MATEMÁTICA

Apontamentos e Exercícios

Paulo Manuel de Barros Correia

Escola de Ciências e Tecnologia
ISBN 978-989-97060-3-3

2010-2011

Índice

Prefácio

A presente publicação resulta da evolução dos apontamentos facultados desde o ano lectivo de 2007/2008 aos alunos das licenciaturas em Agronomia, Biologia e Ciência e Tecnologia Animal da Universidade de Évora.

O conteúdo está adaptado ao programa da unidade curricular de Matemática incidindo, por um lado, na consolidação e desenvolvimento dos conhecimentos adquiridos no Ensino Secundário, nomeadamente nas áreas de Análise e Álgebra e, por outro, na apresentação de novos temas como cálculo integral, equações diferenciais, matrizes e determinantes.

No final de cada capítulo são apresentados vários exercícios que servem de base para o estudo individual e para as aulas práticas.

No processo de amadurecimento do texto houve ainda a colaboração de alguns colegas do Departamento de Matemática a quem agradeço a disponibilidade e empenho.

Paulo Manuel de Barros Correia
Professor Auxiliar do Departamento de Matemática
Escola de Ciências e Tecnologia
Universidade de Évora

Capítulo 1

O sistema de números reais

1.1 Breves noções da Teoria de Conjuntos

Vamos começar por recordar algumas noções do que, em Matemática, se designa por Teoria de Conjuntos.

Uma colecção de 'objectos' é frequentemente identificada como sendo um novo 'objecto' chamado conjunto. De um ponto de vista formal, trata-se de uma palavra que não está sujeita a definição e, portanto, requer axiomas e regras de forma a evitarem-se inconsistências.

Informalmente, podemos definir conjunto como uma colecção de objectos que fica determinada quando são conhecidos os seus membros.

Ainda informalmente, se um determinado ser vive num determinado mundo dizemos que pertence a esse mundo. Podemos falar no mundo da música, o mundo do desporto, o mundo da política, etc. De uma forma natural, vemos que dentro do mundo do desporto existe o mundo dos futebolistas, ou dos ginastas, ou dos jogadores de bilhar... Ou ainda, pode dar-se o caso de futebolistas que são músicos, ou políticos que fazem tiro ao alvo...

Matematicamente, sendo A um conjunto, traduzimos a relação de pertença relativamente a esse conjunto pelo símbolo $\in$ dizendo 'x pertence a A', ou 'x é um elemento de A' ou, ainda, 'x está em A'; simbolicamente,

$$x \in A.$$

Dado um determinado objecto x é possível, em princípio, decidir se x pertence ou não a A. E, este último caso (não pertence a A) representa-se por $x \notin A$.

Os conjuntos podem ser definidos essencialmente de duas formas distintas:

- em extensão: quando enumeramos todos os seus elementos, como em

$$A := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \qquad B := \left\{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\};$$

- em compreensão: quando apresentamos uma propriedade definida num dado conjunto; por exemplo,

$$C := \{x \in X : \ p(x) \text{ é verdadeira}\}, \qquad D := \{q \in \mathbb{N} : \ q \text{ é múltiplo de } 3\}.$$

Podemos estabelecer dois tipos de relações entre conjuntos, digamos A, B e C. Se A e B têm os mesmos elementos, isto é, se os elementos de A são elementos de B e reciprocamente, se os elementos de B são elementos de A, diremos que $A = B$. Esta relação de igualdade entre dois conjuntos verifica as seguintes propriedades:

- Reflexiva: $A = A$;
- Simétrica: $A = B$ se e só se $B = A$;
- Transitiva Se $A = B$ e $B = C$ então $A = C$.

Outra relação que podemos estabelecer entre conjuntos é a relação de inclusão : dizemos que A está contido em B, ou que A é um subconjunto de B, e escrevemos $A \subset B$, se todo o elemento de A é também um elemento de B

A relação de inclusão entre conjuntos é:

- Reflexiva: $A \subset A$;
- Anti-simétrica: Se $A \subset B$ e $B \subset A$ então $A = B$;
- Transitiva: Se $A \subset B$ e $B \subset C$ então $A \subset C$.

Na verdade, $A = B$ se e só se $A \subset B$ e $B \subset A$. Esta é de facto a forma de provar que $A = B$. De modo a evitar inconsistências é necessário distinguir entre elementos e subconjuntos e, consequentemente, entre as formas verbais 'pertence a' e 'está contido em'. Por exemplo, se x pertence a A escrevemos de forma equivalente $x \in A$ ou $\{x\} \subset A$, mas não $x \subset A$.

Um conjunto pode ter 'muitos' elementos, 'poucos' ou nenhum. O conjunto que não contém nenhum elemento é designado por conjunto vazio e é representado por $\emptyset$ ou $\{\}$. Se um conjunto A é constituído por um número finito de elementos $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ dizemos que o conjunto A é *finito*.

OBSERVAÇÃO 1.1. *O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.*

De facto, seja A um conjunto arbitrário, precisamos de mostrar que todo o elemento de $\emptyset$ é elemento de A. Ora, a única maneira de tal afirmação ser falsa é encontrarmos um elemento em $\emptyset$ que não seja elemento de A, mas tal é certo que não sucede pois $\emptyset$ não tem elementos.

Para quantificar um conjunto recorremos à noção de cardinal. O cardinal de um conjunto A, que se representa por $\mathrm{card}(A)$, indica-nos o número de elementos que constituem esse conjunto. Os conjuntos podem ser identificados como objectos e, como tal, podem por sua vez ser membros de outros conjuntos. Assim, podemos falar do conjunto

$$A = \{\{2\}, \{2, 3\}, \{5, 6\}\}$$

cujos elementos são os conjuntos $\{2\}$, $\{2, 3\}$ e $\{5, 6\}$ e o seu cardinal é $\mathrm{card}(A) = 3$.

OBSERVAÇÃO 1.2. *Dado um conjunto A, indicamos com $\mathcal{P}(A)$ o conjunto cujos elementos são todos os subconjuntos de A. Ou seja, dizer que $B \in \mathcal{P}(A)$ equivale a dizer que $B \subset A$. $\mathcal{P}(A)$ designa-se por* conjunto das partes de A *e nunca é vazio pois, contém pelo menos o conjunto vazio e o próprio A. Por exemplo, se $A = \{1, 2, 3\}$ então*

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}.$$

OBSERVAÇÃO 1.3. *No restante texto, faremos uso do quantificador universal $\forall$ ('para todo' ou 'qualquer que seja') e do quantificador existencial $\exists$ ('existe pelo menos um'). Assim como os símbolos lógicos da conjunção $\wedge$ ('e') e da disjunção $\vee$ ('ou').*

1.1.1 Operações entre conjuntos

Sejam A, B e C três conjuntos. Definimos a reunião de A com B como sendo o conjunto constituído por elementos que pertencem a A ou a B e representamos por $A \cup B$,

$$\boxed{A \cup B := \{x : x \in A \vee x \in B\}.}$$

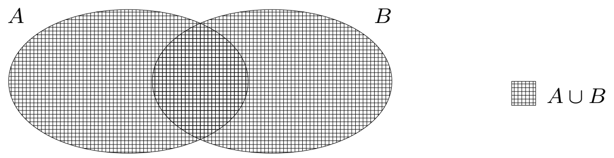


Figura 1.1: *Reunião de dois conjuntos.*

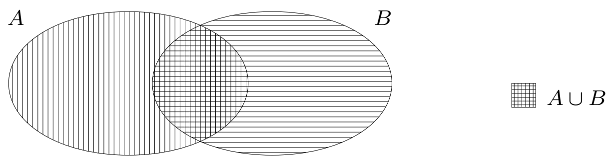


Figura 1.2: *Intersecção de dois conjuntos.*

A intersecção entre A e B é o conjunto de todos os pontos que pertencem simultaneamente a A e a B,

$$\boxed{A \cap B := \{x : x \in A \wedge x \in B\}.}$$

Dois conjuntos A e B são disjuntos se não têm elementos comuns, ou seja, $A \cap B = \emptyset$.

As operações de reunião e intersecção de conjuntos gozam das seguintes propriedades distributivas

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

A diferença entre A e B, $A \backslash B$, é o conjunto formado pelos elementos de A que não pertencem a B,

$$\boxed{A \backslash B := \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.}$$

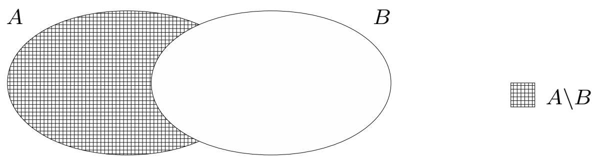


Figura 1.3: *Diferença entre dois conjuntos.*

Se $A \subset X$, o complementar $X \backslash A$ de A em X é o conjunto de pontos em X que não pertencem a A. Formalmente,

$$x \in X \backslash A \quad \text{se e só se} \quad x \in X \ \wedge \ x \notin A.$$

Uma vez fixado o conjunto X, o complementar de qualquer subconjunto $A \subset X$ é representado por

$$A^c := X \backslash A.$$

Sendo A e B dois conjuntos não-vazios, definimos o produto cartesiano de A por B, denotado por $A \times B$, como o conjunto constituído por todos os pares ordenados $(a,\, b)$ tais que $a \in A$ e $b \in B$, isto é,

$$\boxed{A \times B = \{(a,\, b) :\ a \in A,\, b \in B\}.}$$

Exemplo 1.1. *Seja* $A = \{1,\, 2,\, 3\}$ *e* $B = \{a,\, b\}$. *Então* $A \times B = \{(1,\, a), (1,\, b), (2,\, a), (2,\, b), (3,\, a), (3,\, b)\}$.

O produto cartesiano de A por si próprio, $A \times A$, representa-se por A^2; por exemplo, o plano cartesiano é representado por,

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,\, y) :\ x,\, y \in \mathbb{R}\}.$$

Cada ponto do plano representa um par ordenado de números reais e, reciprocamente, cada par ordenado de números reais representa um ponto do plano.

Exercício 1.1. *Represente graficamente o produto cartesiano* $[-2,\, 2] \times \mathbb{R}$.

1.2 Os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais

O sistema de números mais simples é o conjunto dos números naturais $\{1,\, 2,\, 3, \ldots\}$ identificado pela letra $\mathbb{N}$. A adição e a multiplicação são operações em $\mathbb{N}$, no sentido em que a soma e o produto de dois números naturais dá origem a um número natural. Contudo, a subtracção pode não fazer sentido se apenas tivermos ao nosso dispôr números naturais. Por exemplo, $3 - 7$ não tem significado em $\mathbb{N}$. Assim, teremos de considerar o conjunto mais amplo dos números inteiros ($\mathbb{Z}$) $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$

Embora a adição, a multiplicação e a subtracção façam sentido no conjunto dos números inteiros a divisão não pode ser definida para quaisquer dois números inteiros. Por exemplo, a expressão $3 \div 7$ não representa um número inteiro. Então, passamos para o conjunto (mais amplo) $\mathbb{Q}$, formado por todos os números da forma $\frac{p}{q}$ onde p e q são números inteiros e q é diferente de 0. Este é o conjunto dos números racionais,

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} : p,\, q \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad q \neq 0 \right\}.$$

Assim, de forma a dar resposta a cada uma das limitações, os conjuntos de números foram sendo progressivamente ampliados,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Em geral, os números que encontramos no dia-a-dia — preços, temperaturas, juros, velocidades, pesos, etc. — são números racionais. No entanto, também existem números que não são racionais como veremos.

1.2.1 Dízimas finitas e infinitas

Chamamos **dízima finita** a uma expressão da forma

$$a_0.a_1a_2\ldots a_n$$

onde $a_0 \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ e $a_1, \ldots, a_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Por definição atribuímos a esta expressão o seguinte significado:

$$a_0.a_1a_2\ldots a_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} = a_0 + a_1 \times 10^{-1} + a_2 \times 10^{-2} + \cdots + a_n \times 10^{-n}.$$

Assim, uma dízima finita representa sempre um número racional.

Por dízima infinita, entendemos uma expressão da forma $a_0.a_1a_2\ldots$ onde $a_0 \in \mathbb{Z}$ e, para cada $i \in \mathbb{N}$, $a_i \in \{0,1,2,\ldots,9\}$.

Podemos determinar o número racional definido, por exemplo, pela dízima infinita $x = 2.777\cdots = 2.\overline{7}$ calculando $10x - x$. De facto, subtraindo membro a membro,

$$\begin{array}{rcl} 10x & = & 27.777\ldots \\ (-)\quad x & = & 2.777\ldots \\ \hline 9x & = & 25.000\ldots \end{array}$$

Assim, a dízima infinita $2.777\ldots$ é a representação decimal do número racional $\frac{25}{9}$.

Vejamos outro exemplo. Para a dízima $x = 1.20101010\cdots = 1.2\overline{01}$ podemos, usando um raciocínio idêntico, calcular

$$\begin{array}{rcl} 1000x & = & 1201.010101\ldots \\ (-)\quad 10x & = & 12.010101\ldots \\ \hline 990x & = & 1189.000000\ldots \end{array}$$

portanto, $990x = 1189$ e, concluiríamos que x é o racional $\frac{1189}{990}$.

Exercício 1.2. *Escreva* $0.232323\ldots$ *como um quociente de dois números inteiros.*

Uma dízima que tenha uma sequência de dígitos que se repete denomina-se de dízima periódica e, pelo que anteriormente se expôs, vê-se que constitui um número racional. Reciprocamente, demonstra-se que qualquer número racional pode ser representado por uma dízima infinita periódica (toda a dízima finita é infinita periódica). Isto permite a caracterização dos números irracionais através de dízimas infinitas não-periódicas.

Assim, por exemplo,

$$x = 7.02002000200002\ldots$$

representa um número irracional.

Exercício 1.3. *Escreva um número irracional compreendido entre* $5.\overline{3}$ *e* $5.\overline{34}$.

1.3 Os números reais

Se ao conjunto dos números racionais acrescentarmos o conjunto dos números irracionais obteremos o conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$.

Exercício 1.4. *Ordene os seguintes números reais por ordem crescente*

$$0.56, \quad 0.\overline{56}, \quad 0.5\overline{66}, \quad 0.565565556\ldots, \quad 0.\overline{566}, \quad 0.56656665666\ldots, \quad 0.565566555666\ldots$$

Os números irracionais surgem quando tentamos resolver certas equações quadráticas. Por exemplo, $x^2 = 2$. Não existe nenhum número racional cujo quadrado seja 2.
Com a inclusão dos números irracionais chegamos a um sistema numérico suficientemente amplo para representar quantidades que variam de forma contínua e que permite compreender uma representação numérica da recta geométrica ou de um ponto na recta.

1.3.1 A representação de números reais em ponto flutuante

Nas aplicações científicas há necessidade de recorrer a números muito grandes e a números muito pequenos; por exemplo, a constante de Avogadro e a massa de um electrão, respectivamente,

$$602214179000000000000000\,\text{mol}^{-1} \qquad \text{e} \qquad 0.00000000000000000000000000000091095\,\text{kg}.$$

A representação destas constantes obriga a um grande número de dígitos, a maioria dos quais são zero. Para resolver estas dificuldades de representação de números muito grandes ou números muito pequenos usa-se a chamada **notação científica**, onde um número real x é expresso na forma

$$x = \pm a_1.a_2a_3a_4\cdots \times 10^p$$

com $a_1,\, a_2,\, a_3, \cdots \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, p um número inteiro e $a_1 \neq 0$. Os algarismos à direita do ponto decimal constituem a **mantissa** do número.
Deste modo, a constante de Avogadro e a massa de um electrão serão escritas em notação científica na forma

$$6.02214179 \times 10^{23}\,\text{mol}^{-1} \qquad \text{e} \qquad 9.1095 \times 10^{-31}\,\text{kg}.$$

Naturalmente, a notação científica como a acabámos de apresentar não pode ser implementada numa calculadora nem num computador por mais potente que seja pois, para cobrir todos os números reais, a mantissa e o expoente exigiriam um número infinito de algarismos. Assim, a notação científica é modificada no sentido de se utilizar um número finito de algarismos para a mantissa e um número finito de algarismos para o expoente, obtendo-se a representação em ponto flutuante.

Um número com a representação decimal em ponto flutuante $\pm 0.a_1 a_2 \ldots a_k \times 10^p$ diz-se ter k algarismos significativos.

Como a memória de uma calculadora ou computador é finita, tem de limitar o número de algarismos significativos com os quais trabalha. Tal procedimento pode levar a um tipo de erro conhecido como erro de arredondamento.

É importante compreender que um simples cálculo envolvendo apenas as operações elementares pode reduzir o número de algarismos significativos e, por conseguinte, conduzir à perda de informação. Tal perda de algarismos significativos, ou simplesmente perda de significância, pode ocorrer, por exemplo, quando se subtraem dois números muito próximos um do outro, que se designa por cancelamento subtractivo.

Por exemplo, 0.124 e 0.123 têm três algarismos significativos enquanto que a sua diferença, 0.1×10^{-2}, tem apenas um algarismo significativo. O exemplo seguinte ilustra como o resultado de um conjunto de operações pode ser afectado pelos arredondamentos.

Exemplo 1.2. *Qual o resultado de calcular*

$$x = 0.412 \times 0.300 - 0.617 \times 0.200$$

numa calculadora que usa apenas três algarismos significativos? Qual o erro relativo cometido?

Resolução O produto 0.412×0.300 com três algarismos significativos é 0.124 e 0.617×0.200 é 0.123. Portanto, numa calculadora com três dígitos x é calculado como $0.124 - 0.123 = 0.1 \times 10^{-2}$. Claro que x é realmente igual a $0.1236 - 0.1234 = 0.2 \times 10^{-3}$, como se pode verificar com uma calculadora usual.

Para quantificarmos o erro relativo cometido usamos a seguinte expressão

$$\frac{|x - \overline{x}|}{|x|}$$

onde x representa o valor exacto e $\overline{x}$ representa o valor aproximado.

Neste caso, o erro relativo cometido é,

$$\frac{|0.2 \times 10^{-3} - 0.1 \times 10^{-2}|}{|0.2 \times 10^{-3}|} = 4$$

ou, em termos percentuais, 400%.

1.3.2 Intervalos

Se $a,\, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, o conjunto de todos os x tais que $a \leq x \leq b$ diz-se um intervalo fechado com extremidades a, b e representa-se por $[a,\, b]$, isto é,

$$[a,\, b] := \{x \in \mathbb{R} :\, a \leq x \leq b\}.$$

Se $a,\, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, o conjunto

$$]a,\, b[:= \{x \in \mathbb{R} :\, a < x < b\}$$

diz-se intervalo aberto de extremidades a, b. É também usual a notação $(a,\, b)$ para representar um intervalo aberto.

De forma idêntica podemos definir os intervalos semi-abertos $]a,\, b]$ e $[a,\, b[$.

Introduzindo os símbolos $+\infty$ e $-\infty$ e a notação

$$]a,\, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} :\, x > a\}, \qquad [a,\, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} :\, x \geq a\},$$
$$]-\infty,\, a[= \{x \in \mathbb{R} :\, x < a\}, \qquad]-\infty,\, a] = \{x \in \mathbb{R} :\, x \leq a\},$$

podemos também falar de intervalos com extremidades a e $+\infty$ ou $-\infty$, ou ainda, de $\mathbb{R}$ como o intervalo $]-\infty,\, +\infty[$ de extremidades $-\infty$ e $+\infty$.

Um intervalo diz-se limitado se ambas as extremidades são finitas e ilimitado se pelo menos uma das extremidades é $-\infty$ ou $+\infty$.

Contudo, para definirmos conjunto limitado precisamos de recorrer a duas noções: a de majorante e a de minorante de um conjunto.

Seja X um conjunto não-vazio, $X \subset \mathbb{R}$. Dizemos que $M \in \mathbb{R}$ é um majorante de X se

$$M \geq x, \text{ para qualquer } x \in X.$$

Neste caso, X diz-se majorado (ou limitado superiormente). O menor dos majorantes do conjunto X é designado por supremo de X e representado por $\sup(X)$. Se o supremo de X pertence a X então toma o nome de máximo de X.

Analogamente, $m \in \mathbb{R}$ é um minorante de X se

$$m \leq x, \text{ para qualquer } x \in X.$$

Neste caso, diz-se que X é minorado (ou limitado inferiormente). O maior dos minorantes do conjunto X é designado por ínfimo de X e representado por $\inf(X)$. Se o ínfimo de X pertence a X então toma o nome de mínimo de X.

Exemplo 1.3. *Determine em $\mathbb{R}$, caso existam, o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo do conjunto $S = [0,\, 1[$.*

Resolução O conjunto dos majorantes de S é $U = [1,\, +\infty[$ pois, qualquer seja $x \in\, S$, $x \leq u$ sendo u um elemento qualquer fixado de U. O supremo de S é $\sup(S) = 1$ e S não tem máximo.
O conjunto dos minorantes de S é $L =]-\infty,\, 0]$ pois, qualquer seja $x \in\, S$, $x \geq \ell$ sendo ℓ um elemento qualquer fixado de L. O ínfimo de S é $\inf(S) = 0$ e min $= 0$ é o mínimo de S.

O conjunto X diz-se limitado se for majorado e minorado, isto é, se existirem números reais m e M tais que

$$m \leq x \leq M, \text{ para todo } x \in X,$$

ou seja, X é um conjunto limitado se e só se $X \subset [m, M]$.
No caso do exemplo anterior, o conjunto S é limitado, pois, é majorado e minorado.

1.4 Algumas noções topológicas em $\mathbb{R}$

Já vimos que podemos associar ao sistema de números reais um sentido geométrico que nos permite visualizá-lo como uma recta, ou seja, podemos associar um número real a um ponto da recta e, reciprocamente, associar um ponto da recta a um número. Tendo presente esta imagem, podemos interpretar $|x - y|$ como a distância entre dois pontos x e y. Em particular, o módulo (ou valor absoluto) de um número indica a distância desse número à origem.

Observação 1.4. (a) *Dado o número real positivo r, a expressão $|x| < r$ indica o conjunto dos pontos cuja distância à origem é inferior a r,*

$$\begin{aligned} |x| < r \quad &\Leftrightarrow \quad x < r \quad \wedge \quad x > -r \\ &\Leftrightarrow \quad x \in]-\infty,\, r[\cap]-r,\, +\infty[\\ &\Leftrightarrow \quad x \in]-r,\, r[. \end{aligned}$$

(b) $|x| > r$ *indica o conjunto dos pontos cuja distância à origem é superior a* r

$$\begin{aligned} |x| > r \quad &\Leftrightarrow \quad x > r \quad \vee \quad x < -r \\ &\Leftrightarrow \quad x \in]-\infty, -r[\cup]r, +\infty[. \end{aligned}$$

EXERCÍCIO 1.5. *Escreva o conjunto* $W = \{x \in \mathbb{R} : |x-6| \leq 2\}$ *sob a forma de intervalo.*

A noção de distância desempenha um papel fundamental na teoria dos limites. Por exemplo, se (x_n) é uma sucessão de números reais e $x \in \mathbb{R}$, então a condição $x_n \to x$ quando $n \to \infty$ significa que podemos tornar o número $|x_n - x|$ tão pequeno quanto queiramos quando tomamos n suficientemente grande.

Refira-se que $\mathbb{R}$ não é o único sistema matemático no qual faz sentido a noção de distância. Existem muitos outros e, sempre que possamos definir uma função distância, podemos definir limite e continuidade.

A ideia de distância entre dois números reais conduz-nos às noções importantes de vizinhança e ponto interior.

Observemos que, se a é um ponto arbitrário da recta e ε um número real positivo fixado, então os pontos cuja distância a a é inferior a ε são os todos aqueles, representados por x, que verificam a desigualdade $|x-a| < \varepsilon$ ou, equivalentemente,

$$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon.$$

Seja $c \in \mathbb{R}$. Chamamos vizinhança de raio $\varepsilon > 0$ do ponto c ao intervalo $]c-\varepsilon, c+\varepsilon[$, que designaremos por $\mathcal{V}_\varepsilon(c)$. A qualquer conjunto V que contenha uma vizinhança de raio ε do ponto c chamamos simplesmente vizinhança de c.

EXEMPLO 1.4. *Identifique a vizinhança de raio 0.5 do ponto 2.1.*

Resolução.

$$\mathcal{V}_{0.5}(2.1) = \{x \in \mathbb{R} : |x - 2.1| < 0.5\} =]1.6, 2.6[.$$

EXERCÍCIO 1.6. *Averigue se* π *pertence à vizinhança de raio* 0.04 *de* 3.1.

Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$ e c um número real. Diz-se que c é um ponto interior de X se existe pelo menos uma vizinhança de c, $\mathcal{V}_\varepsilon(c)$, contida em X, isto é, $\exists\, \varepsilon > 0 : \mathcal{V}_\varepsilon(c) \subset X$.

Exercício 1.7. *O número 0 não é ponto interior do intervalo* $[0, 1]$. *Justifique.*

Diz-se que c é um ponto exterior de X se for interior do complementar de X, $\mathbb{R}\backslash X$, o que equivale a dizer que existe pelo menos uma vizinhança de c, $\mathcal{V}_\varepsilon(c)$, que não contém pontos de X, ou seja, $\exists\, \varepsilon > 0 : \mathcal{V}_\varepsilon(c) \cap X = \emptyset$.

O ponto c diz-se ponto fronteiro de X se c não for interior nem exterior de X. Assim, $c \in \mathbb{R}$ é ponto fronteiro de X se e só se qualquer vizinhança de c, $\mathcal{V}_\varepsilon(c)$, contém pontos de X e de $\mathbb{R}\backslash X$, isto é, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\mathcal{V}_\varepsilon(c) \cap X \neq \emptyset \neq \mathcal{V}_\varepsilon(c) \cap (\mathbb{R}\backslash X)$.

O ponto c diz-se ponto aderente de X se qualquer vizinhança de c, $\mathcal{V}_\varepsilon(c)$, contém pontos de X, ou seja, $\forall \varepsilon > 0$, $\mathcal{V}_\varepsilon(c) \cap X \neq \emptyset$. Claramente, todo o ponto que pertença a X é aderente a X.

Os conjuntos constituídos por pontos com cada uma destas características têm designações correspondentes. Assim, o conjunto dos pontos interiores de $X \subset \mathbb{R}$ chama-se interior de X e representa-se por $\mathrm{int}(X)$. O conjunto dos pontos exteriores de X chama-se exterior de X e representa-se por $\mathrm{ext}(X)$. O conjunto dos pontos fronteiros de X denomina-se fronteira de X e representa-se por $\mathrm{fr}(X)$. Por último, o conjunto dos pontos aderentes a X chama-se aderência de X, ou fecho de X, e representa-se por $\overline{X}$.

O ponto $c \in \mathbb{R}$ diz-se ponto de acumulação do conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando qualquer vizinhança de c, $\mathcal{V}_\varepsilon(c)$, contém pelo menos um ponto de X distinto de c, ou seja, $\forall \varepsilon > 0$, $\mathcal{V}_\varepsilon(c) \cap (X \backslash \{c\}) \neq \emptyset$. Ou seja, quando na vizinhança de c se retira c ainda restam pontos do conjunto. Naturalmente, c é ponto de acumulação de X se e só se qualquer vizinhança de c contém uma infinidade de pontos de X.

Exercício 1.8. *Será verdadeira ou falsa a seguinte afirmação: "nenhum conjunto finito pode ter pontos de acumulação"? Justifique.*

Ao conjunto dos pontos de acumulação de um conjunto X dá-se o nome de derivado de X e representa-se por X'.

EXEMPLO 1.5. *Seja* $X = \left\{1,\, \frac{1}{2},\, \frac{1}{3},\, \ldots,\, \frac{1}{n},\, \ldots\right\}$. *Então* $X' = \{0\}$.

Um ponto $c \in X$ que não é ponto de acumulação de X diz-se um **ponto isolado** de X.

EXERCÍCIO 1.9. *Determine em* $\mathbb{R}$ *o interior, a fronteira, o exterior, a aderência, o conjunto derivado e os pontos isolados de cada um dos seguintes conjuntos*

(a) $X =]0, 1[$ (b) $X = [0, 1[$

(c) $X = \{0,\, 0.5,\, 0.75,\, 1\}$ (d) $X = [0, +\infty[$.

EXEMPLO 1.6. *Determine em* $\mathbb{R}$ *o interior, o exterior, a fronteira, a aderência e o derivado do conjunto* $A = [0,\, 1] \cup]2,\, 3[\cup \{6,\, 10\}$.

Resolução. Começamos por procurar os pontos interiores de A.

Seja $c \in]-\infty,\, 0]$. Então c não é ponto interior de A porque não é possível encontrar pelo menos uma vizinhança de c contida em A, isto é, $\nexists\, \varepsilon > 0 : \mathcal{V}_\varepsilon(c) \subset A$.

Seja $c \in]0,\, 1[$. Então c é ponto interior de A pois, é possível encontrar uma vizinhança de c, $\mathcal{V}_\varepsilon(c)$, que esteja contida em A. Basta tomar, por exemplo, $\varepsilon = \min\{\frac{1}{2}|c|,\, \frac{1}{2}|c-1|\}$.

Seja $c \in [1,\, 2]$. Neste caso, c não será ponto interior de A visto não ser possível encontrar pelo menos uma vizinhança de c contida em A.

Seja $c \in]2,\, 3[$. Então c é ponto interior de A pois, é possível definir uma vizinhança de c, $\mathcal{V}_\varepsilon(c)$, contida em A. Basta tomar $\varepsilon = \min\{\frac{1}{2}|c-2|,\, \frac{1}{2}|c-3|\}$.

Seja $c \in [3,\, +\infty[$. Então c não é ponto interior de A porque não é possível encontrar uma vizinhança de c contida em A.

Logo, $\mathrm{int}(A) =]0,\, 1[\cup]2,\, 3[$.

Vamos agora determinar os pontos exteriores de A.

Seja $c \in]-\infty,\, 0[$. Então c é ponto exterior de A pois, é possível definir uma vizinhança de c, $\mathcal{V}_\varepsilon(c)$, que não contenha pontos de A. Para tal, basta tomar, por exemplo, $\varepsilon = \frac{1}{2}|c|$.

Seja $c = 0$. Então c não é ponto exterior de A pois, qualquer vizinhança de c contém pontos de A. Pelo mesmo motivo, também não são pontos exteriores de A: 1, 2, 3, 6, e 10.

Sabemos que pontos interiores, exteriores e fronteiros se excluem mutuamente. Logo, não necessitamos de analisar os intervalos $]0, 1[$ e $]2, 3[$.

Seja $c \in]1, 2[$. Então c é ponto exterior de A pois, é possível encontrar uma vizinhança de c, $\mathcal{V}_\varepsilon(c)$, que não contenha pontos de A, isto é, $\exists \varepsilon > 0 : \mathcal{V}_\varepsilon(c) \cap A = \emptyset$. Basta tomar, por exemplo, $\varepsilon = \min\{\frac{1}{2}|c-1|, \frac{1}{2}|c-2|\}$.

Seja $c \in]3, +\infty[\backslash\{6, 10\}$. Então c é ponto exterior de A pois, é possível encontrar uma vizinhança de c, $\mathcal{V}_\varepsilon(c)$, que não contenha pontos de A. Tomemos, por exemplo, $\varepsilon = \min\{\frac{1}{2}|c-3|, \frac{1}{2}|c-6|, \frac{1}{2}|c-10|\}$.

Logo, $\text{ext}(A) =]-\infty, 0[\cup]1, 2[\cup]3, +\infty[\backslash\{6, 10\}$.

Os pontos fronteiros de A são 0, 1, 2, 3, 6 e 10. De facto, seja $c \in \{0, 1, 2, 3, 6, 10\}$. Então c é ponto fronteiro de A pois, qualquer vizinhança de c contém pontos de A e de $\mathbb{R}\backslash A$.

Logo, $\text{fr}(A) = \{0, 1, 2, 3, 6, 10\}$.

Determinemos a aderência de A. Sabemos que $\overline{A} = \text{int}(A) \cup \text{fr}(A)$. Logo, $\overline{A} = [0, 1] \cup [2, 3] \cup \{6, 10\}$. De facto, se $c \in [0, 1] \cup [2, 3] \cup \{6, 10\}$ qualquer vizinhança de c contém pontos de A.

Por último, vamos determinar os pontos de acumulação de A. Procuramos todos os pontos c para os quais, qualquer vizinhança de c, $\mathcal{V}_\varepsilon(c)$, contém pelo menos um ponto de A distinto de c, isto é, $\forall \varepsilon > 0$, $\mathcal{V}_\varepsilon(c) \cap (A\backslash\{c\}) \neq \emptyset$. Obtemos assim, $A' = [0, 1] \cup [2, 3]$.

1.4.1 Conjuntos abertos e fechados

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ diz-se **aberto** quando todos os seus pontos são interiores, isto é, $\text{int}(X) = X$. Por outras palavras, X é aberto se e só se todo o elemento de X possuir uma vizinhança contida em X, isto é, se $\forall c \in X, \exists \varepsilon > 0 : \mathcal{V}_\varepsilon(c) \subset X$. Podemos interpretar a vizinhança $\mathcal{V}_\varepsilon(c) \subset X$ como uma espécie de 'margem de segurança' de um ponto c, dentro da qual ele se pode movimentar sem correr o risco de sair do conjunto X. Naturalmente, essa margem de segurança não é a mesma para todos os pontos de X.

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é **fechado** se e só se todo o ponto aderente de X pertence a X, ou seja, $\overline{X} = X$.

Os conjuntos fechados gozam da seguinte propriedade: um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é fechado se e só se o seu complementar $\mathbb{R}\backslash X$ é aberto.

Os conjuntos $\mathbb{R}$ e $\emptyset$ são simultaneamente abertos e fechados.

EXEMPLO 1.7. *Seja* $A =]0,\, 1[\cup]2,\, 5[$. *Então* A *é um conjunto aberto.*

Com efeito, para todo o $c \in A$ tem-se $c \in]0,\, 1[$ ou $c \in]2,\, 5[$. Em qualquer dos casos, existe uma vizinhança de c contida em A. Basta tomar, por exemplo,

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2} \min\{|c|,\, |c-1|,\, |c-2|,\, |c-5|\}.$$

1.5 Exercícios e complementos

1. Seja $A = \{x :\ 3x = 6\}$. Indique o valor lógico da afirmação $A = 2$. Justifique.

2. Seja $M = \{r,\, s,\, t\}$. Averigue se cada uma das afirmações é verdadeira ou falsa e justifique.

   (a) $r \in M$ (b) $r \subset M$ (c) $\{r\} \in M$ (d) $\{r\} \subset M$.

3. Explique a diferença entre $\emptyset$, $\{0\}$ e $\{\emptyset\}$.

4. Considere os seguintes conjuntos:

   $$A = \{10, 20, 30, 40\}, \qquad B = \{20, 40, 80, 90\}, \qquad C = \{30, 40, 50, 80\}.$$

   (a) Determine:

      (i) $A \cup B$ (ii) $A \cup C$ (iii) $B \cup C$

      (iv) $B \cup B$ (v) $(A \cup B) \cup C$ (vi) $A \cup (B \cup C)$.

   (b) Determine:

      (i) $A \cap B$ (ii) $A \cap C$ (iii) $B \cap C$

      (iv) $B \cap B$ (v) $(A \cap B) \cap C$ (vi) $A \cap (B \cap C)$.

   (c) Aplicando a definição de diferença entre dois conjuntos, determine:

      (i) $A \setminus B$ (ii) $C \setminus A$ (iii) $B \setminus C$

      (iv) $B \setminus A$ (v) $B \setminus B$.

5. Considere os seguintes conjuntos no universo dos números naturais inferiores a 10:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \qquad B = \{2, 4, 6, 8\}, \qquad C = \{3, 4, 5, 6\}.$$

Determine:

(a) A^c (b) B^c (c) $(A \cap C)^c$

(d) $(A \cup B)^c$ (e) $(A^c)^c$ (f) $(B \backslash C)^c$.

6. Represente sob a forma de intervalo os seguintes conjuntos

(a) $\{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 3\}$ (b) $\{x \in \mathbb{R} : |x - 2| < 5\}$

(c) $\{t \in \mathbb{R} : t > 1\}$ (d) $\{u \in \mathbb{R} : |u - 4| \geq 6\}$

(e) $\{y \in \mathbb{R} : |y + 4| \leq 10\}$ (f) $\{s \in \mathbb{R} : |s - 2| > 8\}$.

7. Represente cada um dos seguintes conjuntos na recta real

(a) $\{x \in \mathbb{R} : 2x - 5 < x + 4\}$ (b) $\{x \in \mathbb{R} : x > -2 \text{ e } x^2 < 9\}$

(c) $\left\{t \in \mathbb{R} : (t - 5)^2 < \dfrac{9}{4}\right\}$ (d) $\{y \in \mathbb{R} : 7y + 4 \geq 2y + 1\}$

(e) $\{x \in \mathbb{R} : |3x + 9| \leq 15\}$ (f) $\{w \in \mathbb{R} : |2w - 12| \geq 1\}$.

8. Escreva cada um dos intervalos indicados na forma $\{x \in \mathbb{R} : |x - c| < r\}$ ou $\{x \in \mathbb{R} : |x - c| \leq r\}$

(a) $[-1,\ 3]$ (b) $[3,\ 4\sqrt{2}]$ (c) $(-\pi,\ \pi + 2)$ (d) $(\pi - \sqrt{2},\ \pi)$.

9. Determine em $\mathbb{R}$, caso existam, o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo dos conjuntos

(a) $]-\infty,\ 1[$ (b) $\{n \in \mathbb{N} : 2n > 15\}$.

10. Escreva sob a forma de conjunto $\mathcal{V}_{0.2}(3)$. Represente-o geometricamente.

11. Determine em $\mathbb{R}$ o interior, a aderência e o derivado dos seguintes conjuntos.

(a) $A =]-1,\, 1]\backslash\{0\}$ (b) $B = \{x \in \mathbb{R} :\ x^2 \leq 4\}$

(c) $C = \{x \in \mathbb{R} :\ 0 < |x-3| \leq 5\}$ (d) $D = \{x \in \mathbb{R} :\ x^3 > x\}$

(e) $E = \{x \in \mathbb{R} :\ |x-1| \geq |x|\}$ (f) $F = \left\{x \in \mathbb{R} :\ \dfrac{x-1}{x+3} > \dfrac{x}{x+2}\right\}$.

12. Determine os pontos de acumulação de cada um dos seguintes conjuntos.

(a) $\mathbb{N}$ (b) $]a, b]$ (c) $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

13. Determine o conjunto A tal que:

(a) A e A' sejam disjuntos (b) $A \subsetneq A'$, isto é, $A \subset A'$ mas $A \neq A'$

(c) $A' \subsetneq A$ (d) $A = A'$.

14. Determine em $\mathbb{R}$ o interior, a aderência e o derivado do conjunto $(\mathbb{R}\backslash]-1, +\infty[) \cap \mathbb{Q}$.

Capítulo 2

Sucessões, séries e funções reais de variável real

2.1 Sucessões

Imaginemos que analisamos uma célula que, por mitose, se divide a cada 120 minutos.

Supondo que no início da observação existia apenas uma célula, como irá variar o número de células ao longo do tempo?

Vamos chamar ao instante em que começámos a observação, instante $t = 0$. Para $t = 0$ existia apenas uma célula. Após 120 minutos, a célula divide-se em duas logo, temos duas bactérias para $t = 120$. Duas horas depois cada uma das células se divide, resultando em quatro células para $t = 240$, e assim sucessivamente.

Obtemos deste modo uma sequência de valores da população de células correspondendo a instantes igualmente intervalados,

$$1, \quad 2, \quad 4, \quad 8, \quad 16, \quad 32, \quad \ldots$$

2.1.1 Definições e generalidades

Suponhamos que S e T são dois conjuntos não-vazios. Uma função f no conjunto S e com valores no conjunto T é uma regra que associa a cada elemento de S um único elemento de T. Escrevemos $f : S \longrightarrow T$ e lemos 'f aplica S em T'.

O conjunto S denomina-se domínio de f, D_f, e T é o conjunto de chegada de f. O contradomínio (ou imagem) de f é o conjunto $D'_f = \{f(x) : x \in S\}$ de todos os valores em T que a função assume.

Uma sucessão é uma função de domínio $\mathbb{N}$ e tomando valores no conjunto dos números reais,

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto u(n). \end{aligned}$$

É usual a notação $u_n \equiv u(n)$ para representar o termo de ordem n. Não confundir o termo u_n com a sucessão (u_n).

Uma sucessão pode ser definida por uma expressão analítica através da qual podemos encontrar cada elemento ou termo da sucessão. Tal expressão é designada por termo geral da sucessão.

Exercício 2.1. *Escreva os seis primeiros termos da sucessão (u_n) dada pelo termo geral*

$$u_n = \frac{[1 + (-1)^{n+1}]n}{2}.$$

Dizemos que a sucessão (u_n) está definida por recorrência, ou recursivamente, se conhecidos os termos $u_1, \ldots, u_n$ da sucessão, o termo u_{n+1} é expresso em função daqueles.

Exercício 2.2. *É famosa a denominada sucessão de Fibonacci* [1] *definida por:*

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 1, \quad u_n = u_{n-1} + u_{n-2}.$$

Escreva os dez primeiros termos desta sucessão.

Uma sucessão (u_n) diz-se majorada, ou limitada superiormente, se existir um número real L tal que $u_n \leq L$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que L é um majorante da sucessão (u_n).

Analogamente, uma sucessão (u_n) é minorada, ou limitada inferiormente, se existir um número real ℓ tal que $\ell \leq u_n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que ℓ é um minorante da sucessão e que (u_n) é minorada por ℓ.

Se (u_n) é majorada e minorada, então diremos simplesmente que (u_n) é limitada. Neste caso, existe um número $M > 0$ tal que $|u_n| \leq M$ e, diremos que (u_n) é limitada por M.

Exercício 2.3. *Mostre que a sucessão $u_n = \dfrac{2n}{3n+16}$ é limitada.*

[1] Consultar, por exemplo, http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm41/suc-fib.htm

Uma sucessão (u_n) diz-se **crescente** quando $u_1 < u_2 < u_3 < \cdots < u_n < u_{n+1} < \ldots$, isto é, quando $u_{n+1} - u_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Analogamente, quando $u_1 > u_2 > u_3 > \cdots > u_n > u_{n+1} > \ldots$, ou seja, quando $u_{n+1} - u_n < 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, a sucessão (u_n) diz-se **decrescente**.

Se nas relações anteriores pudermos usar o sinal de igualdade diremos que se trata de uma sucessão crescente, ou decrescente, **em sentido lato**.

Se uma sucessão é crescente ou decrescente, em sentido estrito ou lato, dizemos que é **monótona**, em sentido estrito ou lato.

Exercício 2.4. *A sucessão do exercício 2.1 é minorada, não é majorada e não é monótona. Justifique.*

Exercício 2.5. *Estude a sucessão $u_n = \frac{1}{n}$ quanto à monotonia.*

2.1.2 Limites de sucessões

Quando se estuda a evolução de uma população ao longo do tempo, estamos muitas vezes interessados no seu comportamento a longo prazo. Concretamente, se N_t é o tamanho da população no instante t, com $t = 0, 1, 2, \ldots$, pretendemos saber como é que N_t se comporta à medida que t vai aumentando. Podemos traduzir matematicamente esta ideia dizendo 'quando t tende para infinito'. E somos conduzidos à noção de limite.

Intuitivamente, dizer que o número real a é limite da sucessão (u_n) significa afirmar que, para valores muito grandes de n, os termos u_n tornam-se, e mantém-se, tão próximos de a quanto se deseje. Com um pouco mais de rigor: estipulando-se um 'erro' por meio de um número real positivo ε, existe um índice n_0 tal que todos os termos u_n da sucessão que têm índice n maior que n_0 são valores aproximados de a com erro inferior a ε.

Chegamos assim à seguinte definição. Diz-se que o número real a é **limite** da sucessão (u_n) de números reais, e escreve-se $\lim_{n\to\infty} u_n = a$, quando para qualquer número real positivo ε, dado arbitrariamente, for possível encontrar um número natural n_0 tal que para todos os índices n

superiores a n_0, a distância do termo u_n a a é inferior a ε, isto é,

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Longrightarrow |u_n - a| < \varepsilon.} \tag{2.1}$$

Observemos que se $\lim_{n\to\infty} u_n = a$ então qualquer vizinhança $\mathcal{V}_\varepsilon(a)$ de centro a e raio $\varepsilon > 0$, contém todos os termos u_n da sucessão, com excepção de no máximo um número finito de índices n.

Quando $\lim_{n\to\infty} u_n = a$ diz-se que a sucessão (a_n) converge para a e escreve-se $a_n \to a$.

Uma sucessão que possui limite diz-se **convergente**. Caso contrário, diz-se **divergente**.

EXEMPLO 2.1. *Discutamos a convergência da sucessão* $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$.

Seja $u_n = \frac{1}{n}$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ Os termos u_n tornam-se cada vez mais próximos de 0. Vamos provar que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Neste caso, $a = 0$ e tomemos ε é um dado número real positivo arbitrário. Precisamos de mostrar que é possível encontrar n_0 de modo que, para qualquer termo de ordem $n > n_0$ tem-se $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$, ou seja, $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Que equivale a escrever $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Assim, se escolhermos para n_0 o maior número natural não superior a $\frac{1}{\varepsilon}$ fica provado o pretendido, isto é, $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Como ilustração, suponhamos que $\varepsilon = 0.01$. Então, pelo demonstrado atrás, basta tomarmos $n_0 = 100$. E, para qualquer termo de ordem superior a 100 a sua distância a 0 é inferior a 0.01. De facto, assim é. Suponha-se o termo u_{101}. Então, $|\frac{1}{101} - 0| = 0.0099 < 0.01$, como esperávamos.

EXERCÍCIO 2.6. *Considere a sucessão* $u_n = \dfrac{3+5n}{2-8n}$. *Mostre, aplicando a definição, que* $u_n \to -\dfrac{5}{8}$.

Entre as sucessões divergentes, destacamos um tipo que se comporta com certa regularidade, a saber, aquelas cujos valores se tornam e se mantêm arbitrariamente grandes positivamente ou arbitrariamente grandes negativamente.

Seja (u_n) uma sucessão de números reais. Diremos que 'u_n tende para $+\infty$', e escreveremos $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$, quando, para qualquer número real A dado arbitrariamente, pudermos encontrar um número natural n_0 tal que se $n > n_0$ então $u_n > A$. Ou seja, para qualquer $A > 0$ dado, existe apenas um número finito de índices n tais que $u_n \leq A$.

Evidentemente, se $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$ então (a_n) não é majorada mas é minorada.

Uma propriedade muito útil no estudo da convergência de uma sucessão é a que nos diz que:

qualquer sucessão limitada e monótona é convergente.

Exercício 2.7. *Aplique a propriedade anterior para estudar a convergência da sucessão*

$$u_n = \frac{n^2 - 3n + 2}{2n^2 + 1}.$$

2.1.3 Propriedades aritméticas dos limites

Uma sucessão não pode possuir dois limites distintos, ou seja, se $\lim_{n\to\infty} u_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} u_n = b$ então $a = b$. Referimo-nos a esta propriedade dizendo que existe unicidade de limite.

As propriedades seguintes permitem-nos efectuar o cálculo de limites sem a necessidade de recorrer sistematicamente à definição.

Se (u_n) e (v_n) são duas sucessões convergentes, isto é, $\lim_{n\to\infty} u_n = a$, $\lim_{n\to\infty} v_n = b$, e $c \in \mathbb{R}$ é uma constante, então

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n + v_n) = a + b$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot u_n) = c \cdot a$;

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n \cdot v_n) = a \cdot b$;

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{a}{b}$, se $b \neq 0$.

Exercício 2.8. *Aplique as propriedades dos limites para determinar*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + 4n - 6}{3n^3 + 2n}.$$

Observe que não podemos aplicar directamente a propriedade (iv).

Outra propriedade bastante útil no cálculo do limite de uma sucessão é a seguinte:

Sejam (u_n) e (v_n) duas sucessões tais que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ e (v_n) é limitada. Então $\lim_{n\to\infty}(u_n \cdot v_n) = 0$.

Exercício 2.9. *Determine* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n \operatorname{sen}(2n)}{n^2 + 1}$.

2.2 Séries de números reais

Consideremos (u_n) a sucessão definida por

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{16}, \quad \frac{1}{32}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{2^n}, \quad \ldots \tag{2.2}$$

Construímos agora a sucessão (S_n) a partir da soma dos primeiros termos de (u_n),

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{2}\\
S_2 &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\\
S_3 &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}\\
S_4 &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16}\\
&\vdots\\
S_n &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Trata-se de uma sucessão obtida a partir de (u_n) em que o termo de ordem n resulta da adição dos n primeiros termos de (u_n).

Em geral, sendo (u_n) uma sucessão de números reais, podemos associar a esta uma outra sucessão de termo geral

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n,$$

a que chamaremos **sucessão das somas parciais** de (u_n).

Chamamos **série** à sucessão de pares ordenados $(u_n,\, S_n)$, que representamos por

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Se a sucessão (S_n) tiver limite em $\mathbb{R}$, isto é, $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é **convergente**, e escrevemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S.$$

Sendo S designado por soma da série.

Se a sucessão (S_n) é divergente, diremos que a série é divergente.

Chama-se natureza de uma série à propriedade que ela tem de ser convergente ou divergente.

A natureza de uma série não se altera se modificarmos um número finito dos seus termos.

A noção de série é uma extensão da noção de adição a uma infinidade de parcelas.

No quadro seguinte estão indicados os valores das somas dos n primeiros termos da sucessão (2.2), ou seja, a sucessão das somas parciais de (2.2),

n	Soma dos n primeiros termos
1	0.50000000
2	0.75000000
3	0.87500000
4	0.93750000
5	0.96875000
6	0.98437500
7	0.99218750
10	0.99902344
15	0.99996948
20	0.99999905
25	0.99999997

Podemos verificar que adicionando um cada vez maior número de parcelas, o valor das somas parciais torna-se cada vez mais próximo de 1.

Deste modo, parece razoável escrever que a soma desta série é igual a 1,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1.$$

Demonstraremos adiante que, de facto, assim é.

Exercício 2.10. *Estude a convergência da série* $\sum_{n=1}^{\infty} n$.

Por vezes é conveniente considerar séries do tipo $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ ou, mais geralmente, $\sum_{n=p}^{\infty} u_n$ onde p é um inteiro. As definições já dadas, estendem-se facilmente a estes tipos de séries.

Podemos efectuar operações envolvendo séries.

Se $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ são séries convergentes, então também o são as séries $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot u_n$ (onde c é uma constante), $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$ e $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n - v_n)$, e temos

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot u_n = c \sum_{n=1}^{\infty} u_n$;

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n$;

2.2.1 Série geométrica

Consideremos agora a sucessão $u_n = ar^n$ onde $a \neq 0$ e r são números reais dados,

$$a, \quad ar, \quad ar^2, \quad \ldots, \quad ar^n, \quad \ldots \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

Em particular, trata-se de uma progressão geométrica onde cada termo é obtido do precedente multiplicando-o por um valor constante, designado razão, isto é, $r = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

Podemos considerar a sucessão das somas parciais de (u_n),

$$\begin{aligned}
&S_0 = a \\
&S_1 = a + ar \\
&S_2 = a + ar + ar^2 \\
&\vdots \\
&S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Somos assim conduzidos a um tipo importante de série que se designa por série geométrica

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n, \qquad a \neq 0. \tag{2.3}$$

Exemplo 2.2. *A série* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ *é uma série geométrica com* $a = 1$ *e* $r = \frac{1}{2}$.

Vamos estudar a natureza do tipo de séries (2.3).

Procuramos primeiramente uma expressão para S_n. Se $r \neq 1$, então temos

$$\begin{aligned}
S_n &= a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n \\
rS_n &= \qquad ar + ar^2 + \cdots + ar^n + ar^{n+1}.
\end{aligned}$$

Subtraindo membro a membro estas duas equações, obtemos

$$\begin{aligned} S_n - rS_n &= a - ar^{n+1} \\ \iff \qquad S_n &= \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}. \end{aligned}$$

Estudamos agora os quatro casos: $|r| < 1$, $r = -1$, $r = 1$ e $|r| > 1$.

(i) Se $-1 < r < 1$, sabemos que $r^{n+1} \to 0$ quando $n \to \infty$, de modo que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r}\lim_{n\to\infty} r^{n+1} = \frac{a}{1-r}.$$

Logo, quando $|r| < 1$ a série geométrica é convergente e a sua soma é igual a $\frac{a}{1-r}$.

(ii) Se $r = -1$, (S_n) é uma sucessão cujos termos são iguais a a para n par e iguais a 0 para n ímpar. Esta sucessão não tem limite e, portanto, a série é divergente.

(iii) Se $r = 1$, então $S_n = a + a + \cdots + a = (n+1)a \to \pm\infty$, consoante o sinal de a. Como $\lim_{n\to\infty} S_n$ não existe, a série geométrica diverge neste caso.

(iv) Para $|r| > 1$, (r^{n+1}) tende para infinito, (S_n) não converge e a série resulta divergente.

Exercício 2.11. *Determine a soma da série geométrica*

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \cdots$$

2.2.2 Série de Mengoli

Outro tipo de séries são aquelas que se podem escrever na forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - u_{n+k}),$$

onde k é um número natural fixado, chamadas séries de Mengoli, redutíveis ou telescópicas.

Exemplo 2.3. *Mostre que a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)},$$

— *é uma série de Mengoli;*

— *é convergente e determine a sua soma.*

Calculamos a sucessão das somas parciais de forma a aplicar a definição de série convergente.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Podemos simplificar esta expressão se utilizarmos a decomposição em fracções parciais

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}.$$

Logo, encontramos

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

donde,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - 0 = 1.$$

Por conseguinte, a série dada é convergente e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

2.2.3 Série de Dirichlet

Considerando a sucessão

$$1, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{9}, \quad \frac{1}{16}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{n^2}, \quad \ldots$$

podemos construir a série

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Esta série faz parte de um outro tipo de séries designado por séries de Dirichlet.

Chama-se **série de Dirichlet** a uma série da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \tag{2.4}$$

em que α é um número real fixo.

A série (2.4) é **divergente** se $\alpha \leq 1$ e é **convergente** se $\alpha > 1$.

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tag{2.5}$$

é um caso particular de (2.4) quando $\alpha = 1$ e é designada por **série harmónica**.

Exemplo 2.4. *Vamos mostrar que a série* (2.5) *é divergente.*

É conveniente considerarmos as somas parciais S_2, S_4, S_8, S_{16}, S_{32}, $\ldots$ e mostrar que estes termos crescem consecutivamente.

$$\begin{aligned}
S_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\
S_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{2}{2} \\
S_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2} \\
S_{16} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{4}{2}
\end{aligned}$$

Analogamente encontraríamos

$$S_{32} > 1 + \frac{5}{2}, \quad S_{64} > 1 + \frac{6}{2},$$

e, em geral,

$$S_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}.$$

Mostrámos assim que $S_{2^n} \to \infty$ quando $n \to \infty$ e, portanto, (S_n) é divergente. Logo, a série harmónica é divergente.

Exemplo 2.5. *A série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ *é convergente pois trata-se de uma série de Dirichlet com* $\alpha = 2 > 1$.

Observação 2.1. *Não é possível, em geral, determinar uma expressão para as somas parciais donde se possa deduzir facilmente a natureza da série. Assim, somos levados a estabelecer propriedades e critérios que permitam determinar a natureza de uma série sem recorrer ao cálculo das somas parciais. Esse estudo está, no entanto, fora do âmbito do nosso programa.*

2.3 Funções reais de variável real

Nesta secção abordaremos algumas noções associadas ao conceito de função, a composição de funções e a função inversa e, por último, limite e continuidade de uma função.

2.3.1 Generalidades

Já definimos função, na secção 2.1.1, como um certo tipo de correspondência entre dois conjuntos. Agora, vamos considerar que esses conjuntos são o conjunto dos números reais. Uma função cujo domínio é um conjunto de números reais diz-se uma função de variável real. Se o seu conjunto de chegada é o conjunto dos números reais então dizemos que tem valores reais ou que é uma função real.

Definimos o gráfico de uma função real de variável real f como o subconjunto de pontos do plano,

$$\mathrm{graf}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}.$$

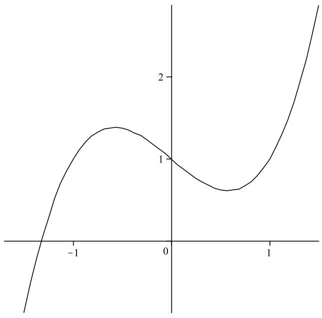
Exercício 2.12. *Represente o gráfico da função* I *tal que* $I(x)$ *designa o maior inteiro não superior a* x.

Daqui em diante, utilizaremos o termo 'função' para designar 'função real de variável real' definida em $\mathbb{R}$ ou num seu subconjunto.

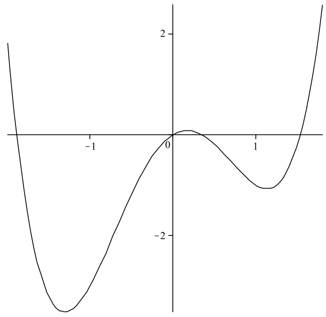
Se X é um subconjunto do domínio de f, chamamos à função $x \mapsto f(x)$, $x \in X$, a restrição de f a X, e representamo-la por $f|_X$.

Uma função P diz-se um polinómio ou função polinomial se

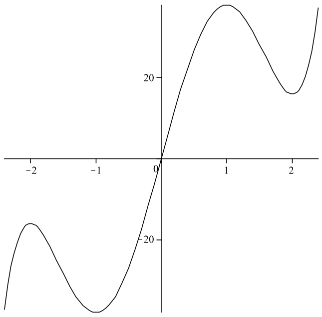
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \qquad a_n \neq 0$$



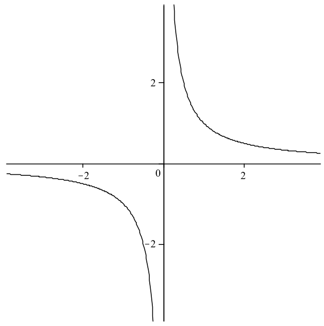
(a) $f(x) = x^3 - x + 1$



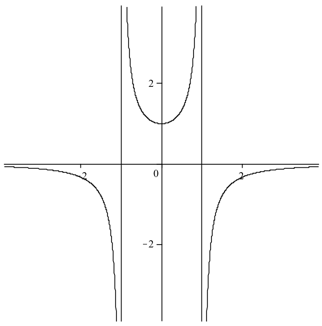
(b) $f(x) = x^4 - 3x^2 + x$



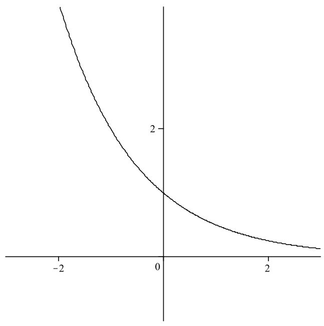
(c) $f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x$



(d) $f(x) = \frac{1}{x}$



(e) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$



(f) $f(x) = \frac{1}{2^x}$

Figura 2.1: *Gráficos de algumas funções.*

onde n é um número inteiro não-negativo, chamado grau do polinómio, e os números $a_0,\ a_1, \ldots, a_n$ são constantes designadas por coeficientes do polinómio.

Se $n = 1$, obtemos a função afim $f(x) = ax + b$; quando $n = 2$ obtemos a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Outros exemplos de funções polinomiais estão representadas na figura 2.1(a), (b) e (c).

Uma função racional define-se pelo quociente de duas funções polinomiais P e Q,

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \qquad \text{para } Q(x) \neq 0.$$

As funções representadas na figura 2.1(d) e (e) são funções racionais.

Uma função exponencial é uma função da forma $f(x) = a^x$, onde a base a é uma constante positiva. Na figura 2.1(f) está representado o gráfico de $f(x) = \frac{1}{2^x}$.

Chamamos função logarítmica a uma função da forma $f(x) = \log_b x$ onde a base b é uma constante positiva. O domínio desta função é $]0, +\infty[$ e o contradomínio é $\mathbb{R}$.

Na figura 2.2 estão representadas a função exponencial e a função logarítmica na base e, denotada por ln.

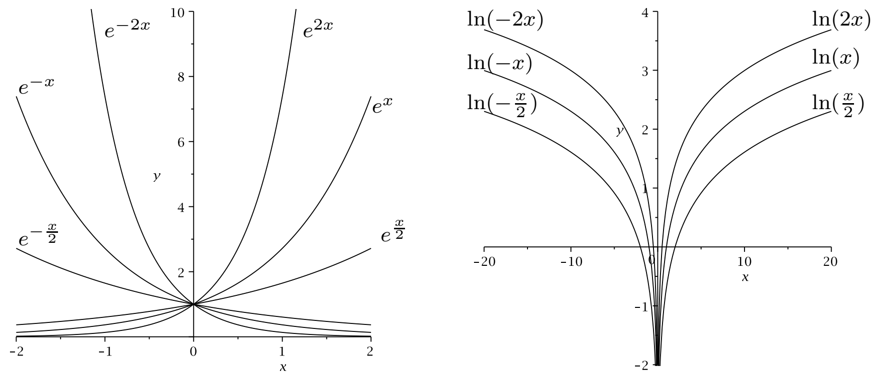


Figura 2.2: *Funções exponencial e logarítmica de base e.*

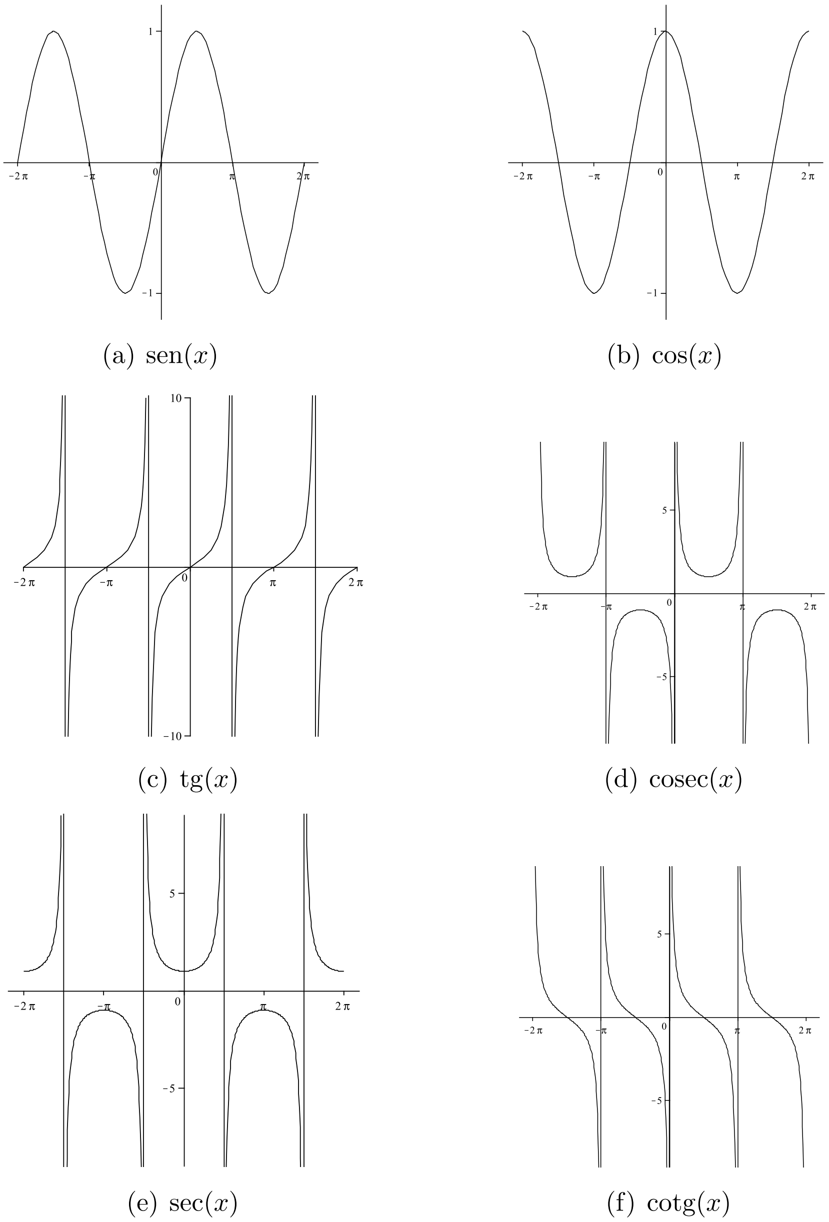
Uma função f diz-se periódica se existe uma constante positiva θ tal que

$$f(x + \theta) = f(x),$$

para todo o x no domínio de f. Se θ é o menor número verificando esta propriedade dizemos que o período de f é θ.

As funções trigonométricas são exemplos de funções periódicas.

Além das funções trigonométricas já conhecidas — seno, cosseno e tangente (Figura 2.3(a)-(c)) — existem outras três funções designadas por cossecante, secante e cotangente (Figura



(a) $\operatorname{sen}(x)$ (b) $\cos(x)$

(c) $\operatorname{tg}(x)$ (d) $\operatorname{cosec}(x)$

(e) $\sec(x)$ (f) $\operatorname{cotg}(x)$

Figura 2.3: *Funções trigonométricas*

2.3(d)-(f)) definidas do seguinte modo,

$$\operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}, \qquad \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}, \qquad \operatorname{cotg}(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}(x)} = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}.$$

Estas funções estão definidas para todo o x real excepto nos pontos onde os denominadores se podem anular.

Os valores das funções trigonométricas do ângulo x no círculo trigonométrico unitário (figura

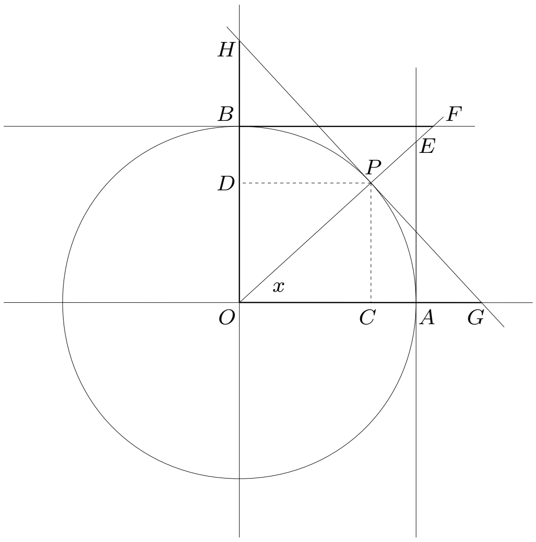


Figura 2.4: *Representação das linhas trigonométricas do ângulo x no círculo unitário.*

2.4) correspondem à medida de segmentos. Assim,

$$\begin{aligned}
\text{sen}(x) &= \text{medida de } \overline{OD}\\
\cos(x) &= \text{medida de } \overline{OC}\\
\text{tg}(x) &= \text{medida de } \overline{AE}\\
\text{cosec}(x) &= \text{medida de } \overline{OH}\\
\sec(x) &= \text{medida de } \overline{OG}\\
\text{cotg}(x) &= \text{medida de } \overline{BF}
\end{aligned}$$

Esta representação torna prático o estudo do comportamento das funções trigonométricas em cada quadrante através do comprimento dos respectivos segmentos, atendendo a que esses segmentos se situam sobre as rectas abaixo descriminadas:

seno	eixo dos yy
cosseno	eixo dos xx
tangente	recta vertical tangente ao círculo em A, intersecção com a recta OP
cosecante	eixo dos yy, intersecção com a recta tangente ao círculo em P
secante	eixo dos xx, intersecção com a recta tangente ao círculo em P
cotangente	recta horizontal tangente ao círculo em B, intersecção com a recta OP.

Por exemplo, no caso da função cossecante vemos que entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ tem valores entre $+\infty$ e 1 sendo, por conseguinte, decrescente nesse intervalo. No intervalo $[\frac{\pi}{2}, \pi[$ é crescente, variando entre $[1, +\infty[$. Varia entre $-\infty$ e -1 em $]\pi, \frac{3\pi}{2}]$. Por último, no intervalo $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$ terá valores entre -1 e $-\infty$.

Seja $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real definida num domínio D. A função f diz-se **par** se

$$f(x) = f(-x), \quad \forall x \in D,$$

e diz-se **ímpar** se

$$f(x) = -f(-x), \quad \forall x \in D.$$

O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo das ordenadas e o gráfico de uma função ímpar é simétrico relativamente à origem. A função $\cos(x)$ é par e a função $\operatorname{sen}(x)$ é ímpar.

Exercício 2.13. *Averigue se a função $f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x$ é par ou ímpar.*

Uma função f diz-se **crescente** numa parte X do seu domínio se, para x, $y \in X$, $x < y$ implica que $f(x) \leq f(y)$. Se se verificar que para $x < y$, então $f(x) \geq f(y)$, diremos que f é **decrescente** em X.

A função f diz-se **monótona** em X se é crescente ou decrescente em X.

Os valores de $x \in X$ tais que $f(x) = 0$ são designados por **zeros** da função. Graficamente, correspondem aos pontos onde o gráfico da função intersecta o eixo do xx. Uma função pode não ter zeros (por exemplo, $f(x) = x^2 + 1$).

Exercício 2.14. *Faça um estudo das funções cossecante, secante e cotangente quanto a domínio, contradomínio, monotonia e zeros.*

Diz-se que f é **majorada** em X se o conjunto $f(X)$ é majorado: isto é, existe um número real L tal que $f(x) \leq L$, para todo o $x \in X$. Se f é majorada, $f(X)$ tem um supremo, que se diz o **supremo** de f em X, e que se representa por $\sup\limits_{x \in X} f(x)$. O $\sup\limits_{x \in X} f(x)$ quando é valor de f num ponto de X, diz-se o **máximo** de f em X.

Dizemos que a função f tem um **máximo global** ou **absoluto** em $c \in D_f$ se $f(x) \leq f(c)$ para todo o $x \in D_f$.

Se, dado um ponto $c \in D_f$, existir um $\varepsilon > 0$ tal que, para qualquer $x \in]c - \varepsilon, c + \varepsilon[\cap D_f$, se tem $f(x) \leq f(c)$, diremos que c é um **máximo local** ou **relativo** de f.

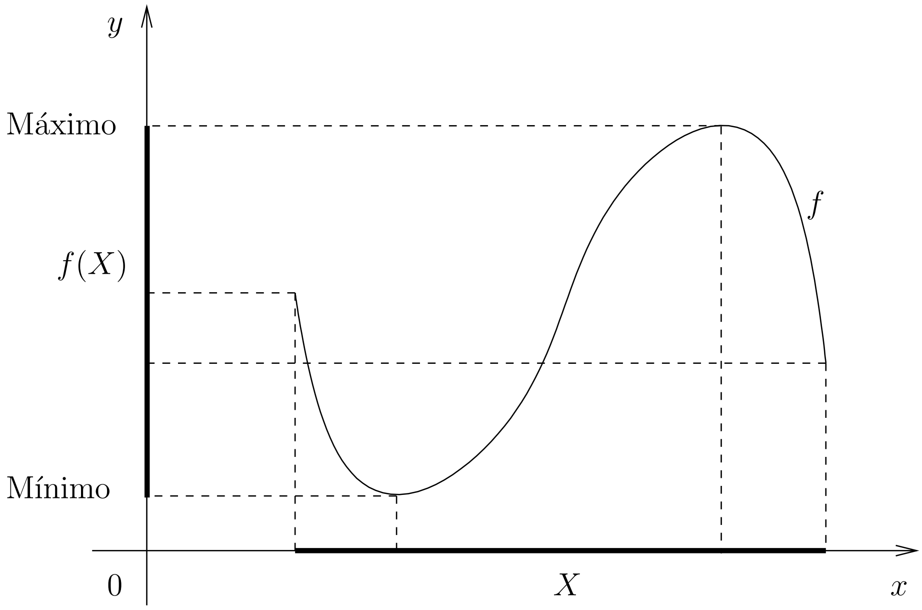


Figura 2.5: *Máximo e mínimo de uma função.*

Diz-se que f é **minorada** em X se o conjunto $f(X)$ é minorado, isto é, se existe um número real ℓ tal que $f(x) \geq \ell$, para todo o $x \in X$. Se f é minorada, $f(X)$ tem um ínfimo, que se diz o **ínfimo** de f em X e que se representa por $\inf_{x \in X} f(x)$. O $\inf_{x \in X} f(x)$ quando é valor de f num ponto de X, diz-se o **mínimo** de f em X. Diremos que a função f tem um mínimo em $c \in X$ se $f(x) \geq f(c)$ para todo o $x \in X$.

Dizemos que a função f tem um **mínimo global** ou **absoluto** em $c \in D_f$ se $f(c) \leq f(x)$ para todo o $x \in D_f$.

Se, dado um ponto $c \in D_f$, existir um $\varepsilon > 0$ tal que, para qualquer $x \in]c - \varepsilon, c + \varepsilon[\cap D_f$, se tem $f(x) \leq f(c)$, diremos que c é um **mínimo local** ou **relativo** de f.

Uma função f diz-se **limitada** num intervalo se existir uma constante M tal que $|f(x)| < M$ para todos os pontos x nesse intervalo.

Dadas duas funções é possível construir uma nova função efectuando operações entre elas. Assim, sejam f e g duas funções com domínios D_f e D_g, respectivamente, e c uma constante. Então, as funções cf, $f + g$, $f - g$, fg e $\frac{f}{g}$ são definidas da seguinte forma:

$$(cf)(x) = c\, f(x), \quad \text{com domínio } D_{cf} = D_f;$$

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), \quad \text{com domínio } D_{f\pm g} = D_f \cap D_g;$$

$$(fg)(x) = f(x)\, g(x), \quad \text{com domínio } D_{fg} = D_f \cap D_g;$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{com domínio } D_{\frac{f}{g}} = \{x \in D_f \cap D_g : g(x) \neq 0\}.$$

Exercício 2.15. *Dadas as funções $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$, determine as funções $f+g$, $f-g$, fg e $\frac{f}{g}$.*

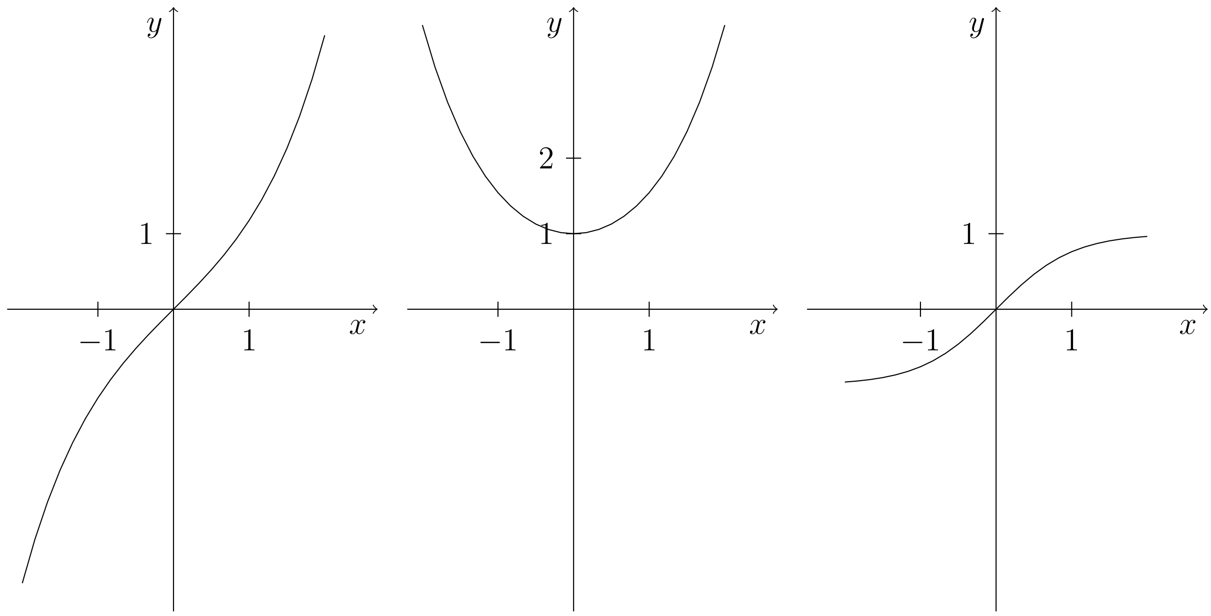


Figura 2.6: *Gráfico das funções seno hiperbólico, cosseno hiperbólico e tangente hiperbólica.*

Algumas combinações de funções exponenciais aparecem com frequência em Matemática e vale a pena atribuir a essas combinações nomes especiais e estudá-las como exemplos de novas funções. Estas combinações são designadas seno hiperbólico (senh), cosseno hiperbólico (cosh), tangente hiperbólica (tgh), cossecante hiperbólica (cosech), secante hiperbólica (sech) e cotangente hiperbólica (cotgh), definidas da seguinte maneira,

$$\operatorname{senh}(x) = \tfrac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \tfrac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{tgh}(x) = \tfrac{\operatorname{senh}(x)}{cosh(x)} = \tfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\operatorname{cosech}(x) = \tfrac{1}{\operatorname{senh}(x)} \qquad \operatorname{sech}(x) = \tfrac{1}{\cosh(x)} \qquad \operatorname{cotgh}(x) = \tfrac{1}{\operatorname{tgh}(x)}.$$

O termo 'hiperbólico' é devido ao facto de que estas funções estão relacionadas geometricamente com a hipérbole de modo análogo ao que as funções trigonométricas estão relacionadas com o círculo.

Exercício 2.16. *Deduza as seguintes propriedades das funções hiperbólicas*

(a) $\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$; *(b)* $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh}(x)$;

(c) $\cosh(-x) = \cosh(x)$; *(d)* $\cosh(x) + \operatorname{senh}(x) = e^x$.

2.3.2 Composição de funções

Dadas duas funções reais $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : E \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $g(E) \subset D$, podemos definir a função

$$f \circ g : E \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

denominada **função composta** de f com g. Repare-se que a composição $f \circ g$ exige que a imagem $g(E)$ esteja contida no domínio de f,

$$D'_g \subset D_f,$$

pois, só assim podemos garantir que todos os elementos x em E têm imagem $(f \circ g)(x)$.

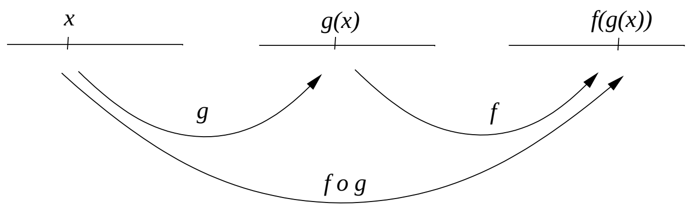


Figura 2.7: *Composição de funções:* $f \circ g$.

Exemplo 2.6. *Se* $f(x) = \sqrt{x}$ *e* $g(x) = x^2 + 1$ *determine: (a)* $f \circ g$*; (b)* $g \circ f$.

Resolução (a) Vamos determinar o contradomínio de g, $D'_g = [1, +\infty[$, e o domínio de f, $D_f = [0, +\infty[$. Como $[1, +\infty[\subset [0, +\infty[$ podemos definir a composição $f \circ g$.

Assim, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}$.

(b) Determinamos o contradomínio de f, $D'_f = [0, +\infty[$, e o domínio de g, $D_g = \mathbb{R}$. Como $[0, +\infty[\subset \mathbb{R}$

podemos definir a composição $g \circ f$.

Logo, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + 1 = x + 1$.

Exemplo 2.7. *A composição $f \circ g$ com $f(x) = \sqrt{1-x}$ e $g(x) = x^2$ não tem sentido em $\mathbb{R}$, pois, $D'_g = [0, +\infty[\not\subset]-\infty, 1] = D_f$. Mas já poderemos definir a composição se considerarmos a restrição de g ao intervalo $[0, 1]$, $g|_{[0,1]}$. Justifique.*

2.3.3 Injectividade e função inversa

Seja $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real tal que, para quaisquer x_1, $x_2 \in D$, se $x_1 \neq x_2$ então $f(x_1) \neq f(x_2)$. A função f diz-se injectiva: para cada $y \in f(D)$ existe um único $x \in D$ tal que $f(x) = y$. Ou seja, objectos distintos têm imagens distintas. Podemos definir a injectividade, de uma forma equivalente à anterior, dizendo que se $f(x_1) = f(x_2)$ então $x_1 = x_2$.

Se f é uma função injectiva podemos definir uma nova função, designada por função inversa de f, e representada por f^{-1}, da seguinte forma,

$$f^{-1} : E = f(D) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f^{-1}(x) = y \quad (\Longleftrightarrow f(y) = x).$$

Se a função f admite inversa dizemos que f é invertível.

Geometricamente, se f é uma função invertível, os gráficos de f e f^{-1} são simétricos em relação à recta $y = x$.

Exemplo 2.8. *Determine a função inversa de $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 1$.*

Em primeiro lugar, verificamos que a função é injectiva. Para tal, vamos assumir que $f(x_1) = f(x_2)$ para provarmos que $x_1 = x_2$:

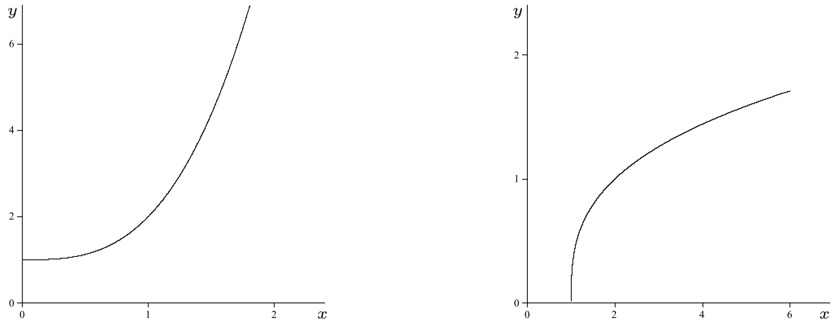
$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Leftrightarrow \quad x_1^3 + 1 = x_2^3 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^3 = x_2^3.$$

Aplicando a raiz cúbica a ambos os membros obtemos $x_1 = x_2$, pois $x \in [0, +\infty[$, o que nos permite concluir que f tem inversa. Vamos agora determiná-la.
Primeiro, escrevemos a equação $y = f(x)$

$$y = x^3 + 1.$$

Seguidamente, resolvemos a equação para x

$$x^3 = y - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{y-1}$$



(a) $f(x) = x^3 + 1$ (b) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$

Figura 2.8: *Gráfico da função e da sua inversa (Exemplo 2.8).*

O contradomínio de f é $[1, +\infty[$ que se torna o domínio de f^{-1}, pelo que escremos

$$f^{-1} : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}.$$

2.3.4 Funções trigonométricas inversas

Como vimos no parágrafo anterior, apenas podemos definir a inversa de uma função se ela for injectiva. Vamos ver agora como poderemos definir as funções trigonométricas inversas sabendo que as funções trigonométricas, sendo funções periódicas, não são injectivas no seu domínio. Deste modo, vamos necessitar de considerar a restrição de cada uma dessas funções a uma parte do seu domínio onde seja injectiva.

Consideremos a restrição da função seno ao intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. A restrição da função seno a este intervalo é injectiva. Logo, podemos definir a sua inversa $\text{sen}^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Designamos esta função por arco cujo seno é x, que se representa por $\text{arcsen}(x)$ (figura 2.9(a)).

Exemplo 2.9. *Determine* $\text{arcsen}(\frac{\sqrt{2}}{2})$.
Procuramos um ângulo $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tal que $\text{sen}(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. A resposta é $\frac{\pi}{4}$.

A restrição da função cosseno ao intervalo $[0, \pi]$ é injectiva. Podemos então considerar a sua inversa $\cos^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$. Designamos esta função por arco cujo cosseno é x que se representa por $\text{arccos}(x)$ (figura 2.9(b)).

Exemplo 2.10. *Determine* $\text{arccos}(0)$.

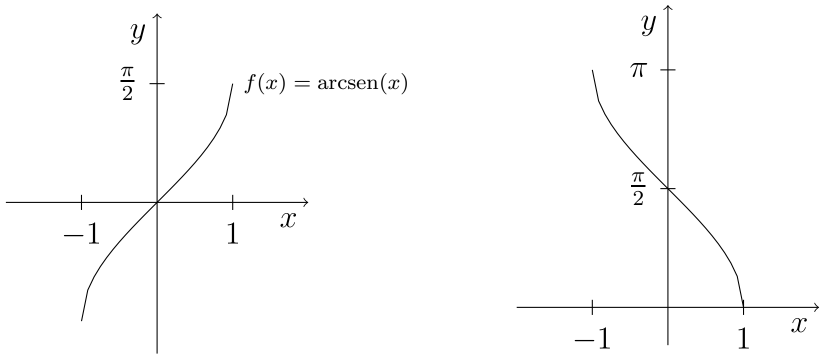


Figura 2.9: *Gráfico das funções: (a) arco-seno; (b) arco-cosseno.*

Procuramos um ângulo $x \in [0, \pi]$ tal que $\cos(x) = 0$. A resposta é $\frac{\pi}{2}$.

Exercício 2.17. *Resolva as seguintes equações trigonométricas:*

(a) $1 + 2\,\mathrm{sen}(3x) = 0$; (b) $y = \cos(1 - 3x)$.

A função tangente tem domínio $\mathbb{R}\backslash\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Considerando a restrição da função tangente ao intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, esta nova função é injectiva e podemos definir a sua inversa $\mathrm{tg}^{-1} :]-\infty, +\infty[\longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Designamos esta função por **arco cuja tangente é** x, que se representa por $\mathrm{arctg}(x)$ (figura 2.10(a)).

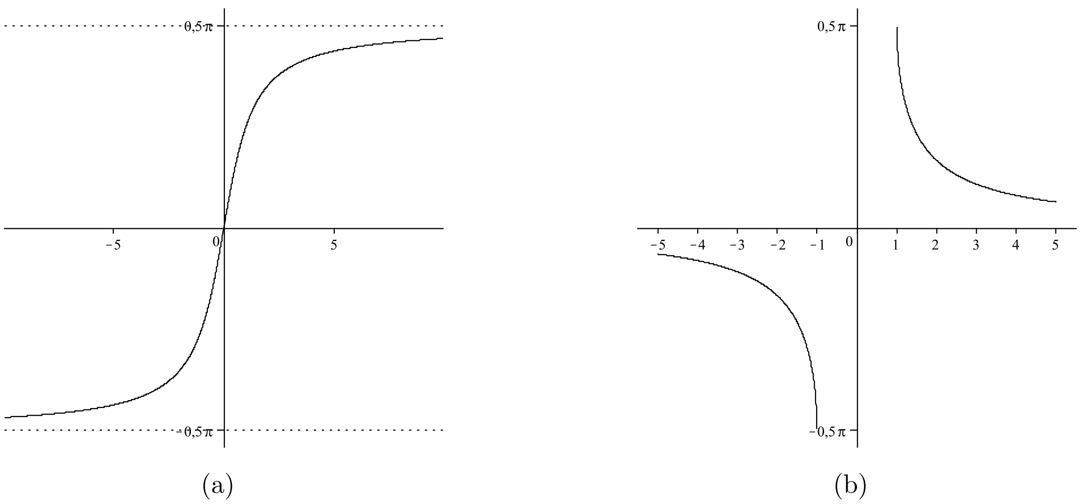


Figura 2.10: *Gráficos das funções: (a) arco-tangente; (b) arco-cossecante.*

Exemplo 2.11. *Determine* $\mathrm{arctg}(\sqrt{3})$.

Procuramos um ângulo $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tal que $\operatorname{tg}(x) = \sqrt{3}$. A resposta é $\frac{\pi}{3}$.

A função cossecante tem domínio $\mathbb{R}\backslash\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Considerando a restrição da função cossecante ao intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\backslash\{0\}$, esta nova função é injectiva e podemos definir a sua inversa $\operatorname{cosec}^{-1} :]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\backslash\{0\}$. Designamos esta função por arco cuja cossecante é x, que representamos por $\operatorname{arccosec}(x)$ (figura 2.10(b)).

A função secante tem domínio $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Considerando a restrição da função secante ao intervalo $[0, \pi]\backslash\{\frac{\pi}{2}\}$, esta nova função é injectiva e podemos definir a sua inversa $\sec^{-1} :]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\longrightarrow [0, \pi]\backslash\{\frac{\pi}{2}\}$. Designamos esta função por arco cuja secante é x, que representamos por $\operatorname{arcsec}(x)$ (figura 2.11(a)).

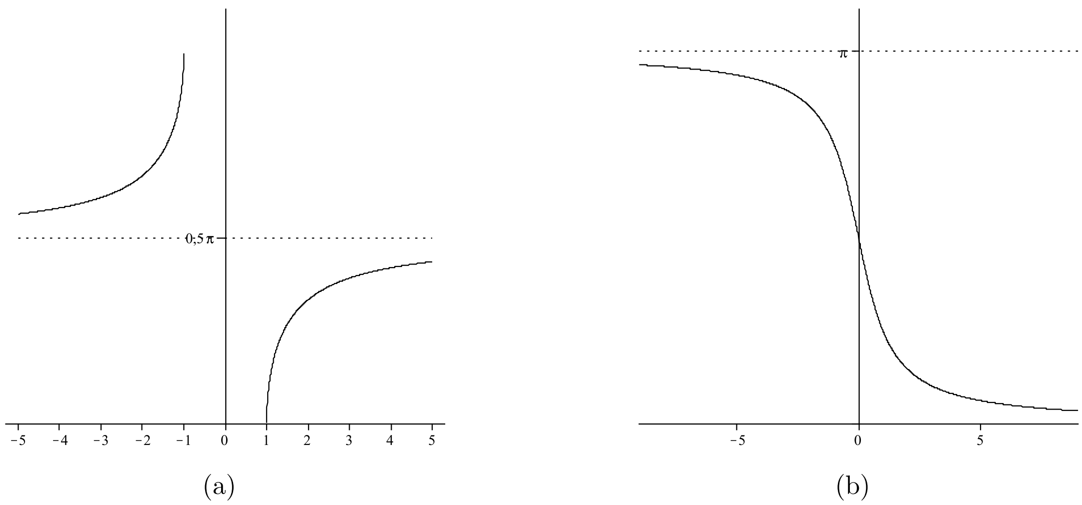


Figura 2.11: *Gráficos das funções: (a) arco-secante; (b) arco-cotangente.*

A função cotangente tem domínio $\mathbb{R}\backslash\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Considerando a restrição da função cotangente ao intervalo $]0, \pi[$, esta nova função é injectiva e podemos definir a sua inversa $\operatorname{cotg}^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow]0, \pi[$. Designamos esta função por arco cuja cotangente é x, que representamos por $\operatorname{arccotg}(x)$ (figura 2.11(b)).

2.3.5 Limite de uma função

Vamos agora apresentar a definição formal de limite de uma função num ponto. Seja $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de D.

Dizemos que $b \in \mathbb{R}$ é o **limite** de f no ponto a, e escrevemos $\lim_{x\to a} f(x) = b$, se para qualquer vizinhança de b, $\mathcal{V}_\delta(b)$, é possível encontrar uma vizinhança de a, $\mathcal{V}_\varepsilon(a)$, tal que se x distinto de a pertencer a essa vizinhança, então a sua imagem pertencerá a $\mathcal{V}_\delta(b)$.

Ou seja, se para qualquer $\delta > 0$, existe um $\varepsilon > 0$ tal que, se x distinto de a pertence à vizinhança de raio ε de a, então $f(x)$ pertence à vizinhança de raio δ de b,

$$\forall \delta > 0 \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in D, \quad 0 < |x - a| < \varepsilon \implies |f(x) - b| < \delta.$$

Menos formalmente, podemos dizer que podemos obter $f(x)$ arbitrariamente próximo de b para valores de x suficientemente próximos (mas não iguais) de a.

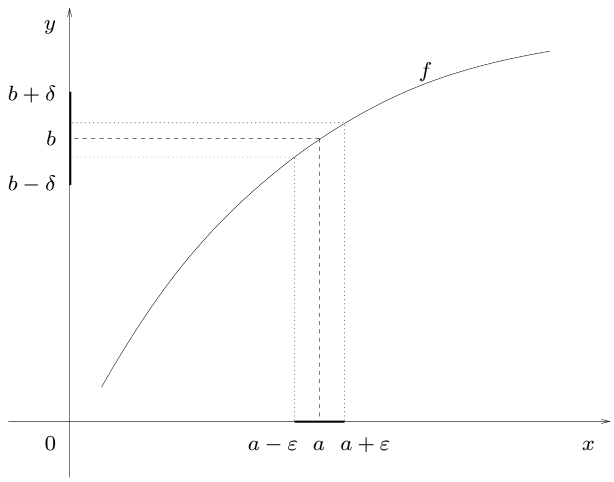


Figura 2.12: *Limite de uma função num ponto a.*

Se $\lim_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$, então dizemos que o limite existe e que $f(x)$ **converge** para b. Se o limite não existir, dizemos que $f(x)$ **diverge** quando x tende para a.

Quando x se aproxima de a apenas por valores inferiores a a, ao limite $\lim_{x\to a^-} f(x)$ chamamos **limite lateral à esquerda** de f no ponto a.

Quando x se aproxima de a apenas por valores superiores a a, ao limite $\lim_{x\to a^+} f(x)$ chamamos limite lateral à direita de f no ponto a.

Se $a \in D$, podemos concluir que existe $\lim_{x\to a} f(x)$ se e só se $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.

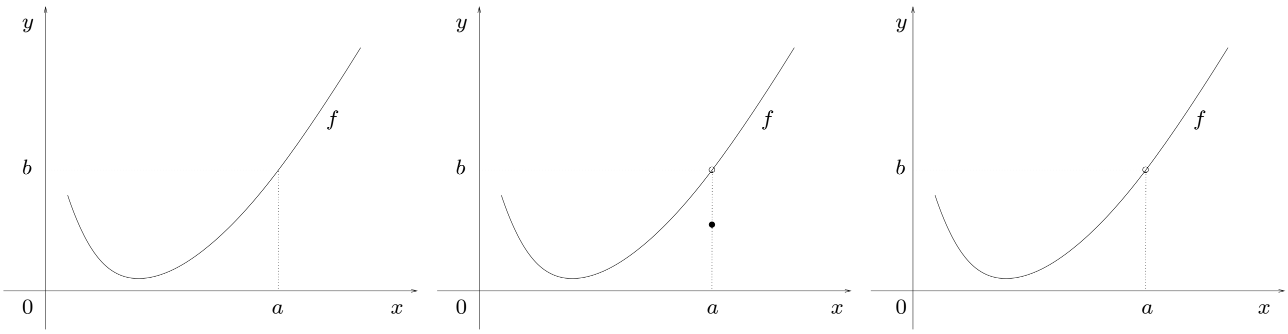


Figura 2.13: *Em qualquer um dos casos* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Podemos caracterizar algumas propriedades operatórias dos limites da seguinte forma. Admitindo que $\lim_{x\to a} f(x) = b$ e $\lim_{x\to a} g(x) = c$, temos

(a) $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = b + c$

(b) $\lim\limits_{x\to a}(f\cdot g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \times \lim\limits_{x\to a} g(x) = b\cdot c$

(c) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{b}{c} \quad \text{se } c \neq 0$

(d) $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |\lim\limits_{x\to a} f(x)| = |b|$

(e) $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 0 \iff \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

EXERCÍCIO 2.18. *Aplicando as propriedades dos limites, determine:*

(a) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2 - 6x + 4)$; (b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+2x^2-1}{5+3x}$; (c) $\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{2x}{x^2+3}$.

Resolução da alínea (b)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-2}\frac{x^3+2x^2-1}{5+3x} &= \frac{\lim_{x\to-2}(x^3+2x^2-1)}{\lim_{x\to-2}(5+3x)}\\
&= \frac{(\lim_{x\to-2}x)^3+2\,(\lim_{x\to-2}x)^2-1}{5+3\lim_{x\to-2}x}\\
&= \frac{(-2)^3+2\times(-2)^2-1}{5+3\times(-2)}\\
&= 1
\end{aligned}$$

Observação 2.2. *Recordemos os seguintes limites:*
$(a)\ \lim_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}=1 \qquad (b)\ \lim_{x\to0}\dfrac{1-\cos(x)}{x}=0.$

Sejam $X\subset\mathbb{R}$, $f:X\longrightarrow\mathbb{R}$ e a ponto de acumulação de X. Diz-se que f **tende para** $+\infty$ **quando** x **tende para** a, e escreve-se $\lim_{x\to a}=+\infty$, quando para qualquer número real positivo arbitrário L, é possível encontrar uma vizinhança de a tal que, qualquer que seja x (diferente de a) nessa vizinhança de a, então a sua imagem é maior do que L.
Ou seja, se para qualquer $L>0$ existe $\varepsilon>0$ tal que se $x\in\,]a-\varepsilon,\ a+\varepsilon[\,\cap X\backslash\{a\}$ então $f(x)>L$,

$$\forall L>0\quad \exists\varepsilon>0\quad \forall x\in X\quad 0<|x-a|<\varepsilon\Longrightarrow f(x)>L.$$

Seja X uma parte não-majorada de $\mathbb{R}$, $f:X\longrightarrow\mathbb{R}$ e b um número real. Diz-se que b é o limite de $f(x)$ quando x tende para $+\infty$, e escreve-se $\lim_{x\to+\infty}=b$, quando para qualquer vizinhança de b, é possível encontrar um número real x_0 tal que se $x\in X$ é maior do que x_0, a sua imagem está nessa vizinhança de b (ver figura 2.1(f)).
Ou seja, $\lim_{x\to+\infty}=b$, quando para qualquer $\delta>0$, existe um número real x_0 tal que se $x\in X$ e $x>x_0$ se tem $|f(x)-b|<\delta$,

$$\forall\delta>0\quad \exists x_0\in\mathbb{R}\quad \forall x\in X,\quad x>x_0\Longrightarrow |f(x)-b|<\delta.$$

Diz-se ainda que $f(x)$ tende para $+\infty$ quando x tende para $+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, quando para qualquer número real positivo L, é possível encontrar um número real x_0 tal que para qualquer $x > x_0$ a sua imagem é maior que L. Ou seja,

$$\forall L > 0 \quad \exists x_0 \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X, \quad x > x_0 \Longrightarrow f(x) > L.$$

De forma análoga, definiríamos os limites anteriores considerando $-\infty$ em vez de $+\infty$.

Exercício 2.19. *Determine* $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-3x+5}{x^4-2x+1}$

Resolução Pela aplicação directa das propriedades dos limites obtemos uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Então dividimos o numerador e o denominador pela maior potência de x e aplicamos as propriedades dos limites.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-3x+5}{x^4-2x+1} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{2}{x^2} - \dfrac{3}{x^3} + \dfrac{5}{x^4}}{1 - \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{1}{x^4}} \\
&= \frac{2\left(\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\right)^2 - 3\left(\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\right)^3 + 5\left(\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\right)^4}{1 - 2\left(\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\right)^3 + \left(\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\right)^4} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Exemplo 2.12. *A curva logística descreve a densidade de uma população ao longo do tempo, em que a taxa de crescimento depende do tamanho da população.*
Neste modelo, a taxa de crescimento per capita *decresce com o aumento do tamanho da população. Se representarmos por $N(t)$ o tamanho da população no instante t, então a curva logística é dada por*

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N(0)} - 1\right)e^{-rt}}, \quad \textit{para } t \geq 0.$$

Os parâmetros K e r são números positivos que descrevem a dinâmica da população e $N_0 = N(0)$ representa o tamanho da população no instante 0, o qual assumimos ser positivo. O gráfico de N está representado na figura 2.14.

Se estivermos interessados no comportamento da população a longo prazo evoluindo de acordo com o modelo logístico, precisamos de estudar o que sucede a $N(t)$ quando $t \to +\infty$. Verificamos que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N(0)} - 1\right)e^{-rt}} = K$$

visto que $\lim_{t\to\infty} e^{-rt} = 0$ para $r > 0$. Isto é, o tamanho da população aproxima-se de K. Este valor é designado por capacidade de sustentação *da população.*

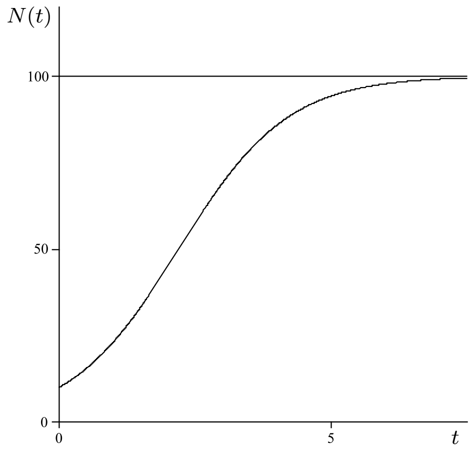


Figura 2.14: *Gráfico da curva logística com* $K = 100$, $N_0 = 10$ *e* $r = 1$.

2.3.6 Assímptotas

Podemos identificar uma **assímptota** como uma recta relativamente à qual o gráfico de uma função se aproxima quando $x \to a$ ou $x \to \pm\infty$.

Seja $f : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Diz-se que a recta $x = a$, paralela ao eixo dos yy passando pela abcissa a, é uma **assímptota vertical** ao gráfico da função f se

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty.$$

Diz-se que a recta $y = b$, paralela ao eixo dos xx passando pela ordenada b, é uma **assímptota horizontal** ao gráfico da função f se verifica algum dos casos

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b.$$

Seja $f :]a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$. Diz-se que a recta $y = mx + b$, $m \neq 0$, é uma **assímptota oblíqua** ao gráfico de f em $+\infty$ se

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0. \tag{2.6}$$

Analogamente, definimos assímptota oblíqua ao gráfico de $f :]-\infty, a[\longrightarrow \mathbb{R}$ em $-\infty$.

Para provarmos (2.6), definamos $w(x) := f(x) - (mx + b)$. Se $y = mx + b$ é assímptota em $+\infty$ então, como

$$m = \frac{f(x)}{x} - \frac{w(x) + b}{x},$$

tem-se, passando ao limite,

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}. \tag{2.7}$$

De (2.6) resulta ainda que

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx). \tag{2.8}$$

Reciprocamente, existindo os limites (2.7) e (2.8), a recta $mx + b$ é assímptota em $+\infty$, dado que

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + b)] = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) - b = 0,$$

como se pode ver aplicando (2.8). Resultado semelhante se estabelece para a assímptota em $-\infty$.

A figura 2.15 ilustra uma assímptota oblíqua em $-\infty$ e em $+\infty$.

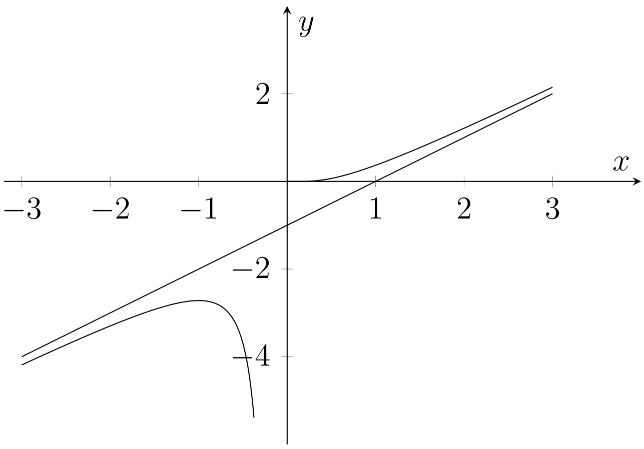


Figura 2.15: *Assímptota oblíqua da função* $f(x) = x\,e^{-\frac{1}{x}}$.

Exercício 2.20. *Identifique os gráficos apresentados nas figuras 2.16 e 2.17 com as funções indicadas. Justifique cada caso.*

(a) $f_1(x) = \frac{1}{x-1}$ (b) $f_2(x) = \frac{x}{x-1}$ (c) $f_3(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

(d) $f_4(x) = \frac{1}{x^2-1}$ (e) $f_5(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$ (f) $f_6(x) = \frac{x}{x^2-1}$

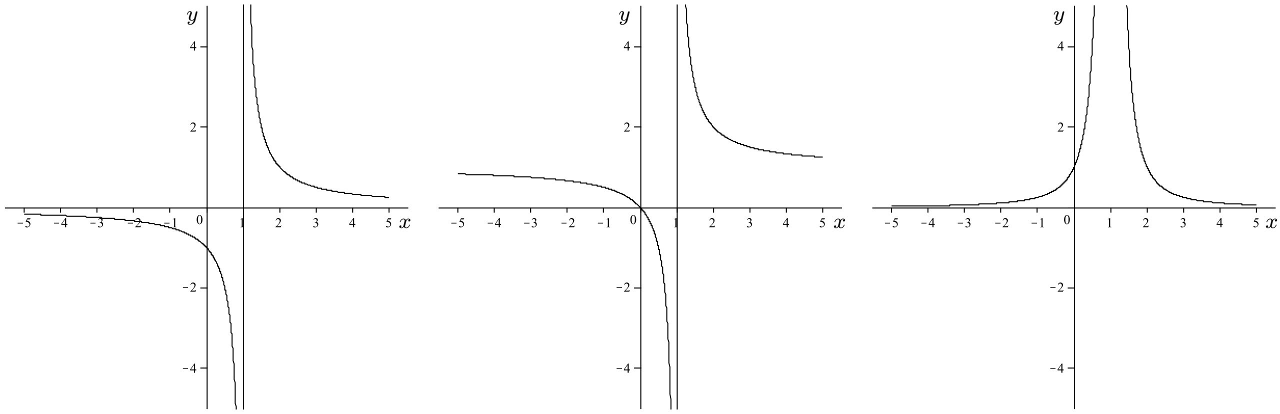


Figura 2.16:

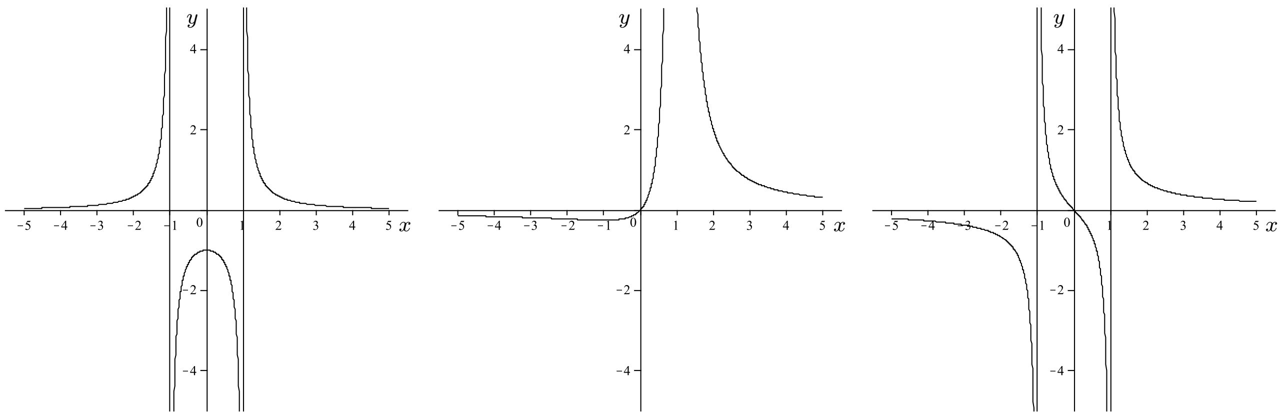


Figura 2.17:

2.3.7 Funções contínuas

Seja $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D$. Dizemos que f é uma **função contínua no ponto** a quando, para qualquer vizinhança de $f(a)$, podemos encontrar uma vizinhança de a, tal que a imagem de qualquer ponto nessa vizinhança pertence à vizinhança de $f(a)$, ou seja,

$$\boxed{\forall \delta > 0 \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in D \quad |x - a| < \varepsilon \implies |f(x) - f(a)| < \delta.}$$

Se a for um ponto isolado de D, isto é, $a \in D$ e $a \notin D'$, a função f é necessariamente contínua em a. Com efeito, tomando um $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{V}_\varepsilon(a) \cap D = \{a\}$ a condição $|x - a| < \varepsilon$ implica que terá de ser $x = a$ e, obviamente, verifica-se $|f(x) - f(a)| = 0 < \delta$.

No caso em que $a \in D$ e $a \in D'$, dizer que f é contínua em a equivale a dizer que $\lim_{x \to a} f(x) =$

$f(a)$.

Uma função $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se **contínua em** D (ou apenas **contínua**) se for contínua em todos os pontos de D.

Exemplo 2.13. *Seja*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-6x+5}{x-5} & \text{se x} \neq 5 \\ 4 & \text{se x} = 5 \end{cases}$$

Averigue a continuidade da função f.

Resolução Temos de estudar f em cada ponto c do seu domínio $\mathbb{R}$. Suponhamos, primeiramente, que $c \neq 5$. Como o denominador de f nunca se anula quando x está próximo desse valor de c, aplicamos as propriedades algébricas dos limites para calcular

$$\lim_{x\to c} f(x) = \frac{c^2-6c+5}{c-5} = f(c).$$

Para $c = 5$, calculamos

$$\lim_{x\to 5} f(x) = \frac{x^2-6x+5}{x-5} = \lim_{x\to 5} \frac{(x-5)(x-1)}{x-5} = \lim_{x\to 5}(x-1) = 4 = f(5).$$

Assim, f é contínua em $c = 5$. Como f é contínua em cada ponto do seu domínio, concluímos que f é uma função contínua.

As funções contínuas gozam das seguintes **propriedades algébricas**. Sejam f, g, funções contínuas em $a \in D \subset \mathbb{R}$. Então $f+g$, $f \cdot g$, $|f|$ e $-f$ são contínuas em a. Se $g(a) \neq 0$, a função $\dfrac{f}{g}$ é também contínua em a.

Exemplo 2.14. *Vamos aplicar a seguinte propriedade:*

> *Se f é contínua em b e $\lim_{x\to a} g(x) = b$ então $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b)$, ou seja,*
>
> $$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x)),$$

para calcular o limite

$$\lim_{x\to 1} \operatorname{arcsen}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right).$$

Visto a função arco-seno ser contínua, temos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \operatorname{arcsen}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right) &= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)\\ &= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}\right)\\ &= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right)\\ &= \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

Podemos estabelecer a **continuidade de uma função composta** da seguinte forma. Consideremos as funções $f : E \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $g(D) \subset E$. Se g é contínua em $a \in D$ e f é contínua em $g(a) \in E$ então $f \circ g$ é contínua em a.

Exemplo 2.15. *Determine onde são contínuas as seguintes funções.*

(a) $h(x) = e^{-x^2}$ (b) $h(x) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{x})$ (c) $h(x) = \dfrac{1}{1+2\sqrt[3]{x}}$

Resolução (a) Se considerarmos $g(x) = -x^2$ e $f(x) = e^x$, então $h(x) = (f \circ g)(x)$ está bem definida. Como g é uma função polinomial, é contínua em $\mathbb{R}$, e o seu contradomínio é $]-\infty, 0]$. A função f é contínua para todos os valores no contradomínio de g (na verdade, é contínua em $\mathbb{R}$). Concluímos que h é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) Definamos $g(x) = \frac{\pi}{x}$ e $f(x) = \text{sen(x)}$. Então a composição $f \circ g$ está definida em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $h \equiv f \circ g$. A função g é contínua para todo $x \neq 0$. O contradomínio de g é $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. A função f é contínua para todo o x no contradomínio de g. Portanto, h é contínua para qualquer $x \neq 0$.

(c) Sejam $g(x) = \sqrt[3]{x}$ e $f(x) = \frac{1}{1+2x}$. Então $h(x) = (f \circ g)(x)$ para $x \in \mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{8}\}$. A função g é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$ visto que, $g(x) = \sqrt[3]{x}$ e o radical é ímpar. O contradomínio de g é $\mathbb{R}$. A função f é contínua para todo o x real diferente de $-\frac{1}{2}$. Como $g(-\frac{1}{8}) = -\frac{1}{2}$, h é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{8}\}$.

2.3.8 Teoremas da continuidade

Os teoremas seguintes traduzem resultados importantes verificados pelas funções contínuas.

Teorema 2.1. *Seja $D \subset \mathbb{R}$. A função $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $a \in D$ se e só se $f(x_n) \to f(a)$ para qualquer sucessão $(x_n) \subset D$ tal que $x_n \to a$.*

Teorema 2.2 (Teorema de Bolzano). *Sejam a, b números reais tais que $a < b$ e $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, para qualquer ξ no intervalo fechado de extremidades $f(a)$ e $f(b)$, existe pelo menos um $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = \xi$.*

O corolário seguinte é particularmente útil no estudo dos zeros de uma função.

Corolário 2.1. *Sejam a, b números reais tais que $a < b$ e $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$ então existe pelo menos um zero de f em $]a, b[$.*

O teorema seguinte deve-se ao matemático alemão Karl Weierstrass (1815-1897) e garante-nos a existência de máximo e mínimo de uma função contínua definida num intervalo limitado e fechado.

Teorema 2.3 (Teorema de Weierstrass). *Toda a função contínua $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, num conjunto limitado e fechado D tem máximo e mínimo nesse conjunto.*

Teorema 2.4 (Continuidade da função inversa). *Seja f uma função contínua e injectiva definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Então f^{-1} é contínua.*

2.3.9 Aplicação do Teorema de Bolzano: método da bissecção

Para equações da forma $f(x) = 0$, onde f é uma função não-linear, não existe, em geral, uma fórmula explícita para determinar as raízes da equação.
Nestas circunstâncias, temos de recorrer a métodos numéricos que nos permitam encontrar valores aproximados desses zeros com a precisão pretendida. Para ilustrar este procedimento, vamos apresentar um dos métodos existentes, designado método da bissecção. O método da bissecção consiste em aproximar um zero da função f, encontrando um intervalo $[a, b]$ tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$ onde, pelo corolário do Teorema de Bolzano, temos a garantia que existe pelo menos um zero de f nesse intervalo.

A etapa seguinte consiste em subdividir $[a, b]$ em dois subintervalos $[a, c]$ e $[c, b]$, com o mesmo comprimento. Aplicando novamente o corolário do Teorema de Bolzano descobrimos em qual dos dois subintervalos se encontra um zero de f. Repetindo sucessivamente o processo de bissecção vamo-nos aproximando cada vez mais de um zero da função dada.

Exemplo 2.16. *Determine algumas aproximações do zero da função $f(x) = x^5 - 7x^2 + 3$ no intervalo* $[0, 1]$.

Intervalo	Ponto médio
$[0, 1]$	0.5
$[0.5, 1]$	0.75
$[0.5, 0.75]$	0.625
$[0.625, 0.75]$	0.6875
$[0.625, 0.6875]$	0.65625

Intervalo	Ponto médio
$[0.65625, 0.6875]$	0.671875
$[0.6679688, 0.6699219]$	0.6689453
$[0.6691284, 0.6691895]$	0.6691589
$[0.6691284, 0.6691303]$	0.6691294
$[0.6691292, 0.6691293]$	0.6691292

2.4 Exercícios e complementos

1. Escreva os termos das sucessões para $n = 0, 1, 2, 3$.

   (a) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ (b) $a_n = (-1)^n n$ (c) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ (d) $a_n = n^3\sqrt{n+1}$.

2. Escreva os quatro primeiros termos das sucessões definidas por recorrência.

   (a) $a_0 = 1, \quad a_{n+1} = 3a_n - 2$ (b) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 1 + \sqrt{a_n}$

   (c) $a_0 = 2, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n + 3}$ (d) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 5a_n - \dfrac{5}{a_n}$

   (e) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + (-1)^n \frac{1}{n+1}$.

3. Encontre o termo geral de cada uma das seguintes sucessões.

   (a) $1, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{27}, \dfrac{1}{81}, \ldots$ (b) $-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, -\dfrac{1}{6}, \ldots$

   (c) $\operatorname{sen}(\pi), \operatorname{sen}(2\pi), \operatorname{sen}(3\pi), \operatorname{sen}(4\pi), \operatorname{sen}(5\pi), \ldots$

   (d) $\cos(\frac{\pi}{2}), -\cos(\frac{\pi}{4}), \cos(\frac{\pi}{6}), -\cos(\frac{\pi}{8}), \cos(\frac{\pi}{10}), \ldots$

4. Diga quais das seguintes sucessões são limitadas. Justifique.

   (a) $u_n = n + 1$ (b) $v_n = (-2)^n$ (c) $w_n = \dfrac{1}{n^2}$

5. Mostre, aplicando a definição, que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-1}{4n+5} = \dfrac{3}{4}$.

6. Aplique as propriedades do limite de uma sucessão para determinar:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-3}{n}$ (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n^2-1}$

   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right]$ (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$ (f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n\,(n+2)}{n+1} - \dfrac{n^3}{n^2+1}\right)$

7. Calcule o limite ℓ da sucessão $u_n = \frac{1}{n^2}$. Determine a ordem a partir da qual todos os termos da sucessão estão a uma distância de ℓ inferior a 0.01.

8. Determine as três primeiras somas parciais de cada uma das séries dadas

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n!}$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (4^{-n}+1)$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1})$ (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

9. Determine a soma das seguintes séries

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 8^{-n}$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2n}$.

10. Utilize a teoria das séries geométricas para calcular os racionais correspondentes às dízimas seguintes:

    (a) $3.666\ldots$ (b) $1.181818\ldots$

11. Averigue se cada uma das seguintes séries é de Mengoli e, em caso afirmativo, determine a sua soma.

    (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{3n+1} - \dfrac{1}{3n+4}\right)$ (b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^2-1}$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-3)(2n-1)}$

12. Determine o domínio de cada uma das funções.

    (a) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ (b) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-9}$

    (c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$. (d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+x-6}$

    (e) $f(x) = \sqrt{x^2-4x+5}$ (f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x^2-4)(x-1)}}$

    (g) $f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{2^x}{x}$ (h) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}\right)$.

13. Escreva a expressão para as funções compostas $f \circ g$ e $g \circ f$, sendo

(a) $f(x) = \sqrt{x} + 1, \quad g(x) = x^2 - 1$ (b) $f(x) = 2\sqrt{x} + 3, \quad g(x) = x^2 + 1$

(c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}, \quad g(x) = \dfrac{1}{x}$ (d) $f(x) = \sqrt{x+1}, \quad g(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

14. Verifique que cada uma das funções é injectiva nos conjuntos indicados e determine a sua inversa.

(a) $f(x) = x^3 - 1, \quad \mathbb{R}$ (b) $f(x) = x^2 + 1, \quad [0, +\infty)$

(c) $f(x) = \sqrt{x}, \quad [0, +\infty)$ (d) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}, \quad (0, +\infty)$.

15. Determine os seguintes limites

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{1+\operatorname{sen}(x)}$. (b) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{1-\operatorname{sen}(x)}$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$. (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$.

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^5-1}{x^2-1}$. (f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2x^3-1}$.

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$. (h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{tg}(x)}$.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right)$. (j) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x}$.

Sol.: (a) 0; (b) ∞; (c) $\frac{1}{6}$; (d) $\frac{1}{2}$; (e) $\frac{5}{2}$; (f) 0; (g) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; (h) 1; (i) -1; (j) 1.

16. Determine os seguintes limites

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^3-1}{4x^4+1}$. (b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4-x^3+1}{x^2(x^2+2)}$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{4+3x^2}{1-7x}$. (d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\operatorname{sen}(x)$.

(e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{4}{1+e^{-x}}$. (f) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+e^{-x}}$.

Sol.: (a) 0; (b) 3; (c) $+\infty$; (d) 0; (e) 4; (f) 0.

17. Estude as funções quanto à existência de assímptotas.

(a) $f(x) = \dfrac{x}{x-7}$ (b) $f(x) = \dfrac{7x^3-1}{2x^3+12x^2+18x}$

(c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{|x|}}{x}$ $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x+4}}{x\,(x+1)}$.

18. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & \text{se } x \neq -2 \\ A & \text{se } x = -2 \end{cases}$$

Determine A de forma que f seja contínua em $x = -2$.

19. Prove que a função $f(x) = x^5 + 3x^4 - x - 3$ tem um zero no intervalo $]0, 2[$.

Capítulo 3

Cálculo diferencial e aplicações

3.1 Definições e generalidades

Representemos por $N(t_0)$ o tamanho da população de uma determinada espécie no instante t_0, em que t_0 varia de forma contínua no intervalo $[0, +\infty[$. Vamos investigar de que modo varia o tamanho da população durante o intervalo de tempo $[t_0,\ t_0+h]$, onde $h > 0$. A variação absoluta durante esse intervalo de tempo é a diferença entre o tamanho da população no instante $t_0 + h$ e o tamanho da população no instante t_0, representada por ΔN,

$$\Delta N = N(t_0 + h) - N(t_0).$$

O símbolo Δ indica que estamos a considerar uma diferença. Para obtermos a variação relativa no intervalo de tempo $[t_0,\ t_0 + h]$, dividimos ΔN pelo comprimento do intervalo de tempo, representado por Δt, que é $(t_0 + h) - t_0 = h$. Encontramos

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N(t_0 + \Delta t) - N(t_0)}{\Delta t} = \frac{N(t_0 + h) - N(t_0)}{h}.$$

Esta razão é designada por taxa de crescimento médio.

Geometricamente, podemos verificar que $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ é o declive da recta secante unindo os pontos $(t_0,\ N(t_0))$ e $(t_0 + h,\ N(t_0 + h))$. A taxa de crescimento médio $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ depende do comprimento do intervalo de tempo Δt.

Podemos também verificar (figura 3.10) que, à medida que escolhemos intervalos de tempo cada vez mais pequenos, as rectas secantes "convergem" para a recta tangente no ponto $(t_0,\ N(t_0))$.

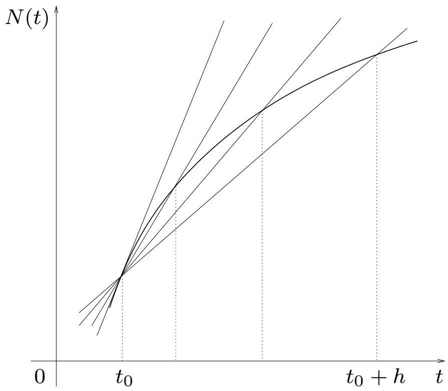


Figura 3.1: *Taxa de crescimento instantâneo no instante t_0.*

O declive da recta tangente é chamado **taxa de crescimento instantâneo** e é um modo adequado de descrever o crescimento de uma população que se reproduz de forma contínua.

A taxa de crescimento instantâneo define-se como sendo o limite

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lim_{h \to 0} \frac{N(t_0 + h) - N(t_0)}{h}.$$

Representaremos este limite por $N'(t_0)$ e chamaremos a esta quantidade a **derivada** de N no instante t_0.

Vejamos um outro exemplo. Quando consideramos o escoamento do sangue através dum vaso sanguíneo, como uma veia ou artéria, podemos modelar a forma do vaso sanguíneo como um tubo cilíndrico de raio R e comprimento ℓ como apresentado na figura 3.2.

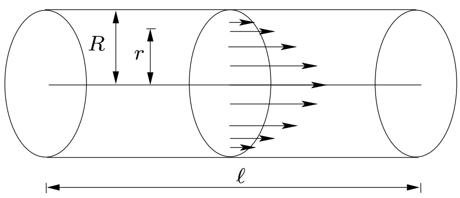


Figura 3.2: *Taxa de crescimento instantâneo no instante t_0.*

Devido ao atrito nas paredes do tubo, a velocidade v do sangue é maior ao longo do eixo central do tubo e diminui à medida que a distância r ao eixo aumenta, até que se anula na parede do tubo. A relação entre v e r é dada pela lei do escoamento laminar decoberta pelo físico francês

Jean-Louis-Marie Poiseuille em 1840. Esta lei afirma que

$$v = \frac{P}{4\eta\ell}(R^2 - r^2) \tag{3.1}$$

onde η é a viscosidade do sangue e P é a diferença de pressão nas extremidades do tubo. Se P e ℓ são constantes, então v é uma função de r com domínio $[0,\, R]$.

A taxa de variação média da velocidade, à medida que nos deslocamos de $r = r_1$ para $r = r_2$, afastando-nos do centro, é

$$\frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{v(r_2) - v(r_1)}{r_2 - r_1}$$

e, se fizermos $\Delta r \to 0$, obtemos a taxa de variação instantânea da velocidade em ordem a r, que designaremos por gradiente da velocidade:

$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{dv}{dr}.$$

Aplicando a equação (3.1), obtemos

$$\frac{dv}{dr} = \frac{P}{4\eta\ell}(0 - 2r) = -\frac{Pr}{2\eta\ell}.$$

Para uma das artérias mais pequenas do corpo humano podemos considerar $\eta = 0.027$, $R = 0.008$ cm, $\ell = 2$ cm e $P = 4000$ din/cm^2, o que dá

$$v = \frac{4000}{4 \times 0.027 \times 2}(0.000064 - r^2) \approx 0.185 \times 10^5\,(0.64 \times 10^{-4} - r^2)$$

No ponto em que $r = 0.002$ cm, o sangue escoa-se à velocidade de

$$v(0.002) \approx 0.185 \times 10^5\,(0.64 \times 10^{-4} - 0.4 \times 10^{-5}) = 1.11\,\text{cm/s}$$

e o gradiente da velocidade nesse ponto é

$$\left.\frac{dv}{dr}\right|_{r=0.002} = -\frac{4000 \times 0.002}{2 \times 0.027 \times 2} \approx -74(\text{cm/s})/\text{cm}.$$

Tendo estes dois exemplos como ponto de partida, vamos agora formalizar o conceito matemático de derivada. Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in D$ um ponto de acumulação de D. Dizemos que f é **diferenciável** no ponto a se existir e for finito o limite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Tal limite (quando existe) diz-se a **derivada de f no ponto a** e representa-se por

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

A função $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ definida em $D \backslash \{a\}$ designa-se por **razão incremental.**

Se f tem derivada em todos os pontos de D, dizemos que f é **diferenciável em D**. Neste caso, podemos definir uma função f' em D por

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad \text{para } x \in D.} \tag{3.2}$$

Esta função f' é chamada a **função derivada de f**, ou a **derivada de f**, e pode também representar-se por $\dfrac{df}{dx}$ ou Df.

EXEMPLO 3.1. *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = cx + d$. Vamos determinar f' aplicando a definição* (3.2)*,*

$$\lim_{h \to 0} \frac{(c(x+h) + d) - (cx + d)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{cx + ch + d - cx - d}{h} = c.$$

Logo, $f'(x) = c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

EXEMPLO 3.2. *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$.*
Aplicando a definição (3.2)*, vem*

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2.$$

Logo, $f'(x) = 3x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

EXEMPLO 3.3. *Seja $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$. Para todo o $a \in]0, +\infty[$ e $h \neq 0$, temos*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Portanto, se $a > 0$ existe $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$. Por outro lado, no ponto $a = 0$, temos

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h}},$$

pelo que não existe o limite quando $h \to 0$, ou seja, a função $f(x) = \sqrt{x}$ não possui derivada no ponto 0.

Exercício 3.1. *Utilize a definição para determinar a derivada de $f(x) = \frac{1}{x}$, para $x \neq 0$.*

Quando existir e for finito o limite lateral

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

dizemos que f tem **derivada lateral à direita** no ponto a e o seu valor representa-se por $f'(a^+)$. Analogamente se define a **derivada lateral à esquerda** no ponto a que se representa por $f'(a^-)$. Uma função diferenciável num ponto interior de X tem derivadas laterais à direita e à esquerda nesse ponto e estas são iguais. No entanto, uma função pode ter derivada lateral à esquerda e à direita no ponto a e não ser diferenciável em a.

Exercício 3.2. *Seja $f(x) = |x|$. Mostre que não existe a derivada $f'(0)$.*

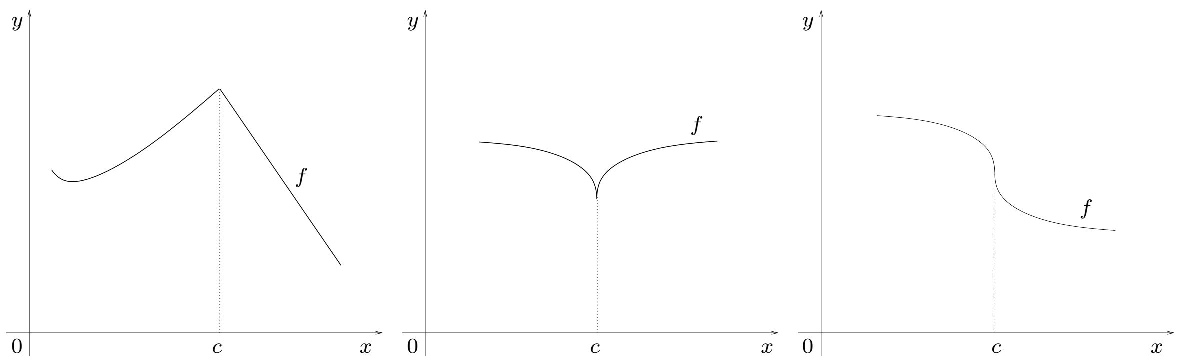


Figura 3.3: *Exemplos de não-diferenciabilidade num ponto.*

A diferenciabilidade é uma propriedade mais forte do que a continuidade. Se uma função f é diferenciável no ponto a então f é contínua em a. Contudo, a recíproca não é válida como ilustram os exemplos da Figura 3.3.

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA DERIVADA. Sabemos que sendo conhecido o declive m de uma recta e as coordenadas $(x_0,\, y_0)$ de um seu ponto podemos escrever a equação dessa recta,

$$y - y_0 = m\,(x - x_0).$$

Se existe a derivada de uma função f num ponto c, então a recta tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$ tem declive

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

e a sua equação é dada por

$$\boxed{y - f(c) = f'(c)\,(x - c).} \tag{3.3}$$

EXERCÍCIO 3.3. *Determine a equação da recta tangente ao gráfico da função* $f(x) = x^2$ *no ponto* $P = (3,\, 9)$.

EXERCÍCIO 3.4. *Averigue se o gráfico da função* f *definida por*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se x} < 2 \\ 5 - \dfrac{x^2}{4} & \text{se x} \geq 2 \end{cases}$$

tem uma recta tangente no ponto $(2, 4)$.

REGRAS USUAIS DE DERIVAÇÃO. Vamos apresentar alguns resultados que se revelam muito uteis para o cálculo de derivadas.

Sejam $f, g : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis em X; então

$f + g$ é diferenciável em X e $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$;

$f \cdot g$ é diferenciável em X e $(f \cdot g)'(x) = f(x)\, g'(x) + f'(x)\, g(x)$;

f^n é diferenciável em X e tem-se $(f^n)'(x) = n f^{n-1}(x) f'(x), \quad n \in \mathbb{N}$;

se $g(x) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ é ainda diferenciável em X e $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g^2(x)}$.

EXERCÍCIO 3.5. *Determine as derivadas das seguintes funções*

(a) $f(x) = (2x^3 + 1)^2$ (b) $g(r) = r(r - 1)^2$ (c) $\varphi(t) = \dfrac{t^2 + 1}{t^3}$.

Derivadas das funções trigonométricas. As derivadas das funções trigonométricas definem-se da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
&(\operatorname{sen}(x))' = \cos(x)\\
&(\cos(x))' = -\operatorname{sen}(x)\\
&(\operatorname{tg}(x))' = \tfrac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)\\
&(\operatorname{cosec}(x))' = \left(\tfrac{1}{\operatorname{sen}(x)}\right)' = -\tfrac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} = -\tfrac{1}{\operatorname{sen}(x)}\,\tfrac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} = -\operatorname{cosec}(x)\operatorname{cotg}(x)\\
&(\sec(x))' = \left(\tfrac{1}{\cos(x)}\right)' = \tfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)} = \tfrac{1}{\cos(x)}\,\tfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = \sec(x)\operatorname{tg}(x)\\
&(\operatorname{cotg}(x))' = \left(\tfrac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}\right)' = \tfrac{-\operatorname{sen}^2(x)-\cos^2(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} = -\tfrac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} = -\operatorname{cosec}^2(x).
\end{aligned}
$$

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
x	1	$\operatorname{cosec}(x)$	$-\operatorname{cosec}(x)\operatorname{cotg}(x)$
x^n	$n\,x^{n-1}$	$\sec(x)$	$\sec(x)\operatorname{tg}(x)$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\operatorname{cotg}(x)$	$-\operatorname{cosec}^2(x)$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\operatorname{arcsen}(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
e^x	e^x	$\arccos(x)$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$	$\operatorname{arctg}(x)$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{sen}(x)$	$\cos(x)$		
$\cos(x)$	$-\operatorname{sen}(x)$		
$\operatorname{tg}(x)$	$\sec^2(x)$		

Figura 3.4: Quadro de derivadas

Exercício 3.6. *Calcule as derivadas das seguintes funções*

(a) $f(x) = \operatorname{cosec}(x)\operatorname{cotg}(x)$ (b) $f(x) = \dfrac{\sec(x)}{\sqrt{x}+1}$

(a) $f(x) = \sec(x) - \operatorname{tg}(x)$ (c) $f(x) = x\operatorname{cotg}(x) - \operatorname{cosec}(x)$.

DERIVADA DA FUNÇÃO COMPOSTA. Consideremos as funções $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : E \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tais que $g(E) \subset D$. Se g é diferenciável em $t_0 \in E$ e f é diferenciável em $x_0 = g(t_0) \in D$, então $f \circ g : E \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em t_0 e tem-se

$$(f \circ g)'(t_0) = f'(x_0)\, g'(t_0) = f'(g(t_0))\, g'(t_0).$$

À derivada da função composta é usual atribuir a designação de regra da cadeia.

EXERCÍCIO 3.7. *Aplique a regra da cadeia para determinar as derivadas das seguintes funções*
(a) $h(x) = \left(\sqrt{x^2+1}+1\right)^2$ (b) $h(x) = \sqrt{x\,\ln(x)}$ (c) $h(\theta) = sen\,(3\,\theta^2+1)$.

DERIVADA DA FUNÇÃO INVERSA. Seja f uma função diferenciável e injectiva definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Seja $x_0 \in I$ tal que $f'(x_0) \neq 0$; então f^{-1} é diferenciável em $y_0 = f(x_0)$ e

$$\frac{df^{-1}}{dy}(y_0) = \frac{1}{\frac{df}{dx}(x_0)}. \tag{3.4}$$

Sendo $y_0 = f(x_0)$ então $f^{-1}(y_0) = x_0$, donde $\dfrac{df^{-1}}{dy}(y_0) = \dfrac{1}{\frac{df}{dx}(f^{-1}(y_0))}$.

EXEMPLO 3.4. *Aplique a regra da derivada da função inversa para calcular a derivada de $\sqrt{x}$. Calcule a derivada em $x = 2$.*

Resolução Escrevemos $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Esta é a função inversa de $f(x) = x^2$.
Como $f'(x) = 2x$,

$$\frac{df^{-1}}{dy}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{2x_{|_{f^{-1}(y)}}} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

logo, $\dfrac{d}{dy}\sqrt{y} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$, ou seja, $\dfrac{d}{dx}\sqrt{x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
Quando $x = 2$, vem $\dfrac{d}{dx}\sqrt{x}_{|x=2} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

EXERCÍCIO 3.8. *Considere a função invertível $f(x) = (x^5+x+2)^{5/2}$. Calcule $(f^{-1})'(32)$. Observe que $f(1) = 32$.*

Vimos anteriormente que, se considerarmos a restrição da função seno a um intervalo onde seja injectiva, podemos definir a sua função inversa, que designámos por arcsen.
Então, no intervalo $[-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}]$, a função seno é injectiva e temos arcsen : $[-1,\, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}]$.

Vamos agora determinar a derivada desta função.

Sendo $y = \operatorname{sen}(x)$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, vem

$$\frac{d}{dy}\operatorname{arcsen}(y) = \frac{1}{\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen}(x)} = \frac{1}{\cos(x)}$$

Como $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\cos(x)$ é sempre positivo, pelo que podemos escrever

$$\frac{d}{dy}\operatorname{arcsen}(y) = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}},$$

ou seja,

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsen}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{se } -\tfrac{\pi}{2} < \operatorname{arcsen}(x) < \tfrac{\pi}{2}.$$

Aplicando a regra da derivada da função inversa podemos determinar as derivadas das restantes funções trigonométricas inversas, onde as expressões tenham sentido.

$$\frac{d}{dx}\arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{se } 0 < \arccos(x) < \pi$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arctg}(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{se } -\tfrac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}(x) < \tfrac{\pi}{2}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arccosec}(x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & \text{se } -\tfrac{\pi}{2} < \operatorname{arccosec}(x) < 0 \\ -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & \text{se } 0 < \operatorname{arccosec}(x) < \tfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsec}(x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & \text{se } 0 < \operatorname{arcsec}(x) < \tfrac{\pi}{2} \\ -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & \text{se } \tfrac{\pi}{2} < \operatorname{arcsec}(x) < \pi \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arccotg}(x) = -\frac{1}{1+x^2} \qquad \text{se } 0 < \operatorname{arccotg}(x) < \pi.$$

Exercício 3.9. *Calcule as derivadas de*

(a) $y = x^2 \operatorname{arcsen}(x)$ (b) $y = \frac{1+\operatorname{arctg}(x)}{2-3\operatorname{arctg}(x)}$ (c) $y = \operatorname{arcsec}(x)\operatorname{arccosec}(x)$.

Derivadas de ordem superior. Seja $f : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em X. Se f' é diferenciável em $a \in X$ então dizemos que f é **duas vezes diferenciável** em a.

A segunda derivada de f em a representa-se por $f''(a)$ ou $D^2 f(a)$ ou ainda por $\dfrac{d^2 f}{dx^2}(a)$ e vem dada por

$$f''(a) = (f')'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a}.$$

Mais geralmente, se existem f', f'', $\ldots$, $f^{(n-1)}$ em X e $f^{(n-1)}$ é derivável em a, então dizemos que f tem derivada de ordem n em a:

$$f^{(n)}(a) = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x - a}.$$

OBSERVAÇÃO 3.1. *A função f diz-se de classe $\mathcal{C}^n$ e escreve-se $f \in \mathcal{C}^n(X)$ se f é n vezes diferenciável em X e a função $f^{(n)}$ é contínua em X.*

EXERCÍCIO 3.10. *Calcule as derivadas de primeira, segunda e terceira ordem da função $f(x) = 4x^3 - 7x^{-5} + 2x^{5/2}$.*

Solução:

$f'(x) = 12x^2 + 35x^{-6} + 5x^{3/2}$; $f''(x) = 24x - 210x^{-7} + \frac{15}{2}\sqrt{x}$; $f^{(3)}(x) = 24 + 1470x^{-8} + \frac{15}{4\sqrt{x}}$.

Teorema de Taylor. *Suponhamos que f é uma função $n+1$ vezes diferenciável e $f^{(n+1)}$ é contínua em $[a,\, b]$, e seja $x_0 \in [a,\, b]$.*
Então, para qualquer $x \in]a,\, b[$, existe um número $c \equiv c(x)$ (isto é, o valor de c depende do de x) entre x_0 e x, tal que f se pode escrever como a soma de duas funções, P_n e R_n,

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

onde

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

e,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

P_n é designado por polinómio de Taylor de grau n e R_n é designado por resto de Lagrange. Deste teorema decorre o seguinte resultado: Se P_n é o polinómio de Taylor dado pelo Teorema de Taylor então $P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ para $k = 0, 1, \ldots$

EXEMPLO 3.5. *Determine o polinómio de Taylor de grau 5 para a função $f(x) = e^{-x}\,\mathrm{sen}(x)$ em torno do ponto $x_0 = 0$.*

O polinómio de Taylor de quinto grau em trono de x_0 é dado por:

$$\begin{aligned} P_5(x_0) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}(x_0)(x-x_0)^3 \\ &+ \frac{1}{4!} f^{(4)}(x_0)(x-x_0)^4 + \frac{1}{5!} f^{(5)}(x_0)(x-x_0)^5 \end{aligned}$$

Ou seja, para $x_0 = 0$,

$$\begin{aligned} P_5(0) &= f(0) + f'(0)\, x + \frac{1}{2} f''(0)\, x^2 + \frac{1}{6} f^{(3)}(0)\, x^3 \\ &+ \frac{1}{24} f^{(4)}(0)\, x^4 + \frac{1}{120} f^{(5)}(0)\, x^5 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Calculando as derivadas respectivas, obtemos,

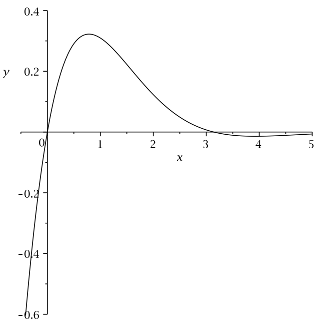
$$\begin{array}{ll} f'(x) = -e^{-x}\,\mathrm{sen}(x) + e^{-x}\,\cos(x) & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -2\,e^{-x}\,\cos(x) & f''(0) = -2 \\ f^{(3)}(x) = 2\,e^{-x}\,\cos(x) + 2\,e^{-x}\,\mathrm{sen}(x) & f^{(3)}(0) = 2 \\ f^{(4)}(x) = -4\,e^{-x}\,\mathrm{sen}(x) & f^{(4)}(0) = 0 \\ f^{(5)}(x) = 4\,e^{-x}\,\mathrm{sen}(x) - 4\,e^{-x}\,\cos(x) & f^{(5)}(0) = -4 \end{array}$$

Logo, de (3.5), vem

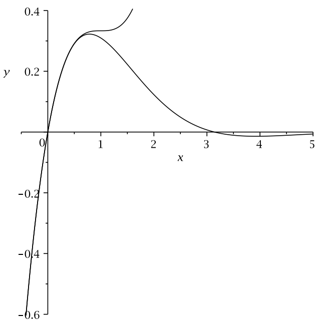
$$P_5(0) = x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30}$$

Na figura 3.5 podemos verificar a representação de polinómios de Taylor de vários graus. É visível que à medida que o grau do polinómio vai aumentando melhor é a aproximação à função dada.

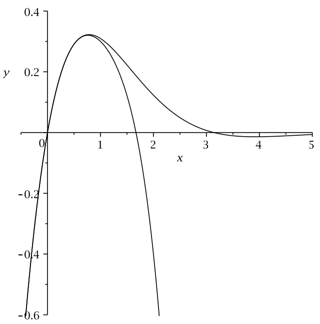
Exercício 3.11. *Escreva o polinómio de Taylor de grau 9 para a função $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ em torno do ponto $x_0 = 0$.*



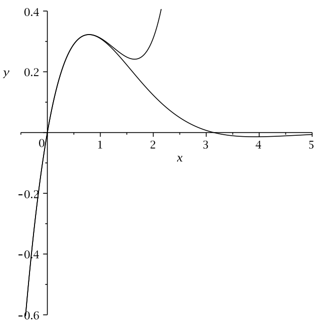
(a) $f(x) = e^{-x}\,\mathrm{sen}(x)$



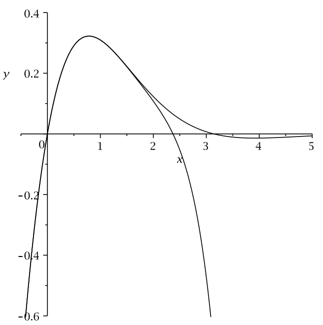
(b) $P_3(x) = x - x^2 + \frac{x^3}{3}$



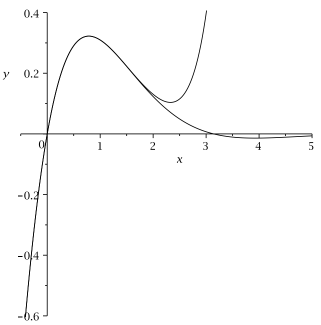
(c) $P_5(x) = x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30}$



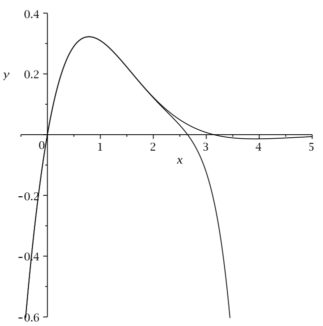
(d) $P_6(x) = x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + \frac{x^6}{90}$



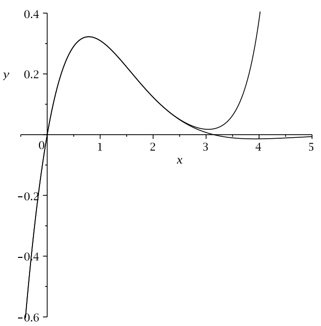
(e) $P_7(x) = x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + \frac{x^6}{90} - \frac{x^7}{630}$



(f) $P_9(x) = x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + \frac{x^6}{90} - \frac{x^7}{630} + \frac{x^9}{22680}$



(g) $P_{10}(x) = x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + \frac{x^6}{90} - \frac{x^7}{630} + \frac{x^9}{22680} - \frac{x^{10}}{113400}$



(h) $P_{11}(x) = x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + \frac{x^6}{90} - \frac{x^7}{630} + \frac{x^9}{22680} - \frac{x^{10}}{113400} + \frac{x^{11}}{1247400}$

Figura 3.5: *Aproximação polinomial da função $f(x) = e^{-x}\,\mathrm{sen}(x)$ numa vizinhança de 0.*

3.2 Teoremas fundamentais do cálculo diferencial

Recorda-se que, dizemos que f, uma função de domínio D, tem um máximo local (ou relativo) no ponto $c \in D$ se existe um $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) \leq f(c)$ para qualquer $x \in D$ tal que $|x-c| < \varepsilon$. Se $f(x) \leq f(c)$ para todo $x \in D$, dizemos que f tem um máximo global (ou absoluto) em c e que o seu valor é $f(c)$.

Analogamente, diz-se que f tem um mínimo local (ou relativo) no ponto $c \in D$ se existe um $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) \geq f(c)$ para qualquer $x \in D$ tal que $|x - c| < \varepsilon$.

Se $f(x) \geq f(c)$ para todo $x \in D$, então dizemos que f tem um mínimo global (ou absoluto) em c e que o seu valor é $f(c)$.

Utilizamos o termo extremo da função para designar a existência de mínimo ou máximo.

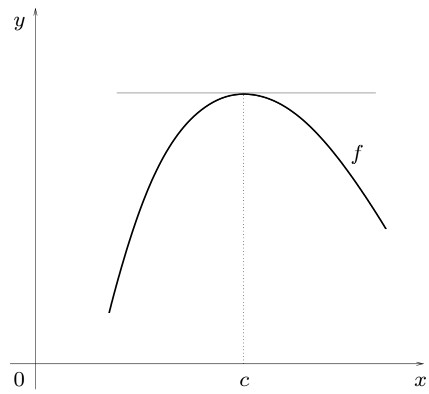


Figura 3.6: *Teorema de Fermat.*

Teorema de Fermat. *Seja f uma função definida num intervalo aberto contendo o ponto c e diferenciável em c. Se f tem um extremo local em c então $f'(c) = 0$.*

Observemos que o teorema de Fermat não nos permite concluir que se a derivada se anular num ponto esse ponto será um extremo da função mas apenas que esse ponto será um candidato a extremo.

Teorema de Rolle. *Seja $f : [a,\, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo limitado e fechado $[a,\, b]$ e diferenciável em $]a, b[$. Se $f(a) = f(b)$, então existe pelo menos um ponto $c \in]a,\, b[$ tal que $f'(c) = 0$.*

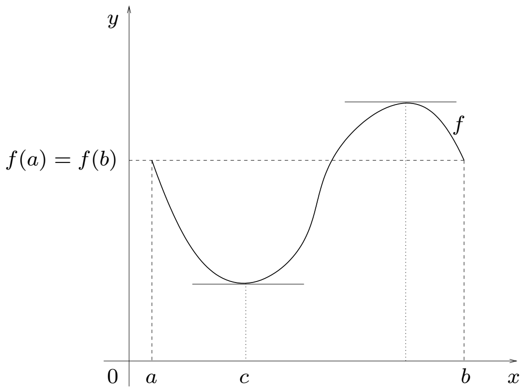


Figura 3.7: *Teorema de Rolle.*

Geometricamente, a existência de $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$ significa que a tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$ é uma recta horizontal.

Assim, dada uma função $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, entre dois zeros consecutivos de f', não pode haver mais que um zero de f. Com efeito, se a e b forem dois zeros consecutivos de f' e existirem α e β tais que $a < \alpha < \beta < b$ e $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ pelo teorema de Rolle existiria $c \in]\alpha, \beta[$ tal que $f'(c) = 0$, o que contraria a hipótese de a e b serem zeros consecutivos de f'.

EXEMPLO 3.6. *Seja* $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. *Temos que* f *é contínua em* $[-1, 1]$, $f(-1) = f(1)$, *mas não existe* $c \in] -1, 1[$ *tal que* $f'(c) = 0$. *O motivo é que* f *não tem derivada no ponto* 0.

EXERCÍCIO 3.12. *Mostre que a função* $f(x) = 1 - x^2$ *satisfaz as condições do Teorema de Rolle no intervalo* $[-1, 1]$. *Determine um ponto* c *onde* $f'(c) = 0$.

EXERCÍCIO 3.13. *Averigue se pode aplicar o Teorema de Rolle à função* $f(x) = \sec(x)$ *no intervalo* $[0, 2\pi]$.

Teorema de Lagrange. *Se* $a < b$, f *contínua em* $[a, b]$ *e diferenciável em* $]a, b[$ *existe* $c \in]a, b[$ *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Geometricamente, a existência de $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ significa a existência de pelo menos um ponto $(c, f(c))$ sobre o gráfico de f onde a tangente é paralela à recta definida pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, pois os declives destas rectas são iguais.

Exercício 3.14. *Determine o valor intermédio c do Teorema de Lagrange para a função* $f(x) = x - x^2$ *no intervalo* $[-1, 2]$

Corolário 3.1. *Seja* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $[a, b]$ *e com derivada em* $]a, b[$. *Se* $f'(x) = 0$, *para qualquer* $x \in]a, b[$ *então* f *é constante.*

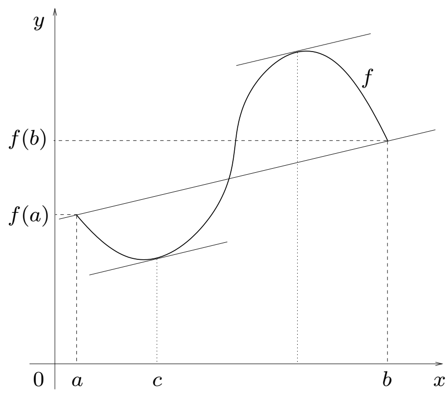


Figura 3.8: *Interpretação geométrica do Teorema de Lagrange.*

Corolário 3.2. *Seja* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $[a, b]$ *e com derivada em* $]a, b[$. *Então* f *é crescente em* I *se e só se* $f'(x) \geq 0$ *para qualquer* $x \in]a, b[$ *e,* f *é decrescente em* I *se e só se* $f'(x) \leq 0$ *para qualquer* $x \in]a, b[$.
Caso consideremos as desigualdades no sentido estrito diremos, de forma correspondente, que f *é estritamente crescente ou decrescente.*

Teorema do valor médio de Cauchy. *Se* $a < b$, f *e* g *contínuas em* $[a, b]$ *e diferenciáveis em* $]a, b[$ *com* $g'(x) \neq 0$ *em* $]a, b[$, *então existe* $c \in]a, b[$ *tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

O teorema do valor médio de Cauchy generaliza o teorema de Lagrange e reduz-se a este quando $g(x) = x$. Observe-se ainda que o enunciado do teorema está bem definido, isto é, $g(b) \neq g(a)$; com efeito, se $g(b) = g(a)$, pelo teorema de Rolle existiria um ponto $\xi \in]a,\, b[$ com $g'(\xi) = 0$ o que contraria a hipótese.

EXERCÍCIO 3.15. *Determine um valor c que intervenha no Teorema de Cauchy aplicado às funções* $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ *e* $g(x) = \cos(x)$, *no intervalo* $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

3.3 Derivação implícita

A equação $x^2 + y^2 = 4$ representa uma circunferência de raio 2 e centrada na origem. Sabemos que em cada ponto da curva existe uma recta tangente. Contudo, não podemos determinar a equação da recta tangente usando (3.3) visto que a circunferência não é o gráfico de uma função.

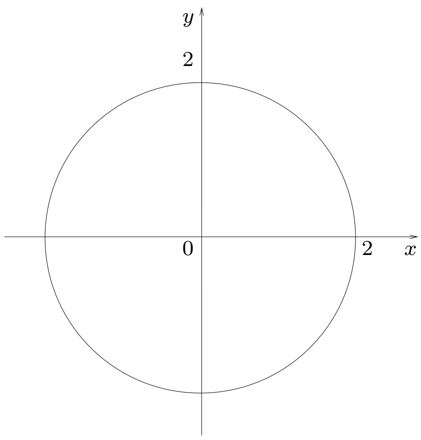


Figura 3.9: *Circunferência definida por* $x^2 + y^2 = 4$.

Uma forma de resolver este problema seria considerar duas funções $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ e $f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$ e então aplicar (3.3).

No entanto, podemos utilizar uma abordagem mais simples quando temos uma equação em que y não é dado explicitamente em função de x. Este método designa-se por **derivação implícita** e evita a necessidade de obter uma expressão para y em função de x.

Se $f(x, y) = C$ é uma dada equação e se $P = (x_0, y_0)$ verifica esta equação, então podemos determinar $\frac{dy}{dx}\big|_P$ se existir. Para tal, consideraremos y como sendo uma função de x diferenciável num intervalo aberto centrado em x_0. Diremos que neste caso, derivamos f implicitamente em ordem a x.

Para que possamos aplicar o método da derivação implícita precisamos de garantir, por um lado, que y é função de x numa vizinhança de x_0 e, por outro lado, que y é diferenciável em x_0.

EXEMPLO 3.7. *Aplique o método de derivação implícita para determinar os declives das rectas tangentes à curva $x^2 + y^2 = 4$ nos pontos $(1, \sqrt{3})$ e $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.*

Aplicando $\frac{d}{dx}$ a ambos os membros da equação, e considerando y como uma função de x, obtemos

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(4) \Leftrightarrow 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow 2y\frac{dy}{dx} = -2x \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad \text{se } y \neq 0.$$

Agora basta-nos determinar o declive da recta tangente à curva no ponto $(1, \sqrt{3})$. Assim,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,\sqrt{3})} = -\left.\frac{x}{y}\right|_{(1,\sqrt{3})} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Analogamente, determinamos o declive da recta tangente à curva no ponto $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\sqrt{2},-\sqrt{2})} = -\left.\frac{x}{y}\right|_{(\sqrt{2},-\sqrt{2})} = 1.$$

EXERCÍCIO 3.16. *Em cada uma das alíneas seguintes, utilize o método da derivação implícita para calcular $\frac{dy}{dx}$ no ponto P.*

(a) $xy^2 + yx^2 = 6$, $P = (1, 2)$; (b) $x^{3/5} + 4y^{3/5} = 12$, $P = (32, 1)$; (c) $x^4 - y^4 = -15$, $P = (1, 2)$.

3.4 Derivação logarítmica

Podemos recorrer à derivada da função logarítmica para calcularmos a derivada de uma determinada função f, onde f' existir e $f(x) \neq 0$, sabendo que

$$\frac{d}{dx}\ln(|f(x)|) = \frac{f'(x)}{f(x)}. \tag{3.6}$$

A derivada do logaritmo de f é chamada **derivada logarítmica** de f e o processo de derivar $\ln(|f(x)|)$ é chamado de **derivação logarítmica**. De (3.6) concluímos que

$$f'(x) = f(x)\,\frac{d}{dx}\ln(|f(x)|). \tag{3.7}$$

Como o segundo membro de (3.6) indica, a derivada logarítmica de f mede a taxa de variação relativa de f. Tal quantidade fornece muitas vezes uma informação mais útil que a própria derivada f' e é usada frequentemente em Biologia, Medicina e Economia.

A utilidade da derivada logarítmica no cálculo reside nas propriedades algébricas do logaritmo permitindo simplificar produtos e quocientes complicados antes de efectuar a derivação. Além disso, a derivação logarítmica pode ser um instrumento eficaz para lidar com expressões em que quer a base quer o expoente variam.

EXEMPLO 3.8. *Determine a derivada da função* $f(x) = x^x$ *em* $]0, +\infty[$.

Calculando primeiramente $\frac{d}{dx}\ln(|f(x)|)$,

$$\frac{d}{dx}\ln(|f(x)|) = \ln(x) + 1,$$

basta em seguida utilizar (3.7) de forma a obtermos

$$f'(x) = x^x\,(\ln(x) + 1).$$

EXERCÍCIO 3.17. *Determine a derivada da função* $f(x) = \dfrac{e^x\, x^{3/2}\,\sqrt{1+x}}{(x^2+3)^4\,(3x-2)^3}$.

3.5 Diferenciais e aproximação de funções

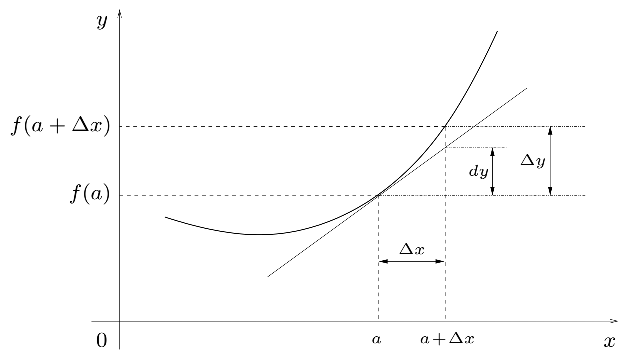


Figura 3.10: *Se* Δx *é pequeno,* dy *é uma boa aproximação de* Δy.

Podemos interpretar a equação

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

dizendo que

$$f'(a) \approx \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x},$$

onde Δx é pequeno e diferente de zero. A escolha de um valor razoavelmente pequeno para Δx permite-nos, muitas vezes obter uma boa aproximação. Com uma pequena manipulação algébrica, a aproximação de $f'(a)$ pode ser transformada numa aproximação de $f(a+\Delta x)$,

$$f(a+\Delta x) \approx f(a) + f'(a)\,\Delta x. \tag{3.8}$$

Podemos interpretar a equação (3.8) do seguinte modo: se conhecermos os valores de $f(a)$ e $f'(a)$, podemos estimar o valor de $f(x_0)$ num ponto próximo $x_0 = a+\Delta x$. Por vezes, abreviamos $f(a+\Delta x) - f(a)$ para $\Delta f(a)$. Com esta notação a aproximação (3.8) escreve-se

$$\Delta f(a) \approx f'(a)\,\Delta x. \tag{3.9}$$

Este método de aproximação é designado por método dos incrementos.

Exemplo 3.9. *Use a aproximação (3.8) para obter uma estimativa para $\sqrt{4.1}$.*

Sendo $f(x) = \sqrt{x}$, então $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Escolhamos $a = 4$ e $\Delta x = 4.1 - a = 0.1$. De acordo com (3.8)

$$f(a+\Delta x) \approx f(a) + f'(a)\,\Delta x = \sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}}\,\Delta x.$$

Logo,

$$\sqrt{4.1} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}} \times 0.1 = 2.025.$$

Efectuando o cálculo numa calculadora obtemos 2.02484567, o que nos permite concluir que a aproximação encontrada tem um erro relativo de 0.8×10^{-4}.

A precisão que podemos obter com o método dos incrementos depende grandemente do tamanho do incremento Δx; em geral, quanto mais pequeno o valor de Δx mais eficaz se torna o método. A equação (3.9) diz-nos que uma pequena variação de a por uma quantidade Δx provoca uma variação em f que pode ser estimada por $f'(a)\,\Delta x$. À medida que Δx se torna mais pequeno, a estimativa torna-se cada vez mais precisa. Assim, quando Δx se torna "infinitesimal", a estimativa (3.9) transforma-se numa igualdade.

Representando o incremento infinitesimal em x por dx e a variação infinitesimal em f por df, a aproximação (3.9) pode escrever-se

$$dy = f'(x)\,dx. \tag{3.10}$$

Podemos pensar em (3.10) como uma outra forma de escrever a aproximação (3.9). Na verdade, a aproximação (3.9) é referida, por vezes, como aproximação diferencial.

Exercício 3.18. *Aplique o método dos incrementos para estimar o valor da função f no ponto x usando o valor conhecido no ponto inicial a. Compare o resultado obtido com o valor obtido com uma calculadora.*

(a) $f(x) = \operatorname{sen}(x) - \cos(x)$, $a = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{3}$; (b) $f(x) = (x^2+1)^{1/3}$, $a = 0$, $x = 1$;

(c) $f(x) = \operatorname{tg}(x)$, $a = \frac{\pi}{4}$, $x = 0.8$.

3.6 Diferenciação numérica (opcional)

As regras de derivação já estudadas permitem-nos derivar funções extremamente complexas. A aplicação destas regras pode ser, contudo, bastante trabalhosa.

Além disso, mesmo quando usamos uma regra de derivação para obtermos o cálculo exacto de uma derivada poderemos ter de aproximar constantes como, por exemplo, $\sqrt{2}$ e π se aparecerem na resposta.

É, pois, conveniente dispor de um método para aproximar o valor numérico de $f'(c)$.

Tal procedimento é conhecido como diferenciação numérica.

Suponhamos que f é uma função definida num intervalo $]a, b[$ e diferenciável em $c \in]a, b[$. Como

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

podemos aproximar $f'(a)$ pela razão incremental $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ para um valor pequeno de h. Quando $h > 0$ e a está fixado, a razão

$$D_+ f(a, h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

é designada por diferença finita progressiva. A diferença finita regressiva define-se por

$$D_-f(a,h) = \frac{f(a) - f(a-h)}{h}.$$

Definimos a diferença finita centrada por

$$D_cf(a,h) = \frac{f(a+\frac{h}{2}) - f(a-\frac{h}{2})}{h}.$$

Qualquer uma das três diferenças finitas pode ser usada para aproximar $f'(a)$. Contudo, para um valor de h fixado, a diferença finita centrada dá, normalmente, a melhor aproximação para a derivada.

3.7 Aplicação das derivadas ao cálculo dos limites nas indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$

Suponha-se que pretendemos calcular o limite

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}. \tag{3.11}$$

Se existem os limites $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ e não são simultaneamente nulos, então o limite (3.11) é de resolução imediata.

Vamos ver agora como é que poderemos determinar limites do tipo de (3.11) quando $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ ou, $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$. Nestes casos, quando os limites do numerador e do denominador são calculados separadamente, o quociente toma a forma $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. Tais formas são designadas por indeterminações pois os símbolos $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$ não têm significado. O limite pode efectivamente existir e ser finito ou pode não existir. Não podemos, por conseguinte, analisar o limite tomando apenas os limites do numerador e do denominador e efectuando o seu quociente.

A partir do teorema do valor médio de Cauchy pode demonstrar-se a seguinte regra que é muito usada no cálculo do limite de um quociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ quando assume a forma $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

Regra de Cauchy. *Seja I um intervalo qualquer de $\mathbb{R}$ e a é ponto de acumulação de I;sejam $f, g : I\backslash\{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis e admita-se que $g'(x) \neq 0$, $x \in I\backslash\{a\}$. Suponha-se agora que*

$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ *ou* $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$

e, $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *existe.*

Então, $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ *existe, e tem-se*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Note-se que a pode pertencer ou não a I; neste último caso, a será um extremo do intervalo, podendo ser $+\infty$ ou $-\infty$.

EXEMPLO 3.10. *Calcule os seguintes limites:*
(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x^2-1}$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{x-\operatorname{sen}(x)}$; (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen}(2x)}$; (d) $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{1+\cos(x)}{(x-\pi)^2}$;

As indeterminações do tipo $0\times\infty$ ou $+\infty-\infty$ reduzem-se a indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, utilizando as igualdades

$$f(x)\,g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$
$$f(x)-g(x) = f(x)\,g(x)\Big(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\Big).$$

As indeterminações envolvendo expoente, nomeadamente as do tipos, 0^0, 1^∞ e ∞^0 são convertidas em indeterminações da forma $0\times\infty$ aplicando a composição das funções exponencial e logarítmica. logaritmo.

EXERCÍCIO 3.19. *Determine os seguintes limites*
(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^x$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \Big(1+\frac{3}{x}\Big)^x$; (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$.

Regra de l'Hôpital. *Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, funções diferenciáveis em $a \in D$; suponha-se que, nalguma vizinhança de a, $g(x) \neq 0$, $x \in (\mathcal{V}_\varepsilon(a)\backslash\{a\}) \cap D$.*
Se $f(a) = g(a) = 0$ e $g'(a) \neq 0$, então $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe e tem-se

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

A regra de l'Hôpital é válida se $g'(a) = 0$ e $f'(a) \neq 0$, o limite de $\frac{f(x)}{g(x)}$ neste caso é infinito. A regra é ainda válida se uma das derivadas $f'(a)$ ou $g'(a)$ (mas não ambas) é infinita, com as convenções habituais $\frac{\infty}{k} = \infty$ e $\frac{k}{\infty} = 0$, $k \in \mathbb{R}$.

Esta regra requer apenas a existência de derivadas no ponto de indeterminação.

Importa realçar a importância de averiguar se as hipóteses são verificadas.

Exemplo 3.11. *Calcule o limite:* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt[3]{x}}$

Não podemos aplicar aqui a Regra de l'Hôpital porque $\sqrt[3]{x}$ não é diferenciável na origem. Aplicando a Regra de Cauchy resulta

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}} = 0,$$

devido à existência do segundo limite.

3.8 Estudo de uma função e sua representação gráfica

Pontos críticos. É importante observar que muitas das funções que encontramos na prática não são diferenciáveis em todos os pontos do seu domínio. Por exemplo, $f(x) = |x|$ não é diferenciável em $x = 0$, mas tem de facto um mínimo global nesse ponto. Assim, a pesquisa por pontos extremos deverá tomar em linha de conta os pontos de não-diferenciabilidade.

Seja c um ponto de um intervalo aberto onde f é contínua. Diremos que c é um ponto crítico de f se uma das duas seguintes condições se verificar

(a) f não é diferenciável em c, ou

(b) f é diferenciável em c e $f'(c) = 0$.

Exercício 3.20. *Determine os pontos críticos da função* $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 32$.

Monotonia. Dizemos que f é crescente num ponto c se existe uma vizinhança de c onde f é crescente. Analogamente, dizemos que f é decrescente num ponto c se existe uma vizinhança de c onde f é decrescente.

Como a taxa de variação de uma função num ponto c é dada pela derivada da função nesse ponto, a derivada é naturalmente uma boa ferramenta para determinarmos os intervalos onde uma função diferenciável é crescente ou decrescente. Como sabemos, a derivada de uma função dá-nos informação, quer sobre o declive da recta tangente ao gráfico da função nesse ponto, quer sobre a taxa de variação da função nesse ponto.

Na verdade, num ponto onde a derivada é positiva, o declive da recta tangente ao gráfico é positivo e a função é crescente. Num ponto onde a derivada é negativa, o declive é negativo e a função é decrescente.

Para encontrarmos os intervalos onde a função é crescente ou decrescente:

– determinamos todos os valores de c para os quais $f'(c) = 0$ ou f é descontínua, e definimos os intervalos $]a, c[$, $]c, b[$ para a e b próximos de c;

– seleccionamos um ponto d em cada um dos intervalos definidos anteriormente e determinamos o sinal de $f'(d)$: (a) se $f'(d) > 0$, f é crescente nesse intervalo; (b) se $f'(d) < 0$, f é decrescente nesse intervalo.

EXERCÍCIO 3.21. *Determine os intervalos de monotonia da função* $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 32$.

CONCAVIDADE. Seja f uma função diferenciável cujo domínio contém um intervalo aberto I. Se $f'(x)$ (o declive da recta tangente ao gráfico em x) aumenta quando x se desloca da esquerda para a direita em I, diremos que o gráfico de f tem a concavidade virada para cima.

Se $f'(x)$ diminui quando x se desloca da esquerda para a direita em I, diremos que o gráfico de f tem a concavidade virada para baixo.

Uma aplicação importante da derivada de segunda ordem é permitir identificar o sentido da concavidade de uma função.

Suponhamos que a função f é duas vezes diferenciável num intervalo aberto I.

Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$, então o gráfico de f tem a concavidade para cima.

Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$, então o gráfico de f tem a concavidade para baixo.

EXERCÍCIO 3.22. *Averigue o sentido da concavidade da função* $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 32$.

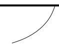
Seja f uma função contínua definida num intervalo aberto I. Se o gráfico de f muda o sentido da concavidade num ponto $a \in I$, diremos que a é um ponto de inflexão.

Para determinarmos os pontos de inflexão de uma função contínua f num intervalo aberto I:

– localizamos todos os pontos de I nos quais $f'' = 0$ ou f'' não está definida;

– em cada um destes pontos, averiguamos se f'' muda de sinal.

Exercício 3.23. *Analise a função $f(x) = x-(x-1)^3$ em termos de sentido da concavidade e pontos de inflexão.*

Sinais de f' e f''	Propriedades do gráfico de f	Forma geral do gráfico de f
$f' > 0$ e $f'' > 0$	f crescente, concavidade para cima	
$f' > 0$ e $f'' < 0$	f crescente, concavidade para baixo	
$f' < 0$ e $f'' > 0$	f decrescente, concavidade para cima	
$f' < 0$ e $f'' < 0$	f decrescente, concavidade para baixo	

Extremos. Para determinarmos os extremos de uma função contínua f num intervalo fechado $[a,\, b]$, deveremos pesquisar os pontos críticos e as extremidades a e b.

Seja f uma função duas vezes diferenciável num intervalo aberto contendo um ponto c, no qual $f'(c) = 0$. Sendo o domínio de f um intervalo aberto, então os pontos críticos de f são os únicos candidatos a extremos locais de f.

– Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então $f(c)$ é um mínimo local.

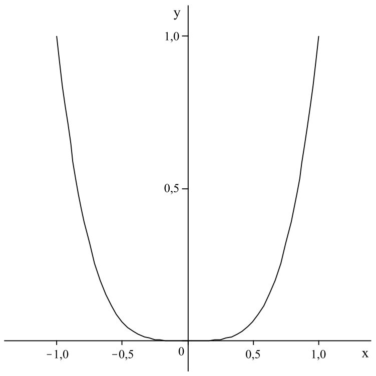
– Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então $f(c)$ é um máximo local.

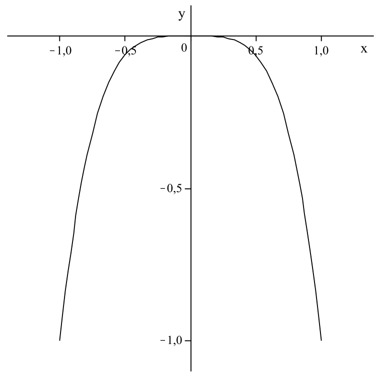
– Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) = 0$, o teste é inconclusivo.

Como ilustração do facto de a segunda derivada se anular no ponto crítico não nos permitir retirar conclusões sobre a natureza do extremo, observemos que tanto a primeira como a segunda derivadas se anulam na origem para cada uma das funções $f(x) = x^4$, $g(x) = -x^4$ e $h(x) = x^3$ (figura 3.11). No entanto, a primeira tem um mínimo, a segunda tem um máximo e a terceira não tem mínimo nem máximo em $x = 0$.

Exemplo 3.12. *Determine os extremos relativos da função $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 32$.*

Sendo f uma função diferenciável, os pontos críticos de f obtém-se resolvendo a equação $f'(x) = 0$, ou seja, $3x^2 - 6x - 24 = 0$, donde retiramos $x = -2$ ou $x = 4$. Como $f''(-2) = -6 < 0$, $f(-2) = 60$ é um máximo local, e, visto que $f''(4) = 6 > 0$, $f(4) = -48$ é um mínimo local.





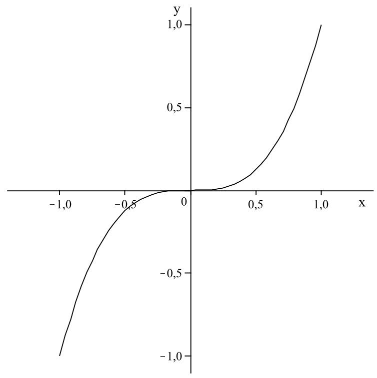


Figura 3.11: *Em qualquer dos casos, as derivadas de primeira e segunda ordem anulam-se na origem.*

Representação gráfica de uma função. A capacidade de traçar e compreender gráficos é utilizada em todas as ciências físicas, biológicas assim como nas ciências sociais.

Exemplo 3.13. *Um estudo de Borchert*[1] *investigou a relação entre o armazenamento de água no tronco e a densidade da madeira numa quantidade de espécies de árvores na Costa Rica. O estudo mostrou que o armazenamento de água está inversamente relacionado com a densidade da madeira, isto é, maior densidade da madeira corresponde a um menor conteúdo de água. Esboce um gráfico do conteúdo de água como uma função da densidade da madeira que ilustre esta situação.*

Mesmo possuindo uma calculadora gráfica ou software adequado à representação gráfica de funções num computador, justifica-se plenamente o estudo que faremos nesta secção, pois o melhor caminho para aprender a interpretar um gráfico é aprender a traçá-lo. Por outro lado, a representação gráfica de uma função pode não permitir tirar correctamente conclusões sobre a função, como pode ser verificado pelas representações de uma mesma função apresentados na figura 3.12.

Vimos nas secções anteriores que certos aspectos do gráfico de uma função f podem ser determinados a partir das primeira e segunda derivadas. Vimos também que os gráficos das funções podem possuir assímptotas. Combinando estas várias informações podemos aplicá-las para traçar gráficos de funções.

[1]Borchert R. (1994) Soil and stem water storage determine phenology and distribution of tropical dry forest trees, *Ecology*, **75**, 1437-1449.

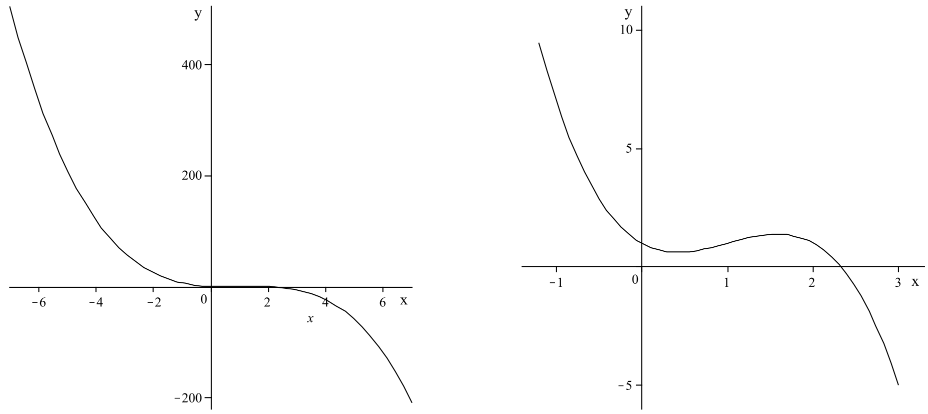
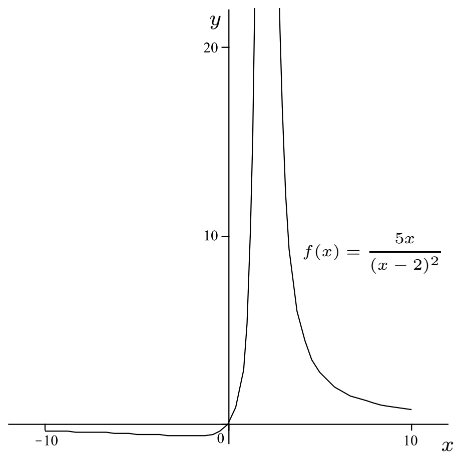


Figura 3.12: *Representações gráficas da função* $f(x) = x - (x-1)^3$.

Os passos seguintes podem ser seguidos para traçar gráficos de uma extensa quantidade de funções:

1. Determinar o domínio e (se possível) o contradomínio da função;
2. Determinar todas as assímptotas;
3. Calcular a derivada de primeira ordem e encontrar os pontos críticos da função;
4. Determinar os intervalos onde a função é crescente ou decrescente;
5. Calcular a derivada de segunda ordem e determinar os intervalos onde a função tem a concavidade virada para cima ou virada para baixo;
6. Identificar todos os máximos e mínimos locais e os pontos de inflexão;
7. Traçar estes pontos assim como os pontos de intersecção com os eixos (se existirem). Traçar as assímptotas;
8. Unir os pontos, atendendo ao sentido da concavidade, extremos locais e assímptotas.



Exemplo 3.14. *Trace o gráfico da função* $f(x) = \frac{5x}{(x-2)^2}$.

Vamos seguir os passos atrás indicados.

1. O domínio de f é $\mathbb{R}\backslash\{2\}$. Para x próximo do ponto 2, $f(x)$ toma valores positivos arbitrariamente grandes, pois,
$$\lim_{x\to 2^-}\frac{5x}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{5x}{(x-2)^2}=+\infty.$$

2. Observamos que,
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{5x}{(x-2)^2} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{5x}{x^2-4x+2}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{5}{x}}{1-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}\\ &= \frac{5\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}{1-4\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}}\\ &= 0\\ &= \lim_{x\to-\infty}f(x).\end{aligned}$$

   Por conseguinte, a recta $y=0$ é uma assímptota horizontal do gráfico. Além disso, a recta $x=2$ é uma assímptota vertical para f.

3. Calculamos f',
$$f'(x)=\frac{5\,(x-2)^2-5x\;\times 2(x-2)}{(x-2)^4}=\frac{-5(x+2)}{(x-2)^3}.$$
   A derivada de primeira ordem está definida em todos os pontos do domínio de f. Como f' se anula para $x=-2$ este é o único ponto crítico.

4. A derivada de primeira ordem pode mudar de sinal apenas em $x=-2$ (ponto crítico) e $x=2$ (ponto onde f não está definida).

   Como $f'(-3)=-\frac{1}{25}<0$, concluímos que $f'<0$ em $]-\infty,\,-2[$; então, f é decrescente neste intervalo.

   Como $f'(0)=\frac{5}{4}>0$, concluímos que $f'>0$ em $]-2,\,2[$; então, f é crescente neste intervalo.

   Por último, como $f'(3)=-25<0$, concluímos que $f'<0$ em $]2,\,+\infty[$; então, f é decrescente neste intervalo.

5. A derivada de segunda ordem é
$$\begin{aligned}f''(x)&=\frac{(x-2)^3\cdot(-5)-(-5(x+2))\,(3(x-2)^2)}{(x-2)^6}\\ &=\frac{10\,(x+4)}{(x-2)^4}.\end{aligned}$$
   Observemos que o denominador é sempre positivo no domínio de f.Vemos que $f''<0$ no intervalo $]-\infty,\,-4[$ pois o numerador é negativo. Logo, f tem a concavidade virada para baixo

nesse intervalo. Também, $f'' > 0$ quando $x > -4$ (excepto em $x = 2$ onde f, f' e f'' não estão definidas). Portanto, f tem a concavidade virada para cima em cada um dos intervalos $]-4, 2[$ e $]2, +\infty[$.

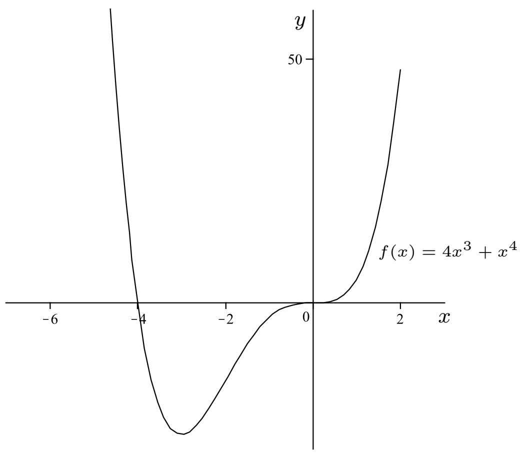
6. Como $f''(-2) = \frac{5}{64} > 0$, existe um mínimo local no ponto crítico $x = -2$.

   Do passo anterior, sabemos que o sentido da concavidade muda em $x = -4$. Por conseguinte, f tem um ponto de inflexão em $x = -4$.

   O sentido da concavidade não varia em $x = 2$.

7. A intersecção com o eixo dos yy é $(0,\, f(0)) = (0,\, 0)$. Como $x = 0$ é a única solução de $f(x) = 0$, o ponto $(0,\, 0)$ é também o ponto de intersecção com o eixo dos xx.

8. Podemos concluir da informação obtida sobre a função que f tem um mínimo global em $x = -2$ e que não tem máximo global.



Exercício 3.24. *Faça um estudo da função $f(x) = 4x^3 + x^4$.*

3.9 Aplicações

Nesta secção iremos estudar alguns exemplos de aplicação do cálculo diferencial.

Aplicação 1. A altura atingida por um foguete t segundos após o lançamento é dada pela função $h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 16t^2 + 33t + 10$. Entre que instantes está o foguete a subir? E quando inicia a queda?

Determinamos em que instante o foguete atinge a altura máxima calculando $h'(t) = 0$, ou seja, o instante em que a velocidade se anula,

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow -t^2 + 32t + 33 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \text{ ou } t = 33.$$

Logo, o foguete está em ascensão entre os instantes 0 e 33, iniciando então a queda.

APLICAÇÃO 2. O nível de dióxido de nitrogénio (gás nocivo para a respiração) presente na atmosfera num dia de Maio na baixa de Los Angeles é aproximado por

$$A(t) = 0.03t^3(t-7)^4 + 60.2 \qquad (0 \leq t \leq 7),$$

onde $A(t)$ é medido em Indice Padrão de Poluente e t é medido em horas, com $t = 0$ correspondendo às 7 horas da manhã. Em que altura do dia aumenta a poluição do ar e em que altura diminui?

Calculando $A'(t) = 0$ encontramos os pontos críticos de A,

$$\begin{aligned} A'(t) = 0 &\Leftrightarrow 0.09t^2(t-7)^4 + 0.12t^3(t-7)^3 = 0 \Leftrightarrow t^2(t-7)^3(0.21t - 0.63) = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 0 \text{ ou } t = 3 \text{ ou } t = 7. \end{aligned}$$

Estudando a monotonia, verificamos que A é crescente entre 0 e 3, e decrescente entre 3 e 7. Concluímos pois, que o índice de poluição vai aumentando entre as 7 e as 10 horas da manhã diminuindo depois entre as 10 e as 14 horas.

APLICAÇÃO 3. Quando são despejados resíduos orgânicos numa lagoa, o processo de oxidação que se desencadeia reduz a quantidade de oxigénio presente na água. Contudo, passado algum tempo, a Natureza restaura o conteúdo de oxigénio para o seu nível natural.

Supondo que a quantidade de oxigénio na lagoa t dias após terem sido despejados resíduos orgânicos é dado por

$$f(t) = 100\left(\frac{t^2 - 4t + 4}{t^2 + 4}\right), \qquad t \in \,[0, +\infty[$$

porcento do seu nível normal,

(a) deduza uma expressão que dê a taxa de variação do nível de oxigénio na lagoa num instante t arbitrário;

(b) Quão rápida é a variação da quantidade de oxigénio na lagoa um dia após os resíduos terem sido despejados? E após três dias?

(a) A taxa de variação do nível de oxigénio na lagoa num instante arbitrário t é dado pela derivada da função,

$$f'(t) = 100\,\frac{(2t-4)(t^2+4)-(t^2-4t+4)2t}{(t^2+4)^2} = 100\,\frac{4t^2-16}{(t^2+4)^2} = \frac{400\,(t^2-4)}{(t^2+4)^2}.$$

(b) A taxa à qual a quantidade de oxigénio presente na lagoa está a variar um dia após o despejo de resíduos é dado por

$$f'(1) = \frac{400\,(1-4)}{(1+4)^2} = -48,$$

isto é, está a decrescer à razão de 48% por dia. Dois dias depois a taxa é

$$f'(2) = \frac{400\,(4-4)}{(4^2+4)^2} = 0,$$

ou seja, não aumenta nem diminui. Três dias depois

$$f'(3) = \frac{400\,(3^2-4)}{(3^2+4)^2} = 11.83,$$

ou seja, a taxa de oxigénio aumenta à razão de 11.83% por dia, e o processo de restauração iniciou-se.

Aplicação 4. O número de pulsações por minuto de um atleta de longas distâncias t segundos após a partida é dado por

$$P(t) = \frac{300\sqrt{\frac{1}{2}t^2+2t+25}}{t+25} \qquad (t \geq 0).$$

Determine P'. Qual a taxa de variação da pulsação do atleta 10 segundos após a partida? E 60 segundos após a partida? Qual a pulsação após 2 minutos de corrida?

A derivada de P é

$$\begin{aligned} P'(t) &= 300\frac{\left(\sqrt{\frac{1}{2}t^2+2t+25}\right)'(t+25)-\sqrt{\frac{1}{2}t^2+2t+25}}{(t+25)^2} \\ &= 150\frac{(t+2)(t+25)-2\left(\frac{1}{2}t^2+2t+25\right)}{(t+25)^2\sqrt{\frac{1}{2}t^2+2t+25}} \\ &= \frac{3450t}{(t+25)^2\sqrt{\frac{1}{2}t^2+2t+25}}. \end{aligned}$$

Calculando $P'(10)$ obtemos a taxa de variação da pulsação do atleta 10 segundos após a partida

$$P'(10) \approx 2.9 \text{ pulsações/min}^2$$

e passados 2 minutos a taxa de variação da pulsação é $P'(120) \approx 0.2$ pulsações/min^2.

A pulsação após 2 minutos de corrida é $P(120) \approx 179$ pulsações.

Aplicação 5. Quando alguém tosse, a traqueia contrai-se permitindo que o ar seja expelido a uma velocidade máxima. Pode mostrar-se que, durante o tossir, a velocidade v do fluxo de ar é dada pela função

$$v(r) = kr^2(R-r)$$

onde r é o raio da traqueia (em centímetros) durante o tossir, R é o raio normal da traqueia (em centímetros), e k é uma constante positiva que depende do comprimento da traqueia. Determine o raio r para o qual o fluxo de ar é máximo.

Para determinarmos o máximo absoluto de f em $]0,R]$ determinamos em primeiro lugar os pontos críticos de f em $]0,R[$. Calculamos,

$$v'(r) = 2kr(R-r) - kr^2 = -3kr^2 + 2kRr = kr(-3r+2R)$$

Fazendo $v'(r) = 0$, obtemos $r = 0$ ou $r = \frac{2}{3}R$; donde $r = \frac{2}{3}R$ é o único ponto crítico de v. Determinando o valor de v nas extremidades do intervalo e em $r = \frac{2}{3}R$, encontramos

$$v(0) = 0, \qquad v\left(\frac{2}{3}R\right) = \frac{4k}{27}R^3, \qquad v(r) = 0,$$

donde concluímos que a velocidade do fluxo de ar é máxima quando o raio da traqueia contraída é $\frac{2}{3}R$, isto é, quando a traqueia é contraída de aproximadamente 33%.

3.10 Exercícios e complementos

1. Escreva a equação da recta tangente ao gráfico de cada uma das funções no ponto dado.

   (a) $f(x) = 2x^2$, P= (1, 2) (b) $f(x) = \dfrac{3}{x}$, P= (1, 3) (c) $f(x) = \sqrt{x}$, P= (4, 2).

   Sol.: (a) $y = 4x - 2$; (b) $y = -3x + 6$; (c) $y = \frac{1}{4}\,x + 1$.

2. O declive da recta normal (ou perpendicular) ao gráfico da função f num ponto $(x_0,\, y_0)$ é dado por $m = -\frac{1}{f'(x_0)}$. Determine a equação de recta normal ao gráfico de cada uma das funções no ponto indicado.

   (a) $f(x) = 4x^3 - 3x^2, \quad x_0 = -1$ (b) $f(x) = \sqrt{3}\,x^4 - 2\sqrt{3}\,x^2, \quad x_0 = -\sqrt{3}$

   (c) $f(x) = -e^2x^2 - ex, \quad x_0 = 0.$

   Sol.: (a) $y = 2\,\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{tg}^2(x)\,\mathrm{sen}(x)$; (b) $y = \frac{1}{24}\,x + \frac{73}{24}\,\sqrt{3}$; (c) $y = \frac{1}{e}\,x$.

3. Determine as derivadas das funções indicadas.

   (a) $h(t) = \frac{1}{2}t^2 - 3t + 2$ (b) $f(x) = \frac{\mathrm{sen}^2(x)}{\cos(x)}$

   (c) $f(x) = x^2\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{3}) + \mathrm{tg}(\frac{\pi}{4})$ (d) $f(s) = s^3e^3 + 3e.$

   Sol.: (a) $t - 3$; (b) $2\,\mathrm{sen}(x) + \mathrm{tg}^2(x)\,\mathrm{sen}(x)$; (c) $\sqrt{3}\,x$; (d) $3\,s^2\,e^3$.

4. Calcule a derivada de

$$g(N) = rN(a - N)\Big(1 - \frac{N}{K}\Big)$$

   em ordem a N sendo r, a e K constantes positivas. (Obs.: Trata-se de aplicar a generalização da derivada do produto para três funções.)

   Sol.: $r\left(a - 2\,N\,\left(1 + \frac{a}{K}\right) + \frac{3\,N^2}{K}\right)$.

5. Assumindo que f é diferenciável, determine uma expressão para a derivada de y.

   (a) $y = 2xf(x)$ (b) $y = -5x^3f(x) - 2x$ (c) $y = \dfrac{f(x)}{x^2+1}$.

   Sol.: (a) $\frac{dy}{dx} = 2\,f(x) + 2x\,f'(x)$; (b) $\frac{dy}{dx} = -5x^2\,(3\,f(x) + x\,f'(x)) - 2$; (c) $\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+1)\,f'(x) - 2x\,f(x)}{(x^2+1)^2}$.

6. Assumindo que f e g são funções diferenciáveis, determine

   (a) $\dfrac{d}{dx}\sqrt{f(x) + g(x)}$ (b) $\dfrac{d}{dx}\dfrac{f(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \neq 0.$

Sol.: (a) $\frac{f'(x)+g'(x)}{2\sqrt{f(x)+g(x)}}$; (b) $\frac{f'(x)\,g(x)-2\,f(x)\,g'(x)}{g^3(x)}$.

7. Determine as derivadas das seguintes funções

(a) $f(x)=\dfrac{3x^3+2x-1}{5x^2-2x+1}$ (b) $f(x)=\sqrt{x}\,(x^4-5x^2)$ (c) $g(s)=\dfrac{s^{1/3}-1}{s^{2/3}-1}$.

(d) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{1+\sqrt{x^2+1}}$ (e) $f(t)=\left(\dfrac{t}{t-3}\right)^3$ (f) $f(x)=\sqrt[4]{2-4x^2}$.

Sol.: (a) $\frac{x\left(15\,x^3-12\,x^2-x+10\right)}{\left(5\,x^2-2\,x+1\right)^2}$; (b) $\frac{1}{2}\,x^{3/2}\left(9\,x^2-25\right)$; (c) $-\frac{1}{3\left(\sqrt[3]{s}+1\right)^2 s^{2/3}}$;
(d) $\frac{x\left(\sqrt{x^2+1}+2\right)}{\sqrt{x^2-1}\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)^2\sqrt{x^2+1}}$; (e) $-\frac{9t^2}{(t-3)^4}$; (f) $-\frac{2x}{(2-4\,x^2)^{3/4}}$.

8. Aplique a regra da cadeia para determinar $\frac{dy}{dx}$.

(a) $y=\left(\sqrt{1-x^2}+2\right)^2$ (b) $y=\left(1+(3x^2-1)^3\right)^2$ (c) $y=\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{3x^2-3}}\right)^3$

Sol.: (a) $-\frac{2x\left(\sqrt{1-x^2}+2\right)}{\sqrt{1-x^2}}$; (b) $162x^2\left(27\,x^3+1\right)$; (c) $-\frac{x+1}{\sqrt{3\,x^2-3}\,(x-1)^2}$.

9. Aplique as derivadas das funções trigonométricas para determinar $\frac{df}{dx}$ sendo:

(a) $f(x)=\sqrt{\operatorname{sen}(2x^2-1)}$ (b) $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(2t)+1}{\cos(6t)-1}$ (c) $f(x)=\dfrac{\sec(x^2-1)}{\operatorname{cosec}(x^2+1)}$

(d) $f(x)=\operatorname{sen}(2x-1)\,\cos(3x+1)$ (e) $f(x)=\sec\dfrac{1}{1+x}$ (f) $f(x)=\dfrac{\operatorname{cosec}(3-x^2)}{1-x^2}$.

Apresente os resultados envolvendo apenas as funções seno e coseno.

Sol.: (a) $\frac{2x\,\cos\left(2\,x^2-1\right)}{\sqrt{\operatorname{sen}(2\,x^2-1)}}$; (b) $\frac{2\,\cos(2\,t)}{\cos(6\,t)-1}+\frac{6\,(\operatorname{sen}(2\,t)+1)\operatorname{sen}(6\,t)}{(\cos(6\,t)-1)^2}$;
(c) $\frac{2x\left(\operatorname{sen}\left(x^2-1\right)\operatorname{sen}\left(x^2+1\right)+\cos\left(x^2+1\right)\,\cos\left(x^2-1\right)\right)}{(\cos(x^2-1))^2}$;
(d) $2\,\cos\left(2\,x-1\right)\cos\left(3\,x+1\right)-3\operatorname{sen}\left(2\,x-1\right)\operatorname{sen}\left(3\,x+1\right)$;
(e) $-\frac{\operatorname{sen}\left((x+1)^{-1}\right)}{(x+1)^2\left(\cos\left((x+1)^{-1}\right)\right)^2}$; (f) $\frac{2x\left(\cos\left(x^2-3\right)x^2-\cos\left(x^2-3\right)+\operatorname{sen}\left(x^2-3\right)\right)}{\left(-1+(\cos(x^2-3))^2\right)(x^2-1)^2}$.

10. Aplique a regra de derivação da função logarítmica para determinar $\frac{df}{dx}$ sendo:

(a) $f(x)=x^2\,\ln(x^3)$ (b) $f(x)=\ln(1+x^2)$ (c) $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

(d) $f(x)=e^x\,\ln(x)+\ln(3)$ (e) $f(x)=\ln(\ln(x))$ (f) $f(x)=\ln(1+e^{-x})$

Sol.: (a) $3x\,(2\ln(x)+1)$; (b) $\dfrac{2x}{1+x^2}$; (c) $\dfrac{2}{1-x^2}$; (d) $e^x\,\ln(x)+\frac{e^x}{x}$; (e) $\frac{1}{x\,\ln(x)}$; (f) $-\frac{1}{e^x+1}$.

11. Determine a derivada de cada uma das seguintes funções

(a) $f(x) = (\ln x^2)^2$ (b) $f(x) = \ln \dfrac{2x}{1+x^2}$ (c) $f(x) = \ln(\operatorname{sen}^2(3x))$

Sol.: (a) $\frac{4\ln(x^2)}{x}$; (b) $\frac{1-x^2}{x(1+x^2)}$; (c) $\frac{6\cos(3x)}{\operatorname{sen}(3x)}$.

12. Determine as derivadas de primeira e segunda ordem.

(a) $f(x) = (x^2-3)^5$ (b) $f(s) = \sqrt{s^{3/2}-1}$ (c) $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^3}$.

Sol.: (a) $10x\left(x^2-3\right)^4$; $30\left(3x^2-1\right)\left(x^2-3\right)^3$;
(b) $\frac{3\sqrt{s}}{4\sqrt{s^{3/2}-1}}$; $-\frac{3\left(s^{3/2}+2\right)}{16\left(s^{3/2}-1\right)^{3/2}\sqrt{s}}$; (c) $\frac{3\left(x^6+1\right)}{x^4}$; $\frac{6\left(x^6-2\right)}{x^5}$.

13. Averigue se a função f dada é invertível no conjunto indicado e, em caso afirmativo, determine a derivada da sua inversa, $(f^{-1})'$.

(a) $f(x) = \sqrt{x-1}$, $x \geq 1$ (b) $f(x) = x^2 - 2$, $x \geq 0$.

Sol.: (a) $2\sqrt{x-1}$.

14. Seja $f(x) = x + e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Determine $\frac{df^{-1}}{dx}(1)$. (Observe que $f(0) = 1$.)

15. Determine $\frac{dy}{dx}$ aplicando derivação implícita.

(a) $y = x^2 + xy$ (b) $xy - y^3 = 1$ (c) $\sqrt{xy} = x^2 + 1$.

Sol.: (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+y}{1-x}$.

16. Determine $\frac{dy}{dx}$ no ponto $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4})$ da curva de equação $y^2 = x^2 - x^4$ (Figura 3.13).

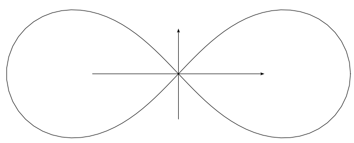


Figura 3.13: *Lemniscata de Bernoulli*

17. Aplique a derivação logarítmica para determinar as derivadas das funções seguintes

(a) $f(x) = 3^x$ (b) $f(x) = (1+\sqrt{e})^x$ (c) $f(x) = 4^{x^2}$ (d) $f(x) = \dfrac{3^x + 4^x}{5^x}$.

Sol.: (a) $3^x \ln(3)$; (b) $(1+\sqrt{e})^x \ln(1+\sqrt{e})$; (c) $2^{2+2x^2} x \ln(2)$; (d) $\left(\frac{3}{5}\right)^x \ln(\frac{3}{5}) + \left(\frac{4}{5}\right)^x \ln\left(\frac{4}{5}\right)$.

18. Utilize o método dos incrementos para encontrar uma estimativa da expressão.

    (a) $\operatorname{sen}(0.02)$ (b) $\sqrt[3]{8.15^2}$ (c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4.21^2}}$

    Sol.: (a) 0.02; (b) 4.05; (c) 0.1152.

19. Determine os intervalos de monotonia da função $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

20. Determine os extremos de $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + 1$.

    Sol.: f tem mínimos locais em -1 e 1 e tem um máximo local na origem.

21. Aplique o teorema de Fermat para localizar todos os candidatos a extremos das funções:

    (a) $f(x) = 2x^2 - 24x + 36$ (b) $f(x) = x - \ln(x)$

    Sol.: (a) 6; (b) 1.

22. Determine um valor de c cuja existência é garantida pelo teorema de Lagrange aplicado à função f no intervalo I indicado.

    (a) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$, $I = [2, 4]$ (b) $f(x) = x^3 + 3x - 1$, $I = [1, 5]$.

23. Mostre que a equação $x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$ tem exactamente uma raiz real.

24. Aplique as regras adequadas para determinar os seguintes limites

    (a) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\operatorname{sen}(x))}{(\pi - 2x)^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{\cos(x+1) - 1}{x^3 + x^2 - x - 1}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x - \sqrt{x}}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\operatorname{sen}(\frac{1}{x})}$.

    Sol.: (a) $-\frac{1}{8}$; (b) $\frac{1}{4}$; (c) 2; (d) 1.

25. Faça o estudo da função $\frac{x}{x-1}$ e esboce o seu gráfico.

26. O número de bactérias $N(t)$ numa determinada cultura t minutos após a introdução experimental de um bactericida obedece à seguinte regra

    $$N(t) = \frac{10000}{1 + t^2} + 2000.$$

    Determine a taxa de variação do número de bactérias na cultura 1 e 2 minutos após a introdução do bactericida. Qual a população de bactérias na cultura 1 minuto após a aplicação do bactericida? E 2 minutos depois?

Capítulo 4

Cálculo integral e aplicações

4.1 Primitivas

Um físico conhecendo a velocidade de uma partícula pode querer saber a sua posição. Um engenheiro medindo a taxa de escoamento da água de um tanque pode querer determinar a quantidade escoada após um certo intervalo de tempo. Um biólogo que sabe a taxa à qual uma população de bactérias aumenta pode querer deduzir o tamanho da população num instante futuro. Em todos estes casos, o problema consiste em determinar uma função F cuja derivada é uma função conhecida f.

Seja f uma função definida num intervalo aberto I. Se F é uma função diferenciável tal que $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in I$, então diz-se que F é uma primitiva de f em I.

É possível que f tenha mais do que uma primitiva. Na verdade, se F tem derivada f e se C é uma constante arbitrária, então $(F + C)'$ também é igual a f,

$$(F + C)' = F' + C' = F' = f,$$

pois a derivada de uma constante é 0. Assim, todas as primitivas de f diferem de F por uma constante.

Exemplo 4.1. *Se for $f(x) = \cos(x)$, então $F(x) = \operatorname{sen}(x)$ é uma primitiva de f (em qualquer intervalo) porque $(\operatorname{sen}(x))' = \cos(x)$. Uma outra primitiva da função f é a função $G(x) = \operatorname{sen}(x) + 3$. Naturalmente, qualquer função $H(x) = \operatorname{sen}(x) + C$, com C constante, é também primitiva de f.*

Temos as duas seguintes propriedades da primitivação. Se f e g são primitiváveis em I, $f + g$ é primitivável em I e obtém-se uma primitiva de $f + g$ somando uma primitiva de f com uma primitiva de g,

$$\mathrm{P}(f+g)(x) = (\mathrm{P}f)(x) + (\mathrm{P}g)(x), \quad \forall x \in I. \tag{4.1}$$

Por outro lado, se f é primitivável em I e k é uma constante, kf é primitivável em I e, tem-se

$$\mathrm{P}(kf)(x) = k\,(\mathrm{P}f)(x), \quad \forall x \in I. \tag{4.2}$$

Em geral, se $f_1, \ldots, f_n$ são n funções primitiváveis em I e $k_1, \ldots, k_n$ são n constantes, então qualquer combinação linear $k_1 f_1 + \cdots + k_n f_n$ é primitivável em I e, tem-se

$$\mathrm{P}(k_1 f_1 + \cdots + k_n f_n)(x) = k_1\,(\mathrm{P}f_1)(x) + \cdots + k_n\,(\mathrm{P}f_n)(x).$$

Representamos a colecção de todas as primitivas de f por

$$\int f(x)\,dx.$$

Esta expressão é designada por integral indefinido de f e escrevemos

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C}$$

onde C é uma constante arbitrária, designada por constante de integração.

As propriedades (4.1) e (4.2) reescrevem-se como

$$\int \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx \tag{4.1.a}$$

$$\int \big(k\,f(x)\big)\,dx = k \int f(x)\,dx. \tag{4.2.a}$$

Designamos por primitivas imediatas aquelas que resultam directamente ou através de transformações algébricas, da inversão de uma fórmula de derivação.

Na página seguinte indicamos uma tabela com algumas dessas primitivas.

Exemplo 4.2. *Resolução de alguns integrais indefinidos:*

(a)
$$\begin{aligned}\int (2x+3)\,dx &= \int 2x\,dx + \int 3\,dx, \quad \text{aplicando a propriedade (4.1)}\\ &= 2\int x\,dx + 3\int dx, \quad \text{aplicando a propriedade (4.2)}\\ &= x^2 + 3x + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle \int \frac{e^x}{5}\,dx = \frac{1}{5}\int e^x\,dx$

$\displaystyle = \frac{1}{5}\,e^x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

(c) $\displaystyle \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg}(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

(d) $\displaystyle \int \frac{\sec(x)+\cos(x)}{\cos(x)}\,dx = \int \left(\frac{\sec(x)}{\cos(x)} + 1\right) dx$

$\displaystyle = \int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx + \int dx,$ aplicando a propriedade (4.1)

$\displaystyle = \int \sec^2(x)\,dx + \int dx$

$\displaystyle = \operatorname{tg}(x) + x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

Exemplo 4.3. *Toda a função polinomial $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ é primitivável em $\mathbb{R}$ e as suas primitivas são os polinómios da forma*

$$y(x) = a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + C.$$

Exercício 4.1. *Determine uma primitiva de $f(x) = 5x^7 - x^4 + 4x^3 + 9x^2 - 6x + 5$.*

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$	$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$-\dfrac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}$	$\operatorname{cosec}(x) + C$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert) + C$	$\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)}$	$\sec(x) + C$
e^x	$e^x + C$	$-\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}$	$\operatorname{cotg}(x) + C$
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln(a)} + C$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcsen}(x) + C$
$\operatorname{sen}(x)$	$-\cos(x) + C$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x) + C$
$\cos(x)$	$\operatorname{sen}(x) + C$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg}(x) + C$
$\sec^2(x)$	$\operatorname{tg}(x) + C$		

Exemplo 4.4. *Determine $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)}\,dx$.*

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)}\,dx &= \int \frac{\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x)}{\operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)}\,dx \\
&= \int \left(\frac{1}{\cos^2(x)} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}\right) dx \\
&= \int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx + \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}\,dx, \quad \text{aplicando a propriedade (4.1)} \\
&= \operatorname{tg}(x) - \operatorname{cotg}(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Exemplo 4.5. *Em cada ponto de uma curva $y = f(x)$, sabemos que $y'' = x^2 - 1$. Escreva a função f, sabendo que o seu gráfico passa pelo ponto $(1,1)$ e é tangente à recta $x + 12y = 13$, nesse ponto.*

Sendo $f''(x) = x^2 - 1$, por primitivação obtemos $f'(x) = \frac{x^3}{3} - x + C$, $C \in \mathbb{R}$. Logo, $f'(1) = -\frac{2}{3} + C$ é o valor do declive da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.
Visto que pretendemos que a tangente no ponto $(1,1)$ seja a recta $x + 12y = 13$, nesse ponto o declive da recta terá de ser igual a $f'(1)$, ou seja,

$$x + 12y = 13 \quad \Leftrightarrow \quad 12y = -x + 13 \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{1}{12}x + \frac{13}{12}$$

o declive é igual a $-\frac{1}{12}$ donde

$$-\frac{2}{3} + C = -\frac{1}{12} \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{7}{12}.$$

Assim, a função derivada é

$$f'(x) = \frac{x^3}{3} - x + \frac{7}{12}.$$

que primitivando, dá

$$f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2} + \frac{7}{12}x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

A constante C, atendendo a que o ponto $(1,1)$ pertence ao gráfico, isto é, $f(1) = 1$, é dada por,

$$\frac{1}{12} - \frac{1}{2} + \frac{7}{12} + C = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{5}{6}.$$

Portanto, a função pretendida é definida por

$$f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2} + \frac{7}{12}x + \frac{5}{6} \qquad \text{ou,} \qquad f(x) = \frac{1}{12}\,(x^4 - 6x^2 + 7x + 10).$$

4.1.1 Primitivação por partes

Na maior parte dos casos, as funções para as quais pretendemos determinar uma primitiva não admitem uma primitiva imediata. Assim, somos obrigados a recorrer a métodos adequados ao tipo de função. O primeiro método que vamos estudar designa-se primitivação por partes e baseia-se no resultado seguinte. Se u e v são funções diferenciáveis em I, o produto $u'v$ é primitivável em I se e só se o produto uv' o for, e tem-se

$$\boxed{\mathrm{P}(u'v) = uv - \mathrm{P}(uv').} \tag{4.3}$$

De facto, se u e v são funções diferenciáveis, $(uv)' = u'v + uv'$. Primitivando ambos os membros, obtemos $uv = \mathrm{P}(u'v) + \mathrm{P}(uv')$ donde retiramos (4.3). Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 4.6. *Determine* $\mathrm{P}(x\,\mathrm{sen}(x))$.

Escolhendo $u' = \mathrm{sen}(x)$ e $v = x$, teremos $u = -\cos(x)$ e $v' = 1$; logo,

$$\mathrm{P}(x\,\mathrm{sen}(x)) = -x\,\cos(x) - \mathrm{P}(-\cos(x)) = -x\,\cos(x) + \mathrm{sen}(x).$$

Exemplo 4.7. *Determine* $\mathrm{P}(\ln(x))$.

Neste caso, utilizamos o seguinte artifício

$$\mathrm{P}(\ln(x)) = \mathrm{P}(1 \times \ln(x))$$

e, fazendo $u' = 1$ e $v = \ln(x)$, tem-se

$$\left.\begin{array}{rcr} u' = 1 & \longrightarrow & u = x \\ v = \ln(x) & \longrightarrow & v' = \frac{1}{x} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P}(uv') = \mathrm{P}(1) = x.$$

Portanto, $\mathrm{P}(\ln(x)) = x\ln(x) - x$, em $I =]\,0, +\infty[$.

No exemplo seguinte vamos obter uma fórmula de recorrência que permite calcular a primitiva de $\cos^n(x)$, para $n \geq 2$. De forma análoga podemos encontrar uma expressão para a primitiva da potência de grau n de $\mathrm{sen}(x)$ (Exercício 4.2).

Exemplo 4.8. *Determine* $\mathrm{P}(\cos^n(x))$ *para* $n \in \mathbb{N}$ *e* $n \geq 2$.

Temos que

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\cos^n(x)) &= \mathrm{P}(\underbrace{\cos^{n-1}(x)}_{v} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{u'}) \\ &= \mathrm{sen}(x) \cdot \cos^{n-1}(x) + \mathrm{P}\big((n-1)\cos^{n-2}(x) \cdot \mathrm{sen}^2(x)\big). \end{aligned}$$

Fazendo, $u' = \cos(x) \longrightarrow u = \mathrm{sen}(x)$

$v = \cos^{n-1}(x) \longrightarrow v' = (n-1)\cos^{n-2}(x)\,(-\mathrm{sen}(x))$

vem,

$$\begin{aligned}
& \mathrm{P}(\cos^n(x)) = \mathrm{sen}(x)\cos^{n-1}(x) + (n-1)\,\mathrm{P}\big(\cos^{n-2}(x)\,(1-\cos^2(x))\big) \\
\Leftrightarrow\quad & \mathrm{P}(\cos^n(x)) = \mathrm{sen}(x)\cos^{n-1}(x) + (n-1)\,\mathrm{P}(\cos^{n-2}(x)) - (n-1)\,\mathrm{P}(\cos^n(x)) \\
\Leftrightarrow\quad & \mathrm{P}(\cos^n(x)) + (n-1)\,\mathrm{P}(\cos^n(x)) = \mathrm{sen}(x)\cos^{n-1}(x) + (n-1)\,\mathrm{P}(\cos^{n-2}(x)) \\
\Leftrightarrow\quad & n\,\mathrm{P}(\cos^n(x)) = \mathrm{sen}(x)\cos^{n-1}(x) + (n-1)\,\mathrm{P}(\cos^{n-2}(x))
\end{aligned}$$

e, resolvendo esta equação em ordem a $\mathrm{P}(\cos^n(x))$, obtemos

$$\mathrm{P}(\cos^n(x)) = \frac{1}{n}\,\mathrm{sen}(x)\cos^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n}\,\mathrm{P}(\cos^{n-2}(x)), \quad \text{em } I = \mathbb{R}.$$

Em particular, considerando $n = 2$, vem

$$\mathrm{P}(\cos^2(x)) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(x)\cos(x) + \frac{1}{2}\,\mathrm{P}(1) = \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(2x) + \frac{x}{2}.$$

Exercício 4.2. *Determine* $\mathrm{P}(\mathrm{sen}^n(x))$ *para* $n \in \mathbb{N}$ *e* $n \geq 2$.

Exemplo 4.9. *Determine* $\int x\,e^{2x}\,dx$.

Fazendo, $u' = e^{2x} \longrightarrow u = \frac{1}{2}\,e^{2x}$

$v = x \longrightarrow v' = 1,$

vem,

$$\begin{aligned}
\int x\,e^{2x}\,dx &= \frac{1}{2}\,e^{2x}\,x - \int \frac{1}{2}\,e^{2x}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\,x\,e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx \\
&= \frac{1}{2}\,x\,e^{2x} - \frac{1}{4}\,e^{2x} \\
&= \frac{1}{4}\,(2x-1)\,e^{2x}.
\end{aligned}$$

4.1.2 Primitivação por substituição

Se a função a primitivar puder ser escrita na forma $f(g(x))\,g'(x)$, podemos aplicar um outro método designado por **método de primitivação por substituição**. Observemos que se, $F' = f$, então

$$\int F'(g(x))\,g'(x)\,dx = F(g(x)) + C \tag{4.4}$$

pois, pela regra da cadeia,

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))\, g'(x).$$

Fazendo a **mudança de variável** ou **substituição** $u = g(x)$, então de (5.1) teremos

$$\int F'(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x)) + C = F(u) + C = \int F'(u)\, du$$

ou, escrevendo $F' = f$, obtemos

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(u)\, du.$$

Obtemos deste modo o seguinte resultado:

Se $u = g(x)$ é uma função diferenciável cujo contradomínio é um intervalo I e se f é contínua em I, então

$$\boxed{\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(u)\, du.}$$

Observemos que, se $u = g(x)$ então $du = g'(x)\, dx$, de modo que podemos interpretar dx e du como diferenciais.

Exemplo 4.10. *Aplique o método de substituição para determinar* $\int 2x\, \cos(x^2+1)\, dx$.

A função $g(x) = x^2 + 1$ e a sua derivada $g'(x) = 2x$ aparecem ambas no integral. Vamos então considerar a mudança de variável $u = g(x)$, ou seja, $u = x^2 + 1$. Como $du = g'(x)\, dx$, virá $du = 2x\, dx$ e podemos escrever o integral na variável u. Por fim, recuperamos a variável x,

$$\int 2x\, \cos(x^2+1)\, dx = \int \cos(u)\, du = \operatorname{sen}(u) + C = \operatorname{sen}(x^2+1) + C.$$

A ideia subjacente ao método de substituição é substituir um integral relativamente complicado por um outro mais simples. Tal é conseguido mudando a variável inicial x por uma nova variável. A principal dificuldade neste método reside na escolha da substituição adequada. Vamos ver mais alguns exemplos.

Exemplo 4.11. *Para calcularmos* $\int \sqrt{2x+1}\, dx$ *vamos considerar,*

$$u = 2x+1, \qquad du = 2\, dx \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2}\, du.$$

Assim,

$$\int \sqrt{2x+1}\, dx = \int \sqrt{u}\, \frac{1}{2}\, du = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\, du = \frac{1}{2}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}\sqrt{(2x+1)^3} + C.$$

Exemplo 4.12. *Determine* $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$.

Consideramos a seguinte mudança de variável

$$u = 1 - 4x^2, \qquad du = -8x\,dx \Leftrightarrow x\,dx = -\frac{1}{8}\,du.$$

Então,

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = -\frac{1}{8}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = -\frac{1}{8}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du = -\frac{1}{8}\,(2\sqrt{u}) + C = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + C.$$

Exemplo 4.13. *Determine* $\int \operatorname{tg}(x)\,dx$.

$$\int \operatorname{tg}(x)\,dx = \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\,dx.$$

Considerando a mudança de variável

$$u = \cos(x), \qquad du = -\operatorname{sen}(x)\,dx \Leftrightarrow \operatorname{sen}(x)\,dx = -du,$$

obtemos

$$\int \operatorname{tg}(x)\,dx = \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\,dx = -\int \frac{1}{u}\,du = -\ln(|u|) + C = -\ln(|\cos(x)|) + C = \ln(|\sec(x)|) + C.$$

Podemos sistematizar as seguintes etapas na resolução pelo método de substituição:

1. Encontrar uma expressão $g(x)$ no integrando tal que a derivada $g'(x)$ também apareça no integrando;
2. Substituir $g(x)$ por u e $g'(x)\,dx$ por du de forma que o integrando venha expresso apenas em termos de u;
3. Determinar o novo integral de modo a obtermos o resultado expresso em termos de u;
4. Recuperar a expressão em termos da variável x através de substituição.

Exercício 4.3. *Determine o integral indefinido* $\int \operatorname{sen}^4(x)\cos(x)\,dx$ *(Sugestão: use a mudança de variável* $u = \operatorname{sen}(x)$*).*

4.1.3 Primitivação de funções racionais

Veremos agora como integrar funções racionais, isto é, funções que são o quociente de polinómios,

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Se o grau do polinómio do numerador é igual ou superior ao grau do polinómio do denominador efectuamos, em primeiro lugar, a divisão dos dois polinómios. Para uma função racional em que o grau do numerador é inferior ao do denominador, a ideia base consiste em escrever a função como a soma de dois ou mais termos que sabemos como integrar. Este procedimento é designado por **método das fracções parciais.**

A forma que esses termos mais simples podem adquirir será, por exemplo,

$$\frac{A}{x-a} \qquad \text{ou,} \qquad \frac{A}{(x-a)^m}$$

onde a e A são constantes reais e m é um número inteiro maior que 1.

De facto, por primitivação, obtemos respectivamente,

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\int \frac{1}{x-a}\,dx = A\,\ln(|x-a|)+C \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{A}{(x-a)^m}\,dx &= A\int \frac{1}{(x-a)^m}\,dx\\ &= A\int (x-a)^{-m}\,dx\\ &= A\,\frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1}+C\\ &= -\frac{A}{m-1}\,\frac{1}{(x-a)^{m-1}}+C.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Método das fracções parciais com factores lineares distintos

No primeiro caso que vamos estudar, o numerador é um polinómio de grau inferior ao do denominador e o polinómio no denominador está factorizado em factores lineares distintos.

Exemplo 4.14. *Determine* $\displaystyle\int \frac{3}{(x-1)(x+2)}\,dx.$

A ideia é aplicar o método das fracções parciais para reescrever o integrando como a soma de duas fracções

$$\frac{3}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}$$

onde A e B são constantes que teremos de determinar.

Reduzindo ao mesmo denominador

$$\frac{3}{(x-1)(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

para que a igualdade seja verdadeira é necessário que os numeradores sejam iguais, ou seja,

$$3 = A(x+2) + B(x-1). \tag{4.7}$$

Reorganizamos a equação (4.7) de forma a mais facilmente identificarmos os coeficientes correspondentes, em cada um dos polinómios,

$$0x + 3 = (A+B)x + (2A-B),$$

e, para dois polinómios serem iguais, os coeficientes dos termos semelhantes têm de ser iguais. Assim,

$$\begin{cases} 0 = A+B \\ 3 = 2A-B. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema de equações, encontramos $A = 1$ e $B = -1$.
Logo,

$$\begin{aligned} \int \frac{3}{(x-1)(x+2)}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+2}\right) dx \\ &= \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x+2}\,dx \\ &= \ln(|x-1|) - \ln(|x+2|) + C \\ &= \ln\left(\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\right) + C. \end{aligned}$$

O cálculo da primitiva do exemplo 4.14 segue o procedimento que a seguir apresentamos.

Para primitivarmos uma função da forma

$$\frac{P(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_k)}$$

onde P é um polinómio e os a_i são números reais distintos, seguimos os passos seguintes:

1. Garantir que o grau do polinómio P é menor que o grau do polinómio do denominador; caso não seja, efectuamos a divisão do numerador pelo denominador;

2. Decompôr a função na forma

$$\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\cdots+\frac{A_k}{x-a_k}$$

e resolver de forma a determinarmos os numeradores $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

3. Aplicar a primeira das fórmulas de primitivação (4.5).

Exemplo 4.15. Método de Heaviside

Determine $\int \frac{3x^2+x-1}{x\,(x-3)\,(x+2)}\,dx.$

Quando no denominador temos factores lineares distintos, podemos aplicar o método de Heaviside como alternativa ao método dos coeficientes indeterminados.
Pretendemos determinar as constantes A. B e C de modo que

$$\frac{3x^2+x-1}{x\,(x-3)\,(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x+2} \tag{4.8}$$

Para determinarmos A, multiplicamos ambos os membros da equação (4.8) por x,

$$\frac{3x^2+x-1}{(x-3)\,(x+2)}=+x\left(\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x+2}\right).$$

Substituindo nesta equação x por 0, obtemos

$$A=\frac{-1}{-6}=\frac{1}{6}.$$

Para determinarmos B, multiplicamos ambos os membros da equação (4.8) por $x-3$,

$$\frac{3x^2+x-1}{x\,(x+2)}=B+(x-3)\left(\frac{A}{x}+\frac{C}{x+2}\right).$$

Substituindo nesta equação x por 3, obtemos

$$B=\frac{27+3-1}{15}=\frac{29}{15}.$$

Para determinarmos C, multiplicamos ambos os membros da equação (4.8) por $x+2$,

$$\frac{3x^2+x-1}{x\,(x-3)}=C+(x+2)\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}\right).$$

Substituindo nesta equação x por -2, obtemos

$$B=\frac{12-2-1}{10}=\frac{9}{10}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2+x-1}{x\,(x-3)\,(x+2)}\,dx &= \frac{1}{6}\int \frac{1}{x}\,dx+\frac{29}{15}\int \frac{1}{x-3}\,dx+\frac{9}{10}\int \frac{1}{x+2}\,dx\\ &= \frac{1}{6}\,\ln(|x|)+\frac{29}{15}\,\ln(|x-3|)+\frac{9}{10}\,\ln(|x+2|)+C.\end{aligned}$$

MÉTODO DAS FRACÇÕES PARCIAIS COM FACTORES LINEARES REPETIDOS

Vamos observar o seguinte exemplo.

EXEMPLO 4.16. *Determine* $\displaystyle\int \frac{5x^2+18x-1}{(x+4)^2(x-3)}\,dx.$

Temos de decompôr o integrando sob a forma

$$\frac{5x^2+18x-1}{(x+4)^2(x-3)} = \frac{A_1}{x+4} + \frac{A_2}{(x+4)^2} + \frac{B}{x-3}.$$

Reduzindo ao mesmo denominador e igualando os numeradores, obtemos

$$5x^2+18x-1 = (A_1+B)\,x^2 + (A_1+A_2+8B)\,x + (-12A_1-3A_2+16B)$$

donde, igualando os coeficientes dos termos semelhantes correspondentes,

$$\begin{cases} A_1+B=5 \\ A_1+A_2+8B=18 \\ -12A_1-3A_2+16B=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} A_1=3 \\ A_2=-1 \\ B=2 \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int \frac{5x^2+18x-1}{(x+4)^2(x-3)}\,dx &= \int \frac{3}{x+4}\,dx + \int \frac{-1}{(x+4)^2}\,dx + \int \frac{2}{x-3}\,dx \\ &= 3\,\ln(|x+4|) - \frac{1}{x+4} + 2\,\ln(|x-3|) + C.\end{aligned}$$

Mais genericamente, consideremos a função racional

$$\frac{P(x)}{(x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}\cdots(x-a_k)^{m_k}}$$

onde P é um polinómio, os a_i são números reais distintos e os m_i são números inteiros positivos (eventualmente maiores que 1). Para primitivarmos uma função deste tipo, seguimos os passos seguintes:

1. Garantir que o grau do polinómio P é menor que o grau do polinómio do denominador; caso não seja, efectuamos a divisão do numerador pelo denominador;

2. Para cada um dos factores $(x-a_j)^{m_j}$ no denominador da função racional, a decomposição em fracções parciais terá de conter termos da forma

$$\frac{A_1}{(x-a_j)} + \frac{A_2}{(x-a_j)^2} + \cdots + \frac{A_{m_j}}{(x-a_j)^{m_j}}.$$

3. Aplicar as fórmulas de primitivação (4.5).

Método das fracções parciais com factores quadráticos irredutíveis

Para primitivarmos funções racionais com factores quadráticos irredutíveis no denominador procedemos do sequinte modo. Consideremos a função racional

$$\frac{P(x)}{(x^2+b_1x+c_1)^{n_1}\cdots(x^2+b_Lx+c_L)^{n_L}}$$

onde P é um polinómio, b_i, c_i são números reais distintos e os n_i são números inteiros positivos (eventualmente maiores que 1). Para primitivarmos uma função deste tipo, seguimos os três passos seguintes:

1. Garantir que o grau do polinómio P é menor que o grau do polinómio do denominador; caso não seja, efectuamos a divisão do numerador pelo denominador;

2. Garantir que os factores quadráticos $x^2+b_jx+c_j$ não podem ser factorizados em factores lineares com coeficientes reais. Para tal verificar que $b_j^2-4c_j<0$.

3. Para cada um dos factores $(x^2+b_jx+c_j)^{n_j}$ no denominador da função racional, a decomposição em fracções parciais terá de conter termos da forma

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+b_jx+c_j}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+b_jx+c_j)^2}+\cdots+\frac{B_{n_j}x+C_{n_j}}{(x^2+b_jx+c_j)^{n_j}}.$$

Se o grau do polinómio P do numerador for 1 e o denominador um polinómio na forma Ax^2+Bx+C, não factorizável, reescrevemos o numerador sob a forma de um múltiplo de $2Ax+B$ adicionado de uma constante K. Seguidamente,

- primitivamos a expressão
$$\frac{2Ax+B}{Ax^2+Bx+C}$$
através da substituição $u=Ax^2+Bx+C$, $du=(2Ax+B)\,dx$, e

- primitivamos a expressão
$$\frac{K}{Ax^2+Bx+C}$$
através de completamento do quadrado no denominador.

Exemplo 4.17. *Determine* $\displaystyle\int \frac{2x^3-8x^2+20x-5}{x^2-4x+8}\,dx.$

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^3-8x^2+20x-5}{x^2-4x+8}\,dx &= \int \left(2x+\frac{4x-5}{x^2-4x+8}\right)dx && (4.9)\\
&= \int 2x\,dx + \int \frac{4x-5}{x^2-4x+8}\,dx && (4.10)\\
&= 2\int x\,dx + \int \frac{2\,(2x-4)+3}{x^2-4x+8}\,dx && (4.11)\\
&= 2\int x\,dx + 2\int \frac{2x-4}{x^2-4x+8}\,dx + 3\int \frac{1}{x^2-4x+8} && (4.12)\\
&= x^2 + 2\ln(|x^2-4x+8|) + \frac{3}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{x-2}{2}\right) + C. && (4.13)
\end{aligned}$$

Obtemos (4.9) efectuando a divisão de $2x^3-8x^2+20x-5$ por x^2-4x+8.

Em (4.10), aplicámos a propriedade da aditividade do integral.

De modo a obtermos no numerador um termo envolvendo a derivada do denominador $(2x-4)$ escrevemos a equação $m\,(2x-4)+k=4x-5$, introduzindo as variáveis m e k. Aplicando o método dos coeficientes indeterminados, obtemos

$$m\,(2x-4)+k=4x-5 \quad\Leftrightarrow\quad 2mx-4m+k=4x-5$$

e, resolvendo o sistema

$$\begin{cases} 2m=4\\ -4m+k=-5 \end{cases}$$

obtemos $m=2$ e $k=3$ donde resulta (4.11).

Novamente pelas propriedades do integral obtemos (4.12).

Calculamos o segundo integral em (4.12) através da mudança de variável $u=x^2-4x+8$,

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x-4}{x^2-4x+8}\,dx &= \int \frac{1}{u}\,du\\
&= \ln(|u|)+C\\
&= \ln(|x^2-4x+8|)+C. && (4.14)
\end{aligned}$$

Resolvemos o terceiro integral em (4.12)

$$\int \frac{1}{x^2-4x+8}\,dx = \int \frac{1}{(x^2-4x+2^2)+4}\,dx \tag{4.15}$$
$$= \int \frac{1}{(x-2)^2+4}\,dx$$
$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2+1}\,dx \tag{4.16}$$
$$= \frac{1}{4}\int \frac{2}{u^2+1}\,du$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+1}\,du$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(u)+C$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-2}{2}\right)+C. \tag{4.17}$$

efectuando o completamento do quadrado no denominador (4.15) e, através da mudança de variável $u=\frac{x-2}{2}$ em (4.16), obtemos (4.17). Calculando o primeiro integral de (4.12) e substituindo (4.14) e (4.17) obtemos (4.13).

4.2 O integral definido

Comecemos por tentar resolver um problema de cálculo de áreas: determinar a área da região S delimitada pelo eixo dos xx, pelo gráfico da função contínua f e pelas rectas verticais $x=a$ e $x=b$ (figura 4.1).

Para regiões delimitadas por segmentos de recta, o cálculo da área reduz-se ao cálculo de áreas de figuras geométricas mais simples como triângulos e rectângulos. Contudo, o cálculo da área de uma região delimitada por um arco de curva já não é tão simples. Apesar de termos uma ideia intuitiva do que estamos a falar, precisamos de dar uma definição formal e exacta de área.

Recordemos que, a quando da definição de derivada, falámos no declive da recta tangente ao gráfico de uma função num ponto e, começámos por aproximá-lo pelos declives das rectas secantes tomando depois o limite destas aproximações.

Para o problema do cálculo da área da região S usaremos uma ideia análoga. Ou seja, vamos aproximar a região S através de rectângulos de tal forma que a área da região seja aproximada pela soma das áreas dos rectângulos; ao aumentarmos o número de rectângulos, obtemos cada vez melhores aproximações da área e, efectuando uma passagem ao limite, encontraremos o valor pretendido para a área de S.

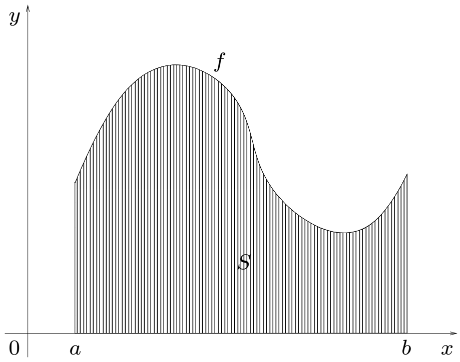


Figura 4.1: *Região* S.

Seja $[a,\, b]$ um intervalo limitado e fechado em $\mathbb{R}$. Chama-se partição de $[a,\, b]$ ao conjunto $P = \{x_0,\, x_1, \ldots,\, x_N\}$ em que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$. Os elementos $x_0,\, x_1, \ldots,\, x_N$, dizem-se os vértices da partição.

Os intervalos $I_i = [x_{i-1},\, x_i]$, $i = 1 \ldots, N$, chamam-se intervalos da partição e a maior das amplitudes destes intervalos diz-se o diâmetro da partição e representa-se por

$$\mathrm{diam}(P) = \max_{i=1,\ldots,\, N} |x_i - x_{i-1}|.$$

Dadas duas partições de $[a,\, b]$, $P = \{x_0,\, x_1, \ldots,\, x_n\}$ e $Q = \{y_0,\, y_1, \ldots,\, y_m\}$, diz-se que Q é mais fina do que P se todo o vértice de P é um vértice de Q.

Definimos partição uniforme de ordem N do intervalo $[a, b]$ quando os intervalos da partição têm todos o mesmo comprimento, ou seja, os vértices da partição x_j são equidistantes

$$x_j = a + j\,\frac{b-a}{N}, \qquad 0 \le j \le N.$$

Representemos por Δx o comprimento comum $\frac{b-a}{N}$ dos intervalos da partição. Uma escolha de pontos associada à partição uniforme de ordem N é um conjunto $S_N = \{s_1, s_2, \ldots, s_N\}$ de pontos com s_j em I_j para cada $j = 1, \ldots, N$. A figura 4.2 ilustra uma possível escolha de pontos.

Vamos considerar os rectângulos que têm como base cada intervalo da partição e como altura o valor da função em s_j. Somando a área de cada um, obtemos um valor aproximado para a área de S. Formalizando este raciocínio, definimos a soma das áreas dos vários rectângulos por soma de Riemann de f,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(f, S_N) &= \Delta x\, f(x_1) + \Delta x\, f(x_2) + \cdots + \Delta x\, f(x_N) \\ &= \sum_{j=1}^{N} f(s_j)\, \Delta x,\end{aligned}$$

Com a notação $\mathcal{R}(f, S_N)$ indicamos que a soma de Riemann depende da função f e da escolha de pontos S_N.

Como é fácil de ver, podemos efectuar uma infinidade de escolhas de pontos. Duas em particular são relevantes:

– aquela em que o ponto é escolhido como aquele onde a função tem um mínimo nesse intervalo;

– outra em que o ponto é escolhido como aquele onde a função tem um máximo no intervalo.

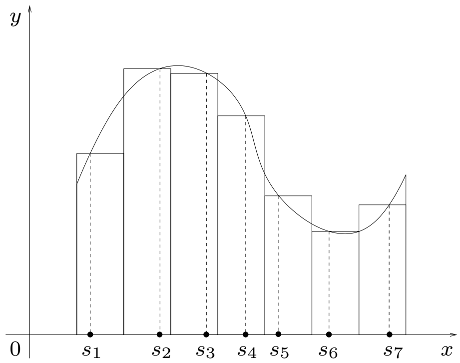


Figura 4.2: *Soma de Riemann* $\mathcal{R}(f, S_n)$ *com* $S_7 = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7\}$.

Assim, seja $m_j \in I_j$ o ponto onde f atinge o seu valor mínimo em I_j, e seja M_j o ponto em I_j onde f atinge o valor máximo em I_j. Representemos as escolhas de pontos resultantes de cada critério por $\mathcal{I}_N = \{m_1, m_2, \ldots, m_N\}$ e $\mathcal{S}_N = \{M_1, M_2, \ldots, M_N\}$, respectivamente. As somas de Riemann resultantes

$$\mathcal{R}(f, \mathcal{I}_N) = \sum_{j=1}^{N} f(m_j)\, \Delta x, \qquad \text{e} \qquad \mathcal{R}(f, \mathcal{S}_N) = \sum_{j=1}^{N} f(M_j)\, \Delta x,$$

são designadas soma inferior de Riemann (figura 4.3) e soma superior de Riemann (figura 4.4), respectivamente. Elas representam a menor e a maior das somas de Riemann de ordem N.

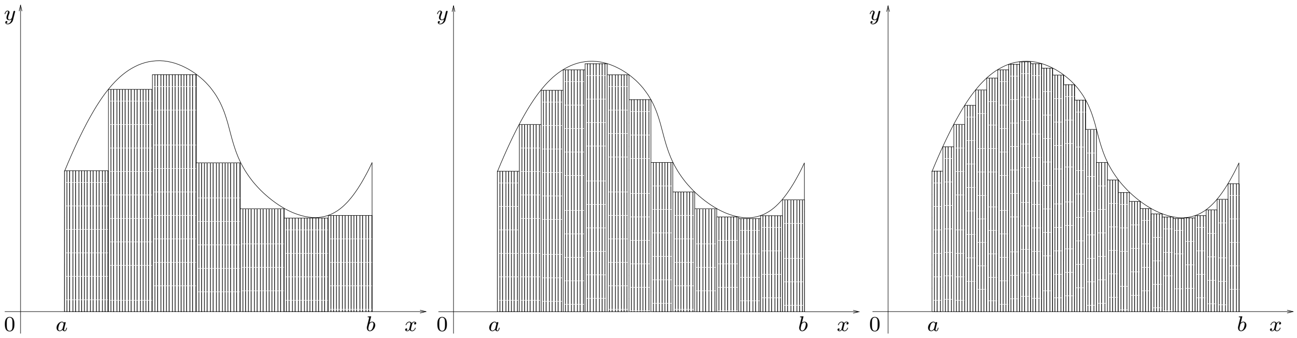


Figura 4.3: *Somas inferiores de Riemann.*

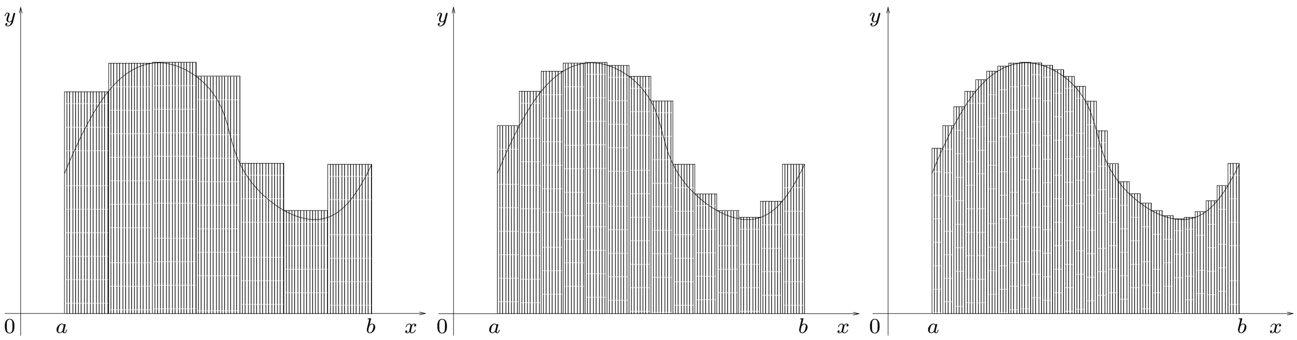


Figura 4.4: *Somas superiores de Riemann.*

O seguinte resultado permitir-nos-á adiante definir com exactidão a área da região abaixo do gráfico de uma função positiva.

Suponhamos que f é contínua no intervalo $[a, b]$. Se $S_n = \{s_1, s_2, \ldots, s_N\}$ é uma escolha arbitrária de pontos associada à partição uniforme de ordem N, então $\mathcal{R}(f, S_N)$ está enquadrada por $\mathcal{R}(f, \mathcal{I}_N)$ e $\mathcal{R}(f, \mathcal{S}_N)$,

$$\mathcal{R}(f, \mathcal{I}_N) \leq \mathcal{R}(f, S_N) \leq \mathcal{R}(f, \mathcal{S}_N).$$

Além disso, os números $\mathcal{R}(f, \mathcal{I}_N)$ e $\mathcal{R}(f, \mathcal{S}_N)$ tornam-se arbitrariamente próximos um do outro para N suficientemente grande, isto é,

$$\lim_{N \to \infty} (\mathcal{R}(f, \mathcal{S}_N) - \mathcal{R}(f, \mathcal{I}_N)) = 0.$$

Chegamos assim à seguinte definição.

Suponhamos que f é uma função definida no intervalo $[a, b]$, Dizemos que as somas de Riemann $\mathcal{R}(f, S_N)$ convergem para o número real ℓ, ou que ℓ é o limite das somas de Riemann $\mathcal{R}(f, S_N)$, quando N tende para infinito, se para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um inteiro positivo M tal que

$$|\mathcal{R}(f, S_N) - \ell| < \varepsilon$$

para N maior do que M. Nesse caso, dizemos que f é integrável em $[a, b]$, e representamos o limite ℓ pelo símbolo

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Este valor numérico é chamado integral de Riemann de f no intervalo $[a, b]$. A operação que faz corresponder à função f o número $\int_a^b f(x)\, dx$ é designada por integração.

As extremidades a e b do intervalo são designadas limites de integração, sendo a o limite inferior de integração e b o limite superior de integração. A presença dos limites de integração permite distinguir o integral de Riemann $\int_a^b f(x)\, dx$ do integral indefinido $\int f(x)\, dx$ estudado anteriormente. Para realçar esta diferença o integral de Riemann é muitas vezes designado por integral definido. Veremos adiante que existe de facto uma relação importante entre estes dois tipos de integrais, podendo os integrais indefinidos ser usados para calcular integrais definidos.

O resultado seguinte permite-nos garantir a existência do integral definido $\int_a^b f(x)\, dx$ para a maioria das funções que podem ser usadas em aplicações.

Se f é contínua no intervalo $[a, b]$, então f é integrável em $[a, b]$, isto é, o integral de Riemann $\int_a^b f(x)\, dx$ existe.

4.2.1 Propriedades do integral de Riemann

Indicamos a seguir as principais propriedades do integral de Riemann.

Se f é integrável em $[a,\, b]$ e $c \in \mathbb{R}$, então cf é integrável em $[a,\, b]$, e tem-se

$$\int_a^b cf(x)\, dx = c \int_a^b f(x)\, dx.$$

Se f e g são integráveis em $[a,\, b]$, então $f+g$ é integrável em $[a,\, b]$, e tem-se

$$\int_a^b (f+g)(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx.$$

Se f e g são integráveis em $[a,\, b]$ e $f(x) \leq g(x)$ em $[a,\, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx.$$

Se f é integrável em $[a,\, b]$ e $c \in]a,\, b[$, então f é integrável em $[a,\, c]$ e em $[c,\, b]$, tendo-se

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

Se f é integrável em $[a,\, b]$ e $|f(x)| \leq M$ em $[a,\, b]$, então

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq M\,(b-a).$$

Se f é integrável em $[a,\, b]$, $m \leq f(x) \leq M$ em $[a,\, b]$ e g é contínua em $[m,\, M]$, então $g \circ f$ é integrável em $[a,\, b]$.

Se f é integrável em $[a,\, b]$, o mesmo acontece a $|f|$ e tem-se

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Convenciona-se que, para qualquer $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0 \qquad \text{e,} \qquad \int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx.$$

4.2.2 Integração e primitivação

A interligação dos conceitos de primitivação e de integração permite um avanço significativo no cálculo de integrais, que é traduzida pelo:

Teorema Fundamental do Cálculo Integral. *Seja f integrável em $[a,\, b]$. Então a função $F : [a,\, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

é contínua em $[a,\, b]$. *Além disso, se* f *for contínua em* $x_0 \in [a,\, b]$, F *é diferenciável em* x_0 *e tem-se*

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Deste teorema decorrem três aspectos muito importantes.

O **primeiro** é que toda a função f contínua em $[a,\, b]$ é **primitivável** neste intervalo, e uma sua primitiva é dada por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt,$$

devido a $F'(x) = f(x)$ para qualquer $x \in [a,\, b]$.

O **segundo** é um método prático para o cálculo de integrais de funções contínuas. Com efeito,

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\, dt - \int_a^a f(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt.$$

Assim, se f for uma função contínua, podemos calcular $\int_a^b f(t)\, dt$ calculando primeiro uma primitiva F de f em $[a,\, b]$ e, em seguida, determinando $F(b) - F(a)$.

A esta técnica é usual chamar **fórmula de Barrow** e, escreve-se da seguinte maneira,

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a).}$$

Exemplo 4.18. *Calcule os integrais seguintes:*

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\, dx.$ (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2(x)\, dx.$

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{x=-1}^{x=1} = \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3}.$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2(x)\, dx = \operatorname{tg}(x)\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}) - \operatorname{tg}(0) = 1.$

O **terceiro** aspecto importante, é a possibilidade de podermos derivar rapidamente funções do tipo $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$ onde f é contínua, pondo $F'(x) = f(x)$ em qualquer intervalo que contenha o ponto a.

Por exemplo, a derivada da função $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_0^x \frac{t^3+1}{t^2+1}\, dt$ obtém-se rapidamente e é $F'(x) = \frac{t^3+1}{t^2+1}$, não sendo necessário calcular o integral.

EXEMPLO 4.19. *Calcule as derivadas das funções definidas em* $\mathbb{R}$ *por:*
(a) $F(x) = \displaystyle\int_2^{x^2} e^{-t^2}\, dt$ (b) $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \ln\left(\frac{1}{1+t^2}\right) dt.$

(a) Podemos considerar $F \equiv g \circ h$ com $g(u) = \int_2^u e^{-t^2}\, dt$ e $h(x) = x^2$. Assim, aplicando o teorema da derivação da função composta conjuntamente com o teorema anterior, podemos calcular $F' = (g' \circ h) \cdot h'$. Tem-se, $g'(u) = e^{-u^2}$ e $h'(x) = 2x$ e, portanto, $F'(x) = e^{-x^4} \cdot 2x = 2x\, e^{-x^4}$.
(b) Neste exemplo, basta decompôr $F(x)$ na soma

$$F(x) = \int_x^0 \ln\left(\frac{1}{1+t^2}\right) dt + \int_0^{x^2} \ln\left(\frac{1}{1+t^2}\right) dt$$

e, portanto,

$$F'(x) = -\ln\left(\frac{1}{1+x^2}\right) + \ln\left(\frac{1}{1+x^4}\right) 2x.$$

Podemos também estabelecer para o cálculo de integrais, resultados úteis análogos aos já encontrados para o cálculo de primitivas, nomeadamente, os métodos de primitivação por partes e por substituição.

INTEGRAÇÃO POR PARTES. Se $u, v : [a,\, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ têm derivadas contínuas em $[a,\, b]$ então

$$\boxed{\int_a^b u'(x)\, v(x)\, dx = u(x)\, v(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx.}$$

EXEMPLO 4.20. *Determine o integral* $\displaystyle\int_1^4 2x\, \ln(x)\, dx.$

$$\begin{aligned}\int_1^4 2x\, \ln(x)\, dx &= \big(x^2\, \ln(x)\big)\Big|_{x=1}^{x=4} - \int_1^4 x\, dx = \big(4^2\, \ln(4) - 1^2\, \ln(1)\big) - \frac{x^2}{2}\Big|_{x=1}^{x=4} = 16\, \ln(4) - \big(\frac{4^2}{2} - \frac{1^2}{2}\big)\\ &= 16\, \ln(4) - \frac{15}{2}.\end{aligned}$$

INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO. O método de substituição, também designado de método de mudança de variável, fornece-nos uma forma de simplificar ou transformar o integrando.
Se se verificar uma qualquer das hipóteses:

(H1) Se $f : [a,\, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e $g : [c,\, d] \longrightarrow [a,\, b]$ diferenciável com g' integrável em $[c,\, d]$;

(H2) Se $f : [a,\, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrável e $g : [c,\, d] \longrightarrow [a,\, b]$ monótona com derivada g' integrável em $[c,\, d]$;

então, tem-se

$$\boxed{\int_c^d (f \circ g)(x)\, g'(x)\, dx = \int_{g(c)}^{g(d)} f(u)\, du \qquad \text{com } u = g(x) \text{ e, } du = g'(x)\, dx.}$$

Exemplo 4.21. *Determine o integral* $\displaystyle\int_3^4 x\sqrt{25 - x^2}\, dx$.

Considerando a mudança de variável

$$u = \sqrt{25 - x^2} \quad \Leftrightarrow \quad u^2 = 25 - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 25 - u^2$$

vem,

$$2x\, dx = -2u\, du, \quad \text{ou seja,} \quad x\, dx = -u\, du.$$

Além disso, temos de alterar os limites de integração de acordo com a mudança de variável considerada. Assim, quando $x = 3$ vem $u = \sqrt{25 - 3^2} = 4$ e, quando $x = 4$ vem $u = \sqrt{25 - 4^2} = 3$. Logo,

$$\int_3^4 x\sqrt{25 - x^2}\, dx = \int_4^3 u\,(-u\, du) = -\int_4^3 u^2\, du = -\frac{u^3}{3}\Big|_{x=4}^{x=3} = -\frac{1}{3}\,(3^3 - 4^3) = \frac{37}{3}\,.$$

Quando aplicamos o método de substituição a um integral definido, é essencial termos em atenção o efeito que a mudança de variáveis provoca nos limites de integração.

Exemplo 4.22. *Determine* $\displaystyle\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$. *Interprete geometricamente.*

Consideremos a mudança de variável, $x = a\,\text{sen}(u) \Leftrightarrow u = \text{arcsen}(\frac{x}{a})$, $dx = a\,\cos(u)\, du$, donde,

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - (a\,\text{sen}(u))^2}\; a\,\cos(u)\, du = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\,(1 - \text{sen}^2(u))}\; a\,\cos(u)\, du \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\,\cos(u)\cdot a\,\cos(u)\, du = a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u)\, du = a^2\,\Big(\frac{1}{2}\,\text{sen}(u)\,\cos(u) + \frac{1}{2}\,u\Big)\Big|_{u=-\frac{\pi}{2}}^{u=\frac{\pi}{2}} \\
&= a^2\,\frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

pois, quando $x = a$ vem $u = \text{arcsen}(1) = \frac{\pi}{2}$ e, quando $x = -a$ vem $u = \text{arcsen}(-1) = -\frac{\pi}{2}$. O integral calculado representa a área do semi-círculo de raio a centrado na origem situado acima do eixo dos xx, pelo que mostrámos que a área de um círculo de raio a é πa^2.

4.2.3 Teoremas da média do cálculo integral

Primeiro teorema da média. *Sejam f, g funções integráveis no intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Se g não muda de sinal em $[a, b]$, então existe K tal que $\inf_{x\in[a,b]} f(x) \leq K \leq \sup_{x\in[a,b]} f(x)$, e*

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx = K \int_a^b g(x)\, dx.$$

Em particular, tem-se

$$\int_a^b f(x)\, dx = K\,(b-a).$$

Corolário 4.1. *Sejam $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funções definidas em $[a, b]$ tais que f é contínua e g é integrável. Se g não muda de sinal em $[a, b]$, então existe $c \in [a, b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(c) \int_a^b g(x)\, dx.$$

Segundo teorema da média. *Sejam f e g funções definidas em $[a, b] \subset \mathbb{R}$, g monótona e f integrável. Então existe $c \in [a, b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = g(a) \int_a^c f(x)\, dx + g(b) \int_c^b f(x)\, dx. \tag{4.18}$$

Corolário 4.2. *Nas condições do teorema, se $g \geq 0$ é monótona decrescente, existe $c \in [a, b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = g(a) \int_a^c f(x)\, dx.$$

Basta observar que, sendo $g \geq 0$ e decrescente, podemos alterar o valor de g em b escolhendo $g(b) = 0$ sem modificar o valor do integral à esquerda de (4.18).

4.2.4 Integração numérica (opcional)

Embora o Teorema Fundamental do Cálculo Integral nos forneça uma ferramenta poderosa para o cálculo de integrais, muitos outros integrais definidos não podem ser calculados exactamente. A impossibilidade de calcular um integral exactamente sucede quando não é possível exprimir a primitiva do integrando em termos de um número finito de funções conhecidas. Mesmo integrandos que possam não parecer particularmente complicados podem cair nesta categoria.

Por exemplo, a distância percorrida por um satélite numa trajectória elíptica envolve um integral da forma

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2(\theta)}\, d\theta.$$

onde $k \in]0,\, 1[$ é uma constante. O valor deste integral é necessário para muitas aplicações, no entanto, não existe nenhuma primitiva elementar.

Na verdade, muitos problemas da vida real envolvem integrandos para os quais não existem primitivas elementares. Por este motivo, é importante sermos capazes de aproximar um integral definido com a precisão pretendida.

Regra do ponto médio

Seja f uma função contínua no intervalo $[a,\, b]$ e seja N um número inteiro positivo. Para aproximarmos o integral $\int_a^b f(x)\, dx$, usamos a partição uniforme

$$a = x_0 < x_1 < x - 2 < \cdots < x_N = b,$$

a qual divide o intervalo $[a,\, b]$ em N subintervalos com o mesmo comprimento

$$\Delta x = \frac{b-a}{N}.$$

O ponto médio do subintervalo $[x_{k-1},\, x_k]$ é dado por

$$\overline{x}_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2} = a + \big(k - \frac{1}{2}\big)\, \Delta x.$$

Assim, sobre cada subintervalo $[x_{k-1},\, x_k]$ obtemos o rectângulo de área $\Delta x \times f(\overline{x}_k)$ e a soma sobre todos os subintervalos é

$$\mathcal{M}_N = \Delta x \cdot \big(f(\overline{x}_1) + f(\overline{x}_2) + \cdots + f(\overline{x}_k)\big).$$

Designamos $\mathcal{M}_N$ como a aproximação pela regra do ponto médio de ordem N. Em geral, a aproximação torna-se mais precisa à medida que N aumenta. Contudo, não queremos escolher N de tal forma que o cálculo de $\mathcal{M}_N$ se torne impraticável.

Podemos porém reformular o problema de aproximação do seguinte modo: Como determinar o valor mais pequeno de N de modo que nos permita encontrar uma aproximação aceitável para $\mathcal{M}_N$?

O resultado seguinte apresenta-nos uma estimativa de erro que é a chave para a resolução deste problema de aproximação pelo ponto médio.

Seja f uma função contínua no intervalo $[a,\, b]$. Se C é uma constante tal que $|f''(x)| \leq C$ para $a \leq x \leq b$, então

$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx - \mathcal{M}_N\Big| \leq \frac{C\,(b-a)^3}{24\,N^2}.$$

Regra do trapézio

Suponhamos que f é positiva sobre o intervalo $I_k = [x_{k-1},\, x_k]$. Podemos aproximar a área sob o gráfico de f e sobre I_k pela área de um trapézio. A área do trapézio é igual ao produto do comprimento Δx da base pela altura média do trapézio

$$A_k = \frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{2}\,\Delta x.$$

A aproximação trapezoidal $\mathcal{T}_N$ de ordem N fica definida somando estas áreas trapezoidais

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_N &= A_1 + A_2 + \cdots + A_N \\ &= \frac{1}{2}\,(f(x_0) + f(x_1))\,\Delta x + \frac{1}{2}\,(f(x_1) + f(x_2))\,\Delta x + \cdots + \frac{1}{2}\,f(x_{N-1}) + f(x_N))\,\Delta x.\end{aligned}$$

Combinando todos os termos obtemos

$$\mathcal{T}_N = \frac{\Delta x}{2}\,\big(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{N-1}) + f(x_N)\big).$$

Seja f uma função contínua no intervalo $[a,\, b]$. Se $|f''(x)| \leq C$ para todo $x \in [a,\, b]$, então aproximação trapezoidal $\mathcal{T}_N$ de ordem N é precisa a menos de $\dfrac{C\,(b-a)^3}{12\,N^2}$. Por outras palavras,

$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx - \mathcal{T}_N\Big| \leq \frac{C\,(b-a)^3}{12\,N^2}.$$

Comparando as estimativas de erro para as regras do ponto médio e do trapézio, como o denominador maior sugere, a regra do ponto médio é normalmente mais precisa do que a regra do trapézio. Mesmo assim, nalguns casos a regra do trapézio pode ser de maior utilidade.

Regra de Simpson

Para um pequeno subintervalo, o gráfico de f será uma curva com concavidade virada para cima ou para baixo. Visto que, quer a regra do ponto médio, quer a regra do trapézio se baseiam em aproximações por segmentos de recta, nenhuma delas é capaz de reproduzir a concavidade. Contudo, se aproximarmos o gráfico de f sobre um pequeno subintervalo por um arco de parábola, podemos tomar em consideração a concavidade de f. Esta ideia conduz-nos à mais precisa das regras de aproximação de que falaremos: a regra de Simpson.

Para deduzirmos a regra de Simpson, precisamos de conhecer a área sob um arco de parábola. Se $P(x) = Ax^2 + Bx + C$ e se $I = [a,\, b]$ é um intervalo com ponto médio c, então

$$\int_a^b P(x)\, dx = \frac{b-a}{6}\,(P(a) + 4P(c) + P(b)). \tag{4.19}$$

Para formularmos a regra de Simpson, escolhemos uma partição de $[a,\, b]$ com um número par ($N = 2\ell$) de subintervalos de igual comprimento Δx. Emparelhamos os subintervalos juntando o primeiro com o segundo, o terceiro com o quarto e assim sucessivamente. Sobre cada par de intervalos, aproximamos f por uma parábola que passa pelos pontos do gráfico de f correspondentes às extremidades dos intervalos (pois a parábola fica definida de forma única por três pontos não colineares).

Consideremos o par de intervalos

$$[x_{2k-2},\, x_{2k-1}] \qquad \text{e} \qquad [x_{2k-1},\, x_{2k}] \qquad (k = 1, \ldots, \ell).$$

A parábola P_k passa pelos três pontos $(x_{2k-2}\, f(x_{2k-2}))$, $(x_{2k-1}\, f(x_{2k-1}))$ e $(x_{2k}\, f(x_{2k}))$. Pelo resultado (4.19), com $a = x_{2k-2}$, $c = x_{2k-1}$ e $b = x_{2k-1}$, vemos que o integral da parábola sobre o intervalo $[x_{2k-2},\, x_{2k}]$ é dado por

$$\frac{x_{2k} - x_{2k-2}}{6}\,\big(P_k(x_{2k-2}) + 4P_k(x_{2k-1}) + P_k(x_{2k})\big) = \frac{2\Delta x}{6}\,\big(f_k(x_{2k-2}) + 4f_k(x_{2k-1}) + f_k(x_{2k})\big).$$

Por último, adicionando os integrais para $k = 1$ a $k = \ell$, obtemos a aproximação de Simpson de $\int_a^b f(x)\, dx$,

$$\mathcal{S}_N = \frac{\Delta x}{3}\,\big(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 2f(x_{N-2}) + 4f(x_{N-1}) + f(x_N)\big).$$

Seja f uma função contínua no intervalo $[a,\, b]$. Seja N um número inteiro positivo par. Se C é tal que $|f^{(4)}(x)| \leq C$ para $a \leq x \leq b$, então

$$\Big| \int_a^b f(x)\, dx - \mathcal{S}_N \Big| \leq \frac{C\,(b-a)^5}{180\, N^4}.$$

4.2.5 Integrais impróprios

A teoria dos integrais que aprendemos até ao momento permite-nos integrar uma função contínua f num intervalo limitado e fechado $[a,\, b]$. Contudo, muitas vezes é necessário integrar uma função que não é limitada, está definida num intervalo não-limitado ou, ainda, verifica ambas as situações (figura 4.5). Nestes casos, definimos os integrais impróprios.

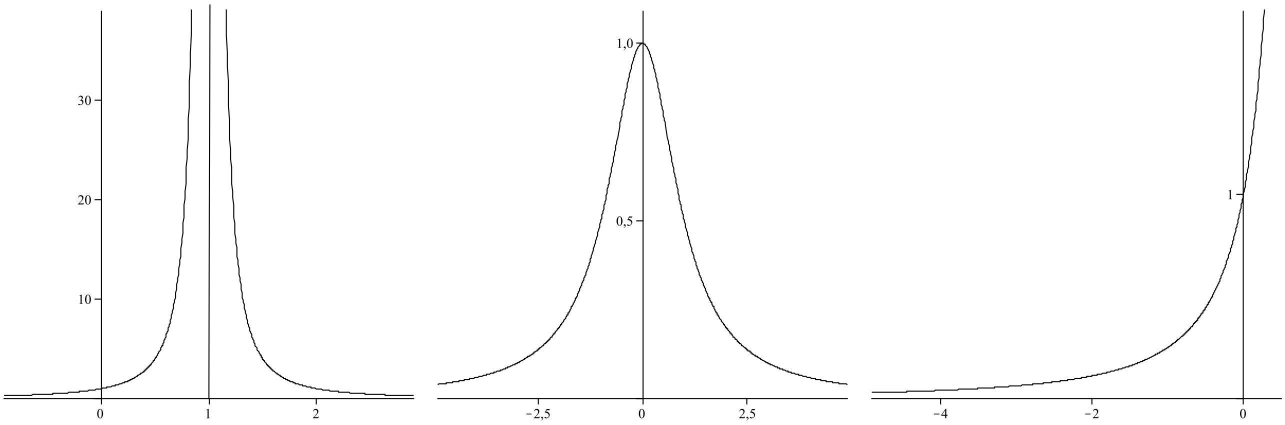


Figura 4.5:

Integrais impróprios de primeira espécie. Suponhamos que pretendíamos calcular o integral de uma função contínua f sobre um intervalo ilimitado da forma $[a,\, +\infty[$ ou da forma $]-\infty,\, b]$.

Seja f uma função contínua no intervalo $[a,\, +\infty[$. O valor do integral impróprio $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ define-se por

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\, dx,$$

desde que o limite exista e seja finito. Dizemos neste caso que o integral converge; caso contrário, diremos que diverge.

Analogamente, se g é uma função contínua no intervalo $]-\infty, b]$, então o valor do integral impróprio $\int_{-\infty}^{b} g(x)\,dx$ define-se por

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^b g(x)\,dx,$$

desde que o limite exista e seja finito. Dizemos neste caso que o integral converge; caso contrário, diremos que diverge.

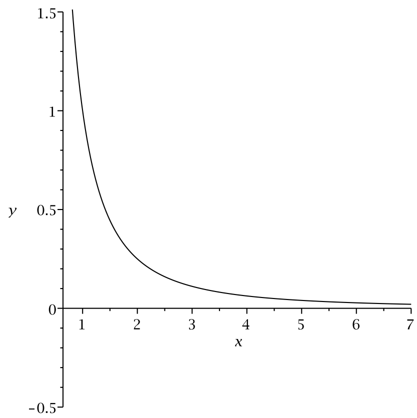


Figura 4.6: *Gráfico de* $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Exemplo 4.23. *Calcule o integral* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$.

Calculamos o limite,

$$\lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-2}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\Big(-\frac{1}{x}\Big|_{x=1}^{x=b}\Big) = \lim_{b\to+\infty}\Big(-\frac{1}{b}-\big(-\frac{1}{1}\big)\Big) = 1.$$

Logo, podemos concluir que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx = 1$.

Exemplo 4.24. *Averigue se o integral* $\displaystyle\int_{-\infty}^{-8}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ *é convergente ou divergente.*

Calculando o limite $\displaystyle\lim_{a\to-\infty}\int_a^8 x^{-\frac{1}{3}}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\Big(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\Big|_{x=a}^{x=-8}\Big) = \frac{3}{2}\lim_{a\to-\infty}\Big((-8)^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\Big)$

$$= \frac{3}{2}\lim_{a\to-\infty}\Big(4-\sqrt[3]{a^2}\Big) = \frac{3}{2}\Big(4-\lim_{a\to-\infty}\sqrt[3]{a^2}\Big) = -\infty,$$

concluímos que o integral é divergente.

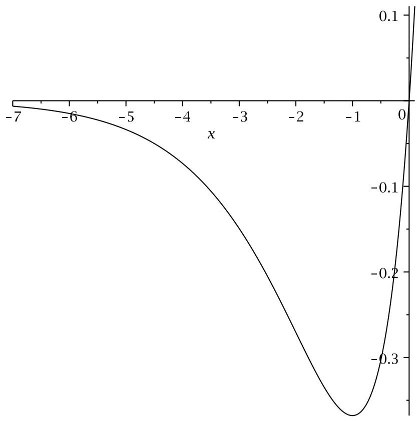


Figura 4.7: *Gráfico de $f(x) = x\,e^x$.*

Exemplo 4.25. *Calcule o integral* $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x\,e^x\,dx$.

Averiguamos se existe o $\displaystyle\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 x\,e^x\,dx$ começando por calcular o integral. Utilizando a integração por partes,

$$\int_a^0 x\,e^x\,dx = x\,e^x\Big|_{x=a}^{x=0} - \int_a^0 e^x\,dx = -a\,e^a - e^x\Big|_{x=a}^{x=0} = -a\,e^a - 1 + e^a.$$

Estudamos agora o limite $\displaystyle\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 x\,e^x\,dx$,

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 x\,e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty}(-a\,e^a - 1 + e^a) = -\lim_{a\to-\infty}(a\,e^a) - 1 + \lim_{a\to-\infty} e^a = -1,$$

pois, aplicando a regra de Cauchy,

$$\lim_{a\to-\infty} a\,e^a = \lim_{a\to-\infty}\frac{a}{e^{-a}} = \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{-e^{-a}} = \lim_{a\to-\infty}(-e^a) = 0.$$

Logo, $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x\,e^x\,dx = -1$.

Por vezes é necessário determinar o integral sobre toda a recta. Para tal, separamos o integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ sob a forma de dois integrais impróprios $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ e $\int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$. O integral original diz-se convergente quando ambos os integrais forem convergentes.

Neste caso, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ define-se como $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$. O resultado desta adição não depende do ponto c escolhido para separar o integral.

Exemplo 4.26. *Calcule o integral impróprio* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx$.

Separamos o integral sobre dois subintervalos, $]-\infty,+\infty[\,=\,]-\infty,0]\,\cup\,[0,+\infty[$.

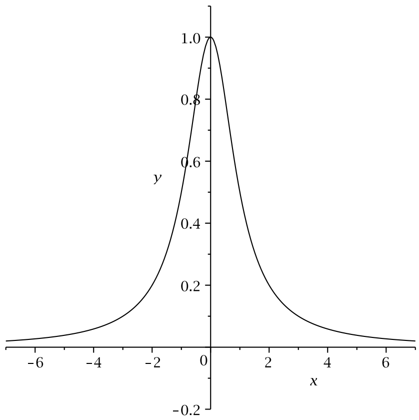


Figura 4.8: *Gráfico de* $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \big(\operatorname{arctg}(x)\big)\Big|_{x=a}^{x=0} = \lim_{a\to-\infty} \big(\operatorname{arctg}(0) - \operatorname{arctg}(a)\big) = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \big(\operatorname{arctg}(x)\big)\Big|_{x=0}^{x=b} = \lim_{b\to+\infty} \big(\operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(0)\big) = \frac{\pi}{2}.$$

Como cada um dos integrais na semi-recta real é convergente, concluímos que o integral impróprio sobre toda a recta é convergente, e o seu valor é

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Em vez de 0 poder-se-ia ter escolhido outro ponto qualquer que o resultado não sofreria alteração.

Integrais impróprios de segunda espécie. Seja f uma função contínua num intervalo $[a,\, b[$. Suponhamos que f não é limitada quando $x \to b^-$.

O integral $\int_a^b f(x)\,dx$ diz-se integral impróprio de segunda espécie em b. Vamos ver como calcular este integral.

Se $\int_a^b f(x)\,dx$ é um integral impróprio com função integranda não-limitada em b, então o valor do integral é determinado pelo limite

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx,$$

desde que este limite exista e seja finito. Dizemos neste caso que o integral é convergente; caso contrário, diremos que é divergente.

Exemplo 4.27. *Calcule o integral* $\displaystyle\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{8-x}}\,dx$.

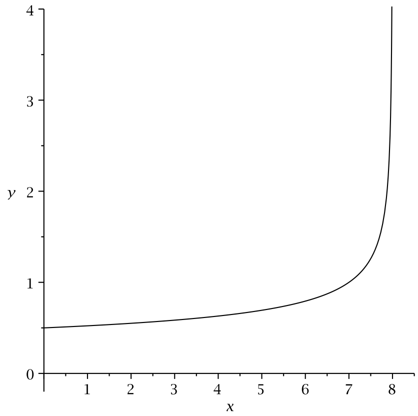


Figura 4.9: *Gráfico de* $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{8-x}}$.

A função integranda não é limitada, tendo uma assímptota vertical em $x = 8$. Determinamos,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{8-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt[3]{8-x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(-\frac{(8-x)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \right)\Bigg|_{x=0}^{x=8-\varepsilon} = -\frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\varepsilon^{\frac{2}{3}} - 8^{\frac{2}{3}}\right) = -\frac{3}{2}(0-4) = 6.$$

Logo, $\displaystyle\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{8-x}}\,dx = 6.$

Analogamente, se f é contínua em $]a,\, b]$ e ilimitada quando $x \to a^+$, então o valor do integral impróprio $\int_a^b f(x)\,dx$, define-se por

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx,$$

desde que este limite exista e seja finito. Dizemos neste caso que o integral é convergente; caso contrário, diremos que é divergente.

Exemplo 4.28. *Determine* $\displaystyle\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$

Este é um integral impróprio com função integranda ilimitada em $x = 0$ (figura 4.10). Calculando o limite

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{0+\varepsilon}^{9} x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(2x^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_{x=\varepsilon}^{x=9} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(2\sqrt{9} - 2\sqrt{\varepsilon}\right) = 6,$$

concluímos então que $\displaystyle\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 6.$

Pode também suceder que a função integranda tenha uma singularidade num ponto interior do intervalo de integração.

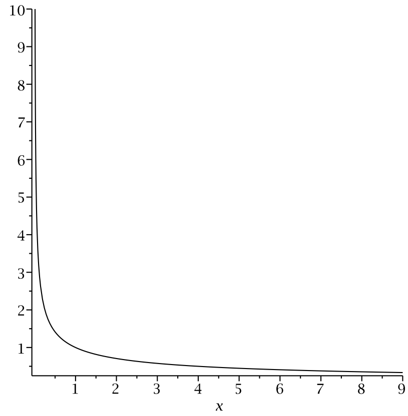


Figura 4.10: *Gráfico de* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Nestas circunstâncias, dividimos o intervalo de integração em dois subintervalos, um de cada lado da singularidade. Em seguida, integramos sobre cada subintervalo separadamente. Se ambos os integrais convergirem, então o integral original é **convergente**. Caso contrário, dizemos que é **divergente**.

EXEMPLO 4.29. *Calcule o integral impróprio* $\displaystyle\int_{-3}^{2} \frac{8}{\sqrt[5]{x+1}}\,dx$.

A função integranda é ilimitada quando x tende para -1. Portanto, calculamos em separado os dois integrais impróprios: $\int_{-3}^{-1} \frac{8}{\sqrt[5]{x+1}}\,dx$ e $\int_{-1}^{2} \frac{8}{\sqrt[5]{x+1}}\,dx$.

Para o primeiro, vamos calcular o limite

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-3}^{-1-\varepsilon} 8(x+1)^{-\frac{1}{5}}\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{8(x+1)^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}}\right)\Bigg|_{x=-3}^{x=-1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\tfrac{5}{4}\times 8\left[(-1-\varepsilon+1)^{\frac{4}{5}} - (-3+1)^{\frac{4}{5}}\right]\right)\\
&= 10\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left((-\varepsilon)^{\frac{4}{5}} - (-2)^{\frac{4}{5}}\right)\\
&= -10\,\sqrt[5]{16}.
\end{aligned}$$

Donde, $\int_{-3}^{-1} \frac{8}{\sqrt[5]{x+1}}\,dx = -10\,\sqrt[5]{16}$. Para o segundo integral calculamos, de forma idêntica,

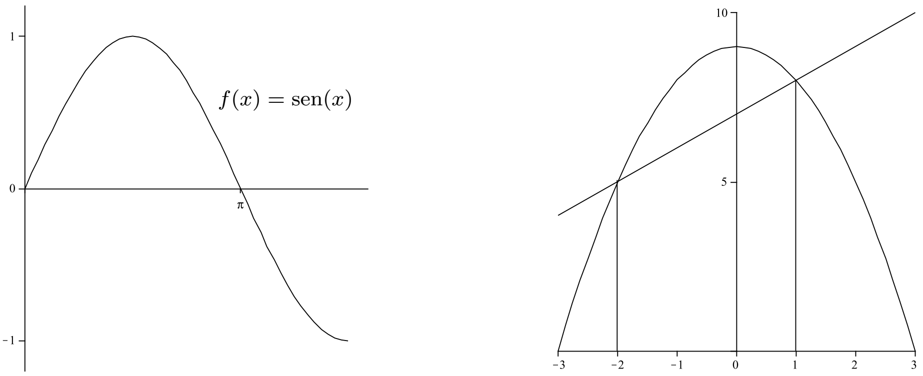
$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-1+\varepsilon}^{2} 8(x+1)^{-\frac{1}{5}}\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{8(x+1)^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}}\right)\Bigg|_{x=-1+\varepsilon}^{x=2} = 10\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(3^{\frac{4}{5}} - \varepsilon^{\frac{4}{5}}\right)\\
&= 10\,\sqrt[5]{81}.
\end{aligned}$$

Logo, $\int_{-1}^{2} \frac{8}{\sqrt[5]{x+1}}\,dx = 10\,\sqrt[5]{81}$. Concluímos que o integral dado converge e que o seu valor é dado por,

$$\int_{-3}^{2} \frac{8}{\sqrt[5]{x+1}}\,dx = -10\,\sqrt[5]{16} + 10\,\sqrt[5]{81} = 10\,(\sqrt[5]{81} - \sqrt[5]{16}).$$

4.3 Cálculo de áreas

Se $f(x) \geq 0$ para $x \in [a, b]$, então $\int_a^b f(x)\,dx$ corresponde à área da região abaixo do gráfico de f, acima do eixo dos xx, e entre as rectas $x = a$ e $x = b$.
Se $f(x) \leq 0$ para $x \in [a, b]$, então $\int_a^b f(x)\,dx$ é igual ao simétrico da área da região acima do gráfico de f, abaixo do eixo dos xx, e entre as rectas $x = a$ e $x = b$.



(a) (b)

Figura 4.11:

Exemplo 4.30. *Qual é a área da região delimitada pelo gráfico de $f(x) = \text{sen}(x)$, o eixo dos xx e as rectas $x = \frac{\pi}{3}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$?*

Observemos que $f(x) \geq 0$ para $x \in [\frac{\pi}{3}, \pi]$ e $f(x) \leq 0$ para $x \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$ (figura 4.11(a)).
Assim, a área da região acima de $[\frac{\pi}{3}, \pi]$ é

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \text{sen}(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_{x=\frac{\pi}{3}}^{x=\pi} = -(-1) - (-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}.$$

Por outro lado, a área da região abaixo de $[\frac{\pi}{3}, \pi]$ é

$$-\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \text{sen}(x)\,dx = -(-\cos(x)\Big|_{x=\pi}^{x=\frac{3\pi}{2}} = 0 - (-1) = 1.$$

A área total é a soma das duas áreas, ou seja, $\frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$.

Exemplo 4.31. *Definamos*

$$f(x) = \begin{cases} x + 7, & se\ -2 \leq x \leq 1 \\ 9 - x^2, & se\ x < -2\ ou\ x > 1. \end{cases}$$

Qual a área da região compreendida entre o gráfico de f e o eixo dos xx?

A partir da definição de f, vemos que $f(x) \geq 0$ para $-3 \leq x \leq 3$. Recorrendo à representação gráfica (figura 4.11(b)), vemos claramente que o problema se divide em três partes, correspondentes a:

(a) uma região acima do intervalo $[-3,\, -2]$;

(b) uma região acima do intervalo $[-2,\, 1]$;

(c) uma região acima do intervalo $[1,\, 3]$;

Separamos assim os três cálculos:

(a) Quando $x \in [-3,\, -2[$, temos $f(x) = 9 - x^2$, e

$$\int_{-3}^{-2} f(x)\, dx = \big(9x - \frac{x^3}{3}\big)\Big|_{x=-3}^{x=-2} = \big(-18 + \frac{8}{3}\big) - \big(-27 + \frac{27}{3}\big) = \frac{8}{3}.$$

(b) Quando $x \in [-2,\, 1]$, temos $f(x) = x + 7$, e

$$\int_{-2}^{1} f(x)\, dx = \big(\frac{1}{2}x^2 + 7x\big)\Big|_{x=-2}^{x=1} = \big(\frac{1}{2} + 7\big) - \big(\frac{4}{2} - 14\big) = \frac{39}{2}.$$

(c) Quando $x \in]1,\, 3[$, temos $f(x) = 9 - x^2$, e

$$\int_{1}^{3} f(x)\, dx = \big(9x - \frac{x^3}{3}\big)\Big|_{x=1}^{x=3} = \big(27 - \frac{27}{3}\big) - \big(9 - \frac{1}{3}\big) = \frac{28}{3}.$$

Logo, a área total entre o gráfico de f e o eixo dos xx é $\frac{8}{3} + \frac{39}{2} + \frac{28}{3} = \frac{63}{2}$.

4.3.1 Área entre duas curvas

Os exemplos 4.30 e 4.31 são casos especiais do problema mais geral de determinar a área da região compreendida entre duas curvas.

Sejam f e g funções contínuas no intervalo $[a,\, b]$ e suponhamos que $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a,\, b]$. A área sob o gráfico de f e acima do gráfico de g no intervalo $[a,\, b]$ é dada por

$$\boxed{A = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\, dx.}$$

Exemplo 4.32. *Determine a área A da região compreendida entre as curvas $f(x) = -x^2 + 6$ e $g(x) = 3x^2 - 8$ no intervalo $[-1\,1]$.*

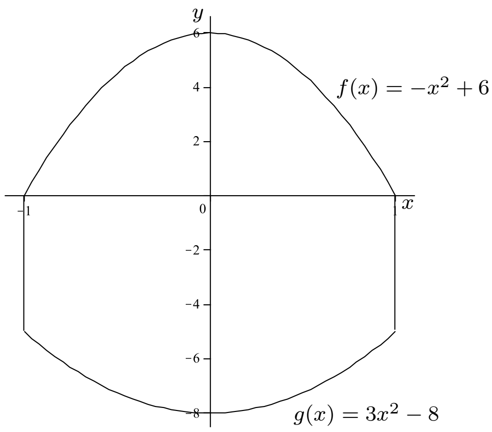


Figura 4.12:

Verificamos que $f(x) \geq g(x)$ para todo o $x \in [-1, 1]$ (figura 4.12). Assim, a área pretendida é dada por,

$$\int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))\, dx = \int_{-1}^{1} (-x^2 + 6) - (3x^2 - 8)\, dx = \int_{-1}^{1} (-4x^2 + 14)\, dx$$
$$= -\frac{4}{3}\, x^3 \Big|_{x=-1}^{x=1} + 14x|_{x=-1}^{x=1} = \frac{76}{3}\,.$$

Exemplo 4.33. *Determine a área compreendida entre as parábolas* $f(x) = -2x^2 + 4$ *e* $g(x) = x^2 - 9x + 10$.

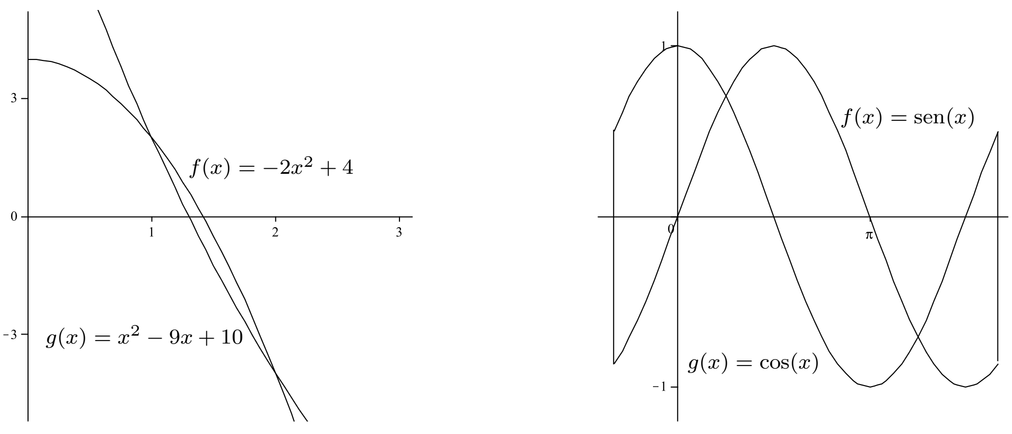


Figura 4.13:

Neste exemplo não é especificado o intervalo. Vamos determiná-lo averiguando os pontos de intersecção das duas curvas. As parábolas intersectam-se quando $-2x^2 + 4 = x^2 - 9x + 10$, ou seja, resolvendo a equação, quando $x = 1$ ou $x = 2$ (figura 4.13(a)).

No intervalo $[1, 2]$, verificamos que $f(x) \geq g(x)$, logo, a área será dada por

$$\int_1^2 (f(x) - g(x))\, dx = \int_1^2 \big((-2x^2 + 4) - (x^2 - 9x + 10)\big)\, dx = \int_1^2 (-3x^2 + 9x - 6)\, dx$$
$$= (-x^3 - 6x + \frac{9}{2}\, x^2)\Big|_{x=1}^{x=2} = \frac{1}{2}\,.$$

Exemplo 4.34. *Determine a área compreendida entre as curvas $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $g(x) = \cos(x)$ no intervalo $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$.*

Verificamos que $f(x) \geq g(x)$ nalguns pontos e que $f(x) \leq g(x)$ noutros (figura 4.13(b)). Neste caso, precisamos de dividir o intervalo $[-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$ em subintervalos nos quais apenas uma das desigualdades seja verdadeira. Precisamos assim de encontrar os pontos de intersecção dos gráficos de f e g.
Fazendo $\operatorname{sen}(x) = \cos(x)$, vemos que no intervalo $[-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$, os pontos de intersecção são $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{5\pi}{4}$.
Separamos então o cálculo da área em três subintervalos, adicionando depois os valores das áreas sobre cada um deles. Encontramos,

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos(x) - \operatorname{sen}(x))\, dx = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\operatorname{sen}(x) - \cos(x))\, dx = 2\sqrt{2}$$
$$\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{3}} (\cos(x) - \operatorname{sen}(x))\, dx = \sqrt{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}.$$

Logo, a área total procurada será,

$$A = (\sqrt{2} + \frac{\sqrt{3} - 1}{2}) + (2\sqrt{2}) + (\sqrt{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}) = 4\sqrt{2}.$$

4.4 Comprimento de um arco de curva

Suponhamos que f é uma função com derivada contínua num domínio que contém o intervalo $[a, b]$. Pretendemos calcular o comprimento L do gráfico de f sobre este intervalo.
Fixemos um inteiro positivo N e seja $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b$ uma partição uniforme do intervalo $[a, b]$. Vamos utilizar uma linha quebrada para aproximar o gráfico de f (figura 4.14(a)). Ou seja, usamos o segmento de recta de extremidades $P_{j-1} = (x_{j-1}, f(x_{j-1}))$ e $P_j = (x_j, f(x_j))$ para aproximar a parte do gráfico de f que se situa sobre o j-ésimo intervalo $[x_{j-1}, x_j]$.

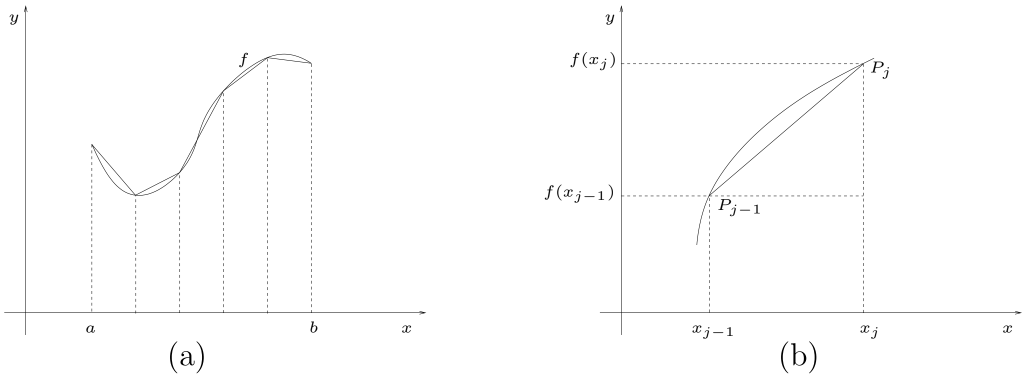


Figura 4.14:

O comprimento ℓ_j deste segmento de recta é uma aproximação do comprimento do comprimento do arco de gráfico entre P_{j-1} e P_j (figura 4.14(b)). Somando os comprimentos ℓ_j, obtemos um valor aproximado para o comprimento da curva:

$$L \approx \sum_{j=1}^{N} \ell_j.$$

A precisão desta aproximação é melhorada aumentando o número N de subintervalos. À medida que N tende para infinito e Δx tende para 0, estas somas aproximantes tendem para o que entendemos ser o comprimento da curva.

$$L = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \ell_j. \quad \text{(intuitivamente!)} \tag{4.20}$$

Observemos o que se passa no intervalo $[x_{j-1},\, x_j]$. O comprimento ℓ_j é dado pela fórmula usual da distância entre dois pontos no plano:

$$\ell_j = \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (f(x_j) - f(x_{j-1}))^2}.$$

Representemos a quantidade $x_j - x_{j-1}$ por Δx e apliquemos o teorema do valor médio à expressão $f(x_j) - f(x_{j-1})$ de forma a obtermos $f(x_j) - f(x_{j-1}) = f'(c_j)\,\Delta x$ para algum c_j entre x_j e x_{j-1}.

Podemos agora reescrever a fórmula para ℓ_j do seguinte modo,

$$\ell_j = \sqrt{(\Delta x)^2 + (f'(c_j)\,\Delta x)^2} = \Delta x\,\sqrt{1 + f'^2(c_j)}.$$

Se usarmos esta expressão para substituirmos ℓ_j na equação (4.20), obtemos

$$L = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \sqrt{1 + f'^2(c_j)}\, \Delta x.$$

Estas somas permitem-nos assim definir o integral de Riemann $\displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$. Concluímos então que este integral representa o comprimento da curva:

Se f tem derivada contínua num intervalo contendo $[a,\, b]$, então o comprimento de arco L do gráfico de f no intervalo $[a,\, b]$ é dado por

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.} \tag{4.21}$$

Esta expressão, usada para determinar o comprimento de arco, conduz-nos frequentemente a integrais que são difíceis ou impossíveis de calcular analiticamente. Nestas circunstâncias, podemos aplicar as técnicas de integração numérica apresentadas na secção 4.2.4. Os exemplos a seguir apresentados envolvem integrais cujo cálculo é relativamente simples.

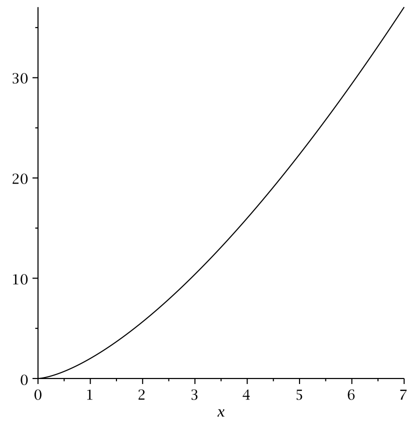


Figura 4.15: *Gráfico de $f(x) = 2x\sqrt{x}$.*

Exemplo 4.35. *Determine o comprimento de arco L do gráfico de $f(x) = 2x\sqrt{x}$ sobre o intervalo $[0,\, 7]$.*

Temos,

$$f'(x) = 2\left(\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}\right), \quad \text{e}$$

$$f'^2(x) = 4\left(\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}\right)^2 = 9x.$$

Aplicando (4.21), obtemos

$$\begin{aligned} L &= \int_0^7 \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx = \int_0^7 \sqrt{1+9x}\,dx = \frac{1}{9}\int_0^7 9\,(1+9x)^{\frac{1}{2}}\,dx \\ &= \tfrac{2}{27}\,(1+9x)^{\frac{3}{2}}\Big|_{x=0}^{x=7} = \frac{1022}{27}\,. \end{aligned}$$

Exemplo 4.36. *Determine o comprimento de arco L do gráfico de* $f(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ *sobre o intervalo* $[1,\, \ln(8)]$.

Calculando primeiramente f', obtemos

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e,} \quad 1+f'(x) = 1 + \frac{(e^x-e^{-x})^2}{4} = \frac{4+e^{2x}-2+e^{-2x}}{4} = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} L &= \int_1^{\ln(8)} \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx = \int_1^{\ln(8)} \frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx = \frac{e^x-e^{-x}}{2}\Big|_{x=1}^{x=\ln(8)} = \tfrac{1}{2}\left(\left(8-\tfrac{1}{8}\right)-\left(e-\tfrac{1}{e}\right)\right) \\ &= \frac{63}{16} + \frac{1-e^2}{2\,e}. \end{aligned}$$

Por vezes, é mais conveniente resolver um problema de comprimento de arco tratando a curva como sendo o gráfico de $x = g(y)$.

Se g' é contínua, então o comprimento de arco L do gráfico de $x = g(y)$ para $c \leq y \leq d$ é dado por

$$\boxed{L = \int_c^d \sqrt{1+g'^2(y)}\,dy.} \tag{4.22}$$

Exemplo 4.37. *Determine o comprimento L da porção da curva* $9x^2 = 4y^3$ *compreendida entre os pontos* $(0,\,0)$ *e* $(\frac{2}{3},\,1)$.

Se escrevermos a curva como $x = \frac{2}{3}\,y^3$ e pusermos

$$g(y) = \frac{2}{3}\,y^{\frac{3}{2}}, \quad \text{então} \quad g'(y) = \sqrt{y}.$$

Logo, aplicando (4.22), teremos

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+y}\,dy$$

Aplicando o método de substituição teremos $u = 1+y$ e, $du = dy$, donde

$$\begin{aligned} L &= \int_1^2 \sqrt{u}\,du = \tfrac{2}{3}\,u^{\frac{3}{2}}\Big|_{u=1}^{u=2} \\ &= \tfrac{2}{3}\,(2\sqrt{2}-1). \end{aligned}$$

4.5 Exercícios e complementos

1. Determine os seguintes integrais indefinidos

(a) $\displaystyle\int x^4\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{2}{x}\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx$

(d) $\displaystyle\int (x^2-5)\,dx$ (e) $\displaystyle\int 2x+\frac{3}{x}\,dx$ (f) $\displaystyle\int \left(2\,e^x - x^3\right)\,dx$

(g) $\displaystyle\int \left(x+\sqrt{x}\right)\,dx$ (h) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,dx$ (i) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x}}\,dx$

(j) $\displaystyle\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4}\right)\,dx$ (k) $\displaystyle\int \frac{x^2+x^{-3}}{x^4}\,dx$ (l) $\displaystyle\int (x^{-\frac{7}{3}} - 4x^{-\frac{2}{3}})\,dx.$

2. Escreva a expressão geral das primitivas das seguintes funções trigonométricas

(a) $\operatorname{tg}(x)$ (b) $\operatorname{cotg}(x)$ (c) $\operatorname{tg}^2(x)$

(d) $\operatorname{cotg}^2(x)$ (e) $\operatorname{sen}^2(x)$ (f) $\cos^2(x)$

(g) $\operatorname{sen}^3(x)\,\cos(x)$ (h) $\operatorname{sen}^3(x)\,\cos^3(x)$

Sugestão: use as relações trigonométricas

$$\operatorname{tg}^2(x) = \sec^2(x) - 1, \qquad \operatorname{cotg}^2(x) = \operatorname{cosec}^2(x) - 1,$$
$$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x)), \qquad \cos^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x)).$$

Sol.: (a) $\ln\dfrac{1}{|\cos(x)|}+C$; (b) $\ln(|\operatorname{sen}(x)|)+C$; (c) $\operatorname{tg}(x)-x+C$; (d) $-\operatorname{cotg}(x)-x+C$; (e) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)+C$; (f) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)+C$; (g) $\dfrac{1}{4}\operatorname{sen}^4(x)+C$ (h) $-\dfrac{1}{4}\cos^4(x)+\dfrac{1}{6}\cos^6(x)+C$.

3. Determine, aplicando primitivação por partes,

(a) $\displaystyle\int \operatorname{arctg}(x)\,dx$ (b) $\displaystyle\int \operatorname{arcsen}(x)\,dx$ (c) $\displaystyle\int x\operatorname{sen}(x)\,dx$ (d) $\displaystyle\int x\cos(3x)\,dx$

(e) $\displaystyle\int x\operatorname{arctg}(x)\,dx$ (f) $\displaystyle\int e^x\operatorname{sen}(x)\,dx$ (g) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ (h) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln(x))\,dx$

Sol.: (a) $x\operatorname{arctg}(x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$; (b) $x\operatorname{arcsen}(x)+\sqrt{1-x^2}+C$; (c) $\operatorname{sen}(x)-x\cos(x)+C$; (d) $\frac{x}{3}\operatorname{sen}(3x)+\frac{1}{9}\cos(3x)+C$; (e) $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}(x)-\frac{x}{2}+C$; (f) $\frac{e^x}{2}\left(\operatorname{sen}(x)-\cos(x)\right)+C$; (g) $2\sqrt{x}\left(\ln(x)-2\right)+C$; (h) $\frac{x}{2}\big(\operatorname{sen}(\ln(x))-\cos(\ln(x))\big)+C$.

4. Determine, aplicando primitivação por substituição,

(a) $\int (x+1)^2\,dx$ (b) $\int e^{ex}\,dx$ (c) $\int (3x-2)^3\,dx$

(d) $\int \sqrt{x+1}\,dx$ (e) $\int \frac{1}{3x-7}\,dx$ (f) $\int \sec^2(8x)\,dx$

(g) $\int (3\cos(4x)+2x)\,dx$ (h) $\int \frac{1}{\cos^2(7x)}\,dx$ (i) $\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$

(j) $\int x^3\cos(x^4+2)\,dx$ (k) $\int [x^5-2x\,(3x^2+2)^4]\,dx$ (l) $\int x\sqrt{1+3x}\,dx$

(m) $\int \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\,dx$ (n) $\int \operatorname{tg}(2x)\,dx$ (o) $\int \frac{3x^2}{\sqrt{x^3-1}}\,dx$

(p) $\int \frac{1}{x\,\ln(x)}\,dx$ (q) $\int \frac{2}{1+4x^2}\,dx$ (r) $\int \cos^3(x)\,\operatorname{sen}(x)\,dx$

(s) $\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,dx$ (t) $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx$ (u) $\int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}\,dx.$

Sol.: (a) $\frac{1}{3}\,(x+1)^3+C$; (b) $\frac{\mathrm{e}^{ex}}{\mathrm{e}}+C$; (c) $\frac{1}{12}\,(3\,x-2)^4+C$; (d) $\frac{2\,(x+1)^{3/2}}{3}+C$; (e) $\frac{1}{3}\,\ln(3\,x-7)+C$; (f) $\frac{1}{8}\operatorname{tg}(8x)+C$; (g) $\frac{3\operatorname{sen}(4\,x)}{4}+x^2+C$; (h) $\frac{1}{7}\operatorname{tg}(7x)+C$; (i) $2\operatorname{sen}(\sqrt{x})+C$; (j) $\frac{1}{4}\operatorname{sen}\left(x^4+2\right)+C$; (k) $-\frac{431}{6}\,x^6-\frac{81}{5}\,x^{10}-54\,x^8-48\,x^4-16\,x^2+C$; (l) $\frac{2\,(9x-2)}{135}\,\sqrt{(1+3x)^3}+C$; (m) $-\frac{x^2+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}+C$; (n) $\frac{1}{4}\,\ln\left(1+\operatorname{tg}^2(2x)\right)+C$; (o) $2\,\frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{\sqrt{x^3-1}}+C$; (p) $\ln(\ln(x))+C$; (q) $\operatorname{arctg}(2\,x)+C$; (r) $-\frac{\cos^4(x)}{4}+C$; (s) $2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\right)+C$; (t) $-\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}+C$; (u) $-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}-\operatorname{arcsen}(\frac{x}{2})+C$.

5. Determine:

(a) $\int \frac{9x+18}{(x-3)(x+6)}\,dx$ (b) $\int \frac{3x+4}{x^2+x-6}\,dx$ (c) $\int \frac{1}{x\,(x+2)^2}\,dx$

(d) $\int \frac{3x+2}{(x-2)^2(x+2)}\,dx$ (e) $\int \frac{3x}{2x^2+6x+5}\,dx$ (f) $\int \frac{x^3-x}{(x^2+1)^2}\,dx$

(g) $\int \frac{1}{x^4+x^3}\,dx$ (h) $\int \frac{3}{x^3+2x^2+5x}\,dx$ (i) $\int \frac{4-2x}{(x^2+1)(x-1)^2}\,dx.$

Sol.: (a) $\ln(x-3)^5+\ln(x+6)^4+C$; (b) $\ln(x+3)+\ln(x-2)^2+C$;

(c) $\frac{1}{4}\,\ln(x-2)-\frac{1}{4}\,\ln(x+2)+\frac{1}{2\,(x+2)}+C$; (d) $\frac{1}{4}\,\ln(x)-\frac{1}{4}\,\ln(x+2)-\frac{2}{x-2}+C$;

(e) $\frac{3}{4}\ln\left(2\,x^2+6\,x+5\right)-\frac{9}{2}\operatorname{arctg}(2\,x+3)+C$; (f) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\frac{1}{x^2+1}+C$;

(g) $\ln\left(\frac{1}{x+1}\right)+\ln(x)-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x}+C$; (h) $\frac{3}{5}\ln(x)-\frac{3}{10}\ln\left(x^2+2\,x+5\right)-\frac{3}{10}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$;

(i) $\ln\left(x^2+1\right)+\operatorname{arctg}(x)-\ln(x-1)^2-\frac{1}{x-1}+C$.

6. Calcule os seguintes integrais

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{-3}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)dx$ (b) $\displaystyle\int_{8}^{1}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)dx$ (c) $\displaystyle\int_{-1}^{3}\frac{dx}{\sqrt{7+3x}}$

(d) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2+4x+4}$ (e) $\displaystyle\int_{-3}^{-2}\frac{dx}{x^2-1}$ (f) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$

(g) $\displaystyle\int_{1}^{4}\frac{1+\sqrt{x}}{x^2}\,dx$ (h) $\displaystyle\int_{6}^{2}\sqrt{x-2}\,dx$ (i) $\displaystyle\int_{0}^{9}\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

(j) $\displaystyle\int_{0}^{\ln(5)}\sqrt{e^x-1}\,dx$

Sol.: (a) $-\dfrac{10}{9}$; (b) $-\dfrac{73}{4}$; (c) $\dfrac{4}{3}$; (d) $\dfrac{1}{6}$; (e) $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$; (f) $e-1+\ln\left(\dfrac{2}{1+e}\right)$; (g) $\dfrac{7}{4}$; (h) $-\dfrac{16}{3}$;

(i) $6-\ln(16)$; (j) $4-2\operatorname{arctg}(2)$.

7. Aplique integração por partes para calcular os seguintes integrais

(a) $\displaystyle\int_{0}^{1}x\sqrt{1+x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}x\operatorname{arcsen}(x^2)\,dx$

Sol.: (a) $\dfrac{4}{15}(\sqrt{2}+1)$; (b) $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}-2\right)$.

8. Se $\displaystyle\int_{2}^{-9}f(x)\,dx=5$, calcule $\displaystyle\int_{-9}^{2}(3\,f(x)-5x)\,dx$.

9. Se $\displaystyle\int_{6}^{8}(3\,f(x)-x)\,dx=6$ e $\displaystyle\int_{8}^{6}(2x+4\,g(x))\,dx=-8$, determine $\displaystyle\int_{8}^{6}(f(x)-5\,g(x))\,dx$.

10. Calcule a área entre o gráfico da função dada e o eixo dos xx no intervalo indicado:

(a) $f(x)=\cos(x),\quad I=[\frac{\pi}{4},\,\frac{2\pi}{3}]$ (b) $g(x)=3x^2-3x-6,\quad I=[-4,\,4]$

(c) $h(x)=2x^2-8,\quad I=[-5,\,7]$ (d) $f(x)=x\,(1-x^2)^2,\quad I=[-\frac{1}{2},\,1]$.

11. Calcule a área das regiões compreendida entre as curvas dadas no intervalo indicado:

(a) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2},\quad g(x)=\dfrac{x}{2},\quad 0\le x\le 1$

(b) $f(x) = 2\,\mathrm{sen}(x), \quad g(x) = \mathrm{sen}(2x), \quad 0 \leq x \leq \pi.$

12. Averigue se os seguintes integrais são convergentes ou divergentes. No caso de ser convergente, determine-o.

(a) $\displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x+2}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}(x)\,dx$ (c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_{0}^{3} (1+x)\sqrt{x}\,dx.$

13. Determine o ponto em que o integrando é singular, separe o integral em duas partes e calcule o integral impróprio. Se for convergente, calcule o seu valor.

(a) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{1}{x-1}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{-2}^{4} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}.$

14. Averigue se os seguintes integrais são convergentes ou divergentes. No caso de ser convergente, determine-o.

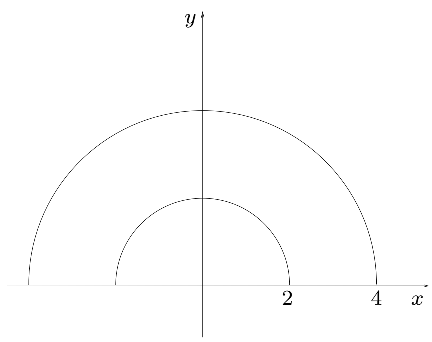
(a) $\displaystyle\int_{3}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ (b) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} x\,e^{-3x^2}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx.$

15. Calcule o comprimento de arco do gráfico das funções nos intervalos indicados.

(a) $f(x) = 2 + \sqrt{x^3}$ no intervalo $I = [1,\, 4]$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{3}\sqrt{(x^2+2)^3}$ no intervalo $I = [0,\, 1]$.

16. Determine a área da região compreendida entre as duas semi-circunferências representadas na figura.



Capítulo 5

Equações Diferenciais Ordinárias

5.1 Introdução

As equações diferenciais desempenham um papel extremamente relevante em todas as áreas da Matemática Aplicada, de tal forma que, grande parte dos modelos matemáticos aplicados às várias ciências envolvem equações diferenciais.

A formulação de um modelo matemático de um problema ou situação da vida real, quer através de um raciocínio intuitivo quer a partir de uma lei física resultante da experimentação, toma muitas vezes a forma de uma equação diferencial, ou seja, uma equação envolvendo uma função e algumas das suas derivadas. Não é de estranhar tal formulação pois, em situações do dia-a-dia, presenciamos a ocorrência de variações de certas características que nos levam a procurar prever a sua evolução com base em dados do presente. Vamos começar por analisar alguns modelos matemáticos envolvendo equações diferenciais.

O primeiro modelo traduz o crescimento de uma população baseado na única suposição de que a população cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho. Trata-se de uma suposição aceitável para, por exemplo, uma população de bactérias ou pequenos animais sob condições ideais: ambiente sem limitações, nutrientes adequados, ausência de predadores, imunidade à doença, etc.

Começamos por identificar cada uma das variáveis deste modelo:

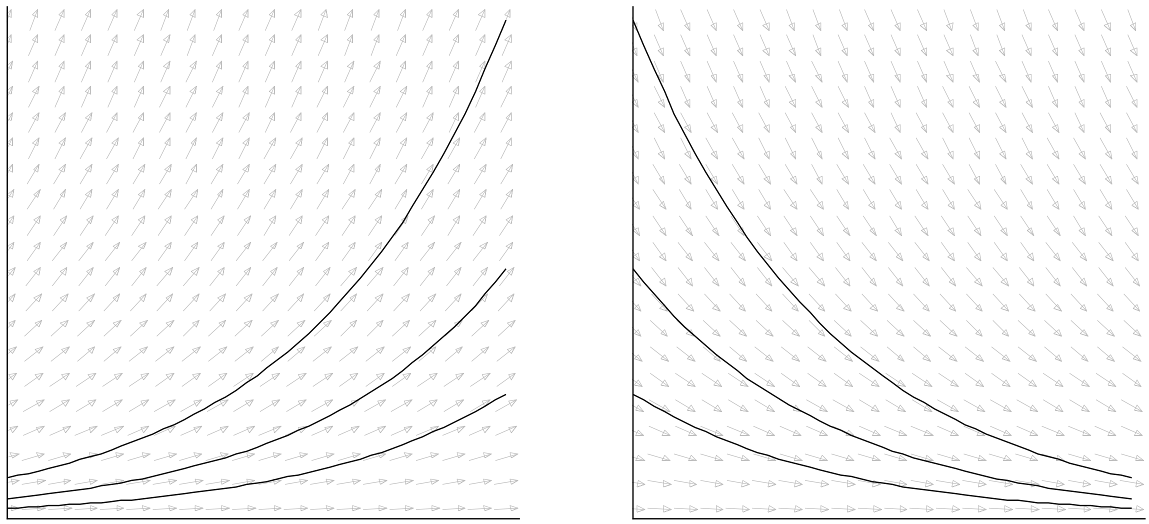
t — tempo

N — número de indivíduos na população (variável dependente)

A taxa de crescimento instantâneo da população é dada pela derivada $\frac{dN}{dt}$, como vimos na secção 3.1. Assim, a hipótese de que a taxa de crescimento da população é proporcional ao tamanho da população traduz-se pela equação

$$\boxed{\frac{dN}{dt}(t) = rN(t)} \tag{5.1}$$

onde r é a constante de proporcionalidade. A equação (5.1) traduz o nosso primeiro modelo de crescimento de uma população, designado por modelo malthusiano. Trata-se de uma equação diferencial, pois, contém a função incógnita N e a sua derivada de primeira ordem $\frac{dN}{dt}$.



(a) (b)

Figura 5.1: *Comportamento das soluções do modelo malthusiano para: (a)* $r > 0$*, (b)* $r < 0$.

Após termos formulado o modelo vamos averiguar que consequências dele resultam. Eliminando o caso de uma população nula, teremos $N(t) > 0$, para todo o t. Assim, se $r > 0$, a equação (5.1) mostra que $\frac{dN}{dt}(t) > 0$ para todo o t. Isto significa que o tamanho da população é sempre crescente. Na verdade, quando N aumenta, a equação (5.1) mostra que $\frac{dN}{dt}$ se torna cada vez maior. Por outras palavras, a taxa de crescimento cresce à medida que a população cresce.

Tentemos descobrir uma solução para a equação (5.1). Observando a equação verificamos que se pretende encontrar uma função cuja derivada é um múltiplo (constante) de si própria. Sabemos que a função exponencial tem essa propriedade. Assim, se fizermos $N(t) = C\,e^{rt}$, onde C é uma constante real arbitrária, então

$$\frac{dN}{dt}(t) = C\,(r\,e^{rt}) = r\,(C\,e^{rt}) = r\,N(t).$$

Logo, qualquer função exponencial $N(t) = C\,e^{rt}$, com C constante, é solução da equação (5.1). Ao permitirmos que a constante C tome qualquer valor real, obteremos uma família de soluções $N(t) = C\,e^{rt}$. Mas, como as populações têm apenas valores positivos, apenas nos interessam as soluções com $C > 0$. E também nos interessaremos pelos valores de t superiores a um dado valor inicial $t = 0$. Deste modo, podemos verificar que se tratam de soluções que fazem sentido fisicamente. Se colocarmos $t = 0$, obtemos $N(0) = C\,e^{r\times 0} = C$, de modo que a constante C representa a população inicial, $N(0)$. Na figura 5.1 estão representadas três curvas-solução correpondentes a três diferentes valores para a população inicial.

Consideremos que a constante r corresponde à diferença entre os valores constantes da taxa de natalidade *per capita* e da taxa de mortalidade *per capita*.

Verificamos que, se a taxa de natalidade for superior à taxa de mortalidade, o modelo apresenta um crescimento exponencial da população (figura 5.1(a)). Por outro lado, se a taxa de mortalidade for superior à taxa de natalidade *per capita*, vem $r < 0$ e, qualquer que seja o tamanho inicial da população, com o tempo ela extinguir-se-á (figura 5.1(b)).

Em conclusão, equação (5.1) é adequada para modelar o crescimento de uma população sob condições ideais, mas um modelo mais realista tem de reflectir o facto de os recursos serem limitados.

Muitas populações começam com um crescimento exponencial. Porém, tal crescimento diminui ao aproximar-se de um certo valor "limite", que traduz a capacidade do meio favorecer esse crescimento. Noutros casos, sendo a população inicial maior do que a que o meio pode sustentar, o seu tamanho tenderá a diminuir. Esse valor da população para o qual o meio assegura o seu desenvolvimento é designado por capacidade de sustentação e representado por K.

Assim, para um modelo tomar em consideração estas duas características, formularemos as duas hipóteses seguintes:

$$\frac{dN}{dt} \approx rN, \quad \text{se } N \text{ é pequeno (inicialmente, a taxa de crescimento é proporcional a } N).$$
$$\frac{dN}{dt} < 0, \quad \text{se } N > K, \text{ (} N \text{ decresce se for superior à capacidade de sustentação do meio).}$$

Uma expressão simples para incorporar ambas as hipóteses é dada pela equação

$$\boxed{\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right).} \tag{5.2}$$

Verificamos que se N é pequeno comparado com K, então $\frac{N}{K}$ está próximo de 0 e, $\frac{dN}{dt} \approx rN$. Se $N > K$, então $1 - \frac{N}{K}$ é negativo, logo, também $\frac{dN}{dt} < 0$.

A equação (5.2) é chamada **equação diferencial logística** e foi proposta pelo biólogo matemático holandês Verhulst, nos anos 40 do século XIX, como um modelo para o crescimento da população mundial.

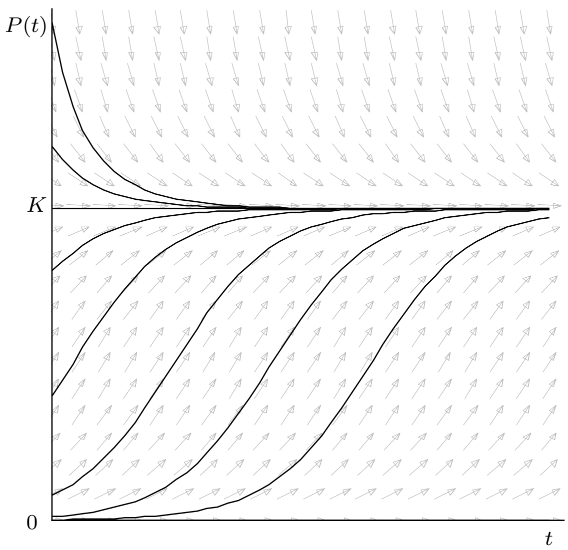


Figura 5.2: *Equação logística.*

Veremos adiante métodos que nos permitam determinar soluções explícitas para a equação (5.2) mas, por agora, estudaremos as características qualitativas das soluções a partir desta equação (figura 5.2). O sentido das setas traduz o declive das curvas solução.

Observamos em primeiro lugar, que as funções constantes $N(t) = 0$ e $N(t) = K$ são soluções pois, em ambos os casos, um dos factores do segundo membro de (5.1) é nulo. O que faz sentido:

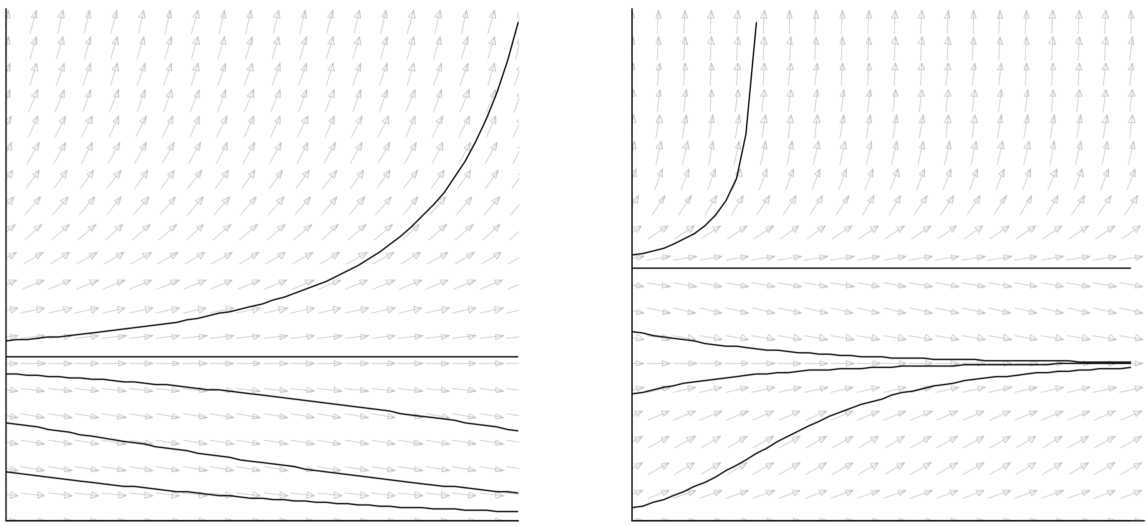
se alguma vez a população for nula ou igual a K, permanecerá assim para sempre. Estas duas soluções constantes dizem-se soluções de equilíbrio.

Se a população inicial N_0 se situa entre 0 e K, então o segundo membro de (5.1) é positivo, logo, $\frac{dN}{dt} > 0$ e a população cresce. Mas se a população excede a capacidade de sustentação ($N > K$), então $1 - \frac{N}{K}$ é negativo, donde $\frac{dN}{dt} < 0$ e a população diminui.

Reparemos que, em qualquer dos casos, se a população se aproxima da capacidade de sustentação ($N \to K$), então $\frac{dN}{dt} \to 0$, o que significa que a população estabiliza.

Exemplo 5.1. *Considere o modelo populacional dado pela equação diferencial* $\frac{dN}{dt}(t) = 2\,(N-100)\,N$. *A partir da figura 5.3(a), interprete o comportamento das soluções para diferentes condições iniciais.*

Exemplo 5.2. *Considere o modelo populacional ilustrado na figura 5.3(b). Interprete o comportamento das soluções para diferentes condições iniciais.*



(a) $\frac{dN}{dt}(t) = 2\,(N-100)\,N$

(b) $\frac{dN}{dt}(t) = (5-4N)(1-0.5N)\,N$

Figura 5.3:

Uma equação diferencial ordinária é uma equação que estabelece uma relação entre a variável independente x, a função desconhecida $y(x)$ e as suas derivadas y', y'', $\ldots$, $y^{(n)}$. Podemos escrever simbolicamente

$$F\big(x,\, y,\, y',\, y'',\ldots,\, y^{(n)}\big) = 0 \qquad \text{ou,} \qquad F\big(x,\, y,\, \tfrac{dy}{dx},\, \tfrac{d^2y}{dx^2},\ldots,\, \tfrac{d^ny}{dx^n}\big) = 0.$$

Vamos estudar equações diferenciais de primeira ordem, da forma,

$$F\big(x,\, y,\, \tfrac{dy}{dx}\big) = 0 \qquad \text{ou,} \qquad \frac{dy}{dx} = f(x,\, y), \tag{5.3}$$

onde $f(x, y)$ é uma expressão envolvendo, em geral, as variáveis x e y. Por exemplo,

$$\frac{dy}{dx} = 2xy - x^2, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \qquad \text{e,} \qquad \frac{dy}{dx} = 2y\,(10 - y)$$

são equações diferenciais da forma (5.3).

Dizemos que uma função diferenciável φ é uma **solução** da equação diferenciável (5.3) se $\frac{d\varphi}{dx}(x) = f(x,\, \varphi(x))$ para todo x nalgum intervalo aberto. O gráfico de uma solução diz-se a **curva-solução** de uma equação diferencial.

O exemplo seguinte mostra-nos que pode existir uma infinidade de funções que verificam uma dada equação diferencial.

Exemplo 5.3. *Verifique que a função $\varphi(x) = x + C\, e^{-x} - 1$ é uma solução da equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} = x - y$, onde C representa uma constante arbitrária.*

Calculando o primeiro membro da equação diferencial

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d}{dx}(x + C\, e^{-x} - 1) = 1 - C\, e^{-x},$$

e o segundo membro,

$$x - \varphi = x - (x + C\, e^{-x} - 1) = 1 - C\, e^{-x},$$

verificamos que as expressões obtidas são iguais, pelo que podemos concluir que a função $\varphi(x) = x + C\, e^{-x} - 1$ verifica a equação diferencial dada. Observemos que esta verificação não nos mostra como é que a solução $\varphi(x) = x + C\, e^{-x} - 1$ é determinada.

Como este exemplo ilustra, a solução de uma equação diferencial de primeira ordem envolve normalmente uma constante C. Para cada valor de C obtemos uma curva-solução e as diferentes curvas-solução não se intersectam. Essa constante C fica determinada se for estipulada uma condição inicial.

O par de equações

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,\, y) \\[2ex] y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{5.4}$$

traduz um problema de valor inicial. Dizemos que uma função diferenciável φ é uma solução do problema de valor inicial (5.4) se $\frac{d\varphi}{dx}(x) = f(x, \varphi(x))$ e $\varphi(x_0) = \varphi_0$, para todo x num intervalo aberto contendo x_0. A equação $y(x_0) = y_0$ é designada por condição inicial.

Demonstra-se que sob certas condições impostas a f, o problema de valor inicial (5.4) admite uma única solução.

Exemplo 5.4. *Utilize os cálculos do Exemplo 5.3 para resolver o problema de valor inicial* $\frac{dy}{dx} = x-y$, $y(0) = 2$.

Verificámos no exemplo 5.3 que $y(x) = x + C\,e^{-x} - 1$ é uma solução geral da equação diferencial dada, para uma constante arbitrária C. Substituindo $x = 0$ vem $y(0) = C - 1$. Para verificar a condição inicial $y(0) = 2$, resolvemos a equação $C - 1 = 2$ que tem como solução $C = 3$. Logo, $y(x) = x + 3\,e^{-x} - 1$ é a solução do problema de valor inicial dado.

5.2 Equações diferenciais da forma $\frac{dy}{dx} = g(x)$

A mais simples de todas as equações diferenciais é da forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \tag{5.5}$$

que resolvemos escrevendo

$$\boxed{y(x) = \int g(x)\,dx + C} \tag{5.6}$$

ou seja, (6.4) significa apenas que y é uma primitiva de g.

Assim, se g é contínua num intervalo aberto contendo x_0, para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = g(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

a solução única determina-se por integração,

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{dt}\,dt &= \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \\ y(x) - y(x_0) &= \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt. \end{aligned}$$

donde,

$$\boxed{y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt.} \tag{5.7}$$

Exemplo 5.5. *Resolva o problema de valor inicial* $\frac{dy}{dx}(x) = 2x + 1$, $y(1) = 5$.

Aplicando (5.7), temos

$y(x) = 5 + \int_1^x (2t + 1)\, dt = 5 + \left.(t^2 + t)\right|_{t=1}^{t=x} = 5 + (x^2 + x - 2) = x^2 + x + 3.$

5.3 Equações diferenciais separáveis

Não existe uma técnica única para resolver a equação (5.3). Vários métodos têm sido desenvolvidos para lidar com casos especiais de acordo com a forma da expressão $f(x, y)$.

Nesta secção vamos estudar o caso em que $f(x, y) = g(x)\, h(y)$. As expressões

$$f(x, y) = 4\cos(x), \qquad f(x, y) = 7\, y^3, \qquad f(x, y) = \frac{2 + x}{1 + y^2}$$

são todas deste tipo. Quando $f(x, y)$ é factorizada na forma $g(x)\, h(y)$, a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = g(x)\, h(y) \tag{5.8}$$

diz-se separável porque y e x podem ser separadas por ambos os membros. Podemos reescrever a equação (5.8), supondo que $h(y) \neq 0$, como

$$\frac{1}{h(y)} \frac{dy}{dx} = g(x)$$

e primitivamos em ordem a x:

$$\int \frac{1}{h(y)} \frac{dy}{dx}\, dx = \int g(x)\, dx. \tag{5.9}$$

Seja H uma primitiva de $\dfrac{1}{h}$ e seja G uma primitiva de g. Aplicando a regra da cadeia, temos

$$\frac{d}{dx} H(y) = \frac{dH}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{h(y)} \frac{dy}{dx}.$$

Portanto, a equação (5.9) pode ser escrita como

$$\boxed{H(y) = G(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.}$$

Não é necessário colocar uma constante de integração em cada membro, podem ser combinadas numa só.

Este processo de resolução de uma equação diferencial é chamado **método de separação das variáveis.**

Exemplo 5.6. *Resolva o problema de valor inicial*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{1+y^2}, \qquad y(0) = 3.$$

A equação diferencial dada é separável, visto que pode ser escrita na forma $\frac{dy}{dx} = g(x)\,h(y)$ com $g(x) = x$ e, $h(y) = \frac{1}{1+y^2}$.
Seguindo o método de resolução atrás apresentado, separando as variáveis e calculando as primitivas,

$$\int (1+y^2)\,\frac{dy}{dx}\,dx = \int x\,dx \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{3}\,y^3 + y = \frac{1}{2}\,x^2 + C.$$

Para que esta equação satisfaça a condição inicial dada $y(0) = 3$, então C terá de verificar

$$\frac{1}{3}\,3^3 + 3 = \frac{1}{2}\,0^2 + C \qquad \Leftrightarrow \qquad C = 12.$$

Por conseguinte, $\frac{1}{3}\,y^3 + y = \frac{1}{2}\,x^2 + 12$ é a solução do problema de valor inicial dado.

Este exemplo mostra uma característica do método de separação das variáveis: em geral, o método não fornece a solução y da equação diferenciável $\frac{dy}{dx}(x) = g(x)\,h(y)$ na forma explícita. Isto é, em geral, este método não nos dá o resultado na forma $y(x) =$ (expressão em x) mas sim na forma implícita

$$(\text{expressão em } y) = (\text{expressão em } x).$$

Normalmente é bastante complicado explicitar a solução para verificar a correcção do resultado. Contudo, não é muito difícil derivar implicitamente a equação $\frac{1}{3}\,y^3 + y = \frac{1}{2}\,x^2 + 12$ para verificarmos que a função y definida implicitamente é, de facto, solução do problema de valor inicial dado.

Exemplo 5.7. *Sejam $y(t)$ e $v(t) = \frac{dy}{dt}$ a altura e a velocidade, respectivamente, de um projéctil disparado na vertical da superfície da Terra com velocidade inicial v_0. Pela Lei da Gravitação de Newton*

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{gR^2}{(R+y)^2}$$

onde R é o raio da Terra e g é a aceleração devida à gravidade na superfície da Terra. Supondo que $v_0 < \sqrt{2gR}$, qual é a altura máxima atingida pelo projéctil?

No instante em que o projéctil atinge a altura máxima a sua velocidade é 0. Portanto, o objectivo consiste em determinar v como uma função de y e resolver para o valor de y para o qual $v = 0$. Como primeiro passo, utilizamos a regra da cadeia para exprimir $\frac{dv}{dt}$ em termos de $\frac{dv}{dy}$:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dy}\,v.$$

Igualando esta expressão para $\frac{dv}{dt}$ com a expressão dada pela Lei da Gravitação de Newton, obtemos

$$v\,\frac{dv}{dy} = -\frac{gR^2}{(R+y)^2}.$$

Visto que esta equação diferencial é separável, aplicando o método de separação das variáveis, obtemos

$$\int \big(v\,\frac{dv}{dy}\big)\,dy = \int \Big(-\frac{gR^2}{(R+y)^2}\Big)\,dy$$

donde resulta,

$$\frac{1}{2}\,v^2(y) = \frac{gR^2}{R+y} + C$$

Quando $y = 0$, vem $v(0) = v_0$. Logo,

$$\frac{1}{2}\,v_0^2 = \frac{gR^2}{R} + C \qquad \Leftrightarrow \qquad C = \frac{1}{2}\,v_0^2 - gR$$

Então,

$$\frac{1}{2}\,v^2(y) = \frac{gR^2}{R+y} + \big(\frac{1}{2}\,v_0^2 - gR\big). \tag{5.10}$$

Substituindo $v(y) = 0$ na equação (5.10) e resolvendo em ordem a y determinamos que a altura máxima é $\dfrac{v_0^2R}{2gR - v_0^2}$.

5.4 Equações diferenciais autónomas

As equações diferenciais da forma

$$\frac{dy}{dx} = h(y) \tag{5.11}$$

onde o segundo membro não depende explicitamente de x, são designadas por equações diferenciais autónomas.

Como vimos anteriormente, no modelo Malthusiano, em que a a taxa de crescimento é, em cada instante, proporcional ao tamanho da população nesse instante, obtemos a equação diferencial

$$\frac{dN}{dt} = rN(t), \quad t \geq 0 \tag{5.12}$$

para modelar o comportamento da população.

Supondo $r = 2$, a solução da equação diferencial (5.12) com a condição inicial $N(0) = 20$ é, como vimos na secção 5.1, dada por

$$N(t) = 20\, e^{2t}, \quad t \geq 0.$$

Podemos escrever a solução particular da equação (5.12) com a condição inicial $N(t_0) = N_0$ na forma,

$$N(t) = N_0\, e^{r(t-t_0)} \tag{5.13}$$

pois, se

$$N(t_0) = C\, e^{rt_0} \quad \Leftrightarrow \quad C = N(t_0)\, e^{-rt_0}$$

então,

$$N(t) = N(t_0)\, e^{-rt_0} \times e^{rt}$$

donde obtemos (5.13).

Suponhamos que aplicávamos o mesmo modelo ($r = 2$) mas a observação da população era feita no instante $t_0 = 10$ e que o tamanho da população era o mesmo, isto é, $N(10) = 20$. Então, por (5.13), obtemos

$$N(t) = 20\, e^{2(t-10)}.$$

O gráfico desta solução pode ser obtido a partir do gráfico da solução anterior, onde $N(0) = 20$, através de uma translacção de 10 unidades para a direita (Figura 5.4).

Isto significa que uma população começando com $N_0 = 20$ segue a mesma trajectória, independentemente do instante em que começamos a experiência. Biologicamente, esta conclusão faz todo o sentido: se as condições de crescimento não dependem explicitamente do tempo, a experiência deverá dar o mesmo resultado independentemente de quando é iniciada.

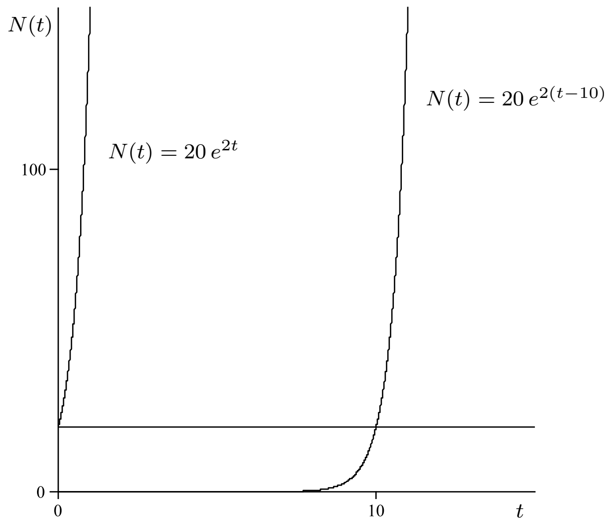


Figura 5.4: *O gráfico da solução* $N(t) = 20\,e^{2t}$ *sofre uma translação e o ponto inicial é* (10, 20).

Se as condições de crescimento da população variam com o tempo, não poderemos usar uma equação diferencial autónoma para descrever o crescimento da população; nesse caso, teríamos de incluir explicitamente a dependência do tempo na equação.

Formalmente, podemos resolver qualquer equação do tipo (5.11) através do método de separação das variáveis indicado na secção 5.3. Vamos ver como resolver a equação logística (5.2).

Exemplo 5.8. *Determine a solução da equação diferencial logística (5.2) com a condição inicial* $N(t_0) = N_0$.

Para aligeirar a notação vamos definir $a = r$ e $b = \frac{r}{K}$. Assim,

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dN}{dt} = N\,(a - bN).$$

Seguindo o método de separação das variáveis, escrevemos

$$\begin{aligned} H(N) = \int_{N_0}^{N} \frac{1}{ar - br^2}\,dr &= \frac{1}{a}\int_{N_0}^{N}\left(\frac{1}{r} + \frac{b}{a - br}\right) dr \qquad \text{(aplicando o método das fracções parciais)} \\ &= \frac{1}{a}\Big(\big(\ln(N) - \ln(N_0)\big) + \big(-\ln\big(|a - bN|\big) + \ln\big(|a - bN_0|\big)\big)\Big) \\ &= \frac{1}{a}\ln\left(\frac{N}{N_0}\left|\frac{a - bN_0}{a - bN}\right|\right). \end{aligned}$$

Por seu lado, G define-se por

$$G(t) = \int_{t_0}^{t} ds = t - t_0,$$

donde,

$$\frac{1}{a}\ln\Big(\frac{N}{N_0}\left|\frac{a-bN_0}{a-bN}\right|\Big) = t - t_0.$$

Como $\dfrac{a-bN_0}{a-bN}$ é sempre positivo para $t_0 < t < +\infty$, vem

$$a\,(t-t_0) = \ln\Big(\frac{N}{N_0}\,\frac{a-bN_0}{a-bN}\Big)$$

e, aplicando a exponencial a ambos os membros, vem

$$e^{a\,(t-t_0)} = \frac{N}{N_0}\,\frac{a-bN_0}{a-bN} \qquad \Leftrightarrow \qquad N_0\,(a-bN)\,e^{a\,(t-t_0)} = N\,(a-bN_0).$$

Resolvendo para N, encontramos a solução da equação logística com condição inicial N_0,

$$N(t) = \frac{a\,N_0}{b\,N_0 + (a-bN_0)\,e^{-a\,(t-t_0)}}\,.$$

E, recuperando r e K, fica

$$N(t) = \frac{N_0}{\frac{N_0}{K} + (1-\frac{N_0}{K})\,e^{-r\,(t-t_0)}}\,.$$

5.5 Equações diferenciais lineares de primeira ordem

Equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem são equações diferenciais da forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x) \tag{5.14}$$

onde $p,\ q : I =]a,\,b[\subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas. Se $p = 0$, encontramo-nos nas condições da secção 5.2. Vamos ver como o caso geral em estudo se pode reduzir a um problema de primitivação.

Definamos P uma primitiva de p, isto é, $P(x) = \int p(x)\,dx$. Multiplicando ambos os membros de (5.14) por $e^{P(x)}$, obtemos uma equação equivalente pois a função exponencial não se anula,

$$e^{P(x)}\,\big(\frac{dy}{dx} + p(x)\,y\big) = e^{P(x)}\,q(x).$$

Observemos que o primeiro membro é precisamente a derivada do produto $e^{P(x)}\,y$, logo, podemos escrever,

$$\Big(e^{P(x)\,y}\Big)' = e^{P(x)}\,q(x).$$

Primitivando ambos os membros,

$$e^{P(x)}\, y = C + \int \big(e^{P(x)}\, q(x)\big)\, dx,$$

e, resolvendo para y, vemos que as soluções da equação (5.14) são as funções da forma

$$y(x) = Ce^{-P(x)} + e^{-P(x)} \int \big(e^{P(x)}\, q(x)\big)\, dx,$$

onde C é uma constante arbitrária.

Mostrámos assim o método de variação das constantes para equações lineares de primeira ordem: As soluções da equação diferencial $\frac{dy}{dx} + p(x)\, y = q(x)$, $x \in I$, são as funções, definidas em I,

$$\boxed{y(x) = Ce^{-P(x)} + e^{-P(x)} \int \big(e^{P(x)}\, q(x)\big)\, dx, \qquad C \in \mathbb{R}.}$$

O termo $P(x)$ é designado usualmente por factor integrante.

Se estipularmos o valor da solução no ponto x_0, a constante C e, portanto, toda a função ficam determinad0s de forma única. Formulamos assim o problema de valor inicial para equações diferenciais lineares de primeira ordem:

Dados $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, o problema de valor inicial em I

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\, y = q(x), \quad y(x_0) = y_0,$$

tem uma solução única, definida em I, por

$$\boxed{y(x) = y_0\, e^{-P(x)} + e^{-P(x)} \int_{x_0}^{x} \big(e^{P(t)}\, q(t)\big)\, dt.}$$

com $P(x) = \int_{x_0}^{x} p(t)\, dt$.

Exemplo 5.9. *Resolva a equação diferencial linear*

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x+1}\, y = (x+1)^2, \qquad (x > -1).$$

Sendo $P(x) = \int \left(- \frac{1}{x+1} \right) dx = - \ln(x+1) = \ln\left(\frac{1}{x+1}\right)$, vem

$$\begin{aligned} y(x) &= C\, e^{\ln(x+1)} + e^{\ln(x+1)} \int e^{\ln(\frac{1}{x+1})} (x+1)^2\, dx \\ &= C\,(x+1) + (x+1) \int \frac{1}{x+1}\,(x+1)^2\, dx \\ &= C\,(x+1) + (x+1)(\frac{x^2}{2} + x). \end{aligned}$$

Exemplo 5.10. *Suponhamos que um tanque com* 500 *litros de capacidade contém inicialmente* 100 *litros de água pura. No instante* $t = 0$*, começa a entrar líquido no tanque à velocidade de* 2 *litros por segundo, sendo este líquido constituído por uma mistura homogénea de* 50% *de água e* 50% *de poluentes. Simultaneamente, a mistura que se forma no tanque (e que se supõe sempre homogénea) sai do tanque à velocidade constante de* 1 *litro por segundo. Pretende-se calcular a percentagem de poluentes no líquido do tanque no instante em que este fica cheio.*

Designemos por $p(t)$ a quantidade de poluentes existentes no tanque no instante t, onde $t \geq 0$ é suficientemente pequeno para que o tanque não tenha ainda transbordado.
Representemos por $\frac{dp}{dt}(t)$ a taxa de variação da quantidade de poluentes no instante t, dada pela diferença entre a quantidade de poluentes que entram por unidade de tempo e a quantidade de poluentes que saiem por unidade de tempo.
A quantidade de poluente que entra no tanque por unidade de tempo é 1 litro.
A concentração de poluentes no tanque é dada por $\dfrac{p(t)}{V(t)}$, onde $V(t)$ é o volume total de líquido existente no tanque no instante t.
A quantidade de poluentes que sai, por unidade de tempo, é dada pelo produto da concentração de poluentes pela quantidade de líquido que sai por unidade de tempo, ou seja, $\dfrac{p(t)}{V(t)} \times 1$.
Então,

$$\frac{dp}{dt}(t) = 1 - \frac{p(t)}{V(t)}. \tag{5.15}$$

Em cada instante t, o volume de líquido contido no tanque é dado pela soma da quantidade inicial de líquido com a quantidade que é retida até esse momento. Como em cada unidade de tempo entram 2 litros e sai 1 litro, teremos

$$V(t) = 100 + t \tag{5.16}$$

e, a equação (5.15) escreve-se

$$\frac{dp}{dt} = 1 - \frac{p(t)}{100+t}.$$

Resolvendo, pela método de variação das constantes, obtemos

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{1}{100+t}\Big(C + \int (100+t)\,dt\Big) \\ &= \frac{1}{100+t}\,(C + 100t + \frac{t^2}{2}). \end{aligned}$$

Visto que $p(0) = 0$, vem $C = 0$ e, portanto,

$$p(t) = \frac{t\,(200+t)}{200+2t},$$

que representa a quantidade de poluentes existente no tanque no instante t. Pretendemos saber a percentagem de poluentes quando o tanque está cheio, isto é, quando $V(t) = 500$.
De (5.16), concluímos que o tanque estará cheio quando $t = 500 - 100 = 400$. Assim, a concentração de poluentes quando o tanque está cheio é dada por $\dfrac{p(400)}{500} = \dfrac{240}{500} = 0.48$.
O tanque contém, portanto, 48% de poluentes no instante em que fica cheio.

Exemplo 5.11. Suponhamos que um lago tem um volume de líquido V constante, sendo iguais os volumes de líquido que entra, v, e sai, por unidade de tempo.
Consideremos que a concentração de poluentes que entra no lago é dada por uma função contínua γ_e. Suponhamos ainda a diferenciabilidade da função $p(t)$, representando a quantidade de poluentes no instante t, e que os poluentes se encontram uniformemente distribuídos no lago. Então $\gamma_e(t)\,\dfrac{p(t)}{V}$ indica a concentração de poluentes que entra no lago no instante t
Sendo $\frac{dp}{dt}(t)$ a taxa de variação da quantidade de poluentes no instante t, obtida pela diferença entre a quantidade de poluente que entra por unidade de tempo, v_e, e a quantidade de poluente que sai por unidade de tempo, v_s,

$$\frac{dp}{dt}(t) = v_e - v_s.$$

ou seja,

$$\frac{dp}{dt}(t) = \gamma_e(t)\,v - \frac{p(t)}{V}\,v$$

Concluímos assim que p satisfaz uma equação diferencial linear,

$$\frac{dp}{dt}(t) + \frac{v}{V}\,p(t) = v\,\gamma_e(t),$$

cuja solução, com condição inicial $p(0) = p_0$, é

$$p(t) = p_0\,e^{-\lambda t} + v\,e^{\lambda t}\int_0^t e^{s\lambda}\gamma_e(s)\,ds \quad (\text{com } \lambda = \frac{v}{V}).$$

A partir desta expressão é possível proceder a uma análise qualitativa (e também quantitativa) da quantidade de poluição. Por exemplo, se $P_e(t) = 0$ (não entram poluentes) então a poluição existente tende para zero exponencialmente. Se $\gamma_e(t) = \gamma_e$ (constante) então $p(t)$ é uma média ponderada entre a poluição inicial e uma "poluição limite" $V\gamma_e$:

$$p(t) = p_0\, e^{-\lambda t} + V\,\gamma_e(1 - e^{-\lambda t}).$$

5.6 Exercícos e complementos

1. Verifique que a função φ satisfaz a equação diferencial (C representa uma constante).

   (a) $y' = xy, \quad \varphi(x) = C\, e^{\frac{x^2}{2}}$

   (b) $y' = x - 3y, \quad \varphi(x) = \dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{9} + C\, e^{-3x}$

   (c) $y' = x + xy, \quad \varphi(x) = C\, e^{\frac{x^2}{2}} - 1$

   (d) $y' = y + x^2, \quad \varphi(x) = C\, e^{x} - x^2 - 2x - 2.$

2. Averigue se $y(x) = 2\, e^{-x} + x\, e^{-x}$ é solução de $y'' + 2y' + y = 0$.

3. Mostre que $y = \frac{1}{x^2-1}$ é solução de $y' + 2xy^2 = 0$ em $I =]-1, 1[$ mas não o é em qualquer outro intervalo mais amplo contendo I.

4. Resolva os seguintes problemas de valor inicial

   (a) $y'(x) = 2x \quad y(1) = 3$

   (b) $y'(x) = \cos(x) \quad y(0) = 2$

   (c) $y'(x) = \sec^2(x) \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3.$

5. Aplique o método de separação das variáveis para resolver as equações diferenciais seguintes.

   (a) $y' = \dfrac{x+1}{y^2}$ (b) $y' = \dfrac{e^x}{y^2}$ (c) $y' = xy^2$

   (d) $y' = -2\,(3y + 4)$ (e) $y' = \dfrac{x^2+1}{3y^2}$ (f) $y' = \sqrt{\dfrac{y}{x}}$

6. Determine as soluções gerais das seguintes equações.

   (a) $y' - 3y = 6$ (b) $y' + 2y = x^2$ (c) $\dfrac{dy}{dx} + xy = 1$

   (d) $y' - 2xy = x$ (e) $y' + y = \operatorname{sen}(x)$ (f) $y' - y = \cos(2x)$.

7. Determine a solução dos seguintes problemas de valor inicial.

   (a) $y' = \dfrac{2x}{y}, \quad y(1) = -2$ (b) $y' = 2 - y, \quad y(0) = 3$ (c) $y' = 3xy - 2x, \quad y(0) = 1$

   (d) $y' = \dfrac{xy}{x^2+1}, \quad y(0) = 1$ (e) $y' = xy\,e^x, \quad y(1) = 1$ (f) $y' = 3x^2\,e^{-y}, \quad y(0) = 1.$

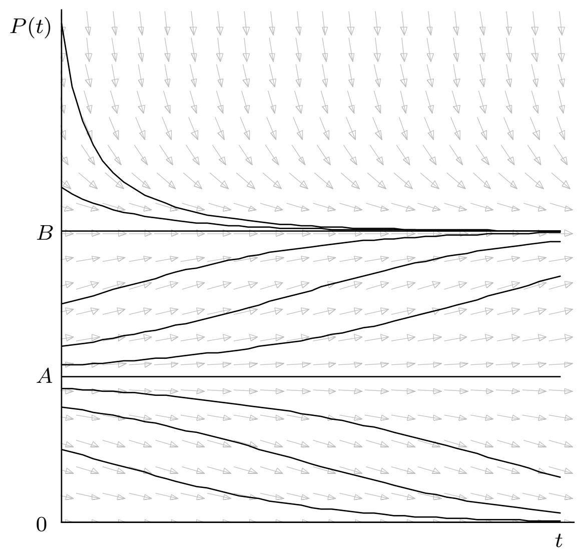
8. Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' + y = \operatorname{sen}(x) \\ y(\pi) = 1. \end{cases}$$

9. Determine a solução do problema de valor inicial $y' + y = 0$, $y(3) = 2$, sabendo que a solução geral da equação é $(x) = C\,e^{-x}$ com C constante arbitrária.

10. Sabendo que $y(x) = \alpha\,e^{2x} + \beta\,e^{-2x}$ é solução da equação diferencial $y'' - 4y = 0$, determine as constantes reais α e β se $y(0) = 3$ e $y'(0) = -2$.

11. Descreva o comportamento do modelo populacional ilustrado na figura.



12. Suponha que num determinado ecossistema existe um tipo de predador e um tipo de presa. Representemos por $100\,x$ o número de predadores e por $1000\,y$ o número de presas. O matemático austríaco A. J. Lotka (1880-1949) e o matemático italiano Vito Volterra (1860-1940) propuseram a seguinte relação entre o tamanho das duas populações, designada por equação de Lotka-Volterra:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\,(a - bx)}{x\,(cy - d)}.$$

Resolva esta equação aplicando o método de separação das variáveis. Qual é a relação predador-presa se a população inicial de presas é 1500, a população inicial de predadores é 200, e $a = 6$, $b = 2$, $c = 4$ e $d = 7$?

Capítulo 6

Matrizes e determinantes

6.1 Definições e generalidades

Um exemplo. Duas espécies diferentes de insectos são criadas juntas num laboratório, sendo-lhes fornecido diariamente dois tipos de alimento diferente. Cada indivíduo da espécie 1 consome 5 unidades do alimento A e 3 unidades do alimento B, enquanto que cada indivíduo da espécie 2 consome 2 unidades do alimento A e 4 unidades do alimento B, em média, por dia. Por dia, o técnico do laboratório fornece 900 unidades de alimento A e 960 unidades de alimento B. Quanto elementos de cada espécie estão a ser criados?

Para resolvermos este problema, estabelecemos um sistema de equações.
Representando por,

x — número de indivíduos da espécie 1

y — número de indivíduos da espécie 2

então o seguinte sistema de equações tem de ser satisfeito

alimento A: $5x + 2y = 900$

alimento B: $3x + 4y = 960.$

Temos assim um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas,

$$\begin{cases} 5x + 2y = 900 \\ 3x + 4y = 960. \end{cases} \tag{6.1}$$

Este sistema pode ser resolvido eliminando uma das variáveis, por exemplo x, multiplicando a primeira equação por $-\frac{3}{5}$ e adicionando à segunda

$$\begin{cases} 5x + 2y = 900 \\ \dfrac{14}{5}\, y = 420. \end{cases}$$

Donde retiramos $y = 150$. Substituindo na primeira equação, obtemos $x = 120$.

Veremos neste capítulo um outro processo de resolução de equações lineares.

O sistema de equações (6.1) pode ser representado da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 900 \\ 960 \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

e dizemos que (6.2) é a **representação matricial** do sistema (6.1), onde

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

é uma matriz de 2 linhas por 2 colunas (**matriz dos coeficientes**) e,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{e,} \quad \begin{bmatrix} 900 \\ 960 \end{bmatrix}.$$

são matrizes de 2 linhas por 1 coluna (**matriz-coluna** ou **vector**).

Dados dois números naturais m e n, chama-se **matriz real** de dimensão $m \times n$ uma função A definida no conjunto $\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ e com valores em $\mathbb{R}$; designam-se as **componentes**, **elementos** ou **entradas** da matriz A por $a_{ij} = A(i, j)$.

Convencionalmente, uma matriz é representada por uma letra maiúscula e as suas componentes por uma letra minúscula com a linha e a coluna indicadas em índice inferior. Assim a_{ij} é interpretado como sendo a componente da matriz A na linha i e coluna j.

Exercício 6.1. *Considere a matriz* $A = \begin{bmatrix} 0.21 & 7 & -3 \\ 9 & 0 & -0.75 \\ 0.8 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Identifique a_{12}, a_{23} *e* a_{31}.

(b) Calcule: (i) $\sum_{i=1}^{3} a_{i1}$. (ii) $\sum_{i=1}^{3} a_{3i}$. (iii) $\sum_{i=1}^{3} a_{ii}$.

Diz-se que a matriz A é **quadrada** se tem o mesmo número de linhas e de colunas. Se o número de linhas m é diferente do número de colunas n, a matriz diz-se **rectangular** de dimensão $m \times n$. Chama-se **diagonal principal** da matriz A às componentes a_{ii}, com o mesmo número de linha e de coluna, ordenadas por ordem crescente dos índices.

Designa-se por **traço** da matriz $A_{n\times n}$ a soma dos elementos da diagonal principal,

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Matriz triangular é a matriz quadrada em que são nulos os elementos acima ou abaixo da diagonal principal. Distinguimos entre: **matriz triangular inferior** quando são nulos os elementos acima da diagonal principal (isto é, $a_{ij} = 0$ para $i < j$), e **matriz triangular superior** quando os elementos abaixo da diagonal principal são todos nulos (isto é, $a_{ij} = 0$ para $i > j$). Uma matriz triangular pode, eventualmente, ter zeros na diagonal. Uma matriz $A_{n\times n}$ é **diagonal** se $a_{ij} = 0$ quando $i \neq j$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Quadro 6.1: A matriz triangular inferior, B matriz triangular superior, C matriz diagonal.

Uma matriz quadrada de dimensão n diz-se **simétrica** se $a_{ij} = a_{ji}$ para $1 \leq i,\, j \leq n$.

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 & 0 & 5 \\ -3 & 9 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 11 & 8 \\ 5 & -2 & 8 & 21 \end{bmatrix}$$

Quadro 6.2: Matriz simétrica.

EXERCÍCIO 6.2. *Determine os valores de a, b e c de forma que a matriz* $A = \begin{bmatrix} -3 & 4.1 & a \\ b & 2 & c \\ 3.4 & -1.5 & 1 \end{bmatrix}$ *seja simétrica.*

COMBINAÇÃO LINEAR DE MATRIZES As operações básicas para matrizes são a **multiplicação por um escalar** e a **adição de matrizes**. Definem-se pela aplicação dessas operações componente a componente da matriz e, só se podem adicionar matrizes com a mesma dimensão.

EXEMPLO 6.1. *Sendo*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ \frac{3}{2} & 6 & -4 \\ 8 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad e, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

então $2A$ é dado por:

$$2A = \begin{bmatrix} 2 \times (-2) & 2 \times 1 & 2 \times 5 \\ 2 \times \frac{3}{2} & 2 \times 6 & 2 \times (-4) \\ 2 \times 8 & 2 \times 0 & 2 \times (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 10 \\ 3 & 12 & -8 \\ 16 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

e $A + B$ é dado por:

$$A + B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ \frac{3}{2} & 6 & -4 \\ 8 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+7 & 1+(-3) & 5+0 \\ \frac{3}{2}+2 & 6+(-5) & -4+3 \\ 8+1 & 0+6 & -1+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 5 \\ \frac{7}{2} & 1 & -1 \\ 9 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

MULTIPLICAÇÃO DE UMA MATRIZ POR UM VECTOR. Dada uma matriz $m \times n$, $A = [a_{ij}]$ e um vector $n \times 1$, $\boldsymbol{u}$, de componentes $u_j\,(j = 1, \dots, n)$, o **produto** $A\boldsymbol{u}$ é o vector coluna cuja componente i é:

$$\boxed{(A\boldsymbol{u})_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, u_j \qquad (i = 1, \dots, m).}$$

Assim para multiplicar uma matriz por um vector é necessário que o número de colunas da matriz seja igual ao número de componentes do vector obtendo-se um vector cujo número de componentes é igual ao número de linhas da matriz.

Exemplo 6.2.

$$Au = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -2 \times 7 + 1 \times (-1) + 0 \times 2 \\ 5 \times 7 + 6 \times (-1) + (-1) \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 27 \end{bmatrix}.$$

Multiplicação de matrizes. Se pretendermos multiplicar uma matriz A por uma matriz B de duas colunas, definimos o produto AB como sendo uma matriz de duas colunas, em que cada coluna se obtém multiplicando A pelo vector dado pela correspondente coluna de B.
Por outras palavras, se B é uma matriz cujas colunas são os vectores $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_p$, o produto AB é a matriz cujas colunas são os vectores $A\boldsymbol{b}_1, \ldots, A\boldsymbol{b}_p$.
Uma matriz A só pode ser multiplicada por uma matriz B se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B e, então, a matriz produto AB tem tantas linhas como A e tantas colunas como B.

Exemplo 6.3.

$$AB = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \times 7 + 1 \times 2 & -2 \times (-3) + 1 \times (-5) & -2 \times 0 + 1 \times 3 \\ \frac{3}{2} \times 7 + 6 \times 2 & \frac{3}{2} \times (-3) + 6 \times (-5) & \frac{3}{2} \times 0 + 6 \times 3 \\ 8 \times 7 + 0 \times 2 & 8 \times (-3) + 0 \times (-5) & 8 \times 0 + 0 \times 3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -12 & 1 & 3 \\ \frac{45}{2} & -\frac{69}{2} & 18 \\ 56 & -24 & 0 \end{bmatrix}.$$

Propriedades das matrizes. Desde que as dimensões das matrizes sejam tais que as operações indicadas façam sentido, tem-se:

1. A multiplicação de duas matrizes é associativa: $(AB)\,C = A\,(BC)$.

2. A multiplicação de matrizes não é comutativa: em geral $AB \neq BA$.

3. A multiplicação de matrizes é distributiva relativamente à adição: $A\,(B+C) = AB+AC$.

4. Existência de elemento neutro para a multiplicação de matrizes. Designa-se por **matriz identidade** $n \times n$ a matriz I cujos elementos são 1 ao longo da diagonal principal e 0 fora dela; por exemplo, para $n = 4$,

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   A multiplicação de uma matriz arbitrária pela matriz identidade dá como resultado a matriz original: $AI = A$ e $IB = B$.

5. Existência de elemento neutro para a adição de matrizes. Existe uma única matriz, a **matriz nula 0**, que adicionada a qualquer matriz A, dá como resultado essa matriz: $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A$. A matriz nula $m \times n$ é a matriz cujos elementos são todos nulos.

TRANSPOSIÇÃO DE MATRIZES. A transposição de uma matriz é a operação que a uma dada matriz A faz corresponder uma outra matriz, mudando ordenadamente as linhas em colunas (e, portanto, as colunas em linhas), que se chama **matriz transposta** de A e se representa por A^T. Podemos também dizer que a transposta de uma matriz $A_{m\times n}$ é uma matriz $B_{n\times m}$ definida por

$$\boxed{b_{ji} = a_{ij} \quad \text{para} \quad j = 1, \ldots, n \quad \text{e}, \quad i = 1, \ldots, m.}$$

EXEMPLO 6.4. *Se*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \textit{então} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Podem demonstrar-se as seguintes propriedades:

1. $(A^T)^T = A$, a transposta da transposta de uma matriz é a própria matriz.

2. $(A + B)^T = A^T + B^T$, a transposta da soma é igual à soma das transpostas das parcelas.

3. $(AB)^T = B^T A^T$, a transposta do produto é igual ao produto das transpostas dos factores por ordem inversa.

Observe-se que $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^T)$.

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. A matriz A é simétrica se é igual à sua transposta.

Matriz inversa. Um número real a diz-se ter inverso multiplicativo se existir um número real b tal que $ab = 1$. Qualquer número não-nulo a tem inverso multiplicativo $b = \frac{1}{a}$. Generalizamos o conceito de inverso multiplicativo a matrizes com a seguinte definição.

Uma matriz $A_{n\times n}$ diz-se não-singular ou invertível se existir uma matriz B tal que $AB = BA = I$. A matriz B diz-se o inverso multiplicativo de A.

Se B e C são ambos inversos multiplicativos de A, então

$$B = BI = B\,(AC) = (BA)\,C = IC = I.$$

Assim, uma matriz tem, no máximo, um inverso multiplicativo. Referir-nos-emos a este inverso multiplicativo de uma matriz não-singular como a matriz inversa de A e representá-la-emos por A^{-1}.

Exemplo 6.5. *As matrizes*

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad e, \quad \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

são inversa uma da outra, pois

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 6.6. *A matriz*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

não tem inversa. De facto, se B é uma matriz arbitrária 2×2, então

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, BA não pode ser igual a I.

Uma matriz $n \times n$ diz-se singular se não tem inverso multiplicativo. Adiante veremos como calcular a inversa de uma matrix não-singular.

6.2 DETERMINANTES

6.2.1 DETERMINANTE DE UMA MATRIZ

A uma matriz quadrada A podemos associar um número, $\det(A)$, cujo valor nos indicará se a matriz é não-singular. Antes de darmos a definição geral, consideremos os seguintes exemplos.

CASO I: MATRIZ 1×1

Se $A = [a_{11}]$ é uma matriz 1×1, então A terá inverso multiplicativo se e só se $a_{11} \neq 0$. Assim, definimos o determinante de A por

$$\det(A) = a_{11},$$

e, A será não-singular se e só se $a_{11} \neq 0$.

CASO II: MATRIZ 2×2

Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

O determinante desta matriz pode ser definido em termos de duas matrizes 1×1:

$$M_{11} = [a_{22}] \quad \text{e} \quad M_{12} = [a_{21}].$$

A matriz M_{11} é encontrada a partir de A eliminando a primeira linha e a primeira coluna e M_{12} é formada a partir de A eliminando a primeira linha e a segunda coluna.
O determinante de A pode ser escrito na forma

$$\det(A) = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21} = a_{11}\, \det(M_{11}) - a_{12}\, \det(M_{12}). \tag{6.3}$$

EXEMPLO 6.7. *O determinante da matriz* $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ *é* $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 - 4 \times 3 = -10.$

CASO III: MATRIZ 3×3

Para uma matriz 3×3,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

o determinante de A pode ser representado na forma

$$\det(A) = a_{11} \det(M_{11}) - a_{12} \det(M_{12}) + a_{13} \det(M_{13})$$

onde,

$$M_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad M_{12} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad M_{13} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

Vejamos agora como generalizar para o caso $n > 3$. Para tal necessitamos da seguinte definição. Seja A uma matriz $n \times n$ e representemos por M_{ij} a matriz de ordem $(n-1) \times (n-1)$ obtida a partir de A eliminando a linha e a coluna contendo a_{ij}. O determinante de M_{ij} é denominado por menor complementar de a_{ij}.

Definimos A_{ij} o cofactor (ou adjunto) de a_{ij} por

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij}).$$

De acordo com esta definição, para uma matriz 2×2, podemos reescrever a equação (6.3) na forma

$$\det(A) = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} \qquad (n = 2). \tag{6.4}$$

A equação (6.4) é chamada expansão em cofactores ao longo da primeira linha de A. Observemos que também podemos escrever

$$\det(A) = a_{21} A_{21} + a_{22} A_{22} \qquad (n = 2), \tag{6.5}$$

e, neste caso, exprimimos o $\det(A)$ em termos das entradas da segunda linha de A e dos seus cofactores. Na verdade, não é imprescindível que efectuemos a expansão ao longo de uma linha de A; o determinante pode também ser representado pela expansão em cofactores ao longo de uma das colunas.

Para uma matriz 3×3, temos

$$\det(A) = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}.$$

Exercício 6.3. *Calcule o determinante da matriz* $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} - 5 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 4 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2\,(6-8) - 5\,(18-10) + 4\,(12-5) = -16.$$

O **determinante** de uma matriz A de ordem $n \times n$, representado por $\det(A)$, é o escalar associado à matriz A definido da seguinte forma

$$\det(A) = \begin{cases} a_{11}, & \text{se } n = 1 \\ a_{11}\, A_{11} + a_{12}\, A_{12} + \cdots + a_{1n}\, A_{1n}\,, & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

onde,

$$A_{1j} = (-1)^{1+j}\, \det(M_{1j}), \qquad j = 1, \ldots, n$$

são os cofactores associados aos elementos da primeira linha de A.

Enunciamos algumas propriedades dos determinantes:

- Se A é uma matriz $n \times n$ com $n \geq 2$, então o $\det(A)$ pode ser exprimido como uma expansão em cofactores usando qualquer linha ou coluna de A;

- Se A é uma matriz $n \times n$, então $\det(A^T) = \det(A)$.

- Se A é uma matriz triangular, o determinante de A é igual ao produto dos elementos diagonais de A.

- Seja A uma matriz $n \times n$.

  - Se A tem uma linha ou uma coluna consistindo apenas de zeros, então $\det(A) = 0$.

  - Se A tem duas linhas ou duas colunas iguais, então $\det(A) = 0$.

- Uma matriz A de ordem $n \times n$ é **singular** se e só se

$$\det(A) = 0.$$

Regra de Sarrus

O matemático francês Pierre Frédéric Sarrus (1798-1861) desenvolveu uma regra para o cálculo de determinantes de matrizes de ordem 3,

$$\det(A) = \big(a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{32}\, a_{21}\big) - \big(a_{11}\, a_{23}\, a_{32} + a_{12}\, a_{33}\, a_{21} + a_{13}\, a_{22}\, a_{31}\big),$$

ilustrada na figura (6.1).

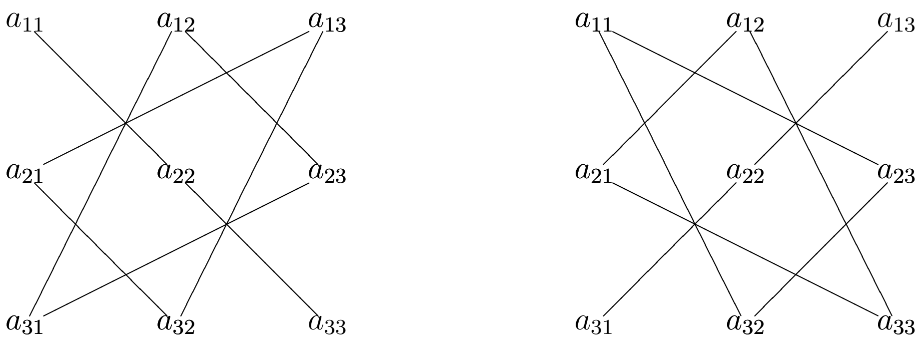


Figura 6.1: *Esquematização da regra de Sarrus.*

6.2.2 Cálculo da inversa de uma matriz não-singular

Vamos estudar agora um método para calcular a inversa de uma matriz não-singular aplicando determinantes.

Adjunta de uma matriz. Seja A uma matriz $n \times n$. Se A_{jk} representar o cofactor de a_{jk}, para $k = 1, \ldots, n$, então

$$a_{i1}\, A_{j1} + a_{i2}\, A_{j2} + \cdots + a_{in}\, A_{jn} = \begin{cases} \det(A) & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases} \tag{6.6}$$

Dada a matriz A podemos definir uma nova matriz, designada **adjunta** de A, por

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ A_{n1} & A_{n1} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \vdots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Assim, para construirmos a adjunta, temos de substituir cada termo pelo seu cofactor e transpôr a matriz resultante.

Por (6.6),

$$A\,\mathrm{adj}(A) = \det(A)\,I.$$

Se A é uma matriz não-singular, $\det(A)$ é um escalar diferente de zero e, podemos escrever,

$$A\left(\frac{1}{\det(A)}\,\mathrm{adj}(A)\right) = I.$$

Então,

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,\mathrm{adj}(A).}$$

EXEMPLO 6.8. *Para uma matriz 2×2, escrevemos*

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

Se A for não-singular, então

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

EXERCÍCIO 6.4. *Seja* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. *Determine* $\mathrm{adj}(A)$ *e* A^{-1}.

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -7 & 4 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,\mathrm{adj}(A) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -7 & 4 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{7}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

6.2.3 Regra de Cramer

Aplicando a fórmula para a inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{adj}(A)$$

podemos deduzir uma regra para determinar a solução do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ em termos dos determinantes.

Regra de Cramer. Seja A uma matriz não-singular $n \times n$ e seja $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Seja A_i a matriz obtida substituindo a i-ésima coluna de A por $\boldsymbol{b}$. Se $\boldsymbol{x}$ é a solução única de $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, então

$$\boxed{x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \qquad \text{para } i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n.}$$

A regra de Cramer fornece-nos um método de determinar a solução de um sistema de n equações lineares com n incógnitas em termos dos determinantes. No entanto, este método não é viável para sistemas de ordem muito elevada.

Com este método podemos resolver agora o sistema (6.2) do início do capítulo.

Assim,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 900 & 2 \\ 960 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 900 & 2 \\ 960 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{3600 - 1920}{20 - 6} = 120 \qquad \text{e,} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 900 \\ 3 & 960 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 900 & 2 \\ 960 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{4800 - 2700}{20 - 6} = 150.$$

Exemplo 6.9. *Utilize a regra de Cramer para resolver o seguinte sistema*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9. \end{cases}$$

O sistema dado escreve-se matricialmente na seguinte forma,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Calculamos então,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -4, \qquad \det(A_1) = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 9 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -4,$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 9 & 3 \end{vmatrix} = -4, \qquad \det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 9 \end{vmatrix} = -8,$$

onde A_1, A_2 e A_3 são as matrizes obtidas a partir de A substituindo a primeira, segunda e terceira colunas, respectivamente, por $\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$.

Logo, pela regra de Cramer, obtemos

$$x_1 = \frac{-4}{-4} = 1, \qquad x_2 = \frac{-4}{-4} = 1, \qquad x_3 = \frac{-8}{-4} = 2.$$

6.3 Exercícios e complementos

1. Escreva as matrizes 3×2, A e B, que têm como componentes $a_{ij} = i + j$ e $b_{ij} = (-1)^{i+j}$, respectivamente.

2. Sejam $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, $\qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $\qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine $A - B + 2C$.

   (b) Determine $-2A + 3B$.

   (c) Determine D de forma que $A + B = 2A - B + D$.

3. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$, $\qquad B = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \end{bmatrix}$, $\qquad C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine $2A + 3B - C$.

   (b) Determine $3C - B + \frac{1}{2}A$.

   (c) Determine D tal que $A + B + C + D = 0$.

   (d) Determine D tal que $A + 4B = 2(A + B) + D$.

4. Dê exemplo de uma matriz 4×4 que seja:

   (a) Triangular superior. (b) Simétrica. (c) Diagonal.

5. Determine as transpostas de: (a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$; (b) $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

6. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

   (a) Calcule AB.

   (b) Calcule $B^T A$.

7. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Mostre que $(AB)^T = B^T A^T$.

8. Uma matriz P diz-se idempotente se $P^2 = P$. Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} 25 & -20 \\ 30 & -24 \end{bmatrix}$ é idempotente.

9. Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

   (a) Determine os valores de $\det(M_{21})$, $\det(M_{22})$ e $\det(M_{23})$.

   (b) Determine os valores de A_{21}, A_{22} e A_{23}.

   (c) Use as respostas da alínea anterior para determinar $\det(A)$.

10. Utilize determinantes para averiguar se as seguintes matrizes são não-singulares.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

11. Calcule os seguintes determinantes:

   (a) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -8 & 4 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -4 \end{vmatrix}$

12. Determine todos os valores de λ para os quais o seguinte determinante é nulo.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

13. Encontre todos os valores possíveis de c para os quais a seguinte matriz é singular.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & c \\ 1 & c & 3 \end{bmatrix}$$

14. Para cada uma das matrizes seguintes, calcule (i) $\det(A)$, (ii) $\operatorname{adj}(A)$, e (iii) A^{-1}.

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

15. Utilize a regra de Cramer para resolver os seguintes sistemas:

(a) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 = 8 \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$

Bibliografia

[1] Brian E. Blank & Steven G. Krantz, *Calculus – Single variable*, Key College Publishing (2006).

[2] Carlos Sarrico, *Análise Matemática – Leituras e exercícios*, Gradiva (2002).

[3] Claudia Neuhauser, *Calculus for Biology and Medicine*, Pearson Education International, 2nd ed. (2004).

[4] Elon Lages Lima, *Curso de Análise*, vol. 1, IMPA (1989).

[5] I. A. Maron, *Problems in Calculus of One Variable*, 3rd ed., Mir Publishers, (1979).

[6] James Stewart, *Calculus – Concepts and Contexts*, 2nd ed., Brooks/Cole Publishing Company (2001).

[7] D. W. Jordan & P. Smith, *Mathematical Techniques – an Introduction for the Engineering, Physical and Mathematical Sciences*, 3rd ed., Oxford University Press (2002).

[8] Luis T. Magalhães, *Álgebra Linear como Introdução à Matemática Aplicada*, Texto Editora (1989).

[9] Mariano Giaquinta & Giuseppe Modica, *Mathematical Analysis – Functions of one variable*, Birkhauser (2003).

[10] Mário S. R. Figueira, *Fundamentos de Análise Infinitesimal*, FCUL (1997).

[11] Miguel Ramos, *Curso Elementar de Equações Diferenciais*, FCUL (2000).

[12] Steven J. Leon, *Linear Algebra with Applications*, 5th ed., Prentice-Hall (1998).

[13] S. T. Tan, *Applied Calculus*, 4th ed., Brooks/Cole Publishing Company (1999).

Index