Funções de Acumulação Limitada

Maria Cristina Seixal Palma Coelho Gancho Canelas

Orientador Professor Doutor Imme van den Berg

Universidade de Évora, Departamento de Matemática

Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Matemática e Aplicações

Funções de Acumulação Limitada

Maria Cristina Seixal Palma Coelho Gancho Canelas

Orientador Professor Doutor Imme van den Berg

Universidade de Évora, Departamento de Matemática

Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Matemática e Aplicações

Índice

Summary

Functions of limited accumulation

Measures on the real line may be decomposed into a regular, singular and atomic part. The objective of the present thesis is to provide analogous decompositions for a class of nonstandard, discrete functions defined on an infinitesimal discretization of the real line.

We consider five types of decompositions. Firstly, we identify atomic, singular and regular contributions for the discrete integral of a function of limited accumulation. Secondly respectively thirdly we identify internal and external subsets where the contributions are realized. The fourth decomposition concerns a decomposition of the function of limited accumulation itself, in atomic, singular and regular functions. The final decomposition links a given decomposition of the function of limited accumulation with a decomposition of its discrete primitive into a kind of jump-function, a sort of discrete Cantor-function and a sort of discrete absolutely continuous function.

Sumário

Medidas na recta real podem ser decompostas numa parte regular, singular e atómica. O objectivo da presente tese é obter uma decomposição análoga de uma classe de funções discretas não standard definidas sobre uma discretização infinitesimal da recta real.

Consideramos cinco tipos de decomposições. Em primeiro lugar, identificamos contribuições atómicas, singulares e regulares para o valor do integral discreto duma função de acumulação limitada. Em segundo e em terceiro lugar, identificamos subconjuntos internos e externos onde as contribuições são efectuadas. A quarta decomposição representa a própria função de acumulação limitada como soma de uma função atómica, singular e regular. A última associa uma decomposição dada de uma função de acumulação limitada com uma decomposição da sua primitiva discreta, numa função com saltos, numa espécie de função de Cantor discreta e uma espécie de função discreta absolutamente contínua.

Agradecimentos

Após a realização deste trabalho cabe-me agradecer:

-ao Professor Imme van den Berg por ter aceite orientar este trabalho, pelas suas sugestões e critícas, por todo o apoio, e estímulo que me deu;

-ao meu marido que me apoiou incondicionalmente.

Introdução

Este trabalho integra-se na Análise não-standard e tem por objectivo principal a demonstração de um teorema que afirma que uma função de acumulação limitada pode ser decomposta na soma de três funções: uma função S-integrável, uma função S-singular e uma função atómica. Assim obtemos uma alternativa ao teorema clássico de decomposição de medidas. O designado *Teorema da decomposição de Lebesgue* [1] permite representar uma função de variação limitada como soma de duas funções: uma absolutamente contínua e outra singular. Este teorema pode ser estendido utilizando a noção de medida, ou seja, o teorema assim obtido decompõe uma função de variação limitada numa soma de medidas: uma absolutamente contínua, uma continua singular e uma discreta.

O problema é que certas dessas medidas não correspondem a integrais de funções, pois são distribuições, e assim precisam de uma teoria avançada. A abordagem não standard alternativa que desenvolveremos aqui substitui integrais por somas finitas, e assim fica dentro da análise discreta real. Neste contexto obtemos até 5 tipos de decomposições: além da decomposição da própria função discreta, uma decomposição da sua primitiva discreta, uma decomposição dos valores do seu integral discreto e duas decomposições do seu suporte.

A noção de *S-continuidade* é uma propriedade de regularidade fundamental de funções discretas e é expressa em termos dos infinitesimais não standard. A ligação na direcção discreta-contínua faz-se através da noção fundamental de *sombra* de um número real e de uma função. A sombra de uma função de classe S^0 é de classe C^0 e assim existe uma analogia entre certas propriedades de regularidade de funções discretas e as propriedades clássicas de funções de classe C^0.

A Análise não-standard foi inventada por Abraham Robinson (1918-1974), no contexto da Lógica Matemática [8]. Em 1960, Robinson conseguiu resolver um problema de há mais de trezentos anos, dando um tratamento rigoroso ao cálculo baseado nos números infinitesimais. Recupera a noção informal de infinitésimo introduzida inicialmente nos séculos XVII e XVIII nos trabalhos de Gottfried Leibniz (1646-1716) e Isaac Newton (1643-1727) e, com o auxílio dos métodos da Lógica Moderna, designada Teoria dos Modelos, cria os fundamentos da actual Análise não-standard.

Chamou ao seu método *Análise não-standard*, porque utiliza um modelo não clássico de análise, no entanto o termo mais adequado é o de "Análise com Infinitesimais". O seu método é ajustável, e tem sido e continua sendo, aplicado gular e uma parte regular, também é possível decompor funções de acumulação limitada definidas num intervalo discreto.Consideramos cinco tipos de decomposições: Em primeiro lugar identificamos as respectivas contribuições atómicas, singulares e regulares para o valor do integral discreto duma função de acumulação limitada, a menos de valores infinitesimais. Em segundo lugar identificamos, a menos de conjuntos discretos de medida infinitesimal, subconjuntos internos onde as contribuições são efectuadas. Uma terceira decomposição localiza as contribuições de modo mais canónico, isto é, em conjuntos externos explícitos (classes de distribuição). Em quarto lugar decompomos a própria função de acumulação limitada, numa função atómica, numa função singular e numa função regular. A quinta associa uma decomposição dada de uma função de acumulação limitada com uma decomposição da sua primitiva discreta, numa função com saltos, numa função S-contínua, quase-sempre constante (uma espécie de função de Cantor discreta) e uma função absolutamente S-contínua.

Capítulo 1

Números standard e não standard

Este capítulo tem como principal objectivo recordar e introduzir algumas noções e resultados preliminares da análise não-standard, tais como: Regras de Leibniz, a axiomática IST, medida de um conjunto finito e intervalo discreto. Pressupomos que ($^*\mathbb{R}$) designa o corpo com a nova extensão do corpo ordenado dos reais. Todos os teoremas válidos em $\mathbb{R}$ continuam a ser válidos em $^*\mathbb{R}$,temos sómente uma linguagem mais rica .

1.1 Regras de Leibniz (L)

Nesta extensão ($^*\mathbb{R}$) as regras de Leibniz (ZFL) são uma consequência de (IST) para o novo predicado st, (ou *parte standard* que será enunciado mais à frente). Um conjunto X pode ser standard ($st\ X$), e lê-se "X é standard" ou não standard ($\neg st\ X$). O número 0 é standard e por enquanto atribuímos só a alguns números naturais o predicado unário st.

1. $st\,(0)\,;$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ st\,(n) \Rightarrow st\,(n+1)\,;$
3. $\forall n, m \in \mathbb{N},\ st\,(n,m) \Rightarrow st\,(n+m)\,;$
4. $\forall n, m \in \mathbb{N},\ st\ (n,m) \Rightarrow st\,(n \cdot m)\,;$
5. $\forall n, m \in \mathbb{N},\ st\,(n,m) \Rightarrow st\,(n^m)\,.$

Uma outra consequência da IST é a existência de números inteiros não standard dentro do conjunto da matemática clássica $\mathbb{N}$:

$$\exists\, \omega \in \mathbb{N}, \neg\ st\,(\omega)\,.$$

dos reais infinitesimais, limitados, apreciáveis positivos, infinitamente grandes positivos ,e também para representar um elemento arbitrário de qualquer uma dessas classes. Representam os chamados "conjuntos externos" informais. Os *Conjuntos internos* no sentido da Teoria dos Conjuntos[6] ZFC descrevem um "universo" de conjuntos que podem ser definidos com um único conceito primitivo binário, o de pertence ($\in$)..Os *Conjuntos externos* são classes contidas em conjuntos definidas em termos do novo predicado (st). Exemplos disso, são as $\mathbb{N}$-*galáxias* $\cup_{st\ n\ \in \mathbb{N}} A_n$, com $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão interna crescente de conjuntos internos. $\mathbb{N}$-*halos* $\cap_{st\ n\ \in \mathbb{N}} B_n$, com $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão interna decrescente de conjuntos internos. Os símbolos $st, \oslash, \not\infty$, representam halos e os símbolos $\pounds, @$, galáxias. Outros halos são, os chamados halos $hal(x)$ de um número real qualquer x. Um Teorema da teoria de conjuntos não standard (Princípio de Fehrele [vdbnaa]) diz que *nenhum halo é uma galáxia.*

As operações aritméticas sobre as ordens de grandeza $\oslash$, $\pounds, @$,e $\not\infty$, são apresentadas nas tabelas seguintes :

Tabela para Adição:

$+$	$\oslash$	$@$	$\pounds$	$\not\infty$
$\oslash$	$\oslash$	$@$	$\pounds$	$\not\infty$
$@$	$@$	$@$	$\pounds$	$\not\infty$
$\pounds$	$\pounds$	$\pounds$	$\pounds$	$\not\infty$
$\not\infty$	$\not\infty$	$\not\infty$	$\not\infty$	?

Tabela para Multiplicação:

$\cdot$	$\oslash$	$@$	$\pounds$	$\not\infty$
$\oslash$	$\oslash$	$\oslash$	$\oslash$	?
$@$	$\oslash$	$@$	$\pounds$	$\not\infty$
$\pounds$	$\oslash$	$\pounds$	$\pounds$	?
$\not\infty$	?	$\not\infty$	?	$\not\infty$

Tabela para Potênciação:

$\oslash$	?	?	$\oslash$	$\oslash$
$\pounds$	?	?	$\pounds$	$\oslash$
$@$	$\not\infty$	?	$@$	$\oslash$
$\not\infty$	$\not\infty$	$\not\infty$	$\not\infty$	?
$\uparrow / \rightarrow$	$\oslash$	$@$	$\pounds$	$\not\infty$

1.4 Breve Introdução à Teoria dos Conjuntos Interna -(IST)

Segundo Nelson,"Os axiomas da Teoria dos Conjuntos Interna-IST são simplesmente as propriedades básicas dos conjuntos internos numa aproximação usual à análise não-standard".

(S)

$$\forall^{st} A \ \ \exists^{st} B \ \ \forall^{st} x \ \ (x \in B \Leftrightarrow x \in A \wedge \phi(x))$$

Dado A standard, um conjunto standard B, tal que

$$\forall^{st} x (x \in B \Leftrightarrow x \in A \wedge \phi(x))$$

é único, pois por Teorema de *Extensionalidade externa*, se $B\prime$ é standard é também tal que

$$\forall^{st} x (x \in B\prime \Leftrightarrow x \in A \wedge \phi(x))$$

então

$$\forall^{st} x \, (x \in B \Leftrightarrow x \in B')$$

logo $B = B\prime$. Denota-se

$$^{st}\{x \in A : \phi(x)\}.$$

e é chamado (conjunto) *standardizado da classe* (externa, se ϕ for externa) $\{x \in A : \phi(x)\}$.

A noção da sombra ou próximo-standard estabelece uma ligação fundamental entre números standard e nãostandard. O Teorema que se segue afirma que todo o número real limitado é próximo standard. . A demonstração utiliza uma propriedade essencial de $\mathbb{R}$, o Princípio do supremo: Todo o subconjunto não vazio e majorado de $\mathbb{R}$ tem supremo em $\mathbb{R}$.

Teorema 1.4.5 ***(Teorema da parte standard)*** *Para todo o número real limitado x existe um único número real standard a tal que $x \simeq a$.*

Dado $x \in \mathbb{R}$ limitado, o único real standard a tal que $x \simeq a$ chama-se a *parte standard* ou *sombra de* x, e denota-se ^0x. Um número real que possui uma sombra diz-se *próximo-standard* (ps) ou quase-standard (qs)

A demonstração utiliza uma propriedade essencial de $\mathbb{R}$, o Princípio do Supremo: todo o subconjunto não vazio e majorado de $\mathbb{R}$ tem supremo em $\mathbb{R}$.

Demonstração. *Unicidade*: Se $x \ \simeq a$ e $x \simeq b$, com a e b ambos standard, então $a \simeq b$, logo $a = b$ pelo Princípio de Carnot.

Existência: Supomos x não-standard, (caso contrário, não há nada a demonstrar: se x é standard,$^0x = x$) e começamos por observar que, dado x limitado, o conjunto standard

$$X =^{st} \{y \in \mathbb{R} : y \leq x\}$$

é não vazio e majorado. Com efeito, como x é limitado, por definição existe $r \in \mathbb{R}^+$ standard tal que $-r \leq x \leq r$, logo $-r \in X$, e por definição de X,

$$\forall^{st} y \in X \ \ (y \leq r)$$

. Tem-se por transferência (T),

$$\forall y \in X \ \ (y \leq r).$$

8. ${}^{St}\left\{ {}^{0}x \mid 0 \leq x \leq 1\right\} = [0,1]$

9. $\sup {}^{St}\left\{St\left(x\right) \mid 0 \leq x \leq 1\right\} = 1$

10. Se b é limitado, $\sup {}^{St}\left\{St\left(x\right) \mid 0 \leq x \leq b\right\} =^{0} b$.

O princípio a seguir afirma que todo o conjunto infinito contém inevitávelmente todos os objectos standard.

Axioma 1.4.7 *(Axioma de Idealização) (I) Para qualquer afirmação externa $B\left(x,y\right)$, temos*

(I)
$$\forall^{st\ fin} z\ \exists y\ \forall^{st} x \in z\ B(x,y) \Leftrightarrow \exists y\ \forall^{st} x\ B(x,y).$$

Este axioma gera elementos não-standard dentro de conjuntos infinitos que podem ser standard. Por exemplo, o Axioma de Idealização aplicado à fórmula $B\left(x,y\right)$ definida por
$$x \in \mathbb{N} \wedge\ y \in \mathbb{N} \wedge\ x < y$$
mostra a existência de elementos de $\mathbb{N}$, superior a todos elementos standard de $\mathbb{N}$, isto é, números inteiros, infinitamente grandes.

Os *Princípios de Permanência* tal como o nome indica vêm como que prolongar (manter válidas) em certas condições, certa propriedade (relação ou até função) num domínio mais vasto que o inicialmente suposto. O **Princípio de Cauchy** afirma que nenhum conjunto externo é interno. Como consequência, um conjunto interno que contém certo conjunto externo, contém este conjunto externo estritamente, logo é estritamente maior. Assim, já temos uma forma de "permanência" de propriedades que se prolongam para lá do conjunto interno. Esta ideia é utilizada na demonstração do seguinte Princípio de Permanência, introduzida por Robinson.

Lema 1.4.8 (Lema de Robinson) *Seja $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão interna de reais. Se $u_n \simeq 0$ para todo n standard, então existe ω ilimitado tal que $u_n \simeq 0$ para todo $n \leq \omega$.*

Demonstração. 1 jFaçamos $v_n = \max_{p\leq n}\left|u_p\right|$ para $n \in \mathbb{N}$. Consideremos o conjunto interno
$$H = \left\{n \in \mathbb{N} : v_n \simeq 0\right\}.$$

Ele é um préhalo que contém a galáxia ${}^{\sigma}\mathbb{N}$ (conjunto externo de inteiros standard). Contém portanto estrictamente, em virtude do Princípio de Cauchy se ele é interno ou o princípio de Fehrele se é externo. ou ■

Demonstração. 2 Façamos $v_n = \max_{p\leq n}\left|u_p\right|$ .Consideremos o conjunto interno
$$I = \left\{n \in \mathbb{N} : nv_n \left\langle\ 1\right.\right\}.$$

No caso geral, consideremos primeiramente o conjunto standard $Y' = P(Y)$ e a relação R$'$ definida por

$$R'(x,z) : x \in X \wedge z =^{St} \{y \in Y : R(x,y)\}$$

Obviamente

$$\forall^{St} x \in X \ \exists^{1st} z \in Y' R'(x,z)$$

isto é, R$'$ é funcional , logo, pela primeira parte demonstrada (com R$'$ no lugar de R), existe uma função standard $C : X \to Y'$ tal que

$$\forall^{St} x \in X \quad C_x =^{St} \{y \in Y : R(x,y)\}$$

Por hipótese sobre R, $C_x \neq 0$ para todo $x \in {}^{\sigma}X$. Utilizando a relativização do Axioma da Escolha (AC) (num conjunto parcialmente ordenado em que toda a cadeia é majorada existe pelo menos um elemento maximal) aos conjuntos standard para escolher em cada tal C_x um membro $f(x)$ obtemos uma função standard

$f : X \to Y$ tal que $R(x, f(x))$ para todo o x standard de X.

Isto implica o enunciado, ■

1.5 Conjuntos discretos de números reais.

Procuraremos imitar certas partes da análise das funções reais (e mesmo de certas distribuições) por uma análise quase-contínua de funções discretas. Primeiro consideraremos" infinitamente finas"partições contidas na recta real. Podemos discretizar qualquer intervalo standard $I = [a, b]$ utilizando um conjunto finito $D \subset I$ que contém todos os elementos standard de I.Seja $D = \{x_0, \ x_1, ...x_n\}$ com $a = x_0 \ < x_1 < ... < x_n = b$, de modo que entre x_i e x_{i+1} não há nenhum elemento standard de $[0,1]$. Tem-se $x \simeq x_{i+1}$ para $i = 0, 1, ..., n-1$, caso contrário, como $x < x_{i+1}$, existiria r standard tal que

$${}^0x_i \ \leq \ x_i < r < x_{i+1} \leq^0 x_{i+1}$$

[por exemplo, $r = \left({}^0x_i +^0 x_{i+1}\right)/2$], o que é absurdo.

Definição 1.5.1 *Seja* $I = [a, b]$ *um segmento de* $\mathbb{R}$ *e* $x_0, \ x_1, ...x_n$ *elementos de* $[a, b]$ *tais que*

$$a = x_0 \ < \ x_1 < ... < x_n = b$$

Dizemos que $D = \{x_0, \ x_1, ...x_n\}$ *é uma* decomposição *ou* partição *de* $[a, b]$ *e que esta* partição é infinitésimal *(ou* infinitamente fina) *ou uma* discretização do intervalo $I = [a, b]$

Consideremos em particular a discretização infinitésimal seguinte da recta real .

Por conveniência, aqui estudaremos únicamente funções discretas sobre partições infinitesimais em que o valor de δx permanece regular num dado intervalo $[0, x]$.

Capítulo 2

Funções discretas S-contínuas S-diferenciáveis, e S-integráveis à Riemann

2.1 Funções discretas S-contínuas

Os conceitos de S-continuidade, S-diferenciabilidade e de S-integrabilidade são noções de regularidade de funções, que provêm da análise contínua, mas, vamos ver, que estes são aplicáveis também, à análise de funções discretas sobre quase-intervalos.

Definição 2.1.1 *Sejam $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto e $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. A função f diz-se* S-continua em A *se*

$$\forall x, y \in A,\ x \simeq y \Longrightarrow\ f(x) \simeq f(y).$$

Definição 2.1.2 *Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto e $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. A função f diz-se de* classe S^0 *em A sse f é S-contínua e limitada para os elementos limitados de A.*

A toda função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe S^0, podemos associar uma função standard contínua $^\circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) \simeq (^\circ f)(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ limitado. De facto, para todo standard $x \in \mathbb{R}$, o número $^\circ f(x)$ é bem-definida. A sua extensão a $\mathbb{R}$ inteiro, é então obtida pelo Princípio de Extensão Funcional. A função $^\circ f$ assim definida é de classe $C^0 \cap S^0$ e infinitamente próximo a f (ver [8],[5]).

Ora, a função não é S-contínua para $x = 1/\delta x$, *que é ilimitado. Seja* $y = 1/\delta x + \delta x$. *Então, segue do cálculo acima que*

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= 2x\delta x + \delta x^2 \\ &= 2 + \delta x^2 \\ &\not\simeq 0. \end{aligned}$$

Exemplo 2.2.4 *Seja* €: $X \to \mathbb{R}$ *definida por* $€(x) = (1+\delta x)^{\frac{x}{\delta x}}$. *Provemos que a função é de classe* S^1. *A demonstração processa-se em duas etapas: Mostramos em primeiro lugar que* $\frac{\delta €(x)}{\delta x} = €(x)$. *Em seguida basta mostrar que a função* € *é de classe* S^0. *De facto:*

$$\begin{aligned} \frac{\delta €(x)}{\delta x} &= \frac{€(x+\delta x) - €(x)}{\delta x} \\ &= \frac{(1+\delta x)^{\frac{x+\delta x}{\delta x}} - (1+\delta x)^{\frac{x}{\delta x}}}{\delta x} \\ &= \frac{(1+\delta x)^{\frac{x}{\delta x}}(1+\delta x) - (1+\delta x)^{\frac{x}{\delta x}}}{\delta x} \\ &= \frac{(1+\delta x)^{\frac{x}{\delta x}}(1+\delta x - 1)}{\delta x} \\ &= €(x). \end{aligned}$$

Se x *é limitado, então* $€(x) = (1+\delta x)^{\frac{x}{\delta x}} \simeq e^x$ *(forma não-standard da fórmula de Euler). Sendo* e^x *limitado, pelas regras de Leibniz, o valor* $€(x)$ *é também limitado. Seja* $y \in X$ *com* $y \simeq x$. *Com* $\delta = y - x$, $\delta \simeq 0$ *temos*

$$\begin{aligned} e^y &= e^{x+\delta} \\ &= e^x.e^\delta \\ &= e^x.(1+\oslash) \\ &= e^x + \oslash. \end{aligned}$$

então

$$€(y) \simeq e^y \simeq e^x \simeq €(x).$$

Então, a função € *é de classe* S^0, *logo é de classe* S^1.

2.3 Funções discretas S-integráveis

Consideremos uma função real f, definida sobre um intervalo $[a,b]$ .Se para todas as discretizações infinitesimais de $[a,b]$, a soma superior e a soma inferior são infinitamente próximas, a função f é S-Riemann-integrável, e se $\delta x \simeq 0$ a soma de Riemann $\sum\limits_{a \le x < b} f(x)\,\delta x$ é um $S-integral\ de\ f$.

■

A Proposição 2.3.3 permite a aproximação de somas complicadas por integrais simples e limitados.

Em seguida dão-se exemplos de uma tal aproximação:

Exemplo 2.3.4 *Sabe-se que €(x), função de Euler é a "primitiva discreta" de €(x), pelo exemplo anterior. Então*

$$\sum_{0\leq x\lneqq 1} \text{€}(x)\,\delta x = \text{€}(1) - \text{€}(0) \simeq e(1) - e(0).$$

Ora ^{0}€$=$ exp, *e a função exponencial é uma função contínua. Pela Proposição 2.3.3 temos também que:*

$$\begin{aligned}\sum_{0\leq x\lneqq 1} \text{€}(x)\,\delta x &\simeq \sum_{0\leq x\lneqq 1} \exp(x)\,\delta x \simeq \int_0^1 \exp(x)\,dx \\ &= e(1) - e(0).\end{aligned}$$

Exemplo 2.3.5 *Sabemos que para $y \geq 0$*

$$\sum_{0\leqslant x\lneqq y} x\delta x = \delta x \sum_{0\leq x\lneqq y} x.$$

Sabendo ainda que uma progressão aritmética, verifica a igualdade seguinte:

$$\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N-1)}{2} = \frac{N^2}{2} - \frac{N}{2}.$$

Introduzindo a substituição $x = n.\delta x$, e usando a igualdade anterior vem para y limitado que:

$$\begin{aligned}\delta x \sum_{0\leq x\lneqq y} x &= \delta x \sum_{0\leq n\lneqq \frac{y}{\delta x}} n\delta x = (\delta x)^2 \sum_{0\leq n\lneqq \frac{y}{\delta x}} n \\ &= (\delta x)^2 \left(\frac{y^2}{(\delta x)^2}\frac{1}{2} - \frac{y}{\delta x}\frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{y^2}{2} - \frac{y.\delta x}{2} \\ &\simeq \frac{y^2}{2}.\end{aligned}$$

Para y limitado esta aproximação obtém-se também da Proposição 2.3.3 ,

$$\sum_{0\leqslant x\lneqq y} x\delta x \simeq \int_0^y x dx = \frac{y^2}{2}.$$

Capítulo 3

Funções de acumulação limitada

3.1 Definições e exemplos

Consideraremos somas do tipo

$$\sum_{x \in \mathbb{X}} \varphi(x)\, \delta x.$$

em que $\varphi(x)$ é uma função de $\mathbb{X}$ em $\mathbb{R}^+$ e $\delta x \simeq 0$. Em seguida procuraremos condições para que estas somas sejam limitadas em quase-intervalos $[a...b]$.

Começaremos por definir as noções de função de acumulação limitada, número de acumulação α_h, ponto de acumulação de φ, dominío de acumulação de φ, e função de acumulação infinitésimal num certo domínio D, em simultâneo com alguns exemplos.

Definição 3.1.1 *Seja $[a...b]$ um quase-intervalo. Uma função $\varphi : [a...b] \to \mathbb{R}^+$ diz-se ser de* acumulação limitada *se para todo $y, z \in [a...b]$ com $y \simeq z$, $y \leq z$*

$$\sum_{y \leq x \leq z} \varphi(x)\, \delta x = \pounds.$$

Apresenta-se a seguir um exemplo de uma função de acumulação limitada.

Exemplo 3.1.2 *Sejam os pontos $a < c < b$, $a, b, c \in X$ limitados e seja $\Delta_c(x) : [a\ ..b] \to \mathbb{R}$ a função Dirac discreta definida por:*

$$\Delta_c(x) = \begin{cases} \frac{1}{\delta x}, & x = c \\ 0, & x \neq c. \end{cases}$$

e em seguida, o seu número de acumulação:

$$\begin{aligned} \alpha_{{}^\circ c_1} &= sup^{st}\left\{{}^{0}\left(\sum_{a_1\leq x\leq b_1} h(x)\,\delta x\right)|a_1 \simeq b_1 \simeq c_1\right\} \\ &= \sup\{0, \frac{1}{2}, 1\} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Definição 3.1.5 *Uma função $\varphi : [a...b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ diz-se de* acumulação infinitesimal num certo domínio $D \subset [a...b]$ *se para todo o $y, z \in D$ tal que $y \simeq z, y \leq x \leq z$*

$$\sum_{y\leq x\leq z,\ x\in D} \varphi(x)\,\delta x \simeq 0.$$

Definição 3.1.6 *Uma função $\varphi : [a...b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ diz-se* S-integrável num certo domínio D *se para todo o $\eta \subseteq D$*

$$\lambda(\eta) \simeq 0 \Rightarrow \sum_{x\in\eta} \varphi(x)\,\delta x \simeq 0.$$

No exemplo seguinte apesentamos uma função que apesar de tomar valores infinitamente grandes é função de acumulação infinitesimal e S-integrável:

Exemplo 3.1.7 *Sejam $c_1, c_2 \in [a...b]$ tais que $a \leq c_1 < c_2 \leq b$, $c_1 \neq c_2$, $c_1 \simeq c_2$. Seja $\varphi(x) : [a...b] \to \mathbb{R}$ a função definida por*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{\delta x}}, & x = c_1 \ ou \ x = c_2 \\ 0, & x \neq c_1, c_2. \end{cases}$$

Seja $D \subset [a...b]$. Então para todo $\eta \subseteq D$ com $\lambda(\eta) \simeq 0$, verifiquemos que

$$0 \leq \sum_{x\in\eta} \varphi(x)\,\delta x \leq \frac{1}{\sqrt{\delta x}}.\delta x + \frac{1}{\sqrt{\delta x}}.\delta x = \sqrt{\delta x} + \sqrt{\delta x} \simeq 0.$$

Então φ é uma função de acumulação infinitesimal e é S-integrável.

Observe-se que as funções de Dirac discretas não são de acumulação infinitesimal e que toda a função S-integrável é de acumulação infinitesimal.

A noção de função de acumulação limitada só é definida para funções positivas. A noção não pode ser estendida a funções que tomem simultaneamente valores positivos e negativos. Consideremos o exemplo seguinte.

Exemplo 3.1.8 *Seja $f : [0...1] \to \mathbb{R}$ a função definida por*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\delta x}, \ se \ \frac{x}{\delta x} \ par \\ -\frac{1}{\delta x}, \ se \ \frac{x}{\delta x} \ ímpar, \end{cases}$$

Exemplo 3.1.10 . *Seja $g(x) : [a...b] \to \mathbb{R}$ uma função de acumulação limitada. Verifiquemos que a função g definida por*

$$g(x) = \frac{e^{\frac{-x^2}{2\sqrt{\delta x}}}}{\sqrt{2\pi\sqrt{\delta x}}}$$

é atómica. Para verificarmos que g é uma função de acumulação limitada substituamos $\xi = x \cdot (\delta x)^{\frac{1}{4}}$. Então $\delta x = \delta\xi \cdot (\delta x)^{\frac{1}{4}}$ e $x^2 = y^2.\sqrt{\delta x}$. Tem-se

$$\begin{aligned}\sum_{a \leq x \leq b} \frac{e^{\frac{-x^2}{2\sqrt{\delta x}}}}{\sqrt{2\pi\sqrt{\delta x}}}.\delta x &= \sum_{\frac{a}{(\delta x)^{\frac{1}{4}}} \leq \xi \leq \frac{b}{(\delta x)^{\frac{1}{4}}}} \frac{e^{\frac{-\xi^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}.(\delta x)^{\frac{1}{4}}}.\delta\xi.(\delta x)^{\frac{1}{4}} = \\ &= \sum_{\frac{a}{(\delta x)^{\frac{1}{4}}} \leq \xi \leq \frac{b}{(\delta x)^{\frac{1}{4}}}} \frac{e^{\frac{-\xi^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}.\delta\xi\end{aligned}$$

pelo Lema de Aproximação dominada verifica-se que

$$\begin{aligned}&\sum_{\frac{a}{(\delta x)^{\frac{1}{4}}} \leq \xi \leq \frac{b}{(\delta x)^{\frac{1}{4}}}} \frac{e^{\frac{-\xi^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}.\delta\xi \\ = &\simeq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-\eta^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} d\eta = 1,\end{aligned}$$

Resulta que g é função de acumulação limitada. Além disso, seja w limitado de modo que $w \cdot (\delta x)^{\frac{1}{4}} \simeq 0$. Então

$$\begin{aligned}&\sum_{-w\cdot(\delta x)^{\frac{1}{4}} \leq x \leq w\cdot(\delta x)^{\frac{1}{4}}} \frac{e^{\frac{-x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi\sqrt{\delta x.}}}\delta x \\ = &\sum_{-w \leq x \leq w} \frac{e^{\frac{-\xi^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}..\delta\xi \\ \simeq &\simeq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-\eta^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} d\eta = 1,\end{aligned}$$

Logo, 0 *é um ponto de acumulação de g.* O seu número de acumulação é de acumulação limitada, mas que o produto de duas funções de acumulação limitada não é necessariamente uma função de acumulação limitada. Também a derivada discreta de uma função de acumulação limitada não é necessariamente uma função de acumulação limitada.

3.2.1 Limite superior de uma função de acumulação limitada

Proposição 3.2.1 *Se a função f é de acumulação limitada, então é limitada por $\frac{c}{\delta x}$ para algum valor limitado $c \in [a...b]$.*

Demonstração. Utilizaremos um método de demonstração por contradição. Seja f uma função de acumulação limitada e suponhamos que para todo o valor $x \in [a...b]$, $f(x) \geq \frac{c}{\delta x}$. Pelo Princípio de Cauchy existe $\gamma \simeq +\infty$ tal que $f(x) > \frac{\gamma}{\delta x}$. Então se a, b são tais que $a \leq x \leq b$, temos

$$\begin{aligned}\sum_{a \leq x < b} f(x)\,\delta x &\geq \left(\frac{1}{\delta x}\gamma\right)\delta x \\ &\equiv \gamma.\end{aligned}$$

que é um número ilimitado. Logo, a hipotese considerada é Falsa pois a função é limitada e $f(x) < \frac{c}{\delta x}$ ∎

3.2.2 Soma de duas funções de acumulação limitada

Proposição 3.2.2 *A soma de duas funções de acumulação limitada é uma função de acumulação limitada.*

Demonstração. Sejam f e g duas funções de acumulação limitada e $y, z \in \mathbb{X}$ limitados, tais que $y \leq z$. Somando as duas funções f e g viria

$$\begin{aligned}\sum_{y \leq x \leq z} (f(x) + g(x))\delta x &= \sum_{y \leq x \leq z} f(x)\,\delta x + \sum_{y \leq x \leq z} g(x)\,\delta x \\ &= \pounds + \pounds \\ &= \pounds.\end{aligned}$$

∎

3.2.3 Produto de duas funções de acumulação limitada

Proposição 3.2.3 *O produto de duas funções de acumulação limitada não é necessáriamente uma função de acumulação limitada.*

Vejamos um contra-exemplo. Consideremos duas funções de Dirac discretas tal como definidas no exemplo 3.1.2 iguais a Δ_0. Sejam $y, z \in \mathbb{X}$ limitados tais

Note que ${}^{0}h \in {}^{0}[a,b]$. Seja $\beta, \gamma \in [a...b[$ com $\beta, \gamma \simeq h$ tal que $\beta \leq \eta$ e $\gamma \geq \zeta$. Então

$$\begin{aligned} \sum_{\eta \leq x \leq \zeta} \varphi(x)\,\delta x &\simeq {}^{0}\left(\sum_{\eta \leq x \leq \zeta} \varphi(x)\,\delta x\right) \leq {}^{0}\left(\sum_{\beta \leq x \leq \gamma} \varphi(x)\,\delta x\right) \\ &\leq \sup\left\{{}^{st}\left[{}^{0}\left(\sum_{\beta \leq x \leq \gamma} \varphi(x)\,\delta x \middle| \, \beta, \gamma \simeq h,\ \beta \leq \eta,\ \gamma \geq \zeta\right)\right]\right\} \\ &\equiv a_h. \end{aligned}$$

Então

$$\sum_{\eta \leq x \leq \zeta} \varphi(x)\,\delta x \lesssim a_h. \tag{3.3}$$

Em seguida mostra-se que existe $y, z \simeq h$, $y \leq z$ tal que

$$\sum_{y \leq x \leq z} \varphi(x)\,\delta x \gtrsim a_h$$

Seja $n \in \mathbb{N}$ standard. Existem $\beta, \gamma \in [a...b[$ tais que em que $\beta < \gamma$, $\beta \simeq h \simeq \gamma$e

$$\sum_{\beta \leq x \leq \gamma} \varphi(x)\,\delta x > a_h - \frac{1}{n}$$

Pelo Princípio da Extensão, existem sucessões internas $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que

$$\sum_{\beta_n \leq x \leq \gamma_n} \varphi(x)\,\delta x > a_h - \frac{1}{n}$$

Pelo Princípio da Extensão, existem sucessões internas $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que se estendem às sucessões externas $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N},stn}$ e $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N},stn}$. Pelo Lema de Robinson e o Princípio de Cauchy afirma-se que se existe $\nu \in \mathbb{N}$, ilimitado tal que ainda $\beta_\nu \simeq h \simeq \gamma_\nu$, para $n = \nu$ mantém-se

$$\sum_{\beta_\nu \leq x \leq \gamma_\nu} \varphi(x)\,\delta x > a_h - \frac{1}{\nu} \gtrsim a_h.$$

Finalmente como também considerámos $\sum_{\eta \leq x \leq \zeta} \varphi(x)\,\delta x \lesssim a_h$ pode-se concluir, com $y = \beta_\nu$ e $z = \gamma_\nu$ que

$$\sum_{\eta \leq x \leq \zeta} \varphi(x)\,\delta x \simeq a_h$$

para todo $\eta, \zeta \simeq h$ com $\eta \leq y$ e $\zeta \geq z$. ∎

Exemplo 3.2.6 *Seja* $x \neq 0$, $x \neq \delta x$, $x \neq -\delta x$. *Seja* $\varphi : X \to R^+$ *definida por*

$$\begin{cases} \varphi(0) &= \frac{1}{\delta x} \\ \varphi(\delta x) &= \delta x \\ \varphi(-\delta x) &= \delta x \\ \varphi(x) &= 0, \text{ se } x \notin \{-\delta x, 0, \delta x\}. \end{cases}$$

Então M_ε é limitado. Então

$$\begin{aligned} I &= \sum_{a \le x < b} \varphi(x)\,\delta x = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{x_i \le x \le x_{i+1}} \varphi(x)\,\delta x \right) \\ &\le \sum_{i=0}^{n-1} M\varepsilon \\ &= n.M\varepsilon. \end{aligned}$$

que é limitado. ■

Como consequência obtemos que o conjunto de pontos de acumulação de uma função de acumulação limitada é externamente enumerável (i.é., em bijecção com o conjunto externo dos elementos standard de $\mathbb{N}$).

Teorema 3.2.9 *Seja $\varphi : [a...b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função de acumulação limitada. Então o conjunto dos pontos de acumulação é pelo menos externamente enumerável.*

Demonstração. Sejam a, b limitados e seja $\varphi : [a...b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função de acumulação limitada. Então $\sum_{a \le x \le b} \varphi(x)\,\delta x$ é limitado pelo teorema anterior. Seja $\Phi(x) = \sum_{a \le y < x} \varphi(x)\,\delta x$, então $\Phi(a) = 0$ e $\Phi(x)$ é limitado para todo $x \in [a...b]$. Suponhamos que h é um ponto de acumulação com $a \le h \le x$. Neste caso existem ainda pontos $\eta, \zeta \simeq h$ com $\eta \lneqq \zeta$ e $\Phi(\zeta) - \Phi(\eta)$ é positivo e apreciável. Pelo Princípio da transferência, existe um número racional standard q_h com $^\circ\Phi(\eta) < q_h < {}^\circ\Phi(z)$. Assim a cada ponto de acumulação h de φ, isto é a cada salto de Φ, pode-se associar um racional standard q_h. Ora o conjunto externo dos racionais standard é externamente enumerável, então o conjunto dos pontos de acumulação é no máximo externamente enumerável. ■

3.2.6 Contribuição para o integral discreto

Consideraremos funções φ de acumulação limitada definidas num intervalo discreto $[a...b]$.

Pelo Teorema 3.2.9, o domínio H de φ pode ser disposto numa sequência. Com o auxílio de H podemos identificar três tipos definidos de *contribuição para o valor do integral discreto*

$$I = \sum_{a \le x < b} \varphi(x)\,\delta x.$$

de φ.

Notação 3.2.10 *Seja $\varphi : [a...b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função de acumulação limitada. Escreveremos domínio de acumulação de φ na forma*

$$H = (h_n)_{n \in \mathbb{N}},$$

onde h_n é um ponto de acumulação de φ para todo o standard $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Se $H = (h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é um domínio de acumulação finito. Como é standard, também $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{h_n}$ é standard e nada mais há a demonstrar. Se H é infinito podemos encontrar H na forma de uma sequência standard $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Seja $m \in \mathbb{N}$ standard. Pelo Lema 3.2.14 há m intervalos internos $J_1, J_2, .., J_m$, tais que $J_1 \subset hal\,(h_1)$, $J_2 \subset hal\,(h_2)$, ... ,$J_m \subset hal\,(h_m)$ e $\sum\limits_{n=0}^{m} a_{h_n} \simeq \sum\limits_{n=0}^{m} \left(\sum\limits_{x\in J_n} \varphi\,(x)\,\delta x \right) \leq I$. Seja $I = \sum\limits_{x\in \mathbf{X}} \varphi\,(x)\,\delta x$. Então $\sum\limits_{n=0}^{m} a_{h_n} \leq^o I$ para todo $m \in \mathbb{N}$ standard. Pelo Axioma de Transferência vem que $\sum\limits_{n=0}^{m} a_{h_n}$ $\leq^o I$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Logo $\sum\limits_{n=0}^{n} a_{h_n}$ converge, porque a sucessão das somas parciais é uma sucessão não decrescente. ■

Teorema 3.2.16 *Seja $\varphi : [a...b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função de acumulação limitada.*

1. *Então existe um $\nu \in \mathbb{N}$ e uma sequência interna $(J_n)_{n\leq\nu}$ de intervalos disjuntos tais que com $C \equiv \bigcup\limits_{n\leq\nu} J_n$:*

   (a) $\lambda\,(C) \simeq 0$

   (b) Para todo o $n \in \mathbb{N}$ standard $\sum\limits_{x\in Jn} \varphi\,(x)\,\delta x \simeq a_{h_n}$.

   (c) $\sum\limits_{x\in C} \varphi\,(x)\,\delta x \simeq A$.

2. *Além disso se $\nu\prime \in \mathbb{N}$ e $(J'_n)_{n\leq\nu'}$ é uma sequência interna tal que $C' \equiv \bigcup\limits_{n\leq\nu} J'_n$ com as mesmas propriedades, tem-se $\sum\limits_{x\in C\Delta C'} \varphi\,(x)\,\delta x \simeq 0$.*

Demonstração. 1.Se H é standard finito, digamos da forma $\{h_1, ..., h_m\}$ com standard m, pela Proposição 3.2.5 e pelo Lema 3.2.14 existem m intervalos internos disjuntos $J_1, J_2, .., J_m \subseteq [a...b]$ tais que $J_1 \subset hal\,(h_1)$, $J_2 \subset hal\,(h_2)$, ... $J_m \subset hal\,(h_m)$, $\sum\limits_{x\in J_n} \varphi\,(x)\,\delta x \simeq a_{h_n}$ para todo n com $1 \leq n \leq m$, e $\sum\limits_{n=0}^{m} \left(\sum\limits_{x\in j_n} \varphi\,(x)\,\delta x \right) \simeq \sum\limits_{n=0}^{m} a_{h_n} = A$. Seja $C = \bigcup\limits_{1\leq n\leq m} j_n$. Então a medida de C satisfaz

$$\lambda\,(C) = \lambda \left(\bigcup_{n\leq m} J_n \right) = \sum_{n\leq m} \lambda\,(J_n) \simeq 0.$$

e $\sum_{x\in C} \varphi\,(x)\,\delta x = \sum\limits_{n=0}^{m} \left(\sum\limits_{x\in j_n} \varphi\,(x)\,\delta x \right) \simeq \sum\limits_{n=0}^{m} a_{h_n} = A$

2. Seja $H = (h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ infinito. Pelo método da Parte ?? desta demonstração obtemos uma sucessão externa $(J_n)_{st\ n}$ de intervalos disjuntos internos de comprimento infinitesimal tais que para todo n standard $J_n \subset hal\,(h_n)$, $\sum\limits_{x\in J_n} \varphi\,(x)\,\delta x \simeq a_{h_n}$ e para todo m standard $\sum\limits_{n=0}^{m} \left(\sum\limits_{x\in J_n} \varphi\,(x)\,\delta x \right) \simeq \sum\limits_{n=0}^{m} a_{h_n}$ e,

1. *Existe um conjunto* $M \subset [a...b]$, *com* $\lambda(M) \simeq 0$, *tal que* $\varphi_{|M}$ *é uma função de acumulação infinitésimal e* $\sum_{x\in M} \varphi(x)\,\delta x \simeq S$. *Se* $M\prime$ *tem as mesmas propriedades, então*

$$\sum_{x\in M\triangle M'} \varphi(x)\,\delta x \simeq 0.$$

1. 2. *Existe um conjunto* $\sigma \subset [a...b]$, *com* $\lambda(\sigma) \simeq b-a$, *tal que* $\varphi_{|}\sigma$ *é S-integrável e* $\sum_{x\in\sigma} \varphi(x)\,\delta x \simeq R$. *Se* σ' *tem as mesmas propriedades, então*

$$\sum_{x\in\sigma\triangle\sigma'} \varphi(x)\,\delta x \simeq 0.$$

3. *Os conjuntos* M *e* σ *podem ser escolhidos disjuntos e tais que* $M\cap\sigma = \emptyset$ *e* $M\cup\sigma$ *é complementar a qualquer conjunto interno* $C \subset [a...b]$ *tal que* $\lambda(C) \simeq 0$ *e*

$$\sum_{x\in C} \varphi(x)\,\delta x \simeq A.$$

Demonstração. 1.Em virtude do Teorema 3.2.16, seja $C \subset [a...b]$ um conjunto interno tal que $\lambda(C) \simeq 0$ e $\sum_{x\in C} \varphi(x)\,\delta x \simeq A$.

1. 2.Para cada $n \in \mathbb{N}$ standard existe um conjunto interno $M_n \subset [a...b]\backslash C$ tal que $\lambda(M_n) \simeq 0$ e $\sum_{x\in M_n} \varphi(x)\,\delta x \geq S - \frac{1}{n}$. Usando o Princípio da Extensão podemos estender a sequência interna $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a uma sucessão externa $(M_n)_{\ st\ n\in\mathbb{N}}$.Aplicando o Lema de Robinson e o Princípio de Cauchy podemos supôr que existe $\nu \simeq \infty$ tal que ainda $\lambda(M_\nu) \simeq 0$, $M_\nu \subset [a...b]\backslash C$ e , $\sum_{x\in M_\nu} \varphi(x)\,\delta x \geq S - \frac{1}{\nu}$. Se $M = N_\nu$ temos então $M \subset [a...b]\backslash C$, e a função φ é de acumulação infinitésimal em M. Além disso, $\lambda(M) \simeq 0$ e $\sum_{x\in M} \varphi(x)\,\delta x \simeq S$. Assumamos que $M\prime$ tem as mesmas propriedades. Então $\sum_{x\in M'\backslash M''} \varphi(x)\,\delta x \simeq 0$, pois que φ é de acumulação infinitésimal em M e $\sum_{x\in M''\backslash M} \varphi(x)\,\delta x \simeq 0$, pois que φ é de acumulação infinitesimal em M'.Portanto $\sum_{x\in M'\triangle M''} \varphi(x)\,\delta x \simeq 0$

   3.Seja $\sigma = [a...b]\setminus(C\bigcup M)$. Então σ é um conjunto interno e $\lambda(\sigma) \simeq b-a$. Então φ é S-integrável em σ pois só se $\eta \subseteq C\bigcup M$ com $\lambda(\eta) \simeq 0$ há hipótese de $\sum_{x\in\eta} \varphi(x)\,\delta x \not\simeq 0$. A demonstração de que $\sum_{x\in\sigma} \varphi(x)\,\delta x \simeq R$ e de que $\sum_{x\in\sigma\triangle\sigma'} \varphi(x)\,\delta x \simeq 0$ se, $\sigma' \subseteq [a...b]$ tem as mesmas propriedades que σ prova-se pelo mesmo método que foi utilizado na Parte 1 .

   As propriedades em questão seguem da construção do conjunto M e σ.

Teorema 3.2.19 ??*Seja* $\varphi : [a...b] \to \mathbb{R}^+$ *uma função de acumulação limitada. Entãgral discreto* I *pode ser escrito na forma* $I \simeq A + S + R$, *onde* A *é a*

Capítulo 4

Teoremas de decomposição

Medidas clássicas podem ser decompostas em partes atómicas, singulares e regulares. Provaremos que existe uma decomposição análoga para funções de acumulação limitada. A decomposição não é única mas quase única no sentido de uma propriedade de tipo L_1 não standard: Os integrais discretos dos valores absolutos das diferenças das funções relacionadas com as duas decomposições são quase iguais.

4.1 Decomposições

4.1.1 Decomposição do domínio

Decompomos o intervalo de definição $[a...b]$ da função de acumulação limitada de uma forma que corresponde à decomposição em valores do teorema ??. A decomposição do intervalo $[a...b]$ será feita de duas maneiras : uma em conjuntos internos outra em conjuntos externos. Assim como primeiro adaptámos a decomposição $[a...b] = C \cup M \cup \sigma$,no sentido de obter uma decomposição natural mais ligeira.

Teorema 4.1.1 *??Seja φ uma função de acumulação limitada. Então $[a...b] = C \cup M \cup \sigma$, onde C, M e σ são disjuntos dois a dois, satisfazendo $\lambda(C) \simeq \lambda(M) \simeq 0$ e φ toma só valores ilimitados em $C \cup M$, tais que $\sum\limits_{x \in C} \varphi(x)\,\delta x \simeq A$, $\sum\limits_{x \in M} \varphi(x)\,\delta x \simeq S$ e $\sum\limits_{x \in \sigma} \varphi(x)\,\delta x \simeq R$.*

Demonstração. *Pelo Teorema ?? existem conjuntos internos C, M e σ que são disjuntos dois a dois, satisfazendo $\lambda(C) \simeq \lambda(M) \simeq 0$ e tais que $\sum\limits_{x \in C} \varphi(x)\,\delta x \simeq A$, $\sum\limits_{x \in M} \varphi(x)\,\delta x \simeq S$ e $\sum\limits_{x \in \sigma} \varphi(x)\,\delta x \simeq R$. Defina-se para $n \in \mathbb{N}$*

$$M_n = \{x \in M | \varphi(x) \geq n\}.$$

Então $\sum\limits_{x \in M \setminus M_n} \varphi(x)\,\delta x \simeq S$ para todo n standard. Pelo Lema de Robinson existe *do teorema ?? afirma que* $\sum\limits_{x\in\ \sigma} \varphi(x)\,\delta x \simeq S$*.Definamos* $\psi = \varphi|_\sigma$ *e para cada* $n \in \mathbb{N}$ *façamos* $\psi^{(n)}$ *a função* ψ *truncada em* n *e* $P_n \subseteq \sigma$ *seja o suporte de* $\psi^{(n)}$*.Observemos que* ψ *é regular em* σ*. Afirmamos que* $\sum\limits_{x\in\ \sigma} \psi^{(\nu)}(x)\,\delta x \simeq S$ *para todo o* $\nu \simeq +\infty$*. Senão, seja* $\nu \simeq +\infty$ *de tal modo que* $\sum\limits_{x\in\ \sigma} \psi^{(\mu)}(x)\,\delta x \lessapprox S$ *. Então*

$$\sum_{x\in\ \sigma} \psi - \psi^{(\mu)}(x)\,\delta x \geq \mu\lambda(\sigma - P_\mu) \gtrapprox 0$$

Se $\lambda(\sigma - P_\mu) \gtrapprox 0$, $\sum\limits_{x\in\ \sigma} \psi(x) - \psi^{(\mu)}(x)\,\delta x \simeq +\infty$*, verifica-se uma contradicção pelo facto de* $\psi - \psi^{(\mu)}$ *ser singular em* $\sigma - P_\nu$*, consequentemente também* $\psi \geq \psi - \psi^{(\mu)}$*,em contradição com o facto que* ψ *é assumido como sendo regular.Isto prova a afirmação. Seja* $\epsilon > 0$ *standard. Obtém-se com a ajuda do*

Princípio de Cauchy que para algum standard $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\sum_{x\in\ \sigma} \psi^{(\mu)}(x)\,\delta x &= \sum_{x\in\ \sigma} \psi^{(\mu)}(x)\,\delta x \\ &\geq S - \epsilon\end{aligned}$$

o facto de $P_n \subseteq \theta$*, prova o teorema.* ■

Observe-se que em geral pode não existir um conjunto interno $P \subseteq \theta$ tal que $\sum\limits_{x\in\ P} \varphi(x)\,\delta x \simeq R$.

4.1.2 Decomposição da função

Obtem-se uma decomposição da própria função φ de acumulação limitada em três funções que correspondem à parte acumulada, à parte singular e à parte regular do seu integral discreto.

Teorema 4.1.3 *Seja* $\varphi : [a...b] \to \mathbb{R}^+$ *uma função de acumulação limitada. Então existem funções* φ_A, φ_S, $\varphi_R : [a...b] \to \mathbb{R}^+$ *com suportes disjuntos tais que* φ_A *é atómica,* φ_B *é singular,* φ_R *é regular e* $\varphi = \varphi_A + \varphi_S + \varphi_R$*. Os seus integrais discretos satisfazem*

$$\begin{aligned}\sum_{x\in[a...b]} \varphi_A(x)\,\delta x &\simeq A \\ \sum_{x\in[a...b]} \varphi_S(x)\,\delta x &\simeq S \\ \sum_{x\in[a...b]} \varphi_R(x)\,\delta x &\simeq R.\end{aligned}$$

Além disso, se φ_A', φ_S', φ_R' *é uma qualquer decomposição de* φ *com as mesmas propriedades, então*

$$\begin{aligned}\sum_{x\in[a...b]} |\varphi_A'(x) - \varphi_A(x)|\,\delta x &\simeq \sum_{x\in[a...b]} |\varphi_S'(x) - \varphi_S(x)|\,\delta x \\ &\simeq \sum_{x\in[a...b]} |\varphi_R'(x) - \varphi_R(x)|\,\delta x \simeq 0.\end{aligned}$$

conjuntos internos, a menos de intervalos discretos de cumprimento infinitesimal (Proposição ??), e em conjuntos externos (4.1) e decomposição da própria função como soma de uma função atómica, singular e regular (Teorema 4.1.3). Veremos mais adiante uma decomposição do valor do integral discreto da função numa contribuição atómica, singular e regular (também a Proposição ??), a menos de valores infinitesimais.

Daremos em seguida alguns exemplos de funções de acumulação limitada e de decomposições relacionadas.

Exemplo 4.1.4 *Seja* $\frac{1}{\sqrt{\delta x}} \in \mathbb{N}$. *Consideremos a função* $f : [0...1[\rightarrow \mathbb{R}^+$ *definida em (3.2) por*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\sqrt{\delta x}}, & \frac{x}{\sqrt{\delta x}} \in \mathbb{N} \\ 0, & caso.contrário \end{cases}$$

Aqui podemos fazer $C = \emptyset$, $M = n\sqrt{\delta x} \cap [0...1[$ *e* $Q = [0...1[\backslash M$. *Então só* f_S *é não nulo. Consideremos* M *como um quase-intervalo com pontos de igual incremento de distância* $\sqrt{\delta x}$ *e seja* $M = [0...1[$ *.Então para esta função singular temos*

$$\begin{aligned} S &= \sup{}^{st}\left\{ {}^{0}\left(\sum_{x\in\mathbb{N}} f(x)\,\delta x\right) | N \subset [0...1[\right\} = \\ &\simeq \sum_{x\in M} f_S(x)\,\delta x \\ &= \sum_{x\in M} \frac{2x}{\sqrt{\delta x}}\delta x \\ &= \sum_{x\in[0...1[} 2x\sqrt{\delta x} \\ &\simeq \int_0^1 2x dx = 1 \end{aligned}$$

Portanto $S = 1$, *sendo standard.*

Exemplo 4.1.5 *Seja* $\varphi(x) : [0...2] \rightarrow \mathbb{R}$ *definida por:*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\delta x}, & x = 1 \\ x, & x \neq 1. \end{cases}$$

Podemos tomar $C = 1$, $M = \emptyset$ *e* $\sigma = [0...2] \setminus \{1\}$*e temos*

$$A = \varphi_A(1)\,\delta x \sum_{x\in\{1\}} \triangle_1(1)\,\delta x = \frac{1}{\delta x} \cdot \delta x = 1$$

Exemplo 4.1.7 *Seja* $g : [0...1[\to \mathbb{R}^+$ *a função definida por:*

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\delta x}} & \frac{x}{\sqrt{\delta x}} \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{\delta x} & x = \delta x \\ 2x & \textit{caso contrário} \end{cases}$$

Então g *escreve-se como soma de três funções* g_A, g_S *e* g_R, *onde* $g_A = \Delta_{\delta x}$ *com suporte* $C = \{\delta x\}$, g_S *é igual a função* f *definida em (3.2) com suporte* $M = \left\{k\sqrt{\delta x} | 0 \leq k \lneqq \frac{1}{\sqrt{\delta x}},\ k \in \mathbb{N}\right\}$ *e* $g_R(x) = 2x$ *com suporte* $\sigma = [0...1[\backslash M \cup C$. *Segue em consequência do exemplo anterior que a contribuição atómica* A *e a contribuição singular* S *do integral discreto* I *de* ψ *têm ambos o valôr* 1. *Afim de determinar a contribuição regular* R *observemos que*

$$\lambda(\sigma) = \lambda([0...1[\backslash C \cup M) = 1 - \delta x - \sqrt{\delta x} \simeq 1.$$

Então se $\sigma \subset [0...1[$ *é interno e* g_R *é* S*−integrável em* σ,

$$\begin{aligned} R &= \sup{}^{st}\left\{{}^0\left(\sum_{x\in\sigma} g_R(x)\,\delta x\right) | \sigma \subset [0...1[\textit{ interno, } g_R \textit{ é } S - \textit{integrável em } \sigma\right\} = \\ &= {}^0\left(\sum_{x\in\ \sigma} 2x\ \delta x\right) \\ &= {}^0\left(\sum_{x\in[0...1[} 2x\ \delta x - \sum_{x\in\{\delta x\}\cup M} 2x\delta x\right) \\ &= {}^0\left(\sum_{x\in[0...1[} 2x\delta x\right) \end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.3.3, resulta que:

$$R = \int_0^1 2x\ dx = 1.$$

Segue que $I \simeq 1 + 1 + 1 = 3$.

4.1.3 Decomposição da primitiva discreta

Nesta última secção acrescentaremos um quarto tipo de decomposição, agora para a *primitiva discreta* $\Phi(x) \equiv \sum_{a\leq y<x} \varphi(y)\delta x$ da função de acumulação limitada. Começamos por enunciar algumas definições. Para $x \in [a...b]$ definimos a função diferença $\delta\varphi(x) = \varphi(x + \delta x) - \varphi(x)$.

Definição 4.1.8 *Uma função* $\varphi : [a...b] \to \mathbb{R}^+$ *diz-se* absolutamente S-contínua *se para todo* $N \subset [a...b]$ *com* $\lambda N \simeq 0$ *temos*

$$\sum_{x\in N} \delta\varphi(x) \simeq 0,$$

com $\delta\varphi(x) = \varphi(x + \delta x) - \varphi(x)$.

A seguinte proposição relaciona os pontos de acumulação de uma função atómica com os comprimentos do salto da sua primitiva discreta. Também relaciona os respectivos valores de acumulação com os comprimentos de salto, e os respectivos intervalos infinitesimais onde a acumulação ocorre efectivamente com os intervalos infinitesimais onde o salto ocorre de facto. A proposição é então semelhante ao Teorema 3.2.16.

Proposição 4.1.14 *Seja $\Phi : [a...b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ a primitiva discreta de uma função atomica. Então existe $\nu \in \mathbb{N}$ e uma sequência interna $(J_n)_{n \leq \nu}$ de intervalos disjuntos tais que, com $J_n \equiv [j_n...k_n]$ e $C = \bigcup_{n \leq \nu} J_n$,*

1. $\lambda(C) \simeq 0$.
2. *Para todo o $n \in \mathbb{N}$ verifica-se que $\Phi(k_n) - \Phi(j_n) \simeq a_{h_n}$.*
3. $\Phi(b) \simeq A$.

Demonstração. Sómente a parte 3 precisa de ser demonstrada. Observe-se porém que .

$$\Phi(b) = \Phi(b) - \Phi(a) \tag{4.2}$$

$$= \sum_{x \in [a....j_0[} \varphi(x)\delta x + \sum_{n=0}^{\nu} \sum_{x \in [j_n...k_n[} \varphi(x)\delta x' + $$

$$+ \sum_{n=0}^{\nu-1} \sum_{x \in [j_n..k_n[}^{j_{h+1}} \varphi(x)\delta x + \sum_{x \in [k\nu...b[}^{b} \varphi(x)\delta x. \tag{4.3}$$

pelo Teorema 3.2.16 o conjunto C pode ser escolhido de modo que $\lambda(C) \simeq 0$ e

$$\sum_{n=0}^{\nu} \sum_{x \in [j_n...k_n[} \varphi(x)\delta x \simeq \sum_{h=0}^{\nu} a_{h_n} \simeq A. \tag{4.4}$$

Os três últimos termos correspondem ao integral discreto de uma função infinitesimal sobre o conjunto $[a...b] \backslash C$ de medida limitada quase-igual a $b - a$. Portanto a contribuição para I é infinitesimal. Concluímos então que $\Phi(b) \simeq A$. ■

Proposição 4.1.15 *Seja $\varphi : [a...b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função de acumulação limitada e $\Phi : [a...b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ seja a sua primitiva discreta. Então:*

1. *φ é atómico com contribuição acumulada $A > 0$ sse Φ é uma função salto com $\Phi(a) = 0$ e $\Phi(b) \simeq A$.*
2. *φ é singular com contribuição singular $S > 0$ sse Φ é S-contínua e quase-sempre constante com $\Phi(a) = 0$ e $\Phi(b) \simeq S$.*
3. *φ é regular com contribuição regular $R > 0$ sse Φ é absolutamente S-contínuo com $\Phi(a) = 0$ e $\Phi(b) \simeq R$.*

regular para I. Então $\Phi_A(b) - \Phi_A(a) \simeq A$, $\Phi_S(b) - \Phi_S(a) \simeq S$ e $\Phi_R(b) - \Phi_R(a) \simeq R$. Se $\Phi'_A, \Phi'_S, \Phi'_R$ é uma segunda decomposição de Φ numa função salto Φ'_A, numa função S-contínua, que é quase sempre constante Φ'_2, e numa função absolutamente S-contínua Φ'_R, então $\Phi'_A(x) \simeq \Phi'_A(x)$, $\Phi'_S(x) \simeq \Phi'_S(x)$ e $\Phi'_R(x) \simeq \Phi_R(x)$ para todo $x \in [a...b]$.

Demonstração. Seja $\varphi_A, \varphi_S, \varphi_R$ a decomposição de $\varphi \equiv \frac{\delta\Phi}{\delta x}$ dada pelo Teorema 4.1.3. Sejam Φ_A, Φ_S respectivamente Φ_R a primitiva discreta de φ_A, φ_S respectivamente φ_R. Pela Proposição 4.1.15 a função Φ_A é uma função salto, a função Φ_S é S-contínua e quase sempre constante e a função Φ_R é absolutamente S-contínuo. Porque os suportes de Φ_A, Φ_S e Φ_R são disjuntos, se tem $\Phi = \Phi_A + \Phi_S + \Phi_R$. Ainda pela Proposição 4.1.15 tem-se $\Phi_A(b) - \Phi_A(a) \simeq A$, $\Phi_S(b) - \Phi_S(a) \simeq S$ e $\Phi_R(b) - \Phi_R(a) \simeq R$. Seja $\Phi'_A, \Phi'_S, \Phi'_R$ uma segunda decomposição de Φ numa função salto Φ'_A, numa função S-contínua e quase sempre constante Φ'_S e numa função absolutamente S-contínua Φ'_R. Sejam C, C', M, M', σ e σ' os conjuntos dados pela Proposição ??. Seja $x \in [a...b]$. Então pelo teorema 4.1.3

$$
\begin{aligned}
|\Phi'_A(x) - \Phi_A(x)| &= \left| \sum_{a \leq y < x} (\varphi'_A(y) - \varphi_A(y))\delta x \right| \\
&= \left| \sum_{a \leq y < x, y \in C \Delta C'} (\varphi'_A(y) - \varphi_A(y))\delta x \right| \\
&\leq \sum_{a \leq y < x, y \in C \Delta C'} |\varphi'_A(y) - \varphi_A(y)| \, \delta x \\
&\leq \sum_{y \in C \Delta C'} |\varphi'_A(y) - \varphi_A(y)| \, \delta x \\
&\simeq 0
\end{aligned}
$$

Então $\Phi'_A(x) \simeq \Phi_A(x)$. De mesmo modo mostram-se $\Phi'_S(x) \simeq \Phi_S(x)$ e $\Phi'_R(x) \simeq \Phi_R(x)$. ■

Bibliografia

[1] BARTLE, Robert Gardner (2001) - **A Modern Theory of Integration** (Graduate Studies in mathematics ; v. 32) Library of Congress Cataloging-in-Publication Data ISBN 0-8218-0845-1.

[2] BERG, Imme van den (1987) - Nonstandard Asymptotic Analysis - , Springer Lecture Notes in Mathematics 1249.

[3] BERG, Imme van den (1998) - **Equations paraboliques et intégrales de chemins finies avec applications financières**, Functions discrétes quasicontinues, cap.3, Publication pédagogique 32, Université de Nice Sophia-Antipolis, 87p. http://math.unice.fr

[4] DIENER, Francine & Marc (1985) - **Nonstandard Analysis in Practice.** ed. - Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Budapeste; Hong Kong; London; Milan; Paris; Santa Clara; Singapore; Tokyo; Springer; 1995. ISBN: 0-387-60297-6

[5] DIENER, Francine & REEB, Georges (1989) - **Analyse Non Standard.** Hermann, Editeurs des Sciences et des arts. Paris, ISBN: 2-7056 6109 0.

[6] OLIVEIRA, Augusto J. Franco de & BERG, Imme van den (2007) - **Matemática Não-Standard, Uma introdução com aplicações.** Lisboa Edição da Fundação Calouste Gulbenkian. ISBN: 978-972-31-1226-9.

[7] HURD, Albert & LOEB, Peter (1985) - **An introduction to nonstandard real analysis.** Pure and Applied Mathematics 118, Academic Press, Inc., Orlando, Florida .

[8] ROBINSON, Abraham (1996) - **Non-standard Analysis** ,Princeton University Press , New Jersey ISBN 0-691-04490-2.

[9] ROBERT, Alain (1988) -**Nonstandard Analysis**, John Wiley § Sons, Switzerland ISBN: 0 471 91703 6.

[10] KEISLER, H. Jerome (2007,2^aed) - **Foundations of Infinitesimal Calculus,** Department of Mathematics, University of Winsconsin, Madison, Wisconsin, USA, (noncommercial), .,