UNIVERSIDADE DE ÉVORA

INSTITUTO SUPERIOR DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIAS

Dissertação de Mestrado

CONTRIBUIÇÃO DO ORIGAMI PARA A EXPLORAÇÃO DE CONTEÚDOS DE GEOMETRIA NO ENSINO BÁSICO: PROPOSTAS DE TAREFAS

Orientador: Professor Doutor

Jorge Nuno Silva

Mestranda

Maria de Fátima Neves Granadeiro da Silva

MESTRADO EM EDUCAÇÃO

A CRIANÇA EM DIFERENTES CONTEXTOS EDUCATIVOS

Ano 2009

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

INSTITUTO SUPERIOR DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIAS

Dissertação de Mestrado

CONTRIBUIÇÃO DO ORIGAMI PARA A EXPLORAÇÃO DE CONTEÚDOS DE GEOMETRIA NO ENSINO BÁSICO: PROPOSTAS DE TAREFAS

Orientador: Professor Doutor

Jorge Nuno Silva

Mestranda

Maria de Fátima Neves Granadeiro da Silva

MESTRADO EM EDUCAÇÃO

A CRIANÇA EM DIFERENTES CONTEXTOS EDUCATIVOS

Ano 2009

Contribuição do Origami para a Exploração de Conteúdos de Geometria no Ensino Básico: Propostas de Tarefas

Maria de Fátima Neves Granadeiro da Silva
Universidade de Évora, Agosto de 2009

A arte de dobrar papel teve origem na China no século I ou II d.C., e difundiu-se pelo Japão no século VI.

Esta arte milenar tem cativado a atenção dos estudiosos ao longo de séculos. Inicialmente ligada ao culto religioso, adoptada posteriormente pelos samurais como entretenimento, é hoje mundialmente aceite como uma arte.

Transmitido de mães para filhas durante gerações, foi no século XIX, pela mão do pedagogo Fröebel, introduzido no currículo escolar alemão, sendo desde então considerado por muitos como um instrumento primordial na aquisição de conhecimentos, especialmente na área a geometria e por outros um elemento básico de interdisciplinaridade.

Este trabalho pretende demonstrar as potencialidades do Origami como instrumento essencial nas diversas áreas curriculares, especialmente no estudo de conceitos matemáticos, nomeadamente no âmbito da geometria e a sua inclusão no currículo escolar.

O uso do Origami na sala de aula inspira curiosidade e motiva a criatividade.

Palavras-chave. Educação, geometria, material concreto e ORIGAMI (dobragens de papel).

Origami´s Contribution for Learning Geometrical Concepts in the Primary Education: Tasks' Projects

Maria de Fátima Neves Granadeiro da Silva

Évora University, August 2009

The art of paper folding arose in China during the first or second century A.D. By the sixth century, it had spread to Japan.

This millenary art got the scientific community´s attention for centuries.

At the beginning, folding was associated with a ceremonial act, later on it was use by Samurais as entertainment, and today it is accepted as an art by all.

Transmitted from mothers to children during generations, it was introduced by Fröebel in the German curriculum and since then has been considered by some as an instrument for teaching basic geometry and by others as essential in interdisciplinary concepts.

With this work we would like to show the Origami potentialities as an instrument connecting different curriculum areas, especially in mathematics, particularly in geometry and his inclusion in education curriculum.

The use of Origami in the classroom helps children to obtain and consolidate basic concepts and inspire curiosity and promote their creativity.

Key words: Education, geometry, concrete material and ORIGAMI (folding paper).

i. Agradecimentos

Quero agradecer a todos o que tornaram este trabalho possível.

- Aos meus pais por todo o seu amor e carinho.

- À minha madrinha por todo o seu amor e apoio incondicional.

- Ao Vicente Palacios por ter desenhado e publicado alguns dos meus trabalhos de Origami e me ter enviado livros e documentação para que este estudo fosse possível.

- A Embaixada do Japão pelo reconhecimento público do trabalho desenvolvido em prol do Origami ao conceder-me o prémio "Hara".

- Ao Professor Doutor Jorge Nuno Silva pelas suas sugestões, comentários, estímulo positivo e por acreditar em mim.

- Ao Pedro, à Inês, aos familiares e amigos pela sua amizade e compreensão.

- Aos sócios e amigos da Asociación Española de Papiroflexia pela sua disponibilidade e apoio.

Dedicatória

- À minha amiga Embaixatriz Ingrid Martins e ao meu amigo Vicente Palacios, que, nestes vinte e três anos de estudo sobre o Origami, me incitaram a continuar o meu trabalho de pesquisa.

折
紙

ÍNDICE GERAL

CAPÍTULO I – INTRODUÇÃO 7

1 PROBLEMA E QUESTÕES DA INVESTIGAÇÃO 7

1.1 OS NOVOS MATERIAIS DIDÁCTICOS E A SUA RELEVÂNCIA NO ENSINO DA MATEMÁTICA. 10

1.2 AS VIRTUDES DO USO DO ORIGAMI EM EDUCAÇÃO 12

CAPÍTULO II – REVISÃO DA LITERATURA 15

2 HISTÓRIA DO ORIGAMI 15

RESENHA HISTÓRICA DO ORIGAMI 15

2.1 FUNDAMENTOS RELIGIOSOS E FILOSÓFICOS DO ORIGAMI 19

2.2 APLICAÇÕES DO ORIGAMI 23

ORIGAMI NA LITERATURA, NA ARTE E NA EDUCAÇÃO 26

2.3 OS PRIMEIROS DOCUMENTOS DE ORIGAMI 26

2.4 O ORIGAMI NA ARTE E NA LITERATURA 28

2.5 PROBLEMA MATEMÁTICO, FRÖEBELIANAS E COCOTOLOGIA 31

2.6 O ORIGAMI NO INICIO DO SÉCULO XX 35

2.7 A GEOMETRIA NO ENSINO PRIMÁRIO EM PORTUGAL A PARTIR DA LEI DE 1894 41

2.8 O ORIGAMI E A INTERDISCIPLINARIDADE 45

ORIGAMI, GEOMETRIA, TEOREMAS E AXIOMAS 48

2.9 ORIGAMI, MATEMÁTICA E GEOMETRIA 48

ORIGAMI, AXIOMAS E TEOREMAS 57

2.10 OS SETE AXIOMAS 57

2.11 INIMAGINÁVEL MISTÉRIO EXISTENTE NAS DOBRAGENS DE UM QUADRADO 59

2.12 TEOREMA DE HAGA 60

2.13 TEOREMAS DE MAEKAWA E DE KAWASAKI 62

2.14 NÓ PENTAGONAL 65

2.15 O ORIGAMI MODULAR 68

GEOMETRIA NO ENSINO BÁSICO 72

2.16 NOVO PROGRAMA O ENSINO BÁSICO 72

2.17 EXERCÍCIOS, PROBLEMAS, TAREFAS EXPLORATÒRIAS,INVESTIGAÇÕES 80

2.18 O TRABALHO INVESTIGATIVO NA SALA DE AULA 82

CAPITULO III - METODOLOGIA **89**

3 METODOLOGIA DE UM ESTUDO TEÓRICO **89**

3.1 ESTUDO TEÓRICO BIBLIOGRÁFICO- DOCUMENTAL 89

3.2 O PORQUÊ DAS TAREFAS E DA SUA ORDEM. 90

CAPITULO IV - PROPOSTAS DE TAREFAS **93**

4 TAREFAS PARA ALUNOS DO ENSINO BÁSICO **93**

A Primeira aula *93*

Actividade Diagnóstica *94*

Tarefa 1 - Como Obter um Quadrado a Partir de um Rectângulo de Papel *95*

Tarefa 1 A - Solução de Gadi Vishne (1), para Rectângulo A4 ..... *96*

Tarefa 1 B - Solução de Gadi Vishne (2), para Qualquer Rectângulo *98*

Tarefa 2 - Utilizando um Quadrado Dobrar Ângulo Agudo, Recto e Obtuso *100*

Tarefa 3 - Como Dobrar um Quadrado ao Meio *102*

Tarefa complementar - a Interdisciplinaridade - O Dia da Mãe 104

Tarefa 4 - Como Dobrar um Rectângulo ao Meio *106*

Tarefa 5 - Como Obter um Copo por Dobragem *106*

Tarefas Complementares – À Descoberta de Figuras Geométricas no CP do Copo 108

Tarefa 6- Obter o Octógono Regular a Partir da Dobragem do Copo *109*

Tarefa 7 – Como Obter a Divisão do Rectângulo em Quatro Partes Iguais *110*

Tarefa Complementar (1) – Vamos contar figuras geométricas 111

Tarefa Complementar (2) - Como Obter Ângulos de 30º e 60º por Dobragem 111

Tarefa 8 - Construir um Pentágono com uma Tira de Papel *112*

Tarefa Complementar - Obter o Pentágono a Partir de um Rectângulo A4 113

Tarefa 9- Como obter um livro de notas a partir de um rectângulo *115*

Tarefa Complementar – Vamos Contar Rectângulos 118

Tarefa 10 - Dobragem de uma Pajarita *119*

Tarefa 11 - Como Obter Dois Quadrados a Partir do Papel de Formato A4. ..... *121*

Tarefa 12 - Dobrando Puzzles e Construindo Figuras Geométricas *123*

Tarefa 13 - Calcular a Amplitude dos Ângulos Internos de um Triângulo por Dobragem *124*

Tarefa 14 - Dobrar um Avião e Consolidar Conceitos *127*

Tarefa 15- Construir um Cubo por Dobragem *129*

Tarefa 16- Construir uma Caixa por Dobragem *131*

Tarefa 17- Dobrar um Chapéu de Viking *133*

Tarefa complementar - Dobrar Peixes e Construir Mobile 134

CAPITULO V - CONSIDERAÇÕES FINAIS **137**

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS **141**

ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 2-1 - *SENBAZURU ORIKATA* 16

FIGURA 2-2 - BORBOLETAS MACHO E FÊMEA 21

FIGURA 2-3 - PÁGINAS DO LIVRO *RANMA-ZUSHIKI* EDITADO POR HAYATO OHOKA (1734) 27

FIGURA 2-4 - DESENHO DE LEONARDO DA VINCI 28

FIGURA 2-5 - DOBRAGEM, C.P. DA *PAJARITA* E REPRESENTAÇÃO GRÁFICA 29

FIGURA 2-6 - *THROUGH THE LOOKING GLASS* 30

FIGURA 2-7 – ENUNCIADO DO PROBLEMA 31

FIGURA 2-8 - PÁGINAS DE *WAKOKU CHIYEKURABE* - SOLUÇÕES DO PROBLEMA 31

FIGURA 2-9 - *FRÖEBEL STAR* 32

FIGURA 2-10 - PAJARITA 33

FIGURA 2-11 – *PAPIROLAS*, PÁGINA 25 36

FIGURA 2-12 - *PAPIROLAS*, PÁGINA 26 36

FIGURA 2-13 - *PAJARITA* 36

FIGURA 2-14 – *THE ART AND WONDER OF ORIGAMI*, KASAHARA, 2008 ,P.35 37

FIGURA 2-15 – *GEOMETRIC EXERCISES*, ... 38

FIGURA 2-16 - FIGURAS GEOMÉTRICAS DE JUNIOR E FÖBELIANAS DE KASAHARA 40

FIGURA 2-17 - DOBRAGENS RECREATIVAS (LEMOS, 1929, P. 61) 42

FIGURA 2-18 - DOBRAGEM DO BARCO (P. 117) 44

FIGURA 2-19 - *MATH IN MOTIN*- ORIGAMI IN THE CLASSROOM, PEARL, 1997, P. 19 47

FIGURA 2-20 – AXIOMA 1 58

FIGURA 2-21 – AXIOMA 2 58

FIGURA 2-22 – AXIOMA 3 58

FIGURA 2-23 – AXIOMA 4 58

FIGURA 2-24 – AXIOMA 5 58

FIGURA 2-25 – AXIOMA 6 59

FIGURA 2-26 – AXIOMA 7 59

FIGURA 2-27 - DIVISÕES DO QUADRADO 60

FIGURA 2-28 - TEOREMA DE HAGA 60

FIGURA 2-29 - TEOREMA DE HAGA 61

FIGURA 2-30 – APLICAÇÃO DO TEOREMA DE HAGA 62

FIGURA 2-31 - TEOREMA DE MAEKAWA 62

FIGURA 2-32 - TEOREMA DE KAWASAKI 63

FIGURA 2-33 - TEOREMA DE KAWASAKI 64

FIGURA 2-34 – POEMA DO NÓ PENTAGONAL 65

FIGURA 2-35 - ÂNGULOS DE REFLEXÃO 65

FIGURA 2-36 - NÓ PENTAGONAL 66

FIGURA 2-37 - NÓS PENTAGONAIS E SUAS CONEXÕES..... 67

FIGURA 2-38 - COMPOSIÇÃO 69

FIGURA 2-39 - MODULAR..... 69

FIGURA 2-40 - POLIEDROS PLATÓNICOS 70

FIGURA 4-1 - QUADRADO OBTIDO A PARTIR DE RECTÂNGULO..... 96

FIGURA 4-2 - QUADRADO OBTIDO A PARTIR DE RECTÂNGULO SEM DEIXAR MARCA 97

FIGURA 4-3 - QUADRADO SEM MARCAS OBTIDO A PARTIR DE UM RECTÂNGULO..... 99

FIGURA 4-4 - TIPOS DE ÂNGULOS (FIGURA RETIRADA DE *APRENDENDO COM DOBRADURAS*) 100

FIGURA 4-5 - DOBRAR UM QUADRADO AO MEIO (1), (RETIRADO DE FRANCO, 1999) 102

FIGURA 4-6 – QUADRO RELATIVO À TAREFA "DOBRAR O QUADRADO AO MEIO" (ADAPTADO DE FRANCO, 1999) 103

FIGURA 4-7 - DOBRAR UM QUADRADO AO MEIO (2), (ADAPTADA DE KASAHARA, 1991) 104

FIGURA 4-8 – COMPLEMENTO DA TAREFA 3 , (DIAGRAMA DA TÚLIPA) 105

FIGURA 4-9 - DIAGRAMA DOBRAGEM DO COPO 107

FIGURA 4-10 - ENCAIXES DO COPO, (ADAPTADO DE GÊNOVA, 1991)..... 109

FIGURA 4-11 - DIVISÃO DO RECTÂNGULO EM QUATRO PARTES IGUAIS 110

FIGURA 4-12 - ÂNGULOS DE 30º E 60º..... 112

FIGURA 4-13 - DIAGRAMA NÓ PENTAGONAL 113

FIGURA 4-14 - ELABORAÇÃO DA TIRA PARA O PENTÁGONO A PARTIR DA DIVISÃO DO RECTÂNGULO AO MEIO 113

FIGURA 4-15 - NÓ PENTAGONAL A PARTIR DE UMA FOLHA A4 114

FIGURA 4-16 - DIAGRAMA DE DOBRAGEM DO LIVRO DE NOTAS 117

FIGURA 4-17 - DIAGRAMA DE DOBRAGEM DA *PAJARITA* 121

FIGURA 4-18 DIAGRAMA DE DOBRAGEM DA DIVISÃO DO RECTÂNGULO EM DOIS QUADRADOS IGUAIS 122

FIGURA 4-19 - PEÇA PARA O PUZZLE..... 124

FIGURA 4-20 SUGESTÕES DE DOBRAGEM DE PUZZLE 124

FIGURA 4-21 SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DO TRIÂNGULO..... 125

FIGURA 4-22 - DIAGRAMA DE DOBRAGEM DO AVIÃO 128

FIGURA 4-23 - DIAGRAMA DE DOBRAGEM DO CUBO, (RETIRADO DE *MATEMÁTICA - UMA LINGUAGEM UNIVERSAL)* 130

FIGURA 4-24 - DIAGRAMA PARA DOBRAR A CAIXA..... 133

FIGURA 4-25 - DIAGRAMA DA DOBRAGEM DO CHAPÉU DE VIKING..... 134

FIGURA 4-26 - DIAGRAMA DA DOBRAGEM DO PEIXE 135

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

A.E.P *(Asociación Española de Papiroflexia)*

CN (*Currículo Nacional do Ensino Básico)*

COAT *(the First International Conference on Origami in Education and Therapy)*

CP (*Crease Patern*)

DEB (*Departamento de Educação básica*)

DGIDC (*Direcção Geral de Inovação e do Desenvolvimento Curricular*

NCTM (*National Council of Teachers of Mathematics*

NOA (*Nippon Origami Association)*

OSME (International Meeting of Origami Science, Math, and Education)

NPMEB (*Novo Programa de Matemática do Ensino Básico*)

CAPÍTULO I – INTRODUÇÃO

1 PROBLEMA E QUESTÕES DA INVESTIGAÇÃO

> "Todas as artes contribuem para a maior de todas as artes, a arte de viver" (Bertold Brecht).

Aproximadamente a partir do ano de 1870 alguns investigadores alemães começaram a estudar os fenómenos psicológicos como um conjunto autónomo. Este estudo desenvolveu-se a partir de 1912 pela necessidade da existência de uma teoria que salientasse sobretudo o aspecto global da realidade psicológica, não esquecendo o valor e a necessidade da experimentação científica. Seus expoentes mais conhecidos foram Kurt Koffka, Wolfgang Köhler e Max Werteimer. "Os seus estudos procuravam entender como se davam esses fenómenos e o que acontecia para que determinado recurso pictórico resultasse, tendo sido utilizado para tal diversas obras de arte" (Gestalt SP). A estes estudos convencionou-se denominar de Psicologia da Gestalt ou Psicologia da Boa Forma.

Na Europa do século XIX, pela mão do pedagogo Friedrich Fröebel (1782-1852), as dobragens foram introduzidas no currículo escolar Alemão, através do Movimento Kindergarten (1837-40) que posteriormente influenciou todo o currículo escolar Europeu. Todavia Fröebel nunca conheceu o termo Origami. Para ele a educação de infância tem de basear-se na acção, no jogo e no trabalho. Este método defendia os princípios de livre actividade da criança, criatividade, participação social e expressão motora. O Movimento Kindergarten foi levado para o Japão por uma senhora alemã, obtendo considerável aceitação (Wikipedia).

A popularização da arte do Origami deu-se, no Japão, no período Tokugawa (1603-1867). As dobragens de papel que eram ensinadas às crianças, na escola misturam-se com o tradicional Origami. No ano de 1876 o Origami fazia parte do currículo escolar Japonês, sendo a geometria já estudada nas formas e dobras dos papéis.

Desde então diversos países em todo o Mundo têm vindo a incluir o Origami nos seus currículos escolares.

O pedagogo Jean Piaget (1896-1980) considera quatro períodos no processo evolutivo da espécie humana. Uma súmula detalhada das principais características de cada um desses períodos poderá aprimorar os nossos conhecimentos, uma vez que cada uma dessas fases é caracterizada por formas diferentes de organização mental que permitem ao indivíduo maneiras dissemelhantes de se relacionar com a realidade que o rodeia.

De um modo geral, todos os indivíduos vivenciam as quatro fases na mesma sequência, mas o proémio e o término de cada uma delas pode sofrer variações em função das características da estrutura biológica de cada indivíduo e dos estímulos proporcionados pelo meio ambiente onde está inserido.

A comunidade internacional procurava novos métodos de ensino e novos tópicos curriculares no campo da Educação Matemática quando surgiu um modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico desenvolvido pelo casal Van Hiele (Matos, 1985). Este casal de holandeses desenvolveu o seu trabalho/modelo no contexto de um currículo que encarava a Geometria como instrumento para exercitar as capacidades lógicas da mente. Este modelo educativo pretende explicar o comportamento dos alunos.

O ponto de vista pedagógico de Van Hiele incorpora uma perspectiva muito actual, segundo ele é necessário o uso de diferentes linhas metodológicas de trabalho que evidenciam a construção de conceitos matemáticos pelos alunos que assim se tornam sujeitos activos na própria aprendizagem e torna patente a preocupação pelo *insight* e manipulação das figuras. Adaptado de psicologia da Gestalt, muitas das ideias no modelo Van Hiele foram centradas em torno da ideia de uma estrutura (Van Hiele, 1986). O desenvolvimento do insight deve focar-se no desenvolvimento da capacidade dos estudantes verem estruturas como parte de estruturas mais finas, ou como parte de estruturas mais inclusivas. Considera que o desenvolvimento mental progride à medida que as estruturas dos alunos se transformam ou se substitui uma estrutura por outra. Van Hiele utiliza este raciocínio quando descreve o seu modelo segundo níveis de desenvolvimento da aprendizagem

De acordo com Santos (1995) a teoria de Van Hiele trabalha com o desenvolvimento do raciocínio em Geometria plana, descreve cinco níveis hierárquicos de actividades, Em cada nível deve existir uma relação entre os objectos de estudo e uma linguagem própria. Este modelo pode ser usado para orientar a formação e avaliar as habilidades do aluno. O progresso ao longo dos níveis depende mais da instrução recebida do que da idade ou da maturidade. Esta teoria assume implicitamente que o ensino e a aprendizagem da Geometria devem seguir um modelo que privilegia a dedução.

Os trabalhos de Jean Piaget (1896-1980) dão enfoque ao desenvolvimento das estruturas de inteligência em estágios e influenciaram o modelo de Van Hiele.

Santos (1995) refere ainda que "as pesquisas realizadas indicam que a aprendizagem geométrica é necessária ao desenvolvimento da criança" e acrescenta que segundo Fainguelernt (1995) "a geometria estimula as estruturas mentais, possibilitando a passagem do estágio das operações concretas para o das operações abstractas. Enfocar os aspectos topológicos, projectivo e euclidiano, permite à criança a possibilidade de conhecer e explorar o espaço onde vive, fazer descobertas, identificar as formas geométricas e pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento crítico e autónomo" (Santos, 1995, pp. 3-13).

De acordo com Fainguelernt (1999, p. 49), "a geometria exige uma maneira específica de raciocinar, uma maneira de explorar e descobrir. Não é suficiente conhecer bem Aritmética, Álgebra ou Análise para conseguir resolver situações em geometria".

Práticas pedagógicas apontam o Origami como recurso poderoso, ferramenta didáctica desencadeadora de aprendizagens significativas, na concepção construtivista de ensino e no modelo Van Hiele de pensamento geométrico (Cruz & Gonschorowski, 2006, pp. 2-3). Segundo Paiva & Bezerra (2008, p. 2) ao elaborarem os origamis os alunos familiarizam-se com os triângulos, características dos quadriláteros, movimentos de transformação e múltiplas linhas de simetria dentro da mesma figura, noções de rectas perpendiculares, congruência, bissectrizes de ângulos...

Como pesquisadores propomo-nos investigar e apresentar novas tarefas alternativas para o ensino da Geometria. Colocamos então as seguintes questões:

1. O Origami é ou não um bom material manipulável para a exploração de conteúdos matemáticos do Ensino Básico?

2. Qual a contribuição do Origami na exploração de conteúdos Matemáticos face ao novo programa de matemática?

Para responder a estas questões poderemos recuar ao tempo de Fröebel e folhear diversas fontes informativas ao longo de décadas. O presente trabalho tem por pretensão investigar, em fontes escritas (primárias e secundárias) – livros, artigos, relatórios científicos, teses, monografias e alguns periódicos – que tratam dos problemas recorrentes do ensino de Matemática, nomeadamente no campo da Geometria, no Ensino Básico. Depois de analisar as diferentes fontes de informação e tendo em conta as principais dificuldades apresentadas pelos alunos, propor tarefas que permitam desenvolver competências, no sentido de melhorar a performance dos mesmos. De igual modo foram utilizados fontes e recursos electrónicos que englobam fontes primárias e secundárias ou fontes constituídas especialmente para meio electrónico. Com base na documentação recolhida promoveu-se a articulação entre os vários tipos de fontes analisadas de modo a garantir a fiabilidade das informações.

Como objectivo, este estudo, procurou evidenciar as potencialidades educativas dos Ambientes Geométricos Dinâmicos nomeadamente a utilização do Origami na sala de aula. A sua influência no que diz respeito às atitudes e concepções dos alunos perante a geometria e relativamente ao seu desempenho matemático no que concerne ao Ensino Básico. Desempenho esse centrado na construção de conceitos e relações matemáticas e na necessidade de justificação das mesmas.

A sustentação teórica desta análise será alicerçada no modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico desenvolvido pelo casal de holandês, Dilma e Pierre Van Hiele, baseado na observação dos seus próprios alunos.

Vamos propor tarefas para implementar no período das operações concretas (7 aos 11 anos). A manipulação de figuras geométricas de papel e a utilização da técnica de Origami, nesta faixa etária, vai permitir desenvolver mais cedo "novos modos de funcionamento mental" que segundo Piaget apenas seriam conseguidos no período formal.

Este trabalho apresentará três secções: a primeira será a introdução, a segunda abordará a história do Origami e a relação do Origami com o conhecimento e aprendizagens matemáticas e numa terceira secção serão apresentadas sugestões de tarefas a utilizar na sala de aula, tendo estas como objectivo desenvolver as competências necessárias para a aprendizagem dos diferentes conceitos matemáticos no Ensino Básico referidos no NPMEB.

1.1 Os novos Materiais Didácticos e a sua Relevância no Ensino da Matemática.

A matemática é cada vez mais utilizada na sociedade, a sua ligação às mais diversas áreas da actividade humana torna-se evidente.

Vivemos num "cenário matematizado" onde a matemática faz parte do nosso quotidiano. Este fenómeno é bem evidenciado na arquitectura, engenharia, biologia, medicina, música, arte e na simples vida diária. Mas para se ser conquistado pelo fascínio da matemática é imprescindível, segundo Pappas T. (2001), compreender que esta não é um assunto isolado mas está intimamente relacionada com as coisas que nos rodeiam.

> "Deste modo, a Educação Matemática tem como objectivo promover a formação de cidadãos participativos, críticos e confiantes na forma como lidam com a matemática, uma vez que esta se distingue das outras ciências, em especial no modo como encara a generalização e a demonstração e no modo como combina o trabalho experimental com os raciocínios indutivo e dedutivo, oferecendo um contributo único como meio de pensar, de aceder ao conhecimento e de comunicar" (Departamento de Educação Básica, DEB, 2001).

Desde Pestalozzi a utilização de material manipulável tem sido cada vez mais incrementada. Os instrumentos didácticos utilizados podem ser previamente estruturados, isto é, adquiridos em lojas de material didáctico, ou podem ser construídos na sala de aula pelas crianças e pelo professor, tendo sempre em conta os fins a que se destinam. Todo o conceito é construído passo a passo; é um processo longo em que o aluno vai progredindo do concreto para o abstracto. Tem-se verificado que os alunos que aprendem com a ajuda de materiais têm melhores resultados nos testes, pois facilmente visualizam os conceitos. Os símbolos tornam-se significativos depois de os conceitos a eles associados terem sido interiorizados (concreto/abstracto). Mas atenção, não devemos usar o material apenas esporadicamente, porque se o fizermos as crianças poderão pensar que este é apenas lúdico.

A manipulação de materiais permite diversificar as actividades, aumenta a motivação e a criatividade, todavia eles por si só não são a garantia de aprendizagem significativa, temos de ter em conta toda a actividade mental tão necessária à aprendizagem da matemática. O professor tem um papel importante uma vez que para se obter uma aprendizagem significativa é necessário utilizar cuidadosa e correctamente o material de modo a por em prática os conceitos já adquiridos.

A experiência mostra que existe aprendizagem se os alunos estiverem envolvidos activa e fisicamente na actividade. Na prática não existe uma correspondência directa entre o material e um conceito. O mesmo conceito pode ser trabalhado com vários materiais e reciprocamente o mesmo material pode servir para estudar diferentes conceitos.

Em súmula, o Origami utiliza um material barato que permite por em prática os parâmetros referenciados. O aluno que enfrenta situações de aprendizagem diferentes necessita de materiais curriculares variados, e adequados às novas situações.

1.2 As Virtudes do uso do Origami em Educação

> "Dobrar o papel parece um acto extremamente simples, mas este simples movimento na realidade fornece-nos uma grande alegria que invade nossa alma" (Kunihiko Kasahara).

A geometria é uma das ciências mais antigas. Ao longo do tempo os métodos sistemáticos de ensino têm sido substituídos por métodos mais analíticos. Novas maneiras e materiais têm sido testados, e parece-nos que a conjugação das ideias do modelo Van Hiele associadas ao construtivismo e ao Origami poderá permitir aos alunos uma progressão sequencial e paralelamente reforçar a visão espacial permitindo-lhe elaborar os seus próprios conceitos.

A utilização do Origami na Educação levanta desde o seu primórdio algumas questões pertinentes. Segundo registos, a utilização de dobragens para o estudo da geometria iniciou-se com os mouros no século VIII, que, devido à proibição da sua religião em confeccionar figuras simbólicas, construíam figuras geométricas e estudavam as suas relações e propriedades através de dobras.

Desde 1840. O Origami, tem sido incluído nos diversos currículos escolares de inúmeros países, e actualmente é incontestável a sua interdisciplinaridade. É natural o aluno participar na construção dos modelos, e através do manuseamento do material concreto vai compreendendo e aprendendo a familiarizar -se com diversas estruturas, permitindo-lhe esta vivência todo um processo de experimentação e controle, que contribui para a formação dos seus modelos mentais.

Nas últimas décadas muitos foram os pedagogos e os professores que através das suas práticas pedagógicas demonstraram ser fundamental a utilização do Origami na aquisição de uma multiplicidade de conceitos matemáticos. Por exemplo, no *Third International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education* vários aspectos foram focados, descrevendo-se diversas aplicações pedagógicas, algumas para lá da Matemática. As que nos interessam em primeiro lugar são, naturalmente, as que exibem modos de explicitar conceitos matemáticos através de dobragens de papel. A possibilidade de facultar um material manipulável que acompanhe ideias abstractas a transmitir tem grande impacto na motivação e desempenho dos alunos.

As obras de Karen Baicker (*Origami Math*) e Barbara Pearl (*Math in Motion),* mais centradas nos alunos, com actividades de grau crescente de sofisticação, são das poucas estruturadas de raiz para o ensino. Em português temos alguns documentos semelhantes, nomeadamente de autores brasileiros como, Rego, Rego & Junior (*A Geometria do Origami*).

Há autores com obras matematicamente mais avançadas, em que a relação entre as dobragens e alguns conceitos clássicos da matemática é abordado, por exemplo: Jesús Hernández (*Matemáticas y Papiroflexia*), Betsy Franco (*Unfolding Mathematics with Unit Origami),* Thomas Hull (*Project Origami*) e Liliana Monteiro *(Fundamentos Matemáticos de Origami).*

CAPÍTULO II – REVISÃO DA LITERATURA

2 HISTÓRIA DO ORIGAMI

RESENHA HISTÓRICA DO ORIGAMI

Quando no ano 105 d.C. T'sai Lun, administrador no palácio do imperador chinês Yuan Hsing, colocou em prática um processo de fabricação do papel ao misturar cascas de árvores, panos velhos e redes de pesca, para substituir a sofisticada e dispendiosa seda que se utilizava para escrever, não poderia imaginar a utilização que a humanidade faria desse seu invento, ao qual chamaria papel (Grupo Riglos, 1988). Os chineses mantiveram o segredo por séculos, e exportavam esse material a altos preços. As técnicas de fabricação passaram à Coreia (ano 600) e depois ao Japão (ano 610) (Celpa). No ano 751, os chineses foram derrotados pelos árabes. Entre os prisioneiros que caíram nas mãos dos árabes, estavam fabricantes de papel, que foram levados para Samarkanda, a mais velha cidade da Ásia, e foram obrigados a transmitir-lhes os seus conhecimentos (Robinson, 2004) (Bracelpa, 2007). O segredo do fabrico do papel chegou a Marrocos (Fez) no Século XII (1100) e a sua introdução na Espanha muçulmana, em Jativa-Valência, data do ano 1150. Só mais tarde se estendeu aos reinos cristãos europeus (Celpa).

Exceptuando na China e no Japão, o papel fabricado nem sempre teve boa qualidade, nomeadamente na Europa era grosso e frágil, o que dificultava a sua dobragem, e só a partir do século XIV se fabricou um papel mais fino e flexível. De acordo com Beech (2006) a invenção do papel possibilitou aos japoneses desenvolver a fascinante arte da dobragem de papel. No período Heian (794-1185), o Origami era uma arte baseada na simbologia, utilizada em cerimónias religiosas (eram recriados pequenos objectos do quotidiano, destinados a serem queimados ou enterrados) e era considerado um artigo de luxo exclusivo da nobreza. A palavra Origami foi cunhada em 1880 a partir de duas palavras, (oru) "dobrar" e (kami) "papel".

Conforme afirma Bugei (2002) e corrobora Beech (2006), na Europa, sem esse sentido religioso, existia no século XVI o costume dos estudantes da Universidade de Pádua, quando visitavam os seus professores, deixavam um cartão-de-visita com o seu nome, dobrado de forma a expressar um sentimento ou intenção. Os mestres das cerimónias do chá recebiam os seus diplomas dobrados com segredo; uma vez desdobrados não era possível voltar a dobrá-los sem adição de dobras extras. Beech (2006) acrescenta ainda que durante o período Marumachi (1338-1573), o estilo de Origami servia para distinguir as diferentes classes da aristocracia dos samurais. No *período Edo ou Tokugawa* (1603 – 1867), houve uma democratização do Origami. O Origami deixou os templos e instalou-se nas casas senhoriais, passando a ser praticado principalmente pelas mulheres e crianças, independentemente da sua classe social. Kenneway (1978) afirma que as figuras criadas, pelos japoneses, foram transmitidas de mães para filhas, através da tradição oral.

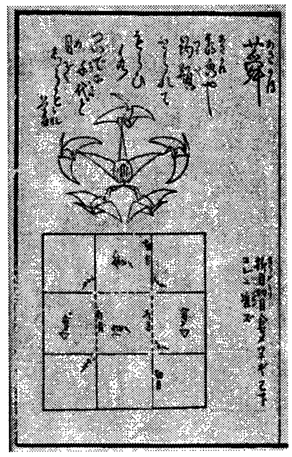


Figura 2-1 - *Senbazuru orikata*

Ainda segundo Beech (2006), corroborado por Lister (1998), é neste período que surge a base do *tsuru* (ave-símbolo do Origami) e a mais antiga publicação conhecida, o livro "*Senbazuru Orikata*" (1797), o qual contém as primeiras instruções sobre o *tsuru* (Figura 2-1), 49 modelos para dobrar grous interligados (*Ren-Zuru*) pelas asas ou recorrendo a cola. Mitchell (2008) acrescenta que o "*Ogasa wararyu orikata Taizen*" (1801) e o "*Kayaragusa ou Ka-No-Mado*" (1850) apresentam igualmente dobragens interessantes.

Koya (2007), considera que a dobragem decorativa e formal (*Orikata/Origata)* foi influenciada, principalmente, pelo livro "*Hoketsuki*"ou "*Wrapping and Tying*" (1764), de Ise Sadatake. Esta arte foi adoptada pela sociedade marcial daquela época e transmitida durante gerações. Lister, cit. por Robinson (2004), refere que no século XVII- *era Genroku* (1688-1704), apareceram as primeiras ilustrações de dobragens nos quimonos das aristocratas. Encontramos o tradicional junco chinês, o tsuru e uma variedade de barcos e o tocador de flauta conhecido como komoso. De facto, em pinturas *Ukiyo-e* podemos observar as senhoras da aristocracia fazendo dobragens. Um famoso bloco de madeira (1734) mostra *Komoso* com o mesmo tipo de barco e de tsuru observado nos quimonos do início era Edo. Nesta mesma pintura podemos observar ainda uma caixa cúbica, considerada hoje como o primeiro modelo de Origami modelar, e um *osanbo* (contentor com pés) (Robinson, 2004).

De acordo com Shoin (1992), a população japonesa começou a aprimorar as técnicas do Origami e até ao final da era Edo, foram criados aproximadamente 70 origamis, utilizando quadrados de papel. No período Taisho o número de Origamis aumentou para 150, sendo os mais comuns o "tsuru", o sapo, a íris, o lírio, o barco, osanbo, o balão e o homem. No Japão, o sapo representa o amor e a fertilidade, a tartaruga é associada à longevidade e o tsuru, também conhecido por grou ou garça, significa longevidade, boa sorte, felicidade e saúde. Ao enfiamento de mil tsurus chama-se senbazuru (mil grous). Segundo a lenda, quem fizer diversas fieiras de tsurus, até perfazer o milhar, com o pensamento voltado para aquilo que deseja alcançar, terá bons resultados. Devido à progressiva redução do preço do papel, o Origami passou de cerimonial ao estrato social das classes mais populares e houve uma rápida expansão desta técnica. Os princípios básicos eram rígidos e impunham que a partir de um simples papel dobrado deveria ser obtido um objecto a três dimensões, sem utilizar tesoura, cola ou similares. A beleza dos modelos dependia da leveza do papel artesanal utilizado. No século XVII, as regras rígidas foram alteradas, dando a liberdade de se utilizar pequenos cortes desde que feitos no início do processo e aparece um novo tipo de Origami.

Segundo o conceituado pesquisador das origens do Origami, professor Massao Okamura (1912-2006), foram os Samurais que deram os principais passos para o formato actual do Origami. O Origami tornou-se uma forma de arte muito popular (Indiopedia.org).

Beech (2006) acrescenta que o Origami floresceu no Japão e em muitos outros países, nomeadamente em Espanha, onde os primeiros Origamis foram introduzidos pelos Mouros no século VIII. Os princípios do Islão proibiam a criação de figuras. As dobras de papel foram utilizadas pelos árabes para estudos matemáticos e de astronomia. Após os muçulmanos terem sido expulsos da Península Ibérica, os espanhóis desenvolveram esta arte, que apelidaram de Papiroflexia. De Espanha foi difundido para a Argentina e mais tarde para a América (Beech, 2006).

Segundo Kasahara (1991) até ao século XIX o Origami foi conhecido por Kami-orimono, Orisue, Origata, Tatamigami e empregava normalmente papel Hanshi (papel de arroz, usado em caligrafia, branco de ambos os lados) de forma rectangular. Ainda segundo Kasahara (1991) corroborado por Franco (1999), no final do século XIX, em Yushima distrito de Tóquio, um vendedor de papel começou a importar papéis coloridos da Europa e a cortá-los em quadrados de aproximadamente 15 cm, em vez de rectângulos como era feito no passado. Agrupou as folhas quadradas em conjunto coloridos a que deu o nome de "papel de Origami", interferindo de forma significativa na expansão desta arte. A partir de então, o Origami passou a ser associado a folhas quadradas (Franco, 1999). Não se sabe por que resolveu cortar os papéis em quadrados, mas algumas dobras tradicionais, o tsuru, o balão, o yakko, o osanbo, eram feitas a partir de uma folha quadrada (Kasahara k. , 1991). Harbin (1971) acrescenta que o papel de Origami, japonês, normalizado utilizava quadrados com as medidas de 17,5 cm; 14,5 cm e 12 cm.

Conforme é referido por Boursin (1997, p. 3) em 31 de Março de 1854 os japoneses abriram os portos aos países ocidentais e propiciaram uma revolução na arte de dobrar papéis. As bases do pássaro e da rã chegaram à Europa, onde não eram conhecidas. Por volta de 1860, uma tournée de um grupo de teatro japonês apresentou em França vários Origamis, entre eles, o tradicional tsuru e os franceses descobrem o Origami. As dobragens desenvolveram-se na Europa independentemente da tradição japonesa, as dobragens de guardanapos remontam à época de Henrique IV e Louis XIV.

Na década 1920, o grande ilusionista Houdini (1922) demonstrou talento com o papel, mas, só na década de 1930, os prestidigitadores apresentam dobragens em notas de dólar durante os espectáculos. Conforme Shoin (1992), nesta época, no Japão, os diagramas apresentavam instruções gráficas, onde identificamos várias formas geométricas, partindo todas elas do quadrado. No Japão as dobragens eram dedicadas as meninas e no Ocidente associadas aos rapazes "Todos nós fizemos, o barco de papel, o avião, o chapéu de papel soldado feitos de folha de jornal, a pajarita e o quanto-queres feitos de papel quadrado, tradicionais no nosso ensino básico" (Kenneway, 1986, p. 8). Durante a época de 30 o jovem engenheiro, Akira Yoshizawa, experimentou a tradicional arte de Origami e descobriu que tinha facilidade em inventar novos modelos (Jackson, 1989).

A grande divisão entre a antiga dobragem do papel e a moderna surgiu, segundo a Wikipédia, em 1950, quando o trabalho do mestre Akira Yoshizawa (1911-2005) se tornou mundialmente conhecido. Akira criou a ideia da dobragem criativa (Sasaku Origami) e inventou todo um conjunto de métodos que permitiam dobrar uma série de animais e pássaros, incluindo o tradicional porco, mas eram necessárias "duas peças" de papel para conseguir animais de quatro patas. Ainda segundo a Wikipédia este problema viria a ser ultrapassado com a invenção das Bases Blintzed em meados da década de 1950 particularmente pelo norte-americano George Rhoades. Nesta década Akira apresenta diagramas (orikata) com instruções gráficas utilizando uma nomenclatura de bases e símbolos e diferencia as dobras de vale e de montanha, matrizes para a produção de figuras. Esta nomenclatura, internacionalmente aceite, promoveu a sistematização das dobras e bases e permitiu ampliar a criatividade dos autores e a complexidade dos modelos.

Por volta de 1980 Maekawa June e Peter Engel começaram a estudar matematicamente as bases e verificaram que as dobras deixadas, no papel eram essencialmente triângulos e rectângulos e descobriram que ao reagrupá-las de modo diferente obtinham novas bases e assim começaram a desenhar modelos antes de os dobrar. Esta teoria viria a ser desenvolvida por Kawahata Fumiaki e Robert Lang. Outros métodos foram apresentados por Max Hulme e Neal Elias por volta de 1970 (koshiro, 2009).

De acordo com Pearl (1997) o Origami pode exercer-se em qualquer local, a qualquer hora e está relacionada com diversas competências. Pelo facto de esta arte mágica ter sido aperfeiçoada e divulgada no Japão, tornou-se internacionalmente conhecida pelo nome de Origami. A palavra Origami foi adaptada aos diferentes idiomas e apareceram as expressões: papiroflexia, paperfolding, pigatura di carta, pliage de papier, papierfalten, opntamn, dobradura, dobragem de papel. Na segunda metade do século XX devido a um interesse crescente pelo desenvolvimento do Origami, este alargou as suas fronteiras e elevou-se a forma de arte. Nesta época voltou a utilizar-se o papel rectangular e apareceram papéis de diversas formas geométricas. No Ocidente Robert Harbin em Inglaterra e Sam Randlett, na América popularizaram esta arte e o seu novo nome, tendo sido fundada em 1967 a British Origami Society, a primeira associação de Origami fora do Japão (Jackson, 1989).

2.1 Fundamentos Religiosos e Filosóficos do Origami

De acordo com Boursin (1997) a palavra japonesa para papel pronuncia-se "*kami*" e a palavra para Deus, originalmente aplicada para os espíritos ou divindades existentes em todo o tipo de objectos, pronuncia-se igualmente "kami". Embora não haja nenhuma confusão entre as duas palavras, que têm ideogramas diferentes, o facto de ambas se pronunciarem "kami" levou os japoneses a uma associação simbólica ou poética entre ambas. Inicialmente, arte meramente religiosa, representação do espírito religioso, tinha carácter simbólico nos rituais das cerimónias xintoístas (separar o puro do impuro), onde o branco era símbolo de paz e de pureza. Quando passaram a fazer parte significativa da vida cerimonial da nobreza japonesa as primeiras dobragens eram simbólicas e oferecidas aos deuses.

Segundo David Liste (1996) a antiga religião do Japão, o Xintoísmo, que coexiste pacificamente com o Budismo, teve origem nos espíritos sagrados da natureza, onde a divindade reside em cada árvore e em cada pedra, por isso era tradição assinalar os locais sagrados com a "*Shimenawa*" (corda sagrada), na qual eram presos os "*O-shide*" (conjunto de simbólicos feixes de palha de arroz e harmónios de papel branco dobrado em zig-zag e recortado). Dentro do próprio templo há um bastão no topo do qual estão presos amuletos utilizados em cerimónias de purificação e no qual é pressuposto habitar a divindade do templo. Associadas às cerimónias Xintoístas o "*Noshi*" ou "*Noshiawabi*" (papel dobrado com inclusão de uma tira de abalone seco) remonta ao século XII e ainda hoje é utilizado em rituais de funerais e casamentos, e como enfeite tradicional em oferendas significando a fortuna e a bênção de Deus para o recebedor.

Segundo Beech (2006) o Origami popularizou-se a partir da era Heian (794-1185), e atingiu o auge no período Muromachi (1338-1573). Arte de enorme simbolismo utilizava o papel como matéria-prima, alicerçando-se nisso a distinção hierárquica entre os Samurais que tinham o hábito de trocar prendas entre si, decorados com Noshi e foram, no início do século XVII, os responsáveis pela criação dos primeiros Origamis que conhecemos actualmente. Como o papel era muito caro, valorizava-se a sua compra e também o seu uso. As cores têm um significado muito especial, o vermelho e o branco é usado para ocasiões felizes, sendo o preto e branco para funerais.

De acordo com Bugei (2002), no início do século XII já se verifica uma dualidade abstracta entre a vida marinha e o Noshiawabi, dualidade evidente no Kan-no-mado. Entre os 48 Origami tradicionais encontram-se os desenhos do camarão, caranguejo, polvo e lagosta, os quatro Origamis apresentam recortes (Montral & Lang, 1990, p. 10). Refere ainda Bugei (2002), que nesta época os *kirikomi* (figuras de papel utilizando recorte) eram confeccionados com papéis manufacturados especialmente para o uso dos sacerdotes nas cerimónias religiosas A simbologia estava no próprio papel, era imperativo que as palavras das sagradas das escrituras fossem registadas em papel branco, puro e o mais fino que se pudesse fabricar.

Segundo Oomoto (p. 19), pelo método Kirigami ou kirikomi, papéis quadrados ou rectangulares eram dobrados, colocados em *Nusa* (haste de madeira com tiras de papel de seda e corda de sisal) ou recortados em *Katashiro* (boneco de papel) (Souza, s/d, p. 51) e eram utilizados em diversas cerimónias, entre as quais o *Hinamatsuri*. De acordo com Shoin (1992) a origem do Origami é o Katashiro usado nas diversas cerimónias xintoísta de purificação. Lister cit. Robinson (2004) e corroborado por Bugei (2002) afirmam que, devido à rigidez das normas de conduta, estes Origamis considerados clássicos desta arte são ainda utilizados e ensinados aos alunos da Escola Ogasawara

> "Os katashiro são, ainda hoje, colocados nos templos xintoístas no lugar da divindade, tomando a sua forma. O mais antigo katashiro de Origami encontra-se no Ise Jingu, província de Mie, portanto se diz que a história do Origami é tão antiga quanto a história do Japão" (Kanegae, 1988).

Segundo Beech (2006), Honda (1995) e Lister (1996) datadas também da época Heian, com semelhanças com o Origami recreativo, apesar de serem para decoração, as dobragens de papel mais antigas no Japão, obtidas a partir da base do balão, simbolizando o noivo e a noiva, são as borboletas "*O-cho*" e "*Me-cho*" (Figura 2-2). Acrescenta ainda Honda (1995) que são imprescindíveis nos casamentos tradicionais japoneses e tiveram origem na transformação das formas do papel que cobriam os gargalos dos frascos que continham o saké usado na cerimónia. As dobras evoluíram até resultarem em borboletas.

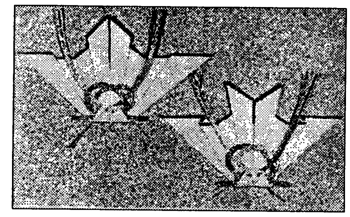


Figura 2-2 - Borboletas macho e fêmea

Do japonês Kusu (remédio) e dama (bola), surgiu *Kusudama*. Esta bola de papel decorativa, com um cordão e pompom, guardava ervas medicinais ou aromáticas, e era utilizada com o objectivo de afastar a doença e eliminar os odores desagradáveis ou nocivos. O cordão do kusudama servia para dirigir a energia positiva para a pessoa ou para o ambiente (Yamaguchi, 1990). As primeiras instruções de um kusudama foram publicadas no jornal NOA (Nippon Origami Association, 1978).

Muitos símbolos tradicionais foram transferidos pelos japoneses para os pássaros de papel, animais e plantas, numa panóplia de formas. A lenda de Senbazuru (fieiras de mil grous) simboliza a eterna felicidade e é muito popular entre os japoneses. Dobram-se também grous para enviar a pessoas doentes expressando o desejo do seu restabelecimento. O grou de papel dobrado é uma das criações mais importantes no Japão e qualquer japonês aprende a dobrá-lo ainda criança e aprende que no Origami é preciso fazer o *orimetadashitô* – que significa dobrar certo. Assim, quem fizer uma dobragem firme e bela será uma pessoa respeitável, de confiança e disciplinada. A partir do ano de 1945, o seu simbolismo alterou-se subtilmente passando a estar associado às vítimas da Segunda Guerra Mundial – Hiroshima e em especial à história de Sadako Sasaki (1943 - 1955) que faleceu aos 12 anos, vítima de leucemia, causada pela Bomba de Hiroshima.

Akira Yoshizawa que, na sua juventude, estudou como monge budista teve o privilégio de conceder beleza e vida eterna aos seus modelos. Antes de dobrar ele orava e tentava compreender o espírito do pretendia moldar. A carga simbólica é facilmente identificada quando se dobra papel. Por exemplo, ao dobrarmos uma borboleta queremos captar a alegria da primavera, o milagre da metamorfose, o deslumbramento da vida e a exaltação da liberdade. O padrão de vincos que fazemos é um eco da complexidade do ADN que determina a organização interna da peça final (Lister, 1996)

John Smith (1990), eminente origamista, cit. por Lister, tornou o Origami acessível a pessoas com deficiência, descobriu uma nova simplicidade na dobragem usando unicamente dobras simples em vale e em montanha e escreveu "*Origami Pure Land*". Curiosamente, "*Pure Land*" é também o nome de uma filosofia oriental.

> "Because such folding only uses mountain and valley folds, he thought that it resembled a landscape and the words "Pure Land" occurred to John. He later found to his surprise that this was an actual name for an eastern philosophy" (David Lister).

Acrescenta ainda Lister citando Paul Jackson, "as formas abstractas têm, igualmente, uma beleza intemporal, a importância de fazer um ou dois vincos de simplicidade extrema. A dobragem não precisa de ser complexa para adquirir significado e beleza".

Harbin (1980, p. 12) e Ho (1993) afirmam que sendo o Origami uma combinação de regras severas e de grande reflexão entusiasmou o mago Robert Neale, o teólogo Philip Shen e filósofos como Miguel Unamuno e Koshio Uchiyama.

Famoso expoente do Zen, Uchiyama seguiu as pisadas de seu pai Kosho, e sua avó Michio, que eram origamistas. Até que ponto o Origami de Kosho foi influenciado pelo Budismo Zen é uma questão de opinião. Kosho Uchiyama afirma: "O Origami é um mundo no qual, quem representa coisas a partir de uma folha de papel sente a alegria de ser um criador".

Os discípulos do Zen procuram a iluminação esvaziando a sua mente de todos os pensamentos racionais. Adoptado pelos guerreiros Samurai para melhorar a sua perícia com as armas durante as batalhas, aplica-se noutras actividades: arranjos florais, cerimónia do chá e teatro. Também os origamistas tentam melhorar a sua prática de dobragem, dedicando-se ao estudo do Zen. O falecido Eric Kenneway escreveu um pequeno texto acerca do Zen para incluir no seu livro *"Complete Origami" (1987)*, mas entretanto retirou-o. Kenneway morreu antes ver o seu livro publicado. O editor pensou de outra maneira e incluiu o artigo sobre Zen quando editou o livro.

> "Para alguns poucos dobradores a unicidade do quadrado de papel (que tem a capacidade de se transformar em todas as criaturas, interdependentes porque o quadrado fica sempre um quadrado) simboliza a sua crença na harmonia do universo e a presença do Buda-natureza em todas as coisas" (Kenneway, s/d).

O italiano Vittorio-Maria Brandoni fundou uma Escola de Origami baseada em princípios Zen e acredita que esta arte deve ser uma atitude perante a vida e a natureza (Lister, 1996). A prática da contemplação no Zen é o caminho para a iluminação, o dobrar com precisão pode levar "ao despertar" das nossas mentes e corações. Não necessitamos de ser seguidores do Zen para perceber que as nossas dobras nos levam à meditação. Ao dobrarmos múltiplas "unit/peças" para um Origami modular ou ao dobrar mil grous para oferecer a um doente ou enviar para suspender no Parque da Paz, em Hiroshima, os dedos estão ocupados sem necessidade de interferência mental e a repetição tem um efeito libertador nas nossas mentes. Dobrar funciona como um "mantra" que liberta o espírito para a oração e a meditação. De certa forma passamos por uma experiência libertadora semelhante à do Budismo Zen (Celpa).

"Quando as mãos estão ocupadas o coração está sereno"! (Yoshizawa)

2.2 Aplicações do Origami

> "Dobrar papel parece um acto extremamente simples, mas este simples movimento na realidade fornece-nos uma grande alegria que invade a nossa alma" (Kasahara).

O Origami, primitivamente religioso, apresenta actualmente uma panóplia de utilidades e proficiências: lúdica, hobby para adultos, vida quotidiana (vestuário e decoração), publicidade (marketing, embalagem, filmes. outdoor), hospitalar e educacional.

Como exemplo de aplicação prática podemos citar a obra da designer Rachel Young que aplica a técnica de Origami na produção de objectos funcionais.

Robert Lang estuda a relação entre a ciência da computação e a matemática do Origami - Origami computacional, neste campo, desenvolve algoritmos que tratam da resolução de problemas relacionados com a dobragem, são exemplos a dobragem do airbag e de lentes de telescópios.

Estudos feitos por John Smith (1990) revelaram que o Origami é promotor da intuição geométrica e tem primordial importância no campo da medicina, na recuperação de deficientes motores, em psiquiatria ou simplesmente como terapia ocupacional:

> "... can develop the geometric intuition of children and others which is sadly lacking in modern education. In the case of handicapped people who may have brain damage to the logical mechanism it is conceivable that through the use of Origami he intuitive special side of their brains can be developed and help to compensate ... believing that repletion ... develop the neural network" (Smith, Origami Therapy, 1990, p. 12).

Actualmente, o Origami é considerado uma arte universal, um jogo para crianças, um passatempo para adultos; desenvolve a destreza das mãos e da mente e a capacidade criadora dos seus praticantes. Sendo um entretenimento para crianças é catalisador do desenvolvimento da auto-estima e da autoconfiança. As dobragens são um recurso do "faz-de-conta" para trabalhar a identidade e o equilíbrio das emoções, necessários ao desenvolvimento do indivíduo, trabalham com o pensamento, a sensação, o sentimento e a intuição. Servem para redimensionar e redireccionar a agressividade (Smith, 1990).

A análise de um estudo baseado em inquérito realizado a 55 professores revelou que a maioria considera que aulas de Origami foram positivas para os seus alunos. Os principais motivos apontados foram, desenvolver o sentido criativo, auxiliar a concentração, o baixo custo, ser facilitador da comunicação entre professor e aluno e desenvolver a habilidade manual e a mobilidade (Clemente, 1992). Segundo Clemente (1990) la Generalitat de Catalunya atribuiu o prémio Cirit/1989 a um trabalho sobre Origami na educação.

No campo da Educação o grande enfoque dado ao Origami como ferramenta didáctica manipulável baseia-se no facto de o Origami permitir construir passo a passo, de forma lúdica, os primeiros conceitos sólidos do mundo dos números, ampliando as perspectivas para a física, química e biologia. Através das linhas e ângulos vincados no papel são compreendidos facilmente os vários conceitos de geometria; são assimiladas as definições de ponto, plano, recta e diagonal. No Origami, a divisão é a primeira operação aritmética ensinada. As inúmeras possibilidades de aplicação pedagógica servem de recurso para desenvolver um diversificado leque de actividades dentro do currículo escolar: estudos sociais, arte, ciência, matemática e expressão oral (Peral, 1997).

Em todo o mundo, pessoas de diferentes níveis etários, das mais diversas posições sociais, dobram pequenos pedaços de papel transformando-os em verdadeiras obras de arte.

ORIGAMI NA LITERATURA, NA ARTE E NA EDUCAÇÃO

2.3 Os Primeiros Documentos de Origami

Os historiadores da arte de Origami, Satoshi Takagi e Masao Okamura ajudaram a desvendar a história dos mais antigos modelos de Origami Japoneses (Kasahara,2008, Bugei, 2002). No Ocidente, Vicente Palacios tem investigado sobretudo a história da *Pajarita*. Os primeiros livros sobre a arte de dobrar papel foram publicados no Japão em meados do século XVIII, princípio do século XIX. Nesta época começa a fabricar-se papel especial para Origami, em diferentes cores e tamanhos. De acordo com Lister (1996), o período áureo do Origami na escola deu-se entre 1880-1914.

No Oriente, no ano 9 da Era Meiji (Setembro de 1868 a Julho de 1912), o Origami utilizado para educar as crianças nas habilidades manuais deixou de ser transmitido apenas dentro da família, e foi introduzido no programa escolar japonês no ano de 1876, passando a ser disciplina integrante do currículo escolar japonês, no jardim-de-infância e nos primeiros anos do curso primário.

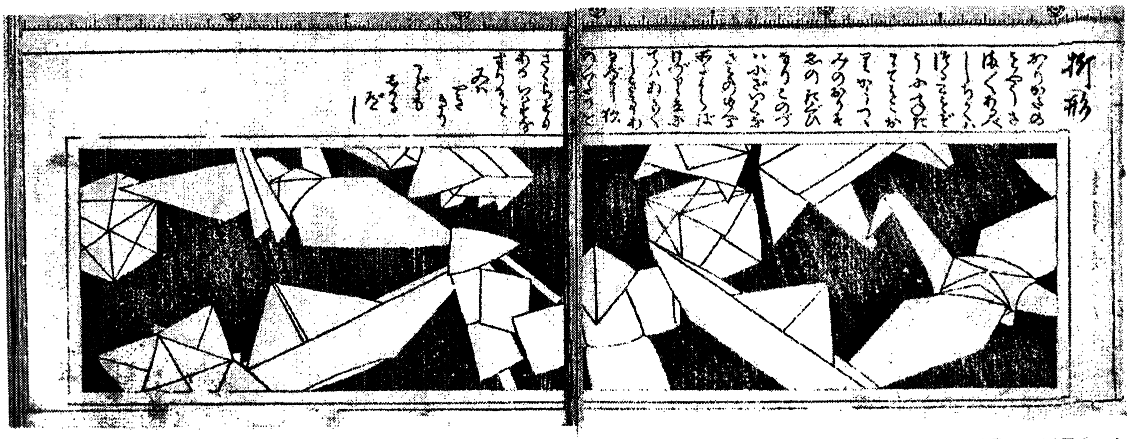
No Ocidente, desde 1918, houve um decréscimo da utilização da dobragem na escola, sendo esta substituída pela pintura e pela cerâmica. Nesta época, o Origami tinha regras rígidas, era repetitivo e não criativo e os educadores consideraram-no sem valor para o currículo escolar - a nova pedagogia defendia a *self-expression*. Contudo, foi publicado em Londres "*Paper Toy Making*", de Margaret Campbell (1937) pelo editor escolar Sir Isaac Pitman and Son Ltd.

Segundo a Japan Foundation, Koda foi a pioneira no ensino de Origami no Departamento de Educação, São Paulo, Brasil. Koda (1986) afirma que após o intróito da Era Showa (25 de Dezembro de 1926, - falecimento do Imperador Taisho, até aos nossos dias), questionava-se a educação unificada e padronizada e contestava-se o facto de cada Origami resultar de uma sequência de dobras pré-estabelecidas. Apesar do decréscimo da sua utilização no Ocidente, o Origami continuou a ser utilizado nas escolas japonesas, devido à sua ligação com Fröebel e ao seu carácter lúdico e didáctico. Nas últimas décadas foi dada ênfase ao valor educativo do Origami como um material didáctico manipulável, auxiliar no ensino básico da geometria e incentivador da actividade criativa,

> " (...) após o ingresso na Era Showa, surgiu um movimento que punha em dúvida a educação unificada e padronizada, questionando também o facto de se fazer "Origami" seguindo sempre o modo de dobrar já pré-estabelecido.

> Entretanto, recentemente, tem-se dado relevante importância ao "Origami" como uma actividade auxiliar no ensino básico da geometria, ou seja, conforme o grau de desenvolvimento da criança, (...). Além disso, tem sido apontado o seu valor educativo, na medida em que o "Origami" dá margem à actividade criativa livre, a partir das regras básicas para se dobrar o papel" Yachiyo Koda (1986).

"Em Abril de 1993, a Nippon Origami Association (NOA) publicou, uma edição especial do seu jornal mensal, para comemorar o seu vigésimo aniversário. O jornal foi publicado sob a forma de um elegante livro de Satoshi Tagaki intitulado "*Origami through the Classics*" continha diversas informações sobre Origami retiradas de documentos antigos" (Kasahara K. , 2008, p. 48). Duas das xilogravuras, recentemente descobertas, apresentam seis modelos tradicionais de Origami, entre eles um cubo modular (Origami formado por diversas unidades, cada uma corresponde a um quadrado de papel), identificadas por Yasuo Koyanagi em 1993, como sendo um *tamatebako*. Esta é considerada a primeira referência histórica de um Origami modular. (Kasahara K. , 2008)



Reprinted courtesy of Satoshi Takagi.

Figura 2-3 - Páginas do livro *Ranma-Zushiki* editado por Hayato Ohoka (1734)

A Tamatebako foi concebida de modo a poder ser aberta em qualquer um dos seus lados, mas se for aberta em mais do que um dos lados, o cubo desconecta-se e terá de ser reconstruído. O modo de construção esteve perdido durante séculos (mais de 270 anos), mas Masao Okamura recriou o modelo tamatebako que, contrariamente à teoria do tradicional do Origami puro (construído sem auxílio de tesoura ou cola), necessita de corte e cola (nationmaster.com).

2.4 O Origami na Arte e na Literatura

Esta arte milenar associa-se tradicionalmente ao Japão mas os japoneses não foram os únicos a cultivá-la. Dobrar o papel artisticamente foi uma actividade presente na história de diversos países europeus entre os quais a Alemanha e a Espanha. O Origami é um misto de arte e matemática.

Um simples quadrado de papel, permite obter um universo ilimitado de dobragens.

> "I think you should now understand how a few simple folds in a square piece of paper can be very significant. Repeated discoveries of this kind made from novel standpoints will make Origami very effective in the teaching of geometry and mathematics" (Kasahara k., 1991, p. 24).

Na Europa do século XII já era conhecida a cinta de nó pentagonal, que os japoneses usavam para escrever as suas orações, especialmente entre os estudiosos da geometria (Bugei, 2002). A religião dos mouros proibia a criação de qualquer figura simbólica e as dobragens em papel eram usadas para estudar a Geometria presente nas formas e nas dobras (Beech, 2006). Os árabes investigaram as diversas formas e propriedades das dobras num quadrado e exploraram diversas hipóteses de cobrir as paredes de Alhambra com pavimentações. "A sua actividade floresceu em Espanha, entre os séculos VIII e XIII e a tradição do Origami sobreviveu até hoje, conforme é documentado por Miguel Unamuno" (Beech, 2006, p. 11)

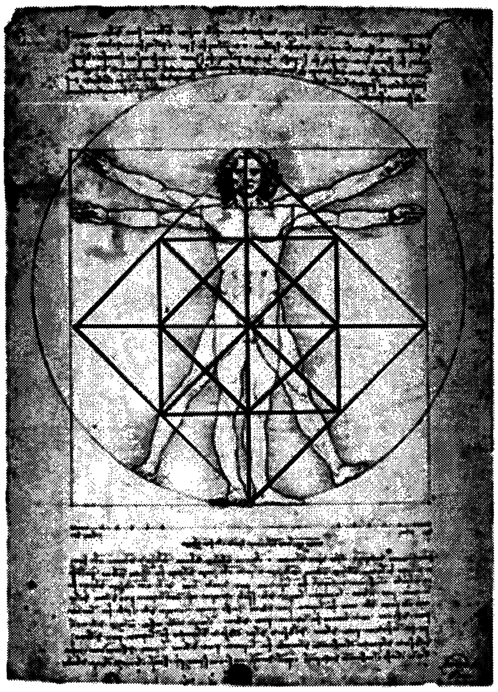


Figura 2-4 - Desenho de Leonardo da Vinci

Pearl (1997), certifica que, em Itália, Leonardo da Vinci utilizou a técnica do Origami para estudar a geometria e o aerodinamismo, nomeadamente incluiu alguns exercícios geométricos de dobragem no seu estudo sobre a velocidade de movimentação do papel

Leonardo da Vinci nasceu a 15 de Abril em 1452, na pequena cidade de Vinci e revelou, desde cedo, excepcional habilidade na geometria, na música e na expressão artística. Leonardo sentia-se interessado por muitas áreas do saber e pela sua inter-relação "... nenhuma investigação humana pode ser considerada ciência se não abrir o seu caminho por meio da exposição e da demonstração matemáticas". Leonardo da Vinci estudou exaustiva e minuciosamente o exterior da forma humana, as suas proporções. A imagem (Figura 2-4) representa o corpo humano inserido na forma ideal do círculo e nas perfeitas proporções do quadrado (fc.ul, 2000). Esta imagem foi usada por Luca Pacioli na ilustração do seu livro *De Divina Proportione* .

> "Como vemos en el dibujo de Leonardo da Vinci (Figura 2-2) el arquitecto Vitrubio utilizó el desarrollo raíz de 2, en el estudio de las proporciones del cuerpo humano. El mismo cuadrado pasa por el pecho y las rodillas siendo su lado igual a la distancia entre los dos codos. A lo largo de la vida del hombre el centro de su altura se desplaza del ombligo en el momento de su nacimiento a la zona genital en el estado adulto, donde el ombligo queda a una distancia Φ de la longitud del cuerpo, que es el centro del circulo donde se inscribiría el hombre con los brazos y piernas extendidos" (Ortega).

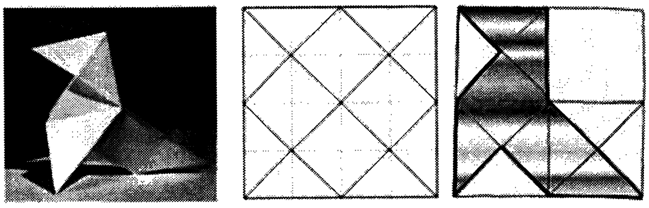


Figura 2-5 - Dobragem, C.P. da *Pajarita* e representação gráfica

Investigando a Figura 2-5 e a Figura 2-6 será que podemos observar uma semelhança entre o CP. (crease patern) da dobragem da pajarita e o desenho de Leonardo da Vinci?

Pearl (1997) afirma:

> "A study of the creases impressed on the square sheet of paper, after an Origami object has been created, reveals a wealth of geometric objects and proprieties"...The creases on a square can illustrate the mathematical ideas..." (Pearl, 1997, p. 15).

Por outro lado, Koshiro (2009) refere que: "When we fold a base and unfold it, we get a crease pattern. Geometrical study of the crease pattern has been made since 1980s". Parafraseando Pearl (1997) e Koshiro (2009), diremos que um qualquer traçado de dobra é riquíssimo como material didáctico, permite desenvolver a visão espacial e estudar conteúdos geométricos como perpendicularidade e paralelismo, fracções, contagem de triângulos e quadrados, comparação de áreas; conteúdos incluídos no NPMEB *(Novo Programa de Matemática para o Ensino Básico)* nos temas Geometria e Medida e Números e Operações.

Figura 2-6 - ***Through the Looking Glass***

Segundo Jackson (1989) o Origami era bastante popular, entre as crianças, na Inglaterra Vitoriana, do início do século XIX. Charles Lutwidge Dodgson matemático, conhecido pelo pseudónimo Lewis Carroll e autor de "*Alice no País das Maravilhas*", 1865, divertia as crianças com a magia das suas dobragens de barquinhos e pistolas de papel Devido ao aspecto geométrico da dobragem de papel não é de surpreender que muitos matemáticos se tenham fascinado por esta arte (Gardner, 2008). Os livros infantis de Carroll contêm inúmeros problemas de matemática e lógica, ocultos no seu texto. Aparecem chapéus de Origami nas ilustrações do seu livro "*Through the Looking Glass*", 1871 e na edição de 1954 (Carroll, 1954).

Em meados do século XIX o Ministério de Instrução Pública de França considerava fundamental ensinar às crianças o que era de interesse para a indústria e incluiu um sector de Instrução Pública nas Exposições Universais de Paris de 1867 e 1878. Nesta última exposição havia três secções: Primera Enseñanza, Segunda Enseñanza e Enseñanza Superior. Na secção da Primera Enseñanza havia uma exposição de trabalhos fröebelianos realizados pelas crianças francesas. Palacios afirma que a base do pássaro chegou à Europa não na figura do grou, "mas na forma de um pássaro que batia asas, estranhamente desconhecida no Japão, e de autor desconhecido" (Palacios, 2008, pp. 90-91).

2.5 Problema Matemático, Fröebelianas e Cocotologia

Figura 2-7 – Enunciado do problema

Segundo Eric Demaine (2007) no livro *Wakoku Chiyekurabe* (Problema Matemático) de Kan Chu Sen, 1721, era apresentada pela primeira vez um problema de dobragem e corte e simultaneamente duas soluções do mesmo. A ideia de Sen era dobrar um papel múltiplas vezes, e recortar de modo a obter uma figura.

No final desdobrava-o totalmente e verificava se a figura recortada na secção do papel era simetricamente igual ao conjunto de figuras obtido. Esta tarefa permite obter "bonecos de mão dada", "flocos de neve"...

O NPMEB (*Novo Programa de Matemática do Ensino Básico*) salienta a importância do estudo das isometrias e refere que os alunos, "já no primeiro ano devem identificar figuras simétricas em relação a um eixo" (DGIDC, 2007, pp. 22-23). Estas construções no plano são obtidas facilmente através de dobragem e recorte e permitem uma visualização dos conceitos de simetria, translação horizontal e friso. Os frisos são simétricos relativamente a uma translação.

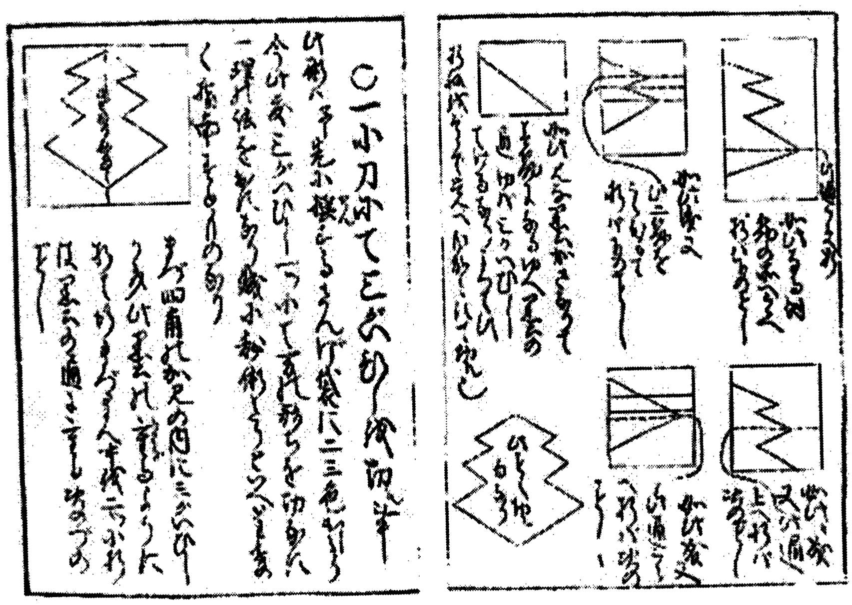


Figura 2-8 - Páginas de *Wakoku Chiyekurabe* - soluções do problema

No exemplo, dos bonecos de mão dada, que acabámos de analisar, para corroborar a afirmação, devemos imaginar que a fila de bonecos se repete infinitamente na direcção da translação.

O prestigiado pedagogo alemão Friedrich Fröebel, discípulo de Pestalozzi, começou por considerar as dobragens como uma forma de ensinar a geometria simples. Mentor dos jardins de infâncias percebeu rapidamente a possibilidade de educar a partir de brincadeiras com dobragens de papel, incorporando-a no seu sistema educativo influenciou todos os países da Europa, o que constituiu uma inovação para a época (Clemente, 1990). Nos *"Jardins de Infância"*, por volta de 1835, as crianças dobravam as figuras tradicionais da época e também uma série de dobragens geométricas, mais tarde chamadas de *"Fröebeliana"*. Fröebel é considerado o promotor do Origami educacional, ao utilizar o Origami como material didáctico para ensinar matemática às crianças do jardim-de-infância e da escola primária. Considerava esse movimento, que as dobragens realizadas pelas crianças se dividiam em três categorias: *Folds of Life* (dobras de vida), *Folds of Truth* (dobras da verdade) e *Folds of Beauty* (dobras de beleza). Todavia não há uma colecção de dobragens de Fröebel, porque muitas das dobragens que aparecem sob o seu nome foram desenvolvidas pelos seus sucessores após a sua morte (Kasahara K. , 2008).

> "Os seus seguidores defendiam não só a dobragem matemática, mas também, uma introdução às dobragens, com as dobragens tradicionais europeias para crianças, e o que agora chamamos de padrões blintz" (dobrar as pontas para o centro).Os padrões blintz eram considerados como semente da criatividade artística das crianças" (David Lister).

As três categorias das dobragens Fröbelianas são utilizadas em tempos e contextos diferentes. *Folds of Life* são dobragens que chegaram aos nossos dias como tradicionais e têm como intenção preparar as crianças para as etapas de *Folds of Truth* e *Folds of Beauty*.

Folds of Truth inclui dobragens de geometria elementar e tem a finalidade de ajudar as crianças a descobrir, por si próprias, os princípios elementares da Geometria Euclidiana, enquanto *Folds of Beauty* associa a Geometria Euclidiana com a criatividade.

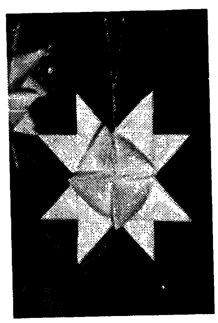


Figura 2-9 - *Fröebel Star*

Segundo a Diciopédia, a *Estrela de Fröebel*, Morávia ou do advento, aparece em 1830, na escola Morávia de Niesky (Alemanha), como um projecto de um professor de geometria (Figura 2-9). Tem a particularidade de ser feita com 4 tiras de papel e não quadrados e ser usada como enfeite para presentes e árvores de Natal. Aparentemente é complicada de dobrar, mas na realidade possui poucos passos, que se repetem várias vezes. O papel deve ser relativamente maleável e ter um comprimento igual a 24 vezes a largura. Para uma tarefa de geometria com o objectivo de estudar a proporcionalidade e a relação de semelhança entre figuras (DGIDC, 2007), começar a tarefa com tiras de papel com 1 cm de largura 24 cm de comprimento, e prosseguir com diferentes tiras.

No contexto europeu, os espanhóis acreditam que são o povo que manteve a tradição com mais força e afirmam que a *pajarita* já existia em Espanha no século XII, por influência árabe (Palacios, 2008). Os geómetras não ficaram indiferentes e viram nesta arte muitas possibilidades pedagógicas e todas as figuras dobradas passaram a chamar-se *"Pajarita"* (Figura 3-8).

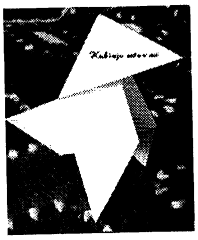


Figura 2-10 - Pajarita

Segundo Beech (2006), a actividade floresceu no século XIII e XIX e sobreviveu até hoje devido ao grande poeta e filósofo espanhol Miguel Unamuno que afirma que os mouros, devido ao facto de serem excelentes matemáticos e astrónomos, aduziram a teoria da dobragem para ajudar no ensinamento dos princípios de geometria. Após os mouros terem sido expulsos da Europa, os espanhóis foram além dos desenhos geométricos e desenvolveram esta arte popular, "arte de hacer pajaritas" posteriormente chamada de *Papiroflexia*, que se tornou também popular na Argentina. (AEP). Pelo projecto de lei de Alonso Martínez a Lei Moyano de 1857 tornou-se obrigatório o ensino em Espanha e o exercício manual na Escola Primária (1° ciclo) (Moreno, 2007).

Durante os últimos 20 anos houve um acréscimo no interesse pelo Origami em Espanha e na América do Sul. Segundo Gardner (2008), D. Miguel Unamuno abriu caminho a esta arte ao escrever um burlesco tratado sobre o assunto e desenvolveu uma base que permitiu a invenção de notáveis construções de Origami. Palacios (2008) e Kawasaki (2009), corroboram que o romance "*Amor y Pedagogia*" apresenta um apêndice intitulado "*Apuntes para un Tratado de Cocotología*". Literalmente, a Cocotologia, neologismo francês do século XVIII, é a "Ciência" que trata da construção de passarinhos de papel, sempre a partir de um quadrado. Etimologicamente, a palavra é derivada de cocotte, palavra francesa com que as crianças se referem às aves em geral, pajarita; cocote ou passarinho. Este tratado, tem como tema a Pajarita e refere que "La importancia la cocotología es que puede llegar a ser una ciencia perfecta" (Unamuno, 1902, p. 293).

Acrescenta Machado (1991), cit. Unamuno:

> "Nele, o autor estabelece as bases de uma nova Ciência - a Cocotologia -, tratando com pormenores de seu estatuto, seus objetivos, seus métodos, das

> relações com as outras Ciências etc. A linguagem utilizada é cuidadosamente formal, pretensamente precisa, impregnada de termos técnicos, bem definidos e, após a leitura de umas poucas páginas, sedimenta-se uma sensação muito forte de respeitabilidade pelo tema, uma aparência de erudição, uma posição de reverência pela nova Ciência que se instaura" (Machado, 1991).

Algumas das ideias de Unamuno foram posteriormente trabalhadas e incluídas no 1º manual de "Papirolas", 1938. Segundo Vauthier, (2004) parafraseando Unamuno "... la cocotología se relacionará ante todo con "las matemáticas", ya que la "pajarita de papel" adopta formas geométricas definidas y puede someterse a fórmula analítica".

2.6 O Origami no Inicio do Século XX

Procurar e investigar nos acervos das bibliotecas nacionais, desde 1986, o tema Origami ou dobragem de papel, não permitiu encontrar, informação sobre educação matemática através do Origami dado que nesta época as tarefas geométricas com papel estavam incluídas nos trabalhos manuais.

Assim, o trabalho manual aparece-nos no final do século XIX, início do século XX incluindo as palavras "*dobrados*", "*dobramentos*" e "*dobragem*" e apresentam uma forte componente matemática.

Segundo Lister, o mais antigo livro de Origami em termos matemáticos que aparece no início do século XX, é *"Papirolas" (Tratado de Papiroflexia) – Figuras Geometricas de papel Doblado - 1º Manual*, publicado em Buenos Aires, 1938, por Dr. Vicente Solorzano Sagredo (Figura 2-13). Na primeira parte apresenta elementos de geometria e na terceira parte estudo das "*papirolas puras*", dobragens com papel "cuadrilongo", ou seja, rectangular.

Este livro apresenta nas páginas 21-25 uma comparação entre o mundo real e a matemática, o que de acordo com o NPMEB (2007) o torna didacticamente actual, uma vez que uma das finalidades do ensino actual é o contributo para a formação global do aluno. "Assim a disciplina de Matemática no ensino básico deve contribuir para o desenvolvimento pessoal do aluno, deve proporcionar a formação Matemática... e contribuir também para a plena realização na participação e desempenho social e na aprendizagem ao longo da vida" (DGIDC, 2007, p. 3).

Sagredo (1938), afirma que:

> "uma criança experimenta sensações e vivências, quando acorda pela manhã ao aperceber-se que a sua cama é mais larga que o seu corpo... que a posição mais agradável para dormir é a posição horizontal e que as paredes e portas formam linhas e planos verticais. Estas noções de rudimentos de geometria, linha vertical, perpendicular, diversos tipos de ângulo, bissectriz de ângulo e polígonos são explicadas aos alunos da época através de material manipulável, dobragens numa simples folha de papel rectangular" (Sagredo, 1938, p. 21).

Analisando um excerto do livro *"Papirolas"* de Sagredo reconhece-se a sua forte ligação à didáctica da geometria, utilizada na época:

"En una hoja de papel corriente, rectangular (Figura a izquierda) notaremos que está limitada por dos lados *o líneas horizontales cortas*, superior A.B. e inferior X.Z. y *otras dos verticales largas*, derecha B.Z., e izquierda A.X. Estas líneas al encontrarse forman los *ángulos del papel* que son rectos y sabemos que tienen por medida de arco 90 grados correspondiente a la cuarta parte de la circunferencia..."

"...En la simple figura del papel (Figura a la derecha) se puede apreciar que los ángulos rectos X.A.Z. y Z.X.R. como son rectos son iguales: el ángulo A.R.X., como mes agudo es menor que los rectos y el ángulo R.A.Z., como es obtuso es mayor que los rectos" (Figura 2-11 "Papirolas" - página 25).

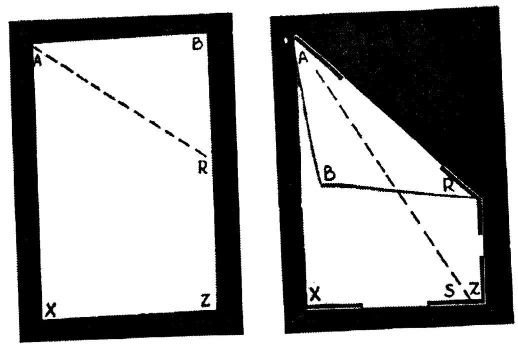


Figura 2-11 – *Papirolas*, página 25

"...sólo tendremos que traer el lado doblado A.R. sobre el lado A.X. (Figura a la izquierda) y habremos realizado las líneas de dobleces A.S.- A.S. que serán bisectrices de los ángulos agudos A.B.R. y A.R.X. (Figura a derecha)..." (Figura 3-10 "Papirolas" - página 26)

"...estas *figuras cerradas* por líneas rectas se las llama en término general *polígonos*, (de poli, muchos, y gonos, ángulos)" ("Papirolas "Página 26) (Sagredo, 1938, pp. 24-27).

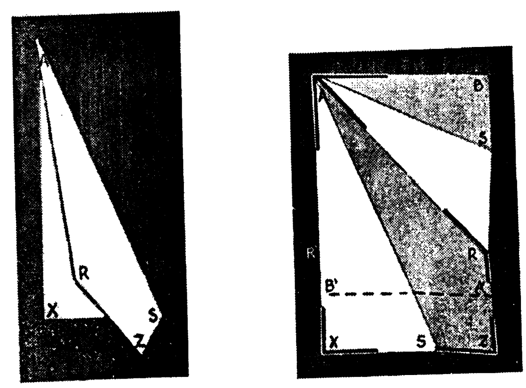


Fig. 5 Fig. 6

Figura 2-12 - *Papirolas*, página 26

Em "*Papirolas*" – 1º Manual, Sagredo (1938) refere que Unamuno demonstrou através do diagrama que a *pajarita* (Figura 2-13) vista em projecção, cobre uma área equivalente a metade do quadrado em que está inscrita, porque é constituída por oito dos dezasseis triângulos (ver capitulo IV – tarefas – actividade dobragem da *pajarita*). Acrescenta que a meditação de D Miguel Unamuno teve uma audácia genial, dizendo que um polígono de papel abre um novo horizonte para a ciência.

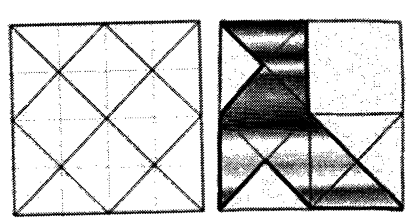


Figura 2-13 - *Pajarita*

> "...alegar las matemáticas da la pajarita como argumento contra a teoría del transformismo darwiniano. Como la pajarita no puede salir de otra cosa, y de su cuadrado saca su perfección, así una especie no pudo proceder de otra" (Sagredo, 1938, p. 9).

Atendendo aos conceitos matemáticos supracitados, áreas, perímetros e ainda estimação da área de uma figura por enquadramento, podemos considerar que existe uma estreita relação entre Paprirolas e o propósito principal do ensino NPMEB, nomeadamente, nos temas Geometria e Geometria e Medida e Números e Operações (DGIDC, 2007, pp. 13,20).

A base da *pajarita* (Base multiform) permite obter uma diversidade de outras figuras geométricas e diversas relações de grandeza entre as mesmas e o quadrado original (Figura 2-14).

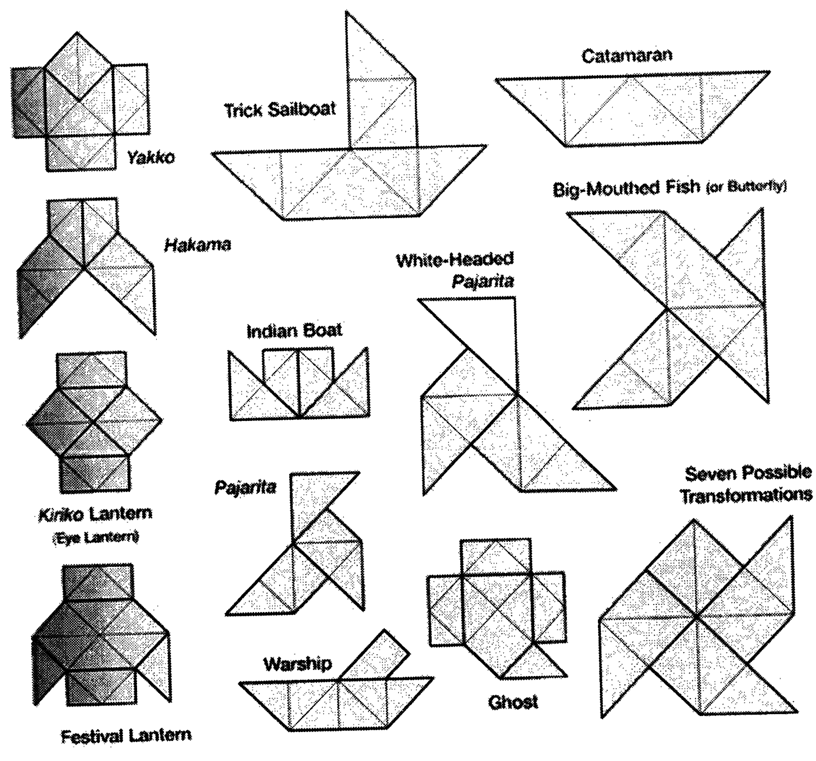


Figura 2-14 – *The Art and Wonder of Origami*, Kasahara, 2008 ,p.35

Kenneway, citado por Gênova, afirma ser de Dionysius Lardner, 1840, o primeiro livro conhecido que explorava o Origami dessa maneira. Segundo Gênova, "os Educadores sempre souberam que o Origami pode ser um agente facilitador no ensino da geometria para as crianças e adultos" e considera como um dos livros mais influentes e interessantes sobre Origami o livro indiano, *"Geometric Exercises in Paperfolding"*, de T. Sundara Row, publicado em Madras, Índia, 1893 e reimpresso em edição revista por Dover, NY, em 1966. Uma reedição, inalterada, do livro foi publicada em 1905 pela The Open Court Publishing Company. Alguns desenhos originais foram substituídos por fotos (Figura 2-15). Este livro é um excelente material de apoio didáctico para professores de matemática e um amplo tratado de geometria com Origami. A intenção do autor era mostrar neste livro, a construção de polígonos regulares e proposições geométricas através de Origami. Por exemplo, a página 90 do livro mostra o desenho da demonstração, "*A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º*", por Origami (Gênova C.).

"Geometric Exercises in Paperfolding está escrito de uma forma muito formal há mais de cem anos, tem métodos das construções simples e podem facilmente ser adaptados às classes modernas de geometria para os diversos níveis" (Hull T. , 2006, p. xvii). Estes exercícios não necessitam de instrumentos de medida. O quadrado de papel substitui a régua e o esquadro. Importantes processos geométricos podem ser mais exactos por dobragem. A utilização deste processo prepara as crianças para apreciar a ciência e a arte: "This is particularly the case with geometry, which forms the basis of every science and art" (Row & Beman, 1941, pp. v-15).

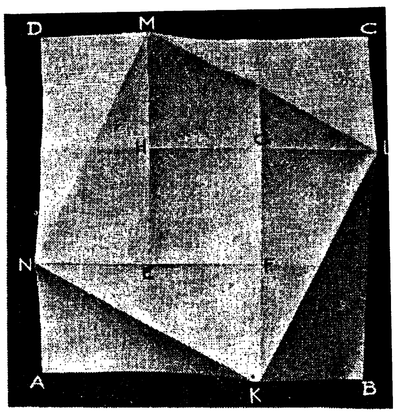


Figura 2-15 – *Geometric Exercises*, figura 14, p. 15

Instruções da página 15 (Figura 2-15)

"**45.** Dobre um quadrado dado conforme a figura 14 Os rectângulos AF; BG; CH; onde DE são congruentes, assim como os triângulos que os compõem. [EFGH] é um quadrado, tal como [KLM*N*].

Seja AK=a, KB=b e NK=c, temos $a^2 + b^2 = c^2$, ou seja, KLMN é um quadrado

$\square$ ABCD = $(a+b)^2$

O quadrado ABCD excede o quadrado KLMN em quatro triângulos AKN, BLK, CML, e DNM.

Mas estes quatro triângulos juntos são iguais a dois rectângulos, ou seja, 2ab.

Então $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$" (Row & Beman, 1941, p. 15).

Esta demonstração reforça a opinião de Hull, é actual e está de acordo com o NPMEB uma vez que se refere à demonstração do quadrado do binómio, um dos conteúdos leccionados nas nossas aulas do terceiro ciclo.

Um outro autor de referência, o brasileiro Ezequiel Júnior refere o trabalho manual como fundamental na didáctica da matemática e na aquisição do conceito de polígono

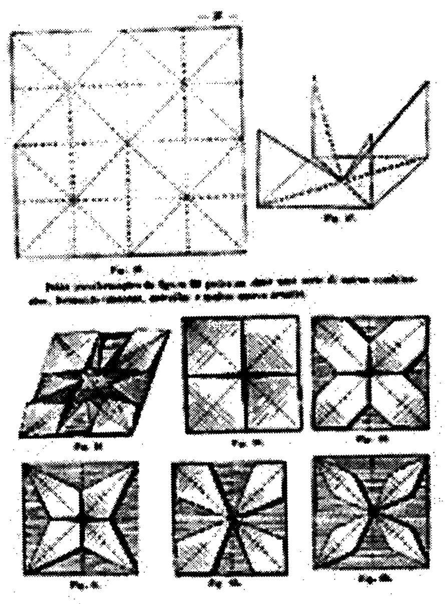
> "O ensino manual deve fazer parte do ensino geral; devemos considera-lo como um dos factores da educação, ... que tem por fim determinado integrar a educação, concorrendo parallelamente com as outras disciplinas do conjuncto para a educação geral do menino". ... "a educação intellectual unindo sempre o ensino manual às outras disciplinas escholares e especialmente ao desenho, às formas geometricas, ao calculo, à linguagem, tendo sempre em vista o desenvolvimento das faculdades" (Junior, 1900, p. 1).

Ainda segundo Junior:

> "o dobrado consiste em representar por meio de dobras de papel e com o único auxilio da espatula, diversas figuras geometricas e objectos usuaes. Há dobrados que se formam do rectangulo, outros do quadrado, do triangulo equilátero, ainda do hexagono, ..." (Junior, 1900, p. 18).

Junior (1900) propõe-nos uma panóplia de actividades com "*dobrados*", uma série de figuras derivadas do rectângulo, uma série de figuras derivadas do quadrado e uma série de figuras derivadas do hexágono. A tarefa "*Como devemos proceder para a partir de um quadrado obter outro que seja metade do primeiro*", é apresentada no capítulo de tarefas desta tese de mestrado, embora com contexto diferente. Inicialmente dobram-se os quatro vértices para o centro e a dobragem vai evoluindo até obtermos um quadrado dividido em 16 partes. Conforme refere Junior (1900, p. 25), consoante as instruções alternativas obtermos "rosaceas, estrellas e outros ornatos". Um século depois estas figuras geométricas são referidas por Kasahara (2008, p. 43) como "Fröebel Basic forms". Veja-se Figura 3-14.

(Junior, 1900)



(Kasahara, 2008)

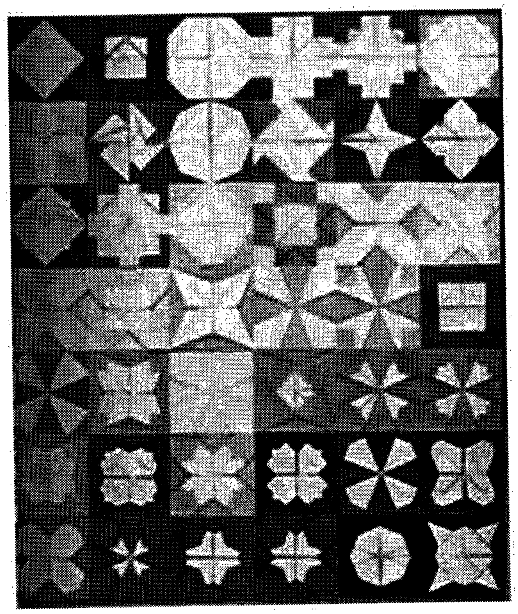


Figura 2-16 - Figuras geométricas de Junior e Föbelianas de Kasahara

2.7 A Geometria no Ensino Primário em Portugal a partir da Lei de 1894

Os trabalhos manuais foram introduzidos pela primeira vez em Portugal, com a publicação da lei de 22 de Outubro de 1894 reformulada em 29 de Março de 1911. Pela lei nº 233 de 7 de Julho de 1914 foram incluídos no currículo escolar das Escolas Primárias, mas esta publicação apenas se reduziu a uma simples publicação no diário oficial. A publicação do decreto Nº 1950 de 20 de Outubro de 1915 estabelecia um período de 3 horas semanais para os Trabalhos Manuais Educativos, o que nem sempre era cumprido. Este decreto foi reformulado pelo decreto nº 3700 de 26 de Dezembro de 1917 passando a ser extensivo a todas as Escolas Primárias (Amarante & Pinto, 1939).

No início do século XX, via-se incrementar, por toda a Europa e Américas, o que ficaria conhecido por Movimento da Educação Nova. Álvaro Viana de Lemos publicou dois livros sobre o tema de "Trabalhos Manuais Educativos" respectivamente em 1915 e 1920 e "Trabalho Manual Escolar - trabalhos com papel" em 1929. Este último livro apresenta tudo sobre esta temática, no programa escolar da época (Lemos, 1929) e inclui as dobragens fröebelianas, que são precursoras de alguns dos actuais Kusudamas cúbicos.

Adolfo Lima e Álvaro Viana de Lemos fazem parte de um grupo de intelectuais que viram a sua memória apagada ao longo do último meio século. É desejável que esta memória seja resgatada de modo a promover, na educação de hoje, a consciência das vivências do passado e a singularidade do presente (Candeias, Nóvoa, & Figueira, 1995).

O enfoque dado por Lemos (1929) ao trabalho com papel está patente na capa do livro, onde podemos observar uma das mais antigas dobragens da península – a *pajarita,* e uma panóplia de dobragens de papel que apresenta ao longo do mesmo. Parafraseando Adolfo Lima, refere que uma escola onde não há trabalhos manuais, musica e uma associação escolar pode dizer-se que não é Escola no sentido moderno do termo, e considera que só é digno do nome de educador, aquele que ensina todos os conhecimentos da Escola Primaria por meio de trabalhos manuais. Acrescenta que o trabalho manual é um bom instrumento pedagógico e é essencial no desenvolvimento intelectual da criança, porque sendo considerado um elemento dum valor extraordinário numa educação perfeita, porque pode representar, autêntica aprendizagem para a vida. Assim

> "Os trabalhos com papel servem de pretexto para muitos exercícios de precisão, medição, proporções (educação da atenção) e obrigam a uma certa continuidade de esforços, persistência e formação de carácter. Exigindo a dobragem e o recorte, para um bom resultado, uma mão firme e uma vista

> apurada...Os recortes e as dobragens prestam-se à iniciação e fixação de muitos conhecimentos, pelas demonstrações, representações e evocações que permitem, servindo assim para concretizar ou ilustrar lições de geometria, geografia, história, sciencias..." (Lemos, 1929, p. 18).

Como metodologia "o professor deve (...) organizar cada ano o seu plano de trabalho para as diferentes classes, variando quando possível os modelos a executar" (Lemos, 1929, p. 33), para não enfadar, nem fatigar a atenção e raciocínio dos alunos, os trabalhos que envolvem exercícios puramente geométricos e abstractos devem ser alternados com os mais ou menos recreativos ou interessantes. Nestas dobragens geométricas torna-se indispensável ter a acompanhá-las o desenho da dobragem obtida, para se tornar visível o trabalho. "As dobragens fazem a educação da vista, do tacto e do senso estético, tornam intuitiva e palpável a geometria plana, fixam a nomenclatura geométrica, facilitam a prática de mediações lineares e superfícies" (Lemos, 1929, p. 19). Concorda com os grandes pedagogos Pestalozzi e Fröebel no que se refere à íntima ligação entre o desenho e a dobragem e considera o desenho imprescindível para qualquer actividade da vida moderna. "O treino permitirá aos alunos aprender a interpretar todos os tipos de desenhos" (Lemos, 1929, p. 37).

Tal como Fröebel havia feito, Lemos associou as dobragens em grupos, consoante as características: (1) *Dobragens de fole ou plissagens*; (2) *Dobragem recreativa*; (3) *Dobragem geométrica* e (4) *Dobragem estética ou decorativa* (Fröebeliana). A grande maioria das dobragens tem por base de trabalho o quadrado. Mas a dobragem estética ou decorativa pode ser de polígonos regulares inscritos na circunferência, de triângulos, pentágonos e hexágonos recortados ou ainda utilizando quadrados de papel. As dobragens em fole ou plissagens são hoje vulgarmente conhecidas como dobragem em leque. As dobragens recreativas permitiam às crianças modificar ou inventar alguns trabalhos ao

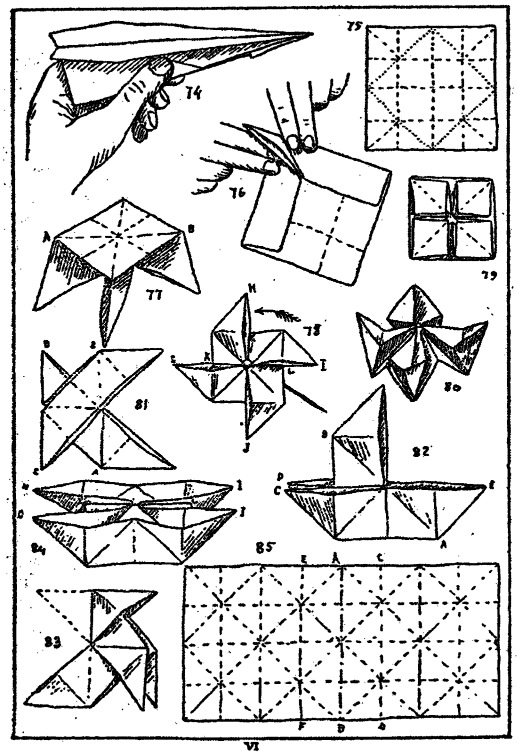


Figura 2-17 - Dobragens recreativas (Lemos, 1929, p. 61)

seguirem os desenhos de dobragem, obrigando-as a um exercício de concentração; estas foram agrupadas em dois grupos, as que se podem fechar e colar no caderno e as que não se podem fechar sem se deformarem (Figura 2-17). "A dobragem de geometria plana Boogaerts, consiste em desenhar o projecto do trabalho, dar uns golpes, dobrar e entalar tão artificiosamente que os sólidos ou as suas secções se mantém sem cola e podem desmanchar-se quando se quiser" (Lemos, 1929, p. 85).

É interessante verificar que o que hoje referimos como linhas de vale e montanha deixadas no papel, para Lemos são "...vincos representados por linhas de pontuado ou tracejado indicam que umas são salientes na mesma face do papel ao passo que as outras são reintrantes" (Lemos, 1929, pp. 56-59).

Álvaro Lemos, como acabamos de constatar, tinha uma visão futurista da importância das dobragens na educação, especialmente no ensino da geometria.

É curioso verificar que a alusão a dobragem de papel decorativa e formal conhecida como Orikata ou Origata foi mencionada no livro Hoketsuki, escrito por Ise Sadatake, em 1764 (Koya, 2007, p. 5).

Albertina Costa publica em 1929 um livro exclusivamente de dobragens, baseado no rectângulo e no quadrado. O modo como é explicado os diferentes passos das actividades no livro "*Trabalhos Manuais: Primeiros exercícios de dobragem de papel - Exercícios e Práticas Escolares* I", revela a diversidade de conceitos matemáticos que eram ministrados, naquela época, aos alunos da Escola Primaria. Na proposta a dobragem de um boné sem pala (imagens não anexas devido à má qualidade das mesmas), salienta-se a instrução d) da citada dobragem onde pode ler-se: "... Ocultando as extremidades livres do rectângulo fica-nos um objecto com forma de um triângulo; abrindo-o como para pô-lo na cabeça e continuando até que o cateto que representa a altura do triângulo se ajuste em toda a sua extensão sobre a hipotenusa, e dobrando fica fora e para a parte superior o triângulo excedente..." (Costa, 1929, pp. 9,10). Manipulando rectângulos e quadrados através da técnica de dobragem e de papel Costa explica os diversos conceitos que vimos contemplados no NPMEB que se encontra este ano em experimentação em algumas escolas. Neste poderemos integrar tópicos de Geometria e Medida - orientação espacial, figuras no plano e sólidos geométricos, dando especial ênfase às propriedades e classificação, composição e decomposição de figuras assim como reflexão/simetria. A mesma autora publicou um outro livro intitulado: *"Quinze exercícios de dobragem sobre o rectângulo"*.

Amarante & Pinto (1939), citando Júnior, refere que não negando a utilidade da instrução livresca, passou-se a favorecer as percepções e houve necessidade de acrescentar aos métodos de ensino um novo elemento próprio para as aptidões activas do educando, fazer ele próprio o objecto que estuda. Acrescenta que " O *Dobramento*" serve para compreender melhor as regras para medir as superfícies planas, para o estudo da Geometria, para preparar e estudo do Desenho, e para educar os olhos e as mãos, pois requer muita atenção, exactidão e paciência" (Amarante & Pinto, 1939).

Severo, Marinho & Salazar (1964?), afirmam que o livro "O Meu Livro De Trabalhos Manuais",1ª,2ª,3ª e 4ª classe, está elaborado de acordo com os novos programas para o Ensino Primário, da década de 60. Segundo o decreto-lei nº 42994 de 28-5-1960. A alusão à ligação da dobragem está patente na frase "Os trabalhos manuais ajudam a aritmética" (1964?, pp. 32-39,94). A dobragem de papel era iniciada na 1ª classe, onde o desenho gráfico aparece sem referências matemáticas. Mas, à medida que se vai progredindo na aprendizagem dos conceitos aparecem referências a rectângulo, quadrado, triângulo, diagonal, vértice e mediana... Consideram que à medida que os alunos vão passando de classe os trabalhos devem ser mais trabalhoso e mais perfeito, sendo as dobragens cada vez mais complexas, de acordo com as diferentes faixas etárias. As dobragens estão incluídas na secção de trabalhos manuais de papel, e eram utilizadas como material didáctico para ensino da parte da matemática que estuda as operações numéricas e, por extensão de sentido, tudo que pressupõe um cálculo. Assim, no caso da dobragem do barco "O quadrado é vincado pela diagonal e pelo meio dos lados. Por esses vincos dobras e obténs dois quadrados mais pequenos... As partes de fora dobram-se para dentro pela diagonal do novo quadrado e o vértice oposto..." (Severo, Marinho, & Salazar, 1964?, p. 117).

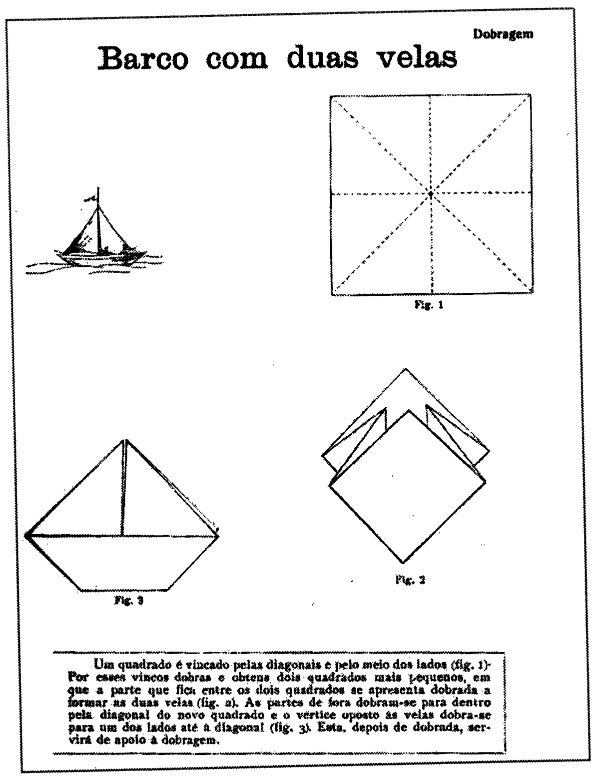


Figura 2-18 - Dobragem do barco (p. 117)

Ao analisar a página 117 (Figura 2-18), o diagrama do barco de papel, inferimos que esta tarefa pode ser integrada no NPMEB, no tema Geometria e Medida que refere como objectivos estabelecer relações de grandeza entre objectos, fazer transformações de figuras geométricas planas segundo algumas regras (utilizando dobragens) e comparar as seguintes figuras planas: quadrado, rectângulo, triângulo e círculo, esses objectivos estão patentes nas instruções do barco com duas velas (DGIDC, 2007).

Em Portugal foi dado grande enfoque à dobragem como material didáctico por volta dos anos 30, mas posteriormente (durante e após a guerra mundial) houve um decréscimo da sua utilização, tal como aconteceu noutros países, conforme já referimos.

No início da segunda metade do século XX, aparecem publicadas dobragens, isoladas ou em pequenos grupos, em diversos manuais do nosso ensino, mas a sua utilização como material didáctico para ensino da geometria era irrelevante. A partir de 1980 os professores de matemática de diversos países voltaram a considerar o Origami como um interessante material para o ensino da geometria e muito interdisciplinar.

2.8 O Origami e a Interdisciplinaridade

O ensino tradicional utilizando uma pedagogia tradicional iniciou-se no século XIX, atravessou o século XX e ainda hoje é muito utilizada por alguns educadores. Segundo Planchard (1975), a escola antiga não se preocupa senão com transmitir conhecimentos, é essencialmente didáctica, enquanto a escola moderna visa sobretudo o "saber fazer", as capacidades de realização e a criatividade. Esta pedagogia de outrora centrada na "disciplina militar, na universalização do conhecimento com treinos intensivos de repetição e memorização onde o professor transmite o acervo de informações aos seus alunos e que promove a predominância da sua autoridade dá excessiva importância à matéria que está no livro. Os conteúdos são dissociados da vivência da vida quotidiana dos alunos e da sua realidade social, sendo estes meros agentes passivos, aos quais não é permitida nenhuma forma de criatividade. A escola nova ao contrário, é activa e por vezes barulhenta como uma feira, pratica o "self government", e baseia-se na liberdade do trabalho (Planchard, 1975, pp. 121-137).

No decorrer do século XX surgem então novas ideias pedagógicas, no sentido de reverter esta situação, sobre o saber tradicional que subdivide as áreas do conhecimento e do currículo. Nas últimas décadas do século XX começa-se então a questionar se deve haver barreiras entre disciplinas, quais devem ser as suas fronteiras e limitações e emergem alguns estudos sobre a interdisciplinaridade. Assim, "A interdisciplinaridade surgiu nas últimas décadas do século XX em consequência da própria evolução da ciência e da percepção da complexidade do mundo" (Medeiro, Novembro / 2006).

Neste contexto, aparecem diversos autores que consideram o Origami um excelente aliado nesta área porque é possível através de um único Origami promover a interdisciplinaridade curricular.

Se ao planearmos um dia de aulas para o primeiro ciclo, tendo em conta as diferentes áreas curriculares, definirmos como objectivo final desse dia a dobragem do corvo, podemos iniciar o dia com a disciplina de Língua Portuguesa e seleccionar a Lenda da cidade de Lisboa. Sendo o corvo um dos elementos dessa lenda, na disciplina de Estudo do Meio pode estudar-se as aves, dando especial ênfase ao estudo do corvo. Como a dobragem do corvo se baseia inicialmente no quadrado poderá explorar-se ou rever-se os diversos conceitos referentes ao estudo dos polígonos, nomeadamente triângulos e quadriláteros. Até obtermos a dobragem final estaremos trabalhando simultaneamente a área das expressões.

Um outro exemplo a dobragem do "livro de notas", actividade incluída neste trabalho, no capítulo de tarefas, pode associar a matemática com a escrita e a expressão plástica. Se por outro lado elaborarmos o "barquinho de papel", que todos dobrámos no nosso primeiro ciclo, para além da matemática poderemos abordar para além da leitura de um texto, diversos outros temas (nomes colectivos, família de palavras, ciclo da água, férias, água, meios de transporte e expressão plástica).

Segundo Smith (1990), o Origami é promotor da intuição geométrica e é uma excelente terapia para crianças e jovens. Por outro lado, o Origami é um instrumento educativo e recreativo e muito se pode aprender através desta divertida técnica para além dos conceitos matemáticos (Pearl, 1997, p. 19). Ainda de acordo com Pearl podemos agrupar os benefícios educacionais do Origami em seis grandes temas (Figura 2-19).

Um outro autor de referência, Rego, Rego, & Junior, (2004), afirma ser o Origami importante em diversas etapas do desenvolvimento é estimulador, do esquema corporal da motricidade fina, da coordenação viso-motora, da discriminação visual e auditiva e ainda da percepção táctil.

> "Existem dobraduras feitas pelas crianças como: os chapéus, barquinhos e os aviõezinhos, este último principalmente, representam motivo de desordem e

algazarra nas salas de aula, pelo uso que é feito nos momentos de bagunça ou repúdio a alguma situação. Este mesmo material que não é considerado didático pode se tornar um bom aliado para as descobertas, estudos e a construção do conhecimento interdisciplinar. Os professores e os alunos podem ressignificar, desta forma, o mesmo objeto anteriormente tido como indesejável" (Rego e Gaudêncio, 2003, p.18, Narvaz, et al., 2005).

Este autor defende ainda que através da música e da dramatização, fomentando o diálogo e o interesse na comunicação, começa a emergir, paralelamente, um progressivo domínio da linguagem através do carácter lúdico do Origami. Assim o aluno ao progredir no seu desenvolvimento pessoal aumenta o seu vocabulário e a sua performance face à turma, o que lhe permitirá desenvolver a capacidade de diálogo, argumentação e consequentemente melhorar a sua comunicação oral, o que vai de encontro ao definido no NPMEB que considera a na comunicação matemática uma das principais competências a desenvolver nos primeiros ciclos de ensino básico.

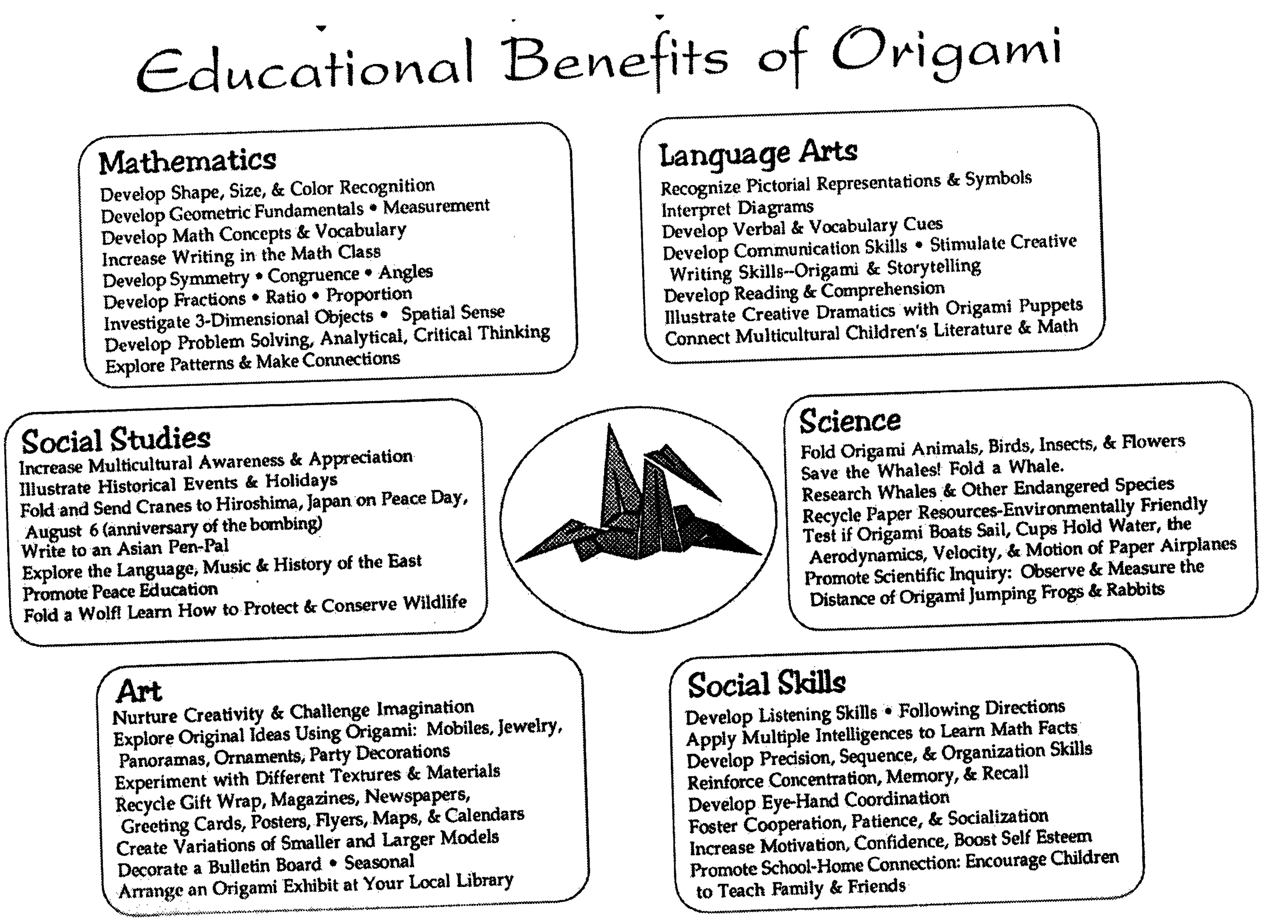


Figura 2-19 - *Math in Motin*- Origami in the Classroom, Pearl, 1997, p. 19

ORIGAMI, GEOMETRIA, TEOREMAS E AXIOMAS

2.9 Origami, Matemática e Geometria

A didáctica está, cada vez mais, associada à psicologia, é fundamental conhecer e compreender os alunos, saber as suas motivações, conhecer o seu estádio de desenvolvimento intelectual e também as suas limitações. Escolher estratégias e as actividades consonantes para proporcionar um bom ensino aprendizagem implica ter informação individualizada de cada aluno. Se determinado aluno não participa podemos questionar-nos: será que ele é tímido ou haverá outro problema subjacente?

As investigações levadas a cabo pelos psicólogos Yuri e Katrin Shumakov convidados especiais nas comemorações do 25° aniversário da AEP (Asociación Española de Papiroflexia) – X Internacional Convención, que se realizou em Escorial, Espanha, entre 28 de Abril e 1 de Maio de 2007, levaram-nos a concluir que a prática de dobragem, promove o desenvolvimento das funções mentais e das habilidades (coordenando o trabalho de ambas as mãos), o trabalho activo da inteligência, a atenção, a memória, a imaginação e o pensamento. Yuri e Katrin acrescentam que, paralelamente, permite desenvolver as capacidades psicomotoras e cognitivas em crianças e adultos.

Analisando a paridade cérebro-mão, e considerando a mão como uma extensão do cérebro podemos dizer que quando as mãos são activamente usadas, há uma massagem natural da ponta dos dedos, que exerce um efeito no equilíbrio dinâmico nos processos de excitação e bloqueio em áreas corticais do cérebro. O uso dinâmico das mesmas promove uma actividade crescente, dos hemisférios direito e esquerdo. Activar e rever essas conjunções do hemisfério direito e esquerdo na idade infantil (quando o cérebro é mais flexível) ajuda a criança a desenvolver e a usar a totalidade dos recursos da mente (Shumakov).

Conforme Piaget (1987) o aluno aprende a construir os seus próprios conceitos se descobrir, experimentar e errar para finalmente redescobrir, reinventar e corrigir os seus próprios erros. "A cognição é um processo activo e interactivo, isto é, um processo permanente de avanços e recuos em que a pessoa afecta o meio e o meio afecta a pessoa" (Ponte & Serrazina, 2000, p. 86). Por outro lado a criança precisa envolver-se em actividades adequadas:

> "[...] a inteligência não aparece, de modo algum, num determinado momento do desenvolvimento mental, como um mecanismo inteiramente montado, e radicalmente distinto dos que o precederam [...] mas é o resultado do processo de equilibração dinâmica entre acomodação e assimilação do organismo. A inteligência é uma adaptação" (Piaget, 1987, pp. 15,31).

De acordo Palis (2004),corroborado por Pappas (1995, p. 1),o matemático francês Henri Poincaré (1854-1912) defendia que a matemática deveria crescer também pela sua beleza intrínseca, "O matemático não estuda a matemática pura porque ela lhe é útil, ele a estuda porque se deleita nela e se delicia com ela porque ela é bela".

Pappas (2001) acrescenta que para se ser conquistado pelo fascínio da matemática é imprescindível compreender que esta não é um assunto isolado, mas está intimamente relacionada com as coisas que nos rodeiam. Richard P. Feynman afirma que "A matemática não é apenas outra linguagem: é uma linguagem mais o raciocínio; é uma linguagem mais a lógica; é um instrumento para raciocinar" (Simões, 1996).

Pappas (1998) refere:

> "a matemática é uma ciência, uma linguagem, uma arte, um modo de pensar. Surgindo na natureza, na arte, na música, na arquitectura, na história, nas ciências e na literatura, a sua influência está presente em todas as facetas do universo (...)" (Pappas T. , 1998).

Palis refere, no seu artigo publicado no Jornal da Ciência (25 de Outubro de 2004), que é impossível dissociar a história da humanidade dos impactos da matemática em cada fase da civilização. Ela esteve sempre presente de forma marcante, desde quando servia apenas para contagem das safras de alimentos, rebanhos, inimigos, objectos e ciclos de tempo e,

> "...permitiu a medição de terrenos e facilitou as construções. Os antigos egípcios, por exemplo, já conheciam na prática o Teorema de Pitágoras, pois calculavam a altura de uma pirâmide a partir da base e da inclinação das faces desejada. Em seguida vieram os gregos e as generalizações de conceitos. E assim por diante, com diversos marcos importantes" (Palis, 2004)

Simões (1996), cita que segundo o dicionário de Língua Portuguesa a matemática começou por ser "a ciência que tem por objecto a medida e as propriedades das grandezas", mas actualmente é cada vez mais a ciência do padrão e da estrutura dedutiva.

De acordo com Veloso (1998), citado por Abrantes (1999, p. 3), "a partir de uma análise da história recente do ensino da Matemática em Portugal, anos 70 e 80, a generalização da chamada Matemática Moderna relegou a geometria para um lugar secundário. Numa abordagem formal da Matemática, a geometria tornou-se um "parente pobre" da álgebra linear, as actividades envolvendo construções geométricas foram consideradas matéria de outras disciplinas, como a Educação Visual, a "importância prática" da geometria reduzia-se ao teorema de Pitágoras e a umas quantas fórmulas para o cálculo de áreas e volumes. Nesta abordagem, a intuição e a visualização desempenham um papel menor no processo de ensino e aprendizagem da Matemática".

Para Freudenthal (1973, p. 407), geometria era "um meio – talvez o mais poderoso – para que as crianças sintam a força do espírito humano, ou seja, do seu próprio espírito". Afirma que durante muito tempo Matemática foi sinónimo de Geometria e acrescenta que "Geometria é compreender o espaço", é a experiência e interpretação do espaço onde a criança vive, respira e se move. Nesta perspectiva podemos pensar que a criança pode começar a aprender geometria tão cedo quanto seja capaz de ver, sentir e movimentar-se no espaço que ocupa. Defende ainda que o ensino da Geometria é fundamental nos quatro primeiros anos de escolaridade na medida em que está naturalmente integrada no desenvolvimento da criança, favorecendo a relação entre a matemática e o mundo real. A figura de Hans Freudenthal teve influência decisiva na tendência de revalorização da geometria que tem marcado a evolução curricular em Matemática um pouco por todo o mundo e cujos reflexos são visíveis em Portugal.

Freudenthal questiona a investigação no espaço: (1) Por que razão se dobra uma folha de papel ao longo de uma recta? (2) Por que razão uma folha de papel enrolada se torna rígida? (3) Por que razão um nó feito com uma tira de papel resulta num pentágono regular? As suas ideias sobre as primeiras experiências das crianças serem geométricas e espaciais ao tentarem compreender o mundo que as rodeia, são corroboradas por Rodrigues, Araújo, & Rocha (2007) quando referem,

> "(a) Geometria é considerada importante por pesquisadores e curriculistas porque, por meio dela, a criança desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive, além de ser um campo fértil para se trabalhar com situações-problemas" (Rogrigues, Araújo, & Rocha, 2007).

De acordo com Abrantes (1999, p. 3) "na geometria há inúmeras hipóteses de trabalhar situações problemáticas e de escolher tarefas de natureza exploratória e investigativa, que podem ser desenvolvidas na sala de aula, sem necessidade de um grande número de pré-requisitos e acautelando, sem grande dificuldade, uma visão da Matemática centralizada na execução de algoritmos e em "receitas" para resolver exercícios-tipo". A riqueza e variedade das tarefas geométricas são argumentos suficientes para a sua valorização no novo currículo e nas aulas de matemática. Promover o desenvolvimento do pensamento geométrico através de actividades que se iniciam como um jogo torna-a mais surpreendente. Para isso, os alunos devem utilizar materiais concretos sendo o espaço o seu ponto de partida.

Em Geometria, é possível, conceber tarefas adequadas a diferentes níveis de desenvolvimento e que requerem um número reduzido de pré-requisitos. No entanto, a sua exploração pode contribuir para uma compreensão de fatos e relações geométricas que vão muito além das simples memorizações e utilização de técnicas para resolver exercícios tipo. Compete ao professor propiciar situações de aprendizagem através de experimentos, situações rotineiras para que o aluno sinta que a aprendizagem requer esforço pessoal que vem somente do seu interior (Brito & Filho, 2006, p. 39).

Segundo Acosta (2006), o Origami é uma ferramenta de ensino que permite desenvolver um conteúdo diferente, não apenas conceitual mas também processual. Por outro lado, promove o trabalho interdisciplinar da matemática com outras ciências nomeadamente nas artes ou nas ciências naturais. Citando Atiza, acrescenta:

> "La conexión entre la mano, el cerebro y el ojo, es decir, la capacidad de manipular unos objetos guiada por el cerebro, bajo el control de los ojos, está en la base de la evolución del hombre y de su vida cotidiana, pocas actividades desarrollan esta capacidad como la papiroflexia". (Emmanuel Atiza)

Pappas T. (1995) alega que para criar um Origami começa-se com um quadrado de papel e vai-se transformando-o numa forma limitada apenas pela imaginação, habilidade e determinação. Tradicionalmente, no Japão, a forma geométrica mais usada era o papel quadrado enquanto no Ocidente era o papel rectangular. O quadrado foi a forma inicialmente escolhida porque, ao contrário do rectângulo e outros quadriláteros, tem quatro eixos de simetria. Embora outros polígonos regulares tenham mais eixos de simetria que o quadrado teria sido mais difícil. Pappas defende que estudar a progresso da criação de um Origami é muito enriquecedor. Começa-se com um quadrado (dimensão 2 - superfícies e áreas) que é manipulado até objectos tridimensionais (dimensão 3 -corpos sólidos, volumes). Ao desdobrar pode estudar-se as dobras deixadas no papel. O processo envolve movimentação entre dimensões. As dobras (objecto dimensão 2) são projectadas no plano (dimensão 1 -linhas, curvas) a que chamamos quadrado (Pappas T. , 1995, pp. 202,203).

De acordo com os autores supracitados a geometria é muito mais que um pequeno grupo de teoremas e fórmulas para o cálculo de perímetro, área e volume é a realização de descobertas feitas com as próprias mãos. Segundo Monteiro (2008, p. 8) , o Origami é um exemplo de geometria axiomática muito agradável de explorar e constitui em si mesmo uma experiência de matemática activa.

Conforma Koda (1986), a dobradura, nome brasileiro para Origami, é utilizada na Educação Matemática, no Brasil. Koda considera que o livro "Vivendo a Matemática", de Imenes, talvez seja um dos primeiros livros, publicados no Brasil dedicado exclusivamente à didáctica da geometria através do Origami.

Utilizando régua e compasso podemos traçar linhas, construir ângulos e sua bissectriz, obter rectas perpendiculares, rectas paralelas e desenhar muitas outras figuras, mas essas mesmas construções podem ser feitas só com "dobraduras". De igual modo podemos construir poliedros usando a técnica de Origami e peças de conexão. Acrescenta ainda que" independente da forma quadrada ou rectangular e do tamanho, o papel deve ser rigorosamente cortado, de boa qualidade, fino mas forte, uni ou policromático, mas normalmente branco num dos lados". Actualmente existe à venda papel de cores variadas, padrões e tamanhos, numa diversidade de texturas e formas incluindo tiras de papel (Imenes, 1995, p. 7).

A cor do papel pode arruinar uma peça ou salientar a sua beleza, a textura e espessura marcam a diferença. Como recurso didáctico devemos sempre recorrer a cores claras; muitos dos conceitos a trabalhar baseiam-se nas dobras deixadas no papel. A escolha de branco, cinza é uma óptima opção. Todavia "ao usar branco teremos de ser muito concisos na execução das dobras. O papel preto tem a propriedade oposta, oculta as dobras portanto é uma má opção para trabalhos que usam contornos como referência", (Dias, 2006, pp. 18,19).

Rego, Rego & Junior (2004), por outro lado, afirmam que o Origami permite "a construção de conceitos; a descrição de forma, posição e tamanho, interpretação de diagramas, construção de figuras planas e espaciais, o uso dos termos geométricos em um contexto, o desenvolvimento da percepção e discriminação de relações planas e espaciais, a exploração de padrões geométricos e ainda o desenvolvimento do raciocínio e do senso de localização espacial" (pp. 18-20).

Gurkewitz & Arnstein (1995, p. 1), consideram que a complexidade obtida na elaboração de figuras geométricas demonstra bem a ligação entre o Origami e a geometria.

de uma maneira convincente. Os modelos são dobrados a partir de várias folhas de papel de embalagem em diversos tons.

De acordo com Golan, citada por Borcovski (2007), afirma que as potencialidades pedagógicas do Origami são inúmeras, especialmente no primeiro ciclo. Sustentada por esta afirmação apresentou o programa Haurigamtrih apresentado em Setembro de 2006, introduziu o Origami como disciplina regular em mais de 40 escolas, e criou um grupo de formadores para professores (Borcovski, 2007). Golan afirma:

> ...in my return to Israel I searched for ways to combine my two passions - Origami and education," "I felt Origami can and should be practiced not only as a hobby but also as a didactic tool. My background in informal education assisted me in writing an educational program aimed to develop learning skills through Origami".
>
> "Between the ages of three to nine, a window of opportunity is opened for us as teachers since the child's imagination is extremely developed during this time. But this window of opportunity is often missed by the education system as geometry is taught at junior high when the student's mind is often preoccupied with other issues" (Borcovski, cit.Golan, ISRAEL21c).

Miri Golan foi convidada especial na IV Conferência Científica Internacional de Origami na Ciência, Matemática, and Educação, Baunivrstt Caltech E.U.A. Nesta conferência mais de 70 cientistas, artistas e educadores de todo o mundo trocaram opiniões sobre a exploração da interacção do Origami com as diversas ciências (Lang R. J., 2006).

Golan esteve também como convidada especial no X Congresso *da Association Espanhola de Papiroflexia,* 2007, conforme referido El Telégrafo (26 Abril 2007).

Durante o workshop da AEP, a que tive o privilégio de assistir pessoalmente, Golan falou do seu programa de Origami nas Escolas Israelitas e nos objectivos a desenvolver: capacidades motoras; coordenação visual; pensamento lógico, sequencial e tridimensional; conceitos básicos de geometria, concentração e auto confiança. Enfatizou o facto de o grupo de trabalho ter mudado o nome de *Origami* para *Origametria* porque, segundo Golan, há uma natural relação entre Origami e geometria, e acrescentou "Origametria pretende resolver os problemas de geometria o que muitas vezes é um problema". Ainda segundo Golan, uma profunda aposta na autoconfiança provém da elaboração de um modelo de Origami e o sucesso do programa. Este sucesso depende de três factores, o modo como a lição é planeada, o plano da lição (deve incluir as aprendizagens de conceitos geométricos por dobragem, a pesquisa e a descoberta pessoal) e da coordenação dos professores da escola e os professores de Origami. Também é essencial, em cada lição, os alunos finalizam um Origami.

No festival internacional de cinema de Temecula, Califórnia (19 de Setembro, 2008) foi apresentado um documentário sobre intitulado "Between the folds" (2008), aparecem diversas individualidades, origamistas e *Tom Hull e Miri Golan* são referidos como *"pioneiros no uso de Origami na educação"* (Torres, Leyla, 2008).

De acordo com Rego, Rego & Junior:

> "O Origami pode representar para o processo de ensino/aprendizagem de Matemática um importante recurso metodológico, através do qual os alunos ampliarão os seus conhecimentos geométricos formais, adquiridos inicialmente de maneira informal por meio da observação do mundo, de objectos e formas que o cercam. Com uma actividade manual que integra, dentre outros campos do conhecimento, Geometria e Arte, tem-se a oportunidade de apresentar e discutir uma grande variedade de conteúdos matemáticos, relacionando-os com outros campos do conhecimento" (Rego, Rego, & Junior, 2004, p. 18).

Origami, a arte de dobrar papel, e outros tipos de actividades manuais permitem aumentar a capacidade dos alunos para comunicar matematicamente e aumentar a compreensão dos alunos sobre conceitos matemáticos (Fuys & Lievov, 1997; Hartshorn & Boren, 1990; Salend & Hofstetter, 1996; Wohlhuter, 1998). Para apresentarem resultados investigativos e testemunharem que o Origami é uma óptima ferramenta didáctica, diversos matemáticos, cientistas e educadores internacionais, reuniram *"The 3rd International Meeting of Origami Science, Math, and Education, OSME, March 9-11, 2001"*. (Hull T. , 2002). Iremos falar, sucintamente, de alguns desses depoimentos que parecem pertinentes para demonstrar as potencialidades da utilização didáctica do Origami em sala de aula.

Conforme Tom Hull (2001), Carter & Ferruci salientam durante a sua conferência no 3OSME, que a educação actual e os esforços de reforma em matemática têm enfatizado a utilização da actividade de base e das actividades manuais, em unidades de ensino, para ajudar os estudantes na compreensão inicial e informal das noções matemáticas. Apresentaram um estudo sobre o Origami no 1º ciclo e afirmam que o Origami pode ser importante na aprendizagem de conceitos de simetria e podem proporcionar experiências únicas com o raciocínio espacial. Os resultados mostraram que as actividades de dobragem de papel para os futuros professores estão concentradas nas áreas da geometria intuitiva e construções geométricas (Jack Carter, Beverly. J. Ferrucci, 3OSME, 2001).

Por outro lado, Salend & Hofstetter (1996) e Cipoletti & Wilson (2001) afirmam que não é apenas na matemática que a precisão é fundamental. O Origami exige precisão e acuidade nas dobras e permite aos alunos, quando manipulam materiais, desenvolver a comunicação matemática, uma vez que quando têm oportunidade de comunicar usando termos matemáticos desenvolvem o seu raciocínio matemático. Conforme referido e de acordo com o Conselho Nacional de Professores de Matemática, NCTM (1989, 2000), os alunos precisam investigar, explorar e manipular objectos do quotidiano para serem capazes de descrever relações num mundo multidimensional usando linguagem matemática.

> "Fold the paper in half." Many Origami directions include similar statements, but they are not written using mathematical language. "Mathematics generally has the reputation of having a precision that no other subject has ... It is important that educators provide "students with experiences that help them appreciate the power and precision of mathematical language" (NCTM, 2000, p. 63).

Igualmente, durante o 3OSME (2001), Judy Hall, Westport-CT, apresentaram uma conferência onde alegaram que o uso de Origami, é particularmente interessante no caso das fracções, promove o trabalho em equipa, incrementa a auto-estima e melhora a comunicação. "Nós olhamos para algumas aplicações específicas, em particular matemática com fracções. (...) Uma outra aplicação bem-sucedida foi ensinar um grupo de crianças a ensinar aos outros. A auto-estima tem sido a nossa meta, bem como a melhoria das habilidades de comunicação".

Também Miles, Morrow & Kort (3OSME, 2001) defendem que "o uso do Origami promove o raciocínio geométrico e o trabalho de equipa, em sala de aula. Os estudantes podem explorar temas matemáticos como combinações, permutações, medidas de ângulos, padrões numéricos e geométricos, perímetro, área e relações de volume, as características dos poliedros, simetria e visualizar conceitos ao colorir linhas deixadas pelas dobras..." Em geometria os alunos têm dificuldade em traduzir a informação bidimensional para um objecto tridimensional. Afirmam que o Origami permite, aos estudantes, o desenvolvimento matemático e a intuição, fazer conexões, explorar diversos tópicos. "Os objectos feitos pelos próprios alunos têm um apelo visual e pessoal grande, que ajuda a manter o seu interesse em analisar as características matemáticas dos mesmos" (Crystal Mills, Charlene Morrow&Edith Kort, 2001). Salienta ainda Morrow (2001) que na aula de matemática "os estudantes podem construir poliedros de Origami, ponto de partida para a aprender a desenhar diagramas, e explorar vértices, arestas ou obter diversos poliedros colorindo as faces". Assim, parafraseando Carter & Ferruci, Cipoletti & Wilson, Hall, Miles e Morrow & Kort (2001) o Origami é uma ferramenta didáctica importante no campo da matemática, essencialmente no campo da geometria pois privilegia a comunicação e o raciocínio matemático, competências fundamentais no NPMEB.

Hull (2002) cita que Humiaki Huzita, promoveu em 1989 *The First International Meeting of Origami Science and Tecnology* onde estiveram presentes dezassete oradores. Desde então outros encontros internacionais têm sido realizados em diversos países. O carácter didáctico do Origami é extremamente vasto, ao permitir investigar as propriedades geométricas que simplificam a aprendizagem por dedução informal As construções com régua e compasso, podem, analogamente, ser feitas com dobragem de uma forma mais simples e lúdico. A dobragem assume-se como recurso didáctico no ensino da matemática e desde a década de 30 é sabido que uma simples dobragem tem mais impacto como construção geométrica que a construção feita com régua e compasso (Hull T. , 2002, pp. ix-1).

Segundo Huzita (3OSME 2001), é difícil entender e reconhecer a importância fundamental dos axiomas de Euclides, especialmente pelas crianças, mas em particular para alguns professores. E, lembra que esta geometria antiga é conhecida como "*geometria de régua e compasso*". Além disso, a geometria do Origami, ao contrário de outras, não precisa de nenhum instrumento, mas somente da operação conhecida por dobragem de papel.

Emma Frigerio apresentou durante the 3rd International Meeting of Origami Science, Math, and Education (2001), um trabalho baseado na dobragem do copo realizado com estudantes da licenciatura em Educação. Sendo um modelo de fácil execução sem necessidade de conhecimentos prévios de Origami, requer no entanto alguns conhecimentos de geometria euclidiana. Este modelo serve de introdução ao Origami modular (vide actividades no capitulo de Tarefas). Frigero acrescenta que outros tópicos podem ser estudados com Origami como por exemplo construção de modulares, poliedros regulares, semelhanças de rectângulos, teoremas triângulos, divisão aproximada de uma folha de papel em n partes iguais...

Conforme os diversos testemunhos de eminentes matemáticos em todo o mundo o Origami estimula importantes aspectos na criança e no adulto tais como: a paciência, a criatividade, o interesse pelo conteúdo trabalhado, a coordenação motora, a percepção do tacto, a noção de tamanho, formas, cores, o conhecimento dos entes geométricos e outros.

ORIGAMI, AXIOMAS E TEOREMAS

Desde 1970 têm-se realizado inúmeros estudos sobre as dobragens em Origami e as suas variadas conexões. Dobrar no plano é igual a desenhar uma linha por isso é normal considerar o Origami como uma ferramenta para as construções geométricas. Há diversas construções possíveis tais como a trissecção do lado utilizando o Teorema de Haga, a divisão de um lado em cinco partes iguais, dobragem do número de ouro ...

Segundo Smith (1992, pp. 37-70), o matemático, italiano-japanês, Humiaki Huzita no seu artigo, "*Understanding Geometry through Origami Axioms*" in the *Proceedings of the First International Conference on Origami in Education and Therapy (COET91)*, apresentou e identificou conjuntamente com Benedetto Scimemi seis maneiras distintas de construir uma simples dobra alinhando uma ou mais combinações de pontos e linhas, numa folha de papel. Estas seis operações tornaram-se conhecidas com o nome de *axiomas de Huzita* e fornecem a primeira discrição formal do tipo de construções possíveis com Origami. Huzita descreveu estes seis modelos de dobragem, cada um das quais desenha uma linha que define rectas, e as relações entre os pontos e as rectas existentes. Embora Huzita lhes tenha chamado axiomas, segundo Maekawa não são verdadeiramente axiomas, em sentido matemático, são apenas "procedimentos de Origami que desenham uma linha recta" (Maekawa, 2008, p. 86). Jacques Justin adicionou uma sétima dobra, mas foi Koshiro Hatori (2002), que apresentou formalmente um sétimo axioma baseado numa dobragem que não era descrita pelos axiomas de Huzita.

Lang afirma no seu artigo *Origami and Origamic Constructions* que existem realmente apenas estes sete axiomas e publica um estudo que demonstra a sua convicção. (J.Lang, 1996-2003, Monteiro, 2008, p. 8)

2.10 Os Sete Axiomas

Através de um simples quadrado ou rectângulo de papel é fácil compreender o complexo mundo dos axiomas. Através de dobras é fácil obter qualquer polígono, até mesmo aqueles que exigem grande acuidade com régua e compasso.

De acordo com (Monteiro, 2008, p. 8) "Dentro da teoria matemática de construções geométricas de Origami, os sete axiomas de Husita-Hatori definem o que é possível construir com uma única dobragem, fazendo coincidir combinações de pontos e rectas".

Axioma 1 - Dobrar marcando uma linha que une dois pontos. (dados dois pontos P_1 e P_2 há uma dobragem que passa pelos dois pontos).

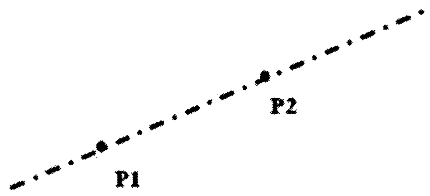


Figura 2-20 – Axioma 1

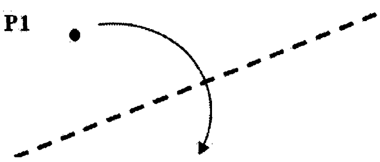


Figura 2-21 – Axioma 2

Axioma 2- Dobrar um ponto fazendo-o coincidir com outro ponto (dados dois pontos P_1 e P_2, há uma dobragem que os torna coincidentes),

Axioma 3 - Dobrar uma linha sobre uma outra linha (dadas duas rectas, L_1 e L_2, há uma dobragem que as torna coincidentes).

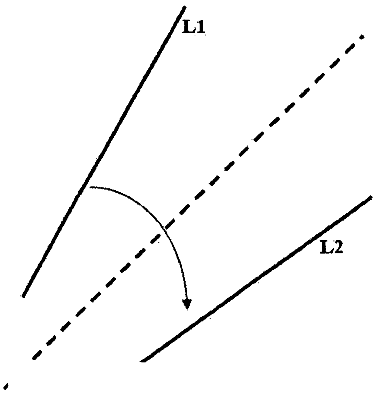


Figura 2-22 – Axioma 3

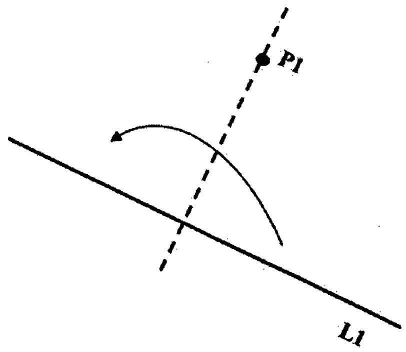


Figura 2-23 – Axioma 4

Axioma 4 - Dobrar marcando uma linha que passa por um ponto e é perpendicular a outra linha marcada (dados um ponto P e uma recta L, há uma dobragem perpendicular a L que passa por P).

Axioma 5 - Dobrar marcando uma linha que passa por um ponto e marca um outro ponto noutra linha (dados dois pontos P_1 e P_2, e uma recta l, se a distância de P_1 a P_2,for igual ou superior à distancia P_2 a L, há uma dobragem que faz coincidir P_1 em L e passa por P_2).

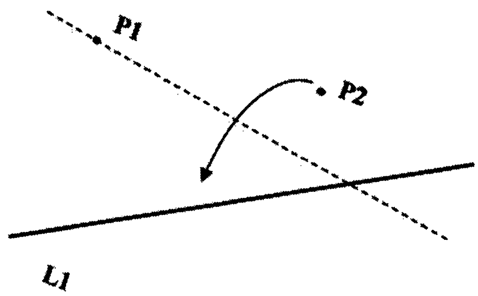


Figura 2-24 – Axioma 5

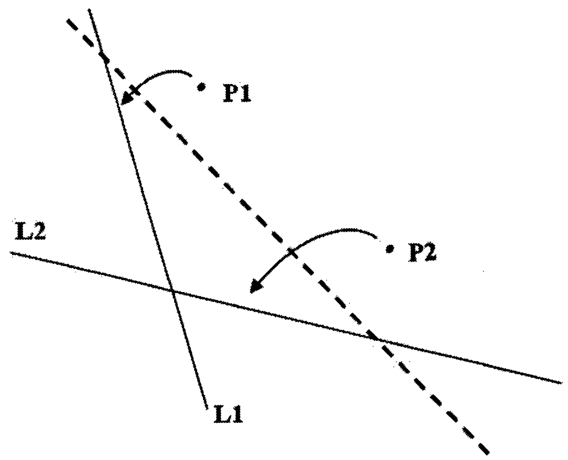


Figura 2-25 – Axioma 6

Axioma 6 - Dobrar um ponto sobre uma linha e um outro ponto noutra linha (dados dois pontos P_1 e P_2, e duas rectas L_1 e L_2, se as rectas não forem paralelas e se a distância não for superior à distância entre os pontos, há uma dobragem que faz coincidir P_1 em L_1 e P_2 em L_2).

Axioma 7 - Dobrar uma linha que marca um ponto sobre a linha e é perpendicular a outra linha (dado um ponto P e duas rectas L_1 e L_2, se as rectas não forem paralelas, h+a uma dobragem que faz coincidir P em L_1 e é perpendicular a L_2).

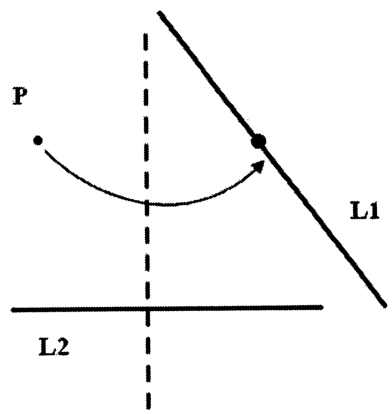


Figura 2-26 – Axioma 7

A combinação de dobras dos axiomas 1 a 5 permitem a resolver equações quadráticas e são equivalentes a construções utilizando régua e compasso, sendo também possível construir um pentágono.

Adicionando à combinação o Axioma 6, algumas construções impossíveis com régua e compasso tornam-se de fácil resolução, como é o caso da equação cúbica.

A aceitação destes princípios permite realizar todas as construções da geometria euclidiana, e permitiu ainda a Hisashi Abe resolver dois dos três clássicos problemas gregos, a trissecção do ângulo e a duplicação do cubo (Maekawa, 2008, p. 86).

2.11 Inimaginável Mistério Existente nas Dobragens de um Quadrado

O Origami, pós década de 50, pretende, entre outras coisas, descobrir o inimaginável mistério existente nas dobragens de um quadrado.

Kasahara (1991), questiona o que acontece quando efectuamos um ou duas dobras num quadrado de papel.

Se observarmos a imagem A (Figura 2-27), e pegarmos no vértice P fazendo-o coincidir ao longo do lado [ab], obteremos diversas formas de divisão do quadrado.

Ao fazer coincidir o ponto P com o ponto "a" dividiremos o quadrado em dois rectângulos iguais. Se fizermos coincidir o ponto P com o vértice "b" dividiremos o quadrado em dois triângulos iguais.

Nos casos B e D é fácil verificar que as figuras obtidas são metade do quadrado original, mas será que é fácil constatar o mesmo se as figuras obtidas forem outros quadriláteros ou mesmo um pentágono?

Se observarmos agora a figura C, em que o ponto P coincide com o ponto médio da recta [ab], obteremos a resposta através do Teorema de Haga. Através desta dobragem podemos demonstrar que o lado [bc] fica dividido em três partes iguais.

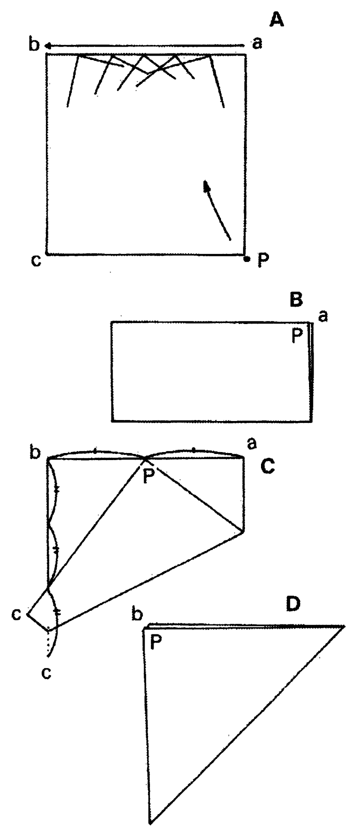


Figura 2-27 - Divisões do quadrado

É fácil perceber o que pode significar uma simples dobra num quadrado de papel. O gosto pela descoberta e a criatividade permite-nos transformar a matemática e a geometria numa aprendizagem activa (Kasahara k. , 1991, p. 23).

2.12 Teorema de Haga

Kazuo-Haga descreveu o método de trissecção que ficou conhecido como o Teorema de Haga (Figura 2-28 e Figura 2-29). Se marcarmos o ponto médio do lado superior de um quadrado e posteriormente d obrarmos de modo a que o vértice inferior direito seja coincidente nesse ponto, obteremos no lado esquerdo do quadrado o ponto A. Este ponto indica rigorosamente o ponto de trissecção do lado do quadrado.

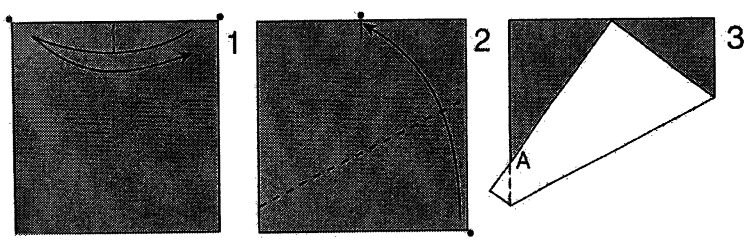


Figura 2-28 - Teorema de Haga

Teorema de Haga: Num quadrado de papel, consideremos um ponto P qualquer, no lado superior. Se dobrarmos o papel de forma que o vértice inferior direito seja coincidente com esse ponto P, obteremos três triângulos semelhantes.

Hipótese: [ABCD] é um quadrado e P é um ponto situado no lado superior do quadrado.

Tese: Os três triângulos pela sobreposição do vértice C em P são semelhantes.

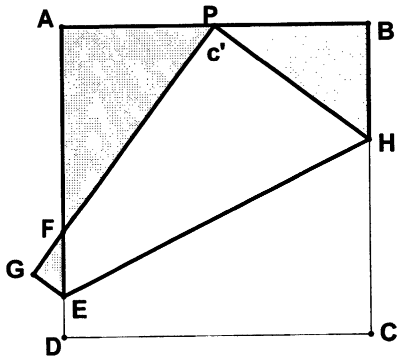


Figura 2-29 - Teorema de Haga

<u>*Demonstração*</u>:

Por definição de quadrado os ∠ FAP, ∠ PBH, ∠ HCD e ∠ CDE são ângulos rectos.

Portanto ∠ c′ = 90°, donde:

∠ APF+′90°′+∠ BPH = 180°, então

∠ APF+∠ BPH = 90°

Sendo o Δ [PBH] rectângulo e a soma das amplitudes de qualquer triângulo ser de 180°, permite-nos concluir que: ∠ BPH =∠ BHP.

Então ∠ APF = ∠ BHP, uma vez que duas quantidades iguais a uma terceira são iguais entre si. O que nos leva a concluir que: ∠ AFP =∠ BPH.

Logo das igualdades anteriores inferimos que Δ [AFP] e Δ [PBH] são semelhantes.

Considerando agora o Δ[FGE] e o Δ [AFP] prova-se que ∠ AFP = ∠ GFE porque são verticalmente opostos.

O ∠ FGE = 90°, logo ∠ GEF=∠ APF.

Donde se conclui que o Δ [FGE] é semelhante ao Δ [AFP].

Consequentemente os três triângulos são semelhantes como queríamos demonstrar.

A semelhança entre triângulo, está inserida no tema Geometria e Medida (MPMEB, 2007, p. 66), tópico Triângulos e quadriláteros, subtópico Congruência entre triângulos (3° ciclo).

O facto de obtermos a trissecção do lado do quadrado permite associar este teorema com o tema Números e Operações tópico Números racionais não negativos, subtópico Fracções -1° ciclo (DGIDC, 2007, p. 65).

Este teorema remete para a tarefa "*Dividir o quadrado em três rectângulos iguais*", facto que será facilmente conseguido, utilizando o ponto F como ponto de referência e utilizando o axioma 4 (dobrar marcando uma linha que passa por um ponto e é perpendicular a outra linha marcada).

Depois de obter a primeira marcação obtém-se a segunda marca dobrando ao meio o segmento de recta AF.

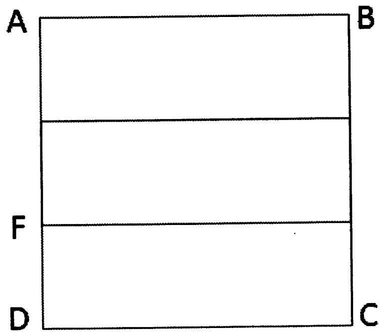


Figura 2-30 – Aplicação do Teorema de Haga

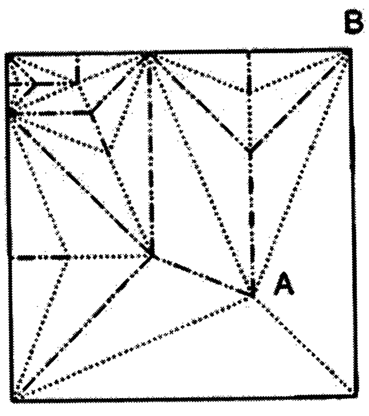
2.13 Teoremas de Maekawa e de Kawasaki

Uma actividade geométrica de Origami depende, entre outros factores, do rigor e precisão na produção da dobra de modo a obter um produto final o mais perfeito possível.

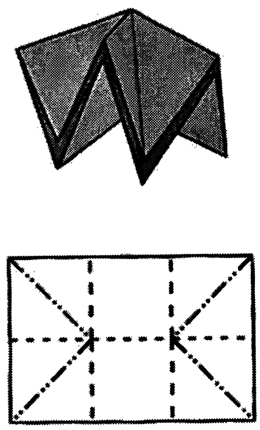
Para investigarmos a profunda relação entre o Origami e matemática, basta desdobrar a tradicional crane para podemos aprender imenso através do CP.

Ao escolhermos como referência um vértice, podemos questionar: quantas dobras têm origem neste vértice? As dobras podem ser todas montanha, ou todas vale? E os ângulos? (Anderson)

Segundo Maekawa (2008, p. 46) se analisarmos os pontos de encontro entre as dobragens de montanha e vale do CP - "flat Origami model" (ignorando os lados da folha) verificamos:



Maekawa 1



Maekawa 2

Figura 2-31 - Teorema de Maekawa

A diferença entre o número de dobragens em montanha e vale é sempre 2.
(Teorema de Maekawa)

Se adicionarmos todos os ângulos entre as dobras, um a um, com sinais alternados (mais e menos), a soma é sempre 0.
(Teorema Kawasaki)

De acordo com Maekawa é fácil provar que temos sempre um número par de ângulos, para cada vértice. Se considerarmos o ponto A (Maekawa1) no mapeamento do C P, verificamos que temos duas dobragens em montanha e quatro em vale e portanto a diferença é dois.

Os ângulos entre as dobras, considerados no sentido contrário ao movimento dos ponteiros do relógio, a partir da direita são, respectivamente:

67,5°, 22,2°, 22,5°, 45° e 67,5°.

E tem-se:

67,5-22,5+22,5-45+45-67,5 = 0

Maekawa (2008, p. 46) acrescenta que se analisarmos o C P no ponto B (Maekawa 2) verificamos, facilmente, que também satisfaz o teorema de Kawasaki.

Ainda segundo Maekawa existe uma outra propriedade matemática importante no Origami: Nos padrões de dobragem de figuras planas, pode colorir-se o esquema desdobrado utilizando somente com duas cores, sem que se repita a mesma cor lado a lado. Uma das cores representa todas as áreas que ficam viradas para cima quando efectuamos a dobragem, a outra cor representa todas as superfícies viradas para baixo (Figura 2-32).

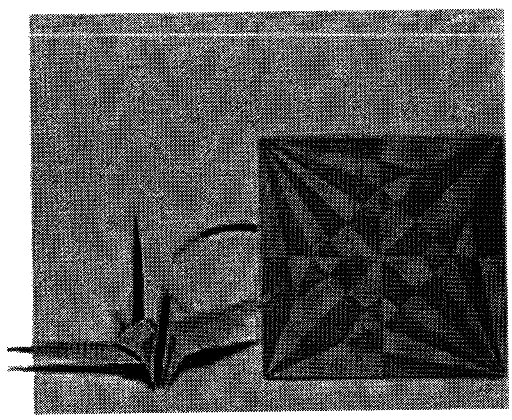


Figura 2-32 - Teorema de Kawasaki

De acordo com Pinto, Santos, & Itabashi (2007) podemos reescrever as afirmações supracitadas:

Teorema de Maekawa: "Num Origami plano a volta de um vértice o módulo da diferença entre o número de dobras em montanha e o número de dobras em vale é sempre igual a dois".

Relativamente aos ângulos ao redor de um vértice no interior do esquema de um Origami plano, *Teorema de Kawasaki* "A soma dos ângulos alternados formados por dobragem ao redor de um vértice no interior do esquema (CP) de um Origami plano será sempre 180º" (Figura 4-14).

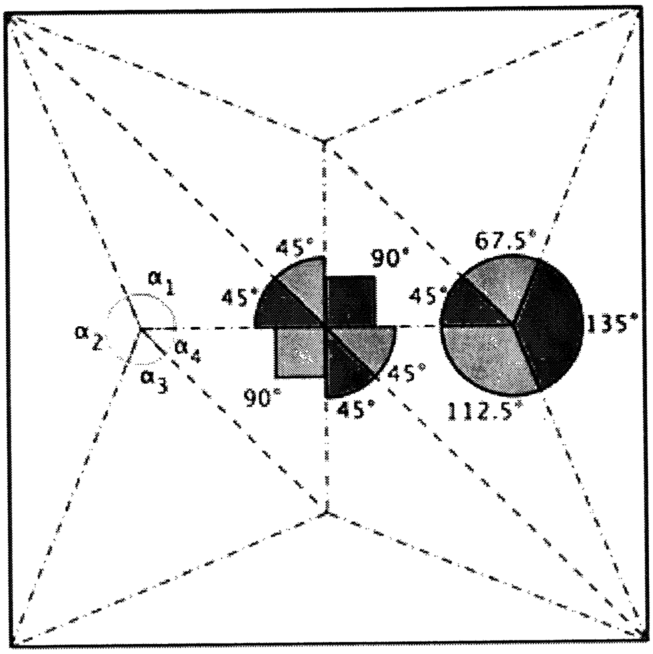


Figura 2-33 - Teorema de Kawasaki

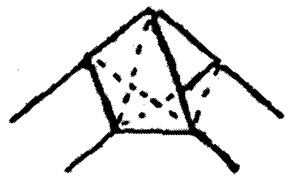
Sejam α 1, α 2, α 3, α 4,..., α 2n as medidas em graus da amplitude dos ângulos que circundam um vértice no interior do esquema de um Origami plano, então temos:

α 1+ α 3+...+ α 2n-1 = 180º

e

α 2+ α 4 +...+ α 2n = 180º.

2.14 Nó Pentagonal



**Dios jugando con los dobles
cinco dedos de ambas manos
anudó cinta de yerba;
de cinco puntas fue el lazo.**

**De donde sacó la estrella
pentagonal, que sus brazos
dio a las blancas frescas alas
de la rosa del gabanzo.**

26 de junio, 1928.

Figura 2-34 – Poema do nó Pentagonal

Este poema aparece junto com o desenho do nó pentagonal e da estrela que se forma ao fazê-lo. Se o papel for grosso obtemos apenas um pentágono, mas se o papel for transparente podemos ver o contorno da estrela quase completo, falta apenas uma das diagonais do pentágono. Para completar a estrela basta entrelaçar uma das tiras sobrantes mas uma vez. Esta estrela de cinco pontas, vulgarmente conhecida como pentagrama, pode ser tridimensional, "En papiroflexia hay una figura sencilla conocida como "Lucky Star" (estrella de la suerte) que parte del nudo pentagonal para hacer una estrella de cinco puntas en 3D" (DivulgaMat).

Para fazer um nó com papel, basta uma tira de papel (com comprimento seis vezes a largura) e fazer um nó como se fosse uma corda. Puxar os extremos lentamente, de modo a formar um pentágono. (Hernández, 2001).

Podemos colocar então a questão: O nó pentagonal é um pentágono regular?

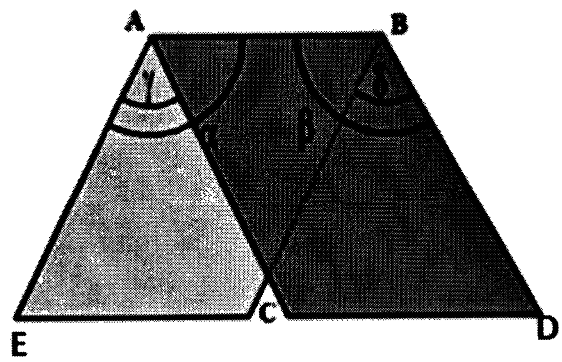


Figura 2-35 - Ângulos de reflexão

Quando dobramos uma tira de papel obtemos ângulos de incidência e de reflexão (Figura 4-16), donde:

$\angle\alpha = \angle\beta$

Como os lados da tira são paralelos então $\angle\gamma = \angle\delta$

Tendo em conta ambas as igualdades temos:

$\angle\,(\alpha - \gamma) = \angle\,(\beta - \delta)$

Então:

Δ [ABC] é isósceles, e portanto, AC = BC.

Tendo em conta o que acabamos de demonstrar, analisemos o nó pentagonal (Figura 2-36).

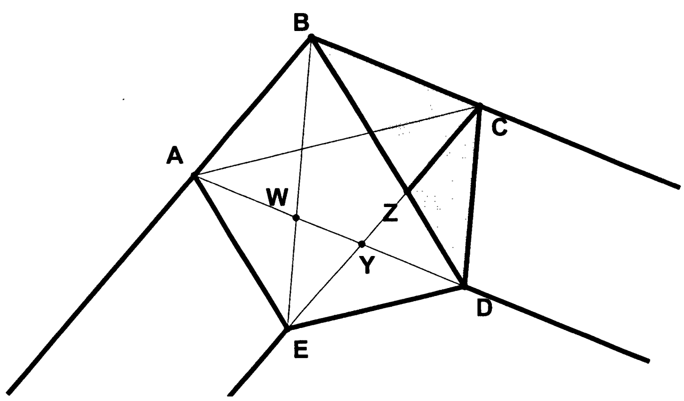


Figura 2-36 - Nó Pentagonal

$\angle$ EAB = $\angle$ ABC = $\angle$ BCD

$\angle$ CDE = $\angle$ DEA

BD = BE

BE = CE

Donde:

(Δ[EAB] = Δ[ABC] = Δ[BCD] = Δ[CDE] = Δ[DEA])

Se observarmos os quadriláteros [ABZE], [ABCY] e [BCDX] verificamos que os três são paralelogramos e estão determinados pela superposição da tira de papel (DivulgaMat, 2009).

Todo paralelogramo tem os lados opostos iguais, e neste caso a tira de papel tem a mesma largura, pelo que os lados consecutivos também são iguais, então:

Se considerarmos S como a área de [ABZE]

S = h. EZ e S = h. AE

Donde:

EZ = AE. Por raciocínio análogo para todos os paralelogramos:

EA = AB = BC = CD (3)

Se consideramos os trapézios [ABDE] e [ABCE] podemos ver que são iguais.

AB = BC por (3)

EA = AB por (3)

BD = CE por (2)

$\angle$EAB =$\angle$ABC por (1)

E portanto ambos trapézios são iguais

AE = ED e $\angle$DEA = $\angle$EAB.

Pela análise de (1) y (3) concluímos que o pentágono tem cinco lados e cinco ângulos iguais, o pentágono é regular (Hernández, 2001).

Combinando diversos nós, entrelaçando as tiras que saem do próprio pentágono, alterando os lados de saída, obtemos cinco peças diferentes e podemos formar um novo pentágono.

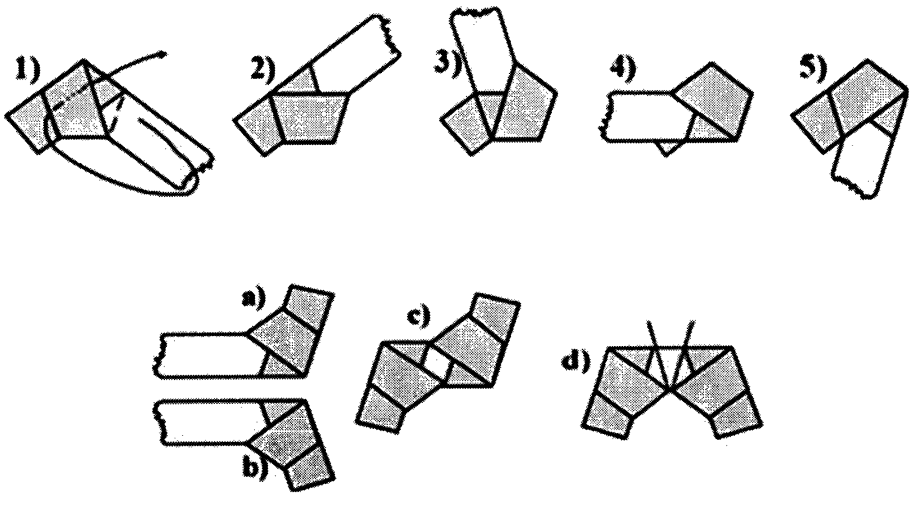
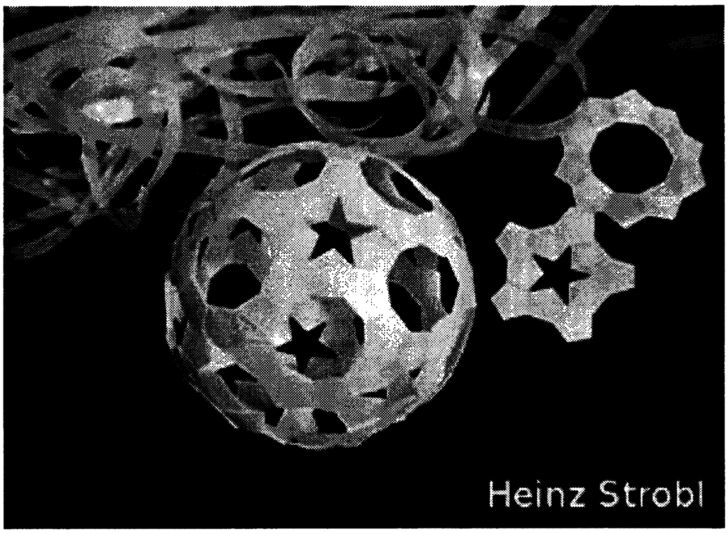


Figura 2-37 - Nós pentagonais e suas conexões

Apenas um nó pode ter forma simétrica (figuras a e b). Isto é importante quando combinarmos os nós de forma a se encaixarem perfeitamente (figura c). Se juntarmos nós do mesmo tipo (figura d), entre cada pentágono haverá um espaço com forma de triângulo isósceles em o ângulo menor tem amplitude de 36°. Este triângulo que separa os pentágonos e a que chamamos triângulo sublime.

Usando diferentes técnicas de combinar os nós pentagonais podemos obter diversas figuras geométricas. Desde estrelas, pentágonos e bandas ou figuras em três dimensiones incluindo flores (DivulgaMat, 2009).



2.15 O Origami Modular

Mukerji (2009, p. xi) argumenta que a maior parte das pessoas dobrou o barco e o avião quando criança. O Origami evoluiu em complexidade, os tradicionais modelos deram lugar a novas formas, Origami modelar, escultura em Origami e pavimentações. Acrescenta que considera que o advento do Origami modelar dá-se por volta de 1970, com o aparecimento de "*Sonobe units*" descoberto por Mitsunobu Sonobe, contudo pode ser anterior. Seis Sonobe-units podem ser associados e formar um cubo. Três dessas unidades, com uma dobra adicional, podem ser combinadas e formar a Toshie Takahama Jewel. Com a dobra adicional reversa Steve Krimball forma a primeira bola de 30 units.

Com descoberta de diferentes possibilidades de combinações de unidades/ "yunnito" surgiram novas peças e conexões e um número infindável de novos modelos. (Mukerji, 2009). De acordo com Franco (1999), esta dobragem quebra a tradição ao permitir a utilização de diversos quadrados de papel para formar objectos chamados "modelos".

Gurewitz & Arnstein (1995, p. 1) corroboram a definição de modelar ou unit Origami, "(...) it is constructed from more than one piece of paper" enfatizando que os modelos têm ser geometricamente iguais e que "The process of constucing modular

Origami is like a puzzle". As múltiplas peças encaixam e mantém-se agrupada através de um sistema de bolsas e pontas, de forma simétrica ou repetitiva. Alguns modelos podem necessitar de colagem.

Enquanto Gurewitz & Arnstein (1995), consideram como pioneiros neste campo, Bob Neale, Jack Skillman and Sonbe, Franco (1999) contesta a ideia e considera Kasahara e Tomoko Fuse como os impulsionadores deste tipo de Origami matemático.

De acordo com estes autores utilizar um quadrado e produzir nele diversas dobragens e/ou cortes permite obter inúmeras peças *modelares planas* (mosaicos) (padrões que podem ser usados para compor frisos através de repetição, simetria ou rotação (Figura 2-38). Este "jogo-arte", de acordo com Yuri e Katrin Shumakov, estimula e desenvolve a capacidade de concentração, aumenta a destreza manual e induz a uma excelente correlação entre aquilo que é idealizado e o que é executado.

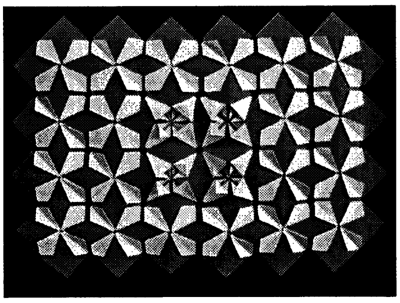


Figura 2-38 - Composição

O *Origami modular tridimensional* – Origami Ball/*Kusudama* (Figura 2-39) resulta igualmente da junção de uma multiplicidade de unidades iguais/yunnito ou de dois tipos de unidades intercaladas. Obtém-se diversas formas de sólidos, suas variantes, os seus duais e diversos sólidos estrelados.

As interligações entre as peças são feitas por encaixe através de pequenas bolsas e pontas, colagem, tiras de conexão ou cruzando fieiras, formando esferas. "Kusudama Ball Origami" publicado em 1990 apresenta vinte e seis modulares muito interessantes (Yamaguchi, 1990).

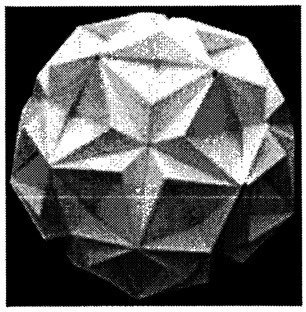


Figura 2-39 - Modular

Tamatebako (caixa cúbica com segredo) considerado o primeiro Origami modular, apareceu em 1734, sendo agora um autêntico fenómeno. Esta técnica "reinventada por Robert Neale nos Estados Unidos e por Mitsonobu Sonobe no Japão" contribuiu para a emergência de novos modelos e o seu número não cessa de aumentar (Mitchel, 1952, p. 12).

Com a construção dos poliedros podem estudar-se os elementos que os compõem (face, aresta e vértice), observar as diferenças entre os tipos regulares e semi-regulares e entender a razão da existência de apenas cinco sólidos regulares (poliedros de Platão).

Ainda é possível estudar eixos e planos de simetria, fórmula de Euler (C+V=A), áreas e volumes, planificação e vistas (empilhamento de cubos).

É importante salientar que todo o trabalho com Origami modular deve ser realizado em grupo, para que a produção dos módulos não se torne cansativa. Além disso, as actividades em grupo promovem, nos alunos, o senso de solidariedade. Segundo Betsy Franco (1999) se trabalharmos com grupos formados por 5 ou 6 alunos, produzindo cada aluno três ou mais peças, é previsível elaborar um modelar por aula. As peças sobrantes podem ser utilizadas nas aulas seguintes e a construção de todos os poliedros mais famosos, a os chamados platónicos que não são mais que os cinco poliedros regulares que existem: o tetraedro, o cubo, o octaedro, o icosaedro e o dodecaedro. A demonstração de que só existem estes atribui-se a Teeteto (425 379 a.C.) da escola de Platón. A demonstração mais elegante deste resultado faz-se mediante a fórmula de Euler. Platón no seu livro Timeo (ap. 55-56) atribuiu a cada um dos sólidos, um dos 4 elementos, da criação do universo. O tetraedro é o lume, o octaedro, o ar, o cubo, a terra e o icosaedro as moléculas de água. Conclui Platón que o Criador utilizou o dodecaedro para formar o universo (Blanco García & Otero Suárez, 2007). A construção, em Origami, destes poliedros regulares poderá ser feita em mais ou menos em 5 blocos/aula.

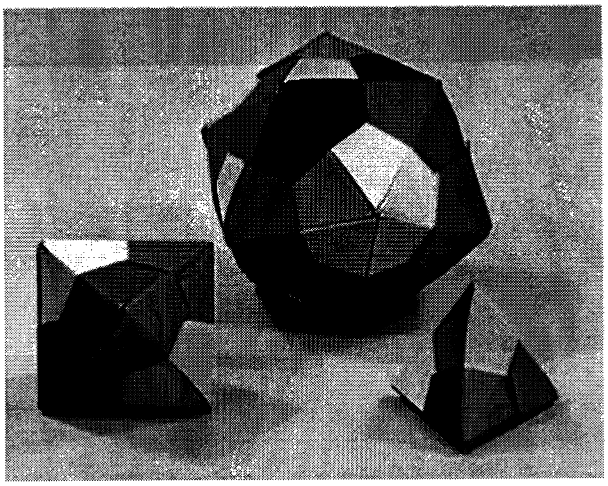


Figura 2-40 - Poliedros Platónicos

Face ao novo Programa de matemática (NPMEB, 2007) o Origami modelar é um material excelente para a aprendizagem de conceitos de Geometria e Medida, inserindo-se nos seus objectivos gerais, nos tópicos e objectivos específicos uma vez que no âmbito deste tema os alunos devem desenvolver o sentido espacial, com ênfase na visualização e na compreensão das figuras geométricas no plano e no espaço. A utilização do Origami modular em sala de aula auxilia a interpretação de diagramas, proporciona o uso de termos geométricos em contexto (Franco, 1999).

O Origami Tesselation, muito comum hoje em dia, consiste em desenhos geométricos, dobrados a partir de uma única folha de papel, criando a repetição de formas baseadas em dobrar e retorcer. Foi iniciado nos anos 60 por Momatani e desenvolvida a partir dos anos 70 por Shuzo Fujimoto. A palavra "tesselation" provém do latim *Tessela,* que significa "pequeno quadrado". As peças de Origami tesselation abrangem uma panóplia de modelos, desde o simples quadrado a complexas peças inspiradas na arte islâmica. Este processo matemático foi desenvolvido por Helena Verrill, Robert Lang, Tom Hull e Toshikazu Kawasaki (Verrill, s.d.).

GEOMETRIA NO ENSINO BÁSICO

2.16 Novo Programa o Ensino Básico

"A Educação Matemática em Portugal tem uma herança essencialmente internacional. Foi às publicações da UNESCO e do NCTM e a autores como Pólya, Freudenthal, Kilpatrick, Davis, Hersh e Papert que foi buscar as suas ideias orientadoras fundamentais -- a importância da resolução de problemas, a natureza multifacetada experiência matemática, o papel do aluno e do professor na aprendizagem, a valorização da dimensão afectiva. Piaget exerceu também alguma influência, sobretudo nos mestrandos de Boston que orientaram as suas pesquisas para o 1º e 2º ciclo do ensino básico, dando origem a uma corrente de interesse pelos materiais manipuláveis" (Ponte J. P., 1993).

A Educação Matemática segundo a Lei de Bases do Sistema Educativo tem como objectivo promover a formação de cidadãos participativos, críticos e confiantes na forma como lidam com a matemática (DEB, 2004, p. 11). Esta distingue-se das outras ciências, em especial no modo como encara a generalização e a demonstração e ainda na maneira como combina o trabalho experimental com os raciocínios indutivo e dedutivo, oferecendo um contributo único como meio de pensar, de aceder ao conhecimento e de comunicar. "Com a entrada em vigor do Decreto-Lei n.º 6/2001, de 18 de Janeiro, da Declaração de Rectificação n.º 4 -A /2001, de 28 de Fevereiro e do Decreto-Lei n.º 209/2002, de 17 de Outubro, que estabelecem os princípios orientadores da Organização e Gestão Curriculares do Ensino Básico, torna-se necessário introduzir algumas alterações ao documento "Organização Curricular e Programas" — 1.º Ciclo do Ensino Básico. Esta necessidade é ainda reforçada pelo facto de ter sido publicado o documento "Currículo Nacional do Ensino Básico — Competências Essenciais" (DEB, 2004, p. 7).

De acordo com os princípios orientadores caberá ao professor criar o ambiente propício à aprendizagem na sala de aula de modo a tornar a Matemática aliciante e as crianças poderem continuar activas, questionadoras e imaginativas como é da sua natureza deixando esta disciplina de ser um factor de selecção para se tornar num instrumento de desenvolvimento de todos os alunos. "As grandes finalidades no ensino da Matemática para o conjunto dos três ciclos do Ensino Básico, desenvolver a capacidade de raciocínio, desenvolver a capacidade de comunicação e desenvolver a capacidade de resolver problemas, devem estar presentes ao longo do 1º ciclo e promover a articulação vertical do processo de ensino e aprendizagem desta disciplina" (DEB, 2004, p. 169).

O programa está organizado em três blocos de conteúdos, Números e Operações, Forma e Espaço (iniciação à geometria) e Grandezas e Medidas a que se junta uma componente de suportes de aprendizagem e desenvolve-se a partir da actividade considerada fundamental — a resolução de problemas" (p. 169). Determinam os objectivos gerais que os alunos devem saber explorar, construir e transformar modelos geométricos e estabelecer relações entre eles, desenvolver estratégias pessoais de resolução de problemas e assumir progressivamente uma atitude crítica perante os resultados, resolver situações e problemas aplicando as operações aritméticas e as noções básicas de geometria, utilizando algoritmos e técnicas de cálculo mental (p. 173).

Segundo a estrutura curricular do ensino, ao longo dos três ciclos, "o trabalho a desenvolver pelos alunos integrará, obrigatoriamente, actividades experimentais e actividades de pesquisa adequadas à natureza das diferentes áreas ou disciplinas, nomeadamente no ensino das ciências" (DEB, 2004, p. 22). Na aprendizagem da matemática, como em qualquer outra área, as crianças são enormemente dependentes do ambiente e dos materiais à sua disposição. A criança deverá encontrar nesses materiais, resposta à sua necessidade de exploração, experimentação e manipulação (p. 168). Assim de acordo com os princípios de orientação pedagógica,

> "Os programas propostos para o 1.º Ciclo implicam que o desenvolvimento da educação escolar, ao longo das idades abrangidas, constitua uma oportunidade para que os alunos realizem experiências de aprendizagem activas, significativas, diversificadas, integradas e socializadoras que garantam, efectivamente, o direito ao sucesso escolar de cada aluno". (DEB, 2004, p. 23).

"A ênfase conferida às actividades investigativas na aprendizagem da matemática tem como ponto de partida a relevância atribuída à resolução e formulação de problemas". (Amaral, 2003, p. 44). Na década de 80 surgem vários documentos, de que são exemplo, Uma Agenda para Acção (NCTM, 1980/1985) e Renovação do Currículo de Matemática (APM, 1988), que defendem a resolução de problemas (problem solving) como o centro do ensino e da aprendizagem da matemática. Estes documentos têm sido divulgados desde os anos 80, como resposta às necessidades de desencadear alterações significativas no campo da educação matemática, definindo como linha de trabalho fundamental a resolução de problemas e as investigações como elementos essenciais no ensino da Matemática em todas as idades (Cockcroft, 1982). No início dos anos 90 emergem Normas para o Currículo e Avaliação em Matemática Escolar decretadas pelo NCTM (1991).

Conforme NTCM (1991),

> "Os professores têm de criar um ambiente que encoraje as crianças e explorar, desenvolver, testar, discutir e aplicar. Têm de ouvir as crianças atentamente e guiar o desenvolvimento das suas ideias. Têm de usar, frequentemente, materiais manipuláveis em actividades que impliquem o raciocínio de forma a fomentar a aprendizagem de ideias matemáticas" (NTCM, 1991, p. 22).

De acordo com o NCTM (1993),

> "É através do uso de modelos que as crianças desenvolvem os conceitos necessários para fazer abstracções e generalizações. Actividades manuais e experiências baseadas em acção são recordadas, e são precisamente essas as necessárias para permitir aos alunos melhorar o seu nível de sofisticação geométrico" (NCTM, 1993, p. 24).

O Currículo Nacional do Ensino Básico (DEB, 2001) acrescenta duas finalidades principais em relação à matemática, proporcionar aos alunos o contacto com as ideias e métodos fundamentais da matemática que lhes permita apreciar o seu valor e a sua natureza e desenvolver a capacidade e confiança pessoal no uso da matemática para analisar e resolver situações problemáticas, para raciocinar e comunicar O Currículo Nacional acrescenta ainda que, "A matemática é usada na sociedade, de forma crescente, em ligação com as mais diversas áreas da actividade humana, mas ao mesmo tempo, a sua presença é frequentemente mais implícita que explicita" (DEB, 2001, p. 58). "A combinação adequada ao trabalho em Matemática com o trabalho noutras áreas do currículo traduz um crescimento dos alunos do ponto de vista da autonomia, responsabilidade e criatividade como na perspectiva da cooperação e solidariedade" (p. 59)

Assim, e de acordo com processos de renovação referenciados, a escola deve promover a vivência de situações estimulantes de trabalho tendo em conta os interesses e necessidades reais de cada criança, a utilização de recursos variados, as realidades vivenciadas e a circulação partilhada da informação e a criação de hábitos de entreajuda. Uma vez que as crianças são influenciadas pelo material utilizado na aprendizagem, este deve corresponder à sua necessidade de exploração, experimentação e manipulação.

O Novo Programa de Matemática do Ensino Básico (DGIDC, 2007), actualmente em vigor, começa por referir que a publicação, em 2001, do Currículo Nacional do Ensino Básico introduziu modificações curriculares importantes em relação ao Programa de

Matemática para o ensino básico datado do início dos anos noventa, em particular nas finalidades e objectivos de aprendizagem, valorizando a noção de competência matemática, e a forma como apresenta os temas matemáticos a abordar. O desenvolvimento do conhecimento sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática nos últimos quinze anos, e a necessidade de melhorar a articulação entre os programas dos três ciclos são algumas das razões que justificavam a sua revisão" (DGIDC, 2007, p. 1). Deste modo os percursos temáticos de aprendizagem que se apresentam no novo Programa de Matemática - 1.º, 2.º e 3.º Ciclos, constituem possíveis sequências para o desenvolvimento do trabalho lectivo com este novo programa.

Enfatiza o NPMEB (DGIDC,2007) que as finalidades e objectivos são comuns aos três ciclos do ensino básico e que o "ensino-aprendizagem se desenvolve em torno de *quatro eixos fundamentais* - Números e Operações, Geometria, Álgebra e Organização e Tratamento de Dados" (p. 1), coadjuvados com três *Capacidades Transversais* - Resolução de problemas, Raciocínio matemático e Comunicação, que devem igualmente estar sempre presentes no desenvolvimento do trabalho com todos os temas matemáticos do Programa (p. 3). Os Números e Operações são reestruturados tendo em vista uma maior coerência ao longo dos três ciclos. A Geometria também está presente nos três ciclos e tem como ideia central o desenvolvimento do sentido espacial dos alunos, continuando a ter o estudo das figuras geométricas bi e tridimensionais um papel importante neste tema. A Geometria encontra-se associada à Medida. Em relação à Álgebra, dá-se iniciação ao pensamento algébrico no 1º ciclo, sendo que a Organização e tratamento de dados é inerente aos três ciclos. (DGIDC, 2007, p. 7)

O tema de partida do trabalho a realizar varia de ano para ano, em cada ano alternam-se grandes blocos temáticos, devendo cada bloco integrar conceitos e representações dos blocos anteriores. Cada um dos percursos é apresentado esquematicamente sob a forma de uma sequência de tópicos e subtópicos matemáticos, distribuídos por anos de escolaridade em cada ciclo. Os *tópicos (e subtópicos)* trabalhados num dado ano devem ser retomados nos anos posteriores do mesmo ciclo e dos ciclos seguintes. O facto de um tópico, subtópico ou objectivo de aprendizagem estar *presente num dado ano*, não significa que ele não possa ser abordado em anos anteriores, através de situações que preparam o caminho para a sua posterior aprendizagem (pp. 10-13).

Os tópicos e objectivos devem ser trabalhados no âmbito do respectivo tema e devem ser apresentados de forma sistematizada e sintética, seguir uma lógica sequencial de sala de aula de modo a serem atingidos os objectivos gerais e específicos definidos para a respectiva tarefa. Em muitos casos é mesmo muito importante que essa abordagem seja feita, pelo que a planificação de um dado ano deve ter em conta não só o que o aluno já estudou em anos anteriores como o que irá estudar no futuro. As alterações nestes percursos serão de acordo com as metas estabelecidas no programa para cada ciclo, e para cada escola (p. 14).

O professor deve ter em conta que a planificação do trabalho não dispensa a apreciação do programa na sua globalidade. É fundamental ter presentes as finalidades e os objectivos gerais de aprendizagem para o ensino da Matemática no ensino básico. É impossível planificar qualquer actividade de sala de aula, ao longo dos três ciclos, sem ponderar as duas finalidades fundamentais. O professor deve promover a aquisição da informação, conhecimento e experiência em Matemática, e fomentar o desenvolvimento da capacidade de integração e mobilização em contextos diversificados e incentivar atitudes positivas face à Matemática e a capacidade de apreciar esta ciência (p. 3). Acresce ainda o facto de que "Os objectivos gerais propostos contemplam, no seu conjunto, o desenvolvimento de conhecimentos, capacidades e atitudes mas, diferentemente dos programas de 1991, não são apresentados em categorias separadas, por se considerar que deste modo se favorece uma visão integradora destes três domínios" (p. 4).

A conjugação dos objectivos e finalidades implica que os alunos devem ter conhecimento dos factos e procedimentos básicos, desenvolver a compreensão dos mesmos e o modo de os representar e utilizar, comunicar sobre Matemática, raciocinar matematicamente, resolver problemas, estabelecer as conexões entre outros conceitos e relações, ter o domínio dos procedimentos e apreciar a Matemática. É pressuposto valorizarem, deste modo, as aprendizagens relacionadas com as capacidades transversais pedras basilares deste novo programa de Matemática (DGIDC, 2007, pp. 4-6).

As indicações metodológicas referidas no programa devem igualmente ser consideradas na planificação do trabalho lectivo e respectiva concretização, em particular as que são propostas para a abordagem geral do tema ou capacidade, bem como as notas que figuram junto aos tópicos e objectivos específicos e que procuram esclarecer e proporcionar sugestões de trabalho (p. 8).

Conforme indica o Currículo Nacional o aluno deve ter diversos tipos de experiências matemáticas, resolver problemas, analisar e reflectir sobre as suas resoluções e resoluções dos colegas. Cabe ao professor ter em atenção os raciocínios dos alunos procurando que exponham as suas ideias com clareza de forma a proporcionar momentos de reflexão e crítica.

De acordo com A. Silver (1996), "as Normas do Currículo e Avaliação de Matemática Escolar (NCTM, 1989) e as Normas Profissionais para o Ensino da Matemática (NTCM, 1991) levaram a um aumento da actividade de formulação de problemas nas salas de aula (p. 140). A. Silver cita ainda que Kilpatric argumentou que" a formulação de problemas deve ser encarada não só como um objectivo de ensino, mas também como meio de ensino" (1987, p. 123). A formulação de problemas tem sido um aspecto importante do ensino da geometria do cunho investigativo, uma vez que contrariamente às abordagens por descoberta e resolução de problemas, um ensino de cunho investigativo é caracterizado pelo facto de que tanto os alunos como os professores assumem responsabilidades na formulação e resolução do problema (NCTM, 1989, p. 24).

O NPMEB (2007) define como propósito principal de ensino no tema Geometria e Medida, desenvolver nos alunos o sentido espacial, com ênfase na visualização e na compreensão de propriedades de figuras geométricas no plano e no espaço, a noção de grandeza e respectivos processos de medida, bem como a utilização destes conhecimentos e capacidades na resolução de problemas geométricos e de medida em contextos diversos (p. 20). Segundo as Normas (NTCM, 1991, p. 134) o estudo da geometria liga a exploração informal dos primeiros anos com os processos formalizados estudados mais tarde, o que não impede que o estudo da geometria seja desde logo formalizado, pelo contrário, ele deve simplesmente proporcionar oportunidades acrescidas para os alunos se envolverem em explorações mais sistemáticas. É portanto espectável que o desenvolvimento geométrico atinja maior complexidade à medida que o aluno vai adquirindo novos conhecimentos. Este pressuposto vai de encontro ao disposto no NPMEB (2007) que determina que em cada ciclo e ao longo do ensino básico, os vários temas devem ser abordados de modo interligado, retomando-se os conceitos fundamentais de forma progressivamente mais aprofundada (abordagem em espiral) (p. 10). A geometria é mais do que um conjunto de definições; consiste na descrição de relações e no raciocínio, pelo que é considerada desde há muito, como o conteúdo do currículo de matemática onde os alunos aprendem a raciocinar e a compreender a estrutura axiomática da matemática (NCTM, 2009, p. 44).

As asserções sobre o trabalho experimental realizado mundialmente com base na didáctica do Origami, para os primeiros ciclos de ensino tem incidência no campo numérico e geométrico e encaixam-se perfeitamente dentro do tema Geometria, tópicos e subtópicos do NPMEB (2007), onde se traz à colação a da articulação entre o 1º e 2º ciclos, salientando-se que no 2º ciclo o raciocínio geométrico e a visualização espacial são capacidades a aprofundar conjuntamente com o pensamento numérico, permitindo desenvolver novas estratégias na resolução de problemas. No 2º ciclo é ainda dada ênfase a um "conceito-chave", o conceito de a simetria que embora usado em diversas áreas da Matemática é na Geometria atinge maior relevância nesse ciclo, permitindo as isometrias a exploração, construção e classificação de frisos e rosáceas (pp. 37-38).

Segundo as indicações metodológicas especificas proposta para o 1º ciclo pelo NPMEB (2007) para a área da geometria, o ensino, neste ciclo, deve privilegiar a exploração, a manipulação e a experimentação, utilizando objectos do mundo real e materiais específicos, de modo a desenvolver o sentido espacial. Os alunos devem descrever e comparar sólidos geométricos e identificar figuras a eles associadas. As experiências que envolvem composição e decomposição de figuras acompanhadas de descrições e representações são igualmente importantes. O facto de o mundo que nos rodeia ser tridimensional permite inferir que o estudo da geometria nos primeiros anos parte do espaço para o plano, e os alunos devem ser capazes de interagir com o espaço que os rodeia desenvolvendo progressivamente a capacidade de raciocinarem com base em representações mentais. (DGIDC, 2007, pp. 20-21).

Segundo Maria de Lurdes Serrazina (1991), ensinar matemática utilizando materiais manipulativos foi recomendado no século XIX por Pestalozzi, e muitos outros pedagogos se lhe seguiram, entre eles, Montessori. Serrazina salienta que de acordo com o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1991) os materiais manipulativos são tão fundamentais à aprendizagem e à construção da Matemática como as experiências de Laboratório na aprendizagem da Química. "Só existe aprendizagem se os alunos estiverem envolvidos activa e fisicamente na actividade a realizar, pois eles constroem, modificam e integram ideias ao interaccionar com o mundo..." (Serrazina M. d., 1991). Serrazina acrescenta ainda que os resultados de investigação mostram que os alunos que aprendem com a ajuda de material têm melhores resultados, sendo a construção de conceitos matemáticos um processo longo que vai evoluindo do concreto para o abstracto, com o envolvimento do aluno. Segundo o NPMEB o recurso a materiais manipuláveis (estruturados e não estruturados) tem um papel importante na aprendizagem da Geometria e da Medida. Estes materiais permitem estabelecer relações e tirar conclusões, facilitando a compreensão de conceitos dos tópicos de orientação espacial, posição e localização e figuras no plano e sólidos geométricos, propriedades e classificação, interior, exterior e fronteira, composição e decomposição de figuras, linhas rectas e curvas, planificação do cubo, círculo e circunferência, noção de ângulo, rectas paralelas e perpendiculares e reflexão, comprimento, massa, capacidade e área: medida e unidade de medida, comparação e ordenação, medição, perímetro e estimação (DGIDC, 2007, pp. 21-25)

Face ao paradigma do NPMEB e aos objectivos de aprendizagem e de acordo com Serrazina, NCTM e Currículo Nacional, o Origami assume-se como um material didáctico de excelência para o ensino da Matemática especialmente na área da geometria.

No que concerne à Geometria se por um lado promove competências essenciais desiderato do Currículo Nacional, isto é, contribui para um crescimento dos alunos do ponto de vista da autonomia, responsabilidade e criatividade, uma perspectiva da cooperação e solidariedade (p. 59). Por outro lado desenvolve as competências específicas porque ao manipularem este material, os alunos desenvolvem a visualização e são capazes de representar, identificar e interpretar relações espaciais, descrever e construir figuras no plano e no espaço e de identificar propriedades que as caracterizam (p. 62). Tópicos também incluídos no novo plano de Matemática (pp. 20-25, 37,38), onde se salienta o facto de os materiais manipuláveis permitirem estabelecer relações, tirar conclusões e serem elementos facilitadores da compreensão dos conceitos.

Ainda de acordo com o currículo nacional (p. 62) e em sintonia com o novo Plano de Matemática, se nos reportarmos ao tópico Reflexão, rotação e translação é facilmente demonstrável que através da técnica de Origami podemos elaborar diversos tipos de rosáceas através aglutinação de diversas peças (units) e sequências de frisos obtêm-se pela união de dobragens fröebelianas, entre outras; formando a formando o grupo de Origami modelar plano. A noção de simetria tem de estar presente durante execução, da maioria das peças, pois existem diversas situações de dobragem baseadas em simetria.

A confecção de sólidos geométricos pela técnica de Origami permite durante a execução das peças/units estudar, rectas, ângulos, polígonos, suas propriedades e classificações; construir sólidos geométricos e estudas as suas propriedades e classificações, formando o grupo dos modulares 3D.

Por outro lado o Origami permite aos alunos realizar estimativas e medições, e relacionar diferentes unidades de medida; compreender o que é a unidade de medida e o processo de medir, as noções de comprimento, capacidade e área e ainda determinar o perímetro e área de figuras, e torna emergente serem capazes de resolver problemas, raciocinar e comunicar no âmbito deste tema.

De acordo com as competências específicas do currículo de Números e Cálculo e ao tema de Números e Operações do novo Plano de Matemática o Origami permite desenvolver o estudo dos números racionais em particular na representação decimal e a sua relação com a representação fraccionária, explorar situações que permitem o desenvolvimento e compreensão dos conceitos de razão e proporção.

2.17 Exercícios, Problemas, Tarefas Exploratòrias,Investigações

A actividade matemática envolve, para além dos numerosos conceitos, inerentes ao ensino-aprendizagem, inúmeros processos. De acordo com (Ponte & Serrazina, 2000, p. 39) podemos agrupar esses processos em quatro grupos: representar, relacionar e operar; resolver problemas e comunicar.

Da análise das características de cada grupo podemos concluir que existe relação entre o Origami e cada um deles. Senão vejamos:

- Representar inclui compreender e usar símbolos, convenções, gráficos, entre outros.
- Relacionar e operar inclui calcular e deduzir, relacionar ideias
- Resolver problemas e investigar situações matemáticas e extra matemáticas
- Comunicar recorrendo a diversas linguagens e suportes.

No "*Ensino Básico*" é importante os alunos familiarizarem-se com gráficos e diagramas. Estes apresentam-se normalmente de difícil interpretação uma vez que o seu uso não é muito frequente nesta faixa etária. Não menos importante, no 1º ciclo é saber classificar e ordenar objectos, segundo as suas propriedades. Estas "actividades recorrentes" de acordo com o programa de matemática "deverão decorrer da observação e manipulação concretas e de experiências de exploração e interacção e estar presentes com frequência ao longo dos quatro anos deste ciclo, embora variando o grau de complexidade" (M.E., 1990, p. 131).

Ora, no Origami, os alunos ao manipularem o papel e analisarem o diagrama à medida que vão evoluindo na dobragem são constantemente confrontados com a comparação dos objectos das diferentes fases do diagrama. Nesta técnica de dobragem baseada em símbolos e diagramas é de suma importância saber ler e interpretar passo a passo as instruções para conseguir realizar, com êxito a tarefa proposta. Com base no que foi referido poderemos afirmar que esta técnica se encaixa perfeitamente dentro das características de representar, relacionar e operar.

Antes de relacionar o Origami com os processos matemáticos de resolver problemas iremos definir o que é problema, exercício, tarefa exploratória e investigação.

Segundo Ponte & Serrazina, (2000) "uma questão é um problema se ele não tiver meio de encontrar uma solução num único passo. Se o aluno tiver uma fonte de obter rapidamente uma solução, não estará perante um problema mas sim um exercício" (p. 52). Assim sendo, a questão será um problema ou um exercício consoante os conhecimentos prévios do aluno e consequentemente do ano escolar em que se encontra.

Ainda de acordo com Ponte & Serrazina, (2000), "investigar é um outro processo característico da actividade matemática, e tal como um problema, uma investigação começa com uma questão. A diferença está que num problema a questão está bem definida (o seu enunciado é normalmente claro e preciso), enquanto numa investigação a questão começa por ser algo imprecisa" (p. 56). O primeiro passo será tornar a questão precisa, recorrendo-se para isso a uma exploração prévia da situação. Partindo da uma mesma situação, diferentes alunos formulam diferentes questões e todos podem obter resultados com interesse. Segundo o NCTM (1998, p. 191) "...o trabalho envolve a realização de conjecturas, o desenvolvimento de argumentos matemáticos sobre essas conjecturas, e a tentativa de verificar ou rejeitar o argumento". Sendo que o partilhar das ideias no grupo, permite uma interacção entre todos e promove a comunicação e performance de cada um.

No Origami há necessidade de rigor e preciosismo logo na primeira dobra pois dela depende o sucesso da actividade. Partindo todos da mesma figura geométrica de papel os alunos chegaram a Origamis semelhantes, mas dificilmente iguais. Durante o processo discutem com o grupo passo a passo, o que privilegia a comunicação, uma das competências essenciais ao novo programa de Matemática.

Segundo Ponte & Serrazina (2000, pp. 112,113) existem dois conceitos importantes na Didáctica da Matemática: tarefa e actividade. "O aluno aprende em conseqência da actividade que desenvolve e da reflexão que sobre ela faz". A actividade respeita ao que o aluno faz num determinado contexto, sendo que o objectivo da mesma é precisamente a tarefa. Cada tarefa proposta pelo professor tem de ser interpretada pelos alunos e pode dar origem a actividades diversificadas, podendo mesmo, em alguns casos, haver alunos que não executem qualquer actividade. O ambiente em sala de aula e a predisposição do aluno contribuem significativamente para o sucesso da actividade e da sua aprendizagens."Uma tarefa pode remeter para diversas estruturas ou conceitos matemáticos. Mas em rigor estes não se encontram na tarefa", estão subjacentes."

As tarefas matemáticas: problemas, investigações, exercícios, projectos, construções, jogos, apresentações orais, etc. - constituem o ponto de partida para a actividade matemática.

De acordo com o supracitado podemos inferir que se uma tarefa com Origami é um magnífico material didáctico uma vez que parte de uma questão que tem de ser interpretada pelo aluno, é necessário reconhecer símbolos e analisar diagramas, variando o grau de complexidade à medida que avançamos, promove a investigação, envolve inúmeros conceitos, permite actividades diversificadas, conduz a diversas soluções e contribui para incrementar o espírito de equipa e melhorar a comunicação matemática.

2.18 O trabalho Investigativo na Sala de Aula

A ênfase dada ao trabalho investigativo na aula de matemática implica a valorização do pensamento que está subjacente aos processos investigativos. Ao longo dos anos, foram sendo publicados estudos e reflexões sobre investigações na sala de aula, relativos à aprendizagem matemática. As mudanças que têm vindo a ocorrer no ensino da Matemática exigem do professor uma adaptação a novos conteúdos, novas metodologias e novos materiais didácticos. Ao propor aos alunos uma situação problemática, uma exploração ou uma investigação, o professor tem de pensar, como introduzir esse assunto, como promover o trabalho dos alunos, que feedback dar aos alunos durante o trabalho e como concluir a actividade.

Partindo de casos concretos, os alunos exploram conceitos e propriedades, investigam relações, conjecturam, experimentam e estabelecem conclusões.

Ambrósio (1989, pp. 15-19) acrescenta que "as diversas linhas metodológicas enfatizam a construção de conceitos matemáticos pelos alunos, onde eles se tornam activos na sua aprendizagem e deixam de acreditar que a aprendizagem da matemática possa ocorrer como consequência da absorção de conceitos que lhes são passados por um simples processo de transmissão de informação". Afirma ainda que hoje a resolução de problemas é encarada como uma metodologia de ensino em que o professor propõe ao aluno situações problema caracterizadas por investigação e exploração de novos conceitos.

As novas linhas metodológicas mencionam os termos *"tarefa investigativa"* e *"actividade investigativa"*, qual será o mais correcto? "A distinção entre o vocábulo tarefa e actividade é relevante quando se fala de aprendizagem da Matemática. A palavra actividade é utilizada entre os professores tanto para as propostas que são apresentadas aos alunos como para o desenvolvimento destas pelos alunos. É corrente afirmar-se que os manuais propõem actividades" (Amaral, 2003, p. 50). A palavra actividade "é extremamente globalizante e utilizado com variados sentidos e por vezes sem significado objectivo" Mendes (Mendes, 2001, pp. 36-39)

Ernest (1996a), citado por Ponte (1994), defende que "uma actividade de investigação é explorar um terreno desconhecido, mais do que uma viagem com um objectivo específico, mas também é uma situação aberta. Uma actividade de investigação utiliza vários processos matemáticos tais como: explorar uma situação aberta, procurar regularidades, fazer e testar conjecturas, argumentar e comunicar resultados, generalizar novos conhecimentos matemáticos. Caracteriza-se também por uma mudança no "poder" do professor que deixa de ter controlo sobre as respostas, sobre os métodos aplicados pelos alunos. Existe assim uma maior autonomia e auto-regulação do aluno" (Ernest, 1996, p. 31).

A investigação também tem questionado progressivamente que existam pré-requisitos nas aquisições de competências e hoje a tónica incide no uso das mesmas mais que no domínio progressivo de rotinas e técnicas. Os processos de aprendizagem, entendidos como um processo de construção activa, são actualmente percebidos como envolvendo três aspectos inseparáveis: a) conhecimento, b) capacidade e c) atitudes. Isto pressupondo mecanismos em que as crianças são estimuladas a expressar e usar o seu pensamento e a exercer o seu juízo crítico sobre as tarefas realizadas.

Nas tendências actuais do ensino, a competência geométrica que se pretende que os alunos desenvolvam está intimamente relacionada com a construção de figuras geométricas, a experimentação e a observação (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999; Brown, Jones & Taylor, 2003; NCTM, 2000; DEB, 2001; QCA, 2004) citado por (Candeias & Ponte).

De acordo com Paulo Abrantes (1999), "em geometria, uma grande variedade de objectos e situações, trabalha-se no plano ou no espaço (por exemplo: figuras planas, poliedros), e podem descobrir-se e explorar-se um grande número de propriedades e conexões, proporcionando uma estreita relação entre situações da realidade concreta e situações matemáticas. Por outro lado a geometria permite estudar vários tipos de problemas: visualização e representação, construção de lugares geométricos, envolvendo transformações geométricas, em torno das concepções de forma e de dimensão, implicando conexões com outros domínios da Matemática, como os números, a álgebra, o cálculo combinatório, a análise; recorrendo a processos de "organização local" da Matemática, nomeadamente de classificação e hierarquização a partir de determinadas definições e propriedades". "As actividades investigativas em geometria conduzem à necessidade de se trabalhar diversos aspectos essenciais da natureza da própria Matemática. Formular e resolver problemas, fazer conjecturas, testá-las, validá-las ou refutá-las, procurar generalizações, comunicar descobertas e justificações, tornam-se processos naturais. Paralelamente, emergem oportunidades para se discutir o papel das definições e para se examinar as consequências de se adoptar uma ou outra definição, assim como para se compreender a natureza e o valor da demonstração em Matemática. A geometria oferece incalculáveis ocasiões de explorações e investigações que podem fazer-se em todos os níveis de escolaridade e a diversos níveis de desenvolvimento" (Abrantes P. , 1999, pp. 1-11).

Segundo Menezes (2000) "Considerando a estreita dependência entre os processos de estruturação do pensamento e da linguagem, há que promover actividades que estimulem e impliquem a comunicação oral e escrita, levando o aluno a verbalizar os seus raciocínios, explicando, discutindo, confrontando processos e resultados" (Ministério da Educação, 1991, p. 16, NCTM, 1991)

No actual currículo, segundo o NCTM (1994), é proposto aos alunos o desenvolvimento da capacidade de investigar em Matemática, devendo esta competência ser desenvolvida ao longo da escolaridade básica. As boas propostas de actividades são aquelas que não separam o pensamento matemático dos conceitos matemáticos ou aptidões, que despertam a curiosidade dos alunos e que os convidam a especular e a progredir com as suas intuições (p. 27).

O conhecimento, as capacidades e atitudes a desenvolver ao longo das actividades de investigação devem prever a predisposição e a aptidão para raciocinar matematicamente, isto é, para explorar as situações problemáticas, procurar regularidades, fazer e testar conjecturas, formular generalizações, pensar de maneira lógica. O gosto e a confiança pessoal em desenvolver actividades intelectuais que envolvam raciocínio matemático e a concepção e validação de uma afirmação estão relacionados com a consistência da argumentação lógica e não com alguma autoridade exterior. Deste modo a aptidão para discutir com outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada à situação (Abrantes, Serrazina, & Oliveira, 1999).

Ao seleccionar ou criar uma tarefa, o investigador deve definir bem os objectivos a atingir e ter em atenção o nível etário e o desenvolvimento matemático das crianças. A familiaridade ou não com este tipo de actividades é um factor muito importante (Oliveira, Segurado & Ponte, 1999 b).

Assim a escolha e selecção de tarefas foram muito ponderadas e resultou de uma pesquisa bastante minuciosa com base na bibliografia citada neste trabalho. Foi opção propor tarefas que de alguma forma permitissem abordagens transversais do currículo, não aparecendo totalmente isoladas de outras áreas de aprendizagem já que o regime de monodocência e a gestão integrada dos tempos apontam para que a gestão do currículo não ocorra com hiatos e quebras significativas.

De um grande conjunto de tarefas, construídas a partir de testemunhos de experiências em outros países e da adaptação de tarefas propostas para outros níveis de escolaridade, foram sendo progressivamente seleccionadas diversas tarefas. Estas sofreram adaptações ao longo do período de recolha da informação, e foram sendo elaboração novas tarefas de modo a corresponderem melhor às aprendizagens propostas no novo plano.

Segundo Covadonga et al. (2006, pp. 27-29) "o Origami permite utilizar simultaneamente a mão, os olhos e o cérebro e nesta conjugação está a sua importância no desenvolvimento da aprendizagem". A papiroflexia permite aplicar o modelo pedagógico preconizado pelo casal holandês Van Hiele, modelo conhecido em todo o mundo desde 1974. Este modelo propõe cinco etapas de aprendizagem, que constituem um esquema organizacional do ensino que pode ser facilmente utilizada no Origami na sala de aula; informação, orientação dirigida, explicação, orientação livre e integração. Na infância a criança tem uma inteligência manipulativa e imaginativa. Para resolver um problema recorre a orientações externas passando a uma inteligência prática e depois de conhecer as variantes do problema tenta uma nova variante mentalmente. Da inteligência imaginativa passa à inteligência esquemática e a manifestação dessa inteligência esquemática é demonstrada pela rapidez com que capta as imagens. As operações mentais apoiadas na imagem permitem ao aluno conhecer as relações entre objectos. Ainda segundo Covadonga et al (2006, p. 36), "muito se pode aprender com a explicação oral do professor" todavia o aluno nem sempre assimila bem a relação entre partes e o todo porque não compreende a comunicação verbal utilizada. Se por outro lado o aluno tem um objecto que se desmonta, assimila o conceito das partes e do todo facilmente. Estes conceitos podem ser concretizados usando uma simples folha de papel, que se divide em partes e que se volta a juntar. O aluno percebe essa relação porque manipula o objecto, mas nem sempre é possível representar de forma visual. Só é possível resolver os problemas quando o aluno adquire pensamento lógico e abstracto. Este pensamento é fundamental para a interpretação dos esquemas de Origami, por isso é fundamental que haja uma aprendizagem e uma boa interpretação gráfica antes de começar a utilizar o Origami como material didáctico. Refere ainda Covadonga que o Origami para além de ser um exemplo de "aprendizagem esquemática", porque ensina as crianças a seguir instruções, ajuda a desenvolver a sociabilidade e o trabalho em equipa

O conjunto das actividades apresentadas vai de encontro às finalidades e objectivos do NPMEB (2007), que conforme referido anteriormente dá grande enfoque, entre outros aos temas: *Geometria e Medida* e *Números e operações*. É fácil inferir que o domínio de conceitos básicos de geometria plana e espacial é essencial para a compreensão de inúmeras aplicações de tais conceitos na vida quotidiana da sociedade, promovendo a descoberta e a aprendizagem da realidade. Sabe-se, no entanto que "a abordagem dos conteúdos de geometria na sala de aula e nos livros didácticos, geralmente, restringem-se à memorização de definições e exercícios de aplicação de fórmulas [...] ". (Almeida et al, 2006, p. 1). Tem vindo a comprovar-se que o trabalho com diversos materiais didácticos facilita a compreensão dos conceitos por parte dos alunos, já que "a acção do indivíduo sobre o objecto é básica para a aprendizagem." (Lorenzato, 2006, p. 4)

As tarefas que a seguir se apresentam dizem respeito a aulas do 1º ciclo do Ensino Básico e mostram como as investigações em geometria podem tornar aspectos centrais do pensamento matemático no foco das actividades de aprendizagem e sala de aula.

Das conexões das diversas opiniões dos autores citados concluímos que o Origami promove o espírito de equipa e é um exemplo de aprendizagem esquemática. O sucesso da tarefa de Origami depende da conjugação entre a precisão das instruções e os desenhos explicativos, tendo em conta as diversas técnicas, diagramas (orikata) e uma nomenclatura (símbolos e bases), internacionalmente aceite. Este material didáctico é considerado um importante auxiliar no ensino básico da geometria porque além de desenvolver a capacidade motora e criativa do indivíduo Praticar Origami significa concentrar-se na forma a obter, ser rigoroso e preciso na produção da dobra, memorizar as bases rudimentares através das quais se pode executar uma infinidade de figuras e seguir uma progressão lógica, coordenada pelos movimentos das mãos, de modo a obter um produto final o mais perfeito possível. A escolha das tarefas incidiu fundamentalmente no estudo dos quadriláteros e permitiu formular problemas matemáticos interessantes em que nunca tinha pensado. As minhas perspectivas didácticas têm-se vindo a alargar ao analisar o raciocínio geométrico das crianças e o poder das actividades de geometria. Pretendendo aulas dinâmicas e participativas considero o Origami um excelente material didáctico manipulável para o ensino da geometria dado que qualquer actividade com Origami permite explorar simultaneamente três vertentes: lúdica, educativa e matemática (Blanco Garcia et al, 2006). Nestas actividades os alunos, ao manusear um simples pedaço de papel, material de aquisição e manipulação fácil, podem aprender diversos conceitos básicos de geometria, uma vez que o Origami permite não só manipular o material como a "visualização" do próprio conceito, uma vez que o processo de confecção de dobragens compreende uma análise sequencial de passos, com uma ordem pré-estabelecida. O Origami inicialmente é construído observando a sequência de passos realizados pelo professor o que leva os alunos a construírem os seus conhecimentos a partir de um mediador. Numa fase mais avançada são distribuídos diagramas e os alunos progridem, isoladamente, cada um utilizando o seu ritmo de trabalho.

De acordo com o novo Programa de Matemática e dentro do tema Geometria e Medida, as actividades estão relacionadas com os tópicos, *Regularidades* e *números racionais não negativos, Orientação espacial, Figuras no plano e sólidos Geométricos e Comprimento, massa, capacidade e área.* Dentro do primeiro tópico salienta-se conceito de sequência, fracções, razões e número decimal, posição e localização e dentro do segundo tópico conceito de linha recta, ângulo, figura geométrica; composição e decomposição de figuras, relações métrica, área e perímetro; reflexão e simetria; exploração de padrões

As tarefas geralmente trabalhadas em grupo propiciam o incentivo à partilha e o trabalho em equipa. Para além disso e ainda de acordo com o novo programa as tarefas apresentadas foram concebidas com o propósito de promover a capacidade de raciocinar matematicamente, de comunicar oralmente e por escrito, não esquecendo os itens das orientações metodológicas propostas pelo novo Programa de Matemática.

CAPITULO III - METODOLOGIA

3 METODOLOGIA DE UM ESTUDO TEÓRICO

3. 1 Estudo Teórico Bibliográfico- Documental

Este estudo foi desenvolvido com base no método dedutivo, utilizando-se a pesquisa *bibliográfico-documental*. O critério de triagem das tarefas teve em conta o ano de escolaridade, a faixa etária e a valorização do pensamento investigativo, a resolução de problemas e a comunicação matemática.

Dentro do *referencial teórico* analisado acerca desta investigação, foram relevantes e indispensáveis para a elaboração deste trabalho científico a pesquisa bibliográfica, o recurso a diversos tipos de documentação e a minha prática pedagógica ao longo de duas décadas.

Assim, foram utilizadas *fontes primárias*, trabalhos originais escritos por um investigador ou teórico, que contêm toda a informação sobre determinada teoria ou investigação (educação/Origami), sendo portanto muito detalhada e técnica. Estas informações dizem respeito a informação por mim recolhida, estudos empíricos publicados em revistas científicas, monografias, relatórios de investigação e dissertações, e ainda informação obtida em primeira mão, através de diferentes técnicas de pesquisa, observação participante, documentos de acervo público e relatórios...Recorreu-se também às *fontes secundárias*, síntese da literatura publicada quer teórica quer empírica, ou seja à informação já existente mas recolhida por outros investigadores, ou obtida através de trabalhos de pesquisa de outros investigadores e publicado em enciclopédias e revista técnicas com base numa síntese de trabalhos originais, incluindo manuais com diversas fontes primárias. A literatura das fontes primárias e das fontes secundárias constitui as referências bibliográficas desta pesquisa.

Quando trazemos à colação a palavra *fonte*, consideramos que se trata da origem de nossa observação: pode estar numa matéria de jornal ou num periódico; também pode estar numa obra de referência, como numa enciclopédia ou dicionário. Qualquer cientista pode observar factos em trabalhos científicos de outrém, e preparar um estudo com novo enfoque a partir de uma fonte secundária. O mais importante é identificar fontes fidedignas, confiáveis, de autoridades na área de conhecimento em que se vai estudar.

Apraz dizer que a diferença fundamental entre fonte primária e secundária consiste em que as fontes primárias são constituídas de textos originais, com informações de primeira mão; e as fontes secundárias constituem com base na literatura a respeito de fontes primárias, isto é, de obras que interpretam e analisam fontes primárias.

Em súmula, a questão vai além da identificação da fonte primária ou secundária para ser adequada ou não ao nível do trabalho científico. Ressalva-se que no trabalho académico as enciclopédias não constituem amparo bibliográfico, no entanto podem ser consultadas, evidentemente, numa abordagem preliminar, genérica do assunto, mas nunca como apoio exclusivo.

Neste sentido foram analisados diversos livros, dissertações e monografias sobre os temas: educação, educação matemática, e Origami relacionados com a matemática e educação, nomeadamente na área da Geometria, bem como artigos em publicações científicos relacionados com estes temas. De posse de todos estes elementos, procurei articular os diversos temas e as suas conexões.

Considero que, esta dissertação teórica baseou-se majoritariamente em documentos com bibliografia referencial, contudo nem sempre as fontes se encontram, bem referenciadas. O recurso à internet permitiu um amplo leque de informação, mas nalguns casos sem referência bibliográfica completa.

Da articulação entre autores de referência, Currículo Nacional, Programa de Matemática do Ensino Básico e Normas do National Councilof Teachers of Mathematics inferiu-se as conclusões didácticas no que concerne à Matemática.

Por outro lado a pesquisa efectuada ao longo de duas décadas permitiu seleccionar, alguns livros com actividades de Origami para o Ensino Básico. São disso exemplo, Baicker (*Origami Math*), Pearl (*Math in Motion),* Betsy Franco (*Unfolding Mathematics with Unit Origami),*Rego, Rego e Junior (*A Geometria do Origami*, e Imenes (Vivendo a Matemática).

3. 2 O Porquê das Tarefas e da sua Ordem.

A escolha das tarefas foi feita tendo em consideração o programa de Matemática para o Ensino Básico de escolaridade (DGIDC,2007). A ordem em que as tarefas são apresentadas tem uma razão especial, aprender ou relembrar conceitos que, explicita ou implicitamente, estivessem contidos nas tarefas seguintes). Na elaboração das tarefas foi tido em linha de conta o que é referido nas Normas para o Currículo e a Avaliação (NCTM, 1989,1991,1993,2009) e no Currículo Nacional do Ensino Básico (M.E, 2001) relativamente a normas, conteúdos e competências.

Por exemplo Baicker, refere a relação de cada actividade com as normas standard do NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) de Números e Operações, Algebra e Geometria e Medida. Todavia em relação a Pearl, Imenes e Rego e Rego & Junior não se verifica essa preocupação.

Nalgumas obras estudadas as actividades são apresentadas de uma maneira mais sintética e esquematizada, quando se destinam a um público já familiarizado com o Origami e a leitura do diagrama não constitui qualquer problema para professores e alunos. Na maioria dos casos há uma dualidade de informação permitindo aos alunos e professores ainda não acostumados com esta técnica, poderem passo a passo progredir na execução da tarefa de uma forma mais confiante e participativa. Na panóplia de actividades para o ensino básico pareceu-me pertinente associar o "texto corrido"aos diagramas, partindo do pressuposto que os utilizadores se encontram numa fase de iniciação a esta técnica.

Conforme já referimos este trabalho é teórico, as propostas apresentadas, no capítulo "Propostas de tarefas", foram testadas por diversos cientistas e matemáticos, que corroboraram as potencialidades do Origami, como material didáctico; algumas foram reestruturadas, reformuladas e adaptadas de modo a haver uma conexão entre as mesmas e o CN, NPMEB e NTCM, outras surgiram da conjugação desta análise com a minha prática pedagógica.

CAPITULO IV - PROPOSTAS DE TAREFAS

4 TAREFAS PARA ALUNOS DO ENSINO BÁSICO

A Primeira aula

Segundo Betsy Franco (1999, p. 4) antes de iniciar actividades com Origami, na sala de aula, o professor deverá planear uma primeira aula com os seguintes objectivos:

- Apresentar aos estudantes aspectos relevantes da Historia do Origami
- Dialogar sobre os aspectos tradicionais do Origami
- Fazer uma conexão entre puzzles e Origamis (por ex. Origami modular)
- Reflectir sobre a importância da paciência, perseverança e precisão

Através de dobragens efectuadas numa folha de papel os alunos têm contacto com os diferentes conceitos de geometria a uma, duas ou três dimensões. O Origami permite manipular o material, a "visualização" do próprio conceito e o uso de vocabulário matemático em contexto "... there are innumerable mathematical skills and concepts related to Origami" (Franco, 1999).

Rego, Rego, & Junior (2004) corrobora Franco e afirma que o uso de termos geométricos correctos deve ser estimulado em sala de aula quando o aluno trabalha em equipa ou elabora relatórios, e acrescenta "se o professor os utilizar naturalmente os alunos não terão dificuldade em aprender a usá-los correctamente" (Rego, Rego, & Junior, 2004, p. 39).

Aytüre-Scheelel considera que numa breve abordagem o professor deve falar sobre os requisitos essenciais para conseguir uma tarefa com êxito. Basicamente é preciso muita concentração e paciência para de um simples quadrado de papel conseguir um Origami perfeito. Além disso devem ser cumpridas seis regras básicas. Para isso deve escolher a cor e a textura e definir o tamanho do papel de acordo com o Origami a elaborar; efectuar as dobragens base e divertir-se com as diferentes figuras obtidas a partir da mesma base. Além disso deve ter muito rigor nas dobragens; quanto mais precisão melhor será o resultado; trabalhar sempre o papel sobre uma superfície dura e lisa e usar o polegar para a marca ser mais evidente, só assim as dobras seguintes serão mais fáceis de realizar. Deve verificar-se o número de dobragens a efectuar e interpretar o diagrama, cuidadosamente, passo a passo. Se não conseguir realizar o modelo voltar ao inicio quantas vezes necessário (Aytüre-Scheelel, 1995, p. 11).

Actividade Diagnóstica

Como sugestão de actividade diagnóstica sobre Origami, na sala de aula, direi que o professor pode começar por distribuir diversas folhas de papel aos alunos e tendo em vista a exploração da folha papel, poderá colocar uma primeira questão:

- o que significa para vocês uma folha de papel?

Alguns alunos dirão simplesmente: uma folha de papel para escrever. Outros irão constatar que há folhas de medidas e formas diferentes. Outros realçarão que há folhas com textura e espessura diferentes. Este "jogo" de observação poderá permitir explorar diferentes conteúdos curriculares.

Finalmente o professor poderá questionar:

- sabendo que não é possível utilizar lápis, cola, régua ou tesoura o que eu posso criar com a folha de papel? Tentem dar-lhe uma forma...

Deixar que os alunos possam dar largas à sua imaginação e criatividade.

Numa primeira abordagem à construção de Origami, o professor poderá convidar os alunos a construir Origamis/dobragens que saibam, sem contudo referir qualquer interligação à matemática. Todos devem construir livremente as suas dobragens, uns simplesmente efectuarão dobras aleatórias procurando obter uma forma, outros baseados nos seus conhecimentos prévios, irão construir aviões, barcos, chapéus, envelopes, caixas e/ou quantos-queres.

Tarefa 1 - Como Obter um Quadrado a Partir de um Rectângulo de Papel

Quando propomos a um aluno para desenhar um rectângulo ele poderá questionar se é grande ou pequeno, se é largo ou estreito. No entanto quando pedimos para desenhar um quadrado se ele nos perguntar se é largo ou estreito ficaremos a saber que ele não sabe o que é um quadrado. O professor deverá conduzir a discussão levando os alunos a deduzir que os quadrados podem ser grandes ou pequenos mas não podem ser largos ou estreitos e questionará: "Sabem onde está a diferença"?

Os alunos devem observar rectângulos e quadrados e elaborar algumas conjecturas antes de responderem a questões como, "Num quadrado a proporção entre os seus lados é sempre igual a 1?"; "Nos rectângulos pode haver diferentes proporções entre os seus lados?", ou ainda, "Será que dizer forma quadrada é dizer muito, e dizer forma rectangular é dizer menos?"

Rego, Rego, & Junior (2004, p. 43) apresenta esta actividade como a primeira das actividades de Origami didáctico e refere que "é interessante verificar as estratégias desenvolvidas pelos alunos antes de apresentar qualquer solução". Pearl (1997, p. 56) por sua vez sugere esta actividade para fazer a ponte entre as actividades com rectângulos e as actividades com quadrados. Tendo em conta o novo plano de matemática que dá grande relevo ao tópico Figuras no plano e sólidos geométricos parece pertinente ser esta a primeira actividade.

Tema: Geometria

Tópico: Figuras no plano e sólidos geométricos (subtópicos: Propriedades e classificações, noção de ângulo, rectas paralelas)

Termos geométricos: largura, comprimento, rectas, quadrilátero, quadrado, rectângulo, triângulo, vértice, ângulo, diagonal...

Objectivos: trabalhar com as definições de rectângulo e quadrado - diferenças e semelhanças entre eles.

Materiais: folhas de papel rectangular ou folhas A4

Questão: Como podemos obter um quadrado a partir de uma folha de papel rectangular, utilizando apenas uma tesoura?

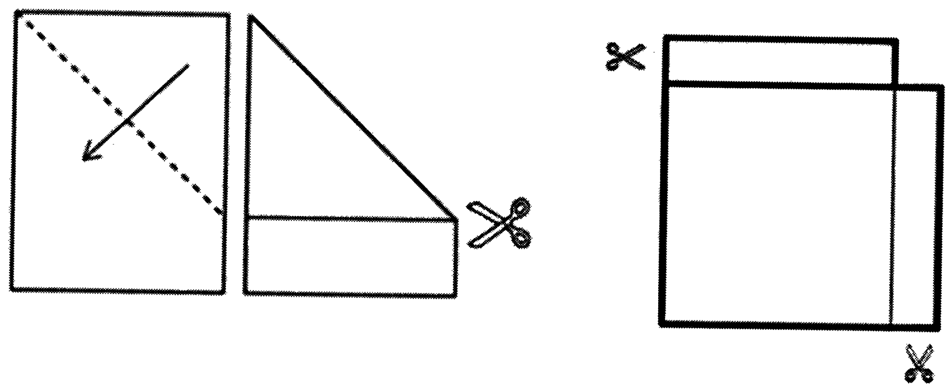


Figura 4-1 - Quadrado obtido a partir de rectângulo

Procedimento: Para esta, tarefa distribuir folhas de papel rectangular ou folhas A4 pelos alunos. Numa primeira fase, apresentar o *1º método*. Pedir aos alunos para, a partir de um dos vértices da folha A4, dobrarem o lado menor sobre o lado maior fazendo-os coincidir e vincarem a dobra. Dar algum tempo aos alunos e verificar as estratégias desenvolvidas antes de apresentar a solução. Haverá alunos que não conseguem efectuar a dobra desde o vértice não traçando assim a bissectriz do ângulo recto, mas haverá alguns que conseguem executar a tarefa com o máximo de rigor. De seguida pedir para cortarem a parte sobrante do triângulo, ou seja o rectângulo excedente e posteriormente desdobrarem o triângulo para obter um quadrado. Por fim questionar qual o nome da dobra marcada no quadrado.

Um outro processo, também de fácil execução, baseia-se na sobreposição de duas folhas de pape, neste caso não existe qualquer marca no papel. O professor deve distribuir duas folhas de papel, a cada aluno. Depois deve pedir aos alunos para sobreporem as duas folhas rectangulares iguais colocando uma na vertical outra na horizontal. Finalmente pede para cortarem as partes excedentes da sobreposição. O professor deve verificar as estratégias desenvolvidas pelos alunos antes de apresentar qualquer solução.

Tarefa 1 A - Solução de Gadi Vishne (1), para Rectângulo A4

Visnhe, grande entusiasta do Origami, apresenta-nos soluções possíveis para obter um quadrado, base mestra do Origami, sem deixar qualquer marca inicial (Vishne). Esta é sem dúvida uma maneira curiosa para obter um quadrado sem qualquer marca a partir de rectângulo de proporção (1:√2) (Vishne).

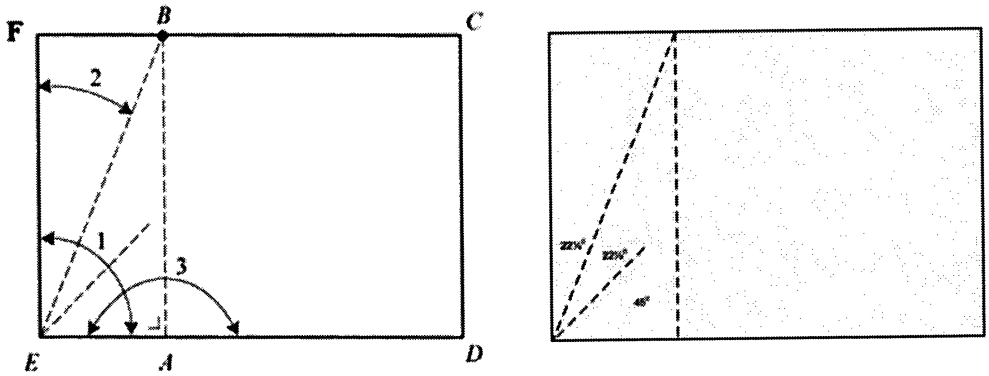


Figura 4-2 - Quadrado obtido a partir de rectângulo sem deixar marca

Procedimento: Distribuir as folhas de papel rectangular A4 pelos alunos. Para variar a metodologia da dobragem a explicação através de powerpoint utilizando slides consecutivos pode ser uma boa opção. Outra forma será fornecer uma ficha de trabalho com o esquema do Origami e deixar que os alunos o façam individualmente. O professor deverá circular pela sala questionando os diferentes grupos. Em qualquer dos casos as instruções devem ser cuidadosamente efectuadas e passo a passo. Começar por identificar o rectângulo como [FCDE]. Pedir aos alunos para marcar uma dobra a 45 graus no vértice inferior esquerdo do rectângulo (bissectriz do ângulo), que identificámos com a letra E. No entanto, o professor deve frisar que devem apenas marcar parte da dobra, como mostra o diagrama. De seguida deve pedir aos alunos para marcar uma dobra de forma a bissectar o ângulo de 45 graus realizado em (1), fazendo coincidir o lado FE sobre o vinco deixado pela primeira dobra. O ponto onde a dobra (2) intersecta o lado superior do rectângulo deve ser identificado com a letra B. Depois devem fazer deslizar respectivamente os vértices F e E, ao longo do lado superior e inferior do rectângulo de modo dobrar uma recta paralela a FE e que passa por B. Ao ponto de encontro da recta obtida com o lado inferior do rectângulo devem dar a designação de A. Depois de todos terem terminado a professor questionará os alunos: o quadrilátero [ABCD] é um quadrado? O desafio final é provar de forma simples que obtiveram um quadrado.

Para os alunos do primeiro ciclo, a professor pedirá para recortarem pela recta AB. De seguida deve solicitar para dobrarem ao meio na vertical e na diagonal para confirmarem que obtiveram um quadrado dado que tem quatro ângulos rectos e os lados todos iguais.

Para os alunos do 2º ciclo pode solicitar-se que utilizem os seus conhecimentos e tentem demonstrar matematicamente que o quadrilátero [ABCD] é um quadrado.

Tendo em conta a Solução de Gadi Vishne (1) apresentada em www.origadi.com, esta tarefa pode ser desenvolvida com o objectivo de explorar o conceito de ângulo e/ou os diversos tipos de ângulo.

Tarefa 1 B - Solução de Gadi Vishne (2), para Qualquer Rectângulo

Depois desta primeira tarefa baseada na solução de Gadi Vishne pode questionar-se os alunos: "Será possível a partir de qualquer rectângulo obter um quadrado sem deixar marca?"

Uma boa tarefa investigativa é dar diversos rectângulos e deixar que eles tirem as suas conclusões.

Posteriormente, o professor pode apresentar a solução de Gadi Vishne para obter um quadrado a partir de qualquer rectângulo (Vishne). Diagrama apresentado na página seguinte (figura 4-3).

Uncreased square out of random rectangle

Gadi Vishne © 2008

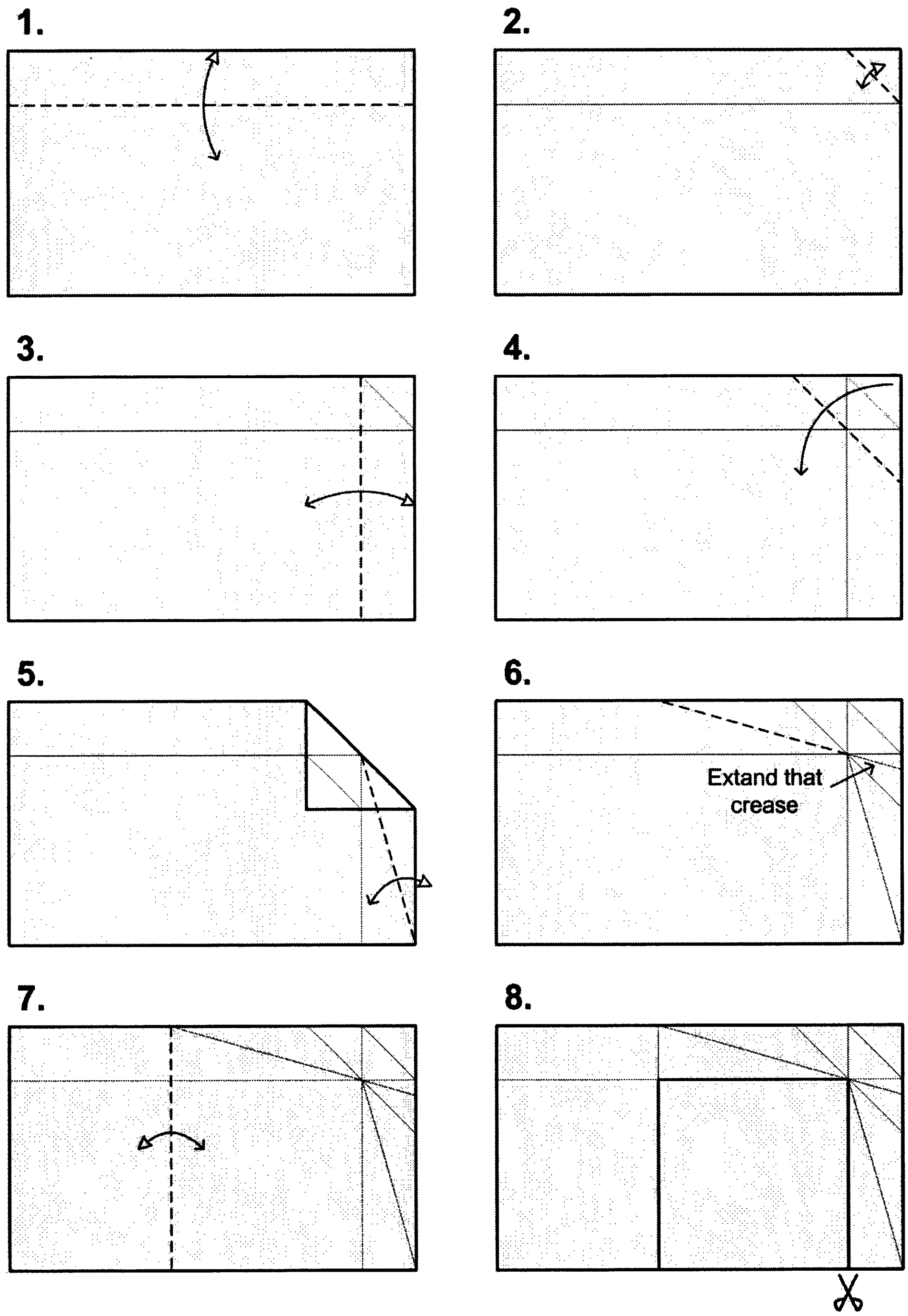


Figura 4-3 - Quadrado sem marcas obtido a partir de um rectângulo

Tarefa 2 - Utilizando um Quadrado Dobrar Ângulo Agudo, Recto e Obtuso

Depois de obter o quadrado segundo a solução de Gadi Vishne (1), parece interessante para consolidar o conceito de ângulo, esta tarefa que foi baseada em Gênova (1991, p. 16), "Como dobrar um ângulo", e adaptada para o contexto de sala de aula.

Tema: Geometria

Tópico: Figuras no plano e sólidos geométricos (subtópicos: Propriedades e classificações, noção de ângulo, rectas paralelas, rectas perpendiculares)

Termos geométricos: largura, comprimento, rectas, quadrilátero, quadrado, rectângulo, triângulo, trapézio, vértice, ângulo, diagonal...

Objectivos: trabalhar com a definição e os diversos tipos de ângulos

Materiais: quadrado de papel

Questão: Como podemos dobrar os diversos tipos de ângulos a partir um quadrado de papel?

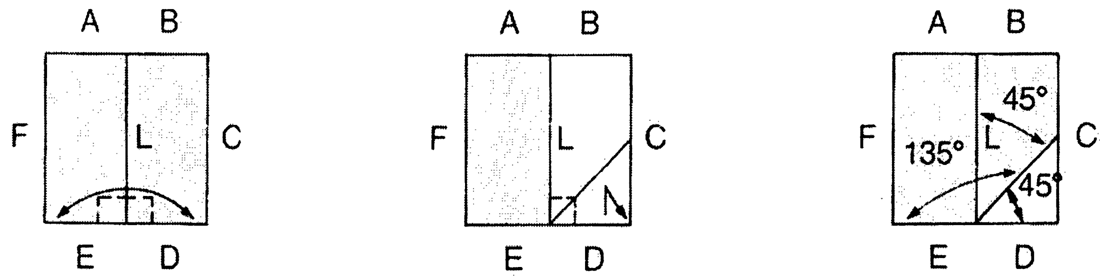


Figura 4-4 - Tipos de ângulos (figura retirada de *Aprendendo com Dobraduras*)

Procedimento: O professor deve distribuir um quadrado de papel, por cada aluno, e projectar no quadro as figuras.

De seguida deve salientar que, conforme mostra a figura 4- 4; (1) devem considerar o lado ED do quadrado como representando um ângulo raso (180°); (2) dobrar o lado ED ao meio e calcular o seu ponto médio. Seguidamente questionar: "Obtiveram dois ângulos rectos, correcto?" Têm algum lado comum?

Passando agora a (3), vamos utilizar um dos vértices da base do quadrado e fazê-lo coincidir com a linha central. Obtiveram dois ângulos agudos iguais, que amplitudes têm?

Este é o momento ideal para, através desta dobragem, rever a noção de bissectriz do ângulo. Se os alunos ainda não tiverem interiorizado este conceito a professor pode aproveitar a oportunidade para voltar a apresentá-lo. Continuando com as dobragens, o professor deverá pedir para fizerem coincidir a bissectriz do ângulo recto com a linha central e verificarem se obtiveram dois novos ângulos. Depois pode questionar: "Quem sabe dizer-me o nome destes ângulos?" Após obterem os diferentes ângulos os alunos devem usar um transferidor para confirmar as amplitudes.

Por fim o professor pode questionar: "Que nome tem o ângulo de amplitude 135º?"

No final pode solicitar-se aos alunos para pintar cada uma dos vincos obtidos com uma cor diferente, incentivando a uma boa visão espacial e pode ser um ponto de partida para falar dos diferentes conceitos de recta.

Tarefa 3 - Como Dobrar um Quadrado ao Meio

Inicialmente encontrei este desafio em Rego, Rego, & Junior, (2004, p. 48), mas não me pareceu muito interessante, apresentava quatro hipoteses de dobragem. Depois em Kasahara k (1991, p. 24) estava mais elaborado e pareceu-me muito curioso para aprofundar o estudo de noção de metade e decidi formular a sua questão "Quais as várias maneiras de dobrar um quadrado ao meio" ? Posteriormente ao analisar o livro de Franco, (1999, p. 9) voltei a encontrei a ideia mas apresentada de modo diferente. De posse deste novos elementos reformulei a tarefa conforme se apresenta.

Temas: Geometria e Medida e Números e Operações

Tópicos: Figuras no plano e sólidos geométricos (subtópico: Composição e decomposição de figuras) e Números racionais não negativos

Termos geométricos: quadriláteros, pentágono, triângulo, ângulo, bissectriz, área, fracções (metade, quarto).

Objectivos: trabalhar com a definição e classificação de quadriláteros. Explorar a simetria de reflexão e rotação num quadrado

Material: 8 folhas de papel quadrado

Questão: Quantos polígonos diferentes podemos obter quando dobramos um quadrado ao meio e cuja área é metade da área do quadrado original?

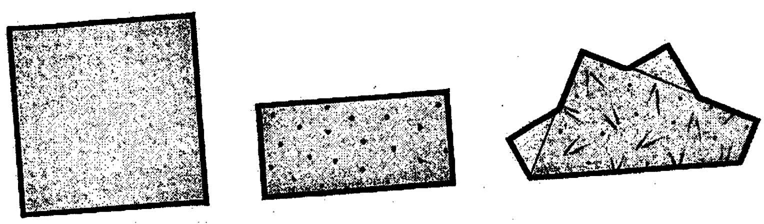


Figura 4-5 - Dobrar um quadrado ao meio (1), (retirado de Franco, 1999)

Ficha da actividade de grupo a distribuir pelos alunos:

1. Dividir o quadrado ao meio e obter o máximo de polígonos diferentes que conseguirem.
2. Trabalhando em grupo, classificar os diferentes resultados obtidos para a questão 1.

3. Preencher os espaços em branco da tabela abaixo à medida que obtiverem os resultados.
4. " *Num polígono regular a medida do lado é sempre igual e todos os ângulos interiores têm a mesma medida*".

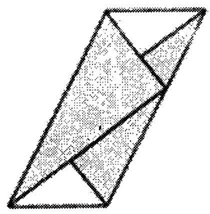
   Indicar quais dos polígonos encontrados são regulares?

Nome do polígono	Polígono regular	Polígono Irregular	Número de lados	Nº de ângulos	Nº de ângulos rectos	Nº de eixos de simetria

Figura 4-6 – Quadro relativo à tarefa "Dobrar o quadrado ao meio" (adaptado de Franco, 1999)

Como podem afirmar que já obtiveram todas as possibilidades de dobrar o quadrado ao meio? Expliquem as vossas conclusões.

Observem a figura à direita: Será que é uma das hipóteses de dobrar o quadrado ao meio? Apresentem o argumento que vos levou a essa resposta. Quantas maneiras existem de dobrar o paralelogramo? (Franco, 1999, p. 9)



Depois de todos terem exposto as suas conclusões o professor deverá apresentar as diferentes soluções através de meio electrónico ou fornecer ficha com as diferentes hipóteses e sugerir que tentem reproduzi-las. Conforme figura 4-7, obtemos: um triângulo, um quadrado, um rectângulo, um paralelogramo, um pentágono e um quadrilátero.

(Kasahara k. , 1991, p. 24). "Como num quadrado há dois vértices oposto, há efectivamente duas maneiras de dobrar o paralelogramo. Estas duas figuras são simétricas, e portanto representam duas maneiras distintas de dobrar um paralelogramo" (Franco, 1999, p. 9)

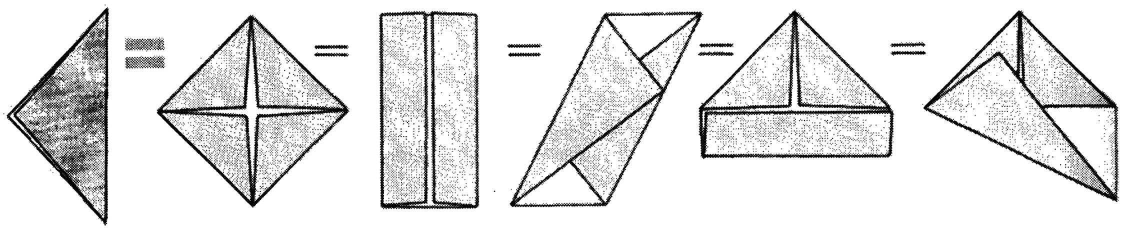


Figura 4-7 - Dobrar um quadrado ao meio (2), (adaptada de Kasahara, 1991)

Procedimento: Distribuir quadrados de papel e o plano da actividade pelos alunos e pedir que descubram quantas hipóteses têm de dobrar um quadrado ao meio. Cada grupo deverá apresentar as propostas coladas numa folha A4. As diferentes hipóteses serão discutidas em grande grupo. Dar tempo aos alunos e verificar as estratégias desenvolvidas antes de apresentar qualquer solução. Alguns alunos vão dividir ao meio pela diagonal obtendo assim um triângulo, outros dobram ao meio pela horizontal ou vertical obtendo rectângulos. Durante a discussão, os alunos poderão aperceber-se que nestas duas primeiras situações de dobragem ao dividirem o quadrado em partes iguais, as duas partes sobrepõem-se, o que corresponde a uma ideia elementar de construção de eixo de simetria de uma figura. Pode haver alunos que dobrem por tentativa e obtenham um outro quadrilátero. Haverá ainda alunos que dobram ao meio colocando os quatro vértices no centro ou em forma de livro. As restantes soluções dificilmente serão apresentadas, dado que se trata de alunos do Ensino Básico. Não deve ser apresentada qualquer solução antes da discussão em grande grupo.

Tarefa complementar - a Interdisciplinaridade - O Dia da Mãe

Como utilização prática desta actividade exploratória pode ser feita uma túlipa, figura 4-8, para comemorar o dia da Mãe (Kasahara K. , Origami International, 1979).

Será apresentada a seguinte questão: "Para fazer uma túlipa de papel caule e a folha quantos quadrados de papel iremos precisar?"

A maioria dos alunos raciocinará em função dos seus conhecimentos de estudo do meio e certamente fará uma estimativa... "três", outros podem responder que não sabem. Será uma surpresa quando a professor distribuir, por cada aluno, dois quadrados, um verde e outro de outra cor.

Não parece pertinente acrescentar a actividade discriminada, apenas se apresenta o diagrama. Como é fácil de verificar a túlipa começa pela dobragem de um quadrado ao meio, sendo obtido um novo quadrado após dobrar os quatro vértices ao centro.

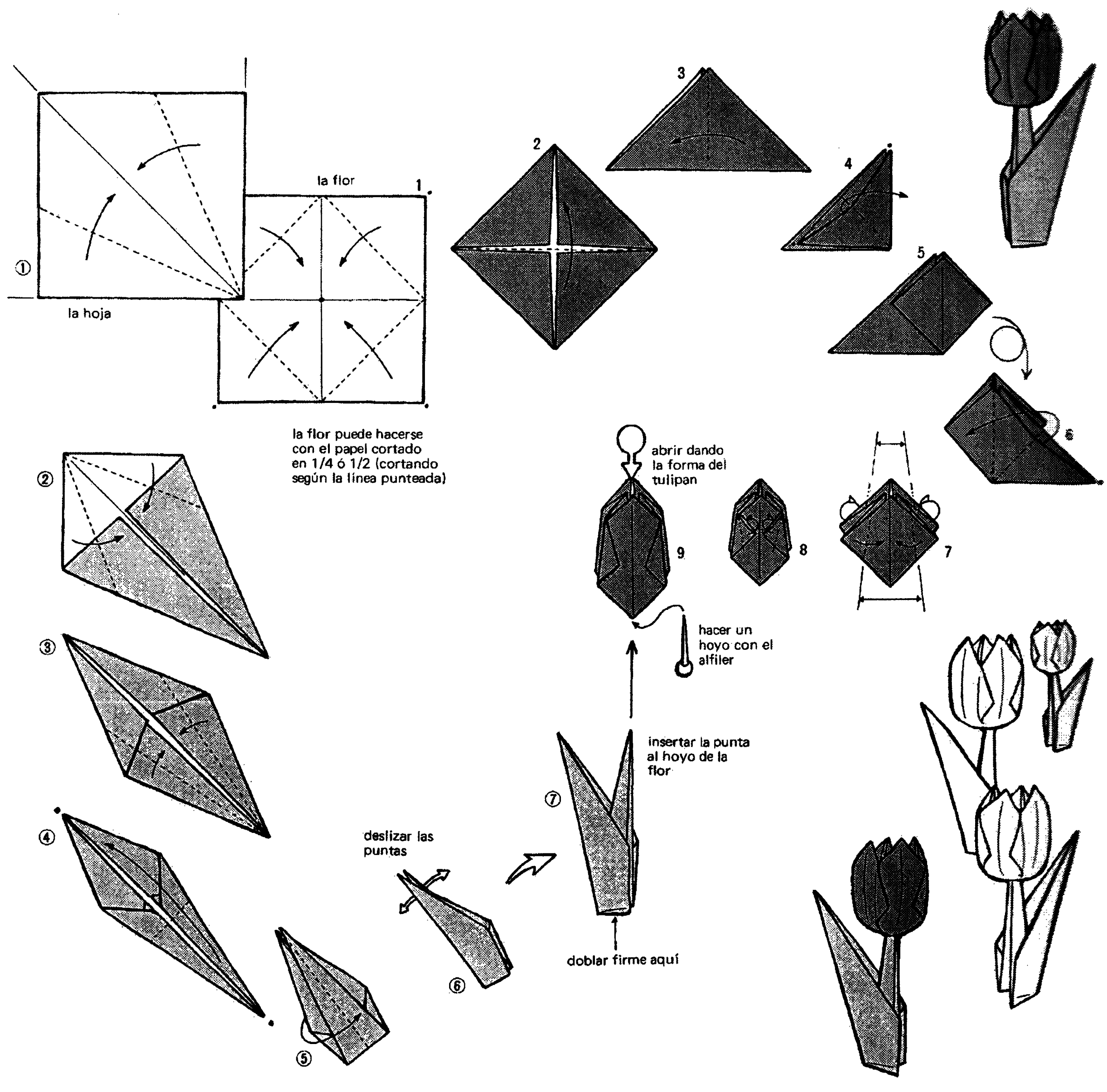


Figura 4-8 – Complemento da tarefa 3 , (diagrama da túlipa)

Tarefa 4 - Como Dobrar um Rectângulo ao Meio

A tarefa (3) foi reformulada e adaptada a outra forma geométrica - o rectângulo.

Em vez de quadrados serão usadas folhas de papel rectangular e será proposto aos próprios alunos a elaboração da tabela. Devem ser distribuídos 10/12 rectângulos e dizer aos alunos que podem utilizar quantos considerarem necessários para as diferentes hipóteses de dobragem de um rectângulo ao meio que conseguirem descobrir. Os alunos irão concluir que o número de hipóteses é muito maior do que no caso do quadrado. O facto de dobrarem inicialmente na horizontal ou na vertical fará toda a diferença. Tempo de duração previsto para a actividade 45/60 minutos.

Temas: Geometria e Medida e Números e Operações

Tópicos: Figuras no plano e sólidos geométricos (subtópico: Composição e decomposição de figuras) e Números racionais não negativos

Termos geométricos: quadriláteros, pentágono, triângulo, ângulo, bissectriz, área, fracções (metade, quarto).

Objectivos: trabalhar com a definição e classificação de quadriláteros.

Material: 10 folhas de papel rectangular

Questão: Quantos polígonos diferentes podem obter quando dobramos um rectângulo ao meio e cuja área é metade da área do rectângulo original?

Tarefa 5 - Como Obter um Copo por Dobragem

Esta dobragem é largamente utilizada no ensino básico, por ser uma dobragem tradicional. Normalmente tem carácter lúdico, contudo matematicamente as suas potencialidades são várias. De acordo com Baicker, 2004, Kasahara , 2008, Pearl, 1997, Rego,Rego & Junior ,2004, Figero,3rd OSME, 2001, entre outros, propomos a exploração não só da dobragem simples mas também algumas tarefas complementares.

Tema: Geometria

Tópico: Figuras no plano e sólidos geométricos (subtópico: Composição e decomposição de figuras).

Termos geométricos: quadriláteros, quadrado, trapézio, pentágono, triângulo, vértice, diagonal, eixos de simetria, bissectriz, metade...

Objectivos: estudo de triângulos, classificação quanto aos lados e quanto aos ângulos

Materiais: quadrados de papel e plano da actividade

Questão: Como podemos obter um copo a partir de um quadrado de papel?

Procedimento: O professor deve começar por dar uma folha de papel quadrada a cada aluno e uma ficha com as instruções.

De seguida o professor deve lembrar que o quadrado deve ser colocado na mesa com a parte colorida para cima. (1) Depois deve pedir ao aluno para dobrar ao meio pela diagonal, tendo o cuidado de deixar os vértices para cima. (2) De seguida o aluno deve pegar no vértice superior e rebatê-lo sobre a base do triângulo. Deste modo obtemos a bissectriz do ângulo inferior esquerdo do triângulo superior. (3) Depois desdobrar. (4) Pegar no vértice inferior esquerdo e fazê-lo coincidir com a linha de dobragem do lado oposto ao vértice. (5) Pegar no vértice inferior direito e fazê-lo coincidir na dobragem efectuada em 4. (6) Verificar que existe uma bolsa em cada um dos lados da dobragem. Colocar dentro o triângulo excedente. (7) Repetir o procedimento do lado oposto. (8) O Origami está finalizado.

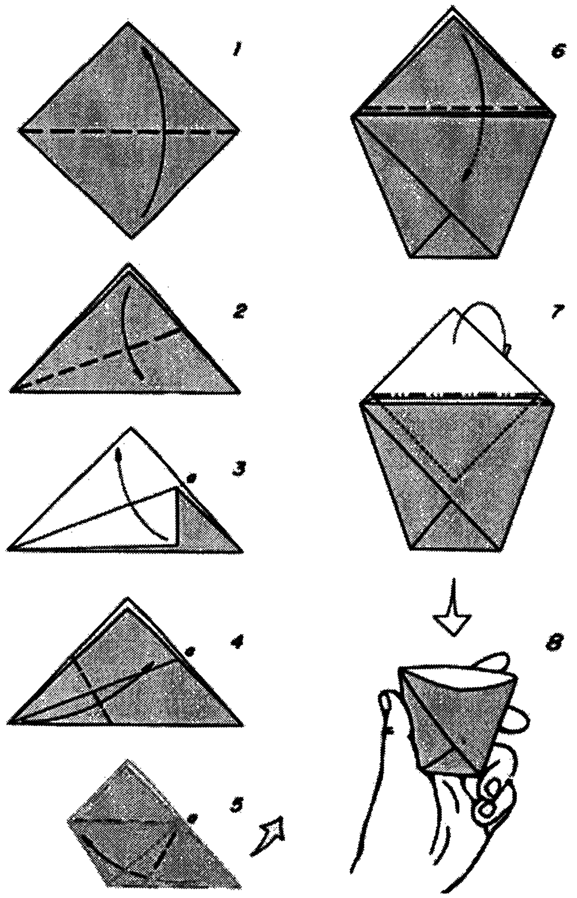
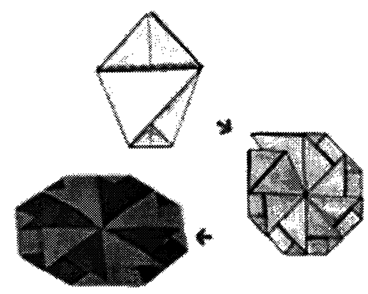


Figura 4-9 - Diagrama dobragem do copo

Após terem finalizado a tarefa o professor pode pedir aos alunos que observem o copo e questionar que figura geométrica faz lembrar o copo, ou ainda se podem observar outras figuras geométrica além do trapézio. Os alunos devem concluir que podem observar três triângulos de tamanhos diferentes. O professor poderá pedir para classificarem cada um deles. (esta dobragem tem a particularidade de se necessário poder ser utilizada para beber, o que é um motivo de diversão para as crianças).

Tarefas Complementares – À Descoberta de Figuras Geométricas no CP do Copo...

Conforme foi referido por (Kasahara K. , 2008, pp. 17,18) e de acordo com Emma Frigerio que apresentou durante o 3rd OSME, um apêndice com ideias bem interessantes intitulado "In Praise of the Paper Cup: Mathematics and Origami - University of Milan, Italy". Figero refere: "A careful examination on the folding of a paper cup leads naturally to many geometrical discussions. Eight identical cups can be interlocked in various ways to form an octagonal pattern. It can be an interesting mathematical investigation for children".



- **À Descoberta de Figuras Geométricas no C P**

Depois de dobrar um copo de papel pedir aos alunos para desdobrar a dobragem e questionar quais as formas geométricas produzidas, no papel, pelas diversas dobras.

Para estudar as diferentes formas deixadas no CP, solicitar aos alunos para colorirem as diferentes formas encontradas. Ao colorirem essas formas de diferentes cores podem não só descobrir diferentes as formas mas as relações entre elas. Por exemplo, o conceito de simetria está patente em quase todas as dobragens.

Ainda explorando figuras podemos sugerir aos alunos que após terem efectuado dobragens e obtido as diferentes formas, procedam ao recorte das mesmas através dos vincos de dobragem e que juntando-as de modo diferente consigam visualizar outras formas geométricas semelhantes ou figuras equivalentes à folha de papel inicial.

- **Quantos Copos Pequenos são Necessários para Encher um Copo Grande?**

Uma outra actividade interessante é os alunos elaborarem copos de tamanhos diferentes e utilizando "sementes/feijões" verificarem quantos copos pequenos é necessário encher para poderem encher o copo maior.

- **Fazer um chapéu**

Com numa folha de papel de jornal, fazer um copo, de modo a que possa ser utilizado como chapéu. Depois pedir para decorarem o chapéu utilizando outros tipos de papel ou outros materiais de desperdício.

Tarefa 6- Obter o Octógono Regular a Partir da Dobragem do Copo

Tema: Geometria e Medida e Números e Operações

Tópico: Figuras no plano e sólidos geométricos (subtópico: Composição e decomposição de figuras) e Números racionais não negativos

Termos geométricos: polígono regular e polígono não regular, quadriláteros, quadrado, pentágono, triângulo, vértice, diagonal, eixos de simetria, bissectriz, metade...

Objectivos: estudo das figuras regulares e não regulares, cálculo de áreas e volumes e perímetro

Materiais: 8 quadrados de papel e plano da actividade

Questão: Como podemos obter um octógono regular a partir de quadrados de papel?

Procedimento: O professor deve começar por distribuir os quadrados de papel. De seguida deve pedir aos alunos para construírem oito copos e observarem o produto final da actividade, o copo. Depois pedir para verificarem que existem três pontos de encaixe. Uma bolsa de encaixe lateral e duas de encaixe central.

Esta tarefa pode ser reformulada de modo a proporcionar dois momentos exploratórios distintos.

O professor deve começar por distribuir oito/dez quadrados por cada grupo de trabalho (4/5 alunos).

Primeiramente, solicitar aos alunos que, a partir da dobragem do copo, pesquisem e tentem obter, por encaixe, figuras geométricas utilizando duas ou mais dobragens do copo. O tempo previsto será de 20/30 minutos para esta actividade.

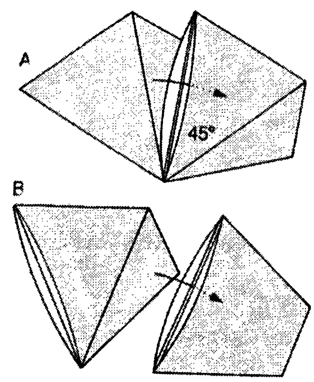


Figura 4-10 - Encaixes do copo, (adaptado de Gênova, 1991)

2. No segundo momento exploratório o professor deve solicitar a atenção dos alunos e explicar como devem proceder para construírem um octógono regular. Mostrar no quadro o modo de encaixe. De seguida pedir para dobrarem ângulos de 45° conforme mostra a figura 4-10, e encaixar uns nos outros. Conforme o encaixe das diferentes peças se faça na bolsa central (A) ou no vão lateral (B) o efeito espiral final é diferente.

O professor deve acrescentar que para o encaixe ficar perfeito é fundamental que os copos sejam todos iguais, se forem simétricos não é possível o encaixe. E finalmente deve apelar para a criatividade dizendo: Agora...vamos ver quem consegue completar o octógono?

Tarefa 7 – Como Obter a Divisão do Rectângulo em Quatro Partes Iguais

Esta tarefa foi elaborada a partir da "actividade 6 - dividir um quadrado em quatro partes iguais" incluída no livro " *A geometria do Origami*" (Rego, Rego, & Junior, 2004,p 50). Havendo três maneiras de dobrar um quadrado questionei: Se em vez de quadrado optasse por um rectângulo? E assim surgiu a tarefa7.

Tema: Geometria e Medida e Números e Operações

Tópico: Figuras no plano e sólidos geométricos

Termos geométricos: polígono (quadrilátero, rectângulo), eixos de simetria (linha de simetria horizontal, vertical) fracções (metade, quarto, oitavo),ângulo (recto); área de figuras geométricas, relações de grandeza, divisão equitativa.

Objectivos: trabalhar com as definições de área e fracções.

Questão: De quantas maneiras diferentes podemos dividir um rectângulo em quatro partes iguais?

Materiais: folhas de tamanho A4, tesoura, caderno diário e lápis.

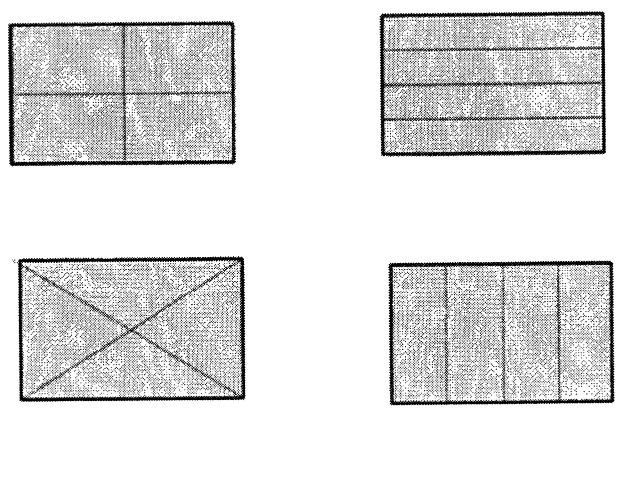


Figura 4-11 - Divisão do rectângulo em quatro partes iguais

Procedimento: Dar diversos rectângulos a cada aluno e pedir que descubram quantas hipóteses haverá para dividir um rectângulo em quatro partes iguais (Figura 6-11). Numa primeira fase o professor questionará: "Como podemos dividir o rectângulo em quatro partes iguais usando duas ou três dobras". A maioria dos alunos dobrará pelas diagonais ou pelos eixos de simetria. Alguns alunos dividem o rectângulo em quartos dobrando ao meio na vertical e depois ao meio na horizontal, haverá outros que dobram pelas diagonais, poderá haver ainda alguns que dobram sempre na vertical ou sempre na horizontal. Dependendo das dobragens obteremos rectângulos e triângulos.

Á medida que vai progredindo a aula poderá questionar-se:

- Qual o nome das figuras geométricas obtidas através das dobragens?
- Qual é a relação entre o rectângulo inicial e os rectângulos/triângulos obtidos?
- Quantos rectângulos diferentes podem identificar?

Numa segunda fase interrogará: e "se utilizarmos três dobras no máximo".

O professor deve terminar o diálogo depois de levar os alunos a concluir que o facto de obter quatro rectângulos é independente de utilizar duas ou três dobras. No caso de dobrar pela diagonal só temos a hipótese de dobrar duas vezes para obter os quatro triângulos.

Tarefa Complementar (1) – Vamos contar figuras geométricas

De acordo com a tarefa anterior podemos contar as figuras geométricas que se obtêm com uma, duas ou três dobras.

Os alunos deverão ser levados a concluir que ao dobrar na vertical e/ou horizontal obteremos sempre rectângulos iguais e, poderemos contar dez rectângulos se utilizarmos três dobras, e nove rectângulos se utilizarmos apenas duas dobras.

Se optarmos por dobrar em triângulo contaremos um rectângulo e oito triângulos.

Tarefa Complementar (2) - Como Obter Ângulos de 30º e 60º por Dobragem

Termos geométricos: rectângulo, triângulo, ponto, recta, recta paralela, recta perpendicular, ângulo, amplitude de ângulo…

Objectivos: trabalhar com as definições de ângulo e de amplitude de ângulo.

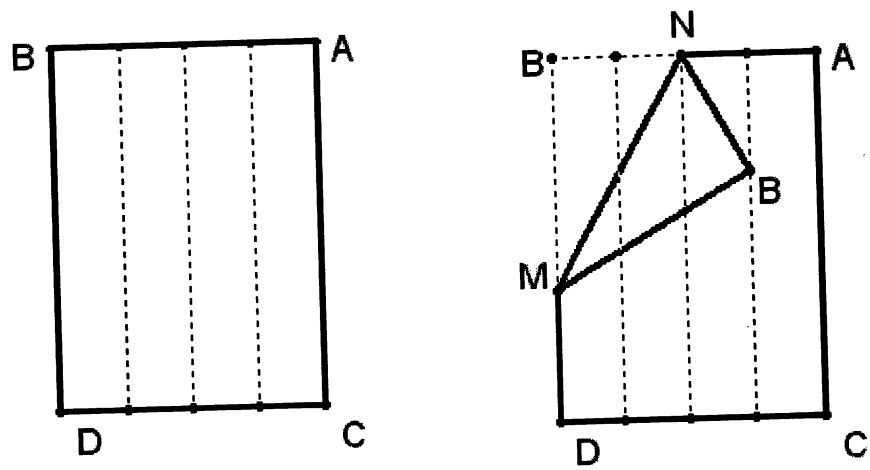


Figura 4-12 - Ângulos de 30° e 60°

Procedimento: O método de dobrar um ângulo de 60 ou 30 graus, é um pouco mais difícil de entender, baseia-se na simetria de um triângulo equilátero. Distribuir a folha pelos alunos e solicitar para marcar, por dobragem, uma linha central. Depois dobrar-se o lado esquerdo da metade do papel até à linha central para a dividir em dois quartos (Figura 4-12). Para formar o triângulo com um ângulo de 30° (∠ NMB), um de 60° (∠ MNB) um ângulo recto (∠ MBN) deve rebater-se o canto superior esquerdo (B) até à dobra que corresponde aos três quartos, tendo em atenção que a dobragem deverá partir da linha central, ponto médio do lado superior do rectângulo. Deste modo obter-se-á metade de um triângulo equilátero.

De seguida, podemos pedir aos alunos que confirmem as amplitudes de cada ângulo usando o transferidor.

Tarefa 8 - Construir um Pentágono com uma Tira de Papel

Esta tarefa é uma adaptação de Imenes (1995, p. 19) e Hernández (2001, p. 106). Na sua secção sobre o estudo do pentágono Hernández inclui o "pentágono de lazo". Imenes e Hernández utilizam tiras para construir pentágonos e hexágonos, mas neste trabalho foi apenas considerado o caso do pentágono.

Tema: Geometria e Medida

Tópico: Figuras no plano e sólidos geométricos

Termos geométricos: largura, comprimento, vértice, rectângulo, pentágono...

Objectivos: trabalhar com as definições de ângulo e de amplitude de ângulo

Questão: Como obter um pentágono regular a partir de uma tira de papel?

Materiais: um rectângulo de papel colorido ou uma tira de papel rectangular com 4 cm de largura 24 cm de comprimento

Procedimento: Tradicionalmente japonês o nó pentagonal ainda hoje é usado nos albergues japoneses, colocado sobre os pijamas de algodão. Para o executar é necessário alguma mestria. Para fazer este nó com papel, basta ter uma tira com comprimento 6 vezes maior que a largura e fazer um nó como se fosse numa corda. Começar por puxar ligeiramente os extremos da tira de papel e sem deixar qualquer folga nos vértices espalmar o pentágono.

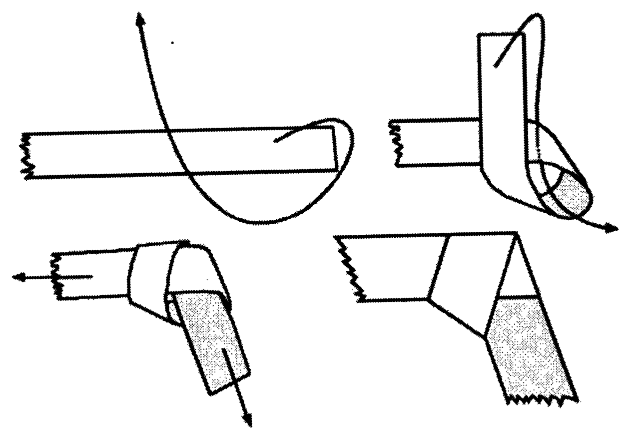


Figura 4-13 - Diagrama nó pentagonal

Tarefa Complementar - Obter o Pentágono a Partir de um Rectângulo A4

Se pretender propor a tarefa do nó pentagonal e não tiver preparado previamente a tira, e a medida do nó não for preocupante, o professor pode distribuir folhas rectangulares A4, para cada par de alunos e solicitar que a dividam ao meio.

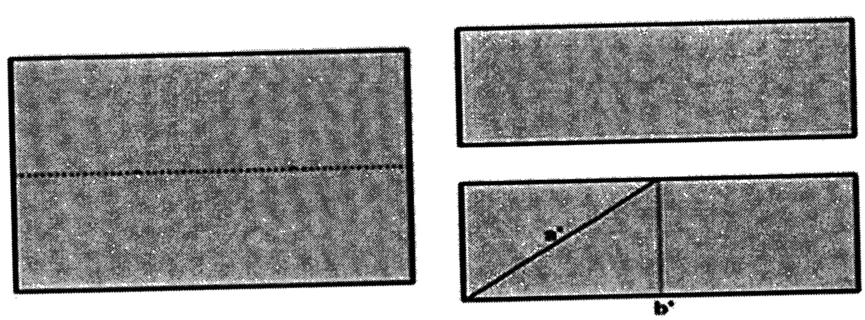


Figura 4-14 - Elaboração da tira para o pentágono a partir da divisão do rectângulo ao meio

Depois questionar os alunos se sabem de quantas maneiras diferentes se pode dobrar uma folha de papel rectangular ao meio (tarefa 4). É espectável que os alunos apresentem várias soluções; na vertical, na horizontal e na diagonal. Depois da discussão em grupo, o professor distribui uma nova folha e solicita que dividam ao meio no sentido do comprimento/horizontal.

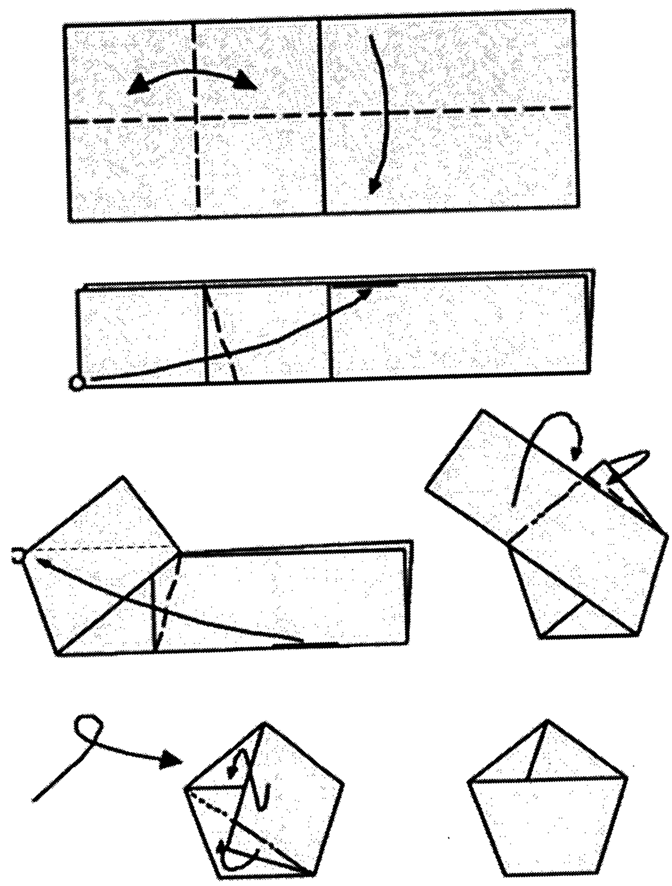


Figura 4-15 - Nó pentagonal a partir de uma folha A4

Pedir a os alunos para dobrar de modo a obter dois rectângulos, mantendo o comprimento mas sendo a largura metade da largura do rectângulo original, questionar sobre os novos rectângulos: "Será que estes rectângulos mantêm a mesma forma? Os lados dos dois rectângulos mantêm a proporção inicial?"

Após a discussão destas questões o professor deve solicitar que dividam o rectângulo ao meio e marquem a diagonal (a′) do primeiro rectângulo, a partir do canto inferior esquerdo até meio (b′) do rectângulo inicial (Figura 4-14). Depois deve distribuir o diagrama pelos alunos e solicitar que tentem obrar o nó pentagonal seguindo o esquema e lembrando que a diagonal marcada no rectângulo é um ponto de referência muito importante para uma actividade bem-sucedida, veja-se passo 3 da figura 4-15.

Nesta tarefa pretende-se que a actividade desenvolvida permita ao aluno aumentar o seu grau de concentração, analisar o diagrama e seguir as instruções observando apenas a sequência dos desenhos.

Tarefa 9- Como obter um livro de notas a partir de um rectângulo

Segundo Peral (1997, p. 31) e corroborada por Baicker (2004, pp. 30,31), esta tarefa é adaptável a qualquer faixa etária e pode ser utilizada em diversos trabalhos de projecto. Também é uma boa actividade para o estudo do conceito de fracção. Em face dos argumentos de Pearl e Baicker considerei que era muito importante a inclusão desta tarefa no rol de tarefas propostas para o ensino básico. Com pequenas adaptações às sugestões de ambas surgiu a tarefa 9.

Tema: Geometria e Medida e Números e Operações

Tópico: Figuras no plano e sólidos geométricos (subtópico: composição e decomposição de figuras) e Números racionais não negativos (subtópico: fracções)

Termos geométricos: polígono (quadrilátero, rectângulo), eixos de simetria (linha de simetria horizontal, vertical) fracções (metade, quarto, oitavo),ângulo (recto); área e perímetro (comprimento, largura), figuras geométricas e relações de grandeza)

Objectivos: trabalhar com as definições de área e fracções

Questão: Como podemos obter um livro por dobragem de uma folha rectangular?

Materiais: diagrama, folha de tamanho A4 ou A3, tesoura, caderno diário e lápis.

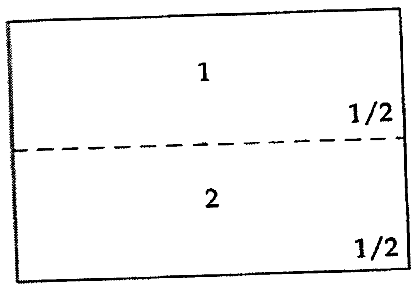
Procedimento: Esta actividade serve para desenvolver o conceito de divisão, de metade, quarto, oitavo e simetria axial. O professor deve distribuir um rectângulo A4 ou A3 e pode optar por dar início à actividade dizendo que vão transformar a folha de papel num livro, e questionar quantas páginas terá o livro; ou simplesmente dirá que vão dividir o rectângulo em diversas partes iguais. (1) O professor inicia a tarefa solicitando aos alunos que dobrem a folha ao meio no sentido horizontal. (2) À medida que vai seguindo o diagrama pode questionar quantos rectângulos têm e como podem escrever cada secção obtida em forma de fracção. Nesta etapa os alunos dirão um quarto (1/4). O professor pode questionar: "Se cortar um dos rectângulos com quantos quartos fico? (3/4)".

Podemos ainda questionar quantos rectângulos podem contar no CP ou quantos rectângulos diferentes têm. Certamente aparecem diversas estimativas e provavelmente alguns darão a resposta correcta. Solicitar que expliquem como chegaram à resposta. Na etapa (3) o professor questionará quantas secções obtiveram e qual é a relação entre cada secção e a folha de papel. Na última etapa informará que obtiveram um novo rectângulo que tem o mesmo comprimento da folha inicial mas a largura é..."metade da medida inicial" dirão os alunos. Então, já me podem dizer, quantas páginas o livro terá? Vamos contá-las.

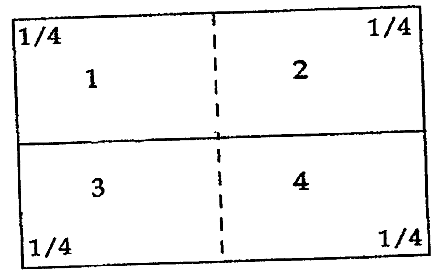
O professor pode apresentar esta tarefa com uma abordagem diferente. Por exemplo pode iniciar com a tarefa da divisão do rectângulo em quatro parte (tarefa 7), e numa segunda tarefa questionar quantas hipóteses haverá para dividir um rectângulo em oito partes iguais.

A partir da divisão do rectângulo em quatro partes iguais deverá proceder à elaboração dos passos de acordo com o diagrama, até obter o livro de notas. No final, cada aluno deverá numerar as páginas do livro, e escrever algo nelas.

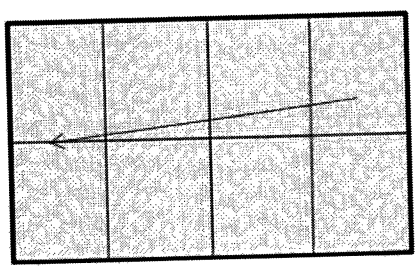
Diagrama do Livro de Notas



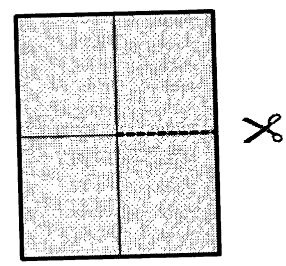
1. Pegar na folha e divide ao meio no sentido da horizontal e desdobra.



2. Dobrar ao meio no sentido da vertical e desdobra.

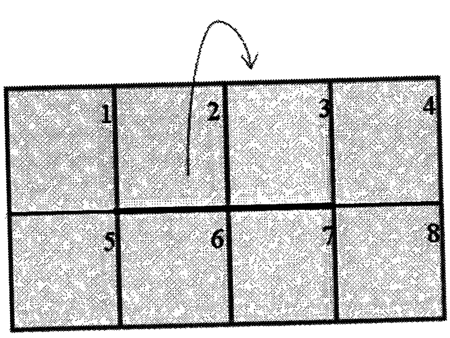


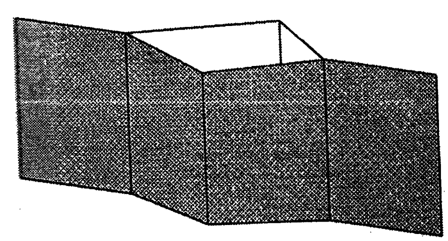
3. Dobrar agora lado menor do rectângulo (sentido horizontal) até à linha central e desdobra, e obterás a figura acima.



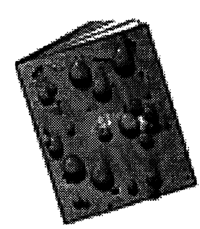
4. Dobrar ao meio. Cortar na horizontal, segundo a linha. Atenção o corte é efectuado a partir da parte dobrada.

5. Dobrar ao meio conforme a figura





6. Puxar os rectângulos assinalados 6 e 7 para a frente e 2 e 3 para trás.



Dar a forma de livro

Figura 4-16 - Diagrama de dobragem do livro de notas

Tarefa Complementar – Vamos Contar Rectângulos

Esta tarefa é baseada na tarefa 9. Tem como objectivo promover a consolidação da noção de divisão equitativa, fracção e visão espacial.

O professor deve começar por distribuiu uma folha rectangular por cada aluno. Depois deve seguir passo a passo o diagrama, até à etapa (3). Em cada etapa, deve questionar que parte da unidade representa cada rectângulo e quantos rectângulos é possível observar. Os alunos devem construir uma tabela e preencher a mesma cada vez que efectuarem uma dobra adicional.

Número da Etapa	Número de dobras	Fracção da unidade	Número de rectângulos que podemos contar

Depois de preenchida a tabela o professor poderá questionar se alguém consegue fazer uma ligação entre as diversas colunas da tabela.

Tarefa 10 - Dobragem de uma Pajarita

Esta dobragem tradicional encontra-se em quase todos os livros de Origami. Nem sempre se apresenta a sua forte componente matemática, mas já vimos que desde o seu aparecimento tem estado ligado à Espanha, onde tem sido perpetuada em diversos objectos e monumentos. Pelo seu historial e potencial geométrico pareceu pertinente a sua inclusão neste capítulo.

O procedimento foi totalmente escrito de raiz.

Tema: Geometria e Medida e Números e Operações

Tópico: Figuras no plano e sólidos geométricos, área e perímetro de figuras geométricas) e Números racionais não negativos (subtópico: fracções)

Termos geométricos: polígono; triângulo e quadrado, eixos de simetria, ângulo; relações de grandeza, fracção (metade, quarto...)

Objectivos: trabalhar com as definições de área e fracções

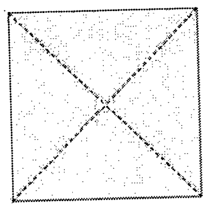
Questão: Qual será a área ocupada pela *pajarita* em relação ao quadrado original?

Materiais: papel quadrado bicolor (15×15 cm), caderno diário e lápis.

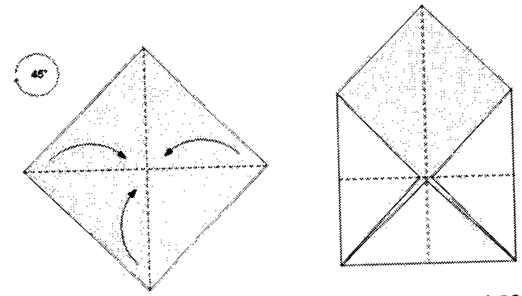
Procedimento: Dar um papel quadrado a cada aluno e pedir para tentarem reproduzir a figura proposta: "Uma *pajarita*".

O professor deve acompanhar o trabalho pedindo a um aluno para ler cada passo das instruções. Só após todos terem finalizado a etapa e respondido às questões geométricas formuladas pelo professor deve prosseguir-se para a nova etapa. Alguns dos alunos, se não conseguirem realizar a tarefa perdem o interesse. Na etapa (3) o professor pode questionar qual é a relação entre o quadrado inicial e obtido após esta etapa. Se já tiverem feito a actividade "dividir o quadrado ao meio" responderão de imediato que a área do novo quadrado é metade da área do quadrado original. Ao finalizar (4), se colocarmos questão idêntica, a resposta não será tão rápida e apenas alguns darão a resposta correcta, dizendo provavelmente que é metade da metade. Uma boa opção para conseguir a resposta correcta poderá ser pintar a parte que constitui novo quadrado e depois desdobrar verificando na CP qual a fracção correspondente à parte colorida. A exploração dos seguintes passos até obter o produto final depende da abordagem que o professor pretende integrar nesta actividade. Para responder à questão formulada poderemos contar os triângulos que constituem a figura ou proceder de acordo com (4).

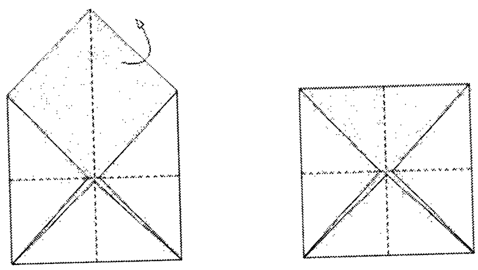
Diagrama da Pajarita



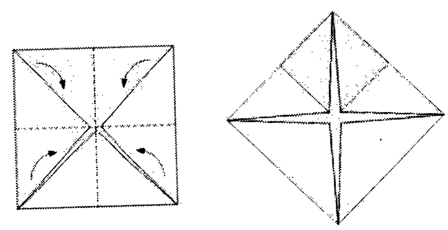
1. Pegar na folha dobrar uma diagonal e desdobrar. Dobrar a outra diagonal e desdobrar.



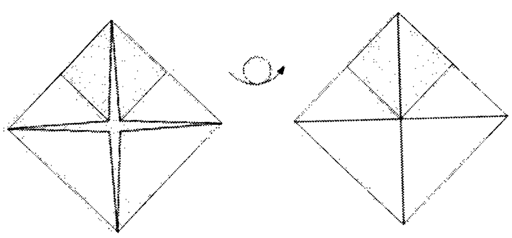
2. Virar o quadrado para a direita 45° e rebater no centro as 3 pontas indicadas.



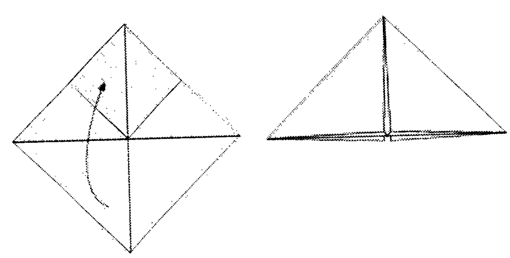
3. Dobrar para trás a parte superior.



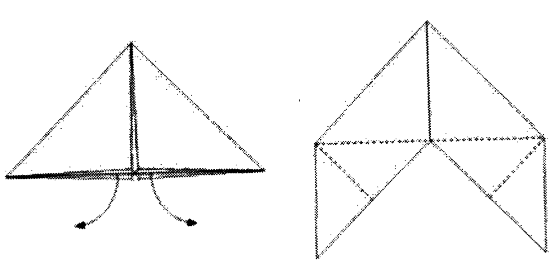
4. Rebater as 4 novas pontas/vértices ao centro.



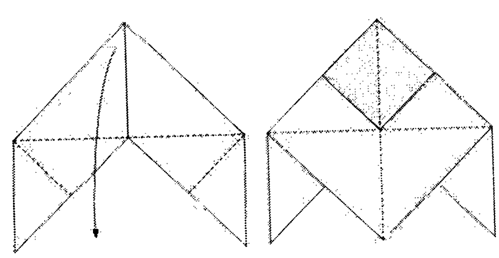
5. Rodar o modelo e virar.



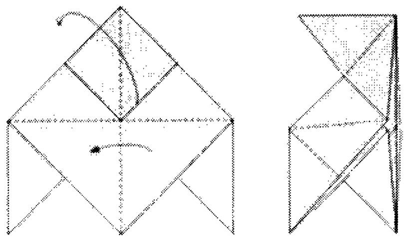
6. Juntar o vértice inferior com o vértice superior.



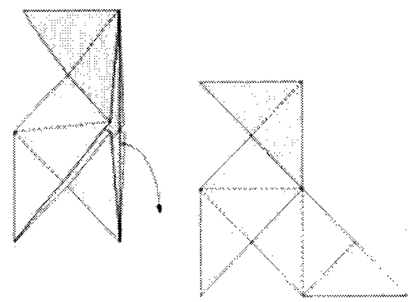
7. Puxar as 2 pontas/vértices interiores fazendo-as sair.



8. Dobrar pelo tracejado puxando o vértice superior.



9. Dobrar ao meio fazendo sobrepor a parte direita sobre a esquerda e ao mesmo tempo puxar o quadrado superior para e esquerda.



10. Puxar de novo a ponta interior (da direita) fazendo-a sair totalmente para o exterior.

Figura 4-17 - Diagrama de dobragem da *Pajarita*

Tarefa 11 - Como Obter Dois Quadrados a Partir do Papel de Formato A4.

Esta tarefa surgiu da necessidade de apresentar a noção de "geometricamente igual", e está baseada no princípio de que um quadrado é formado por dois triângulos geometricamente iguais (figuras que se podem sobrepor ponto por ponto).Pode parecer uma tarefa muito simples, mas até que ponto é ou não uma boa tarefa, cada professor só saberá responder depois de experimentar. O sucesso depende do modo como é explorada.

Tema: Geometria e Medida e Números e Operações

Tópicos: Figuras no plano e sólidos geométricos (subtópico: Composição e decomposição de figuras) e Números racionais não negativos (subtópico: fracções)

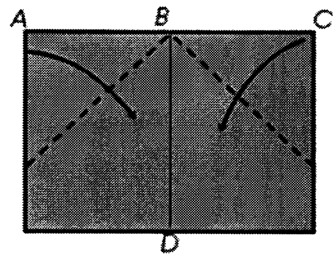
Termos geométricos: quadrilátero, quadrado, rectângulo, pentágono, triângulo, largura, comprimento, vértice, diagonal bissectriz, metade...

Objectivos: trabalhar com a definição de figuras geometricamente iguais.

Materiais: uma folha de papel A4, ou folha de papel rectangular, sendo que o comprimento maior tem de ser superior a duas vezes a largura.

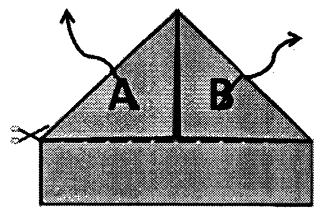
Questão: Como podemos obter dois quadrados iguais a partir de uma folha de papel rectangular/A4, usando apenas a tesoura?

1. Pegar no rectângulo, dobrar ao meio e desdobrar.
2. Traçar a recta BD une esses pontos médios.
3. Quantos rectângulos podem contar?



1

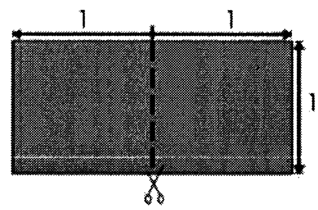
4. Depois, dobrar AB e BC sobre a recta BD.
5. Que figura final obtém? Como é composta essa figura?
6. Cortar o papel / rectângulo pela linha tracejada, conforme mostra a figura.
7. Desdobrar, posteriormente, os triângulos A e B.



2

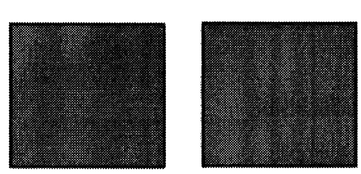
Observar a figura 3.

8. Qual é a relação entre o lado maior do rectângulo inicial e o lado maior do novo rectângulo?
9. Qual a relação entre o comprimento e a largura do novo rectângulo?
10. Cortar o rectângulo ao meio para obter os quadrados de mesma medida.



3

Eis os dois quadrados geometricamente iguais O quadrado é o padrão universal para produzir o Origami mais simples.



4

Figura 4-18 Diagrama de dobragem da divisão do rectângulo em dois quadrados iguais

Procedimento: Distribuir uma folha A4 pelos alunos, acompanhada do plano da tarefa. Relembrar para lerem atentamente as instruções e responderem às questões formuladas, no caderno diário.

Podem surgir, entre outras as seguintes respostas. Na questão 3: "Três rectângulos","três rectângulos, um grande e dois mais pequenos","três rectângulos, um grande e outros dois que são metade do primeiro". Em relação à questão 5: "um pentágono, composto por dois triângulos e um rectângulo", " dois triângulos e um rectângulo".No que concerne ``a questão 8: Têm e mesma medida. ...Têm o mesmo tamanho...são iguais, e questão 9: "No rectângulo a largura é metade do comprimento..."No rectângulo o comprimento é o dobro da largura"ou ainda "O comprimento é duas vezes a largura"

Para finalizar podem ser escritas no quadro as diversas respostas apresentadas pelos alunos.

Tarefa 12 - Dobrando Puzzles e Construindo Figuras Geométricas

O tipo de puzzle que vamos trabalhar é diferente de qualquer outro. Nesse tipo de "jogo", o raciocínio é bem mais importante que a agilidade e a força física. Aqui todas as peças permanecem juntas e diferentes puzzles são obtidos consoante as dobragens efectuadas. Uma das vantagens é que não existem peças pequenas que se possam perder. Uma possível desvantagem é o facto de a criança ter de ser capaz de dobrar cuidadosamente, em qualquer direcção, pelas linhas marcadas. A ideia para esta tarefa foi retirada de E. Dana, (1987)

***Tema*:** Geometria e Medida e Números e Operações

Tópicos: Figuras no plano e sólidos geométricos (subtópico: Composição e decomposição de figuras) e Números racionais não negativos (subtópico: fracções)

Termos geométricos: quadrilátero, quadrado, rectângulo, pentágono, triângulo, largura, comprimento, vértice, diagonal bissectriz, metade...

***Materiais*:** quadrado de papel

***Questão**:* Que figuras podemos obter dobrando um quadrado segundo determinadas linhas?

Procedimento: Pedir aos alunos para dobrar ao meio um eixo de simetria (por ex. na vertical), desdobrar e colorir o vinco encontrado.

De seguida pedir para dobrarem os quatro vértices até ao centro, desdobrarem e colorirem as quatro linhas de marcação. Depois colorir dos vértices até às quatro linhas de marcação.

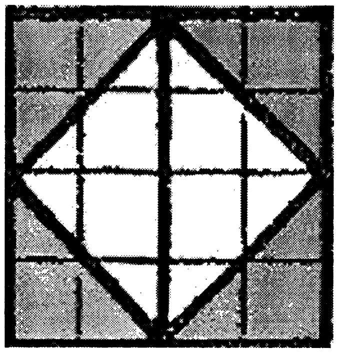


Figura 4-19 - Peça para o puzzle

Individualmente ou a pares solicitar que para descubram como dobrar outras figuras geométricas ou pedir para reproduzir as sugeridas no diagrama, mas utilizando sempre as linhas coloridas.

Posteriormente devem registar no caderno as figuras que cada um conseguiu obter.

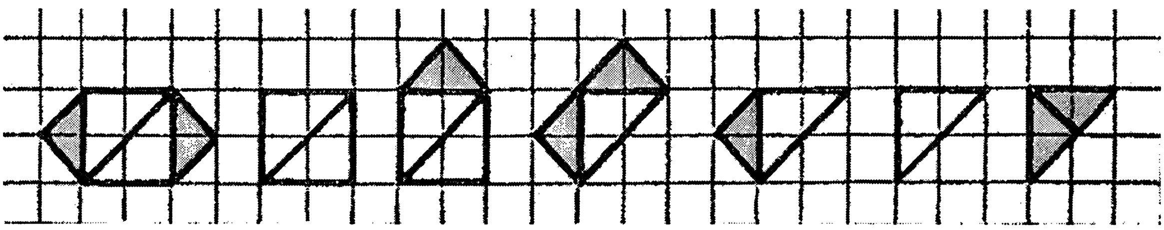


Figura 4-20 Sugestões de dobragem de puzzle

Tarefa 13 - Calcular a Amplitude dos Ângulos Internos de um Triângulo por Dobragem

Esta tarefa resultou da restruturação da sugestão apresentada por Imenes (1995, p. apendice) - *Vivendo a Matemática.* O autor optou por iniciar com um triângulo, enquanto na tarefa proposta é sugerido que se parta de um quadrilátero a partir do qual se obtém o triângulo para a realização da tarefa. Esta pequena alteração permitirá aos alunos não só verificar/confirmar que um quadrilátero pode ser dividido em dois triângulos iguais, como falar das características de cada uma destas figuras geométricas.

Tema: Geometria e Medida

***Tópico*:** Figuras no plano e sólidos geométricos

Termos geométrico: triângulo, altura, ângulos, amplitude

Objectivos: trabalhar com as definições de ângulo e de amplitude de ângulo

Questão**:** Como demonstrar por dobragem que a soma das amplitudes dos ângulos internos do triângulo é igual a um ângulo raso?

Materiais: papel quadrado ou rectangular, tesoura e transferidor.

Questão: Podemos demonstrar, por dobragem que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é igual amplitude um ângulo raso (180ª).

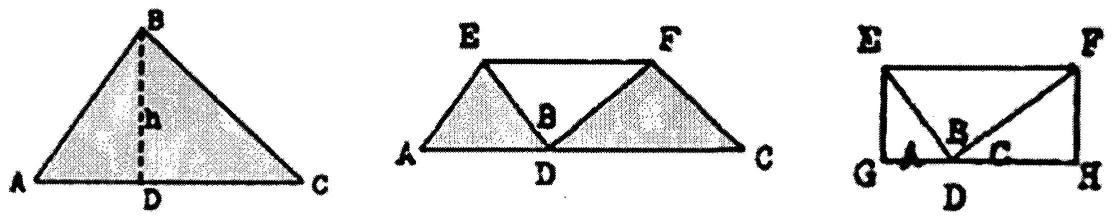


Figura 4-21 Soma dos ângulos internos do triângulo

Procedimento: Distribuir um quadrado de papel (ou rectângulo) aos alunos e pedir para dobrarem no sentido da diagonal e posteriormente desdobrarem. De seguida pedir para recortarem pela dobra. Questionar qual o nome da nova figura geométrica obtida e quais as suas principais características (O diagrama da iniciação da tarefa não é apresentado, por nos parecer desnecessário). Depois colocar a seguinte questão: será que poderemos utilizar qualquer tipo de triângulo? (Se achar pertinente o professor pode partir logo de um triângulo).

Solicitar aos alunos para marcarem as letras [ABC] no triângulo obtido e vincarem a altura BD, desdobrando em seguida. Depois pedir para fazerem coincidir o ponto B com o ponto D na base. O professor pede aos alunos para observarem a figura obtida e solicita que indiquem qual a relação existe entre as rectas EF e AC. Depois deve inquirir sobre qual a relação que existe entre os lados [AE] [EB] do triângulo [ABE]. A seguir a esta pequena discussão em grupo prossegue-se com a dobragem, solicitando aos alunos que dobrem os vértices A e C de modo a que sejam coincidentes com o ponto D.

Finalizada a dobragem o professor poderá propor os alunos que escrevam, no caderno, as respostas ao questionário e depois discutam a solução com o colega/ou em grupo.

QUESTIONÁRIO

1. Que relação existe entre os triângulos [ADE] e [GAE]?
2. Que relação existe entre os triângulos [DCF] e [DHF]?
3. Qual a amplitude dos ângulos internos do triângulo?
4. Que relação existe entre a altura do triângulo inicial [ABC] e a altura do rectângulo [GHFE]?
5. Que relação existe entre a base do triângulo [ABC] e o lado [GH] do rectângulo [GHFE]?
6. Que relação existe entre as medidas das áreas do triângulo [ABC] e do rectângulo [GHFE]?

Tarefa 14 - Dobrar um Avião e Consolidar Conceitos

Esta tarefa foi adaptada de Imenes, (1995, pp. 21-28). Houve uma análise criteriosa dos desenhos, uma reorganização dos mesmos, de modo a haver uma articulação entre o texto apresentado e os desenhos. Os conceitos inerentes à tarefa foram já trabalhados nas tarefas anteriores.

Tema: Geometria e Medida

Tópico: Figuras no plano e sólidos geométricos

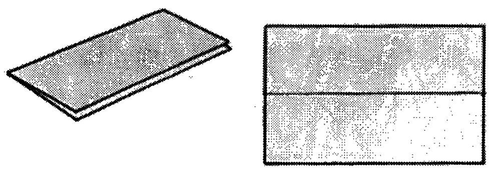
Termos geométricos: rectângulo, triângulo, altura, ângulos, amplitude, metade...

Objectivos: trabalhar/consolidar as definições de ângulo e de amplitude de ângulo

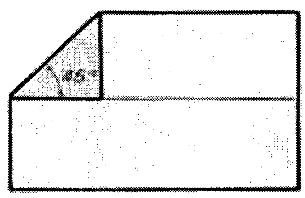
Questão: Como obter um avião por dobragem?

Materiais: um rectângulo de papel colorido, transferidor

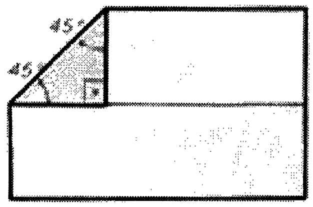
Diagrama de dobragem do avião



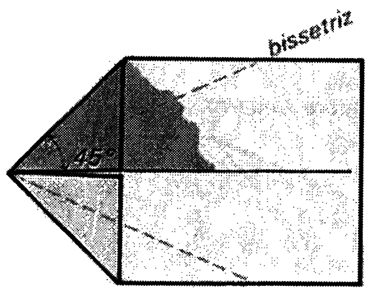
1. Dobrar ao meio no sentido horizontal e desdobrar. Foram encontrados os pontos médios dos lados menores do rectângulo.



2. Dobrar metade do lado menor do rectângulo sob a linha central dobrada em (1)

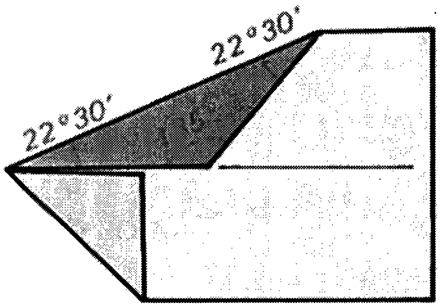


3. Verificar com o transferidor que o ângulo obtido tem amplitude de 45° e que o ângulo oposto tem a mesma amplitude. Portanto, o ângulo do terceiro vértice do triângulo terá 90° de amplitude. O triângulo obtido é um triângulo rectângulo isósceles.



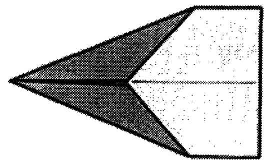
4. Dobrar um dos ângulos obtidos pela sua bissectriz e verificar que o novo ângulo mede 22° 30′. Medir o ângulo oposto e verificar que tem a mesma amplitude.

5. Calcular o valor do terceiro ângulo sabendo que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é igual a um ângulo raso, ou seja 180º.

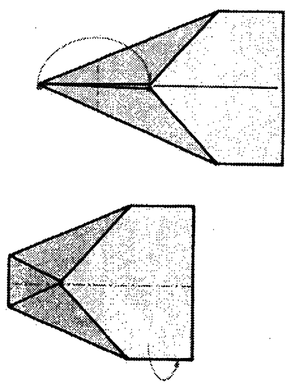


$$135° + 22°30' + 22°30' = 180°$$

6. Dobrar o outro ângulo pela bissectriz de modo a obter a figura à direita.



7. Dobrar conforme mostra a figura.



8. Dobrar a figura ao meio. Dobrar para baixo conforme indicado e o avião está pronto a voar.

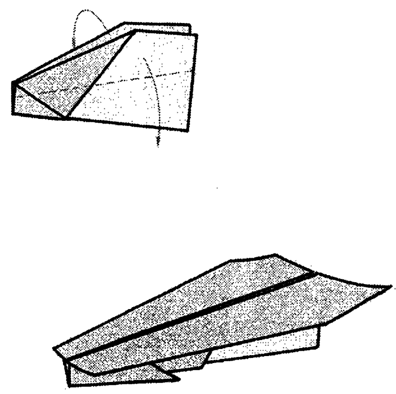


Figura 4-22 - Diagrama de dobragem do avião

Procedimento: O professor pode optar entre distribuir apenas um rectângulo de papel a cada aluno e prosseguir passo a passo, seguindo as instruções; ou simplesmente, se os alunos já estiverem familiarizados com este tipo de actividade, distribuir o rectângulo de papel e o diagrama, apenas interferindo quando solicitado.

Tarefa 15- Construir um Cubo por Dobragem

Esta tarefa segue as linhas de algumas tarefas já referidas. Esta base de trabalho permite uma panóplia de dobragens que vão desde o simples quanto-queres, tão conhecido no nosso ensino, a animais, peças de vestuário, barcos e caixas. Esta tarefa é facilmente encontrada em alguns manuais escolares. Este diagrama foi recolhido precisamente de um do manual escolar para o 5º ano - *Matemática uma Linguagem Universal* (Caldas & Fonseca, 1996, pp. 27-28)

Tema: Geometria e Medida

Tópico: Figuras no plano e sólidos geométricos

Termos geométricos: largura, comprimento, vértice, quadrado, rectângulo, diagonal, hexágono, aresta...

Objectivos: trabalhar sólidos geométricos, em especial o cubo (face, vértice, aresta) e rever conceito de polígono, quadrado, triângulo e hexágono.

Material: quadrados de papel.

Questão: Como obter um cubo a partir de 6 quadrado de papel?

Procedimento: O Professor pode optar por pedir simplesmente que façam as seis units/peças e depois a partir delas montem o cubo ou pode solicitar que as encaixem de modo a reproduzir uma dada planificação. Neste caso sugere-se que elaborem o trabalho sozinhos, dando o professor apenas pequenas explicações, quando solicitado

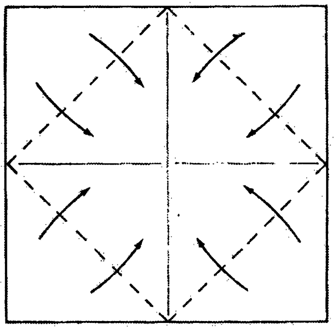
.Um maior desafio é dizer simplesmente que tentem reproduzir uma das planificações do cubo sem especificar. Para esta segunda opção, que deve ser um trabalho de grupo, pressupõe-se que os alunos já fizeram as onze planificações do cubo, com recurso a outros materiais, por exemplo com polydrons ou pelo menos já visionaram as mesmas. Como resultado desta versão será muito enriquecedor que cada grupo coloque no quadro a solução ou soluções a que chegou.

O professor deve começar por distribuir aos alunos a ficha de instruções para construir um cubo (por dobragem)

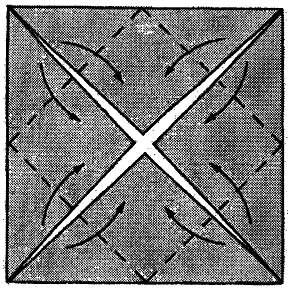
Ler atentamente todas as instruções passo a passo:

Pegar em 6 quadrado de papel e dobrar de acordo com as instruções de construção do diagrama do cubo, de modo a obter cada uma das faces do cubo e os respectivos encaixes.

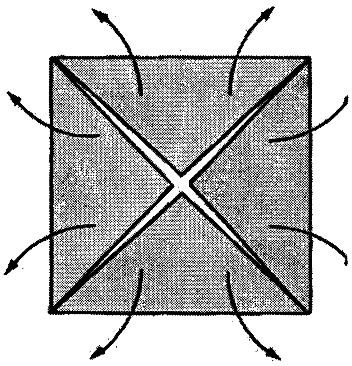
Diagrama de dobragem do cubo



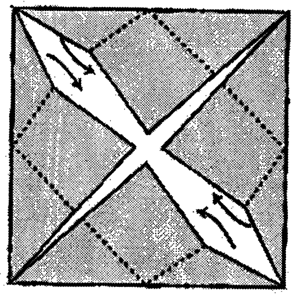
1. Pegar numa folha quadrada e dobrar os dois eixos de simetria. Depois obrar os quatro vértices ao centro



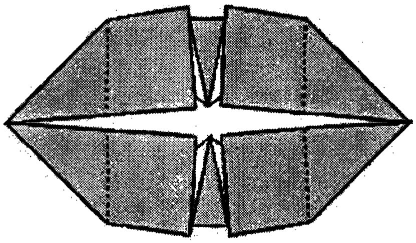
2. Dobrar novamente os quatro vértices ao centro.



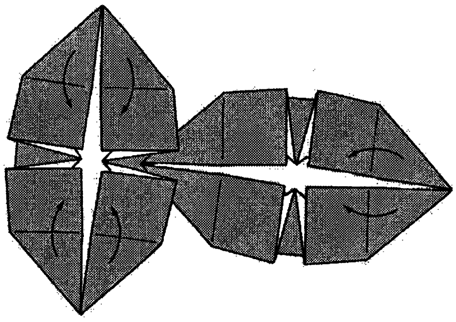
3. Desdobrar as dobras feitas em (2).



4. Pegar em dois vértices opostos e encaixar para dentro conforme indicado na figura.



5. Após o encaixe referido em (4) teremos esta figura hexagonal, que apresenta duas bolsas.



6. Encaixar os seis módulos, utilizando as bolsas de encaixe.

Figura 4-23 - Diagrama de dobragem do cubo, (retirado de *Matemática - Uma Linguagem Universal*)

Tarefa 16- Construir uma Caixa por Dobragem

Esta tarefa que tem como objectivo descobrir figuras geométricas, consolidar a noção de família dos quadriláteros e conhecer a utilização prática do Origami foi escrita de raiz e está alicerçada em elementos base recolhidos na aula de Origametria leccionada por Golan no X Congresso da AEP (2007). Esta dobragem tem inúmeras proficiências; pode ser feita para guardar coisas na sala de aula ou para ofertar nos dias festivos.

Tema: Geometria e Medida

Tópico: Figuras no plano e sólidos geométricos

Termos geométricos: largura, comprimento, vértice, quadrado, rectângulo, diagonal...

Objectivos: trabalhar sólidos geométricos, em especial o prisma quadrangular (face, vértice, aresta) e família de quadriláteros.

Material: 2 quadrados de papel com uma diferença de mínima entre si. O maior será para a tampa.

Questão: Como obter uma caixa a partir de 2 quadrado de papel?

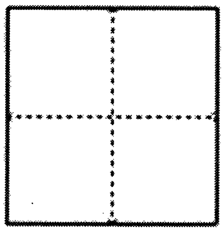
Procedimento 1: A actividade é orientada pelo professor que pode pegar numa folha e dar instruções para as dobragens ao mesmo tempo que questiona os alunos.

Numa primeira fase os alunos devem realizar a dobragem até obter a moldura (instrução 7). Numa segunda fase devem acabar o Origami (caixa com fundo quadrado).

Procedimento 2: Uma outra hipótese distribuir a cada aluno uma ficha de instruções para construir uma caixa (por dobragem) e permitir que os alunos elaborem o trabalho sozinho.

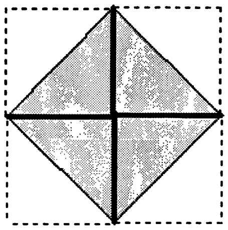
Além disso, ainda sugerimos que esta actividade tenha duas tarefas ou duas partes distintas. Na primeira faremos uma moldura e na segunda, os alunos já estão mais familiarizados (a precisão da dobragem é fundamental) e podem obter melhores resultados ao elaborarem a caixa.

Em qualquer dos casos deve fazer-se a segunda dobragem num outro tempo lectivo. Isto permitirá aos alunos recordar e/ou consolidar conceitos.



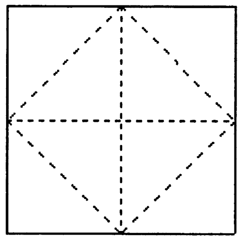
1. Dobrar o quadrado ao meio, na horizontal e desdobrar.
2. Depois dobrar ao meio mas agora no sentido vertical e desdobrar.

A questão a colocar neste momento não é quantas figuras geométricas, mas quantos quadriláteros conseguem contar?
(nove quadriláteros)

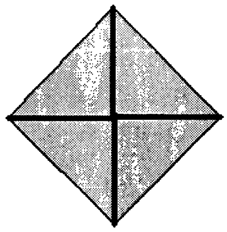


3. Dobrar agora os quatro vértices do quadrado ao centro (passo 1)
4. Que quadrilátero obtém?

(um quadrado)

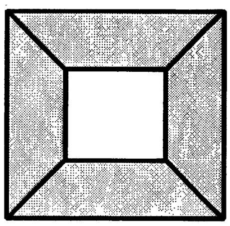


5. Desdobrem o Origami e verifiquem se identificam um novo quadrilátero no CP.
   (Não).
6. Há alguma nova figura geometria no CP?
   (Sim, o triângulo).
7. Quantas figuras conseguem observar?
   (6 quadrados, 12 triângulos, 4 rectângulos)



8. Repetir o passo 2.
9. Quantas figuras conseguem contar?

(8 triângulos e um quadrado)



10. Dobrar e encaixar todos os vértices ao centro de cada triângulo, em cada um dos lados dos quatro lados do quadrado e obter a figura à direita.
11. Quais e quantas figuras geométricas podem observar?

(4 trapézios e 2 quadrados)

Desdobrar o Origami obtido na primeira etapa (moldura) e prosseguir dobrando a partir do passo (1) da figura 4-24
Dobrar agora dois vértices opostos conforme (2), usando as dobras já existentes.
Virar a dobragem prosseguir em (3) e seguir as instruções da figura à direita até obter a caixa. A maioria das dobras foi feita durante a primeira parte da tarefa.

Pode continuar-se com o "jogo de perguntas" ou simplesmente finalizar o Origami e obter a caixa para guardar, por exemplo, as aparas do lápis.
Se considerar ser mais fácil para os alunos pode sempre optar por distribuir o diagrama e seguir a sequência de desenhos, ir elaborando as dobragens passo a passo e fazer as perguntas à medida que se vai avançado no trabalho.

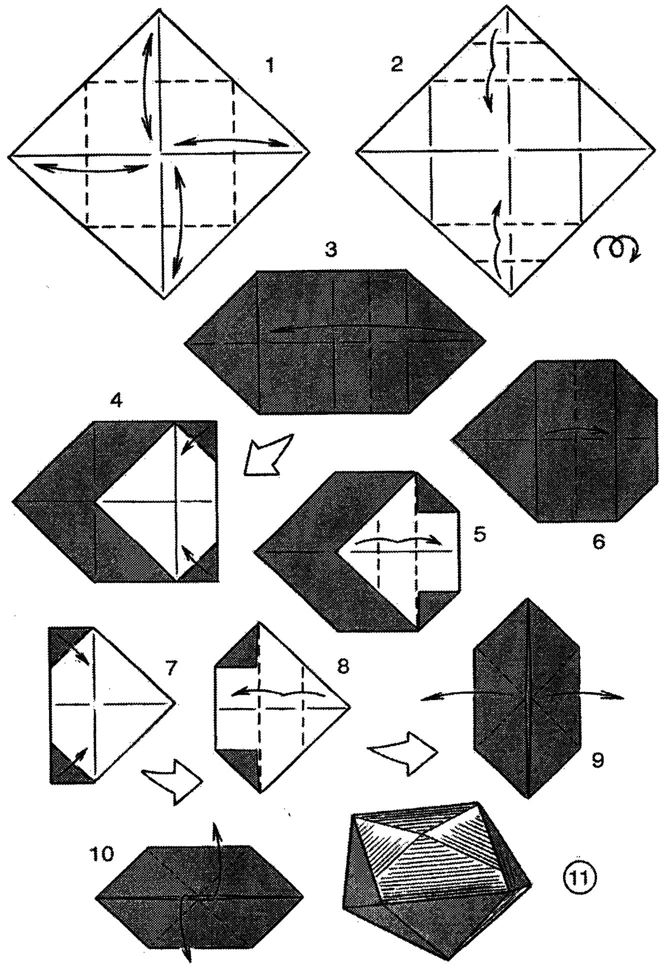


Figura 4-24 - Diagrama para dobrar a caixa

Tarefa 17- Dobrar um Chapéu de Viking

Dobragem tradicional, publicada na maioria dos livros de iniciação ao Origami, normalmente sem qualquer instrução escrita ou referência matemática. Esta dobragem tem a particularidade de se transformar noutras tal como acontece com a pajarita (Kasahara K. , 2008, p. 35)

Tema: Geometria e Medida

Tópico: Figuras no plano e sólidos geométricos

Termos geométricos: largura, comprimento, vértice, quadrado, diagonal, triângulo, trapézio, fracções, ângulos e rectas paralelas.

Objectivos: o triângulo rectângulo e a noção de fracção (1/2, 1/4,1/8).

***Material*:** quadrados de papel.

Questão: Como obter um chapéu viking a partir de quadrado de papel?

Procedimento 1: Distribuir uma ficha de instruções aos alunos e ir questionando passo a passo sobre as figuras obtidas, até obter o Origami.

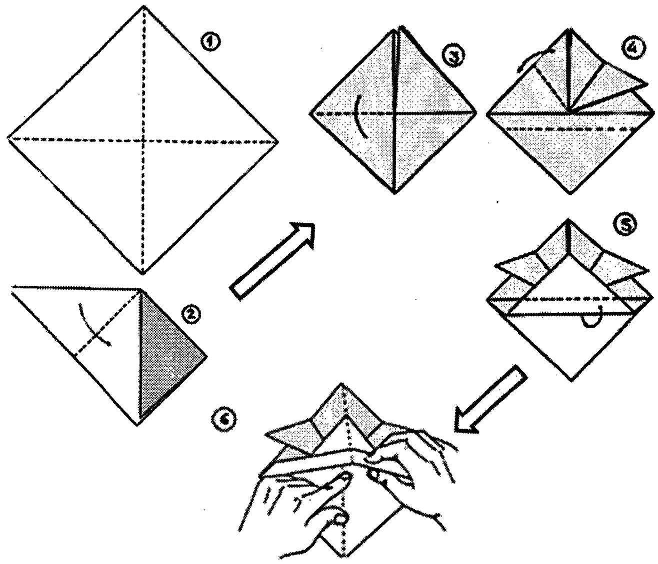


Figura 4-25 - Diagrama da dobragem do chapéu de viking

Tarefa complementar - Dobrar Peixes e Construir Mobile

Este Origami promove a interdisciplinaridade e fomenta a criatividade. Pode ser associado à Matemática, Estudo do Meio, Estudo acompanhado, Língua Portuguesa e Área de Projecto (leitura de uma história, jogo dos nomes colectivos, estuda dos animais marinhos, mobile...).

***Procedimento*:** Distribuir o diagrama e alguns quadrados coloridos aos alunos e permitir que elaborem sozinhos a dobragem. Pedir aos alunos para seguirem o circuito indicado no diagrama e analisarem, passo a passo a sequência de informação.

O professor deve circular pela sala e intervir apenas quando for solicitado.

A finalidade desta tarefa é a construção de um mobile.

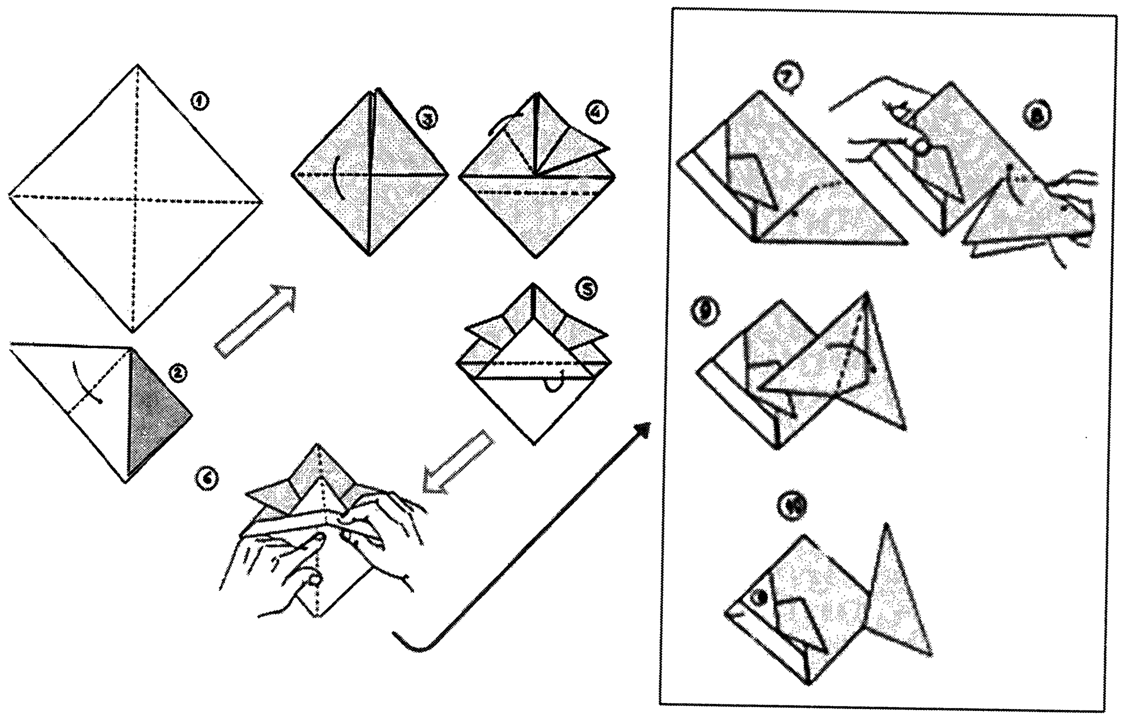


Figura 4-26 - Diagrama da dobragem do peixe

Este conjunto de tarefas pretendeu enfatizar a utilidade da técnica de Origami como material indutor de concentração, precisão na execução, gosto pelo trabalho em equipa e de interdisciplinaridade, mas sobretudo promotor de competências matemáticas.

Ficamos na expectativa de ter contribuído positivamente para desenvolver o gosto pela geometria associada a esta técnica milenar.

CAPITULO V - CONSIDERAÇÕES FINAIS

> " Todo Origami começa quando pomos a mão em movimento. Há uma grande diferença entre compreender alguma coisa através da mente e conhecer a mesma coisa através do tacto". Tomoko Fuse

Como conclusão deste estudo teórico inferimos que da conjugação de toda uma panóplia de informação obtida, da análise do NPMEB, do NCTM e do Currículo Nacional e, parafraseando Cunha, Oliveira, & e Ponte (1995) as actividades de investigação matemática têm um grande valor no processo de aprendizagem desta disciplina, permitindo a exploração de diferentes conceitos matemáticos, promovendo o desenvolvimento de capacidades importantes nos alunos, possibilitando-lhes diferentes níveis de consecução e estimulando o professor a rever aspectos fundamentais da sua prática. "Ensinar não é nada além de fornecer condições para que o aluno construa o seu próprio conhecimento" (Pereira, Reis, & Silva, 2009).

A análise das diversas fontes de informação científica onde se inclui os estudos levados a cabo pelos teóricos das obras citadas e os resultados obtidos pela sua actividade investigativa, permitem inferir que as actividades investigativas com Origami fomentam a exploração, em sala de aula, dos diferentes conteúdos curriculares, previamente apreendidos pelos alunos nas suas construções geométricas. Contribuem para ampliar saberes integrando as várias componentes curriculares de forma agradável tendo sempre em conta a criatividade do aluno e as aplicações à vida quotidiana. Das construções com dobragem em papel emergem propriedades geométricas diferentes das relacionadas com a régua e o compasso, permitindo ampliar o conhecimento geométrico do aluno, nomeadamente, no que diz a respeito aos conceitos de recta, ângulo e simetria, e auxiliando a visualização e compreensão de diversas propriedades geométricas. Com o Origami o aluno passa a ter oportunidade de construir, utilizar e avaliar.

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), os alunos têm capacidade de investigar e formular questões e procurar uma resposta tanto quanto possível fundamentada e rigorosa. Para estes autores, o que mais caracteriza as investigações matemáticas é o seu "estilo de conjectura - teste - demonstração" (Ponte & Oliveira, 2003, p. 10).

Isabel Valente Pires (1992) conclui que, "no quadro de um ensino onde se valorizam diversas estratégias heurísticas e materiais pedagógicos, os alunos dos primeiros anos de escolaridade conseguem desenvolver estratégias próprias para a resolução de problemas, evoluindo de processos mais ingénuos para outros mais formais". É importante para o indivíduo que ele se desenvolva de forma equilibrada e possa exercer todo o seu potencial e criatividade. Assim, um factor relevante é envolver os alunos, sensibilizá-los. No momento em que alguém diz: "Eu não sei dobrar nada", o professor deve conseguir mostrar que uma bola de papel amassada pode representar muitas coisas e incentivar os alunos a serem eles a citar o que poderia ser trabalhado com ela.

> "A adopção de abordagens investigativas torna-se emancipadora se permite ao aluno a formulação de metas e questões para investigação de modo relativamente livre (...). No contexto dos primeiros anos de escolaridade, em que um mesmo professor assegura num tempo único a aprendizagem de diferentes áreas, esta visão não pode ser restrita à Matemática" (Amaral, 2003, p. 228).

Tendo em conta o supracitado e ainda no que concerne ao novo plano da matemática, o currículo e às normas, as tarefas propostas foram consideradas as mais pertinentes para trabalhar propriedades e classificação de figuras no plano, composição e decomposição de figuras, noção de ângulo e a noção número racionais não negativos, fracções.

Segundo Young s(2000) o uso de Origami em sala de aula tem muitos benefícios. "Os alunos devem aprender a seguir instruções verbais, escritas e pictórica, melhorar as habilidades motoras finas e também concentrar-se em criar dobras precisas e realizar as peças com êxito. Muitas vezes os alunos que são tradicionalmente pobres em matemática excelentes em Origami porque ele usa uma parte diferente do cérebro". Youngs enfatiza o facto de recentemente, enquanto fazia alguns origamis com uma classe de alunos ouviu o comentário, "Ei, ele é estúpido em matemática, como é que ele faz o Origami melhor do que eu?" Donde se conclui que podemos, através do Origami estar a dar uma oportunidade de sucesso a alunos que raramente se empenham na realizaçãoou fazem correctamente as tarefas (Youngs, 2000) trabalho original deMarc Kirschenbaum com o titulo Square Puzzle (©1999).

O ensino da Geometria não poderá consistir numa mera transmissão de conteúdos (por parte do professor) e respectiva memorização (por parte dos alunos), mas sim numa experiência geométrica informal em que os alunos investigam e fazem descobertas através da exploração, visualização, registos, comparações e discussões e onde ao professor cabe um papel de orientador e facilitador da aprendizagem.

Consideramos que mais importante que o produto final é o desenvolvimento da capacidade dos alunos em termos do processo de ensino-aprendizagem, aquela que deve ocupar um lugar de destaque, pois através dela propicia-se ao aluno a sua aplicabilidade a diferentes situações. A matemática precisa de ir mais além de simples resoluções de questões matemáticas. É fundamental levar o aluno a uma maior compreensão da teoria e da aplicação desses conhecimentos

A procura pessoal de informação, a reflexão sobre as ideias que querem expressar e transmitir, o trabalho em grupo e a apresentação do seu trabalho aos colegas de turma transforma cada aluno num verdadeiro protagonista da sua aprendizagem, resultando num processo muito motivador e enriquecedor. Deste modo, e porque utilizando o Origami na aprendizagem o aluno não é um mero espectador mas um protagonista activo, através dele o aluno desenvolve as competências fundamentais do NPMEB (2007). Assim sendo, o Origami apresenta-se como uma excelente ferramenta para o ensino de Geometria que, para além de contribuir para a efectiva aquisição dos conhecimentos, possibilita o desenvolvimento de outras habilidades como por exemplo, a interdisciplinaridade, os trabalhos em grupos, os quais são fundamentais para a formação do aluno.

Reconhecendo na problemática da interdisciplinaridade a pedra fundamental para a aprendizagem e desenvolvimento intelectual do aluno, houve, neste estudo, a preocupação de intuir a relação entre a matemática e as diversas disciplinas do currículo, através da técnica do Origami e verificou-se que um trabalho realizado a partir das suas conexões influência de forma positiva no processo de ensino aprendizagem, proporcionando ao aluno um ensino mais agradável. Exemplo disso é a tulipa de Origami realizada para o Dia da Mãe, que associa as diversas disciplinas, matemática (quadrado de papel), estudo do meio (as plantas), língua portuguesa (diálogo entre alunos), formação cívica (comemoração do dia da mãe) e por último a expressão plástica.

Decorridos mais de dois, este trabalho correspondem ao culminar de uma investigação exaustiva e muita perseverança. Estamos convictos de que o que ficou escrito nestas páginas fica muito aquém do trabalho efectivamente realizado.

Estamos conscientes do carácter exploratório deste trabalho e não pretendemos ter atingido respostas definitivas nem absolutas que comprovem a nossa tese, certamente, seriam possíveis incursões para além das que efectuámos.

O interesse por este tema de dissertação é resultado da prática pessoal e profissional em contexto escolar. É indescritível a experiência proporcionada por um pedaço de papel e o imaginário matemático que encerra.

Ao longo dos últimos vinte e quatro anos tenho investigado, estudado e divulgado, em Portugal, a importância do Origami no processo de ensino-aprendizagem. Muitos foram os professores e alunos que se juntaram nesta cruzada. Actualmente muitas escolas portuguesas utilizam o Origami como tarefa de carácter investigativo, bem como um mediador de interdisciplinaridade.

Enfatizar a Origametria implica enfatizar o pensamento de Platão

"Por toda a parte existe Geometria".

Platão

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

A.Silver, E. (1996). Acerca da Formulação de Problemas de Matemática. In L. Leal, P. Abrantes, & J. P. Fonte, *Investigação para Aprender Matemática* (pp. 138-157). Lisboa: APM.

Abrantes, P. (1999). *Investigações em Geometria na Sala de Aula.* Lisboa: Universidade de Lisboa.

Abrantes, P., Serrazina, M. L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica.* Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica (DEB).

AEP, A. E. (s.d.). Obtido de Associación Española de Papiroflexia: www.pajarita.org/

Almeida et al, I. A. (Março de 9 de 2006). *O Origami Como Material Exploratório para o Ensino e Aprendizagem da Geometria.* Obtido em 2009, de http://www.pro.ufjf.br/

Amaral, H. M. (2003). *Actividades Investigativas na Aprendizagem da Matemática no 1º Ciclo-Mestrado em Educação.* Lisboa: Departamentode Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa; Escola Superior de Educação de Lisboa.

Amarante, T., & Pinto, A. d. (1939). *Trabalhos Manuais para o 1º Ciclo dos Liceus.* Porto: Livraria Simões Lopes.

Ambrósio, B. S. (1989). Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates. (SBEM, Ed.) *SBEM - Ano II N2* , pp. 15-19.

Anderson, E. (s.d.). *Origami & Math.* Obtido em 17 de Maio de 2004, de Eric's Origami Page: http://www.paperfolding.com/math

Atiza, E. (2006). Matemáticas y papiroflexia. (C. d. S.A., Ed.) *Correo del Maestro , Núm 121* (XXVII Feria Internacional del Libro del Palacio de Minería 2006).

Aytüre-Scheelel, Z. (1995). *Origami 2* (8ª edição ed.). Paris: Éditions Fleurus.

Baicker, K. (2004). *Origami Match.* New York, EUA: Scholastic Teaching Resources.

Beech, R. (2006). *Pratical Origami- A step-by-step guide to the ancient art of paperfolding* (2001,2002,2003,2004,2005 ed.). London: Hermes House.

Blanco Garcia et al, C. (2006). Papiroflexia na Educación I : Matemáticas. In C. Blanco Garcia, C. Gonzalez, O. Alícia, A. Pedreira, & ENCIGA (Ed.), *Guia do XIX Congreso de Enciga* (Vols. Ano XIX, Nº 61-novembro 2006, pp. 27-28-29-36). Póvoa do Varzim Portugal, Portugal: Escola Secundária de Eça de Queirós.

Blanco García, C., & Otero Suárez, T. (2007). Boletín de las Ciencias-Matemáticas Con PapelL. In Enciga (Ed.), *Guía XX Congresso de Enciga* (Vols. Ano XX, Nº 64 -

Novembro 2007, pp. 105-107). Sanxenxo (Pontevedra), Galicia, Espanha: Asociación dos Ensinantes de Ciencias de Galicia.

Borcovski, S. (21 de Janeiro de 2007). *Israeli origami lover transforms paper-folding into education.* Obtido em 25 de Setembro de 2009, de Israel 21c - Innovation News service: http://www.israel21c.org/culture/israeli-origami-lover-transforms-paper-folding-into-education

Boursin, D. (1997). *Pliages en mouvement.* Paris: Dessain e Tolra.

Bracelpa, A. B. (2007). Obtido em 31 de Janeiro de 2010, de http://www.bracelpa.org.br/bra/saibamais/historia/index.html

Brasil, A. R. *Cerimonia religiosa* (2ªedição ed.). (P. T. Fujimoto, Ed.) Brasil: Associação Religiosa Oomoto do Brasil - Coletânea 11.

Brito, K. L., & Filho, J. B. (2006). *O Aprendizado da Geometria Contextualizada no Ensino Medio-Monografia.* Famosa - Go.

Bugei, S. B. (2002). Obtido em 20 de Outubro de 2007, de http://www.bugei.com.br/ensaios/index.asp?show=ensaio&id=174

Caldas, I., & Fonseca, T. (1996). *Matematica - Uma Linguagem Universal.* Lisboa: Edições Rumo Lda.

Candeias, A., Nóvoa, A., & Figueira, M. H. (1995). *Sobre a Educação Nova:Cartas de Adolfo Lima e álvaro Viana de Lemos (1923-1941).* Lisboa: Educa_ Historia.

Candeias, N. (s.d.). *Aprendizagem em ambientes de geometria dinâmica.* Obtido em 3 de Março de 2009, de http://scholar.google.pt/scholar?q=Freudenthal+principios+basico+geometria

Candeias, N., & Ponte, J. P. (s.d.). *Uma Proposta Curricular para o Ensino da Geometria do 8.ºano.* Obtido em 20 de Fevereiro de 2010, de http://www.spce.org.pt/sem/Montegordo/7XV.pdf

Carroll, L. (1954). *Alice Adventures in Wonderland- Through the Looking-Glass and other Writings* (first edition 1865 (Alice'S Adventures in Wonderland) e 1871 (Trough the Looking Glass) ed.). London: G.F.Maine.

Celpa, A. d. (s.d.). *Historia do Papel - caderno temático.* Obtido em 31 de Janeiro de 2009, de http://www.celpa.pt/images/articles/213/art213_historia_papel.pdf

Clemente, E. (1992). "Proceedings of the Conference on Origami in Education and Therapy. *Boletim da Britishi Origami Society* , p. 8.

Clemente, E. (1990). *Papiroflexia.* Barcelona: Plaza & Janes Editores, S.A.

Cockcroft. (1982). Mathematics Counts. In *Mathematics Counts.* London: HMSO.

Costa, A. M. (1929). *Trabalhos Manuais- Primeiros Exercícios de Dobragem de papel.* Edições Mantua, Lda.

Cruz, G. P., & Gonschorowski, J. d. (2006). *O Origami como Ferramenta de Apoio ao Ensino da Geometria.*

Cunha, M. H., Oliveira, H., & e Ponte, J. .. (1995). Investigações matemáticas na sala de aula. In *Actas do Profmat 95.* Lisboa: APM.

DEB. (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação - Departamento de Educação Básica.

DEB. (2004). *Organização Curricular e Programas Ensino Básico -1º ciclo* (1ª edição 2001; 4ª Edição Janeiro 2004 ed.). Lisboa: Ministério da Educação - Departamento de Educação Básica.

Demaine, E. D. (s.d.). *History of Curved Origami Sculpture.* Obtido em 5 de Março de 2009, de http://erikdemaine.org/curved/history/

Demaine, E. (19 de July de 2007). *Kan Chu Sen's Wakoku Chiyekurabe.* Obtido em 2 de Fevereiro de 2010, de http://erikdemaine.org/foldcut/sen_book.html

DGIDC. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico (Novo).* Ministerio da Educação - Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Dias, R. (2006). *Origami oara Interpretes.* Gieres: L' Atelierdu Gresivaudan.

DivulgaMat, C. V. (2009). *Papiroflexia y Matemáticas.* Obtido em 20 de Janeiro de 2010, de Cultura y Matemáticas: http://divulgamat.ehu.es/weborriak/Cultura/papiroflexia/NudoPenta.asp

E.Dana, M. (1987). Learning and Teaching Geometry , K 12 - A Square Deal For Elementary School. In M. M. Lindquist, & A. P.Schulte, *The Arithmetic teacher,* (Vol. Volume 37, pp. 114-121). Reston: NCTM (1989).

Engaña, M. L., Prieto, I. N., & Alvarez, C. S. (2003). *La Educacíon Primaria en el Chile 1860-1930.* Santiago: LOM Ediciones.

Ernest, P. (1996a). Investigações, Resolução de Problemas e Pedagogia. In L. C. P. Abrantes, *Investigar para aprender matemática: Textos seleccionados* (pp. 25-47). Lisboa: Projecto Matemática Para Todos e Associação de Professores de Matemática.

Ester Pinto, J. S. (s.d.). *Grous, Origami e Matemática.* Obtido em 12 de Janeiro de 2009, de http://www.apm.pt/matearte/materiais/grous-origami/grou-vinco.pdf

Fainguelernt, E. K. (1999). Educação Matemática: Representação e Construção em Geometria. Porto Alegre: Artes Médicas.

Fainguelernt, E. K. (1995). O Ensino de Geometria no 1º e 2º Graus . In A Educação Matemática. *Revista SBEM - Ano III - nº 4* , pp. 45,53.

fc.ul. (2000). *Leonardo da Vinci.* Obtido de http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm33/Leonardo.htm

Fernandes, A. d. (1960). *Elementos de Geometria.* Porto: Edições Marãnus.

Franco, B. (1999). *Unfolding Matematics With Unit Origami* (First ed.). Emeryville: Key Curriculum Press.

Freudenthal, H. (1973). *Matematics as an Educational Task.* Dordrecht:D. Reidel: Publishing Company.

Gardner, M. (2008). *Origami, Eleusis, and the Soma Cube.* New York: Cambridge University Press.

Gênova, A. C. (1991). *Brincando com dobraduras* (3º edição ed.). S.Paulo, Brasil - S. Paulo: Ed. Global.

Gênova, C. (s.d.). Origami e geometria.

Gestalt SP. (s.d.). Obtido em 29 de 7 de 2009, de Instituto Gestalt de S. Paulo: http://www.gestaltsp.com.br/

Goldberg, M. C. (1998). Educação e Qualidade:repensando conceitos. In http://www.ipv.pt/millenium/Millenium29/31.pdf (Ed.), *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos.* S. Paulo.

Grupo Riglos, G. A. (1988). *El libro de las Pajaritas de Papel.* Madrid: Alianza Editorial.

Gurkewitz, R., & Bennett, A. (1995). *3D- Geometric Origami- Modular Polyedra.* Toronto, Ontário, Canada: Dover Publications, Inc.

Harbin, R. (1980). *Lárt du Pliage du Papier.* Montreal, Canada: Les Éditions de L'Homme.

Harbin, R. (1971). *Secrets of Origami - The Japanese art of paperfolding.* London: Octopus Books Limited.

Hernández, J. d. (2001). *Matematicas y Papiroflexia.* Madrid: Associación Espanõla de Papiroflexia.

Ho, G. (1993). Obtido em 23 de Novembro de 2009, de Origami Therapy in Mental Health: http://sites.google.com/site/origamimind/people-in-history

Honda, I. (1995). *The World of Origami* (first edition 1965 ed.). Tokyo*San Francisco: Japan publications Trading Company.

Houdini, H. (1922). *Houdini's Paper Magic* (Informação retirada da internet do site de Amason.com.UK ed.). E. P. Dulton & Company (copyright 1922).

Hull, T. (2002). *Origami 3 - Third International Meeting of Origami Science, Mathematics and Education-2001.* Massachusetts: A K Peters.

Hull, T. (2006). *Project Origami Activities for Exploring Mathematics.* Wellsley-Massachusetts: A.K. Peters,Ltd.

Hull, T. (9-11 de March de 2001). *The 3rd International Meeting of Origami Science, Math, and Education- Abstracts of Talks.* Obtido em 25 de setembro de 2009, de Origami Science, Math and Education: http://kahuna.merrimack.edu/~thull/osm/osm.html e http://kahuna.merrimack.edu/~thull/osm/abstracts.html#ed

Imenes, L. M. (1995). *Vivendo a Matemática.* Brasil: Editora scipione.

Indiopedia.org. (s.d.). Obtido em 5 de Agosto de 2009, de Indological Knowledgebase: http://www.indopedia.org/Origami.html

J.Lang, R. (31 de Dezembro de 1996-2003). *Robert J. Lang Origami.* Obtido em 2008, de http://www.langorigami.com/

Jackson, P. (1989). *Origami- a Complete Step-by Step Guide.* London: Guild Publishing.

Junior, E. B. (1900). *Trabalho Manual.* (H. Garnier, Ed.) Brasil: Livreiro Editor.

Kanegae, M. (1988). *Arte e Técnica da Dobradura de Papel.* Aliança Cultural Brasil-Japão.

Kasahara, K. (1979). *Origami International.* Japan: Tokyoinshokan C.,LTD.

Kasahara, k. (1991). *Origami Omnibus- Paperfolding for Everybody* (1ª edição 1988; 4ª edição 1991 ed.). Tokyo e New York: Japan Publications,Inc.

Kasahara, K. (2008). *The Art and Wonder of Origami* (1ª edição ed.). Japan: Gijutsu Hyoron-Sha Publishing Co.,Ltd.

Kawasaki, T. (2005). *Roses, Origami & Maths* (first printing 1998 ed.). (K. Nagai, Trad.) Japan: Japan Publications Trading Co, Ltd.

Kawasaki, T. (2009). *Wikipedia.* Obtido em 10 de Março de 2009, de http://en.wikipedia.org/wiki/Toshikazu_Kawasaki

Kenneway, E. (1978). *Volti in Origami.* (R. Morasso, Trad.) Milano: Il Castello/Collane Tecniche.

Kenneway, E. (1986). *Origami Paperfolding for fun* (first edition1980 ed.). London: Treasure Press.

Koda, Y. (1986). Origami Arte-Educação no Japão. In *Caderno de Cultura.* S. Paulo: Aliança Cultural Brasil-Japão.

koshiro, H. (2009). *Origami Construction.* Obtido em 2009, de k's Origami: http://www.ousaan.com/

Koya, O. (15 de Junho de 2007). Especial Origami. *Nipponia nº41* , p. 5.

Lang, J. M. (1990). *Origami sea Life.* NewYork -USA: Dover Publications, Inc.

Lang, R. J. (8-10 de September, de 2006). *4th OSME.* Obtido de (The Fourth International Conference on Origami in Science, Mathematics and Education): http://www.langorigami.com/science/4osme/4osme.php4

Lemos, Á. V. (1929). *Trabalho Manual Escolar- Trabalhos com Papel.* Coimbra: Edição de autor.

Lister, D. (1996). *David Lister's Essays.* Obtido de http://www.britishorigami.info/academic/lister/index.php

Lister, D. (1998). *Origami History.* Obtido de http://www.paperfolding.com/history/ also http://www.britishorigami.info/academic/lister/index.php

Lorenzato, S. (2006). Laboratório de ensino de matemática e materiais didácticos manipuláveis. In S. Lorenzato (org.), *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores* (pp. 3-37). Campinas, SP: Autores Associados.

M.E. (1990). *Programa do 1º ciclo do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação.

Machado, N. J. (Dezembro de 1991). Estudos Avançados-A Alegoria em Matemática. Obtido em 2010, de Scielo Brasil- The Scientific Electronic Library Online: http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0103-40141991000300005&script=sci_arttext

Maekawa, J. (2008). *Genuine Origami* (First edition ed.). (K. Hatori, Trad.) Japão: Japan Publication Trading CO.,Ltd.

Matos, J. M. (1985). *Van Hiele levels of preservice primary teachers in Portugal.* Lisboa: APM.

Medeiro, A. P. (Novembro / 2006). *Arte e Matemática no ensino fundamental: Um estudo sobre a relação da geometria e da arte.* São Paulo: UNIMESP – Centro Universitário Metropolitano de São Paulo.

Mendes, E. J. (2001). A Propósito de Actividade. In Educação Matemática, N.º 61. *APM*, pp. pp.36-39.

Menezes, L. (2000). *Comunicação na Aula de Matemática e Desenvolvimento Profissional de Professores* . (Projecto de Investigação Matemática 2000: O poder da comunicação, apoiado pelo Instituto de Inovação Educacional) Obtido de http://www.ipv.pt/millenium/20_ect7.htm

Mitchel, D. (1952). *Complete Origami - Easy Tecniques and 25 great Projects.* Ontario-Canada: A Firefly Books.

Mitchell, D. (2008). *Complete Origami: Techniques and Projects for All Levels.* London: Collins and Brown Crafts.

Monteiro, L. (2008). *Fundamentos Matematicos do Origami.* Lisboa: Associação Ludus.

Montral, J., & Lang, J. R. (1990). *Origami sea Life.* NewYork -USA: Dover Publications, Inc.

Moreno, M. (Primavera de 2007). Apuntes Escolares. *Revista Valdelardo/ 56* , pp. 5-7.

Mukerji, M. (2009). *Ornamental Origami-Exploring 3D Geometric designs.* Massachusetts: A K Peters,Ltd.

nationmaster.com. (s.d.). Obtido de http://www.nationmaster.com/encyclopedia/Tamatebako

NCTM. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Commission on Standards for School Mathematics of the National Council of Teachers of Mathematics.* New Jersey: National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM. (1989). *Normas para o Currículo e Avaliação em Matemática Escolar.* (APM, Ed.) Lisboa: Instituto de Inovação Educativa.

NCTM. (1993). *Normas para o Currículo e Avaliação em Matemática Escolar- collecção de adendas* (Vol. K6). (A. Series, Trad.) Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

NCTM. (2009). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar (edição portuguesa).* (N. C. Matematics, Ed.) Lisboa: Associação Professores de Matemática.

NCTM. (1998). *Principles and Standards for School Mathematics: Discussion draft.* Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

NTCM. (1991). *Normas para o currículo e avaliação em Matemática Escolar.* Lisboa: APM e IIE. (Trabalho original em Inglês, publicado em 1989).

Ohoka, H. (1734). *"Ranma-Zushiki" (Ranma Sketches).* [edit]?

Oliveira, F. F. (2004). *Origami: Matemática e Sentimento.* S.Paulo.

Ortega, I. P. (s.d.). *Geometria de Antonio Stradivari.* Obtido de www.violinaki.com/imagenes/geometria

Paiva, J. P., & Bezerra, M. d. (2008). *O Origami no Ensino de Geometria: Uma Experiância em Sala de Aula.* Brasil.

Palacios, V. (2008). *História de la Pajarita.* Barcelona: Editorial Miguel A. Salvatella.

Palis, J. (25 de Outubro de 2004). *A importância Atual da Matemática.* (S. B. Ciência, Ed.) Obtido em 30 de Novembro de 2009, de Jornal da Ciência: http://www.jornaldaciencia.org.br/Detalhe.jsp?id=22663

Pappas, T. (2001). *Fascínios da matemática – A descoberta da matemática que nos rodeia.* Lisboa: Editora Replicação.

Pappas, T. (1998). *Fascinios da Matemática- a Matematica que nos Rodeia.* (F. Nunes, & al, Trads.) Lisboa: Editora Replicação.

Pappas, T. (1995). *More Joy of Matematics - Exploring Mathematics All Around You* (1ª edição 1991, 6ª edição 1995 ed.). San Carlos: Tetra-Wide World Publishing.

Pearl, B. E. (1997). *Math in Motin- Origami in the Classroom* (1ªedição 1994, 5ª edição 1997 ed.). Yardley, USA.

Pereira, J. S., Reis, A. Q., & Silva, D. K. (02- 05 de Junho de 2009). X Encontro Gaúcho de Educação Matemática -Oficina "O Problema do Jogo dos Discos". *GT 01 – Educação Matemática nos Anos Iniciais e Ensino Fundamental* .

Piaget, J. (1987). *O nascimento da Inteligência na Criança.* Rio de Janeiro: LTC.

Piaget, J., & B.Inhelder. (1956). *The Child's Conception o Space.* London: Routledge & Kegan Paul.

Pinto, E., Santos, J. S., & Itabashi, H. (2007). *Grous, Origami e Matemática.* Obtido em 12 de Janeiro de 2009, de Matemática e Arte: http://www.apm.pt/matearte/materiais/grous-origami/grou-vinco.pdf

Planchard, É. (1975). *A Pedagogia Contemporânea.* Coimbra: Coimbra Editora.

Ponte, J. P. (1993). A Educação Matemática em Portugal: Os Primeiros Passos duma Comunidade de Investigação. *Quadrante - Revista de Investigação em Educação Matemática-Teoria da Educação Matemática , 2.*

Ponte, J. P., & Oliveira, H. (2003). *Investigações Matemáticas na Sala de Aula.* Belo horizonte: Autentica.

Ponte, J. P., & Serrazina, M. d. (2000). *Didáctica da Matemática no 1º Ciclo.* Lisboa: Universidade aberta.

Ponte, J. P., & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.º ciclo.* Lisboa: Universidade Aberta.

Real Sociedad Matemática Española, R. (s.d.). *DM- Centro Virtual de Divulgacion de las Matemática.* Obtido em 1 de Abril de 2010, de DivulgaMat: http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=8638:28-el-nudo-pentagonal-ii&catid=65:papiroflexia-y-matemcas&directory=67

Rego, R. G., Rego, R. M., & Junior, S. G. (2004). *A Geometria do Origami:Actividades de Ensino Através de Dobraduras* (2ª Reimpressão ed.). João Pessoa: Universitária.

Robinson, N. (2004). *The Origami Bible* (2ª edição ed.). Londres: Collins & Brown.

Rogrigues, L. J., Araújo, A. S., & Rocha, I. B. (2007). *Brincando com a geometria das dobraduras.* Obtido em 22 de 3 de 2009, de http://www.ufpel.tche.br/cic/2007/cd/pdf/CE/CE_01808.pdf

Row, T., & Beman, W. W. (1941). *Geometric Exercises in Paper Folding* (4ª edição- 1991 ed.). Kessinger Publishing.

Sagredo, D. S. (1938). *Papirolas - Tratado de Papiroflexia- Figuras Geometricas da Papel Doblado* (Vol. 1º). Buenos Aires: Gráfico de A. Contreras.

Santos, M. R. (1º Semestre de 1995). Teoria de Van Hiele:Uma Alternativa para o Ensino da Geometria no 2ºCiclo: In Educação Matemática. *Educação Matemática , nº 4,* pp. 3-13.

Serrazina, M. d. (Dezembro de 1991). Aprendizagem da Matemática: A Importância da Utilização de Materiais. (Dgidc.min-edu, Ed.) *Noesis* .

Serrazina, M. L. (1993). *Ensino da Geometria* (1ª edição ed.). Setúbal, Portugal: Escola Superior de Educação.

Severo, A., Marinho, F., & Salazar, M. (1964?). *O Meu Llivro de Trabalhos Manuais.* Porto: Livraria Ferreirinha.

Shoin, K. (1992). *Chiogami,Kirigami & Origami.* (N. Hamada, Ed., & K. Steiner, Trad.) Kyoto Shoin.Co., Ltd.

Shumakov, Y. e. (s.d.). *Oriland.* Obtido em 12 de Fevereiro de 2009, de www.oriland.com/oriversity/benefits/articles.asp?category=articles...

Silva, G. R., & Santos, R. C. *Construção do Conhecimento de Geometria: Uma Proposta de Utilização de Materiais Manipulativos e o uso do Modelo de Desenvolvimento do Pensamento Geométrico de Van Hiele no Ensino-Aprendizagem de Geometria.* Projecto de Pesquisa II.

Simões, A. (1996). *O Que é a Matemática?* Obtido em 15 de Maio de 2010, de Folha do Alcino- Estudar Matemática: http://www.prof2000.pt/users/folhalcino/estudar/mat/index.htm#o_que

Smith, J. (1992). In K. Huzita (Ed.), *Understanding Geometry through Origami Axioms. BOS Magazine*, pp. 37-70. London: Society, British Origami.

Smith, J. (1990). *Origami Therapy.* London: British Origami Society.

Souza, M. (s/d). *Kuruma Ningyo E O Corpo No Teatro de Animação Japonês.* S. Paulo-Brasil: Annablume.

Torres, Leyla. (2008). *Entrelazando vida, creatividad y origami.* Obtido em 9 de dezembro de 2009, de latrenza.wordpress: http://latrenza.wordpress.com/page/2/

Unamuno. (1902). Apuntes para un tratado de cocotología. In *Amor y Pedagogia* (p. 293).

Vacca, G. (1930). Della Piegatura della carta applicata alla geometria. *Periodico di Matematiche, IV , X*, p. 44.

Van Hiele, P. (1986). *Structure and Insight: A theory of Mathematics Education.* London: Academic Press.

Vauthier, B. (2004). *Arte de escribir e ironía en la obra narrativa de Miguel de Unamuno .* (E. U. Salamanca, Ed.) Salamanca.

Veloso, E. (1998). In P. Abrantes, *Investigações em Geometria na Sala de Aula.* Lisboa: Universidade de Lisboa.

Verrill, H. (s.d.). Obtido em 23 de 3 de 2009, de H. A. Verrill: http://www.math.lsu.edu/~verrill/

Vishne, G. (s.d.). *Origami models by Gadi Vishne.* Obtido em 2009, de http://www.origadi.com/gadi_vishne.html: http://www.origadi.com/diag/uncreased_square_out_of_random_rectangle.pdf

Wikipedia. (s.d.). *wikipedia.org.* Obtido em 20 de Julho de 2009, de http://www.wikipedia

Yamaguchi, M. (1990). *Kusudama ball origami.* Tokyo: Shufunotomo Co. Ltd.

Youngs, M. (Abril de 2000). *Origami Squared.* Obtido em 12 de Fevereiro de 2010, de Puzzle Origami Squared: http://www.aimsedu.org/Puzzle/origami2/origami2a.html