

## OTIMIZAÇÃO DO DESIGN DO DUTO RAMIFICADO EM FORMA DE T COM ESCOAMENTO DE FLUIDO NEWTONIANO E PAREDES IMPERMEÁVEIS

Vinicius da Rosa Pepe<sup>1</sup>  
Luiz Alberto Oliveira Rocha<sup>2</sup>  
Flávia Schwarz Franceschini Zinani<sup>3</sup>  
Antonio Ferreira Miguel<sup>4</sup>

**Resumo:** Este artigo apresenta os resultados de escoamentos em dutos em forma de “T”. O problema consiste em encontrar as resistências ao escoamento em estruturas tridimensionais (3D) cujos sistemas têm diferentes relações homotética entre tamanhos (diâmetros e comprimentos) dos dutos de entrada e saída de fluido. O método utilizado é denominado “Constructal Design” e é fundamentado na “Teoria Constructal”. Este método baseia-se na minimização da resistência global sujeito a restrições geométricas, que no presente estudo são o volume e área ocupada pelos dutos considerados constantes. O escoamento nos dutos é considerado tridimensional, laminar, incompressível, e em regime permanente e com propriedades uniformes e constantes. Os resultados obtidos numericamente em geometrias 3D é validado por comparação com os resultados analíticos bidimensional disponíveis na literatura. A geometria será estudada para diferentes relações  $D_1 / D_0$  e  $L_1 / L_0$ , para diferentes número de Reynolds.

**Palavras-chave:** Lei de Hess-Murray. Estrutura em forma de T. Escoamento interno. Design Construtal. Fluido Newtoniano.

---

<sup>1</sup> Mestre, UFRGS, [viniciuspepe@gmail.com](mailto:viniciuspepe@gmail.com)

<sup>2</sup> Doutor, UNISINOS, [laorochoa@gmail.com](mailto:laorochoa@gmail.com)

<sup>3</sup> Doutora UNISINOS, [flavia.zinani@gmail.com](mailto:flavia.zinani@gmail.com)

<sup>4</sup> Doutor, Universidade de Évora, [afm@uevora.pt](mailto:afm@uevora.pt)

# 1 Introdução

O estudo do escoamento interno de fluidos e, particularmente, sistemas de escoamento em forma de árvore têm sido objeto de inúmeras investigações, devido a sua importância na compreensão do comportamento dos sistemas naturais e para o projeto de sistemas artificiais (Bejan, 2000, 2017; Bejan, & Lorente, 2008; Miguel & Rocha, 2018).

Os vasos sanguíneos, que fornecem tecidos celulares com células, nutrientes e oxigênio, eliminam os resíduos de produtos da atividade celular através de redes vasculares ramificadas. A árvore respiratória fornece oxigênio necessário para o metabolismo do tecido e remove o dióxido de carbono produzido (Miguel, 2015, 2016). Os tecidos, que compõem a zona respiratória desta árvore, suportam uma superfície de troca gasosa muito grande onde  $O_2$  é assimilado,  $CO_2$  é eliminado e o sangue é perfundido nos pulmões. Perfusão é o mecanismo pela qual as células do corpo e seus órgãos correspondentes são alimentados com oxigênio e nutrientes. Para um sistema de transporte de fluidos, a melhor configuração, que conecta um ponto-a-volume ou volume-a-ponto, é aquela em forma de árvore e uma razão ótima entre o duto grande (pai) e o pequeno (filho) é a incógnita a ser determinada (Bejan, 2000, 2017; Miguel, 2013, 2018).

Para o sistema vascular, assumindo que um escoamento de Hagen-Poiseuille flui através dos vasos (Hess, 1917; Murray, 1926), afirmaram que a vazão volumétrica deve ser proporcional ao cubo do diâmetro em um duto otimizado para exigir o trabalho mínimo para conduzir e manter o escoamento de fluido. Portanto, a ramificação ideal é obtida quando o cubo do diâmetro de um vaso pai é igual à soma dos cubos dos diâmetros dos filhos. Para os vasos simétricos, a razão entre diâmetros dos vasos filhos e parentais é  $2^{-1/3}$  (lei de Hess-Murray).

Esta maneira ótima de conectar vasos grandes e pequenos, tendo paredes rígidas e impermeáveis, somente é válida desde que o escoamento seja laminar, newtoniano, estável, incompressível e totalmente desenvolvido (Miguel, 2015, 2016, 2018). A lei de Hess-Murray também mostrou e descreveu diversos tipos de redes biológicas, como capilares e pequenas artérias e veias, vias aéreas da zona condutora do trato respiratório e veias foliares de plantas.

Grandes artérias, veias e vias aéreas da zona respiratória dos pulmões, entre outros, parecem não seguir esta regra  $2^{-1/3}$ . Além disso, os escoamentos turbulentos também não deveriam obedecer a essa lei. Na verdade Uylings (1977) e Bejan, Rocha, & Lorente (2000) mostraram que escoamentos turbulentos requerem uma regra onde a razão ótima entre diâmetros é  $2^{-3/7}$ . Uma revisão abrangente da literatura existente sobre as relação homotética entre tamanhos dos dutos em diferentes situações é apresentada por Miguel & Rocha (2018). No entanto, o escoamento de fluidos nos organismos vivos é essencialmente laminar e as evidências sugerem que a exposição a escoamentos turbulentos pode representar alguns riscos para a saúde conforme estudo de Miguel (2015).

O escoamento sanguíneo pode ser considerado como estável ou pulsátil, newtoniano ou não newtoniano. Em pequenos vasos distantes do coração, o escoamento pode ser abordado como estável. Em vasos maiores, o escoamento é pulsátil devido às características de bombeamento induzidas pelo coração. Estudos experimentais sugerem que se os vasos sanguíneos estão expostos a altas taxas de cisalhamento (superior a  $100 \text{ s}^{-1}$ ) (Reinke, Johnson, & Gaehtgens, 1986), será aceitável considerar o escoamento sanguíneo como um fluido newtoniano (Miguel, 2016, 2016a).

Embora inicialmente com base no princípio do trabalho mínimo, a lei de Hess-Murray pode ser também obtida à luz da lei Construtal (Bejan, 2000, 2017). Esta lei baseia-se na ideia de que os sistemas onde há escoamento têm um propósito (o objetivo final é persistir) e são livres para se transformar no tempo (evoluir) sob restrições globais. A forma (estrutura) é o caminho construtivo para transportar fluido, calor, massa, entre outros, para atingir sua finalidade. As leis construtivas dos arranjos das bifurcações foram derivadas com base na demanda de movimento mais fácil, para conseguir um maior acesso ao escoamento através da geração de um determinado projeto (configuração). Bejan, Rocha & Lorente (2000) mostraram que a maneira de conectar vasos grandes e pequenos requer, para escoamento laminar, também uma razão entre diâmetros de dutos filhos e parentais de  $2^{-1/3}$ , mas para escoamento turbulento uma razão de  $2^{-3/7}$  entre comprimentos dos dutos. Estes autores também derivaram expressões para os ângulos de ramificação dos vasos que facilitam o

acesso ao escoamento aplicando a lei Construtal e, em abordagens analíticas, determinaram as regras de design para escoamento de fluidos não newtonianos.

Observe que as regras de projeto obtidas baseadas tanto no princípio do trabalho mínimo como na lei Construtal são baseadas em abordagens analíticas (isto é, 1D e 2D). Esses estudos envolvem muitas suposições e simplificações, que se baseiam em aproximações, analisadas no estudo realizado por Pepe, Rocha, & Miguel (2017, 2017a). Este estudo pretende obter novos conhecimentos sobre a dinâmica dos escoamentos newtonianos e não newtonianos nos dutos bifurcados. Para o efeito recorre a um estudo numérico 3D que permite analisar e ilustrar o escoamento de fluido, através de estruturas em forma de T. Além de fornecer a possibilidade de testar parâmetros de projeto em uma grande variedade de valores, a modelagem numérica também oferece informações detalhadas sobre a forma como ocorre a interação da estrutura fluida e sólida. Combinou-se a abordagem Construtal com simulação numérica para analisar esses recursos e capturar as diferenças entre perfis de escoamentos em diferentes estruturas T.

## 2 Métodos

### 2.1 Sistema Geométrico

A Fig. 1 ilustra o sistema geométrico em forma de T de tubos cilíndricos.

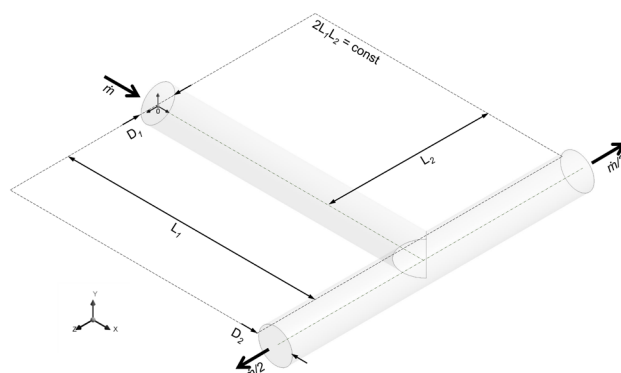


Figura 1 – Estrutura em forma de T

O sistema possui duas constantes globais geométricas, a qual é definida pelo o volume ocupado pelos dutos ( $V$ ), e pela área ocupada pelos dutos ( $A$ ), e

são fixas para os diferentes casos estudados. Os graus de liberdade do sistema são definidos pela razão entre o diâmetro dos dutos filhos e pai ( $a_D$ ) e pela razão do comprimento do duto filhos e pai ( $a_L$ ). Desse modo, a estruturas fluídicas com um nível de bifurcação em forma de T será determinada através das Eq. (1) a (4):

$$V = \frac{\pi}{4} (D_0^2 L_0 + 2D_1^2 L_1) = const \quad (1)$$

$$A = 2L_0 L_1 \quad (2)$$

$$a_D = \frac{D_1}{D_0} \quad (3)$$

$$a_L = \frac{L_1}{L_0} \quad (4)$$

onde D é o diâmetro, L é o comprimento,  $a_D$  a razão entre os diâmetros e  $a_L$  a razão entre os comprimentos, os índices 0 e 1 representam pai e filhos respectivamente.

## 2.2 Modelagem Matemática

O regime do escoamento foi governado pela vazão mássica ( $\dot{m}$ ) que entra no sistema pela área formada pelo duto de diâmetro  $D_0$ , e escoam ao longo do domínio se dividindo na junção e saindo do sistema pela área formada pelos dutos de diâmetro  $D_2$ , em vista do objetivo de se obter a melhor configuração geométrica que minimize as irreversibilidades do sistema.

$$\dot{m} = \int \rho u dA \quad (5)$$

onde,  $\dot{m}$  é a vazão mássica,  $\rho$  é massa específica,  $u$  a velocidade.

O estudo proposto é assumido tridimensional, laminar, incompressível, regime permanente e propriedades uniformes. A avaliação será feita para

diferentes fluidos, os quais são governados pelo grupo adimensional definido como Número de Reynolds ( $Re$ ), conforme Eq. (6).

$$Re = \frac{\rho u D_0}{\mu} \quad (6)$$

onde,  $\rho$  é massa específica,  $u$  a velocidade,  $D_0$  é o diâmetro do duto pai e  $\mu$  é a viscosidade dinâmica.

Assim, os princípios de conservação de massa e quantidade de movimento aplicados ao sistema em estudo são definidos conforme Eq. (7) e (8), respectivamente.

$$\nabla \mathbf{v} = 0 \quad (7)$$

$$-\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} = 0 \quad (8)$$

onde  $\mathbf{v}$  o vetor velocidade composto pelas componentes  $u$ ,  $v$  e  $w$  nas respectivas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ ,  $p$  a pressão,  $\mu$  é a viscosidade dinâmica.

## 2.3 Modelagem Numérica

A modelagem computacional e solução numérica foram desenvolvidas com o código de Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD), ANSYS® FLUENT, através da solução acoplada das equações de conservação de massa e quantidade de movimento, juntamente com a formulação Pressure-Based a qual é aplicada para escoamentos de fluidos incompressíveis de baixa velocidade e o modelo de viscosidade laminar.

A condição de contorno de entrada é parametrizada como mass flow inlet, onde é possível especificar a vazão mássica, permitindo que a pressão total varie em resposta à solução. A condição de contorno de saída é parametrizada como outflow. Esta é utilizada para modelar as saídas de fluxo onde os detalhes da velocidade e pressão do fluxo não são conhecidos antes da solução do problema. A condição de contorno das superfícies dos tubos selecionada foi wall com a condição de não deslizamento.

O acoplamento pressão-velocidade utiliza o método SIMPLE (Semi Implicit Linked Equations). O algoritmo SIMPLE usa uma relação de correção entre a velocidade e a pressão e garante que a conservação de massa é satisfeita.

Na discretização espacial das equações, o método Green Gauss Node Based é utilizado para a discretização dos gradientes, Second Order para a discretização da pressão e Second Order Upwind para a discretização da quantidade de movimento.

Os fatores de sub-relaxamento foram parametrizados em 0,75 para a pressão, 1 para a densidade, 1 para as forças de campo e 0,75 para a quantidade de movimento.

As soluções numéricas foram consideradas convergidas quando os resíduos para a equação da conservação de massa e quantidade de movimento nas direções x, y e z foram menores que  $10^{-6}$  para ambas equações. Para redução do tempo de processamento das simulações foi empregada a técnica de processamento paralelo, utilizando um computador com processador Intel® Core™ i7-6700HQ 3.5 GHz com 16.0 Gb de memória RAM.

## **2.4 Design Construtal Aplicado a Estrutura em Forma de T**

O método Design Construtal vem sendo utilizado com frequência na busca de configurações que facilitem o acesso das correntes que fluem através dos sistemas de escoamento. Identificar as correntes e dar liberdade para que elas possam fluir mais facilmente, sujeitas as constantes locais ou globais, é a essência do Design Construtal.

A função objetivo do trabalho é avaliar diferentes configurações geométricas na busca de um sistema que minimize as perdas e facilite o acesso do escoamento de fluido. Em vista disso, o parâmetro utilizado para quantificar este objetivo é a resistência global do escoamento, determinado através da Eq. (9).

$$R = \frac{\Delta p}{\dot{m}} \quad (9)$$

onde,  $R$  é a resistência global do escoamento,  $\Delta p$  a diferença de pressão e  $\dot{m}$  é a vazão mássica.

Por uma questão de facilidade na comparação dos resultados, é conveniente determinar uma relação para avaliar os efeitos do escoamento na estrutura em forma de T. Esta relação será a razão global de resistências, sendo determinada através da Eq. (10).

$$R^* = \frac{R}{R_{Hess-Murray}} \quad (10)$$

onde,  $R^*$  é a razão global de resistências,  $R$  a resistência definida como a razão entre a diferença de pressão e o fluxo de massa através da estrutura em forma de T de acordo com a Eq. (9) e  $R_{Hess-Murray}$  a resistência da estrutura em forma de T simulada numericamente e projetada conforme as relações geométricas  $a_D = a_L = 2^{-1/3}$ .

O método Design Construtal, aplicado aos objetivos deste trabalho, pode ser graficamente representado através da Fig. 2.

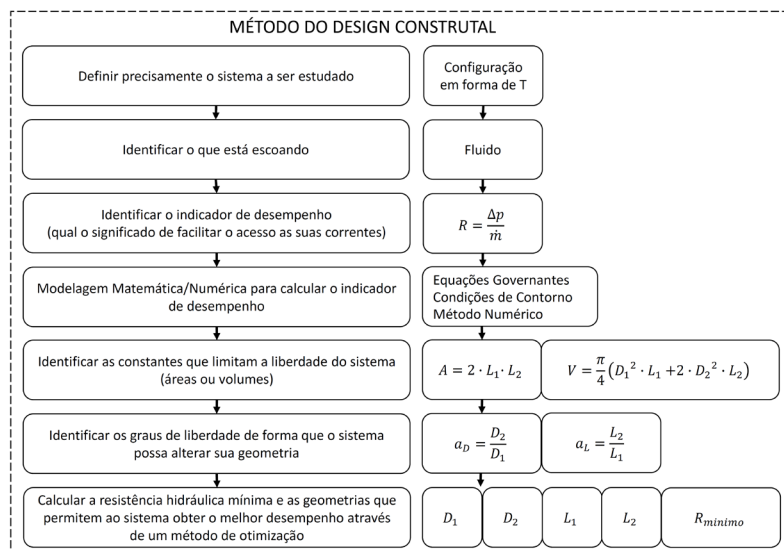


Figura 2 – Método do Design Construtal

### 3 Resultados e Conclusões

Através das Fig. 3 e 4, pode-se visualizar como a razão global de resistências ( $R^*$ ) se comporta em função da razão de diâmetros ( $a_D$ ) e da razão



de comprimentos ( $a_L$ ), para o escoamento de fluidos newtonianos em uma estrutura em forma de T e com paredes impermeáveis. Esse comportamento é mostrado para o escoamento governado pelo número de Reynolds  $Re = 10^2$  e  $10^3$ .

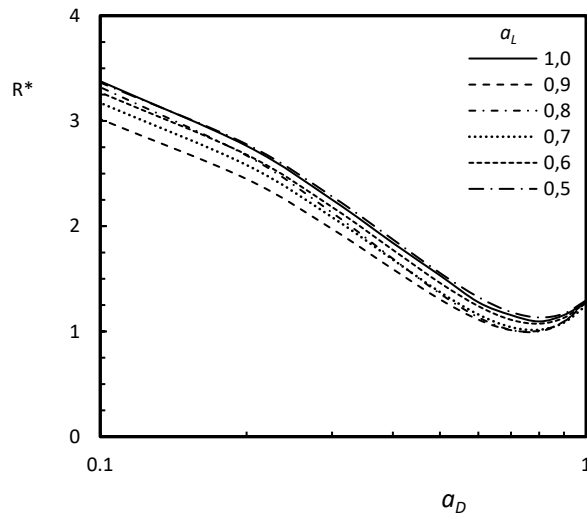


Figura 3 – Razão global de resistências ( $R^*$ ), em uma estrutura em forma de T com paredes impermeáveis e escoamento de fluido newtoniano com número de Reynolds ( $Re = 10^2$ ).

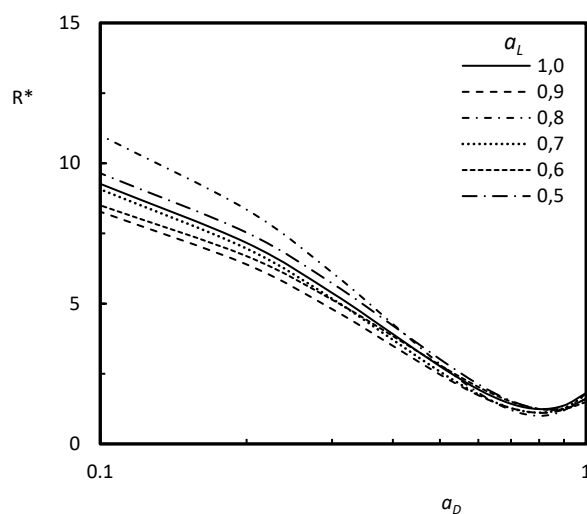


Figura 4 – Razão global de resistências ( $R^*$ ), em uma estrutura em forma de T com paredes impermeáveis e escoamento de fluido newtoniano com número de Reynolds ( $Re = 10^3$ ).

É possível observar que as curvas das Fig. 3 e 4, apresentam um comportamento semelhante. Há uma convergência das curvas, até um ponto de mínimo onde a razão de diâmetros  $a_D = 2^{-1/3}$ . Este valor de mínimo ocorre, para todas as curvas plotadas com as razões de comprimentos ( $a_L$ ).

Os resultados correspondentes aos pontos ótimos obtidos nas Fig. 3 e 4, são apresentados nas Fig. 5 e 6. O eixo vertical a esquerda mostra os valores

razão global de resistências ( $R^*$ ) e o eixo vertical à direita mostra os valores da razão de diâmetros ( $a_D$ ) ambos em função da razão de comprimentos ( $a_L$ ). Duas tendências são apresentadas através das curvas da razão de diâmetros otimizados ( $a_{DO}$ ) e a razão global de resistência mínima ( $R^*_m$ ).

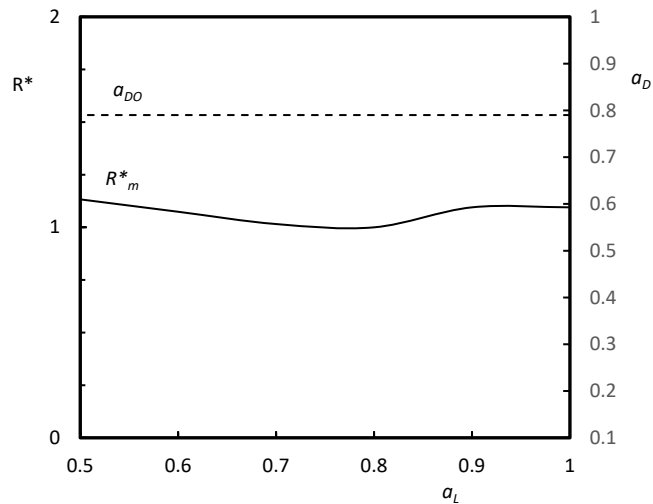


Figura 5 – Razão de diâmetros otimizados ( $a_{DO}$ ) e a razão global de resistência mínima ( $R^*_m$ ), com número de Reynolds ( $Re = 10^2$ )

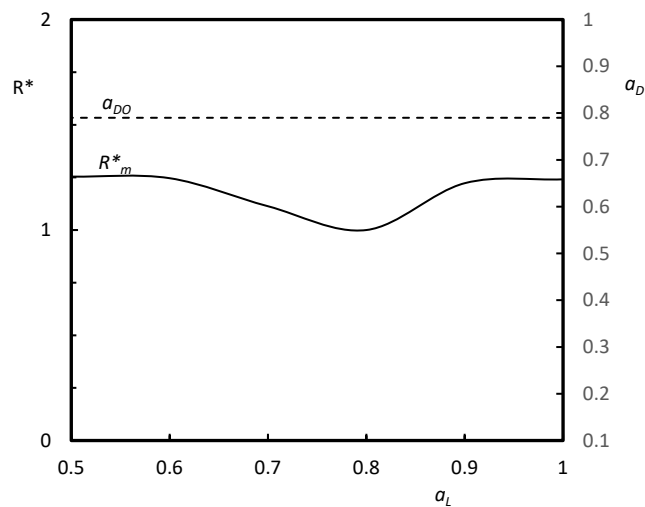


Figura 6 – Razão de diâmetros otimizados ( $a_{DO}$ ) e a razão global de resistência mínima ( $R^*_m$ ), com número de Reynolds ( $Re = 10^3$ )

É possível observar que a curva das Fig. 5 e 6, apresentam um comportamento semelhante. Há uma convergência das curvas, até um ponto de mínimo onde a razão de comprimentos  $a_L = 2^{-1/3}$

A independência do número de Reynolds e o comportamento semelhante do escoamento, na estrutura em forma de T, com razão de diâmetros ótima  $a_D = 2^{-1/3}$  e razão de comprimentos ótima  $a_L = 2^{-1/3}$ , pode ser explicada pela

similaridade dos campos de velocidade, pressão total e tensões nas paredes apresentados nas Fig. 7 a 9, respectivamente.

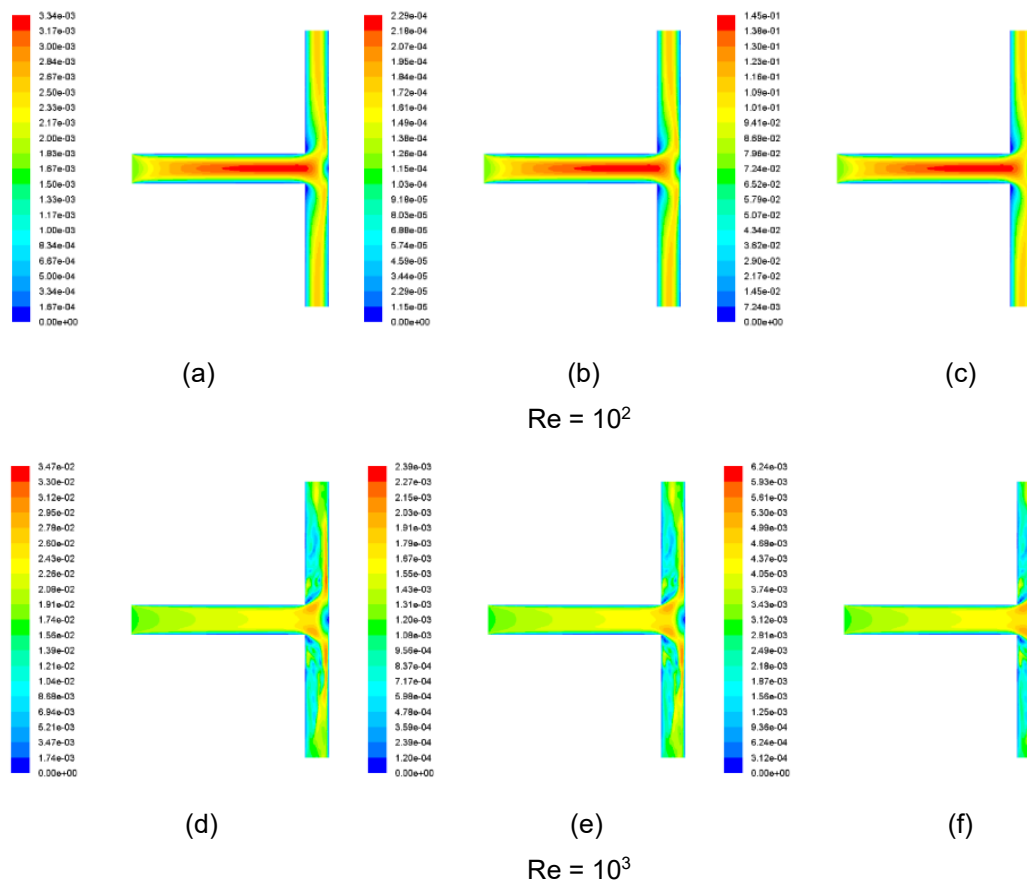


Figura 7 – Campo de velocidades no plano central em uma estrutura em forma de T ótima ( $a_D = 0,79$  e  $a_L = 0,79$ ), com paredes impermeáveis e escoamento de fluido newtoniano: (a) ar, (b) água e (c) glicerina, (d) ar, (e) água e (f) sangue.

Avaliando, qualitativamente, o escoamento na estrutura em forma de T ótima, governado pelo número de Reynolds,  $Re = 10^2$  e  $10^3$  os campos de velocidade, pressão total e tensões nas paredes são semelhantes. Observando o campo de velocidades na Fig. 7 e o campo de pressão na Fig. 8, nota-se uma pequena zona de descolamento da camada limite ocorre no início dos tubos filhos, originadas pela mudança da direção do escoamento na junção, sendo mais intensa no escoamento com  $Re = 10^3$ . Desta forma pode-se observar que este fenômeno depende do número de Reynolds e da razão de diâmetros ( $a_D$ ) e independe da razão de comprimentos ( $a_L$ ).

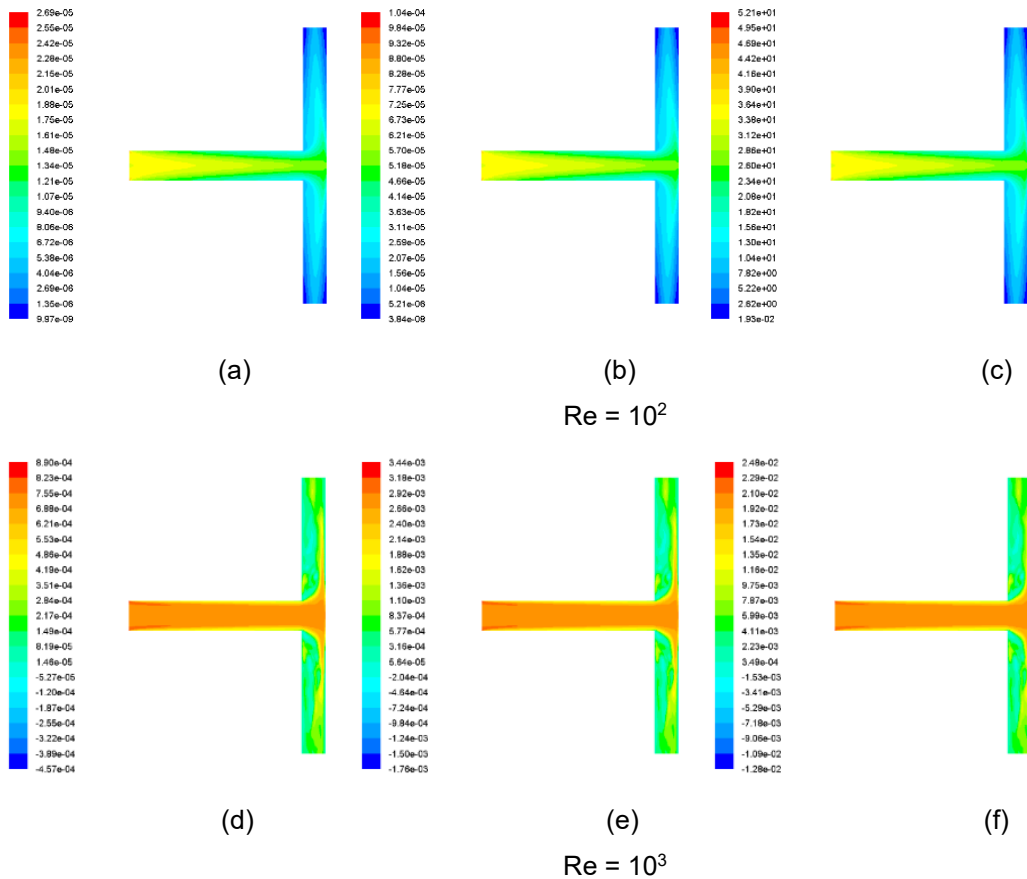


Figura 8 – Campo de pressão total no plano central em uma estrutura em forma de T ótima ( $a_D = 0,79$  e  $a_L = 0,79$ ), com paredes impermeáveis e escoamento de fluido newtoniano: (a) ar, (b) água e (c) glicerina, (d) ar, (e) água e (f) sangue.

Observando o campo de tensões na parede nas Fig. 9, podemos afirmar que as irreversibilidades devido a junção, não podem ser negligenciadas. A distribuição de tensões na junção possui dependência com o número de Reynolds e da razão de diâmetros ( $a_D$ ) e independe da razão de comprimentos ( $a_L$ ) e das propriedades do fluido. A distribuição de tensões na parede próximo a junção é mais intensa para o escoamento com  $Re = 10^3$  e menos intensa para  $Re = 10^2$ .

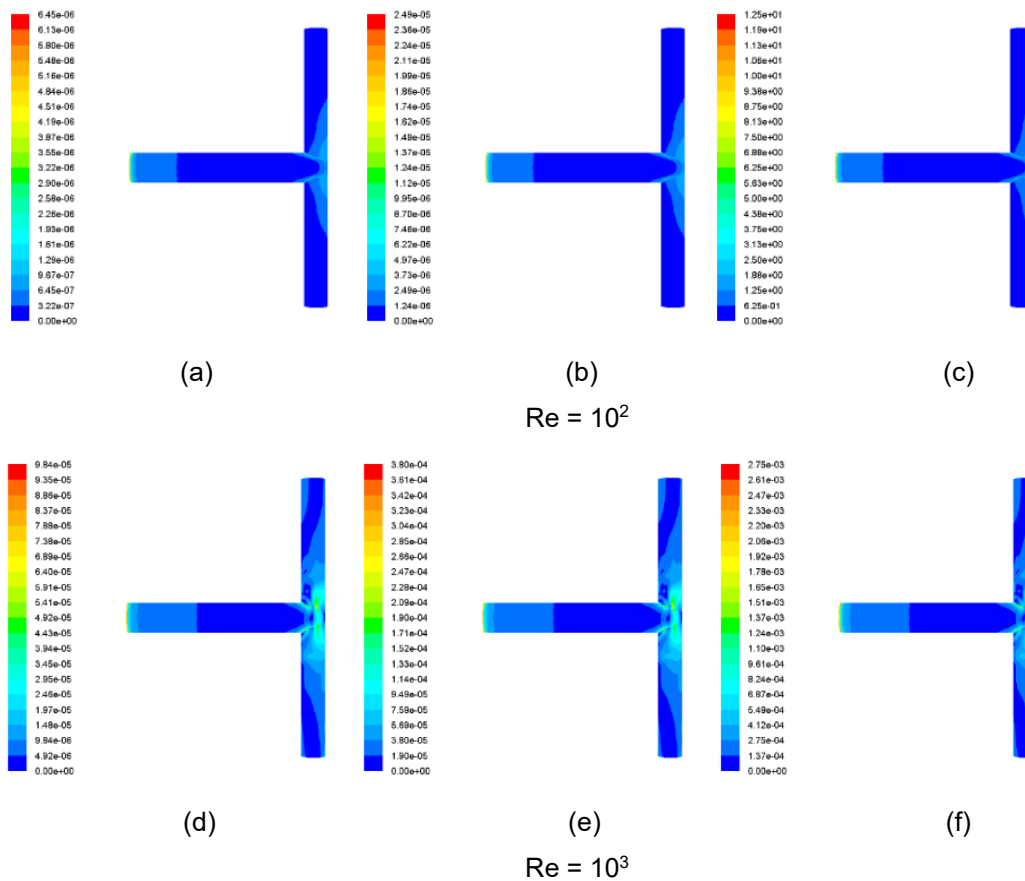


Figura 9– Campo de tensões na parede no plano superior em uma estrutura em forma de T ótima ( $a_D = 0,79$  e  $a_L = 0,79$ ), com paredes impermeáveis e escoamento de fluido newtoniano: (a) ar, (b) água e (c) glicerina, (d) ar, (e) água e (f) sangue.

Neste trabalho, são apresentadas as melhores configurações de um conjunto de tubos em forma de T, com seção circular, para o escoamento laminar de fluidos newtonianos com paredes impermeáveis, através da experimentação numérica tridimensional, fundamentada no método do Design Construtal, associado ao método de otimização da busca exaustiva, visando a minimização das resistências ao escoamento, através da variação das razões entre diâmetros e comprimentos.

Devido a simplicidade da estrutura do sistema de escoamento em forma de T, o método de otimização da busca exaustiva se mostrou eficaz para a determinação das configurações geométricas ótimas.

Na avaliação do escoamento de fluidos newtonianos, conclui-se que o número de Reynolds não influencia a razão ótima proposta pela lei de Hess-Murray (escoamento laminar). Os resultados numéricos concordam com os

dados da literatura, sendo a estrutura em forma de T com razões geométricas  $a_D = a_L = 2^{-1/3}$ , a que apresenta o menor valor da resistência global para todos os fluidos estudados. As irreversibilidades devido a junção, não podem ser negligenciadas, visto que a distribuição de tensões na junção possui dependência com o número de Reynolds e da razão de diâmetros ( $a_D$ ) e independe da razão de comprimentos ( $a_L$ ), concordando com o estudo desenvolvido por Wechsato, Lorente, & Bejan (2006).

## Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior -Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

Miguel. A.F. agradece o financiamento fornecido pelas TIC, sob contrato com a FCT (Fundação de Ciência e Tecnologia de Portugal), Pest / OE / CTE / UI0078 / 2014.

## Referências

- Bejan, A. (2000). Shape and structure, from engineering to nature. *Cambridge University Press*.
- Bejan, A. (2017). Evolution in thermodynamics. *Applied Physics Reviews* 4, 011305.
- Bejan, A., & Lorente, S. (2008). Design with constructal theory. *Wiley*, New Jersey.
- Bejan, A., Rocha, L. A. O., & Lorente, S. (2000). Thermodynamic optimization of geometry: T and Y-shaped constructs of fluid streams. *Int. J. Therm. Sci.* (39), 949–960.
- Hess, W.R. (1917). Über die periphere regulierung der blutzirkulation. *Pflüger's Archiv für die Gesamte Physiologie des Menschen und der Tiere*, (168), 439–490.

- Miguel, A. F., (2015). Fluid flow in a porous tree-shaped network: optimal design and extension of Hess–Murray’s law, *Physica A*, (423), 61-71.
- Miguel, A. F. (2016). Toward an optimal design principle in symmetric and asymmetric tree flow networks, *Journal of Theoretical Biology*, (389), 101-109.
- Miguel, A. F. (2016a). Scaling laws and thermodynamic analysis for vascular branching of microvessels. *International Journal of Fluid Mechanics Research*, (43), 390-403.
- Miguel, A. F. (2018) A general model for optimal branching of fluidic networks. *Physica A*, (512), 665-674
- Miguel, A. F. (2018) Constructal branching design for fluid flow and heat transfer. *International Journal of Heat and Mass Transfer* ,(122), 204-211
- Miguel, A. F., & Rocha, L. A. O. (2018). Tree-shaped fluid flow and heat transfer. *Springer, New York*
- Murray, C.D. (1926). The physiological principle of minimum work applied to the angle of branching of arteries. *J. Gen. Physiol*, (9), 835–841.
- Pepe, V. R., Rocha, L.A. O., & Miguel, A. F., (2017). Optimal branching structure of fluidic networks with permeable walls. *BioMed Research International*, 5284816
- Pepe, V. R., Rocha, L. A. O., & Miguel, A. F., (2017a). Is it the Hess-Murray law always valid?. *The Publishing House of the Romanian Academy*, (1), 444 – 455.
- Reinke, W., Johnson, P. C., & Gaehtgens, P., (1986). Effect of shear rate variation on apparent viscosity of human blood in tubes of 29 to 94 microns diameter. *Circ Res*. (59), 124–132.

WechsatoI, W., Lorente, S., & Bejan, A. (2006) Tree-shaped flow structures with local junction losses. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, (49), 2957-2964.