y_{t+1} - y_t = f(y_t, x_t)$  define a alteração da variável estado desde o período  $t$  a  $t + 1$ .

Como se pode observar em (3.1), o objectivo deste problema consiste em maximizar a soma dos valores intermédios da utilidade mais o valor líquido associado ao estado terminal  $y_T$ , sujeito à restrição que nos descreve a evolução da variável estado através do tempo para uma dada condição inicial,  $y_0 = \bar{y}_0$ .

Assim, devemos determinar os valores óptimos para  $x_t$  entre  $t = 0, 1, \dots, T - 1$ , o que implicará valores  $y_t$  para os períodos de tempo  $t = 1, 2, \dots, T$ .



O Lagrangiano deste problema será:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{T-1} \{U(\cdot) - \lambda_{t+1}[y_t + f(\cdot) - y_{t+1}]\} + F(\cdot) \quad (3.2)$$

onde  $\lambda_{t+1}$  é o multiplicador associado a  $y_{t+1}$ .

As condições de primeira ordem com restrições de não negatividade serão:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_t} &= \frac{\partial U(\cdot)}{\partial x_t} + \lambda_{t+1} \frac{\partial f(\cdot)}{\partial x_t} = 0; \quad t = 0, 1, \dots, T-1 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_t} &= \frac{\partial U(\cdot)}{\partial y_t} + \lambda_{t+1} + \lambda_{t+1} \frac{\partial f(\cdot)}{\partial y_t} - \lambda_t = 0; \quad t = 1, 2, \dots, T-1 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_T} &= -\lambda_T + F'(\cdot) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_{t+1}} &= y_t + f(\cdot) - y_{t+1} = 0; \quad t = 0, 1, \dots, T-1 \end{aligned}$$

Podemos reescrever este sistema para facilitar a sua interpretação como sendo:

$$\frac{\partial U(\cdot)}{\partial x_t} + \lambda_{t+1} \frac{\partial f(\cdot)}{\partial x_t} = 0; \quad t = 0, 1, \dots, T-1 \quad (3.3)$$

$$\lambda_{t+1} - \lambda_t = \frac{\partial U(\cdot)}{\partial y_t} + \lambda_{t+1} \frac{\partial f(\cdot)}{\partial y_t}; \quad t = 1, 2, \dots, T-1 \quad (3.4)$$

$$y_{t+1} - y_t = f(\cdot) \quad (3.5)$$

$$\lambda_T = F'(\cdot) \quad (3.6)$$

$$y_0 = \bar{y}_0 \quad (3.7)$$

A condição (3.3) é a típica condição marginal que  $x_t$  deve satisfazer. Junto à expressão  $\frac{\partial U(\cdot)}{\partial x_t}$ , denominada utilidade marginal líquida no período  $t$ , aparece um segundo termo,  $\lambda_{t+1} \frac{\partial f(\cdot)}{\partial y_t}$ , o qual reflete a influência de uma alteração em  $x_t$  sobre a variável estado. Se um incremento em  $x_t$  reduz a variável  $y_{t+1}$ , este segundo termo refletirá um custo intertemporal (denominado frequentemente custo de uso). Quer dizer, este segundo termo representará as perdas marginais em que se ocorre no período

$t + 1, t + 2, \dots, T$ , associados à decisão de implementar a decisão,  $x_t$ , no período  $t$ .

A equação (3.4) é uma equação às diferenças que nos define as variações óptimas do multiplicador através do tempo.

A equação (3.5) é a restrição para a variável estado e as outras duas equações (3.6) e (3.7) denominadas condições fronteira, definem o valor terminal para o multiplicador e a condição inicial para a variável estado.

Estas equações formam um sistema de  $3T + 1$  equações com  $3T + 1$  incógnitas:  $x_t$  para  $t = 0, 1, \dots, T - 1$ ;  $y_t$  para  $t = 0, 1, \dots, T$ ;  $\lambda_t$  para  $t = 1, 2, \dots, T$ .

Uma outra possibilidade de resolução destes problemas consiste na utilização da programação dinâmica, a qual se baseia no seguinte princípio:<sup>1</sup>

*A sequência de decisões óptimas num problema de optimização intertemporal caracteriza-se pela propriedade de, quaisquer que sejam os valores assumidos pelo estado inicial, todas as decisões remanescentes devem formar uma sequência óptima para a parte remanescente do problema.*

Em termos práticos, para se determinar a sequência de decisões óptimas através da programação dinâmica deve partir-se do momento final para o momento inicial, construindo recursivamente a sequência de decisões óptimas. Este facto torna-se evidente através do seguinte exemplo.

Considere-se, então, que o agente decisor está perante a seguinte equação de evolução para a variável objectivo,  $y$ ,

$$y_{t+1} = y_t + x_t$$

para a qual se assume  $y_0 = \bar{y}_0$ , e  $x_t$  é representa a variável de decisão. O decisor pretende fazer variar  $y$  de  $y_0 = \bar{y}_0$  para  $y_3 = \tilde{y}_3$  (no final do terceiro período) através da escolha óptima de  $x_0, x_1$  e  $x_2$ , onde o carácter óptimo significa minimizar

$$- W(x) = \sum_{t=0}^2 x_t^2. \quad (3.8)$$

Em termos simples, a função objectivo (3.8) significa que o custo de ‘passagem’ do

<sup>1</sup>O princípio que se segue associa-se a Bellman, ao qual se deve um contributo importante para o desenvolvimento da teoria e prática da programação dinâmica.

momento 0 para o momento 1 é  $x_0^2$ , o custo de ‘passagem’ do momento 1 para o momento 2 é  $x_1^2$  – ou seja, o custo de ‘passagem’ do momento 0 para o momento 2 é  $x_0^2 + x_1^2 - etc.$

Começando a partir do momento final, temos que a imposição da restrição de se alcançar  $y_3 = \tilde{y}_3$  conduz imediatamente, sem necessidade/razão de otimização explícita, a

$$\tilde{x}_2 = \tilde{y}_3 - y_2, \quad (3.9)$$

ou seja

$$\tilde{x}_2 = f_2(y_2) \quad \text{Regra de decisão A}$$

A partir de (3.9) torna-se evidente que o custo de ‘passagem’ do momento 2 para o momento final será  $(\tilde{y}_3 - y_2)^2$ . Qual é então o custo de ‘passagem’ do momento 1 para o momento final? Será naturalmente  $x_1^2 + (\tilde{y}_3 - y_2)^2$ , onde  $y_2 = y_1 + x_1$ . Assim, há que minimizar este custo através da escolha de  $x_1$ , ou seja:

$$\begin{aligned} \min_{x_1} \left\{ x_1^2 + (\tilde{y}_3 - (y_1 + x_1))^2 \right\} &\Rightarrow \\ \tilde{x}_1 &= \frac{\tilde{y}_3 - y_1}{2}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Desta forma,

$$\tilde{x}_1 = f_1(y_1) \quad \text{Regra de decisão B}$$

Tendo em conta a expressão (3.10), o custo (óptimo) de ‘passagem’ do momento 1 para o momento 3 será  $2 \left( \frac{\tilde{y}_3 - y_1}{2} \right)^2$ . Assim, repetindo o procedimento para o momento inicial teremos que o custo de ‘passagem’ do momento 0 para o momento 3 será  $x_0^2 + 2 \left( \frac{\tilde{y}_3 - y_1}{2} \right)^2$ , onde  $y_1 = y_0 + x_0$ . A minimização deste custo conduz a

$$\tilde{x}_0 = \frac{\tilde{y}_3 - y_0}{3}, \quad (3.11)$$

ou seja a

$$\tilde{x}_0 = f_0(y_0) \quad \text{Regra de decisão C}$$

O uso das *regras de decisão A, B, e C*, após o ‘fornecimento’ da informação  $y_0 = \bar{y}_0$ , desencadeia, então, a sequência de decisões ótimas. Por exemplo, se  $y_0 = 0$  e  $\tilde{y}_3 = 3$  ter-se-á:

1.  $\tilde{x}_0 = 1$  a partir da *regra de decisão C*;
  2.  $y_1 = y_0 + x_0 = 1 \Rightarrow \tilde{x}_1 = 1$  a partir da *regra de decisão B*;
  3.  $y_2 = y_1 + x_1 = 1 \Rightarrow \tilde{x}_2 = 1$  a partir da *regra de decisão A*;
- $y_3 = y_2 + x_2 = 3$  conforme requerido..

### 3.1.2

#### Aplicações Económicas/Casos Particulares

Como forma de ilustrar a aplicação da análise de decisão em contexto dinâmico a tempo discreto (com horizonte temporal finito), considere-se, em primeiro lugar, *um caso de natureza microeconómica*, retirado da teoria do consumidor. Admita-se, então, que o consumidor se caracteriza por possuir preferências logarítmicas, de tal forma que o nível (instantâneo) de utilidade, por este retirado, no momento  $t$ , depende do seu nível de consumo nesse momento, ou seja que  $U_t = \ln c_t$ . Admita-se, também, que aquele agente decisor, pretende determinar os níveis de consumo ótimos desde o momento 0 até ao momento 2, para tal valorizando-os a uma taxa de actualização  $\beta$ . Assim, a sua função objectivo será:

$$U = \sum_{t=0}^2 \beta^t \ln c_t = \ln c_0 + \beta \ln c_1 + \beta^2 \ln c_2. \quad (3.12)$$

Para suportar as despesas inerentes ao consumo, o agente dispõe de recursos monetários, os quais, não sendo gastos em consumo, podem ser alvo de uma capitalização a uma taxa de juro  $r$ . Tal significa que a maximização de (3.12) deve ser feita sujeita às restrições

$$a_{t+1} = (1 + r) a_t - c_t,$$

para  $t = 0, 1, 2$ , onde  $a_0 = \bar{a}_0$  representa o montante inicial de recursos (monetários).

Em primeiro lugar, considere-se o modo de resolução deste processo de tomada de decisões por parte do consumidor assente no *princípio do óptimo (de Bellman)*.

Obviamente, dado o horizonte temporal das decisões, não faz qualquer sentido não utilizar plenamente o montante de recursos monetários que estará disponível no

momento 2 para consumo. Tal significa que se deverá ter  $a_3 = 0$ , o que significa, obviamente, que

$$c_2 = (1 + r) a_2. \quad (3.13)$$

Assim, tendo em conta a regra de decisão (3.13), os dois últimos momentos, em termos da função objectivo (3.12), podem ser reescritos como:

$$\begin{aligned} U_{t=1 \rightarrow t=2} &= \beta \ln(c_1) + \beta^2 \ln(c_2) = \beta \ln(c_1) + \beta^2 \ln((1 + r) a_2) \\ &= \beta \ln(c_1) + \beta^2 \ln((1 + r)((1 + r) a_1 - c_1)), \end{aligned}$$

cujos máximos se obtêm quando:

$$c_1 = \frac{1 + r}{1 + \beta} a_1, \quad (3.14)$$

já que é esta a solução de  $\frac{\partial(U_{t=1 \rightarrow t=2})}{\partial c_1} = \frac{\beta}{c_1} + \beta^2 \frac{-(1+r)}{(1+r)((1+r)a_1 - c_1)} \stackrel{!}{=} 0$ , dando aquela origem a um valor máximo:

$$U_{t=1 \rightarrow t=2} = \beta \ln\left(\frac{1 + r}{1 + \beta} a_1\right) + \beta^2 \ln\left(\frac{\beta(1 + r)^2}{1 + \beta} a_1\right).$$

Tendo em conta este valor, ou seja a regra de decisão (3.14), toda a função objectivo (3.12) pode ser reescrita como:

$$U = \ln(c_0) + \beta \ln\left(\frac{1 + r}{1 + \beta} a_1\right) + \beta^2 \ln\left(\frac{\beta(1 + r)^2}{1 + \beta} a_1\right).$$

Cumprindo-se a restrição  $a_1 = (1 + r) a_0 - c_0$ , a função objectivo será:

$$U = \ln(c_0) + \beta \ln\left(\frac{1 + r}{1 + \beta} ((1 + r) \bar{a}_0 - c_0)\right) + \beta^2 \ln\left(\frac{\beta(1 + r)^2}{1 + \beta} ((1 + r) a_0 - c_0)\right),$$

cujos máximos se obtêm para:

$$c_0 = \frac{1 + r}{1 + \beta + \beta^2} \bar{a}_0, \quad (3.15)$$

já que é esta a solução de  $\frac{\partial U}{\partial c_0} = \frac{1}{c_0} + \beta \frac{-\frac{1+r}{1+\beta}}{\frac{1+r}{1+\beta}((1+r)a_0 - c_0)} + \beta^2 \frac{-\frac{\beta(1+r)^2}{1+\beta}}{\frac{\beta(1+r)^2}{1+\beta}((1+r)a_0 - c_0)} \stackrel{!}{=} 0$ .

Em termos sequenciais,

$$\begin{aligned} a_0 = \bar{a}_0 \quad (3.15) \quad \rightarrow \quad c_0 &= \frac{1+r}{1+\beta+\beta^2} \bar{a}_0 \\ a_1 = (1+r)\bar{a}_0 - c_0 &= \beta \frac{(1+r)(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2} \bar{a}_0 \quad (3.14) \quad \rightarrow \quad c_1 = \frac{1+r}{1+\beta} a_1 = \beta \frac{(1+r)^2}{1+\beta+\beta^2} \bar{a}_0 \\ a_2 = (1+r)a_1 - c_1 &= \beta^2 \frac{(1+r)^2}{1+\beta+\beta^2} \bar{a}_0 \quad (3.13) \quad \rightarrow \quad c_2 = (1+r)a_2 = \beta^2 \frac{(1+r)^3}{1+\beta+\beta^2} \bar{a}_0. \end{aligned}$$

Em segundo lugar, considere-se o modo de resolução deste processo de tomada de decisões por parte do consumidor assente no *método dos multiplicadores de Lagrange*.

Obviamente, dado o horizonte temporal das decisões, independentemente do método de resolução do problema, continua a não fazer qualquer sentido não utilizar plenamente o montante de recursos monetários que estará disponível no momento 2 para consumo. Tal significa que se deverá ter  $a_3 = 0$ , o que significa, obviamente, que

$$c_2 = (1+r)a_2. \quad (3.16)$$

Assim, o Lagrangeano associado a este problema será:<sup>2</sup>

$$\mathcal{L} = \ln(c_0) + \beta \ln(c_1) + \beta^2 \ln((1+r)a_2) - \lambda_1 [(1+r)a_0 - c_0 - a_1] - \lambda_2 [(1+r)a_1 - c_1 - a_2],$$

ou, em termos equivalentes:

$$\mathcal{L} = \ln(c_0) + \beta \ln(c_1) + \beta^2 \ln((1+r)a_2) + \lambda_1 [a_1 - (1+r)a_0 + c_0 - a_1] + \lambda_2 [a_2 - (1+r)a_1 + c_1].$$

Para aquele Lagrangeano, as condições de primeira ordem resultarão de:

<sup>2</sup>Note-se que, para simplificar, se admitirá que os multiplicadores se consideram em valor actualizados.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_0} &= \frac{1}{c_0} + \lambda_1 \stackrel{!}{=} 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} &= \frac{\beta}{c_1} + \lambda_2 \stackrel{!}{=} 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} &= -((1+r)a_0 - c_0 - a_1) \stackrel{!}{=} 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} &= -((1+r)a_1 - c_1 - a_2) \stackrel{!}{=} 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_1} &= \lambda_1 - \lambda_2(1+r) \stackrel{!}{=} 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_2} &= \frac{\beta^2}{a_2} + \lambda_2 \stackrel{!}{=} 0
\end{aligned}$$

A solução deste sistema de equações será:

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{(1+r)}{1+\beta+\beta^2} \bar{a}_0, \\
c_1 &= \beta \frac{(1+r)^2}{1+\beta+\beta^2} \bar{a}_0, \\
a_1 &= \beta \frac{(1+\beta)(1+r)}{1+\beta+\beta^2} \bar{a}_0, \\
a_2 &= \beta^2 \frac{(1+r)^2}{1+\beta+\beta^2} \bar{a}_0, \\
\lambda_1 &= -\frac{1+\beta+\beta^2}{(1+r)\bar{a}_0}, \\
\lambda_2 &= -\frac{1+\beta+\beta^2}{(1+r)^2 \bar{a}_0},
\end{aligned}$$

obviamente encontrando-se, para além das decisões óptimas de  $c_0, c_1$ , em função de elementos conhecidos, tais como  $\bar{a}_0$ .

Como forma de ilustrar a aplicação da análise de decisão em contexto dinâmico a tempo discreto (com horizonte temporal infinito), considere-se, em segundo lugar, *um caso de natureza macroeconómica*, retirado da teoria do crescimento económico. Admita-se, então, uma versão não estocástica do modelo de crescimento de Brock-Mirman, ou seja, em que se pretende determinar uma sequência infinita de decisões óptimas de consumo agregado, i.e.

$$\max_{\{c_t\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln c_t, \tag{3.17}$$

admitindo que existe uma função de produção (de bens de capital passíveis de consumo) tal que

$$k_{t+1} = k_t^\alpha - c_t, \quad (3.18)$$

em que  $k_0 = \bar{k}_0$ .

O Lagrangeano associado ao programa de optimização da função objectivo, (3.17), sujeita à restrição inter-temporal (3.18), será:<sup>3</sup>

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^T [\beta^t \ln c_t - \beta^{t+1} \lambda_{t+1} (k_t^\alpha - c_t - k_{t+1})].$$

Claramente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} &= \frac{\beta^t}{c_t} + \beta^{t+1} \lambda_{t+1}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_{t+1}} &= \beta^{t+1} (k_{t+1} - k_t^\alpha + c_t), \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_t} &= \beta^t \lambda_t - \alpha \beta^{t+1} k_t^{\alpha-1} \lambda_{t+1}. \end{aligned}$$

As condições de primeira ordem são:

$$\frac{\beta^t}{c_t} + \beta^{t+1} \lambda_{t+1} = 0 \Leftrightarrow \beta^t (c_t^{-1} + \beta \lambda_{t+1}) = 0 \Rightarrow c_t^{-1} = -\beta \lambda_{t+1}, \quad (3.19)$$

$$\beta^{t+1} (k_{t+1} - k_t^\alpha + c_t) = 0 \Rightarrow k_{t+1} = k_t^\alpha - c_t, \quad (3.20)$$

$$\beta^t \lambda_t - \alpha \beta^{t+1} k_t^{\alpha-1} \lambda_{t+1} = 0 \Leftrightarrow \beta^t (\lambda_t - \alpha \beta k_t^{\alpha-1} \lambda_{t+1}) = 0 \Rightarrow \lambda_t = \alpha \beta k_t^{\alpha-1} \lambda_{t+1}. \quad (3.21)$$

Note-se, desde já, que se existisse um horizonte temporal finito,  $t = T$ , então, em termos óptimos,  $k_{T+1} = 0$ , ou seja  $c_T = k_T^\alpha$ . Esta solução permite conjecturar que a solução para um horizonte temporal infinito será do tipo:

$$c_t = a k_t^\alpha,$$

onde  $a$  é um parâmetro a ser determinado. O processo de determinação deste consiste em:

<sup>3</sup>Note-se a actualização do próprio multiplicador de Lagrange.



- Notar que, a partir da equação (3.19), se obtém

$$\lambda_{t+1} = \frac{1}{\beta c_t} = \frac{1}{\beta a k_t^\alpha}.$$

- Assim, da equação (3.21), depois de efectuada a substituição de  $\lambda_{t+1} = \frac{1}{\beta a k_t^\alpha}$ , ter-se-á

$$\lambda_t = \frac{\alpha}{a k_t},$$

o que significa que

$$\lambda_{t+1} = \frac{\alpha}{a k_{t+1}}.$$

- Dado que, de acordo com a equação (3.20),  $k_{t+1} = k_t^\alpha - c_t$ , então

$$\lambda_{t+1} = \frac{\alpha}{a (k_t^\alpha - c_t)} = \frac{\alpha}{a (k_t^\alpha - a k_t^\alpha)}.$$

Substituindo esta expressão na equação (3.21), ter-se-á

$$\lambda_t = \alpha \beta k_t^{\alpha-1} \frac{\alpha}{a (k_t^\alpha - a k_t^\alpha)} = \alpha^2 \frac{\beta}{k_t a (1-a)} = \frac{\alpha \beta}{1-a} \frac{\alpha}{a k_t}.$$

Tal implica que  $\frac{\alpha \beta}{1-a} = 1$ , o que significa que

$$a = 1 - \alpha \beta.$$

Assim, as decisões óptimas de consumo serão:

$$c_t = (1 - \alpha \beta) k_t^\alpha,$$

enquanto que

$$\lambda_t = \frac{\alpha}{1 - \alpha \beta} k_t^{-1}.$$

## 3.2

### A Situação a Tempo Contínuo

### 3.2.1 Teoria da decisão

A tomada de decisões óptimas em tempo contínuo é alvo da, chamada, teoria do controle óptimo, na qual o *princípio do máximo* desempenha um papel fundamental. Para a sua ilustração, considere-se o seguinte problema:<sup>4</sup>

$$\max_{\{x(t)\}} \int_0^T U(y(t), x(t), t) dt + F(y(T))$$

sujeita, esta maximização, a:

$$\begin{aligned} \dot{y} &\equiv \frac{dy}{dt} = f(y(t), x(t)); \\ y(0) &= \bar{y}_0, \text{ dado.} \end{aligned}$$

Note-se, em primeiro lugar, que o intervalo de optimização corresponde a  $0 \leq t \leq T$ , sendo o período terminal,  $T$ , livre ou fixo, i.e., respectivamente, alvo de escolha ou previamente determinado.<sup>5</sup> Para este problema, há que definir um, dito, Hamiltoniano, que será:

$$\mathcal{H}(y(t), x(t), \lambda(t), t) = U(y(t), x(t), t) + \lambda(t) [f(y(t), x(t))],$$

onde  $\lambda(t)$ , habitualmente designado de variável de co-estado, representa o papel de multiplicador ou de preço sombra, na medida em que é equivalente ao valor marginal da variável de estado no momento  $t$ .

As condições de primeira ordem necessárias associadas a este problema podem expressar-se como:

<sup>4</sup>Note-se que, sem perda de generalidade, se irá considerar o caso de uma função de utilidade  $U$ , podendo ser esta o simétrico de uma função de perda,  $L$ , pretendendo-se, neste caso, obviamente, minimizar a função objectivo.

<sup>5</sup>Iremos privilegiar o caso em que  $T$  é finito e pré-determinado.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{H}(\cdot)}{\partial x(t)} &= 0, \\
\frac{d\lambda(t)}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}(\cdot)}{\partial y(t)}, \\
\lambda(T) &= \frac{dF(\cdot)}{dy(t)}, \\
\frac{dy(t)}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}(\cdot)}{\partial \lambda(t)}, \\
y(0) &= \bar{y}_0.
\end{aligned}$$

Note-se que podem ser consideradas outras condições terminais. Se o estado terminal for especificado previamente [ $y(T) = \bar{y}_T$ ], a condição  $\lambda(T) = \frac{dF(\cdot)}{dy(t)}$  não será válida. Se o horizonte temporal for livre, a condição será  $\mathcal{H}(y(T), x(T), \lambda(T), T) = 0$ , condição que, juntamente com a de  $\lambda(T) = \frac{dF(\cdot)}{dy(t)}$ , se designam por condições de transversalidade.

A terminar, chame-se a atenção para a introdução do desconto neste tipo de problemas, a qual se torna relevante por, em Economia, ser efectivamente usual considerar problemas do tipo:

$$\max_{\{x(t)\}} \int_0^T U(y(t), x(t), t) e^{-\rho t} dt, \quad (3.22)$$

onde  $\rho$  representa uma taxa de actualização, medindo a importância de valores futuros de utilidade sobre o momento presente. Por forma a ter-se em conta o valor presente de uma corrente futura de fluxos de utilidade líquidos, alguns autores recomendam que se considere um Hamiltoniano a valores correntes, ou seja, para o caso de (3.22):

$$\mathcal{H}_c = \mathcal{H}e^{\rho t},$$

onde

$$\mathcal{H} = U(y(t), x(t), t) e^{-\rho t} + \lambda(t) [f(y(t), x(t))],$$

representa o Hamiltoniano a valores actuais. Assim:

$$\mathcal{H}_c = U(y(t), x(t), t) + \eta(t) [f(y(t), x(t))],$$

onde:

$$\eta(t) = \lambda(t) e^{\rho t},$$

representa a variável de co-estado a valores correntes.

Para este caso, as condições de primeira ordem serão:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{H}_c(\cdot)}{\partial x(t)} &= 0, \\
\frac{d\eta(t)}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}_c(\cdot)}{\partial y(t)} + \rho\eta(t), \\
\eta(T) &= \frac{dF(\cdot)}{dy(t)}, \\
\frac{dy(t)}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}_c(\cdot)}{\partial \eta(t)}, \\
y(0) &= \bar{y}_0.
\end{aligned}$$

Conforme se pode observar, a segunda condição é a única que se modifica de forma significativa em relação ao problema a valores actuais. Dado que  $\eta(t) = \lambda(t) e^{\rho t}$  então:

$$\begin{aligned}
\frac{d\eta(t)}{dt} &= \frac{d\lambda(t)}{dt} e^{\rho t} + \rho\lambda(t) e^{\rho t} \\
&= \frac{d\lambda(t)}{dt} e^{\rho t} + \rho\eta(t).
\end{aligned}$$

Como  $\mathcal{H}(\cdot) = \mathcal{H}_c(\cdot)e^{-\rho t}$ , ou seja:

$$-\frac{\partial \mathcal{H}(\cdot)}{\partial y(t)} = -\frac{\partial \mathcal{H}_c(\cdot)}{\partial y(t)} e^{-\rho t},$$

a expressão:

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}(\cdot)}{\partial y(t)},$$

resulta em

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}_c(\cdot)}{\partial y(t)} + \rho\eta(t)$$

### 3.2.2

#### Aplicações Económicas/Casos Particulares

Como aplicações de análise de decisão económica a tempo contínuo serão considerados dois casos, ambos com horizonte temporal finito: (i) um de natureza macroeconómica, consistindo no modelo de ciclo político de Nordhaus, e (ii) um de natureza microeconómica, consistindo num modelo de consumo.

O modelo de ciclo político-económico considerado por Nordhaus consiste nas seguintes hipóteses:

- Uma função de votação ou de popularidade, dependendo dos níveis de inflação,  $\pi$ , e de taxa de desemprego,  $u$ , ou seja  $V = f(\pi, u)$  com  $V_\pi < 0, V_u < 0$ , mais especificamente  $V_t = -u_t^2 - \beta\pi_t$ ;
- A popularidade do governo é acumulada ao longo do seu mandato, o qual dura desde  $t = 0$  até  $t = T$ , sendo a data das eleições,  $T$ , um dado, sendo a popularidade recordada de acordo com uma determinada ‘taxa’ de memória, tal que a contribuição para a popularidade acumulada no momento  $t$  é  $V_t e^{\mu t}$ ;
- A taxa de inflação  $\pi_t$  depende (inversamente) da taxa de desemprego  $u_t$  (variável de decisão) e (directamente) da taxa de inflação esperada  $v_t$ , mais especificamente  $\pi_t = \alpha_0 - \alpha_1 u_t + \gamma v_t$ ;
- A taxa de inflação esperada evolui de acordo com a seguinte expressão:  $\frac{dv_t}{dt} = \phi(\pi_t - v_t)$ , com  $v_0 = v(0)$  dada e  $v_T$  livre.

Se o objectivo for

$$\max_{u_t} \int_0^T (-u_t^2 - \beta\pi_t) e^{\mu t} dt \quad [\text{função objectivo}] \quad (3.23)$$

sujeita a

$$\pi_t = \alpha_0 - \alpha_1 u_t + \gamma v_t \quad [\text{curva de Phillips}], \quad 0 \leq \gamma < 1 \quad (3.24)$$

$$\frac{dv}{dt} = \phi(\pi_t - v_t) \quad [\text{expectativas adaptativas}], \quad 0 \leq \phi < 1 \quad (3.25)$$

e

$$v(0) = v_0 \quad v(T) \text{ livre,}$$

onde  $v_0$  (taxa de inflação esperada) e  $T$  (duração do mandato) são dados, as decisões ótimas do governo resultam de se maximizar o Hamiltoniano:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= (-u_t^2 - \beta\pi_t) e^{\mu t} + \lambda_t [\phi(\pi_t - v_t)] \\ &= (-u_t^2 - \beta(\alpha_0 - \alpha_1 u_t + \gamma v_t)) e^{\mu t} + \lambda_t [\phi(\alpha_0 - \alpha_1 u_t + \gamma v_t - v_t)] \\ &= (-u_t^2 - \beta(\alpha_0 - \alpha_1 u_t + \gamma v_t)) e^{\mu t} + \lambda_t [\phi(\alpha_0 - \alpha_1 u_t + (\gamma - 1)v_t)]. \end{aligned}$$

No que diz respeito às condições de primeira ordem, teremos:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_t} = (-2u_t + \beta\alpha_1) e^{\mu t} - \lambda_t \phi \alpha_1 \quad (3.26)$$

$$\frac{d\lambda_t}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial v_t} = -(-\beta\gamma e^{\mu t} + \lambda_t \phi (\gamma - 1)) = \beta\gamma e^{\mu t} + (1 - \gamma) \phi \lambda_t \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_t} = \phi (\alpha_0 - \alpha_1 u_t + (\gamma - 1) v_t) \quad (3.28)$$

Note-se que  $\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u_t^2} = -2e^{\mu t} < 0$ , o que significa que está perante uma trajectória de decisões óptimas, i.e. permitindo maximizar o nível de votação no dia das eleições,  $t = T$ .

Claramente, para que se possa determinar a trajectória óptima de decisões há que determinar a trajectória para a variável de co-estado,  $\lambda_t$ . Esta, de acordo com (3.27), evolui de acordo com a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d\lambda_t}{dt} = \beta\gamma e^{\mu t} + (1 - \gamma) \phi \lambda_t,$$

cuja solução é:

$$\lambda_t(t) = \frac{\beta\gamma e^{\mu t}}{\mu - (1 - \gamma)\phi} + C_1 e^{(1 - \gamma)\phi t}.$$

A condição de transversalidade para este caso, ou seja  $\lambda_t(T) = 0$ , permite determinar a constante  $C_1$  como sendo:

$$C_1 = -\frac{\beta\gamma}{\mu - (1 - \gamma)\phi} e^{(\mu - (1 - \gamma)\phi)T},$$

donde resulta:

$$\begin{aligned} \lambda_t(t) &= \frac{\beta\gamma e^{\mu t}}{\mu - (1 - \gamma)\phi} + \left( -\frac{\beta\gamma}{\mu - (1 - \gamma)\phi} e^{(\mu - (1 - \gamma)\phi)T} \right) e^{(1 - \gamma)\phi t} \\ &= \frac{\beta\gamma}{\mu - (1 - \gamma)\phi} e^{\mu t} - \frac{\beta\gamma}{\mu - (1 - \gamma)\phi} e^{\mu T - (1 - \gamma)\phi(T - t)}. \end{aligned}$$

Assim sendo, tendo em conta que a partir de (3.26) :

$$u_t = \frac{\alpha_1 \beta}{2} - \frac{\alpha_1 \phi}{2e^{\mu t}} \lambda_t,$$

ter-se-á:

$$\begin{aligned}
u_t &= \frac{\alpha_1\beta}{2} - \frac{\alpha_1\phi}{2e^{\mu t}} \left( \frac{\beta\gamma}{\mu - (1-\gamma)\phi} e^{\mu t} - \frac{\beta\gamma}{\mu - (1-\gamma)\phi} e^{\mu T - (1-\gamma)\phi(T-t)} \right) \\
&= \frac{\alpha_1\beta}{2} - \frac{\alpha_1\phi}{2} \frac{\beta\gamma}{\mu - (1-\gamma)\phi} + \frac{\alpha_1\phi}{2} \frac{\beta\gamma}{\mu - (1-\gamma)\phi} e^{(\mu - (1-\gamma)\phi)(T-t)} \\
&= \frac{\alpha_1\beta}{2} - \frac{\alpha_1\beta}{2} \frac{\phi\gamma}{\mu - (1-\gamma)\phi} + \frac{\alpha_1\beta}{2} \frac{\phi\gamma}{\mu - (1-\gamma)\phi} e^{(\mu - (1-\gamma)\phi)(T-t)} \\
&= \frac{\alpha_1\beta}{2} \left( 1 - \frac{\phi\gamma}{\mu - (1-\gamma)\phi} + \frac{\phi\gamma}{\mu - (1-\gamma)\phi} e^{(\mu - (1-\gamma)\phi)(T-t)} \right) \\
&= \frac{\alpha_1\beta}{2} \left( \frac{\mu - \phi}{\mu - (1-\gamma)\phi} + \frac{\phi\gamma}{\mu - (1-\gamma)\phi} e^{(\mu - (1-\gamma)\phi)(T-t)} \right) \\
&= \frac{\alpha_1\beta}{2} \left( \frac{1}{\mu - (1-\gamma)\phi} \left( \mu - \phi + \phi\gamma e^{(\mu - (1-\gamma)\phi)(T-t)} \right) \right) \\
&= \frac{\alpha_1\beta}{2(\mu - (1-\gamma)\phi)} \left( \mu - \phi + \gamma\phi e^{(\mu - (1-\gamma)\phi)(T-t)} \right),
\end{aligned}$$

ou

$$u_t = \frac{\alpha_1\beta}{2A} \left( \mu - \phi + \gamma\phi e^{A(T-t)} \right),$$

onde  $A \equiv \mu - (1-\gamma)\phi$ .

No que diz respeito às decisões óptimas há que notar o seguinte:

- No início do mandato,  $t = 0$ , a taxa de desemprego deverá ser colocada ao nível  $u(0) = \frac{\alpha_1\beta}{2A} (\mu - \phi + \gamma\phi e^{AT})$ . Claramente, este valor depende da duração do mandato. Quanto maior for a duração do mandato maior deverá ser o valor inicial da taxa de desemprego.
- No final do mandato, independentemente da duração do mesmo, a taxa de desemprego deverá atingir o valor  $u(T) = \frac{\alpha_1\beta}{2}$ .
- Dado que  $\frac{du_t}{dt} = -\frac{\alpha_1\beta\gamma\phi}{2} e^{A(T-t)} < 0$ , tal significa que a taxa de desemprego deverá decrescer ao longo do mandato. Este facto, em conjunto com os dois anteriores, permite afirmar que quanto maior for a duração do mandato mais acentuado será o ciclo económico no que diz respeito à taxa de desemprego.
- Note-se que a curvatura da trajectória da taxa de desemprego depende do sinal de  $A$ . Assim é porque  $\frac{d^2u_t}{dt^2} = \frac{\alpha_1\beta\gamma\phi}{2} A e^{A(T-t)} \begin{cases} \geq 0 & \text{se } A \geq 0 \\ \leq 0 & \text{se } A < 0 \end{cases}$ . A trajectória será concâva se  $A < 0$  e convexa se  $A > 0$ . A figura que se segue ilustra a situação.
- Note-se ainda que, a partir de (3.24) e de (3.25) seria possível determinar as trajectórias para as taxas de inflação,  $\pi_t$  e seu nível esperado,  $v_t$ .

Um caso (muito) particular deste problema ocorre quando a taxa de inflação esperada não influencia a taxa de inflação, ou seja quando  $\gamma = 0$ . Neste caso, a taxa de

desemprego deve ser constante ao longo do mandato, ou seja:

$$u_t = \frac{\alpha_1 \beta}{2}, \forall t$$

enquanto a taxa de inflação deverá ser também constante ao nível

$$\pi_t = \alpha_0 - \frac{\alpha_1^2 \beta}{2}, \forall t.$$

Intuitivamente, este resultado explica-se pelo facto de, neste caso, o governo simplesmente dever maximizar, *em cada período do seu mandato*, a sua popularidade  $V_t = -u_t^2 - \beta\pi_t$  sujeito à restrição  $\pi_t = \alpha_0 - \alpha_1 u_t$ .

Finalmente, note-se que seria possível definir um Hamiltoniano a valores ‘correntes’:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c &\equiv \mathcal{H}e^{-\mu t} = (-u_t^2 - \beta\pi_t) + e^{-\mu t} \lambda_t [\phi(\pi_t - v_t)] \\ &= (-u_t^2 - \beta(\alpha_0 - \alpha_1 u_t + \gamma v_t)) + \eta_t [\phi(\alpha_0 - \alpha_1 u_t + (\gamma - 1)v_t)], \end{aligned}$$

onde  $\eta_t \equiv e^{-\mu t} \lambda_t$ , o que significa também que  $\frac{d\eta_t}{dt} = \frac{1}{e^{\mu t}} \frac{d\lambda_t}{dt} - \mu \eta_t$ .

Considere-se, agora, o problema associado a um consumidor que pretende decidir sobre quanto consumir,  $c(t)$ , e quanto poupar,  $s(t)$ , em cada momento do tempo, entre  $t = 0$  e  $t = T$ . Admita-se também que, em cada momento do tempo, o consumidor aufero um rendimento (fixo) do seu trabalho,  $y$ , e um rendimento de capital  $rw(t)$ , onde  $r$  é a taxa de juro e  $w(t)$  representa a riqueza/capital acumulada no momento  $t$ , tal que, por hipótese,  $w(0) = 0$  e, obviamente,  $w(T) = 0$ . As preferências do consumidor são de natureza logarítmicas em relação ao nível de consumo, sendo o consumo futuro descontado à taxa de actualização  $\rho$ .

O Hamiltoniano associado a este problema é:

$$\mathcal{H} = e^{-\rho t} \ln c_t + \lambda_t [y + rw_t - c_t]$$

No que às condições de primeira ordem diz respeito, ter-se-á:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c_t} = \frac{e^{-\rho t}}{c_t} - \lambda_t$$

cuja solução para  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c_t} = 0$  resulta em:

$$c_t = \frac{e^{-\rho t}}{\lambda_t}. \quad (3.29)$$



Claramente, para a trajectória de decisões óptimas, importa determinar a trajectória óptima da variável de co-estado,  $\lambda_t$ . Esta pode obter-se a partir de:

$$\frac{d\lambda_t}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial w_t},$$

o que resulta em:

$$\frac{d\lambda_t}{dt} = -r\lambda_t.$$

Esta equação diferencial admite a seguinte solução:

$$\lambda_t = e^{-rt} A_1, \quad (3.30)$$

onde  $A_1$  é uma constante a ser determinada. Neste caso, esta constante não pode ser determinada (imediatamente) recorrendo a uma condição de transversalidade.<sup>6</sup>  $A_1$  deve ser determinada, neste caso, recorrendo às condições inicial e final para a riqueza acumulada,  $w_t$ . Esta evolui de acordo com a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dw}{dt} = y + rw_t - c_t,$$

ou seja, tendo em conta (3.29) e (3.30),

$$\frac{dw_t}{dt} = y + rw_t - \frac{e^{(r-\rho)t}}{A_1},$$

cujas solução genérica é:

$$w_t = \frac{re^{(r-\rho)t} + e^{rt} r \rho A_1 A_2 - y \rho A_1}{r \rho A_1}.$$

As constantes  $A_1$  e  $A_2$  devem, então, ser determinadas por forma a garantir o cumprimento das condições inicial e final para a riqueza acumulada, ou seja  $w_0 = 0$  e  $w_T = 0$ . A solução será:

$$A_1 = \frac{e^{(r-\rho)T} - e^{rT}}{1 - e^{rT}} \frac{r}{\rho y},$$

$$A_2 = \frac{1 - e^{(r-\rho)T}}{e^{rT} - e^{(r-\rho)T}} \frac{y}{r}.$$

<sup>6</sup>Note-se que o valor de  $A_1$  deveria ser 0, o mesmo significando  $\lambda_t = 0, \forall t$ , se, erradamente, se considerasse uma condição de transversalidade  $\lambda_T = 0$ .

Esta solução permite, então, determinar as trajectórias óptimas:

$$\begin{aligned}\tilde{c}_t &= \frac{(1 - e^{rT}) e^{(r-\rho)t} \rho y}{e^{(r-\rho)T} - e^{rT}} r, \\ \tilde{\lambda}_t &= e^{-rt} \frac{e^{(r-\rho)T} - e^{rT}}{1 - e^{rT}} \frac{r}{\rho y}, \\ \tilde{w}_t &= \frac{e^{(r-\rho)t+rT} - e^{(r-\rho)t} + e^{rt} - e^{rt+(r-\rho)T} + e^{(r-\rho)T} - e^{rT}}{e^{rT} - e^{(r-\rho)T}} \frac{y}{r}.\end{aligned}\tag{3.31}$$

A partir da trajectória de decisões de consumo óptimas, (3.31), é possível verificar que o consumo deve evoluir de acordo com o sinal da diferença entre a taxa de juro,  $r$ , e a taxa de actualização do consumidor,  $\rho$ , já que:

$$\frac{\partial \tilde{c}_t}{\partial t} = \frac{(1 - e^{rT}) (r - \rho) e^{(r-\rho)t} \rho y}{(e^{(r-\rho)T} - e^{rT}) r} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0,$$

consoante

$$r - \rho \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0.$$

A figura que se segue, representando as trajectórias de  $\tilde{c}_t$  (linhas superiores) e  $\tilde{w}_t$  (linhas inferiores) ilustra duas situações: (i) (linha a cheio)  $r < \rho$ ; (ii) (linha a ponteadado)  $r > \rho$ .<sup>7</sup>

Um caso particular de interesse é, assim, aquele em que  $r = \rho$ . Neste caso, é óptimo consumir, em cada momento do tempo, todo o rendimento do trabalho, ou seja:

$$\tilde{c}_t = y, \quad \forall t$$

o que resulta numa riqueza acumulada

$$\tilde{w}_t = 0 \quad \forall t.$$

<sup>7</sup>Note-se que, obviamente, foi considerado  $T = 8$ .

## Referências Bibliográficas

BAUMOL, W. (1977), **Economic Theory and Operations Analysis**, 4.<sup>a</sup> edição, Prentice-Hall, New Jersey.

BISWAS, Tapan (1997), **Decision-making Under Uncertainty**, Macmillan Press, Houndmills, Basingstoke, Hampshire.

BRONSON, Richard (1985), **Pesquisa Operacional**, McGraw-Hill do Brasil, São Paulo.

CAVACO SILVA, Aníbal (1982), **Finanças Públicas e Política Macroeconómica**, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa.

CHIANG, Alpha (1982), **Matemática para Economistas**, McGraw-Hill do Brasil, S. Paulo.

Chiang, Alpha (1992), **Elements of Dynamic Optimization**, McGraw-Hill International Editions (Economics Series), New York.

CLEMEN, Robert T. (1996), **Making Hard Decisions - An Introduction to Decision Analysis**, 2.<sup>a</sup> edição, Duxbury Press, Wadsworth Publishing Company, Belmont.

GAPINSKI, James H. (1982), **Macroeconomic Theory - Statics, Dynamics & Policy**, McGraw-Hill, New York.

JOHANSEN, Leif (1977), **Lectures on Macroeconomic Planning**, Parts 1 & 2, North-Holland, Amesterdam.

MILLS, Gordon (1984), **Optimisation in Economic Analysis**, George Allen & Unwin, London.

MURTEIRA, Bento (1990), **Probabilidades e Estatística**, Vol. I, 2.<sup>a</sup> edição, McGraw-Hill de Portugal, Lisboa.