UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Mestrado em Matemática Aplicada
Biénio 2004 / 2005

Existência de minimizantes para integrais não-convexos do cálculo das variações com lagrangiano mensurável

Dissertação apresentada por:
Pedro Miguel Lola Simões
Orientador: Professor Doutor António Ornelas
(Professor Associado com Agregação)
"Esta dissertação não inclui as criticas e as sugestões feitas pelo júri"
Évora 2007

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Mestrado em Matemática Aplicada
Biénio 2004 / 2005

Existência de minimizantes para integrais não-convexos do cálculo das variações com lagrangiano mensurável

Dissertação apresentada por:
Pedro Miguel Lola Simões
Orientador: Professor Doutor António Ornelas
(Professor Associado com Agregação)

"Esta dissertação não inclui as criticas e as sugestões feitas pelo júri"

Évora 2007

Agradecimentos:

Agradeço, em primeiro, aos meus pais e irmã, por toda a ajuda que deram durante este momento de aprendizagem. Sem eles, sem o seu apoio e animo, o prazer de concluir este trabalho não teria tido lugar.

Devo também agradecer ao meu orientador, o Professor Doutor António Ornelas, por todo o apoio que me deu em todos os momentos da elaboração desta dissertação. O seu apoio científico foi indiscutível, e ser seu orientando um enorme privilégio.

Por fim, um profundo sentimento para com os meus colegas e amigos.

Resumo:

Existência de minimizantes para integrais não-convexos do cálculo das variações com lagrangiano mensurável

Analisam-se vários artigos de investigação matemática que demonstram a existência de minimizantes, numa classe de funções reais $x(t)$, de variável real, absolutamente contínuas definidas num intervalo compacto, para integrais do cálculo das variações com lagrangiano não-convexo relativamente à variável velocidade $x'(t)$. O nosso objectivo é alcançar uma fertilização cruzada entre dois métodos bem diferentes; e assim conseguir, no futuro próximo, avançar mais além e obter novos resultados de existência de minimizantes de integrais não-convexos.

Abstract:

Existence of minimizers for nonconvex integrals of the calculus of variations with measurable lagrangian

We analyse several math research papers which prove existence of minimizers, in a class of real $x(t)$ functions, of one real variable, absolutely continuous on a compact interval, for integrals of the calculus of variations with lagrangian nonconvex relative to the velocity variable $x'(t)$. Our aim is to reach a cross-fertilization between two quite distinct methods; and to succeed in obtaining, in the near future, new existence results for minimizers of nonconvex integrals.

Conteúdo

CAPíTULO 1

Introdução

Esta dissertação de Mestrado tem como objectivo o estudo de problemas de existência de minimizantes para funcionais integrais do cálculo das variações com lagrangiano mensurável (nomeadamente não semicontínuo inferior). Ao longo da dissertação, além de resultados recentes, expõem-se também aspectos mais clássicos da teoria. Em termos de organização, divide-se nas seguintes partes:

(1) Introdução;
(2) O cálculo das variações no caso convexo;
(3) Resultados recentes no caso não-convexo;
(4) Apêndice: Definições e resultados preliminares.

No remanescente deste capítulo, faremos uma breve introdução aos problemas considerados neste texto.

No segundo capítulo estudam-se resultados clássicos do *Cálculo das Variações*, expressão que foi utilizada pela primeira vez por Leonard Euler em 1760 (ver [**GH04**, pag. 18], [**GF00**, pag. 6], [**SW01**]) após ter recebido uma carta, de Louis Lagrange, onde se expunha um novo método (baseado no que actualmente chamamos variações) para o estudo de problemas isoperimétricos.

O nascimento do Cálculo das Variações é atribuído a Johann Bernoulli quando anos antes, em 1696, desafiou a comunidade matemática com o *Problema da Braquistócrona* (ver [**BGH98**, pag. 44], [**GH04**, pag. 367], [**GF00**, pag. 3], [**SW01**]):

... Se num plano vertical forem dados dois pontos A e B, pretende-se especificar a órbita AMB da massa pontual móvel M ao longo da qual, partindo de A, e sob a influência do seu próprio peso, chega a B no mais curto tempo possível...

O problema fundamental do Cálculo das Variações, consiste em minimizar o funcional integral

$$(1) \qquad \mathcal{I}(x(\cdot)) = \int_a^b L(t, x(t), x'(t))dt, \quad \text{definido em } \mathcal{X}_{AB},$$

onde $\mathcal{X}_{AB}$ representa a classe das funções $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ que satisfazem as condições de fronteira $x(a) = A$ e $x(b) = B$. A função $L : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ chama-se lagrangiano. Usamos os simbolos (t, s, ξ) para os argumentos de L (tempo, estado, velocidade).

Costumam levantar-se três questões fundamentais relativamente a este problema: *Existe minimizante? O minimizante é regular? Que condições necessárias tem o minimizante de satisfazer?* Como é óbvio, em geral a resposta a estas questões é negativa, caso não se imponham hipóteses adicionais sobre o lagrangiano.

Em relação à primeira pergunta, as hipóteses usuais impostas ao lagrangiano, sob as quais é possível provar um resultado de existência de solução, no conjunto $\mathcal{X}_{AB}$, são: a semicontinuidade inferior do lagrangiano, a convexidade em relação à velocidade ξ e a condição de crescimento superlinear, i.e., a exigência da existência de uma função $\theta(\cdot)$ tal que $\frac{\theta(\zeta)}{\zeta}$ converge para $+\infty$ quando ζ tende para $+\infty$, e $L(t, s, \xi) \geq \theta(\xi)$. Este método é conhecido por *Método Directo do Cálculo das Variações* e foi desenvolvido, principalmente, pelo matemático italiano L. Tonelli (em 1915, ver [**Ces83**, pag. 533]). De um modo geral, uma vez que existe sempre uma sucessão minimizante para o funcional integral $\mathcal{I}(\cdot)$, i.e., uma sucessão de funções $(x_n(\cdot))$ tais que $\mathcal{I}(x_n(\cdot))$ converge para o ínfimo de $\mathcal{I}(\cdot)$, e como a condição de crescimento superlinear implica a precompacidade fraca de $(x_n(\cdot))$, podemos sempre seleccionar uma subsucessão minimizante fracamente convergente para uma função $y(\cdot)$ absolutamente contínua, definida em $[a, b]$. Como as hipóteses de convexidade e semicontinuidade inferior do lagrangiano (ver [**Ces83**], [**Dac89**], [**ET99**], [**Iof77**]) asseguram a semicontinuidade inferior sequêncial fraca do funcional integral $\mathcal{I}(\cdot)$, conclui-se que uma tal função $y(\cdot)$ minimiza o funcional integral considerado.

No caso em que o lagrangiano é não-convexo, uma possível estratégia para provar a existência de minimizantes consiste em obter como acima um minimizante $z(\cdot)$ para o funcional integral convexificado

$$\mathcal{IC}(x(\cdot)) = \int_a^b L^{**}(t, x(t), x'(t))dt, \quad \text{definido em } \mathcal{X}_{AB}, \tag{2}$$

(onde $L^{**}(\cdot)$ representa a função bipolar de $L(\cdot)$, i.e., epi $L^{**}(s, \cdot) = \overline{co}$ epi $L(s, \cdot)$), de tal modo que $z(\cdot)$ satisfaz propriedades de regularidade adequadas; e então utilizam-se tais propriedades para construir um novo minimizante relaxado $y(\cdot)$ que, além disso, também minimiza o integral não-convexo $\mathcal{I}(\cdot)$.

Supondo que existe um minimizante $y(\cdot)$, outro problema consiste em determinar condições necessárias que $y(\cdot)$ terá que satisfazer, por ser minimizante. Em análise real, um princípio usual consiste em, dado um minimizante pertencente ao interior do domínio de uma função, obter uma condição necessária para este ponto explorando o que acontece na sua vizinhança, por exemplo, o gradiente da função terá de ser zero. Pode então perguntar-se, será possível adaptar este princípio ao Cálculo das Variações? A resposta a esta pergunta é afirmativa, e conduz-nos à Equação de Euler-Lagrange e suas variantes. Isto é feito considerando uma variação admissível, i.e., uma função $\phi(\cdot) \in C_0^\infty([a, b]; \mathbb{R}^n)$, e considerando o funcional integral $\mathcal{I}(\cdot)$ aplicado a $x(\cdot) + \varepsilon\phi(\cdot)$, onde ε é um número real, e sendo o novo funcional integral $I(x(\cdot)+\varepsilon\phi(\cdot))$ encarado como uma função real da variável real ε. Para esta função, o ponto $\varepsilon = 0$ deve ser de estacionaridade. Sempre que seja possível passar ao limite sob o sinal do integral, obtemos a equação de Euler-Lagrange

$$\int_a^b [\langle L_\xi(t,y(t),y'(t)),\phi'(t)\rangle + \langle L_s(t,y(t),y'(t)),\phi(t)\rangle]dt = 0,$$

ou, representando por $\frac{d}{dt}$ a derivada no sentido fraco,

$$\frac{d}{dt}L_\xi(t,y(t),y'(t)) = L_s(t,y(t),y'(t)).$$

Tonelli provou a validade da Equação de Euler-Lagrange quando o lagrangiano $L(\cdot)$ é de classe C^3, ou C^2 no caso $n = 1$, e $L_{\xi\xi}(\cdot)$ é estritamente positiva. Muitos esforços foram feitos com o intuito de enfraquecer as condições de regularidade impostas ao o lagrangiano (ver [**BM85**], [**Ces83**], [**Cla90**], [**CV85**], [**IR75**], [**MOS02**]).

Em [**BM85**] , J. M. Ball e V.J. Mizell apresentam um exemplo de Lagrangiano tal que $L_s(\cdot,y(\cdot),y'(\cdot))$ é não integrável (aqui $y(\cdot)$ é o minimizante). Portanto terá que se impor alguma condição sobre o termo $L_s(\cdot,y(\cdot),y'(\cdot))$ de modo a assegurar a validade da equação de Euler-Lagrange.

Em [**Ces83**], [**Cla90**], [**MOS02**], [**VZ97**], partindo-se do pressuposto de existência de uma função integrável $S(t)$, tal que para toda a função $x(\cdot)$ na vizinhança do minimizante, $|L_s(t,x(t),x'(t))|$ é limitado por $S(t)$ e demonstra-se a validade da equação de Euler-Lagrange, supondo $L(t,\cdot,x'(t))$ localmente Lipschitziana.

Mais tarde, F. H. Clarke, em [**Cla75**] e [**Cla90**] demonstrou a inclusão diferencial de Euler-Lagrange para o caso em que o lagrangiano satisfaz: $L(t,\cdot,\xi)$ é localmente limitado e localmente lipschitziano; e $L(t,s,\cdot)$ é convexo.

Contudo, a condição local de Lipschitz em relação à segunda variável exclui uma grande classe de lagrangianos para os quais o problema de minimização do funcional integral $I(\cdot)$ tem solução. Nomeadamente aqueles em que: $L(t,\cdot,\cdot)$ é uma função semicontínua inferior, com crescimento superlinear; e $L(t,s,\cdot)$ é convexa.

Em [**AAB89**], L. Ambrosio, O. Ascenzi e G. Buttazzo, consideram o problema de minimização de funcionais dos tipos

$$\mathcal{F}(x(\cdot)) = \int_a^b L(t,x'(t))dt, \tag{3}$$

e

$$\mathcal{L}(x(\cdot)) = \int_a^b L(x(t),x'(t))dt \tag{4}$$

definidos na classe de funções $\mathcal{X}_{AB}$. Assim, com o objectivo de estudar o problema de minimização do funcional $\mathcal{L}(\cdot)$, onde $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0,+\infty]$ e tal que $L(s,\cdot)$ é convexa, semicontínua inferior e $L(\cdot,\xi)$ é mensurável, os autores observam que se $y(\cdot)$ é solução do problema considerado, então a aplicação identidade $\varphi(t) \equiv t$ é minimo local para o funcional $\mathcal{F}(\cdot)$, pelo que a primeira parte deste artigo se dedica ao estudo de funcionais deste tipo. Portanto, provam que toda a solução $y(\cdot)$ é regular e satisfaz a inclusão diferencial de Euler-Lagrange, para funcionais do tipo $\mathcal{F}(\cdot)$, e DuBois-Reymond, para funcionais do tipo $\mathcal{I}(\cdot)$.

No terceiro capítulo, estudam-se os artigos de C. Marcelli [**Mar02**] e de A. Ornelas [**Orn**], [**Orn05**], onde se demonstra a existência e regularidade da solução para o problema de minimização de funcionais integrais $\mathcal{F}(x(\cdot))$ e $\mathcal{L}(x(\cdot))$ respectivamente.

P. Kaiser (ver [**Ces83**, p. 440]), para funcionais integrais $\mathcal{F}(x(\cdot))$, definidos para funções $x(\cdot) \in W^{1,p}([a,b];\mathbb{R}^n)$ tais que $x(a) = 0$ e $x(b) = d$, com lagrangiano $L(t,\xi) = \varphi(t)(1+(\xi)^2)^{\frac{1}{2}}$ (caso em que o funcional integral representa um comprimento de arco ponderado), provou que a existência de mínimo depende do declive d. Posteriormente condições necessárias e suficientes para a existência de mínimo para o funcional integral $F(\cdot)$, em que o lagrangiano verifica: $L(\cdot,\xi)$ mensurável, $L(t,\cdot) \in C^1(\mathbb{R})$ e convexo, são estudadas no artigo [**Mar97**]. A extensão dos resultados aí apresentados, ao caso em que o lagrangiano é não-convexo e não-superlinear e pouco suave estudam-se no artigo [**Mar02**].

Em [**Orn05**], observa-se que na demonstração de existência de minimizante, um ingrediente essencial para a semicontinuidade inferior sequencial fraca do funcional integral $\mathcal{L}(x(\cdot))$, costuma ser a semicontínuidade inferior do lagrangiano $L(\cdot)$ (ver [**Iof77**], [**ET99**], [**Dac89**]); contudo, em [**DBD83**] e [**Amb87**] demonstra-se que para uma grande classe de lagrangianos unidimensionais, aqueles em que $L(s,\cdot)$ é uma função convexa e semicontínua inferior (como acontece quando $L(\cdot)$ é $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}$-mensurável, $L(\cdot,0)$ é semicontínua inferior com valores finitos e o subdiferencial $\partial L(\cdot,0)$ contém uma função $m(\cdot) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$), é possível obter a semicontinuidade inferior sequêncial fraca para o funcional integral $\mathcal{L}(\cdot)$. Isto permite considerar problemas de minimização de funcionais integrais em que a dependência do lagrangiano em relação à variável de estado s pode ser extremamente irregular, por exemplo, não-semicontínua inferior nos pontos onde $s \neq 0$.

De facto, nos artigos [**Orn**], [**Orn05**], prova-se a existência de minimizantes para o funcional integral $\mathcal{L}(\cdot)$, no caso escalar unidimensional em que sobre o lagrangiano se impõem hipóteses que contêm as anteriores. Por exemplo, é admissível a função $L(\cdot,\xi)$ ser não-semicontínua inferior (excepto nos pontos $(s,0)$) e admite-se possibilidade de ser $L(s,0) = +\infty$ ou $\partial L(s,0) = \emptyset$ para alguns valores de s.

Por outro lado, existem resultados que demonstram que a convexidade não é uma condição necessária para a existência de minimizantes. Em [**Orn05**], destaca-se a importância que a condição de zero-convexidade do lagrangiano (i.e., $L^{**}(s,0) = L(s,0)$) tem na demonstração da existência de minimizantes para os funcionais integrais $\mathcal{L}(\cdot)$, onde o lagrangiano é não-linear, não-convexo, mas zero-convexo e com crescimento superlinear.

Em [**Orn05**], prova-se ainda, que embora o lagrangiano tenha um comportamento muito irregular numa vizinhança de pontos $(s, 0)$, o minimizante é regular(prova-se que o minimizante é bimonótono) e satisfaz a inclusão diferencial de DuBois-Reymond.

Por fim, em apêndice dá-se ênfase a pré-requisitos necessários para o estudo dos problemas considerados. Assim, recordam-se enunciados e resultados de Análise Funcional, Análise Convexa, Análise Multivariada e Teoria da Medida.

CAPíTULO 2

O cálculo das variações no caso convexo

1. Breve resenha histórica

O estudo de problemas do cálculo das variações é bastante antigo. Provavelmente, a primeira pessoa a considerar seriamente um problema de minimização do ponto de vista científico foi Hero de Alexandria, que viveu entre 150 a.c. e 300 d.c.. Ele estudou a reflexão dos raios solares e afirmou, sem prova, que quando a luz emitida por um objecto é reflectida por um espelho segue o menor caminho possível desde o objecto até ao olho.

Por sua vez, Pappus (290 d.c. - 350 d.c.), rei da Alexandria prometeu uma recompensa excepcional aos serventes civis e ao pessoal militar, oferecendo-lhes toda a terra que eles conseguissem cercar com um arado num determinado período de tempo. Deste modo, o problema de encontrar a curva plana com um determinado comprimento de área máxima, ou problema isoperimetrico, nasceu. Pappus não foi o primeiro a considerar problemas isoperimetricos. Contudo, no seu livro *Mathematical Colection* ele recolheu e sistematizou resultados de muitos matemáticos anteriores, extraindo-os de trabalhos de Euclides (325 ac.- 265 d.c.), Arquimedes (287 ac. -212 d.c.), Zenorodus (200 ac.- 140 ac.), e Hypsicles (190ac. - 120 ac.).

Um problema mais geral de minimização óptica foi estudado em meados do sec.XVII pelo matemático Pierre de Fermat (1601-1665). Ele acreditava que *"a natureza actua sempre através de meios e maneiras que são sempre as mais fáceis e rápidas"* mas nem sempre pelos caminhos mais curtos.

O primeiro problema normalmente associado ao desenvolvimento da teoria matemática do cálculo das variações é o problema da braquistócrona. Este é também, indubitavelmente o mais famoso problema desta teoria. Em Junho de 1696, Johann Bernoulli (1667-1748) publicou um desafio à comunidade matemática com o seguinte enunciado:

... *Se num plano vertical forem dados dois pontos A e B, pretende-se especificar a órbita AMB da massa pontual móvel M ao longo da qual, partindo de A, e sob a influência do seu próprio peso, chega a B no mais curto tempo possível...*

Depois de enunciar o problema, Johann Bernoulli assegurou aos seus leitores que a solução do problema era muito útil na mecânica, e que não era uma recta. O prazo para entrega de respostas imposto por Johann Bernoulli foi até à Pascoa de 1697, altura em que ele prometeu publicar a sua própria solução. Aquando do início do desafio, Johann Bernoulli também enviou o problema privadamente ao matemático Leibniz (1646-1716), numa carta datada de 9 de Junho de 1696. A 16 de Junho de 1696 ele recebeu uma solução completa como resposta. Newton (1643-1727) também resolveu o problema da braquistócrona. No final os únicos a conseguir resolver correctamente este problema foram Jacob Bernoulli, Leibniz, Newton, Tschirnhaus e l'Hopital.

O matemático, Leonard Euler (1707-1783) tinha ligações próprias com a família Bernoulli. Dada esta relação próxima, não é de estranhar que Euler se tenha interessado pelo cálculo das variações. Em 1728, Euler tinha já escrito acerca de encontrar equações para curvas geodésicas e em 1744 publicou o seu livro de referencia *Método para descobrir linhas curvas que gozam da propriedade de máximo ou de mínimo.* Alguns matemáticos preferem as datas 1728 ou 1744 para o nascimento da teoria do cálculo das variações em vez de 1697 (data em que foi publicada a solução para o problema da braquistócrona).

Euler desenvolveu um método para resolver problemas específicos e sistematizou-o num instrumento poderoso. Com este novo método ele foi capaz de estudar uma classe bastante generalizada de problemas. O seu trabalho cientifíco considerava uma grande variedade de problemas geodésicos, vários problemas de braquistócrona modificados e mais gerais, problemas envolvendo restrições isoperimetricas e até questões de invariância. Apesar de alguns matemáticos antes de Euler terem dado atenção a tais problemas, ele examinou se as suas condições fundamentais se manteriam intactas com uma mudança geral de coordenadas (estas questões só foram desenvolvidas no sec. XX). Na sua publicação de 1744, Euler mostrou a primeira condição necessária para mínimo, a denominada condição necessária de Euler-Lagrange.

Um outro tópico de interesse integrado no trabalho de Euler, é o da superfície mínima. Euler descobriu a primeira superfície não trivial deste tipo: a catenoide.

Apesar de ser verdade que pouco tempo depois a técnica de Euler foi superada pela de Lagrange, naquela época tudo isto era matemática completamente inovadora. Os seus métodos eram notáveis pela clareza e perspicácia. Em 1755, Jean Louis Lagrange (1736-1813) enviou a Euler uma carta que continha detalhes de uma ideia nova e bela. Nesta carta, Lagrange mostrou a Euler como ele podia eliminar os métodos geométricos enfadonhos do seu processo. Essencialmente, ele tinha desenvolvido uma ideia de comparação de funções que levaria quase directamente à equação de Euler - Lagrange. Depois de considerar o método de Lagrange, Euler converteu-se instantaneamente, abandonou os seus antigos métodos geométricos e baptizou toda esta teoria pelo nome que agora utilizamos, o *Cálculo das Variações*, em honra do método variacional de Lagrange.

Euler e Lagrange corresponderam-se frequentemente nos anos seguintes, com Lagrange a trabalhar arduamente para estender a sua teoria. Até ao final de 1760, ele foi capaz de publicar um grande número de resultados no *Miscellanea Taurinensia*, um jornal científico em Turim, com o título de *Ensaio acerca do novo método para determinar máximos e mínimos de fórmulas de integrais indefinidos.*

Em 1786, Adrien Marie Legendre (1752-1833) apresentou uma dissertação à *Academia de Paris* intitulada *Sobre o método de distinguir máximos de mínimos no cálculo das variações.* Legendre considerou o problema de determinar se uma extremal é um arco minimizante ou maximizante. Analisou a segunda variação do funcional, motivado pelo teorema de Taylor. Legendre foi capaz de obter a condição necessária de segunda ordem $L_{\xi\xi} \geq 0$ aplicado a minimizante, o que é surpreendentemente semelhante ao que conhecemos do cálculo elementar com o teste da segunda derivada. Legendre tentou mostrar a condição fortalecida $L_{\xi\xi} > 0$, que não é verdade.

Só passados cinquenta anos da descoberta inicial de Legendre, relativa à condição necessária de segunda variação, é que outro matemático tentou desenvolver esta teoria no sentido das condições necessárias e suficientes. Em 1836, Gustav Jacobi (1804-1851) demonstrou rigorosamente o que agora chamamos de condição suficiente de Jacobi.

Em 1870, Karl Weierstrass reviu toda a teoria do cálculo das variações. Weierstrass foi o primeiro a realçar a importância do domínio da funcional que estamos a tentar minimizar. Ele também examinou o conjunto das funções admissíveis. Um dos seus feitos mais notáveis foi um novo teorema de suficiência para mínimo. Dois novos conceitos, o campo de extremais e função excesso de Weiertrass foram desenvolvidos, assim como um novo tipo de mínimo, o chamado mínimo forte.

Com base no trabalho desenvolvido por Weierstrass, outros matemáticos, tais como Bolzano, Bliss, Carathéodory, Hilbert, deram ao cálculo uma estrutura matemática rigorosa.

Em 1900 no *Congresso internacional de Matemática de Paris*, Hilbert formulou vinte e três problemas que considerava fundamenteis para o desenvolvimento da matemática no sec.XX. Três deles (19, 20 e 23) eram sobre cálculo das variações.

Com efeito, foi Hilbert (em 1900) o primeiro a resolver um problema variacional (o problema da minimização do funcional integral unidimensional de Dirichelet) abordando directamente o funcional integral (em vez do lagrangiano, como era prática até então), e daí o nome *Método Directo.* Contudo só em 1915, Tonelli provou a existência de solução para o problema geral do cálculo das variações. Estes métodos de abordagem do problema, conhecidos por métodos directos, promoveram um grande desenvolvimento da análise em geral, atingindo maior notoriedade na análise funcional, teoria da medida, equações diferenciais.

2. O problema fundamental do cálculo das variações

O problema fundamental do cálculo das variações consiste na determinação de um extremante - um minimizante ou um maximizante - para um funcional integral que depende da escolha de uma função pertencente a uma determinada classe de funções, em particular, funções cujos valores nos extremos de um determinado intervalo real limitado são fixos.

Portanto, consideramos $[a, b]$, com $a < b$ um dado intervalo na recta real $\mathbb{R}$. Façamos $\mathcal{X}_{AB}$ representar a classe de todas as funções absolutamente contínuas, $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, que satisfazem as condições de fronteira

$$x(a) = A, \quad x(b) = B \tag{5}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}^n$, estão fixos. Seja ainda $L(\cdot)$ uma função real definida em $[a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Assim, pretende-se minimizar o funcional integral

$$\mathcal{I}(x) = \int_a^b L(t, x(t), x'(t))dt, \quad x(\cdot) \in \mathcal{X}_{AB} \tag{6}$$

onde $x'(t)$ representa a derivada $\frac{dx}{dt}$, isto é, $x'(t) = (\frac{dx^1(t)}{dt}, \ldots, \frac{dx^n(t)}{dt})$.

DEFINIÇÃO 2.1. **[GF00]**

(1) *À função $L(\cdot)$ chamamos Lagrangiano do problema fundamental do cálculo das variações;*
(2) *As funções $x(\cdot)$ que satisfazem as condições de fronteira (5) dizem-se trajectórias admissíveis;*
(3) *Quando o Lagrangiano $L(\cdot)$ não depende explicitamente da variável independente t, diz-se que o problema é autónomo.*

3. Condições necessárias de optimalidade

DEFINIÇÃO 3.1. **[GF00]** *Uma trajectória admissível $y(\cdot)$ é um minimizante global de $\mathcal{I}(\cdot)$ se para as trajectórias admissíveis $x(\cdot)$*

$$\mathcal{I}(y(\cdot)) \leq \mathcal{I}(x(\cdot)). \tag{7}$$

Dizemos que uma função $y(\cdot) \in \mathcal{X}_{AB}$ é um minimizante local de $\mathcal{I}(\cdot)$ quando a condição

$$\mathcal{I}(y(\cdot)) \leq \mathcal{I}(x(\cdot))$$

se verifica para todas as funções $x(\cdot) \in \mathcal{X}_{AB}$ suficientemente próximas de $y(\cdot)$.

Contudo a noção de "suficientemente próximas"precisa de ser definida. Para tal é necessário definir uma métrica que permita introduzir o conceito de vizinhança. São usuais no cálculo das variações duas métricas: a forte e a fraca.

Consideremos as seguintes métricas:

$$\rho_0(y(\cdot), x(\cdot)) = \sup_{t \in [a,b]} \{\|y(\cdot) - x(\cdot)\|\}$$

$$\rho_1(y(\cdot), x(\cdot)) = \sup_{t \in [a,b]} \{\|y(\cdot) - x(\cdot)\| + \|y'(\cdot) - y'(\cdot)\|\}.$$

DEFINIÇÃO 3.2. **[GF00]** *O conjunto*

$$\mathcal{N}_\varepsilon(y(\cdot)) = \{x : [a,b] \to I\!R^n \,:\, x(\cdot) \in AC[a,b]\, |\rho_0(y(\cdot), x(\cdot)) < \varepsilon\}$$

designa-se por vizinhança forte de $x(\cdot)$.

Por sua vez, o conjunto

$$\mathcal{N}'_\varepsilon(y(\cdot)) = \{x : [a,b] \to I\!R^n \,:\, x(\cdot) \in AC[a,b]\, |\rho_1(y(\cdot), x(\cdot)) < \varepsilon\}$$

designa-se por vizinhança fraca de $x(\cdot)$.

DEFINIÇÃO 3.3. **[GF00]** *Uma trajectória admissível $y(\cdot)$ diz-se um minimizante local forte para o funcional integral $\mathcal{I}(x)$, se existir uma vizinhança forte $\mathcal{N}_\varepsilon$ de $y(\cdot)$ tal que*

$$\mathcal{I}(y(\cdot)) \leq \mathcal{I}(x(\cdot))$$

para toda a trajectória admissível $x(\cdot) \in \mathcal{N}_\varepsilon(y(\cdot))$.

Analogamente, dizemos que uma trajectória admissível $x(\cdot)$ é um minimizante local fraco para o integral variaconal $I(x)$ se existir uma vizinhança fraca $\mathcal{N}_\varepsilon$ de $x(\cdot)$ tal que

$$\mathcal{I}(x(\cdot)) \leq \mathcal{I}(x_1(\cdot))$$

para toda a trajectória admissível $x_1(\cdot) \in \mathcal{N}_\varepsilon$. Todo o mínimo global é também um mínimo local. E, de modo semelhante, um mínimo local forte é também um mínimo local fraco. Em ambos os casos o oposto nem sempre é verdadeiro. Quando o problema em questão admite solução, se uma condição necessária para mínimo local forte não dá nenhum candidato, então podemos concluir que não existe nenhum mínimo local forte e que a solução é um mínimo local fraco. Na verdade, a teoria da existência no cálculo das variações verifica a existência numa classe maior de funções admissíveis para as quais as condições necessárias de optimalidade clássicas não são necessariamente válidas. Muitos problemas de aspecto simples não admitem solução na classe de funções admissíveis onde eles são formulados, e onde as condições necessárias clássicas são válidas. Nesta situação, não faz sentido aplicar qualquer uma das condições necessárias: podemos ser levados a conclusões erradas, apenas porque a condição de existência que assumimos à priori não é satisfeita. Isto é conhecido como o paradoxo de Perron **[You00]**. Podemos concluir, contudo, que o problema não tem qualquer solução na classe $x(\cdot) \in \mathcal{X}_{AB}$ se quer as condições necessárias para mínimo forte, quer as condições necessárias para mínimo fraco não derem nenhum candidato.

3.1. Condição necessária clássica para mínimo local forte.

DEFINIÇÃO 3.4. ***(Função Excesso de Weierstrass** [?])*
A função excesso de Weierstrass $E : [a,b] \times I\!R^n \times I\!R^n \times I\!R^n \to I\!R$, associada ao lagrangiano $L(\cdot)$ do funcional integral $\mathcal{I}(\cdot)$, é definida por

$$E(t, x(t), x'(t), v'(t)) =$$

$$= L(t, x(t), v'(t)) - L(t, x(t), x'(t)) - \langle x'(t) - v'(t), L_\xi(t, x(t), x'(t))\rangle. \tag{8}$$

TEOREMA 3.1. **[GF00]** *Suponhamos que $x(\cdot)$ é um minimizante local forte para o funcional integral $\mathcal{I}(x)$, e que $L(\cdot)$ é uma função de classe C^2 em $[a,b] \times I\!R^n \times I\!R^n$. Então*

$$E(t, x(t), x'(t), v'(t)) \geq 0, \quad \forall v(\cdot) \in I\!R^n, \quad \forall t \in [a,b]. \tag{9}$$

3.2. Condição necessária clássica para mínimo local fraco.

TEOREMA 3.2. **[GF00]**
Suponhamos que $x(\cdot)$ é um minimizante local fraco para o funcional integral $\mathcal{I}(x)$, e que $L(\cdot)$ é uma função de classe C^2 em $[a,b] \times I\!R^n \times I\!R^n$. Então

$$\frac{d}{dt} L_\xi(t, x(t), x'(t)) = L_x(t, x(t), x'(t)). \tag{10}$$

A equação (10) designa-se por equação de Euler-Lagrange e as suas soluções são chamadas extremais.

TEOREMA 3.3. **[BGH98]**
Suponhamos que $x(\cdot)$ é um minimizante local fraco para o funcional integral $\mathcal{I}(x)$, e que $L(\cdot)$ é uma função de classe C^2 em $[a,b] \times I\!R^n \times I\!R^n$. Então

$$\frac{d}{dt}[L(t, x(t), x'(t)) - x'(t) L_\xi(t, x(t), x'(t))] = L_t(t, x(t), x'(t)). \tag{11}$$

A equação (11) designa-se por condição de DuBois-Reymond.

TEOREMA 3.4. **[Ces83]**
Suponhamos que $x(\cdot)$ é um minimizante local fraco para o integral variaconal $\mathcal{I}(x)$, e que $L(\cdot)$ é uma função de classe C^2 em $[a,b] \times I\!R^n \times I\!R^n$. Então

$$L_{x'^i x'^k}(t, x(t), x'(t)) \zeta^i \zeta^k \geq 0, \quad \forall \zeta \in I\!R^n. \tag{12}$$

OBSERVAÇÃO 3.1. **[Ces83]**

(1) *Se o lagrangiano $L(t, \xi)$ não depende da variável de estado s, a equação de Euler-Lagrange reduz-se a*

$$L_\xi(t, x'(t)) = C, \tag{13}$$

onde C é uma constante arbitrária.

(2) *Se o lagrangiano $L(s, \xi)$ não depende do tempo t, a equação de DuBois-Reymond reduz-se a*

$$L(x(t), x'(t)) - \langle x'(t), L_\xi(x(t), x'(t)) \rangle = C, \tag{14}$$

onde C é uma constante arbitrária.

4. O método directo

O método directo do cálculo das variações deve o seu nome ao facto de se procurar determinar os minimizantes directamente a partir do funcional integral. Este método é uma das principais ferramentas na obtenção de soluções de equações com derivadas parciais não-lineares.

Para compreendermos mais claramente a essência desta técnica, vejamos o que sucede no caso de dimensão finita.

Consideramos $\mathcal{I} : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Pretendemos encontrar $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{I}(x_0) \leq \mathcal{I}(x)$ para todo o $x \in \mathbb{R}^n$. Para garantirmos a existência de ínfimo finito precisamos de impor que $\mathcal{I}(\cdot)$ seja limitado inferiormente (isto é, $\mathcal{I}(x)) \geq c > -\infty \; \forall x \in \mathbb{R}^n$).

Sejam $-\infty < m = \inf\{\mathcal{I}(x) \; : \; x \in \mathbb{R}^n\}$ e (x_n) uma sucessão minimizante, isto é, $\mathcal{I}(x_n) \to m$.

Se tal sucessão minimizante tiver todos os seus termos contidos num conjunto fechado e limitado, o que devido ao facto de o espaço ter dimensão finita, significa que (x_n) está contida num conjunto compacto, podemos extrair uma subsucessão convergente para um ponto do conjunto, isto é, existe (x_{n_k}) com $x_{n_k} \to x_0$. Então $\mathcal{I}(x_{n_k}) \to m$, porque $\mathcal{I}(x_{n_k})$ é uma subsucessão de $\mathcal{I}(x_n)$, logo converge para o mesmo limite de $\mathcal{I}(x_n)$. Por outro lado, como $\mathcal{I}(\cdot)$ é contínua $\mathcal{I}(x_{n_k}) \to \mathcal{I}(x_0)$, logo por unicidade do limite $\mathcal{I}(x_0) = m$ e portanto x_0 é o minimizante desejado.

De facto, não é necessário que a função seja contínua, isto é, não é necessário que $\lim_{n\to+\infty} \mathcal{I}(x_n) = \mathcal{I}(x)$ sempre que $x_n \to x$, mas apenas $\lim_{n\to+\infty} \mathcal{I}(x_n) \geq \mathcal{I}(x)$, ou seja, que $\mathcal{I}(\cdot)$ seja semicontínuo inferior, pois só estamos interessados no mínimo.

A ideia do método directo é, reproduzir esta análise no caso de dimensão finita, encontrar sucessões minimizantes pertencentes a um conjunto fechados e limitado e assegurar a semicontínuidade inferior. Contudo, em dimensão infinita, este problema é muito mais delicado. Com efeito, a primeira hipótese não é, em geral, suficiente para permitir a extracção de uma subsucessão convergente. Isto é possível apenas, com uma topologia mais fraca que a usual. A segunda imposição é então que $\mathcal{I}(\cdot)$ seja semicontínuo inferiormente em relação à topologia fraca, para garantir que o ínfimo seja de facto um minimizante. Este último requisito é cumprido por uma vasta classe de funcionais $\mathcal{I}(\cdot)$, nomeadamente aqueles cuja função integranda é convexa relativamente à variável velocidade.

O problema de obter boas propriedades de compacidade e o problema de obter a semicontínuidade inferior do funcional, são antagónicos, na medida em que quanto mais se enfraquece a topologia menos possibilidades temos de $\mathcal{I}(\cdot)$ ser semicontínuo inferiormente.

Um espaço de funções $\mathcal{X}$ razoável deve ser completo. Devemos revestir $\mathcal{X}$ com a topologia fraca para obtermos a compacidade das soluções minimizantes. No caso em que $\mathcal{X}$ é reflexivo, uma das características das topologias fracas é que as sucessões uniformemente limitadas são pré-compactas. Assim, para obter a compacidade na topologia fraca, é suficiente obter a limitação das sucessões minimizantes, e isto pode ser obtido impondo um comportamento apropriado da função lagrangiano no infinito (por exemplo, o crescimento superlinear).

4.1. Teorema geral de existência. Considera-se o problema da minimização de funcionais integrais do tipo

$$\mathcal{I}(x(\cdot)) = \int_a^b L(t, x(t), x'(t))dt$$

na classe de funções

$$\mathcal{X}_{AB} := \{x(\cdot) \in AC([a,b], \mathbb{R}^n) \, : \, x(a) = A, \, x(b) = B\}$$

com A e B fixos.

TEOREMA 4.1. [**AFP00**, pag. 267] *Seja $L : [a,b] \times I\!R^m \times I\!R^n \longrightarrow [0, +\infty]$ uma função normal com $L(t,s,\cdot)$ convexa em $I\!R^n$ para todo o $s \in I\!R^m$ e todo o $t \in [a,b]$.*

Então, o funcional integral

$$\mathcal{I}(x(\cdot)) = \int_a^b L(t, x(t), x'(t))dt$$

é sequencialmente semicontínuo inferior no espaço $L^1([a,b], I\!R^m) \times L^1([a,b], I\!R^n)$ dotado da topologia forte em $L^1([a,b], I\!R^m)$ e da topologia fraca em $L^1([a,b], I\!R^n)$.

Um resultado, muito conhecido, de existência de solução do Cálculo das Variações é:

DEFINIÇÃO 4.1. *Diz-se que $L(t,s,\xi)$ tem crescimento superlinear se existir uma função $\theta(\xi)$ tal que:*

(1) *$L(t,s,\xi) \geq \theta(\xi)$ $\forall t, \, s, \, \xi$;*
(2) *$\frac{\theta(\xi)}{|\xi|} \to \infty$ quando $|\xi| \to \infty$.*

DEFINIÇÃO 4.2. *Diz-se que $L(t,s,\xi)$ tem crescimento polinomial m se existirem constantes positivas c_0, c_1, c_2 e uma constante $m \geq 1$ tais que:*

$$c_0 |\xi|^m \leq L(t,s,\xi) \leq c_1 |\xi|^m + c_2, \quad \forall t, \, s, \, \xi.$$

TEOREMA 4.2. ***(Teorema da Existência de Tonelli** [**ET99**, pag. 250])*

Seja $L : [a,b] \times I\!R^m \times I\!R^n \to (-\infty, +\infty]$ uma função normal tal que:

(1) *$L(t,s,\cdot)$ é convexa em $I\!R^n$ para qualquer $t \in [a,b]$ e qualquer $s \in I\!R^m$;*
(2)
$$L(t,s,\xi) \geq \theta(|\xi|) + a(t)$$
onde $\theta : [0, +\infty[\to (0, +\infty]$ é uma função crescente, semicontínua inferior e convexa, que satisfaz a condição de crescimento superlinear e $a(\cdot) \in L^1([a,b], I\!R^n)$.

Então, existe solução para o problema da minimização de funcionais integrais do tipo

$$\mathcal{I}(x(\cdot)) = \int_a^b L(t, x(t), x'(t))dt$$

na classe de funções

$$\mathcal{X}_{AB} := \{x(\cdot) \in AC([a,b], I\!R^n) \; : \; x(a) = A, \, x(b) = B\}$$

com A e B fixos.

4.2. Teoria de relaxação. Nesta secção considera-se o problema da minimização de integrais variacionais do tipo

$$\mathcal{I}(x(t)) = \int_a^b L(t, x(t), x'(t))dt$$

na classe de funções

$$\mathcal{X}_{AB} := \{x(\cdot) \in AC([a,b], \mathbb{R}^n) \; : \; x(a) = A, \, x(b) = B\}$$

com A e B fixos, em que o lagrangiano $L(\cdot)$ é não convexo.

Como se viu na secção anterior, no caso unidimensional, a condição de convexidade do lagrangiano é não só suficiente, mas também necessária para garantir a semicontínuidade inferior do integral variacional $\mathcal{I}(\cdot)$.

Isto sugere, uma limitação dos métodos directos face a problemas variacionais onde se procura provar a existência de solução sem a convexidade do lagrangiano. Com efeito, existem problemas variacionais, nos quais não se supõem hipóteses de semicontinuidade inferior ou convexidade, com solução óptima. Isto acontece, em particular, quando o lagrangiano é linear em relação à variável de estado.

Um resultado deste tipo foi estabelecido por Neustadt, ao aperceber-se das potencialidades do Teorema de Liapunov. Mais tarde, teoremas de existência para lagrangianos não-convexos foram estendidos a lagrangianos mais gerais.

O seguinte resultado é uma extensão do (Teorema 4.1) no caso em que o lagrangiano $L(t, x(t), \cdot)$ é não-convexo.

TEOREMA 4.3. [**ET99**, pag. 247] *Seja* $L : [a,b] \times I\!R^m \times I\!R^n \to (-\infty, +\infty]$ *uma função normal, com*

$$L(t, s, \xi) \geq \theta(|\xi|),$$

onde $\theta : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ *é uma função crescente, semicontínua inferior, convexa e superlinear.*

Então, o funcional integral

$$\mathcal{I}^{**}(x(\cdot)) = \int_a^b L^{**}(t, x(t), x't)dt$$

é sequencialmente semicontínuo inferior no espaço $L^1([a,b], I\!R^m) \times L^1([a,b], I\!R^n)$ *dotado da topologia forte em* $L^1([a,b], I\!R^m)$ *e da topologia fraca em* $L^1([a,b], I\!R^n)$.

TEOREMA 4.4. ***(Teorema de Relaxação*** [**ET99**, pag. 251]*)* *Seja* $L : [a,b] \times I\!R^m \times I\!R^n \to (-\infty, +\infty]$ *uma função normal, com*

$$L(t, s, \xi) \geq \theta(|\xi|) + a(t),$$

onde $\theta : (0, +\infty) \to (0, +\infty]$ *é uma função crescente, semicontínua inferior e convexa, que satisfaz a condição de crescimento superlinear e* $a(\cdot) \in L^1(a, b)$.

Então, existe minimizante para o integral relaxado

$$\mathcal{IC}(x(\cdot)) := \int_a^b L^{**}(t, x(t), x'(t))dt,$$

definido na classe

$$\mathcal{X}_{AB} := \{x \in AC([a, b], I\!R^n) \,:\, x(a) = A,\, x(b) = B\}$$

com A *e* B *fixos.*

OBSERVAÇÃO 4.1. [**ET99**, pag. 287] *No caso em que se verificam as hipóteses:*

(1) $\theta : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *é uma função convexa, crescente e semicontínua inferior que satisfaz a condição de crescimento superlinear;*
(2) $g(\cdot)$ *uma função normal definida em* $[a, b] \times I\!R^n$, *tal que* $g(t, \xi) \geq \theta(|\xi|)$
(3) *Dados* $1 \leq \beta \leq \infty$, *e* $L(\cdot)$ *uma função normal definida em* $[a, b] \times I\!R^n \times I\!R^n$, *para os quais:*
   (a) *se* $1 \leq \beta < \infty$, *existem* a_1 *e* $a_2 \in L^1([a, b])$, $b \geq 0$ *e* $c \geq 1$ *tais que* $g(t, \xi) + a_2(t) \leq L(t, x, \xi) \leq cg(t, \xi) + b|x|^\beta + a_1(t)$;
   (b) *se* $\beta = \infty$, *existe* $a_2 \in L^1([a, b])$ *e, para todo para todo o* $k > 0$, *existem* $c \geq 1$ *e* $a_1 \in L^1([a, b])$ *tais que* $g(t, \xi) + a_2(t) \leq L(t, x, \xi) \leq cg(t, \xi) + a_1(t)$ *para* $|x| \leq k$;
   (c) *para quase todo* $t \in [a, b]$, *a restrição de* $L(t, \cdot, \cdot)$ *a* $I\!R^m \times \operatorname{dom} g(t, \cdot)$ *é contínua.*

o integral relaxado $\mathcal{IC}(\cdot)$ *tem solução e* $\min \mathcal{IC}(x(\cdot)) = \inf \mathcal{I}(x(\cdot))$.

5. Regularidade dos minimizantes

TEOREMA 5.1. [**BGH98**, pag. 134] *Seja* $L : [a, b] \times I\!R^n \times I\!R^n \to I\!R$ *uma função de classe* C^2, *com crescimento polinomial de grau* $p > 1$, $n \geq 1$, *e que satisfaz as seguintes condições:*

(1) *Existem constantes* c_0, $c_1 > 0$ *tais que para todo o* $(t, s, \xi) \in [a, b] \times I\!R^n \times I\!R^n$,

$$c_0|\xi|^p \leq L(t, s, \xi) \leq c_1(1 + |\xi|^p); \tag{15}$$

(2) *Existe uma função* $M(R) > 0$ *tal que*

$$|L_s(t, s, \xi) - L_\xi(t, s, \xi)| \leq M(R)(1 + |\xi|^p), \tag{16}$$

para todo $(t, s, \xi) \in [a, b] \times I\!R^n \times I\!R^n$ *com* $t^2 + |s|^2 \leq R^2$;
(3) *para todo* $(t, s, \xi) \in [a, b] \times I\!R^n \times I\!R^n$ *e para todo o* $\zeta \in I\!R^n \setminus \{0\}$,

$$L_{\zeta^i \zeta^k}(t, s, \xi)\zeta^i\zeta^k > 0. \tag{17}$$

Seja $\mathcal{X}^m_{AB}$ a classe das funções $x(\cdot) \in W^{1,p}(a,b;I\!R^n)$ que satisfazem as condições de fronteira $x(a) = A$ e $x(b) = B$. Suponha-se $y(\cdot) \in \mathcal{X}^m_{AB}$ um minimizante (local) para o funcional integral

$$I(x(\cdot)) = \int_a^b L(t, x(t), x'(t))dt, \quad x(\cdot) \in \mathcal{X}^m_{AB}. \tag{18}$$

Então, $y(\cdot) \in C^2([a,b];I\!R^n)$ e satisfaz a equação de Euler-Lagrange.

TEOREMA 5.2. [**BGH98**, pag. 144] *Seja $L(\cdot)$ uma função suave com crescimento superlinear, e que satisfaz $L_{\xi\xi} > 0$.*

Seja $y(\cdot) \in \mathcal{X}_{AB}$ um minimizante local forte para o funcional integral

$$\mathcal{I}(x(\cdot)) = \int_a^b L(t, x(t), x'(t))dt, \tag{19}$$

e suponha-se que: ou $L_s(\cdot, y(\cdot), y'(\cdot)) \in L^1(a,b)$; ou que $L_t(\cdot, y(\cdot), y'(\cdot)) \in L^1(a,b)$.

Então, $y(\cdot)$ é suave e satisfaz tanto a equação de Euler-Lagrange

$$-\frac{d}{dt}L_\xi(t, y(t), y'(t)) + L_s(t, y(t), y'(t)) = 0, \tag{20}$$

bem como a equação de DuBois-Reymond

$$\frac{d}{dt}[L(t, y(t), y'(t)) - y'(t)L_\xi(t, y(t), y'(t))] = L_t(t, y(t), y'(t)). \tag{21}$$

5.1. Condições necessárias sob a forma de inclusões diferenciais. Como consequência de desenvolvimentos recentes em análise não suave, foi possível estender as condições necessárias clássicas de existência de solução sob a forma de inclusões diferenciais.

Nesta secção considera-se o problema de minimização de funcionais integrais do tipo

$$\mathcal{F}(x(\cdot)) = \int_a^b L(t, x'(t))dt,$$

e

$$\mathcal{L}(x(\cdot)) = \int_a^b L(x(t), x'(t))dt$$

definidos em $\mathcal{X}_{AB}$. Define-se ainda, para $p \in [1, +\infty]$, a classe de funções

$$\mathcal{X}^p_{AB} := \{x(t) \in W^{1,p}([a,b], \mathbb{R}^n) : y(a) = A, y(b) = B\},$$

e para $\varepsilon > 0$ as vizinhanças forte e fraca (respectivamente)de $y(\cdot)$:

$$\mathcal{N}^p_\varepsilon(y(\cdot)) = \{x(t) \in y(t) + W_0^{1,p}([a,b], \mathbb{R}^n) : |y(t) - x(t)| < \varepsilon, \forall t \in [a,b]\},$$

$$\mathcal{N}'^p_\varepsilon(y(\cdot)) = \{x(t) \in y(t) + W_0^{1,p}([a,b], \mathbb{R}^n) : \|y(t) - x(t)\|_{W_0^{1,p}} < \varepsilon, \forall t \in [a,b]\}.$$

DEFINIÇÃO 5.1. *Uma função* $y(\cdot) \in \mathcal{X}^p_{AB}$ *denomina-se* $W^{1,p}$*-minimizante local forte (resp.* $W^{1,q}$*-minimizante local fraco), com* $q \geq p$*, se existir uma constante* $\varepsilon > 0$ *tal que*

$$\int_a^b L(t, y'(t))dt \leq \int_a^b L(t, x'(t))dt,$$

qualquer que seja $x(\cdot) \in \mathcal{N}^q_\varepsilon(y(\cdot))$ *(resp.* $x(t) \in \mathcal{N}'^q_\varepsilon(y(\cdot))$*).*

TEOREMA 5.3. [**AAB89**] *Seja* $L : [a, b] \times I\!R^n \to [0, +\infty]$ *uma função* $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$*-mensurável, com* $L(t, \cdot)$ *semicontínua inferior e convexa q.s. em* $[a, b]$*. Seja* $y(t) \in \mathcal{X}_{AB}$ *um* $W^{1,\infty}$*-minimizante local fraco para o funcional integral*

$$\int_a^b L(t, x'(t))dt$$

com $y'(\cdot) \in int(dom\, L(t, \cdot))$ *q.s. em* $[a, b]$*.*

Então, existe $c \in I\!R^n$ *que verifica a inclusão* $c \in \partial L(t, x'(t))$ *q.s. em* $[a, b]$*.*

TEOREMA 5.4. [**AAB89**] *Seja* $L : I\!R^n \times I\!R^n \to [0, +\infty]$ *uma função de Borel, tal que para todo o* $s \in I\!R^n$*,* $L(s, \cdot)$ *é convexa e semicontínua inferior em* $I\!R^n$*. Seja* $y(\cdot) \in \mathcal{X}_{AB}$ *um* $W^{1,1}$*-minimizante local fraco para o funcional integral*

$$\int_a^b L(x(t), x'(t))dt, \quad x(\cdot) \in \mathcal{X}_{AB}.$$

Supõe-se ainda que

$$y'(t) \in int(dom\, L(y(t), \cdot)) \quad q.s. \text{ em } \quad [a, b]. \tag{22}$$

Então, existem $c \in I\!R$ *e uma função mensuável* $p(t)$ *tais que*

$$p(t) \in \partial L(y(t), y'(t)),$$
$$c = \langle p(t), y'(t) \rangle - L(y(t), y'(t)),$$

q.s. em [a,b].

CAPíTULO 3

Resultados recentes no caso não-convexo

1. O problema não dependente da variável de estado

Começa-se por considerar o problema de minimização de funcionais integrais do tipo

$$\mathcal{F}(x(\cdot)) = \int_a^b L(t, x'(t))dt, \quad x(\cdot) \in \mathcal{X}_{0d}, \tag{23}$$

onde $\mathcal{X}_{0d}$ é a classe das funções $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ absolutamente contínuas que satisfazem as condições de fronteira $x(a) = 0$ e $x(b) = d$ (no caso em que $a = 0$ e $b = 1$ o declive de $x(\cdot)$ coincide com d).

TEOREMA 1.1. [**Mar02**] *Seja $L : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ uma função $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensurável, tal que $dom(L(t, \cdot))$ é convexo q.s. em $[a, b]$.*

Suponha-se que existe uma função absolutamente contínua $y(\cdot)$ tal que o funcional integral $\mathcal{F}(y(\cdot)) = \int_a^b L(t, y'(t))dt < +\infty$ e

$$y'(t) \in int(domL(t, \cdot)) \quad q.s. \ em \quad [a, b]. \tag{24}$$

Então, quaisquer que sejam p, $q \in [1, +\infty]$ e para todo o $\varepsilon > 0$,

$$\inf_{x(\cdot) \in \mathcal{N}_\varepsilon^p(y(\cdot))} \int_a^b L(t, x'(t))dt = \inf_{x(\cdot) \in \mathcal{N}_\varepsilon^q(y(\cdot))} \int_a^b L^{**}(t, x'(t))dt. \tag{25}$$

Em particular,

$$\inf_{x(\cdot) \in \mathcal{X}_{0d}^p} \int_a^b L(t, x'(t))dt = \inf_{x(\cdot) \in \mathcal{X}_{0d}^p} \int_a^b L^{**}(t, x'(t))dt. \tag{26}$$

DEMONSTRAÇÃO. Como $L^{**}(t, \cdot) \leq L(t, \cdot)$, basta mostrar que qualquer que seja $\varepsilon > 0$, e quaisquer que sejam p, $q \in [1, +\infty]$

$$\inf_{x(\cdot) \in \mathcal{N}_\varepsilon^p(y(\cdot))} \int_a^b L(t, x'(t))dt \leq \inf_{x(\cdot) \in \mathcal{N}_\varepsilon^q(y(\cdot))} \int_a^b L^{**}(t, x'(t))dt,$$

Com vista ao absurdo, supõe-se que para algum $\varepsilon > 0$ e p, $q \in [1, +\infty]$, existe $w(t) \in \mathcal{N}_\varepsilon^q(y(\cdot))$, tal que

$$\int_a^b L^{**}(t, w'(t))dt < \inf_{x(\cdot) \in \mathcal{N}_\varepsilon^p(y(\cdot))} \int_a^b L(t, x'(t))dt.$$

Considera-se portanto, dois números reais α e β, para os quais

$$\int_a^b L^{**}(t, w'(t))dt < \alpha < \beta < \inf_{x(\cdot)\in\mathcal{N}_\varepsilon^p(y(\cdot))} \int_a^b L(t, x'(t))dt.$$

Escolhe-se $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$, de tal modo que $B(w(t), \delta) \subset B(y(t), \varepsilon)$ para todo o $t \in [a, b]$ e

$$(1-\delta)\int_a^b L^{**}(t, w'(t))dt + \delta\int_a^b L^{**}(t, y'(t))ds < \alpha.$$

define-se $\widetilde{w}(t) := (1-\delta)w(t)+\delta y(t)$ de tal modo que para todo o $t \in [a, b]$ $B(\widetilde{w}(t), \delta) \subset B(y(t), \varepsilon)$, e pela convexidade da função $L^{**}(\cdot)$

$$\int_a^b L^{**}(t, \widetilde{w}'(t))dt \le (1-\delta)\int_a^b L^{**}(t, w'(t))dt + \delta\int_a^b L^{**}(t, y'(t))dt < \alpha.$$

Além disso, como $w'(t) \in \text{dom}\ (L^{**}(t, \cdot))$ q.s. em $[a, b]$, em virtude da convexidade do conjunto dom $L(t, \cdot)$, e como $y'(t) \in \text{int}(\text{dom}\ L(t, \cdot))$ verifica-se a inclusão $\widetilde{w}(t) \in int(\text{dom} L(t, \cdot))$ q.s. em $[a, b]$. Logo,

$$L^{**}(t, \widetilde{w}'(t)) = \text{co}\, L(t, \widetilde{w}'(t)) \qquad \text{q.s. em} \quad [a, b]. \tag{27}$$

Considera-se $g : [a; b] \to \mathbb{R}$, com $g(\cdot) \in L^1(a, b)$, $g(t) > L^{**}(t, \widetilde{w}'(t))$ e $\int_a^b g(t)dt < \alpha$.

Combinando (27) juntamente com (128) resulta que a multifunção

$$\Gamma : t \in [a, b] \rightrightarrows \Gamma(t) \subset [0, 1]^{n+1} \times (\mathbb{R}^n)^{(n+1)},$$

$$\Gamma(t) := \left\{ (\lambda, \xi)\ :\ \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1, \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j\, \xi_j = \widetilde{w}'(t), \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j\, L(t, \xi_j) \le g(t),\ L(t, \xi_j) < +\infty \right\},$$

é não vazia e mensurável. Aplica-se o (Teorema 3.37) e deduz-se a existência de funções mensuráveis $\lambda_j : [a, b] \to [0, 1]$, $\xi_j : [a, b] \to \mathbb{R}$, $j = 1, ..., n+1$, tais que $\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j \xi_j = \widetilde{w}'(t)$ e

$$\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j L(t, \xi_j) \le g(t) \quad \text{q.s. em} \quad [a, b]. \tag{28}$$

Considera-se $\rho > 0$ um número real, tal que para todo o conjunto $E \subset [a, b]$ com $|E| < 2\rho$ se verificam as desigualdades:

$$\int_E (|y'(t)| + |\widetilde{w}(t)|)dt < \frac{\delta}{3}, \tag{29}$$

$$\int_E |L(t, y'(t))|dt < \frac{1}{2}(\beta - \alpha), \tag{30}$$

$$\int_{[a,b]\setminus E} g(t)dt < \alpha. \tag{31}$$

Escolhe-se $r \in]0,1[$ tal que para $G = \{t \ : \ \overline{B(\widetilde{w}(t), nr)} \subset \mathrm{dom} L(t,\cdot)\}$ $|G| > b - a - \frac{\rho}{2}$.

Considera-se $C \subset G$ um conjunto compacto, com $(b-a)-\rho < |C| < b-a$, e $M > 0$ uma constante, tal que para q.t.p $t \in C$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ com $\lambda_i \in \{\widetilde{w}_i(t), \widetilde{w}_i(t)+r, \widetilde{w}_i(t)-r\}$, $i = 1, ..., n$,

$$(32) \qquad |y'(t)| + |\widetilde{w}'(t)| + \sum_{j=1}^{n+1} |\xi_j(t)| + \sum_{j=1}^{n+1} |L(t, \xi_j(t))| + |L(t,\lambda)| \le M$$

Definem-se $\sigma = \min\{\frac{\beta-\alpha}{2M}, \rho, |C|, \frac{\delta}{3n}\}$, $\Omega \subset [a,b] \setminus C$ um conjunto, e $N > 0$ uma constante, tais que

$$(33) \quad \sum_{j=1}^{n+1} (|L(t,\xi_j)| + |\xi_j(t)|) + |\widetilde{w}'(t)| + |y'(t)| \le N \quad \text{q.s. em} \quad [a,b] \setminus (\Omega \cup C),$$

$$(34) \qquad \int_\Omega |\widetilde{w}'(t) - y'(t)| dt \le r\sigma.$$

Considera-se $C' \subset C$ um conjunto com $|C'| = \sigma$. Define-se $\Theta = [a,b] \setminus (\Omega \cup C')$ e $\Theta_1, \ \ ..., \ \ \Theta_s$ uma partição finita de Θ em subconjuntos mensuráveis e dois a dois disjuntos, tais que $|\Theta_k| < \rho$, $\sup \Theta_k \le \inf \Theta_{k+1}$, $k = 1, ..., s$, e

$$(35) \qquad \int_{\Theta_k} (|\widetilde{w}'(t)| + \sum_{j=1}^{n+1} |\xi_j(t)|) dt \le \frac{\delta}{3}, \qquad k = 1, ..., s.$$

Para todo o $k \in \{1, ..., s\}$ aplica-se o (Teorema 3.33) às funções $h_j : \Theta_k \to \mathbb{R}^{n+1}$, $j = 1, ..., n+1$ definidas por $h_j(t) = (\xi_j(t), L(t, \xi_j(t)))$,e deduz-se que para todo o $k = 1, ..., s$ existem conjuntos disjuntos $E_1^k, ..., E_{n+1}^k \subset \Theta_k$ tais que para $\phi(t) = \sum_{k=1}^{t} \sum_{j=1}^{n+1} \chi_{E_j^k}(s) \xi_j(t)$

$$(36) \qquad \int_{\Theta_k} \phi(t) dt = \int_{\Theta_k} \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(t) \xi_j(t) dt = \int_{B_k} \widetilde{w}'(t) dt, \quad k = 1, ..., s,$$

e por (28) e (29)

$$(37) \qquad \int_\Theta L(t, \phi(t)) dt = \int_\Theta \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(t) L(t, \xi_j(t)) dt \le \int_\Theta g(t) dt < \alpha.$$

Para todo o $i \in \{1, ..., n\}$ define-se $\gamma_i(t) := \int_\Omega [\widetilde{w}_i'(t) - y_i'(t)] dt$. Pela desigualdade (34) pode escolher-se um conjunto $C_i' \subset C'$ tal que $|C_i'| = \frac{|\gamma_i(t)|}{r}$.

Define-se ainda, para todo o $i \in \{1, ..., n\}$,

$$\psi(t) := \begin{cases} y_i'(t) & \text{em} \quad t \in \Omega, \\ \phi_i(t) & \text{em} \quad t \in \Theta, \\ \widetilde{w}_i(t) + r \,\mathrm{sgn}\,(\gamma_i(t)) & \text{em} \quad t \in C_i', \\ \widetilde{w}_i(t) & \text{em} \quad t \in C' \setminus C_i', \end{cases}$$

e faz-se $\widetilde{x}(t) = \int_a^t \psi(\tau) d\tau$. Por (32) resulta que $|L(t, \psi(t))| \leq M$ q.s. em C'. Além disso, de (36) obtem-se

$$\int_a^b \widetilde{x}_i'(t) dt =$$

$$= \int_\Omega x_i'(t) dt + \int_\Theta \phi_i(t) dt + \int_{C^*} \widetilde{w}_i'(t) dt + |\gamma_i(t)| \,\mathrm{sgn}\,(\gamma_i(t)) =$$

$$= \int_a^b \widetilde{w}_i'(t) dt.$$

Então, por (32) e (33), $y(t) - \widetilde{x}(t) \in W_0^{1,\infty}(a, b)$.

Por (29), (35) e (36), para todo o $t \in [a, b]$

$$|\widetilde{x}(t) - \widetilde{w}(t)| \leq$$

$$\leq \int_\Omega |y'(\tau) - \widetilde{w}(\tau)| d\tau + \int_{\Theta_k} |\phi(\tau) - \widetilde{w}(\tau)| d\tau + n\sigma \leq$$

$$\leq \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3},$$

onde $k \in \{1, ..., s\}$ é tal que $\sup \Theta_{k-1} < s < \sup \Theta_k$, e $\Theta_0 = \{a\}$. Logo, $\widetilde{x}(t) \in \mathcal{N}_\varepsilon^p(y(\cdot))$. Das desigualdades (30) e (37) deduz-se

$$\int_a^b L(t, \widetilde{x}'(t)) dt =$$

$$= \int_\Omega L(t, y'(t)) dt + \int_\Theta L(t, \phi(t)) dt + \int_{C'} L(t, \psi(t)) dt <$$

$$< \frac{1}{2}(\beta - \alpha) + \alpha + M\sigma \leq \beta <$$

$$\inf_{x(\cdot) \in \mathcal{N}_\varepsilon^p(y(\cdot))} \int_a^b L(t, x'(t)) dt$$

o que contradiz a hipótese formulada. □

O seguinte Teorema generaliza o (Teorema 5.3). Consideram-se lagrangianos não-convexos, aos quais só exigida a $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensurabilidade. Recorrendo ao (Teorema 1.1), prova-se que a inclusão de Euler-Lagrange é condição necessária e suficiente para a existência de mínimo.

TEOREMA 1.2. [**Mar02**] *Sejam,* $L : [a,b] \times I\!R^n \to (-\infty, +\infty]$ *uma função*
$\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}$*-mensurável tal que* $dom(L(t,\cdot))$ *é um conjunto convexo q.s. em* $[a,b]$, *e* $y(t) \in \mathcal{X}_{AB}$ *de tal modo que: o funcional integral* $\int_a^b L(t, y'(t))dt$ *existe e é finito; e*

$$y'(t) \in int(dom L(t,\cdot)), \quad q.s. \ em \quad [a,b]. \tag{38}$$

Então, as seguintes condições são equivalentes:

(1) $y(t)$ *é um* $W^{1,p}$*-minimizante local forte para o funcional integral* $\int_a^b L(t, y'(t))dt$;

(2) $\int_a^b L^{**}(t, y'(t))dt = \min_{x(\cdot)\in\mathcal{X}_{0d}^p} \int_a^b L^{**}(t, x'(t))dt$;

(3) *Existe* $c \in I\!R^n$ *tal que* $c \in \partial L(t, y'(t))$ *q.s. em* $[a,b]$, *i.e.,* $y(\cdot)$ *satisfaz a inclusão diferencial de Euler-Lagrange.*

DEMONSTRAÇÃO. **Parte I:** (1) $\Rightarrow$ (2).
É uma consequência imediata do (Teorema 1.1), pois $L^{**}(\cdot)$ é convexa.
Parte II: (2) $\Rightarrow$ (3).
Considera-se que

$$\widetilde{L}(t, x'(t)) := \max\{\, L^{**}(t, x'(t)),\ L^{**}(t, y'(t)) - 1\} - [L^{**}(t, y'(t)) - 1].$$

Ora, $\widetilde{L}(t,\cdot)$ é uma função não negativa, convexa e semicontínua inferior. Portanto, como $\widetilde{L}(t, x'(t)) \geq L^{**}(t, x'(t)) - L^{**}(t, y'(t)) + 1$, resulta que

$$\int_a^b \widetilde{L}(t, y'(t))dt = \min_{x(\cdot)\in\mathcal{X}_{0d}} \int_a^b \widetilde{L}(t, x'(t))dt.$$

Pelo (Teorema 5.3) existe $c \in \mathbb{R}^n$ tal que $c \in \partial\widetilde{L}(t, y'(t))$ q.s. em $[a,b]$, i.e,

$$\max\{L^{**}(t, x'(t)),\ L^{**}(t, y'(t)) - 1\} \geq L^{**}(t, y'(t)) + \langle c,\ x'(t) - y'(t)\rangle,$$

qualquer que seja $x'(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ e q.s. em $[a,b]$.

Logo, existe um número real $\rho > 0$ tal que

$$L^{**}(t, x'(t)) \geq L^{**}(t, y'(t)) + \langle c,\ x'(t) - y'(t)\rangle$$

q.s. em $[a,b]$ e para todo o $x'(t) \in B(y'(t), \rho)$. Pela convexidade de $L^{**}(\cdot)$, $c \in \partial L^{**}(t, x'(t))$ q.s. em $[a,b]$.

Portanto,

$$L(t, x'(t)) \geq L^{**}(t, x'(t)) \geq L^{**}(t, y'(t)) + \langle c,\ x'(t) - y'(t)\rangle =$$
$$= L(t, y'(t)) + \langle c,\ x'(t) - y'(t)\rangle.$$

Parte III: (3) $\Rightarrow$ (1).
Para toda a função $x(\cdot) \in \mathcal{X}_{0d}^p$, pela desigualdade subgradiente

$$\int_a^b L(t, x'(t))dt \geq$$

$$\geq \int_a^b L(t, x'(t))dt + \int_a^b \langle c, \ x'(t) - y'(t)\rangle dt = \int_a^b L(t, y'(t))dt.$$

□

Dado um conjunto S, representamos por $\delta_S(\cdot)$ a sua função indicatriz. Se $y(\cdot)$ é um $W^{1,\infty}$-minimizante local fraco para o funcional integral $\int_a^b L(t, x'(t))dt$ na vizinhança $\mathcal{N}'^{\infty}_{\varepsilon}(y(\cdot))$, define-se

$$\widetilde{L}_\varepsilon(t, x'(t)) := L(t, x'(t)) + \delta_{B(y'(t),\varepsilon)}(x'(t)).$$

Então, $y(\cdot)$ é um minimizante global para o funcional integral $\int_a^b \widetilde{L}_\varepsilon(t, x'(t))dt$. Portanto:

COROLARIO 1.1. *Suponhamos que se verificam as hipóteses do (Teorema 1.2), então a função $y(\cdot) \in \mathcal{X}_{AB}$ é um $W^{1,\infty}$-minimizante local fraco para o funcional integral $\int_a^b L(t, x'(t))dt$ na vizinhaça fraca $\mathcal{N}'^{\infty}_{\varepsilon}(y(\cdot))$ se e só se existe uma constante $c \in I\!R^n$ tal que*

$$c \in \partial \widetilde{L}_\varepsilon(t, y'(s)) =$$

$$\{\xi^* \ : \ L(t, w'(t)) \geq L(t, y'(t)) + \langle \xi^*, w(t) - y'(t)\rangle \quad \forall w(t) \in B(y'(t), \varepsilon)\}.$$

q.s. em $[a, b]$

TEOREMA 1.3. *Seja $L : [a, b] \times I\!R \to (-\infty, +\infty]$ uma função $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensurável. Denota-se por $C_t = \{\xi \in I\!R : L(t, \xi) = L^{**}(t, \xi)\}$ e suponha-se que existe uma função $m(\cdot) \in L^p(a, b)$ tal que*

$$\partial(C_t) \subset B(0, m(t)) \quad q.s. \ em \quad [a, b], \tag{39}$$

Então o funcional integral $\int_a^b L(t, x'(t))dt$ admite mínimo na classe $\mathcal{X}^p_{0d}$ se e só se existe $y(\cdot) \in \mathcal{X}^p_{0d}$ tal que

$$\int_a^b L^{**}(t, y'(t))dt = \min_{x(t) \in \mathcal{X}^p_{0d}} \int_a^b L^{**}(t, x'(t))dt$$

e $y'(t) \in co(C_t)$ q.s. em $[a, b]$.

DEMONSTRAÇÃO. **Parte I: (Condição Necessária).**
A demonstração é imediata, por aplicação do (Teorema 1.2).
Parte II: (Condição suficiente).
Como $y'(t) \in$ co (C_t) existem funções mensuráveis $\lambda_j : [a, b] \to [0, 1]$, $\xi_j : [a, b] \to$ IR, com $\xi_j(t) \in C_t$, $j = 1, ..., n + 1$ tais que

$$\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j \xi_j(t) = y'(t),$$

e $L^{**}(t, \cdot)$ é uma função afim no conjunto $co\{\xi_j(s), j = 1, ..., n + 1\}$ q.s. em $[a, b]$.

Aplica-se o (Teorema de Liapunov 3.33) às funções $g_j(t) = (\xi_j, L^{**}(t, \xi_j(t)))$, $j = 1, ..., n+1$, e deduz-se a existência de conjuntos disjuntos e mensuráveis $E_1, ..., E_{n+1}$, tais que para $\phi(t) = \sum_{j=1}^{n+1} \chi_{E_j}(t)\xi_j(t)$, $\int_a^b \phi(t)dt = \int_a^b y'(t)dt$ e

$$\int_a^b L(t, \phi(t))dt = \sum_{j=1}^{n+1} \int_{E_j} L^{**}(t, \xi_j(t))dt =$$

$$\int_a^b \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(t) L^{**}(t, \xi_j(t))dt = \int_a^b L^{**}(t, y'(t))dt.$$

Pela inclusão (39) e como $\phi(t) \in L^p(a, b)$ tem-se o resultado pretendido.
□

1.1. Integrais com lagrangiano $L^{**}(t, \cdot)$ afim no infinito. Nesta secção supõe-se que: $L : [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função normal; e para todo $t \in [a, b]$, $C_t = \{\xi \in \mathbb{R} : L^{**}(t, \xi) = L(t, \xi)\}$ (se C_t não depender to tempo t, o conjunto denota-se por C).

Como consequência do (Teorema 1.2), se o funcional integral $\mathcal{F}(\cdot)$ tem como minimizante a função $y(\cdot)$, então $L^{**}(t, \cdot) \in \mathbb{R}$ e o conjunto $C_t \neq \emptyset$ q.s. em $[0, 1]$. Por este motivo, doravante considera-se $C_t \neq \emptyset$ q.s. em $[0, 1]$.

Considera-se também que o invólucro convexo $L^{**}(t, \cdot)$ é afim em $\mathbb{R} \setminus C_t$. Mais precisamente, considera-se que o conjunto C_t é limitado q.s. em $[0, 1]$ e que $L^{**}(t, \cdot)$ é afim no complementar de C_t.

No caso em que o lagrangiano é autónomo, i.e., $L(t, \xi) = h(\xi)$ o mínimo existe se e só se

$$\min C \leq d \leq \max C.$$

Quanto o lagrangiano não é autónomo, para que exista mínimo é necessário que

$$\int_0^1 [\min C_t]dt \leq d \leq \int_0^1 [\max C_t]dt, \tag{40}$$

caso os integrais estejam bem definidos. Contudo esta condição não é suficiente para garantir a existência de mínimo. No que se segue estabelece-se uma limitação sobre o declive d mais forte que (40), de tal modo que seja condição necessária e suficiente para a existência de mínimo.

Considera-se a seguinte notação:

- $L_e^{**}(t, \cdot)$ e $L_d^{**}(t, \cdot)$ as derivadas laterais esquerda e direita de $L^{**}(t, \cdot)$;
- $\alpha(t) = L_e^{**}(t, \cdot)(t, \min C_t)$ e $\beta(t) = L_d^{**}(t, \cdot)(t, \max C_t)$;
- g_e, $g_d : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções tais que

$$g_d(t, \zeta^*) := \begin{cases} \max \partial L^*(t, \zeta^*) & \text{para} \quad \zeta^* < \beta(t) \\ \max C_t & \text{para} \quad \zeta^* \geq \beta(t) \end{cases}$$

$$g_e(t,\zeta^*) := \begin{cases} \min \partial L^*(t,\zeta^*) & \text{para} \quad \zeta^* > \alpha(t) \\ \\ \min C_t & \text{para} \quad \zeta^* \leq \alpha(t) \end{cases}$$

onde $\partial L^*(t,\cdot)$ denota o subgradiente de $L^*(t,\cdot)$.

OBSERVAÇÃO 1.1. *Quando $\alpha(t) < \zeta^* < \beta(t)$, as funções $g_e(\cdot)$ e $g_d(\cdot)$ são (respectivamente) as derivadas esquerda e direita de $L^*(t,\cdot)$. As funções são truncadas de modo a assumir valores no intervalo* [min C_t, max C_t].

Apesar desta modificção, $g_e(\cdot)$ e $g_d(\cdot)$ satisfazem as mesmas propriedades que as derivadas de $L^*(t,\cdot)$. Em particular, $g_e(\cdot)$ e $g_d(\cdot)$ são monótonas, não decrescentes, e $g_d(\cdot)$ é contínua à direita, enquanto que $g_e(\cdot)$ é contínua à esquerda.

Observe-se também que min $C_t \in \partial L(t,\alpha(t))$ *e* max $C_t \in \partial L(t,\beta(t))$.

Definem-se ainda $\lambda = \sup \mathrm{ess}_{t\in[0,1]} L_e^{**}(t,\min C_t)$ e $\Lambda = \inf \mathrm{ess}_{t\in[0,1]} L_d^{**}(t,\max C_t)$.

TEOREMA 1.4. *Suponha-se que C_t é limitado q.s. em $I\!R$, e que* $\max C_t$, $\min C_t \in L^p(a,b)$. *Então, o funcional integral*

$$\mathcal{F}(x(\cdot)) = \int_a^b L(t,x'(t))dt$$

admite mínimo se e só se $\lambda \leq \Lambda$ e

$$\int_a^b g_e(t,\lambda)dt \leq d \leq \int_a^b g_d(t,\Lambda)dt. \tag{41}$$

DEMONSTRAÇÃO. **Pate I: (Condição necessária).**

Como consequência do (Teorema 1.2), se o funcional integral $\mathcal{F}(\cdot)$ admite mínimo, existem uma função $y(\cdot)$ e uma constante c tais que $\int_0^1 y'(t)dt = d$ e

$$c \in \partial L^{**}(t,y'(t)) \ q.s. \text{ em } [a,b]. \tag{42}$$

Além disso, $y'(t) \in C_t$ q.s. em $[0,1]$. Portanto,

$$\alpha(t) = L_e^{**}(t,\min C_t) \leq L_e^{**}(t,y'(t)) \leq c \leq L_d^{**}(t,y'(t)) \leq L_d^{**}(t,\max C_t) = \beta(t)$$

q.s. em $[0,1]$. Logo, $\lambda \leq c \leq \Lambda$.

Como $c \in \partial L^{**}(t,y'(t))$

$$g_e(t,\lambda) \leq g_e(t,c) \leq y'(t) \leq g_d(t,c) \leq g_d(t,\Lambda),$$

donde resulta (41).

Pate II: (Condição suficiente).

Como $g_d(\cdot)$ e $g_e(\cdot)$ são funções contínuas à direita e esquerda (respectivamente), as funções $G_d(\xi^*) := \int_0^1 g_d(s,\xi^*)dt$ e $G_e(\xi^*) := \int_0^1 g_e(s,\xi^*)dt$ são contínuas à direita e à esquerda (respectivamente) em $[\lambda,\Lambda]$. Portanto, para

$$c := \sup\{\xi^* \,:\, G_e(\xi^*) \leq d\},$$

$$G_e(t,c) = \int_0^1 g_e(t,c)dt \le d \le \int_0^1 g_d(t,c)dt = G_d(t,c).$$

Então, existe uma constante $r \in [0,1]$ tal que, a função

$$\psi(t) := \begin{cases} g_e(t,c) & \text{para} \quad t \in [0,r] \\ \\ g_d(t,c) & \text{para} \quad t \in [r,1] \end{cases}$$

satisfaz a igualdade $\int_0^1 \psi(t)dt = d$.

Define-se $y(t) = \int_0^t \psi(\tau)d\tau$. Então, de como se definiu $\psi(\cdot)$, resulta que $y'(t) \in \partial L^*(t,\xi)$, i.e., $c \in \partial L^{**}(t, y'(t))$ q.s. em $[0,1]$.

Portanto, como consequência do (Teorema 1.3), $y(t)$ é um minimizante para o funcional integral

$$\mathcal{F}(x(\cdot)) = \int_a^b L(t, x'(t))dt.$$

□

1.2. Integrais com lagrangiano $L^{**}(t,\cdot)$ estrictamente convexo. Nesta secção considera-se que o lagrangiano $L : [0,1] \times \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ tem invólucro estrictamente convexo no infinito, i.e., considera-se que o conjunto $N_t = \mathbb{R} \setminus C_t$ é limitado q.s. em $\mathbb{R}$, e que $L(t,\cdot)$ é estrictamente convexa em $\mathbb{R} \setminus co\, N_t$.

Denota-se por:

- $L_e(t,\cdot)$ e $L_d(t,\cdot)$ as derivadas laterais esquerda e direita de $L(t,\cdot)$;
- $L_e^*(t,\cdot)$ e $L_d^*(t,\cdot)$ as derivadas laterais esquerda e direita de $L^*(t,\cdot)$;

Considera-se ainda que:

$$L_e(t,-\infty) = L_d(t,-\infty) = \lim_{\xi \to -\infty} L_e(t,\xi) = \lim_{\xi \to -\infty} L_d(t,\xi),$$

e

$$L_e(t,+\infty) = L_d(t,+\infty) = \lim_{\xi \to +\infty} L_e(t,\xi) = \lim_{\xi \to +\infty} L_d(t,\xi).$$

$$\lambda = \sup \text{ess}_{t\in[0,1]} L_e(t,-\infty) \text{ e } \Lambda = \inf \text{ess}_{t\in[0,1]} L_d(t,+\infty).$$

$$T_d^p = \{\zeta^* \in [\lambda,\Lambda] \cap \mathbb{R} : L_d^*(t,\zeta^*) \in L^p(0,1)\},$$
$$T_e^p = \{\zeta^* \in [\lambda,\Lambda] \cap \mathbb{R} : L_e^*(t,\zeta^*) \in L^p(0,1)\}.$$

TEOREMA 1.5. *Suponha-se que N_t é um conjunto limitado q.s. em $[0,1]$ com*

(43) $$\min N_t, \ \max N_t \in L^p(0,1);$$

e $L(t,\cdot)$ estrictamente convexa em $\mathbb{R} \setminus co\, N_t$.

Então, o funcional integral $\mathcal{F}(x(\cdot)) = \int_a^b L(t,x'(t))dt$ admite mínimo se e só se uma das seguintes condições se verifica:

(1) $T_d^p \cap T_e^p \neq \emptyset$ *e* $\inf_{\zeta^* \in T_e^p} \int_0^1 L_e^*(t,\zeta^*)dt < d < \sup_{\zeta^* \in T_d^p} \int_0^1 L_d^*(t,\zeta^*)dt$;

(2) $T_e^p \neq \emptyset$ *e* $d = \min_{\zeta^* \in T_e^p} \int_0^1 L_e^*(t,\zeta^*)dt$;

(3) $T_d^p \neq \emptyset$ *e* $d = \max_{\zeta^* \in T_d^p} \int_0^1 L_d^*(t, \zeta^*)dt$.

Demonstração. **Pate I: (Condição suficiente).**

Por [**Mar97**, Teorema 3'] deduz-se a existência de um minimizante $z(\cdot)$ para o funcional integral relaxado $\mathcal{F}^{**}(x(\cdot))$.

O problema remume-se portanto a provar a existência de uma função $y(\cdot) \in z(\cdot) + W_0^{1,p}(0,1)$ tal que $\mathcal{F}(y(\cdot)) = \mathcal{F}^{**}(z(\cdot))$.

Como o conjunto N_t é limitado, [**ET99**, Lema 8.3.3]

$$L^{**}(t,\xi) = \min\{\lambda_1 L(t,\xi_1) + \lambda_2 L(t,\xi_2) :$$

$$: \lambda_1,\, \lambda_2 \in [0,1],\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1,\ \lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 = \xi\}.$$

Portanto, por [**ET99**, Proposição 8.3.1] existem funçõs mensuráveis λ_1, λ_2 : $[0,1] \to [0,1]$; ξ_1, $\xi_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ tais que

$$L^{**}(t, z'(t)) = \lambda_1 L(t,\xi_1) + \lambda_2 L(t,\xi_2),$$

com $z'(t) = \lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2$. Além disso, por (43) ξ_1, $\xi_2 \in L^p(0,1)$.

Aplica-se o (Teorema de Liapunov 3.33) às funções

$$g_j(t) = (\xi_j, L(t, \xi_j(t))),$$

para $j = 1, 2$, e deduz-se a existência de dois conjuntos disjuntos e mensuráveis E_1 e E_2 tais que para $\psi(t) = \chi_{E_1}(t)\xi_1(t) + \chi_{E_2}(t)\xi_2(t)$, $\int_0^1 \psi(t)dt = \int_0^1 z'(t)dt$ e

$$\int_0^1 L(t,\psi(t))dt = \int_{E_1} L(t,\xi_1)dt + \int_{E_2} L(t,\xi_2)dt =$$

$$= \int_0^1 [\lambda_1\, L(t,\xi_1)dt + \lambda_2\, L(t,\xi_2)]\, dt =$$

$$= \int_0^1 L^{**}(t, z'(t))dt = \mathcal{F}^{**}(z(t)).$$

Portanto, para $y(t) = \int_0^t \psi(\tau)d\tau$, $y(t) \in z(t) + W_0^{1,p}(0,1)$ e

$$\mathcal{F}(y(\cdot)) = \mathcal{F}^{**}(z(\cdot)).$$

Pate II: (Condição necessária).

Como $L^*(t,\cdot) = (L^*(t,\cdot))^{**}$ o teorema fica demonstrado por aplicação do (Teorema 5.3) e por [**Mar97**, Teorema 3']. $\square$

2. O problema autónomo

No que segue estudam-se os artigos [**Orn**], [**Orn05**],onde se demonstra, para o caso escalar unidimensional, a existência de minimizantes para o funcional integral do tipo

$$\int_a^b L(x(t), x'(t))dt, \qquad x(\cdot) \in \mathcal{X}_{AB}, \tag{44}$$

definido na classe $\mathcal{X}_{AB}$ que representa a classe das funções absolutamente contínuas $x : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verificam as condições de fronteira $x(a) = A$ e $x(b) = B$.

Em [**Orn05**] observa-se que um ingrediente essencial é a semicontinuidade inferior sequencial fraca do do funcional integral $\int_a^b L(x(t), x'(t))dt$ é a semicontínuidade inferior do lagrangiano $L(\cdot)$, (ver [**Iof77**]); em [**Amb87**] e [?] demonstra-se que para uma grande classe de lagrangianos unidimensionais, aqueles em que $L(x(t), \cdot)$ é uma função convexa e semicontínua inferior (como acontece quando $L(\cdot)$ é $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensurável, $L(\cdot, 0)$ é semicontínua inferior com valores finitos e cujo subdiferencial $\partial L(\cdot, 0)$ contém uma função $m(\cdot) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$), é possível obter a semicontinuidade inferior sequêncial fraca para o funcional integral $\int_a^b L(x(t), x'(t))dt$. Isto permite considerar problemas de minimização de funcionais integrais, do tipo $\int_a^b L(x(t), x'(t))dt$, em que a dependência do lagrangiano em relação à segunda variável $x(t)$ pode ser extremamente irregular, por exemplo, não-semicontínua inferior em qualquer ponto onde $x'(t) \neq 0$. Assim, nos artigos [**Orn**], [**Orn05**],que provam a existência de minimizantes para o funcional integral $\int_a^b L(x(t), x'(t))dt$, no caso em que sobre o lagrangiano são consideradas hipóteses de contém as anteriores, no caso escalar unidimensional. Com efeito, em [**Orn05**] prova-se que se pode considerar que que a função $L(\cdot, x'(t))$ é não semicontínua inferior (excepto nos pontos $(x(t), 0)$), admitindo a possibilidade de ser $L(\cdot, 0) = +\infty$ e $\partial L(\cdot, 0) = \emptyset$ em qualquer ponto.

Por outro lado, existem resultados que demonstram que a convexidade não é uma condição necessária para a existência de minimizantes. Em [**Orn05**], destaca-se a importância que a condição de zero-convexidade do lagrangiano (i.e., $L^{**}(x(t), 0) = L(x(t), 0)$ com $x(\cdot)$ unidimensional) tem na demonstração da existência de minimizantes para os funcionais integrais do tipo $\int_a^b L(x(t), x'(t))dt$, nos quais o lagrangiano é não-linear, não-convexo, mas zero-convexo e com crescimento superlinar no infinito, i.e., verifica a condição:

$$\frac{\inf L(\mathbb{R}, \xi)}{|\xi|} \to +\infty \qquad |\xi| \to +\infty. \tag{45}$$

Em [**Orn05**], prova-se ainda, que embora se considere que o lagrangiano tem um comportamento muito irregular numa vizinhança de pontos $(x(t), 0)$, prova-se que o minimizante é bimonótono.

2.1. Mensurabilidade do lagrangiano.

LEMA 2.1. *Sejam $x : [a,b] \to I\!R$ uma função absolutamente contínua e L, $L_0 : I\!R \times I\!R \to [-\infty, +\infty]$ funções $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensuráveis, para as quais existe uma constante $M \geq 0$ tal que*

$$L(s,\xi),\ L_0(s,\xi) \geq -M(1+|\xi|) \quad \forall \xi \in I\!R \text{ e q.s. em } I\!R \tag{46}$$

Se além disso, $L(\cdot,0)$ for semicontínua inferior, $L_0(\cdot,0) \equiv 0$ e $\chi_S(\cdot)$ representar a função característica de um conjunto mensurável $S \subset x([a,b])$. Então, os funcionais integrais

$$\int_a^b L(x(t),x'(t))dt \tag{47}$$

$$\int_a^b L_0(x(t),x'(t))\chi_{x^{-1}(S)}(t)dt, \tag{48}$$

existem, e as funções $L(x(t),x'(t))$ e $L_0(x(t),x'(t))\chi_{x^{-1}(S)}(t)$ são mensuráveis.

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração do Teorema divide-se em várias partes:

Parte I: Definem-se os conjuntos

$$S_L := \{s \in \mathrm{I\!R} : \quad L(s,0) < +\infty\},$$
$$E_0 := \{t \in [a,b] : \quad \exists x'(t) = 0\},$$
$$E' := \{t \in [a,b] : \quad \exists x'(t) \in (-\infty,0) \cup (0,+\infty)\},$$

de tal modo que , S_L é um boreliano, e E_0 e E' são mensuráveis. Com efeito, da semicontínuidade inferior de $L(\cdot,0)$ resulta que para todo o $k \in \mathrm{I\!R}$, $S_L^k := \{s \in \mathrm{I\!R} \ : \ L(s,0) \leq k\}$ é um conjunto fechado. Como $\bigcup_{k\in\mathrm{I\!R}} S_L^k = \bigcup_{k\in\mathrm{I\!R}}\{s \in \mathrm{I\!R} \ : \quad L(s,0) \leq k\} = \{s \in \mathrm{I\!R} \quad : \quad L(s,0) \leq \infty\} = S_L$ é F_σ.

A mensurabilidade dos conjuntos E_0 e E' resulta de:

$$E' = \{t \in [a,b] \ : \ \exists x'(t) \in (-\infty,0)\} \bigcup \{t \in [a,b] \ : \ \exists x'(t) \in (0,+\infty)\} = E'_- \cup E'_+$$

e de $E_0 = [a,b] \setminus E' \cup \mathcal{N}$ (em que $\mathcal{N}$ é um conjunto de medida nula), logo os conjuntos são mensuráveis.

Portanto, em E_0 a função $L(x(\cdot),x'(\cdot)) = L(x(\cdot),0)$ é mensurável, pois $L(\cdot,0)$ é semicontínua inferior.

Define-se a função

$$L_1(s,\xi) := \begin{cases} L(s,\xi) \quad \text{para} \quad s \in S_L \quad \text{ou} \quad \xi \neq 0 \\ \\ 0 \qquad \text{para} \qquad s \notin S_L \quad \text{e} \quad \xi = 0, \end{cases}$$

De tal forma que $L_1(x(\cdot),x'(\cdot))\chi_{E'}(\cdot) = L(x(\cdot),x'(\cdot))\chi_{E'}(\cdot)$ q.s. em $[a,b]$, porque para $\forall t \in E'$ $x'(t) \neq 0$, $x'(t) \neq 0$.

Como $L_1(s,0) \subset \mathrm{I\!R} \quad \forall s \in \mathrm{I\!R}$, definem-se $\varphi(s) := L_1(s,0)$ e $L_0(s,\xi) = L_1(s,\xi) - \varphi(s)$ pelo que $L_0(\cdot)$ é $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensurável e $L_0(\cdot,0) \equiv 0$.

Portanto: para provar a mensurabilidade da função

$$L(x(\cdot),x'(\cdot)) = L_1(x(\cdot),x'(\cdot))\chi_{E'}(\cdot) + L(x(\cdot),0)\chi_{E_0}(\cdot) =$$

$$L_0(x(\cdot),x'(\cdot))\chi_{E'}(\cdot) + \varphi(x(\cdot))\chi_{E'}(\cdot) + L(x(\cdot),0)\chi_{E_0}(\cdot) \quad \text{q.s. em} \quad [a,b]$$

basta provar a mensurabilidade de $L_0(x(\cdot),x'(\cdot))\chi_{E'}(\cdot)$ que é um caso particular do que segue (no caso em que $S = \mathbb{R}$).

Parte II:

Põe-se $u(\cdot) = (x(\cdot),x'(\cdot))\chi_{E'}(\cdot)$, $L_S(s,\xi) := L_0(s,\xi)\chi_S(s)$, $\psi(\cdot) := L_S(u(\cdot))$, donde resulta que $\psi(\cdot) = L_S(x(\cdot),x'(\cdot))$ q.s. em $[a,b]$ (ambos são iguais a 0 q.s. em $[a,b]\setminus E'$, e coincidem no conjunto mensurável E').

No que segue demonstra-se que $\psi(\cdot)$ é uma função mensurável.

$L_S(\cdot)$ é uma função $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}$-mensurável: $L_S^{-1}(+\infty) = L_0^{-1}(+\infty)\cap(S\times\mathbb{R})$, e, como para cada $r\geq 0$, $L_S^{-1}((r,+\infty)) = L_0^{-1}((r,+\infty))\cap(S\times\mathbb{R})$ enquanto que para $r<0$ $L_S^{-1}((r,+\infty)) = L_0^{-1}((r,+\infty))\cup[(\mathbb{R}\setminus S)\times\mathbb{R}]$ que são conjuntos $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}$-mensuráveis .

Em particular, qualquer conjunto do tipo $C = L_S^{-1}((r,+\infty))$ pode (por definição de σ-álgebra $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}$) ser gerado (através de reuniões, intersecções e complementações contáveis) a partir de conjuntos do tipo $M\times B$ (com M mensurável e B um boreliano). É necessário provar a mensurabilidade da função $\psi(\cdot)$, i.e., dos conjuntos $\psi^{-1}((r,+\infty))$, $\psi^{-1}(+\infty)$; ou o que é o mesmo, provar a mensurabilidade dos conjuntos $u^{-1}(C)$, para cada $C = L_S^{-1}((r,+\infty))$ (para todo o $r\in\mathbb{R}$) e para $C = L_S^{-1}(+\infty)$. Para tal, é suficiente provar a mensurabilidade de cada conjunto $u^{-1}(M\times B)$, porque cada um dos outros $u^{-1}(C)$ pode obter-se como resultado de aplicar as operações $(\cup,\cap,\setminus)$ aos conjuntos $u^{-1}(M\times B)$ (necessárias para gerar C a partir dos conjuntos $M\times B$), logo a mensurabilidade de $u^{-1}(C)$ é consequência da mensurabilidade de $u^{-1}(M\times B)$.

Por outro lado, cada conjunto $M\times B$ pode ser decomposto em conjuntos do tipo $(\mathcal{F}\cup\mathcal{N})\times B = (F\times B)\cup(\mathcal{N}\times B)$, com $F\in F_\sigma$ e $\mathcal{N}$ um conjunto de medida nula, de tal modo que

$$u^{-1}(M\times B) = u^{-1}(F\times B)\cup u^{-1}(\mathcal{N}\times B).$$

Como cada conjunto $u^{-1}(F\times B)$ é mensurável, resta provar a mensurabilidade dos conjuntos $u^{-1}(\mathcal{N}\times B)$.

Com este intuíto, define-se $E_c := [a,b]\setminus E'$. Então $u(\cdot)\equiv(0,0)$ em E_c, pelo que, se $(0,0)\in\mathcal{N}\times B$, $E_c\subset u^{-1}(\mathcal{N}\times B)$ e $u^{-1}(\mathcal{N}\times B)\cap E_c = E_0$; ou então $(0,0)\notin\mathcal{N}\times B$, caso em que $E_c\subset[a,b]\setminus u^{-1}(\mathcal{N}\times B)$ e $u^{-1}(\mathcal{N}\times B)\cap E_0 = \emptyset$.

Por definição de E', resulta que $x(\cdot)$ tem derivada $x'(\cdot)\neq 0$ q.s. em $T := \{t\in E' : \ x(t)\in\mathcal{N}\}$; por outro lado $|x(T)| = 0$, pois $x(T)\subset\mathcal{N}$ e $|\mathcal{N}| = 0$. Logo, $0\neq x'(t) = 0$ q.s. em T, por aplicação do (Teorema 3.25), devemos ter $|T| = 0$. Assim, o conjunto $Z := u^{-1}(\mathcal{N}\times B)\cap E'\subset T$ também tem medida nula, e portanto, é mensurável.

Tendo em consideração o que foi escrito nestes dois últimos parágrafos, $u^{-1}(\mathcal{N} \times B)$ é igual a $E_c \cup Z$ ou então a Z, que são ambos um conjunto mensurável. (Isto acontece porque $u^{-1}(\mathcal{N} \times \mathcal{C})$ é mensurável qualquer que seja conjunto C (mensurável ou não) e pode-se usar $u(\cdot)$ em vez de $(x(\cdot), x'(\cdot))$.)

Parte III:

Pondo $M_2 := -\min L(x([a,b]), 0)$, em E_0 tem-se que

$$L(x(\cdot), x'(\cdot)) = L(x(\cdot), 0) \geq -M_2(1 + |x'(\cdot)|) \quad \text{q.s. em} \quad [a,b].$$

Tomando $M_1 := \max\{M, M_2\}$, prova-se que caso

$$L(x(\cdot), x'(\cdot)) \geq -M_1(1 + |x'(\cdot)|) \quad \text{q.s. em} \quad [a,b],$$

o funcional integral $\int_a^b L(x(t), x'(t))dt$ existe (com valor finito ou $+\infty$). Por hipótese o conjunto

$$S_1 := \{s \in S \ : \ \exists \xi \in \mathbb{R} \quad L(s,\xi) < -M(1 + |\xi|) \text{ para algum } \xi \in \mathbb{R}\}$$

tem medida nula, logo pelo (Teorema 3.25) $x'(t) = 0$ q.s. em $T_1 := \{t \in E' \ : \ x(t) \in S_1\}$, e $|T_1| = 0$. Portanto, verifica-se a desigualdade q.s. nos conjuntos E_0 e $T' := \{t \in E' : \quad x(t) \in \mathbb{R} \setminus S_1\}$; embora o seu complementar T_1 tenha medida nula.

De modo similar, se $\psi(\cdot) = L_S(x(\cdot), x'(\cdot)) \geq -M_1(1 + |x'(\cdot)|)$ q.s., então o funcional integral $\int_a^b L_0(x(t), x'(t))\chi_{x^{-1}(S)}(t)dt$ existe (com valor finito ou $+\infty$). Mas, verifica-se de novo a desigualdade pretendida em $x^{-1}(S \setminus \mathbb{R}^n)$ (pois aí $\psi(\cdot) = 0 \geq -M_1(1 + |x'(\cdot)|)$) q.s. em E_0, e em $T' := \{t \in E' : x(t) \in S \setminus S_0\}$, onde

$$S_0 := \{s \in S \ : \ \exists \xi \in \mathbb{R} \quad L_0(s,\xi) < -M(1 + |\xi|)\},$$

caso o seu complementar $T_0 := \{t \in E' : \quad x(t) \in S_0\}$ também tenha medida nula.

□

OBSERVAÇÃO 2.1. *Uma forma de garantir a $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensurabilidade de uma função $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$, é exigir que $L(\cdot, \xi)$ seja mensurável para todo $\xi \in \mathbb{R}$ e $L(s, \cdot)$ seja ou contínua (por exemplo, convexa com valores finitos), ou então convexa e semicontínua inferior com domínio nunca singular $\forall s$ (ver* [**RW98**]*).*

São propriedade equivalentes à $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensurabilidade mais a semicontinuidade inferior de $L(s, \cdot)$:

i) *a multifunção $s \mapsto \operatorname{epi} L(s, \cdot)$ tem valores fechados e é mensurável (ver* [**RW98**]*);*
ii) *existe uma função $\widetilde{L} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$ Borel mensurável, com $\widetilde{L}(s, \cdot)$ semicontínua inferior, para a qual $\widetilde{L}(s, \cdot) = L(s, \cdot)$ $\forall s \in \mathbb{R} \setminus \Sigma$, onde Σ representa um Boreliano de medida nula;*
iii) *Para todo o $n \in \mathbb{N}$ existem conjuntos fechados $K_n \subset \mathbb{R}$ com $|\mathbb{R} \setminus K_n| < \frac{1}{n}$, de tal modo que $L(\cdot)$ restringida a $K_n \times \mathbb{R}$ é semicontínua inferior.*

Para $L(\cdot)$, Σ *e* $\widetilde{L}(\cdot)$ *como no ponto ii), e com* $L(\cdot,0)$ *semicontínua inferior, verifica-se que (*[**Amb87**, Observação 4.5]*): define-se uma nova função* $L_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [-\infty,+\infty]$,

$$L_1(s,\xi) := \begin{cases} \widetilde{L}(s,\xi) & \text{para} \quad \xi \neq 0 \quad e \quad s \in \mathbb{R} \setminus \Sigma \\ L(s,0) & \text{para} \quad \xi = 0 \quad e \quad s \in \Sigma; \end{cases}$$

Então $L_1(\cdot,0) = L(\cdot,0)$ *é semicontínua inferior,* $L_1(\cdot)$ *é Borel mensurável,* $L_1(s,\cdot) = L_1(s,\cdot)$ *é semicontínua inferior (e convexa; ou contínua, se* $L(s,\cdot)$ *o for)* $\forall s \in \mathbb{R} \setminus \Sigma$, $L_1(s,\cdot) \equiv L(s,0)$ *é convexa e contínua* $\forall s \in \Sigma$, *i.e.,* $L_1(\cdot)$ *é Borel mensurável e* $L_1(s,\cdot)$ *é semicontínua inferior e convexa; ou contínua, se* $L(s,\cdot)$ *o for)* $\forall s \in \mathbb{R}$. *Isto implica que se* $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é uma função absolutamente contínua então*

$$L_1(x(t),x'(t)) = L(x(t),x'(t)) \qquad q.s.;$$

com efeito, esta igualdade verifica-se para todos os pontos t *para os quais ou* $x(t) \in \mathbb{R} \setminus \Sigma$ *ou* $x'(t) = 0$, *i.e., q.s. em* $[a,b]$. *Como* $x'(t) = 0$ *em q.t.p.* t *tal que* $x(t) \in \Sigma$, *por 3.25, porque* $x'(t)$ *existe q.s.. Como* $L_1(\cdot)$ *é Borel mensurável, a igualdade* $L_1(x(t),x'(t)) = L(x(t),x'(t))$ *q.s., prova não só a mensurabilidade da função* $t \mapsto L(x(t),x'(t))$ *(de uma forma independente do (Lema 2.1(1)), como também acentua a irrelevância (com o objectivo de lidar com funcionais integrais do tipo* $\int_a^b L(x(t),x'(t))dt$*), de considerar* $L_1(\cdot)$ *em vez de* $L(\cdot)$, *pois o valor do integral é o mesmo.*

Isto mostra que sempre que $L(\cdot)$ *se considera* $\mathcal{L}\times\mathcal{B}$*-mensurável, com* $L(\cdot,0)$ *e* $L(s,\cdot)$ *semicontínuas inferiores* $\forall s$, *não é limitativo considerá-las Borel mensuráveis; enquanto que no que diz respeito a propriedades de regularidade de* $L(s,\cdot)$, *basta considerá-las com excepção de um conjunto de medida nula* Σ *(caso as funções satisfaçam essa propriedade).*

2.2. Mudança de variáveis.

LEMA 2.2. *Sejam* $x(\cdot) \in \mathcal{X}_{AB}$; $m : x([a,b]) \to \mathbb{R}$ *uma função mensurável e* $S \subset x([a,b])$ *um conjunto mensurável. Então os funcionais integrais*

$$\int_{x(a)}^{x(b)} m(s)\chi_S(s)ds \tag{49}$$

$$\int_a^b m(x(t))\,x'(t)\chi_{x^{-1}}(t)dt \tag{50}$$

existem e são iguais, desde que se verifique uma das hipóteses:

(1) *ou* $m(\cdot) \in L^\infty(S)$;
(2) *ou* $m(\cdot) \in L^1(S)$ *e* $M(x(\cdot))$ *tem variação limitada, em que* $M(s) := \int_a^b m(\sigma)\chi_S(\sigma)d\sigma$;

(3) *ou o funcional integral (50) existe;*

(4) *ou* $x(\cdot)$ *é uma função monótona e o integral (49) existe (por exemplo,* $m^-(\cdot)$*, ou* $m^+(\cdot) \in L^1(S)$*; e se isto acontecer para* $S = x(E)$*, com* $E \subset [a,b]$ *mensurável, podemos escrever (49)=(50) como*

$$\int_{x(E)} m(s)ds = \int_E m(x(t))x'(t)dt \quad). \tag{51}$$

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração do Teorema divide-se em várias partes.

Parte I:

Considere-se que $m(\cdot) \in L^\infty(S)$. Qualquer que seja a função absolutamente contínua $x(\cdot)$, a mensurabilidade do lagrangiano $L(x(t), x'(t))$ é garantida pelo (Lema 2.1). Define-se $L_0(s,\xi) := m(\cdot)\xi$ (que é função de Carathéodory) e aplica-se o (Corolário 3.3) com $f(\cdot) = m(\cdot)\chi_S(\cdot)$. Logo, $\int_{x(a)}^{x(b)} m(s)\chi_S(s)ds = \int_a^b m(x(t))x'(t)\chi_{x^{-1}}(t)dt$ é finito.

Parte II:

Supõe-se agora que $m(\cdot) \in L^1(S)$, e $M(x(\cdot))$ é uma função de variação limitada, tal que $M(s) := \int_a^b m(\sigma)\chi_S(\sigma)d\sigma$. Por aplicação do (Teorema 3.32); $m(x(\cdot))x'(\cdot) \in L^1(x^{-1}(S))$, e $\int_{x(a)}^{x(b)} m(s)\chi_S(s)ds = \int_a^b m(x(t))x'(t)\chi_{x^{-1}}(t)dt$, isto caso $M(x(\cdot))$ seja absolutamente contínua, o que pelo (Teorema 3.24) resulta de $M(x(\cdot))$ ter variação limitada (pois verifica a condição **(N)** de Lusin).

Parte III:

Suponhamos que o funcional integral $\int_a^b m(x(t))x'(t)\chi_{x^{-1}}(t)dt$ existe. Para provar a mensurabilidade dos conjuntos $E_- := \{t \in x^{-1}(S) \ : \ \exists x'(t) \in (-\infty, 0)\}$, $E_+ := \{t \in x^{-1}(S) \ : \ \exists x'(t) \in (0,+\infty)\}$, $S = F \cup \mathcal{N}$ (com F do tipo F_σ e $\mathcal{N}$ um conjunto de medida nula). Considera-se o conjunto mensurável $T_- := \{t \in [a,b] \ : \ \exists x'(t) \in (-\infty, 0)\}$, então,

$$\begin{aligned} E_- = T_- \cap x^{-1}(F \cup \mathcal{N}) &= T_- \cap [x^{-1}(F) \cup x^{-1}(\mathcal{N})] = \\ &= [T_- \cap x^{-1}(F)] \cup [T_- \cap x^{-1}(\mathcal{N})] = E_-^1 \cup E_-^2, \end{aligned}$$

onde E_-^1 é um conjunto mensurável. Como E_-^2, é um conjunto de medida nula (logo mensurável): $x'(\cdot) \neq 0$ para todo o $t \in E_-^2$, mas $x'(t) = 0$ em q.s. em E_-^2 (porque $x(x^{-1}(\mathcal{N})) \subset \mathcal{N}$ e $x(\cdot)$ é uma função absolutamente contínua). De modo análogo se prova que o conjunto E_+ é mensurável. Considera-se o conjunto mensurável $T_+ := \{t \in [a,b] : \ \exists x'(t) \in (0,+\infty)\}$. Logo,

$$\begin{aligned} E_+ = T_+ \cap x^{-1}(F \cup \mathcal{N}) &= T_+ \cap [x^{-1}(F) \cup x^{-1}(\mathcal{N})] = \\ &= [T_+ \cap x^{-1}(F)] \cup [T_+ \cap x^{-1}(\mathcal{N})] = E_+^1 \cup E_+^2, \end{aligned}$$

onde E_+^1 é um conjunto mensurável. Atendendo a que E_+^2, é um conjunto de medida nula (logo mensurável) $x'(\cdot) \neq 0$ para todo o $t \in E_+^2$, mas $x'(t) = 0$ em q.s. em E_+^2 (pois $x(x^{-1}(\mathcal{N})) \subset \mathcal{N}$ e $x(\cdot)$ é uma função absolutamente contínua).

Define-se, para $n = 1, 2, ...,$

$$m_n(s) := \begin{cases} n & \text{para} \quad s \quad \text{com} \quad m(s) \geq n \\ m(s) & \text{para} \quad s \quad \text{com} \quad m(s) \in [-n, n] \\ -n & \text{para} \quad s \quad \text{com} \quad m(s) \leq -n \end{cases}$$

$$A_n := \int_a^b m_n(x(t))^+ x'(t)\chi_{E_+}(t)dt,$$

$$B_n := \int_a^b m_n(x(t))^- |x'(t)|\chi_{E_-}(t)dt,$$

$$C_n := \int_a^b m_n(x(t))^- x'(t)\chi_{E_+}(t)dt,$$

$$D_n := \int_a^b m_n(x(t))^+ |x'(t)|\chi_{E_-}(t)dt,$$

Cada um destes funcionais integrais é finito e ≥ 0, e da primeira parte da demonstração resulta que

$$E_n := A_n - D_n := \int_a^b m_n(x(t))^+ x'(t)\chi_{x_{-1}(S)}(t)dt = \int_A^B m_n(s)^+ \chi_S(s)ds$$

$$F_n := C_n - B_n := \int_a^b m_n(x(t))^- x'(t)\chi_{x_{-1}(S)}(t)dt = \int_A^B m_n(s)^- \chi_S(s)ds$$

$$G_n := A_n + B_n := \int_a^b [m_n(x(t))x'(t)]^+ \chi_{x_{-1}(S)}(t)dt$$

$$H_n := C_n + D_n := \int_a^b [m_n(x(t))x'(t)]^- \chi_{x_{-1}(S)}(t)dt$$

Como $0 \leq m_n(s)^+ \leq m_{n+1}(s)^+ \leq m(s)^+$, $(m_n(s)^+) \to m(s)^+$ quando $n \to +\infty$ (o mesmo acontece para $m_n(s)^-$), do (Teorema da convegência monótona 3.6) resulta que

$$A_\infty := \lim A_n = \int_a^b m(x(t))^+ x'(t)\chi_{E_+}(t)dt,$$

$$B_\infty := \lim B_n = \int_a^b m(x(t))^- |x'(t)|\chi_{E_-}(t)dt,$$

$$C_\infty := \lim C_n = \int_a^b m(x(t))^- x'(t)\chi_{E_+}(t)dt,$$

$$D_\infty := \lim D_n = \int_a^b m(x(t))^+ |x'(t)|\chi_{E_-}(t)dt,$$

$$E_\infty := \lim E_n = \int_A^B m(s)^+ \chi_S(s)ds,$$

$$F_\infty := \lim F_n = \int_A^B m(s)^- \chi_S(s)ds,$$

$$G_\infty := \lim G_n = \lim(A_n + B_n) = A_\infty + B_\infty = \int_a^b [m(x(t))x'(t)]^+ \chi_{x_{-1}(S)}(t)dt,$$

$$H_\infty := \lim H_n = \lim(C_n + D_n) = C_\infty + D_\infty = \int_a^b [m(x(t))x'(t)]^- \chi_{x_{-1}(S)}(t)dt$$

porque (A_n), (B_n), (C_n), (D_n) são sucessões crescentes e positivas. O mesmo acontece com $(G_n) = (A_n + B_n)$ e $(H_n) = (C_n + D_n)$. Como por hipótese o funcional integral $\int_a^b m(x(t))x'(t)\chi_{x^{-1}}(t)dt$ existe, um dos integrais G_∞, H_∞ é finito. Se G_∞ for finito, então também A_∞, B_∞ são finitos; e como $F_\infty = \lim(C_n - B_n)$ e B_∞ é finito, tem-se que $F_\infty = C_\infty - B_\infty$. Analogamente, como A_∞ é finito, $E_\infty = A_\infty - D_\infty$ e:

$$E_\infty = \int_A^B m(s)^+ \chi_S(s)ds = A_\infty - D_\infty = \int_a^b m(x(t))^+ x'(t)\chi_{x_{-1}(S)}(t)dt$$

$$F_\infty = \int_A^B m(s)^+ \chi_S(s)ds = C_\infty - B_\infty = \int_a^b m(x(t))^- x'(t)\chi_{x_{-1}(S)}(t)dt$$

Se $A \leq B$ (respectivamente $B \leq A$), então $0 \leq D_\infty \leq A_\infty$ e D_∞ são finitos (respectivamente $0 \leq C_\infty \leq B_\infty$ e C_∞ são finitos). Portanto, E_∞ ou F_∞ é finito e:

$$\begin{aligned}\int_A^B m(s)\chi_S(s)ds &= E_\infty - F_\infty = (A_\infty - D_\infty) - (C_\infty - B_\infty) = \\ &= (A_\infty + B_\infty) - (C_\infty + D_\infty) = G_\infty - H_\infty = \\ &= \int_a^b m(x(t))x'(t)\chi_{x_{-1}(S)}(t)dt,\end{aligned}$$

isto é, verifica-se a igualdade $\int_{x(a)}^{x(b)} m(s)\chi_S(s)ds = \int_a^b m(x(t))x'(t)\chi_{x^{-1}}(t)dt$.

(Caso H_∞ seja finito um dos E_∞, F_∞ é sempre finito, qualquer que seja o caso, e podemos escrever $E_\infty - F_\infty$; e três dos A_∞, B_∞, C_∞, D_∞ são sempre finitos, logo $E_\infty = A_\infty - D_\infty$, $F_\infty = C_\infty - B_\infty$ e $E_\infty - F_\infty = C_\infty - H_\infty$ como na argumentação anterior).

Parte IV:

Supõe-se agora que $x(\cdot)$ é uma função monótona e que o funcional integral $\int_{x(a)}^{x(b)} m(s)\chi_S(s)ds$ existe. Então, um dos conjuntos E_-, E_+ é de medida nula. Portanto, ou $A_\infty = 0 = C_\infty$ ou $B_\infty = 0 = D_\infty$, i.e., ou $G_\infty = B_\infty = -F_\infty$ e $H_\infty = D_\infty = -E_\infty$ ou então, $G_\infty = A_\infty = E_\infty$ e $H_\infty = C_\infty = F_\infty$.

Como $\int_{x(a)}^{x(b)} m(s)\chi_S(s)ds$ existe, um dos integrais E_∞, F_∞ é finito e portanto, ou G_∞, ou H_∞ é finto. Assim, ou $E_\infty - F_\infty = (-D_\infty) - (-B_\infty) = G_\infty - H_\infty$ ou então $E_\infty - F_\infty = A_\infty - C_\infty = G_\infty - H_\infty$, de tal modo, que em ambos os casos a conclusão é a mesma: (49)$= E_\infty - F_\infty = G_\infty - H_\infty = \int_a^b m(x(t))x'(t)\chi_{x^{-1}}(t)dt$ existe.

Põe-se $S := x(E)$, para $E \subset [a,b]$ um conjunto mensurável , então S é mensurável (pois $x(\cdot)$ verifica a propriedade (**N**) de Lusin) e $x(x^{-1}(S) \setminus E)$ é um conjunto de medida nula (porque é contável: os seus valores são aqueles que $x(\cdot)$ toma em intervalos de crescimento dois a dois disjuntos, de interior não vazio - portanto, com valores racionais - porque $x(\cdot)$ é monótona). Logo, o integral $\int_a^b m(x(t))x'(t)\chi_{x^{-1}}(t)dt$ toma o mesmo valor, ainda que se ponha de parte - do seu dominio de integração $x^{-1}(S)$ - um subconjunto, $x^{-1}(S) \setminus E$, onde a integranda, $m(x(\cdot))x'(\cdot) = 0$ q.s. em $[a,b]$; donde $\int_E m(x(t))x'(t)\,dt = \int_{x(a)}^{x(b)} m(x(t))x'(t)\chi_{x^{-1}(S)}(t)\,dt$.

□

COROLARIO 2.1. *Sob as mesmas hipóteses do teorema anterior, sejam $x(\cdot) \in \mathcal{X}_{AB}$ e $m(x(\cdot))x'(\cdot) \leq \phi(\cdot) \in L^1(a,b)$ q.s. em $[a,b]$. Então, existe o funcional integral $\int_a^b m(x(t))x'(t)dt$ e verifica-se a igualdade:*

$$\int_a^b m(x(t))x'(t)dt = \int_{x(a)}^{x(b)} m(s)ds. \tag{52}$$

DEMONSTRAÇÃO. Considera-se o caso em que $A = B$. Como $x(\cdot) \in \mathcal{X}_{AB}$ e $m(x(\cdot))x'(\cdot) \leq \phi(\cdot) \in L^1(a,b)$ q.s. em $[a,b]$, claramente o integral $\int_a^b m(x(t))x'(t)dt$ existe (com valores finitos ou com valor $-\infty$); com $S = \mathbb{R}$, $A_n - D_n = E_n = 0 = C_n - B_n = F_n$, pois $A = B$. Como $x(\cdot) \in \mathcal{X}_{AB}$ e $m(x(\cdot))x'(\cdot) \leq \phi(\cdot) \in L^1(a,b)$ q.s. em $[a,b]$, $G_\infty = A_\infty + B_\infty$ é finito, A_∞ e B_∞ são finitos, $A_\infty = \lim A_n = \lim D_n = D_\infty$, $B_\infty = \lim B_n = \lim C_n = C_\infty$, i.e., $A_\infty = \int_a^b m(x(t))^+ x'(t)\chi_{E_+}(t)dt = \int_a^b m(x(t))^+|x'(t)|\chi_{E_-}(t)dt = D_\infty$, $B_\infty = \int_a^b m(x(t))^-|x'(t)|\chi_{E_-}(t)dt = \int_a^b m(x(t))^- x'(t)\chi_{E_+}(t)dt = C_\infty$ e portanto, os funcionais integrais integrais são finitos.

De modo similar, os funcionais integrais $G_\infty = \int_a^b [m(x(t))x'(t)]^+ dt = A_\infty + B_\infty = C_\infty + D_\infty = \int_a^b [m(x(t))x'(t)]^- dt$ e $\int_a^b m(x(t))x'(t)dt = G_\infty - H_\infty = 0$ também são finitos.

□

2.3. Minimizantes bimonótonos.

TEOREMA 2.1. *Sejam $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ uma função $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensurável tal que $L(\cdot, 0)$ é semicontínua inferior; $y(\cdot) \in \mathcal{X}_{AB}$ uma função monótona para a qual o funcional integral*

$$\int_a^b L(y(t), y'(t))dt \tag{53}$$

existe e tem valor finito; $\alpha : [A,B] \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável (por exemplo $\alpha(s) \equiv 0$), com $\alpha(s) \geq 0$ $\forall s \in [A,B]$ $(\alpha(s) \leq 0 \forall s \in [B,A])$, com $\alpha(s) = 0$ nos pontos s tais que $\partial L(s,0) = \emptyset$ e que satisfaz a desigualdade:

$$L(s,\xi) \geq \left(1 - \frac{\xi}{\alpha(s)}\right) L(s,0) + \frac{\xi}{\alpha(s)} L(s,\alpha(s)) \tag{54}$$

portanto, qualquer que seja $\xi \in]0, \alpha(s)[$ *e em quase todos os pontos* $s \in [A, B]$ *(qualquer que seja* $\xi \in]\alpha(s), 0[$ *em quase todos os pontos* $s \in [B, A]$*, respectivamente). Então, existe uma função absolutamente contínua* $z(\cdot) \in \mathcal{X}_{AB}$ *para a qual*

$$\int_a^b L(z(t), z'(t))dt \leq \int_a^b L(y(t), y'(t))dt, \tag{55}$$

e

- $z(\cdot)$ *constante em algum subintervalo* $[a', b'] \subset [a, b]$*;*
- $z'(t) > 0$ *(respctivamente* $z'(t) < 0$*) q.s. em* $[a, a'] \cup [b', b]$*;*
- $0 \leq \alpha(z(t)) \leq z'(t)$ *(respectivamente* $z'(t) \leq \alpha(z(t)) \leq 0$*) q.s. em* $[a, a'] \cup [b', b]$*.*

DEMONSTRAÇÃO. A demontração divide-se em várias partes:
Parte I:
Supõe-se que $y(\cdot)$ é crescente no intervalo $[A, B]$, e que $\alpha(s) \geq 0$ $\forall s \in [A, B]$. Como $\varphi(\cdot) := L(\cdot, 0)$ é semicontínua inferior. Pelo (Lema 2.1), $L(x(\cdot), x'(\cdot))$ é mensurável, qualquer que seja a função $x(\cdot)$ absolutamente contínua; e como o conjunto

$$S_m := \{s \in [A, B] : \quad \varphi(s) = \min \varphi([A, B])\} \tag{56}$$

é não vazio, e portanto, podemos fixar qualquer $s_m \in S_m$.

Supõe-se daqui em diante que $\varphi(s_m) < +\infty$, porque, se assim não fosse, a conclusão do teorema seria trivial: se $L(\cdot, 0) = \varphi(\cdot) \equiv +\infty$, resulta $0 = \alpha(y(\cdot)) < y'(\cdot)$ q.s. em $[a, b]$, então $z(\cdot) := y(\cdot)$ satisfaz trivialmente as conclusões do (2.4).

A função inversa $y^{-1} : [A, B] \to [a, b]$ está bem definida (como a única função crescente e semicontínua inferior para a qual $t \mapsto y^{-1} \circ y(t)$ é semicontínua inferior e $t \mapsto y^{-1} \circ y(t)$ é a função identidade.)

Como $y^{-1}(\cdot)$ é crescente, de variação limitada, a derivada no sentido clássico existe em $[0, +\infty)$ q.s. em $[A, B]$, e $s \mapsto y'^{-1}(s) \in L^1(A, B)$ (Teorema 3.22).

Definem-se

$$T_+ := \{t \in [a, b] \ : \ \exists y'(t) \in (0, +\infty)\},$$
$$S_+ := \{s \in [A, B] \ : \ \exists y'^{-1}(t) \in (0, +\infty)\},$$
$$T_N := [a, b] \setminus T_+, \quad S_N := [A, B] \setminus S_+.$$

Com efeito, verifica-se que $y(T_+) = S_+$, $y(T_N) = S_N$, $y^{-1}(S_+) = T_+$, $y^{-1}(S_N) = T_N$. Nenhum ponto de S_N pode ser imagem (por meio de $y(\cdot)$) de algum ponto de T_N, porque: a simetria relativamente à linha recta $s = t$ transforma o gráfico Γ de $y(\cdot)$ no gráfico Γ' que é o de $y^{-1}(\cdot)$, e transforma linhas rectas tangentes a Γ de declive m em linhas rectas tangentes a Γ' de declive $\frac{1}{m} \in (0, +\infty)$, e vice-versa.

Como $y(\cdot)$ é absolutamente contínua e crescente, $y'(\cdot) = 0$ em T_N e $|S_N| = 0$; e portanto, $|S_+| = B - A$, $y'^{-1}(s) \in (0, +\infty)$ q.s. em $[A, B]$.

Considera-se que $\varepsilon := |T_N|$ obtem-se $|T_+| = b - a - \varepsilon$. Definem-se:

$$t_m^- := \min y^{-1}(s_m), \quad t_m^+ := \max y^{-1}(s_m),$$

$$S_+^0 := \left\{ s \in S_+ : \quad \alpha(s) > \frac{1}{y'^{-1}(s)} \right\},$$

$$T_+^0 := y^{-1}(S_+^0) := \left\{ t \in T_+ : \quad 0 < y'(t) < \alpha(y(t)) \right\},$$

$$v(s) := y'^{-1}(s)\chi_{S\setminus S_+^0}(s) + \frac{1}{\alpha(s)}\chi_{S_+^0}(s).$$

O conjunto T_+^0 é mensurável, como consequência do (Lema 2.1) no caso em que

$$L_0(s,\xi) := \begin{cases} \frac{\xi}{\alpha(s)} & \text{para aqueles} \quad s, \quad \xi \quad \text{onde} \quad \alpha(s) > 0 \quad \text{e} \quad \xi \geq 0 \\ +\infty & \text{para aqueles} \quad s, \quad \xi \quad \text{onde} \quad \alpha(s) = 0 \quad \text{ou} \quad \xi < 0, \end{cases}$$

logo, $T_+^0 = \{t \in T_+ \ : \ L(y(t), y'(t)) \in (0,1)\}$. Como $0 \leq v(s) \leq y'^{-1}(s)$ q.s., $v(\cdot) \in L^1(A,B)$, pelo que

$$\delta_- := \int_A^{s_m} v(s)ds, \quad \delta_+ := \int_{s_m}^B v(s)ds;$$

e como $y(\cdot)$ é monótona, o (Lema 2.2) garante que

$$\delta_- = \int_A^{s_m} v(s)ds = \int_A^{s_m} \left\{ y'^{-1}(s)\chi_{S\setminus S_+^0}(s) + \frac{1}{\alpha(s)}\chi_{S_+^0}(s) \right\} ds =$$

$$= \int_a^{t_m^-} \left\{ \chi_{T_+\setminus T_+^0}(t) + \frac{y'(t)}{\alpha(y(t))}\chi_{T_+^0}(t) \right\} dt, \tag{57}$$

$$\delta_+ = \int_{s_m}^B v(s)ds = \int_{s_m}^B \left\{ y'^{-1}(s)\chi_{S\setminus S_+^0}(s) + \frac{1}{\alpha(s)}\chi_{S_+^0}(s) \right\} ds =$$

$$= \int_{t_m^+}^b \left\{ \chi_{T_+\setminus T_+^0}(t) + \frac{y'(t)}{\alpha(y(t))}\chi_{T_+^0}(t) \right\} dt. \tag{58}$$

Para $a' := a + \delta_-$ e $b' := b - \delta_+$, como

$$b' - a' = (b-a) - (\delta_- + \delta_+) =$$

$$= \int_a^b \left\{ \chi_{T_N}(t) + \chi_{T_+^0}(t) + \chi_{T_+\setminus T_+^0}(t) \right\} dt - (\delta_- + \delta_+)$$

resulta que (porque $\chi_{T_+} \equiv 0$ em (t_m^-, t_m^+))

$$b' - a' = \int_a^b \left\{ \chi_{T_N}(t) + \left[1 - \frac{y'(t)}{\alpha(y(t))} \right] \chi_{T_+^0}(t) \right\} dt. \tag{59}$$

As funções $\tau_-(s) := a + \int_A^s v(\sigma)d\sigma, \quad s \in [A, s_m]$, e

$$\tau_+(s) := b' + \int_{s_m}^s v(\sigma)d\sigma, \ s \in [s_m, B],$$

são absolutamente contínuas e têm derivada $v(s) \in (0, +\infty)$ q.s.; e como

$$\tau_-(s_m) := a + \int_A^{s_m} v(s)ds = a + \delta_- = a',$$

$$\tau_+(B) := b' + \int_{s_m}^{B} v(s)ds = b - \delta_+ + \delta_+ = b,$$

resulta que $\tau_- : [A, s_m] \to [a, a']$ e $\tau_+ : [s_m, B] \to [b', b]$.

Portanto, podem-se definir as funções inversas de $\tau_-(\cdot)$ e $\tau_+(\cdot)$:

$$z_- : [a, a'] \to [A, s_m], \quad z_+ : [b', b] \to [s_m, B],$$

que são absolutamente contínuas e têm derivada positiva q.s. (a inversa de uma função absolutamente contínua e crescente $\tau_-(\cdot)$ é absolutamente contínua se e só se $\tau'_-(s) > 0$ q.s., tal como aqui acontece).

Com efeito, verifica-se que:

$$z'_-(t) = \frac{1}{\tau'_-(z_-(t))} = \frac{1}{v(z_-(t))} = \frac{1}{y'^{-1}(z_-(t))} > 0 \quad \text{se} \quad z_-(t) \in S_+ \setminus S_+^0,$$

$$z'_-(t) = \frac{1}{\tau'_-(z_-(t))} = \frac{1}{v(z_-(t))} = \alpha(z_-(t)) > 0 \quad \text{se} \quad z_-(t) \in S_+^0,$$

e portanto, $z'_-(t) > 0$ $\forall t = \tau_-(z_-(t)) \in \tau_-(S_+)$; e como $\tau_-(\cdot)$ é absolutamente contínua e $|\tau_-(S_+)| = a' - a - |\tau_-(S_N)| = a' - a$ (porque $|\tau_-(S_N)| = 0$, pois $\tau_-(\cdot)$ é absolutamente contínua e $|S_N| = 0$), $z'_-(t) > 0$ q.s. em $[a, a']$).

Define-se

$$z(t) := \begin{cases} z_-(t) & t \in [a, a'] \\ s_m & t \in [a', b'] \\ z_+ & t \in [b', b], \end{cases} \tag{60}$$

donde se obtém uma função $z : [a, b] \to [A, B]$ que é absolutamente contínua com derivada $z'(t) > 0$ q.s. em $[a, a'] \cup [b', b]$. Como

$$0 < \tau'(s) = v(s) = \frac{1}{\alpha(s)} y'^{-1}(s)$$

em S_+^0, resulta

$$0 < \frac{1}{y'^{-1}(z(t))} < \alpha(z(t)) = z'(t) = \frac{1}{\tau'_-(z(t))} \quad \text{em} \quad \tau_-(S_+^0) \tag{61}$$

e porque $0 < \tau'_-(s) = v(s) = y'^{-1}(s)$, e como

$$0 \le \alpha(s) \le \frac{1}{v(s)} = \frac{1}{\tau_-(s)} = \frac{1}{y'^{-1}(s)}$$

em $S_+ \setminus S_+^0$ obtém-se

$$0 < z'(t) = \frac{1}{\tau'_-(z(t))} \quad \text{e} \quad 0 \le \alpha(z(t)) \le z'(t) \quad \text{em} \quad \tau_-(S_+ \setminus S_+^0) \tag{62}$$

O mesmo acontece com $\tau_+(\cdot)$, de tal modo que ($|\tau_-(S_+)| = a' - a$ e $|\tau_+(S_+)| = b' - b$): $z'(t) > 0$ e $z'(t) \geq \alpha(z(t)) \geq 0$ q.s. em $[a, a'] \cup [b, b']$, assim $z(\cdot)$ satisfaz as propridades pretendidas.

Parte II:

Supõe-se agora que a desigualdade $\int_a^b L(z(t), z'(t))dt \leq \int_a^b L(y(t), y'(t))dt$ se verifica. A restante demonstração será dedicada a esta asserção. Como a função

$$t \mapsto \theta(t) := v(y(t))y'(t) = \chi_{T_+ \setminus T_+^0}(t) + \frac{y'(t)}{\alpha(y(t))}\chi_{T_+^0}(t) \tag{63}$$

é mensurável com $\theta(t) \in [0, 1]$ q.s., a sua primitiva

$$\gamma(t) := a + \int_a^t \theta(\sigma)d\sigma, \quad t \in [a, t_m^+] \tag{64}$$

é lipschitziana e crescente, tal como a sua primitiva

$$\gamma(t) := b' + \int_{t_m^+}^t \theta(\sigma)d\sigma, \quad t \in (t_m^+, b] \tag{65}$$

que também é lipschitziana e crescente. Contudo, $\gamma(\cdot)$ é descontínua nos pontos $t = t_m^+$, de $\gamma(t_m^+) = a' < b'$ a $b' = \lim_{t \searrow t_m^+} \gamma(t)$, excepto em casos triviais.

Como $v(\cdot) \in L^1(A, B)$ e $y(\cdot)$ é uma função absolutamente contínua e crescente, pelo (Lema 2.2) ao substituir $s = y(t)$ no funcional integral $\tau_-(s) = a + \int_A^s v(\sigma)d\sigma$, para $t \in [a, t_m^+]$, resulta

$$\tau_-(y(t)) = a + \int_A^{y(t)} v(s)ds = a + \int_A^t v(y(\sigma))y'(\sigma)d\sigma = a + \int_a^t \theta(\sigma)d\sigma = \gamma(t),$$

então, em particular,

$$\gamma(t) = \tau_-(y(t)) = \tau_-(s_m) = a' \quad \text{para} \quad t \in [t_m^-, t_m^+].$$

Substituindo agora $s = y(t)$ no integral $\tau_+(s) = b' + \int_{s_m}^s v(\sigma)d\sigma, \quad s \in [s_m, B]$ de se aplicar (65) resulta,

$$\tau_+(y(t)) = b' + \int_{t_m^+}^t \theta(\sigma)d\sigma = \gamma(t) \quad \text{para} \quad t \in (t_m^+, b],$$

$$\gamma(b) = \tau_+(y(b)) = \tau_+(y(t)) = b.$$

Assim, constrói-se uma função $\gamma : [a, b] \to [a, b]$ que é crescente, semicontínua inferior, descontínua em $t = t_m^+$, lipschitziana em $[a, t_m^+]$ e em $(t_m^+, b]$ e com $\gamma([a, t_m^-]) = [a, a']$, $\gamma((t_m^+, b]) = (b', b]$, $\gamma'(t) \in [0, 1]$ q.s., $\gamma(t) = \tau_-(y(t))$ para $t \in [a, t_m^+]$, $\gamma(t) = \tau_+(y(t))$ para $t \in (t_m^+, b]$, $\gamma(t) \equiv a'$ em $[t_m^-, t_m^+]$, $\gamma'(t) \equiv 1$ em $T + \setminus T_+^0$ (*).

Aplicamos agora $z(\cdot)$ (que é a função inversa de $\tau_-(\cdot)$ e de $\tau_+(\cdot)$) a ambos os membros das igualdades anteriores, e obtem-se

$$y(t) = z(\gamma(t)) \quad \forall t \in [a, b]. \tag{66}$$

Portanto, aplicando (64), (65) e (63) a igualdade (59) pode escreve-se como

$$b' - a' = \int_a^b [1 - \gamma'(t)]dt. \tag{67}$$

Além disso, multiplicando ambos os membros de (67) por $\varphi(s_m)$, resulta:

$$\int_{a'}^{b'} \varphi(s_m)d\tau = \int_a^b \varphi(s_m)[1 - \gamma'(t)]dt. \tag{68}$$

Define-se agora

$$m : [a, b] \to (-\infty, +\infty], \qquad m(\tau) := L(z(\tau), z'(\tau)). \tag{69}$$

Da desigualdade (54) obtém-se, para $t \in (a, t_m^-) \cap T_+^0$, e porque $\gamma'(t) = \frac{y'(t)}{\alpha(y(t))}$, e $\varphi(s) = L(s, 0)$ (ver (56)):

$$L(y(t), y'(t))\chi_{T_+^0}(t) \geq$$

$$\geq [1 - \gamma'(t)]\ \varphi(y(t))\ \chi_{T_+^0}(t)\ +\ \gamma'(t)\ L(y(t), \alpha(y(t)))\ \chi_{T_+^0}(t) \tag{70}$$

e como, por (66), $z'(\gamma(t)) = \frac{y'(t)}{\gamma'(t)} = \alpha(y(t))$ obtem-se,

$$m(\gamma(t))\ \gamma'(t)\ \chi_{T_+^0}(t) = L(z(\gamma(t)), z'(\gamma(t)))\ \gamma'(t)\ \chi_{T_+^0}(t) =$$

$$L(y(t), \alpha(y(t)))\ \gamma'(t)\ \chi_{T_+^0}(t)\ \leq$$

$$\leq L(y(t), y'(t))\ \chi_{T_+^0}(t)\ -\ [1 - \gamma'(t)]\ \varphi(y(t))\ \chi_{T_+^0}(t)\ -$$

$$-\ \gamma'(t)\ L(y(t), \alpha(y(t)))\ \chi_{T_+^0}(t) \leq$$

$$\leq L(y(t), y'(t))\chi_{T_+^0}(t) + M_1\chi_{T_+^0}(t), \tag{71}$$

com $-M_1 := \min\{0, \varphi(s_m)\} \leq \varphi(y(\cdot))$. Logo, $m(\gamma(\cdot))\gamma'(\cdot)\chi_{T_+^0}(\cdot)$ é limitada superiormente, em (a, t_m^-), por $[L(y(\cdot), y'(\cdot)) + M_1]\chi_{T_+^0}(\cdot) \in L^1(a, b)$, e portanto, o integral de $m(\gamma(\cdot))\gamma'(\cdot)\chi_{T_+^0}(\cdot)$ em (a, t_m^-) existe e é finito.

Para $t \in (a, t_m^-) \cap T_+ \setminus T_+^0$, por (64) e (63), obtém-se $\gamma'(t) = 1$ q.s.: resulta, de (66), que $z'(y(t)) = y'(t)$ e:

$$m(\gamma(\cdot))\gamma'(\cdot)\chi_{T_+ \setminus T_+^0}(\cdot) = L(y(\cdot), y'(\cdot))\chi_{T_+ \setminus T_+^0}(\cdot) \in L^1(a, t_m^-). \tag{72}$$

Para $t \in (a, t_m^-) \cap T_N$, e porque $\gamma'(t) = 0$ q.s.,

$$m(\gamma(\cdot))\gamma'(\cdot)\chi_{T_N}(\cdot) = 0 \in L^1(a, t_m^-). \tag{73}$$

Logo, existe $\int_a^{t_m^-} m(\gamma(t))\gamma'(t)dt$ que é finito. Do modo similar, o integral $\int_{t_m^+}^b m(\gamma(t))\gamma'(t)dt$ existe e é finito.

Portanto, por (52)

$$\int_a^{t_m^-} m(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^{a'} m(\tau)d\tau, \tag{74}$$

$$\int_{t_m^+}^{b} m(\gamma(t))\ \gamma'(t)dt = \int_{b'}^{b} m(\tau)d\tau. \tag{75}$$

Como $L(s_m, 0) = \varphi(s_m) < +\infty$ e $\varphi(y(\cdot))\chi_{T_N}(\cdot) = L(y(\cdot), y'(\cdot))\chi_{T_N}(\cdot) \in L^1(a,b)$ usando (69), (60), (75), (68), (71), (72), (73) e $(*)$ obtem-se:

$$\begin{aligned}
&\int_a^b L(z(\tau), z'(\tau))d\tau = \int_a^{a'} m(\tau)d\tau + \int_{a'}^{b'} \varphi(s_m)d\tau + \int_{b'}^{b} m(\tau)d\tau = \\
&= \int_a^{t_m^-} m(\gamma(t))\gamma'(t)dt + \int_{t_m^+}^{b} m(\gamma(t))\gamma'(t)dt + \int_a^b \varphi(s_m)[1-\gamma'(t)]dt = \\
&= \int_a^{t_m^-} m(\gamma(t))\gamma'(t)\chi_{T_+^0}(t)dt + \int_{t_m^+}^{b} m(\gamma(t))\gamma'(t)\chi_{T_+^0}(t)dt + \\
&+ \int_a^{t_m^-} m(\gamma(t))\gamma'(t)\chi_{T_+\setminus T_+^0}(t)dt + \int_{t_m^+}^{b} m(\gamma(t))\gamma'(t)\chi_{T_+\setminus T_+^0}(t)dt + \\
&+ \int_a^{t_m^-} m(\gamma(t))\gamma'(t)\chi_{T_N}(t)dt + \int_{t_m^+}^{b} m(\gamma(t))\gamma'(t)\chi_{T_N}(t)dt + \\
&+ \int_a^b \varphi(s_m)[1-\gamma'(t)]dt \leq \\
&\leq \int_a^{t_m^-} L(y(t), y'(t))\chi_{T_+^0}(t)dt + \int_{t_m^+}^{b} L(y(t), y'(t))\chi_{T_+^0}(t)dt + \\
&+ \int_a^{t_m^-} L(y(t), y'(t))\chi_{T_+\setminus T_+^0}(t)dt + \int_{t_m^+}^{b} L(y(t), y'(t))\chi_{T_+\setminus T_+^0}(t)dt + \\
&- \int_a^{t_m^-} [1-\gamma'(t)]\varphi(y(t))\chi_{T_+^0}(t)dt - \int_{t_m^+}^{b} [1-\gamma'(t)]\varphi(y(t))\chi_{T_+^0}(t) + \\
&+ \int_a^b \varphi(s_m)[1-\gamma'(t)]dt \leq \\
&= \int_a^b L(y(t), y'(t))dt - \int_a^b L(y(t), y'(t))\chi_{T_+\setminus T_+^0}(t)dt - \\
&- \int_a^b \varphi(y(t))[1-\gamma'(t)]\chi_{T_+}(t)dt - \int_a^b \varphi(s_m)[1-\gamma'(t)]dt = \\
&= \int_a^b L(y(t), y'(t))dt - \int_a^b [\varphi(y(t)) - \varphi(s_m)][1-\gamma'(t)]dt \leq \\
&\leq \int_a^b L(y(t), y'(t))dt.
\end{aligned}$$

o que demonstra a asserção pretendida. □

OBSERVAÇÃO 2.2. *Note-se que não é necessário impor qualquer restrição quando $\alpha(\cdot) \equiv 0$, ou para os pontos s em que $\alpha(s) = 0$.*

OBSERVAÇÃO 2.3. *O (Teorema 2.1) pode ter interesse na aplicação a situações em que é possível provar a existência de minimizantes "seccionalmente"monótonos, i.e., em casos em que existem conjuntos abertos* A_+ *e* A_-*,contidos em* (a,b)*, nos quais* $y'(t) \geq 0$ *q.s. em* A_+, $y'(t) \leq 0$ *q.s. em* A_-*, e* $y'(t) = 0$ *q.s. em* $[a,b] \setminus A_+ \setminus A_-$ *(ou de forma equivalente* $|y([a,b] \setminus A_+ \setminus A_-)| = 0$ *(3.25)).*

Após aplicar o (Teorema 2.1) (a cada um dos intervalos abertos com interiores disjuntos dois a dois - que podem ser em número contável - e cuja união é A_+ *e* A_-*, consegue-se uma partição em três subintervalos onde, respectivamente, o novo minimizante* $z(\cdot)$ *tem* $z'(t) < 0$, $z'(t) = 0$ *e* $z'(t) > 0$*) terminamos com dois novos conjuntos abertos em* A_+ *e* A_-*, e um conjunto fechado* $[a,b] \setminus A_+ \setminus A_-$ *tais que em* $z'(t) > 0$ *q.s. em* A_+, $z'(t) < 0$ *q.s. em* A_-*, e* $z'(t) = 0$ *q.s. em* $[a,b] \setminus A_+ \setminus A_-$.

2.4. Existência de minimizantes bimonótonos.

DEFINIÇÃO 2.1. *Uma função* $y(\cdot) \in \mathcal{X}_{AB}$ *diz-se bimonótona se verifica:*

(1) $y(\cdot) \equiv s' \in I\!R$ *em algum subintervalo* $[a',b'] \subset [a,b]$*, com* $a' \leq b'$*;*
(2) $y(\cdot)$ *é monótona em algum dos restantes subintervalos* $[a,a']$, $[b',b]$ *e verifica a condição*

$$y'(t) \notin \{0\} \cup int[(\partial L(y(t),\cdot))^{-1}(\partial L^{**}(y(t),0))]. \tag{76}$$

(onde ∂ *denota o subdiferencial no sentido da análise convexa).*

DEFINIÇÃO 2.2. *Diz-se que a função lagrangiano* $L(s,\xi)$ *é zero-convexa se*

$$L^{**}(s,0) = L(s,0). \tag{77}$$

TEOREMA 2.2. ***(Existência de minimizantes)*** *Seja* $L : I\!R \times I\!R \to [0,+\infty]$*, uma função com crescimento superlinear no infinito, i.e.,*

$$\frac{inf\, L(I\!R,\xi)}{|\xi|} \to +\infty \qquad |\xi| \to +\infty,$$

e tal que:

(1) *ou* $L(\cdot)$ *é semicontínua inferior;*
(2) *ou* $L(\cdot)$ *é* $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$*-mensurável,* $L^{**}(\cdot)$ *é semicontínua inferior para os pontos* $(s,0)$*, e* $L(s,\cdot)$ *é semicontínua inferior* $\forall s \in I\!R$.

Então, se a função $L(\cdot)$ *for zero-convexia, i.e., fatisfaz (77), existem minimizantes para o funcional integral* $\mathcal{L}(x(\cdot)) = \int_a^b L(x(t),x'(t))dt$*, quaisquer que sejam* A *e* B.

TEOREMA 2.3. ***(Regularidade dos minimizantes e condição necessária de DuBois-Reymond)*** *Sobre as mesmas hipoteses do (Teorema 2.2), existe um minimizante* $y(\cdot)$ *bimonótono para o funcional inetgral*

$$\int_a^b L(x(t),x'(t))dt, \quad x(\cdot) \in \mathcal{X}_{AB}.$$

Além disso, no caso em que o minimizante $y(\cdot)$, *do funcional integral* $\mathcal{L}(x(\cdot)) = \int_a^b L(x(t), x'(t))dt$, *satisfaz a inclusão diferêncial de DuBois-Reymond, i.e.,*

$$L(y(t), y'(t)) \in q + y'(t)\partial L^{**}(y(t), y'(t)),$$

que garante que o valor mínimo do funcional integral e os valores de $L^{**}(y(t), \cdot)$ *são finitos, qualquer que seja* $t \in [a, b]$, *ou*

$$y'(t) \in int(L^{**}(y'(t), \cdot))^{-1}(I\!R) \tag{78}$$

A demonstração detes dois resultados é consequência dos resultados que seguem.

2.4.1. *Caso convexo.*

TEOREMA 2.4. *Seja* $L_c : I\!R \times I\!R \to (-\infty, +\infty]$ *uma função* $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$*-mensurável, limitada inferiormente, tal que* $L_c(\cdot, 0)$ *é semicontínua inferior e* $L_c(s, \cdot)$ *é convexa, semicontínua inferior para todo o* $s \in I\!R$ *e verifica a condição de crescimento superlinear*

$$\frac{inf\, L(I\!R, \xi)}{|\xi|} \to +\infty \qquad |\xi| \to +\infty.$$

Suponhamos que se verifica pelo menos uma das seguintes hipoteses:

(1) $A = B$ *e* $L_c(A, 0) < +\infty$;
(2) *Existe* $x(\cdot) \in \mathcal{X}_{AB}$ *tal que* $\int_a^b L_c(B + (t-a)\frac{A-B}{b-a}, \frac{A-B}{b-a})^+ dt < +\infty$;
(3) $L_c(s, \xi) \geq L_c(s, 0) + m_0\xi$ *para todo os pontos* (s, ξ), *para* $m_0(\cdot) \in L^1(A, B)$;
(4) *Existe* $\varepsilon > 0 : L_c(s, \xi) = +\infty$ *para todo os pontos* (s, ξ) *com* $\xi < 0$ *e* $dist(s, [A, B]) < \varepsilon$;
(5) *Existe* $\varepsilon > 0 : L_c(s, \xi) = +\infty\ \forall (s, \xi)$ *com* $\xi > 0$ *e* $dist(s, [A, B]) < \varepsilon$;
(6) $L_c(\cdot)$ *é semicontínua inferior no ponto* $(s, 0)$ *qualquer que seja* $s \in S_{AB}$, *onde* S_{AB} *se define como*

$$S_{AB} := \left\{ s \in I\!R : \liminf_{(s_k, \xi_k) \to (s, 0)} L_c(s_k, \xi_k) \leq \min L_c([A, B], 0) \right\};$$

(7) *Existem funções* g, $M : I\!R \to (0, +\infty)$ *tais que* $g \times M \in L^1(A, B)$ *e* $L_c(s, \xi) \leq L(s)\ \forall \xi$ *para o qual* $|\xi| \leq \frac{1}{M(s)}\ \forall s \in [A, B]$;
(8) $L_c(\cdot)$ *é aproximável em* $[A, B]$ *por declives integráveis na origem, i.e.,* $\forall n \in I\!N$ *existe uma sucessão de funções* $\varphi_n : I\!R \to (-\infty, n]$ *semicontínuas inferiores, tal que*

$$(\varphi_n(s)) \nearrow L_c(s, 0) \quad \forall s \in [A, B] \tag{79}$$

existe uma sucessão de funções $m_n(\cdot) \in L^1(A, B)$, *tal que se verifica a desigualdade*

$$L_c(s, \xi) \geq \varphi_n(s) + m_n\xi \quad \forall \xi, \forall s \in [A, B]. \tag{80}$$

Então, existem minimizantes para o funcional integral convexo

$$\mathcal{L}_c(x(\cdot)) = \int_a^b L_c(x(t), x'(t))dt, \qquad x(\cdot) \in \mathcal{X}_{AB}. \tag{81}$$

Além disso, existe um minimizante $y_c(\cdot)$ bimonótono que satisfaz a inclusão diferencial de DuBois-Reymond, i.e.,

$$L(y_c(t), y_c'(t)) \in q + y_c'(t)\partial L_c(y_c(t), y_c'(t)).$$

Demonstração. A demonstração divide-se em várias partes.

Parte I:

Seja $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ uma função $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensurável, φ_0, $m_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funções, tais que $\varphi_0(\cdot) \le 0$ é semicontínua inferior, e

$$L(s, \xi) \ge \varphi_0(s) + m_0(s)\xi \quad \forall s, \xi \tag{82}$$

(Tais funções existem sempre que o lagrangiano $L(\cdot)$ é limitado inferiormente.)

Então a função bipolar $L^{**} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ está bem definida e satisfaz:

$$L^{**}(s, \xi) \ge \varphi_0(s) + m_0(s)\xi \quad \forall s, \xi, \tag{83}$$

em particular,

$$\varphi_0(s) \le L^{**}(s, 0) \qquad \forall s. \tag{84}$$

Supõe-se que $L^{**}(\cdot, 0)$ é semicontínua inferior. Para cada $n \in \mathbb{N}$, define-se a sucessão de funções $\varphi_n : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$,

$$\varphi_n(s) := \frac{1}{n}\varphi_0(s) + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \min\{n, L^{**}(s, 0)\}.$$

Então $\varphi_n(\cdot)$ é semicontínua inferior, e para demontrar (84), considera-se que a desigualdade (83) é válida para

$$s \in S_0 := \{s \in \mathbb{R} \ : \ L^{**}(s, \xi) \ge L^{**}(s, 0) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}\}$$

e pode supor-se (caso seja conveniente) que $m_0(s) = 0$ e define-se $m_n(s) = m_0(s) = 0$; para os pontos

$$s \in S_+ := \{s \in \mathbb{R} \setminus S_0 \ : \ L^{**}(s, \xi) \ge L^{**}(s, 0) \quad \forall \xi \le 0\}$$

define-se $m_n(s) = \inf\left\{\frac{L^{**}(s,\xi) - \varphi_n(s)}{\xi} : \xi > 0\right\}$; e para os pontos

$$s \in S_- := \{s \in \mathbb{R} \setminus S_0 \ : \ L^{**}(s, \xi) \ge L^{**}(s, 0) \quad \forall \xi \ge 0\}$$

considera-se $m_n(s) = \max\left\{\frac{L^{**}(s,\xi) - \varphi_n(s)}{\xi} : \xi < 0\right\}$. Note-se que $S_- \cup S_0 \cup S_+ = \mathbb{R}^n$ e que se verifica a desigualdade

$$L^{**}(s, \xi) \ge \varphi_0(s) + m_n(s)\xi \quad \forall n, s, \xi \tag{85}$$

Com efeito, para $s \in S_0$ isto é óbvio pela desigualdade (84); para $s \in S_+$

$$m_n(s) \leq \frac{L^{**}(s,\xi) - \varphi_n(s)}{\xi} \quad \forall \xi > 0,$$

e portanto a desigualdade (85) verifica-se $\forall \xi > 0$ e $\forall n$; enquanto que para $\xi < 0$ porque $\partial L^{**}(s,\cdot)$ é crescente, para $s \in S_-$

$$m_n(s) \geq \frac{\varphi_n(s) - L^{**}(s,\xi)}{-\xi} \quad \forall \xi < 0,$$

e portanto, verifica-se (85) $\forall \xi > 0$ e $\forall n$, enquanto que (85) também se extende a todos os $\xi > 0$, pois $\partial L^{**}(s,\cdot)$ é crescente.

Isto fornece o modo standard de definir as funções $\varphi_n(\cdot)$, $m_n(\cdot)$ que satisfazem a desigualdade (85), para a aproximação em por declives integráveis (descrita na hipótese (8) do teorema). Em alguns casos $m_n(\cdot) \notin L^1(A,B)$; pelo que se tenta modificar $\varphi_n(\cdot)$ de modo a obter um novo declive $m_n(\cdot) \in L^1(A,B)$.

Parte II:

Define-se

$$\mathcal{X}^L_{AB} := \left\{ x(\cdot) \in \mathcal{X}_{AB} : \int_a^b L^{**}(x(t),x'(t))^+ dt < +\infty \right\},$$

que se supõe não vazio. Caso contrário o valor do mínimo para o funcional integral

$$\int_a^b L^{**}(x(t),x'(t))dt, \tag{86}$$

definido para funções $x(\cdot) \in \mathcal{X}_{AB}$ para os quais o funcional integral (86) existe, é $= +\infty$; e portanto, a função afim, que pertence a $\mathcal{X}_{AB}$, pode considerar-se um minimizante com propriedades de regularidade muito boas.

Em particular, no caso de $L(\cdot)$ ser limitada inferiormente (ou se (46) se verificar) supõe-se que existe o integral

$$\int_A^B m_n(s)ds \in [-\infty, +\infty) \quad \forall n \in \{0,1,2,3,...\}. \tag{87}$$

Com efeito, fixa-se $x(\cdot)$ pertencente à classe $\mathcal{X}^L_{AB}$, e considera-se s_n o ponto de mínimo da função $\varphi_n(\cdot)$ restringida a $x([a,b])$ e define-se $\phi_n(\cdot) := L^{**}(x(t),x'(t))^+ - \varphi_n(s_n)$. Então, $\phi_n(\cdot) \in L^1(a,b)$ e por (85),

$$m_n(x(t))x'(t) \leq L^{**}(x(t),x'(t)) - \varphi_n(x(t)) \leq \phi_n(t).$$

Portanto, pelo (Corolário 2.1), os funcionais integrais de $m_n(x(\cdot))x'(t)$ em $[a,b]$ e de $m_n(\cdot)$ em $[A,B]$ existem e têm o mesmo valor:

$$\int_a^b m_n(x(t))x'(t)dt = \int_A^B m_n(s)ds \leq \int_a^b \phi_n(t)dt < +\infty, \tag{88}$$

logo, o funcional integal (87) existe. Em particular, se para $n \in \mathbf{N}$ o integral $\int_A^B m_n(s)ds$ não existe ou é $= +\infty$, verifica-se (87). Em particular, se o integral $\int_A^B m_n(s)dt$ não existe ou é $= +\infty$, para algum $n \in \mathbf{N}$, então também o funcional integral $\int_a^b L^{**}(x(t), x'(t))dt$ não existe ou é igual a $+\infty$, $\forall x(\cdot) \in \mathcal{X}_{AB}$.

Além disso, verifica-se que:

$$\mathcal{X}_{AB}^L \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad m_n(\cdot) \in L^1(A,B) \quad \forall n \in \{0,1,2,...\}. \tag{89}$$

Com efeito, qualquer que seja $x(\cdot) \in \chi_{BA}^L$, obtém-se, de modo similar (88), mas com A e B trocados, i.e.,

$$\int_A^B m_n(s)ds = -\int_B^A m_n(s)ds > -\infty$$

e portanto, (89) é consequência de (87).

Suponha-se que $m_n(\cdot) \in L^1(A,B)$ qualquer que seja n, caso $\mathcal{X}_{AB} \neq \emptyset$; em particular, sempre que

$$\int_a^b L_c\left(B + (t-a)\frac{A-B}{a-b}, \frac{A-B}{a-b}\right)^+ dt < +\infty. \tag{90}$$

Com efeito, se (90) for verdade, então a função afim pertencente ao conjunto $\mathcal{X}_{AB}$ também pertence a $\mathcal{X}_{AB}^L$, e por isso este conjunto é não vazio e aplica-se (89). Assim provou-se que (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (8).

Parte III:

Considera-se agora o caso em que

$$\exists n \in \mathbb{N} : \quad \int_A^B m_n(s)ds = -\infty \tag{91}$$

Um exemplo, para o caso (91) que acontece quando $L^{**}(s,\xi) := [1 + \frac{\xi}{s}]^+$ para vaores de $s \neq 0$, e $L^{**}(0,\cdot) \equiv 1$ com $A \neq 0 = B$ (i.e., considera-se o caso em que $x(\cdot)$ se inicia afastado de zero e termina em zero). Com efeito, considerando $\varphi_0(s) \equiv 0$, $m_0(s) \equiv 0$, da primeira parte da demosnstração obtem-se, $\varphi_n(s) = 1 - \frac{1}{n}$, $m_n(s) = \frac{(1-\frac{1}{n})}{s}$ e a existência $\int_A^B m_n(s)ds = -\infty$. Neste exemplo $L^{**}(\cdot)$ não é semicontínua inferior em $(s,0)$, e a situação (91) é inevitável: ao modificar $m_n(\cdot)$, para $n \geq 1$, de modo a que $m_n(\cdot) \in L^1(A,B)$, então redifine-se $m_n(s) = \frac{-|s|^{\frac{1}{n}}}{s}$; a que se deveria ter $\varphi_n(s) \leq -|s|^{\frac{1}{n}}$ para $s \neq 0$, com o objectivo de verificar (85) com $\xi = -s$; e para ter a semicontínuidade inferior da função $\varphi_n(\cdot)$ é necessário que $\varphi_n(0) \leq 0$, e portanto, que $(\varphi_n(0))$ não converge para $L^{**}(0,0) = 1$. Logo, caso (85) se verifique, a única possibilidade de provar a existência de minimizantes (usando os Teoremas (2.4) e (2.5)) parece ser a utilização da estratégia presente no inicio da (Observação 2.4).

No caso geral, sempre que (91) se verifica, então $\int_B^A m_n(s)ds = +\infty$ e portanto, tal como se explicou, , se $L(\cdot)$ for limitado inferiormente, o funcional integral (86) tem valor $+\infty$ $\forall x(\cdot) \in \mathcal{X}_{BA}$.

Parte IV:

Nesta parte da demonstração, $L_c(\cdot)$ supõe-se limitado inferiormente, com crescimento superlinear, e semicontínuo inferior nos pontos $(s,0)$, $\forall s \in S_{AB}$. O objectivo é demonstrar que $L_c(\cdot)$ a hipótese (8) do Teorema.

Com o intuito de simplificar a notação supõe-se que $L_c(\cdot) \geq 0$, pois obtém-se do anterior por translacção, caso seja limitado inferiormente. Assim, considera-se que a função lagrangiano $L_c(\cdot)$ é limitada inferiormente, com crescimento superlinear e semicontínua inferior em $(s,0)$ $\forall s \in \mathbb{R}$ (e não só $\forall s \in S_{AB}$), contudo, essa diferença não é relevante para o objectivo: obter um minimizante bimonótono $y_c(\cdot)$ para o integral $\int_a^b L_c(x(t), x'(t))dt$, e tal que $y_c(\cdot)$ só é constante nos pontos de S_{AB}, portanto os valores que $L(s,0)$ toma nos pontos $s \notin S_{AB}$ são irrelevantes.

Seja $f(\cdot)$ o invólucro semicontínuo inferior de $L(\cdot)$, i.e., $\operatorname{epi} f(\cdot) = \overline{\operatorname{epi}} L(\cdot)$ com $f(\cdot)$ uma função semicontínua inferior, $f(s,\xi) = \liminf_{\substack{(s_k)\to s \\ (\xi_k)\to\xi}} L(s_k,\xi_k) \leq L(s,\xi)$ $\forall s,\xi$; em particular $f(s,0) = \liminf_{\substack{(s_k)\to s \\ (\xi_k)\to 0}} L(s_k,\xi_k) = L(s,0)$, pois $L(\cdot)$ é semicontínua inferior em $(s,0)$, $\forall s \in S_{AB}$.

Fixa-se $\varepsilon > 0$ e define-se, para cada $n \in \mathbb{N}$, um novo lagrangiano

$$f_n : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to [0,+\infty],$$

$$f_n(s,\xi) := \begin{cases} f(s,\xi) & \text{para } \ |\xi| > 2\varepsilon \\ \min\{n, f(s,\xi)\} & \text{para } \ |\xi| \leq 2\varepsilon. \end{cases}$$

A função $f_n(\cdot)$ é semicontínua inferior (pois é a reunião de dois epigráficos fechados) e a sucessão $(f_n(s,\xi))$ é crescente e converge para $f(s,\xi)$ $\forall s,\ \xi$. A função bipolar $g_n(s,\cdot) := f_n^{**}(s,\cdot)$ define-se por

$$g_n(s,\cdot) := \{(\xi,r) : r \geq g_n(s,\xi)\} = \overline{co}\operatorname{epi} f_n(s,\cdot);$$

e portanto, $g_n(s,\cdot)$ é convexa, semicontínua inferior pela (Proposição 3.23), também $g_n(\cdot,\cdot)$ é semicontínua inferior. Como $g_n(s,\cdot)$ é convexa e $0 < g_n(s,\cdot) \leq n$ em $B(0,2\varepsilon)$, então pelo (Teorema 2.9) existe uma função $m_n(\cdot) \in \mathcal{M}$ tal que $m_n(s) \in \partial g_n(s,0)$ e $|m_n(s)| \leq n\varepsilon$ $\forall s$; em particular $g_n(s,\cdot) \geq g_n(s,0) + m_n(s)\xi$ $\forall s,\xi$ e $m_n(\cdot) \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$. Como $f_n(s,\xi)$ é crescente, $(g_n(s,\xi))$ também o é, e portanto, o seu invólucro convexo converge para alguma função $g(s,\xi) \leq f(s,\xi) \leq +\infty$ $\forall s,\xi$.

No que segue demonstra-se que: $g(s,\xi) = f(s,\xi)$.

Começa-se por provar a inclusão (pois a contrária é óbvia):

$$\operatorname{epi} g(s,\cdot) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \operatorname{epi} g_n(s,\cdot) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{co}\operatorname{epi} f_n(s,\cdot) \subset \operatorname{epi} f(s,\cdot) \quad \forall s. \tag{92}$$

Para tal, considera-se o subespaço topológico de $\mathbb{R}$, $E = \{0\}\bigcup\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Para cada $s \in \mathbb{R}$, define-se a função $\psi_s : E \times \mathbb{R} \to [0,+\infty]$,

$$\psi_s(e,\xi) := \begin{cases} f(s,\xi) & \text{para} \quad e = 0 \\ \\ f_{\frac{1}{e}}(s,\xi) & \text{para} \quad e > 0. \end{cases}$$

Para provar que $\psi_s(\cdot)$ é uma função semicontínua inferior, fixa-se $\xi \in \mathbb{R}$ e consider-se que (ξ_k) converge para ξ. Caso $\liminf_{n,k\to+\infty} f_n(s,\xi_k) = +\infty$, $\liminf_{n,k\to+\infty} f_n(s,\xi_k) = +\infty > f(s,\xi)$, i.e.
$\psi_s(0,\xi) \leq \liminf_{n,k\to+\infty} \psi_s(\frac{1}{n},\xi_k) = +\infty$.

Considera-se agora o caso em que $M := \liminf_{n,k\to+\infty} f_n(s,\xi_k) < +\infty$:

Se $|\xi| > 2\varepsilon$, então supõe-se que $|\xi_k| > 2\varepsilon \quad \forall k$, e $f_n(s,\xi_k) = f(s,\xi_k)\, \forall n,\ k$, logo,

$$\liminf_{n,k\to+\infty} f_n(s,\xi_k) =$$

$$= \liminf_{n,k\to+\infty} f(s,\xi_k) = \liminf_{k\to+\infty} f(s,\xi_k) \geq f(s,\xi) \tag{93}$$

pois $f(s,\cdot)$ é semicontínua inferior, i.e.,

$$\psi_s(0,\xi) \leq \liminf_{n,k\to+\infty} \psi_s\left(\frac{1}{n},\xi_k\right) \tag{94}$$

no caso em que $|\xi| > 2\varepsilon$.

No caso $|\xi| < 2\varepsilon$ supõe-se que $|\xi_k| \leq 2\varepsilon\ \forall k$ e como $M < +\infty$, passa-se a subsucessões (de (n) e de (k)) e obtem-se

$$\lim_{n,k\to+\infty} f_n(s,\xi_k) = M < M+1,$$

em particular

$$f_n(s,\xi_k) < M+1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

logo, quando $n \geq M+1$ tem-se $f_n(s,\xi_k) < M+1 \leq n$ e assim,

$$f_n(s,\xi_k) = \min\{n, f(s,\xi_k)\} = f(s,\xi_k),$$

e (94) do mesmo modo que (93).

Quando $|\xi| = 2\varepsilon$ então, passando a subsucessões, pode-se supor que ou $|\xi| > 2\varepsilon \quad \forall k$ ou $|\xi| \leq 2\varepsilon \quad \forall k$ e procede-se como anteriormente.

Portanto, provou-se (94) para todos os casos possíveis, i.e.,

$$\psi_s(0,\xi) \leq \liminf_{\substack{(e_n)\to 0 \\ (\xi_k)\to\xi}} \psi_s(e_n,\xi_k) \tag{95}$$

logo, $\psi_s(\cdot)$ é semicontínua inferior. Como a condição de crescimento superlinear (45), aplicamos a (3.9) e conclui-se que

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{co}\,\mathrm{epi}\,\psi_s(\frac{1}{n},\cdot) \subset \overline{co}\,\mathrm{epi}\,\psi_s(0,\cdot), \tag{96}$$

e portanto, $(g_n(\cdot))$ cresce e converge pontualmente para $f(\cdot)$.

Pondo, em particular, $\varphi_n(s) := g_n(s,0)$, então $\varphi_n : \mathbb{R} \to [0,n]$ é semicontínua inferior (pois $g_n(\cdot)$ também o é), é crescente e convergente para

$L(s,0)$ (pois $g_n(s,0)$ é crescente e convergente para $g(s,0) = f(s,0) = L(s,0)$). Assim, como se verifica a desigualdade $g_n(s,\xi) \geq g_n(s,0) + m_n(s)\xi$ e como $L(s,\xi) \geq f(s,\xi) \geq f_n(s,\xi) \geq g_n(s,\xi)$ obtem-se $L(s,\xi) \geq \varphi_n(s) + m_n(s)\xi$.

Como $m_n(s) \in L^\infty_{loc}$ e se provou, em particular, que sempre que $L(\cdot)$ é semicontínua inferior em (s,0) $\forall s$ então tem-se (8).

Parte V:

Supõe-se que se verifica a hipótese (8), e considera-se a sucessão minimizante $x_k(\cdot) \subset \mathcal{X}_{AB}$ para o integral $\int_a^b L(x(t), x'(t))dt$ na classe de funções χ_{AB}, e seja $[A_k, B_k] := x_k([a,b])$. Admita-se que $a < a_k < b_k < c_k < d_k < b$, $x_k(a_k) = A_k \leq A = x_k(a) = x_k(b_k) \leq B = x_k(c_k) = x_k(b) \leq B_k = x_k(d_k)$. Define-se

$$\phi_k(t) := m_n(x_k(t))x_k'(t) \leq L(x_k(t), x_k'(t)) - \varphi_n(x_k(t)) \leq L(x_k(t), x_k'(t))$$

tal que para algum $t_1 \leq t_2$ em $[a,b]$,

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_k(t)dt \leq \int_{t_1}^{t_2} L(x_k(t), x_k'(t))dt \leq$$

$$\leq \int_a^b L(x_k(t), x_k'(t))dt \leq I + 1 < +\infty.$$

Então, por (2.1),

$$\int_{A_k}^{B_k} m_n(s)ds = \int_{a_k}^{b_k} \phi_k(t)dt \leq I + 1 < +\infty,$$

$$\int_{A_k}^{B_k} m_n(s)ds = \int_A^B m_n(s)ds - \int_{a_k}^{a} \phi_k(t)dt - \int_b^{d_k} \phi_k(t)dt \geq$$

$$\geq \int_A^B m_n(s)ds - \int_a^b L(x_k(t), x_k'(t))dt \geq$$

$$\geq \int_A^B m_n(s)ds - (I+1) > -\infty,$$

porque $m_n(\cdot) \in L^1(A,B)$. Convenciona-se que:

$$[A_n, B_n] := \overline{\bigcup_{k=1}^{+\infty} [A_k, B_k]}, \quad \Gamma := I + 1 + \left| \int_A^B m_n(s)ds \right|,$$

$$\gamma_k(s) := |m_n(s)| \max_{1 \leq i \leq k} \chi_{[A_i,B_i]}(s), \quad \gamma(s) := |m_n(s)|\, \chi_{[A_n,B_n]}(s)$$

logo,

$$1 \leq \Gamma < +\infty, \quad (\gamma_k(s)) \nearrow \gamma(s), \quad \int \gamma_k(s)ds \leq \Gamma.$$

Aplicando o (Teorema da Convergência Monótona 3.6)

$$\left| \int_{A_n}^{B_n} |m_n(s)|ds \right| = \int \gamma(s)ds =$$

$$= \int \lim_{k\to+\infty} \gamma_k(s)ds = \lim_{k\to+\infty} \int \gamma_k(s)ds \leq \Gamma < +\infty,$$

caso $m_n(\cdot) \in L^1(A,B)$; i.e.,

$$m_n(\cdot) \in L^1(A,B) \Rightarrow m_n(\cdot) \in L^1(A_n,B_n), \tag{97}$$

com $[A_n,B_n] \supset \overline{\bigcup_{k=1}^{+\infty} x_k([a,b])}$, onde $(x_k(\cdot))$ é uma sucessão minimizante para o integral $\int_a^b L(x(t),x'(t))dt$ definido na classe $\mathcal{X}_{AB}$.

Observe-se que o raciocínio realizado só depender da desigualdade $L(s,\xi) \geq \varphi_n(s)+m_n(s)\xi$; e por isso a implicação (97) permanece válida, não só para $L(\cdot)$ mas também para outro lagrangiano que verifique a desigualdade $L_n(s,\xi) \geq \varphi_n(s) + m_n(s)\xi$ juntamente com $\varphi_n(\cdot) \geq 0$ e $\int_a^b L_n(x_k(t),x_k'(t))dt \leq I+1$, (que é seguramente verdade para o caso em que $(x_k(\cdot))$ é uma sucessão minimizante para o integral de $L_n(\cdot)$, com $L_n(\cdot) \leq L(\cdot)$, definido em $\mathcal{X}_{AB}$).

Parte VI:

Sopõe-se que $A = B$ e $L(s,\cdot)$ é convexa e semicontínua inferior. Define-se

$$\varphi_n(s) := \min\left\{n, L(s,0)\left(1-\frac{1}{n}\right)\right\}.$$

Verifica-se fácilmente que $\varphi_n(\cdot)$ é semicontínua inferior e que a sucessão $(\varphi_n(\cdot))$ é crescente e convergente para $L(\cdot,0)$. Para aqueles s tais que $L(s,0) > 0$ porque $\varphi_n(s) < L(s,0)$, o ponto $(0,\varphi_n(s))$ não pertence ao conjunto $C := \mathrm{epi}L(s,\cdot)$ que é convexo e fechado, logo, aplicando o (Teorema de Hahn-Banach 2.2), existe uma linha recta que separa estritamente este ponto do conjunto C, i.e., existe uma sucessão de funções $p_n(s) \in \mathbb{R}$ tal que $L(s,\xi) > \varphi_n(s) + p_n(s)\xi\ \forall\xi \in \mathbb{R}$; e em particular, como $L(\cdot)$ é $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}$-mensurável, existe uma selecção mensurável $m_n(\cdot) \in \mathcal{M}$ que verifica $L(s,\xi) \geq \varphi_n(s) + m_n(s)\xi\ \forall s,\quad \xi$. Por outro lado, para os pontos s tais que $L(s,0) = 0$, podemos por $m_n(s) = 0$.

Como $m_n(\cdot) \in L^1(A,B)$ (trivialmente: A=B), mais uma vez se verifica 8.. Concluí-se pois, sobre as hipóteses do Teorema, que a condição 8. completa por (97), são verdadeiras sempre que A=B ou que $L(\cdot)$ é semicontínua inferior em $(s,0)$, $\forall s$.

Parte VII:

Supõe-se agora que se verificam (8) e (97). Define-se para cada $n \in \mathbb{N}$, um novo lagrangiano $f_n : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to [0,+\infty]$,

$$f_n(s,\xi) := \begin{cases} L(s,\xi) & \text{para} \quad \xi \neq 0 \\ \\ \varphi_n(s) & \text{para} \quad \xi = 0. \end{cases}$$

Claramente $f_n(s,\cdot)$ é uma função semicontínua inferior, mas possivelmente não convexa. A função bipolar $L_n(s,\cdot) := f_n^{**}(s,\cdot)$, de $f_n(s,\cdot)$, é convexa e semicontínua; e pela (Proposição 3.23), $L_n(\cdot)$ é $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}$-mensurável. Como consequência de (80), resulta que $f_n(s,\xi) \geq f_n(s,0) + m_n(s)\xi$ logo $L_n(s,\xi) = f_n^{**}(s,\xi) \geq f_n(s,0) + m_n(s)\xi$ e $f_n(s,\xi) \geq L_n(s,\xi) \geq \varphi_n(s,0) +$

$m_n(s)\xi \quad \forall s,\xi$; em particular, $\xi = 0$, $f_n(\cdot,0) = L_n(\cdot,0) = \varphi_n(\cdot) \leq n$ é semicontínua inferior, enquanto que por (45) e **[Ces83]** aplicado à função $\varphi(\xi) := \inf L(\mathbb{R}, \pm\xi)$, se obtém:

$$\frac{\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(\mathbb{R},\xi)}{|\xi|} \to +\infty \qquad |\xi| \to +\infty. \tag{98}$$

Por outro lado, $L_n(s,\cdot)$ é convexa, semicontínua inferior e cresce quando n cresce. Tal como na primeira parte da demonstração, o limite de $(L_n(s,\xi))$ é $L(s,\xi) \quad \forall s,\xi$. Com efeito, definindo $\psi(\cdot)$ como na (Parte IV) da demonstração, mas com $L(\cdot)$ em vez $f(\cdot)$, se existir uma subsucessão infinita (ξ_{k_i}) de $(\xi_k) \to \xi$, para a qual $\xi_{k_i} = 0\ \forall i$ e por (79),

$$\psi_n(0,\xi) = L(s,0) = \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(s) =$$

$$= \lim_{n,i\to+\infty} f_n(s,0) = \liminf_{n,i\to+\infty} \psi_s\left(\frac{1}{n},\xi_{k_i}\right).$$

No caso em que $\xi_k \neq 0\ \forall k$ mas $\xi = 0$, tem-se que $\psi_s\left(\frac{1}{n},\xi_k\right) = f_n(s,\xi_k) = L(s,\xi_k)$ e $\psi_s(0,\xi) = f_n(s,0) = \varphi_n(s) \leq L(s,\xi)$, então

$$\psi_s(0,\xi) \leq L(s,\xi) \leq \liminf_{n,k\to+\infty} L(s,\xi_k) =$$

$$\liminf_{n,k\to+\infty} f_n(s,\xi_k) = \liminf_{n,k\to+\infty} \psi_s\left(\frac{1}{n},\xi_k\right).$$

Supõe-se agora que $\xi_k \neq 0 \quad \forall k$ e $\xi \neq 0$. Assim,

$$\psi_s(0,\xi) = L(s,\xi) \leq \liminf_{n,k\to+\infty} L(s,\xi_k) =$$

$$= \liminf_{n,k\to+\infty} f_n(s,\xi_k) = \liminf_{n,k\to+\infty} \psi_s(\frac{1}{n},\xi_k).$$

Então, provou-se (95) e (96), i.e.,

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \operatorname{epi} L_n(s,\cdot) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{co}\operatorname{epi} f_n(s,\cdot) \subset \operatorname{epi} L(s,\cdot) \quad \forall s. \tag{99}$$

pelo que a sucessão $(L_n(\cdot))$ converge pontualmente para $L(\cdot)$.

Parte VIII:

Fixa-se $n \in \mathbb{N}$ e considera-se o problema de auxiliar:

$$\int_a^b L_n(x(t),x'(t))dt, \qquad x(\cdot) \in \mathcal{X}_{AB}. \tag{100}$$

Como $L_n(\cdot)$ é $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}$-mensurável, $L_n(\cdot,0) = \varphi_n(\cdot)$ é semicontínua inferior e $L_n(s,\cdot)$ é convexa e semicontínua inferior, e como consequência do (Lema 2.1), mensurável. Por (98) e (Proposição 3.23), $L_n(s,\cdot)$ satisfaz uniformemente em $n \in \mathbb{N}$ a condição de crescimento superlinear no infinito. Portanto, por **[Ces83]**, existe um conjunto comum fracamente sequencialmente compacto
$\mathcal{X}_{AB}^n \subset \mathcal{X}_{AB}$, o qual contém uma sucessão minimizante $(x_n^k(\cdot))$ para o integral

(100) em $\mathcal{X}_{AB}$, e um intervalo compacto $[A_0, B_0]$ que contém os seus valores $[A_n^k, B_n^k] = x_n^k([a,b])$ $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Como $L_n(s,\xi) \geq \varphi_n(s) + m_n(\cdot)\xi$ com $m_n(\cdot) \in L^1(A,B)$ por (97) e as observações que o seguem (97), resulta que $m_n(\cdot) \in L^1(A_n, B_n)$ com $[A_n^k, B_n^k] \subset [A_n, B_n] \subset [A_0, B_0]$. $[A_n, B_n]$ contém todos os valores da sucessão minimizante e $m_n(\cdot) \in L^1(A_n, B_n)$, por isso o integral (100) é fracamente sequencialmente semicontínuo inferior em $\mathcal{X}^0_{AB}$, para esta sucessão minimizante. (Com efeito, podemos redefinir $L_n(s,\xi)$ de modo a tomar o valor $+\infty$ para $s \notin [A_n, B_n]$ e $\xi \neq 0$, de tal modo que $\partial L_n(s,0) = \{0\}$ $\forall s \notin [A_n, B_n]$, $\varphi(\cdot) = L_n(\cdot, 0) \in [0,n]$ é semicontínua inferior e $\partial L_n(\cdot, 0) \in L^1(\mathbb{R})$.)

Em particular, existe um minimizante $y_n(\cdot)$ para o integral (100) em $\mathcal{X}_{AB}$, com $y_n([a,b]) \subset [A_0, B_0]$ e $y_n(\cdot) \in \mathcal{X}^0_{AB}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Claramente $\int_a^b L_n(y_n(t), y_n'(t))dt \leq I < +\infty$ $\forall n$, pois $L_n(\cdot) \leq L(\cdot)$.

Parte IX:

Considera-se outra vez que $\varphi_n(\cdot) = L_n(\cdot, 0)$ é semicontínua inferior e define-se

$$a_n' := \min \{t \in [a,b] \ : \ \varphi_n(y_n(t)) = \min \varphi_n(y_n([a,b]))\} \leq n,$$

$$s_n' = y_n(a_n'), \qquad b_n' := \max y_n^{-1}(s_n') \in [a_n', b].$$

Esta parte dedica-se à análise do comportamento de $y_n(\cdot)$ no intervalo $[t_1, t_2] \subset [a,b]$ com $y_n(t_1) = y_n(t_2)$ e $t_1 < t_2$. Define-se

$$z_n(t) := \begin{cases} y_n(t) & \text{para} \quad t \notin [a_n', b_n'] \\ s_n' & \text{para} \quad t \in [a_n', b_n'] \end{cases}$$

e consideram-se possibilidades:

- no caso $[t_1, t_2] \subset [a, a_n']$ define-se:

$$z_n(t) := \begin{cases} y_n(t) & \text{para} \quad t \in [a, t_1] \\ y_n(t + t_2 - t_1) & \text{para} \quad t \in [t_1, a_n' - t_2 + t_1] \\ s_n' & \text{para} \quad t \in [a_n' - t_2 + t_1, b_n'] \\ y_n(t) & \text{para} \quad t \in [b_n', b]; \end{cases}$$

- no caso $[t_1, t_2] \subset [b_n', b]$ define-se

$$z_n(t) := \begin{cases} y_n(t) & \text{para} \quad t \in [a, t_1] \\ s_n' & \text{para} \quad t \in [a_n', b_n' + t_2 - t_1] \\ y_n(t - t_2 + t_1) & \text{para} \quad t \in [b_n' + t_2 - t_1, t_2] \\ y_n(t) & \text{para} \quad t \in [t_2, b]. \end{cases}$$

Também se define

$$t_n := \min\{t \in [t_1, t_2] \ : \ \varphi_n(y_n(t)) = \ \min \varphi_n(y_n([t_1, t_2]))\}, \quad s_n := y(t_n),$$

obtem-se , no caso $[t_1, t_2] \subset [a, a_n']$,

$$+\infty > \int_{t_1}^{t_2} L_n(y_n(t), y_n'(t))dt \geq \int_{t_1}^{t_2} \{\varphi_n(y_n(t)) + m_n(y_n(t))y_n'(t)\}dt \geq$$
$$\geq \int_{t_1}^{t_2} \{\varphi_n(s_n) + m_n(y_n(t))y_n'(t)\}dt.$$

Como, por definição, $\varphi_n(s_n) < +\infty$, pondo

$$\phi_n(\cdot) := L_n(y_n(\cdot), y_n'(\cdot)) - \varphi_n(s_n) \geq -\varphi_n(s_n') > -\infty,$$

resulta que $\int_a^b \phi_n(t)dt \leq I < +\infty$ e, por (80), $m_n(y_n(\cdot))y_n'(\cdot) \leq \phi_n(\cdot)$. Portanto, como consequência de (2.1)

$$+\infty > \int_{t_1}^{t_2} L_n(y_n(t), y_n'(t))dt \geq \int_{t_1}^{t_2} \{\varphi_n(s_n) + m_n(y_n(t))y_n'(t)\}dt =$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} \varphi_n(s_n)dt \geq \int_{t_1}^{t_2} \varphi_n(s_n')dt = \int_{a_n'-t_1+t_2}^{a_n'} \varphi_n(s_n')dt =$$
$$\int_{a_n'-t_1+t_2}^{a_n'} L_n(z_n, z_n')dt.$$

Para outras posições de $[t_1, t_2]$, relativamente a $[a_n', b_n']$, podemos obter desigualdades similares, procedendo de modo análogo. Portanto, em todos esses casos

$$\int_a^b L_n(y_n(t), y_n'(t))dt \geq \int_a^b L_n(z_n(t), z_n'(t))dt. \tag{101}$$

Contudo, isto pode escreve-se como uma igualdade, pois a desigualdade estricta contradiz o facto de $y_n(\cdot)$ ser um minimizante para o integral (100). Em particular. $\varphi_n(s_n) > \varphi_n(s_n')$ não pode acontecer.

Em conclusão, verifica-se que $\varphi_n(s_n) = \varphi_n(s_n')$ - então, em particular, $[t_1, t_2] \subset [a, a_n']$ não se verifica - e $z_n(\cdot)$ tal como $y_n(\cdot)$ também é um minimizante do integral (100). Portanto, sem perda de generalidade, podemos supor que $y_n(\cdot)$ monótona em $[a, a_n']$, constante $\equiv s_n'$ em $[a_n', b_n']$ e monótona em $[b_n', b]$.

Parte X:

Seja $n \to +\infty$. Tal como oitava parte da demonstração, $\mathcal{X}_{AB}^0$ e $[A_0, B_0]$ são compactos, logo existem:

- uma função absolutamente contínua $y : [a, b] \to [A_0, B_0]$ tal que $y(a) = A$, $y(b) = B$, e portanto $y(\cdot) \in \mathcal{X}_{AB}^0$;
- pontos $a' \leq b'$ em $[a, b]$ e $s' \in [A_0, B_0]$, tais que:
  - a sucessão $y_n(\cdot) \rightharpoonup y(\cdot)$ w-$W^{1,1}$ (como em [**Amb87**]);

– a sucessão (s'_n) converge para s';
– as sucessões (a'_n), (b'_n) converge para a', b', respectivamente;
– $y(\cdot)$ é monótona no intervalo $[a, a']$, constante $\equiv s'$ em $[a', b']$ e monótona em $[b', b]$.

Afirma-se que a função limite $y(\cdot)$ é um minimizante do integral $\int_a^b L(x(t), x'(t))dt$. Com efeito, para cada $k \in \mathbb{N}$ fixo:

$$\int_a^b L_n(x(t), x'(t))dt \geq \int_a^b L_n(y_n(t), y'_n(t))dt \quad \forall x(\cdot) \in \mathcal{X}_{AB} \tag{102}$$

$$\liminf_{n \to +\infty} \int_a^b L_n(y_n(t), y'_n(t))dt \geq \liminf_{n \to +\infty} \int_a^b L_k(y_n(t), y'_n(t))dt \tag{103}$$

$$\liminf_{n \to +\infty} \int_a^b L_k(y_n(t), y'_n(t))dt \geq \int_a^b L_k(y(t), y'(t))dt \tag{104}$$

$$\int_a^b L(x(t), x'(t))dt \geq \liminf_{n \to +\infty} \int_a^b L_n(x(t), x'(t))dt \tag{105}$$

e fazendo $k \to +\infty$,

$$\liminf_{n \to +\infty} \int_a^b L_k(y(t), y'(t))dt \geq \int_a^b L(y(t), y'(t))dt, \tag{106}$$

porque $y_n(\cdot)$ minimiza o integral (100); a sucessão $(L_n(s, \xi))$ é crescente, o integral (100) é sequencialmente fracamente semicontínuo inferior; $L(\cdot) \geq L_n(\cdot)$; $(L_n(y(\cdot), y'(\cdot))) \to L(y(\cdot), y'(\cdot))$ q.s. e pelo (Lema de Fatou 3.5) (que se pode aplicar pois $L_n(\cdot) \geq 0$). Com efeito, (104) verifica-se, pois a estimativa (97) só depende das desigualdades $L_k(s, \xi) \geq \varphi_k(s) + m_k(s)\xi$, $\int_a^b m_k(s)ds > -\infty$, $\int_a^b L_k(y_n(t), y'_n(t))dt \leq \int_a^b L_n(y_n(t), y'_n(t))dt \leq I + 1$.

Portanto, fazendo $n \to +\infty$ em (102) obtem-se, para alguma função $x(\cdot) \in \mathcal{X}_{AB}$,

$$\liminf_{n \to +\infty} \int_a^b L_n(x(t), x'(t))dt \geq \liminf_{n \to +\infty} \int_a^b L_n(y_n(t), y'_n(t))dt \geq$$

$$\geq \liminf_{n \to +\infty} \int_a^b L_k(y_n(t), y'_n(t))dt \geq \int_a^b L_k(y(t), y'(t))dt, \tag{107}$$

por (103) e (105).

Fazendo $k \to +\infty$ em (105) e obtem-se, por (107) e (106), para alguma função $x(\cdot) \in \mathcal{X}_{AB}$,

$$\int_a^b L(x(t), x'(t))dt \geq \liminf_{n \to +\infty} \int_a^b L_n(x(t), x'(t))dt \geq$$

$$\geq \lim_{k \to +\infty} \int_a^b L_k(y(t), y'(t))dt \geq \int_a^b L(y(t), y'(t))dt.$$

Parte XI:

Isto mostra que $y(\cdot)$ minimiza o funcional integral $\int_a^b L(x(t), x'(t))dt$, como se tinha afirmado em (100); e portanto, como anteriormente, $y(\cdot)$ é monótona em $[a, a']$, constante $\equiv s'$ em $[a', b']$ e novamente monótona em $[b', b]$.

Definem-se as funções $d_-, d_+ : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$, tais que:

$$d_- := \inf\left[(L(s,\cdot))^{-1}(\mathbb{R})\right] \leq d_+ := \sup\left[(L(s,\cdot))^{-1}(\mathbb{R})\right];$$

e

$$m_-(s) := \begin{cases} \min \partial L(s,0) & \text{no caso de} \quad d_-(s) < 0 \leq d_+(s) \quad \text{e} \quad \partial L(s,0) \neq \emptyset \\ 0 & \text{para outro} \quad s, \end{cases}$$

$$\alpha(s) := \begin{cases} \min\left[(L(s,\cdot))^{-1}(m_-(s))\right] & \text{no caso de} \quad d_-(s) < 0 \leq d_+(s) \quad \text{e} \quad \partial L(s,0) \neq \emptyset \\ 0 & \text{para outro} \quad s, \end{cases}$$

$$m_+(s) := \begin{cases} \max \partial L(s,0) & \text{no caso de} \quad d_-(s) < 0 \leq d_+(s) \quad \text{e} \quad \partial L(s,0) \neq \emptyset \\ 0 & \text{para outro} \quad s, \end{cases}$$

$$\beta(s) := \begin{cases} \max\left[(L(s,\cdot))^{-1}(m_+(s))\right] & \text{no caso de} \quad d_-(s) < 0 \leq d_+(s) \quad \text{e} \quad \partial L(s,0) \neq \emptyset \\ 0 & \text{para outro} \quad s, \end{cases}$$

$$\varphi(s) := L(s,0).$$

Verifica-se que:

$$\text{(108)} \qquad \alpha(s) \leq 0 \leq \beta(s), \quad int\left[(\partial L(s,\cdot))^{-1}(\partial L(s,0))\right] = (\alpha(s), \beta(s))$$
$$L(s,\xi) = \varphi(s) + m_-(s)\xi \quad \forall \xi \in [\alpha(s), 0],$$
$$L(s,\xi) = \varphi(s) + m_+(s)\xi \quad \forall \xi \in [0, \beta(s)].$$

Por outro lado, a desigualdade (54) verifica-se (aliás, verifica-se a igualdade, pois $L(s,\cdot)$ é convexo), com $\alpha(s)$ ou $\beta(s)$ (que se definiram) no intervalo $[A, s']$ - respectivamente $[s', B]$ - em vez de $[A, B]$. Consequentemente, podemos aplicar (separadamente) o (Teorema 2.4) ema cada um dos intervalos $[a, a']$, $[b', b]$ (onde o minimizante $y(\cdot)$, obtido em na parte sete da demosnatração, é estritamente monótono), e como $y(\cdot)$ restringido a este intervalo é minimiza o funcional integral $\int_a^b L(x(t), x'(t))dt$, definido na classe $\mathcal{X}'_{AB}$ das funções $x(\cdot) \in \mathcal{X}_{AB}$, tais que $x(a') = s' = x(b')$.

Assim, resultam duas novas funções $z_1(\cdot)$ e $z_2(\cdot)$, definidas em [a,a'] e em [b',b] respectivamente. Então constói-se $z : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que

$$z(t) := \begin{cases} z_1(t) & \text{em} \quad [a, a'] \\ y(t) = s' & \text{em} \quad [a', b'] \\ z_2(t) & \text{em} \quad [b', b], \end{cases}$$

é uma função absolutamente contínua, pois $z_1(a') = s' = z_2(b')$, e satifaz (76), por causa de (108) e (Teorema 2.4).

O conjunto imagem de $z(\cdot)$ (i.e., $[A, s'] \cup [s', B]$) coincide com o de $y(\cdot)$. Aplica-se novamente o (Teorema 2.4), pelo que podem existir intervalos $[a'', b'']$, $[a', b']$, $[a''', b''']$ onde $z(\cdot)$ é constante, com valores s', s'', s''', e com $a \leq a'' \leq b'' \leq a' \leq b' \leq a'' \leq b'' \leq b$.

Contudo, a escolha destes valores s'', s', s''' (pode obedecer ao critério comentado no inicio da demonstração do (Teorema 2.4), então terá que ser um ponto de mínimo de $L(\cdot, 0)$. Isto significa que s'' (respectivamente s''') pode, no caso $a'' < b''$ (respectivamente $a''' < b'''$), ser escolhido no intervalo $[A, s']$ (respectivamente em $[s', B]$), para o qual $L(s'', 0) \leq L(s, 0) \forall s \in [A, s']$, (respectivamente $L(s''', 0) \leq L(s, 0) \forall s \in [s', B]$); e que $L(s', 0) \leq L(s, 0) \forall s \in [A, s'] \cup [s', B]$.

Em particular, verifica-se que $L(s'', 0) = L(s', 0) = L(s''', 0)$, (o que garante que $a'' < b''$ e $a''' < b'''$), também se pode fazer com que $z(\cdot)$ seja constante só no ponto s' (i.e., $s'' = s' = s'''$) durante um intervalo de comprimento $b' - a' + b'' - a'' + b''' - a'''$.

Redefinem-se a' e b', e obtem-se: $z(t) \equiv s'$ no intervalo $[a', b']$ e que $z(\cdot)$ é crescente (ou decresce) em $[a, a']$ e em $[b', b]$, tal que verifica

$$z'(t) \notin \{0\} \cup (\alpha(z(t)), \beta(z(t))) \quad \text{q.s. em} \quad [a, b] \setminus (a', b')$$

i.e, obtém-se (76) , como consequência de (108).

Deste modo, obtem-se um novo minimizante para o funcional integral $\int_a^b L(x(t), x'(t))dt$, definido na classe das funções $x(\cdot) \in \mathcal{X}_{AB}$, que satisfaz as propriedades do (Teorema 2.2).

Prova-se assim que as conclusões do (Teorema 2.4) permanecem válidas, sempre que $A = B$ ou $L(\cdot)$ é semicontínua inferior nos pontos do tipo $(s, 0) \quad \forall s$, i.e., de um modo mais geral no caso em que $L(\cdot)$ é aproximável por declives integráveis, como em (79) e (80).

□

2.4.2. *Caso não-convexo.*

TEOREMA 2.5. *(Caso não-convexo) Seja $L : I\!R \times I\!R \to (-\infty, +\infty]$ uma função $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensuável, limitada inferiormente, tal que $L(s, \cdot)$ é semicontínua inferior $\forall s \in I\!R$ e verifica a condição de crescimento superlinear*

$$\frac{inf\, L(I\!R, \xi)}{|\xi|} \to +\infty \qquad |\xi| \to +\infty.$$

Define-se a função $L_c(\cdot)$ que: ou é igual a $L^{**}(\cdot)$ quando $L^{**}(\cdot, 0)$ é semicontínua inferior e $L_c(\cdot) = L^{**}(\cdot)$ verifica as hipóteses extra formuladas no (Teorema 2.4); ou então $L^{0**}(\cdot)$, em que

(109)

$$L^0(s, \xi) := \begin{cases} L(s, \xi) & para \quad \xi \neq 0 \ \forall s \\ \\ \liminf_{(s_k, \xi_k) \to (s, 0)} L^{**}(s_k, \xi_k) & para \quad \xi = 0 \forall \ s \in I\!R. \end{cases}$$

Seja $y_c(\cdot)$ um minimizante bimonótono (cuja existência é estabelecida pelo (Teorema 2.4)) do funcional integral convexo

$$(110) \qquad \mathcal{L}_c(x(\cdot)) = \int_a^b L_c(x(t), x'(t))dt, \qquad x(\cdot) \in \mathcal{X}_{AB}.$$

Então, se existir $s_c \in y_c([a,b])$ tal que

$$L(s_c, 0) = L_c(s_c, 0) = \min L_c(y_c[a,b], 0)$$

existe um minimizante $y(\cdot)$ para integral não-convexo $\mathcal{L}(x(\cdot))$.

Demonstração. A demonstração divide-se em várias partes:

Parte I:

Seja $y_c(\cdot)$ um minimizante do funcional integral convexificado $\int_a^b L^{**}(x(t), x'(t))dt$ definido na classe $\mathcal{X}_{AB}$ e tal que

(1) $y_c(\cdot) \equiv s' \in \mathbb{R}$ em algum subintervalo $[a', b'] \subset [a, b]$, com $a' \leq b'$;

(2) $y_c(\cdot)$ é monótono em algum dos restantes subintervalos $[a, a']$, $[b', b]$ e verifica a condição $y_c'(t) \notin \{0\} \cup int[(\partial L(y(t), \cdot))^{-1}(\partial L^{**}(y(t), 0))]$,

O objectivo é modificá-la de modo a obter uma outra função $y(\cdot) \in \mathcal{X}_{AB}$ que seja um minimizante para o integral não-convexo

$$\int_a^b L(x(t), x'(t))dt, \qquad x(\cdot) \in \xi_{AB}.$$

Suponhamos que o valor mínimo para o integral convexificado

$$\int_a^b L^{**}(x(t), x'(t))dt,$$

definido na classe $\mathcal{X}_{AB}$, é finito.

Considera-se o domínio de definição de $y_c(\cdot)$ restringida a um dos seus intervalos de monotonia estricta, de tal modo que

$$y_c'(t) \notin \{0\} \cup \text{int} \left[(\partial L(y(t), \cdot))^{-1} (\partial L^{**}(y(t), 0)) \right].$$

Sem perda de generalidade e para simplificar a notação, supõe-se que o intervalo considerado é $[a, b]$, e as condições de fronteira são $y_c(a) = A < y_c(b) = B$. Definem-se também os conjuntos

$$E := \{t \in [a, b] : L^{**}(y_c(t), y_c'(t)) < L(y_c(t), y_c'(t))\},$$

$$S := y_c(E) = \left\{ s \in [A, B] : \quad L^{**}\left(s, \frac{1}{w(s)}\right) < L\left(s, \frac{1}{w(s)}\right) \right\},$$

onde $w : [A, B] \to (0, +\infty)$ representa a derivada da função inversa $y_c^{-1} : [A, B] \to [a, b]$ da função $y_c : [a, b] \to [A, B]$, de tal modo que

$$(111) \qquad s = y_c(t) \Leftrightarrow t = y_c^{-1}(s), \quad w(y_c(t)) = (y_c(t))^{-1}$$

Observe-se que $w(\cdot) \in L^1(A, B)$ e $y_c^{-1}(\cdot)$ são funções absolutamente contínuas, $y_c(\cdot)$ é absolutamente contínua, crescente, e satisfaz (76).

Denota-se por $\chi_S(\cdot)$ a função caracteristica do conjunto S. Por **[ET99**, Proposição IX.3.1] existem funções mensuráveis $\lambda : [A, B] \to [0, 1]$, $\alpha, \beta : [A, B] \to \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha(s) \leq \beta(s),$$

$$L^{**}(s, \alpha(s)) = L(s, \alpha(s)) < +\infty, \; L^{**}(s, \beta(s)) = L(s, \beta(s)) < +\infty, \tag{112}$$

$$\frac{1}{w(s)} = [1 - \lambda(s)]\alpha(s) + \lambda(s)\beta(s),$$
$$L^{**}\left(s, \frac{1}{w(s)}\right) = [1 - \lambda(s)]L(s, \alpha(s)) + \lambda(s)L(s, \beta(s)).$$

Em particular, como $y_c'(t) \notin \{0\} \cup \operatorname{int}[(\partial L(y(t), \cdot))^{-1}(\partial L^{**}(y(t), 0))]$, $0 < \alpha(s) < \frac{1}{w(s)} < \beta(s)$, $0 < \lambda(s) < 1$, $\forall s \in S$; e supõe-se $0 < \alpha(s) = \frac{1}{w(s)} = \beta(s)$, $\lambda(s) = \frac{1}{2}$, $\forall s \in [A, B] \setminus S$.

Para $s \in S$, define-se

$$m(s) := \frac{L(s, \beta(s)) - L(s, \alpha(s))}{\beta(s) - \alpha(s)}, \; q(s) := L(s, \alpha(s)) - \alpha(s)m(s),$$

e resulta

$$L(s, \alpha(s)) = q(s) + m(s)\alpha(s),$$
$$L(s, \beta(s)) = q(s) + m(s)\beta(s),$$
$$L^{**}\left(s, \frac{1}{w(s)}\right) = q(s) + m(s)\frac{1}{w(s)}.$$

Em particular, $q(s) + m(s)\frac{1}{w(s)} > 0 \; \forall s \in S$. Como $y_c^{-1}(\cdot)$ é absolutamente contínua e crescente, do (Lema 2.2) resulta

$$\int_a^b L^{**}(y_c(t), y_c'(t))dt = \int_A^B L^{**}(s, \frac{1}{w(s)})w(s)ds < +\infty,$$

e portanto,

$$\int_a^b L^{**}(y_c(t), y_c'(t))\chi_E(t)dt = \int_A^B [m(s) + q(s)w(s)]\chi_S(s)ds < +\infty \tag{113}$$

Parte II:

O objectivo é aplicar o (Teorema de Liapounov 3.33); contudo não é possível, pois as funções $\frac{1}{\alpha(\cdot)}$, $m(\cdot)$, $\frac{q}{\alpha(\cdot)}$, de um modo geral, não pertencem a $L^1(S)$. Para transpor esta dificuldade definem-se em S as seguintes funções:

$$r(s) := \frac{1}{\alpha(\cdot)} - \frac{1}{\beta(\cdot)} > 0, \quad p(s) := m(s) + \frac{q(s)}{\beta(s)} \geq 0,$$

$$\phi(s) := q(s)r(s), \quad \mu(s) := \frac{w(s) - \frac{1}{\beta(s)}}{r(s)} \in (0, 1), \quad s \in S.$$

Observe-se que

$$0 \leq \int_S \left[\frac{1}{\beta(s)} + r(s)\mu(s)\right] ds = \int_S w(s)ds < +\infty,$$

$$0 \leq \int_S \frac{1}{\beta(s)} ds \leq \int_S w(s)ds < +\infty,$$

$$0 \leq \int_S r(s)\mu(s)ds \leq \int_S w(s)ds < +\infty$$

$$p(s) + \phi(s)\mu(s) = m(s) + q(s)w(s) \geq 0 \quad \forall s \in S,$$

$$0 \leq \int_S L^{**}\left(s, \frac{1}{w(s)}\right) w(s)ds = \int_S [p(s) + \phi(s)\mu(s)]ds < +\infty.$$

Define-se a função $\phi_1(s) := \frac{1}{\alpha(s)} + |\phi(s)| + p(s) + r(s)$, e para $n = 1, 2, ...$, define-se o conjunto $S_n := \{s \in S : \quad n-1 < \phi_1(s) \leq n\}$. Obviamente $\phi_1(s) \in L^1(S_n)$. Como $0 < \phi_1(s) < +\infty$ $\forall s \in S$ tem-se que $S = \bigcup_{n=1}^{+\infty} S_n$.

Pelo (Teorema de Liapounov 3.33), para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um subconjunto mensurável $S_n^- \subset S_n$ tal que

$$\int_A^B r(s)\mu(s)\chi_{S_n}(s)ds = \int_A^B r(s)\chi_{S_n^-}(s)ds,$$

$$\int_A^B \phi(s)\mu(s)\chi_{S_n}(s)ds = \int_A^B \phi(s)\chi_{S_n^-}(s)ds.$$

Definem-se $S_n^+ = S_n \setminus S_n^-$ e $S^+ := \bigcup_{n=1}^{+\infty} S_n^+$, $S^- := \bigcup_{n=1}^{+\infty} S_n^-$ tais que $S^- \cup S^+ = S$. Define-se ainda uma nova função $\tau : [A, B] \to [a, +\infty]$, $\tau(s) := a + \int_A^s [w(\sigma)\chi_{[A,B]\setminus S}(\sigma) + \frac{1}{\alpha(\sigma)}\chi_{S^-}(\sigma) + \frac{1}{\beta(\sigma)}\chi_{S^+}(\sigma)]d\sigma$. Então,

$$b - a = \int_A^B w(s)ds =$$

$$\int_A^B w(s)\chi_{[A,B]\setminus S}(s)ds + \int_A^B \frac{1}{\beta(s)}\chi_{S^+}(s)ds +$$

$$+ \int_A^B \frac{1}{\beta(s)}\chi_{S^-}(s)ds + \int_A^B \left[w(s) - \frac{1}{\beta(s)}\right] \chi_S(s)ds =$$

$$= \int_A^B w(s)\chi_{[A,B]\setminus S}(s)ds + \int_A^B \frac{1}{\beta(s)}\chi_{S^+}(s)ds + \sum_{n=1}^{\infty} \int_A^B \frac{1}{\beta(s)}\chi_{S_n^-}(s)ds +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_A^B \left[w(s) - \frac{1}{\beta(s)}\right] \chi_{S_n}(s)ds =$$

$$= \int_A^B w(s)\chi_{[A,B]\setminus S}(s)ds + \int_A^B \frac{1}{\beta(s)}\chi_{S^+}(s)ds + \sum_{n=1}^{\infty} \int_A^B \frac{1}{\beta(s)}\chi_{S_n^-}(s)ds +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_A^B \left[\frac{1}{\alpha(s)} - \frac{1}{\beta(s)}\right] \chi_{S_n^-}(s)ds =$$

$$= \int_A^B w(s)\chi_{[A,B]\setminus S}(s)ds + \int_A^B \frac{1}{\beta(s)}\chi_{S^+}(s)ds +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\int_A^B \frac{1}{\alpha(s)}\chi_{S_n^-}(s)ds =$$
$$= \int_A^B \left\{ w(s)\chi_{[A,B]\setminus S}(s) + \frac{1}{\beta(s)}\chi_{S^+}(s) + \frac{1}{\alpha(s)}\chi_{S^-}(s) \right\} ds = \tau(B) - a.$$

portanto $\tau(B) = b$, $\tau(A) = a$, e $\tau(\cdot)$ é uma função absolutamente contínua. Em particular,

$$\tau'(s) = w(s)\chi_{[A,B]\setminus S}(s) + \frac{1}{\alpha(s)}\chi_{S^-}(s) + \frac{1}{\beta(s)}\chi_{S^+}(s) > 0$$

q.s. em $[A, B]$, e $\tau(\cdot)$é estritamente crescente em $[A, B]$ e tem valores em $[a, b]$. Considere-se $y : [a, b] \to [A, B]$ a função inversa de $\tau(\cdot)$ que é estritamente crescente e absolutamente contínua, com $y(b) = B$, $y(a) = A$ e com derivada $y'(t) = (\tau'(y(t)))^{-1} \in (0, +\infty)$ q.s. em $[a, b]$.

Como $p(\cdot) = \frac{L(\cdot,\beta(\cdot))}{\beta(\cdot)} \geq 0$, $(p + \phi)(\cdot) = \frac{L(\cdot,\alpha(\cdot))}{\alpha(\cdot)} \geq 0$, definem-se $\psi(s) := [p(s) + \phi(s)]\chi_{S^-}(s) + p(s)\chi_{S^+}(s)$, $\psi_N(s) := \psi(s)\sum_{n=1}^{N}\chi_{S_n}(s)$, $t = \tau(s) \to s = y(t)$, de (113) resulta,

$$\int_a^b L^{**}(y(t), y'(t))dt = \int_A^B L^{**}\left(s, \frac{1}{w(s)}\right) w(s)ds =$$
$$= \int_A^B L^{**}\left(s, \frac{1}{w(s)}\right) w(s)\chi_{[A,B]\setminus S}(s)ds + \int_A^B L^{**}\left(s, \frac{1}{w(s)}\right) w(s)\chi_S(s)ds =$$
$$= \int_A^B L^{**}\left(s, \frac{1}{w(s)}\right) w(s)\chi_{[A,B]\setminus S}(s)ds + \int_A^B [p(s) + \mu(s)\phi(s)]\,\chi_S(s)ds =$$
$$= \int_A^B L^{**}\left(s, \frac{1}{w(s)}\right) w(s)\chi_{[A,B]\setminus S}(s)ds +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_A^B p(s)\chi_{S_n}(s)ds + \int_A^B \mu(s)\phi(s)\chi_{S_n}(s)ds\right\} =$$
$$= \int_A^B L^{**}\left(s, \frac{1}{w(s)}\right) w(s)\chi_{[A,B]\setminus S}(s)ds +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_A^B p(s)\chi_{S_n}(s)ds + \int_A^B \phi(s)\chi_{S_n^-}(s)ds\right\} =$$
$$= \int_A^B L^{**}\left(s, \frac{1}{w(s)}\right) w(s)\chi_{[A,B]\setminus S}(s)ds + \sum_{n=1}^{\infty}\int_A^B \psi(s)\chi_{S_n}(s)ds =$$
$$= \int_A^B L^{**}\left(s, \frac{1}{w(s)}\right) w(s)\chi_{[A,B]\setminus S}(s)ds + \lim_{N\to+\infty}\int_A^B \psi_N(s)ds =$$
$$= \int_A^B L^{**}\left(s, \frac{1}{w(s)}\right) w(s)\chi_{[A,B]\setminus S}(s)ds + \int_A^B \lim_{N\to+\infty}\psi_N(s)ds =$$

$$= \int_A^B L^{**}\left(s, \frac{1}{w(s)}\right) w(s)\chi_{[A,B]\setminus S}(s)ds +$$
$$+ \int_A^B [p(s)+\phi(s)]\chi_{S^-}(s)ds + \int_A^B p(s)\chi_{S^+}(s)ds =$$
$$= \int_A^B L^{**}\left(s, \frac{1}{w(s)}\right) w(s)\chi_{[A,B]\setminus S}(s)ds +$$
$$+ \int_A^B L(s,\alpha(s))\frac{1}{\alpha(s)}\chi_{S^-}(s)ds + \int_A^B L(s,\beta(s))\frac{1}{\beta(s)}\chi_{S^+}(s)ds =$$
$$= \int_A^B L\left(s, \frac{1}{\tau'(s)}\right)\tau'(s)\chi_{[A,B]\setminus S}(s)ds + \int_A^B L\left(s, \frac{1}{\tau'(s)}\right)\tau'(s)\chi_S(s)ds =$$
$$= \int_A^B L\left(s, \frac{1}{\tau'(s)}\right)\tau'(s)ds = \int_a^b L(y(t), y'(t))dt,$$

novamente pelo Lema (2.2) e pelo (Teorema da Convergência Monótona 3.6). Logo, $z(\cdot)$ minimiza o integral não-convexo $\int_a^b L(x(t), x'(t))dt$.

Parte III:

Define-se $y(\cdot) := y_c(\cdot)$ em $[a', b']$, e aplicando o método utilizado em na primeira parte da demonstração para obter $y(\cdot)$ em cada um dos intervalos, $[a, a']$ e $[b', b]$, onde o minimizante $y_c(\cdot)$ do integral convexificado $\int_a^b L^{**}(x(t), x'(t))dt$, dado pelo (2.4), é estritamente monótono, obtemos um minimizante $y(\cdot)$ para o integral não-convexo $\int_a^b L(x(t), x'(t))dt$, que satisfaz as propriedades expressas no (Teorema 2.2).

Parte IV:

Supõe-se agora que $y_c(\cdot)$ satisfaz a inclusão diferencial de DuBois-Reymond, i.e., existe uma constante q tal que

$$L^{**}(y_c(t), y_c'(t)) \in q + y_c'(t)\partial L^{**}(y_c(t), y_c'(t)).$$

Para mostrarmos que é válida a inclusão

$$L(y(t), y'(t)) \in q + y'(t)\partial L^{**}(y(t), y'(t))$$

para $y(\cdot)$, supõe-se sem perda de generalidade, que $y_c(\cdot)$ cresce estritamente em $[a, b]$, tal que verifica a propriedade (76), com valores em $[A, B]$. Para $w(s) := y_c'^{-1}(s)$ tem-se $t = y_c^{-1}(s) \in [a, b]$ se e só se $s = y_c(t) \in [A, B]$, $y_c'(t) = \frac{1}{w(s)}$ portanto

$$L^{**}(y_c(t), y_c'(t)) - y_c'(t)\partial L^{**}(y_c(t), y_c'(t)) = L^{**}\left(s, \frac{1}{w(s)}\right) - \frac{1}{w(s)}\partial L^{**}\left(s, \frac{1}{w(s)}\right)$$

q.s. em $[a, b]$ e q.s. em $[A, B]$. Por isso, para $\tau(s) := y^{-1}(s)$ tem-se $s = y(t) \in [A, B]$ se e só se $t = \tau(s) \in [a, b]$, $y'(t) = \frac{1}{\tau'(s)}$, logo tendo em consideração a forma como se deduziu $\tau'(\cdot)$,

$$c \in L^{**}\left(s, \frac{1}{w(s)}\right) - \frac{1}{w(s)}\partial L^{**}\left(s, \frac{1}{w(s)}\right) \subset L^{**}\left(s, \frac{1}{\tau'(s)}\right) - \frac{1}{\tau'(s)}\partial L^{**}\left(s, \frac{1}{\tau'(s)}\right) =$$
$$= L^{**}(y_c(t), y_c'(t)) - y_c'(t)\partial L^{**}(y_c(t), y_c'(t)),$$

q.s. em $[a,b]$ e q.s. em $[A,B]$. (Observe-se que este raciocínio depende unicamente do facto de $y_c(\cdot)$ satisfazer a inclusão de DuBois-Reymond, independentemente de $y_c'(t) \in \operatorname{int}(L^{**}(y_c(t),\cdot))^{-1}(\mathbb{R})$ q.s. se verificar ou não, quer para $y_c(t)$ como para $y(\cdot)$).

□

OBSERVAÇÃO 2.4. *Outra possibilidade para demonstrar a existência de minimizantes é considerar um minimizante bimonótono para o funcional integral não convexo*

$$\int_a^b L^0(x(t),x'(t))dt, \qquad x(\cdot) \in \mathcal{X}_{AB}, \tag{114}$$

dado pelo (Teorema 2.5). (Em particular, $L^{00}(\cdot) = L^0(\cdot)$ satisfaz (110), com $L(\cdot)$ no lugar de $L(\cdot)$, e portanto o (Teorema 2.5) fornece um minimizante $y(\cdot)$.)

Então, caso $y'(t) \neq 0$ q.s., $y(\cdot)$ também minimiza o funcional integral

$$\int_a^b L(t,x(t),x'(t))dt,$$

devido a (109).

O seguinte resultado clarifica o que acontece no caso em que o lagrangiano tem ou não declives integráveis. No que segue $\mathcal{M} = \{m\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ :\ m(\cdot)\ \text{ é mensurável}\}$.

TEOREMA 2.6. *Seja $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to (-\infty,+\infty]$ uma função $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mensurável tal que $L(\cdot,0)$ é semicontínua inferior. Suponhamos que existem $m(\cdot)$, $\varphi(\cdot) \in \mathcal{M}$, tais que $\varphi(\cdot)$ é semicontínua inferior, e $L(s,\xi) \geq \varphi(s) + m(s)\xi$ $\forall s,\xi$.*

(1) *Se existem $m(\cdot)$, $\varphi(\cdot) \in \mathcal{M}$, tais que $\varphi(\cdot)$ é semicontínua inferior, e $L(s,\xi) \geq \varphi(s) + m(s)\xi$ $\forall s,\xi$, e*

$$\int_A^B m(s)^+ ds = +\infty, \tag{115}$$

então o funcional integral $\mathcal{L}(\cdot) \equiv +\infty$ para os pontos da clase $\mathcal{X}_{AB}$, onde existe;

(2) *Se existem $m(\cdot)$, $\varphi(\cdot) \in \mathcal{M}$, tais que $\varphi(\cdot)$ é semicontínua inferior, $L(s,\xi) \geq \varphi(s) + m(s)\xi$ $\forall s,\xi$, $A = B$ e $m(\cdot) \notin L^1(A,C)$ para todo o $C \neq A$ então a função constante $y_A(\cdot) \equiv A$ é um minimizante para o funcional intregral $\mathcal{L}(\cdot)$ (único se $L(A,0) < +\infty$). (Com efeito, $y_A(\cdot)$ é a única função no conjunto $\mathcal{X}_{AA}$ para a qual o funcional integral $\mathcal{L}(\cdot)$ tem valor finito.)*

(3) *Se existem $m(\cdot)$, $\varphi(\cdot) \in \mathcal{M}$, tais que $\varphi(\cdot)$ é semicontínua inferior, $L(s,\xi) \geq \varphi(s) + m(s)\xi$ $\forall s,\xi$, $m(\cdot) \in L^1(A,B)$ e*

$$\exists M \geq 0 : \quad L(s,\xi) \geq -M(1+|\xi|) \qquad \forall s,\xi. \tag{116}$$

então, pode-se supor que $m(\cdot) \equiv 0$.

(4) *Finalmente, se existem* $m(\cdot)$, $\varphi(\cdot) \in \mathcal{M}$, *tais que* $\varphi(\cdot)$ *é semicontínua inferior,* $L(s,\xi) \geq \varphi(s) + m(s)\xi$ $\forall s, \xi$, *e*

$$\int_A^B m(s)^- ds = +\infty,$$

então o funcional integral $\mathcal{L}(\cdot)$ *é* $\equiv +\infty$ *na classe* $\mathcal{X}_{BA}$.

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos que se verificam as hipóteses e que existem: uma função $\varphi(\cdot)$ semicontínua inferior, $m(\cdot) \in \mathcal{M}$, tais que $L(s,\xi) \geq \varphi(s) + m(s)\xi \quad \forall s,\ \xi$.

Começa-se por provar que se existem $m(\cdot)$, $\varphi(\cdot) \in \mathcal{M}$, tais que $\varphi(\cdot)$ é semicontínua inferior, e $L(s,\xi) \geq \varphi(s) + m(s)\xi$, então $m(\cdot) \in L^1(x([a,b]) \setminus (A,B))$ para $x(\cdot) \in \mathcal{X}_{AB}$ para o qual o valor do funcional integral $\mathcal{L}(\cdot)$ é finito. Considera-se $b' \in (a,b)$ tal que $x(b') = A$; e supõe-se que $A \leq B$ e que existe $a' \in (a,b')$ tal que $x(a') = A' < A \leq B$. Considera-se que s_m é minimizante de $\phi(\cdot)$ em $x([a,b])$.

Como por hipótese, existem funções $m(\cdot)$, $\varphi(\cdot) \in \mathcal{M}$, tais que $\varphi(\cdot)$ é semicontínua inferior,

$$L(s,\xi) \geq \varphi(s) + m(s)\xi,$$

$$m(s)\xi \leq L(s,\xi) - \varphi(s) \leq L(s,\xi) - \varphi(s_m),$$

define-se $\phi(\cdot) := L(x(\cdot), x'(\cdot)) - \varphi(s_m)$, logo $m(x(\cdot))x'(\cdot) \leq \phi(\cdot) \in L^1(a,b)$; por isso, pelo (Corolario 2.1) , os funcionais integrais de $m(x(\cdot))x'(t)$ e de $m(\cdot)$ existem e são iguais, i.e.,

$$\int_A^{A'} m(s)ds = \int_a^{a'} m(x(t))x'(t)dt \leq \int_a^{a'} \phi(t)dt < +\infty,$$

donde,

$$-\infty < \int_A^{A'} m(s)ds = \int_a^{a'} m(x(t))x'(t)dt \leq \int_a^{a'} \phi(t)dt < +\infty.$$

Isto significa que $m(\cdot)$, $m(\cdot) \in L^1(A, A')$, como se queria.

De modo similar, para provar (1), se existir $x(\cdot) \in \mathcal{X}_{AB}$ tal que $\int_a^b L^+(x(t), x'(t))dt < +\infty$, então obtém-se uma contradição, pois pelo (Corolario 2.1) os funcionais integrais $\int_A^B m(s)ds$ e $\int_a^b m(x(t))x'(t)dt$ existem e são iguais, logo $< \infty$, e em particular $\int_A^B m^+(s)ds < +\infty$, o que contradiz (115).

A demonstração a parte (2) é agora imediata.

Resta provar (3). Considera-se a função $x(\cdot) \in \mathcal{X}_{AB}$ tal que o funcional integral $\int_a^b L(x(t), x'(t))dt$ existe, e é $< +\infty$. Como $L_0(x(t), x'(t)) \geq L_0(x(t), 0) = L(x(t), x'(t)) \geq \min L(x([a,b]), 0)$,

$$+\infty > \int_a^b L(x(t), x'(t))dt = \int_a^b \{L_0(x(t), x'(t)) + m(x(t))x'(t)\}dt \geq$$

$$\geq \min L(x[a,b],0)(b-a) + \int_a^b m(x(t))x'(t)dt;$$

este último integral existe e é $< +\infty$, e novamente pelo (Corolario 2.1) igual ao integral $\int_A^B m(s)ds = c \in \mathbb{R}$. Portanto, c é uma constante real, independentemente da escolha da função $x(\cdot) \in \mathcal{X}_{AB}$, e

$$\int_a^b L(x(t),x'(t))dt = \int_a^b \{L_0(x(t),x'(t)) + m(x(t))x'(t)\}dt =$$

$$c + \int_a^b L_0(x(t),x'(t))dt, \quad \forall x(\cdot) \in \mathcal{X}_{AB}$$

para o qual existe $\int_a^b L(x(t),x'(t))dt < +\infty$.

Por outro lado, se $x(\cdot) \in \mathcal{X}_{AB}$, $L_0(x(\cdot),x'(\cdot)) \in L^1(a,b)$, logo

$$\int_a^b m(x(t))x'(t)dt = \int_a^b \{L(x(t),x'(t)) - L_0(x(t),x'(t))\}dt \geq$$

$$\geq -M(b-a) - M\int_a^b |x'(t)|dt - \int_a^b L_0(x(t),x'(t))dt > -\infty,$$

pelo que existe o funcional integral $\int_a^b m(x(t),x'(t))dt$ e de novo pelo (Corolario 2.1) é igual ao funcional integral $\int_A^B m(s)ds = c \in \mathbb{R}$. Assim, $m(x(\cdot))x'(\cdot) \in L^1(a,b)$ e

$$L(x(\cdot),x'(\cdot)) = L_0(x(\cdot),x'(\cdot)) + m(x(\cdot))x'(\cdot) \in L^1(a,b).$$

□

OBSERVAÇÃO 2.5. *Observe-se que hipótese (6) de semicontínuidade inferior da função $L(\cdot)$ em $(s,0)$ $\forall s \in S_{AB}$ pode ser substituida por uma mais fraca:*

(1) *ou $L(s',0) = f(s',0) = f^{**}(s',0)$ onde $f^{**}(\cdot)$ representa o invólucro semicontínuo inferior de $L(\cdot)$, i.e., $\operatorname{epi} f(\cdot) = \overline{\operatorname{epi}}\, L(\cdot)$";*
(2) *ou então $m(\cdot) \notin L^1(s',C)$ $\forall C \neq s'$ e $L(s,\xi) \geq \varphi(s) + m(s)\xi$ $\forall s,\xi$ e alguns $\varphi(\cdot)$, $m(\cdot) \in \mathcal{M}$ com $\varphi(\cdot)$ semicontínua inferior.*

DEMONSTRAÇÃO. Considera-se de novo o invólucro semicontínuo inferior de $f(\cdot)$ de $L(\cdot)$. Seja $g(s,\cdot) = f^{**}(s,\cdot)$ a função bipolar de $f(s,\cdot)$, então como $f(\cdot)$ é semicontínua inferior, $g(\cdot)$ também o é.

Define-se:

$$h(s,\xi) := \begin{cases} L(s,\xi) & \text{para} \quad \xi \neq 0, \quad s \in \mathbb{R} \\ g(s,0) & \text{para} \quad \xi = 0, \quad s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Considera-se $\overline{L}(s,\cdot) = h^{**}(s,\cdot)$. Pela convexidade e semicontinuidade inferior de $g(s,\cdot)$ resulta que

$$g(s,\cdot) \leq \overline{L}(s,0) \leq h(s,\cdot) \leq L(s,\cdot) \quad \forall s,$$

$$g(s,0) \leq \overline{L}(s,0) \leq h(s,0) = g(s,0)$$

$$\leq \liminf_{\substack{(s_k)\to s\\(\xi_k)\to\xi}} g(s_k,\xi_k) \leq \liminf_{\substack{(s_k)\to s\\(\xi_k)\to 0}} \overline{L}(s_k,\xi_k),$$

e obtem-se

$$\overline{L}(s,0) = h(s,0) = g(s,0) \leq \liminf_{\substack{(s_k)\to s\\(\xi_k)\to 0}} \overline{L}(s_k,\xi_k)$$

i.e, $\overline{L}(\cdot)$ é semicontínua inferior nos pontos $(s,0)$, $\forall s$.

Como $\overline{L}(s,\cdot)$ é convexa e semicontínua inferiot, existe um minimizante bimonótono $y(\cdot)$ para o integral

$$\int_a^b \overline{L}(x(t),x'(t))dt, \quad x(\cdot)\in\mathcal{A},$$

Como $L(s,\cdot)$ é convexa, semicontínua inferior e $h(s,\xi)=L(s,\xi)$, excepto em $\xi=0$ onde $h(s,0)\leq L(s,0)$;

$$\overline{L}(s,\cdot) = h^{**}(s,\cdot)$$

$\overline{L}(s,\cdot)$ é afim ao longo de cada um dos intervalos $(\alpha(s),0)$, $(0,\beta(s))$, para os valores de $\xi\neq 0$ onde $\overline{L}(s,\xi) < L(s,\xi)$; e portanto, $\overline{L}(y(t),y'(t)) = L(y(t),y'(t))$ q.s. em $[a,a']\cup[b',b]$.

Por outro lado,

$$L(s',0) = f(s',0) = f^{**}(s',0) = g(s',0) = \overline{L}(s',0), \quad \text{em} \quad [a,a']$$

e como $y(\cdot)\equiv s'$ obtem-se

$$\overline{L}(y(\cdot),y'(\cdot)) = \overline{L}(s',0) = L(s',0) = L(y(\cdot),y'(\cdot)).$$

Assim, para toda a função $x(\cdot)$:

$$\int_a^b L(y(t),y'(t))dt =$$

$$= \int_a^{a'} L(y(t),y'(t))dt + \int_{a'}^{b'} L(y(t),y'(t))dt + \int_{b'}^{b} L(y(t),y'(t))dt =$$

$$= \int_a^b \overline{L}(y(t),y'(t))dt \leq \int_a^b \overline{L}(x(t),x'(t))dt \leq$$

$$\leq \int_a^b L(x(t),x'(t))dt,$$

pelo que $y(\cdot)$ é minimizante para o funcional integral considrado.

Assim, $y(\cdot)$ minimza o integral funcional $\int_a^b L(x(t),x'(t))dt$, $x(\cdot)\in\mathcal{X}_{AB}$, caso se verifiquem:

- ou $A=B$;
- ou $L(\cdot)$ é semicontínua inferior nos pontos $(s,0)$, $\forall s$;
- ou que $L(\cdot)$ é convexa e semicontínua inferior em $(s',0)$;
- ou que (51) juntamente com (52)são verdade;
- ou que (2) do (Teorema 2.6) continua verdade com s' no lugar de A.

□

TEOREMA 2.7. *Seja* $L : I\!R \times I\!R \to (-\infty, +\infty]$ *uma função* $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$*-mensurável tal que* $L(s,\cdot)$ *é não-convexa, mas zero-convexa,* $L(\cdot, 0)$ *e* $L(s,\cdot)$ *semicontínuas inferiores para todo o* $s \in I\!R$*. Suponha-se que, existem* A*,* $B \in I\!R$ *tais que o funcional integral convexificado* $\mathcal{L}_c(\cdot)$ *definido na classe das funções* $\mathcal{X}_{AB}$*, tem um minimizante* $y(\cdot)$ *para o qual existem conjuntos abertos disjuntos* $\mathcal{O}_-$*,* $\mathcal{O}_+ \subset [a,b]$*, tais que, com exepção de um conjunto de medida nula,* $y'(t) \leq 0$ *em* $\mathcal{O}_-$*,* $y'(t) \geq 0$ *em* $\mathcal{O}_+$ *e*

$$\{t \in [a,b] : L^{**}(y(t), y'(t)) < L(y(t), y'(t))\} \subset \mathcal{O}_- \cup \mathcal{O}_+.$$

Então, existem minimizantes para o integral não-convexo $\mathcal{L}(x(\cdot))$*, na classe de funções* $\mathcal{X}_{AB}$*.*

DEMONSTRAÇÃO. Tal como na **(Parte VII)** da demonstração do (Teorema 2.4) demonstra-se a existência de um minimizante, que pelas **(Partes I e II)** da demonstração (Teorema 2.5), se prova que é monótono em cada um dos intervalos do conjunto aberto $\mathcal{O}_- \cup \mathcal{O}_+$.

□

TEOREMA 2.8. *Seja* $L : I\!R \times I\!R \to (-\infty, +\infty]$ *uma função tal que* $L(\cdot)$ *é semicontínua inferior nos pontos* (s,ξ) *se: ou* $\xi = 0$*, ou* $(\overline{L})^{**}(s,\xi) = \overline{L}(s,\xi)$ *e* $s \notin \mathcal{N}$ *(onde* $\mathcal{N}$ *representa um conjunto de medida nula) e* $\overline{L}(\cdot)$ *representa o invólucro semicontínuo inferior de* $L(\cdot)$*.*

Se $\overline{L}(\cdot)$ *satisfaz as hipóteses do Teorema (2.2) (respectivamente Teorema (2.3)) então as conclusões do Teorema (2.2) (respectivamente Teorema (2.3)) são válidas para* $L(\cdot)$*.*

DEMONSTRAÇÃO. O funcional integral

$$\int_a^b \overline{L}(x(t), x'(t))dt, \qquad x(\cdot) \in \mathcal{X}_{AB}, \tag{117}$$

tem minimizante um minimizante $y(\cdot)$, que pelos (Teoremas 2.2 e 2.3) é bimonótono.

Como, $\overline{L}(s,\xi) = \liminf_{s_k \to s}^{\xi_r \to \xi} L(s_k, \xi_k)$, e $(\overline{L})^{**}(s,\xi) = \overline{L}(s,\xi)$, então $L(s,\xi) = \overline{L}(s,\xi)$ se $\xi = 0$; ou então$(\overline{L})^{**}(s,\xi) = \overline{L}(s,\xi)$ para os pontos $s \notin \mathcal{N}$.

Como em $[a',b']$, $y(\cdot) = s'$, $y'(\cdot) \equiv 0$ pela igualdade $(\overline{L})^{**}(s,\xi) = \overline{L}(s,\xi)$, e pela zero-convexidade,

$$(\overline{L})^{**}(y(t), y'(t)) = \overline{L}(y(t), y'(t)) = L(y(t), y'(t)) \quad em \quad [a', b']. \tag{118}$$

Contudo, no conjunto $T := \{t \in [a,b] \setminus [a',b'] \ : \ y(t) \in \mathcal{N}\}$ tem-se que $y'(t) \neq 0$ q.s. e $y'(t) = 0$ q.s. (porque $\mathcal{N}$ é um conjunto de medida nula) e portanto, T tem medida nula, i.é., $y(t) \notin \mathcal{N}$ q.s. em $[a,b] \setminus [a',b']$. Por último, pelo modo como se construiu $y'(\cdot)$ por (112), como $(\overline{L})^{**}(s,\xi) = \overline{L}(s,\xi)$, para os pontos $s \notin \mathcal{N}$, e (118) resulta

$$(\overline{L})^{**}(y(t), y'(t)) = \overline{L}(y(t), y'(t)) = L(y(t), y'(t)) \quad q.s. \text{ em } \quad [a', b']. \tag{119}$$

Portanto, a função $y(\cdot)$ satisfaz a igualdade

$$\int_a^b \overline{L}(y(t), y'(t))dt = \int_a^b L(y(t), y'(t))dt.$$

Mas como $y(\cdot)$ minimiza o funcional integral (117) e $\overline{L}(\cdot) \leq L(\cdot)$ também minimiza o funcional integral $\int_a^b L(y(t), y'(t))dt$. (A mensurabilidade de $L(y(\cdot), y'(\cdot))$ é consequência da mensurabilidade de $\overline{L}(y(\cdot), y'(\cdot))$.) $\square$

APÊNDICE A

Definições e resultados preliminares

No que diz respeito à organização, este capítulo divide-se nas seguintes partes:

1. **Espaços topológicos e lineares:**
   1.1. Espaços topológicos;
   1.2. Espaços métricos;
   1.3. Espaços lineares;
   1.4. Topologias fracas;
   1.5. Espaços reflexivos;
   1.6. Espaços separáveis;
2. **Análise convexa:**
   2.1. Conjuntos convexos;
   2.2. Funções convexas;
   2.3. Funções semicontínuas inferiores;
   2.4. Continuidade das funções convexas;
   2.5. Dualidade;
   2.6. Subdiferenciabilidade;
3. **Medida e espaços funcionais:**
   3.1. Conjuntos mensuráveis;
   3.2. Funções mensuráveis;
   3.3. Teoremas de Lusin e Egoroff;
   3.4. O integral de Lebesgue;
   3.5. Os espaços de Lebesgue L^p;
   3.6. Compacidade;
   3.7. Os espaços de Sobolev $W^{1,p}$;
   3.8. Funções de variação limitada;
   3.9. Funções absolutamente contínuas;
   3.10. Um teorema de mudança de variável;
   3.11. O teorema de Liapunov das medidas vectoriais;
   3.12. Equações diferenciais;
   3.13. Multifunções;
   3.14. Funções normais;
   3.15. Intersecção de epigráficos.

1. Espaços topológicos e lineares

1.1. Espaços topológicos.

DEFINIÇÃO 1.1. [**Yos71**, pag. 3] *Um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é um conjunto munido de uma colecção $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ de subconjuntos de X, chamada topologia de X, tal que*

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;
(2) *se* $\{O_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{T}$ *então* $\bigcup_{\alpha\in A} O_\alpha \in \mathcal{T}$ *para qualquer conjunto* A;
(3) *se* $\{O_i\}_{i=1}^k \subset \mathcal{T}$ *então* $\bigcap_{i=1}^k O_i \in \mathcal{T}$.

i.e., $\mathcal{T}$ *contém* X *e* $\emptyset$, *e é fechado em relação a uniões e em relação a intersecções finitas.*

Os conjuntos $O \in \mathcal{T}$ são chamados conjuntos *abertos*, e os seus complementares são chamados conjuntos *fechados*. Se $x \in X$ então um conjunto aberto contendo x diz-se uma vizinhança de x. O *fecho* $\overline{A}$ de um conjunto $A \subset X$ é o menor conjunto fechado que contém A, i.e., $\overline{A} := \bigcap\{C \ : \ A \subset C \text{ e } C \text{ é fechado}\}$. x diz-se um ponto de acumulação de $A \subset X$ se qualquer vizinhança de x contém infinitos pontos de A.

Uma *base* para a topologia $\mathcal{T}$ é uma subcolecção $\beta \subset \mathcal{T}$ tal que para cada $O \in \mathcal{T}$ e $x \in O$ existe $B \in \beta$ tal que $x \in B \subset O$. Uma topologia $\mathcal{S}$ diz-se *mais fina* que $\mathcal{T}$ se $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ e *menos fina* que $\mathcal{T}$ se $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$. Se $Y \subset X$ então Y pode ser visto como um espaço topológico de uma forma natural tomando a *topologia induzida* $\mathcal{T}_Y := \{O \cap Y \ : \ O \in \mathcal{T}\}$.

Uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ diz-se *convergente* para $x \in X$ se para todo o conjunto aberto O contendo x existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $(x_n)_{n>N} \subset O$.

$(X, \mathcal{T})$ diz-se um *espaço de Hausdorff* se para quaisquer pontos $x_1, x_2 \in X$ existem $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ tais que $X_i \subset O_i$ e $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. $(X, \mathcal{T})$ diz-se *espaço normal* se é de Hausdorff e para quaisquer fechados X_1, $X_2 \subset X$ existem O_1, $O_2 \in \mathcal{T}$ tais que $X_i \subset O_i$ e $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

$\{O_\alpha\}_\alpha \in A$ diz-se uma *cobertura aberta* de X se $X = \bigcup_{\alpha\in A} O_\alpha$ e uma *cobertura aberta finita* se A é finito. $(X, \mathcal{T})$ diz-se *compacto* se toda a cobertura aberta tem uma subcobertura finita, *localmente compacto* se qualquer ponto tem uma vizinhança com fecho compacto e *sequencialmente compacto* se qualquer sucessão tem uma subsucessão convergente. X diz-se *σ-compacto* se é uma união contável de conjuntos compactos.

Se $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$, $\alpha \in A$ são espaços topológicos e A é um qualquer conjunto então a *topologia produto* em $\prod_{\alpha\in A} X$ é a topologia gerada pela base $\{\prod_\alpha O_\alpha \ : \ O_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha, O_\alpha \neq X_\alpha$ apenas para um número finito de α's$\}$.

Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Um conjunto $D \subset X$ diz-se *denso* em X se $\overline{D} = X$. X diz-se *separável* se tem um subconjunto contável e denso. $\mathbb{R}^n$ com os conjuntos abertos e fechados usuais é um exemplo famíliar de espaço topológico. As bolas abertas (bolas abertas com raio racional, bolas abertas com raio e centro racionais) formam uma base. Os pontos de um espaço de Hausdorff são conjuntos fechados.

PROPOSIÇÃO 1.1. [**Rud87**, pag. 36] *Um subconjunto fechado de um conjunto compacto é um conjunto compacto.*

PROPOSIÇÃO 1.2. [**Rud87**, pag. 36] *Um subconjunto compacto de um espaço de Hausdorff é um conjunto fechado.*

PROPOSIÇÃO 1.3. [**Yos71**, pag. 7] *Um espaço de Hausdorff compacto é normal.*

Uma consequência útil da normalidade é o seguinte resultado de extensão:

PROPOSIÇÃO 1.4. [**Rud87**, pag. 389] *Se X é um espaço toplógico normal, $Y \subset X$ é fechado e $f : Y \to I\!R$ é contínua então existe uma extensão contínua de f a X.*

Diz-se que uma colecção de conjuntos tem a *propriedade de intersecção finita* se toda a subcolecção finita tem intersecção não-vazia.

PROPOSIÇÃO 1.5. *Uma colecção de conjuntos compactos com a propriedade de intersecção finita tem intersecção não-vazia.*

DEFINIÇÃO 1.2. [**KF99**] *A compactificação por um ponto por um espaço de Hausdorff não compacto $(X, \mathcal{T})$ é $\widehat{X} := (X \cup \{\infty\}, \mathcal{S})$, onde $\mathcal{S} := \mathcal{T} \cup \{(X \cup \{\infty\}) \setminus K \ : \ K \subset X$ é compacto$\}$.*

TEOREMA 1.1. ***(Teorema de Tychonoff** [**Yos71**, pag. 6]**)** O produto de espaços compactos é compacto.*

DEFINIÇÃO 1.3. [**Yos71**] *Sejam $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{S})$ espaços topológicos. Uma transformação $f : X \to Y$ diz-se contínua se $O \in \mathcal{S}$ implica que $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}$, aberta se $O \in \mathcal{T}$ implica que $f(O) \in \mathcal{S}$, e um homeomorfismo se é contínua, bijectiva e tem inversa contínua. Se existe um homeomorfismo $X \to Y$ então X e Y dizem-se homeomorfos. Denotamos por $C^0(X, Y)$ o espaço das transformações contínuas de X para Y e escrevemos $C^0(X)$ para $C^0(X, I\!R)$. Uma transformação f de um espaço toplógico para $I\!R$ diz-se semicontínua inferior se $f^{-1}(c, \infty) = \{x \in X \ : \ f(x) < c\} \in \mathcal{T}$ para todo o $c \in I\!R$.*

Uma propriedade de dois espaços topológicos que é a mesma para quaisquer dois espaços homeomorfos diz-se um *invariante topológico*.

TEOREMA 1.2. [**Yos71**, pag. 4] *A imagem de um compacto por uma transformação contínua é compacta.*

Uma aplicação útil das noções de continuidade, compacidade e Hausdorff é o seguinte resultado, por vezes designado por invariância de domínio:

PROPOSIÇÃO 1.6. [**Yos71**, pag. 76] *Uma bijecção contínua de um espaço compacto para um espaço de Hausdorff é um homeomorfismo.*

DEFINIÇÃO 1.4. *Um espaço topológico* $(X, \mathcal{T})$ *diz-se conexo se* X *não pode ser coberto por quaisquer dois conjuntos abertos disjuntos.* $(X, \mathcal{T})$ *diz-se conexo por arcos se quaisquer dois pontos* x_1, $x_2 \in X$ *existe uma curva contínua* $c : [0, 1] \to X$ *com* $c(i) = x_i$. *Uma componente conexa é um subconjunto conexo maximal de* X. $(X, \mathcal{T})$ *diz-se totalmente desconexo se todo o ponto é uma componente conexa.*

O conjunto de Cantor e $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ são totalmente desconexos. As componentes conexas são conjuntos fechados. Logo, as componentes conexas são abertas se existe apenas um número finito e, mais geralmente, se qualquer ponto tem uma vizinhança conexa (i.e., o espaço é localmente conexo). Este não é o caso com $\mathbb{Q}$.

TEOREMA 1.3. [**Ma91**, pag. 99] *Uma imagem contínua de um espaço conexo é conexa.*

TEOREMA 1.4. [**Ma91**, pag. 98] *O produto de dois espaços topológicos conexos é conexo.*

1.2. Espaços métricos. Para várias noções bastante naturais não é adequada uma estrutura toplógica e necessitamos antes de uma estrutura uniforme, i.e., uma topologia na qual podemos comparar vizinhanças de diferentes pontos. Esta questão pode considerar-se abstractamente e é efectivada para espaços vectoriais topológicos, mas é mais conveniente introduzir estes conceitos para espaços métricos.

DEFINIÇÃO 1.5. [**Yos71**, pag. 3] *Se* X *é um conjunto então* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *diz-se uma distância se*

(1) $d(x, y) = d(y, x)$;
(2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
(3) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ *(desigualdade triângular).*

Se d é uma distância então (X, d) diz-se um *espaço métrico*. O conjunto $B(x, r) := \{y \in X \ : \ d(x, y) < r\}$ chama-se bola aberta de raio r em torno de x.

$O \subset X$ diz-se *aberto* se para todo o $x \in O$ existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset O$.

Dado $A \subset X$ o conjunto $\overline{A} := \{x \in X \ : \ \forall r > 0 \ B(x, r) \cap A \neq \emptyset\}$ diz-se o *fecho* de A. A diz-se *fechado* se $\overline{A} = A$. Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos. Uma transformação $f : X \to Y$ diz-se *uniformemente contínua* se para todo o $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para quaisquer x, $y \in X$ com $d_X(x, y) < \delta$ temos $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Uma bijecção uniformemente contínua com inversa uniformemente contínua diz-se um *homeomorfismo uniforme*. Uma família $\mathcal{F}$ de transformações $X \to Y$ diz-se *equicontínua* se para cada $x \in X$ e $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d_X(x, y) < \delta$ implica que $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ para quaisquer $y \in Y$ e $f(\cdot) \in \mathcal{F}$. Uma transformação $f : X \to Y$ diz-se *K-Lipschitz* se existem K, $\varepsilon > 0$ tal que $d(x, y)_X < \varepsilon$

implica que $d_Y(f(x), f(y)) < Kd_X(x, y)$, e *bi-Lipschitz* se é Lipschitz e tem inversa Lipschitz.

Uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ chama-se *sucessão de Cauchy* se para todo o $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_i, x_j) < \varepsilon$ sempre que $i, j \geq N$. X diz-se *completo* se toda a sucessão de Cauchy é convergente.

A colecção de conjuntos abertos induz uma topologia tendo as bolas abertas como base. Conjuntos fechados têm complementares abertos. As definições são consistentes com as definições dadas para espaços topológicos. Para espaços métricos, as noções de compacidade e compacidade sequencial são equivalentes.

A completude é uma propriedade muito importante pois permite-nos tomar limites, os quais surgem frequentemente nas nossas construções. Note-se que não é possível definir uma noção de sucessão de Cauchy num espaço toplógico arbitrário pois não temos a possibilidade de comparar vizinhanças em diferentes pontos. Uma observação útil é que os compactos são completos, pela compacidade sequencial. Um espaço métrico pode tornar-se completo do seguinte modo:

DEFINIÇÃO 1.6. [**KF99**, pag. 40] *Se X é um espaço métrico e existe uma isometria de X para um subconjunto denso de um espaço métrico completo $\widehat{X}$ então $\widehat{X}$ diz-se o completado de X.*

A menos de isometrias o completado de X é único: se há dois completados X_1 e X_2 então por construção existe uma isometria bejectiva entre subconjuntos densos e portanto esta isometria pode ser estendida (pela continuidade uniforme) a todo o espaço. Por outro lado, existem sempre completados, pela construção usada para obter número reais a partir dos números racionais. Esta completação é obtida a partir do espaço de sucessões de Cauchy em X identificando duas sucessões se a distância entre elementos correspondentes converge para zero. A distância entre duas (classes de equivalência de) sucessões é definida como o limite das distâncias entre elementos correspondentes. A isometria transforma pontos em sucesões constantes.

TEOREMA 1.5. ***(Teorema de Categoria de Baire** [**Yos71**, pag. 11]) Num espaço métrico completo, uma intersecção contável de conjuntos abertos densos é densa. O mesmo é verdade para um espaço de Hausdorff localmente compacto.*

Um espaço topológico diz-se metrizável se existe uma distância no espaço que induz a topologia. Todo o espaço métrico é normal e portanto de Hausdorff. Um espaço métrico tem uma base contável se e só se é separável. Reciprocamente usando a (Proposição 1.3), temos o seguinte.

PROPOSIÇÃO 1.7. *Um espaço normal com base contável para a toplogia, e logo qualquer espaço de Hausdorff compacto com base contável, é métrizável.*

Se X é um espaço toplógico, compacto e metrizável então o espaço $C(X,X)$ das transformações contínuas de X em si próprio possui a topologia C^0 ou uniforme. Esta topologia é induzida fixando uma distância ρ em X e definindo a distância $d(\cdot)$ entre $f(\cdot)$, $g(\cdot) \in C(X,X)$ por $d(f,g) := \max_{x\in X} \rho(f(x), g(x))$.

TEOREMA 1.6. ***(Teorema de Ascoli-Arzelá*** [**Yos71**, pag. 85]***)*** *Sejam X, Y espaços métricos, com X separável, e $\mathcal{F}$ uma família equicontínua de transformações. Se $(f_n(\cdot))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ é tal que $(f_n(\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ tem fecho compacto para todo o $x \in X$ então existe uma subsucessão que converge uniformemente em*
conjuntos compactos para uma função $f(\cdot)$.

Assim, em particular, uma família equicontínua, limitada e fechada de transformações num espaço compacto é compacta na toplogia uniforme (induzida pela norma do supremo).

1.3. Espaços lineares. Muitos espaços interessantes que encontramos tanto directamente ou como espaços dos objectos (funções ou transformações) que estamos a estudar têm uma estrutura linear.

DEFINIÇÃO 1.7. *Um espaço vectorial topológico é um espaço linear munido de uma topologia de Hausdorff que é invariante por translacções e multiplicações por escalares (i.e., translacções e multiplicações por escalares não nulos são homeomorfismos). Um isomorfismo de um espaço vectorial topológico é um homeomorfismo linear.*

Muitas vezes a topologia de um espaço linear é induzida por uma estrutura métrica conveniente.

DEFINIÇÃO 1.8. [**KF99**, pag. 71] *Uma norma num espaço linear V é uma função $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ tal que para cada v, $w \in V$ e cada $\alpha \in \mathbb{R}$ temos*

(1) $\|v\| = 0 \Rightarrow v = 0$;
(2) $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$;
(3) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Um vector v diz-se *unitário* se $\|v\| = 1$. Um *espaço linear normado* é um espaço linear V com uma norma $\|\cdot\|$. Um *espaço de Banach* é um espaço linear normado que é completo relativamente à distância $d(v,w) := \|v - w\|$ induzida pela norma. Duas normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|'$ dizem-se equivalentes se existe $C > 0$ tal que $\frac{1}{C}\|\cdot\|' \leq \|\cdot\| \leq \|\cdot\|'$, i.e., a transformação identidade é um homeomorfismo uniforme em relação a $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|'$.

Um *produto interno* num espaço linear V é uma forma bilinear simétrica e definida positiva, i.e., uma transformação $V \times V \to \mathbb{R}$, $(u,v) \mapsto \langle u, v\rangle$ tal que

(1) $\langle v, v\rangle \geq 0$, com igualdade apenas para $v = 0$;
(2) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$;
(3) $\langle au + bv, w\rangle = a\langle u, w\rangle + b\langle v, w\rangle$.

Um produto interno induz uma norma $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$. Um *espaço pré-hilbertiano* é um espaço linear V com produto interno. Um *espaço de Hilbert* é um espaço pré-hilbertiano completo. Dois vectores dizem-se *ortogonais* e denotamos por $u \perp v$ se $\langle u, v\rangle = 0$. Dado um subespaço L de $\mathbb{R}^n$, o conjunto de vectores x tais que $x \perp L$, denomina-se *complemento ortogonal* de L e denota-se por $L^\perp$. $L^\perp$ é um outro subespaço de $\mathbb{R}^n$ e $\dim L + \dim L^\perp = n$. Um *sistema ortogonal* num espaço pré-hilbertiano é um conjunto de vectores ortogonais dois a dois, e um sistema ortonormal é um sistema ortogonal de vectores unitários. Um sistema ortonormal diz-se *completo* se gera um conjunto denso.

Num espaço linear normado de dimensão finita todas as normas são equivalentes. Assim todos os espaços lineares normados de dimensão finita são isomorfos ao espaço Euclideano através de um isomorfismo bi-Lipschitz.

É por vezes útil notar que se $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ então num espaço vectorial real podemos recuperar o produto interno de $\|\cdot\|$ através da identidade

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right) \tag{120}$$

a que chamamos identidade de polarização.

1.4. Topologias fracas. Muitas vezes obtemos uma informação importante considerando transformações lineares que "vão"para o corpo escalar, tais como projecções para uma dada coordenada ou, em espaços de funções integráveis, o integral.

Uma *transformação linear* ou um *operador linear* de um espaço linear V para um espaço linear Y é uma transformação $A : X \to Y$ tal que $A(\alpha v + \beta w) = \alpha A(v) + \beta A(w)$ para cada $v, w \in V$ e cada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Uma tranformação linear $A : V \to Y$ entre espaços lineares normados diz-se *limitada* se temos $\|A\| := \sup_{\|v\|\leq 1} \|A(v)\| < \infty$ e neste caso chama-se *norma* de A. (Os operadores limitados são claramente contínuos.) Dizemos que A é uma *isometria* ou um *operador isométrico* se $\|A(v)\| = \|v\|$ para todo o $v \in V$. Diz-se *unitário* se é uma simetria invertível.

DEFINIÇÃO 1.9. [**Bre99**, pag. 35] *Um funcional linear num espaço linear V é uma transformação linear de V para $\mathbb{R}$.*

O espaço dos funcionais lineares limitados num espaço linear normado V chama-se dual de V e denotamo-lo por V^*.

Quando $f \in V^*$ e $v \in V$ escrevemos geralmente $\langle f, v\rangle$ em vez de $f(v)$; diz-se que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é o produto escalar na dualidade V^*, V.

A topologia fraca $\sigma(V, V^*)$.

DEFINIÇÃO 1.10. [**Bre99**, pag. 35] *A topologia fraca $\sigma(V, V^*)$ num espaço linear V é a topologia mais fraca para a qual todos os funcionais lineares limitados são contínuos.*

Dada uma sucessão (v_n) em V, denotamos por $v_n \rightharpoonup v$ a convergência fraca $\sigma(V, V^*)$ de (v_n) para v.

PROPOSIÇÃO 1.8. [**Bre99**, pag. 35] *Seja* (v_n) *uma sucessão em* V. *Então:*

(1) $v_n \rightharpoonup v$ *para* $\sigma(V, V^*)$ *se e só se* $\langle f, v_n\rangle \to \langle f, v\rangle$ $\forall f \in V^*$;
(2) *Se* $v_n \to v$ *fortemente, então* $v_n \rightharpoonup v$ *para a topologia fraca* $\sigma(V, V^*)$;
(3) *Se* $v_n \rightharpoonup v$ *para* $\sigma(V, V^*)$, *então* $\|v_n\|$ *é limitada e* $\|v\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|v_n\|$;
(4) *Se* $v_n \rightharpoonup v$ *para* $\sigma(V, V^*)$ *e se* $f_n \to f$ *fortemente em* V^*, *então* $\langle f_n, v_n\rangle \to \langle f, v\rangle$.

Para ver que as noções relacionadas com o dual de um espaço linear normado não são vazias necessitamos o seguinte teorema acerca da existência de funcionais lineares:

TEOREMA 1.7. ***(Teorema de Hahn-Banach*** [**Bre99**, pag. 1]*) Sejam* V *um espaço linear normado,* $W \subset V$ *um subespaço linear e* $f : W \to I\!R$ *um funcional linear limitado. Então existe uma estenção* $F : V \to I\!R$ *de* f *a um funcinal linear em* V *tal que* $\|F\| = \|f\|$.

Deste resultado segue imediatamente que o dual de um espaço linear normado é não-vazio e que a topologia fraca é uma toplogia de Hausdorff.

A topologia fraca∗ $\sigma(V^*, V)$**.** Se $v \in V$ então $\varphi_v : V^* \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(v)$ é um funcional linear em V^* (com $\|\varphi_v\| = \|v\|$) e a transformação $\Phi : V \to V^{**}$, $v \mapsto \varphi_v$ é um homomorfismo isométrico (pelo teorema de Hahn-Banach). Se Φ for um isomorfismo então V diz-se *reflexivo.*

Seja (f_n) uma sucessão em V^*. Escrevemos $f_n \rightharpoonup^* f$ para representar a convergência na topologia fraca∗ $\sigma(V^*, V)$.

PROPOSIÇÃO 1.9. [**Bre99**, pag. 40] *Seja* (f_n) *uma sucessão em* V^*. *Então:*

(1) *Se* $f_n \rightharpoonup^* f$ *para* $\sigma(V^*, V)$ *se e só se* $\langle f, v_n\rangle \to \langle f, v\rangle$ $\forall v \in V$;
(2) *Se* $f_n \to f$ *fortemente , então* $f_n \rightharpoonup^* f$ *para* $\sigma(V^*, V)$;
(3) *Se* $f_n \rightharpoonup^* f$ *para* $\sigma(V^*, V)$, *então* $\|f_n\|$ *é limitada e* $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$;
(4) *Se* $f_n \rightharpoonup^* f$ *para* $\sigma(V^*, V)$ *e se* $v_n \to v$ *fortemente em* X', *então* $\langle f_n, v_n\rangle \to \langle f, v\rangle$.

A importância fundamental da topologia fraca∗ $\sigma(V^*, V)$ está relacionada com o seguinte resultado acerca da compacidade:

TEOREMA 1.8. ***(Teorema de Alaoglu*** [**Bre99**, pag. 42]*) A bola unitária no dual de um espaço linear normado é compacta para a topolofia fraca∗* $\sigma(V^*, V)$.

Este resultado segue do Teorema de Tychonoff (1.1) pois qualquer topologia de convergência pontual é induzida pela toplogia produto de $\prod_{x\in X} Y = \{f : X \to Y\}$. Nomeadamente, seja X a bola unitária no espaço linear normado e $Y = [-1, 1]$. A bola unitária no dual corresponde naturalmente à colecção das transformações "lineares"$X \to Y$ (e a linearidade é uma condição fechada). O Teorema de Alaoglu implica que os conjuntos com norma limitada que são fechados na topologia fraca* são compactos.

O dual de um espaço de dimensão finita é isomorfo ao próprio espaço.

1.5. Espaços reflexivos. Seja X um espaço de Banach. Como acima, quando a transformação $\Phi : X \to X^{**}$, $v \mapsto \varphi_v$ é um isomorfismo, X diz-se reflexivo.

TEOREMA 1.9. ***(Kakutani*** [**Bre99**, pag. 44]*)* *X é reflexivo se e só se a sua bola unitária é compacta para a topologia $\sigma(X, X^*)$.*

PROPOSIÇÃO 1.10. [**Bre99**, pag. 45] *Sejam, X um espaço de Banach refléxivo e $M \subset X$ um subespaço vectorial fechado. Então M (munido da topologia induzida pela de X) é refléxivo.*

COROLARIO 1.1. [**Bre99**, pag. 45] *X é refléxivo se e só se X^* também o é.*

1.6. Espaços separáveis. Como foi referido, um espaço métrico X é separável se existir um subconjunto $D \subset X$ numerável e denso.

PROPOSIÇÃO 1.11. [**Bre99**, pag. 47] *Seja X um espaço métrico separável e M um subconjunto de X. Então, M é separável.*

TEOREMA 1.10. [**Bre99**, pag. 47] *Seja X um espaço de Banach com X^* separável. Então, X é separável.*

COROLARIO 1.2. [**Bre99**, pag. 48] *Seja X um espaço de Banach. Então, X é refléxivo e separável se e só se também X^* é refléxivo e separável.*

COROLARIO 1.3. [**Bre99**, pag. 50] *Sejam X um espaço de Banach separável e (f_n) uma sucessão lmitada em X^*. Então, existe uma subsucessão (f_{n_k}) que convergente na topologia $\sigma(X^*, X)$.*

TEOREMA 1.11. [**Bre99**, pag. 50] *Seja X um espaço de Banach refléxivo e (x_n) uma sucessão lmitada em X. Então, existe uma subsucessão (x_{n_k}) que convergente na topologia $\sigma(X, X^*)$.*

TEOREMA 1.12. ***(Eberlein-Šmulian*** [**Bre99**, pag. 50]*)* *Seja X um espaço de Banach, para o qual toda a sucessão limitada (x_n) possui uma subsucessão (x_{n_k}) convergente na topologia fraca $\sigma(X, X^*)$. Então, X é refléxivo.*

2. Análise convexa

2.1. Conjuntos convexos.

DEFINIÇÃO 2.1. [**ET99**, pag. 1] *Um subconjunto C de um espaço vectorial real V diz-se convexo se $tv + (1-t)w \in C$ sempre que $v, w \in C$ e $t \in [0,1]$.*

Por indução, o subconjunto $C \subset V$ é convexo se e só se para todo o subconjunto finito de elementos $v_1, ..., v_n$ de C, e para toda a família de números reais positivos $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tal que $\Sigma_{i=1}^n \lambda_i = 1$, então $\Sigma_{i=1}^n \lambda_i u_i \in C$.

Se $A \subset V$ então o invólucro convexo co(A) é o menor conjunto convexo que contém A, i.e., $\text{co}(A) = \bigcap\{C \ : \ A \subset C, \ C \quad \text{é convexo}\}$. co$(A)$ também se escreve como o conjunto de todas as combinações convexas de elementos de A, i.e., co $A := \{\Sigma_{i=1}^n \lambda_i u_i \ : \ n \in \mathbb{N}, \ \Sigma_{i=1}^n \lambda_i = 1, \ u_i \in A, \ 1 \leq i \leq n\}$. Num espaço vectorial toplógico o invólucro convexo fechado de A é o fecho $\overline{\text{co}}\ (A)$ de co (A).

Um *ponto extremo* de um conjunto convexo C é um ponto v tal que quando $v = ta + (1-t)b$ para $a, b \in C$, $t \in [0,1]$ temos necessáriamente $t \in 0,1$ ou $a = b = v$, i.e, v não é uma combinação própria convexa de outros pontos. O conjunto dos pontos extremos de C denota-se por ex (C).

Um espaço vectorial topológico diz-se *localmente convexo* se todo o conjunto aberto contém um conjunto aberto convexo.

Um subconjunto A de um espaço vectorial topológico diz-se *balançado* se $\alpha A \subset A$ para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha| \leq 1$.

DEFINIÇÃO 2.2. [**ET99**, pag. 1] *Se x e y são pontos pertencentes a $\mathbb{R}^n$, o conjunto dos pontos da forma $tx + (1-t)y$ tais que $t \in \mathbb{R}$ denomina-se linha recta que passa por x e y.*

Um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ chama-se *conjunto afim* se $tx + (1-t)y \in M$ $\forall x, y \in M$ e $t \in \mathbb{R}$. Por exemplo, os subespaços lineares de $\mathbb{R}^n$ são conjuntos afins que contém a origem.

Para $M \subset \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}^n$, a translacção de M por a define-se como $M + a = \{x + a \ : \ x \in M\}$. A translacção L de um conjunto afim é um outro conjunto afim e M diz-se *paralelo* ao conjunto afim L se existir a tal que $M = L + a$. Portanto a relação de paralelismo estabelece uma relação de equivalência na família dos subconjuntos afins de $\mathbb{R}^n$.

Cada subconjunto afim não vazio é paralelo a um único subespaço L, tal que $L = M - M = \{x - y \ : \ x \in M, \ y \in M\}$.

A *dimensão* de um conjunto afim, não vazio, M define-se como a dimensão do subespaço que lhe é paralelo. A um conjunto afim, $(n-1)$-dimensional em $\mathbb{R}^n$ chamamos hiperplano. Hiperplanos e outros conjuntos afins, podem ser representados por funções lineares. Em particular, os subespaços $(n-1)$-dimensionais de $\mathbb{R}^n$, são os complementos ortogonais dos subespaços unidimensionais, que são os subespaços L que têm como base um único vector, diferente de zero, digamos b. Assim, os subespaços $(n-1)$-dimensionais são conjuntos da forma $\{x \ : \ x \perp b\}$, com $b \neq 0$. Os hiperplanos são translacções destes, i.e., conjuntos da forma

$$\{x \ : \ x \perp b\} + a = \{x + a \ : \ \langle x, b \rangle = 0\} =$$

$$= \{y \ : \ \langle y - a, b \rangle = 0\} = \{y \ : \ \langle y, b \rangle = \beta\}$$

onde $\beta = \langle a, b \rangle$. Portanto;

TEOREMA 2.1. [**Roc70**] *Dado $\beta \in \mathbb{R}$ e um vector $b \in \mathbb{R}^n$ não nulo, o conjunto $\mathcal{H} = \{y \ : \ \langle y, b \rangle = \beta\}$ é um hiperplano em $\mathbb{R}^n$.*

No caso em que V é um espaço vectorial topológico consideramos que um hiperplano $\mathcal{H}$ é decrito pelo conjunto $\{v \ : \ \langle f, v \rangle = \alpha\}$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto escalar na dualidade V^*, V. Diz-se que um hiperplano $\mathcal{H}$ separa (estrictamente) dois conjuntos A e B se cada um dos semi-espaços fechados (abertos) limitados por $\mathcal{H}$ contém um dos conjuntos, i.e., se $\langle f, v \rangle = \alpha$ é a equação de $\mathcal{H}$, então, para a separação temos $\langle f, a \rangle \leq \alpha$, $\forall a \in A$, $\langle f, b \rangle \geq \alpha$, $\forall b \in B$ e para a separação estricta $\langle f, a \rangle < \alpha$, $\forall a \in A$, $\langle f, b \rangle > \alpha$, $\forall b \in B$.

TEOREMA 2.2. ***(Teorema de Hahn-Banach*** [**ET99**, pag. 5]***)*** *Sejam V um espaço vectorial topológico; A um conjunto aberto, convexo e não-vazio; e M um subespaço afim não-vazio, tal que $A \cap M = \emptyset$. Então, existe um hiperplano $\mathcal{H}$ afim e fechado tal que $M \subset \mathcal{H}$ e $A \cap \mathcal{H} = \emptyset$.*

COROLARIO 2.1. [**ET99**, pag. 5] *Sejam V um espaço vectorial topológico; A um conjunto aberto, convexo e não-vazio; B um conjunto convexo e não-vazio tal que $A \cap B = \emptyset$. Então, existe um hiperplano $\mathcal{H}$ fechado que separa A e B.*

COROLARIO 2.2. [**ET99**, pag. 5] *Sejam V um espaço vectorial localmente convexo; C e F dois conjuntos convexos não-vazios e disjuntos em que C compacto e F fechado. Então, existe um hiperplano $\mathcal{H}$ fechado, que separa estrictamente C e F.*

Como aplicação do (Corolário 2.1), se considerarmos $A \subset V$ um subconjunto e $\mathcal{H}$ um hiperplano afim, fechado que contém pelo menos um ponto $a \in A$, então o conjunto A está completamente contido num dos semi-espaços fechados definidos por $\mathcal{H}$. Neste caso dizemos que $\mathcal{H}$ é um hiperplano suporte e que a é um *ponto de suporte* de A.

COROLARIO 2.3. [**ET99**, pag. 5] *Sejam V um espaço vectorial topológico e A um conjunto convexo com interior não-vazio. Então, todo o ponto de $fr\, A$ é um ponto suporte de A.*

O seguinte resultado é consequência do (Corolário 2.2):

COROLARIO 2.4. [**ET99**, pag. 5] *Num espaço vectorial localmente convexo todo o conjunto fechado e convexo é a intersecção de semi-espaços fechados que o contêm.*

Do (Corolário 2.4) deduz-se que todo o conjunto fechado e convexo é fechado para a topologia fraca $\sigma(V, V^*)$. Num espaço de Hausdorff localmente convexo os conjuntos fechados e convexos para a topologia fraca $\sigma(V, V^*)$ coíncidem com os conjuntos fechados e convexos da topologia da norma.

No contexto de espaços normados usamos a seguinte caracterização:

LEMA 2.1. ***(Lema de Mazur*** [**ET99**, pag. 6]*) Seja V um espaço normado e (v_n) uma sucessão tal que $v_n \rightharpoonup \overline{v}$ para $\sigma(V,V^*)$. Então, existe uma sucessão de combinações convexas (u_n) tal que $u_n = \Sigma_{k=n}^{N}\lambda_k v_k$ onde $\Sigma_{k=n}^{N}\lambda_k = 1$ e $\lambda_k \geq 0$, $n \leq k \leq N$, que converge em norma para $\overline{v}$, i.e., $\|u_n - \overline{v}\| \to 0$ quando $n \to \infty$.*

2.2. Funções convexas.

DEFINIÇÃO 2.3. [**ET99**, pag. 7] *Sejam V um espaço vectorial, $A \subset V$ um subespaço convexo e a função $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. f diz-se convexa se quaisquer que sejam $u, v \in A$*

$$f(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda f(u) + (1-\lambda)f(v) \quad \forall \lambda \in [0,1]. \tag{121}$$

sempre que o segundo membro esteja definido (A desigualdade (121) é válida, a não ser que $f(u) = f(v) = \pm\infty$). f diz-se estrictamente convexa se for convexa e

$$f(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda f(u) + (1-\lambda)f(v) \quad \forall \lambda \in]0,1[. \tag{122}$$

Por indução prova-se que, se f é convexa, para todo o conjunto finito de elementos $u_1, ..., u_n \in V$ e para toda a família de números reais positivos $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tais que $\Sigma_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$,

$$f(\Sigma_{i=1}^{n}\lambda_i u_i) \leq \Sigma_{i=1}^{n}\lambda_i f(u_i), \tag{123}$$

sempre que o segundo membro da inequação estiver definido.

Se $f : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é convexa, então $\{u \ : \ f(u) \leq a\}$ e $\{u \in E \ : \ f(u) < a\}$ são subconjuntos convexos de V, para todo o $a \in \mathbb{R}$. A reciproca é falsa.

Para toda a função $f : V \to \overline{\mathbb{R}}$ denotamos por dom $f := \{u \in V \ : \ f(u) < +\infty\}$ o *domínio efectivo* de f, que é convexo, se f for uma função convexa.

A $f : A \to \mathbb{R}$ com $A \subset V$ associamos a função

$$\tilde{f}(u) := \begin{cases} f(u) & \text{se} \quad u \in A \\ +\infty & \text{se} \quad u \notin A. \end{cases} \tag{124}$$

que é convexa se e só se $A \subset V$ é convexo e $f : A \to \mathbb{R}$ é convexa. Se A é um subconjunto de V, definimos a *função indicatriz* de A

$$\delta_A(u) := \begin{cases} 0 & \text{se} \quad u \in A \\ +\infty & \text{se} \quad u \notin A. \end{cases} \tag{125}$$

Claramente, A é um conjunto convexo se e só se $\delta_A(\cdot)$ é uma função convexa.

Uma função convexa $f : V \to \overline{\mathbb{R}}$ diz-se *própria* se não tomar o valor $-\infty$ e não for identicamente $+\infty$.

O epigráfico de uma função $f : V \to \overline{\mathbb{R}}$ é o conjunto

$$\text{epi } f := \{(u,a) \in V \times \mathbb{R} \ : \ f(u) \leq a\} \tag{126}$$

A função $f : V \to \overline{\mathbb{R}}$ é convexa se e só se o seu epigráfico é um conjunto convexo.

A seguinte proposição demonstra que o espaço das funções convexas é um espaço vectorial.

PROPOSIÇÃO 2.1. [**ET99**, pag. 9]

(1) *Se* $f : V \to \overline{I\!R}$ *é convexa e* $\lambda > 0$, *então* λf *é convexa;*
(2) *Se* f *e* g *forem funções convexas definidas em* V *e com valores em* $\overline{I\!R}$, *então* $f + g$ *é uma função convexa.*
(3) *Se* $(f_i)_{i \in I}$ *é uma família de funções convexas definidas em* V, *com valores em* $\overline{I\!R}$, *então* $f := \sup_{i \in I} f_i$ *é uma função convexa.*

2.3. Funções semicontínuas inferiores. Seja V um espaço vectorial localmente convexo.

DEFINIÇÃO 2.4. [**ET99**, pag. 10] *Uma função* $f : V \to \overline{I\!R}$ *diz-se semicontínua inferior (abreviadamente s.c.i.) em* V, *se forem equivalentes:*

(1) $\forall a \in I\!R$, $\{u \in V \ : \ f(u) \leq a\}$ *é fechado;*
(2) $\forall \overline{u} \in V$, $f(\overline{u}) \leq \liminf_{u \to \overline{u}} f(u)$.

DEFINIÇÃO 2.5. [**ET99**, pag. 10] *Seja* $f : V \to \overline{I\!R}$. *Ao maior dos minorantes semicontínuos inferiores de* f *chamamos invólucro semicontínuo inferior de* f *e denotamo-lo por* $\overline{f}$.

COROLARIO 2.5. [**ET99**, pag. 10] *Sejam* $f : V \to \overline{I\!R}$ *e* $\overline{f}$ *o involucro semicontínuo inferior de* f. *Então,*

(1) *epi* $\overline{f} = \overline{\textit{epi } f}$;
(2) $\forall u \in V$, $\overline{f}(u) = \liminf_{v \to u} f(v)$.

Caso as funções consideradas serem também convexas a semicontínuidade inferior de f permanece inalterada quando se enfraquece a topologia de V.

COROLARIO 2.6. [**ET99**, pag. 11] *Toda a função* $f : V \to \overline{I\!R}$ *convexa e semicontínua inferior é semicontínua inferior quando* V *está munido da topologia fraca* $\sigma(V, V^*)$

Com efeito, como o epigráfico de f é convexo e fechado também é fechado para a topologia fraca $\sigma(V, V^*)$.

A seguinte proposição é de especial interece.

PROPOSIÇÃO 2.2. [**ET99**, pag. 11] *Seja* $f : V \to \overline{I\!R}$ *uma função convexa, semicontínua inferior que toma o valor* $-\infty$. *Então, não toma valores finitos.*

2.4. Continuidade das funções convexas.

LEMA 2.2. [**ET99**, pag. 11] *Se na vizinhança de um ponto* $v \in V$ *uma função convexa* f *é majorada por uma constante* $\alpha \in I\!R$, *então* f *é contínua em* v.

COROLARIO 2.7. [**ET99**, pag. 12] *Toda a função convexa e própria, definida num espaço de dimensão finita, é contínua no interior do seu domínio efectivo.*

COROLARIO 2.8. [**ET99**, pag. 12] *Seja f uma função convexa e própria definida num espaço normado. Então, existe um conjunto aberto, não vazio no qual f é limitada superiormente se e só se int $(dom\ f) \neq \emptyset$. Além disso, f é aí localmente lipschitziana .*

COROLARIO 2.9. [**ET99**, pag. 13] *Toda a função convexa e semicontínua inferior num espaço de Banach é contínua no interior do seu dominio efectivo.*

2.5. Dualidade. Nesta secção aplicamos o (Teorema 2.2) para introduzir a noção de funções polares:

DEFINIÇÃO 2.6. [**Dac89**] *Sejam V um espaço vectorial, V^* o seu dual e $f : V \to \overline{\mathbb{R}}$.*

(1) *A função $f^* : V^* \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por $f^*(v^*) = \sup_{v\in V}\{\langle v^*, v\rangle - f(v)\}$ diz-se função polar f.*
(2) *A função $f^{**} : V \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por $f^{**}(v) = \sup_{v^*\in V^*}\{\langle v^*, v\rangle - f^*(v^*)\}$ diz-se função bipolar f.*
(3) *A função $co f : V \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por $co f = \{g \leq f \ : \ g \quad convexa\}$ chama-se invólucro convexo de f.*

TEOREMA 2.3. [**Dac89**, pag. 35] *Seja $f : V \to \overline{\mathbb{R}}$. Então*

(1) *f^* é convexa e semcontínua inferior;*
(2) *Se f é convexa e semcontínua inferior, então f^* não identicamente igual a $+\infty$;*
(3) *$f^{**} \leq co\ f \leq f$ e se f é uma função convexa e semicontínua inferior, então $f^{**} = co\ f = f$. Em particular, se $f : V \to \mathbb{R}$, então $f^{**} = co\ f$.*
(4) *$f^{***} = f^*$.*

TEOREMA 2.4. ***(Teorema de Carathéodory*** [**Dac89**, pag. 42]*) Seja $M \subset \mathbb{R}^n$. Denotamos por coM o involucro convexo de M, então*

(127)
$$co\,M = \inf\left\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ x = \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i x_i,\ x_i \in M,\ \lambda_i \geq 0 \quad com \quad \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i = 1\right\}.$$

COROLARIO 2.10. [**Dac89**, pag. 42] *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$,então*

(128)
$$co\ f = \inf\left\{\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i f(x_i) \ : \ \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i x_i = x,\ \lambda_i \geq 0 \quad com \quad \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i = 1\right\}.$$

2.6. Subdiferenciabilidade. Seja V um espaço vectorial localmente convexo e $f : V \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função convexa. Um vector x^* diz-se subgradiente de f no ponto x se verifica a desigualdade:

$$f(z) \geq f(x) + \langle x^*, z - x\rangle \quad \forall z. \tag{129}$$

Esta condição, a que damos o nome de desigualdade subgradiente, significa que o gráfico da função afim $h(z) = f(x) + \langle x^*, z - x\rangle$ é um hiperplano suporte (não-vertical) ao conjunto epi f no ponto $(x, f(x))$. O conjunto dos subgradientes de f em x diz-se subdiferencial de f em x e denota-se por $\partial f(x)$. $\partial f : x \mapsto \partial f(x)$ denomina-se subdiferencial de f. O conjunto $\partial f(x)$ é fechado e convexo, pode ser vazio ou conter um só vector. Se $\partial f(x)$ é não-vazio, f diz-se subdiferenciável em x.

TEOREMA 2.5. [**Roc70**, pag. 218] *Seja $f : V \to \overline{I\!R}$ uma função própria e convexa. Então, são equivalentes:*

(1) $x^* \in \partial f(x)$;
(2) $\langle x^*, z - x\rangle - f(z)$ *tem valor máximo para* $z = x$;
(3) $f(x) + f^*(x^*) \leq \langle x^*, x\rangle$;
(4) $f(x) + f^*(x^*) = \langle x^*, x\rangle$

Se f é semicontínua inferior, então são equivalentes:

(1) $x \in \partial f^*(x^*)$;
(2) $\langle x^*, z - x\rangle - f^*(z^*)$ *tem valor máximo para* $z^* = x^*$;
(3) $x^* \in \partial f(x)$

COROLARIO 2.11. [**ET99**, pag. 21] *O conjunto $\partial f(x)$ (possivelmete vazio) é convexo e fechado em V^* para a topologia fraca* $\sigma(V^*, V)$.

PROPOSIÇÃO 2.3. [**ET99**, pag. 21] *Seja $f : V \to \overline{I\!R}$ finita e contínua no ponto $x \in V$. Então $\partial f(v) \neq \emptyset$ $\forall v \in$ int (dom f) e em particular, $\partial f(x) \neq \emptyset$.*

Prova-se que se f é uma função convexa, semicontínua inferior e própria, definida num espaço métrico completo, é subdiferenciável q.s. no conjunto int(dom$f$).

TEOREMA 2.6. [**RW98**, pag. 483] *Seja $f : I\!R^n \to \overline{I\!R}$ uma função própria, semicontínua inferior e convexa. Então são equivalentes:*

(1) *f é diferenciável no conjunto int (dom f) $\neq \emptyset$, mas $\partial f(x) = \emptyset$ $\forall x \in$ dom $f \setminus$ int (dom f),*
(2) *a função f^* é estrictamente convexa em todo o conjunto convexo $C \subset \partial f^*$.*

DEFINIÇÃO 2.7. [**Yeh06**, pag. 310] *Seja $I \subset I\!R$ um intervalo aberto e $f : I \to I\!R$ uma função convexa. f diz-se derivável à direita de $x_0 \in I$, se exitir o limite*

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \downarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in I\!R. \tag{130}$$

Diz-se derivável à esquerda de $x_0 \in I$, se exitir o limite

$$f'_e(x_0)(x_0) = \lim_{x \uparrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in I\!R \tag{131}$$

Se f é diferenciável à direita e à esquerda, quaisquer que sejam $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, verifica-se:

$$f'_d(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'_e(x_2) \tag{132}$$

TEOREMA 2.7. [**Yeh06**, pag. 310] *Seja $f : I \to I\!R$, com I é um intervalo aberto. Então:*

(1) *f é contínua em I;*
(2) *$f'_e \leq f'_d$ em I;*
(3) *f'_e e f'_d são funções crescentes em I;*
(4) *f é derivável, i.e., existe derivada f' e é finita, em qualquer ponto, excepto num conjunto contável de pontos em I. Se f' existe e $x_1,\ x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, então $f'(x_1) \leq f'(x_2)$.*

TEOREMA 2.8. [**Yeh06**, pag. 313] *Seja I um intervalo aberto e $f : I \to I\!R$ uma função convexa. Então:*

(1) *qualquer que seja o intervalo fechado $[\alpha, \beta] \subset I$ e $M := \max\{|f'_d(\alpha)|, |f'_e(\beta)|\}$, f é uma função M-Lipschitziana em $[\alpha, \beta]$, i.e.,*
$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq M|x_2 - x_1| \quad \forall x_1,\ x_2 \in [\alpha, \beta];$$
(2) *Para todo o $x_0 \in I$ e para todo o $m \in [f'_e(x_0), f'_d(x_0)]$, verifica-se $f(x) \geq m(x - x_0) + f(x_0)$, para $x \in I$;*
(3) *Existe uma colecção contável $\{g_n : n \in I\!N\}$ de funções afins, $g_n(x) = \alpha_n x + \beta_n$, em que $x \in I$, $\alpha_n, \beta_n \in I\!R$ e $n \in I\!N$, tais que*
$$f(x) = \sup_{n \in I\!N} g_n(x)$$

TEOREMA 2.9. [**RW98**, pag. 359] *Seja Ω um subconjunto aberto e convexo de $I\!R^n$. Considere-se que a função $f : \Omega \to I\!R$ é convexa. Então, para todo o $x \in \Omega$, o subdiferencial $\partial f(x)$ é (localmente) limitado.*

3. Medida e espaços funcionais

3.1. Conjuntos mensuráveis.

DEFINIÇÃO 3.1. [**Rud87**, pag. 8] *Seja X um conjunto. Uma colecção $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X diz-se uma σ-álgebra em X se*

(1) *$X \in \mathcal{A}$,*
(2) *para cada conjunto $A \in \mathcal{A}$, o conjunto A^c pertence a $\mathcal{A}$,*
(3) *para cada sucessão infinita $\{A_i\}$ de conjuntos que pertencem a $\mathcal{A}$, o conjunto $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ pertence a $\mathcal{A}$,*
(4) *para cada sucessão infinita $\{A_i\}$ de conjuntos que pertencem a $\mathcal{A}$, o conjunto $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ pertence a $\mathcal{A}$.*

DEFINIÇÃO 3.2. [**Rud87**, pag. 8] *Seja X um conjunto e $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra em X. Então $(X, \mathcal{A})$ diz-se um espaço mensurável.*

DEFINIÇÃO 3.3. [**Rud87**, pag. 8] *Se $A \subset X$ for um elemento de $\mathcal{A}$ dizemos que A é $\mathcal{A}$-mensurável.*

PROPOSIÇÃO 3.1. [**Rud87**, pag. 8] *Seja X um conjunto, e $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de X. Então existe a mais pequena σ-álgebra em X que contém $\mathcal{F}$, que recebe o nome de σ-álgebra gerada por $\mathcal{F}$.*

DEFINIÇÃO 3.4. [**Rud87**, pag. 12] *A σ-álgebra de Borel em $\mathbb{R}^n$ gerada pela colecção de abertos (usuais) de $\mathbb{R}^n$, e é denotada por $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Os subconjuntos de Borel, ou borelianos, de $\mathbb{R}^n$ são os elementos de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.*

DEFINIÇÃO 3.5. [**Rud87**, pag. 12] *Seja $\mathcal{G}$ a família de todos os abertos de $\mathbb{R}^n$ e seja $\mathcal{F}$ a família de todos os fechados de $\mathbb{R}^n$. Seja $\mathcal{G}_\delta$ a colecção de todas as intersecções de sucessões de conjuntos em $\mathcal{G}$, e seja $\mathcal{F}_\sigma$ a colecção de todas as uniões de conjuntos em $\mathcal{F}$. Os elementos de $\mathcal{G}_\delta$ são chamados conjuntos G_δ e os elementos de $\mathcal{F}_\sigma$ são chamados conjuntos F_σ.*

PROPOSIÇÃO 3.2. [**Rud87**, pag. 12] *Cada subconjunto fechado de $\mathbb{R}^n$ é um F_δ, e cada subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ é um G_σ.*

DEFINIÇÃO 3.6. [**Rud87**, pag. 16] *Sejam X um conjunto, e $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra em X. Uma função μ cujo domínio é a σ-álgebra $\mathcal{A}$, e cujos valores estão no conjunto $[0,+\infty]$, diz-se contavelmente aditiva se satisfaz*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i) \tag{133}$$

para cada sucessão $\{A_i\}$ de conjuntos disjuntos dois a dois de $\mathcal{A}$.

DEFINIÇÃO 3.7. [**Rud87**] *Uma medida em $\mathcal{A}$ é uma função $\mu : \mathcal{A} \to [0,+\infty]$ que satisfaz $\mu(\emptyset) = 0$ e é contavelmente aditiva.*

DEFINIÇÃO 3.8. *Seja X um conjunto, $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra em X e μ uma medida em $\mathcal{A}$. Então $(X,\mathcal{A},\mu)$ diz-se um espaço de medida.*

PROPOSIÇÃO 3.3. [**Rud87**] *Seja $(X,\mathcal{A},\mu)$ um espaço de medida, e sejam $A, B \in \mathcal{A}$ com $A \subset B$; então $\mu(A) \leq \mu(B)$. Se além disso, $\mu(A) < +\infty$ então $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$.*

DEFINIÇÃO 3.9. *Seja $(X,\mathcal{A},\mu)$ um espaço de medida. Se $\{A_i\} \subset \mathcal{A}$ é uma sucessão arbitrária de conjuntos, então μ diz-se contavelmente subaditiva se*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i). \tag{134}$$

PROPOSIÇÃO 3.4. [**Rud87**] *Seja $(X,\mathcal{A},\mu)$ um espaço de medida.*

(1) *Se $\{A_i\} \subset \mathcal{A}$ é uma sucessão crescente (por inclusão), então $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \lim_{i\to+\infty} \mu(A_i)$,*
(2) *Se $\{A_i\} \subset \mathcal{A}$ é uma sucessão decrescente (por inclusão), e se $\mu(A_i) < \infty$ se verifica para todo o i, então $\mu\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \lim_{i\to+\infty} \mu(A_i)$.*

PROPOSIÇÃO 3.5. [**Yeh06**, pag. 32] *Seja X um conjunto, e $\mathcal{P}(X)$ a colecção de todos os subconjuntos de X. Uma medida exterior em X é uma função $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty]$ tal que*

(1) $\mu^*(\emptyset) = 0$
(2) *Se $A \subset B \subset X$ então $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$*

(3) *Se* $\{A_i\} \subset \mathcal{A}$ *é uma sucessão arbitrária de conjuntos de* X, *então*

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu^*(A_i). \tag{135}$$

Podemos dizer que uma medida exterior em X *é uma função monótona e contavelmente subaditiva de* $\mathcal{P}(X)$ *em* $[0, +\infty]$ *tal que o valor de* $\emptyset$ *é zero.*

OBSERVAÇÃO 3.1. *Uma medida pode não ser uma medida exterior, basta para isso que o seu domínio não seja* $\mathcal{P}(X)$. *E uma medida exterior poderá não ser uma medida, pois pode não ser contávelmente aditiva.*

Um intervalo de $\mathbb{R}^n$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ do tipo $I_1 \times I_2 \times ... \times I_n$ onde $I_1, I_2, ..., I_n$ são subintervalos de $\mathbb{R}$ e

$$I_1 \times I_2 \times ... \times I_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) | x_i \in I_i, i = 1, 2, ..., n\}.$$

O volume de um intervalo $I_1 \times I_2 \times ... \times I_n$ é dado pelo produto do comprimento dos intervalos $I_1, I_2, ..., I_n$ e denota-se por $\text{vol}(I_1 \times I_2 \times ... \times I_n)$. Para cada subsonjunto A de $\mathbb{R}^n$ seja $\mathcal{C}_A$ o conjunto de todas as sucessões $\{R_i\}$ de intervalos abertos limitados tais que $A \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} R_i$. Então a medida exterior de Lebesgue, denota-se por $\mathcal{L}^*(A)$ (ou $|A|$) e define-se por

$$\mathcal{L}^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} \text{vol}(R_i) \ : \ R_i \in \mathcal{C}_A \right\}.$$

DEFINIÇÃO 3.10. [**Yeh06**, pag. 28] *Seja* X *um conjunto, seja* μ^* *uma medida exterior em* X. *Um subconjunto* B *de* X *diz-se* μ^**-mensurável se a igualdade*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c)$$

se verifica para qualquer subconjunto $A \subset X$.

DEFINIÇÃO 3.11. *Um subconjunto de* $\mathbb{R}^n$ *diz-se Lebesgue mensurável se é mensurável relativamente à medida exterior de Lebesgue.*

TEOREMA 3.1. [**Yeh06**, pag. 44] *Seja* X *um conjunto, seja* μ^* *uma medida exterior em* X, *e seja* $\mathcal{M}_{\mu^*}$ *a colecção de todos os subconjuntos* μ^**-mensuráveis. Então:*

(1) $\mathcal{M}_{\mu^*}$ *é uma* σ*-álgebra;*
(2) *a restrição de* μ^* *a* $\mathcal{M}_{\mu^*}$ *é uma medida em* $\mathcal{M}_{\mu^*}$.

PROPOSIÇÃO 3.6. [**Rud87**] *Qualquer boreliano de* $\mathbb{R}^n$ *é Lebesgue mensurável.*

DEFINIÇÃO 3.12. *A restrição da medida exterior de Lebesgue em* $\mathbb{R}^n$, *à colecção* $\mathcal{M}_{\mu^*}$ *dos subconjuntos de* $\mathbb{R}^n$ *Lebesgue mensuráveis, é chamada medida de Lebesgue e será denotada por* $\mathcal{L}$.

OBSERVAÇÃO 3.2. *A restrição da medida exterior de Lebesgue ao conjunto dos borelianos* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *é também chamada medida de Lebesgue.*

PROPOSIÇÃO 3.7. [**Rud87**, pag. 41] *Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ Lebesgue mensurável. Então:*

(1) $\mathcal{L}(A) = \inf \{\mathcal{L}(U) : U$ *é aberto e* $A \subset U\}$;
(2) $\mathcal{L}(A) = \sup \{\mathcal{L}(K) : K$ *é compacto e* $K \subset A\}$;

PROPOSIÇÃO 3.8. [**Rud87**, pag. 51] *A medida de Lebesgue é invariante por translacções no sentido que, se $x \in \mathbb{R}^n$ e $A \subset \mathbb{R}^n$ então $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(x + A)$.*

DEFINIÇÃO 3.13. *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. A medida μ diz-se completa se*

$$A \in \mathcal{A}, \quad \mu(A) = 0 \quad e \quad B \subset A \Rightarrow B \in \mathcal{A}.$$

DEFINIÇÃO 3.14. *A medida de Lebegue em $\mathbb{R}^n$ dos conjuntos Lebesgue-mensuráveis é o completamento da mediada de Lebesgue em $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.*

LEMA 3.1. [**Rud87**, pag. 48] *Seja A um subconjunto Lebesgue mensurável de $\mathbb{R}^n$. Então existem subconjuntos borelianos E e F de $\mathbb{R}^n$ tais que $E \subset A \subset F$ e $\mathcal{L}(F \setminus E) = 0$.*

3.2. Funções mensuráveis. Nesta secção introduz-se o conceito de função mensurável e estudam-se as suas propriedades.

PROPOSIÇÃO 3.9. [**Rud87**, pag. 10] *Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável, e seja $A \in \mathcal{A}$. Para uma função $f : A \to [-\infty, +\infty]$ as seguintes condições são equivalentes:*

(1) *para cada real t o conjunto $\{x \in A : f(x) \leq t\}$ pertence a $\mathcal{A}$;*
(2) *para cada real t o conjunto $\{x \in A : f(x) < t\}$ pertence a $\mathcal{A}$;*
(3) *para cada real t o conjunto $\{x \in A : f(x) \geq t\}$ pertence a $\mathcal{A}$;*
(4) *para cada real t o conjunto $\{x \in A : f(x) > t\}$ pertence a $\mathcal{A}$.*

DEFINIÇÃO 3.15. *Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável, e $A \in \mathcal{A}$. A função $f : A \to [-\infty, +\infty]$ é $\mathcal{A}$-mensurável se satisfaz uma e portanto todas as condições da (Proposição 3.9).*

DEFINIÇÃO 3.16. *Se $X = \mathbb{R}^n$, uma função que é mensurável em relação a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ é chamada Borel mensurável e uma função que é mensurável com respeito a $\mathcal{M}_{\lambda^*}$ diz-se Lebesgue mensurável.*

OBSERVAÇÃO 3.3. *Toda a função Borel mensurável é Lebesgue mensurável.*

PROPOSIÇÃO 3.10. [**Rud87**, pag. 10] *Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável, e seja $A \in \mathcal{A}$. Para uma função $f : A \to \mathbb{R}$ as seguintes condições são equivalentes:*

(1) *f é $\mathcal{A}$-mensurável;*
(2) *para cada subconjunto aberto U de $\mathbb{R}$ o conjunto $f^{-1}(U)$ pertence a $\mathcal{A}$;*
(3) *para cada subconjunto fechado F de $\mathbb{R}$ o conjunto $f^{-1}(F)$ pertence a $\mathcal{A}$;*

(4) *para cada subconjunto boreliano B de $I\!R$ o conjunto $f^{-1}(B)$ pertence a $\mathcal{A}$.*

Sejam f e g funções que tomam valores na recta acabada $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ e têm o mesmo domínio A. O máximo e o mínimo de f e g são funções de A para $[-\infty, +\infty]$ definidas por

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\},$$

$$(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$

PROPOSIÇÃO 3.11. [**Rud87**, pag. 15] *Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável, seja $A \in \mathcal{A}$, e sejam f e g funções mensuráveis definidas em A com valores em $[-\infty, +\infty]$. Então $f \vee g$ e $f \wedge g$ são mensuráveis.*

PROPOSIÇÃO 3.12. [**Rud87**, pag. 31] *Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável, seja $A \in \mathcal{A}$, e seja (f_n) uma sucessão de funções mensuráveis definidas de A para $[-\infty, +\infty]$. Então*

(1) *as funções $\sup_n f_n$ e $\inf_n f_n$ são mensuráveis;*
(2) *as funções $\limsup_n f_n$ e $\liminf_n f_n$ são mensuráveis;*
(3) *a função $\lim_n f_n$ (cujo domínio é $\{x \in A \ : \ \limsup_n f_n = \liminf_n f_n\}$) é mensurável.*

PROPOSIÇÃO 3.13. [**Rud87**, pag. 11] *Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável, seja A um subconjunto de X pertencente a $\mathcal{A}$, sejam f e g funções definidas de A em $I\!R$, e seja α um número real. Então $\alpha f, f+g, f-g, fg$ e $\frac{f}{g}$ (onde o domínio de $\frac{f}{g}$ é $\{x \in A : g(x) \neq 0\}$) são mensuráveis.*

DEFINIÇÃO 3.17. *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Diz-se que uma propriedade no conjunto dos pontos de X se verifica quase sempre, se o conjunto dos pontos em X para os quais a propriedade não se verifica tiver medida nula.*

Por outras palavras, uma propriedade verifica-se quase sempre se existe um conjunto $\mathcal{N}$ pertencente a $\mathcal{A}$, satisfazendo $\mu(\mathcal{N}) = 0$, e contém todos os pontos onde a propriedade é satisfeita.

Abreviadamente escrevemos, q.s. quando queremos afirmar que uma propriedade se verifica quase sempre.

PROPOSIÇÃO 3.14. [**Rud87**, pag. 27] *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida, e sejam f e g funções definidas em X e com valores reais que são iguais q.s.. Se μ é completa e se f é $\mathcal{A}$-mensurável, então g é $\mathcal{A}$-mensurável.*

COROLARIO 3.1. [**Rud87**, pag. 28] *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida, e seja (f_n) uma sucessão de funções definidas em X de valores reais, e seja f definida em X e com valores reais tal que (f_n) converge para f q.s.. Se μ é completa e cada f_n é $\mathcal{A}$-mensurável, então f é $\mathcal{A}$-mensurável.*

DEFINIÇÃO 3.18. [**Rud87**, pag. 19] *Uma função $s : I\!R^n \to I\!R$ chama-se função simples se o seu contradomínio, $s(I\!R^n)$, for um conjunto finito.*

PROPOSIÇÃO 3.15. [**Rud87**, pag. 38] *Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e seja B um conjunto de X. Então a função caracteristica de B, χ_B, é $\mathcal{A}$-mensurável se e só se $B \in \mathcal{A}$.*

OBSERVAÇÃO 3.4. *Se $s(x) \in \{a_1, ..., a_m\}$ $\forall x \in I\!R^n$ então claramente $s = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{A_j}$ onde $A_j = \{x \in I\!R^n : s(x) = a_j\}$. Além disso, s é mensurável se e só se $A_1, ..., A_m$ são mensuráveis.*

TEOREMA 3.2. [**Rud87**, pag. 19] *Seja $f : A \subset I\!R^n \to I\!R$. Podemos garantir a existência de uma sucessão (s_n) de funções simples convergindo pontualmente para f em A.*

(1) *Se f é limitada, (s_n) pode ser escolhida de modo que a convergência seja uniforme;*
(2) *Se f é mensurável, cada s_n pode ser mensurável;*
(3) *Se f tem valores não negativos, a sucessão (s_n) pode ser escolhida de modo a ser crescente em cada ponto.*

3.3. Teoremas de Lusin e Egoroff. O seguinte Teorema garante que uma função mensurável pode ser "aproximada" em medida, por uma função contínua.

TEOREMA 3.3. [**ET99**, pag. 231] ***(Teorema de Lusin)***
Seja $f : I\!R^n \to I\!R^m$ uma função mensurável. Suponhamos $A \subset I\!R^n$ é um conjunto mensurável com medida finita. Então, para todo o $\varepsilon > 0$, existe um conjunto compacto $K \subset A$ tal que $\mathcal{L}(A \setminus K) < \varepsilon$, e $f|_K$ é contínua.

TEOREMA 3.4. [**Yeh06**, pag. 105] ***(Teorema de Egoroff)***
Sejam $f_k : I\!R^n \to I\!R^m$, $k = 1, 2, ...$ uma sucessão de funções mensuráveis e $A \subset I\!R^n$ um conjunto mensurável com medida finita e $f_k \to g$ q.s. em A. Então, qualquer que seja $\varepsilon > 0$ existe um conjunto mensurável $B \subset A$ tal que $\mathcal{L}(A \setminus B) < \varepsilon$, e $f_k \to g$ uniformemente em B.

3.4. O integral de Lebesgue. Estamos em condições de definir o integral de Lebesgue de uma função mensurável definida num conjunto mensurável $A \subset \mathbb{R}^n$. Nesta secção quando falamos de conjuntos mensuráveis queremos dizer Lebesgue mensuráveis.

Para uma função simples $s = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{A_j}$ onde $A_j \subset A$, sendo A_j mensurável, definimos

$$\int_A s(x)dx = \sum_{j=1}^{m} a_j \mu(A_j).$$

Se f é mensurável e não negativa, definimos

$$\int_A f(x)dx = \sup \int_A s(x)dx,$$

onde o supremo é tomado sobre o conjunto das funções mensuráveis que se anulam fora de A e satisfazem $0 \leq s(x) \leq f(x)$ em A.

OBSERVAÇÃO 3.5. *O integral de uma função não negativa pode ser $+\infty$.*

Se f é mensurável e tem valores reais, escrevemos $f = f^+ - f^-$, onde $f^+ = \max\{f, 0\}$ e $f^- = \min\{-f, 0\}$ são ambas mensuráveis (Proposição 3.12) e não negativas.

DEFINIÇÃO 3.19. [**Rud87**, pag. 25] *Definimos*

$$\int_A f(x)dx = \int_A f^-(x)dx + \int_A f^+(x)dx \tag{136}$$

sempre que um dos integrais do segundo membro é finito. Se ambos os integrais são finitos dizemos que f é Lebesgue integrável em A.

PROPOSIÇÃO 3.16. *Suponhamos que todas as funções e conjuntos sitados são mensuráveis.*

(1) *Se f é limitada em A e $\mu(A) < \infty$, então f é Lebesgue integrável em A.*
(2) *Se $a \leq f(x) \leq b$ para todo o $x \in A$ e se $\mu(A) < \infty$, então*
$$a\mu(A) \leq \int_A f(x)dx \leq b\mu(A).$$
(3) *Se $f \leq g$ para todo o $x \in A$, e se ambos os integrais existem então*
$$\int_A f(x)dx \leq \int_A g(x)dx.$$
(4) *Se f, g são Lebesgue integráveis em A, então $f + g$ é Lebesgue integrável em A e*
$$\int_A (f+g)(x)dx = \int_A f(x)dx + \int_A g(x)dx.$$
(5) *Se f é Lebesgue integrável em A e $c \in A$, então cf é Lebesgue integrável em A e*
$$\int_A (cf)(x)dx = c\int_A f(x)dx.$$
(6) *Se f é Lebesgue integrável em A, então $|f|$ é Lebesgue integrável em A e*
$$\left|\int_A f(x)dx\right| \leq \int_A |f(x)|dx.$$
(7) *Se f é Lebesgue integrável em A e $B \subset A$, então f é Lebesgue integrável em B. Se além disso $f(x) \geq 0$ para todo o $x \in A$, então*
$$\int_B f(x)dx \leq \int_A f(x)dx.$$
(8) *Se $\mu(A) = 0$ então $\int_A f(x)dx = 0$.*
(9) *Se f é Lebesgue integrável em A e se $\int_B f(x)dx = 0$ para todo o $B \subset A$, então $f(x) = 0$ q.s. em A.*

Observação 3.6. *Se f é Lebesgue integrável em $\mathbb{R}^n$ ou mensurável e não-negativa em $\mathbb{R}^n$, então a função de conjuntos $\mathcal{L}$ definida por*

$$\mathcal{L}(A) = \int_A f(x)dx$$

é contávelmente aditiva e por isso é uma medida, na σ-álgebra dos subconjuntos mensuráveis de $\mathbb{R}^n$

Observação 3.7. *Note-se que, como consequência, podemos ignorar conjuntos de medida nula na integração. Assim, se f e g são mensuráveis em A e se $f(x) = g(x)$ q.s. em A então $\int_A f(x)dx = \int_A g(x)dx$.*

Teorema 3.5. ***(Teorema de Fatou*** **[Rud87**, pag. 23]*) Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções mensuráveis, não negativas e $f(x) = \liminf_n f_n(x)$, então f é mensurável e $\int_X f dx \leq \lim_n \int_X f_n dx$*

Teorema 3.6. ***(Teorema da Convergência Monótona*** **[Rud87**, pag. 21]*) Seja $f_k : X \to [0, +\infty]$ k=1,2,..., uma sucessão de funções mensuráveis, tais que, $f_1 \leq ... \leq f_k \leq f_{k+1} \leq ... \leq +\infty$ e $f(x) = \sup_n f_n(x)$.*

Então, f é mensurável e $\int_X f dx = \lim_n \int_X f_n dx$.

Teorema 3.7. ***(Teorema da Convergência Dominada*** **[Rud87**, pag. 26]*) Seja $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma sucessão de funções mensuráveis, convegindo q.s. em X para $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Suponhamos que existe $g \in L^1(X)$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.s. em X, então $f \in L^1(X)$ e*

$$\lim_n \int_X f_n dx = \int_X f dx.$$

3.5. Os espaços de Lebesgue L^p. Nesta secção Ω designa um aberto de $\mathbb{R}^n$ e munimos $\mathbb{R}^n$ da medida de Lebesgue.

Definição 3.20. [**Bre99**, pag. 55] *Chamamos suporte de uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ao fecho do conjunto de pontos onde f não se anula, isto é,*

$$supp\ f = \overline{\{x \in \Omega\ :\ f(x) \neq 0\}}.$$

Definição 3.21. *Denotamos por $C_c(\Omega)$ o espaço das funções contínuas com suporte compacto.*

Definição 3.22. [**Bre99**, pag. 55] *Denotamos por $L^1(\Omega)$ o espaço espaço das funções integráveis em Ω com valores em $\mathbb{R}$. Definimos em $L^1(\Omega)$ a norma $\|f\|_{L^1} = \int_\Omega |f(x)|dx$.*

Observação 3.8. *Duas funções de L^1 são identicas se coincidirem q.s., isto é, se o conjunto $\{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\}$ tiver medida nula. De facto, L^1 é, na realidade um espaço de classes de equivalência, para a relação de equivalência q.s.*

Definição 3.23. *Seja $p \in [1, +\infty[$ e defina-se*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}\ :\ f \quad \text{mensurável e} \quad |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

Em $L^p(\Omega)$ define-se a norma $\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$.

DEFINIÇÃO 3.24. *Definimos* $L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow I\!R| \quad f$ *é mensurável e existe uma constante* C *tal que* $|f(x)| \leq C$ *q.s. em* $\Omega\}$. *Consideramos em* $L^\infty(\Omega)$ *a norma definida por*

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C : |f(x)| \leq C \quad q.s. \ em \ \Omega\}.$$

Seja $1 \leq p < \infty$; designa-se por p^* o expoente conjugado de p, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$. Se $p = +\infty$ consideramos $p^* = 1$. Se considerarmos f definida em Ω com valores em $\mathbb{R}^m$ então escrevemos $f \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

TEOREMA 3.8. ***(Desigualdade de Hölder*** [**Bre99**, pag. 56]*)* *Sejam* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^{p^*}(\Omega)$ *com* $1 \leq p \leq +\infty$. *Então* $f.g \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int |(fg)(x)|dx \leq \|f\|_{L^p} \leq \|g\|_{L^{p^*}}.$$

TEOREMA 3.9. [**Bre99**, pag. 57] $L^p(\Omega)$ *é um espaço de Banach para todo* $1 \leq p \leq +\infty$.

TEOREMA 3.10. [**Bre99**, pag. 58] *Seja* (f_n) *uma sucessão em* $L^p(\Omega)$ *e* $f \in L^p(\Omega)$, *tais que* $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$. *Então, existe* $h \in L^p(\Omega)$ *e uma subsucessão* (f_{n_k}) *tal que*

(1) $(f_{n_k}(x)) \to f(x)$ *q.s. em* Ω
(2) $|f_{n_k}| \leq h(x) \quad \forall k$ *e q.s. sobre* Ω.

Reflexividade e separabilidade.

TEOREMA 3.11. [**Bre99**, pag. 59] *O espaço* L^p *é refléxivo para* $1 < p < \infty$.

TEOREMA 3.12. ***(Teorema de representação de Riez*** [**Bre99**, pag. 61]*)* *Seja* $1 < p < \infty$ *e seja* $\varphi \in (L^p)^*$. *Então, existe e é único* $u \in L^p$ *tal que* $\langle \varphi, f \rangle = \int uf \quad \forall f \in L^p(\Omega)$. *Além disso,* $\|u\|_{L^{p^*}} = \|\varphi\|_{(L^p)^*}$.

Este teorema diz-nos que qualquer funcional linear contínuo em L^p, com $1 < p < +\infty$ representa-se como uma função de L^{p^*}. Assim é podemos identificar o dual de L^p com L^{p^*}.

TEOREMA 3.13. [**Bre99**, pag. 61] *O espaço* $C_c(\Omega)$ *é denso em* $L^p(\Omega)$ *para* $1 \leq p < \infty$.

DEFINIÇÃO 3.25. *Seja* $1 \leq p \leq \infty$. *Diz-se que uma função* $f : \Omega \to I\!R$ *pertence a* $L^p_{loc}(\Omega)$ *se* $f\chi_K \in L^p(\Omega)$, *para qualquer compacto* $K \subset \Omega$.

LEMA 3.2. [**Bre99**, pag. 61] *Seja* $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ *tal que*

$$\int u(x)f(x)dx = 0 \quad \forall u \in C_c(\Omega). \tag{137}$$

Então $f = 0$ *q.s. em* Ω.

TEOREMA 3.14. [**Bre99**, pag. 66] *O espaço* L^p *é separável para* $1 \leq p < \infty$.

TEOREMA 3.15. *Seja* $\varphi \in (L^1)^*(\Omega)$ *tal que* $\langle\varphi, f\rangle = \int uf \quad \forall f \in L^1(\Omega)$. *Além disso,* $\|u\|_{L^\infty} = \|\varphi\|_{(L^1)^*}$.

OBSERVAÇÃO 3.9. [**Bre99**, pag. 63] *Este teorema afirma que qualquer funcional linear contínuo em* L^1 *se pode representar com uma função* L^∞. *Assim podemos identificar o dual de* L^1 *com* L^∞.

PROPOSIÇÃO 3.17. [**Bre99**, pag. 64] *O espaço* L^1 *não é refléxivo.*

Referimos que $(L^1)^* = L^\infty$ então podemos concluir que L^∞ não é refléxivo, pois, caso contrário L^1 seria refléxivo. O dual de L^∞ contém estrictamente L^1. Portanto, existem formas lineares φ contínuas sobre L^∞ que não são do tipo

$$\langle\varphi, f\rangle = \int uf \quad \forall f \in L^\infty(\Omega) \quad \text{com} \quad u \in L^1.$$

PROPOSIÇÃO 3.18. [**Bre99**, pag. 66] *O espaço* L^∞ *não é separável.*

3.6. Compacidade.

DEFINIÇÃO 3.26. (1) *Se* $1 \leq p < \infty$, *uma sucessão* $(f_n) \subset L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ *converge fortemente para* $f \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ *(*$(f_n) \to f$*) se (por definição)*

$$\|f_n - f\|_{L^p} \to 0.$$

(2) *Se* $1 \leq p < \infty$, *uma sucessão* $(f_n) \subset L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ *converge fracamente para* $f \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ *(*$(f_n) \rightharpoonup f$*) se e só se*

$$\int_\Omega f_n(x)g(x)dx \to \int_\Omega f(x)g(x)dx \forall g \in L^{p^*}(\Omega, \mathbb{R}^n).$$

(3) *Uma sucessão* $(f_n) \subset L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ *converge fracamente* para* $f \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ *(*$(f_n) \rightharpoonup^* f$*) se e só se*

$$\int_\Omega f_n(x)g(x)dx \to \int_\Omega f(x)g(x)dx \forall g \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^n).$$

Apresentam-se a seguir os critérios de compacidade fraca. O caso $p = 1$ é especial.

TEOREMA 3.16. [**BGH98**, pag. 77] *Seja* $1 < p \leq \infty$. *A sucessão* (f_n) *é fracamente relativamente compacta em* $L^p(\Omega)$ *(fracamente* relativamente compacta se* $p = \infty$*) se e só se existe uma constante* $k \geq 0$ *tal que* $\|f\|_{L^p} \leq k$ *uniformemente para todo o* n.

Seja $p = 1$. *São equivalentes:*

(1) *A sucessão* (f_n) *é fracamente compacta em* $L^1(\Omega)$*;*
(2) *existe uma constante* $k \geq 0$ *tal que* $\|f\|_{L^1} \leq k$ *para todo o* n*;*
(3) *(Condição de equi-integrabilidade) para todo* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *tal que para qualquer subconjunto mensurável* E *com* $|E| < \delta$,

$$\int_E |f_n(x)|dx < \varepsilon$$

uniformemente em n*;*

(4) *existe uma função* $\theta : (0,\infty) \to I\!R$ *convexa, semicontínua inferior e crescente tal que:* $\lim_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{x} = +\infty$, *e* $\sup_{v\in C} \int_\Omega \theta(|v|)dx < +\infty$.

3.7. Os espaços de Sobolev $W^{1,p}$.

DEFINIÇÃO 3.27. [**Bre99**, pag. 149] *O espaço de Sobolev* $W^{1,p}(\Omega)$, *define-se*

$$W^{1,p}(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) \; : \; \exists g_1, ..., g_n \in L^p(\Omega) \text{ tais que}$$
$$\int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_\Omega g_i \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \forall i = 1, ..., n\}$$

OBSERVAÇÃO 3.10. *Denotamos por* $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$.

Dizemos que g_i é a derivada parcial de f no sentido das distribuições pelo Lema (3.2) cada g_i é único. Definimos em $W^{1,p}(\Omega)$ a norma

$$\|f\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{L^p}$$

ou por vezes a norma equivalente

$$\left(\|f\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{e } 1 \leq p < \infty.$$

PROPOSIÇÃO 3.19. [**Bre99**, pag. 150] *O espaço* $W^{1,p}(\Omega)$ *é um espaço de Banach para* $1 \leq p \leq \infty$, $W^{1,p}(\Omega)$ *é reflexivo para* $1 < p < \infty$ *e separável para* $1 \leq p < \infty$. *O espaço* $H^1(\Omega)$ *é um espaço de Hilbert separável.*

OBSERVAÇÃO 3.11. *Se* Ω *é limitado e suficientemente regular,* $W^{1,\infty}(\Omega)$ *é o espaço de todas as funções lipschitzianas em* Ω.

TEOREMA 3.17. ***(Rellich-Kondrachov*** [**Bre99**, pag. 169]*) Suponha-se* Ω *de classe* C^1. *Tem-se*

(1) *se* $p < n$, *então* $W^{1,q}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ $\forall q \in [1, p^*[$ *onde* $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$;
(2) *se* $p = n$, *então* $W^{1,q}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ $\forall q \in [1, +\infty[$;
(3) *se* $p > n$ *então* $W^{1,q}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$.

DEFINIÇÃO 3.28. [**Bre99**, pag. 171] *Seja* $1 \leq p < \infty$, $W_0^{1,p}(\Omega)$ *designa o fecho de* $C_c^1(\Omega)$ *em* $W^{1,p}(\Omega)$

Podemos dizer, "grosso modo" que as funções $W_0^{1,p}(\Omega)$ são as funções que se anulam na fronteira $\partial\Omega$. Esta afirmação não é muito precisa porque já vimos que as funções $f \in W^{1,p}(\Omega)$, apenas estão definidas a menos de um conjunto de medida nula, pelo que se $\partial\Omega$ tiver medida nula é indiferente o valor que f toma em $\partial\Omega$.

LEMA 3.3. [**Bre99**, pag. 171] *Se* $f \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, *com suppf compacto contido em* Ω, *então* $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

TEOREMA 3.18. [**Bre99**, pag. 171] *Suponha-se* Ω *de classe* C^1. *Seja* $f \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *com* $1 \leq p < \infty$. *Então as condições seguintes são equivalentes:*

(1) $f = 0$ *na* $\partial\Omega$;
(2) $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

TEOREMA 3.19. ***(Desigualdade de Poincaré*** [**Bre99**, pag. 174]*)* *Suponhamos que* Ω *é um aberto limitado. Então existe uma constante* C *(dependente de* Ω *e* p*) tal que*

$$\|f\|_{L^p} \leq C\|\nabla f\|_{L^p} \quad \forall f \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (1 \leq p < \infty). \tag{138}$$

TEOREMA 3.20. [**BGH98**, pag. 79] *Seja* (f_n) *uma sucessão em* $W^{1,1}(a,b)$, $a, b \in I\!R$. *Suponha-se que:*

(1) $\sup_n \|f_n\|_{W^{1,1}} = K < \infty$;
(2) *as funções que a cada* $E \mapsto \int_E |D f_n| dx$, $E \subset (a,b)$ *são equiabsolutamente contínuas.*

Então, existe uma subsucessão (f_{n_k}) *que converge no sentido fraco em* $W^{1,1}(a,b)$ *para alguma função* $f \in W^{1,1}(a,b)$. *Reciprocamente, se* (f_n) *que converge no sentido fraco em* $W^{1,1}(a,b)$ *para alguma função* $f \in W^{1,1}(a,b)$, *então* (1) *e* (2) *continuam verdadeiras. Por fim, as condições* (1) *e* (2) *verificam-se se e só se* (f_n) *é equilimitada em* $L^1(a,b)$ *e existe uma função* $\theta : [0,\infty) \to I\!R$ *com*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\theta(x)}{x} = +\infty, \text{ e } \sup_n \int_a^b \theta(|f_n'(x)|) dx < +\infty.$$

3.8. Funções de variação limitada.

DEFINIÇÃO 3.29. [**Yeh06**, pag. 261] *Seja* $[a,b] \subset I\!R$ *com* $a \leq b$.

(1) *Uma partição de* $[a,b]$ *é um conjunto finito* $\pi := \{a = x_0 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$ *de pontos em* $[a,b]$.
(2) *Seja* $\Pi_{a,b}$ *a colecção de todas as partições de* $[a,b]$. *Chamamos variação de* f *em* $[a,b]$ *relativamente à partição* $\pi := \{a = x_0 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$ *à função*

$$V_a^b(f,\pi) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \in [0,+\infty). \tag{139}$$

(3) *Chamamos variação total de* f *em* $[a,b]$ *à função*

$$V_a^b(f) = sup_{\pi \in \Pi_{a,b}} V_a^b(f,\pi) \in [0,+\infty]. \tag{140}$$

(4) *Diz-se que* f *é uma função de variação limitada (abreviadamente* $f \in BV([a,b])$*) se* $V_a^b(f) < \infty$.
(5) *Sejam* $\pi, \pi' \in \Pi_{a,b}$ *tais que* $\pi \subset \pi'$. *Neste caso diz-se que* π' *é um refinamento de* π.

OBSERVAÇÃO 3.12. *Se* π *e* $\pi' \in \Pi_{a,b}$, *então* $\pi \cup \pi' \in \Pi_{a,b}$. *Neste caso,* $\pi \cup \pi'$ *é um refinamento tanto de* π *como de* π'.

PROPOSIÇÃO 3.20. [**Yeh06**, pag. 262]

(1) *Se* $\pi, \pi' \in \Pi_{a,b}$ *e* $\pi \subset \pi'$, *então* $V_a^b(f,\pi) \leq V_a^b(f,\pi')$;
(2) *Se* $f \in BV([a,b])$, *então para todo o* $x \in [a,b]$ *tem-se que* $f(x) \in [f(a) - V_a^b(f), f(a) + V_a^b(f)]$;
(3) *Se* $f \in BV([a,b])$, *então* $-f \in BV([a,b])$ *e* $V_a^b(-f) = V_a^b(f)$;
(4) *Se* $f : [a,b] \longrightarrow I\!R$ *é uma função monótona, então* $f \in BV([a,b])$, *e neste caso* $V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$.

LEMA 3.4. [**Yeh06**, pag. 263]

(1) *Sejam* $f_1, f_2 \in BV([a,b])$ *e* $c_1, c_2 \in I\!R$. *Então,* $c_1f_1 + c_2f_2 \in BV([a,b])$ *e* $V_a^b(c_1f_1 + c_2f_2) \leq |c_1|V_a^b(f_1) + |c_2|V_a^b(f_2)$;
(2) *Se* $f \in BV([a,b])$, *então qualquer que seja o intervalo fechado* $[a_0,b_0] \subset [a,b]$, *tem-se que* $f \in BV([a_0,b_0])$ *e* $V_{a_0}^{b_0}(f) \leq V_a^b(f)$;
(3) *Seja* $c \in (a,b)$. *Se* $f \in BV([a,c])$ *e* $f \in BV([c,b])$, *então* $f \in BV([a,b])$ *e* $V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$.

TEOREMA 3.21. ***(Decomposição de Jordan de funções de variação limitada*** [**Yeh06**, pag. 265]*)*
Seja $f : [a,b] \longrightarrow I\!R$. *Então* $f \in BV([a,b])$ *se e só se existem duas funções* $g_1, g_2 : [a,b] \longrightarrow I\!R$ *crescentes tais que* $f = g_1 - g_2$ *em* $[a,b]$.

DEFINIÇÃO 3.30. *Seja* $f \in BV([a,b])$. *A expressão* $f = g_1 - g_2$ *onde* $g_1, g_2 : [a,b] \longrightarrow I\!R$ *são duas funções crescentes denomina-se decomposição de Jordan da função* f.

OBSERVAÇÃO 3.13. *A decomposição de Jordan de* f *não é única.*

TEOREMA 3.22. [**BGH98**, pag. 97] *Seja* $f : [a,b] \longrightarrow I\!R$ *uma função de variação limitada. Então,*

(1) f *é diferenciável q.s. em* $[a,b]$;
(2) $f' \in L^1(a,b)$.

DEFINIÇÃO 3.31. [**Yeh06**, pag. 266] *Seja* $f \in BV([a,b])$. *A função de variação total* v_f *de* $f : [a,b] \longrightarrow I\!R$ *define-se como* $v_f(x) = V_a^x(f)$ *para* $x \in [a,b]$.

TEOREMA 3.23. [**Yeh06**, pag. 266] *Seja* $f \in BV([a,b])$, *onde* $a < b$. *Então, a função de variação total* v_f *de* f *é contínua em* $x_0 \in [a,b]$, *se e só se* f *é contínua em* x_0.

3.9. Funções absolutamente contínuas.

DEFINIÇÃO 3.32. [**Yeh06**, pag. 270] *Uma função* $f : [a,b] \longrightarrow I\!R$ *diz-se absolutamente contínua em* $[a,b]$ *(abreviadamente* $AC[a,b]$*), se para todo o* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que* $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$ *implica* $\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$, *para toda a colecção de intervalos fechados* $\{[a_k,b_k] : k = 1,...,n\}$ *de interiores dois a dois disjuntos , contidos em* $[a,b]$.

TEOREMA 3.24. [**Yeh06**, pag. 274] *Seja* $f : [a,b] \longrightarrow I\!R$ *uma função absolutamente contínua. Então*

(1) *f é uniformemente contínua em $[a,b]$;*
(2) *f é uma função de variação limitada em $[a,b]$.*

A reciproca deste teorema é falsa.

TEOREMA 3.25. **[FMO98]** *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função absolutamente contínua. Se $E \subset [a,b]$ é um conjunto mensurável tal que $|f(E)| = 0$, então $f'(t) = 0$ q.s. em E.*

A reciproca deste teorema é verdadeira.

DEFINIÇÃO 3.33. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Diz-se que f satisfaz a condição (N) de Lusin em $[a,b]$, se para todo o subconjunto $E \subset [a,b]$ de medida nula, também $f(E)$ é de medida nula.*

LEMA 3.5. **[Yeh06**, pag. 273] *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função absolutamente contínua, então, para todo o $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $\sum_{n\in\mathbb{N}}(b_n - a_n) < \delta$, implica que $\sum_{n\in\mathbb{N}}|f(b_n) - f(a_n)| < \varepsilon$ e $\sum_{n\in\mathbb{N}}\{\sup_{[a_k,b_k]} f - \inf_{[a_k,b_k]} f\} < \varepsilon$, para toda a colecção contável $\{[a_n,b_n] : n \in \mathbb{N}\}$ de subintervalos fechados de $[a,b]$ com interiores dois a dois disjuntos.*

TEOREMA 3.26. **[Yeh06**, pag. 274] *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Então f é absolutamente contínua em $[a,b]$ se e só se satisfaz as seguintes condições:*

(1) *f é contínua em $[a,b]$;*
(2) *f é uma função de variação limitada em $[a,b]$;*
(3) *f satisfaz a condição **(N)** em $[a,b]$.*

DEFINIÇÃO 3.34. **[Yeh06**, pag. 276] *Seja $f : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função Lebesgue integrável em $[a,b]$. Definimos uma função F em $[a,b]$ por $F(t) = c + \int_a^t f(\tau)d\tau$ para $t \in [a,b]$ onde c é um número real arbitrário.*

LEMA 3.6. **[Yeh06**, pag. 277] *Seja $f : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função Lebesgue integrável em $[a,b]$. Se $F(\cdot)$ é uma funçãos constante em $[a,b]$, então $f = 0$ q.s. em $[a,b]$.*

LEMA 3.7. **[Yeh06**, pag. 281] *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função absolutamente contínua. Se $f' = 0$ q.s. em $[a,b]$ então f é constante em $[a,b]$.*

TEOREMA 3.27. **[Yeh06**, pag. 281] *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função absolutamente contínua. Então $\int_a^t f'(\tau)d\tau = f(t) - f(a)$ para $t \in [a,b]$.*

TEOREMA 3.28. **[Yeh06**, pag. 288]

(1) *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável para todo o $t \in [a,b]$, e f' é limitada em $[a,b]$, então $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função absolutamente contínua. Portanto, $\int_a^b f'(\tau)d\tau = f(b) - f(a)$.*
(2) *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é lipschitziana em $[a,b]$ (isto é, existe uma constante $M > 0$ tal que $|f(t') - f(t'')| \leq M|t' - t''|$ quaisquer que sejam t', $t'' \in [a,b]$), então f é absolutamente contínua em $[a,b]$ e $\int_a^b f'(\tau)d\tau = f(b) - f(a)$.*

TEOREMA 3.29. [**Yeh06**, pag. 317] *Seja* $f : I \to I\!R$ *uma função convexa,* $I \subset I\!R$ *um intervalo aberto. Então ou* f *é monótona em* I *ou existe* $x_0 \in I$ *tal que* f *é decrescente em* $I \cap]-\infty, x_0]$ *e crescente em* $I \cap [x_0, +\infty[$.

PROPOSIÇÃO 3.21. [**Yeh06**, pag. 318] *Se* $f : I \to I\!R$ *é uma função convexa,* $I \subset I\!R$ *um intervalo aberto, então* f *é uma função absolutamente contínua em todo o intervalo fechado* $[\alpha, \beta] \subset I$.

TEOREMA 3.30. [**Yeh06**, pag. 318] *Seja* f *uma função convexa em* $[a, b]$. *Se* f *é contínua à direita de* a *e à esquerda de* b, *então* f *é uma função absolutamente contínua em* $[a, b]$.

TEOREMA 3.31. [**Yeh06**, pag. 319] *Seja* $f : I \to I\!R$, $I \subset I\!R$ *um intervalo aberto. Suponhamos que*

(1) f *é absolutamente contínua em todo o intervalo fechado contido em* I;
(2) f' *é uma função crescente no subconjunto* $[\alpha, \beta] \subset I$ *(onde* f' *existe).*

Então, f *é uma função convexa definida no intervalo* I.

3.10. Um teorema de mudança de variável.

TEOREMA 3.32. [**SV69**] *Sejam* $f : [c, d] \to I\!R$ *e* $g : [a, b] \to I\!R$, *tais que* g *tem derivada finita q.s. em* $[a, b]$ *e* f *uma função Lebesgue integrável em* $[c, d] \supset g([a, b])$. *Então,* $(f \circ g) \cdot g'$ *é Lebesgue integrável e verifica-se a fórmula de mudança de variáveis*

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(\tau) d\tau = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(s)) g'(s) ds, \quad \forall \alpha, \beta \in [a, b], \tag{141}$$

se e só se a função composta $F \circ g$ *é absolutamente contínua, sendo* $F(t) = \int_c^t f(\tau) d\tau$.

COROLARIO 3.2. [**SV69**] *Sejam:* g *uma função monótona e absolutamente contínua;* f *uma função Lebesgue integrável. Então* $(f \circ g) \cdot g'$ *é Lebesgue integrável e verifica-se (*141*).*

COROLARIO 3.3. [**SV69**] *Sejam* g *uma função absolutamente contínua e* f *uma função limitada e mensurável. Então* $(f \circ g) \cdot g'$ *é Lebesgue integrável e verifica-se (*141*).*

COROLARIO 3.4. [**SV69**] *Sejam* g *uma função absolutamente contínua,* f *e* $(f \circ g) \cdot g'$ *funções Lebesgue integráveis. Então verifica-se (*141*).*

3.11. O Teorema de Liapunov das medidas vectoriais. Nesta secção, $A \subset \mathbb{R}^n$ representa um conjunto mensurável de medida finita.

TEOREMA 3.33. [**Ces83**, pag. 453] *Sejam* $f_j : A \to I\!R^n$, $j = 1, ..., h$ *funções Lebesgue integráveis em* A, *e* $\lambda_j : A \to [0, 1]$ *para* $j = 1, ..., h$ *funções* *mensuráveis, tais que* $\sum_{j=1}^{h} \lambda_j = 1$. *Então, existe uma partição* $E_1, ..., E_h$, *do conjunto* A, *de subconjuntos disjuntos e mensuráveis, tal que*

$$\sum_{j=1}^{h} \int_{E_j} f_j(t)dt = \int_A \sum_{j=1}^{h} \lambda_j f_j(t)dt.$$

3.12. Equações diferenciais. Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, e $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função.

DEFINIÇÃO 3.35. [**Bress**] $x(\cdot)$ *diz-se solução para a equação diferencial*

$$x'(t) = g(t, x(t)),$$

se $x(\cdot)$ *é uma função absolutamente contínua que satisfaz a igualdade anterior q.s. em* Ω.

De modo similar, se $x(\cdot)$ é solução da equação diferencial

$$x'(t) = g(t, x(t)),$$

então

$$x(t) = x(a) + \int_a^b g(\tau, x(\tau))\, d\tau,$$

quaisquer que sejam a e b pertencentes ao dominio de $x(\cdot)$.

Na teoria clássica das equações diferencias ordinárias, supõe-se que a função $g(\cdot)$ é contínua q.s. nas duas variáveis. Neste capítulo consideramos que $g(\cdot)$ é diferenciável em relação à variável x, mas apenas mensurável em relação a t. Supomos ainda que $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ satisfaz:

(1) Para todo a função $x(\cdot)$, $g(\cdot, x(\cdot))$ definida em $\Omega_x = \{t : (t, x) \in \Omega\}$ é mensurável. Para todo o t a função $g(t, \cdot)$ definida em $\Omega_t = \{x : (t, x) \in \Omega\}$ é de classe C^1.

(2) Para todo o compacto $K \subset \Omega$ existem constantes C_K, L_K tais que $|g(t, x)| \leq C_K$, $|g(t, x) + g(t, y)| \leq L_K|x - y|$, $\forall (t, x), (t, y) \in K$.

TEOREMA 3.34. [**Bress**] *Seja* $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *uma função que satisfaz:*

(1) *Para todo o* $x(\cdot)$, *a função* $g(\cdot, x(\cdot))$ *definida em* $\Omega_x = \{t : (t, x) \in \Omega\}$ *é mensurável. Para todo o* t, *a função* $g(t, \cdot)$ *definida em* $\Omega_t = \{x : (t, x) \in \Omega\}$ *é de classe* C^1,

(2) *Para todo o compacto* $K \subset \Omega$ *existem constantes* C_K, L_K *tais que* $|g(t, x)| \leq C_K$, $|g(t, x) + g(t, y)| \leq L_K|x - y|$, $\forall (t, x), (t, y) \in K$,

e considera-se o problema

$$x'(t) = g(t, x(t)),$$

para $(a, x(a)) \in \Omega$. *Então,*

(1) *Existe* $\delta > 0$, *tal que o problema* $x'(t) = g(t, x(t))$, *tem solução* $x(\cdot)$ *definida em* $[a - \delta, b - \delta]$.

(2) *Se $g(\cdot)$ estiver definida em todo $I\!R \times I\!R^n$, e existirem constantes C, L tais que $|g(t,x)| \leq C$ e $|g(t,x) - g(t,y)| \leq L|x-y|$, $\forall t, x, y$, então, qualquer que seja o intervalo $[c,d]$ contendo a o problema tem solução definida em $[c,d]$.*

Doravante todos os resultados enunciados para soluções do Problema de Cauchy estão enunciados para $b \geq a$.

O Lema seguinte fornece um instrumento muito útil, porque permite estimar a distância entre duas soluções de uma equação diferencial. É um resultado fundamental na demonstração da unicidade de solução.

LEMA 3.8. ***(Desigualdade de Gronwall** [**Bress**]) Seja $z(\cdot)$ uma função absolutamente contínua não negativa tal que $z(a) \leq \gamma$, $z'(t) \leq \alpha(t)z(t)+\beta(t)$ q.s. em $[a,T]$, para funções α, β integráveis e γ uma constante não negativa. Então $z(\cdot)$ satisfaz a desigualdade*

$$z(t) \leq \gamma \exp\left(\int_a^t \alpha(\tau)\, d\tau\right) + \int_a^t \beta(\tau) \exp\left(\int_\tau^t \alpha(\sigma) d\sigma\right) d\tau \tag{142}$$

OBSERVAÇÃO 3.14. *O segundo membro da desigualdade (142) é precisamente a solução para o problema linear*

$$w(a) = \gamma, \qquad w'(t) = \alpha(t)w(t) + \beta(t).$$

TEOREMA 3.35. [**Bress**] *Sejam $x_1(\cdot)$, $x_2(\cdot)$ duas soluções do Problema de Cauchy, definidas nos intervalos $[a,t_1]$ e $[a,t_2]$ respectivamente. Se considerarmos $T = \min\{t_1,t_2\}$, então $x_1(t) = x_2(t)$, $\forall t \in [a,T]$.*

O resultado seguinte mostra que, se a solução $x(\cdot)$ do Problema de Cauchy não pode ser estendida para lá de certo tempo T, então quando $t \to T^-$ ou $|x(t)| \to \infty$, ou então $(t, x(t))$ aproxima-se de $\partial\Omega$.

TEOREMA 3.36. [**Bress**] *Seja $T > a$, o supremo dos tempos τ os quais o problema $x'(t) = g(t,x(t))$, tem solução $x(\cdot)$ definida em $[a,\tau]$. Então, ou $T = \infty$, ou então $\lim_{t\to T^-}(|x(t)| + \frac{1}{d((t,x(t)),\partial\Omega)}) = \infty$.*

3.13. Multifunções.

DEFINIÇÃO 3.36. *Uma multifunção $\Gamma : I\!R^m \rightrightarrows I\!R^n$ é uma aplicação que a pontos de $I\!R^m$ associa subconjuntos de $I\!R^n$.*

Se Ω é um subconjunto de $\mathbb{R}^m$, dizemos que Γ é fechada, compacta, convexa, ou não vazia em Ω, desde que para cada $t \in \Omega$, a multifunção $\Gamma(t)$ tem essa propriedade particular.

DEFINIÇÃO 3.37. [**Cla90**, pag. 111] *Uma multifunção $\Gamma : \Omega \rightrightarrows I\!R^n$ diz-se mensurável, se para todo o conjunto aberto $O \subset I\!R^n$, o conjunto*

$$\Gamma^{-1}(O) = \{t \in \Omega \, : \, \Gamma(t) \cap O \neq \emptyset\} \subset \Omega$$

é mensurável, i.e., $\Gamma^{-1}(O) \in \mathcal{A}$. Em particular, o conjunto $dom\Gamma = \Gamma^{-1}(I\!R^n)$ é mensurável.

TEOREMA 3.37. [**Cla90**, pag. 111] *Qualquer multifunção $\Gamma : \Omega \rightrightarrows I\!R^n$ fechada, mensurável e não vazia admite sempre uma selecção mensurável, i.e., existe uma função mensurável $\gamma : dom\Gamma \to I\!R^n$ tal que $\gamma(t) \in \Gamma(t)$, para todo o $t \in \Omega$.*

Seja $\Omega = [a, b]$. Suponhamos que existe uma função $\phi(t) \in L^1(\Omega)$ tal que, para todo o $t \in [a, b]$, e para todo o $\gamma(t) \in \Gamma(t)$, $|\gamma(t)| \le \phi(t)$.

Define-se o integral de $\Gamma(\cdot)$ em $[a, b]$ como sendo o conjunto

$$\int_a^b \Gamma(t)dt = \left\{ \int_a^b \gamma(t)dt : \gamma(\cdot) \quad \text{é uma selecção mensurável de } \Gamma(t) \right\}.$$

TEOREMA 3.38. [**Cla90**, pag. 113] *Seja $\Gamma : \Omega \rightrightarrows I\!R^n$ uma multifunção fechada, mensurável, não vazia. Se existe uma função integrável $\phi(t)$ tal que, para todo o $t \in [a, b]$, para todo o $\gamma(t) \in \Gamma(t)$, $|\gamma(t)| \le \phi(t)$, então*

$$\int_a^b \Gamma(t)dt = \int_a^b co\,\Gamma(t)dt.$$

A uma inclusão do tipo

$$x'(t) \in \Gamma(t, x(t)) \quad q.s., \quad t \in [a, b] \tag{143}$$

onde $\Gamma : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$; damos o nome de inclusão diferencial.

Uma solução $x(\cdot)$ para o problema (143) é uma função absolutamente contínua $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, tal que $x'(t)$ satisfaz (143).

3.14. Funções normais. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado.

DEFINIÇÃO 3.38. [**ET99**, pag. 232] *Uma função $f : \Omega \times I\!R^m \to \overline{I\!R}$ denomina-se função normal se*

1. *$f(t, \cdot)$ é semicontínua inferior em $I\!R^m$ q.s. em Ω;*
2. *Existe uma $\widetilde{f} : \Omega \times I\!R^m \to \overline{I\!R}$ Borel mensurável tal que $\widetilde{f}(t, \cdot) = f(t, \cdot)$ q.s. em Ω.*

Um resultado essencial para o estudo das funções normais é:

TEOREMA 3.39. ***(Teorema de Scorza-Dragoni** [**ET99**, pag. 232]). Seja $\mathcal{B} \subset I\!R^n$ um conjunto de Borel. Então $f : A \times \mathcal{B} \to \overline{I\!R}$ é uma função normal se e só se para todo o conjunto compacto $K \subset A$ e para todo o $\varepsilon > 0$, existe um cunjunto compacto $K_\varepsilon \subset K$ com $|K \setminus K_\varepsilon| \le \varepsilon$, tal que $f|_{K_\varepsilon \times \mathcal{B}}$ é semicontínua inferior.*

DEFINIÇÃO 3.39. [**ET99**, pag. 234] *Uma função $f : A \times I\!R^n \to I\!R$ diz-se de Carathéodory se:*

1. *$f(t, \cdot)$ é mensurável $\forall t \in A$;*
2. *$f(\cdot, x)$ é contínua $\forall x \in I\!R^n$.*

Seja $f : A \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tal que $f(t, x) \equiv g(x)$ com $g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ semicontínua inferior. Então f é uma função normal.

A função indicatriz $\delta_C : A \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ (onde $C : A \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ é uma multifunção) define-se como:

$$\delta_C(t,x) := \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in C(t), \\ +\infty & \text{se} \quad x \notin C(t); \end{cases}$$

e é uma função normal se e só se $C(\cdot)$ tem valores fechados e é mensurável. Qualquer que seja a função normal $f_0 : A \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f = f_0 + \delta_C$

$$f(t,x) := \begin{cases} f_0 & \text{se} \quad x \in C(t), \\ +\infty & \text{se} \quad x \notin C(t). \end{cases}$$

é uma função normal e $\operatorname{dom} f(t) = \operatorname{dom} f_0(t) \cap C(t)$. Quando a função f_0 é de Carathéodory então $\operatorname{dom} f(t) = C(t)$.

TEOREMA 3.40. [**RW98**, pag. 671] *Seja $f : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ é uma função normal, então as suas funções polar e bipolar f^* e f^{**}, respectivamente, também são funções normais.*

PROPOSIÇÃO 3.22. [**RW98**, pag. 674] *Seja $f : T \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que: $f(t,x)$ é própria e semicontínua inferior; $f(t,\cdot)$ convexa para todo o $t \in T$. Então, f é uma função normal se e só se:*

(1) *a aplicação $gr\,\partial f(t,\cdot)$ é mensurável;*
(2) *existe uma função mensurável $z : T \to \mathbb{R}^n$ tal que $\partial f(t, z(t)) \neq \emptyset$, para todo o $t \in T$.*

3.15. Intersecção de epigráficos. Seja $\theta : [0, +\infty[\to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função não negativa, crescente, convexa, semicontínua inferior e superlinear, i.e,

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\theta(t)}{t} = +\infty. \tag{144}$$

Suponhamos $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função normal tal que

$$f(t,s,\xi) \geq \theta(|\xi|),$$

com f não negativa, $f(t,\cdot,\cdot)$ semicontínua inferior q.s. em Ω e $f(\cdot,s,\xi)$ mensurável para todo o $(s,\xi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

LEMA 3.9. [**ET99**, pag. 241] *Sejam E um espaço métrico, e $\varphi : E \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função semicontínua inferior tal que:*

$$\forall e \in E, \quad \varphi(e,\xi) \geq \theta(|\xi|). \tag{145}$$

Então, $\forall \overline{e} \in E$, verifica-se a igualdade:

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{co} \bigcup_{|e - \overline{e}| \leq \varepsilon} epi\,\varphi(e,\cdot) = \overline{co}\, epi\,\varphi(\overline{e},\cdot). \tag{146}$$

COROLARIO 3.5. [**ET99**, pag. 243] *Se f é uma função normal definida em $\Omega \times I\!R^m \times I\!R^n$ com $f(x,s,\xi) \geq \theta(|\xi|)$, então*

$$\bigcap_{\varepsilon>0} \overline{co} \bigcup_{|s-\overline{s}|\leq\varepsilon} epi\, f(t,s,\cdot) = \overline{co}\, epi\, f(t,\overline{s},\cdot), \quad q.s. \ em\ \Omega. \tag{147}$$

PROPOSIÇÃO 3.23. [**ET99**, pag. 246] *Se f é uma função normal definida em $\Omega \times I\!R^m \times I\!R^n$ com $f(x,s,\xi) \geq \theta(|\xi|)$, então f^{**} também é uma função normal definida em $\Omega \times I\!R^m \times I\!R^n$ que também satisfaz a desigualdade $f^{**}(x,s,\xi) \geq \theta(|\xi|)$.*

Bibliografia

[AF03] R. Adams e J. Fournier, *Sobolev spaces*, Academic Press (2003).

[Amb87] L. Ambrosio, *New lower semicontinuity result for integral functionals*, Rend Accad NAz Sci XL Mem Mat Sci Fis Natur **11** (1987) 1-42.

[AAB89] L. Ambrosio, O. Ascenzi e G. Buttazzo, *Lipschitz regularity for minimizers of integral functionals with highly discontinuous integrands*, J Math Anal Appl **142** (1989), 301-316.

[AFP00] L. Ambrosio, N. Fusco e D. Pallara, *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*, Oxford University Press (2000).

[AC84] J. P. Aubin e A. Cellina, *Differential inclusions*, Springer (1984).

[BM85] J. M. Ball e V. J. Mizel, *One-dimensional Variational Problems whose minimizers do not satisfy the Euler Lagrange Equation*, Arch Rat Mech Anal **90** (1985) 325-388.

[Bress] A. Bressan, *Lecture notes on the mathematical theory of control*, Trans. Am. Math. Soc. **289** (1985) 73-98.

[Bre99] H. Brézis, *Analyse functionnelle*, Dunod (1999).

[BGH98] G. Buttazzo, M. Giaquinta e S. Hildebrandt, *One-dimensional variational problems (an introduction)*, Claredon Press (1998).

[Cel04] A. Cellina, *The classical problem in the calculus of variations in the autonomus case: Relaxation and Lipschitzianity of solutions*, Trans Amer Math Soc **356** (2004) 415-426.

[Ces83] L. Cesari, *Optimization: theory and applications*, Springer (1983).

[CLSW98] F. H. Clarke, Yu. S. Ledyaev, R.J. Stern e P.R. Wolenski, *Nonsmooth analysis and control theory*, Springer (1998).

[Cla75] F. H. Clarke, *The Euler-Lagrange differential inclusion*, J Diff Eq **19** (1975) 80-90.

[Cla90] F. H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, SIAM (1990).

[CV84] F. H. Clarke e R. B. Vinter, *On the conditions under which the Euler Equation and the Maximum Principle hold*, Appl Math Optim (1984) 72-79.

[CV85] F. H. Clarke e R. B. Vinter, *Regularity properties of solutions to the basic problem in the calculus of variations*, Trans Amer Math Soc **289** (1985) 73-98.

[Dac89] B. Dacorogna, *Direct methods in the calculus of variations*, Springer (1989).

[Dac04] B. Dacorogna, *Introduction to the calculus of variations*, Imperial College Press (2004).

[DF] G. Dal Maso e H. Frankowska, *Autonomous integral functionals with discontinuous nonconvex integrands: lipschitz regularity of minimizers, DuBois-Reymond necessary conditions, and Hamilton-Jacobi equations*, Pré-publicação.

[DBD83] E. De Giorgi, G. Buttazzo e G. Dal Maso, *On the lower semicontinuity of certain integral functionals*, Atti Accad Naz Lincei Rend Cl Sci Fis Mat Natur **74** (1983) 274-282.

[Edw94] R.E. Edwards, *Functional Analysis: Theory and Applications*, Dover Publications (1994).

[EG00] L. C. Evans e R.F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, CRC Press (2000).

[Eva98] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, AMS(1998).

[ET99] I. Ekeland e R. Temam, *Convex analysis and variational problems*, SIAM (1999).

[FMO98] N. Fusco, P. Marcellini e A. Ornelas, *Existence of minimizers for some nonconvex one dimensional integrals*, Portugaliae Mathematica **55** (1998), 167-184.

[GH04] M. Giaquinta e S. Hildebrandt, *Calculus of variations I*, Springer (2004).

[GF00] I. Gelfand e S. Fomin, *Calculus of variations*, Dover Publications (2000).

[IR75] A. Ioffe e R. Rockafellar, *The Euler and Wierstrass conditions for nonsmooth variational problems*, Calc Var Part Diff Eq, Atti Mat Fis Univ Modena **24** (1975) 236-246.

[Iof77] A. Ioffe, *On lower semicontinuity of integral functionals*, SIAM J Control Optim **15** (1977) 521-538.

[KF99] A. Kolmogorov and S. Fomin, *Elements of the theory of functions and functional analysis*, Dover Publications (1999).

[Ma91] A. Machado, *Introdução à análise funcional*, Escolar Editora (1991).

[MOS02] C. Marcelli, E. Outkine, M. Sytchev, *Remarks on necessary conditions for minimizers of one-dimensional variational problems*, Nonlinear Analysis **48** (2002) 979-993.

[Mar97] C. Marcelli, *One-dimencional non-coercive problems of the calculus of variations*, Ann Mat Pura App (1997) 145-161.

[Mar98] C. Marcelli, *Non-coercive variational problems with constrains on the derivatives*, J. Convex Analysis **5** (1998) 1-17.

[Mar02] C. Marcelli, *Variational Problems with nonconvex, noncoercive, highly discontinuous integrands: characterisation and existence of minimizers*, Siam J. Control Opt. **40** (2002) 1473-1490.

[Ole] C. Olech, *Lectures on the integration of set-valued functions*, Pré-Publicação.

[Ole74] C. Olech, *Existence theory in optimal control problems - the underlying ideas*, Procedings, Control Theory and Topics in Functional Analysis, Trieste (1974).

[Orn] A. Ornelas, *Bimonotonicity for scalar minimizers of autonomus simple integrals*, Pré-publicação.

[Orn05] A. Ornelas, *Existence of scalar minimizers for simple convex integrals with autonomous Lagrangian measurable on the state variable*, Pré-publicação.

[Orn03] A. Ornelas, *Lipschitz regularity for scalar minimizers of autonomos simple integrals*, Nonlinear Analysis **53** (2003) 441-451.

[RW98] T. Rockafellar e R. Wets, *Variational analysis*, Springer (1998).

[Roc70] T. Rockafellar , *Convex Analysis*, Princeton University Press (1970).

[Rud87] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, MacGraw-Hill (1987).

[Rud91] W. Rudin, *Functional Analysis*, MacGraw-Hill (1991).

[SV69] A. Serrin e D. Varberg, *A general chain rule for derivatives and the change of variables formula for the Lebesgue integral*, Amer Math Monthly **76** (1969) 514-520.

[Sim80] R. Simon, *Functional Analysis*, Academic Press (1980).

[SW01] H.J. Sussman e J.C. Willems, *300 anos de controlo optimal: da braquistócrona ao princípio do máximo*, Boletim da SPM **45** (2001) 21-54.

[Vin00] R. Vinter, *Optimal Control*, Birkhäuser (2000).

[VZ97] R. Vinter e H. Zheng, *The extended Euler-Lagrange condition for nonconvex variational problems*, Siam J Control Optim **35** (1997) 56-77.

[Yeh06] J. Yeh, *Lectures on real analysis*, World Scientific (2006).

[Yos71] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer (1971).

[You00] L. Young, *Lectures on the calculus of variations and optimal control theory*, AMS (2000).

[Zie89] W.P. Ziemer, *Weakly differentiable functions*, Springer (1989).