

**UNIVERSIDADE DE ÉVORA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**



Dimensões Fractais e Dimensão de Correlação

Daniela Teresa Quaresma Santos Brandão

MESTRADO EM MATEMÁTICA E APLICAÇÕES

Dissertação orientada pelo
Professor Doutor Luís Manuel Ferreira da Silva

2008

**UNIVERSIDADE DE ÉVORA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**



Dimensões Fractais e Dimensão de Correlação

Daniela Teresa Quaresma Santos Brandão



MESTRADO EM MATEMÁTICA E APLICAÇÕES

168 034

Dissertação orientada pelo
Professor Doutor Luís Manuel Ferreira da Silva

2008

Dedico este trabalho ao meu marido.

Agradecimentos

Ao meu orientador, Luís Silva, pela orientação, dedicação e paciência que dispensou ao longo deste percurso. Obrigada, também, pelas sugestões preciosas que me dispensou no decorrer deste trabalho.

Ao meu marido, que me acompanhou de perto, dia-a-dia, nesta caminhada, e que testemunhou todos os momentos, não só de alegria e entusiasmo mas também de angústia, pela tolerância e ânimo que permitiu a finalização deste trabalho. O seu amor ampara a concretização dos meus sonhos e projectos.

À minha amiga Elsa Lopes, pela amizade e disposição de sempre me auxiliar e nortear nos momentos difíceis que surgiram. Também, porque fez deste percurso, um período de crescimento, discussões, trocas de conhecimento e lazer.

Aos meus pais, que me ensinaram a paixão pela descoberta da Matemática e me apoiaram em todas as etapas da minha vida.

Aos meus irmãos, que sempre me encorajaram e se interessaram pelo andamento do meu trabalho.

Aos amigos que fiz e/ou que se fizeram presentes nesta caminhada e que, de alguma forma, transformaram esta etapa da minha vida bem menos conturbada através da sua presença divertida.

A todos aqueles que, mesmo sem saberem, me ajudaram, através da transmissão de conhecimentos por livros, sites, conferências, aulas,... e tanto me permitiram esclarecer dúvidas e compreender melhor alguns conteúdos indispensáveis à elaboração deste trabalho.

*«...E também o mundo,
Com tudo aquilo que contém,
Com tudo aquilo que nele se desdobra
E afinal é a mesma coisa variada em cópias iguais.»*

Fernando Pessoa - Poesias de Álvaro de Campos

RESUMO:

O objectivo deste trabalho é o estudo da dimensão fractal, nomeadamente a dimensão de Hausdorff, dimensão de capacidade e dimensão de correlação, relacionando-as e efectuando o cálculo em alguns exemplos.

Sempre que se considere indispensável, são apresentadas noções introdutórias para uma melhor compreensão dos conceitos analisados. O Capítulo 2 é dedicado ao estudo da dimensão de Hausdorff, introduzindo, previamente, uma noção de medida de Hausdorff. No Capítulo 3 analisamos a dimensão de capacidade, suas propriedades e inconvenientes, relacionando, no final, esta dimensão com a dimensão de Hausdorff.

O Capítulo 4 estuda técnicas para calcular dimensões. São estudados subconjuntos de medida finita, sistemas de funções iteradas, conjuntos auto-semelhantes e auto-afins e dimensões de gráficos.

O Capítulo 5 é dedicado à dimensão de correlação. Estuda o expoente de correlação v introduzido por Grassberger e Procaccia. São analisadas funções de dimensão 1 e no plano. Terminamos com o estudo de séries temporais de variável única.

PALAVRAS-CHAVE:

Geometria fractal, dimensão fractal, dimensão de Hausdorff, dimensão de capacidade, dimensão de correlação.

Fractals dimensions and correlation dimension

ABSTRACT:

The aim of this work is the study of the fractal dimension, namely the Hausdorff dimension, the box-counting dimension and the correlation dimension, relating and computing them in some examples.

Everytime it is necessary we introduce the basic concepts to a better understanding of the concepts analysed in this work. Chapter 2 is dedicated to the study of the Hausdorff dimension, introducing first the notion of Hausdorff measure. Chapter 3 is concerned with the box-counting dimension, its properties and problems. Then we relate this dimension with Hausdorff dimension studied in Chapter 2.

Chapter 4 is dedicated to the techniques for calculating dimensions. We study subsets of finite measure, iterated function schemes, self-similar and self-affine sets and dimensions of graphs.

Finally, in Chapter 5 we present the correlation dimension. We study the correlation exponent ν , introduced by Grassberger and Procaccia. We finish this Chapter with a study of single-variable time series.

KEY-WORDS:

Fractal geometry, fractal dimension, Hausdorff dimension, box-counting dimension, correlation dimension

Índice

1	Introdução	1
1.1	As minhas motivações	1
1.2	Geometria fractal	2
1.3	A estrutura da tese	11
2	Dimensão de Hausdorff	13
2.1	Noções introdutórias de teoria de medida	13
2.2	Medida e dimensão de Hausdorff	18
2.2.1	Medida de Hausdorff	19
2.2.2	Dimensão de Hausdorff	22
3	Dimensão de capacidade	29
3.1	Dimensão de capacidade	30
3.2	Relação entre dimensão de Hausdorff e dimensão de capacidade	36
4	Exemplos de técnicas para calcular dimensões	45
4.1	Métodos básicos	46
4.2	Subconjuntos de medida finita	58
4.3	Sistemas de funções iteradas	60
4.4	Dimensões de conjuntos auto-semelhantes	65
4.5	Conjuntos auto-afins	72
4.6	Dimensões de gráficos	78

5	Dimensão de correlação	87
5.1	Dimensão de correlação	87
5.2	Funções de dimensão 1	89
5.3	Funções no plano	91
5.4	Relação entre v e \dim_H	92
5.5	Séries temporais de variável única	94
6	Conclusão	97

Capítulo 1

Introdução

1.1 As minhas motivações

Ao longo do meu percurso escolar sempre tive um gosto especial pela disciplina de Matemática. Desde que comecei a pensar num futuro profissional, esta disciplina sempre fez parte das minhas expectativas e dos meus interesses. A relação da Matemática com a realidade e a utilização das novas tecnologias sempre foram motivações para o meu estudo.

Foi na licenciatura que ouvi falar pela primeira vez sobre fractais e desde logo me suscitou interesse e me incitou a aproveitar outras oportunidades que foram surgindo para aprofundar este assunto. Comecei por notar a forma como o estudo de um só fractal pode conectar uma vasta lista de conceitos matemáticos e como a sua representação gráfica no computador pode tornar esse objecto de estudo muito interessante e apelativo. Depois, de forma mais gradual, fui-me dando conta da enorme aplicabilidade destes objectos geométricos ao estudo de elementos e fenómenos naturais o que torna, portanto, perfeitamente evidente a ligação da Matemática com o real.

Mais tarde, já como docente de Matemática, ingressei no Mestrado em Matemática e Aplicações e frequentei a disciplina Sistemas Dinâmicos onde, de entre outros, o tema

dos fractais foi explorado e me interessei pelo tema da dimensão fractal, que é onde se concentra o trabalho desta dissertação.

1.2 Geometria fractal

As formas dos objectos no mundo são geralmente pensadas em termos de figuras geométricas clássicas (círculos, triângulos, quadrados, esferas, cubos,...). Mas nada no Mundo tem a perfeição dessas figuras (e poucas são as que a parecem ter). Os seres humanos apreciam bastante essas formas e é das suas mãos que geralmente surgem objectos que as representam (mas apenas aproximadamente, mesmo que isso não seja visível a olho nu). É a mente humana que aproxima as formas dos objectos por figuras geométricas clássicas.

Mas se assim é, qual a verdadeira forma das coisas no mundo? Terá a Matemática (como única lente correcta para a observação do mundo) explicações e descrições para a forma como as coisas realmente se apresentam (e menos como "nós" gostaríamos de as ver)?

O mundo é um poço de surpresas mas o ser humano tem conseguido permanentemente alargar a sua consciência, a sua cultura e o seu conhecimento de forma a compreender mais e mais a infinita complexidade do Universo no qual nasceu e no qual foi moldado (uma complexidade que se espelha no próprio cérebro humano que a procura entender).

Muitos matemáticos têm desenvolvido conceitos matemáticos geométricos que vão mais além da geometria tradicional. Benoit B. Mandelbrot, com o seu trabalho criativo e monumental, estudou a geometria fractal, um conceito introduzido por si próprio. Deste estudo podem surgir várias questões. O que é um fractal? O que é a dimensão fractal? Como se pode encontrar a dimensão de um fractal?

O ponto fulcral deste trabalho é fornecer um tratamento matemático de fractais e suas dimensões, podendo responder a estas questões.

O Conjunto de Cantor de razão $\frac{1}{3}$, é um dos fractais mais conhecidos, de fácil construção que mostra diversas características dos fractais típicos. Consideramos o intervalo unitário $[0, 1]$, que designamos por E_0 . Prosseguimos dividindo este segmento em três partes iguais, removendo a parte central. Seja E_1 o conjunto obtido pela eliminação do centro de E_0 , tal que E_1 consiste em dois intervalos $[0, \frac{1}{3}]$ e $[\frac{2}{3}, 1]$. Dividem-se novamente cada um destes intervalos em três partes iguais removendo a parte central, obtendo E_2 . Assim, E_2 consiste em quatro intervalos $[0, \frac{1}{9}]$, $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$ e $[\frac{8}{9}, 1]$. Continuamos este processo com E_k obtido pela remoção do centro de cada intervalo de E_{k-1} . Assim, E_k consiste em 2^k intervalos de comprimento 3^{-k} . O Conjunto de Cantor F é a intersecção $\bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$. Num primeiro olhar, durante a construção, parecerá que não restou nada do intervalo $[0, 1]$. De facto, F é um conjunto infinito e incontável de pontos. Veja-se a Figura 1.1.

O Conjunto de Cantor de razão $\frac{1}{3}$ apresenta diversas características encontradas em muitos outros fractais:

i) F é auto-semelhante. Os intervalos $[0, \frac{1}{3}]$ e $[\frac{2}{3}, 1]$ de E_1 são geometricamente semelhantes a F , reduzido a um factor $\frac{1}{3}$. Novamente, cada um dos intervalos de E_2 é semelhante a F mas reduzido a um factor $\frac{1}{9}$, ... O Conjunto de Cantor contém cópias de si próprio em diversas escalas diferentes;

ii) O conjunto F tem uma "estrutura fina", isto é, contém detalhes em escalas arbitrariamente menores. Quanto mais ampliarmos a representação do Conjunto de Cantor, maior passa a ser o buraco visível aos olhos;

iii) Embora F tenha uma complicada e minuciosa estrutura, a sua definição é muito

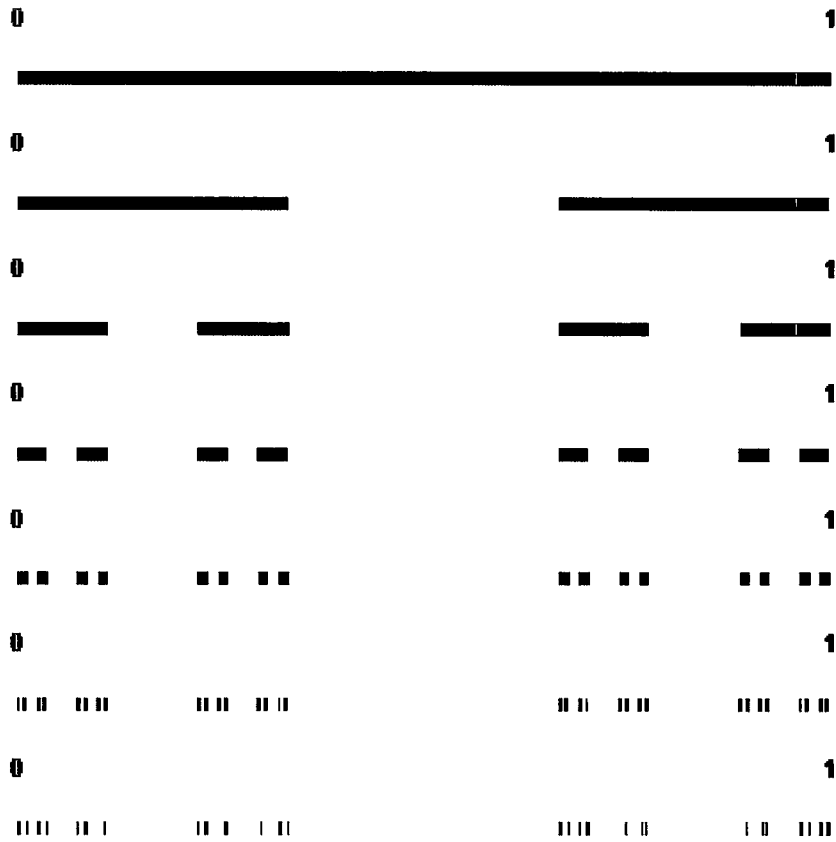


Figura 1.1: Construção do conjunto de Cantor F de razão $\frac{1}{3}$.

fácil de compreender;

iv) F é obtido por um processo recursivo. A construção consiste na remoção repetida do intervalo central. Os passos sucessivos fornecem-nos aproximações E_k do conjunto F ;

v) A geometria de F não é facilmente descrita em termos clássicos: não é o lugar dos pontos que satisfazem alguma condição geométrica simples, nem o conjunto das soluções de uma equação simples;

vi) É difícil descrever o lugar geométrico de F - perto de cada um dos pontos, está um

largo número de outros pontos, separados por aberturas de diversos comprimentos;

vii) Embora F seja um conjunto infinito não numerável, o seu tamanho não é quantificado por uma medida usual como o comprimento - por qualquer definição razoável, F tem comprimento zero.

A Curva de Von Koch é também um fractal bastante conhecido. Seja E_0 o segmento unitário no intervalo $[0, 1]$. O conjunto E_1 consiste em quatro segmentos que se obtêm dividindo o segmento inicial em três partes iguais e removendo-se a parte central de E_0 , substituindo-a por outros dois lados de um triângulo equilátero baseado no segmento removido. Construímos E_2 aplicando o mesmo procedimento a cada um dos segmentos de E_1 . Assim, E_k obtém-se substituindo o centro de cada segmento de E_{k-1} pelos outros dois lados do triângulo equilátero, como se pode ver na Figura 1.2.

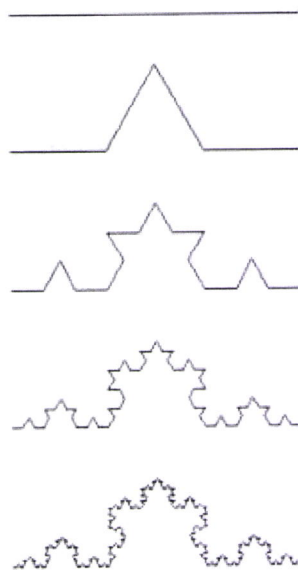


Figura 1.2: Processo iterativo da construção da Curva de Von Koch F .

A Curva de Von Koch tem muitas características semelhantes às do Conjunto de Cantor. Este fractal é composto por quatro segmentos, cada um semelhante ao todo, mas reduzidos por um factor $\frac{1}{3}$. É razoável chamar-lhe uma curva, mas é demasiado irregular para ter tangentes no sentido clássico. E_k tem comprimento $(\frac{4}{3})^k$. Fazendo k tender para o infinito, concluímos que F tem comprimento infinito. Por outro lado, F ocupa área *zero* no plano. O seu tamanho não é quantificado por uma medida usual como o comprimento ou a área.

Muitos outros conjuntos podem ser construídos usando procedimentos recursivos, como por exemplo a Pirâmide de Sierpinski, como pode ser observado na Figura 1.3.

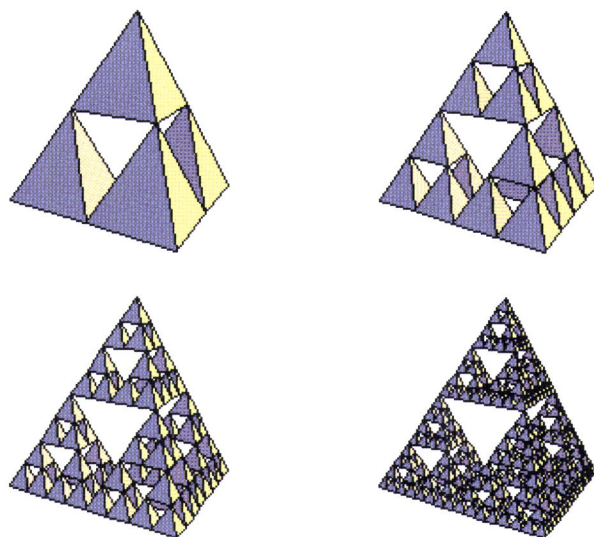


Figura 1.3: Construção da Pirâmide de Sierpinski.

Existem, também, muitos outros tipos de construções, como por exemplo a estrutura complicada mas de uma beleza extraordinária do Conjunto de Julia, que pode ser visto

na Figura 1.4, que se origina a partir de uma função quadrática $f(z) = z^2 + c$ para uma constante c apropriada. Este conjunto não é estritamente auto-semelhante no sentido do Conjunto de Cantor ou da Curva de Von Koch, mas é "quase auto-semelhante", uma vez que pequenas porções arbitrárias do conjunto ampliadas e distorcidas fazem-se coincidir com grande parte do conjunto.

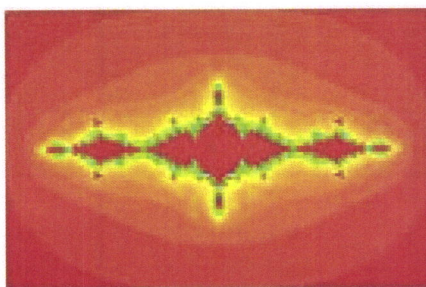


Figura 1.4: Conjunto de Julia.

Estes são alguns exemplos de fractais, palavra inventada por Mandelbrot para descrever objectos demasiado irregulares para caber na geometria tradicional. Propriedades como as enunciadas para o Conjunto de Cantor são características de fractais. Métodos e cálculos da geometria clássica são impróprios para estudar fractais.

A geometria fractal adapta-se bem à representação de objectos naturais (Veja-se o exemplo demonstrado na Figura 1.5). Ao contrário dos objectos criados pelo Homem que são caracterizados por possuírem linhas e ângulos rectos, círculos perfeitos, etc, os objectos naturais estão repletos de irregularidades, assimetrias e "imperfeições", factos estes, que a geometria fractal tanto tem em conta. Utiliza algoritmos e fórmulas iterativas, estando, desta forma, intimamente ligada à utilização de computadores.

A ferramenta principal da geometria fractal é a dimensão fractal. Um conjunto de

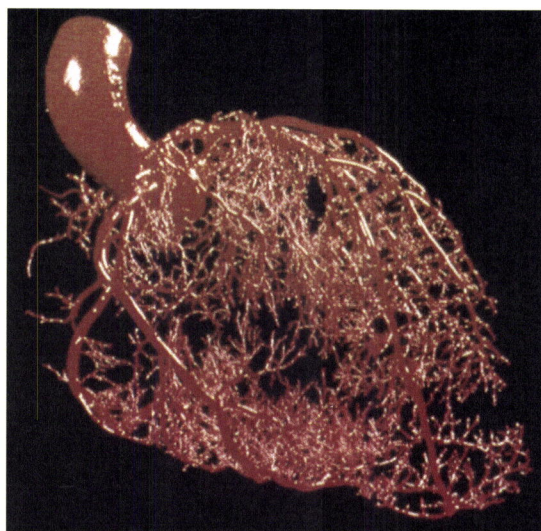


Figura 1.5: Modelo do sistema arterial do coração. O coração está repleto de redes fractais: as coronárias, as artérias e as veias, as fibras que ligam as válvulas à parede do coração, os músculos cardíacos e o sistema His-Purkinje (que é constituído pelas fibras através das quais viajam os impulsos eléctricos que fazem contrair os ventrículos). (Imagem retirada de <http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo2/modulo4/topico6.php>.)

pontos que formam uma linha no espaço Euclideano tem dimensão topológica $D_T = 1$. Similarmemente, um conjunto de pontos que formam um plano tem dimensão topológica $D_T = 2$. Finalmente, uma bola ou esfera tem dimensão topológica $D_T = 3$, (veja-se a Figura 1.6. No entanto, o Conjunto de Cantor ou a Curva de Von Koch não podem, como já foi referido acima, ter o seu tamanho quantificado por estes valores. Para resolver este problema temos o conceito de dimensão fractal, que assume valores fraccionários em vez de apenas números inteiros. Por exemplo, a construção do Conjunto de Cantor gera um fractal com dimensão D entre $0 < D < 1$ e a Curva de Von Koch dimensão $1 < D < 2$.

Desde os primórdios, a curiosidade e a inteligência humana levaram-nos a procurar padrões naquilo que era aparentemente aleatório. Assim se foi construindo o conhecimento

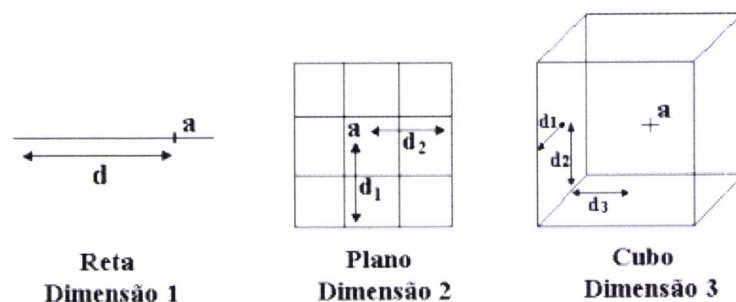


Figura 1.6: Ilustração do conceito de dimensão do Espaço Euclidiano \mathbb{R}^n , onde uma recta possui dimensão 1, um plano dimensão 2 e um cubo dimensão 3. (Imagem retirada de <http://www.inf.ufsc.br/~visao/>)

científico, descortinando a ordem que se esconde por detrás dos fenómenos naturais. A Teoria do Caos, ao contrário do que o nome possa sugerir, vem no seguimento dessa busca de um padrão em todo o comportamento irregular.

Imaginemos um saco de berlindes. Se o despejarmos no chão, os berlindes vão espalhar-se e é praticamente impossível prever a posição final de cada um, embora possamos ter uma ideia da área que irão ocupar. Repetindo a experiência, nunca conseguiremos que estes voltem a posicionar-se da mesma forma, mesmo que tenhamos uma grande preocupação em repetir as condições iniciais do despejo. Isto sucede porque não é possível ter em conta tudo o que pode influenciar a experiência: a posição do saco em relação ao chão, a distribuição dos berlindes dentro do saco, as pequenas irregularidades de cada berlinde e do chão, o movimento do despejo, a velocidade do vento (se houver), etc.; o que não significa que o resultado não respeite leis físicas exactas.

Daqui vem a noção de elevada sensibilidade às condições iniciais, introduzida por Poincaré, que está relacionada com a existência de inúmeros equilíbrios instáveis e com a consequente complexidade de um sistema.

Um dos sistemas mais complexos que se conhece é o clima. A sua imprevisibilidade só começou a ser verdadeiramente entendida quando Edward Lorenz observou um fenómeno extraordinário. Lorenz estava a trabalhar num modelo informático de previsão meteorológica, baseado em doze equações diferenciais, na demanda histórica de vislumbrar a ordem nas alterações climáticas. Naquele momento, analisava uma sequência num longo período de tempo, após introduzir os parâmetros iniciais. Ao repetir a sequência, deparou-se com um resultado dramaticamente diferente. Reparou então que, da segunda vez, tinha arredondado um dos números introduzidos. Uma diferença da ordem dos décimos de milésimo nos valores iniciais, acabava de se revelar catastrófica no período de tempo estudado!

Lorenz conseguiu ainda reduzir o modelo meteorológico a apenas três equações diferenciais. Quando o computador representou graficamente o novo modelo, revelou-se um peculiar tipo de ordem. A curva desenhada era uma dupla espiral no espaço: não tinha um comportamento cíclico, visto que nunca passava duas vezes no mesmo ponto, mas estava restringida a um determinado volume. A essa figura chamou-se Atractor de Lorenz, que pode ser vista na Figura 1.7.

Lorenz tinha descoberto um sistema caótico, de onde ficou célebre o conceito de Efeito Borboleta. Ilustrado com a analogia: "O bater das minúsculas asas de uma borboleta no Brasil pode desencadear semanas depois um violento tornado no Texas". Inspirado pela extrema sensibilidade às condições iniciais de um sistema tão complexo como o clima.

A Teoria do Caos estuda sistemas dinâmicos não-lineares ou, de uma forma mais simples, sistemas determinísticos cuja elevada sensibilidade às condições iniciais origina resultados aparentemente aleatórios. E a "linguagem do caos" é a própria geometria

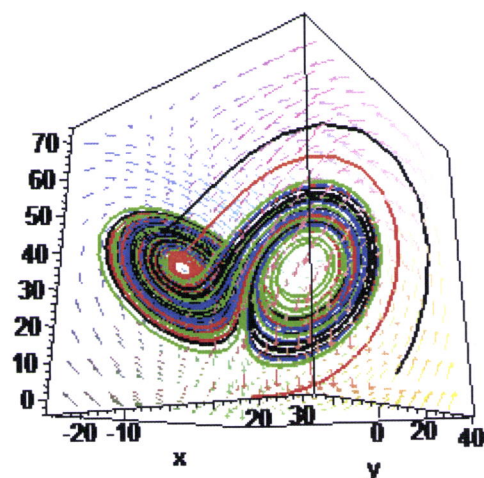


Figura 1.7: Atrator de Lorenz.

fractal: só esta permite a irregularidade infinitesimal e só esta nos dá a noção de que uma perturbação numa escala microscópica pode estar associada a uma perturbação de enormes proporções, através das ideias de escala e padrão; enfim, só esta permite descrever o Universo, que é bastante mais rico do que a Geometria de Euclides pode conceber.

1.3 A estrutura da tese

Este trabalho está estruturado em 6 Capítulos. O Capítulo 1 refere-se à Introdução e o último, Capítulo 6, à Conclusão. No Capítulo 2 é apresentada uma definição de dimensão fractal, a dimensão de Hausdorff, tendo por base um estudo da teoria de medida. São mostrados alguns exemplos, onde se efectua os cálculos para determinar a dimensão de Hausdorff.

O Capítulo 3 versa sobre o estudo da dimensão de capacidade, outra definição de

dimensão fractal e o estudo das suas propriedades, vantagens e inconvenientes do seu uso. Seguidamente, será feita a comparação entre estas duas definições de dimensão: dimensão de Hausdorff e dimensão de capacidade. Finalmente apresentam-se alguns exemplos e cálculos da dimensão de capacidade.

O Capítulo 4, intitulado exemplos de técnicas para calcular dimensões, apresenta outras formas de calcular dimensões. São analisados subconjuntos de medida finita, sistemas de funções iteradas, dimensões de conjuntos auto-semelhantes, conjuntos auto-afins e dimensões de gráficos.

No Capítulo 5 é apresentada outra definição de dimensão, a dimensão de correlação, menos conhecida mas de grande interesse, pois pode ser aplicada ao estudo de séries temporais. É estudada em funções de dimensão 1 e no plano. É, também, apresentada uma relação entre a dimensão de Hausdorff e a dimensão de correlação. Termina com o estudo de séries temporais de variável única.

Os documentos que fundamentam a maior parte do conteúdo deste trabalho são os seguintes: *-Fractal Geometry- Mathematical Foundations and Applications* de Keneth Falconer [8]; *-Dynamical Systems with Applications using MAPLE* de Stephen Lynch [20]; *-Essential MATLAB- for Engineers and Scientists* de Brian Hahn e Daniel T. Valentine [16]; e *-Measuring the Strangeness of Strange Attractors* de Peter Grassberger e Itamar Procaccia [15].

Dada a diversidade de notação dos diferentes documentos consultados, foi necessário proceder a escolhas e ajustes de modo a torná-la uniforme em toda a dissertação.

Ao longo de todo este trabalho serão apresentados exemplos sempre que se considerar oportuno.

Capítulo 2

Dimensão de Hausdorff

A dimensão fractal é uma ferramenta essencial para o estudo dos objectos fractais. Ela representa o grau de ocupação destes no espaço, estando relacionada com o seu grau de irregularidade. Definimos, então, como sendo um número que caracteriza a maneira como a distância entre dois pontos aumenta à medida que a escala diminui. A dimensão estudada neste Capítulo é a dimensão de Hausdorff, talvez a definição mais conhecida e utilizada para a estimação da dimensão de um fractal, pois pode ser entendida como uma extensão da definição clássica de dimensão topológica.

Para definir dimensão de Hausdorff é necessária a definição de medida de Hausdorff, pelo que antes é necessário definir medida. Assim, neste Capítulo, far-se-ão primeiro essas definições, com a devida apresentação dos conceitos básicos necessários para tal e só depois será apresentada a definição de dimensão de Hausdorff. Finalmente, serão apresentados alguns exemplos onde se aplica o cálculo da dimensão.

2.1 Noções introdutórias de teoria de medida

Uma medida é uma forma de atribuir uma grandeza numérica a conjuntos, de modo que se um conjunto é decomposto num número finito, ou numerável, de peças, então o tamanho

do todo é a soma dos tamanhos das peças.

Chamamos a μ uma medida em \mathbb{R}^n se μ associa um número não-negativo, possivelmente ∞ , a cada subconjunto de \mathbb{R}^n tal que:

- (a) $\mu(\emptyset) = 0$;
- (b) $\mu(A) \leq \mu(B)$ se $A \subset B$;
- (c) Se A_1, A_2, \dots é uma sequência numerável (ou finita) de conjuntos, então

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

com igualdade,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

se A_i é uma sequência de conjuntos Borelianos disjuntos. O conjunto dos Borelianos é a mais pequena sigma-álgebra que contém os conjuntos abertos, ou seja, os Borelianos são os conjuntos que se podem escrever através de uniões contáveis e complementares de conjuntos abertos. Os conjuntos abertos, os conjuntos fechados e os conjuntos numeráveis são Borelianos.

Chamamos a $\mu(A)$ a medida do conjunto A .

A condição (a) diz-nos que o conjunto vazio tem medida zero.

A condição (b) diz-nos que o conjunto maior tem medida maior.

A condição (c) diz-nos que, se um conjunto é uma união de um número numerável de peças (que se podem sobrepôr), então a soma das medidas das peças é maior ou igual à medida do todo. Se um conjunto é decomponível num número numerável de conjuntos

Borelianos disjuntos então a medida total das peças é igual à medida do todo.

Se $A \supset B$ então A pode ser expressa como uma união disjunta, $A = B \cup (A \setminus B)$, assim, concluímos imediatamente a partir de $\mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ que, se A e B são conjuntos Borelianos, temos

$$\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B).$$

Analogamente, se $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ é uma sequência crescente de conjuntos Borelianos então

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i) = \mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right).$$

Para ver isto, note-se que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \dots$, com esta união disjunta, logo

$$\begin{aligned} \mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) &= \mu(A_1) + \sum_{i=1}^{\infty} (\mu(A_{i+1}) - \mu(A_i)) \\ &= \mu(A_1) + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k (\mu(A_{i+1}) - \mu(A_i)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k). \end{aligned}$$

Mais geralmente, segue que se, para $\delta > 0$, A_δ são conjuntos Borelianos crescentes conforme δ decresce, isto é $A_{\delta'} \subset A_\delta$, para $0 < \delta < \delta'$, então

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mu(A_\delta) = \mu \left(\bigcup_{\delta > 0} A_\delta \right).$$

O suporte de uma medida é o conjunto no qual esta se concentra. Formalmente, o *suporte* de μ é o menor conjunto fechado X tal que $\mu(\mathbb{R}^n \setminus X) = 0$. O suporte de uma

medida é sempre fechado e x está no suporte de μ se e só se $\mu(B_r(x)) > 0$ para qualquer bola de raio r , centrada em x . Dizemos que μ é uma medida de probabilidade em A , se $\mu(A) = 1$.

Uma medida num subconjunto limitado de \mathbb{R}^n para o qual $0 < \mu(\mathbb{R}^n) < \infty$ pode ser chamada uma *distribuição de massa*, e consideramos $\mu(A)$ a massa do conjunto A .

No contexto deste trabalho, as medidas mais importantes são as medidas de Hausdorff s -dimensionais em subconjuntos de \mathbb{R}^n , onde $0 \leq s \leq n$. Estas medidas são generalizações da medida Lebesgue para dimensões que não são necessariamente inteiras.

Exemplo 2.1.1 Medida de Lebesgue em \mathbb{R}^n

Se $A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i\}$ é um paralelepípedo em \mathbb{R}^n , o volume n -dimensional de A é dado por

$$\text{vol}^n(A) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n).$$

(vol^1 é o comprimento; vol^2 é a área; vol^3 é o usual volume 3-dimensional.) A medida de Lebesgue n -dimensional L^n pode ser interpretada como a extensão do volume n -dimensional para uma grande classe de conjuntos. Obtemos a medida de Lebesgue em \mathbb{R}^n definindo

$$L^n(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}^n(A_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as coberturas de A por paralelepípedos A_i . Temos que $L^n(A) = \text{vol}^n(A)$ se A é um paralelepípedo ou qualquer conjunto para o qual o volume pode ser determinado pelas regras de medição usuais. \square

Dizemos que uma propriedade é válida para quase todos os x , ou quase por toda a parte (com respeito a uma medida μ) se o conjunto para o qual a propriedade falha, tem medida μ nula.

Às vezes, é necessário integrar funções com respeito a medidas. Uma grande classe de funções, incluindo as funções contínuas, satisfaz a seguinte condição: para $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida num subconjunto Boreliano D de \mathbb{R}^n , o conjunto $f^{-1}(-\infty, a] = \{x \in D : f(x) \leq a\}$ é um conjunto Boreliano para todos os números reais a . Estas funções podem ser integradas.

Para definir integração, primeiro supomos que $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função simples, ou seja, que toma um conjunto finito de valores a_1, \dots, a_k . Definimos o integral com respeito à medida μ duma função simples não-negativa f como

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^k a_i \mu\{x : f(x) = a_i\}.$$

O integral de funções mais gerais é definido usando aproximações através de funções simples. Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função não-negativa, definimos o seu integral como

$$\int f d\mu = \sup\{\int g d\mu : g \text{ é simples}, 0 \leq g \leq f\}.$$

Para completar a definição, se f tomar valores positivos e negativos, temos

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\} \quad e \quad f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

de forma que $f = f_+ - f_-$, e definimos

$$\int f d\mu = \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu$$

desde que $\int f_+ d\mu$ e $\int f_- d\mu$ sejam ambos finitos.

Todas as propriedades usuais são válidas para estes integrais, por exemplo

$$\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu \text{ e } \int \lambda f d\mu = \lambda \int f d\mu$$

se λ é um escalar. Temos, também, o teorema da convergência monótona, ou seja, se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é uma sequência crescente de funções não-negativas convergindo para f , então

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k d\mu = \int f d\mu.$$

Se A é um subconjunto Boreliano de D , definimos a integração sobre o conjunto A , por

$$\int_A f d\mu = \int f \chi_A d\mu$$

onde $\chi_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é a "função característica", tal que $\chi_A(x) = 1$ se x está em A e $\chi_A(x) = 0$ caso contrário.

Note-se que, se $f(x) \geq 0$ e $\int f d\mu = 0$, então $f(x) = 0$ para μ -quase todo o x .

2.2 Medida e dimensão de Hausdorff

Existe uma grande variedade de "dimensões fractais". A dimensão de Hausdorff tem vantagem de ser definida para qualquer conjunto e é matematicamente conveniente, pois como é baseada em medidas é relativamente fácil de calcular ou estimar.

Depois de definida a medida de Hausdorff, será definida a dimensão de Hausdorff.

2.2.1 Medida de Hausdorff

Se U é algum subconjunto não-vazio do espaço Euclidiano n -dimensional, \mathbb{R}^n , o diâmetro de U é definido como $|U| = \sup \{|x - y| : x, y \in U\}$, isto é, a maior distância entre qualquer par de pontos em U . Se $\{U_i\}$ é uma coleção numerável (ou finita) de conjuntos de diâmetro no máximo δ que cobre F , isto é $F \subset \cup_{i=1}^{\infty} U_i$ com $0 < |U_i| \leq \delta$ para cada $i \in I$, dizemos que $\{U_i\}$ é uma δ -cobertura de F .

Supondo que F é um subconjunto de \mathbb{R}^n e s é um número não negativo, para qualquer $\delta > 0$ definimos

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ é uma } \delta\text{-cobertura de } F \right\}. \quad (2.1)$$

Assim olhamos para todas as coberturas de F por conjuntos de diâmetro no máximo δ e procuramos minimizar a soma das s -ésimas potências dos diâmetros. Quando δ diminui, a classe das coberturas possíveis de F é reduzida. Então, o ínfimo $\mathcal{H}_\delta^s(F)$ aumenta, e então aproxima-se um limite quando $\delta \rightarrow 0$ e escrevemos

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F). \quad (2.2)$$

Este limite existe para qualquer subconjunto F de \mathbb{R}^n , embora os valores limites possam ser (e usualmente são) 0 ou ∞ . Chamamos a $\mathcal{H}^s(F)$ a medida de Hausdorff s -dimensional de F .

Em particular, $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$, se E está contido em F então $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$, e se $\{F_i\}$ é alguma coleção numerável de conjuntos Borelianos disjuntos, então

$$\mathcal{H}^s \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_i).$$

A medida de Hausdorff generaliza a familiar ideia de comprimento, área, volume, etc. Pode ser demonstrado que, para subconjuntos de \mathbb{R}^n , a medida de Hausdorff n -dimensional é, a menos do produto por uma constante, a medida de Lebesgue n -dimensional, isto é, o usual volume n -dimensional. Mais precisamente, se F é um subconjunto Boreliano de \mathbb{R}^n ,

$$\mathcal{H}^n(F) = c_n \text{vol}^n(F)$$

onde a constante $c_n = 2^n (\frac{1}{2}n)! / \pi^{\frac{1}{2}n}$ é o volume de uma bola n -dimensional de diâmetro 1. Analogamente, para subconjuntos de \mathbb{R}^n de dimensão inferior, temos que $\mathcal{H}^0(F)$ é o número de pontos em F se F fôr um conjunto finito; $\mathcal{H}^1(F)$ dá-nos o comprimento duma curva suave F ; $\mathcal{H}^2(F) = (4/\pi) \times \text{área}(F)$ se F é uma superfície suave; $\mathcal{H}^3(F) = (6/\pi) \times \text{vol}(F)$; e $\mathcal{H}^m(F) = c_m \times \text{vol}^m(F)$ se F é uma subvariedade suave m -dimensional de \mathbb{R}^n (isto é, uma superfície m -dimensional no sentido clássico).

Existem propriedades de escala para comprimentos, áreas e volumes. Numa ampliação por um factor λ , o comprimento de uma curva é multiplicado por λ , a área de uma região plana é multiplicada por λ^2 e o volume de um objecto 3-dimensional é multiplicado por λ^3 . Tais propriedades são fundamentais para a teoria dos fractais.

Propriedade de escala

Se $F \subset \mathbb{R}^n$ e $\lambda > 0$ então

$$\mathcal{H}^s(\lambda F) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F)$$

onde $\lambda F = \{\lambda x : x \in F\}$, isto é, o conjunto F é alterado por um factor λ .

Demonstração:

Se $\{U_i\}$ é uma δ -cobertura de F então $\{\lambda U_i\}$ é uma $\lambda\delta$ -cobertura de λF . Daqui $\mathcal{H}_{\lambda\delta}^s(\lambda F) \leq \sum |\lambda U_i|^s = \lambda^s \sum |U_i|^s$ logo, como isto se passa para qualquer δ -cobertura $\{U_i\}$ de F , obtemos $\mathcal{H}_{\lambda\delta}^s(\lambda F) \leq \lambda^s \mathcal{H}_\delta^s(F)$. Fazendo $\delta \rightarrow 0$ obtemos $\mathcal{H}^s(\lambda F) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s(F)$. Substituindo λ por $\frac{1}{\lambda}$ e F por λF dá-nos a desigualdade oposta requerida. ■

Proposição 2.2.1 *Seja $F \subset \mathbb{R}^n$ e $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha \quad (x, y \in F)$$

para constantes $c > 0$ e $\alpha > 0$. Então para cada s

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}^s(F).$$

Demonstração:

Se $\{U_i\}$ é uma δ -cobertura de F , então, visto que $|f(F \cap U_i)| \leq c|U_i|^\alpha$, segue-se que $\{f(F \cap U_i)\}$ é uma ε -cobertura de $f(F)$, onde $\varepsilon = c\delta^\alpha$. Assim $\sum_i |f(F \cap U_i)|^{\frac{s}{\alpha}} \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \sum_i |U_i|^s$, dá $\mathcal{H}_\varepsilon^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}_\delta^s(F)$. Como $\delta \rightarrow 0$, então $\varepsilon \rightarrow 0$. ■

A condição $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha$ para todos os $x, y \in F$ é conhecida como uma *condição de Hölder de expoente α* ; tal condição implica que f é contínua. Particularmente importante é o caso $\alpha = 1$, isto é

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y| \quad (x, y \in F)$$

onde f é chamada uma função Lipschitz, e

$$\mathcal{H}^s(f(F)) \leq c^s \mathcal{H}^s(F). \quad (2.3)$$

Qualquer função diferenciável com derivada limitada é necessariamente Lipschitz, como uma consequência do teorema do valor médio. Se f é uma isometria, isto é $|f(x) - f(y)| = |x - y|$, então $\mathcal{H}^s(f(F)) = \mathcal{H}^s(F)$. Em particular, as medidas de Hausdorff são invariantes por translações (isto é $\mathcal{H}^s(F + z) = \mathcal{H}^s(F)$, onde $F + z = \{x + z : x \in F\}$), e invariantes por rotações.

2.2.2 Dimensão de Hausdorff

Retomando a definição (2.1) é claro que para qualquer conjunto F e qualquer $\delta < 1$, $\mathcal{H}_\delta^s(F)$ é não-crescente com s , então por (2.2), $\mathcal{H}^s(F)$ é também não-crescente. De facto, é verdade que, se $t > s$ e $\{U_i\}$ é uma δ -cobertura de F temos

$$\sum_i |U_i|^t \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s$$

então, tomando o ínfimo, obtemos $\mathcal{H}_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(F)$. Fazendo $\delta \rightarrow 0$ vemos que se $\mathcal{H}^s(F) < \infty$ então $\mathcal{H}^t(F) = 0$ para $t > s$. Assim o gráfico de $\mathcal{H}^s(F)$ em função de s mostra que existe um valor crítico de s em que $\mathcal{H}^s(F)$ "salta" de ∞ para 0, veja-se a Figura 2.1. Este valor crítico é chamado de dimensão de Hausdorff de F , e escreve-se $\dim_H F$.

Formalmente

$$\dim_H F = \inf \{s : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup \{s : \mathcal{H}^s(F) = \infty\}$$

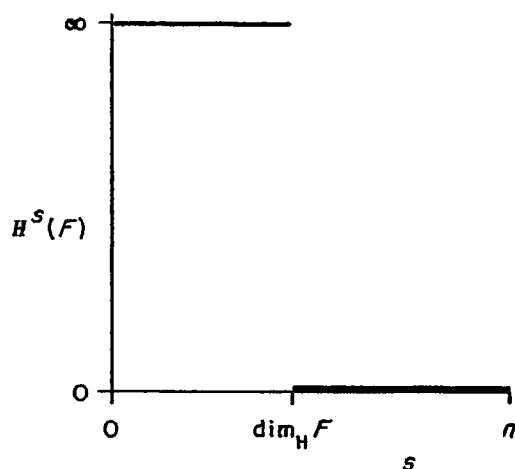


Figura 2.1: Gráfico de $\mathcal{H}^s(F)$ em função de s para um conjunto F .

ou seja,

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{se } s < \dim_H F \\ 0 & \text{se } s > \dim_H F \end{cases}$$

Se $s = \dim_H F$, então $\mathcal{H}^s(F)$ pode ser zero ou infinito, ou pode satisfazer

$$0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty.$$

Um conjunto Boreliano satisfazendo esta última condição é chamado um s -conjunto.

Seja F um disco plano de raio 1 em \mathbb{R}^3 . Das propriedades sobre comprimento, área e volume, temos $\mathcal{H}^1(F) = \text{comprimento}(F) = \infty$, $0 < \mathcal{H}^2(F) = (4/\pi) \times \text{área}(F) = 4 < \infty$ e $\mathcal{H}^3(F) = (6/\pi) \times \text{vol}(F) = 0$. Assim $\dim_H F = 2$, com $\mathcal{H}^s(F) = \infty$ se $s < 2$ e $\mathcal{H}^s(F) = 0$ se $s > 2$.

A dimensão de Hausdorff satisfaz as seguintes propriedades.

Conjuntos abertos: Se $F \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, então $\dim_H F = n$, desde que F contenha uma bola n -dimensional de volume positivo.

Conjuntos suaves: Se F é uma subvariedade suave m -dimensional de \mathbb{R}^n então $\dim_H F = m$. Em particular, curvas suaves têm dimensão 1 e superfícies suaves têm dimensão 2. Essencialmente, isto pode deduzir-se da relação entre medidas de Hausdorff e medidas de Lebesgue.

Monotonia: Se $E \subset F$ então $\dim_H E \leq \dim_H F$. Isto é imediato pela propriedade de medida em que $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$ para cada s .

Estabilidade numerável: Se F_1, F_2, \dots é uma seqüência de conjuntos (numerável) então $\dim_H \cup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_{1 \leq i < \infty} \{\dim_H F_i\}$. Certamente, $\dim_H \cup_{i=1}^{\infty} F_i \geq \dim_H F_j$ para cada j pela propriedade da monotonia. Por outro lado, se $s > \dim_H F_i$ para todo i , então $\mathcal{H}^s(F_i) = 0$, logo $\mathcal{H}^s(\cup_{i=1}^{\infty} F_i) = 0$, dando a desigualdade oposta.

Conjuntos numeráveis: Se F é numerável então $\dim_H F = 0$. Se F_i é um ponto singular, $\mathcal{H}^0(F_i) = 1$ e $\dim_H F_i = 0$, então pela estabilidade numerável $\dim_H \cup_{i=1}^{\infty} F_i = 0$.

Proposição 2.2.2 *Sejam $F \subset \mathbb{R}^n$ e $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função que satisfaz a condição de Hölder,*

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha \quad (x, y \in F).$$

Então $\dim_H f(F) \leq (1/\alpha) \dim_H F$.

Demonstração:

Se $s > \dim_H F$ então, pela Proposição 2.2.1, na página 21, $\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(F) = 0$ implicando que $\dim_H f(F) \leq s/\alpha$ para todo $s > \dim_H F$. ■

Corolário 2.2.1 (a) Se $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma transformação Lipschitz então $\dim_H f(F) \leq \dim_H F$.

(b) Se $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma transformação bi-Lipschitz, isto é, tal que

$$c_1 |x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2 |x - y| \quad (x, y \in F)$$

onde $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$, então, $\dim_H f(F) = \dim_H F$.

Demonstração:

A parte (a) segue pela Proposição 2.2.2 tomando $\alpha = 1$. Aplicando isto a $f^{-1} : f(F) \rightarrow F$ dá-nos a outra desigualdade requerida por (b). ■

Este corolário revela uma propriedade fundamental da dimensão de Hausdorff: a dimensão de Hausdorff é invariante segundo transformações bi-Lipschitz.

Proposição 2.2.3 Um conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ com $\dim_H F < 1$ é totalmente desconexo.

Demonstração:

Sejam x e y pontos distintos de F . Define-se uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ por $f(z) = |z - x|$. Como f não aumenta distâncias, isto é $|f(z) - f(w)| \leq |z - w|$, temos pela alínea (a) do Corolário 2.2.1 que $\dim_H f(F) \leq \dim_H F < 1$. Assim $f(F)$ é um subconjunto de \mathbb{R} com \mathcal{H}^1 -medida ou comprimento zero, e então tem um complementar denso. Escolhendo r tal que $r \notin f(F)$ e $0 < r < f(y)$ segue que

$$F = \{z \in F : |z - x| < r\} \cup \{z \in F : |z - x| > r\}.$$



Assim F está contido em dois conjuntos abertos disjuntos com x num conjunto e y no outro, ou seja x e y permanecem em diferentes componentes conexas de F . ■

Cálculo da dimensão de Hausdorff

Podemos, então, ver como calcular a dimensão de Hausdorff em dois fractais simples: a Poeira de Cantor e o Conjunto de Cantor

Exemplo 2.2.1 *Seja F a Poeira de Cantor construída a partir do quadrado unitário. (A cada passo da construção os quadrados são divididos em 16 quadrados com uma quarta parte do comprimento do lado, de forma que o mesmo padrão de quatro quadrados é mantido, tal como mostra a Figura 2.2.) Então $1 \leq \mathcal{H}^1(F) \leq \sqrt{2}$, deste modo $\dim_H F = 1$.*

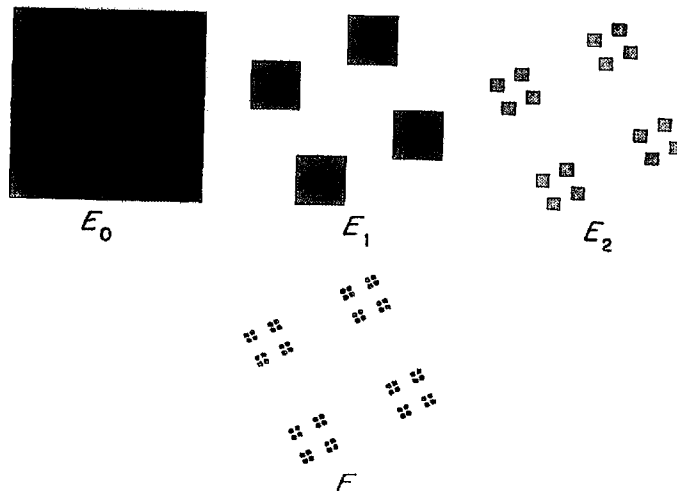


Figura 2.2: Construção da Poeira de Cantor ($\dim_H F = 1$).

Cálculo: Tomando a cobertura de F por 4^k quadrados de lado 4^{-k} (isto é, de diâmetro $\delta = 4^{-k}\sqrt{2}$) em E_k , no k -ésimo passo de construção, obtemos uma estimativa $\mathcal{H}_\delta^1(F) \leq 4^k 4^{-k}\sqrt{2}$ para o ínfimo em (2.1). Como $k \rightarrow \infty$ então $\delta \rightarrow 0$ dando $\mathcal{H}^1(F) \leq \sqrt{2}$.

Proj representa a projecção ortogonal no eixo xx . A projecção ortogonal não aumenta distâncias, isto é $|\text{proj } x - \text{proj } y| \leq |x - y|$ se $x, y \in \mathbb{R}^2$, *proj* é uma função Lipschitz. Em virtude da construção de F , a projecção ou "sombra" de F no eixo xx , $\text{proj } F$, está no intervalo $[0, 1]$. Usando (2.3)

$$1 = \text{comprimento } [0, 1] = \mathcal{H}^1([0, 1]) = \mathcal{H}^1(\text{proj } F) \leq \mathcal{H}^1(F).$$

Usar a projecção ortogonal para minimizar a medida de Hausdorff é um truque que só funciona em circunstâncias especiais e não é a base de um método mais geral. Normalmente conseguir um mínimo dá muito mais trabalho do que neste exemplo. \square

Exemplo 2.2.2 *Seja F o Conjunto de Cantor de razão $\frac{1}{3}$. (O seu processo de construção já foi explicado e pode ser visto na Figura 1.1 da página 4.) Se $s = \log 2 / \log 3 = 0.6309\dots$ então $\dim_H F = s$ e $\frac{1}{2} \leq \mathcal{H}^s(F) \leq 1$.*

Cálculo Heurístico: O Conjunto de Cantor F divide-se na parte esquerda $F_E = F \cap [0, \frac{1}{3}]$ e na parte direita $F_D = F \cap [\frac{2}{3}, 1]$. Claramente ambas as partes são geometricamente semelhantes a F mas reduzidas pela razão $\frac{1}{3}$, e $F = F_E \cup F_D$ com essa união disjunta. Assim para qualquer s

$$\mathcal{H}^s(F) = \mathcal{H}^s(F_E) + \mathcal{H}^s(F_D) = \frac{1}{3}^s \mathcal{H}^s(F) + \frac{1}{3}^s \mathcal{H}^s(F)$$

pela *Propriedade de Escala* da medida de Hausdorff. Assumindo que no valor crítico $s = \dim_H F$ temos $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ podemos dividir pela $\mathcal{H}^s(F)$ obtendo $1 = 2 \left(\frac{1}{3}\right)^s$ ou $s = \log 2 / \log 3$.

Cálculo Rigoroso: Chamamos aos intervalos de comprimento 3^{-k} ($k = 0, 1, 2, \dots$) que constituem os conjuntos E_k na construção de F intervalos elementares. A cobertura $\{U_i\}$ de F consistindo em 2^k intervalos de E_k de comprimento 3^{-k} dá-nos que $\mathcal{H}_{3^{-k}}^s(F) \leq \sum |U_i|^s = 2^k 3^{-ks} = 1$ se $s = \log 2 / \log 3$. Fazendo $k \rightarrow \infty$ dá-nos $\mathcal{H}^s(F) \leq 1$.

Para provar que $\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{1}{2}$ mostramos que

$$\sum |U_i|^s \geq \frac{1}{2} = 3^{-s} \quad (2.4)$$

para qualquer cobertura $\{U_i\}$ de F . Claramente, é suficiente supor que $\{U_i\}$ são intervalos, e aumentando ligeiramente e usando a compacidade de F , precisamos apenas verificar (2.4) se $\{U_i\}$ é uma colecção finita de subintervalos fechados de $[0, 1]$. Para cada U_i , seja k o inteiro tal que

$$3^{-(k+1)} \leq |U_i| < 3^{-k}. \quad (2.5)$$

Então U_i pode intersectar no máximo um intervalo elementar de E_k desde que a separação entre esses intervalos elementares é pelo menos 3^{-k} . Se $j \geq k$ então, pela construção, U_i intersecta no máximo $2^{j-k} = 2^j 3^{-sk} \leq 2^j 3^s |U_i|^s$ intervalos elementares de E_j , usando (2.5). Se escolhermos j suficientemente grande tal que $3^{-(j+1)} \leq |U_i|$ para todo U_i , então, como os $\{U_i\}$ intersectam todos os 2^j intervalos elementares de comprimento 3^{-j} , a contagem de intervalos dá $2^j \leq \sum_i 2^j 3^s |U_i|^s$ o que se reduz a (2.4). \square

Capítulo 3

Dimensão de capacidade

O que é fundamental para quase todas as definições de dimensão é a ideia de medida à escala δ : para cada δ , o conjunto é medido desprezando as irregularidades de tamanho inferior a δ , depois observam-se como os resultados dessas medições se comportam à medida que δ tende para zero.

A definição de dimensão estudada neste Capítulo é a dimensão de capacidade, uma das dimensões mais usadas e a sua popularidade deve-se essencialmente à facilidade com que se pode calcular e estimar empiricamente. Na literatura poderá aparecer com outras designações mas aqui utilizar-se-á a designação de dimensão de capacidade e representar-se-á por \dim_B , em conformidade com a bibliografia utilizada que é maioritariamente de língua inglesa e onde esta dimensão se designa por "*box-counting dimension*".

Neste Capítulo que se segue apresentar-se-á, então, a definição de dimensão de capacidade e será feita uma relação entre esta e a dimensão de Hausdorff (estudada no Capítulo anterior), mencionando as suas propriedades, vantagens e inconvenientes. Serão dados alguns exemplos para os quais calcularemos a sua dimensão de capacidade.

3.1 Dimensão de capacidade

Seja F um qualquer subconjunto não-vazio de \mathbb{R}^m e $N_\delta(F)$ o menor número de conjuntos de diâmetro no máximo δ que pode cobrir F . As dimensões de capacidade inferior e superior de F são, respectivamente, definidas como

$$\begin{aligned}\underline{\dim}_B F &= \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \\ \overline{\dim}_B F &= \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Se estes forem iguais referimos o valor comum como a dimensão de capacidade de F

$$\dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}.\tag{3.2}$$

Considerando a colecção de cubos na δ -rede coordenada de \mathbb{R}^n , isto é cubos da forma

$$[m_1\delta, (m_1 + 1)\delta] \times \dots \times [m_n\delta, (m_n + 1)\delta]$$

onde m_1, \dots, m_n são inteiros. (Relembrando que um "cubo" é um intervalo em \mathbb{R}^1 e um quadrado em \mathbb{R}^2 .) Seja $N'_\delta(F)$ o número de cubos da δ -rede que intersectam F . Estes, obviamente fornecem uma colecção de $N'_\delta(F)$ conjuntos de diâmetro $\delta\sqrt{n}$ que cobrem F , assim

$$N_{\delta\sqrt{n}}(F) \leq N'_\delta(F).$$

Se $\delta\sqrt{n} < 1$ então

$$\frac{\log N_{\delta\sqrt{n}}(F)}{-\log(\delta\sqrt{n})} \leq \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\sqrt{n} - \log\delta}$$

assim tomando limites quando $\delta \rightarrow 0$, obtemos

$$\underline{\dim}_B F \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta} \quad (3.3)$$

e

$$\overline{\dim}_B F \leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta}. \quad (3.4)$$

Por outro lado, qualquer conjunto de diâmetro no máximo δ está contido em 3^n cubos de lado δ (Veja-se a Figura 3.1).

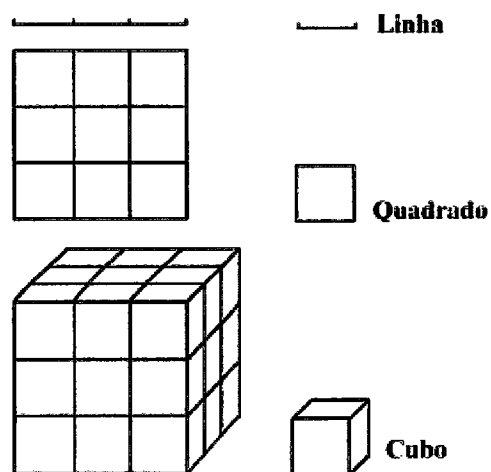


Figura 3.1: Ilustração da δ -rede em \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 .

Assim

$$N'_\delta(F) \leq 3^n N_\delta(F)$$

e tomando logaritmos obtemos as desigualdades opostas de (3.3) e (3.4). Para encontrar a dimensão de capacidade (3.1) e (3.2), podemos tomar $N_\delta(F)$ como sendo o número de cubos de lado δ que intersectam F .

Para encontrar a dimensão de capacidade de um conjunto plano F podemos desenhar uma rede de quadrados ou caixas de lado δ e contar o número $N_\delta(F)$ de caixas que intersectam o conjunto para vários δ pequenos (daqui o nome "contagem de caixas"). A dimensão é a taxa logarítmica com que $N_\delta(F)$ aumenta quando $\delta \rightarrow 0$, e pode ser estimada pelo gradiente do gráfico de $\log N_\delta(F)$ em função de $-\log \delta$.

O número de cubos de lado δ que intersectam um conjunto, é uma indicação de como um conjunto se dispersa, ou da sua irregularidade quando examinado numa escala δ . A dimensão reflete a rapidez com que as irregularidades se desenvolvem quando $\delta \rightarrow 0$.

Outra definição frequentemente usada de dimensão de capacidade é obtida tomando $N_\delta(F)$ em (3.1) e (3.2) como sendo o menor número de cubos arbitrários de lado δ que cobrem F . A equivalência desta definição segue como no caso da rede de cubos, notando que qualquer cubo de lado δ tem diâmetro $\delta\sqrt{n}$, e que qualquer conjunto de diâmetro no máximo δ está contido num cubo de lado δ .

Analogamente, obtemos exactamente os mesmos valores se em (3.1) e (3.2) tomarmos $N_\delta(F)$ como o menor número de bolas fechadas de raio δ que cobrem F .

Definição 3.1.1 *Definição Equivalente*

As dimensões de capacidade inferior e superior dum subconjunto F de \mathbb{R}^n são dadas

por

$$\begin{aligned}\underline{\dim}_B F &= \underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \\ \overline{\dim}_B F &= \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}\end{aligned}\tag{3.5}$$

e a dimensão de capacidade de F por

$$\dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}\tag{3.6}$$

(se estes limites existem), onde $N_\delta(F)$ é algum dos seguintes:

- (i) o menor número de bolas fechadas de raio δ que cobre F ;
- (ii) o menor número de cubos de lado δ que cobre F ;
- (iii) o número de δ -rede de cubos que intersectam F ;
- (iv) o menor número de conjuntos de diâmetro no máximo δ que cobre F ;
- (v) o maior número de bolas disjuntas de raio δ com centro em F .

Em (3.5) e (3.6), é suficiente considerar limites quando δ converge para 0 (zero) através de alguma sucessão decrescente δ_k tal que $\delta_{k+1} \geq c\delta_k$ para alguma constante $0 < c < 1$, em particular para $\delta_k = c^k$. Visto isto, note que se $\delta_{k+1} \leq \delta < \delta_k$, então

$$\frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log \delta_k} \leq \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log \delta_{k+1} + \log(\delta_{k+1}/\delta_k)} \leq \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log \delta_{k+1} + \log c}$$

e assim

$$\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_k}.$$

A desigualdade oposta é trivial; o caso dos limites inferiores pode ser desenvolvido da mesma forma.

Existe uma definição equivalente de dimensão de capacidade, com uma forma um pouco diferente, que vale a pena mencionar. Relembrando que o corpo δ -paralelo F_δ de F é

$$F_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| \leq \delta \text{ para algum } y \in F\}$$

isto é, o conjunto de pontos dentro da distância δ de F . Consideramos a taxa com que o volume n -dimensional de F_δ diminui quando $\delta \rightarrow 0$. Em \mathbb{R}^3 , se F é um ponto singular então F_δ é uma bola com $\text{vol}(F_\delta) = \frac{4}{3}\pi\delta^3$, se F é um segmento de comprimento l então F_δ é uma "espécie de salsicha" com $\text{vol}(F_\delta) \sim \pi l\delta^2$, e se F é um conjunto plano de área a então F_δ é essencialmente uma extensão de F com $\text{vol}(F_\delta) \sim 2a\delta$. Em cada caso, $\text{vol}(F_\delta) \sim c\delta^{3-s}$ onde o inteiro s é a dimensão de F , então o expoente de δ é indicativo da dimensão. O coeficiente c de δ^{3-s} , conhecido como o conteúdo de Minkowski de F , é uma medida do comprimento, área ou volume do conjunto quando apropriado.

Esta ideia é extensível às dimensões fraccionárias. Se F é um subconjunto de \mathbb{R}^n e, para algum s , $\text{vol}^n(F_\delta)/\delta^{n-s}$ tende para um limite finito positivo quando $\delta \rightarrow 0$, então faz sentido considerar F como s -dimensional. O valor limite é chamado conteúdo s -dimensional de F - um conceito de uso restrito, visto que não é necessariamente aditivo em subconjuntos disjuntos, isto é, não é uma medida. Ainda se este limite não existir, podemos ser capazes de extrair o expoente crítico de δ , que está relacionado com a dimensão de capacidade.

Proposição 3.1.1 *Se F é um subconjunto de \mathbb{R}^n , então*

$$\begin{aligned}\underline{\dim}_B F &= n - \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \text{vol}^n(F_\delta)}{\log \delta} \\ \overline{\dim}_B F &= n - \underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \text{vol}^n(F_\delta)}{\log \delta}\end{aligned}$$

onde F_δ é o corpo δ -paralelo a F .

Demonstração:

Se F pode ser coberto por $N_\delta(F)$ bolas de raio δ então F_δ pode ser coberto pelas bolas concêntricas de raio 2δ . Daqui

$$\text{vol}^n(F_\delta) \leq N_\delta(F) c_n (2\delta)^n$$

onde c_n é o volume da bola unitária em \mathbb{R}^n . Tomando logaritmos,

$$\frac{\log \text{vol}^n(F_\delta)}{-\log \delta} \leq \frac{\log 2^n c_n + n \log \delta + \log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

obtemos

$$\underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \text{vol}^n(F_\delta)}{-\log \delta} \leq -n + \underline{\dim}_B F \quad (3.7)$$

com uma desigualdade similar para limites superiores. Por outro lado, se existirem $N_\delta(F)$ bolas disjuntas de raio δ com centro em F , então

$$N_\delta(F) c_n (2\delta)^n \leq \text{vol}^n(F_\delta).$$

Tomando logaritmos obtemos a desigualdade oposta a (3.7) usando a Definição 3.1.1 descrita na página 32. ■

A dimensão de capacidade é às vezes referida como a dimensão de Minkowski.

3.2 Relação entre dimensão de Hausdorff e dimensão de capacidade

É importante entender a relação entre a dimensão de capacidade e a dimensão de Hausdorff. Se F pode ser coberto por $N_\delta(F)$ conjuntos de diâmetro δ , então, pela *Propriedade de Escala*, na página 20, no Capítulo 2,

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq N_\delta(F) \delta^s.$$

Se $1 < \mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F)$ então $\log N_\delta(F) + s \log \delta > 0$ se δ é suficientemente pequeno. Assim $s \leq \underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \log N_\delta(F) / (-\log \delta)$ portanto

$$\dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F$$

para qualquer $F \subset \mathbb{R}^n$. Em geral não obtemos aqui a igualdade. Embora a dimensão de Hausdorff e a dimensão de capacidade sejam iguais para muitos conjuntos "razoavelmente regulares", existem abundantes exemplos onde estas desigualdades são estritas.

Grosseiramente falando, (3.2) diz que $N_\delta(F) \simeq \delta^{-s}$ para δ pequeno, onde $s = \dim_B F$. Mais precisamente, diz que

$$N_\delta(F) \delta^s \rightarrow \infty \quad \text{se } s < \dim_B F$$

e

$$N_\delta(F) \delta^s \rightarrow 0 \quad \text{se } s > \dim_B F.$$

Mas

$$N_\delta(F) \delta^s = \inf \left\{ \sum_i \delta^s : \{U_i\} \text{ é uma } \delta\text{-cobertura (finita) de } F \right\},$$

o que ocorre na definição de medida de Hausdorff e dimensão de Hausdorff. Calculando a dimensão de Hausdorff, atribuímos diferentes pesos $|U_i|^s$ aos conjuntos de cobertura U_i , considerando que para as dimensões de capacidade usamos o mesmo valor δ^s para cada conjunto da cobertura. As dimensões de capacidade podem ser entendidas como indicando a eficiência com que um conjunto pode ser coberto por conjuntos pequenos de igual tamanho, enquanto a dimensão de Hausdorff envolve coberturas por conjuntos pequenos mas de tamanhos possivelmente muito variados.

Visto que a dimensão de capacidade é determinada através de coberturas por conjuntos de igual tamanho, tende a ser mais fácil de calcular do que a dimensão de Hausdorff. No entanto, tem algumas propriedades com consequências indesejáveis. Essas propriedades irão ser referidas neste trabalho um pouco mais à frente.

Exemplo 3.2.1 *Seja F o Conjunto de Cantor de razão $\frac{1}{3}$. (Veja-se a Figura (1.1), na página 4.) Então $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F = \log 2 / \log 3$.*

Cálculo: A cobertura óbvia por 2^k intervalos de E_k de comprimento 3^{-k} dá-nos que $N_\delta(F) \leq 2^k$ se $3^{-k} < \delta \leq 3^{-k+1}$. Por (3.1)

$$\overline{\dim}_B F = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k}{\log 3^{k-1}} = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Por outro lado, qualquer intervalo de comprimento δ com $3^{-k-1} \leq \delta < 3^{-k}$ intersecta no máximo um dos intervalos elementares de comprimento 3^{-k} usados na construção de F .

Existem 2^k intervalos tais que ao menos 2^k intervalos de comprimento δ são necessários para cobrir F . Daqui $N_\delta(F) \geq 2^k$, logo $\underline{\dim}_B F = \log 2 / \log 3$. \square

Assim, ao menos para o Conjunto de Cantor de razão $\frac{1}{3}$, $\dim_H F = \dim_B F$.

As seguintes **propriedades** elementares da dimensão de capacidade retratam as conhecidas para a dimensão de Hausdorff, e podem ser verificadas da mesma maneira.

- (i) Uma subvariedade suave m -dimensional de \mathbb{R}^n tem $\dim_B F = m$.
- (ii) $\underline{\dim}_B$ e $\overline{\dim}_B$ são monótonas.
- (iii) $\overline{\dim}_B$ é finitamente estável, isto é

$$\overline{\dim}_B (E \cup F) = \max \{ \overline{\dim}_B E, \overline{\dim}_B F \}$$

contudo $\underline{\dim}_B$ não é.

(iv) $\underline{\dim}_B$ e $\overline{\dim}_B$ são Lipschitz invariantes. Isto acontece porque se $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$ e F pode ser coberto por $N_\delta(F)$ conjuntos de diâmetro no máximo δ , então as $N_\delta(F)$ imagens desses conjuntos por f formam uma cobertura por conjuntos de diâmetro no máximo $c\delta$, assim $\dim_B f(F) \leq \dim_B F$. Similarmente, as dimensões de capacidade comportam-se como dimensões de Hausdorff sob transformações bi-Lipschitz e Hölder.

Vejam-se agora algumas desvantagens da dimensão de capacidade. A próxima proposição é, a princípio, apelativa, mas tem consequências indesejáveis.

Proposição 3.2.1 *Seja \overline{F} o fecho de F (isto é, o menor subconjunto fechado de \mathbb{R}^n que contém F). Então*

$$\underline{\dim}_B \overline{F} = \underline{\dim}_B F \quad e \quad \overline{\dim}_B \overline{F} = \overline{\dim}_B F.$$

Demonstração:

Seja B_1, \dots, B_k uma colecção finita de bolas fechadas de raio δ . Se o conjunto fechado $\cup_{i=1}^k B_i$ contém F , também contém \overline{F} . Consequentemente o menor número de bolas fechadas de raio δ que cobre F é suficiente para cobrir o conjunto maior \overline{F} , o resultado segue. ■

Uma consequência imediata é que se F é um subconjunto denso de uma região aberta de \mathbb{R}^n então $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F = n$.

Exemplo 3.2.2 $F = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ é um conjunto compacto com $\dim_B F = \frac{1}{2}$.

Cálculo: Se $|U| = \delta < \frac{1}{2}$ e k é o inteiro que satisfaz $1/(k-1)k > \delta \geq 1/k(k+1)$ então U pode cobrir no máximo um dos pontos $\{1, \frac{1}{2}, \dots, 1/k\}$. Assim pelo menos k conjuntos de diâmetro δ são necessários para cobrir F , então

$$\frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \geq \frac{\log k}{\log k(k+1)}.$$

Quando $\delta \rightarrow 0$ dá-nos $\underline{\dim}_B F \geq \frac{1}{2}$. Por outro lado, se $\frac{1}{2} > \delta > 0$, tomamos k tal que $1/(k-1)k > \delta \geq 1/k(k+1)$. Então $(k+1)$ intervalos de comprimento δ cobrem $[0, 1/k]$, deixando $k-1$ pontos de F que podem ser cobertos por outro $k-1$ intervalos. Assim

$$\frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \frac{\log(2k)}{\log k(k-1)}$$

obtendo

$$\overline{\dim}_B F \leq \frac{1}{2}.$$

À partida, não seria de esperar que este conjunto cujos pontos são todos isolados, excepto um, fosse um fractal; no entanto, ele tem dimensão de capacidade fraccionária. \square

Tal como são muito convenientes na prática, as dimensões de capacidade são também muito úteis na teoria. Se, como acontece regularmente, se puder demonstrar que um conjunto tem dimensão de capacidade igual à dimensão de Hausdorff, da relação entre essas duas definições podem surgir resultados profícuos.

O teorema seguinte simplifica o processo de cálculo da dimensão de capacidade porque permite que se substitua a variável contínua δ por uma variável discreta.

Teorema 3.2.1 *Seja $F \in \mathcal{H}(X)$, sendo (X, d) um espaço métrico. Seja $\delta_k = C.r^k$ para números reais $0 < r < 1$ e $C > 0$ e para $k \in \mathbb{N}$. Se $D = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_k}$ então, F tem dimensão de capacidade igual a D .*

Demonstração:

Considerem-se os números reais r e C e a sucessão $\{\delta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ como definidos no enunciado do Teorema.

Considere-se $\delta \leq r$ e seja $f(\delta) = \max\{\delta_k : \delta_k \leq \delta, k \in \mathbb{N}\}$. Então, $C.r^k = f(\delta) \leq \delta \leq \frac{f(\delta)}{r} = C.r^{k-1}$ (porque $0 < r < 1$) e, portanto,

$$N_{f(\delta)}(F) \geq N_{\delta}(F) \geq N_{\frac{f(\delta)}{r}}(F). \quad (3.8)$$

Para valores de δ pequenos tais que $f(\delta) \leq \delta \leq \frac{f(\delta)}{r} < 1$ vem $\frac{1}{f(\delta)} \geq \frac{1}{\delta} \geq \frac{r}{f(\delta)} > 1$. Como $\log x$ é uma função crescente e positiva para $x \geq 1$, vem que $\log\left(\frac{1}{f(\delta)}\right) \geq \log\left(\frac{1}{\delta}\right) \geq \log\left(\frac{r}{f(\delta)}\right)$ que é o mesmo que escrever

$$-\log f(\delta) \geq -\log \delta \geq -\log \left(\frac{f(\delta)}{r} \right). \quad (3.9)$$

De (3.8) e (3.9) vem

$$\frac{\log \left(N_{\frac{f(\delta)}{r}}(F) \right)}{-\log f(\delta)} \leq \frac{\log(N_\delta(F))}{-\log \delta} \leq \frac{\log(N_{f(\delta)}(F))}{-\log \left(\frac{f(\delta)}{r} \right)}. \quad (3.10)$$

Assumindo que $N_\delta(F) \rightarrow \infty$ à medida que $\delta \rightarrow 0$ (caso contrário, o Teorema é verdadeiro porque se terá $D = 0$) o segundo membro da segunda desigualdade em (3.10) verifica

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{\log N_{f(\delta)}(F)}{-\log \left(\frac{f(\delta)}{r} \right)} \right) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \left(\frac{\delta_k}{r} \right)} \right) = \\ &= \left[\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log r - \log \delta_k}{\log N_{\delta_k}(F)} \right]^{-1} = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_k}. \end{aligned}$$

O primeiro membro da primeira desigualdade em (3.10) verifica

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{\log \left(N_{\frac{f(\delta)}{r}}(F) \right)}{-\log f(\delta)} \right) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\log N_{\delta_{k-1}}(F)}{-\log \delta_k} \right) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\delta_{k-1}}(F)}{-\log r - \log \delta_{k-1}} = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\delta_{k-1}}(F)}{-\log \delta_{k-1}} = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_k}. \end{aligned}$$

Portanto, à medida que $\delta \rightarrow 0$, ambos os extremos de (3.10) convergem para o valor

D indicado no enunciado do Teorema 3.2.1 de onde, o limite quando $\delta \rightarrow 0$ do termo intermédio de (3.10) também existe e tem o mesmo valor D . ■

Este último resultado permite que o cálculo da dimensão de capacidade se torne mais simples, sempre que seja possível determinar uma sucessão $\{\delta_k\}$ adequada.

Exemplo 3.2.3 *Seja F o Conjunto Poeira de Cantor apresentado no Exemplo 2.2.1, na página 26, no Capítulo 2. A sua dimensão de capacidade é igual a 1: $\dim_B F = 1$.*

Cálculo: Considere-se a sucessão $\delta_k = \frac{1}{4^k}$ com $k = 1, 2, 3, \dots$. Usando a alínea (ii) da Definição 3.1.1, na página 32, basta considerar que, para cada valor de δ_k os cubos pretendidos coincidem com os quadrados que constituem cada um dos conjuntos E_k correspondentes às várias etapas de construção do conjunto F . Para cada δ_k , tem-se $N_{\delta}(F) = 4^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Quando k tende para infinito, δ tende para zero e pelo Teorema 3.2.1 $\dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(4^k)}{-\log(4^{-k})} = 1$. □

Para este conjunto já tinha sido determinada a sua dimensão de Hausdorff, cujo valor também é 1 (Exemplo 2.2.1, na página 26, no Capítulo 2).

Exemplo 3.2.4 *Seja F o Triângulo de Sierpinski em \mathbb{R}^n cujo processo de construção se inicia com um triângulo equilátero e se remove repetidamente um triângulo equilátero invertido cujos vértices são os pontos médios de cada lado do triângulo inicial, como mostra a Figura 3.2. Então, $\dim_B F = \log 3 / \log 2$.*

Cálculo: Considere-se a sequência $\delta_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k$. Sendo $N_{\delta_k}(F)$ o número de quadrados de lado δ_k que cobre F , tem-se: $\delta_1 = \frac{1}{2}$ e $N_{\delta_1}(F) = 3$; $\delta_2 = \frac{1}{4}$ e $N_{\delta_2}(F) = 9$; $\delta_3 = \frac{1}{8}$ e $N_{\delta_3}(F) = 27$;... e, em geral, $N_{\delta_n}(F) = 3^n$; veja-se a Figura 3.3.

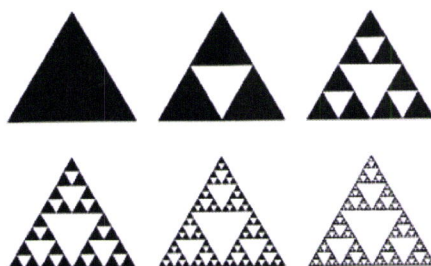


Figura 3.2: Ilustração do processo iterativo de construção do Triângulo de Sierpinski.

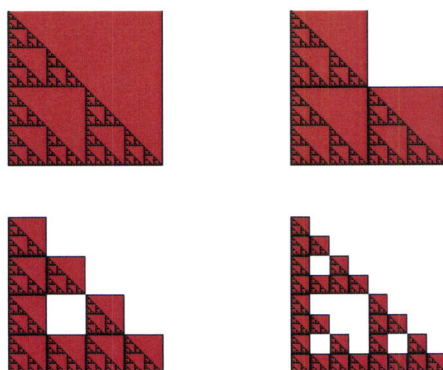


Figura 3.3: Recobrimento do Triângulo de Sierpinski por quadrados de lado $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{8}$.

Então, pela alínea (ii) da Definição 3.1.1, na página 32, e pelo Teorema 3.2.1, a dimensão de capacidade do Triângulo de Sierpinski é

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 3^k}{-\log \left(\frac{1}{2}\right)^k} = \frac{\log 3}{\log 2}. \quad \square$$

Capítulo 4

Exemplos de técnicas para calcular dimensões

Neste Capítulo serão introduzidas técnicas para calcular dimensões. Para muitos fractais, podemos obter estimativas superiores para a dimensão, usando coberturas naturais por conjuntos pequenos. Estudamos fractais gerados por sistemas de funções iteradas. Muitos fractais são constituídos de partes as quais são, de alguma maneira, semelhantes ao todo, esta propriedade denominada por auto-semelhança, para além de ser uma das características dos fractais, pode também ser usada para os definir. Estes porém, constituem apenas uma pequena parte dos fractais. Para esta definição introduzir-se-á previamente e brevemente, o conceito de contracção, de métrica e de métrica de Hausdorff.

Nas Secções seguintes são apresentados conjuntos auto-semelhantes e conjuntos auto-afins e dimensões de gráficos.

4.1 Métodos básicos

Para muitos fractais, podemos obter estimativas superiores para a dimensão, usando coberturas naturais por conjuntos pequenos.

Proposição 4.1.1 *Supondo que F pode ser coberto por n_k conjuntos de diâmetro no máximo δ_k , com $\delta_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Então*

$$\dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log n_k}{-\log \delta_k}$$

e, se $\delta_{k+1} \geq c\delta_k$ para algum $0 < c < 1$, então

$$\overline{\dim}_B F \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\log n_k}{-\log \delta_k}.$$

Além disso, se $n_k \delta_k^s$ permanece limitado quando $k \rightarrow \infty$, então $\mathcal{H}^s(F) < \infty$.

Demonstração:

As desigualdades para a dimensão de capacidade são imediatas a partir das definições. Para a última parte, $\mathcal{H}_{\delta_k}^s(F) \leq n_k \delta_k^s$, então $\mathcal{H}_{\delta_k}^s(F)$ tende para um limite finito $\mathcal{H}^s(F)$ quando $k \rightarrow \infty$. ■

Assim, no caso do Conjunto de Cantor de razão $\frac{1}{3}$ (veja-se a Figura 1.1, na página 4), a cobertura natural por 2^k intervalos de comprimento 3^{-k} dá $\dim_H F \leq \log 2 / \log 3$.

Para obter um limite superior é suficiente calcular somas da forma $\sum |U_i|^s$ para coberturas específicas $\{U_i\}$ de F , enquanto que para um limite inferior precisamos mostrar que $\sum |U_i|^s$ é maior que alguma constante positiva para todas as δ -coberturas de F . Claramente existe um número grande de tais coberturas disponível. Em particular, quando

trabalhamos com a dimensão de Hausdorff, em oposição à dimensão de capacidade, temos que ter atenção a coberturas onde alguns dos U_i são muito pequenos e outros têm um diâmetro relativamente grande - isto impede-nos de obter estimativas para $\sum |U_i|^s$ tais como a obtida para limites superiores.

Uma maneira de contornar estas dificuldades é mostrar que nenhum conjunto individual U pode cobrir demasiado de F , comparado com o seu tamanho medido como $|U|^s$. Então se $\{U_i\}$ cobre totalmente F a soma $\sum |U_i|^s$ não pode ser demasiadamente pequena. A maneira usual de fazer isto é concentrar uma distribuição de massa μ em F e comparar a massa $\mu(U)$ coberta por U com $|U|^s$ para cada U . (Relembrando que uma distribuição de massa em F é uma medida com suporte contido em F tal que $0 < \mu(F) < \infty$, como pode ser consultado na Secção 2.1. do Capítulo 2.)

Teorema 4.1.1 (*Princípio de Distribuição de Massa*)

Seja μ uma distribuição de massa em F e suponha que para algum s existem números $c > 0$ e $\delta > 0$ tais que

$$\mu(U) \leq c|U|^s \tag{4.1}$$

para todos os conjuntos U com $|U| \leq \delta$. Então $\mathcal{H}^s(F) \geq \mu(F)/c$ e

$$s \leq \dim_H F \leq \underline{\dim}_B \leq \overline{\dim}_B F.$$

Demonstração:

Se $\{U_i\}$ é alguma cobertura de F então

$$0 < \mu(F) = \mu\left(\bigcup_i U_i\right) \leq \sum_i \mu(U_i) \leq c \sum_i |U_i|^s. \quad (4.2)$$

Tomando o ínfimo, $\mathcal{H}_\delta^s(F) \geq \mu(F)/c$ se δ é suficientemente pequeno, então $\mathcal{H}^s(F) \geq \mu(F)/c$. ■

Note que a conclusão $\mathcal{H}^s(F) \geq \mu(F)/c$ continua verdadeira se μ é uma distribuição de massa em \mathbb{R}^n e F é algum subconjunto de \mathbb{R}^n .

O Teorema 4.1.1 dá rapidamente uma estimativa para a dimensão de Hausdorff do Conjunto de Cantor de razão $\frac{1}{3}$. Seja μ a distribuição de massa em F , tal que cada um dos 2^k intervalos elementares de comprimento 3^{-k} em E_k na construção de F , conduz a uma massa 2^{-k} . (Imaginamos que começamos com uma massa unitária em E_0 e dividimos repetidamente a massa em cada intervalo de E_k entre os dois subintervalos em E_{k+1} .) Seja U um conjunto com $|U| < 1$ e k o inteiro tal que $3^{-(k+1)} \leq |U| < 3^{-k}$. Então U pode intersectar no máximo um dos intervalos de E_k , daí

$$\mu(U) \leq 2^{-k} = \left(3^{-k}\right)^{\log 2 / \log 3} \leq (3|U|)^{\log 2 / \log 3}$$

e consequentemente $\mathcal{H}^{\log 2 / \log 3}(F) > 0$ pelo Teorema 4.1.1 dando $\dim_H F \geq \log 2 / \log 3$.

Exemplo 4.1.1 *Seja $F_1 = F \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ o produto cartesiano do Conjunto de Cantor de razão $\frac{1}{3}$, com o intervalo unitário. Então $\dim_B F_1 = \dim_H F_1 = 1 + \log 2 / \log 3 = s$, com $0 < \mathcal{H}^s(F_1) < \infty$.*

Cálculo: Para cada k , existe uma cobertura de F por 2^k intervalos de comprimento 3^{-k} . Uma coluna de 3^k quadrados de lado 3^{-k} (diâmetro $3^{-k}\sqrt{2}$) cobre uma parte de F_1 sobre

cada intervalo, portanto tomando todos juntos, F_1 pode ser coberto por $2^k 3^k$ quadrados de lado 3^{-k} . Assim $\mathcal{H}_{3^{-k}\sqrt{2}}^s(F_1) \leq 3^k 2^k (3^{-k}\sqrt{2})^s = 2^{s/2}$ portanto $\mathcal{H}^s(F_1) \leq 2^{s/2}$ e $\dim_H F_1 \leq \underline{\dim}_B F_1 \leq \overline{\dim}_B F_1 \leq s$.

Definimos uma distribuição de massa μ em F_1 tomando a distribuição natural de massa em F descrita em cima (cada intervalo elementar de F de lado 3^{-k} tem massa 2^{-k}) e "expandindo-a" uniformemente ao longo dos intervalos acima de F . Assim se U é um retângulo de altura h , com lados paralelos aos eixos coordenados sobre um intervalo elementar de F de lado 3^{-k} , então $\mu(U) = h2^{-k}$. Qualquer conjunto U está contido num quadrado de lado $|U|$ com lados paralelos aos eixos coordenados. Se $3^{-(k+1)} \leq |U| < 3^{-k}$ então U cobre, no máximo, um intervalo elementar de F de lado 3^{-k} , então

$$\mu(U) \leq |U| 2^{-k} \leq |U| 3^{-k \log 2 / \log 3} \leq |U| (3|U|)^{\log 2 / \log 3} \leq 3^{\log 2 / \log 3} |U|^s.$$

Pelo Teorema 4.1.1 $\mathcal{H}^s(F_1) > 0$. \square

Note que neste exemplo a dimensão do produto cartesiano de dois conjuntos é igual à soma das dimensões dos conjuntos.

A seguinte construção geral de um subconjunto de \mathbb{R} pode ser entendida como uma generalização da construção do Conjunto de Cantor. Seja $[0, 1] = E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \dots$ uma sequência decrescente de conjuntos, com cada E_k uma união de um número finito de intervalos fechados disjuntos (chamados intervalos elementares), com cada intervalo de E_k contendo ao menos dois intervalos de E_{k+1} , e o comprimento máximo de intervalos em E_k tendendo para 0 quando $k \rightarrow \infty$. Então o conjunto

$$F = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k \quad (4.3)$$

é um subconjunto totalmente desconexo de $[0, 1]$, que é geralmente um fractal.

Os limites superiores óbvios para a dimensão de F são obtidos considerando os intervalos de E_k como intervalos de cobertura, para cada k , mas, como usual, limites inferiores são difíceis de encontrar. Note que, nos exemplos seguintes, as estimativas superiores para $\dim_H F$ dependem do número e tamanho dos intervalos elementares, enquanto as estimativas inferiores dependem do seu espaçamento. Para estas serem iguais, os intervalos de E_{k+1} devem ser "distribuídos quase uniformemente" nos intervalos de E_k .

Exemplo 4.1.2 *Seja s um número estritamente entre 0 e 1. Assuma que os E_k na construção anterior têm a seguinte propriedade: para cada intervalo elementar I de E_k , os intervalos I_1, \dots, I_m ($m \geq 2$) de E_{k+1} contidos em I são de igual comprimento e com igual espaçamento, os comprimentos são dados por*

$$|I_i|^s = \frac{1}{m} |I|^s \quad (1 \leq i \leq m) \quad (4.4)$$

em que as extremidades dos lados esquerdos de I_1 e I coincidem, e as extremidades dos lados direitos de I_m e I coincidem. Então $\dim_H F = s$ e $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$. (Note que m pode ser diferente para diferentes intervalos I na construção, logo os intervalos de E_k podem ter comprimentos muito diferentes.)

Cálculo: Com I , I_i , como acima, temos

$$|I|^s = \sum_{i=1}^m |I_i|^s. \quad (4.5)$$

Aplicando isto indutivamente aos intervalos de E_k para sucessivos k , segue que, para cada k , $1 = \sum |I_i|^s$, onde a soma é sobre todos os intervalos em E_k . Os intervalos de E_k cobrem F ; visto que o comprimento máximo dos intervalos converge para 0 quando $k \rightarrow \infty$, temos $\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq 1$ para δ suficientemente pequeno, dando $\mathcal{H}^s(F) \leq 1$.

Agora distribuimos uma massa μ em F de tal maneira que $\mu(I) = |I|^s$ sempre que I é um intervalo elementar. Assim, começando com uma massa unitária em $[0, 1]$ dividimo-la igualmente entre cada intervalo de E_1 , a massa em cada um desses intervalos vai ser dividida igualmente entre cada subintervalo de E_2 , e assim sucessivamente. A equação (4.5) assegura que temos uma distribuição de massa em F com $\mu(I) = |I|^s$ para todos os intervalos elementares. Estimamos $\mu(U)$ para qualquer intervalo U com os extremos em F . Seja I o menor intervalo elementar que contém U ; suponhamos que I é um intervalo de E_k , e sejam I_1, \dots, I_m os intervalos de E_{k+1} contidos em I . Então U intersecta um número $j \geq 2$ de I_i , doutro modo U podia estar contido no menor intervalo elementar. O espaçamento entre consecutivos I_i é

$$\begin{aligned} (|I| - m |I_i|) / (m - 1) &= |I| (1 - m |I_i| / |I|) / (m - 1) \\ &= |I| \left(1 - m^{1-1/s}\right) / (m - 1) \\ &\geq c_s |I| / m \end{aligned}$$

usando (4.4), onde $c_s = (1 - 2^{1-1/s})$. Assim

$$|U| \geq \frac{j-1}{m} c_s |I| \geq \frac{j}{2m} c_s |I|.$$

Por (4.5)

$$\begin{aligned} \mu(U) &\leq j\mu(I_i) = j|I_i|^s = \frac{j}{m}|I|^s \\ &\leq 2^s c_s^{-s} \left(\frac{j}{m}\right)^{1-s} |U|^s \leq 2^s c_s^{-s} |U|^s. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Isto é verdade para qualquer intervalo U com os extremos em F , e assim para qualquer conjunto U (aplicando (4.6) ao menor intervalo contendo $U \cap F$). Pelo Teorema 4.1.1 $\mathcal{H}^s(F) > 0$. \square

Exemplo 4.1.3 Conjuntos de Cantor Uniformes

Seja $m \geq 2$ um inteiro e $0 < \lambda < 1/m$. Seja F um conjunto obtido pela construção em que cada intervalo elementar I é substituído por m subintervalos igualmente espaçados de comprimento $\lambda|I|$, os extremos de I coincidem com os extremos dos subintervalos extremos. Então $\dim_H F = \dim_B F = \log m / (-\log \lambda)$, e $0 < \mathcal{H}^{\log m / (-\log \lambda)}(F) < \infty$.

Cálculo: O conjunto F é obtido tomando m constante e $s = \log m / (-\log \lambda)$ no Exemplo (4.1.2). A equação (4.4) passa a ser $(\lambda|I|)^s = (1/m)|I|^s$, o que é satisfeito identicamente, assim $\dim_H F = s$. Para a dimensão de capacidade, note que F é coberto por m^k intervalos elementares de comprimento λ^{-k} em E_k para cada k , conduzindo a $\overline{\dim}_B F \leq \log m / (-\log \lambda)$. \square

Exemplo 4.1.4 *Suponhamos que na construção geral (4.3) cada intervalo de E_{k-1} contém ao menos m_k intervalos de E_k ($k = 1, 2, \dots$) que são separados pelo espaço de ao menos ε_k , onde $0 < \varepsilon_{k+1} < \varepsilon_k$ para cada k . Então*

$$\dim_H F \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(m_1 \dots m_{k-1})}{-\log(m_k \varepsilon_k)}. \quad (4.7)$$

Cálculo: Podemos assumir que cada conjunto E_{k-1} contém exactamente m_k intervalos de E_k ; se não, podemos retirar os intervalos em excesso obtendo conjuntos E_k e F mais pequenos para os quais é assim. Podemos definir uma distribuição de massa μ em F associando uma massa de $(m_1 \dots m_k)^{-1}$ a cada $m_1 \dots m_k$ intervalos elementares de E_k .

Seja U um intervalo com $0 < |U| < \varepsilon_1$; estimamos $\mu(U)$. Seja k o inteiro tal que $\varepsilon_k \leq |U| < \varepsilon_{k-1}$. O número de intervalos de E_k que intersecta U é

(i) no máximo m_k visto que U intersecta no máximo um intervalo de E_{k-1}

(ii) no máximo $|U|/\varepsilon_k + 1 \leq 2|U|/\varepsilon_k$ visto que os intervalos de E_k têm espaços de ao menos ε_k entre eles. Cada intervalo de E_k suporta massas $(m_1 \dots m_k)^{-1}$ tais que

$$\begin{aligned} \mu(U) &\leq (m_1 \dots m_k)^{-1} \min\{2|U|/\varepsilon_k, m_k\} \\ &\leq (m_1 \dots m_k)^{-1} (2|U|/\varepsilon_k)^s m_k^{1-s} \end{aligned}$$

para algum $0 \leq s \leq 1$.

Daqui

$$\frac{\mu(U)}{|U|^s} \leq \frac{2^s}{(m_1 \dots m_{k-1}) m_k^s \varepsilon_k^s}$$

o que é limitado superiormente por uma constante desde que

$$s < \varliminf_{k \rightarrow \infty} \log(m_1 \dots m_{k-1}) / -\log(m_k \varepsilon_k).$$

O resultado segue pelo Teorema 4.1.1, na página 47. \square

Agora supomos que no Exemplo 4.1.4 os intervalos de E_k são todos de comprimento δ_k , e que cada intervalo de E_{k-1} contém exactamente m_k intervalos de E_k , que são "grosseiramente igualmente espaçados" no sentido em que $m_k \varepsilon_k \geq c \delta_{k-1}$, onde $c > 0$ é uma constante. Então (4.7) passa a ser

$$\dim_H F \geq \varliminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(m_1 \dots m_{k-1})}{-\log c - \log \delta_{k-1}} = \varliminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(m_1 \dots m_{k-1})}{-\log \delta_{k-1}}.$$

Mas E_{k-1} inclui $m_1 \dots m_{k-1}$ intervalos de comprimento δ_{k-1} , assim esta expressão é igual ao limite superior para $\dim_H F$ dado pela Proposição 4.1.1, na página 46. Assim na situação onde os intervalos são bem espaçados, obtemos uma igualdade em (4.7).

Exemplo 4.1.5 *Seja $0 < s < 1$ e n_1, n_2, \dots uma sequência de inteiros rapidamente crescente, digamos, tal que $n_{k+1} \geq \max\{n_k^k, 3n_k^{1/s}\}$ para cada k . Para cada k , $H_k \subset \mathbb{R}$ consiste em intervalos igualmente espaçados de comprimentos $n_k^{1/s}$ com os pontos médios de intervalos consecutivos à distância n_k^{-1} . Então $\dim_H F = \dim_B F = s$, onde $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} H_k$.*

Cálculo: Visto que $F \subset H_k$ para cada k , o conjunto $F \cap [0, 1]$ está contido no máximo em $n_k + 1$ intervalos de comprimento $n_k^{-1/s}$, assim a Proposição 4.1.1, na página 46, dá-nos $\overline{\dim}_B(F \cap [0, 1]) \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \log(n_k + 1) / -\log n_k^{-1/s} = s$. Similarmente, $\overline{\dim}_B(F \cap [n, n + 1]) \leq s$ para qualquer $n \in \mathbb{Z}$, portanto F , como uma união numerável de tais conjuntos, tem $\overline{\dim}_B F \leq s$.

Agora $E_0 = [0, 1]$ e, para $k \geq 1$, E_k consiste nos intervalos de H_k que estão completamente contidos em E_{k-1} . Então cada intervalo I de E_{k-1} contém ao menos $n_k |I| - 1 \geq n_k n_{k-1}^{-1/s} - 1 \geq 2$ intervalos de E_k , que são separados por espaços de ao menos $n_k^{-1} - n_k^{-1/s} \geq \frac{1}{2} n_k^{-1}$ se k é grande o suficiente. Usando o Exemplo 4.1.4, na página 53, e substituindo $n_k n_{k-1}^{-1/s} - 1$ por $n_k n_{k-1}^{-1/s}$ não afecta o limite,

$$\begin{aligned} \dim_H F &\geq \dim_H \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \left((n_1 \dots n_{k-2})^{1-1/s} n_{k-1} \right)}{-\log \left(n_k n_{k-1}^{-1/s} \frac{1}{2} n_k^{-1} \right)} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log (n_1 \dots n_{k-2})^{1-1/s} + \log n_{k-1}}{\log 2 + (\log n_{k-1}) / s}. \end{aligned}$$

Como n_k é rapidamente crescente, os termos em $\log n_{k-1}$ no numerador e denominador desta expressão são dominantes, logo $\dim_H F \geq s$, como requerido. \square

Embora o Teorema 4.1.1, na página 47, seja baseado numa ideia simples, vimos que pode ser muito útil para encontrar dimensões de Hausdorff e de capacidade. Vamos agora desenvolver algumas variações importantes deste método.

É necessário usar o seguinte lema para a demonstração da alínea b) da Proposição 4.1.2 que se irá seguir.

Lema 4.1.1 *Lema da cobertura*

Seja C uma família de bolas contidas em alguma região limitada de \mathbb{R}^n . Então existe uma subcoleção (finita ou numerável) disjunta $\{B_i\}$ tal que

$$\bigcup_{B \in C} B \subset \bigcup_i \tilde{B}_i \tag{4.8}$$

onde \tilde{B}_i é a bola fechada concêntrica com B_i e com raio quatro vezes o seu.

Demonstração:

Por simplicidade, faremos a demonstração no caso em que \mathcal{C} é uma família finita; a ideia básica é a mesma no caso geral. Escolhemos $\{B_i\}$ indutivamente. Seja B_1 uma bola em \mathcal{C} de raio máximo. Supomos que B_1, \dots, B_{k-1} tenha sido escolhido. Tomamos B_k como sendo a maior bola em \mathcal{C} (ou uma das maiores) que não intersecta B_1, \dots, B_{k-1} . O processo termina quando não existe mais nenhuma bola nessas condições. Claramente as bolas seleccionadas são disjuntas; devemos provar que (4.8) se verifica. Se $B \in \mathcal{C}$, então $B = B_i$ para algum i , ou B intersecta uma das B_i com $|B_i| \geq |B|$; se este não for o caso, então B pode ser escolhido em vez da primeira bola B_k com $|B_k| < |B|$. De qualquer maneira, $B \subset \tilde{B}_i$, então temos (4.8). (É fácil ver que o resultado permanece verdadeiro tomando \tilde{B}_i como a bola concêntrica com B_i e de $3 + \varepsilon$ vezes o raio, para algum $\varepsilon > 0$; se \mathcal{C} é finito podemos tomar $\varepsilon = 0$.) ■

Proposição 4.1.2 *Sejam μ uma distribuição de massa em \mathbb{R}^n , $F \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto Boreliano e $0 < c < \infty$ uma constante.*

(a) *Se $\overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \mu(B_r(x)) / r^s < c$ para todo $x \in F$ então $\mathcal{H}^s(F) \geq \mu(F) / c$*

(b) *Se $\overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \mu(B_r(x)) / r^s > c$ para todo $x \in F$ então $\mathcal{H}^s(F) \leq 2^s \mu(\mathbb{R}^n) / c$*

Demonstração:

(a) Para cada $\delta > 0$ seja

$$F_\delta = \{x \in F : \mu(B_r(x)) < (c - \varepsilon) r^s \text{ para todo } 0 < r \leq \delta \text{ para algum } \varepsilon > 0\}.$$

Seja $\{U_i\}$ uma δ -cobertura de F e logo também de F_δ . Para cada U_i contendo um ponto x de F_δ , a bola B com centro x e raio $|U_i|$ certamente contém U_i . Pela definição de F_δ

$$\mu(U_i) \leq \mu(B) < c|U_i|^s$$

logo

$$\mu(F_\delta) \leq \sum_i \{\mu(U_i) : U_i \text{ intersecta } F_\delta\} \leq c \sum_i |U_i|^s.$$

Logo $\{U_i\}$ é uma δ -cobertura de F , segue então que $\mu(F_\delta) \leq c\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq c\mathcal{H}^s(F)$. Mas F_δ aumenta para F quando δ diminui para 0, então $\mu(F) \leq c\mathcal{H}^s(F)$.

(b) Por simplicidade, provamos uma versão simples de (b) com 2^s substituído por 8^s , mas a ideia básica é similar. Primeiro supomos que F é limitado. Sejam $\delta > 0$ e \mathcal{C} uma colecção de bolas

$$\{B_r(x) : x \in F, 0 < r \leq \delta \text{ e } \mu(B_r(x)) > cr^s\}.$$

Então pela hipótese de (b) $F \subset \cup_{B \in \mathcal{C}} B$. Aplicando o *Lema de Cobertura* 4.1.1 para a colecção \mathcal{C} , existe uma sequência de bolas disjuntas $B_i \in \mathcal{C}$ tal que $\cup_{B \in \mathcal{C}} B \subset \cup_i \tilde{B}_i$, onde \tilde{B}_i é a bola concêntrica com B_i mas de quatro vezes o seu raio. Assim $\{\tilde{B}_i\}$ é uma 8δ -cobertura de F , então

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{8\delta}^s(F) &\leq \sum_i |\tilde{B}_i|^s \leq 4^s \sum_i |B_i|^s \\ &\leq 8^s c^{-1} \sum_i \mu(B_i) \leq 8^s c^{-1} \mu(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Fazendo $\delta \rightarrow 0$, temos $\mathcal{H}^s(F) \leq 8^s c^{-1} \mu(\mathbb{R}^n) < \infty$. Finalmente, se F é não limitado e $\mathcal{H}^s(F) > 8^s c^{-1} \mu(\mathbb{R}^n)$, a \mathcal{H}^s -medida de algum subconjunto limitado de F pode também ultrapassar este valor, ao contrário do acima. ■

Note que é imediato da Proposição 4.1.2 que $\dim_H F = \lim_{r \rightarrow 0} \log \mu(B_r(x)) / \log r$ se este limite existir.

As densidades $\lim_{r \rightarrow 0} \mu(B_r(x)) / r^s$ que ocorrem na Proposição 4.1.2 são por vezes usadas para definir a dimensão de um conjunto. Muitas vezes um fractal F possui naturalmente uma distribuição de massa μ , por exemplo, uma medida invariante no atractor dum sistema dinâmico. Se a massa das bolas pequenas obedecer à regra $\log \mu(F \cap B_r(x)) / \log r \rightarrow s$ quando $r \rightarrow 0$ para todos os x em F , então a dimensão de Hausdorff de F é igual a s . Isto é por vezes usado como um método prático para estimar uma "dimensão" dum conjunto portador duma distribuição de massa natural. Para um ponto "típico" x , podemos estimar $\mu(F \cap B_r(x))$ para uma série de pequenos valores de r , e ver a dimensão como o gradiente do gráfico de $\log \mu(F \cap B_r(x))$ em função de $\log r$.

4.2 Subconjuntos de medida finita

O Teorema 4.2.1 que se irá seguir, assegura que qualquer conjunto (Boreliano) F com $\mathcal{H}^s(F) = \infty$ contém um subconjunto E com $0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$ (isto é, com E um s -conjunto). É possível existir uma sequência decrescente de conjuntos $E_1 \supset E_2 \supset \dots$ com $\mathcal{H}^s(E_k) = \infty$ para todo os k , mas com $\mathcal{H}^s(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) = 0$. (Para um exemplo simples, tomamos $E_k = [0, 1/k] \subset \mathbb{R}$ e $0 < s < 1$.) Para demonstrar o teorema precisamos olhar mais profundamente para a estrutura das medidas de Hausdorff.

Teorema 4.2.1 *Seja F um subconjunto Boreliano de \mathbb{R}^n com $\mathcal{H}^s(F) = \infty$. Então existe um conjunto compacto $E \subset F$ tal que $0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$.*

Uma maneira de aproximar conjuntos s -dimensionais com $\mathcal{H}^s(F) = \infty$ é usar o Teorema 4.2.1 para extrair um subconjunto de medida finita positiva, estudar as suas propriedades como um s -conjunto, e então interpretar essas propriedades no contexto do conjunto maior F . Similarmente, qualquer conjunto F de dimensão de Hausdorff $t > 0$ tem $\mathcal{H}^s(F) = \infty$ se $0 < s < t$, e então contém um s -conjunto.

A Proposição 4.2.1, que é efectivamente um Corolário da Proposição 4.1.2, na página 56, permite-nos fortalecer o Teorema 4.2.1.

Proposição 4.2.1 *Seja F um conjunto Boreliano satisfazendo $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$. Existe uma constante b e um conjunto compacto $E \subset F$ com $\mathcal{H}^s(E) > 0$ tais que*

$$\mathcal{H}^s(E \cap B_r(x)) \leq br^s \quad (4.9)$$

para todos os $x \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$.

Demonstração:

Na alínea b) da Proposição 4.1.2, na página 56, tomamos μ como a restrição de \mathcal{H}^s para F , isto é, $\mu(A) = \mathcal{H}^s(F \cap A)$. Então, se

$$F_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \mathcal{H}^s(F \cap B_r(x)) / r^s > 2^{1+s} \right\}$$

segue que $\mathcal{H}^s(F_1) \leq 2^s 2^{-(1+s)} \mathcal{H}^s(F) \leq \frac{1}{2} \mathcal{H}^s(F)$. Assim $\mathcal{H}^s(F|F_1) \geq \frac{1}{2} \mathcal{H}^s(F) > 0$, então se $E_1 = F|F_1$ então $\mathcal{H}^s(E_1) > 0$ e $\overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \mathcal{H}^s(F \cap B_r(x)) / r^s \leq 2^{1+s}$ para $x \in E_1$. Pelo

Teorema de Egoroff¹ segue que existe um conjunto compacto $E \subset E_1$ com $\mathcal{H}^s(E) > 0$

¹Teorema de Egoroff: Seja D um conjunto Boreliano de \mathbb{R}^n e μ uma medida com $\mu(D) < \infty$. Sejam f_1, f_2, \dots e f funções de D para \mathbb{R} tais que $f_k(x) \rightarrow f(x)$ para cada x em D . Então, $\forall \delta > 0$, existe um Boreliano $E \subset D$ tal que $\mu(D \setminus E) < \delta$ e $\{f_k\} \rightarrow f$ uniformemente em E . Para as medidas utilizadas neste trabalho, pode tomar-se E compacto.

e um número $r_0 > 0$ tal que $\mathcal{H}^s(F \cap B_r(x))/r^s \leq 2^{2+s}$ para todos os $x \in E$ e todo $0 < r \leq r_0$. Mas $\mathcal{H}^s(F \cap B_r(x))/r^s \leq \mathcal{H}^s(F)/r_0^s$ se $r \geq r_0$ então segue (4.9).■

Corolário 4.2.1 *Seja F um subconjunto Boreliano de \mathbb{R}^n com $\mathcal{H}^s(F) = \infty$. Então existe um conjunto compacto $E \subset F$ tal que $0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$ e tal que para alguma constante b*

$$\mathcal{H}^s(E \cap B_r(x)) \leq br^s$$

para todos os $x \in \mathbb{R}^n$ e $r \geq 0$.

Demonstração:

O Teorema 4.2.1 fornece-nos, a este conjunto, um subconjunto de F de medida finita positiva, e aplicando a Proposição 4.2.1, obtemos o resultado.■

4.3 Sistemas de funções iteradas

Muitos fractais são feitos de partes as quais são, de alguma maneira, semelhantes ao todo. Por exemplo, o Conjunto de Cantor de razão $\frac{1}{3}$ é a união de duas cópias semelhantes de si próprio, e a Curva de Von Koch é feita de quatro cópias semelhantes. (Vejam-se as Figuras 1.1 e 1.2, nas páginas 4 e 5, respectivamente.)

Seja D um subconjunto fechado de \mathbb{R}^n . Uma função $S : D \rightarrow D$ é chamada uma contracção em D se existe um número c com $0 < c < 1$ tal que $|S(x) - S(y)| \leq c|x - y|$ para todos os x, y em D . Claramente qualquer contracção é uma função contínua. Se se verificar igualdade, isto é, $|S(x) - S(y)| = c|x - y|$, então S transforma conjuntos noutros geometricamente semelhantes, e chamamos a S uma semelhança.

Sejam S_1, \dots, S_m contracções. Dizemos que um subconjunto F de D é invariante para as transformações S_i se

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F). \quad (4.10)$$

Tais conjuntos invariantes são frequentemente fractais.

Isto é facilmente ilustrado quando F é o Conjunto de Cantor de razão $\frac{1}{3}$. Sejam $S_1, S_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $S_1(x) = \frac{1}{3}x$; $S_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$. Então $S_1(F)$ e $S_2(F)$ são as "partes" esquerda e direita de F , tais que $F = S_1(F) \cup S_2(F)$. Assim F é invariante para as funções S_1 e S_2 , as duas funções que representam a auto-semelhança fundamental do Conjunto de Cantor.

Mostramos que famílias de contracções, ou sistemas de funções iteradas, como estas são por vezes conhecidas, definem conjuntos compactos invariantes (não vazios) únicos. Isto significa, por exemplo, que o Conjunto de Cantor de razão $\frac{1}{3}$ é completamente especificado como o conjunto compacto invariante das funções S_1 e S_2 dadas acima.

Vamos agora definir uma métrica ou uma distância entre subconjuntos de D . \mathcal{L} significa a classe de todos os subconjuntos compactos não vazios de D . Recordamos que o corpo δ -paralelo de $A \in \mathcal{L}$ é o conjunto dos pontos dentro da distância δ a A , isto é, $A_\delta = \{x \in D : |x - a| \leq \delta \text{ para algum } a \in A\}$. Fazemos de \mathcal{L} um espaço métrico definindo a distância $d(A, B)$ entre dois conjuntos A, B como sendo o menor δ tal que o corpo δ -paralelo de A contém B e vice-versa:

$$d(A, B) = \inf \{ \delta : A \subset B_\delta \text{ e } B \subset A_\delta \}. \quad (4.11)$$

Uma simples verificação mostra que d é uma distância ou métrica, conhecida como a

métrica de Hausdorff em \mathcal{L} . Assim (i) $d(A, B) \geq 0$, com igualdade se e só se $A = B$, (ii) $d(A, B) = d(B, A)$, e (iii) $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$ para quaisquer A, B e C em \mathcal{L} . Em particular, se $d(A, B)$ é pequena, então, num certo sentido, A e B são próximos um do outro.

Teorema 4.3.1 *Sejam S_1, \dots, S_m contracções em $D \subset \mathbb{R}^n$ tais que*

$$|S_i(x) - S_i(y)| \leq c_i |x - y| \quad (x, y \in D)$$

com $c_i < 1$ para cada i . Então existe um único conjunto compacto não vazio F que é invariante para os S_i , isto é, satisfaz

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F).$$

Além disso, se definirmos uma transformação S na classe \mathcal{L} de conjuntos compactos não vazios por

$$S(E) = \bigcup_{i=1}^m S_i(E) \quad (4.12)$$

e escrevermos S^k para a k -ésima iteração de S , dada por $S^0(E) = E$, $S^k(E) = S(S^{k-1}(E))$ para $k \geq 1$, então

$$F = \bigcup_{k=1}^{\infty} S^k(E) \quad (4.13)$$

para qualquer conjunto E em \mathcal{L} tal que $S_i(E) \subset E$ para cada i .

Demonstração:

Note-se que os conjuntos em \mathcal{L} são transformados por S noutros conjuntos em \mathcal{L} . Seja E algum conjunto em \mathcal{L} tal que $S_i(E) \subset E$ para todos os i ; por exemplo $D \cap B_r(0)$, desde que r seja suficientemente grande. Então $S^k(E) \subset S^{k-1}(E)$, logo $S^k(E)$ é uma sequência decrescente de conjuntos compactos não vazios, que necessariamente têm intersecção compacta não vazia $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(E)$. Visto que $S^k(E)$ é uma sequência decrescente, segue que $S(F) = F$, logo F é invariante.

Para mostrar que o conjunto invariante é único, note-se que se $A, B \in \mathcal{L}$ então

$$d(S(A), S(B)) = d\left(\bigcup_{i=1}^m S_i(A), \bigcup_{i=1}^m S_i(B)\right) \leq \max_{1 \leq i \leq m} d(S_i(A), S_i(B))$$

(visto que se δ é tal que o corpo δ -paralelo $(S_i(A))_\delta$ contém $S_i(B)$ para cada i , então $(\bigcup_{i=1}^m S_i(A))_\delta$ contém $\bigcup_{i=1}^m S_i(B)$). Assim

$$d(S(A), S(B)) \leq \left(\max_{1 \leq i \leq m} c_i\right) d(A, B). \quad (4.14)$$

Segue que se $S(A) = A$ e $S(B) = B$ são conjuntos invariantes, então $d(A, B) = 0$, o que implica que $A = B$. ■

De facto, a sequência de iterações $S^k(E)$ converge para F qualquer que seja o conjunto inicial E em \mathcal{L} , no sentido que $d(S^k(E), F) \rightarrow 0$. Isto segue visto que (4.14) implica que $d(S(E), F) = d(S(E), S(F)) \leq cd(E, F)$, logo $d(S^k(E), F) \leq c^k d(E, F)$ onde $c = \max_{1 \leq i \leq m} c_i < 1$. Assim os $S^k(E)$ fornecem de forma crescente boas aproximações a F . (Se F é um fractal essas aproximações são às vezes chamadas pré-fractais para F .)

Para cada k

$$S^k(E) = \bigcup_{J_k} S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(E) = \bigcup_{J_k} S_{i_1}(S_{i_2}(\dots(S_{i_k}(E)))) \quad (4.15)$$

onde a união é sobre o conjunto J_k de todas as seqüências de k termos (i_1, \dots, i_k) com $1 \leq i_j \leq m$. Se $S_i(E)$ está contido em E para cada i e x é um ponto de F , segue por (4.13) que existe uma seqüência (i_1, i_2, \dots) (não necessariamente única) tal que $x \in S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(E)$ para todos os k . Assim

$$F = \bigcup \{x_{i_1, i_2, \dots}\}$$

onde

$$x_{i_1, i_2, \dots} = \bigcap_{k=1}^{\infty} S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(E). \quad (4.16)$$

Esta expressão para $x_{i_1, i_2, \dots}$ é independente de E desde que $S_i(E)$ esteja contido em E para todos os i .

Note-se que, se a união em (4.10) é disjunta então F será totalmente desconexo, uma vez que se $x_{i_1, i_2, \dots} \neq x_{i'_1, i'_2, \dots}$ podemos encontrar k tal que $(i_1, \dots, i_k) \neq (i'_1, \dots, i'_k)$ logo os conjuntos fechados disjuntos $(S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k})(F)$ e $S_{i'_1} \circ \dots \circ S_{i'_k}(F)$ desconexam os dois pontos.

De novo isto pode ser ilustrado por $S_1(x) = \frac{1}{3}x$, $S_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ e F o Conjunto de Cantor. Se $E = [0, 1]$ então $S^k(E) = E_k$, o conjunto de 2^k intervalos elementares de comprimento 3^{-k} obtido no k -ésimo passo da usual construção do Conjunto de Cantor. Além disso, $x_{i_1, i_2, \dots}$ é o ponto do Conjunto de Cantor com expansão em base 3, $0.a_1a_2\dots$, onde $a_k = 0$ se $i_k = 1$ e $a_k = 2$ se $i_k = 2$. Os pré-fractais $S^k(E)$ fornecem a usual

construção de muitos fractais, tomando um conjunto inicial fechado E conveniente; os $S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(E)$ são chamados os conjuntos elementares da construção.

4.4 Dimensões de conjuntos auto-semelhantes

Vamos analisar o caso onde $S_1, \dots, S_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ são semelhanças, isto é, com

$$|S_i(x) - S_i(y)| = c_i |x - y| \quad (x, y \in \mathbb{R}^n) \quad (4.17)$$

onde $0 < c_i < 1$ (c_i é chamada a razão de S_i). Assim cada S_i transforma subconjuntos de \mathbb{R}^n em conjuntos geometricamente semelhantes. Um conjunto que é invariante sob tais colecções de semelhanças é chamado um conjunto (estritamente)-auto-semelhante, sendo a união de um número de pequenas cópias semelhantes de si próprio. Exemplos deste tipo incluem o Conjunto de Cantor de razão $\frac{1}{3}$, o Triângulo de Sierpinski e a Curva de Von Koch (Vejam-se as Figuras 1.1, 3.2 e 1.2, nas páginas 4, 43 e 5, respectivamente).

Mostramos que, sob certas condições, um conjunto auto-semelhante F tem dimensão de Hausdorff e dimensão de capacidade iguais ao valor de s satisfazendo

$$\sum_{i=1}^m c_i^s = 1 \quad (4.18)$$

e que F tem \mathcal{H}^s -medida finita e positiva. Se $F = \cup_{i=1}^m S_i(F)$ com a união "quase disjunta", temos que

$$\mathcal{H}^s(F) = \sum_{i=1}^m \mathcal{H}^s(S_i(F)) = \sum_{i=1}^m c_i^s \mathcal{H}^s(F) \quad (4.19)$$

usando (4.17) e a propriedade de escala. Na suposição que $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ para o valor $s = \dim_H F$ temos que s satisfaz (4.18).

Dizemos que os S_i satisfazem a condição de conjunto aberto se existir um conjunto aberto limitado não vazio V tal que

$$V \supset \bigcup_{i=1}^m S_i(V) \quad (4.20)$$

com a união disjunta. Mostramos que, desde que os S_i satisfaçam a condição de conjunto aberto, a dimensão de Hausdorff de conjuntos invariantes é dada por (4.18).

É necessário o seguinte resultado geométrico.

Lema 4.4.1 *Seja $\{V_i\}$ uma colecção de subconjuntos abertos disjuntos de \mathbb{R}^n tais que cada V_i contém uma bola de raio $a_1 r$ e está contido numa bola de raio $a_2 r$. Então qualquer bola B de raio r intersecta no máximo $(1 + 2a_2)^n a_1^{-n}$ dos fechos \bar{V}_i .*

Demonstração:

Se \bar{V}_i intersecta B , então \bar{V}_i está contido na bola concêntrica com B de raio $(1 + 2a_2)r$. Suponhamos que q dos conjuntos \bar{V}_i intersectam B . Então, somando os volumes das bolas interiores correspondentes de raio $a_1 r$, segue que $q(a_1 r)^n \leq (1 + 2a_2)^n r^n$, dando o limite para q . ■

Teorema 4.4.1 *Supondo que a condição de conjunto aberto (4.20) se verifica para as semelhanças S_i em \mathbb{R}^n com raios c_i ($1 \leq i \leq m$). Se F é o conjunto invariante que satisfaz*

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F) \quad (4.21)$$

então $\dim_H F = \dim_B F = s$, onde s é dado por

$$\sum_{i=1}^m c_i^s = 1. \quad (4.22)$$

Além disso, para este valor de s , $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$.

Demonstração:

Suponhamos que s satisfaz (4.22). Para algum conjunto A escrevemos $A_{i_1, \dots, i_k} = S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(A)$. J_k indica o conjunto de todas as seqüências com k termos (i_1, \dots, i_k) com $1 \leq i_j \leq m$. Segue, usando (4.21) repetidamente, que

$$F = \bigcup_{J_k} F_{i_1, \dots, i_k}.$$

Verificamos que essas coberturas de F fornecem uma estimativa superior apropriada para a medida de Hausdorff. Visto que a função $S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}$ é uma semelhança de raio $c_{i_1} \cdots c_{i_k}$, então

$$\sum_{J_k} |F_{i_1, \dots, i_k}|^s = \sum_{J_k} (c_{i_1} \cdots c_{i_k})^s |F|^s = \left(\sum_{i_1} c_{i_1}^s \right) \cdots \left(\sum_{i_k} c_{i_k}^s \right) |F|^s = |F|^s \quad (4.23)$$

por (4.22). Para algum $\delta > 0$, podemos escolher k tal que $|F_{i_1, \dots, i_k}| \leq (\max_i c_i)^k \leq \delta$, então $\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq |F|^s$ e conseqüentemente $\mathcal{H}^s(F) \leq |F|^s$.

O limite inferior é mais difícil. Seja I o conjunto de todas as seqüências infinitas $I = \{(i_1, i_2, \dots) : 1 \leq i_j \leq m\}$, e $I_{i_1, \dots, i_k} = \{(i_1, \dots, i_k, q_{k+1}, \dots) : 1 \leq q_j \leq m\}$ o "cilindro" consistindo nas seqüências em I com termos iniciais (i_1, \dots, i_k) . Podemos colocar uma distribuição de massa μ em I tal que $\mu(I_{i_1, \dots, i_k}) = (c_{i_1} \cdots c_{i_k})^s$. Visto que $(c_{i_1} \cdots c_{i_k})^s =$

$\sum_{i=1}^m (c_{i_1} \cdots c_{i_k} c_i)^s$, isto é, $\mu(I_{i_1, \dots, i_k}) = \sum_{i=1}^m \mu(I_{i_1, \dots, i_k i})$, segue que μ é na verdade uma distribuição de massa em subconjuntos de I com $\mu(I) = 1$. Podemos transferir μ para uma distribuição de massa $\tilde{\mu}$ em F de uma maneira natural pela definição $\tilde{\mu}(A) = \mu\{(i_1, i_2, \dots) : x_{i_1, i_2, \dots} \in A\}$ para subconjuntos A de F . (Relembramos que $x_{i_1, i_2, \dots} = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_{i_1, \dots, i_k}$.) É fácil verificar que $\tilde{\mu}(F) = 1$.

Mostramos que $\tilde{\mu}$ satisfaz as condições do Teorema 4.1.1, na página 47. Seja V o conjunto aberto de (4.20). Visto que $\bar{V} \supset S(\bar{V}) = \bigcup_{i=1}^m S_i(\bar{V})$, a sequência decrescente de iterações $S^k(\bar{V})$ converge para F . Em particular $\bar{V} \supset F$ e $\bar{V}_{i_1, \dots, i_k} \supset F_{i_1, \dots, i_k}$ para cada sequência finita (i_1, \dots, i_k) . Seja B alguma bola de raio $r < 1$. Estimamos $\tilde{\mu}(B)$ considerando os conjuntos V_{i_1, \dots, i_k} com diâmetros comparáveis com os de B e com fechos que interceptam $F \cap B$.

Truncamos cada sequência infinita $(i_1, i_2, \dots) \in I$ depois do primeiro termo i_k para o qual

$$\left(\min_i c_i \right) r \leq c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_k} \leq r \quad (4.24)$$

e seja Q denotando o conjunto finito de todas as sequências (finitas) obtidas desta maneira. Então para todas as sequências infinitas $(i_1, i_2, \dots) \in I$ existe exactamente um valor de k com $(i_1, \dots, i_k) \in Q$. Como V_1, \dots, V_m são disjuntas, também o são $V_{i_1, \dots, i_k, 1}, \dots, V_{i_1, \dots, i_k, m}$ para cada (i_1, \dots, i_k) . Usando isto desta maneira, segue que a colecção de conjuntos abertos $\{V_{i_1, \dots, i_k} : (i_1, \dots, i_k) \in Q\}$ é disjunta. Analogamente $F \subset \bigcup_Q F_{i_1, \dots, i_k} \subset \bigcup_Q \bar{V}_{i_1, \dots, i_k}$.

Escolhemos a_1 e a_2 tais que V contém uma bola de raio a_1 e está contida numa bola de raio a_2 . Então, para $(i_1, \dots, i_k) \in Q$, o conjunto V_{i_1, \dots, i_k} contém uma bola de raio $c_{i_1} \cdots c_{i_k} a_1$ e portanto uma de raio $(\min_i c_i) a_1 r$, e está contida numa bola de raio

$c_{i_1} \cdots c_{i_k} a_2$ e consequentemente numa bola de raio $a_2 r$. Seja Q_1 o conjunto das seqüências (i_1, \dots, i_k) em Q tais que B intersecta $\bar{V}_{i_1, \dots, i_k}$. Pelo Lema 4.4.1 existem, no máximo, $q = (1 + 2a_2)^n a_1^{-n} (\min_i c_i)^{-n}$ seqüências em Q_1 . Então

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(B) &= \tilde{\mu}(F \cap B) \leq \mu\{(i_1, i_2, \dots) : x_{i_1, i_2, \dots} \in F \cap B\} \\ &\leq \mu\left\{\bigcup_{Q_1} I_{i_1, \dots, i_k}\right\} \end{aligned}$$

logo, se $x_{i_1, i_2, \dots} \in F \cap B \subset \cup_{Q_1} \bar{V}_{i_1, \dots, i_k}$, então existe um inteiro k tal que $(i_1, \dots, i_k) \in Q_1$.

Assim

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(B) &\leq \sum_{Q_1} \mu(I_{i_1, \dots, i_k}) \\ &= \sum_{Q_1} (c_{i_1} \cdots c_{i_k})^s \leq \sum_{Q_1} r^s \leq r^s q \end{aligned}$$

usando (4.24). Visto que qualquer conjunto U está contido numa bola de raio $|U|$, temos $\tilde{\mu}(U) \leq |U|^s q$, então o Teorema 4.1.1, na página 47, dá-nos $\mathcal{H}^s(F) \geq q^{-1} > 0$, e $\dim_H F = s$.

Se Q é um conjunto de seqüências finitas tais que para todos $(i_1, i_2, \dots) \in I$ existe exactamente um inteiro k com $(i_1, \dots, i_k) \in Q$, segue indutivamente por (4.22) que $\sum_Q (c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_k})^s = 1$. Assim, se Q for escolhido como em (4.24), Q contém no máximo $(\min_i c_i)^{-s} r^{-s}$ seqüências. Para cada seqüência (i_1, \dots, i_k) em Q temos $|\bar{V}_{i_1, \dots, i_k}| = c_{i_1} \cdots c_{i_k} |\bar{V}| \leq r |\bar{V}|$, então F pode ser coberto por $(\min_i c_i)^{-s} r^{-s}$ conjuntos de diâmetro $r |\bar{V}|$ para cada $r < 1$. Segue pela alínea (iv) da Definição Equivalente 3.1.1, na página 32, no Capítulo 3, que $\overline{\dim}_B F \leq s$; visto que a dimensão de Hausdorff é também s , completamos a demonstração. ■

Se não assumirmos a condição de conjunto aberto no Teorema 4.4.1, podemos ainda demonstrar que temos $\dim_H F = \dim_B F$ ainda que este valor seja menor do que s .

O Teorema 4.4.1 facilita-nos determinar a dimensão de muitos fractais auto-semelhantes.

Exemplo 4.4.1 *Triângulo de Sierpinski*

O triângulo de Sierpinski F é construído a partir de um triângulo equilátero removendo repetidamente triângulos equiláteros invertidos, como pode ser visto na Figura 3.2, na página 43, no Capítulo 3. Então $\dim_H F = \dim_B F = \log 3 / \log 2$.

Cálculo: O triângulo F é o conjunto invariante sob as três óbvias semelhanças de razão $\frac{1}{2}$ que transformam o triângulo E_0 nos triângulos de E_1 . A condição de conjunto aberto é verificada, tomando V como o interior de E_0 . Assim, pelo Teorema 4.4.1, $\dim_H F = \dim_B F = \log 3 / \log 2$, que é a solução de $\sum_1^3 \left(\frac{1}{2}\right)^s = 1$. \square

O Exemplo 4.4.2 que se segue, envolve transformações de semelhança de mais do que uma razão.

Exemplo 4.4.2 *Curva de von Koch Modificada*

Fixemos $0 < a \leq \frac{1}{3}$ e construamos a curva F substituindo repetidamente a parte central proporcional a a de cada intervalo por outros dois lados dum triângulo equilátero, como pode ser visto na Figura 4.1. Então $\dim_H F = \dim_B F$ é a solução de $2a^s + 2\left(\frac{1}{2}(1-a)\right)^s = 1$.

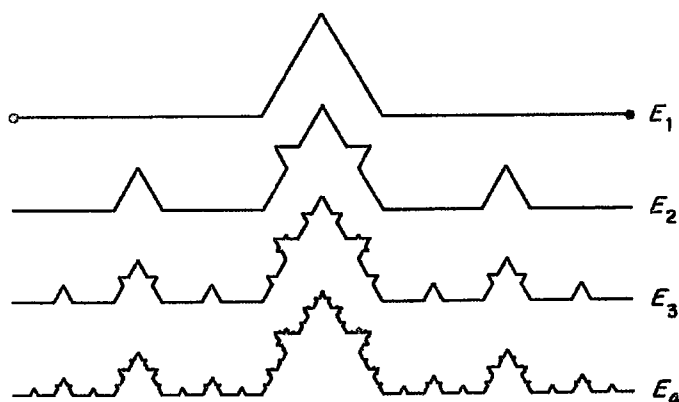


Figura 4.1: Construção da Curva de Koch Modificada- veja-se a Figura 4.2 que representa uma curva fractal construída através de um gerador.

Cálculo: A curva F é invariante sob as semelhanças que transformam o intervalo unitário em cada um dos quatros intervalos em E_1 . A condição de conjunto aberto é verificada, tomando V como um triângulo isósceles de base com comprimento 1 e altura $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, então o Teorema 4.4.1 dá-nos a dimensão esperada. \square

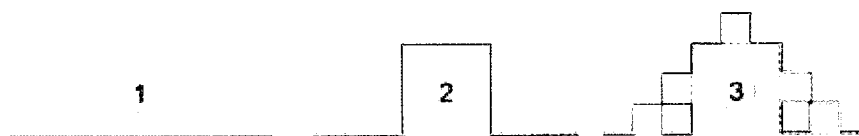


Figura 4.2: Construção de uma curva fractal por um gerador. As dimensões de Hausdorff e de capacidade da curva são dadas por $3\left(\frac{1}{3}\right)^s + 2\left(\frac{1}{4}\right)^s = 1$ ou $s = 1,34$.

4.5 Conjuntos auto-afins

Os conjuntos auto-afins constituem uma importante classe de conjuntos, que incluem os conjuntos auto-semelhantes como um caso particular. Nesta secção apresentar-se-á a definição destes conjuntos.

Uma transformação afim $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma transformação da forma

$$S(x) = T(x) + b$$

onde T é uma transformação linear em \mathbb{R}^n (representada por uma matriz $n \times n$) e b um vector em \mathbb{R}^n . Assim uma transformação afim S é uma combinação de uma translação, rotação, dilatação e, possivelmente, uma reflexão. Em particular, S transforma esferas em elipsóides, quadrados em paralelogramos, etc. (Ao contrário das semelhanças, transformações afins contraem com diferentes razões em diferentes direcções.)

Se S_1, \dots, S_m são contracções afins em \mathbb{R}^n , o único conjunto compacto invariante F para as S_i assegurado pelo Teorema 4.3.1, na página 62, é chamado um conjunto auto-afim.

É natural procurar uma fórmula para a dimensão de conjuntos auto-afins que generalize a fórmula (4.22) para tais conjuntos. Podemos esperar que a dimensão dependa de transformações afins de uma maneira razoavelmente simples, facilmente exprimível em termos de matrizes e vectores que representam a transformação. Infelizmente, a situação é muito mais complicada do que isto - o seguinte exemplo mostra que podemos variar transformações afins de uma forma contínua, sem que a dimensão do conjunto auto-afim varie continuamente.

Exemplo 4.5.1 Sejam S_1, S_2 contracções afins em \mathbb{R}^2 que transformam o quadrado unitário nos rectângulos R_1 e R_2 de lados $\frac{1}{2}$ e ϵ onde $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$. O rectângulo R_1 acenta no eixo dos yy , mas o lado esquerdo de R_2 está à distância λ do eixo dos yy . Se F é o conjunto invariante para S_1 e S_2 , temos $\dim_H F \geq 1$ quando $\lambda > 0$, mas $\dim_H F = \log 2 / (-\log \epsilon) < 1$ quando $\lambda = 0$. (Veja-se a Figura 4.3.)

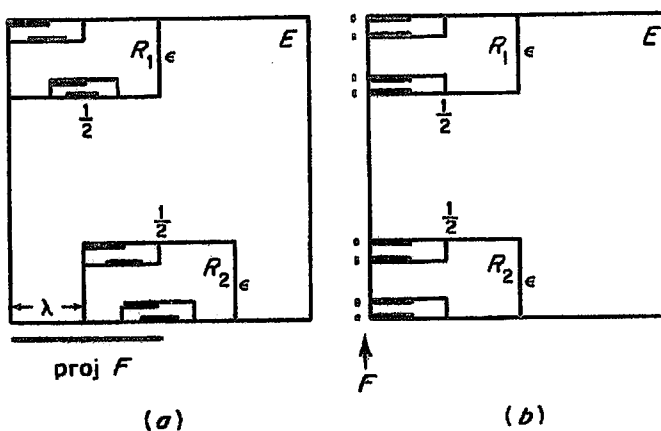


Figura 4.3: Descontinuidade na dimensão de conjuntos auto-afins. Em (a) $\lambda > 0$ e $\dim_H F \geq \dim_H \text{proj} F = 1$, mas em (b) $\lambda = 0$, e $\dim_H F = \log 2 / -\log \epsilon < 1$.

Cálculo: Seja $\lambda > 0$. Então o k -ésimo passo da construção, $E_k = \cup S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(E)$ consiste de 2^k rectângulos de lados 2^{-k} e ϵ^k com a projecção de E_k no eixo dos xx , $\text{proj} E_k$, contendo o intervalo $[0, 2\lambda]$. Visto que $F = \cap_{i=1}^{\infty} E_k$ segue que $\text{proj} F$ contém o intervalo $[0, 2\lambda]$. (Outra maneira de ver isto é notando que $\text{proj} F$ pode ser invariante sob as transformações $\tilde{S}_1, \tilde{S}_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $\tilde{S}_1(x) = \frac{1}{2}x$, $\tilde{S}_2(x) = \frac{1}{2}x + \lambda$ em que o único conjunto invariante é o intervalo $[0, 2\lambda]$.) Assim $\dim_H F \geq \dim_H \text{proj} F = \dim_H [0, 2\lambda] = 1$.

Se $\lambda = 0$, a situação muda. E_k consiste em 2^k rectângulos de lados 2^{-k} e ϵ^k os

quais têm todos os seus lados limitados pelo eixo dos yy , com E_k contido na faixa $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 2^{-k}\}$. Fazendo $k \rightarrow \infty$ vemos que F é um conjunto de Cantor uniforme contido no eixo dos yy , que pode ser obtido removendo repetidamente uma proporção $1 - 2\varepsilon$ em relação ao centro de cada intervalo. Assim $\dim_H F = \log 2 / (-\log \varepsilon) < 1$. (Veja-se o Exemplo 4.1.3, na página 52.) \square

Com tal comportamento descontínuo, que se torna ainda pior para outros conjuntos de transformações afins, é naturalmente difícil obter uma expressão geral para a dimensão de conjuntos auto-afins. No entanto, uma situação que tem sido completamente analisada é o conjunto auto-afim obtido pela seguinte construção recursiva.

Exemplo 4.5.2 *Seja o quadrado unitário E_0 dividido em $p \times q$ rectângulos semelhantes de lados $1/p$ e $1/q$ onde p e q são inteiros positivos com $p < q$. Escolhemos uma subcoleção desses rectângulos para formar E_1 , e seja N_j o número de rectângulos escolhidos para a j -ésima coluna para $1 \leq j \leq p$. Repetimos esta construção na maneira usual, com cada rectângulo substituído por uma cópia afim de E_1 , e seja F o conjunto limite obtido. Então*

$$\dim_H F = \log \left(\sum_{j=1}^p N_j^{\log p / \log q} \right) \frac{1}{\log p}$$

e

$$\dim_B F = \frac{\log p_1}{\log p} + \log \left(\frac{1}{p_1} \sum_{j=1}^p N_j \right) \frac{1}{\log q}$$

onde p_1 é o número de colunas contendo ao menos um rectângulo de E_1 .

Neste exemplo omitimos os cálculos.

Nota-se neste exemplo, que a dimensão depende não só do número de rectângulos escolhidos em cada passo, mas também das suas posições relativas. Além disso, $\dim_H F$ e $\dim_B F$ não são, em geral, iguais.

O exemplo acima é muito específico pois as transformações afins são todas translações umas das outras. Obter uma fórmula de dimensão para conjuntos auto-afins gerais é um problema intratável. Esboçamos brevemente uma aproximação que nos leva a uma expressão da dimensão do conjunto invariante para as contracções afins $S_i(x) = T_i(x) + b_i$ ($1 \leq i \leq m$) para quase todas as sequências de vectores b_1, \dots, b_m .

Seja $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função linear que é contractiva e não-singular. Os valores singulares $1 > \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n > 0$ de T podem ser definidos de duas maneiras: são os comprimentos dos semi-eixos principais da elipsóide $T(B)$ onde B é a bola unitária em \mathbb{R}^n , e são as raízes quadradas positivas dos valores próprios de T^*T , onde T^* é a adjunta de T . Assim os valores singulares reflectem o efeito contractivo de T em diferentes direcções. Para $0 \leq s \leq n$ definimos a função dos valores singulares

$$\varphi^s(T) = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{r-1} \alpha_r^{s-r+1} \quad (4.25)$$

onde r é o inteiro para o qual $r - 1 < s \leq r$. Então $\varphi^s(T)$ é contínua e estritamente decrescente em s . Além disso, fixando s , demonstra-se que φ^s é submultiplicativa, isto é,

$$\varphi^s(TU) \leq \varphi^s(T) \varphi^s(U)$$

para quaisquer funções lineares T e U . Introduzimos as somas do k -ésimo nível $\sum_k^s \equiv \sum_{J_k} \varphi^s(T_{i_1} \circ \dots \circ T_{i_k})$ onde J_k representa o conjunto de todas as sequências com k termos

(i_1, \dots, i_k) com $1 \leq i_j \leq m$. Fixando s , temos

$$\begin{aligned} \sum_{k+q}^s &= \sum_{J_{k+q}} \varphi^s (T_{i_1} \circ \dots \circ T_{i_{k+q}}) \\ &\leq \sum_{J_{k+q}} \varphi^s (T_{i_1} \circ \dots \circ T_{i_k}) \varphi^s (T_{i_{k+1}} \circ \dots \circ T_{i_{k+q}}) \\ &= \left(\sum_{J_k} \varphi^s (T_{i_1} \circ \dots \circ T_{i_k}) \right) \left(\sum_{J_q} \varphi^s (T_{i_1} \circ \dots \circ T_{i_q}) \right) = \sum_k^s \sum_q^s \end{aligned}$$

isto é, a sequência \sum_k^s é submultiplicativa em k . Pelas propriedades das sequências submultiplicativas, $(\sum_k^s)^{1/k}$ converge para um número \sum_∞^s quando $k \rightarrow \infty$. Visto que φ^s é decrescente em s , também o é \sum_∞^s . Como $\sum_\infty^s \leq 1$, existe um único s , que designamos por $d(T_1, \dots, T_m)$, tal que $1 = \sum_\infty^s = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{J_k} \varphi^s (T_{i_1} \circ \dots \circ T_{i_k}) \right)^{1/k}$. Da mesma forma

$$d(T_1, \dots, T_m) = \inf \left\{ s : \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{J_k} \varphi^s (T_{i_1} \circ \dots \circ T_{i_k}) < \infty \right\}. \quad (4.26)$$

Teorema 4.5.1 *Sejam T_1, \dots, T_m contrações lineares e b_1, \dots, b_m vectores. Se F é o conjunto invariante afim que satisfaz*

$$F = \bigcup_{i=1}^m (T_i(F) + b_i)$$

então $\dim_H F = \dim_B F = d(T_1, \dots, T_m)$ para quase todos os $(b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^{nm}$ no sentido da medida de Lebesgue nm – dimensional.

Demonstração (Parcial):

Mostramos que $\dim_H F \leq d(T_1, \dots, T_m)$ para quaisquer b_1, \dots, b_m . Escrevemos S_i para a transformação afim contractiva $S_i(x) = T_i(x) + b_i$. Seja B uma grande bola tal que

$S_i(B) \subset B$ para todos os i . Dado $\delta > 0$ podemos escolher k suficientemente grande para obter $|S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(B)| < \delta$ para todas as sequências com k termos $(i_1, \dots, i_k) \in J_k$. Por (4.15) $F \subset \cup_{J_k} S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(B)$. Mas $S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(B)$ é uma translação do elipsóide $T_{i_1} \circ \dots \circ T_{i_k}(B)$ cujos eixos principais têm comprimentos $\alpha_1 |B|, \dots, \alpha_n |B|$, onde $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são valores singulares de $T_{i_1} \circ \dots \circ T_{i_k}$. Assim $S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(B)$ está contido num paralelepípedo rectangular P com comprimentos de lados $\alpha_1 |B|, \dots, \alpha_n |B|$. Se $0 \leq s \leq n$ e r é o menor inteiro maior ou igual do que s , podemos dividir P em, no máximo,

$$\left(\frac{2\alpha_1}{\alpha_r}\right) \left(\frac{2\alpha_2}{\alpha_r}\right) \dots \left(\frac{2\alpha_{r-1}}{\alpha_r}\right) \leq 2^n \alpha_1 \dots \alpha_{r-1} \alpha_r^{1-r}$$

cubos de lado $\alpha_r |B| < \delta$. Consequentemente $S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(B)$ pode ser coberto pela colecção de cubos U_i com $|U_i| < \delta \sqrt{n}$ tal que

$$\begin{aligned} \sum_i |U_i|^s &\leq 2^n \alpha_1 \dots \alpha_{r-1} \alpha_r^{1-r} \alpha_r^s |B|^s \\ &\leq 2^n |B|^s \varphi^s(T_{i_1} \circ \dots \circ T_{i_k}). \end{aligned}$$

Tendo então essa cobertura de $S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(B)$ para cada $(i_1, \dots, i_k) \in J_k$ segue que

$$\mathcal{H}_{\delta \sqrt{n}}^s(F) \leq 2^n |B|^s \sum_{J_k} \varphi^s(T_{i_1} \circ \dots \circ T_{i_k}).$$

Mas $k \rightarrow \infty$ quando $\delta \rightarrow 0$, então por (4.26), $\mathcal{H}^s(F) = 0$ se $s > d(T_1, \dots, T_m)$. Assim $\dim_H F \leq d(T_1, \dots, T_m)$. ■

4.6 Dimensões de gráficos

Consideramos funções $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Sob certas circunstâncias o gráfico

$$\text{graph } f = \{(t, f(t)) : a \leq t \leq b\}$$

considerado como um subconjunto plano de coordenadas (t, x) pode ser um fractal. (Note que trabalhamos com coordenadas (t, x) em vez de (x, y)). Se f tem uma derivada contínua, então não é difícil ver que o gráfico de f tem dimensão 1 e, de facto, é um conjunto regular. O mesmo é verdade se f é de variação limitada; isto é, se $\sum_{i=0}^{m-1} |f(t_i) - f(t_{i+1})| \leq c$ para alguma constante c , para todas as partições $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$. No entanto, é possível uma função contínua ser suficientemente irregular de forma a ter um gráfico de dimensão estritamente maior do que 1. Possivelmente o melhor exemplo conhecido é

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)k} \sin(\lambda^k t)$$

onde $1 < s < 2$ e $\lambda > 1$. Esta função, é um exemplo de Weierstrass de uma função contínua que em parte alguma é diferenciável, o seu gráfico tem dimensão de capacidade s , e julga-se ter dimensão de Hausdorff s . (Veja-se a Figura 4.4.)

Primeiro procedemos a algumas estimativas simples mas aplicáveis para a dimensão de capacidade de gráficos. Dando uma função f e um intervalo $[t_1, t_2]$, escrevemos R_f para a variação máxima de f sobre esse intervalo,

$$R_f[t_1, t_2] = \sup_{t_1 < t, u < t_2} |f(t) - f(u)|$$

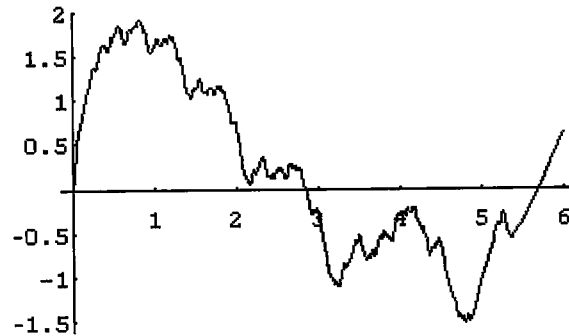


Figura 4.4: Função de Weierstrass $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)k} \sin(\lambda^k t)$.

Proposição 4.6.1 *Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Tomemos que $0 < \delta < 1$, e m o menor inteiro maior ou igual a $1/\delta$. Então, se N_δ é o número de quadrados da rede de lado δ que intersecta o gráfico de f , temos que*

$$\delta^{-1} \sum_{i=0}^{m-1} R_f [i\delta, (i+1)\delta] \leq N_\delta \leq 2m + \delta^{-1} \sum_{i=0}^{m-1} R_f [i\delta, (i+1)\delta]. \quad (4.27)$$

Demonstração:

O número de quadrados da rede de lado δ na coluna sobre o intervalo $[i\delta, (i+1)\delta]$ que intersecta o gráfico de f é pelo menos $R_f [i\delta, (i+1)\delta] / \delta$ e no máximo $2 + R_f [i\delta, (i+1)\delta] / \delta$, sendo f contínua. ■

Esta Proposição pode ser aplicada imediatamente em funções que satisfazem a condição de Hölder.

Corolário 4.6.1 *Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua.*

(a) *Suponhamos*

$$|f(t) - f(u)| \leq c|t - u|^{2-s} \quad (0 \leq t, u \leq 1) \quad (4.28)$$

onde $c > 0$ e $1 \leq s \leq 2$. Então $\mathcal{H}^s(F) < \infty$ e $\dim_H \text{graph } f \leq \dim_B \text{graph } f \leq s$. Isto permanece verdade se (4.28) é verificado quando $|t - u| < \delta$ para algum $\delta > 0$.

(b) Suponhamos que existem números $c > 0, \delta_0 > 0$ e $1 \leq s < 2$ com a seguinte propriedade: para cada $t \in [0, 1]$ e $0 < \delta \leq \delta_0$ existe u tal que $|t - u| \leq \delta$ e

$$|f(t) - f(u)| \geq c\delta^{2-s}. \quad (4.29)$$

Então $s \leq \dim_B \text{graph } f$.

Demonstração:

(a) É imediato por (4.28) que $R_f[t_1, t_2] \leq c|t_1 - t_2|^{2-s}$ para $0 \leq t_1, t_2 \leq 1$. Com notação como na Proposição 4.6.1, $m < (1 + \delta^{-1})$ logo

$$N_\delta \leq (1 + \delta^{-1}) (2 + c\delta^{-1}\delta^{2-s}) \leq c_1\delta^{-s}$$

onde c_1 é independente de δ . O resultado segue pela Proposição 4.1.1, na página 46.

(b) Da mesma maneira, (4.29) implica que $R_f[t_1, t_2] \geq c|t_1 - t_2|^{2-s}$. Visto que $\delta^{-1} \leq m$, temos por (4.27) que

$$N_\delta \geq \delta^{-1}\delta^{-1}c\delta^{2-s} = c\delta^{-s}$$

então a alínea (iii) da Definição Equivalente 3.1.1, na página 32, no Capítulo 3, dá-nos $s \leq \dim_B \text{graph } f$. ■

Infelizmente, limites inferiores para a dimensão de Hausdorff de gráficos são geralmente muito mais difíceis de encontrar do que a dimensão de capacidade.

Exemplo 4.6.1 *A função de Weierstrass*

Suponhamos que $\lambda > 1$ e $1 < s < 2$. Defina-se $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)k} \sin(\lambda^k t). \quad (4.30)$$

Então, sendo λ suficientemente grande, $\dim_B \text{graph } f = s$.

Cálculo: Dado $0 < h < 1$, seja N o inteiro tal que

$$\lambda^{-(N+1)} \leq h < \lambda^{-N}. \quad (4.31)$$

Então

$$\begin{aligned} |f(t+h) - f(t)| &\leq \sum_{k=1}^N \lambda^{(s-2)k} \left| \sin(\lambda^k(t+h)) - \sin(\lambda^k t) \right| \\ &\quad + \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda^{(s-2)k} \left| \sin(\lambda^k(t+h)) - \sin(\lambda^k t) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^N \lambda^{(s-2)k} \lambda^k h + \sum_{k=N+1}^{\infty} 2\lambda^{(s-2)k} \end{aligned}$$

usando o teorema do valor médio nos primeiros N termos da soma, e uma estimativa óbvia na parte restante. Somando essas séries geométricas,

$$\begin{aligned} |f(t+h) - f(t)| &\leq \frac{h\lambda^{(s-1)N}}{1 - \lambda^{1-s}} + \frac{2\lambda^{(s-2)(N+1)}}{1 - \lambda^{s-2}} \\ &\leq ch^{2-s} \end{aligned}$$

onde c é independente de h , usando (4.31). A alínea a) do Corolário (4.6.1) dá-nos que $\overline{\dim}_B \text{graph } f \leq s$.

Da mesma maneira, mas decompondo a soma em três partes - os primeiros $N - 1$ termos, e o resto - temos que

$$\begin{aligned} & \left| f(t+h) - f(t) - \lambda^{(s-2)N} (\sin \lambda^N(t+h) - \sin \lambda^N t) \right| \\ & \leq \frac{\lambda^{(s-2)N-s+1}}{1 - \lambda^{1-s}} + \frac{2\lambda^{(s-2)(N+1)}}{1 - \lambda^{s-2}} \end{aligned} \quad (4.32)$$

se $\lambda^{-(N+1)} \leq h < \lambda^N$.

Suponhamos que $\lambda > 2$ é suficientemente grande para que o lado direito de (4.32) seja menor do que $\frac{1}{20}\lambda^{(s-2)N}$ para todos os N . Para $\delta < \lambda^{-1}$, tomamos N tal que $\lambda^{-N} \leq \delta < \lambda^{-(N-1)}$. Para cada t , podemos escolher h com $\lambda^{-(N-1)} \leq h < \lambda^{-N}$ tal que $|\sin \lambda^N(t+h) - \sin \lambda^N t| > \frac{1}{10}$, então por (4.32)

$$|f(t+h) - f(t)| \geq \frac{1}{20}\lambda^{(s-2)N} \geq \frac{1}{20}\lambda^{s-2}\delta^{2-s}.$$

Segue pela alínea b) do Corolário 4.6.1 que $\underline{\dim}_B \text{graph } f \geq s$. \square

É imediato pela estimativa acima que a dimensão de Hausdorff do gráfico da função de Weierstrass (4.30) é no máximo s . Julga-se ser igual a s , pelo menos para muitos valores de λ . Isto ainda não foi demonstrado rigorosamente - pode ser que existam coberturas do gráfico da função por conjuntos de vários tamanhos que dão um pequeno valor. Mesmo para mostrar que $\dim_H \text{graph } f > 1$ não é trivial. Os limites inferiores conhecidos surgem de métodos de distribuição de massa dependendo de estimativas para $\mathcal{L}\{t : (t, f(t)) \in B\}$ onde B é um disco e \mathcal{L} é a medida de Lebesgue. A rápida oscilação em pequena-escala de

f faz com que o gráfico só raramente esteja no interior de B , logo esta medida é pequena.

Desta maneira é possível mostrar que existe uma constante c tal que

$$s \geq \dim_H \text{graph } f \geq s - c/\log \lambda$$

então quando λ é grande a dimensão de Hausdorff não pode ser muito menor que o valor conjecturado.

A função de Weierstrass (4.30) é representativa duma ampla classe de funções, às quais estes métodos se aplicam. Se g é uma função periódica apropriada, um método similar pode mostrar que

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)k} g(\lambda^k t) \quad (4.33)$$

tem $\dim_B \text{graph } f = s$. Em primeiro lugar tais funções parecem um pouco inventadas, mas elas ocorrem como repulsores em certos sistemas dinâmicos, dando-lhes uma nova importância.

Vimos atrás que conjuntos auto-afins são muitas vezes fractais; fazendo uma escolha apropriada de transformações afins, podem também ser gráficos de funções. Sejam S_i ($1 \leq i \leq m$) transformações afins representadas numa matriz com respeito à coordenada (t, x) por

$$S_i \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/m & 0 \\ a_i & c_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (i-1)/m \\ b_i \end{bmatrix}. \quad (4.34)$$

Assim as S_i transformam linhas verticais em linhas verticais, com a faixa vertical $0 \leq t \leq 1$ transformada na faixa $(i-1)/m \leq t \leq i/m$. Suponhamos que

$$1/m < c_i \leq 1 \quad (4.35)$$

de forma que a contracção na direcção t é maior do que na direcção x .

Sejam $p_1 = (0, b_1/(1 - c_1))$ e $p_m = (1, (a_m + b_m)/(1 - c_m))$ os pontos fixos de S_1 e S_m . Assumimos que as entradas da matriz tenham sido escolhidas de forma que

$$S_i(p_m) = S_{i+1}(p_1) \quad (1 \leq i \leq m - 1) \quad (4.36)$$

tal que os segmentos $[S_i(p_1), S_i(p_m)]$ unem-se na forma duma curva poligonal E_1 . Para evitar casos triviais, assumimos que os pontos $S_1(p_1), \dots, S_m(p_1), p_m$ não são todos colineares. O conjunto invariante F das S_i pode ser construído pela substituição de segmentos de recta repetidamente por imagens afins de E_1 . A condição (4.36) assegura que os segmentos se unem de forma que F é o gráfico de uma função contínua $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

Exemplo 4.6.2 Curvas auto-afins

Seja $F = \text{graph } f$ a curva auto-afim descrita acima. Então $\dim_B F = 1 + \log(c_1 + \dots + c_m) / \log m$.

Cálculo: Seja T_i a "parte linear" das S_i , representada pela matriz

$$\begin{bmatrix} 1/m & 0 \\ a_i & c_i \end{bmatrix}.$$

Seja I_{i_1, \dots, i_k} um intervalo do eixo t consistindo dos t com expansão base m de início $0.i'_1 \dots i'_k$ onde $i'_j = i_j - 1$. Então a parte de F acima de I_{i_1, \dots, i_k} é a imagem afim $S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(F)$, que é uma translação de $T_{i_1} \circ \dots \circ T_{i_k}(F)$. É fácil de ver por indução que a matriz que representa $T_{i_1} \circ \dots \circ T_{i_k}(F)$ é

$$\begin{bmatrix} m^{-k} & 0 \\ m^{1-k}a_{i_1} + m^{2-k}c_{i_1}c_{i_2} + \dots + c_{i_1}c_{i_2}\dots c_{i_{k-1}}c_{i_k} & c_{i_1}c_{i_2}\dots c_{i_k} \end{bmatrix}.$$

Esta transformação contrai a linha vertical por um factor $c_{i_1}c_{i_2}\dots c_{i_k}$. Observamos que o lado esquerdo é limitado por

$$\begin{aligned} & \left| m^{1-k}a + m^{2-k}c_{i_1}a + \dots + c_{i_1}\dots c_{i_{k-1}}a \right| \\ & \leq \left((mc)^{1-k} + (mc)^{2-k} + \dots + 1 \right) c_{i_1}\dots c_{i_{k-1}}a \\ & \leq r c_{i_1}\dots c_{i_{k-1}} \end{aligned}$$

onde $a = \max |a_i|$, $c = \min \{c_i\} > 1/m$ e $r = a / (1 - (mc)^{-1})$. Assim a imagem $T_{i_1} \circ \dots \circ T_{i_k}(F)$ está contida num rectângulo de altura $(r + h) c_{i_1}\dots c_{i_k}$ onde h é a altura de F . Por outro lado, se q_1, q_2, q_3 são três pontos não colineares escolhidos de $S_1(p_1), \dots, S_m(p_1), p_m$, então $T_{i_1} \circ \dots \circ T_{i_k}(F)$ contém os pontos $T_{i_1} \circ \dots \circ T_{i_k}(q_j)$ ($j = 1, 2, 3$). A altura do triângulo com esses vértices é pelo menos $c_{i_1}\dots c_{i_k}d$ onde d é a distância vertical de q_2 ao segmento $[q_1, q_3]$. Assim a série de funções f , sobre I_{i_1, \dots, i_k} satisfaz

$$dc_{i_1}\dots c_{i_k} \leq R_f [I_{i_1, \dots, i_k}] \leq r_1 c_{i_1}\dots c_{i_k}$$

onde $r_1 = r + h$.

Para k fixo, somamos isto sobre os m^k intervalos I_{i_1, \dots, i_k} de comprimento m^{-k} para obter, usando a Proposição (4.6.1), na página 79,

$$m^k d \sum c_{i_1}\dots c_{i_k} \leq N_{m^{-k}}(F) \leq 2m^k + m^k r_1 \sum c_{i_1}\dots c_{i_k}$$

onde $N_{m^{-k}}(F)$ é o número de quadrados da rede de lado m^{-k} que intersecta F . Para cada j o número c_{i_j} varia entre os valores c_1, \dots, c_m tais que $\sum c_{i_1}\dots c_{i_k} = (c_1 + \dots + c_m)^k$.

Assim

$$dm^k (c_1 + \dots + c_m)^k \leq N_{m^{-k}}(F) \leq 2m^k + r_1 m^k (c_1 + \dots + c_m)^k.$$

Tomando logaritmos e usando a alínea (iii) da Definição 3.1.1, na página 32, da dimensão de capacidade obtemos o valor declarado. \square

As funções auto-afins são usadas para interpolação fractal. Suponhamos que queremos encontrar uma curva fractal dada dimensão, passando pelos pontos $(i/m, x_i)$ para $i = 0, 1, \dots, m$. Escolhendo transformações do tipo (4.34) de tal maneira que S_i transforma o segmento $[p_1, p_m]$ no segmento $[(i-1)/m, x_{i-1}], (i/m, x_i]$ para cada i , a construção descrita acima dá-nos uma função auto-afim com gráfico passando pelos pontos dados. Adaptando os valores das entradas da matriz podemos assegurar que a curva tem a dimensão de capacidade requerida; existe também alguma liberdade para variar a aparência da curva.

Funções auto-afins podem ser generalizadas tal que as S_i não têm todas a mesma razão de contracção na direcção t . Isto leva-nos à interpolação fractal de pontos que não estão igualmente espaçados. Com esforço adicional, a dimensão de capacidade de tais curvas pode ser encontrada.

Capítulo 5

Dimensão de correlação

Neste Capítulo irá ser estudada a dimensão de correlação ν , introduzida por Grassberger e Procaccia como uma medida característica de atractores estranhos que servem para distinguir entre o caos determinístico e ruído aleatório. O expoente ν está próximo da dimensão fractal, mas o cálculo é consideravelmente fácil. Irão ser apresentados algoritmos para calcular ν em séries temporais de variável única. Irá ser feita, também, uma relação entre o expoente de correlação e a dimensão de Hausdorff. Para já segue-se a definição de dimensão de correlação.

5.1 Dimensão de correlação

Os autores Grassberger e Procaccia introduziram uma nova medida que é obtida através da correlação entre pontos aleatórios nos atractores. Consideremos o conjunto $\{X_i, i = 1, \dots, N\}$ de pontos num atrator, obtidos por exemplo a partir de uma série temporal, isto é $X_i \equiv X(t + i\tau)$ com um crescimento do tempo fixo τ entre medições sucessivas. Devido à divergência exponencial de trajectórias, a maioria dos pares (X_i, X_j) com $i \neq j$ serão pares de pontos essencialmente aleatórios não correlacionados dinamicamente. Os pontos permanecem, no entanto, no atrator. Por conseguinte podem ser correlacionados espa-

cialmente. Medimos esta correlação espacial com o integral de correlação $C(l)$, definido de acordo com

$$C(l) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \times \{\text{número de pares } (i, j) \text{ em que a distância } |X_i - X_j| \text{ é menor que } l\}. \quad (5.1)$$

Um dos objectivos centrais é estabelecer que para pequenos l , $C(l)$ cresce como uma potência

$$C(l) \sim l^v, \quad (5.2)$$

e que este "expoente de correlação" pode ser tomado como uma medida mais útil da estrutura local de um atractor estranho.

Dado um sinal experimental, se determinarmos (5.2) com $v < F$, em que F é a dimensão do espaço de fases, sabemos que o sinal detém mais caos determinístico do que ruído aleatório, visto que o ruído aleatório resulta sempre em $C(l) \sim l^F$.

Uma das principais vantagens de v é que pode ser medida facilmente, pelo menos mais facilmente que a dimensão de Hausdorff. Isto é particularmente verdade para casos onde a dimensão fractal é grande ($\gtrsim 3$) e uma cobertura por células pequenas se torna virtualmente impossível. Desta forma a medida v pode ser usada nas situações experimentais, onde tipicamente existem sistemas de grandes dimensões.

5.2 Funções de dimensão 1

Os casos mais simples de sistemas caóticos são representados por funções de um intervalo em si próprio, como por exemplo a função logística

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n). \quad (5.3)$$

Estudamos esta função quando $a = a_\infty = 3.5699456\dots$ e para $a = 4.0$. O primeiro caso da função logística é apresentado na Figura 5.1 e o segundo na Figura 5.2.

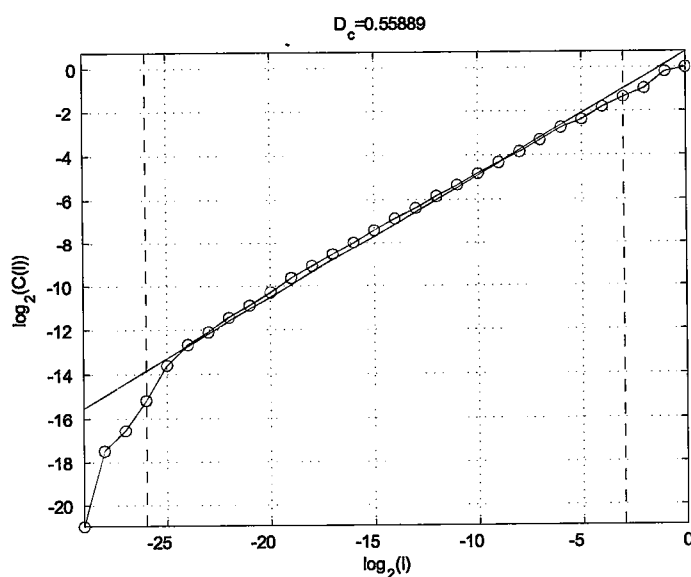


Figura 5.1: Cálculo da dimensão de correlação para a função logística (5.3) quando $a = a_\infty = 3.5699456\dots$.

Da série temporal, gerada por um atrator, descartamos os primeiros 1000 pontos. Depois, com os restantes 1000, calculamos a distância entre todos os pares de pontos e contamos quantos pares de pontos estão a uma distância menor que l , como a função (5.1),

sendo N o número de pontos considerados. Tomamos um N grande e aproximamo-nos do limite. Finalmente construímos o gráfico de $\log(C(l))$ em função de $\log(l)$, dando uma recta aproximada com declive v .

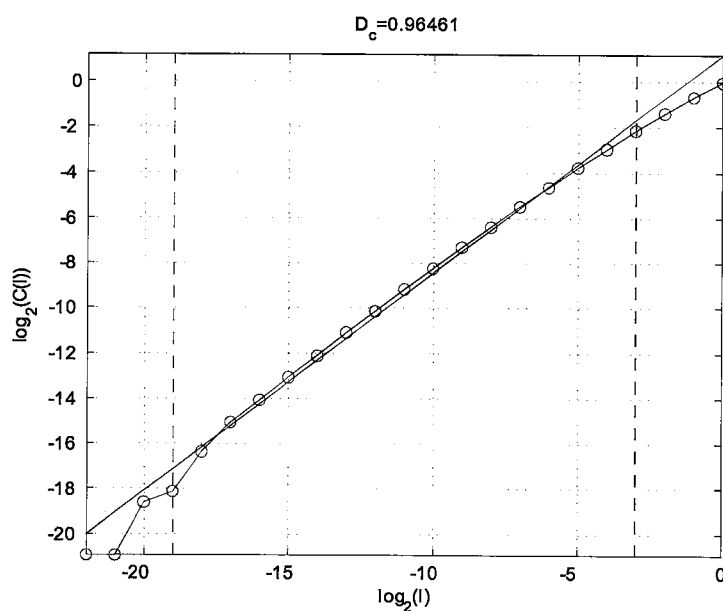


Figura 5.2: Cálculo da dimensão de correlação para a função logística (5.3) quando $a = 4.0$

É conhecido que para a função logística o atrator é um Cantoriano com uma dimensão de Hausdorff que satisfaz exactamente o limite $0.5376 < \dim_H < 0.5386$. Encontramos $v = 0.500 \pm 0.005$. Para distâncias muito pequenas, os dados para $C(l)$ desviam-se de uma potência, mas isto era esperado: o comportamento para $a = a_\infty$ não é caótico ainda, e por conseguinte os valores x_n estão fortemente correlacionados. Verificamos que de facto a potência se mantém para valores pequenos de l se aumentarmos N ou usarmos somente valores $x_i, x_{i+p}, x_{i+2p}, x_{i+3p}, \dots$ com p sendo um número ímpar grande.

A mesma função pode ser usada também para introduzir a importante questão de

correções para escalas. Essas encontram-se para o parâmetro $a = 4$. Aqui, o atrator consiste no intervalo $[0, 1]$, e a densidade de probabilidade invariante é igual a

$$\begin{aligned} p(x) &\equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x_i - x) \\ &= \frac{1}{\pi} [x(1-x)]^{-1/2}. \end{aligned}$$

Por isto, encontra-se facilmente

$$v = \dim_H = 1.$$

5.3 Funções no plano

Consideremos a função de Hénon

$$x_{n+1} = y_n + 1 - ax_n^2, \quad (5.4)$$

$$y_{n+1} = bx_n, \quad (5.5)$$

com $a = 1,4$ e $b = 0,3$, e a função de Kaplan-Yorke

$$x_{n+1} = 2x_n \pmod{1},$$

$$y_{n+1} = \alpha y_n + \cos 4\pi x_n$$

com $\alpha = 0,2$.

Nestes casos, encontramos excelentes acordos com a regra de potência; enquanto para a função Kaplan-Yorke encontramos $v = 1,42 \pm 0,02$ de acordo com o valor de \dim_H , uma função de Hénon apropriada produz $v = 1,21$, (veja-se a Figura 5.3), menor que o valor de $\dim_H = 1,261 \pm 0,003$. O valor de v para a função de Hénon é subestimado, e toma o valor de $v = 1,25 \pm 0,02 \approx \dim_H$.

Podemos dizer que excepto para a função logística com $a = a_\infty$ (atractor de Feigenbaum) encontramos em todos os casos que $v \approx \dim_H$ dentro dos limites de exactidão.

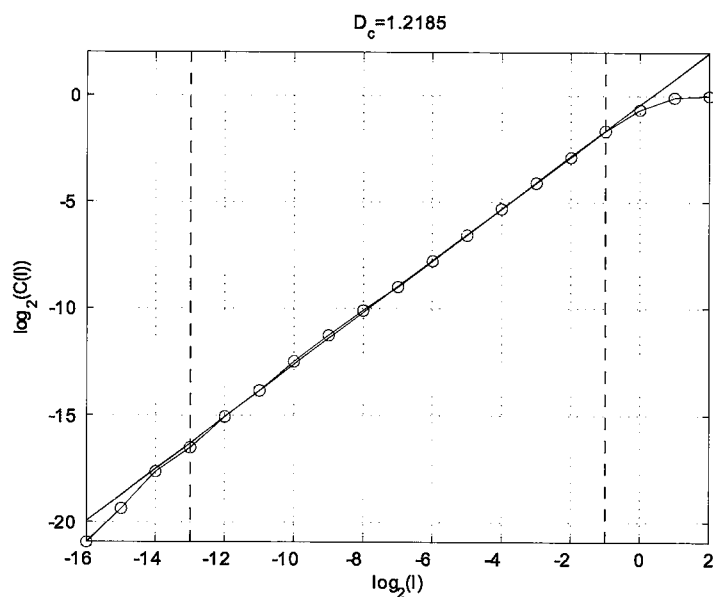


Figura 5.3: Cálculo da dimensão de correlação para a função de Hénon (5.4) quando $a = 1,4$ e $b = 0,3$.

5.4 Relação entre v e \dim_H

Consideremos p_i como a probabilidade de um X_k arbitrário cair na célula i sendo

$$p_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mu_i \quad (5.6)$$

onde μ_i é o número de pontos X_k que caiu na célula i .

Seja $M(l)$ o número de células necessárias para cobrir o atractor.

Pela definição de $C(l)$, obtemos um factor de ordem unitária

$$C(l) \simeq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{M(l)} \mu_i^2 = \sum_{i=1}^{M(l)} p_i^2. \quad (5.7)$$

Aqui, temos de substituir o número de pares com distância $< l$ pelo número de pares que caiu na mesma célula de comprimento l . O erro cometido é independente de l , e assim não afecta a estimativa de v . Usando a desigualdade de Schwartz temos

$$C(l) = M(l) [p_i^2] \geq M(l) \langle p_i \rangle^2 = \frac{1}{M(l)} \sim l^D. \quad (5.8)$$

Nesta equação os parêntesis rectos indicam a média sobre todas as células. Comparando (5.8) e (5.2) encontramos imediatamente $v \leq \dim_H$.

Observação: Pela demonstração é claro que se o atractor é coberto uniformemente, temos a igualdade

$$v = \dim_H. \quad (5.9)$$

É uma questão interessante como a cobertura não uniforme a pode quebrar. Com a excepção da função de Feigenbaum (função logística com $a = a_\infty$), que é no entanto não genérica, todos os exemplos anteriores são compatíveis com (5.9).

Em casos onde $v \neq \dim_H$, alegamos que de facto v é a observação mais relevante. Nesses casos a vizinhança de certos pontos tem uma maior "antiguidade" no sentido em que eles são visitados mais vezes que outros. A dimensão de Hausdorff ignora a antiguidade, sendo um conceito puramente geométrico. Mas a dimensão de correlação pondera regiões de acordo com a sua antiguidade.

5.5 Séries temporais de variável única

Muitas vezes não temos acesso a uma série temporal $\{X_n\}$ de vectores F -dimensionais. Em lugar disso temos apenas um ou quanto muito alguns componentes de X_n . Isto é particularmente relevante para experiências reais onde o número de graus de liberdade é frequentemente muito alto se não infinito. Tais sistemas contudo podem ter atractores de baixa dimensão. É então muito desejável possuímos um método seguro que permita uma caracterização desses atractores para uma série temporal de variável única. $\{x_i, i = 1, \dots, N; x_i \in R\}$.

A ideia essencial consiste em construir vectores d -dimensionais

$$\xi_i = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+d-1})$$

e usar o espaço dos ξ em vez do espaço dos X . O integral de correlação pode ser, por exemplo

$$C(l) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \theta(l - |\xi_i - \xi_j|).$$

Mais geralmente, pode-se usar

$$\xi_i = (x(t_i), x(t_i + \tau), \dots, x(t_i + (d-1)\tau)),$$

com τ fixo nalgum intervalo. A magnitude de τ não deve ser muito pequena visto que doutro modo $x_i \approx x_{i+\tau} \approx x_{i+2\tau} \approx \dots$ e o atractor no espaço dos ξ será esticado na diagonal e assim dificulta a separação. Por outro lado, τ não deve ser muito grande visto que valores distantes nas séries temporais não são fortemente correlacionados.

Um compromisso análogo deve ser tido em conta na escolha da dimensão d . Claramente, d deve ser maior do que a dimensão de Hausdorff \dim_H do atractor (doutro modo, $C(l) \sim l^d$). Se o atractor é um Cantoriano em dimensão maior que 1, isto pode no entanto não ser suficiente. Também, pode ser que, quando observada na dimensão d , a densidade

$$p(\xi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(\xi_i - \xi)$$

desenvolva singularidades que estão ausentes em dimensões maiores que d (tais singularidades ocorrem por exemplo quando projectamos uma esfera com densidade constante, $p(\xi) = p\delta(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)$, no plano xy : a nova densidade $\tilde{p}(x, y)$ é infinita para $x^2 + y^2 = R^2$).

Por outro lado, não se pode tomar d grande sem provocar erros experimentais e falhas estatísticas.

Vamos agora aplicar estas considerações à função logística com $a = 4$, e à função de Hénon.

Na função logística, vimos que existem correcções logarítmicas da regra $C(l) \sim l^\nu$. Elas resultam precisamente de singularidades de $p(x)$, para $x = 0$ e $x = 1$. Apesar de mergulhar o atractor num espaço de dimensão maior não remover completamente essas

singularidades, reduz substancialmente a sua influência. A razão é que o mergulho num espaço de dimensão maior resulta sempre num alongamento do atractor. No entanto, as porções que são mais fortemente estendidas são aquelas que são mais densamente povoadas na dimensão inferior. Por exemplo na função logística com $a = 4$ o "atractor" é o intervalo $[0, 1]$ em $1d$ mas é a parábola em $2d$. A parábola tem maiores declives nos pontos extremos, exibindo o alongamento mais forte associado com regiões de distribuições singulares na dimensão inferior. Um efeito similar aparece quando partimos de $d = 2$ para $d = 3$. Assim esperamos que a importância das singularidades na distribuição possa ser reduzida nas dimensões maiores.

A fim de verificar isto, temos de calcular para a função logística com $a = 4$ o integral de correlação original e o integral modificado, obtido mergulhando num espaço 2 e 3-dimensional. Observamos na verdade o esperado decréscimo de erros sistemáticos quando aumentamos d , acompanhado por um aumento do erro estatístico.

Para a função de Hénon usamos como séries temporais as séries $\{x_n, x_{n+2}, x_{n+4}, \dots\}$. Enquanto o integral de correlação 2-dimensional nos dá um v efectivo, o encaixe 3-dimensional dá-nos um valor maior $v = 1.25 \pm 0.02$ que coincide com o valor de \dim_H .

Tais efeitos não eram observados no modelo de Lorenz, onde o originalmente definido $C(l)$ e o integral de correlação modificado usando apenas séries temporais de uma única coordenada nos dão valores de v que coincidem com \dim_H .

A conclusão extraída destes exemplos é que é muitas vezes útil representar o atractor num espaço de dimensão maior do que absolutamente necessário, de forma a reduzir erros sistemáticos. Esses erros resultam de uma cobertura não-uniforme do atractor, desde que esta não-uniformidade não seja tão forte quando fazemos $v \neq \dim_H$.

Capítulo 6

Conclusão

Apesar de bastante recentes, os fractais já se espalharam por quase todos os domínios da actividade humana e as suas aplicações parecem não ter limites. Por outro lado, a geometria fractal aprofundou a ideia intuitiva de infinito. A geometria fractal em paralelo com a teoria do caos teve, também, consequências filosóficas drásticas. Durante milhares de anos, muitos cientistas julgaram que, na posse das leis da Física que regem o Universo, seria possível prever o futuro. Hoje, o determinismo é apenas um conceito teórico: nunca possuiremos aparelhos de medida suficientemente poderosos para que os erros experimentais não influenciem as previsões. No entanto, a geometria fractal veio aprofundar e aperfeiçoar modelos para estudar o Universo, não se pode negar a eficiência das suas aplicações. Este trabalho constata que a geometria fractal, nomeadamente os conceitos de dimensão fractal, têm uma grande aplicabilidade na Matemática e no Universo.

A frase que se houve muito na geometria fractal "a beleza dos fractais" mostra uma vez mais a sua veracidade, tal como em 1918 escreveu Bertrand Russel no seu livro "Misticismos e Lógica": "A matemática possui não apenas a verdade, mas uma beleza suprema - uma beleza fria e austera como a de uma escultura". Este trabalho mostra que formas tão

complexas e tão bonitas, podem ser criadas ou simuladas por processos matemáticos muito simples. O computador é uma ferramenta muito valiosa no estudo da dimensão fractal, porque permite realizar com rapidez uma enorme quantidade de cálculos e representá-los graficamente com grande precisão. Ainda assim, e por muito potente que seja a máquina, a sua capacidade de cálculo e de representação gráfica é sempre limitada; há que ter isso em consideração e imaginar o que esta não consegue executar.

A dimensão fractal é uma propriedade dos objectos fractais. Ela apresenta o nível de ocupação do espaço euclidiano por um objecto fractal. Trata-se de uma característica importante dos fractais, uma vez que um nível maior de ocupação do espaço implica uma estrutura fractal mais complexa, ou seja, a dimensão fractal pode ser utilizada para medir algumas características ligadas à complexidade da imagem.

Essa ligação entre o nível de ocupação de espaço e a complexidade da imagem faz com que a dimensão fractal possa ser utilizada também como uma ferramenta para análise de formas. Isto pode ser observado acompanhando a literatura dos últimos anos, onde a dimensão fractal vem ganhando muita atenção, passando a ser utilizada nas mais diversas áreas do conhecimento.

Dito de outra forma, a dimensão de uma curva fractal é um número que caracteriza a maneira na qual a medida do comprimento entre dois pontos aumenta à medida que a escala diminui.

No entanto, fractais são objectos exclusivamente matemáticos, ou seja, não existem no mundo físico (só na mente humana), pois é impossível em tempo e em espaço concretizá-los graficamente, já que não podemos determinar um número infinito de iteradas de uma função. Isto faz com que a técnica utilizada para o cálculo da dimensão fractal necessite

de ser adaptada para trabalhar com as limitações que o mundo físico impõe. Os métodos existentes utilizam medições de diferentes características da imagem, o que torna alguns deles limitados a certos grupos de imagens. Além dessas limitações, percebe-se que determinados métodos são mais adequados para certas aplicações e grupos de imagens. O que é feito então é adaptar a técnica de estimativa da dimensão fractal para trabalhar com as limitações físicas e auto-semelhança dos objectos, tornando a técnica útil para diferentes objectos fractais.

Como pode ser visto ao longo deste trabalho as técnicas utilizadas para o cálculo da dimensão fractal: dimensão de Hausdorff, dimensão de capacidade e dimensão de correlação, apenas nos dão estimativas desse valor, valor este fraccionário.

A dimensão de Hausdorff e a dimensão de capacidade são dos métodos mais conhecidos para estimar a dimensão fractal. Isto deve-se à sua simplicidade de implementação.

A dimensão de Hausdorff é uma dimensão que pode tomar valores inteiros e é igual à dimensão topológica para objectos uniformes e compactos, por exemplo, o espaço euclidiano \mathbb{R}^n tem dimensão de Hausdorff n . Mas é uma dimensão aplicável a muitos outros conjuntos, como objectos fractais, e toma um valor fraccionário.

O método da dimensão de capacidade consiste em sobrepor à imagem uma rede de quadrados e contar o número de quadrados necessários para cobrir toda a imagem.

De acordo com Grassberger e Procaccia, a dimensão de correlação é uma medida da densidade do atractor dentro do espaço de fases. Os resultados deste Capítulo foram baseados em séries temporais pequenas. Comparando os algoritmos de dimensão de capacidade, a dimensão de correlação tem vantagens. Primeiro, porque a exigência de armazenamento é drasticamente reduzida. Segundo, num algoritmo para o cálculo da dimensão de capaci-

dade pode-se iterar até que todas as "caixas" não-vazias dum dado tamanho l tenham sido visitadas. Isto é claramente impraticável, em particular se l é muito pequeno. Assim, obtemos erros sistemáticos se o número de iterações N é excessivamente grande. Na dimensão de correlação não existe tal problema. Em particular, a restrição de N não induz a erros sistemáticos para além das correcções de escala $C(l) \sim l^v$. Na maioria dos casos o valor da dimensão de correlação está muito próximo da dimensão de Hausdorff. Uma conclusão importante é que se pode distinguir caos determinístico de caos aleatório.

Uma conclusão igualmente importante para mim, após a conclusão deste trabalho, é que aprendi muito mais para além da curiosidade e do interesse inicial que tinha sobre fractais e dimensão fractal. À medida que fui pesquisando, sintetizando e ordenando este trabalho fui compreendendo melhor os conceitos relativos a este tema. Também importante, mas um pouco inquietante é que sinto que este trabalho serviu para adquirir conceitos básicos e fica a sensação que só neste momento estaria em condições para iniciar este estudo. A geometria fractal é um processo que não tem fim. Cada conceito tem uma aplicabilidade noutra contexto de uma forma muito abrangente. Posso concluir que o trabalho foi extremamente gratificante pois a curiosidade e o interesse inicial cresceu amplamente, o que considero muito positivo, pois quanto mais aprendo, mais descubro que muito mais há para aprender.

Bibliografia

- [1] BAKER, Gregory L., GOLLUB, Jerry P.. *Chaotic Dynamics - an Introduction*. New York: Cambridge University Press, 1993

- [2] BARNSELY, Michael F., DEVANAY, Robert L., FISHER, Yuval, MANDELBROT, Benoit B., McGUIRE, Michael, PEITGEN, Heinz-Otto, SAUPE, Dietmar, VOSS, Richard F.. *The Science of Fractal Images*. New York:Springer-Verlag,1988

- [3] BARNSELY, Michael F.. *Fractals Everywhere*. London: Academic Press Professional, 1993

- [4] BÉLAIR, Jacques, BUBUC Serge. *Fractal Geometry and Analysis*. Dordrecht:Kluwer Academic Publishers,1991

- [5] BUNDE, Armin, HAVLIN, S.. *Fractals in Science*. Berlin: Springer-Verlag, 1994

- [6] CROWNOVER, Richard M.. *Introduction to Fractals and Chaos*. London: Jones and Bartlett Publishers International, 1995

- [7] EDGAR, Gerald A.. *Measure, Topology, and Fractal Geometry*. New York: Springer-Verlag, 1990



-
- [8] FALCONER, Keneth. *Fractal Geometry- Mathematical Foundations and Applications*. Chichester: John Wiley & Sons, 1990
- [9] FALCONER, Keneth. *Techniques in Fractal Geometry*. West Sussex: John Wiley & Sons, 1997
- [10] FEDER, Jens. *Fractals*. New York: Plenum Press, 1988
- [11] FERNÁNDEZ, Ana María San Luis, ÁLVAREZ, Benjamín Dugnot. *Notas de Geometria Fractal*. Departamento de Matemática da Universidade de Oviedo, disponível em <http://coco.ccu.uniovi.es/geofractal/>
- [12] FIEDLER-FERRARA, Nelson, PRADO, Carmen P. Cintra do. *Chaos - uma Introdução*. São Paulo: Editora Edgard Blücher LTDA, 1994
- [13] FISHER, Yuval. *Fractal Image Encoding and Analysis*. Berlin: Springer-Verlag, 1998
- [14] FRAME, Michael, MANDELBROT, Benoit. *Fractal Geometry*. Yale University, E.U.A., disponível em <http://classes.yale.edu/fractals>
- [15] GRASSBERGER, Peter, PROCACCIA, Itamar. *Measuring the Strangeness of Strange Attractors*. *Physica 9D*, 1983, p189-208
- [16] HAHN, Brian, VALENTINE, Daniel T.. *Essential MATLAB- for Engineers and Scientists*. Elsevier, 2007
- [17] LASOTA, Andrzej, MACKEY, Michael C.. *Chaos, Fractals, and Noise - Stochastic Aspects of Dynamics*. New York: Springer-Verlag, 1994
- [18] LAVWERIER, Hans. *Fractals*. USA: Penguin Books, 1991

-
- [19] LORENZ, Edward. *The Essence of Chaos*. London:UCL Press, 1993
- [20] LYNCH,Stephen. *Dynamical Systems with Applications using MAPLE*. Boston: Birkhäuser, 2001
- [21] MANDELBROT, Benoit B.. *The Fractals Geometry of Nature*. New York: CRC Press, 1994
- [22] MANDELBROT, Benoit. *Objectos Fractais*. Lisboa: Gradiva, 1991
- [23] McCAULEY, J. L.. *Chaos, Dynamics and Fractals - an algorithmic approach to deterministic chaos*. Cambridge: University Press, 1993
- [24] MOON, Francis C.. *Chaotic and Fractal Dynamics - an Introduction for Applied Scientists and Engineers*. New York: John Wiley & Sons, 1992
- [25] NAKAMURA, Katsuhiko. *Quantum Chaos - A New Paradigm of Nonlinear Dynamics*. New York: Cambridge University Press, 1993
- [26] OTT, Edward. *Chaos in Dynamical Systems*. New York: Cambridge University Press, 1993
- [27] PEITGEN, Heinz-Otto, JÜRGENS, Hartmut, SAUPE, Dietman, MALETSKY, Evan, PERCIANTE, Terry, YUNKER, Lee. *Fractals for the Classroom: Strategic Activities Volume One*. New York: Springer-Verlag, 1992
- [28] PEITGEN, Heinz-Otto, JÜRGENS, Hartmut, SAUPE, Dietman, MALETSKY, Evan, PERCIANTE, Terry, YUNKER, Lee. *Fractals for the Classroom: Strategic Activities Volume Two*. New York: Springer-Verlag, 1992

-
- [29] PEITGEN, H. O., RICHTER, P. H.. *The beauty of fractals: images of complex dynamical systems*. Berlin: Springer-Verlag, 1986
- [30] ROBINSON, Clark. *Dynamical Systems- Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*. New York: W. H: Freeman and Company, 1983
- [31] SERRA, Celso Penteado, KARAS, Elizabeth Wegner. *Fractais Gerados por Sistemas Dinâmicos Complexos*. Curitiba: Editora Champagnat, 1997
- [32] SCHUSTER, Heinz Georg. *Deterministic Chaos - an introduction*. Weinheim: VCH, 1995
- [33] STEVENS, Roger T.. *Creating Fractals*. Hingham: Charles River Media, Inc., 2005
- [34] <http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo2>
- [35] <http://www.rohan.sdsu.edu/~rcarretere>, Versão de 17 de Dezembro de 2007
- [36] <http://pt.wikipedia.org/>