



MODELOS DE CRESCIMENTO POPULACIONAL EM AMBIENTE ALEATÓRIO: EFEITO DE INCORRETA ESPECIFICAÇÃO DO MODELO, EFEITOS DE ALLEE E TEMPOS DE EXTINÇÃO

Clara Sofia Gomes Carlos

Tese apresentada à Universidade de Évora
para obtenção do Grau de Doutor em Matemática
Especialidade: Matemática e Aplicações

ORIENTADOR: *Professor Doutor Carlos Alberto dos Santos Braumann*

ÉVORA, JULHO DE 2013



*Às minhas filhas
Inês e Leonor*

MODELOS DE CRESCIMENTO POPULACIONAL EM AMBIENTE ALEATÓRIO: EFEITO DE INCORRETA ESPECIFICAÇÃO DO MODELO, EFEITOS DE ALLEE E TEMPOS DE EXTINÇÃO

Os modelos de crescimento populacional representam alterações no número de indivíduos de uma determinada população ao longo do tempo. O seu crescimento em ambiente aleatório pode ser modelado por equações diferenciais estocásticas. Estes modelos de crescimento são geralmente baseados em modelos determinísticos clássicos, tais como o modelo logístico e o modelo de Gompertz. No entanto, a verdadeira taxa de crescimento da população é desconhecida, pelo que estudamos o efeito de uma incorreta especificação do modelo. Por outro lado, os modelos estocásticos clássicos não incluem efeitos de Allee, pelo que estudamos modelos gerais e específicos que incorporam esses efeitos.

O objetivo principal deste trabalho é estudar o comportamento destes modelos de crescimento populacional em ambiente aleatório e os tempos de extinção das populações. Para os modelos em estudo, apresentamos expressões explícitas para os momentos dos tempos de extinção, em particular, a média e o desvio padrão.

MODELS OF POPULATION GROWTH IN RANDOM ENVIRONMENTS: EFFECTS OF AN INCORRECT MODEL SPECIFICATION, ALLEE EFFECTS AND EXTINCTION TIMES

Population growth models represent changes in the number of individuals of a given population over time. Its growth in randomly fluctuating environments can be modeled by stochastic differential equations. These growth models are usually based on classical deterministic models such as the logistic model and the Gompertz model. However, the true growth rate of the population is unknown. So, we study the effect of an incorrect model specification. On the other hand, the classical stochastic models do not include Allee effects, so we study general and specific models incorporating these effects.

The main propose of this paper is to study the behavior of these population growth models in a randomly fluctuating environment and the time to extinction of the populations. For these models we present explicit expressions for moments of the time to extinction, in particular, the mean and standard deviation.

Agradecimentos

A realização desta dissertação marca o fim de uma importante etapa da minha vida. Gostaria por isso de agradecer a todos aqueles que contribuíram para a sua concretização.

Em primeiro lugar quero agradecer ao meu orientador, Professor Carlos Braumann, pelo rigor científico e acompanhamento do trabalho, pela disponibilidade e generosidade reveladas ao longo de todos estes anos de trabalho em conjunto, assim como pelas críticas, correções e sugestões valiosas feitas durante a orientação. Mais uma vez, foi um privilégio ter sido sua orientanda.

Aos colegas e amigos da Escola Superior de Tecnologia do Barreiro que iniciaram comigo esta "caminhada", em particular, à Otília, à Anabela, à Telma, à Raquel, à Isabel, ao João Paulo e à Eugénia, o meu obrigada pelo vosso apoio e amizade.

Aos meus amigos "estocásticos" obrigada pela partilha de conhecimentos, de dificuldades e de soluções. Em particular, agradeço à Patrícia pela valiosa ajuda e pela disponibilidade, mas sobretudo pela sua amizade.

Agradeço às seguintes Instituições pelo apoio, sem o qual não seria possível a concretização do trabalho de doutoramento:

- Escola Superior de Tecnologia do Barreiro do Instituto Politécnico de Setúbal;
- Fundação para a Ciência e Tecnologia;
- Centro de Matemática e Aplicações da Universidade de Évora;
- Universidade de Évora.

Por último agradeço à minha Família que esteve sempre presente no decorrer deste trabalho. Em particular aos meus Pais, que sempre me ajudaram e que tornaram possível chegar até aqui, a eles o meu profundo obrigada. Ao Miguel, que sempre me estimula a crescer científica e pessoalmente. Acima de tudo, pelo apoio familiar, preenchendo as diversas falhas que fui tendo por força das circunstâncias, e pela paciência e compreensão reveladas durante esta etapa da nossa vida. Às minhas Filhas, Inês e Leonor, pelo amor, pelo carinho, pela alegria e pela felicidade com que preencheram estes meus longos dias. Espero que o entusiasmo e empenho que dedico ao trabalho, lhes possa servir de estímulo para fazerem sempre "mais e melhor".

Mais uma vez, a Todos os meus sinceros agradecimentos.

Resumo	i
Abstract	iii
Agradecimentos	v
1 INTRODUÇÃO	1
2 NOÇÕES INTRODUTÓRIAS	7
2.1 Processos de difusão	8
2.2 Processo de Wiener	11
2.3 Integrais estocásticos	13
2.4 Equações diferenciais estocásticas	18
2.5 Classificação das fronteiras	20
2.6 Existência de densidade estacionária	23
3 MODELOS CLÁSSICOS DE CRESCIMENTO POPULACIONAL	25
3.1 Modelos determinísticos	26
3.2 Modelos estocásticos	28
3.2.1 Modelo logístico	32
3.2.2 Modelo de Gompertz	33
4 TEMPOS DE EXTINÇÃO	35
4.1 Tempos de primeira passagem	37
4.2 Tempos de extinção	44
4.2.1 Modelo logístico	46
4.2.2 Modelo de Gompertz	48

4.3	Tempos de primeira passagem pelo limiar superior	49
5	EFEITO DE INCORRETA ESPECIFICAÇÃO DO COEFICIENTE DE TENDÊNCIA	51
5.1	Modelo aproximadamente logístico	52
5.2	Modelo aproximadamente de Gompertz	64
6	EFEITO DE INCORRETA ESPECIFICAÇÃO DO COEFICIENTE DE DIFUSÃO	75
6.1	Modelos estocásticos	76
6.2	Tempos de extinção para o modelo logístico	79
6.3	Tempos de extinção para o modelo de Gompertz	84
6.3.1	Primeiro método	84
6.3.2	Segundo método	91
7	MODELOS COM EFEITOS DE ALLEE	97
7.1	Modelos estocásticos com efeitos de Allee fortes	99
7.1.1	Modelo logístico com efeitos de Allee	103
7.1.2	Modelo de Gompertz com efeitos de Allee	111
7.2	Modelos estocásticos com efeitos de Allee fracos	118
8	CONCLUSÃO	123
	Referências Bibliográficas	127
	Índice Remissivo	132

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Os modelos de crescimento populacional representam alterações no número de indivíduos de uma determinada população ao longo do tempo. O seu crescimento em ambiente aleatório pode ser modelado por equações diferenciais estocásticas (EDE). Estes modelos estocásticos são baseados em modelos determinísticos clássicos, usados na literatura, mas que não incorporam o efeito das flutuações aleatórias do ambiente. Dois dos modelos clássicos de crescimento populacional são o modelo logístico e o modelo de Gompertz, pela sua simplicidade e pela aparente boa especificação do crescimento da população. Estes modelos têm sido bastante estudados ao longo dos tempos quer na modelação de crescimento populacional quer no crescimento individual de organismos (animais ou plantas), incorporando ou não o efeito das flutuações aleatórias do ambiente.

Atualmente muitas espécies estão em perigo de extinção. Destruição do seu habitat, captura excessiva, caça furtiva, são algumas das muitas causas. Assim, cada vez mais, é uma preocupação constante a previsão do tempo de extinção de qualquer população e o efeito que nele exercem as alterações ambientais.

Vamos utilizar equações diferenciais estocásticas para descrever o efeito da aleatoriedade ambiental no crescimento populacional. Nestes modelos assume-se que a população está extinta quando o seu tamanho atinge um limiar (de extinção) $q > 0$. Embora haja bastantes estudos sobre os tempos de extinção em modelos de aleatoriedade demográfica, são raros os estudos para os modelos aqui considerados de aleatoriedade ambiental. O caso clássico mais estudado tem sido o movimento browniano geométrico, em que se admite a hipótese irrealista de a taxa de crescimento média *per capita* ser constante. Também o modelo de Ornstein-Uhlenbeck e outros modelos pouco adequados ao estudo do crescimento populacional têm sido considerados.

Na tese de mestrado Carlos (2004) considerámos analiticamente o caso geral mais realista de taxas médias de crescimento *per capita* dependentes da densidade populacional. Em Carlos e Braumann (2005) e Carlos e Braumann (2006), obtivemos expressões analíticas para o tempo médio e desvio padrão dos tempos de extinção. Fizemos, além disso, o estudo numérico para o caso particular dos clássicos modelos logístico e de Gompertz. Braumann (1995) também estudou os tempos de extinção, mas para modelos em que a aleatoriedade ambiental afeta um parâmetro específico da taxa média de crescimento. Podem ver-se nas referências nele contidas mais alguns estudos de natureza semelhantes. Lande *et al.* (2003) também contém um capítulo com o estudo do tempo de extinção para modelos específicos.

No entanto, a verdadeira taxa de crescimento *per capita* é desconhecida e considera-se os modelos logístico e de Gompertz como uma aproximação ao modelo real que se desconhece. Assim, vamos estudar como se comportam estes modelos quando se introduzem alterações na taxa de crescimento *per capita*.

Os efeitos de Allee predominam em muitas populações naturais mas não tinham ainda sido estudados por nós no crescimento populacional. Quando a população, para valores próximos de zero, tem taxa de crescimento *per capita* negativa dizemos que temos um modelo que inclui os efeitos de Allee fortes. Se a taxa de crescimento *per capita* é positiva mas muito reduzida para densidades populacionais muito baixas temos o chamado efeito de Allee fraco. Estudamos as consequências da introdução dos efeitos de Allee nos modelos de crescimento populacional, quer no caso geral quer nos casos particular dos modelos logístico e de Gompertz.

Suponhamos que o crescimento populacional em ambiente aleatório pode ser modelado pela equação diferencial estocástica

$$dX(t) = f(X(t))X(t)dt + \sigma X(t)dW(t), \quad X(0) = x > 0, \quad t \geq 0,$$

onde $X(t) = X$ é o tamanho da população (número de indivíduos, biomassa) no instante t , $f(X)$ é a taxa média de crescimento *per capita*. Como vamos usar o cálculo de Stratonovich, f é a taxa média geométrica de crescimento *per capita* (ver, por exemplo, Braumann (2007b), Braumann (2007c) e Braumann (2007a)). Se usarmos o cálculo de Itô, deveríamos trabalhar com a taxa média aritmética de crescimento *per capita* (ver Braumann (2007b), Braumann (2007c) e Braumann (2007a)) e obteríamos os mesmos resultados só que expressos em termos desta taxa média. A intensidade do efeito das flutuações ambientais no crescimento é medido pelo parâmetro $\sigma > 0$ e $W(t)$ é o processo de Wiener padrão. Diferentes escolhas de f produzem diferentes modelos estocásticos. Assim, quando $f(X) = r(1 - \frac{X}{K})$ temos o modelo logístico estocástico, se $f(X) = r \ln \frac{K}{X}$ temos o modelo de Gompertz estocástico, onde $r > 0$ é a taxa de crescimento intrínseca e $K > 0$ é a capacidade de sustento do meio. Fazendo

as mesmas escolhas para f e com $\sigma = 0$ temos os modelos determinísticos logístico e de Gompertz, respetivamente. Os modelos de equações diferenciais estocásticas são bastante adequados para descrever o comportamento de fenómenos dinâmicos influenciados pelo acaso e têm sido usadas como modelos explicativos de muitos fenómenos físicos, biológicos, sociais, entre outros.

A variável X (tamanho da população) é, nestes modelos, uma variável contínua, mas o tamanho real da população é discreto. Assim sendo, pode acontecer que X assumia valores muito próximos de zero, sem que ocorra a "extinção matemática" (população nula ou a convergir para zero), enquanto que, na realidade, valores inferiores a um indivíduo são impossíveis de ocorrer. Assim, quando estudamos a extinção, convém adotar um conceito mais realista do que o de "extinção matemática", considerando-se extinta qualquer população que atinja um limiar de extinção $q > 0$, adequadamente escolhido. Esse limiar pode ser um indivíduo (ou 2 para populações sexuadas) ou um outro valor superior $q > 0$ desde que implique a extinção sempre que a população desça abaixo desse limiar q .

Considerando f de classe C^1 estritamente decrescente com $f(0^+) > 0$ e $f(+\infty) < 0$ (estamos a excluir para já os efeitos de Allee) verifica-se que a extinção (no sentido acima definido) ocorria com probabilidade um, havendo que determinar a distribuição, e os momentos, do tempo de extinção. Obtivemos (ver Carlos e Braumann (2005) e Carlos e Braumann (2006)) expressões para os momentos e, em particular, para o tempo médio de extinção e desvio padrão. Estudámos graficamente os casos particulares dos modelos logístico e de Gompertz e o comportamento desses momentos com os parâmetros do modelo.

Neste trabalho, começamos por apresentar sucintamente no capítulo 2 alguns resultados fundamentais para o nosso estudo.

No capítulo 3 apresentamos alguns dos modelos clássicos de crescimento populacional, que representam alterações no número de indivíduos de uma determinada população ao longo do tempo. Começamos por apresentar alguns modelos determinísticos clássicos. Com base nos modelos determinísticos construímos os modelos estocásticos que descrevem o crescimento populacional em ambiente aleatório, em particular os modelos logístico e de Gompertz estocásticos. Este trabalho centra-se neste dois modelos. Analisamos o comportamento das fronteiras no espaço de estados e garantimos a existência de densidade estacionária.

O capítulo 4 é dedicado aos tempos de extinção. Apresentamos resultados explícitos da média e da variância dos tempos de primeira passagem pelo limiar q . Obtivemos estes resultados através da resolução de equações diferenciais ordinárias conhecidas com variável

independente $X(0) = x$ (população inicial), que têm como solução os momentos de ordem n dos tempos de primeira passagem por um dos limiares, um inferior q e outro superior Q . Para obter os momentos de ordem n para o limiar inferior q (limiar de extinção) basta fazer a passagem ao limite quando o limiar superior Q se aproxima do limite superior do espaço de estados, a fronteira inatingível $+\infty$. Usando mudanças de variáveis e algumas manipulações algébricas adequadas, obtemos as expressões gerais para o tempo médio de extinção e a respetiva variância as quais são simples e explícitas. Particularizando essas expressões e fazendo algumas manipulações algébricas, obtemos as expressões dos casos particulares dos modelos logístico e de Gompertz. Thomas (1975) já tinha obtido expressões para a média e para a variância do tempo de primeira passagem (embora para o limiar superior) para o modelo de Ornstein-Uhlenbeck, das quais se pode obter as do modelo de Gompertz, uma vez que estas se obtêm do modelo de Ornstein-Uhlenbeck por transformações logarítmicas. No entanto, a expressão para a variância obtida por Thomas (1975) (quando adaptado para o caso do limiar inferior) é bastante mais complicada do que a por nós obtida para o modelo de Gompertz.

Na maior parte dos casos, existe um desconhecimento da lei que descreve a taxa média de crescimento *per capita*, e usamos modelos clássicos, como o modelo logístico e o modelo de Gompertz, como uma boa aproximação. Para estes modelos clássicos estudados na literatura, dispomos, como foi referido, de expressões explícitas que permitem determinar a média e a variância dos tempos de primeira passagem, isto é, que permitem calcular o tempo médio de extinção e respetivo desvio padrão. No capítulo 5 pretendemos determinar o efeito de o modelo "real" não ser o modelo clássico mas apresentar em relação a ele um pequeno desvio. Estudamos as alterações no modelo determinístico e no modelo estocástico, em particular o comportamento das fronteiras e a existência de densidade estacionária. Determinamos as expressões dos tempos de primeira passagem pelo limiar inferior e obtemos minorantes e majorantes úteis para o comportamento da média e da variância dos tempos de extinção, o que permitirá utilizar os modelos clássicos como aproximações e, além disso, determinar o erro máximo cometido por não podermos utilizar o modelo "real". Para os modelos em estudo apresentamos alguns exemplos numéricos do comportamento da média e do desvio padrão dos tempos de extinção.

No entanto, o erro na especificação do modelo estocástico pode não estar na parte determinística mas na parte estocástica da equação diferencial estocástica. De facto, nos modelos estocásticos clássicos assume-se que o efeito destas flutuações na taxa de crescimento *per capita* é uma constante $\sigma > 0$ independente do tamanho da população. Se, porém, esse efeito tiver ligeira dependência da densidade, o modelo "real" pode desviar-se do modelo padrão. No capítulo 6 apresentamos o efeito destas alterações, em particular, o comportamento das fronteiras do espaço de estados, a existência de densidade estacionária

e o problema da estimação dos tempos de extinção, estudando o efeito sobre os tempos de extinção quando os modelos reais se desviam do modelo padrão. Para estes modelos apresentamos as expressões do comportamento da média e do desvio padrão dos tempos de extinção e ilustramos os resultados obtidos com alguns exemplos numéricos.

No capítulo 7, apresentamos o estudo de um modelo geral de crescimento populacional que inclui os efeitos de Allee. No caso de efeitos de Allee fortes consideramos f uma função de classe C^1 estritamente crescente para $X < E$, onde E é o limiar de Allee, e estritamente decrescente para $X > K$ ($0 < E < K < +\infty$) com $f(0^+) < 0$ e $f(+\infty) < 0$. Garantimos a existência e unicidade de solução, estudamos o comportamento das fronteiras e, para $f(0^+)$ finito, demonstramos a inexistência de densidade estacionária. Introduzimos os efeitos de Allee fortes nos modelos clássicos anteriormente estudados, modelos logístico e de Gompertz, e chamaremos a esses modelos, modelo logístico com efeitos de Allee e modelo de Gompertz com efeitos de Allee. Embora neste tipo de modelos possa ocorrer "extinção matemática", estamos interessados em estudar a "extinção realista". Apresentamos as expressões dos tempos de primeira passagem pelo limiar inferior e ilustramos os resultados obtidos com alguns exemplos numéricos do comportamento da média e do desvio padrão dos tempos de extinção.

Por último, apresentamos um modelo geral com efeitos de Allee fracos. Consideramos agora f uma função de classe C^1 estritamente crescente para $X < L$ e estritamente decrescente para $X > L$ ($0 < L < K$) com $f(0^+) > 0$ e $f(+\infty) < 0$. Estudamos o comportamento das fronteiras do espaço de estados e garantimos que para este tipo de modelos existe densidade estacionária. Indicamos como exemplo o modelo logístico com efeitos de Allee fracos.

Os gráficos apresentados neste trabalho foram obtidos através do *software* Maple.

Por último, no capítulo 8, terminamos com as conclusões e eventuais trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

NOÇÕES INTRODUTÓRIAS

Neste capítulo fazemos uma breve revisão sobre os principais conceitos e resultados essenciais ao nosso estudo. Apresentamos algumas definições, teoremas e propriedades. Não faremos demonstrações, já que estas podem ser encontradas em livros de referência (por exemplo, Cox e Miller (1965), Ghikman e Skorohod (1969), Ghikman e Skorohod (1972), Arnold (1974), Karlin e Taylor (1981) ou Øksendal (2003)).

Começamos por definir processo de difusão e apresentamos as equações de Kolmogorov, muito úteis para o caracterizar. De seguida, definimos o processo de Wiener, que é um caso particular especialmente relevante de um processo de difusão, já que a partir dele se podem construir os restantes processos de difusão. O processo de Wiener representa o efeito acumulado das perturbações aleatórias na evolução de determinados fenómenos.

Apresentamos uma breve introdução ao integral estocástico. Consideramos, em particular, os dois cálculos estocásticos mais utilizados, o cálculo de Itô, que possui boas propriedades probabilísticas, e o cálculo de Stratonovich, que usa as regras usuais de cálculo integral. Enunciamos o teorema que garante a existência e unicidade de solução da equação diferencial estocástica.

Finalizamos este capítulo com algumas definições úteis para classificar as fronteiras do espaço de estados e estudar a existência de densidade estacionária.

2.1 Processos de difusão

Os processos de difusão são um caso especial dos processos de Markov contínuos que servem como modelos na teoria das probabilidades para descrever fenômenos físicos, biológicos, etc. O exemplo mais simples e mais usado foi observado pela primeira vez em 1828 pelo botânico escocês Robert Brown, o movimento irregular de um grão de pólen suspenso num fluido, conhecido pelo movimento browniano (Brown (1828)). Mas foi só em 1905 que Einstein (Einstein (1905)), apresentou um modelo matemático do movimento browniano. Em 2005 foi comemorado o centenário do movimento browniano e foi publicado um artigo, Hängi e Marchesoni (2005), sobre o estudo do movimento browniano ao longo destes anos.

Começamos por definir processo de difusão. Considere-se, num espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) , um processo estocástico em tempo contínuo $X_t(\omega)$, com $t \geq 0$, isto é, uma coleção de variáveis aleatórias neste espaço indexada pelo índice t . É habitual abreviar $X_t(\omega)$ para X_t . Usamos indiferentemente as notações X_t ou $X(t)$ conforme seja mais conveniente.

Se $X(t)$ é um processo de Markov, escrevemos as suas probabilidades de transição como

$$P(t, B|s, x) := P(X(t) \in B|X(s) = x),$$

onde $s < t$. Para s, t e x fixos, $P(t, \cdot|s, x)$ é uma função probabilidade na álgebra- σ de Borel \mathcal{B} . Se existir a densidade de transição $p(t, \cdot|s, x)$, virá

$$P(t, B|s, x) = \int_B p(t, y|s, x) dy$$

para todos os conjuntos $B \in \mathcal{B}$.

Definição 2.1.1. *Um processo de difusão X_t ($t \in [0, T]$) é um processo de Markov com trajetórias quase certamente (q.c.) contínuas tal que $X_t \in L^2$ ^[1] e, para todo o $x \in \mathbb{R}$ e $s \in [0, T[$, se tem, com convergências uniformes com respeito a $s \in [0, T[$,*

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta} P[|X_{s+\Delta} - x| > \epsilon | X_s = x] = 0 \quad \forall \epsilon > 0, \quad (2.1.1)$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0^+} E \left[\frac{X_{s+\Delta} - x}{\Delta} \mid X_s = x \right] = a(s, x) \quad (2.1.2)$$

e

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0^+} E \left[\frac{(X_{s+\Delta} - x)^2}{\Delta} \mid X_s = x \right] = b^2(s, x). \quad [2] \quad (2.1.3)$$

Se o processo estiver definido para todo o $T > 0$ podemos considerá-lo definido no intervalo $[0, +\infty[$. A igualdade (2.1.1) significa que é muito pouco provável que existam

^[1]Um espaço L^2 é um espaço de Hilbert real com produto interno $\langle X, Y \rangle = E[XY]$ constituído pelas variáveis aleatórias reais X tais que $\langle X, X \rangle = E[X^2] < +\infty$.

^[2]Caso os momentos (2.1.2) e (2.1.3) não existam, podem ser substituídos por momentos truncados, obtendo-se uma definição mais alargada, mas, nos casos que vamos tratar, este problema não se põe.

alterações bruscas de $X(t)$ num intervalo de tempo muito curto. Ao momento infinitesimal de primeira ordem $a(s, x)$ chamamos coeficiente de tendência ou média infinitesimal e representa a velocidade média no instante s do movimento aleatório descrito por $X(t)$ quando $X(s) = x$. Ao momento infinitesimal de segunda ordem $b^2(s, x)$ chamamos coeficiente de difusão ou variância infinitesimal. Mede a intensidade das flutuações aleatórias e representa a velocidade da variância do processo X no instante s quando $X(s) = x$.

Quando $\Delta \rightarrow 0^+$, obtemos

$$E[X_{s+\Delta} - x | X_s = x] = a(s, x)\Delta + o(\Delta)$$

e

$$\text{Var}[X_{s+\Delta} - x | X_s = x] = b^2(s, x)\Delta + o(\Delta).$$

Assim, $X(s + \Delta) - X(s) \approx a(s, x)\Delta + \sqrt{b^2(s, x)}Z$, onde Z é uma variável aleatória com média 0 e desvio padrão $\sqrt{\Delta}$, que tem a mesma distribuição que $W(s + \Delta) - W(s)$, onde $W(t)$ é o processo de Wiener padrão que adiante definiremos. Se quisermos passar aos diferenciais, obtém-se a equação diferencial estocástica $dX(s) = a(s, x)dt + \sqrt{b^2(s, x)}dW(s)$. Por essa razão, sob certas condições, é natural que a solução da equação diferencial estocástica seja um processo de difusão.

Definição 2.1.2. *O processo de difusão diz-se homogéneo se o coeficiente de tendência e o coeficiente de difusão são independentes de t . Neste caso, podemos designá-los por $a(x)$ e $b^2(x)$.*

Definição 2.1.3. *Seja $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ um processo de difusão. Chamamos operador de difusão*

$$\mathcal{D} = a(s, x)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}b^2(s, x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Se $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ é um processo de difusão homogéneo, vem

$$\mathcal{D} = a(x)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}b^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Suponhamos que a e b são funções contínuas e seja h uma função contínua e limitada e, para um t fixo com $t > s$, definamos

$$u^*(s, x) = E[h(X(t)) | X(s) = x]. \quad (2.1.4)$$

Se u^* é limitada e contínua com primeiras e segundas derivadas parciais com respeito a x contínuas e limitadas, então u^* é diferenciável em s e satisfaz a equação de Kolmogorov regressiva (EKR)

$$\frac{\partial u^*}{\partial t} + \mathcal{D}u^* = 0,$$

com a condição

$$\lim_{s \uparrow t} u^*(s, x) = h(x).$$

A demonstração pode ser vista em Ghikman e Skorohod (1969). Assim, conhecidos $u^*(s, x) = E[h(X(t)) | X(s) = x]$, podemos determinar as probabilidades de transição. É de facto para definir probabilisticamente um processo de difusão, basta conhecer os coeficientes de tendência e de difusão.

No entanto, existe um método mais simples para determinar as probabilidades de transição supondo que existe densidade de transição $p(t, y | s, x)$ contínua em relação a s e com primeira e segunda derivadas parciais contínuas em relação a x . Neste caso, para y e t fixos e $t > s$, a densidade de transição é solução da equação de Kolmogorov regressiva (EKR)

$$\frac{\partial p}{\partial s} + \mathcal{D}p = 0$$

com condição terminal $\lim_{s \uparrow t} p(t, y | s, x) = \delta(x - y)$ ^[3].

Para o caso particular de um processo de difusão homogéneo, se escrevermos $p(\tau, y | x) = p(t, y | t - \tau, x)$, a densidade de transição não depende de t e, como $s = t - \tau$, vem $\frac{\partial}{\partial s} = -\frac{\partial}{\partial \tau}$ e obtemos a equação de Kolmogorov regressiva (EKR)

$$\left(-\frac{\partial}{\partial \tau} + \mathcal{D}\right) p(\tau, y | x) = 0$$

com condição terminal $\lim_{\tau \downarrow 0} p(\tau, y | x) = \delta(x - y)$.

No caso do processo de difusão homogéneo, vem de (2.1.4)

$$\begin{aligned} u(\tau, x) : &= u^*(t - \tau, x) = E[h(X(t)) | X(t - \tau) = x] \\ &= E[h(X(t - (t - \tau))) | X(0) = x] = E[h(X(\tau)) | X(0) = x]. \end{aligned}$$

Então, $u(\tau, x) := E[h(X(\tau)) | X(0) = x]$ satisfaz a EKR

$$-\frac{\partial u}{\partial \tau} + \mathcal{D}u = 0,$$

com a condição

$$\lim_{\tau \downarrow 0} u(\tau, x) = h(x).$$

Também se pode usar a equação de Kolmogorov progressiva (EKP), também chamada equação de Folker-Plank, ou equação de difusão, para a densidade de transição $p(t, y | s, x)$, se existir, supondo $\frac{\partial p}{\partial t}$, $\frac{\partial(a(t, y)p)}{\partial y}$ e $\frac{\partial(b^2(t, y)p)}{\partial y^2}$ contínuas. Para s e x fixos tal que $s < t$, a densidade

^[3]Chama-se função delta de Dirac à função generalizada δ com as seguintes propriedades:

i) $\delta(x) = 0, \forall x \neq 0$; ii) $\delta(x) = +\infty, x = 0$; iii) $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$.

de transição é a solução da equação de Kolmogorov progressiva

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial (a(t, y)p)}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial (b^2(t, y)p)}{\partial y^2} = 0 \quad (2.1.5)$$

com condição inicial $\lim_{t \downarrow s} p(t, y|s, x) = \delta(x - y)$.

Para o caso particular de um processo de difusão homogêneo, se escrevermos $p(\tau, y|x) = p(s + \tau, y|s, x)$, a densidade de transição não depende de s e, como $t = s + \tau$, vem $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau}$ e obtemos a equação de Kolmogorov progressiva (EKP)

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{\partial (a(y)p(\tau, y|x))}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial (b^2(y)p(\tau, y|x))}{\partial y^2} = 0$$

com condição inicial $\lim_{\tau \downarrow 0} p(\tau, y|x) = \delta(x - y)$.

A demonstração rigorosa encontra-se em Ghikman e Skorohod (1969). As equações de Kolmogorov são uma ferramenta muito valiosa para o estudo dos processos de difusão.

2.2 Processo de Wiener

Para o estudo das equações diferenciais estocásticas é fundamental o processo de Wiener. O processo de Wiener descreve o efeito acumulado das perturbações aleatórias que afetam a dinâmica de certos fenômenos. Foi estudado por diversos autores. Em particular, Bachelier usou-o em 1900 para modelar a cotação de ações numa bolsa (ver Bachelier (1900)), Einstein usou-o em 1905 para modelar o movimento browniano (ver Einstein (1905)), mas só em 1920 foi detalhadamente estudado por Wiener e Lévy (pode ver-se em Wiener (1920)). Começamos por apresentar a definição de processo de Wiener padrão.

Definição 2.2.1. *Um processo estocástico $\{W_t, t \geq 0\}$ diz-se um processo de Wiener padrão se verificar as seguintes condições:*

- a) $W(0) = 0$ q.c.
- b) $W(t) - W(s)$ segue uma distribuição normal de média 0 e variância $t - s$, para $s < t$.
- c) Os incrementos $W_{t_1} - W_0, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$, com $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n$, são variáveis aleatórias independentes.

A distribuição dos incrementos do processo de Wiener padrão, $W_t - W_s$, depende apenas do comprimento do intervalo, o que significa que tem incrementos estacionários. No entanto, o processo de Wiener não é estacionário, uma vez que a variância não é constante: $Var[W_t] = Var[W_t - W_0] = t$.

O processo de Wiener, também conhecido por movimento browniano, é um processo de difusão muito simples uma vez que tem coeficiente de tendência nulo e coeficiente de difusão

constante. Quando o coeficiente de difusão é igual a 1 temos um processo de Wiener padrão. É usual, para simplificar, dizer-se processo de Wiener quando nos referimos ao processo de Wiener padrão.

De seguida, enunciamos algumas das propriedades do processo de Wiener W_t :

- $W(t)$ segue uma distribuição normal de média 0 e variância t , o que representamos por $W_t \sim N(0, t)$.
- $COV [W(s), W(t)] = E [W(s)W(t)] = \min(s, t)$.
- O processo de Wiener é não diferenciável q.c. em toda a parte.
- As trajetórias do processo de Wiener têm q.c. variação ilimitada em qualquer intervalo de tempo finito.

Em qualquer instante t , a trajetória tem valor médio 0 mas a variância aumenta com o tempo. Em Arnold (1974) pode ver-se o comportamento assintótico de W_t quando $t \rightarrow +\infty$. Segue-se a definição de ruído branco padrão.

Definição 2.2.2. *O ruído branco padrão $\varepsilon(t)$, com $t \in \mathbb{R}$, é um processo estocástico generalizado gaussiano com média*

$$E[\varepsilon(t)] = 0$$

e função de autocovariância

$$C(\tau) = E[\varepsilon(s)\varepsilon(s + \tau)] = \delta(\tau), \quad (2.2.1)$$

onde δ é a função de Dirac, isto é, $\varepsilon(t)$ tem autocorrelações nulas. A sua transformada de Fourier é uma função constante, ou seja, ε tem densidade espectral constante

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda\tau} C(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi}$$

para todo o λ real.

De (2.2.1) temos que todas as frequências participam com a mesma intensidade, daí a designação de ruído branco, analogamente ao que acontece com a luz branca que também tem densidade espectral constante.

O ruído branco padrão $\varepsilon(t)$ pode ser definido como a derivada no sentido das funções generalizadas, em relação ao tempo, do processo de Wiener padrão

$$\varepsilon(t) = \frac{dW(t)}{dt}$$

ou de forma equivalente, o processo de Wiener padrão $W(t)$ é o integral do ruído branco padrão em relação ao tempo

$$W(t) = \int_0^t \varepsilon(s) ds.$$

Embora a interpretação das equações diferenciais estocásticas possa ser mais intuitiva, é habitual evitar o uso explícito de ruído branco, preferindo usar-se o seu integral, o processo de Wiener padrão.

2.3 Integrais estocásticos

Consideramos a equação diferencial ordinária

$$dX(t) = f(t, X(t)) dt, \quad (2.3.1)$$

com condição inicial $X(0) = x$, o conhecido problema de Cauchy. A solução de (2.3.1) satisfaz $X(t) = X(0) + \int_0^t f(s, X(s)) ds$. Se $X(t)$ representa o tamanho da população no instante t e $X(0)$ é o tamanho da população no instante inicial, $\frac{dX}{dt}$ representa a sua taxa de crescimento. É natural admitir que o crescimento da população tenha pequenas variações que não são explicáveis pela função f , isto é, a equação (2.3.1) não incorpora o efeito aleatório que as flutuações ambientais têm na sua taxa de crescimento. Assim, torna-se necessário adicionar um ruído que incorpore as flutuações ambientais, o que nos conduz a uma equação diferencial estocástica (EDE) da forma

$$dX(t) = f(t, X(t)) dt + g(t, X(t)) \varepsilon(t) dt,$$

ou, de forma equivalente,

$$dX(t) = f(t, X(t)) dt + g(t, X(t)) dW(t), \quad (2.3.2)$$

onde f e g são funções reais contínuas com domínio $[0, T] \times \mathbb{R}$ e a condição inicial $X(0) = x$ é uma variável aleatória independente do processo de Wiener $W(t)$. f representa o valor médio da taxa de crescimento e g representa a intensidade da perturbação dessa taxa induzida pelas flutuações aleatórias do ambiente. O uso de um ruído não autocorrelacionado $\varepsilon(t)$ é uma aproximação matematicamente conveniente e adequada desde que os ruídos naturais, provavelmente autocorrelacionadas, tenham uma correlação pequena. A solução $X(t) = X(t, \omega)$ de (2.3.2) é um processo estocástico que satisfaz a equação integral estocástica

$$X(t) = X(0) + \int_0^t f(s, X(s)) ds + \int_0^t g(s, X(s)) dW(s). \quad (2.3.3)$$

Para determinar a solução da equação (2.3.2) é necessário interpretar os integrais do lado direito da equação (2.3.3). O primeiro integral pode ser interpretado como um integral de Riemann-Stieltjes e podemos usar as regras usuais de cálculo. Quanto ao segundo integral

$$\int_0^t g(s, X(s)) dW(s),$$

não podemos seguir as regras usuais de cálculo uma vez que o processo de Wiener tem, com probabilidade 1, trajetórias contínuas de variação ilimitada em qualquer intervalo de tempo limitado. Necessitamos por isso de definir integrais estocásticos da forma

$$\int_0^t G(s) dW(s).$$

Vejam os exemplos de $G(t) = W(t)$, em que a função G é tão irregular como o processo de Wiener, tendo-se o integral estocástico

$$\int_0^t W(s) dW(s).$$

Apesar de não estarem reunidos os pressupostos, se aplicássemos as regras usuais de cálculo, o integral seria igual a $\frac{W^2(t) - W^2(0)}{2} = \frac{W^2(t)}{2}$.

Vejam os comportamentos das somas de Riemann-Stieltjes

$$S_n = \sum_{i=1}^n W(\tau_{i,n}) (W(t_{i,n}) - W(t_{i-1,n})),$$

com

$$0 = t_{0,n} \leq t_{1,n} \leq \dots \leq t_{n,n} = t \quad (n = 1, 2, \dots)$$

uma qualquer partição do intervalo $[0, t]$, com diâmetro

$$\delta_n = \max_{1 \leq i \leq n} (t_{i,n} - t_{i-1,n})$$

convergente para 0 quando $n \rightarrow +\infty$ e onde, para cada intervalo $[t_{i-1,n}, t_{i,n}]$ da decomposição, $\tau_{i,n}$ é um ponto desse intervalo, conhecido por ponto intermédio.

É fácil verificar que, utilizando as somas de Riemann-Stieltjes, escolhendo para ponto intermédio um ponto inicial, um ponto intermédio ou um ponto terminal do intervalo de decomposição, não existe um limite em média quadrática comum (o mesmo sucede se adotarmos limites quase certos ou limites em probabilidade). Não existe, pois, integral de Riemann-Stieltjes. Pode ver-se em Arnold (1974), na página 59, que

$$S_n \xrightarrow{\text{m.q.}} \frac{W^2(t)}{2} - \frac{t}{2} + \sum_{i=1}^n (\tau_{i,n} - t_{i-1,n}). \quad (2.3.4)$$

Assim a solução da equação diferencial estocástica difere consoante a escolha dos pontos intermédios, $\tau_{i,n}$, com $i = 1 \dots n$. Por exemplo, se escolhermos

$$\tau_{i,n} = (1 - \lambda)t_{i-1,n} + \lambda t_{i,n}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1, \quad i = 1 \dots n,$$

obtemos para (2.3.4)

$$S_n \xrightarrow{\text{m.q.}} \frac{W^2(t)}{2} + \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) t,$$

quando $n \rightarrow +\infty$, limite que denotamos por

$$(\lambda) \int_0^t W(s) dW(s).$$

Em particular, quando escolhermos $\lambda = 0$, isto é, $\tau_{i,n} = t_{i-1,n}$, obtemos o conhecido integral de Itô,

$$(I) \int_0^t W(s) dW(s) = \frac{W^2(t) - t}{2},$$

integral não antecipativo, uma vez que os valores da função integranda são independentes dos incrementos futuros, $W(t_{i,n}) - W(t_{i-1,n})$, do processo integrador, o processo de Wiener. O que significa que, quando usamos o integral de Itô estamos a considerar que o comportamento do fenómeno no presente não depende de futuras perturbações aleatórias. Este integral não segue as regras usuais de cálculo mas o cálculo de Itô tem boas propriedades probabilísticas.

Quando usamos $\lambda = \frac{1}{2}$ temos o conhecido integral de Stratonovich,

$$(S) \int_0^t W(s) dW(s) = \frac{W^2(t)}{2},$$

que é um integral antecipativo. O cálculo de Stratonovich tem a vantagem de utilizar as regras clássicas de integração mas as propriedades probabilística são menos interessantes do que no cálculo de Itô.

Na literatura é usual escrever um "(S)" quando se usa o cálculo de Stratonovich e omitir o "(I)" quando se usa o cálculo de Itô. Neste trabalho vamos usar o cálculo de Stratonovich. Por isso, faremos o contrário, omitimos o "(S)" quando usamos o cálculo de Stratonovich e escrevemos um "(I)" quando falamos do cálculo de Itô.

Definição 2.3.1. *Seja (Ω, \mathcal{F}, P) um espaço de probabilidade, $\{X(t) : t \in [0, T]\}$ um processo estocástico definido nesse espaço e $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ uma família de sub-álgebras- σ de \mathcal{F} tal que $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ para $0 \leq s \leq t \leq T$. A uma tal família chamamos filtração. Se \mathcal{F}_s é independente dos incrementos futuros $W_t - W_s$, para $t > s$, do processo de Wiener, diz-se filtração não-antecipativa.*

Definição 2.3.2. *Considere-se uma filtração não-antecipativa $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$. Chamamos $M^2[0, T]$ ao espaço das funções $G : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que:*

- i) G é conjuntamente mensurável nas suas duas variáveis;*
- ii) G é não-antecipativa em relação à filtração \mathcal{F}_s (também se diz adaptado à filtração), isto é, G_s é \mathcal{F}_s -mensurável, dependendo portanto apenas da informação disponível até ao instante s ;*
- iii) o integral $\int_0^T G^2(s)ds$ existe e é finito q.c..*

Definição 2.3.3. *Sejam W_t um processo de Wiener, $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ uma filtração não-antecipativa, X_0 uma variável aleatória mensurável \mathcal{F}_0 e, portanto independente do processo de Wiener, F uma função conjuntamente mensurável adaptada à filtração \mathcal{F}_s e tal que $\int_0^T |F(s, \omega)|ds < +\infty$ q.c. e G uma função do espaço $M^2[0, T]$. Chama-se processo de Itô (ou integral estocástico) ao processo estocástico da forma*

$$X_t(\omega) = X_0(\omega) + \int_0^t F(s, \omega)ds + (I) \int_0^t G(s, \omega)dW(s, \omega). \quad (2.3.5)$$

Se X_t é um processo de Itô na forma (2.3.5), a equação (2.3.5) pode ser escrita na forma diferencial

$$(I) \quad dX(t) = F(t)dt + G(t)dW(t).$$

Vimos anteriormente que o integral de Itô e o processo de Itô não satisfazem as regras usuais de cálculo integral e diferencial, respetivamente. Necessitamos por isso de obter a regra da cadeia do cálculo diferencial e integral de Itô. Esta regra, conhecida pela fórmula de Itô, é a referida no teorema seguinte.

Teorema 2.3.1. *Seja X_t um processo de Itô dado pela equação diferencial estocástica*

$$(I) \quad dX_t = F(t)dt + G(t)dW_t.$$

Seja $h(t, x)$ uma função contínua com derivada parcial contínua em relação a t e com segunda derivada parcial contínua em relação a x . Então

$$Y_t = h(t, X_t)$$

é também um processo de Itô e

$$(I) \quad dY_t = \frac{\partial h}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial h}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(t, X_t)(dX_t)^2$$

onde $(dX_t)^2 = dX_t dX_t$ pode ser calculado de acordo com as seguintes regras

$$dt dt = dt dW_t = dW_t dt = 0, \quad dW_t dW_t = dt.$$

A demonstração pode ser vista em Øksendal (2003) ou Arnold (1974).

Como exemplo podemos voltar ao integral

$$(I) \quad \int_0^t W_s dW_s.$$

Pelo cálculo usual, o resultado seria $\frac{1}{2}W_t^2$. Escolhemos

$$h(t, x) = \frac{1}{2}x^2$$

e

$$Y_t = h(t, W_t) = \frac{1}{2}W_t^2.$$

Pela fórmula de Itô vem

$$\begin{aligned} (I) \quad dY_t &= \frac{\partial h}{\partial t} dt + \frac{\partial h}{\partial x} dW_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} (dW_t)^2 \\ &= 0 + W_t dW_t + \frac{1}{2} (dW_t)^2 \\ &= W_t dW_t + \frac{1}{2} dt. \end{aligned}$$

Portanto

$$(I) \quad d\left(\frac{1}{2}W_t^2\right) = W_t dW_t + \frac{1}{2} dt.$$

Integrando entre 0 e t , temos

$$(I) \quad \int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t,$$

como tínhamos visto anteriormente.

Como vimos anteriormente, a solução da EDE (2.3.2) depende do cálculo utilizado, sendo os cálculos de Itô e de Stratonovich os cálculos de maior relevância teórica e de aplicabilidade prática. Existe, no entanto, uma relação de equivalência entre estes dois cálculos que pode ser usada. A EDE de Stratonovich

$$dX(t) = f(t, X(t)) dt + g(t, X(t)) dW(t)$$

é equivalente à EDE de Itô

$$(I) \quad dX(t) = \left(f(t, X(t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial g(t, X(t))}{\partial x} g(t, X(t)) \right) dt + g(t, X(t)) dW(t),$$

isto é, tem a mesma solução $X(t)$. Esta relação pode ser usada no sentido contrário, ou seja,

a solução da EDE de Itô

$$(I) \quad dX(t) = f(t, X(t)) dt + g(t, X(t)) dW(t)$$

é equivalente à EDE de Stratonovich

$$dX(t) = \left(f(t, X(t)) - \frac{1}{2} \frac{\partial g(t, X(t))}{\partial x} g(t, X(t)) \right) dt + g(t, X(t)) dW(t).$$

A demonstração pode ser vista em Wong e Zakai (1969).

Obviamente os dois cálculos coincidem quando a função g não depende de x .

A escolha entre estes dois cálculos tem sido um obstáculo na resolução das equações diferenciais estocásticas, uma vez que, dependendo do cálculo utilizado, temos resultados aparentemente diferentes. De acordo com a literatura, o cálculo de Itô deve ser escolhido quando a EDE é usada como aproximação a um fenómeno que ocorre em tempo discreto (as perturbações aleatórias da taxa de crescimento *per capita* são descritas por um ruído branco em tempo discreto). O cálculo de Stratonovich parece ser a melhor escolha quando a EDE (que usa ruído branco) é utilizada como aproximação a um fenómeno que ocorre em tempo contínuo mas com perturbações descritas por um ruído colorido em vez de um ruído branco. A dificuldade da escolha prende-se com a dificuldade em saber se o fenómeno ocorre em tempo discreto ou em tempo contínuo.

Braumann (2007b), Braumann (2007c) e Braumann (2007a) explica a utilização dos diferentes cálculos, cálculo de Itô e cálculo de Stratonovich, para modelos de crescimento populacional. Resolve a controvérsia dos dois cálculos, explicando que a aparente diferença de soluções se deve à suposição incorreta que f representa a mesma taxa média de crescimento nos dois cálculos.

O cálculo de Stratonovich parece ser o mais natural e tem a vantagem de seguir as regras usuais de cálculo integral. Ao longo deste trabalho usaremos o cálculo de Stratonovich. No entanto, os resultados seriam equivalentes se usássemos o cálculo de Itô, apenas seriam apresentados em termos do comportamento de outra taxa média de crescimento.

2.4 Equações diferenciais estocásticas

Consideramos $X(t)$ um processo estocástico, com $t \in [0, T]$ e $W(t)$ um processo de Wiener padrão. Sejam f e g duas funções definidas e mensuráveis em $[0, T] \times \mathbb{R}$. Consideramos a equação diferencial estocástica

$$(I) \quad dX(t) = f(t, X(t)) dt + g(t, X(t)) dW(t)$$

com $X(0) = X_0$ conhecido e $t \in [0, +\infty[$, ou a correspondente equação integral estocástica

$$X(t) = X(0) + \int_0^t f(s, X(s)) ds + (I) \int_0^t g(s, X(s)) dW(s).$$

Enunciamos um dos teoremas mais importantes das equações diferenciais estocásticas, o teorema que garante a existência e unicidade de solução da equação diferencial estocástica.

Teorema 2.4.1. *Sejam f e g duas funções definidas em $[0, T] \times \mathbb{R}$ (com $T > 0$) mensuráveis. Suponhamos que existe uma constante $K > 0$, tal que:*

a) (condição de Lipschitz) para todo $t \in [0, T]$ e $y, z \in \mathbb{R}$,

$$|f(t, x) - f(t, y)| + |g(t, x) - g(t, y)| < K|x - y|,$$

b) (condição de crescimento) para todo $t \in [0, T]$ e $y, z \in \mathbb{R}$,

$$|f(t, x)|^2 + |g(t, x)|^2 < K^2(1 + |x|^2).$$

Seja X_0 uma variável aleatória independente de $W(t)$ para $t \geq 0$.

Então a equação diferencial estocástica

$$(I) \quad dX(t) = f(t, X(t)) dt + g(t, X(t)) dW(t) \quad \text{com} \quad X(0) = X_0, \quad 0 \leq t \leq T < +\infty$$

tem uma única solução $X(t)$, contínua com probabilidade um, que satisfaz a condição inicial $X(0) = X_0$, isto é, se existirem duas soluções contínuas $X(t)$ e $Y(t)$, com a mesma condição inicial $X(0) = Y(0) = X_0$, tem-se $P[\sup_{0 \leq t \leq T} |X(t) - Y(t)| > 0] = 0$.

A demonstração pode ser encontrada em qualquer bom livro de equações diferenciais estocástica, ver Arnold (1974), Ghikman e Skorohod (1972) e Øksendal (2003), por exemplo.

Satisfeitas as condições do teorema de existência e unicidade, a solução $X(t)$ da EDE é um processo de Markov. A demonstração pode ser encontrada em Arnold (1974) ou Ghikman e Skorohod (1972), por exemplo.

Se f e g são funções independentes de t no intervalo $[0, T]$, podemos escrever $f(t, x) = f(x)$ e $g(t, x) = g(x)$. Neste caso, a equação diferencial estocástica

$$(I) \quad dX(t) = f(X(t)) dt + g(X(t)) dW(t),$$

diz-se autónoma e a solução $X(t)$, para $t \in [0, T]$, é um processo de Markov homogéneo.

Se forem verificadas as condições do teorema de existência e unicidade e se as funções f e g forem contínuas em relação a t , se usarmos o cálculo de Itô, a solução $X(t)$ é um processo de difusão com coeficiente de tendência $a(t, x) = f(t, x)$ e coeficiente de difusão

$b^2(t, x) = g^2(t, x)$. A equação diferencial autónoma é um processo de difusão homogéneo com coeficiente de tendência $a(x) = f(x)$ e coeficiente de difusão $b^2(x) = g^2(x)$; a sua solução $X(t)$ é conhecida por difusão de Itô.

Uma vez que a EDE de Stratonovich

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t) \quad (2.4.1)$$

é equivalente a EDE de Itô

$$(I) \quad dX(t) = \left(f(t, X(t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial g(t, X(t))}{\partial x} g(t, X(t)) \right) dt + g(t, X(t))dW(t),$$

a solução de (2.4.1) quando usamos o cálculo de Stratonovich, será um processo de difusão com coeficiente de tendência

$$a(t, x) = f(t, x) + \frac{1}{2} \frac{\partial g(t, x)}{\partial x} g(t, x) = f(t, x) + \frac{1}{4} \frac{\partial b^2(t, x)}{\partial x} \quad (2.4.2)$$

e coeficiente de difusão

$$b^2(t, x) = g^2(t, x). \quad (2.4.3)$$

Em particular, a solução $X(t)$ da equação diferencial estocástica autónoma é um processo de difusão homogéneo com coeficiente de tendência $a(x) = f(x) + \frac{1}{2} \frac{dg(x)}{dx} g(x)$ e coeficiente de difusão $b^2(x) = g^2(x)$ (pode ver-se em Arnold (1974)).

Dado um processo de difusão $X(t)$ com coeficiente de tendência a e coeficiente de difusão b^2 , basta que os dois coeficientes sejam de classe C^1 para garantir a existência e unicidade de solução até um instante de explosão. Pode ver mais detalhes em Ghikman e Skorohod (1972), por exemplo.

2.5 Classificação das fronteiras

Consideramos um processo de difusão homogéneo

$$\{X(t) : t \geq 0\},$$

com valores no intervalo $(0, +\infty)$, com fronteiras $X = 0$ e $X = +\infty$. Ao intervalo $(0, +\infty)$ chamamos espaço de estados, e $X(t) = X$ representa no nosso caso o tamanho da população no instante t . Vamos supor, para valores no interior do espaço de estados, que os coeficientes de tendência e de difusão, a e b^2 , são contínuos. Como se trata de crescimento populacional e vamos considerar populações fechadas à imigração, vamos também supor que $a(0^+) = b^2(0^+) = 0$ e $b^2(X) > 0$ para todo o $X > 0$.

Seja T_y o tempo em que a população atinge pela primeira vez o tamanho y ,

$$T_y = \inf\{t \geq 0 : X(t) = y\},$$

com $y \in (0, +\infty)$. Se y tender para 0 ou $+\infty$ temos $T_{0+} = \lim_{y \rightarrow 0+} T_y$ e $T_{+\infty} = \lim_{y \rightarrow +\infty} T_y$, respetivamente.

Definimos, no interior do espaço de estados, as medidas de escala e de velocidade de $X(t)$ (ver Karlin e Taylor (1981)). A densidade de escala é dada por

$$s(y) = \exp\left(-\int_n^y \frac{2a(\theta)}{b^2(\theta)} d\theta\right), \quad (2.5.1)$$

onde n é uma constante arbitrariamente escolhida (mas fixa) no interior do espaço de estados e a e b^2 são os coeficientes de tendência e de difusão, respetivamente, de $X(t)$. Diferentes escolhas para n correspondem a diferentes constantes multiplicativas da densidade de escala mas não afetam as propriedades relevantes. A densidade de velocidade é dada por

$$m(y) = \frac{1}{s(y)b^2(y)}. \quad (2.5.2)$$

Às "funções de distribuição"

$$S(x) = \int_{n^*}^x s(y) dy$$

e

$$M(x) = \int_{n^*}^x m(y) dy,$$

chamamos função de escala e função de velocidade, respetivamente, com n^* uma constante arbitrariamente escolhida (mas fixa) no interior do espaço de estados. As medidas de escala e velocidade no intervalo $[a, b]$ são dadas por

$$S[a, b] = S(b) - S(a)$$

e

$$M[a, b] = M(b) - M(a),$$

respetivamente.

Uma das classificações possíveis e de relevância para o nosso estudo é saber se as fronteiras são atrativas ou não atrativas. Apresentamos de seguida algumas definições úteis para a classificação das fronteiras, que podem ser vistas, por exemplo, em Karlin e Taylor (1981).

Definição 2.5.1. A fronteira $X = 0$ diz-se não atrativa se existir uma vizinhança $R = (0, y)$, tal que, para qualquer $0 < x < n \in R$, $P[T_{0+} \leq T_n | X(0) = x] = 0$.

A fronteira $X = +\infty$ diz-se não atrativa se existir uma vizinhança $R = (y, +\infty)$, tal que, para qualquer $R \ni n < x < +\infty$, $P[T_{+\infty} \leq T_n | X(0) = x] = 0$.

Significa que a população, começando em x , leva mais tempo a chegar à fronteira do que a desviar-se dela. A fronteira diz-se atrativa se não for não atrativa.

A não atratividade da fronteira $X = 0$ implica que não existe "extinção matemática", ou seja, não existe nenhum t tal que $X(t) = 0$ nem pode acontecer que $X(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$.

A não atratividade da fronteira $X = +\infty$ implica, no caso de $a(x)$ e $b^2(x)$ serem de classe C^1 , a não existência de explosões e, portanto, garante a existência e unicidade da equação diferencial estocástica para todo o $t \geq 0$.

No entanto, quando as fronteiras são atrativas podem ser não atingíveis em tempo finito. De seguida escrevemos a definição de fronteira não atingível.

Definição 2.5.2. A fronteira $X = 0$ diz-se não atingível (ou inatingível) se existir uma vizinhança $R = (0, y)$, tal que, para qualquer $0 < x < n \in R$, $P[T_{0+} < +\infty | X(0) = x] = 0$.

Significa que a população, começando em x , atinge a fronteira em tempo finito, com probabilidade zero. Caso contrário, a fronteira diz-se atingível.

Para classificar as fronteiras, precisamos dos próximos resultados (para mais detalhes, ver Karlin e Taylor (1981)). A fronteira $X = 0$:

- a) É não atrativa sse $S(0, x_0] = +\infty$ para algum $x_0 > 0$;
- b) É atrativa sse $S(0, x_0] < +\infty$ para algum $x_0 > 0$.

De modo análogo, a fronteira $X = +\infty$:

- a) É não atrativa sse $S[x_0, +\infty) = +\infty$ para algum $x_0 > 0$;
- b) É atrativa sse $S[x_0, +\infty) < +\infty$ para algum $x_0 > 0$.

Seja

$$\Sigma(0, x_0] = \int_0^{x_0} S(0, y)m(y)dy$$

com $x_0 > 0$ qualquer. A fronteira $X = 0$:

- a) É atingível sse $\Sigma(0, x_0] < +\infty$;
- b) É não atingível sse $\Sigma(0, x_0] = +\infty$.

Com as respetivas adaptações, obtêm-se os mesmos resultados para a fronteira $X = +\infty$.

Pode verificar-se que, se a fronteira é atingível, então a fronteira é atrativa. Ou de modo equivalente, se a fronteira é não atrativa então a fronteira é inatingível. Verifica-se ainda que, se a fronteira é inatingível, pode ser atrativa ou não atrativa.

2.6 Existência de densidade estacionária

Quando ambas as fronteiras são não atrativas podemos dizer que há uma tendência para as trajetórias que se aproximam da fronteira serem empurradas para o interior do espaço de estados. Admitindo que todos os estados comunicam entre si, a distribuição transiente (distribuição de $X(t)$) poderá ter uma densidade

$$p(t, y) = f_{X(t)}(y) \quad (0 < y < +\infty).$$

Se a distribuição transiente estabiliza de modo que, quando $t \rightarrow +\infty$, $X(t)$ converge para uma distribuição limite com função densidade de probabilidade

$$p(y) = f_{X+\infty}(y) \quad (0 < y < +\infty),$$

chamamos a esta densidade estacionária.

No entanto, o facto de as fronteiras serem não atrativas não garante a existência de densidade estacionária. A existir densidade estacionária, é natural que esta seja proporcional ao tempo de ocupação de cada estado, ou seja, proporcional a m , o que só acontece se $M = \int_0^{+\infty} m(y)dy$ for finito.

A densidade estacionária $p(y)$, quando existe, terá de ser densidade invariante e satisfazer a equação de Kolmogorov progressiva (2.1.5). O processo de difusão homogéneo tem densidade invariante $p(y)$ se, como o próprio nome indica, caso a função densidade de probabilidade de $X(0)$ seja $p(y)$, a função densidade de probabilidade de $X(t)$ também será $p(y)$ para todo o $t \in (0, +\infty)$. Neste caso $\frac{\partial p(y)}{\partial t} = 0$, e a equação de Kolmogorov progressiva (2.1.5) pode ser escrita da seguinte forma

$$\frac{d(a(y)p(y))}{dy} - \frac{1}{2} \frac{d^2(b^2(y)p(y))}{d^2y} = 0.$$

Integrando em ordem a y temos

$$a(y)p(y) - \frac{1}{2} \frac{d(b^2(y)p(y))}{dy} = C_1,$$

com C_1 constante. Multiplicando pelo fator integrante $s(y)$, vem

$$-2s(y)a(y)p(y) + s(y) \frac{d(b^2(y)p(y))}{dy} = -2C_1s(y),$$

que é equivalente a

$$\frac{d(s(y)b^2(y)p(y))}{dy} = C_1s(y),$$

com C constante. Integrando novamente em ordem a y temos

$$s(y)b^2(y)p(y) = CS(y) + D,$$

com D constante, e como $m(y) = \frac{1}{s(y)b^2(y)}$ podemos escrever

$$p(y) = m(y)(CS(y) + D), \quad (2.6.1)$$

com C e D constantes, tal que $p(y) \geq 0$ para todo o $y \in (0, +\infty)$ e $\int_0^{+\infty} p(y)dy = 1$, indispensável para ser uma função densidade de probabilidade.

A expressão (2.6.1) torna-se mais simples quando ambas as fronteiras são não atrativas. Neste caso, sendo ambas as fronteiras não atrativas, significa que $S(y) = -S(y, n^*) \rightarrow -\infty$ quando $y \rightarrow 0$ e $S(y) = S(n^*, y) \rightarrow +\infty$ quando $y \rightarrow +\infty$. Para ter $p(y)$ positivo para todo o $y \in (0, +\infty)$ é necessário que $C = 0$ e a expressão (2.6.1) pode escrever-se

$$p(y) = Dm(y),$$

com D convenientemente escolhido, tal que, $\int_0^{+\infty} p(y)dy = 1$. Assim, quando as fronteiras são não atrativas, a densidade estacionária para o tamanho da população existe se a densidade de velocidade for integrável, $M = \int_0^{+\infty} m(z)dz < +\infty$, e a expressão anterior pode escrever-se na forma

$$p(y) = \frac{m(y)}{\int_0^{+\infty} m(z)dz},$$

com $0 < y < +\infty$.

Um processo de difusão com ambas as fronteiras do espaço de estados não atrativas e com densidade estacionária é um processo ergódico no sentido de que existe uma distribuição limite para a variável $X(t)$ com densidade positiva no interior do espaço de estados e todos esses estados interiores são visitados infinitas vezes. Pode também provar-se que certas esperanças matemáticas (médias de conjunto) podem ser aproximadas pelas médias temporais correspondentes ao longo de uma só trajetória. Pode ver-se mais detalhes, por exemplo, em Ghikman e Skorohod (1972) e Kutoyants (2004).

MODELOS CLÁSSICOS DE CRESCIMENTO POPULACIONAL

O nosso estudo centra-se em modelos de crescimento populacional. Estamos, por isso, interessados na discussão da alteração do tamanho da população ao longo do tempo. No entanto, os modelos de crescimento populacional podem também ser usados para modelar o crescimento individual, que representam alterações no tamanho de um indivíduo ao longo do tempo.

Neste capítulo, começamos por apresentar alguns dos modelos determinísticos mais utilizados em crescimento populacional. Estes modelos são pouco realistas uma vez que não têm em conta as flutuações aleatórias do ambiente onde a população está inserida. Dos modelos determinísticos clássicos, destacam-se o modelo logístico e o modelo de Gompertz, pela sua simplicidade e pela aparente boa especificação do crescimento populacional.

Os modelos estocásticos são geralmente baseados em modelos determinísticos e, na medida em que incluem o efeito das flutuações aleatórias no modelo, são mais realistas. Assim, para descrever o crescimento populacional em ambiente aleatório usamos modelos estocásticos, em particular, apresentamos o estudo do modelo logístico e do modelo de Gompertz. Modelos deste tipo foram estudados na literatura. Levins (1969) apresentou um dos trabalhos pioneiros. O estudo de modelos estocásticos particulares de crescimento populacional em ambiente aleatório, quer os clássicos já referidos quer variantes destes, prosseguiu ao longo dos anos (ver, por exemplo, May (1973), Capocelli e Ricciardi (1974), Tuckwell (1974), Feldman e Roughgarden (1975), Braumann (1983) e Dennis e Patil (1984) e referências neles contidas). Recentemente, Braumann (1999) e Braumann (2008) estudaram as propriedades de modelos gerais de crescimento populacional em ambiente

aleatório sem efeitos de Allee, que incluem os referidos modelos como casos particulares.

3.1 Modelos determinísticos

Seja $X = X(t)$ o tamanho da população no instante t e assumimos que $X(0) = x > 0$ é o tamanho da população no instante inicial. Para descrever o crescimento populacional usamos modelos determinísticos escritos sob a forma de uma equação diferencial autónoma

$$\frac{dX}{dt} = Xf(X), \quad (3.1.1)$$

em que f não depende explicitamente de t . A taxa de crescimento *per capita*

$$\frac{1}{X} \frac{dX}{dt} = f(X),$$

é uma função real f definida para $X > 0$.

Um dos primeiros modelos matemáticos aplicados ao crescimento populacional é o modelo malthusiano criado em 1798 pelo inglês Thomas Malthus, economista e demógrafo (ver Malthus (1798)). O modelo de Malthus, ou modelo exponencial, corresponde a uma taxa de crescimento da população diretamente proporcional ao seu tamanho, ou seja, a taxa de crescimento *per capita* é dada por

$$\frac{1}{X} \frac{dX}{dt} = r, \quad (3.1.2)$$

onde r é constante (também se diz que o crescimento é independente da densidade da população). A solução da equação diferencial (3.1.2) é

$$X(t) = x \exp(rt),$$

conhecido por crescimento exponencial. Se $r < 0$ temos um decrescimento exponencial. Se $r > 0$ temos um crescimento exponencial, que só pode ser registado em intervalos de tempo limitados. Este modelo é bastante simples mas pouco realista, uma vez que pressupõe a inexistência de restrições ao crescimento.

Em 1838, o belga Pearl-Verhulst, matemático, propôs um modelo de crescimento populacional que considera que a taxa de crescimento populacional pode depender da densidade populacional (ver Verhulst (1838)). O seu crescimento ficou conhecido por modelo logístico, ou modelo de Pearl-Verhulst, que se caracteriza por a taxa de crescimento *per capita* decrescer linearmente com o tamanho da população, ou seja,

$$\frac{1}{X} \frac{dX}{dt} = r \left(1 - \frac{X}{K} \right), \quad (3.1.3)$$

sendo $r > 0$ a taxa intrínseca de crescimento e $K > 0$ a capacidade de sustento do meio. A solução da equação diferencial (3.1.3) é dada por

$$X(t) = \frac{K}{\left(\frac{K}{x} - 1\right) e^{-rt} + 1}. \quad (3.1.4)$$

Em 1825 Benjamin Gompertz, matemático e atuário, apresentou um modelo que descrevia o crescimento geométrico da taxa de mortalidade (ver Gompertz (1825)). Este estudo representou um avanço significativo em relação aos estudos de Thomas Malthus no cálculo de anuidades e seguros de vida. Posteriormente, o modelo de sobrevivência foi descrito como um modelo de crescimento para fenômenos biológicos e económicos. O conhecido modelo de Gompertz tem a taxa de crescimento *per capita* dada por

$$\frac{1}{X} \frac{dX}{dt} = r \ln \frac{K}{X}.$$

A solução deste modelo é dada por

$$X(t) = K \exp\left(e^{-rt} \ln \frac{x}{K}\right). \quad (3.1.5)$$

Ao longo do nosso estudo vamos centrar-nos nestes dois últimos modelos, o modelo logístico e o modelo de Gompertz, por serem bastante simples e mais realistas do que o modelo malthusiano. Estes modelos, tal como foram criados, não incorporam efeitos de Allee. Ambos se caracterizam por uma redução da taxa de crescimento *per capita* à medida que a população aumenta, refletindo a redução de recursos disponíveis para a sobrevivência e reprodução de cada indivíduo na população.

Chamamos pontos de equilíbrio aos pontos onde $\frac{dX}{dt} = 0$, isto é, quando a taxa de crescimento populacional é nula.

Para o modelo malthusiano, existe um único ponto de equilíbrio, $X = 0$. Para os modelos logístico e de Gompertz, existem dois pontos de equilíbrio, $X = 0$ e $X = K$.

Recorde-se a definição de estabilidade local para um ponto de equilíbrio $\hat{X} \in \Upsilon$ de um sistema dinâmico

$$\frac{dX}{dt} = g(X)$$

onde $g : \Upsilon \text{ aberto} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 . Diz-se que \hat{X} é localmente estável se, para qualquer vizinhança $U \subset \Upsilon$ de \hat{X} existir uma vizinhança aberta $U_1 \subset U$ de \hat{X} tal que, se $X(t)$ é qualquer solução da equação diferencial com $X(0) \in U_1$, então $X(t) \in U$, $\forall t \geq 0$. Se U_1 se puder escolher de forma a que, quando $X(0) \in U_1$, se tenha $\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = \hat{X}$, então \hat{X} diz-se localmente assintoticamente estável. Um ponto de equilíbrio diz-se instável se não é estável.

Se \hat{X} é um ponto de equilíbrio, $g'(\hat{X}) < 0$ é condição suficiente para que \hat{X} seja assintoticamente estável e $g'(\hat{X}) > 0$ é condição suficiente para que o ponto de equilíbrio seja instável.

Supondo $r > 0$, para os modelos malthusiano, logístico e de Gompertz, o ponto de equilíbrio $X = 0$ é instável. Para os modelos logístico e de Gompertz, o ponto de equilíbrio $X = K$ é assintoticamente estável.

3.2 Modelos estocásticos

O crescimento populacional deve ter em conta as flutuações aleatórias do ambiente que afetam a taxa de crescimento *per capita* da população. O seu crescimento pode ser modelado por uma equação diferencial estocástica

$$\frac{1}{X} \frac{dX}{dt} = f(X) + \sigma \varepsilon(t), \quad X(0) = x, \quad (3.2.1)$$

onde $X = X(t)$ representa o tamanho da população no instante t , f já não pode ser interpretado como a taxa de crescimento *per capita* mas como a taxa média de crescimento *per capita*. Como usamos o cálculo de Stratonovich, trata-se de uma média geométrica (ver Braumann (2007b)). Supõe-se que as flutuações aleatórias da taxa de crescimento *per capita* $\frac{1}{X} \frac{dX}{dt}$ podem ser modeladas por um ruído aditivo, que aproximamos por um ruído branco $\sigma \varepsilon(t)$, onde $\sigma > 0$ mede a intensidade das flutuações aleatórias e $\varepsilon(t)$ é um ruído branco padrão.

A solução da equação diferencial estocástica (3.2.1) é diferente consoante o cálculo estocástico utilizado. No entanto, as soluções são diferentes porque a taxa média de crescimento *per capita* f não é a mesma para os diferentes cálculos. Quando usamos o cálculo de Stratonovich, trata-se de uma média geométrica, que é mais natural num fenómeno do tipo multiplicativo como é o crescimento populacional. Quando usamos o cálculo de Itô, trata-se de uma média aritmética. Para mais detalhes, ver Braumann (2007b), onde se resolve a controvérsia para modelos gerais de crescimento populacional com intensidade de ruído constante, Braumann (2007a) estende ao caso de modelos com capturas e Braumann (2007c) apresenta resultados para modelos com intensidade de ruído dependentes da densidade populacional.

A aparente diferença entre os cálculos de Itô e de Stratonovich deve-se a não se ter em conta que a parte determinística da equação representa diferentes tipos de taxa média de crescimento. No modelo determinístico, a equação (3.2.1) com $\sigma = 0$, a taxa de crescimento *per capita* $r(x)$ quando o tamanho da população no instante t é x , é dada por

$$r(x) := \frac{1}{x} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X(t + \Delta t) - x}{\Delta t} = \frac{1}{x} x f(x) = f(x).$$

No modelo estocástico, quando usamos o cálculo de Itô na equação (3.2.1)

$$(I) \quad \frac{1}{X} \frac{dX}{dt} = f_i(X) + \sigma\varepsilon(t), \quad X(0) = x,$$

$f_i(x) = r_{arit}(x)$ representa a taxa média aritmética de crescimento *per capita* dada por

$$r_{arit}(x) := \frac{1}{x} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E[X(t + \Delta t) | X(t) = x] - x}{\Delta t} = \frac{1}{x} a(x) = f_i(x).$$

Se usarmos o cálculo de Stratonovich na equação (3.2.1)

$$\frac{1}{X} \frac{dX}{dt} = f_s(X) + \sigma\varepsilon(t), \quad X(0) = x,$$

$f_s(x) = r_{geom}(x)$ representa a taxa média geométrica de crescimento *per capita*, onde

$$r_{geom}(x) := \frac{1}{x} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\exp(E[\ln X(t + \Delta t) | X(t) = x]) - x}{\Delta t} = \frac{1}{x} a(x) = f_s(x).$$

Assim, $f(x)$ representa duas taxas médias de crescimento *per capita* diferentes, a taxa média aritmética quando usamos o cálculo de Itô e a taxa média geométrica quando usamos o cálculo de Stratonovich. Se tivermos em conta a diferença entre as duas médias, os dois cálculos coincidem. Sabendo uma das médias obtemos facilmente a outra. Para (3.2.1), temos $r_{arit}(x) = r_{geom}(x) + \frac{\sigma^2}{2}$, onde σ é a intensidade *per capita* do ruído ambiental.

Dois exemplos clássicos são o modelo logístico e o modelo de Gompertz com $f(X) = r \left(1 - \frac{X}{K}\right)$ e $f(X) = r \ln \frac{K}{X}$, respetivamente, onde $r > 0$ representa a taxa intrínseca de crescimento e K a capacidade de sustento do meio. As versões estocásticas dos modelos logístico e de Gompertz têm sido estudadas e aplicadas não só para modelar o crescimento populacional como também para modelar o crescimento individual.

Começamos por fazer o estudo de modelos estocásticos descritos pela equação (3.2.1), onde os modelos logístico e de Gompertz são um caso particular. Estes e outros modelos específicos têm sido estudados na literatura, em particular o comportamento das fronteiras do espaço de estados, a existência de densidade estacionária e os tempos de extinção. Ver, por exemplo, Levins (1969), Capocelli e Ricciardi (1974), Tuckwell (1974), Braumann (1993), Braumann (1995) e Braumann (2005).

Na maior parte dos casos, pouco se conhece sobre a função f , mas, excluindo os efeitos de Allee, é biologicamente realista supor que a função f para $X > 0$ satisfaz as condições: $f(0^+) > 0$, f é de classe C^1 e f é estritamente decrescente (isto é, quanto maior é a população mais difícil é para um indivíduo sobreviver e reproduzir-se) e $f(+\infty) < 0$. Satisfeitas estas condições, como é o caso dos modelos logístico e de Gompertz, a EDE tem solução única até

um instante de explosão e é um processo de difusão homogêneo com coeficiente de tendência

$$a(x) = \left(f(x) + \frac{\sigma^2}{2} \right) x,$$

e coeficiente de difusão

$$b^2(x) = \sigma^2 x^2,$$

usando as expressões (2.4.2) e (2.4.3), respetivamente. Conhecendo os coeficientes de tendência e de difusão, usando (2.5.1) e (2.5.2), podemos escrever a densidade de escala e a densidade de velocidade,

$$s(y) = \frac{C}{y} \exp \left(-\frac{2}{\sigma^2} \int_n^y \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta \right)$$

e

$$m(y) = \frac{1}{C\sigma^2 y} \exp \left(\frac{2}{\sigma^2} \int_n^y \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta \right),$$

respetivamente, com C constante arbitrária.

O espaço de estados é o intervalo $(0, +\infty)$ e as fronteiras são $X = 0$ e $X = +\infty$.

Vejamos que a fronteira $X = 0$ é não atrativa, ou seja, não ocorre extinção matemática. Seja $K = \inf\{X > 0 : f(X) = 0\}$ finito e consideramos modelos do tipo (3.2.1) com f satisfazendo as condições acima referidas. São casos particulares os modelos logístico e de Gompertz estocásticos. Para qualquer $0 < x_0 < n < K$ e para $0 < y \leq x_0$ vem

$$\exp \left(-\frac{2}{\sigma^2} \int_n^y \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta \right) = \exp \left(\frac{2}{\sigma^2} \int_y^n \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta \right) \geq 1,$$

porque, como f é decrescente e $n < K$, $f(n) \geq 0$ no intervalo de integração. Vem

$$S(0, x_0] = \int_0^{x_0} s(y) dy \geq \int_0^{x_0} \frac{C}{y} dy = +\infty,$$

o que mostra que a fronteira $X = 0$ é não atrativa.

Vejamos que a fronteira $X = +\infty$ é não atrativa, pelo que não existem explosões. Seja $x_0 > K$ e $x_0 \leq y < +\infty$. Como f é negativa no intervalo de integração, vem

$$\begin{aligned} \exp \left(-\frac{2}{\sigma^2} \int_n^y \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta \right) &= \exp \left(-\frac{2}{\sigma^2} \int_n^{x_0} \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta \right) \exp \left(-\frac{2}{\sigma^2} \int_{x_0}^y \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta \right) \\ &\geq \exp \left(-\frac{2}{\sigma^2} \int_n^{x_0} \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta \right) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$S[x_0, +\infty) = \int_{x_0}^{+\infty} s(y) dy \geq C \exp \left(-\frac{2}{\sigma^2} \int_n^{x_0} \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta \right) \int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{y} dy = +\infty,$$

o que mostra que a fronteira $X = +\infty$ é uma fronteira não atrativa.

Acabamos de mostrar que ambas as fronteiras são não atrativas, ou seja, não ocorre extinção matemática nem existem explosões, garantindo a existência e unicidade de solução da EDE.

Como as fronteiras $X = 0$ e $X = +\infty$ são não atrativas, a densidade estacionária para o tamanho da população do modelo estocástico existe se a densidade de velocidade for integrável no intervalo $(0, +\infty)$, isto é, $M = \int_0^{+\infty} m(y)dy < +\infty$. Vamos mostrar que $M < +\infty$. Seja

$$M = M_1 + M_2 + M_3 = \int_0^{y_1} m(y)dy + \int_{y_1}^{y_2} m(y)dy + \int_{y_2}^{+\infty} m(y)dy.$$

Fixamos $n < K$. Para $n > K$ a demonstração é análoga. Sejam y_1 e y_2 tais que $0 < y_1 < n < K < y_2$.

Começamos por mostrar que $M_1 = \int_0^{y_1} m(y)dy < +\infty$. Sejam $y \in (0, y_1]$ e $\theta \in [y, n]$. Como f é decrescente, $f(\theta) \geq f(n)$. Seja $V(y) = -\frac{2}{\sigma^2}f(n) \int_y^n \frac{1}{\theta}d\theta$, o que implica que $V(0^+) = -\infty$ e $V'(y) = \frac{2}{\sigma^2}f(n)\frac{1}{y}$. Deste modo, podemos concluir que

$$\begin{aligned} m(y) &= \frac{1}{C\sigma^2 y} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int_n^y \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta\right) \\ &= \frac{1}{C\sigma^2 y} \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2} \int_y^n \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta\right) \\ &\leq \frac{1}{C\sigma^2 y} \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2} f(n) \int_y^n \frac{1}{\theta} d\theta\right) \\ &= \frac{1}{C\sigma^2 y} \exp(V(y)) \\ &= \frac{1}{2f(n)C} \frac{d \exp(V(y))}{dy}. \end{aligned}$$

Donde,

$$M_1 = \int_0^{y_1} m(y)dy \leq \frac{1}{2f(n)C} (\exp(V(y_1)) - \exp(V(0^+))) < +\infty,$$

como queríamos mostrar.

Vamos agora provar que $M_3 = \int_{y_2}^{+\infty} m(y)dy < +\infty$. Sejam $y \in [y_2, +\infty[$ e $\theta \in [n, y]$. Fazemos

$$\frac{2}{\sigma^2} \int_n^y \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta = \frac{2}{\sigma^2} \int_n^{y_2} \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta + \frac{2}{\sigma^2} \int_{y_2}^y \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta = A + B(y).$$

Sabemos que $B(y) \leq \frac{2}{\sigma^2} f(y_2) \ln \frac{y}{y_2}$. Assim,

$$\begin{aligned} m(y) &= \frac{1}{C\sigma^2 y} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int_n^y \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta\right) \\ &\leq \frac{1}{C\sigma^2 y} \exp\left(A + \frac{2}{\sigma^2} f(y_2) \ln \frac{y}{y_2}\right) \\ &= \frac{1}{C\sigma^2 y} \exp(A) \exp\left(\ln\left(\frac{y}{y_2}\right)^{\frac{2}{\sigma^2} f(y_2)}\right) \\ &= c_1 y^{\frac{2}{\sigma^2} f(y_2) - 1}, \end{aligned}$$

com c_1 constante positiva. Como $K < y_2$ temos que $f(y_2) \leq f(K) = 0$ e

$$\int_{y_2}^{+\infty} m(y) dy \leq \int_{y_2}^{+\infty} c_1 y^{\frac{2}{\sigma^2} f(y_2) - 1} dy < +\infty,$$

como queríamos demonstrar.

Por último, é fácil justificar que $M_2 < +\infty$, porque a função integranda é contínua num intervalo de integração fechado $[y_1, y_2]$.

Garantimos a existência de densidade estacionária, dada por

$$p(y) = D \frac{1}{y} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int_n^y \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta\right), \quad (3.2.2)$$

com D constante positiva tal que $\int_0^{+\infty} p(y) dy = 1$, isto é, $D = \frac{1}{\int_0^{+\infty} \frac{1}{y} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int_n^y \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta\right) dy}$.

3.2.1 Modelo logístico

Em ambiente aleatório, consideremos o modelo logístico de crescimento populacional, descrito pela seguinte EDE

$$\frac{1}{X} \frac{dX}{dt} = r \left(1 - \frac{X}{K}\right) + \sigma \varepsilon(t), \quad X(0) = x,$$

para o qual garantimos anteriormente a existência e unicidade de solução. Para obter a solução, usando o cálculo de Stratonovich, basta fazer a mudança de variável $Z = \frac{K}{X}$ e multiplicar ambos os membros da equação por $e^{rt + \sigma W(t)}$. Obtemos

$$X(t) = \frac{K e^{rt + \sigma W(t)}}{\frac{K}{x} + r \int_0^t e^{rs + \sigma W(s)} ds} \quad (3.2.3)$$

para solução da EDE.

Em relação à densidade estacionária, fazendo $f(X) = r \left(1 - \frac{X}{K}\right)$ em (3.2.2), obtemos

$$p(y) = D_1 y^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} \exp\left(-\frac{2ry}{\sigma^2 K}\right)$$

com $y \in (0, +\infty)$ e D_1 constante positiva tal que $\int_0^{+\infty} p(y) dy = 1$. Vê-se que $p(y)$ é a densidade de uma distribuição Gama com parâmetro de forma $\frac{2r}{\sigma^2}$ e parâmetro de escala $\frac{\sigma^2 K}{2r}$, pelo que

$$p(y) = \frac{1}{\left(\frac{\sigma^2 K}{2r}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}} \Gamma\left(\frac{2r}{\sigma^2}\right)} y^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} \exp\left(-\frac{y}{\frac{\sigma^2 K}{2r}}\right) \quad (0 < y < +\infty).$$

A densidade estacionária tem média K , variância $\frac{\sigma^2 K^2}{2r}$ e moda $K \left(1 - \frac{\sigma^2}{2r}\right)$.

3.2.2 Modelo de Gompertz

Em ambiente aleatório, consideremos o modelo de Gompertz de crescimento populacional, descrito pela seguinte EDE de Stratonovich

$$\frac{1}{X} \frac{dX}{dt} = r \ln \frac{K}{X} + \sigma \varepsilon(t), \quad X(0) = x,$$

para o qual garantimos anteriormente a existência e unicidade de solução. Para obter a solução, basta fazer a mudança de variável $Z = \ln \frac{X}{K}$, multiplicar ambas as expressões por e^{rt} e integrar entre 0 e t , obtendo-se

$$Z(t) = e^{-rt} Z(0) + \sigma e^{-rt} \int_0^t e^{rs} dW(s). \quad (3.2.4)$$

Assim, a solução da equação diferencial estocástica é dada por

$$X(t) = K \exp\left(e^{-rt} \ln \frac{x}{K} + \sigma e^{-rt} \int_0^t e^{rs} dW(s)\right). \quad (3.2.5)$$

Fazendo $f(X) = r \ln \frac{K}{X}$ em (3.2.2), obtemos a densidade estacionária do modelo de Gompertz

$$p(y) = D_1 \frac{1}{y} \exp\left(-\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \frac{K}{y}\right),$$

com $y \in (0, +\infty)$ e D_1 constante positiva tal que $\int_0^{+\infty} p(y) dy = 1$, que é a densidade de uma distribuição lognormal. Fazendo a mudança de variável $z = \ln \frac{y}{K}$, temos

$$p(z) = D \exp\left(-\frac{r}{\sigma^2} z^2\right),$$

com D constante positiva tal que $\int_{-\infty}^{+\infty} p(z) dz = 1$, que é a densidade de uma normal.

Logo, assintoticamente quando $t \rightarrow +\infty$, $Z(t) = \ln \frac{X(t)}{K}$ segue uma distribuição normal com densidade

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi \frac{\sigma^2}{r}}} \exp\left(-\frac{z^2}{\frac{\sigma^2}{r}}\right) \quad (-\infty < z < +\infty),$$

isto é, com média 0 e variância $\frac{\sigma^2}{2r}$.

Neste caso podemos obter a distribuição transiente, isto é, a distribuição num certo instante t finito, uma vez que em (3.2.4) a função integranda do integral estocástico é determinística. Logo, o integral estocástico é gaussiano com média zero e variância

$$E \left[\left(\int_0^t e^{rs} dW(s) \right)^2 \right] = E \left[\int_0^t e^{2rs} dW(s) \right] = \frac{1}{2r} (e^{2rt} - 1).$$

Esta propriedade do integral de Itô que, neste caso de função integranda determinística, coincide com o integral de Stratonovich, pode ser vista em Øksendal (2003), por exemplo. Logo $Z(t)$ segue uma distribuição normal com média $Z(0)e^{-rt}$ e variância $\frac{\sigma^2}{2r} (1 - e^{-2rt})$. Quando $t \rightarrow +\infty$, $Z(t)$ converge para a distribuição estacionária, pois $Z(0)e^{-rt} \rightarrow 0$ e $\frac{\sigma^2}{2r} (1 - e^{-2rt}) \rightarrow \frac{\sigma^2}{2r}$.

TEMPOS DE EXTINÇÃO

Atualmente muitas são as espécies que estão em perigo de extinção. As causas da extinção são muito diversas: intervenção humana, destruição do seu habitat, captura excessiva, caça furtiva, introdução de novos predadores, entre outras. Interessa por isso estudar os tempos de extinção destas populações, ou seja, o tempo que leva para uma determinada população se extinguir. Encontramos na literatura vários estudos sobre os tempos de extinção: Lande *et al.* (2003) contém um capítulo com o estudo do tempo de extinção para modelos específicos; Braumann (1995) também estudou os tempos de extinção, mas para modelos em que a aleatoriedade ambiental afeta um parâmetro específico de taxa média de crescimento (podem ver-se nas referências nele contidas mais alguns estudos de natureza semelhante); Patie (2004) escreveu a sua tese de doutoramento sobre os tempos de primeira passagem para aplicações financeiras.

O facto de não existir "extinção matemática" para certos modelos não significa que não exista "extinção realista", ou seja, a população não esteja extinta no sentido biológico. Para modelos em que a variável de estado X , que representa o tamanho da população, é contínua e o tamanho real da população é discreto, pode acontecer que X seja igual, por exemplo, a 0.5 indivíduos, não havendo "extinção matemática", isto é, não tomando X o valor 0 ou não convergindo para 0 quando $t \rightarrow +\infty$. Existe, porém, "extinção realista", uma vez que não existem populações com menos de um indivíduo. Assim, para estudar a extinção de qualquer população é preferível usar o conceito de "extinção realista" ao invés de "extinção matemática". Definimos à partida um limiar de extinção q e consideramos que a população está extinta quando atingir esse limiar pela primeira vez. Para a população não estar extinta à partida consideramos que a população no instante inicial é superior a esse limiar ($X(0) = x > q$).

Neste capítulo apresentamos alguns resultados que já havíamos mostrado em trabalhos anteriores e apresentamos outros que tinham ficado por resolver. Começamos por obter expressões para os tempos de primeira passagem por dois limiares, um inferior q e outro superior Q , relativamente ao tamanho x da população no instante inicial. Apresentamos a expressão para os momentos de ordem n dos tempos de primeira passagem e, em particular, as expressões da média e do desvio padrão do tempo de primeira passagem por um dos limiares.

Fazendo o limiar superior Q tender para $+\infty$ e uma vez que, nos nossos modelos, esta fronteira é inatingível, obtemos as expressões para os tempos de primeira passagem pelo limiar inferior q . Este limiar inferior pode ser considerado o limiar de extinção da população e obtemos os momentos de ordem n dos tempos de extinção. Em particular, apresentamos as fórmulas da média e do desvio padrão do tempo de extinção. Claro que nada impede que q seja outro limiar cujo tempo de primeira passagem queiramos estudar. Por exemplo, um limiar mínimo definido por razões de prevenção ambiental ou, em caça ou pesca, um limiar mínimo de sustentabilidade económica de exploração.

Fazendo o limiar inferior q tender para 0 e uma vez que, nos nossos modelos, esta fronteira também é inatingível, obtemos as expressões para os tempos de primeira passagem pelo limiar superior Q . Este limiar superior pode ser usado em várias aplicações, como sejam, por exemplo, no controlo de pestes (limiar que representa grave prejuízo), ou no crescimento de populações economicamente exploradas, representando um tamanho adequado para a exploração económica.

Braumann (2008) estudou o crescimento e extinção de populações em ambiente aleatório. Em Carlos e Braumann (2005) e Carlos e Braumann (2006) obtivemos resultados dos tempos de primeira passagem pelo limiar inferior para modelos de crescimento populacional. Aplicámos os resultados aos modelos logístico e de Gompertz com os dois cálculos estocásticos mais utilizados, o cálculo de Itô e o cálculo de Stratonovich.

Em Braumann *et al.* (2009), Braumann *et al.* (2011) e Carlos *et al.* (2013) apresentámos resultados dos tempos de primeira passagem pelo limiar superior Q para modelos de crescimento individual e ilustrámos com o peso de bovinos *Mertolengos* da estirpe *rosilho*. Considerámos dois modelos, o modelo de Gompertz e o modelo de Bertalanffy-Richards, usámos os parâmetros estimados pelo método da máxima verosimilhança (ver Filipe e Braumann (2007), Filipe *et al.* (2007), Filipe e Braumann (2008), e Filipe *et al.* (2008)), baseados em dados de crescimento de bovinos. Modelos deste tipo também foram usados para descrever o crescimento de árvores em Garcia (1983)

e mais recentemente em Qiming e Pitchford (2007) para descrever o crescimento de peixes. Em particular, dado um peso considerado ideal para abate, determinámos a média e o desvio padrão do tempo necessário para um animal atingir esse peso.

4.1 Tempos de primeira passagem

Seja $X(t)$, com $t \in [0, +\infty)$, um processo de difusão homogéneo com coeficiente de tendência a e coeficiente de difusão b^2 , ambas funções contínuas em x e sejam 0 e $+\infty$ as fronteiras do espaço de estados. Suponhamos que o processo é regular, isto é,

$$P[T_y < +\infty | X(0) = x] > 0$$

com $0 < y < +\infty$, onde

$$T_y = \inf\{t \geq 0 : X(t) = y\}$$

é o tempo de primeira passagem de $X(t)$ por y (se o processo não passar por y temos $T_y = +\infty$). A regularidade significa que todos os estados comunicam entre si, ou seja, a probabilidade de transição entre quaisquer dois pontos do interior do espaço de estados é positiva, característica que é verificada pelos processos ergódicos.

Consideramos q e Q dois pontos interiores do espaço de estados. Suponhamos que q é um valor inferior e Q é um valor superior relativamente ao valor do processo no instante inicial $X(0) = x$. Assim, q e Q são dois pontos do espaço de estados tal que $0 < q < x < Q < +\infty$ e seja

$$T_{q,Q} = \min\{T_q, T_Q\}$$

o instante em que o processo $X(t)$ atinge q ou Q pela primeira vez.

Começamos por enunciar a fórmula de Dynkin, fundamental para a demonstração dos teoremas abaixo enunciados.

Teorema 4.1.1. Fórmula de Dynkin

Seja h uma função real de classe C^2 e suporte compacto. Suponhamos que, para qualquer tempo de Markov τ , $E[\tau | X(0) = x] < +\infty$. Então

$$E[h(X(\tau)) | X(0) = x] = h(x) + E\left[\int_0^\tau \mathcal{D}h(X(s)) ds \mid X(0) = x\right].$$

Para obter mais detalhes sobre a fórmula de Dynkin e sua demonstração, ver Øksendal (2003) e Braumann (2005).

Os próximos teoremas, cuja demonstração se pode ver, por exemplo, em Ghikman e Skorohod (1972) (uma justificação heurística pode ver-se em Karlin e Taylor

(1981)), permitem-nos obter as fórmulas explícitas para os momentos de ordem $n \in \mathbb{N}$ do tempo de primeira passagem, em particular, a média e a variância de $T_{q,Q}$.

Teorema 4.1.2. *Seja $u(x)$, com $x \in [q, Q]$, uma solução da equação diferencial*

$$\mathcal{D}u(x) = 0, \quad (4.1.1)$$

com $u(q) = 0$ e $u(Q) = 1$. Então

$$u(x) = P[T_Q < T_q | X(0) = x].$$

Demonstração

Seja $\tau = \min\{T, T_{q,Q}\}$ com $T > 0$ fixo. Obviamente $E[\tau | X(0) = x] < +\infty$ e aplicando a fórmula de Dynkin a u vem

$$E[u(X(\tau)) | X(0) = x] = u(x) + E \left[\int_0^\tau \mathcal{D}u(X(s)) ds \mid X(0) = x \right].$$

Para $s \leq \tau$, temos $X(s) \in [q, Q]$ e, por hipótese, $\mathcal{D}u(X(s)) = 0$, donde

$$E[u(X(\tau)) | X(0) = x] = u(x).$$

Fazendo $T \rightarrow +\infty$, temos que $\tau \rightarrow T_{q,Q}$ e podemos escrever

$$E[u(X(T_{q,Q})) | X(0) = x] = u(x).$$

Como

$$X(T_{q,Q}) = \begin{cases} q & \text{se } T_q < T_Q \\ Q & \text{se } T_q > T_Q, \end{cases}$$

temos

$$E[u(X(T_{q,Q})) | X(0) = x] = u(q) (1 - P[T_Q < T_q | X(0) = x]) + u(Q) P[T_Q < T_q | X(0) = x].$$

Como $u(q) = 0$ e $u(Q) = 1$, vem

$$u(x) = E[u(X(T_{q,Q})) | X(0) = x] = P[T_Q < T_q | X(0) = x],$$

como queríamos demonstrar.

De seguida resolvemos a equação diferencial para obter uma expressão explícita para $P[T_Q < T_q | X(0) = x]$.

Podemos escrever (4.1.1) na forma

$$a(x) \frac{du(x)}{dx} + \frac{1}{2} b^2(x) \frac{d^2u(x)}{dx^2} = 0,$$

que é equivalente a

$$-\frac{1}{2} b^2(x) \left(-\frac{2a(x)}{b^2(x)} \right) \frac{du(x)}{dx} + \frac{1}{2} b^2(x) \frac{d^2u(x)}{dx^2} = 0.$$

Como $s'(x) = -\frac{2a(x)}{b^2(x)}s(x)$, a equação diferencial pode ser escrita do seguinte modo

$$-\frac{1}{2} b^2(x) \frac{s'(x)}{s(x)} \frac{du(x)}{dx} + \frac{1}{2} b^2(x) \frac{d^2u(x)}{dx^2} = 0,$$

ou seja

$$\frac{1}{2} \frac{1}{m(x)} \left(-\frac{s'(x)}{s^2(x)} \frac{du(x)}{dx} + \frac{1}{s(x)} \frac{d^2u(x)}{dx^2} \right) = 0,$$

pelo que

$$\frac{1}{2} \frac{1}{m(x)} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{s(x)} \frac{du(x)}{dx} \right) = 0,$$

donde

$$\frac{d}{dM(x)} \left(\frac{du(x)}{dS(x)} \right) = 0. \quad (4.1.2)$$

Para obter a expressão explícita de $u(x)$, basta integrar com respeito a M a equação (4.1.2), obtendo-se

$$\frac{du(x)}{dS(x)} = A,$$

e, em seguida, integrar em relação a S para ter

$$u(x) = AS(x) + B,$$

com A e B constantes. Utilizando as condições de fronteira, $u(q) = 0$ e $u(Q) = 1$, determinamos os valores das constantes e vem

$$u(x) = P[T_Q < T_q | X(0) = x] = \frac{S(x) - S(q)}{S(Q) - S(q)}, \quad (4.1.3)$$

a probabilidade de o processo atingir Q antes de atingir q , isto é, de a população atingir o tamanho Q antes de atingir o tamanho q , sabendo que no instante inicial o processo tinha o valor x . A probabilidade de $X(t)$ passar por q antes de passar por Q , com $X(0) = x$, é dada por

$$P[T_q < T_Q | X(0) = x] = 1 - u(x) = \frac{S(Q) - S(x)}{S(Q) - S(q)}. \quad (4.1.4)$$

Teorema 4.1.3. *Seja $v(x)$, com $x \in [q, Q]$, uma solução da equação diferencial*

$$\mathcal{D}v(x) = -1, \quad (4.1.5)$$

com $v(q) = v(Q) = 0$. Então

$$v(x) = E[T_{q,Q} | X(0) = x].$$

Demonstração

Seja $\tau = \min\{T, T_{q,Q}\}$ com $T > 0$ fixo. Obviamente $E[\tau | X(0) = x] < +\infty$ e, aplicando a fórmula de Dynkin a v , vem

$$E[v(X(\tau)) | X(0) = x] = v(x) + E \left[\int_0^\tau \mathcal{D}v(X(s)) ds \mid X(0) = x \right].$$

Para $s \leq \tau$, temos $X(s) \in [q, Q]$ e por hipótese $\mathcal{D}v(X(s)) = -1$, donde

$$E[v(X(\tau)) | X(0) = x] = v(x) - E[\tau | X(0) = x].$$

Fazendo $T \rightarrow +\infty$, temos que $\tau \rightarrow T_{q,Q}$. Como

$$E[\tau | X(0) = x] = v(x) - E[v(X(\tau)) | X(0) = x]$$

é uniformemente limitada em τ , vem $E[\tau | X(0) = x] \rightarrow E[T_{q,Q} | X(0) = x] < +\infty$. Também vem $X(\tau) \rightarrow X(T_{q,Q})$, que é igual a q se $T_q < T_Q$; caso contrário é igual a Q . Como $v(q) = v(Q) = 0$, logo $v(X(\tau)) \rightarrow 0$, donde

$$v(x) = E[T_{q,Q} | X(0) = x],$$

como queríamos demonstrar.

Podemos escrever (4.1.5) na forma

$$\frac{1}{2} \frac{1}{m(x)} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{s(x)} \frac{dv(x)}{dx} \right) = -1,$$

donde

$$\frac{d}{dM(x)} \left(\frac{dv(x)}{dS(x)} \right) = -2. \quad (4.1.6)$$

Integrando com respeito a M , obtemos

$$\frac{dv(\eta)}{dS(\eta)} = -2 \int_q^\eta m(\theta) d\theta + A.$$

Integrando agora com respeito a S , temos

$$v(x) = -2 \int_q^x \int_q^\eta m(\theta) d\theta dS(\eta) + A(S(x) - S(q)) + B,$$

com A e B constantes. Utilizando as condições de fronteira, $v(q) = v(Q) = 0$, determinamos os valores de A e B e obtemos

$$v(x) = 2 \left(u(x) \int_q^Q \int_q^\eta m(\theta) d\theta dS(\eta) - \int_q^x \int_q^\eta m(\theta) d\theta dS(\eta) \right).$$

Invertendo a ordem de integração e depois de alguns cálculos, obtemos

$$v(x) = 2u(x) \int_x^Q m(\theta) \int_\theta^Q s(\eta) d\eta d\theta + 2(1 - u(x)) \int_q^x m(\theta) \int_q^\theta s(\eta) d\eta d\theta,$$

expressão do tempo médio para o processo atingir o valor q ou o valor Q pela primeira vez, sabendo que o processo no instante inicial era x . Se $X(t)$ representar o tamanho da população no instante t , $v(x)$ representa o tempo médio para a população atingir o limiar q ou o limiar Q pela primeira vez, sabendo que $X(0) = x$.

O próximo teorema permite-nos determinar os momentos de ordem superior de $T_{q,Q}$.

Teorema 4.1.4. *Seja g uma função de classe C^2 e*

$$U_g(x) = E \left[g \left(\int_0^{T_{q,Q}} ds \right) \right] = E [g(T_{q,Q})].$$

Seja $U(x)$, com $x \in [q, Q]$, uma solução da equação diferencial

$$\mathcal{D}U(x) = -V(x), \tag{4.1.7}$$

com $U(q) = U(Q) = g(0)$ e

$$V(x) = E \left[g' \left(\int_0^{T_{q,Q}} ds \right) | X(0) = x \right] = E [g'(T_{q,Q}) | X(0) = x].$$

Então

$$U(x) = E \left[g \left(\int_0^{T_{q,Q}} ds \right) | X(0) = x \right] = E [g(T_{q,Q}) | X(0) = x].$$

Demonstração

Seja $\tau = \min\{T, T_{q,Q}\}$ com $T > 0$ fixo. Obviamente $E[\tau | X(0) = x] < +\infty$ e, aplicando a fórmula de Dynkin a $U(x)$, vem

$$E[U(X(\tau))] = U(x) + E \left[\int_0^\tau \mathcal{D}U(X(s)) ds | X(0) = x \right].$$

Fazendo $T \rightarrow +\infty$, temos que $\tau \rightarrow T_{q,Q}$ e

$$E [U(X(T_{q,Q}))|X(0) = x] = U(x) + E \left[\int_0^{T_{q,Q}} \mathcal{D}U(X(s))ds | X(0) = x \right].$$

Seja $T_{q,Q}^{X(s)}$ o tempo de primeira passagem por q ou Q quando o processo no instante inicial assume o valor $X(s)$ (omitimos quando $X(s) = x$). Utilizando (4.1.7), temos

$$\begin{aligned} E \left[\int_0^{T_{q,Q}} \mathcal{D}U(X(s))ds | X(0) = x \right] &= -E \left[\int_0^{T_{q,Q}} V(X(s)) ds | X(0) = x \right] \\ &= -E \left[\int_0^{T_{q,Q}} E \left[g' \left(T_{q,Q}^{X(s)} \right) | X(s) \right] ds | X(0) = x \right] \\ &= -E \left[\int_0^{T_{q,Q}} E \left[g' \left(\int_0^{T_{q,Q}^{X(s)}} du \right) | X(s) \right] ds | X(0) = x \right] \\ &= -E \left[\int_0^{T_{q,Q}} E \left[g' \left(\int_s^{T_{q,Q}^{X(s)}+s} du \right) | X(s) \right] ds | X(0) = x \right]. \end{aligned}$$

Pelo teorema das probabilidades totais temos

$$E \left[\int_0^{T_{q,Q}} \mathcal{D}U(X(s))ds | X(0) = x \right] = -E \left[\int_0^{T_{q,Q}} g' \left(\int_s^{T_{q,Q}^{X(s)}+s} du \right) ds | X(0) = x \right].$$

Usando as propriedades de Markov vem

$$E \left[\int_0^{T_{q,Q}} \mathcal{D}U(X(s))ds | X(0) = x \right] = -E \left[\int_0^{T_{q,Q}} g' \left(\int_0^{T_{q,Q}} du \right) ds | X(0) = x \right],$$

equivalente a

$$E \left[\int_0^{T_{q,Q}} \mathcal{D}U(X(s))ds | X(0) = x \right] = g(0) - E [g(T_{q,Q}) | X(0) = x].$$

Assim

$$E [U(X(T_{q,Q}))|X(0) = x] = U(x) + g(0) - E [g(T_{q,Q}) | X(0) = x].$$

Como $X(T_{q,Q}) = q$ se $T_q < T_Q$, e $X(T_{q,Q}) = Q$ em caso contrário, e como $U(q) = U(Q) = g(0)$, temos $U(X(T_{q,Q})) = g(0)$. Logo

$$U(x) = E [g(T_{q,Q}) | X(0) = x],$$

como queríamos demonstrar.

Com $g(x) = x^n$, temos $g'(x) = nx^{n-1}$ e

$$U_n(x) = E [(T_{q,Q})^n | X(0) = x].$$

Deste modo, $U_n(x)$ é solução da equação diferencial

$$\mathcal{D}U_n(x) = nU_{n-1}(x), \quad (4.1.8)$$

com $U_n(q) = U_n(Q) = 0$. Isso permite-nos obter iterativamente os momentos de ordem n do tempo de primeira passagem de $T_{q,Q}$. Note que, para $n = 1$, temos $U_1(x) = v(x)$.

Para obter a expressão explícita de $U_n(x)$, podemos escrever (4.1.8) na forma

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dM(x)} \left(\frac{dU_n(x)}{dS(x)} \right) + nU_{n-1}(x) = 0,$$

de modo análogo ao que fizemos anteriormente. Integrando com respeito a M obtemos,

$$\frac{dU_n(\eta)}{dS(\eta)} = -2 \int_q^\eta nU_{n-1}(\theta)m(\theta)d\theta + A.$$

Integrando agora com respeito a S temos

$$U_n(x) = -2 \int_q^x \int_q^\eta nU_{n-1}m(\theta)d\theta dS(\eta) + A(S(x) - S(q)) + B,$$

com A e B constantes. Utilizando as condições de fronteira, $U_n(q) = U_n(Q) = 0$, determinamos os valores de A e B e vem

$$U_n(x) = 2 \left(u(x) \int_q^Q \int_q^\eta nU_{n-1}m(\theta)d\theta dS(\eta) - \int_q^x \int_q^\eta nU_{n-1}m(\theta)d\theta dS(\eta) \right).$$

Invertendo a ordem de integração e depois de alguns cálculos, obtemos

$$U_n(x) = 2 \left(u(x) \int_x^Q \int_\theta^Q s(\eta)d\eta nU_{n-1}(\theta)m(\theta)d\theta + (1 - u(x)) \int_q^x \int_q^\theta s(\eta)d\eta nU_{n-1}(\theta)m(\theta)d\theta \right),$$

expressão que nos dá o momento de ordem n do tempo de primeira passagem do processo $X(t)$ por q ou Q . Aplicando (4.1.3) e (4.1.4) podemos também escrever

$$U_n(x) = 2 \left\{ \int_x^Q \frac{S(Q) - S(\theta)}{S(Q) - S(q)} (S(x) - S(q)) nU_{n-1}(\theta)m(\theta)d\theta + \int_q^x \frac{S(Q) - S(x)}{S(Q) - S(q)} (S(\theta) - S(q)) nU_{n-1}(\theta)m(\theta)d\theta \right\}. \quad (4.1.9)$$

Com $g_\lambda(x) = e^{-\lambda x}$ temos $g'_\lambda(x) = -\lambda e^{-\lambda x}$ e

$$U_\lambda(x) = E[\exp(-\lambda T_{q,Q}) | X(0) = x].$$

Deste modo, $U_\lambda(x)$ é solução da equação diferencial

$$\mathcal{D}U_\lambda(x) = \lambda U_\lambda(x),$$

com $U_\lambda(q) = U_\lambda(Q) = 1$. Isso permite obter a transformada de Laplace da densidade do tempos de primeira passagem. Conhecida a transformada de Laplace, a função densidade de probabilidade de $T_{q,Q}$ pode ser obtida pela sua inversa. No entanto é difícil, na maior parte dos casos, escrever as expressões explícitas. Conhecida a transformada de Laplace obtêm-se recursivamente os momentos de ordem n dos tempos de primeira passagem de $X(t)$ por q ou Q , uma vez que, $\frac{\partial^n U_\lambda(x)}{\partial \lambda^n} |_{\lambda=0} = (-1)^n E[(T_{q,Q})^n | X(0) = x]$, com $n = 1, 2, \dots$ Pode ver-se a transformada de Laplace em Ditlevsen (2007), Alili *et al.* (2005), Ricciardi e Sato (1988) e Siegert (1951). No entanto, a sua inversão só pode ser feita por métodos numéricos e por vezes os resultados são muito instáveis. Em Alili *et al.* (2005) podemos encontrar expressões para aproximar a densidade dos tempos de primeira passagem.

4.2 Tempos de extinção

Na secção anterior obtivemos expressões para os tempos de primeira passagem do processo $X(t)$ por q ou Q . Estamos agora interessados no tempo de primeira passagem do processo $X(t)$ por q . Assim, basta fazer $Q \rightarrow +\infty$, uma vez que esta fronteira é inatingível para os modelos em estudo.

Se $X(t)$ representar o tamanho da população no instante t e se considerarmos à partida que a população está extinta quando atinge o limiar q , com $q < x$, então o tempo que leva

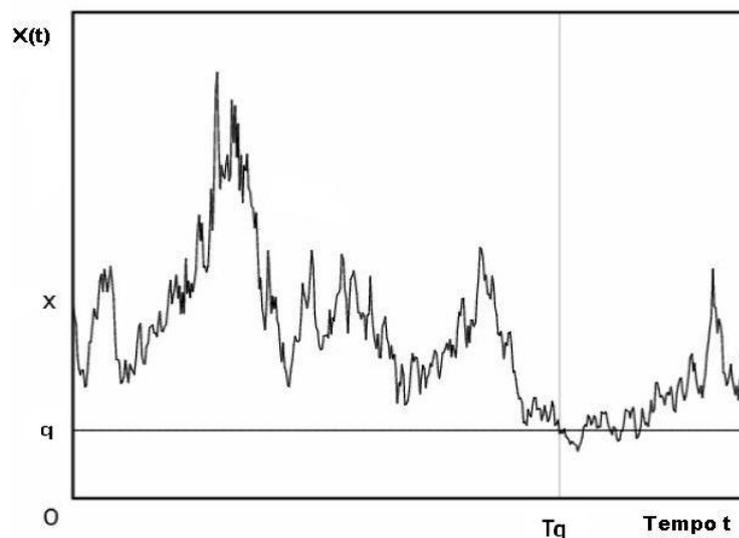


Figura 4.1: Representa uma trajetória de $X(t)$ onde T_q é o tempo de primeira passagem do processo $X(t)$ por q .

para o processo $X(t)$ atingir q pela primeira vez é o tempo de extinção da população.

Deste modo, para obter o tempo de primeira passagem pelo limiar de extinção vamos usar a expressão (4.1.9) e fazer $Q \rightarrow +\infty$. O tempo de primeira passagem por q ou $+\infty$ será necessariamente o tempo de primeira passagem por q . Como o processo é ergódico, podemos obter $E[(T_q)^n | X(0) = x]$, determinando o limite de $E[(T_{q,Q})^n | X(0) = x]$ quando $Q \rightarrow +\infty$.

Note que, quando $Q \rightarrow +\infty$, da expressão (4.1.3) temos

$$u(x) = P[T_{+\infty} < T_q | X(0) = x] = 0.$$

Denotemos por $M_n(x) = E[(T_q)^n | X(0) = x]$ o momento de ordem n de T_q . Passando ao limite quando $Q \rightarrow +\infty$ na expressão (4.1.9) e atendendo a que

$$\frac{S(+\infty) - S(\theta)}{S(+\infty) - S(q)} = \frac{S(+\infty) - S(x)}{S(+\infty) - S(q)} = 1,$$

uma vez que $S(+\infty) = +\infty$, vem

$$M_n(x) = 2 \left(\int_x^{+\infty} (S(x) - S(q)) n M_{n-1}(\theta) m(\theta) d\theta + \int_q^x (S(\theta) - S(q)) n M_{n-1}(\theta) m(\theta) d\theta \right).$$

Invertendo a ordem de integração obtemos

$$M_n(x) = E[(T_q)^n | X(0) = x] = 2 \int_q^x s(\zeta) \int_\zeta^{+\infty} n M_{n-1}(\theta) m(\theta) d\theta d\zeta, \quad (4.2.1)$$

Quando $n = 0$, obviamente $M_0(x) = 1$, pelo que a expressão (4.2.1) pode ser usada recursivamente para os vários momentos.

Em particular, fazendo $n = 1$, e usando a condição $M_0(x) = 1$ obtemos a média do tempo de primeira passagem pelo limiar q , tempo médio de extinção,

$$E[T_q | X(0) = x] = 2 \int_q^x s(\zeta) \int_\zeta^{+\infty} m(\theta) d\theta d\zeta. \quad (4.2.2)$$

Usando (4.2.1) com $n = 2$ deduzimos a expressão para o segundo momento de T_q

$$M_2(x) = 2 \int_q^x s(\zeta) \int_\zeta^{+\infty} 2M_1(\theta) m(\theta) d\theta d\zeta = H_1(x) + H_2(x), \quad (4.2.3)$$

com

$$H_1(x) = 2 \int_q^x s(\zeta) \int_\zeta^{+\infty} 2(M_1(\theta) - M_1(\zeta)) m(\theta) d\theta d\zeta \quad (4.2.4)$$

e

$$H_2(x) = 2 \int_q^x 2s(\zeta) M_1(\zeta) \int_\zeta^{+\infty} m(\theta) d\theta d\zeta = 2 \int_q^x 2s(\zeta) M_1(\zeta) (M(+\infty) - M(\zeta)) d\zeta.$$

Usando (4.2.2) e $M_1(q) = 0$, obtemos

$$H_2(x) = \int_q^x 2M_1(\zeta) \frac{dM_1(\zeta)}{d\zeta} d\zeta = (M_1(x))^2. \quad (4.2.5)$$

Consequentemente, por (4.2.3) e (4.2.5), temos que

$$\text{Var}[T_q|X(0) = x] = M_2(x) - (M_1(x))^2 = H_1(x).$$

Usando (4.2.2) e (4.2.4), resulta que

$$\text{Var}[T_q|X(0) = x] = 2 \int_q^x 2s(\zeta) \int_{\zeta}^{+\infty} 2 \int_{\zeta}^{\theta} s(\xi)(M(+\infty) - M(\xi)) d\xi m(\theta) d\theta d\zeta.$$

Fazendo inversão de integração entre ξ e θ e após algumas simplificações, obtemos a expressão para a variância de T_q , variância do tempo de extinção,

$$\text{Var}[T_q|X(0) = x] = 8 \int_q^x s(\zeta) \int_{\zeta}^{+\infty} s(\xi) \left(\int_{\xi}^{+\infty} m(\theta) d\theta \right)^2 d\xi d\zeta. \quad (4.2.6)$$

4.2.1 Modelo logístico

De facto, provámos que não existe "extinção matemática" para o modelo logístico estocástico mas há extinção no sentido biológico do termo. Assim, é preferível usar o conceito de "extinção realista", em que consideramos que a população está extinta quando atinja um limiar de extinção $q > 0$ definido *a priori*, ou seja, consideramos que a extinção ocorre quando o tamanho da população atingir esse limiar. Como o processo é ergódico, sabemos que o limiar será atingido com probabilidade um.

Estamos, portanto, interessados em estudar o tempo de extinção, que é o tempo de primeira passagem T_q pelo limiar de extinção q .

Usamos a expressão (4.2.2) para escrever o tempo médio para atingir q ,

$$E[T_q|X(0) = x] = \frac{2}{\sigma^2} \int_q^x \zeta^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2 K} \zeta\right) \int_{\zeta}^{+\infty} \theta^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} \exp\left(-\frac{2r}{\sigma^2 K} \theta\right) d\theta d\zeta.$$

Fazendo as mudanças de variável $u = \frac{2r}{\sigma^2 K} \zeta$ e $y = \frac{2r}{\sigma^2 K} \theta$, obtemos

$$E[T_q|X(0) = x] = \frac{2}{\sigma^2} \int_{\frac{2rq}{\sigma^2 K}}^{\frac{2rx}{\sigma^2 K}} u^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^u \int_u^{+\infty} y^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^{-y} dy du,$$

equivalente a

$$E [T_q | X(0) = x] = \frac{2}{\sigma^2} \int_{\frac{2rq}{\sigma^2 K}}^{\frac{2rx}{\sigma^2 K}} u^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^u \Gamma \left(\frac{2r}{\sigma^2}, u \right) du,$$

onde $\Gamma(c, x) = \int_x^{+\infty} y^{c-1} e^{-y} dy$ é a função Gama incompleta. Podemos escrever

$$rE [T_q | X(0) = x] = 2R \int_{2Rd}^{2Rdz} u^{-2R-1} e^u \Gamma (2R, u) du := rE_x^{L(R,d)} [T_q], \quad (4.2.7)$$

com $R = \frac{r}{\sigma^2}$, $d = \frac{q}{K}$ e $z = \frac{x}{q}$, onde o índice superior $L(R, d)$ se destina a referir que se trata do valor esperado de T_q quando $X(0) = x$ para o modelo logístico com os parâmetros $R = \frac{r}{\sigma^2}$ e $d = \frac{q}{K}$. Esta redução de parâmetros feita em trabalhos anteriores tem a vantagem de trabalhar com grandezas adimensionais. Assim R é uma espécie de relação sinal/ruído, d representa o limiar de extinção expresso como fração da capacidade de sustento do meio e z é uma medida do afastamento relativo da população inicial relativamente ao limiar de extinção. Daqui para a frente vamos trabalhar com estas grandezas adimensionais. A expressão (4.2.7) ilustra o comportamento do tempo médio de extinção multiplicado por r . Esta grandeza adimensional depende das grandezas adimensionais R , d e z . Se pensarmos que r é uma espécie de taxa de substituição "intrínseca" da população, $\frac{1}{r}$ é uma espécie de tempo "intrínseco" de uma geração, e, então, (4.2.7) mede o tempo médio de extinção em unidades do tempo "intrínseco" de uma geração.

Para escrever a variância, usamos a expressão (4.2.6), e fazemos as mesmas mudanças de variável. Depois de simplificar, obtemos

$$Var [T_q | X(0) = x] = \frac{8}{\sigma^4} \int_{\frac{2rq}{\sigma^2 K}}^{\frac{2rx}{\sigma^2 K}} u^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^u \int_u^{+\infty} v^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^v \left(\int_v^{+\infty} y^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^{-y} dy \right)^2 dv du,$$

equivalente a

$$r^2 Var [T_q | X(0) = x] = 8R^2 \int_{2Rd}^{2Rdz} u^{-2R-1} e^u \int_u^{+\infty} v^{-2R-1} e^v (\Gamma (2R, v))^2 dv du := rV_x^{L(R,d)} [T_q]. \quad (4.2.8)$$

Pode ver-se detalhadamente em Carlos e Braumann (2005) e Carlos e Braumann (2006) o estudo dos tempos de primeira passagem pelo limiar q para o modelo logístico usando os dois cálculos mais utilizados, cálculos de Itô e de Stratonovich. Ilustrámos os resultados obtidos com alguns exemplos numéricos do comportamento da média e do desvio padrão do tempo de extinção. Concluimos que, para o mesmo limiar de extinção q , quanto maior for a população no instante inicial x (maior for z), mais tempo leva a população a extinguir-se. À medida que d aumenta, o que significa que a capacidade de sustento K está mais próxima do limiar de extinção q , o tempo médio de extinção diminui. Para σ fixo, quando a taxa intrínseca de crescimento r aumenta, o tempo médio de extinção também aumenta. O desvio padrão do tempo de extinção tem a mesma ordem de grandeza do tempo médio de extinção,

o que significa que existe uma grande variabilidade do tempo de extinção.

As curvas centrais (a cheio) das figuras 5.1 e 5.2 ilustram o comportamento de (4.2.7) e (4.2.8) para alguns valores dos parâmetros.

4.2.2 Modelo de Gompertz

Não havendo "extinção matemática" para o modelo de Gompertz mas sendo a "extinção realista" inevitável, estudamos agora o tempo de extinção, ou seja o tempo de primeira passagem T_q pelo limiar de extinção q .

Para obter a expressão do tempo médio de extinção usamos a expressão (4.2.2) e vem

$$E [T_q|X(0) = x] = \frac{2}{\sigma^2} \int_q^x \frac{1}{\zeta} \exp\left(\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \frac{K}{\zeta}\right) \int_\zeta^{+\infty} \frac{1}{\theta} \exp\left(\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \frac{K}{\theta}\right) d\theta d\zeta.$$

Fazendo as mudanças de variável $u = \frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln \frac{\zeta}{K}$ e $y = \frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln \frac{\theta}{K}$, obtemos

$$E [T_q|X(0) = x] = \frac{2}{r} \int_{\frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln \frac{q}{K}}^{\frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln \frac{x}{K}} e^{u^2} \int_u^{+\infty} e^{-y^2} dy du,$$

equivalente a

$$E [T_q|X(0) = x] = \frac{2\sqrt{\pi}}{r} \int_{\frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln \frac{q}{K}}^{\frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln \frac{x}{K}} e^{u^2} \left(1 - \Phi\left(\sqrt{2}u\right)\right) du,$$

onde $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$ é a função de distribuição de uma variável aleatória gaussiana standard. Logo, o comportamento médio do tempo de extinção é descrito por:

$$rE [T_q|X(0) = x] = 2\sqrt{\pi} \int_{\sqrt{R} \ln d}^{\sqrt{R} \ln(dz)} e^{u^2} \left(1 - \Phi\left(\sqrt{2}u\right)\right) du := rE_x^{G(R,d)} [T_q], \quad (4.2.9)$$

com $R = \frac{r}{\sigma^2}$, $d = \frac{q}{K}$ e $z = \frac{x}{K}$ grandezas adimensionais e onde o índice superior $G(R, d)$ se destina a referir que se trata do valor esperado de T_q quando $X(0) = x$ para o modelo de Gompertz com parâmetros $R = \frac{r}{\sigma^2}$ e $d = \frac{q}{K}$.

Usamos a expressão (4.2.6) e as mesmas mudanças de variável que fizemos para a média, obtendo

$$Var [T_q|X(0) = x] = \frac{8}{r^2} \int_{\frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln \frac{q}{K}}^{\frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln \frac{x}{K}} e^{u^2} \int_u^{+\infty} e^{v^2} \left(\int_v^{+\infty} e^{-y^2} dy\right)^2 dv du,$$

equivalente a

$$r^2 Var [T_q|X(0) = x] = 8\pi \int_{\sqrt{R} \ln d}^{\sqrt{R} \ln(dz)} e^{u^2} \int_u^{+\infty} e^{v^2} \left(1 - \Phi\left(\sqrt{2}v\right)\right)^2 dv du := rV_x^{G(R,d)} [T_q]. \quad (4.2.10)$$

Esta expressão é muito mais simples do que a obtida por Thomas (1975). Na realidade Thomas (1975) obteve a expressão para a variância do tempo de primeira passagem para o modelo de Ornstein-Uhlenbeck para o limiar superior, mas que é facilmente adaptável ao modelo de Gompertz e ao limiar inferior. A expressão do Thomas (1975) é equivalente mas é bastante mais complicada que a nossa.

Em Carlos e Braumann (2005) e Carlos e Braumann (2006) fizemos o estudo detalhado dos tempos de extinção para o modelo de Gompertz, usando não só o cálculo de Stratonovich mas também o cálculo de Itô. Apresentámos as expressões do comportamento da média e do desvio padrão dos tempos de extinção e ilustrámos os resultados obtidos com alguns exemplos numéricos. Concluímos que o tempo médio de extinção é tanto maior quanto maior for a população no instante inicial e diminui quando o parâmetro de crescimento intrínseco diminui ou quando a capacidade de sustento se aproxima do limiar de extinção. O desvio padrão tem a mesma ordem de grandeza do tempo médio.

As curvas centrais (a cheio) das figuras 5.3 e 5.4 ilustram o comportamento de (4.2.9) e (4.2.10) para alguns valores dos parâmetros.

4.3 Tempos de primeira passagem pelo limiar superior

De modo análogo, obtêm-se expressões para o tempo de primeira passagem de $X(t)$ por Q , basta fazer q tender para 0 e, supondo que esta fronteira é inatingível, o tempo de primeira passagem de $T_{q,Q}$ torna-se o tempo de primeira passagem T_Q . Uma das muitas aplicações, para modelos de crescimento individual é o tempo que leva um animal para atingir o peso ideal para abate, onde T_Q representa o instante em que o animal atinge esse peso pela primeira vez (ver, por exemplo, Braumann *et al.* (2009) e Braumann *et al.* (2011)). Para modelos de crescimento populacional, T_Q pode, por exemplo, representar o tempo que leva para a população atingir o valor médio assintótico (como $Q = K$). Pode também representar o tempo que demora para a população atingir o limiar de perigo no controlo de uma peste.

A expressão do momento de ordem n do tempo de primeira passagem de $X(t)$ por Q , sabendo que o processo se iniciou em x , é dada por

$$V_n(x) = E [(T_Q)^n | X(0) = x] = 2 \int_x^Q s(\zeta) \int_{-\infty}^{\zeta} n V_{n-1}(\theta) m(\theta) d\theta d\zeta,$$

supondo que $S(0) = +\infty$. Em particular, com $n = 1$ e usando a condição $V_0(x) = 1$ vem

$$E [T_Q | X(0) = x] = 2 \int_x^Q s(\zeta) \int_{-\infty}^{\zeta} m(\theta) d\theta d\zeta,$$

a expressão do tempo médio de primeira passagem do processo $X(t)$ por Q . A variância é

dada por

$$\text{Var} [T_Q | X(0) = x] = 8 \int_x^Q s(\zeta) \int_{-\infty}^{\zeta} s(\xi) \left(\int_{-\infty}^{\xi} m(\theta) d\theta \right)^2 d\xi d\zeta,$$

obtendo-se usando $V_1(x)$ e $V_2(x)$ e algumas manipulações algébricas. A dedução destas expressões pode ser vista em Braumann *et al.* (2009) e Carlos *et al.* (2013), e é semelhante à apresentada para o tempo de primeira passagem pelo limiar inferior.

Uma das primeiras EDE é o conhecido modelo de Ornstein-Uhlenbeck (ver Uhlenbeck e Ornstein (1930)). O modelo de Gompertz estocástico pode ser escrito como o modelo de Ornstein-Uhlenbeck (ver Filipe (2011) para o logaritmo de $X(t)$). Para este modelo, é conhecida e simples a função densidade do tempo de primeira passagem pelo valor assintótico K , ver Linetsky (2004) e Ricciardi e Sato (1988). Infelizmente esta expressão não serve para outros limiares superiores. Também para este modelo, Yi (2010) relaciona a probabilidade do processo ser inferior ou igual ao valor assintótico e a função de distribuição do tempo de primeira passagem pelo valor assintótico.

EFEITO DE INCORRETA ESPECIFICAÇÃO DO COEFICIENTE DE TENDÊNCIA

A verdadeira taxa de crescimento *per capita* pode afastar-se dos modelos clássicos e nada nos garante que os modelos específicos utilizados retratem o comportamento da população. Contudo, a utilização de modelos específicos é conveniente para estimar parâmetros e fazer previsões para populações reais, se bem que estas sigam provavelmente um modelo que não coincide exatamente com o modelo específico escolhido. Importa, assim, conhecer o efeito dessas alterações, em particular, o comportamento nas fronteiras do espaço de estados, a existência de densidade estacionária e o efeito sobre os tempos de extinção.

Neste capítulo estudamos o efeito de incorreta especificação do coeficiente de tendência nos modelos logístico e de Gompertz. Chamaremos a estes modelos, modelo aproximadamente logístico e modelo aproximadamente de Gompertz. Começamos por determinar a solução implícita dos modelos determinísticos e comparamos com a solução dos modelos determinísticos clássicos. Determinamos também a solução implícita dos modelos estocásticos e comparamos com a solução dos modelos estocásticos. Provamos que, também neste caso, as fronteiras são não atrativas, o que garante que não existe "extinção matemática" e não existem explosões, garantindo a existência e unicidade de solução da EDE. Para estes modelos garantimos ainda a existência de densidade estacionária e apresentamos a sua expressão. Finalmente, apresentamos as expressões do comportamento do tempo médio de extinção e respetiva variância e ilustramos os resultados com alguns exemplos numéricos. Obtemos minorantes e majorantes para estas expressões, que são exatamente as expressões do comportamento da média e da variância do tempo de extinção dos modelos clássicos com outros parâmetros.

5.1 Modelo aproximadamente logístico

Um dos modelos mais utilizados na literatura é o modelo logístico ou modelo de Pearl-Verhulst, onde a taxa de crescimento *per capita* decresce linearmente com o tamanho da população, isto é, $f(X) = r \left(1 - \frac{X}{K}\right)$, com $r > 0$ a taxa intrínseca de crescimento e $K > 0$ a capacidade de sustento do meio. No entanto, a verdadeira taxa de crescimento *per capita* pode afastar-se dos modelos clássicos, em particular, do modelo logístico. Suponhamos que a verdadeira taxa de crescimento *per capita* f é apenas aproximada pelo modelo logístico com parâmetros r e K e suponhamos que o desvio é $\alpha(X) = f(X) - r \left(1 - \frac{X}{K}\right)$, isto é, temos o modelo aproximadamente logístico, definido por

$$f(X) = r \left(1 - \frac{X}{K}\right) + \alpha(X).$$

Podemos também escrever

$$f(X) = r \left(1 + \frac{\alpha(X)}{r}\right) \left(1 - \frac{X}{K \left(1 + \frac{\alpha(X)}{r}\right)}\right).$$

Suponhamos que α é uma função de classe C^1 e que $\frac{|\alpha(X)|}{r} \leq \delta$, sendo $0 \leq \delta < 1$ (tipicamente δ deverá ser próximo de 0) uma espécie de erro relativo. Ao usarmos este modelo, estamos a considerar a hipótese de a verdadeira taxa intrínseca de crescimento da população não ser r , mas $r(t) = r \left(1 + \frac{\alpha(X(t))}{r}\right)$, assim como a verdadeira capacidade de sustento do meio, ao invés de K , ser $K(t) = K \left(1 + \frac{\alpha(X(t))}{r}\right)$. Note-se que $r(t) \in [r(1 - \delta), r(1 + \delta)]$ e $K(t) \in [K(1 - \delta), K(1 + \delta)]$.

Considerando estas hipóteses, o modelo de crescimento populacional pode ser descrito através da seguinte equação diferencial

$$\frac{dX}{dt} = \left(r \left(1 - \frac{X}{K}\right) + \alpha(X) \right) X, \quad (5.1.1)$$

ou por

$$\frac{1}{X} \frac{dX}{dt} = r \left(1 - \frac{X}{K}\right) + \alpha(X),$$

que traduz a taxa de crescimento *per capita*. Supomos $X(0) = x > 0$ conhecido.

A equação (5.1.1) pode ser escrita do seguinte modo

$$\frac{dX}{dt} = r(t)X \left(1 - \frac{X}{K(t)}\right).$$

Fazendo $Z = \frac{1}{X}$, temos $\frac{dZ}{dX} = -\frac{1}{X^2}$ e obtemos a seguinte expressão

$$dZ + Zr(t)dt = \frac{r(t)}{K(t)}dt.$$

Multiplicamos ambos os membros por $e^{\int_0^t r(s)ds}$ temos

$$d(Ze^{\int_0^t r(s)ds}) = \frac{r(t)}{K(t)}e^{\int_0^t r(s)ds}dt,$$

e, depois, integrando entre 0 e t ,

$$Z(t)e^{\int_0^t r(s)ds} - Z(0) = \int_0^t \frac{r(s)}{K(s)}e^{\int_0^s r(u)du}ds,$$

donde

$$Z(t) = Z(0)e^{-\int_0^t r(s)ds} + e^{-\int_0^t r(s)ds} \int_0^t \frac{r(s)}{K(s)}e^{\int_0^s r(u)du}ds.$$

Assim, voltando à variável inicial,

$$X(t) = \frac{1}{\left(\frac{1}{X(0)} + \int_0^t \frac{r(s)}{K(s)}e^{\int_0^s r(u)du}ds\right) e^{-\int_0^t r(s)ds}}$$

é a solução do modelo aproximadamente logístico determinístico. Mas, repare-se que não é uma solução explícita já que $r(s)$ e $K(s)$ dependem de $X(s)$.

Usando o facto de $r(s) \in [r(1 - \delta), r(1 + \delta)]$ e $K(s) \in [K(1 - \delta), K(1 + \delta)]$, depois de algumas simplificações, podemos afirmar que

$$X(t) \geq \frac{K(1 - \delta)}{\left(\frac{K}{X(0)}(1 - \delta) - 1\right) e^{-r(1 - \delta)t} + e^{2\delta rt}}$$

e

$$X(t) \leq \frac{K(1 + \delta)}{\left(\frac{K}{X(0)}(1 + \delta) - 1\right) e^{-r(1 + \delta)t} + e^{-2\delta rt}}.$$

Pondo $r^* = r(1 + \delta)$, $r^{**} = r(1 - \delta)$, $K^* = K(1 - \delta)$, e $K^{**} = K(1 + \delta)$, vem

$$X(t) \geq e^{-2\delta rt} \frac{K^*}{\left(\frac{K^*}{X(0)} - 1\right) e^{-r^*t} + 1} = e^{-2\delta rt} X^{L(r^*, K^*)}(t) \quad (5.1.2)$$

e

$$X(t) \leq e^{2\delta rt} \frac{K^{**}}{\left(\frac{K^{**}}{X(0)} - 1\right) e^{-r^{**}t} + 1} = e^{2\delta rt} X^{L(r^{**}, K^{**})}(t), \quad (5.1.3)$$

onde $X^{L(r^*, K^*)}(t)$ e $X^{L(r^{**}, K^{**})}(t)$ são a solução do modelo logístico determinístico encontrada em (3.1.4) com parâmetros r^* e K^* e r^{**} e K^{**} , respetivamente, ao invés dos parâmetros

r e K . As expressões (5.1.2) e (5.1.3) são um bom minorante e um bom majorante, respectivamente, pois caso $\delta = 0$ vem $e^{2\delta rt} = e^{-2\delta rt} = 1$, $r^* = r^{**} = r$ e $K^* = K^{**} = K$, que seria exatamente a solução do modelo determinístico clássico, isto é, a solução do modelo logístico (3.1.4).

Para determinar os pontos de equilíbrio basta fazer $\frac{dX}{dt} = 0$. Neste caso, os pontos de equilíbrio são $X = 0$ e as raízes da equação $r\left(1 - \frac{X}{K}\right) + \alpha(X) = 0$, que equivale a $X = K\left(1 + \frac{\alpha(X)}{r}\right)$, as quais se encontram entre $K(1 - \delta)$ e $K(1 + \delta)$. Note-se que, como $r(1 - \delta) > 0$, para $0 < X < K(1 - \delta)$ vem $\frac{dX}{dt} > 0$ e, para $X > K(1 + \delta)$, vem $\frac{dX}{dt} < 0$, pelo que existe pelo menos uma raiz no intervalo $[K(1 - \delta), K(1 + \delta)]$, pelo teorema de Bolzano.

Suponhamos agora que o ambiente está sujeito a flutuações aleatórias, que podemos aproximar por um ruído branco $\sigma\varepsilon(t)$, com $\sigma > 0$ e $\varepsilon(t)$ um ruído branco padrão. Essas flutuações afetam a taxa de crescimento *per capita* e obtém-se a equação diferencial estocástica de Stratonovich

$$\frac{1}{X} \frac{dX}{dt} = r \left(1 - \frac{X}{K}\right) + \alpha(X) + \sigma\varepsilon(t).$$

Escrevendo na forma mais usual, temos

$$dX = \left(r \left(1 - \frac{X}{K}\right) + \alpha(X) \right) X dt + \sigma X dW(t), \quad (5.1.4)$$

equivalente à equação de Itô

$$(I) \quad dX = \left(r \left(1 - \frac{X}{K}\right) + \alpha(X) + \frac{\sigma^2}{2} \right) X dt + \sigma X dW(t),$$

com $X(0) = x > 0$.

Como a equação diferencial estocástica é autónoma e os coeficientes de tendência e difusão são de classe C^1 , a solução existe e é única até um possível instante de explosão, que iremos provar mais à frente ser infinito, donde a solução existe e é única para todo o $t \geq 0$. A solução é um processo de difusão homogéneo com coeficiente de tendência

$$a(x) = \left(r \left(1 - \frac{x}{K}\right) + \alpha(x) + \frac{\sigma^2}{2} \right) x$$

e coeficiente de difusão

$$b^2(x) = \sigma^2 x^2.$$

Facilmente se obtêm a densidade de escala

$$s(y) = Cy^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2 K}y - \frac{2}{\sigma^2} \int_n^y \frac{\alpha(\theta)}{\theta} d\theta\right)$$

e a densidade de velocidade

$$m(y) = \frac{1}{C\sigma^2} y^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} \exp\left(-\frac{2r}{\sigma^2 K} y + \frac{2}{\sigma^2} \int_n^y \frac{\alpha(\theta)}{\theta} d\theta\right),$$

onde C é uma constante positiva arbitrária e n é um ponto no interior do espaço de estados arbitrariamente escolhido (o que implica que s e m sejam definidas a menos de uma constante multiplicativa).

A expressão (5.1.4) é equivalente a

$$dX(t) = r(t) \left(1 - \frac{X(t)}{K(t)}\right) X(t) dt + \sigma X(t) dW(t).$$

Usamos as regras usuais de cálculo porque estamos a usar o cálculo de Stratonovich. De forma semelhante à usada para o modelo determinístico, mas usando o fator integrante $e^{\int_0^t r(s) + \sigma \varepsilon(s) ds} = e^{\int_0^t r(s) ds + \sigma W(t)}$, obtemos

$$X(t) = \frac{1}{\left(\frac{1}{X(0)} + \int_0^t \frac{r(s)}{K(s)} e^{\int_0^s r(u) du + \sigma W(s)} ds\right) e^{-\int_0^t r(s) ds - \sigma W(t)}}.$$

De novo, trata-se de uma solução implícita. Assim, podemos afirmar que

$$\begin{aligned} X(t) &\geq \frac{K(1-\delta)e^{r(1-\delta)t + \sigma W(t)}}{\frac{K}{X(0)}(1-\delta) + r(1+\delta) \int_0^t e^{r(1+\delta)s + \sigma W(s)} ds} \\ &= e^{-2\delta rt} \frac{K^* e^{r^* t + \sigma W(t)}}{\frac{K^*}{X(0)} + r^* \int_0^t e^{r^* s + \sigma W(s)} ds} \\ &= e^{-2\delta rt} X_e^{L(r^*, K^*)}(t) \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

e

$$\begin{aligned} X(t) &\leq \frac{K(1+\delta)e^{r(1+\delta)t + \sigma W(t)}}{\frac{K}{X(0)}(1+\delta) + r(1-\delta) \int_0^t e^{r(1-\delta)s + \sigma W(s)} ds} \\ &= e^{2\delta rt} \frac{K^{**} e^{r^{**} t + \sigma W(t)}}{\frac{K^{**}}{X(0)} + r^{**} \int_0^t e^{r^{**} s + \sigma W(s)} ds} \\ &= e^{2\delta rt} X_e^{L(r^{**}, K^{**})}(t), \end{aligned} \tag{5.1.6}$$

onde $X_e^{L(r^*, K^*)}(t)$ e $X_e^{L(r^{**}, K^{**})}(t)$ são a solução do modelo logístico estocástico encontrada em (3.2.3) com parâmetros r^* e K^* e r^{**} e K^{**} , respetivamente, ao invés dos parâmetros r e K . As desigualdades (5.1.5) e (5.1.6) são um bom minorante e majorante, respetivamente, uma vez que, quando $\delta = 0$, temos exatamente a solução do modelo logístico estocástico (3.2.3).

Como $a(0) = 0$ e $b^2(0) = 0$ as fronteiras do espaço de estados são $X = 0$ e $X = +\infty$.

Vamos agora mostrar que as fronteiras são ambas não atrativas.

Começamos por mostrar que a fronteira $X = 0$ é não atrativa. Deste modo, não há extinção matemática da população, ou seja, não existe nenhum t tal que $X(t) = 0$ nem $X(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$. Seja $0 < x_0 < n$. Temos

$$\begin{aligned}
S(0, x_0] &= C \int_0^{x_0} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2 K} y - \frac{2}{\sigma^2} \int_n^y \frac{\alpha(\theta)}{\theta} d\theta\right) dy \\
&\geq C \int_0^{x_0} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int_y^n \frac{\alpha(\theta)}{\theta} d\theta\right) dy \\
&\geq C \int_0^{x_0} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2} \int_y^n \frac{\delta r}{\theta} d\theta\right) dy \\
&\geq c_1 \int_0^{x_0} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} \exp\left(\frac{2\delta r}{\sigma^2} \ln y\right) dy \\
&\geq c_1 \int_0^{x_0} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}(1-\delta)-1} dy = +\infty,
\end{aligned}$$

onde c_1 é uma constante positiva finita. Logo, $X = 0$ é uma fronteira não atrativa.

Vamos agora provar que $X = +\infty$ é uma fronteira não atrativa. Deste modo garantimos que não existem explosões e a solução existe e é única para todo o $t \geq 0$. Seja $0 < n < x_0$. Vem

$$\begin{aligned}
S[x_0, +\infty) &= C \int_{x_0}^{+\infty} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2 K} y - \frac{2}{\sigma^2} \int_n^y \frac{\alpha(\theta)}{\theta} d\theta\right) dy \\
&\geq C \int_{x_0}^{+\infty} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2 K} y - \frac{2}{\sigma^2} \int_n^y \frac{\delta r}{\theta} d\theta\right) dy \\
&\geq c_1 \int_{x_0}^{+\infty} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}(1+\delta)-1} \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2 K} y\right) dy = +\infty,
\end{aligned}$$

onde c_1 é uma constante positiva finita. Com efeito, quando $y \rightarrow +\infty$, temos

$$y^{-\frac{2r}{\sigma^2}(1+\delta)-1} \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2 K} y\right) \rightarrow +\infty,$$

donde o integral é divergente e a fronteira $X = +\infty$ é não atrativa.

Podemos concluir que não há explosões, a solução nunca se torna infinita e o espaço de estados é o intervalo $(0, +\infty)$. As fronteiras são inatingíveis em tempo finito ou infinito, isto é, $X(t)$ não tende para 0 nem tende para $+\infty$ quando t tende para $+\infty$.

Como as fronteiras $X = 0$ e $X = +\infty$ são não atrativas, há uma tendência para as trajetórias que se aproximam das fronteiras serem "empurradas" para o interior do espaço de estados e como todos os estados interiores comunicam entre si, a distribuição transiente poderá ter uma função densidade de probabilidade, $p(t, y) = f_{X(t)}(y)$, com $0 < y < +\infty$ convergente quando $t \rightarrow +\infty$ para uma distribuição limite com densidade $p(y) = f_{X(+\infty)}(y)$, a que chamamos densidade estacionária.

Vejamos se o processo de difusão homogêneo tem densidade estacionária. Como as fronteiras $X = 0$ e $X = +\infty$ são não atrativas, para existir densidade estacionária é suficiente que $\int_0^{+\infty} m(y)dy$ seja convergente e, nesse caso, a densidade estacionária terá de ser da forma $p(y) = D m(y)$, com D constante convenientemente escolhida de modo que $\int_0^{+\infty} p(y)dy = 1$. No caso em que $\int_0^{+\infty} m(y)dy < +\infty$, obtemos

$$p(y) = \frac{m(y)}{\int_0^{+\infty} m(y)dy}.$$

Os próximos cálculos provam a convergência de $M = \int_0^{+\infty} m(y)dy$. Para mostrar que $M < +\infty$, suponhamos $y_1 < K < K(1 + \delta) < y_2$ e $0 < y_1 < n < y_2$. Fixamos $n < K$. Para $n > K$, a demonstração é análoga. Assim, $0 < y_1 < n < K < K(1 + \delta) < y_2$ e dividimos o integral na soma de três integrais,

$$M = M_1 + M_2 + M_3 = \int_0^{y_1} m(y)dy + \int_{y_1}^{y_2} m(y)dy + \int_{y_2}^{+\infty} m(y)dy.$$

Vamos mostrar que cada um deles é convergente e deste modo provamos que $M < +\infty$.

Primeiro vamos mostrar que $M_1 = \int_0^{y_1} m(y)dy < +\infty$. Como $y \in (0, y_1]$ e $\theta \in [y, n]$, temos

$$\begin{aligned} M_1 &= C \int_0^{y_1} y^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} \exp\left(-\frac{2r}{\sigma^2 K} y\right) \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int_n^y \frac{\alpha(\theta)}{\theta} d\theta\right) dy \\ &= C \int_0^{y_1} y^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} \exp\left(-\frac{2r}{\sigma^2 K} y\right) \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2} \int_y^n \frac{\alpha(\theta)}{\theta} d\theta\right) dy \\ &\leq C \int_0^{y_1} y^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int_y^n \frac{\delta r}{\theta} d\theta\right) dy \\ &\leq c_1 \int_0^{y_1} y^{\frac{2r}{\sigma^2}(1-\delta)-1} dy, \end{aligned}$$

com c_1 constante positiva. M_1 converge para $\delta < 1$.

Em segundo lugar vamos mostrar que $M_3 = \int_{y_2}^{+\infty} m(y)dy < +\infty$. Com $y \in [y_2, +\infty)$ e $\theta \in [n, y]$, decomponhamos:

$$\frac{2r}{\sigma^2} \int_n^y \frac{1}{\theta} \left(1 - \frac{\theta}{K}\right) d\theta = \frac{2r}{\sigma^2} \int_n^{y_2} \frac{1}{\theta} \left(1 - \frac{\theta}{K}\right) d\theta + \frac{2r}{\sigma^2} \int_{y_2}^y \frac{1}{\theta} \left(1 - \frac{\theta}{K}\right) d\theta.$$

Sabemos que $\frac{2r}{\sigma^2} \int_{y_2}^y \frac{1}{\theta} \left(1 - \frac{\theta}{K}\right) d\theta \leq \frac{2r}{\sigma^2} \left(1 - \frac{y_2}{K}\right) \ln\left(\frac{y}{y_2}\right)$. Assim,

$$\begin{aligned} M_3 &= C \int_{y_2}^{+\infty} \frac{1}{y} \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2} \int_n^y \frac{1}{\theta} \left(1 - \frac{\theta}{K}\right) d\theta\right) \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int_n^y \frac{\alpha(\theta)}{\theta} d\theta\right) dy \\ &\leq c_1 \int_{y_2}^{+\infty} \frac{1}{y} \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2} \left(1 - \frac{y_2}{K}\right) \ln\frac{y}{y_2}\right) \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int_n^y \frac{\delta r}{\theta} d\theta\right) dy \\ &\leq c_2 \int_{y_2}^{+\infty} y^{\frac{2r}{\sigma^2 K} (K(1+\delta) - y_2) - 1} dy < +\infty, \end{aligned}$$

com c_1 e c_2 constantes positivas, converge porque $K(1 + \delta) < y_2$.

Por último, $M_2 = \int_{y_1}^{y_2} m(y) dy < +\infty$ porque a função m é contínua no intervalo fechado $[y_1, y_2]$.

Provamos que as fronteiras $X = 0$ e $X = +\infty$ são não atrativas e que $M < +\infty$. Deste modo existe densidade estacionária e esta é dada por

$$p(y) = D y^{\frac{2r}{\sigma^2} - 1} \exp\left(-\frac{2r}{\sigma^2 K} y\right) \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int_n^y \frac{\alpha(\theta)}{\theta} d\theta\right),$$

com $D > 0$ constante tal que $\int_0^{+\infty} p(y) dy = 1$.

Como vimos, a "extinção matemática" não ocorre porque a fronteira $X = 0$ é não atrativa mas é preferível usar o conceito de "extinção realista", considerando que a população está extinta quando atinge pela primeira vez um limiar $q > 0$, adequadamente escolhido (por exemplo, $q = 1$).

Para obter a expressão do tempo médio de extinção usamos a expressão (4.2.2) e as mudanças de variável $\tau = \frac{2r}{\sigma^2 K} \eta$, $y = \frac{2r}{\sigma^2 K} \theta$ e $u = \frac{2r}{\sigma^2 K} \zeta$, obtendo

$$\begin{aligned} E[T_q | X(0) = x] &= \frac{2}{\sigma^2} \int_q^x \zeta^{-\frac{2r}{\sigma^2} - 1} \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2 K} \zeta\right) \int_\zeta^{+\infty} \theta^{\frac{2r}{\sigma^2} - 1} \exp\left(-\frac{2r}{\sigma^2 K} \theta\right) \\ &\quad \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int_\zeta^\theta \frac{\alpha(\eta)}{\eta} d\eta\right) d\theta d\zeta \\ &= \frac{2}{\sigma^2} \int_{\frac{2r}{\sigma^2 K} q}^{\frac{2r}{\sigma^2 K} x} u^{-\frac{2r}{\sigma^2} - 1} e^u \int_u^{+\infty} y^{\frac{2r}{\sigma^2} - 1} e^{-y} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int_u^y \frac{\alpha\left(\frac{\sigma^2 K}{2r} \tau\right)}{\tau} d\tau\right) dy du. \end{aligned}$$

Consideramos a grandeza adimensional $|\beta(X)| = \frac{|\alpha(X)|}{r} \leq \delta$. À semelhança do que fizemos em trabalhos anteriores e como é usual em sistemas dinâmicos para reduzir o número de parâmetros e trabalhar apenas com grandezas adimensionais vamos considerar $R = \frac{r}{\sigma^2}$ (uma espécie de relação sinal/ruído), $d = \frac{q}{K}$ (limiar de extinção expresso como fração da capacidade de sustento do meio) e $z = \frac{x}{q}$ (medida de afastamento da população no instante

inicial em relação ao limiar de extinção). Assim a expressão anterior é equivalente a

$$rE[T_q|X(0) = x] = 2R \int_{2Rd}^{2Rdz} u^{-2R-1} e^u \int_u^{+\infty} y^{2R-1} e^{-y} \exp\left(2R \int_u^y \frac{\beta\left(\frac{K\tau}{2R}\right)}{\tau} d\tau\right) dy du.$$

Como $0 < \frac{2r}{\sigma^2 K} q \leq u \leq \frac{2r}{\sigma^2 K} x$ e $u \leq y$ e usando o facto de $\beta(X) \geq -\delta$, obtemos

$$\int_u^y \frac{\beta\left(\frac{\sigma^2 K}{2r} \tau\right)}{\tau} d\tau \geq - \int_u^y \frac{\delta}{\tau} d\tau = -\delta \ln\left(\frac{y}{u}\right)$$

e

$$\exp\left(2R \int_u^y \frac{\beta\left(\frac{\sigma^2 K}{2r} \tau\right)}{\tau} d\tau\right) \geq \left(\frac{y}{u}\right)^{-2R\delta}.$$

Logo, conclui-se que

$$rE[T_q|X(0) = x] \geq 2R \int_{2Rd}^{2Rdz} u^{-2R(1-\delta)-1} e^u \int_u^{+\infty} y^{2R(1-\delta)-1} e^{-y} dy du.$$

Pondo $R^* = R(1-\delta)$, $d^* = \frac{d}{1-\delta}$ (que seria o que se obteria em vez de d se se substituísse K por $K^* = K(1-\delta)$), vem

$$rE[T_q|X(0) = x] \geq \frac{2R^*}{1-\delta} \int_{2R^*d^*}^{2R^*d^*z} u^{-2R^*-1} e^u \int_u^{+\infty} y^{2R^*-1} e^{-y} dy du,$$

equivalente a

$$rE[T_q|X(0) = x] \geq \frac{2R^*}{1-\delta} \int_{2R^*d^*}^{2R^*d^*z} u^{-2R^*-1} e^u \Gamma(2R^*, u) du = \frac{1}{1-\delta} rE_x^{L(R^*, d^*)}[T_q], \quad (5.1.7)$$

com $\Gamma(c, x) = \int_x^{+\infty} y^{c-1} e^{-y} dy$ a função Gama incompleta.

A expressão (5.1.7) é um bom minorante pois caso δ fosse 0, o minorante seria exatamente igual ao comportamento da média do tempo de extinção do modelo logístico (4.2.7). Assim, quando temos o modelo logístico aproximado, a expressão de $rE[T_q|X(0) = x]$ é maior ou igual a $\frac{1}{1-\delta}$ vezes a expressão que se obteria com um modelo logístico (4.2.7) em que tivéssemos R^* em vez de R e K^* em vez de K . Note-se que alterar R para R^* pode obter-se de várias combinações de alterações de r e/ou de σ , a mais simples das quais seria a de alterar r para $r(1-\delta)$ e deixar σ inalterado. Se compararmos a expressão $rE[T_q|X(0) = x]$ do modelo logístico com diferentes parâmetros, concluímos que $rE_x^{L(R^*, d^*)}[T_q] \leq rE_x^{L(R, d)}[T_q]$, uma vez que, à medida que d aumenta (capacidade de sustento do meio K está mais próxima do limiar de extinção q) e à medida que R diminui, o tempo médio de extinção diminui. Note-se ainda que $rE[T_q|X(0) = x] \geq \frac{1}{1-\delta} rE_x^{L(R^*, d^*)}[T_q]$ mas, como $\frac{1}{1-\delta} \geq 1 + \delta \geq 1$, há uma compensação parcial do excesso, o que mais uma vez indica que (5.1.7) é uma boa

minoração.

De modo semelhante obtêm-se a majoração. Visto que $\beta(X) \leq \delta$, vem

$$\begin{aligned} rE[T_q|X(0) = x] &\leq \frac{2R^{**}}{1+\delta} \int_{2R^{**}d^{**}}^{2R^{**}d^{**}z} u^{-2R^{**}-1} e^u \Gamma(2R^{**}, u) du \\ &= \frac{1}{1+\delta} rE_x^{L(R^{**}, d^{**})}[T_q], \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

com $R^{**} = R(1+\delta)$ e $d^{**} = \frac{d}{(1+\delta)}$.

A expressão (5.1.8) é um bom majorante pois, caso δ fosse 0, o majorante seria exatamente igual a $rE[T_q|X(0) = x]$ do modelo logístico (4.2.7). Assim, quando temos o modelo logístico aproximado, a expressão de $rE[T_q|X(0) = x]$ é menor ou igual a $\frac{1}{1+\delta}$ vezes a expressão que se obteria com um modelo logístico (4.2.7) em que tivéssemos R^{**} em vez de R e K^{**} em vez de K . De modo análogo se conclui que $rE_x^{L(R^{**}, d^{**})}[T_q] \geq rE_x^{L(R, d)}[T_q]$, mas, como $\frac{1}{1+\delta} \leq 1$, há uma compensação parcial desse excesso, o que mais uma vez indica que (5.1.8) é um bom majorante.

Para obter a expressão da variância do tempo de extinção, usamos a expressão (4.2.6) e mudanças de variável semelhantes às que fizemos para a média, obtendo

$$\begin{aligned} Var[T_q|X(0) = x] &= \frac{8}{\sigma^4} \int_{\frac{2r}{\sigma^2 K} q}^{\frac{2r}{\sigma^2 K} x} u^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^u \int_u^{+\infty} v^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^v \\ &\quad \int_v^{+\infty} y^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^{-y} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int_u^y \frac{\alpha\left(\frac{\sigma^2 K}{2r} \tau\right)}{\tau} d\tau\right) dy \\ &\quad \int_v^{+\infty} y^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^{-y} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int_v^y \frac{\alpha\left(\frac{\sigma^2 K}{2r} \tau\right)}{\tau} d\tau\right) dy dv du, \end{aligned}$$

equivalente a

$$\begin{aligned} r^2 Var[T_q|X(0) = x] &= 8R^2 \int_{2Rd}^{2Rdz} u^{-2R-1} e^u \int_u^{+\infty} v^{-2R-1} e^v \\ &\quad \int_v^{+\infty} y^{2R-1} e^{-y} \exp\left(2R \int_u^y \frac{\beta\left(\frac{K\tau}{2R}\right)}{\tau} d\tau\right) dy \\ &\quad \int_v^{+\infty} y^{2R-1} e^{-y} \exp\left(2R \int_v^y \frac{\beta\left(\frac{K\tau}{2R}\right)}{\tau} d\tau\right) dy dv du. \end{aligned}$$

Como, por hipótese, $\beta(X) \geq -\delta$, vem

$$\begin{aligned} r^2 \text{Var}[T_q|X(0) = x] &\geq 8R^2 \int_{2Rd}^{2Rdz} u^{-2R-1} e^u \int_u^{+\infty} v^{-2R-1} e^v \int_v^{+\infty} y^{2R-1} e^{-y} \left(\frac{y}{u}\right)^{-2R\delta} dy \\ &\quad \int_v^{+\infty} y^{2R-1} e^{-y} \left(\frac{y}{v}\right)^{-2R\delta} dy dv du \\ &= 8R^2 \int_{2Rd}^{2Rdz} u^{-2R(1-\delta)-1} e^u \int_u^{+\infty} v^{-2R(1-\delta)-1} e^v \\ &\quad \left(\int_v^{+\infty} y^{2R(1-\delta)-1} e^{-y} dy \right)^2 dv du \end{aligned}$$

e temos a seguinte desigualdade para a variância

$$r^2 \text{Var}[T_q|X(0) = x] \geq 8R^2 \int_{2Rd}^{2Rdz} u^{-2R(1-\delta)-1} e^u \int_u^{+\infty} v^{-2R(1-\delta)-1} e^v (\Gamma(2R(1-\delta), v))^2 dv du.$$

De modo análogo, considerando $\beta(X) \leq \delta$, vem

$$r^2 \text{Var}[T_q|X(0) = x] \leq 8R^2 \int_{2Rd}^{2Rdz} u^{-2R(1+\delta)-1} e^u \int_u^{+\infty} v^{-2R(1+\delta)-1} e^v (\Gamma(2R(1+\delta), v))^2 dv du.$$

As desigualdades anteriores são equivalentes a

$$\begin{aligned} r^2 \text{Var}[T_q|X(0) = x] &\geq \frac{8R^{*2}}{(1-\delta)^2} \int_{2R^{*d^*}}^{2R^{*d^*}z} u^{-2R^{*-1}} e^u \int_u^{+\infty} v^{-2R^{*-1}} e^v (\Gamma(2R^*, v))^2 dv du \\ &= \frac{1}{(1-\delta)^2} r^2 V_x^{L(R^*, d^*)}[T_q] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} r^2 \text{Var}[T_q|X(0) = x] &\leq \frac{8R^{**2}}{(1+\delta)^2} \int_{2R^{**d^{**}}}^{2R^{**d^{**}}z} u^{-2R^{**}-1} e^u \int_u^{+\infty} v^{-2R^{**}-1} e^v (\Gamma(2R^{**}, v))^2 dv du \\ &= \frac{1}{(1+\delta)^2} r^2 V_x^{L(R^{**}, d^{**})}[T_q]. \end{aligned}$$

Também é possível fazer comparações entre as variâncias do modelo logístico aproximado e do modelo logístico (4.2.8).

Com o intuito de verificar se este enquadramento pode ser útil para os exemplos já analisados em trabalhos anteriores, vamos considerar $R = 1$ e $R = 10$, $d = 0.01$ e $d = 0.1$ e o novo parâmetro $\delta = 0.01$ e $\delta = 0.1$. Os parâmetros R^* , R^{**} , d^* e d^{**} obtêm-se facilmente.

Na figura 5.1 apresentamos os gráficos do comportamento do tempo médio de extinção. Os gráficos não representam o tempo médio de extinção $E[T_q|X(0) = x]$ mas a grandeza adimensional $rE[T_q|X(0) = x]$ ou $\log_{10}(rE[T_q|X(0) = x])$ em função de z ($z = x/q$). Claro que a partir das expressões obtidas anteriormente podemos obter gráficos correspondentes a outras combinações. Escolhido o gráfico pertinente, basta calcular $z = \frac{x}{q}$, ver esse valor

no eixo das abcissas e ler o correspondente valor no eixo das ordenadas, valor esse que será $rE[T_q|X(0) = x]$ (ou $\log_{10}(rE[T_q|X(0) = x])$), o tempo médio de extinção medido em unidades do tempo "intrínseco" de geração. Para obter o tempo médio de extinção, basta dividir o valor referido pelo valor de r (ou 10 elevado ao valor referido e depois dividir por r).

Para o modelo logístico (curva central a cheio), à medida que z aumenta, isto é, quanto maior for a população inicial comparativamente com o limiar de extinção, mais tempo leva em média a população a extinguir-se. Independentemente da escolha dos parâmetros, a partir de um determinado valor de z o tempo médio estabiliza. Se fixarmos σ , à medida que r aumenta (R aumenta) maior é o tempo médio de extinção. Quanto mais próximo estiver

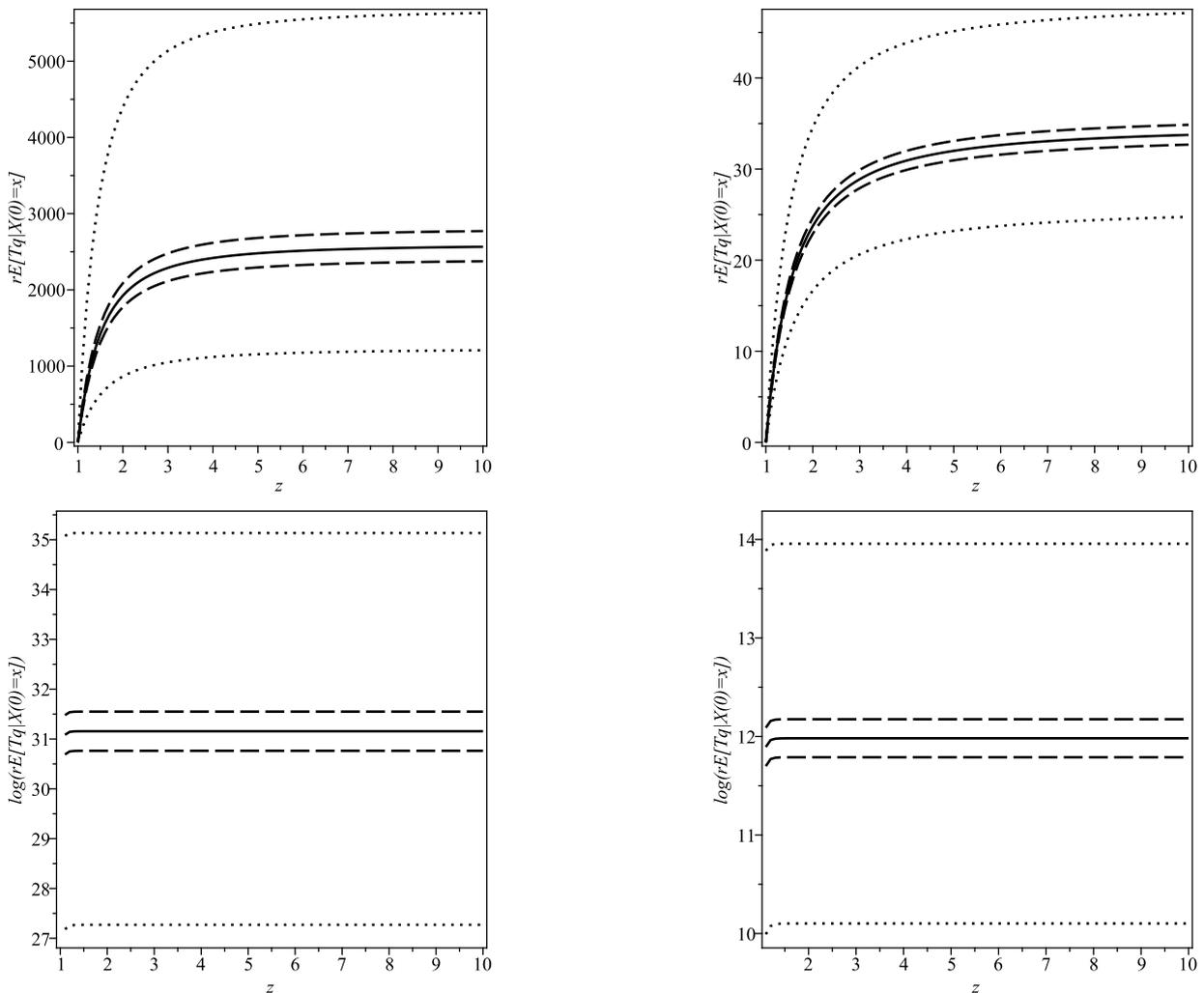


Figura 5.1: Comportamento da média $rE[T_q|X(0) = x]$ ou $\log_{10}(rE[T_q|X(0) = x])$ do tempo de extinção da população em função de $z := \frac{x}{q}$ para o modelo logístico (linha a cheio). A figura também mostra o minorante e o majorante para o modelo aproximadamente logístico, com o erro relativo de $\delta = 0.01$ (linhas a tracejado) e $\delta = 0.1$ (linhas a ponteadas). Consideramos $R := \frac{r}{\sigma^2} = 1$ (em cima) e $R := \frac{r}{\sigma^2} = 10$ (em baixo), $d := \frac{q}{K} = 0.01$ (à esquerda) e $d := \frac{q}{K} = 0.1$ (à direita).

a capacidade de sustento do meio K do limiar de extinção q (ou seja, quando d aumenta) mais rápida em média será a extinção da população.

Os exemplos apresentados na figura 5.1 mostram o efeito de incorreta especificação do modelo de crescimento populacional no comportamento do tempo médio de extinção. Comparativamente com o modelo logístico clássico obtivemos minorantes e majorantes do tempo médio de extinção para o modelo aproximadamente logístico. Note-se que a figura não apresenta os tempos médios de extinção do modelo aproximadamente logístico mas os intervalos onde sabemos que eles estão situados. Os limites inferiores e superiores destes intervalos (minorantes e majorantes) correspondem ao comportamento da média do tempo de extinção para o modelo logístico com outros parâmetros, como podemos ver nas expressões

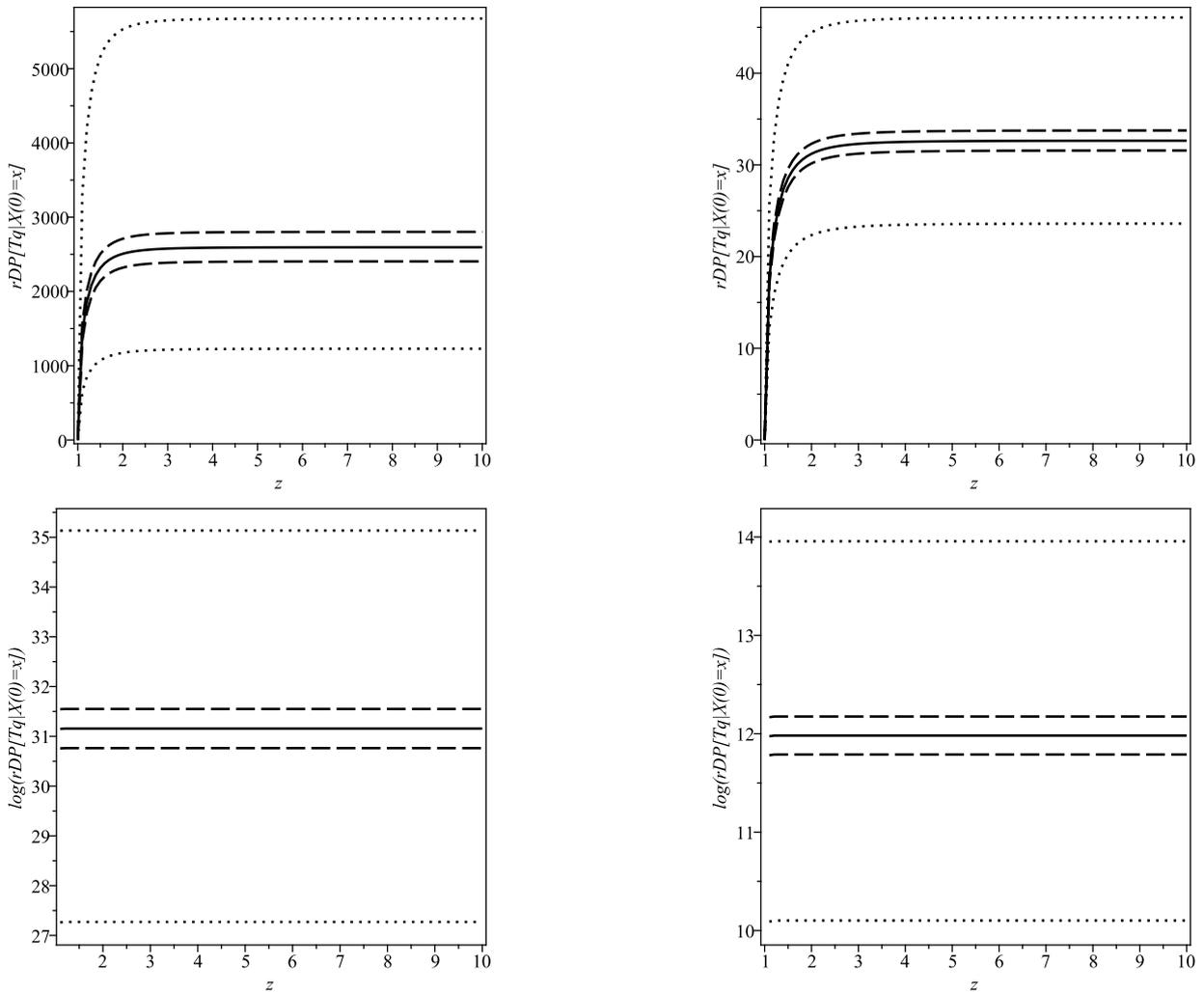


Figura 5.2: Comportamento do desvio padrão $rDP[T_q|X(0) = x]$ ou $\log_{10}(rDP[T_q|X(0) = x])$ do tempo de extinção da população em função de $z := \frac{x}{q}$ para o modelo logístico (linha a cheio). A figura também mostra o minorante e o majorante para o modelo aproximadamente logístico, com o erro relativo de $\delta := 0.01$ (linhas a tracejado) e $\delta := 0.1$ (linhas a ponteadas). Consideramos $R := \frac{r}{\sigma^2} = 1$ (em cima) e $R := \frac{r}{\sigma^2} = 10$ (em baixo), $d := \frac{q}{K} = 0.01$ (à esquerda) e $d := \frac{q}{K} = 0.1$ (à direita).

obtidas. Quanto menor for a diferença entre o modelo logístico e o modelo correspondente ao verdadeiro crescimento da população (menor for o δ), menor será a diferença entre os tempos médios de extinção dos dois modelos, isto é, a amplitude dos intervalos (minorante e majorante) diminui. Concluimos que, se o verdadeiro crescimento da população estiver muito próximo do modelo logístico, os tempos de extinção sofrem ligeiras alterações e poderá ser mais vantajoso utilizar o modelo conhecido. Caso contrário, o erro na especificação do modelo pode implicar alterações bastante significativas no tempo médio de extinção.

A figura 5.2 representa o comportamento do desvio padrão do tempo de extinção. Também aqui considerámos a grandeza adimensional $rDP[T_q|X(0) = x]$ ou $\log_{10}(rDP[T_q|X(0) = x])$ ao invés do desvio padrão $DP[T_q|X(0) = x]$. O desvio padrão é da mesma ordem de grandeza do tempo médio de extinção. Obtivemos o comportamento do desvio padrão do tempo de extinção para o modelo logístico e minorantes e majorantes para o desvio padrão do tempo de primeira passagem pelo limiar inferior q para o modelo aproximadamente logístico.

5.2 Modelo aproximadamente de Gompertz

Outro modelo bastante utilizado na literatura para modelar o crescimento populacional é o modelo de Gompertz, com a taxa média de crescimento *per capita* dada por $f(X) = r \ln \frac{K}{X}$, com $r > 0$ e $K > 0$. Suponhamos que a verdadeira taxa de crescimento *per capita* f é apenas aproximada pelo modelo de Gompertz com parâmetros r e K e suponhamos que o desvio é $\alpha(X) = f(X) - r \ln \frac{K}{X}$, isto é, temos o modelo aproximadamente de Gompertz definido por

$$f(X) = r \ln \frac{K}{X} + \alpha(X).$$

Podemos escrever

$$f(X) = r \ln \frac{Ke^{\frac{\alpha(X)}{r}}}{X}.$$

Suponhamos que α é uma função de classe C^1 e que $\frac{|\alpha(X)|}{r} \leq \delta$, onde $0 \leq \delta < 1$ (δ deverá ser próximo de zero) é uma espécie de erro relativo. Este modelo de Gompertz aproximado equivale a trabalhar com um modelo exatamente de Gompertz mas com a capacidade de sustento variável $K(t) = Ke^{\frac{\alpha(X(t))}{r}}$. Note-se que $K(t) \in [Ke^{-\delta}, Ke^{\delta}]$.

Considerando estas hipóteses, a taxa de crescimento *per capita* é dada por

$$\frac{1}{X} \frac{dX}{dt} = r \ln \frac{K}{X} + \alpha(X),$$

equivalente a

$$\frac{dX}{dt} = rX \ln \frac{K(t)}{X}.$$

Para resolver a equação diferencial, fazemos a mudança de variável $Z = \ln X$ e multiplicamos

todos os membros da equação por e^{rt} . Integrando entre 0 e t , vem

$$Z(t) = Z(0)e^{-rt} + e^{-rt} \int_0^t r \ln(K(s))e^{rs} ds,$$

Assim, a solução do modelo de Gompertz determinístico é dada por

$$X(t) = \exp \left(e^{-rt} \ln X(0) + e^{-rt} \int_0^t r e^{rs} \ln K(s) ds \right).$$

Mas esta solução é implícita uma vez que, $K(s)$ depende de $X(s)$. Usando o facto de $K(t) \in [Ke^{-\delta}, Ke^{\delta}]$, podemos garantir as seguintes desigualdades para a solução:

$$X(t) \geq K \exp \left(e^{-rt} \ln \frac{X(0)}{K} - \delta (1 - e^{-rt}) \right)$$

e

$$X(t) \leq K \exp \left(e^{-rt} \ln \frac{X(0)}{K} + \delta (1 - e^{-rt}) \right),$$

equivalentes a

$$X(t) \geq \exp(-\delta(1 - e^{-rt})) K \exp \left(e^{-rt} \ln \frac{X(0)}{K} \right) = \exp(-\delta(1 - e^{-rt})) X^{G(r,K)}(t)$$

e

$$X(t) \leq \exp(\delta(1 - e^{-rt})) K \exp \left(e^{-rt} \ln \frac{X(0)}{K} \right) = \exp(\delta(1 - e^{-rt})) X^{G(r,K)}(t),$$

onde $X^{G(r,K)}(t) := X(t) = K \exp \left(e^{-rt} \ln \frac{X(0)}{K} \right)$ é a solução do modelo de Gompertz determinístico, encontrada em (3.1.5). Quando $\delta = 0$ temos exatamente a solução do modelo de Gompertz determinístico, o que significa que as expressões encontradas são uma boa minoração e uma boa majoração.

Os pontos de equilíbrio são $X = 0$ e as raízes da equação $r \ln \frac{K}{X} + \alpha(X) = 0$, que equivale a $X = K \exp \left(\frac{\alpha(X)}{r} \right)$, as quais se encontram entre $Ke^{-\delta}$ e Ke^{δ} . Note-se que, para $0 < X < Ke^{-\delta}$, vem $\frac{dX}{dt} > 0$ e, para $X > Ke^{\delta}$, vem $\frac{dX}{dt} < 0$, pelo que existe pelo menos uma raiz no intervalo $[Ke^{-\delta}, Ke^{\delta}]$.

Suponhamos agora que o ambiente está sujeito a flutuações aleatórias, que podemos aproximar por um ruído branco $\sigma\varepsilon(t)$, com $\sigma > 0$ e $\varepsilon(t)$ um ruído branco padrão, e que essas flutuações afetam a taxa de crescimento *per capita*. Temos

$$\frac{1}{X} \frac{dX}{dt} = r \ln \frac{K}{X} + \alpha(X) + \sigma\varepsilon(t).$$

Escrevendo na forma mais usual, temos a EDE de Stratonovich

$$dX = \left(r \ln \frac{K}{X} + \alpha(X) \right) X dt + \sigma X dW(t),$$

equivalente à EDE de Itô

$$(I) \quad dX = \left(r \ln \frac{K}{X} + \alpha(X) + \frac{\sigma^2}{2} \right) X dt + \sigma X dW(t),$$

com $X(0) = x > 0$.

Como a EDE autónoma tem coeficientes de classe C^1 , a solução existe e é única até a um instante de explosão, que iremos provar mais à frente ser infinito, pelo que a solução existe e é única para todo o $t \geq 0$. A solução é um processo de difusão com coeficiente de tendência

$$a(x) = \left(r \ln \frac{K}{x} + \alpha(x) + \frac{\sigma^2}{2} \right) x$$

e coeficiente de difusão

$$b^2(x) = \sigma^2 x^2.$$

As fronteiras são $X = 0$ e $X = +\infty$ porque $a(0) = 0$ e $b^2(0) = 0$. A densidade de escala é

$$s(y) = \frac{C}{y} \exp \left(\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \frac{K}{y} - \frac{2}{\sigma^2} \int_n^y \frac{\alpha(\theta)}{\theta} d\theta \right) \quad (5.2.1)$$

e a densidade de velocidade

$$\begin{aligned} m(y) &= \frac{1}{n\sigma^2 y} \exp \left(\frac{2r}{\sigma^2} \int_n^y \frac{1}{\theta} \left(\ln \frac{K}{\theta} + \frac{\alpha(\theta)}{r} \right) d\theta \right) \\ &= \frac{1}{C\sigma^2 y} \exp \left(-\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \frac{K}{y} + \frac{2}{\sigma^2} \int_n^y \frac{\alpha(\theta)}{\theta} d\theta \right), \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

com C uma constante positiva arbitrária.

De modo análogo ao modelo determinístico, fazemos a mudança de variável $Z = \ln X$, multiplicamos ambos os membros por e^{rt} e integramos entre 0 e t , obtendo

$$Z(t) = Z(0)e^{-rt} + e^{-rt} \int_0^t (r \ln K(s) + \sigma \varepsilon(s)) e^{rs} ds.$$

Voltando à variável inicial X , temos

$$X(t) = \exp \left(\ln(X(0))e^{-rt} + e^{-rt} \int_0^t (r \ln K(s) + \sigma \varepsilon(s)) e^{rs} ds \right).$$

De novo trata-se de uma solução implícita. Podemos escrever as seguintes desigualdades

para a solução do modelo aproximadamente de Gompertz:

$$\begin{aligned}
X(t) &\geq K \exp \left(e^{-rt} \ln \frac{X(0)}{K} - \delta (1 - e^{-rt}) + \sigma e^{-rt} \int_0^t e^{rs} dW(s) \right) \\
&= \exp(-\delta (1 - e^{-rt})) K \exp \left(e^{-rt} \ln \frac{X(0)}{K} + \sigma e^{-rt} \int_0^t e^{rs} dW(s) \right) \\
&= \exp(-\delta (1 - e^{-rt})) X_e^{G(r,K)}(t)
\end{aligned} \tag{5.2.3}$$

e

$$\begin{aligned}
X(t) &\leq K \exp \left(e^{-rt} \ln \frac{X(0)}{K} + \delta (1 - e^{-rt}) + \sigma e^{-rt} \int_0^t e^{rs} dW(s) \right) \\
&= \exp(\delta (1 - e^{-rt})) K \exp \left(e^{-rt} \ln \frac{X(0)}{K} + \sigma e^{-rt} \int_0^t e^{rs} dW(s) \right) \\
&= \exp(\delta (1 - e^{-rt})) X_e^{G(r,K)}(t),
\end{aligned} \tag{5.2.4}$$

onde $X_e^{G(r,K)}(t)$ é a solução do modelo de Gompertz estocástico (3.2.5). As desigualdades (5.2.3) e (5.2.4) são um bom minorante e um bom majorante, porque, caso δ seja zero, temos exatamente a solução do modelo de Gompertz estocástico.

Vamos agora classificar as fronteiras do espaço de estados. Começamos com a fronteira $X = 0$. Para todo o $0 < x_0 < n < K$ e $0 < y \leq x_0$, temos

$$\begin{aligned}
S(0, x_0] &= C \int_0^{x_0} \frac{1}{y} \exp \left(\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \frac{K}{y} - \frac{2}{\sigma^2} \int_n^y \frac{\alpha(\theta)}{\theta} d\theta \right) dy \\
&\geq C \int_0^{x_0} \frac{1}{y} \exp \left(\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \frac{K}{y} - \frac{2\delta r}{\sigma^2} \int_y^n \frac{1}{\theta} d\theta \right) dy \\
&= c_1 \int_0^{x_0} \exp \left(\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \frac{K}{y} \right) y^{\frac{2\delta r}{\sigma^2} - 1} dy \\
&= c_2 \int_{\frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln \frac{K}{x_0}}^{+\infty} \exp \left(z^2 - 2\delta \frac{\sqrt{r}}{\sigma} z \right) dz = +\infty,
\end{aligned}$$

com c_1 e c_2 constantes positivas finitas e onde fizemos a mudança de variável $z = \frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln \frac{K}{y}$. O integral é divergente e a fronteira $X = 0$ é não atrativa.

Para todo o $K < n < x_0$ e $x_0 \leq y < +\infty$, temos

$$\begin{aligned}
S[x_0, +\infty) &= C \int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{y} \exp \left(\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \frac{K}{y} - \frac{2}{\sigma^2} \int_n^y \frac{\alpha(\theta)}{\theta} d\theta \right) dy \\
&\geq C \int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{y} \exp \left(\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \frac{K}{y} - \frac{2\delta r}{\sigma^2} \ln \frac{y}{n} \right) dy \\
&\geq c_1 \int_{x_0}^{+\infty} y^{-\frac{2\delta r}{\sigma^2} - 1} \exp \left(\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \frac{K}{y} \right) dy,
\end{aligned}$$

com $c_1 > 0$ constante. Como

$$\begin{aligned}
\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\exp\left(\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \frac{K}{y}\right)}{y^{\frac{2\delta r}{\sigma^2} + 1}} &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \frac{K}{y} - \left(\frac{2\delta r}{\sigma^2} + 1\right) \ln y\right) \\
&= \lim_{y \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \frac{y}{K} - \left(\frac{2\delta r}{\sigma^2} + 1\right) \ln \frac{y}{K} - \left(\frac{2\delta r}{\sigma^2} + 1\right) \ln K\right) \\
&= \lim_{z \rightarrow +\infty} \exp\left(z^2 - \left(\frac{2\delta\sqrt{r}}{\sigma} + \frac{\sigma}{\sqrt{r}}\right) z - \left(\frac{2\delta r}{\sigma^2} + 1\right) \ln K\right) \\
&= +\infty,
\end{aligned}$$

concluimos que o integral é divergente e a fronteira $X = +\infty$ é não atrativa.

Mostramos que ambas as fronteiras são não atrativas e, portanto, inatingíveis. O que significa que não existem explosões, ou seja, a solução nunca se torna infinita e o espaço de estados é o intervalo $(0, +\infty)$. O facto de as fronteiras serem inatingíveis em tempo infinito garante que $X(t)$ não tende para zero nem para $+\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$. Não existe extinção matemática uma vez que $X(t)$ não é zero nem tende para zero quando $t \rightarrow +\infty$.

Como ambas as fronteiras são não atrativas, para existir densidade estacionária basta provar que $M = \int_0^{+\infty} m(y) dy$ é convergente e, nesse caso, a expressão da densidade estacionária é da forma $p(y) = D m(y)$, com $D = \frac{1}{\int_0^{+\infty} m(y) dy}$. Os próximos cálculos demonstram que M é um integral convergente. Seja

$$M = M_1 + M_2 + M_3 = \int_0^{y_1} m(y) dy + \int_{y_1}^{y_2} m(y) dy + \int_{y_2}^{+\infty} m(y) dy.$$

Suponhamos $y_1 < K < \frac{y_2}{e^\delta} < y_2$ e $0 < y_1 < n < y_2$. Fixamos $n < \frac{K}{e^\delta}$. Para $n > \frac{K}{e^\delta}$ a demonstração é análoga.

Começamos por provar que $M_1 < +\infty$. Sejam $y \in (0, y_1]$ e $\theta \in [y, n]$. Consideramos $h(y) = -\frac{2r}{\sigma^2} \left(\ln \frac{K}{n} - \delta\right) \int_y^n \frac{1}{\theta} d\theta$ e, como $\ln \frac{K}{n} - \delta > 0$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
m(y) &= c_1 \frac{1}{y} \exp\left(-\frac{2r}{\sigma^2} \int_y^n \frac{1}{\theta} \left(\ln \frac{K}{\theta} + \frac{\alpha(\theta)}{r}\right) d\theta\right) \\
&\leq c_1 \frac{1}{y} \exp\left(-\frac{2r}{\sigma^2} \left(\ln \frac{K}{n} - \delta\right) \int_y^n \frac{1}{\theta} d\theta\right) \\
&= c_1 \frac{1}{y} \exp(h(y)) \\
&= c_2 \frac{d(\exp(h(y)))}{dy}.
\end{aligned}$$

com c_1 e c_2 constantes positivas. Logo, tendo em atenção que $h(0^+) = -\infty$,

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_0^{y_1} m(y) dy \\ &\leq c_2 (\exp(h(y_1)) - \exp(h(0^+))) \\ &\leq c_2 \exp(h(y_1)) < +\infty, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Vamos agora provar que $M_3 < +\infty$. Sejam $y \in [y_2, +\infty)$ e $\theta \in [n, y]$. Fazemos

$$\begin{aligned} \frac{2r}{\sigma^2} \int_n^y \frac{1}{\theta} \left(\ln \frac{K}{\theta} + \frac{\alpha(\theta)}{r} \right) d\theta &= \frac{2r}{\sigma^2} \int_n^{y_2} \frac{1}{\theta} \left(\ln \frac{K}{\theta} + \frac{\alpha(\theta)}{r} \right) d\theta + \frac{2r}{\sigma^2} \int_{y_2}^y \frac{1}{\theta} \left(\ln \frac{K}{\theta} + \frac{\alpha(\theta)}{r} \right) d\theta \\ &= A + B(y). \end{aligned}$$

Sabemos que

$$B(y) = \frac{2r}{\sigma^2} \int_{y_2}^y \frac{1}{\theta} \left(\ln \frac{K}{\theta} + \frac{\alpha(\theta)}{r} \right) d\theta \leq \frac{2r}{\sigma^2} \left(\ln \frac{K}{y_2} + \delta \right) \ln \frac{y}{y_2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} m(y) &= c_1 \frac{1}{y} \exp \left(\frac{2r}{\sigma^2} \int_n^y \frac{1}{\theta} \left(\ln \frac{K}{\theta} + \frac{\alpha(\theta)}{r} \right) d\theta \right) \\ &\leq c_1 \frac{1}{y} \exp \left(A + \frac{2r}{\sigma^2} \left(\ln \frac{K}{y_2} + \delta \right) \ln \frac{y}{y_2} \right) \\ &= c_2 y^{\frac{2r}{\sigma^2} \left(\ln \frac{K}{y_2} + \delta \right) - 1}, \end{aligned}$$

com c_1 e c_2 constantes positivas. Como $K < \frac{y_2}{e^\delta} < y_2$, temos $\ln \frac{K}{y_2} + \delta < 0$, e vem

$$M_3 = \int_{y_2}^{+\infty} m(y) dy \leq c_2 \int_{y_2}^{+\infty} y^{\frac{2r}{\sigma^2} \left(\ln \frac{K}{y_2} + \delta \right) - 1} dy < +\infty,$$

como queríamos provar.

Finalmente, $M_2 < +\infty$ porque a função integranda é contínua no intervalo fechado $[y_1, y_2]$.

Assim, garantimos a existência de densidade estacionária dada por

$$p(y) = \frac{D}{y} \exp \left(-\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \frac{K}{y} + \frac{2}{\sigma^2} \int_n^y \frac{\alpha(\theta)}{\theta} d\theta \right),$$

com D constante tal que $p(y) \geq 0 \forall y \geq 0$ e $\int_0^{+\infty} p(y) dy = 1$.

Provámos que não existe "extinção matemática" mas existe "extinção realista". Estamos por isso, interessados em estudar os tempos de extinção para populações descritas pelo

modelo aproximadamente de Gompertz.

Para escrever a expressão do tempo médio de extinção para o modelo aproximadamente de Gompertz usamos a expressão (4.2.2) com a densidade de escala (5.2.1) e a densidade de velocidade (5.2.2) e fazendo as mudanças de variável $\tau = \frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln \frac{\eta}{K}$, $y = \frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln \frac{\theta}{K}$ e $\mu = \frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln \frac{\zeta}{K}$, obtendo

$$\begin{aligned} E[T_q|X(0) = x] &= \frac{2}{\sigma^2} \int_q^x \frac{1}{\zeta} \exp\left(\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \frac{K}{\zeta} - \frac{2}{\sigma^2} \int_n^\zeta \frac{\alpha(\eta)}{\eta} d\eta\right) \\ &\quad \int_\zeta^{+\infty} \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \frac{K}{\theta} + \frac{2}{\sigma^2} \int_n^\theta \frac{\alpha(\eta)}{\eta} d\eta\right) d\theta d\zeta \\ &= \frac{2}{r} \int_{\frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln \frac{q}{K}}^{\frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln \frac{x}{K}} e^{\mu^2} \int_\mu^{+\infty} e^{-y^2} \exp\left(\frac{2\sqrt{r}}{\sigma} \int_\mu^y \frac{\alpha(Ke^{\frac{\sigma}{\sqrt{r}}\tau})}{r} d\tau\right) dy d\mu. \end{aligned}$$

Como é habitual em sistemas dinâmicos, vamos reduzir o número de parâmetros em estudo e trabalhar com grandezas adimensionais. Como já fizemos em trabalhos anteriores, consideramos $R = \frac{r}{\sigma^2}$ uma espécie de relação sinal/ruído, $d = \frac{q}{K}$ o limiar de extinção expresso como fração da capacidade de sustento do meio e $z = \frac{x}{q}$ a medida de afastamento relativo da população no instante inicial em relação ao limiar de extinção. Fazemos ainda $\beta(X) = \frac{\alpha(X)}{r}$. Assim, obtemos a seguinte expressão para o tempo médio de extinção

$$rE[T_q|X(0) = x] = 2 \int_{\sqrt{R} \ln d}^{\sqrt{R} \ln(dz)} e^{\mu^2} \int_\mu^{+\infty} e^{-y^2} \exp\left(2\sqrt{R} \int_\mu^y \beta\left(Ke^{\frac{\tau}{\sqrt{R}}}\right) d\tau\right) dy d\mu.$$

Como consideramos $|\beta(X)| \leq \delta$, em particular, $\beta(X) \geq -\delta$, podemos escrever a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} rE[T_q|X(0) = x] &\geq 2 \int_{\sqrt{R} \ln d}^{\sqrt{R} \ln(dz)} e^{(\mu+\sqrt{R}\delta)^2} \int_\mu^{+\infty} e^{-(y+\sqrt{R}\delta)^2} dy d\mu \\ &= 2\sqrt{\pi} \int_{\sqrt{R} \ln(de^\delta)}^{\sqrt{R} \ln(de^\delta z)} e^{u^2} \left(1 - \Phi(\sqrt{2}u)\right) du, \end{aligned}$$

com $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$.

Por outro lado, $\beta(X) \leq \delta$ e, de modo análogo, obtemos a desigualdade

$$\begin{aligned} rE[T_q|X(0) = x] &\leq 2 \int_{\sqrt{R} \ln d}^{\sqrt{R} \ln(dz)} e^{(\mu-\sqrt{R}\delta)^2} \int_\mu^{+\infty} e^{-(y-\sqrt{R}\delta)^2} dy d\mu \\ &= 2\sqrt{\pi} \int_{\sqrt{R} \ln(de^{-\delta})}^{\sqrt{R} \ln(de^{-\delta} z)} e^{u^2} \left(1 - \Phi(\sqrt{2}u)\right) du. \end{aligned}$$

Para a variância do tempo médio de extinção (4.2.6), fazemos mudanças de variáveis

análogas às que fizemos para o tempo médio de extinção e vem

$$\begin{aligned} r^2 Var [T_q | X(0) = x] &= 8 \int_{\sqrt{R} \ln d}^{\sqrt{R} \ln(dz)} e^{\mu^2} \int_{\mu}^{+\infty} e^{\vartheta^2} \int_{\vartheta}^{+\infty} e^{-y^2} \exp \left(2\sqrt{R} \int_{\mu}^y \beta \left(K e^{\frac{\tau}{\sqrt{R}}} \right) d\tau \right) dy \\ &\quad \int_{\vartheta}^{+\infty} e^{-y^2} \exp \left(2\sqrt{R} \int_{\vartheta}^y \beta \left(K e^{\frac{\tau}{\sqrt{R}}} \right) d\tau \right) dy d\vartheta d\mu. \end{aligned}$$

Uma vez que $-\delta \leq \beta(X) \leq \delta$, podemos escrever as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} r^2 Var [T_q | X(0) = x] &\geq 8 \int_{\sqrt{R} \ln d}^{\sqrt{R} \ln(dz)} e^{(\mu + \sqrt{R}\delta)^2} \int_{\mu}^{+\infty} e^{(\vartheta + \sqrt{R}\delta)^2} \left(\int_{\vartheta}^{+\infty} e^{-(y + \sqrt{R}\delta)^2} dy \right)^2 d\vartheta d\mu \\ &= 8\pi \int_{\sqrt{R} \ln(de^\delta)}^{\sqrt{R} \ln(de^\delta z)} e^{u^2} \int_u^{+\infty} e^{v^2} \left(1 - \Phi(\sqrt{2}v) \right)^2 dv du \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} r^2 Var [T_q | X(0) = x] &\leq 8 \int_{\sqrt{R} \ln d}^{\sqrt{R} \ln(dz)} e^{(\mu - \sqrt{R}\delta)^2} \int_{\mu}^{+\infty} e^{(\vartheta - \sqrt{R}\delta)^2} \left(\int_{\vartheta}^{+\infty} e^{-(y - \sqrt{R}\delta)^2} dy \right)^2 d\vartheta d\mu \\ &= 8\pi \int_{\sqrt{R} \ln(de^{-\delta})}^{\sqrt{R} \ln(de^{-\delta} z)} e^{u^2} \int_u^{+\infty} e^{v^2} \left(1 - \Phi(\sqrt{2}v) \right)^2 dv du. \end{aligned}$$

As minorações e majorações feitas para a média e a variância não são excessivas pois quando $\delta = 0$ temos exatamente as expressões da média e da variância do modelo de Gompertz ((4.2.9) e (4.2.10)).

Pondo $d^* = de^\delta$ e $d^{**} = de^{-\delta}$ temos

$$rE[T_q | X(0) = x] \geq 2\sqrt{\pi} \int_{\sqrt{R} \ln(d^*)}^{\sqrt{R} \ln(d^* z)} e^{u^2} \left(1 - \Phi(\sqrt{2}u) \right) du = rE_x^{G(R, d^*)}[T_q]$$

e

$$rE[T_q | X(0) = x] \leq 2\sqrt{\pi} \int_{\sqrt{R} \ln(d^{**})}^{\sqrt{R} \ln(d^{**} z)} e^{u^2} \left(1 - \Phi(\sqrt{2}u) \right) du = rE_x^{G(R, d^{**})}[T_q].$$

Assim, a expressão $E[T_q | X(0) = x]$ do modelo de Gompertz aproximado pode ser minorada e majorada pela expressão do comportamento do tempo médio de extinção do modelo de Gompertz (4.2.9) com diferentes parâmetros, d^* ou d^{**} , em vez de d . Note-se que alterar d para d^* pode obter-se de várias alterações de q e/ou K , a mais simples sendo a de alterar K para $Ke^{-\delta}$ e deixar q inalterado. Alterar d para d^{**} poderia obter-se alterando K para Ke^δ e mantendo o mesmo limiar de extinção q .

Do mesmo modo, obtêm-se as seguintes expressões para a variância:

$$r^2 Var [T_q | X(0) = x] \geq 8\pi \int_{\sqrt{R} \ln(d^*)}^{\sqrt{R} \ln(d^* z)} e^{u^2} \int_u^{+\infty} e^{v^2} \left(1 - \Phi(\sqrt{2}v) \right)^2 dv du = r^2 V_x^{L(R, d^*)}[T_q]$$

e

$$r^2 \text{Var} [T_q | X(0) = x] \leq 8\pi \int_{\sqrt{R} \ln(d^{**} z)}^{\sqrt{R} \ln(d^{**} z)} e^{u^2} \int_u^{+\infty} e^{v^2} (1 - \Phi(\sqrt{2}v))^2 dv du = r^2 V_x^{L(R, d^{**})} [T_q].$$

Logo, a expressão $r^2 \text{Var} [T_q | X(0) = x]$ do modelo de Gompertz aproximado é maior (menor) ou igual à expressão $r^2 \text{Var} [T_q | X(0) = x]$ do modelo de Gompertz (4.2.10) com d^* (d^{**}) em vez de d .

Consideramos $R = 1$ e $R = 10$, $d = 0.01$ e $d = 0.1$ e $\delta = 0.01$ e $\delta = 0.1$. Apresentamos na figura 5.3 alguns gráficos do comportamento do tempo médio de extinção e na figura 5.4 os gráficos do comportamento do respetivo desvio padrão.

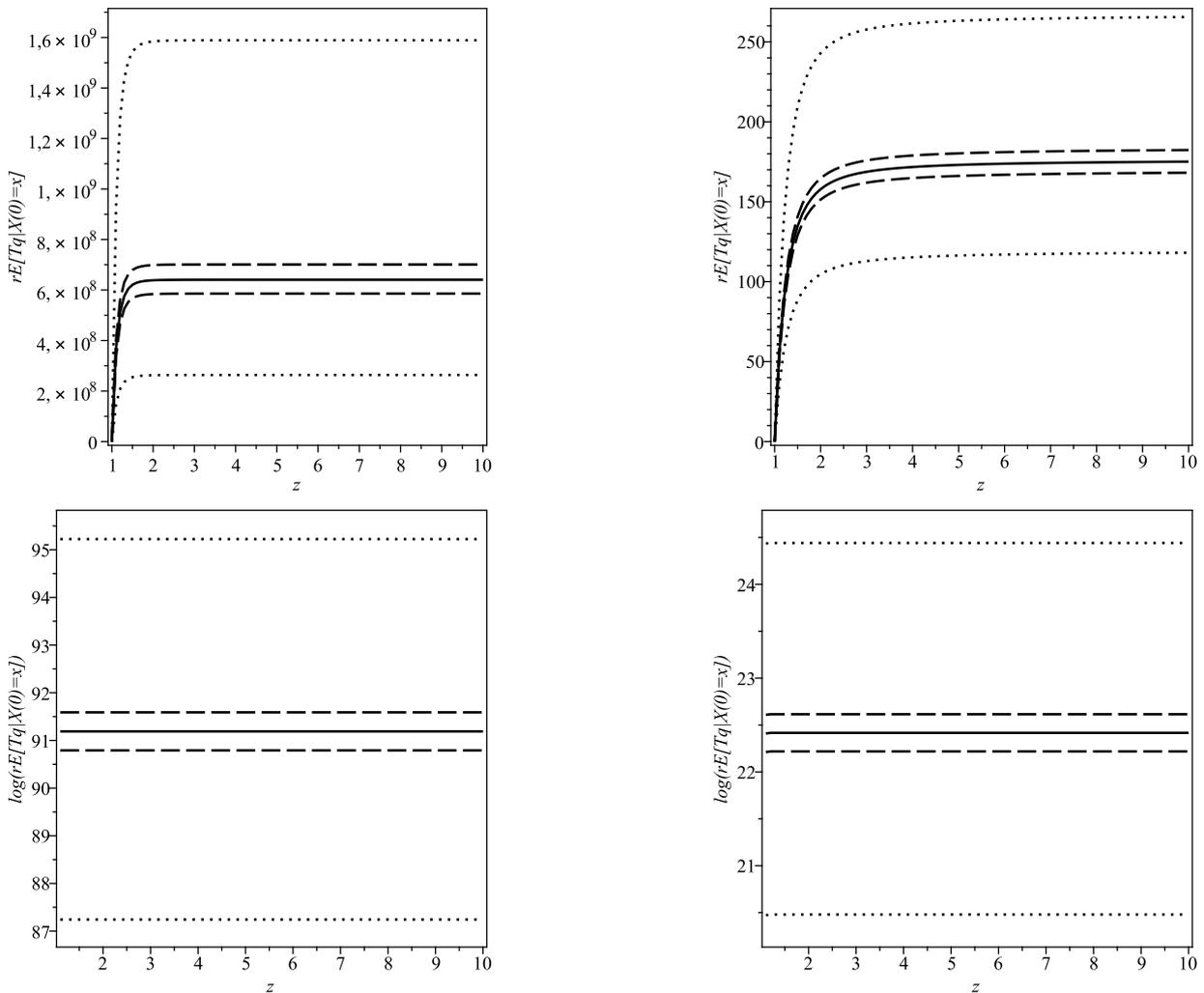


Figura 5.3: Comportamento da média $rE[T_q|X(0) = x]$ ou $\log_{10}(rE[T_q|X(0) = x])$ do tempo de extinção da população em função de $z := \frac{x}{q}$ para o modelo de Gompertz (linha a cheio). A figura também mostra o minorante e majorante para o modelo aproximadamente de Gompertz, com o erro relativo de $\delta := 0.01$ (linhas a tracejado) e $\delta := 0.1$ (linhas a ponteadas). Consideramos $R := \frac{r}{\sigma^2} = 1$ (em cima) e $R := \frac{r}{\sigma^2} = 10$ (em baixo), $d := \frac{q}{K} = 0.01$ (à esquerda) e $d := \frac{q}{K} = 0.1$ (à direita).

Os parâmetros r , e portanto R , têm significados diferentes no modelo de Gompertz e no modelo logístico, por isso as curvas obtidas para um modelo não são comparáveis com as obtidas para o outro. No entanto, o comportamento é muito semelhante.

Para o modelo exatamente de Gompertz, se fixarmos o limiar de extinção q , quanto maior for a população no instante inicial maior será o tempo médio de extinção, como facilmente se verifica mostrando que na sua expressão o limiar superior de integração aumenta. No entanto a partir de um certo valor de z o crescimento é muito lento. À medida que d aumenta (o que corresponde à diminuição de K no caso de fixarmos o limiar de extinção q), o tempo médio de extinção diminui. Para σ fixo, à medida que r diminui, o que significa que R também diminui, mais rápida será em média a extinção.

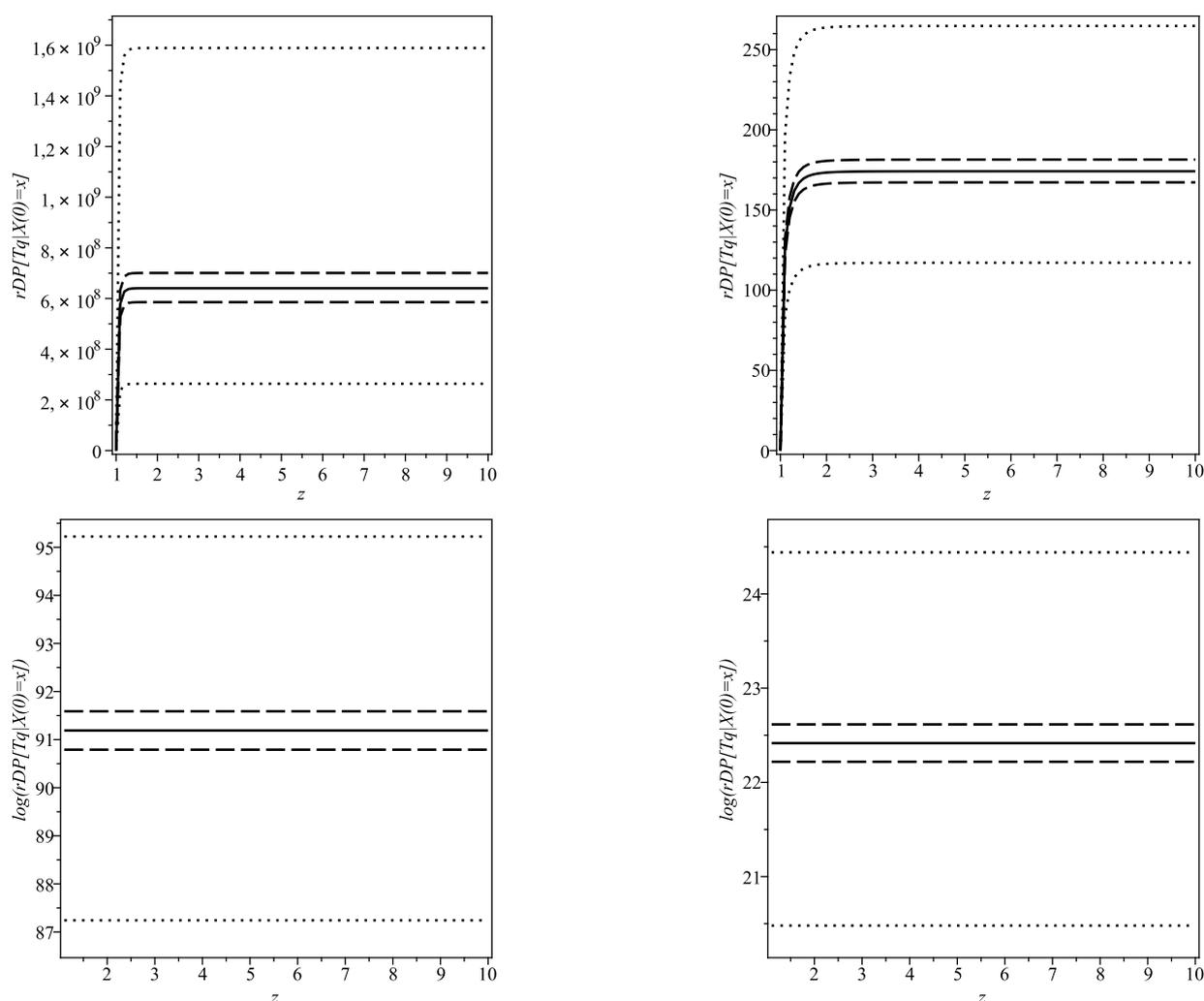


Figura 5.4: Comportamento do desvio padrão $rDP[T_q|X(0) = x]$ ou $\log_{10}(rDP[T_q|X(0) = x])$ do tempo de extinção da população em função de $z := \frac{x}{q}$ para o modelo de Gompertz (linha a cheio). A figura também mostra o minorante e majorante para o modelo aproximadamente de Gompertz, com o erro relativo de $\delta := 0.01$ (linhas a tracejado) e $\delta := 0.1$ (linhas a ponteadas). Consideramos $R := \frac{r}{\sigma^2} = 1$ (em cima) e $R := \frac{r}{\sigma^2} = 10$ (em baixo), $d := \frac{q}{K} = 0.01$ (à esquerda) e $d := \frac{q}{K} = 0.1$ (à direita).

O desvio padrão do tempo de extinção tem a mesma ordem de grandeza da média do tempo de primeira passagem pelo limiar inferior q , o que significa que existe uma grande variabilidade do tempo de extinção da população.

Os gráficos mostram os minorantes e majorantes para o comportamento da média e do desvio padrão dos tempos de extinção da população descrita pelo modelo aproximadamente de Gompertz. Assim, se a verdadeira taxa de crescimento médio estiver muito próxima do modelo de Gompertz, o comportamento da média e do desvio padrão dos tempos de extinção da população são muito próximos do modelo clássico. Podemos então usar o modelo conhecido, que é muito mais simples de trabalhar, como uma boa aproximação e obter limites para o erro cometido. Caso contrário, a utilização do modelo aproximado pode conduzir a valores muito diferentes do modelo verdadeiro.

EFEITO DE INCORRETA ESPECIFICAÇÃO DO COEFICIENTE DE DIFUSÃO

O crescimento populacional deve ter em conta as flutuações aleatórias do ambiente que afetam a taxa de crescimento e os modelos estocásticos são bastante adequados para descrever este fenómeno. Até aqui supusemos que a população cresce num ambiente sujeito a flutuações aleatórias onde a intensidade do efeito das flutuações ambientais no crescimento é medida pelo parâmetro $\sigma > 0$. No entanto, a verdadeira taxa de crescimento *per capita* pode não ser exatamente desta forma e a intensidade das flutuações ambientais pode variar ligeiramente com o tamanho da população. Estamos interessados em estudar o efeito dessa alteração no comportamento das fronteiras do espaço de estados na existência de densidade estacionária e nos tempos de extinção.

Neste capítulo estudamos o efeito da incorreta especificação do coeficiente de difusão para os modelos logístico e de Gompertz. Iremos começar por estudar o comportamento das fronteiras e a existência de densidade estacionária para ambos os modelos (na secção 6.1). Na secção 6.2 apresentamos o estudo dos tempos de extinção para o modelo logístico com σ aproximado. Na secção 6.3 fazemos o estudo dos tempos de primeira passagem pelo limiar q para o modelo de Gompertz com σ aproximado. Para este modelo, apresentamos dois métodos distintos para obter a minoração e majoração do comportamento da média e da variância do tempo de extinção.

6.1 Modelos estocásticos

Suponhamos agora que a taxa de crescimento populacional *per capita* é descrita pela equação diferencial estocástica

$$\frac{1}{X} \frac{dX}{dt} = f(X) + (\sigma + \alpha(X)) \varepsilon(t)$$

ou na forma mais habitual, a EDE de Stratonovich

$$dX = f(X)Xdt + (\sigma + \alpha(X)) XdW(t),$$

equivalente à EDE de Itô

$$(I) \quad dX = \left(f(X) + \frac{1}{2} (\sigma + \alpha(X)) (\sigma + \alpha(X) + \alpha'(X)X) \right) Xdt + (\sigma + \alpha(X)) XdW(t),$$

com $X(0) = x > 0$ conhecido.

A função f representa a taxa média de crescimento *per capita* e usamos os dois modelos clássicos, o modelo logístico com $f(X) = r \left(1 - \frac{X}{K}\right)$, a que chamaremos modelo logístico com σ aproximado, e o modelo de Gompertz com $f(X) = r \ln \frac{K}{X}$, que designaremos por modelo de Gompertz com σ aproximado. A função α é uma função de classe C^2 e supomos que $\frac{|\alpha(X)|}{\sigma} \leq \delta$, com $0 \leq \delta < 1$.

Como a EDE é autónoma tem coeficientes de tendência e difusão de classe C^1 , a solução existe e é única até um instante de explosão (que provaremos adiante ser infinito). A solução é um processo de difusão com coeficiente de tendência

$$a(x) = \left(f(x) + \frac{1}{2} (\sigma + \alpha(x)) (\sigma + \alpha(x) + \alpha'(x)x) \right) x$$

e coeficiente de difusão

$$b^2(x) = (\sigma + \alpha(x))^2 x^2.$$

As fronteiras são $X = 0$ e $X = +\infty$, uma vez que, $a(0) = b^2(0) = 0$. Facilmente se obtêm as expressões da densidade de escala

$$s(y) = C \frac{1}{(\sigma + \alpha(y)) y} \exp \left(-2 \int_n^y \frac{f(\theta)}{(\sigma + \alpha(\theta))^2 \theta} d\theta \right)$$

e da densidade de velocidade

$$m(y) = \frac{1}{C} \frac{1}{(\sigma + \alpha(y)) y} \exp \left(2 \int_n^y \frac{f(\theta)}{(\sigma + \alpha(\theta))^2 \theta} d\theta \right),$$

com $C > 0$ constante arbitrária.

Vejamos agora o comportamento nas fronteiras destas difusões. Suponhamos que $X(0) = x \in (0, +\infty)$. Começamos por mostrar que a fronteira $X = 0$ é não atrativa, ou

seja, não existe extinção matemática. Para qualquer $0 < x_0 < n < K$ e para $0 < y \leq x_0$, temos

$$\frac{2}{\sigma^2(1+\delta)^2} \int_y^n \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta \geq \frac{2}{\sigma^2(1+\delta)^2} \int_y^n \frac{f(n)}{\theta} d\theta \geq 0,$$

o que significa que

$$\exp\left(\frac{2}{\sigma^2(1+\delta)^2} \int_y^n \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta\right) \geq 1.$$

Logo

$$\begin{aligned} S(0, x_0] &= C \int_0^{x_0} \frac{1}{(\sigma + \alpha(y))y} \exp\left(-2 \int_n^y \frac{f(\theta)}{(\sigma + \alpha(\theta))^2 \theta} d\theta\right) dy \\ &\geq \frac{C}{\sigma(1+\delta)} \int_0^{x_0} \frac{1}{y} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2(1+\delta)^2} \int_y^n \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta\right) dy \\ &\geq \frac{C}{\sigma(1+\delta)} \int_0^{x_0} \frac{1}{y} dy = +\infty, \end{aligned}$$

concluindo-se que a fronteira $X = 0$ é não atrativa.

Mostramos agora que a fronteira $X = +\infty$ também é não atrativa, o que significa que não existem explosões. Seja $K < x_0 \leq y < +\infty$. Neste caso

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2(1+\delta)^2} \int_n^y \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta\right) &= \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2(1+\delta)^2} \left(\int_n^K \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta + \int_K^y \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta\right)\right) \\ &\geq \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2(1+\delta)^2} \int_n^K \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta\right) \end{aligned}$$

porque $f(\theta) < 0$ para $\theta > K$ e, portanto,

$$\begin{aligned} S[x_0, +\infty) &= C \int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{(\sigma + \alpha(y))y} \exp\left(-2 \int_n^y \frac{f(\theta)}{(\sigma + \alpha(\theta))^2 \theta} d\theta\right) dy \\ &\geq \frac{C}{\sigma(1+\delta)} \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2(1+\delta)^2} \int_n^K \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta\right) \int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{y} dy = +\infty, \end{aligned}$$

o que prova a não atratividade da fronteira $X = +\infty$.

Assim, não há explosões e o espaço de estados é o intervalo $(0, +\infty)$. O facto das fronteiras serem inatingíveis em tempo infinito, garante que $X(t)$ não tende para zero nem para infinito quando $t \rightarrow +\infty$. Em particular, não há extinção matemática e não existem explosões, garantindo a existência e unicidade de solução.

Como ambas as fronteiras são não atrativas, para existir densidade estacionária é suficiente que $\int_0^{+\infty} m(y)dy$ seja convergente e, nesse caso, a densidade estacionária terá de ser da forma $p(y) = D m(y)$, com $D = \frac{1}{\int_0^{+\infty} m(y)dy}$. Seja $M = \int_0^{+\infty} m(y)dy$ e

$$M = M_1 + M_2 + M_3 = \int_0^{y_1} m(y)dy + \int_{y_1}^{y_2} m(y)dy + \int_{y_2}^{+\infty} m(y)dy.$$

Suponhamos que $y_1 < K < y_2$ e $0 < y_1 < n < y_2$. Fixamos $n < K$. Para $n > K$ a demonstração é análoga. Assim, $0 < y_1 < n < K < y_2$.

Começamos por mostrar que $M_1 = \int_0^{y_1} m(y)dy$ é convergente. Sejam $y \in (0, y_1]$ e $\theta \in [y, n]$. Consideramos

$$h(y) = -\frac{2f(n)}{\sigma^2(1+\delta)^2} \int_y^n \frac{1}{\theta} d\theta.$$

Obviamente $h(0^+) = -\infty$ e podemos concluir que

$$\begin{aligned} m(y) &= \frac{1}{C} \frac{1}{(\sigma + \alpha(y))y} \exp\left(2 \int_n^y \frac{f(\theta)}{(\sigma + \alpha(\theta))^2 \theta} d\theta\right) \\ &\leq \frac{1}{C} \frac{1}{\sigma(1-\delta)y} \exp\left(-\frac{2f(n)}{\sigma^2(1+\delta)^2} \int_y^n \frac{1}{\theta} d\theta\right) \\ &= \frac{1}{C} \frac{1}{\sigma(1-\delta)y} \exp(h(y)) \\ &= \frac{1}{C} \frac{\sigma(1+\delta)^2}{(1-\delta)2f(n)} \frac{d(\exp(h(y)))}{dy} \\ &= c_1 \frac{d(\exp(h(y)))}{dy}, \end{aligned}$$

com c_1 constante. Logo,

$$M_1 = \int_0^{y_1} m(y)dy \leq c_1 (\exp(h(y_1)) - \exp(h(0^+))) < +\infty,$$

como queríamos demonstrar.

Em segundo lugar, vamos mostrar que $M_3 = \int_{y_2}^{+\infty} m(y)dy$ é convergente. Sejam $y \in [y_2, +\infty)$ e $\theta \in [n, y]$. Fazemos

$$\begin{aligned} 2 \int_n^y \frac{f(\theta)}{(\sigma + \alpha(\theta))^2 \theta} d\theta &= 2 \int_n^{y_2} \frac{f(\theta)}{(\sigma + \alpha(\theta))^2 \theta} d\theta + 2 \int_{y_2}^y \frac{f(\theta)}{(\sigma + \alpha(\theta))^2 \theta} d\theta \\ &= A + B(y). \end{aligned}$$

Sabemos que

$$2 \int_{y_2}^y \frac{f(\theta)}{(\sigma + \alpha(\theta))^2 \theta} d\theta \leq \frac{2f(y_2)}{\sigma^2(1+\delta)^2} \int_{y_2}^y \frac{1}{\theta} d\theta = \frac{2f(y_2)}{\sigma^2(1+\delta)^2} \ln \frac{y}{y_2},$$

uma vez que $f(\theta) \leq f(y_2) \leq 0$. Assim,

$$\begin{aligned} m(y) &= \frac{1}{C} \frac{1}{(\sigma + \alpha(y))y} \exp\left(2 \int_n^y \frac{f(\theta)}{(\sigma + \alpha(\theta))^2 \theta} d\theta\right) \\ &\leq \frac{1}{C} \frac{1}{\sigma(1-\delta)y} \exp\left(A + \frac{2}{\sigma^2(1+\delta)^2} f(y_2) \ln \frac{y}{y_2}\right) \\ &\leq c_1 y^{\frac{2}{\sigma^2(1+\delta)^2} f(y_2) - 1}, \end{aligned}$$

com c_1 constante positiva. Como $K < y_2$, temos

$$\int_{y_2}^{+\infty} m(y)dy \leq c_1 \int_{y_2}^{+\infty} y^{\frac{2}{\sigma^2(1+\delta)^2}f(y_2)-1} dy < +\infty.$$

Por último, o integral $M_2 = \int_{y_1}^{y_2} m(y)dy$ é convergente porque a função m é contínua no intervalo fechado $[y_1, y_2]$.

Deste modo, garantimos a existência de densidade estacionária que é dada pela seguinte expressão:

$$p(y) = D m(y) = D \frac{1}{y(\sigma + \alpha(y))} \exp\left(2 \int_n^y \frac{f(\theta)}{(\sigma + \alpha(\theta))^2 \theta} d\theta\right),$$

com D constante tal que, $p(y) \geq 0$ e $\int_0^{+\infty} p(y)dy = 1$.

6.2 Tempos de extinção para o modelo logístico

Provamos que não existe "extinção matemática", mas existe "extinção realista". Estamos agora interessados em determinar os tempos de primeira passagem pelo limiar de extinção q , que definimos como os tempos de extinção. Apresentamos as expressões para o comportamento do tempo médio de extinção e para o comportamento da variância do tempo de extinção para o modelo logístico com σ aproximado e obtemos limites para o erro cometido.

Para obter uma boa expressão do tempo médio de extinção usamos a expressão (4.2.2) e fazemos as mudanças de variável $\tau = \frac{2r}{\sigma^2 K} \eta$, $y = \frac{2r}{\sigma^2 K} \theta$ e $\mu = \frac{2r}{\sigma^2 K} \zeta$. Obtemos, após alguns cálculos,

$$\begin{aligned} E[T_q | X(0) = x] &= 2 \int_q^x \frac{1}{(\sigma + \alpha(\zeta)) \zeta} \int_\zeta^{+\infty} \frac{1}{(\sigma + \alpha(\theta)) \theta} \exp\left(2r \int_\zeta^\theta \frac{1 - \frac{\eta}{K}}{(\sigma + \alpha(\eta))^2 \eta} d\eta\right) d\theta d\zeta \\ &= 2 \int_{\frac{2r}{\sigma^2 K} q}^{\frac{2r}{\sigma^2 K} x} \frac{1}{(\sigma + \alpha(\frac{\sigma^2}{2r} K \mu)) \mu} \int_\mu^{+\infty} \frac{1}{(\sigma + \alpha(\frac{\sigma^2}{2r} K y)) y} \\ &\quad \exp\left(\sigma^2 \int_\mu^y \frac{\frac{2r}{\sigma^2} \frac{1}{\tau} - 1}{(\sigma + \alpha(\frac{\sigma^2}{2r} K \tau))^2} d\tau\right) dy d\mu. \end{aligned}$$

Para trabalhar com grandezas adimensionais, fazemos $R = \frac{r}{\sigma^2}$, $d = \frac{q}{K}$, $z = \frac{x}{q}$ e $\beta(X) = \frac{\alpha(X)}{\sigma}$. Assim, temos as seguintes expressões para o comportamento do tempo médio de extinção:

$$\begin{aligned} rE[T_q | X(0) = x] &= 2R \int_{2Rd}^{2Rdz} \frac{1}{(1 + \beta(\frac{K}{2R}\mu)) \mu} \int_\mu^{+\infty} \frac{1}{(1 + \beta(\frac{K}{2R}y)) y} \\ &\quad \exp\left(\int_\mu^y \frac{\frac{2R}{\tau} - 1}{(1 + \beta(\frac{K}{2R}\tau))^2} d\tau\right) dy d\mu. \end{aligned}$$

Uma vez que $|\beta(X)| \leq \delta$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
rE[T_q|X(0) = x] &\geq \frac{2R}{(1+\delta)^2} \int_{2Rd}^{2Rdz} \frac{1}{\mu} \int_{\mu}^{+\infty} \frac{1}{y} \exp\left(\frac{2R}{(1+\delta)^2} \int_{\mu}^y \frac{1}{\tau} d\tau - \frac{1}{(1-\delta)^2} \int_{\mu}^y 1 d\tau\right) dy d\mu \\
&= \frac{2R}{(1+\delta)^2} \int_{2Rd}^{2Rdz} \mu^{-\frac{2R}{(1+\delta)^2}-1} e^{\frac{\mu}{(1-\delta)^2}} \int_{\mu}^{+\infty} y^{\frac{2R}{(1+\delta)^2}-1} e^{-\frac{y}{(1-\delta)^2}} dy d\mu \\
&= \frac{2R}{(1+\delta)^2} \int_{\frac{2Rd}{(1-\delta)^2}}^{\frac{2Rdz}{(1-\delta)^2}} u^{-\frac{2R}{(1+\delta)^2}-1} e^u \Gamma\left(\frac{2R}{(1+\delta)^2}, u\right) du. \tag{6.2.1}
\end{aligned}$$

De modo análogo conclui-se que

$$rE[T_q|X(0) = x] \leq \frac{2R}{(1-\delta)^2} \int_{\frac{2Rd}{(1+\delta)^2}}^{\frac{2Rdz}{(1+\delta)^2}} u^{-\frac{2R}{(1-\delta)^2}-1} e^u \Gamma\left(\frac{2R}{(1-\delta)^2}, u\right) du. \tag{6.2.2}$$

As expressões (6.2.1) e (6.2.2) são um bom minorante e majorante, respetivamente, uma vez que, quando δ é igual a 0, temos a expressão do comportamento do tempo médio de extinção do modelo logístico (4.2.7).

Fazendo as mudanças de variável semelhantes e usando a fórmula (4.2.6), obtêm-se, após algumas simplificações,

$$\begin{aligned}
r^2 Var[T_q|X(0) = x] &= 8R^2 \int_{2Rd}^{2Rdz} \frac{1}{(1+\beta(\frac{K}{2R}\mu))\mu} \int_{\mu}^{+\infty} \frac{1}{(1+\beta(\frac{K}{2R}\nu))\nu} \\
&\quad \int_{\nu}^{+\infty} \frac{1}{(1+\beta(\frac{K}{2R}y))y} \exp\left(\int_{\mu}^y \frac{\frac{2R}{\tau}-1}{(1+\beta(\frac{K}{2R}\tau))^2} d\tau\right) dy \\
&\quad \int_{\nu}^{+\infty} \frac{1}{(1+\beta(\frac{K}{2R}y))y} \exp\left(\int_{\nu}^y \frac{\frac{2R}{\tau}-1}{(1+\beta(\frac{K}{2R}\tau))^2} d\tau\right) dy d\nu d\mu.
\end{aligned}$$

Usando o facto de $-\delta \leq \beta(X) \leq \delta$ e fazendo as mesmas mudanças de variáveis obtemos

$$\begin{aligned}
r^2 Var[T_q|X(0) = x] &\geq \frac{8R^2}{(1+\delta)^4} \int_{\frac{2Rd}{(1-\delta)^2}}^{\frac{2Rdz}{(1-\delta)^2}} u^{-\frac{2R}{(1+\delta)^2}-1} e^u \int_u^{+\infty} v^{-\frac{2R}{(1+\delta)^2}-1} e^v \\
&\quad \left(\int_v^{+\infty} \rho^{\frac{2R}{(1+\delta)^2}-1} e^{-\rho} d\rho\right)^2 dv du \\
&= \frac{8R^2}{(1+\delta)^4} \int_{\frac{2Rd}{(1-\delta)^2}}^{\frac{2Rdz}{(1-\delta)^2}} u^{-\frac{2R}{(1+\delta)^2}-1} e^u \int_u^{+\infty} v^{-\frac{2R}{(1+\delta)^2}-1} e^v \\
&\quad \left(\Gamma\left(\frac{2R}{(1+\delta)^2}, v\right)\right)^2 dv du. \tag{6.2.3}
\end{aligned}$$

De modo análogo obtemos a expressão

$$\begin{aligned}
r^2 Var[T_q|X(0) = x] &\leq \frac{8R^2}{(1-\delta)^4} \int_{\frac{2Rd}{(1+\delta)^2}}^{\frac{2Rdz}{(1+\delta)^2}} u^{-\frac{2R}{(1-\delta)^2}-1} e^u \int_u^{+\infty} v^{-\frac{2R}{(1-\delta)^2}-1} e^v \\
&\quad \left(\int_v^{+\infty} \rho^{\frac{2R}{(1-\delta)^2}-1} e^{-\rho} d\rho \right)^2 dvdu \\
&= \frac{8R^2}{(1-\delta)^4} \int_{\frac{2Rd}{(1+\delta)^2}}^{\frac{2Rdz}{(1+\delta)^2}} u^{-\frac{2R}{(1-\delta)^2}-1} e^u \int_u^{+\infty} v^{-\frac{2R}{(1-\delta)^2}-1} e^v \\
&\quad \left(\Gamma \left(\frac{2R}{(1-\delta)^2}, v \right) \right)^2 dvdu. \tag{6.2.4}
\end{aligned}$$

A minoração e majoração do comportamento da variância não é excessiva, uma vez que, quando $\delta = 0$, temos o comportamento da variância do modelo logístico (4.2.8).

Pondo $R^* = \frac{R}{(1+\delta)^2}$ e $d^* = \frac{d(1+\delta)^2}{(1-\delta)^2}$ para a minoração e $R^{**} = \frac{R}{(1-\delta)^2}$ e $d^{**} = \frac{d(1-\delta)^2}{(1+\delta)^2}$ para a majoração, temos as seguintes desigualdades,

$$rE[T_q|X(0) = x] \geq 2R^* \int_{2R^*d^*}^{2R^*d^*z} u^{-2R^*-1} e^u \Gamma(2R^*, u) du = rE_x^{L(R^*, d^*)}[T_q]$$

e

$$rE[T_q|X(0) = x] \leq 2R^{**} \int_{2R^{**}d^{**}}^{2R^{**}d^{**}z} u^{-2R^{**}-1} e^u \Gamma(2R^{**}, u) d\mu = rE_x^{L(R^{**}, d^{**})}[T_q],$$

que têm a vantagem de se poder escrever como o comportamento do tempo médio de extinção do modelo logístico (4.2.7) com outros parâmetros. Para a variância, vem

$$\begin{aligned}
r^2 Var[T_q|X(0) = x] &\geq 8R^{*2} \int_{2R^*d^*}^{2R^*d^*z} u^{-2R^*-1} e^u \int_u^{+\infty} v^{-2R^*-1} e^v (\Gamma(2R^*, v))^2 dvdu \\
&= r^2 V_x^{L(R^*, d^*)}[T_q]
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
r^2 Var[T_q|X(0) = x] &\leq 8R^{**2} \int_{2R^{**}d^{**}}^{2R^{**}d^{**}z} u^{-2R^{**}-1} e^u \int_u^{+\infty} v^{-2R^{**}-1} e^v (\Gamma(2R^{**}, v))^2 dvdu \\
&= r^2 V_x^{L(R^{**}, d^{**})}[T_q],
\end{aligned}$$

que é exatamente a expressão do comportamento da variância do tempo de extinção para o modelo logístico (4.2.8) com diferentes parâmetros.

As expressões de $rE[T_q|X(0) = x]$ e $r^2 Var[T_q|X(0) = x]$ do modelo logístico com σ aproximado são maiores ou iguais às expressões de $rE[T_a|X(0) = x]$ e $r^2 Var[T_a|X(0) = x]$ do modelo logístico com a intensidade das flutuações aleatórias constante (ver (4.2.7) e (4.2.8)) com os parâmetros R^* em vez de R e d^* em vez de d e menores ou iguais às expressões de $rE[T_q|X(0) = x]$ e $r^2 Var[T_q|X(0) = x]$ do modelo logístico com a intensidade das flutuações

aleatórias constante com os parâmetros R^{**} em vez de R e d^{**} em vez de d .

Alterar R para R^* pode obter-se de diversas maneiras, a mais simples seria alterar σ para $\sigma(1 + \delta)$ e manter o mesmo r . Em relação a alterar d para d^* , o mais simples seria alterar K para $K \frac{(1-\delta)^2}{(1+\delta)^2}$ e deixar q inalterado. De modo análogo, podemos fazer as mesmas alterações para R^{**} e d^{**} .

Para obtermos os gráficos do comportamento do tempo médio de extinção usamos as expressões (6.2.1) e (6.2.2) e consideramos $R = 1$ e $R = 10$, $d = 0.01$ e $d = 0.1$. Obtemos assim os gráficos da grandeza adimensional $rE[T_q|X(0) = x]$ ou $\log_{10}(rE[T_q|X(0) = x])$ (ordenada) em função do parâmetro z (abscissa). Para os mesmos valores adimensionais R e d , usando as expressões (6.2.3) e (6.2.4) temos os gráficos

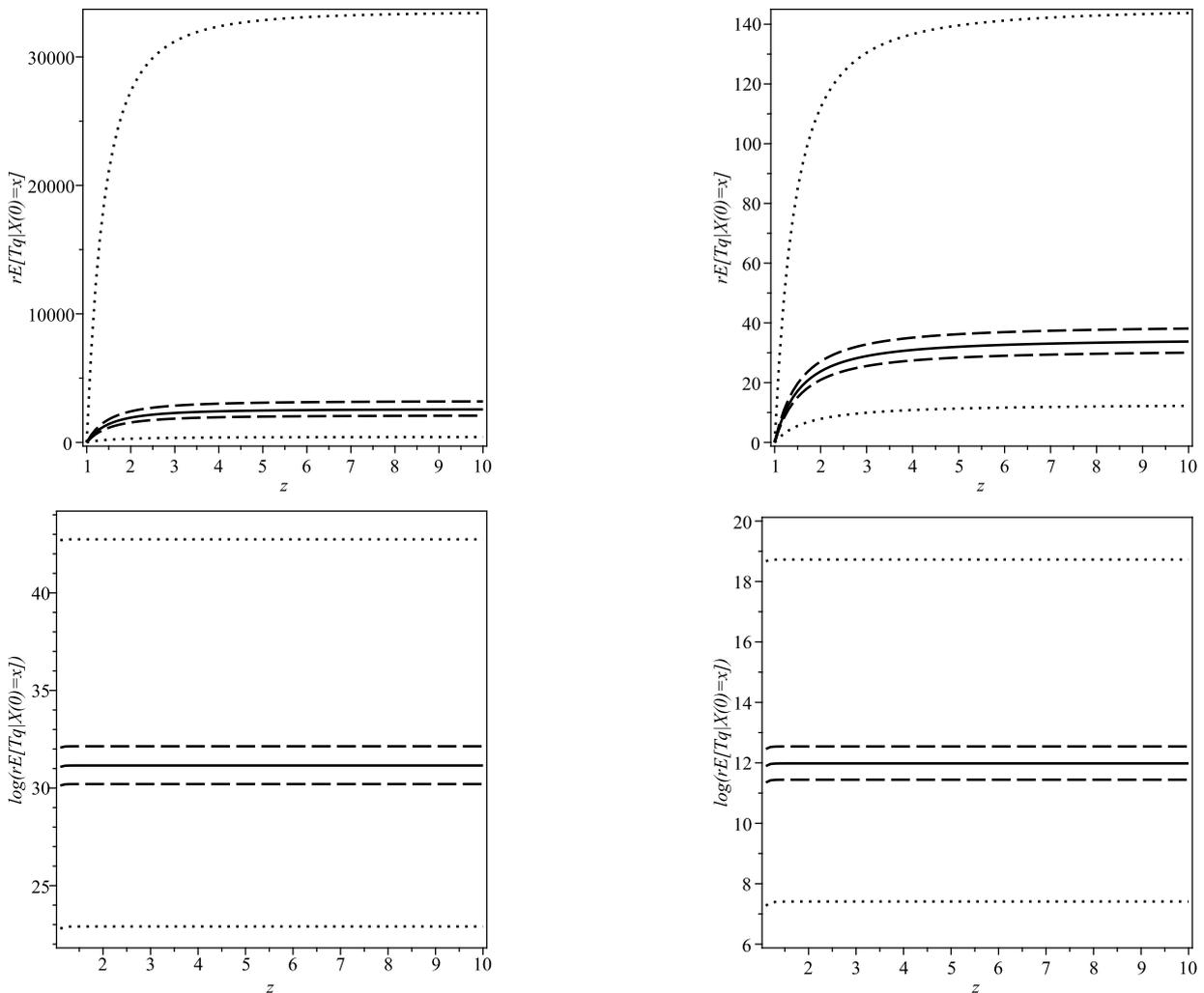


Figura 6.1: Comportamento da média $rE[T_q|X(0) = x]$ ou $\log_{10}(rE[T_q|X(0) = x])$ do tempo de extinção da população em função de $z := \frac{x}{q}$ para o modelo logístico (linha a cheio). A figura também mostra o minorante e o majorante para o modelo logístico com σ aproximado, com o erro relativo de $\delta = 0.01$ (linhas a tracejado) e $\delta = 0.1$ (linhas a pontilhado). Consideramos $R := \frac{r}{\sigma^2} = 1$ (em cima) e $R := \frac{r}{\sigma^2} = 10$ (em baixo), $d := \frac{q}{K} = 0.01$ (à esquerda) e $d := \frac{q}{K} = 0.1$ (à direita).

do comportamento do desvio padrão do tempo de extinção $rDP[T_q|X(0) = x]$ ou $\log(rDP[T_q|X(0) = x])$. A figura 6.1 apresenta os gráficos do comportamento da média dos tempos de extinção e a figura 6.2 os gráficos do comportamento do desvio padrão dos tempos de extinção.

Se quisermos comparar os gráficos do comportamento da média do tempo de extinção para o modelo logístico com σ aproximado e o modelo aproximadamente logístico, concluímos que a amplitude entre o minorante e o majorante do comportamento da média do tempo de extinção é maior no caso de a incorreta especificação do modelo ser em σ do que no coeficiente de tendência.

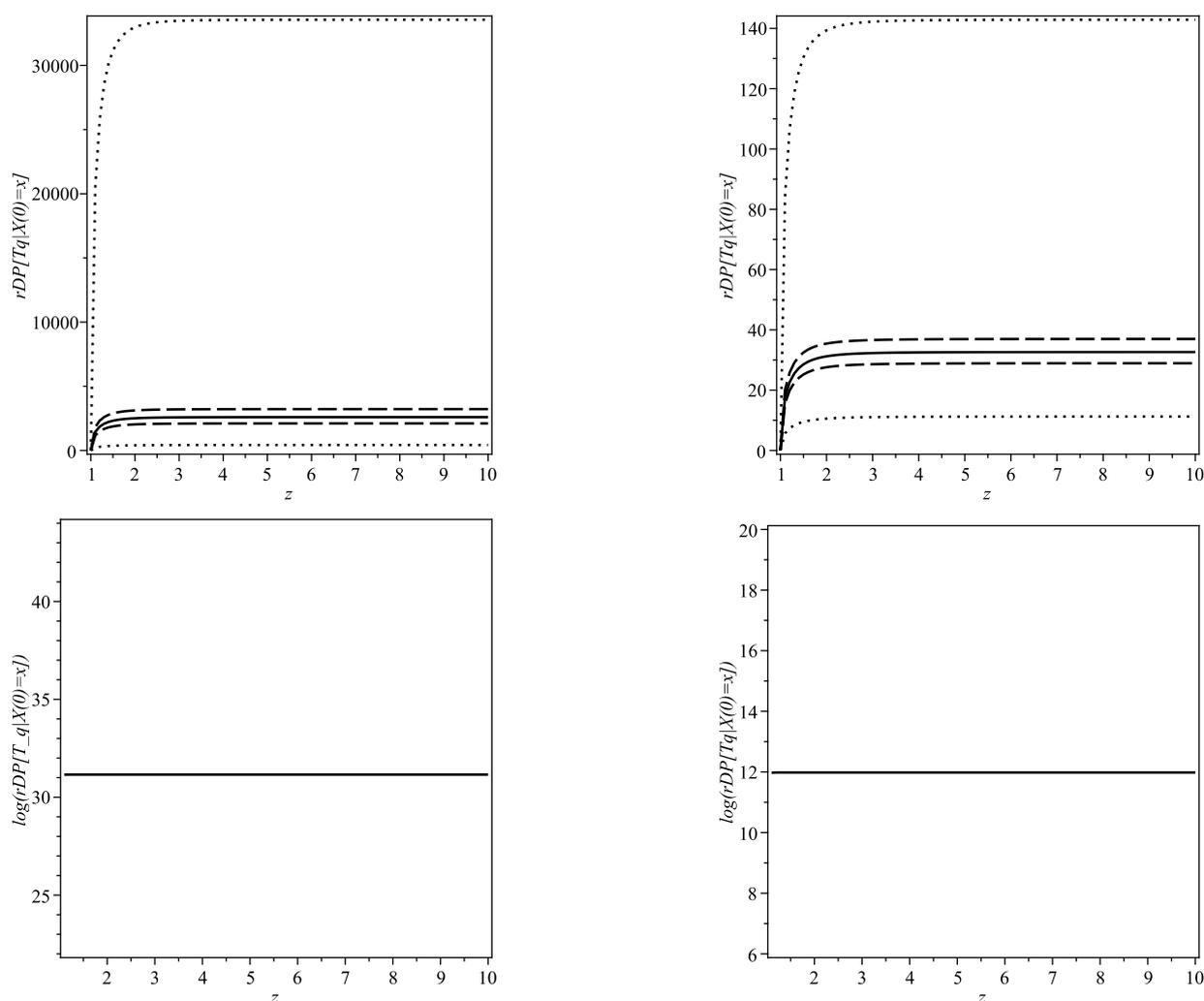


Figura 6.2: Comportamento do desvio padrão $rDP[T_q|X(0) = x]$ ou $\log_{10}(rDP[T_q|X(0) = x])$ do tempo de extinção da população em função de $z := \frac{x}{q}$ para o modelo logístico (linha a cheio). A figura também mostra o minorante e o majorante para o modelo logístico com σ aproximado, com o erro relativo de $\delta = 0.01$ (linhas a tracejado) e $\delta = 0.1$ (linhas a ponteadas). Consideramos $R := \frac{r}{\sigma^2} = 1$ (em cima) e $R := \frac{r}{\sigma^2} = 10$ (em baixo), $d := \frac{q}{K} = 0.01$ (à esquerda) e $d := \frac{q}{K} = 0.1$ (à direita). Para $R = 10$, devido a limitações computacionais, não foi possível obter os minorantes e os majorantes.

6.3 Tempos de extinção para o modelo de Gompertz

Em relação aos tempos de extinção para o modelo de Gompertz, vejamos o que acontece quando alteramos ligeiramente a medida da intensidade das flutuações ambientais. Apresentamos dois métodos diferentes para obter a minoração e majoração do comportamento da média e da variância do tempo de extinção para o modelo de Gompertz com σ aproximado. O primeiro método é mais trabalhoso mas obtêm-se melhores resultados numéricos, isto é, as minorações e majorações não são tão excessivas. O segundo método tem a vantagem de obter expressões mais simples, especialmente no caso da variância, mas os resultados numéricos são piores.

Começamos por usar a expressão (4.2.2) para obter o tempo médio de extinção

$$E[T_q|X(0) = x] = 2 \int_q^x \frac{1}{(\sigma + \alpha(\zeta))\zeta} \exp\left(-\int_n^\zeta \frac{2r \ln \frac{K}{\eta}}{(\sigma + \alpha(\eta))^2 \eta} d\eta\right) \int_\zeta^{+\infty} \frac{1}{(\sigma + \alpha(\theta))\theta} \exp\left(\int_n^\theta \frac{2r \ln \frac{K}{\eta}}{(\sigma + \alpha(\eta))^2 \eta} d\eta\right) d\theta d\zeta. \quad (6.3.1)$$

Para obter a expressão da variância do tempo de extinção, usamos a expressão (4.2.6) e vem

$$\begin{aligned} Var[T_q|X(0) = x] &= 8 \int_q^x \frac{1}{(\sigma + \alpha(\zeta))\zeta} \int_\zeta^{+\infty} \frac{1}{(\sigma + \alpha(\xi))\xi} \\ &\int_\xi^{+\infty} \frac{1}{(\sigma + \alpha(\theta))\theta} \exp\left(\int_\xi^\theta \frac{2r \ln \frac{K}{\eta}}{(\sigma + \alpha(\eta))^2 \eta} d\eta\right) d\theta \\ &\int_\zeta^{+\infty} \frac{1}{(\sigma + \alpha(\theta))\theta} \exp\left(\int_\zeta^\theta \frac{2r \ln \frac{K}{\eta}}{(\sigma + \alpha(\eta))^2 \eta} d\eta\right) d\theta d\xi d\zeta. \end{aligned} \quad (6.3.2)$$

Seguem-se duas alternativas possíveis para minorar e majorar a média e a variância dos tempos de extinção.

6.3.1 Primeiro método

Em (6.3.1), fazemos as mudanças de variável $\frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln \frac{\eta}{K} = v$, $\frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln \frac{\theta}{K} = t$ e $\frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln \frac{\zeta}{K} = y$ e consideramos $R = \frac{r}{\sigma^2}$, $d = \frac{q}{K}$, $z = \frac{x}{q}$ e $\beta(X) = \frac{\alpha(X)}{\sigma}$ para trabalhar com grandezas adimensionais. Depois de algumas operações algébricas, a expressão anterior é equivalente

a

$$rE[T_q|X(0) = x] = 2 \int_{\sqrt{R} \ln d}^{\sqrt{R} \ln(dz)} \frac{1}{\left(1 + \beta \left(Ke^{\frac{y}{\sqrt{R}}}\right)\right)} \int_y^{+\infty} \frac{1}{\left(1 + \beta \left(Ke^{\frac{t}{\sqrt{R}}}\right)\right)} \exp\left(-2 \int_y^t \frac{v}{\left(1 + \beta \left(Ke^{\frac{v}{\sqrt{R}}}\right)\right)^2} dv\right) dt dy.$$

Ao contrário do que foi feito até aqui, não podemos proceder às minorações e majorações de imediato. Para o fazermos, notemos primeiro que

$$rE[T_q|X(0) = x] \geq \frac{2}{(1 + \delta)^2} \int_{\sqrt{R} \ln d}^{\sqrt{R} \ln(dz)} \int_y^{+\infty} \exp\left(-2 \int_y^t \frac{v}{\left(1 + \beta \left(Ke^{\frac{v}{\sqrt{R}}}\right)\right)^2} dv\right) dt dy. \quad (6.3.3)$$

Consideramos $0 < q < x < K$, o que significa que $\sqrt{R} \ln d \leq y \leq \sqrt{R} \ln(dz) < 0$ (ou seja, y é de facto negativo) e $y \leq t \leq +\infty$. Isto é, t pode ser negativo ou positivo. Seja

$$g(y, t) = \exp\left(-2 \int_y^t \frac{v}{\left(1 + \beta \left(Ke^{\frac{v}{\sqrt{R}}}\right)\right)^2} dv\right).$$

Assim, temos que dividir o integral em ordem a t em dois integrais e vem

$$\int_y^{+\infty} g(y, t) dt = \int_y^0 g(y, t) dt + \int_0^{+\infty} g(y, t) dt.$$

Para a primeira parcela, vem

$$\begin{aligned} \int_y^0 g(y, t) dt &= \int_y^0 \exp\left(-2 \int_y^t \frac{v}{\left(1 + \beta \left(Ke^{\frac{v}{\sqrt{R}}}\right)\right)^2} dv\right) dt \\ &\geq \int_y^0 \exp\left(-2 \int_y^t \frac{v}{(1 + \delta)^2} dv\right) dt \\ &= \int_y^0 \exp\left(\frac{y^2 - t^2}{(1 + \delta)^2}\right) dt. \end{aligned}$$

Para a segunda parcela, vem

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} g(y, t) dt &= \int_0^{+\infty} \exp \left(-2 \int_y^t \frac{v}{\left(1 + \beta \left(Ke^{\frac{v}{\sqrt{R}}}\right)\right)^2} dv \right) dt \\
&= \int_0^{+\infty} g(y, 0) g(0, t) dt \\
&= \int_0^{+\infty} \exp \left(-2 \int_y^0 \frac{v}{\left(1 + \beta \left(Ke^{\frac{v}{\sqrt{R}}}\right)\right)^2} dv \right) \\
&\quad \exp \left(-2 \int_0^t \frac{v}{\left(1 + \beta \left(Ke^{\frac{v}{\sqrt{R}}}\right)\right)^2} dv \right) dt \\
&\geq \int_0^{+\infty} \exp \left(-2 \int_y^0 \frac{v}{(1 + \delta)^2} dv - 2 \int_0^t \frac{v}{(1 - \delta)^2} dv \right) dt \\
&= \int_0^{+\infty} \exp \left(\frac{y^2}{(1 + \delta)^2} - \frac{t^2}{(1 - \delta)^2} \right) dt.
\end{aligned}$$

De (6.3.3), obtemos

$$rE[T_q | X(0) = x] \geq \frac{2}{(1 + \delta)^2} \int_{\sqrt{R} \ln d}^{\sqrt{R} \ln(dz)} e^{\frac{y^2}{(1 + \delta)^2}} \left(\int_y^0 e^{-\frac{t^2}{(1 + \delta)^2}} dt + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{(1 - \delta)^2}} dt \right) dy. \quad (6.3.4)$$

Para a majoração, resolve-se de modo análogo e vem

$$rE[T_q | X(0) = x] \leq \frac{2}{(1 - \delta)^2} \int_{\sqrt{R} \ln d}^{\sqrt{R} \ln(dz)} e^{\frac{y^2}{(1 - \delta)^2}} \left(\int_y^0 e^{-\frac{t^2}{(1 - \delta)^2}} dt + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{(1 + \delta)^2}} dt \right) dy. \quad (6.3.5)$$

As expressões (6.3.4) e (6.3.5) são um bom minorante e majorante, respetivamente, pois, caso δ seja 0, seriam exatamente iguais ao comportamento do tempo médio de extinção do modelo de Gompertz (4.2.9). Ao contrário do que foi feito até aqui, não podemos escrever estas expressões apenas em função das expressões do modelo de Gompertz com novos parâmetros. Fazendo $\mu = \frac{y}{1 + \delta}$, a expressão (6.3.4) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
rE[T_q | X(0) = x] &\geq 2\sqrt{\pi} \int_{\frac{\sqrt{R} \ln d}{1 + \delta}}^{\frac{\sqrt{R} \ln(dz)}{1 + \delta}} e^{\mu^2} \left(1 - \Phi \left(\sqrt{2}\mu \right) \right) d\mu - \frac{2\sqrt{\pi}\delta}{1 + \delta} \int_{\frac{\sqrt{R} \ln d}{1 + \delta}}^{\frac{\sqrt{R} \ln(dz)}{1 + \delta}} e^{\mu^2} d\mu \\
&= rE_x^{G(R^*, d)}[T_q] - \frac{2\sqrt{\pi}\delta}{1 + \delta} \int_{\frac{\sqrt{R^*} \ln d}{1 + \delta}}^{\frac{\sqrt{R^*} \ln(dz)}{1 + \delta}} e^{\mu^2} d\mu,
\end{aligned}$$

com $R^* = \frac{R}{(1+\delta)^2}$. De modo análogo, a expressão (6.3.5) é equivalente a

$$\begin{aligned} rE[T_q|X(0) = x] &\leq 2\sqrt{\pi} \int_{\frac{\sqrt{R}\ln d}{1-\delta}}^{\frac{\sqrt{R}\ln(dz)}{1-\delta}} e^{\mu^2} \left(1 - \Phi\left(\sqrt{2}\mu\right)\right) d\mu + \frac{2\sqrt{\pi}\delta}{1-\delta} \int_{\frac{\sqrt{R}\ln d}{1-\delta}}^{\frac{\sqrt{R}\ln(dz)}{1-\delta}} e^{\mu^2} d\mu \\ &= rE_x^{G(R^{**},d)}[T_q] + \frac{2\sqrt{\pi}\delta}{1-\delta} \int_{\sqrt{R^{**}\ln d}}^{\sqrt{R^{**}\ln(dz)}} e^{\mu^2} d\mu, \end{aligned}$$

com $R^{**} = \frac{R}{(1-\delta)^2}$.

Com a expressão (6.3.2) e análogas mudanças de variável, obtemos a expressão do comportamento da variância do tempo de extinção

$$\begin{aligned} r^2Var[T_q|X(0) = x] &= 8 \int_{\sqrt{R}\ln d}^{\sqrt{R}\ln(dz)} \frac{1}{\left(1 + \beta\left(Ke^{\frac{y}{\sqrt{R}}}\right)\right)} \int_y^{+\infty} \frac{1}{\left(1 + \beta\left(Ke^{\frac{u}{\sqrt{R}}}\right)\right)} \\ &\quad \int_u^{+\infty} \frac{1}{\left(1 + \beta\left(Ke^{\frac{t}{\sqrt{R}}}\right)\right)} \exp\left(-2 \int_y^t \frac{v}{\left(1 + \beta\left(Ke^{\frac{v}{\sqrt{R}}}\right)\right)^2} dv\right) dt \\ &\quad \int_u^{+\infty} \frac{1}{\left(1 + \beta\left(Ke^{\frac{t}{\sqrt{R}}}\right)\right)} \exp\left(-2 \int_u^t \frac{v}{\left(1 + \beta\left(Ke^{\frac{v}{\sqrt{R}}}\right)\right)^2} dv\right) dt dudy. \end{aligned}$$

Usando o facto de $\beta(X) \leq \delta$, temos

$$r^2Var[T_q|X(0) = x] \geq \frac{8}{(1+\delta)^4} \int_{\sqrt{R}\ln d}^{\sqrt{R}\ln(dz)} \int_y^{+\infty} \left(\int_u^{+\infty} g(y,t)dt\right) \left(\int_u^{+\infty} g(u,t)dt\right) dudy.$$

Usando as propriedades do cálculo integral podemos escrever o integral em ordem a u da seguinte forma

$$\begin{aligned} &\int_y^{+\infty} \left(\int_u^{+\infty} g(y,t)dt\right) \left(\int_u^{+\infty} g(u,t)dt\right) du \\ &= \int_y^0 \left(\int_u^{+\infty} g(y,t)dt\right) \left(\int_u^{+\infty} g(u,t)dt\right) du + \int_0^{+\infty} \left(\int_u^{+\infty} g(y,t)dt\right) \left(\int_u^{+\infty} g(u,t)dt\right) du \\ &= \int_y^0 \left(\int_u^0 g(y,t)dt + \int_0^{+\infty} g(y,t)dt\right) \left(\int_u^0 g(u,t)dt + \int_0^{+\infty} g(u,t)dt\right) du \\ &+ \int_0^{+\infty} \left(\int_u^{+\infty} g(y,t)dt\right) \left(\int_u^{+\infty} g(u,t)dt\right) du. \end{aligned}$$

Começamos com a primeira parcela, obtendo

$$\begin{aligned}
& \int_y^0 \left(\int_u^0 g(y,t)dt + \int_0^{+\infty} g(y,t)dt \right) \left(\int_u^0 g(u,t)dt + \int_0^{+\infty} g(u,t)dt \right) du \\
& \geq \int_y^0 \left(\int_u^0 \exp\left(\frac{y^2-t^2}{(1+\delta)^2}\right) dt + \int_0^{+\infty} g(y,0)g(0,t)dt \right) \\
& \quad \left(\int_u^0 \exp\left(\frac{u^2-t^2}{(1+\delta)^2}\right) dt + \int_0^{+\infty} g(u,0)g(0,t)dt \right) du \\
& \geq \int_y^0 \left(\int_u^0 \exp\left(\frac{y^2-t^2}{(1+\delta)^2}\right) dt + \int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{y^2}{(1+\delta)^2} - \frac{t^2}{(1-\delta)^2}\right) dt \right) \\
& \quad \left(\int_u^0 \exp\left(\frac{u^2-t^2}{(1+\delta)^2}\right) dt + \int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{u^2}{(1+\delta)^2} - \frac{t^2}{(1-\delta)^2}\right) dt \right) du \\
& = e^{\frac{y^2}{(1+\delta)^2}} \int_y^0 e^{\frac{u^2}{(1+\delta)^2}} \left(\int_u^0 e^{-\frac{t^2}{(1+\delta)^2}} dt + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{(1-\delta)^2}} dt \right)^2 du.
\end{aligned}$$

Para a segunda parcela, temos

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} \left(\int_u^{+\infty} g(y,t)dt \right) \left(\int_u^{+\infty} g(u,t)dt \right) du \\
& = \int_0^{+\infty} \left(\int_u^{+\infty} g(y,0)g(0,t)dt \right) \left(\int_u^{+\infty} g(u,t)dt \right) du \\
& \geq \int_0^{+\infty} \left(\int_u^{+\infty} \exp\left(\frac{y^2}{(1+\delta)^2} - \frac{t^2}{(1-\delta)^2}\right) dt \right) \left(\int_u^{+\infty} \exp\left(\frac{u^2}{(1-\delta)^2}\right) dt \right) du \\
& = e^{\frac{y^2}{(1+\delta)^2}} \int_0^{+\infty} e^{\frac{u^2}{(1-\delta)^2}} \left(\int_u^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{(1-\delta)^2}} dt \right)^2 du.
\end{aligned}$$

Daqui resulta, após alguns cálculos,

$$\begin{aligned}
r^2 \text{Var}[T_q | X(0) = x] & \geq \frac{8}{(1+\delta)^4} \int_{\sqrt{R} \ln d}^{\sqrt{R} \ln(dz)} e^{\frac{y^2}{(1+\delta)^2}} \left[\int_0^{+\infty} e^{\frac{u^2}{(1-\delta)^2}} \left(\int_u^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{(1-\delta)^2}} dt \right)^2 du \right. \\
& \quad \left. + \int_y^0 e^{\frac{u^2}{(1+\delta)^2}} \left(\int_u^0 e^{-\frac{t^2}{(1+\delta)^2}} dt + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{(1-\delta)^2}} dt \right)^2 du \right] dy.
\end{aligned}$$

De modo análogo, obtêm-se

$$\begin{aligned}
r^2 \text{Var}[T_q | X(0) = x] & \leq \frac{8}{(1-\delta)^4} \int_{\sqrt{R} \ln d}^{\sqrt{R} \ln(dz)} e^{\frac{y^2}{(1-\delta)^2}} \left[\int_0^{+\infty} e^{\frac{u^2}{(1+\delta)^2}} \left(\int_u^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{(1+\delta)^2}} dt \right)^2 du \right. \\
& \quad \left. + \int_y^0 e^{\frac{u^2}{(1-\delta)^2}} \left(\int_u^0 e^{-\frac{t^2}{(1-\delta)^2}} dt + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{(1+\delta)^2}} dt \right)^2 du \right] dy.
\end{aligned}$$

Quando $\delta = 0$ temos exatamente a expressão do comportamento da variância do tempo de extinção para o modelo de Gompertz (4.2.10), o que significa que a minoração e majoração não são excessivas. Também aqui não é possível escrever as expressões apenas como a expressão (4.2.10) com outros parâmetros. Procedendo de modo semelhante ao que fizemos para o tempo médio de extinção e depois de alguns cálculos vem

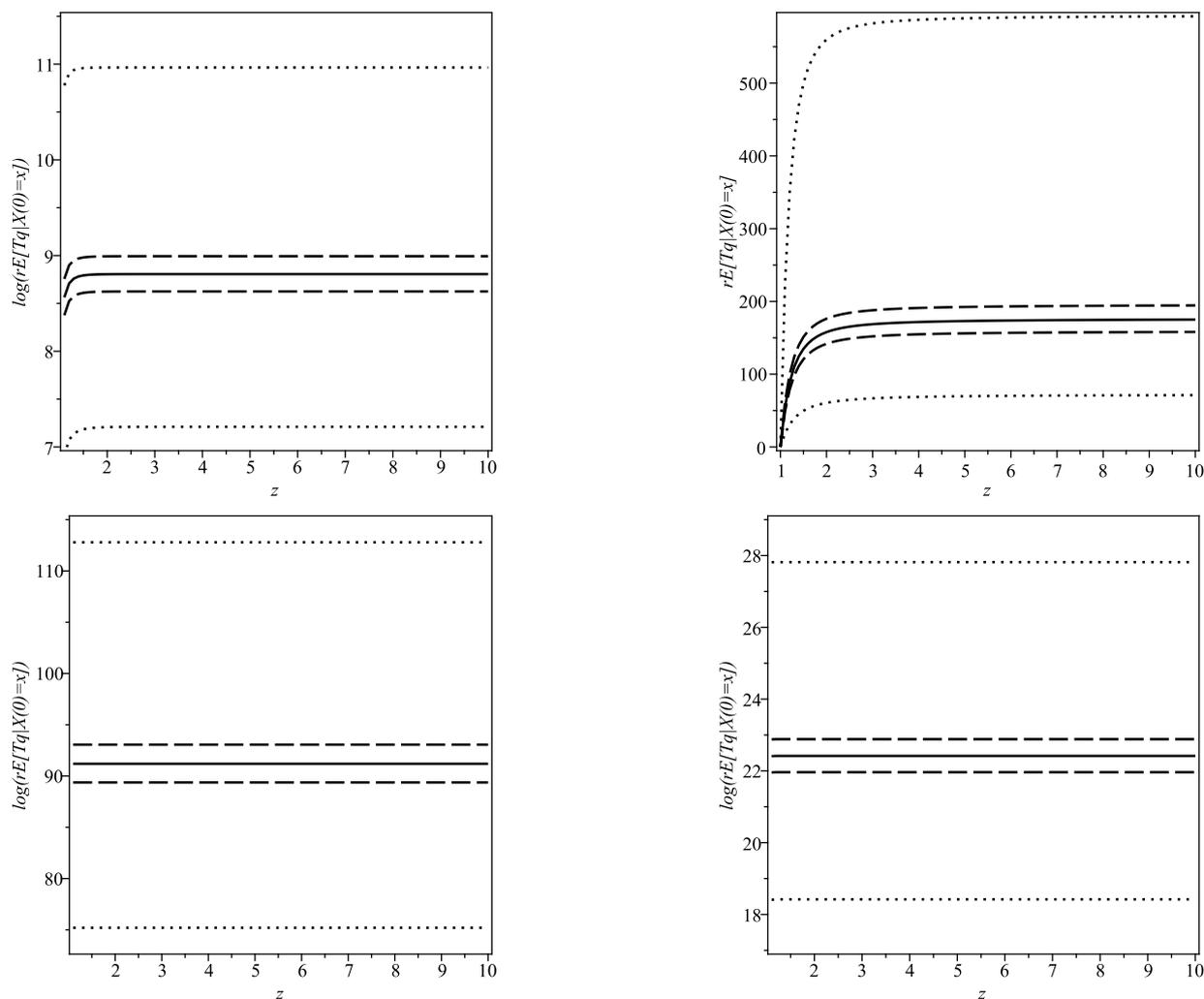


Figura 6.3: Comportamento da média $rE[T_q|X(0) = x]$ ou $\log_{10}(rE[T_q|X(0) = x])$ do tempo de extinção da população em função de $z = \frac{x}{q}$ para o modelo de Gompertz (linha a cheio). A figura também mostra o minorante e o majorante para o modelo de Gompertz com σ aproximado, com o erro relativo de $\delta = 0.01$ (linhas a tracejado) e $\delta = 0.1$ (linhas a ponteadas). Consideramos $R := \frac{r}{\sigma^2} = 1$ (em cima) e $R := \frac{r}{\sigma^2} = 10$ (em baixo), $d := \frac{q}{K} = 0.01$ (à esquerda) e $d := \frac{q}{K} = 0.1$ (à direita).

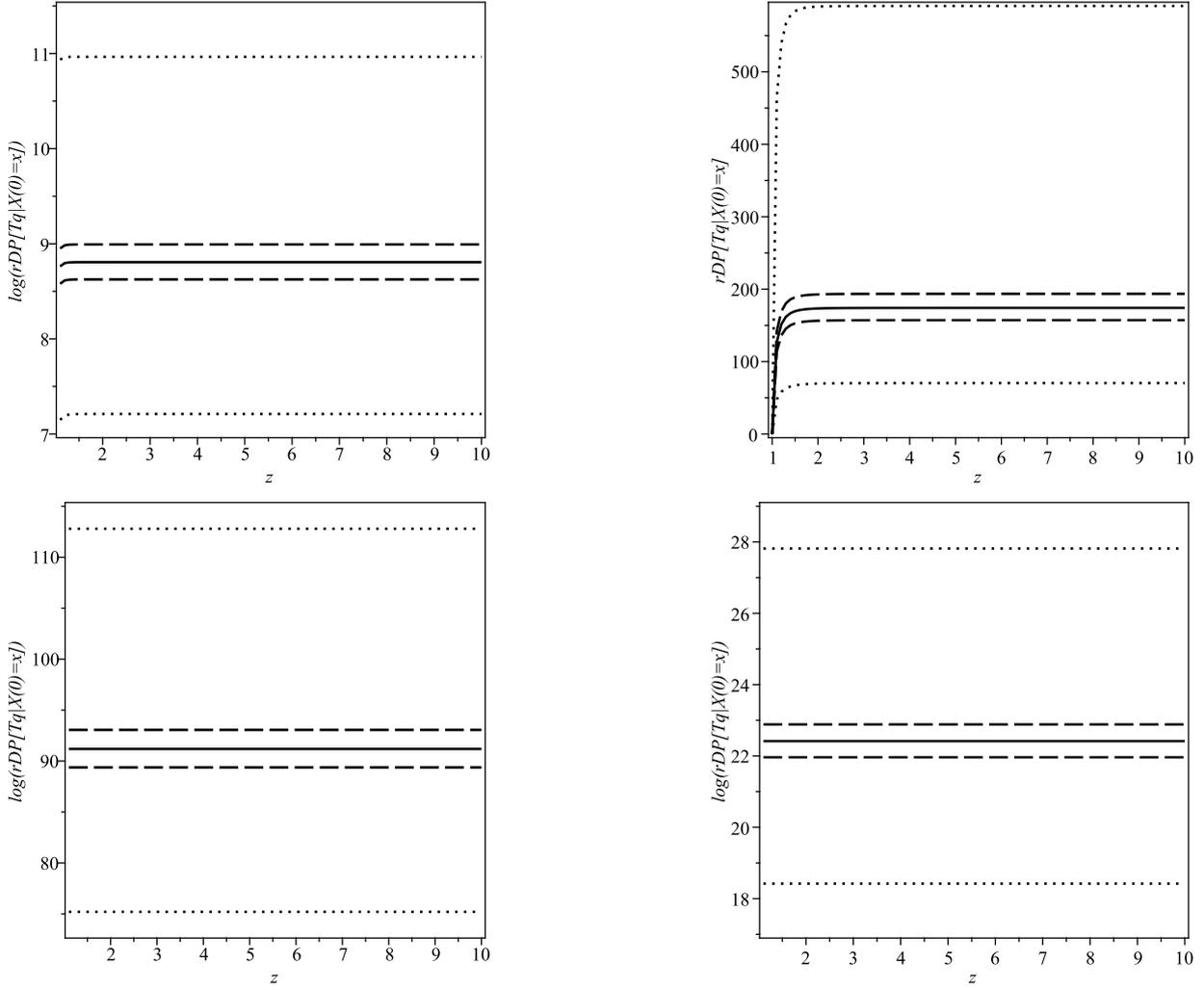


Figura 6.4: Comportamento do desvio padrão $rDP[T_q|X(0) = x]$ ou $\log_{10}(rDP[T_q|X(0) = x])$ do tempo de extinção da população em função de $z = \frac{x}{q}$ para o modelo de Gompertz (linha a cheio). A figura também mostra o minorante e o majorante para o modelo de Gompertz com σ aproximado, com o erro relativo de $\delta = 0.01$ (linhas a tracejado) e $\delta = 0.1$ (linhas a ponteadas). Consideramos $R := \frac{r}{\sigma^2} = 1$ (em cima) e $R := \frac{r}{\sigma^2} = 10$ (em baixo), $d := \frac{q}{K} = 0.01$ (à esquerda) e $d := \frac{q}{K} = 0.1$ (à direita).

$$\begin{aligned}
r^2 \text{Var}[T_q|X(0) = x] &\geq \frac{8\pi}{(1+\delta)^3} \int_{\frac{\sqrt{R} \ln d}{1+\delta}}^{\frac{\sqrt{R} \ln(dz)}{1+\delta}} e^{\mu^2} \left[\int_0^{+\infty} e^{\nu^2} \left(1 - \Phi(\sqrt{2\nu})\right)^2 (1-\delta)^3 d\nu \right. \\
&\quad \left. + \int_{\mu}^0 e^{\nu^2} \left(\left(\frac{1}{2} - \Phi(\sqrt{2\nu})\right) (1+\delta) + \frac{1}{2} (1-\delta) \right)^2 (1+\delta) d\nu \right] d\mu \\
&= \frac{(1-\delta)^3}{(1+\delta)^3} r^2 V_x^{G(R^*, d)}[T_q] \\
&\quad + \frac{8\pi}{(1+\delta)^3} \int_{\frac{\sqrt{R^*} \ln d}{\sqrt{R^*}}}^{\frac{\sqrt{R^*} \ln(dz)}{\sqrt{R^*}}} e^{\mu^2} \int_{\mu}^0 e^{\nu^2} \left[\left(\frac{1}{1+\delta} - \Phi(\sqrt{2\nu})\right)^2 (1+\delta)^3 \right. \\
&\quad \left. - \left(1 - \Phi(\sqrt{2\nu})\right)^2 (1-\delta)^3 \right] d\nu d\mu
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
r^2 Var[T_q|X(0) = x] &\leq \frac{8\pi}{(1-\delta)^3} \int_{\frac{\sqrt{R}\ln d}{1-\delta}}^{\frac{\sqrt{R}\ln(dz)}{1-\delta}} e^{\mu^2} \left[\int_0^{+\infty} e^{\nu^2} \left(1 - \Phi(\sqrt{2\nu})\right)^2 (1+\delta)^3 d\nu \right. \\
&\quad \left. + \int_{\mu}^0 e^{\nu^2} \left(\left(\frac{1}{2} - \Phi(\sqrt{2\nu})\right) (1-\delta) + \frac{1}{2}(1+\delta) \right)^2 (1-\delta) d\nu \right] d\mu \\
&= \frac{(1+\delta)^3}{(1-\delta)^3} r^2 V_x^{G(R^{**},d)}[T_q] \\
&\quad + \frac{8\pi}{(1-\delta)^3} \int_{\sqrt{R^{**}\ln d}}^{\sqrt{R^{**}\ln(dz)}} e^{\mu^2} \int_{\mu}^0 e^{\nu^2} \left[\left(\Phi(\sqrt{2\nu}) - \frac{1}{1-\delta} \right)^2 (1-\delta)^3 \right. \\
&\quad \left. - \left(1 - \Phi(\sqrt{2\nu})\right)^2 (1+\delta)^3 \right] d\nu d\mu.
\end{aligned}$$

Na figura 6.3 apresentamos os gráficos do comportamento do tempo médio de extinção e na figura 6.4 mostramos o respetivo desvio padrão. Usamos os mesmos valores para os parâmetros R e d para podermos fazer algumas comparações com os modelos já estudados.

Comparativamente com o modelo aproximadamente de Gompertz a amplitude do intervalo entre minorante e majorante é maior.

6.3.2 Segundo método

Existe um método bem mais simples do que o considerado na secção 6.3.1 para minorar e majorar a média e a variância do tempo de extinção. Os resultados não são tão bons quanto os do método anterior, mas as expressões são mais simples e podem ser escritas em função das expressões do comportamento da média e da variância do tempo de extinção do modelo de Gompertz com outros parâmetros.

Fazemos a mudança de variável $v = \frac{\sqrt{r}}{\sigma} (\ln \frac{\eta}{K} - \ln \frac{q}{K})$, $t = \frac{\sqrt{r}}{\sigma} (\ln \frac{\theta}{K} - \ln \frac{q}{K})$ e $y = \frac{\sqrt{r}}{\sigma} (\ln \frac{\zeta}{K} - \ln \frac{q}{K})$ na expressão (6.3.1) e obtemos a expressão do comportamento do tempo médio de extinção

$$\begin{aligned}
rE[T_q|X(0) = x] &= 2 \int_0^{\sqrt{R}\ln z} \frac{1}{1 + \beta\left(qe^{\frac{y}{\sqrt{R}}}\right)} \int_y^{+\infty} \frac{1}{1 + \beta\left(qe^{\frac{t}{\sqrt{R}}}\right)} \\
&\quad \exp\left(-2 \int_y^t \frac{v + \sqrt{R}\ln d}{\left(1 + \beta\left(qe^{\frac{v}{\sqrt{R}}}\right)\right)^2} dv\right) dt dy,
\end{aligned}$$

com $R = \frac{r}{\sigma^2}$, $d = \frac{q}{K}$, $z = \frac{x}{q}$ e $\beta(X) = \frac{\alpha(X)}{\sigma}$. Usando o facto de $|\beta(X)| < \delta$, temos

$$rE[T_q|X(0) = x] \geq \frac{2}{(1+\delta)^2} \int_0^{\sqrt{R}\ln z} \int_y^{+\infty} \exp\left(-2 \int_y^t \frac{v + \sqrt{R}\ln d}{\left(1 + \beta\left(qe^{\frac{v}{\sqrt{R}}}\right)\right)^2} dv\right) dt dy.$$

Note que $0 \leq y \leq t$ e $\sqrt{R} \ln d < 0$, uma vez que $d = \frac{q}{K} < 1$, donde

$$\begin{aligned} rE [T_q | X(0) = x] &\geq \frac{2}{(1+\delta)^2} \int_0^{\sqrt{R} \ln z} \int_y^{+\infty} \exp \left(\frac{y^2 - t^2}{(1-\delta)^2} + \frac{2\sqrt{R} \ln d}{(1+\delta)^2} (y-t) \right) dt dy \\ &= \frac{2}{(1+\delta)^2} \int_0^{\sqrt{R} \ln z} \exp \left(\frac{y^2}{(1-\delta)^2} + \frac{2\sqrt{R} \ln d}{(1+\delta)^2} y \right) \\ &\quad \int_y^{+\infty} \exp \left(-\frac{t^2}{(1-\delta)^2} - \frac{2\sqrt{R} \ln d}{(1+\delta)^2} t \right) dt dy. \end{aligned}$$

Esta expressão pode ser escrita do seguinte modo

$$\begin{aligned} rE [T_q | X(0) = x] &\geq \left(\frac{1-\delta}{1+\delta} \right)^2 2\sqrt{\pi} \int_{\frac{\sqrt{R}}{1-\delta} \ln \left(d^{\left(\frac{1-\delta}{1+\delta}\right)^2} z \right)}^{\frac{\sqrt{R}}{1-\delta} \ln \left(d^{\left(\frac{1-\delta}{1+\delta}\right)^2} \right)} e^{\mu^2} \left(1 - \Phi(\sqrt{2}\mu) \right) d\mu \\ &= \left(\frac{1-\delta}{1+\delta} \right)^2 E_x^{G(R^*, d^*)} [T_q] \end{aligned}$$

com $R^* = \frac{R}{(1-\delta)^2}$, $d^* = d^{\left(\frac{1-\delta}{1+\delta}\right)^2}$ e Φ a função distribuição de uma normal standard.

De modo semelhante, obtemos

$$\begin{aligned} rE [T_q | X(0) = x] &\leq \frac{2}{(1-\delta)^2} \int_0^{\sqrt{R} \ln z} \exp \left(\frac{y^2}{(1+\delta)^2} + \frac{2\sqrt{R} \ln d}{(1-\delta)^2} y \right) \\ &\quad \int_y^{+\infty} \exp \left(-\frac{t^2}{(1+\delta)^2} - \frac{2\sqrt{R} \ln d}{(1-\delta)^2} t \right) dt dy. \end{aligned}$$

ou, pondo na forma da função distribuição de uma normal,

$$\begin{aligned} rE [T_q | X(0) = x] &\leq \left(\frac{1+\delta}{1-\delta} \right)^2 2\sqrt{\pi} \int_{\frac{\sqrt{R}}{1+\delta} \ln \left(d^{\left(\frac{1+\delta}{1-\delta}\right)^2} z \right)}^{\frac{\sqrt{R}}{1+\delta} \ln \left(d^{\left(\frac{1+\delta}{1-\delta}\right)^2} \right)} e^{\mu^2} \left(1 - \Phi(\sqrt{2}\mu) \right) d\mu \\ &= \left(\frac{1+\delta}{1-\delta} \right)^2 E_x^{G(R^{**}, d^{**})} [T_q], \end{aligned}$$

com $R^{**} = \frac{R}{(1+\delta)^2}$, $d^{**} = d^{\left(\frac{1+\delta}{1-\delta}\right)^2}$.

Também podemos obter expressões mais simples do que as obtidas pelo método anterior para a variância. Fazemos análogas mudanças de variável na expressão (6.3.2) e temos o

comportamento da variância do tempo de primeira passagem pelo limiar q :

$$\begin{aligned} r^2 Var [T_q | X(0) = x] &= 8 \int_0^{\sqrt{R} \ln z} \frac{1}{1 + \beta \left(q e^{\frac{y}{\sqrt{R}}} \right)} \int_y^{+\infty} \frac{1}{1 + \beta \left(q e^{\frac{u}{\sqrt{R}}} \right)} \\ &\int_u^{+\infty} \frac{1}{1 + \beta \left(q e^{\frac{t}{\sqrt{R}}} \right)} \exp \left(-2 \int_u^t \frac{v + \sqrt{R} \ln d}{\left(1 + \beta \left(q e^{\frac{v}{\sqrt{R}}} \right) \right)^2} dv \right) dt \\ &\int_u^{+\infty} \frac{1}{1 + \beta \left(q e^{\frac{t}{\sqrt{R}}} \right)} \exp \left(-2 \int_y^t \frac{v + \sqrt{R} \ln d}{\left(1 + \beta \left(q e^{\frac{v}{\sqrt{R}}} \right) \right)^2} dv \right) dt dy. \end{aligned}$$

Usando os mesmos argumentos que usámos para o tempo médio, obtemos

$$\begin{aligned} r^2 Var [T_q | X(0) = x] &\geq \frac{8}{(1 + \delta)^4} \int_0^{\sqrt{R} \ln z} \exp \left(\frac{y^2}{(1 - \delta)^2} + \frac{2\sqrt{R} \ln d}{(1 + \delta)^2} y \right) \\ &\int_y^{+\infty} \exp \left(\frac{u^2}{(1 - \delta)^2} + \frac{2\sqrt{R} \ln d}{(1 + \delta)^2} u \right) \\ &\left(\int_u^{+\infty} \exp \left(-\frac{t^2}{(1 - \delta)^2} - \frac{2\sqrt{R} \ln d}{(1 + \delta)^2} t \right) dt \right)^2 dy \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} r^2 Var [T_q | X(0) = x] &\leq \frac{8}{(1 - \delta)^4} \int_0^{\sqrt{R} \ln z} \exp \left(\frac{y^2}{(1 + \delta)^2} + \frac{2\sqrt{R} \ln d}{(1 - \delta)^2} y \right) \\ &\int_y^{+\infty} \exp \left(\frac{u^2}{(1 + \delta)^2} + \frac{2\sqrt{R} \ln d}{(1 - \delta)^2} u \right) \\ &\left(\int_u^{+\infty} \exp \left(-\frac{t^2}{(1 + \delta)^2} - \frac{2\sqrt{R} \ln d}{(1 - \delta)^2} t \right) dt \right)^2 dy. \end{aligned}$$

Se quisermos escrever em função da função de distribuição da normal vem

$$\begin{aligned} r^2 Var [T_q | X(0) = x] &\geq \left(\frac{1 - \delta}{1 + \delta} \right)^4 8\pi \int_{\frac{\sqrt{R}}{1-\delta} \ln \left(d^{\left(\frac{1-\delta}{1+\delta} \right)^2} z \right)}^{\frac{\sqrt{R}}{1+\delta} \ln \left(d^{\left(\frac{1+\delta}{1-\delta} \right)^2} \right)} e^{\mu^2} \int_{\mu}^{+\infty} e^{\nu^2} \left(1 - \Phi(\sqrt{2}\nu) \right)^2 d\nu d\mu \\ &= \left(\frac{1 - \delta}{1 + \delta} \right)^4 V_x^{G(R^*, d^*)} [T_q] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
r^2 \text{Var} [T_q | X(0) = x] &\leq \left(\frac{1+\delta}{1-\delta} \right)^4 8\pi \int_{\frac{\sqrt{R}}{1+\delta} \ln \left(d \left(\frac{1+\delta}{1-\delta} \right)^2 z \right)}^{\frac{\sqrt{R}}{1+\delta} \ln \left(d \left(\frac{1+\delta}{1-\delta} \right)^2 z \right)} e^{\mu^2} \int_{\mu}^{+\infty} e^{\nu^2} \left(1 - \Phi(\sqrt{2}\nu) \right)^2 d\nu d\mu \\
&= \left(\frac{1+\delta}{1-\delta} \right)^4 V_x^{G(R^{**}, d^{**})} [T_q].
\end{aligned}$$

De facto, foi bastante mais fácil por este método obter uma minoração e uma majoração da média e da variância do tempo de extinção para o modelo de Gompertz com σ aproximado. Além disso, as expressões do comportamento médio e da variância são mais simples que as

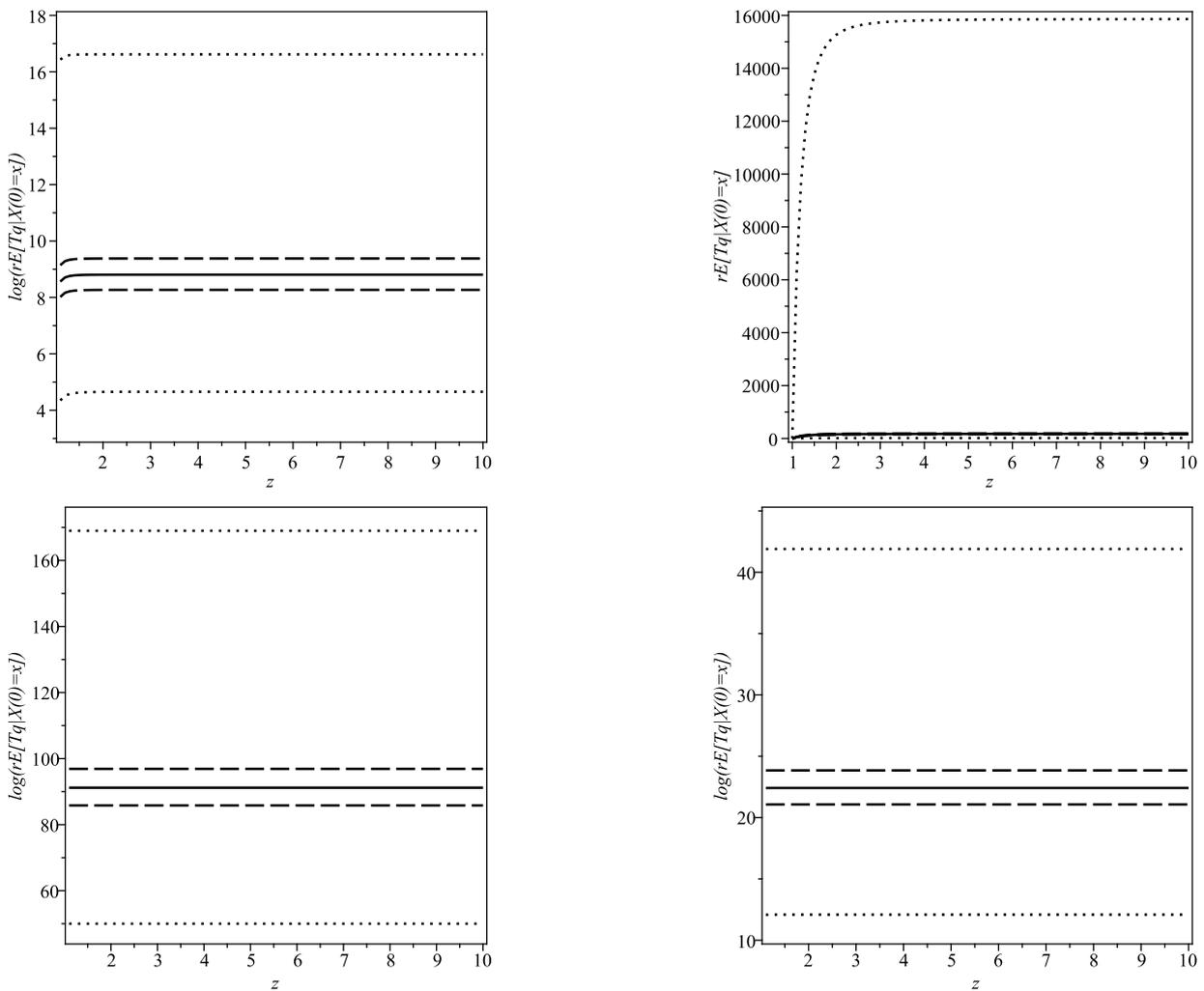


Figura 6.5: Comportamento da média $rE[T_q | X(0) = x]$ ou $\log_{10}(rE[T_q | X(0) = x])$ do tempo de extinção da população em função de $z = \frac{x}{q}$ para o modelo de Gompertz (linha a cheio). A figura também mostra o minorante e o majorante (obtidos pelo segundo método) para o modelo de Gompertz com σ aproximado, com o erro relativo de $\delta = 0.01$ (linhas a tracejado) e $\delta = 0.1$ (linhas a ponteadas). Consideramos $R := \frac{r}{\sigma^2} = 1$ (em cima) e $R := \frac{r}{\sigma^2} = 10$ (em baixo), $d := \frac{q}{K} = 0.01$ (à esquerda) e $d := \frac{q}{K} = 0.1$ (à direita).

obtidas pela método anterior. Neste caso, até conseguimos escrever o minorante e majorante da média e da variância como o comportamento da média e da variância do tempo de extinção do modelo de Gompertz (ver (4.2.9) e (4.2.10)) com outros parâmetros, ao contrário do método anterior em que não foi possível fazê-lo exclusivamente. No entanto, os minorante e os majorantes agora determinados não são tão bons quanto os obtidos pelo método anterior, como podemos verificar ao comparar os gráficos das figuras 6.3 e 6.4 com os gráficos das figuras 6.5 e 6.6.

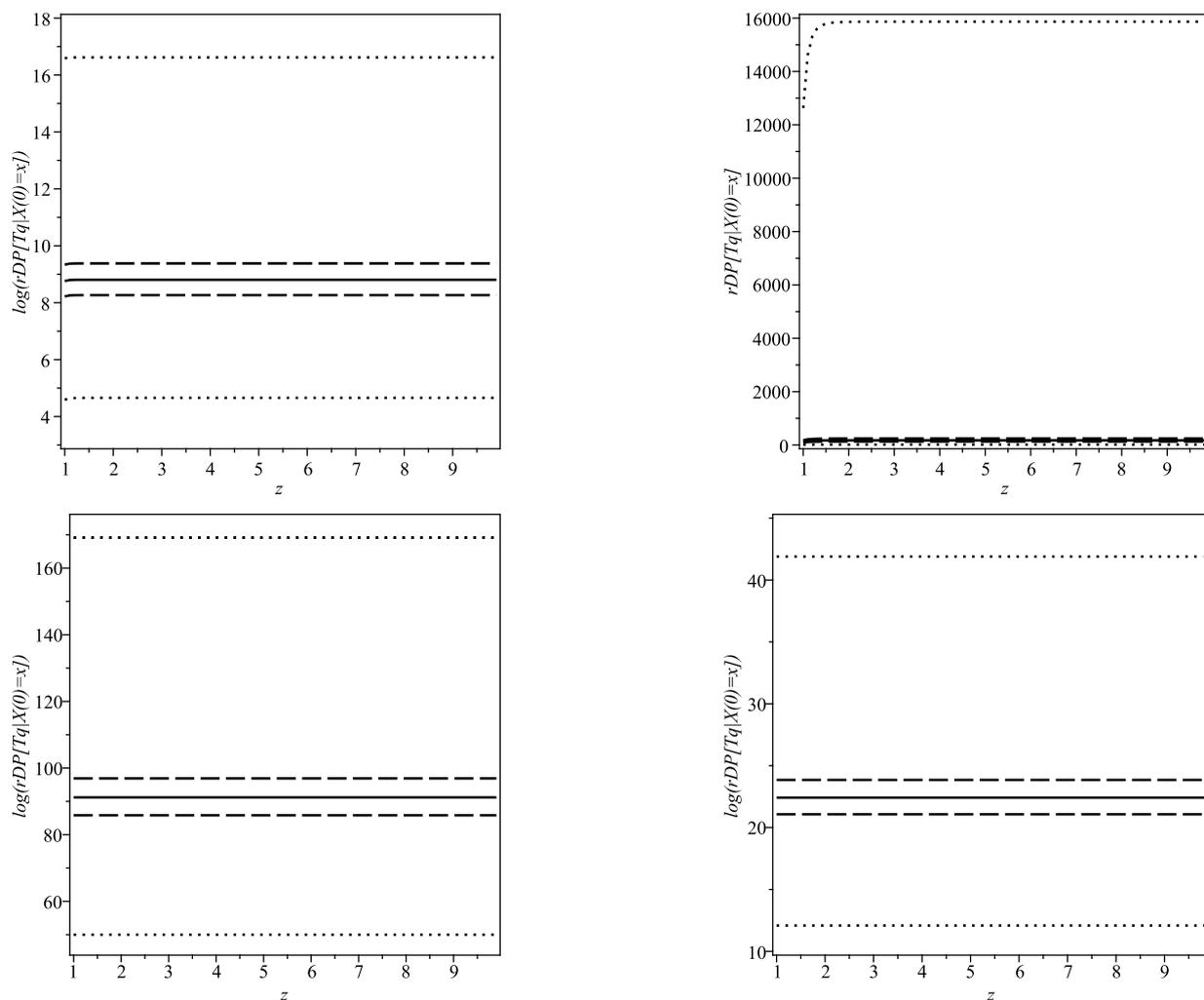


Figura 6.6: Comportamento do desvio padrão $rDP[T_q|X(0) = x]$ ou $\log_{10}(rDP[T_q|X(0) = x])$ do tempo de extinção da população em função de $z = \frac{x}{q}$ para o modelo de Gompertz (linha a cheio). A figura também mostra o minorante e o majorante (obtidos pelo segundo método) para o modelo de Gompertz com σ aproximado, com o erro relativo de $\delta = 0.01$ (linhas a tracejado) e $\delta = 0.1$ (linhas a ponteadas). Consideramos $R := \frac{r}{\sigma^2} = 1$ (em cima) e $R := \frac{r}{\sigma^2} = 10$ (em baixo), $d := \frac{q}{K} = 0.01$ (à esquerda) e $d := \frac{q}{K} = 0.1$ (à direita).

A incorreta especificação do modelo estocástico para descrever o crescimento populacional pode estar ligada a diversos fatores, em particular à escolha do parâmetro

da taxa de crescimento intrínseca r , como vimos no capítulo anterior, ou à escolha do parâmetro que mede a intensidade do ruído σ , que acabamos de estudar. Ao comparar estes dois erros de aproximação podemos concluir que, se o erro de especificação do modelo estiver no coeficiente de tendência, o erro no cálculo da média e variância do tempo de extinção é menor do que se o erro de especificação estiver no coeficiente de difusão.

MODELOS COM EFEITOS DE ALLEE

Os modelos clássicos, modelo logístico e modelo de Gompertz, que não incorporam efeitos de Allee, pressupõem que a população cresce mesmo a densidades muito baixas. À primeira vista parece aceitável, uma vez que abundam os recursos para os poucos indivíduos existentes, mas uma reflexão mais cuidadosa leva-nos a questionar a legitimidade deste pressuposto. Pelo menos para certas populações, é natural que haja uma densidade mínima, abaixo do qual a probabilidade de encontros efetivos entre indivíduos dos dois sexos seja tão baixa que a população não consegue repor o seu tamanho. Acima dessa densidade, a probabilidade de encontros efetivos é suficiente para fazer a população crescer. Outra circunstância encontra-se descrita em Courchamp *et al.* (1999) no caso do cão selvagem africano. Estes animais vivem e caçam em grupos organizados, sendo necessário a existência de uma densidade populacional mínima (bastante superior a zero) para os grupos se formarem, as caçadas serem eficazes, os animais sobreviverem e reproduzirem-se.

Assim, em problemas de extinção populacional é interessante considerar também modelos em que a taxa de crescimento $\frac{dX}{dt}$ possa ser negativa para valores de X próximos de zero, chamados modelos com efeitos de Allee fortes, em homenagem a Warder Clyde Allee, um zoólogo e ecologista americano, que estudou o comportamento animal e descreveu pela primeira vez em 1949 os chamados efeitos de Allee, como podemos ver em Allee *et al.* (1949). Recentemente Courchamp *et al.* (2008) escreveu um livro sobre efeitos de Allee em ecologia e conservação. Existem dois tipos de efeitos de Allee, efeitos de Allee fortes e efeitos de Allee fracos. Dizemos que temos um efeito de Allee forte quando a população precisa ultrapassar um determinado número de indivíduos para ter taxa de crescimento positiva, caso contrário a taxa de crescimento é negativa e a população extingue-se. Temos um efeito de Allee fraco quando tal extinção não ocorre mas a população tem taxa de crescimento *per capita* positiva

mas muito reduzida para densidades populacionais muito baixas.

Na figura 7.1 apresentamos um exemplo gráfico da taxa de crescimento populacional e da taxa de crescimento *per capita* do modelo logístico determinístico com e sem efeitos de Allee. O modelo sem efeitos de Allee é caracterizado por um decrescimento da taxa de crescimento *per capita*. O modelo com efeitos de Allee apresenta uma taxa de crescimento populacional senoide ou em forma de onda e têm um ponto de inflexão próximo de zero. No caso do modelo com efeitos de Allee fortes a taxa de crescimento é negativa para populações pequenas. Para o modelo com efeitos de Allee fracos a taxa de crescimento é positiva mas reduzida para densidades populacionais baixas.

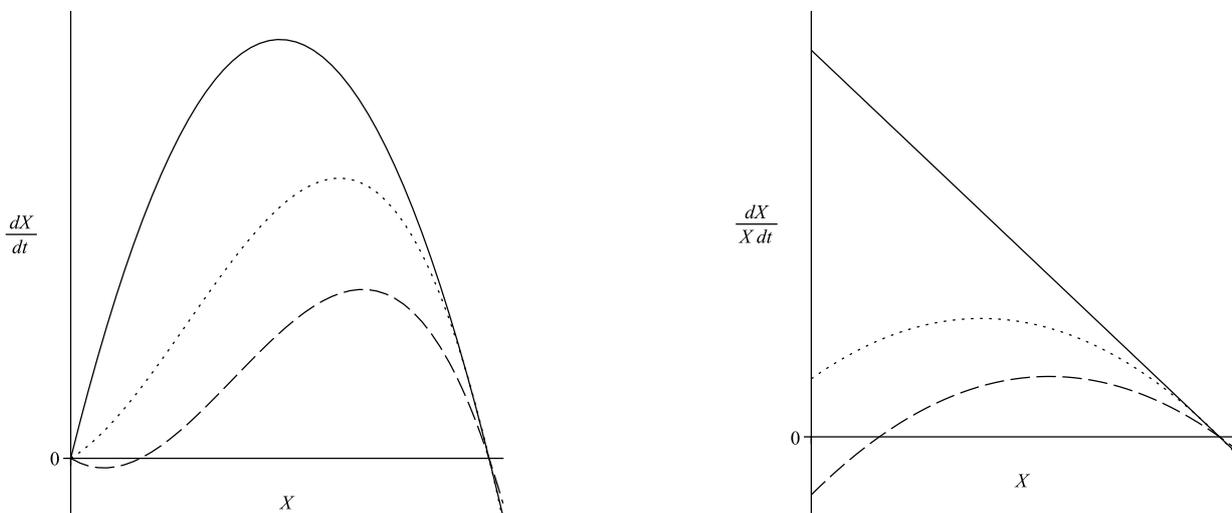


Figura 7.1: Exemplo gráfico das taxas de crescimento populacional (à esquerda) e de crescimento *per capita* (à direita) em função de tamanho da população para o modelo logístico. A linha a cheio representa um modelo que não inclui os efeitos de Allee, a linha a tracejado representa um modelo com efeitos de Allee fortes e a linha a pontilhado representa um modelo com efeitos de Allee fracos.

Neste capítulo iremos começar por estudar um modelo geral estocástico de crescimento populacional que inclui os efeitos de Allee fortes. Estudamos o comportamento das fronteiras do espaço de estados e garantimos a inexistência de densidade estacionária.

Baseado nos modelos clássicos, modelos logístico e de Gompertz, apresentamos dois modelos que incorporam os efeitos de Allee fortes, que designaremos por modelo logístico com efeitos de Allee e modelo de Gompertz com efeitos de Allee. Começamos por estudar o modelo determinístico, como pode ver-se, por exemplo, em Courchamp *et al.* (1999), Dennis (1989), Lewis e Kareiva (1993) ou Amarasekare (1998). O modelo estocástico que propomos é baseado no modelo determinístico com um termo que inclui o efeito das flutuações aleatórias na taxa de crescimento. Outros modelos estocásticos com efeitos de Allee foram estudados em Dennis (2002) e Engen *et al.* (2003). Apresentamos ainda as expressões dos tempos

de extinção para estes modelos e ilustramos os resultados obtidos com alguns exemplos numéricos.

Por último, apresentamos um modelo geral de crescimento populacional com efeitos de Allee fracos. Estudamos o comportamento das fronteiras do espaço de estados e mostramos que para este tipo de modelos existe densidade estacionária. Como exemplo, indicamos o modelo logístico com efeitos de Allee fracos.

7.1 Modelos estocásticos com efeitos de Allee fortes

Os modelos determinísticos que não incorporam efeitos de Allee pressupõem que a taxa de crescimento *per capita*, f , é positiva para valores de X entre 0 e K e negativa para valores de X superiores a K e a função f é decrescente para todo o $X > 0$. Assim os modelos estocásticos que têm por base os modelos determinísticos partem do mesmo pressuposto para a taxa média de crescimento *per capita* e serão aqui referidos por modelos estocásticos que não incluem efeitos de Allee.

Suponhamos agora que a taxa de crescimento *per capita* é dada por

$$\frac{1}{X} \frac{dX}{dt} = f(X) + \sigma \varepsilon(t), \quad (7.1.1)$$

onde a taxa média (média geométrica) f é uma função de classe C^1 definida para valores de $X > 0$, tal que, para $0 < X < E$, onde E é o limiar de Allee, a função f é negativa mas crescente, para $E < X < K$ a função f é positiva e para $X > K$ a função f é negativa e decrescente. Obviamente $f(E) = f(K) = 0$. Quando isto acontece, temos o conhecido efeito de Allee forte, que iremos estudar de seguida. Como se vê, estamos a considerar um modelo muito geral.

A equação diferencial estocástica (7.1.1) é autónoma e os coeficientes de tendência e de difusão são de classe C^1 , o que garante a existência e unicidade de solução até um instante de explosão. A sua solução é um processo de difusão homogéneo com coeficiente de tendência

$$a(x) = \left(f(x) + \frac{\sigma^2}{2} \right) x$$

e coeficiente de difusão

$$b^2(x) = \sigma^2 x^2.$$

No interior do espaço de estados, definimos as medidas de escala e de velocidade de $X(t)$. A densidade de escala é

$$s(y) = \frac{n}{y} \exp \left(-\frac{2}{\sigma^2} \int_n^y \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta \right)$$

e a densidade de velocidade é

$$m(y) = \frac{1}{n\sigma^2 y} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int_n^y \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta\right),$$

com n uma constante arbitrariamente escolhida no interior do espaço de estados.

Vamos começar por provar que, para estes modelos, a fronteira $X = 0$ é atrativa mas, supondo que $f(0^+)$ é finito, não atingível. É suficiente mostrar que, para algum $x_0 > 0$,

$$S(0, x_0] = \int_0^{x_0} s(y) dy < +\infty$$

e, caso $f(0^+)$ seja finito,

$$\Sigma(0, x_0] = \int_0^{x_0} S(0, z) m(z) dz = +\infty$$

(ver, por exemplo, Karlin e Taylor (1981)).

Sejam $0 < x_0 < n < E$ e $0 < y \leq x_0$. Consideramos $h(y) = -\frac{2}{\sigma^2} \int_n^y \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta$, que é crescente. Então, para $y \in (0, x_0]$,

$$\begin{aligned} s(y) &= \frac{n}{y} \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2} \int_n^y \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta\right) \\ &= \frac{\sigma^2 n}{2f(y)} \frac{d(\exp(h(y)))}{dy} \\ &\leq \frac{\sigma^2 n}{2f(x_0)} \frac{d(\exp(h(y)))}{dy} \end{aligned}$$

e, como $h(0^+) < 0$,

$$S(0, x_0] \leq c_1 (\exp(h(x_0)) - \exp(h(0^+))) < +\infty,$$

com c_1 constante positiva.

Temos

$$\begin{aligned} \Sigma(0, x_0] &= \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{x_0} \int_0^z \frac{1}{y} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int_y^n \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta\right) dy \frac{1}{z} \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2} \int_z^n \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta\right) dz \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{x_0} \frac{1}{z} \int_0^z \frac{1}{y} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int_y^z \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta\right) dy dz \\ &\geq \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{x_0} \frac{1}{z} \int_0^z \frac{1}{y} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int_y^z \frac{f(y)}{\theta} d\theta\right) dy dz \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{x_0} \frac{1}{z} \int_0^z \frac{1}{y} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} f(y) \ln \frac{z}{y}\right) dy dz \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{x_0} \frac{1}{z} \int_0^z \frac{1}{y} \left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{2}{\sigma^2} f(y)} dy dz. \end{aligned}$$

Invertendo a ordem de integração, vem

$$\begin{aligned}\Sigma(0, x_0] &\geq \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{x_0} y^{-\frac{2}{\sigma^2}f(y)-1} \int_y^{x_0} z^{\frac{2}{\sigma^2}f(y)-1} dz dy \\ &= \int_0^{x_0} \frac{\left(\frac{x_0}{y}\right)^{\frac{2}{\sigma^2}f(y)} - 1}{2yf(y)} dy \\ &= \int_0^{x_0} \frac{1 - \left(\frac{y}{x_0}\right)^{\frac{2}{\sigma^2}|f(y)|}}{2y|f(y)|} dy.\end{aligned}$$

Suponhamos que $f(0^+)$ é finito. Para x_0 suficientemente pequeno, $f(0^+) - \epsilon < f(y) < f(0^+) + \epsilon$, com $\epsilon < \frac{|f(0^+)|}{2}$. Assim, $|f(0^+)| - \epsilon < |f(y)| < |f(0^+)| + \epsilon$ e

$$\begin{aligned}\Sigma(0, x_0] &\geq \int_0^{x_0} \frac{1 - \left(\frac{y}{x_0}\right)^{\frac{2}{\sigma^2}(|f(0^+)|-\epsilon)}}{2y(|f(0^+)| + \epsilon)} dy \\ &= \frac{1}{2(|f(0^+)| + \epsilon)} \int_0^{x_0} \frac{1}{y} dy - \frac{1}{2(|f(0^+)| + \epsilon) x_0^{\frac{2}{\sigma^2}(|f(0^+)|-\epsilon)}} \int_0^{x_0} y^{\frac{2}{\sigma^2}(|f(0^+)|-\epsilon)-1} dy.\end{aligned}$$

O primeiro integral é divergente com valor $+\infty$ e o segundo integral é convergente; por isso

$$\Sigma(0, x_0] = \int_0^{x_0} \int_0^z s(y) dym(z) dz = +\infty.$$

Assim, para $f(0^+)$ finito, a fronteira $X = 0$ é inatingível, ou seja, não existe um t tal que $X(t) = 0$. Contudo, pode acontecer que $X(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$ e ocorra "extinção matemática".

Vamos agora mostrar que a fronteira $X = +\infty$ é não atrativa, o que implica a não existência de explosões, garantindo a existência e unicidade da EDE para todo o $t \geq 0$. Seja $K < x_0 \leq y < +\infty$. Temos

$$\begin{aligned}\exp\left(-\frac{2}{\sigma^2} \int_n^y \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta\right) &= \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2} \int_n^{x_0} \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta\right) \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2} \int_{x_0}^y \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta\right) \\ &\geq \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2} \int_n^{x_0} \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta\right)\end{aligned}$$

Assim, para qualquer $x_0 > 0$,

$$S[x_0, +\infty) = \int_{x_0}^{+\infty} s(y) dy \geq \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2} \int_n^{x_0} \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta\right) \int_{x_0}^{+\infty} \frac{n}{y} dy = +\infty,$$

ou seja, para estes modelos a fronteira $X = +\infty$ é não atrativa. Sendo a fronteira $X = 0$ atrativa, concluímos que efetivamente $X(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$.

Contrariamente ao modelo determinístico, o modelo estocástico não tem um ponto

de equilíbrio, mas é possível existir uma distribuição probabilística de equilíbrio para o tamanho da população, conhecida por distribuição estacionária, com função densidade de probabilidade $p(y)$, que chamamos densidade estacionária. Vamos agora provar que para este tipo de modelos, modelos com efeito de Allee forte, com $f(0^+)$ finito, não existe densidade estacionária.

A densidade estacionária $p(y)$, quando existe, satisfaz a equação de Kolmogorov progressiva

$$\frac{d(a(y)p(y))}{dy} - \frac{1}{2} \frac{d^2(b^2(y)p(y))}{d^2y} = 0.$$

A solução geral desta equação diferencial ordinária é

$$p(y) = m(y)(CS(y) + D).$$

Podemos então escrever

$$p(y) = m(y)(CS(y) - CS(0) + CS(0) + D) = m(y)(CS(0, y) + D^*),$$

com $D^* = D + CS(0)$ constante.

Para existir densidade estacionária é necessário que $p(y) \geq 0$ no intervalo $]0, +\infty[$ e $\int_0^{+\infty} p(y)dy = 1$. Vamos provar que não existe densidade estacionária para este tipo de modelos com efeitos de Allee forte.

Vem

$$\int_0^{+\infty} S(0, z)m(z)dz = \int_0^{x_0} S(0, z)m(z)dz + \int_{x_0}^{+\infty} S(0, z)m(z)dz = +\infty.$$

Com efeito, provámos que a fronteira $X = 0$ é inatingível, ou seja, $\Sigma(0, x_0] = \int_0^{x_0} S(0, z)m(z)dz = +\infty$, e a função integranda do segundo integral é positiva para $z \in [x_0, +\infty[$.

Vamos mostrar que

$$M = \int_0^{+\infty} m(y)dy = \int_0^{y_1} m(y)dy + \int_{y_1}^{+\infty} m(y)dy = M_1 + M_2 = +\infty.$$

Fixemos y_1 de forma que $0 < y_1 < E < K < +\infty$ e $y_1 < n$. Suponhamos que $n < E < K$. Caso contrário a demonstração é análoga.

Vamos mostrar que $M_1 = +\infty$. Seja $y \in (0, y_1]$ e $\theta \in [y, n]$. Então

$$\begin{aligned} m(y) &= \frac{1}{n\sigma^2 y} \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2} \int_y^n \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta\right) \\ &\geq \frac{1}{n\sigma^2 y} \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2} f(n) \int_y^n \frac{1}{\theta} d\theta\right) \\ &= \frac{1}{n\sigma^2 y} \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2} f(n) \ln \frac{n}{y}\right) \\ &= c_1 y^{\frac{2}{\sigma^2} f(n) - 1}, \end{aligned}$$

com $c_1 > 0$ constante finita. Logo

$$M_1 \geq c_1 \int_0^{y_1} y^{\frac{2}{\sigma^2} f(n) - 1} dy = +\infty,$$

porque $n < E$ e, assim, $f(n) < 0$.

Basta provar que M_1 é $+\infty$ uma vez que a função m é positiva no intervalo $[y_1, +\infty[$, e portanto, independentemente da natureza do integral M_2 , o integral M é divergente.

Se $C = 0$ e $D^* \neq 0$, como $\int_0^{+\infty} m(y) dy = +\infty$, vem $\int_0^{+\infty} p(y) dy = +\infty$. Se $C \neq 0$ e $D^* = 0$, como $\int_0^{+\infty} m(y) S(0, y) dy = +\infty$, vem $\int_0^{+\infty} p(y) dy = +\infty$. Se $C = 0$ e $D^* = 0$, vem $\int_0^{+\infty} p(y) dy = 0$. Logo, para que $p(y)$ seja densidade de probabilidade, na expressão densidade estacionária, C e D^* terão de ser ambos não nulos.

Para ter $p(y) \geq 0$ necessitamos que $CS(0, y) + D^* \geq 0$ para todo o $y \geq 0$ e, como $S(0, 0) = 0$, precisamos que $D^* \geq 0$ e, como para $D^* = 0$ não existe densidade estacionária, então provamos que $D^* > 0$.

Como $S(0, +\infty) = +\infty$, se $C < 0$ temos valores negativos para $p(y)$ para alguns valores de y . Por isso, temos que ter $C > 0$. Mas, quando $C > 0$ e $D^* > 0$, temos $\int_0^{+\infty} p(y) dy = +\infty$.

Consequentemente, provamos que não existe densidade estacionária, garantido a inexistência de densidade estacionária para este tipo de modelos muito gerais que incorporam os efeitos de Allee forte.

7.1.1 Modelo logístico com efeitos de Allee

Vamos agora estudar um caso particular dos modelos com efeitos de Allee fortes, que se obtém modificando o clássico modelo logístico. No caso determinístico é muito usado na literatura (ver Courchamp *et al.* (1999)) o modelo com $f(X) = r \left(1 - \frac{X}{K}\right) \left(\frac{X}{E} - 1\right)$, que chamaremos modelo logístico com efeitos de Allee. Assumimos que a taxa de crescimento *per capita* da população é da forma

$$\frac{1}{X} \frac{dX}{dt} = r \left(1 - \frac{X}{K}\right) \left(\frac{X}{E} - 1\right), \quad (7.1.2)$$

com $r > 0$. O limiar de Allee E , com $0 < E < K$, é tal que a taxa de crescimento *per capita* é negativa para valores inferiores a E e, como $f(0^+) < 0$, temos um efeito de Allee forte. Quando $X < E$, a taxa de crescimento é negativa e a extinção é inevitável. Quando $E < X < K$ a taxa de crescimento é positiva. Se $X > K$ a taxa de crescimento é negativa. Os pontos de equilíbrio são $X = 0$, $X = E$ e $X = K$. O ponto de equilíbrio $X = E$ é instável e os pontos de equilíbrio $X = 0$ e $X = K$ são assintoticamente estáveis.

Quando $t \rightarrow +\infty$, $X(t)$ converge para 0 ou para a capacidade de sustento K , dependendo do tamanho da população x no instante inicial ser inferior ou superior a E .

A solução implícita do modelo determinístico (7.1.2) é dada por

$$\frac{X(t)^{K-E} |X(t) - K|^E}{|X(t) - E|^K} = \frac{|X(0) - E|^K}{X(0)^{K-E} |X(0) - K|^E} e^{-(K-E)rt}.$$

Em ambiente aleatório, propomos um modelo de crescimento populacional usando a EDE autónoma de Stratonovich, com ruído aditivo

$$dX = r \left(1 - \frac{X}{K}\right) \left(\frac{X}{E} - 1\right) X dt + \sigma X dW(t), \quad (7.1.3)$$

com $X(0) = x$ conhecido, onde σ é intensidade do ruído e $W(t)$ é o processo de Wiener padrão. A equação (7.1.3) é equivalente à EDE de Itô

$$(I) \quad dX = \left(r \left(1 - \frac{X}{K}\right) \left(\frac{X}{E} - 1\right) + \frac{\sigma^2}{2} \right) X dt + \sigma X dW(t).$$

A solução $X(t)$ é um processo de difusão homogéneo com coeficiente de tendência

$$a(x) = \left(r \left(1 - \frac{x}{K}\right) \left(\frac{x}{E} - 1\right) + \frac{\sigma^2}{2} \right) x$$

e coeficiente de difusão

$$b^2(x) = \sigma^2 x^2.$$

Como a EDE é autónoma e os coeficientes de tendência e de difusão são de classe C^1 , garantimos a existência e unicidade de solução até um instante de explosão (ver Arnold (1974)). Vamos mostrar mais à frente que não existem explosões e deste modo a solução existe e única para todo o $t \geq 0$. Definimos, no interior do espaço de estados, as medidas de escala e de velocidade de $X(t)$. A densidade de escala é

$$s(y) = C y^{\frac{2r}{\sigma^2} - 1} \exp \left(\frac{r}{\sigma^2 K E} (y^2 - 2y(K + E)) \right) \quad (7.1.4)$$

e a densidade de velocidade é

$$m(y) = \frac{1}{C\sigma^2} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} \exp\left(-\frac{r}{\sigma^2 KE} (y^2 - 2y(K+E))\right), \quad (7.1.5)$$

com $C > 0$ constante.

O espaço de estados tem fronteiras $X = 0$ e $X = +\infty$. Este modelo é um caso particular do modelo mais geral estudado anteriormente, por isso, podemos afirmar que a fronteira $X = 0$ é atrativa mas não atingível ou seja, não existe um t tal que $X(t) = 0$, mas $X(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$ e ocorre "extinção matemática". Também provámos que a fronteira $X = +\infty$ é não atrativa, o que implica não existir explosões, garantindo a existência e unicidade de solução para todo o $t \geq 0$.

De facto, a "extinção matemática" ocorre, visto que $X(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$, devido à atratividade da fronteira $X = 0$. Mas preferimos usar o conceito de "extinção realista", quando o tamanho da população atinge o limiar de extinção $q > 0$ (por exemplo, $q = 1$). Estamos interessados no tempo necessário para a população atingir o limiar de extinção q pela primeira vez. Assumimos que o tamanho da população no instante inicial x está acima de q e apresentamos expressões para a média e para o desvio padrão do tempo de primeira passagem por q , T_q .

Usando (4.2.2) e as funções s e m dadas por (7.1.4) e (7.1.5) obtemos, usando as mudanças de variável $u = \sqrt{\frac{r}{\sigma^2 KE}}\zeta$ e $y = \sqrt{\frac{r}{\sigma^2 KE}}\theta$,

$$\begin{aligned} E[T_q|X(0) = x] &= \frac{2}{\sigma^2} \int_{\sqrt{\frac{r}{\sigma^2 KE}q}}^{\sqrt{\frac{r}{\sigma^2 KE}x}} u^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} \exp\left(\left(u - \sqrt{\frac{r}{\sigma^2 KE}}(K+E)\right)^2\right) \\ &\quad \int_u^{+\infty} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} \exp\left(-\left(y - \sqrt{\frac{r}{\sigma^2 KE}}(K+E)\right)^2\right) dy du. \end{aligned}$$

Aplicando a expressão (4.2.6), usando (7.1.4) e (7.1.5) e mudanças de variável semelhantes, obtemos para o modelo (7.1.3),

$$\begin{aligned} Var[T_q|X(0) = x] &= \frac{8}{\sigma^4} \int_{\sqrt{\frac{r}{\sigma^2 KE}q}}^{\sqrt{\frac{r}{\sigma^2 KE}x}} u^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} \exp\left(\left(u - \sqrt{\frac{r}{\sigma^2 KE}}(K+E)\right)^2\right) \\ &\quad \int_u^{+\infty} v^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} \exp\left(\left(v - \sqrt{\frac{r}{\sigma^2 KE}}(K+E)\right)^2\right) \\ &\quad \left(\int_v^{+\infty} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} \exp\left(-\left(y - \sqrt{\frac{r}{\sigma^2 KE}}(K+E)\right)^2\right) dy\right)^2 dv du. \end{aligned}$$

Como é usual em sistemas dinâmicos vamos considerar grandezas adimensionais $R = \frac{r}{\sigma^2}$,

$d = \frac{q}{K}$, $z = \frac{x}{q}$ e $\gamma = \frac{E}{K}$ para reduzir o número de parâmetros. Obtemos

$$rE[T_q|X(0) = x] = 2R \int_{\sqrt{\frac{R}{\gamma}}d}^{\sqrt{\frac{R}{\gamma}}dz} u^{2R-1} \exp\left(\left(u - \sqrt{\frac{R}{\gamma}}(1 + \gamma)\right)^2\right) \int_u^{+\infty} y^{-2R-1} \exp\left(-\left(y - \sqrt{\frac{R}{\gamma}}(1 + \gamma)\right)^2\right) dy du \quad (7.1.6)$$

e

$$r^2Var[T_q|X(0) = x] = 8R^2 \int_{\sqrt{\frac{R}{\gamma}}d}^{\sqrt{\frac{R}{\gamma}}dz} u^{2R-1} \exp\left(\left(\mu - \sqrt{\frac{R}{\gamma}}(1 + \gamma)\right)^2\right) \int_u^{+\infty} v^{2R-1} \exp\left(\left(v - \sqrt{\frac{R}{\gamma}}(1 + \gamma)\right)^2\right) \left(\int_v^{+\infty} y^{-2R-1} \exp\left(-\left(y - \sqrt{\frac{R}{\gamma}}(1 + \gamma)\right)^2\right) dy\right)^2 dv du. \quad (7.1.7)$$

Para ilustração dos resultados obtidos consideramos $R = 1$ (equivalente a $r = \sigma^2$, i.e., um ruído de forte intensidade relativa) e $R = 2$ (equivalente a $r = 2\sigma^2$, i.e., um ruído de fraca intensidade relativa), $d = 0.01$ (equivalente a $q = \frac{K}{100}$) e $d = 0.1$ (equivalente a $q = \frac{K}{10}$) e vários γ , $\gamma = 0.5d$ (equivalente a $E = \frac{q}{2}$), $\gamma = d$ (equivalente a $E = q$) e $\gamma = 5d$ (equivalente a $E = 5q$).

Nas figuras 7.2, 7.3, 7.4 e 7.5 apresentamos o comportamento da média e do desvio padrão do tempo necessário para a população atingir o tamanho q pela primeira vez (tempo de extinção da população) para o modelo (7.1.3) em função de z . Note que a ordenada se refere às quantidades adimensionais $rE[T_q|X(0) = x]$ e $r\sqrt{Var[T_q|X(0) = x]}$ em vez da média e desvio padrão do tempo de extinção. Quando z aumenta (i.e., quando o tamanho inicial aumenta ou o limiar de extinção diminui), a média e o desvio padrão do tempo de extinção aumentam. Isto reconhece-se facilmente das expressões (7.1.6) e (7.1.7) (limite superior de integração aumenta quando z aumenta). O aumento, porém, é muito lento a partir de certo valor de z . À medida que d aumenta o tempo médio de extinção diminui. Quanto maior for R mais demorado se torna em média o tempo de extinção. Quando γ aumenta (i.e., o limiar de Allee aumenta ou a capacidade de sustento do meio diminui), diminui o tempo médio de extinção. O desvio padrão tem a mesma ordem de grandeza do tempo médio.

Estes gráficos não são comparáveis com os gráficos do modelo logístico, modelo logístico e modelo aproximadamente logístico, uma vez que os parâmetros r e K têm significados

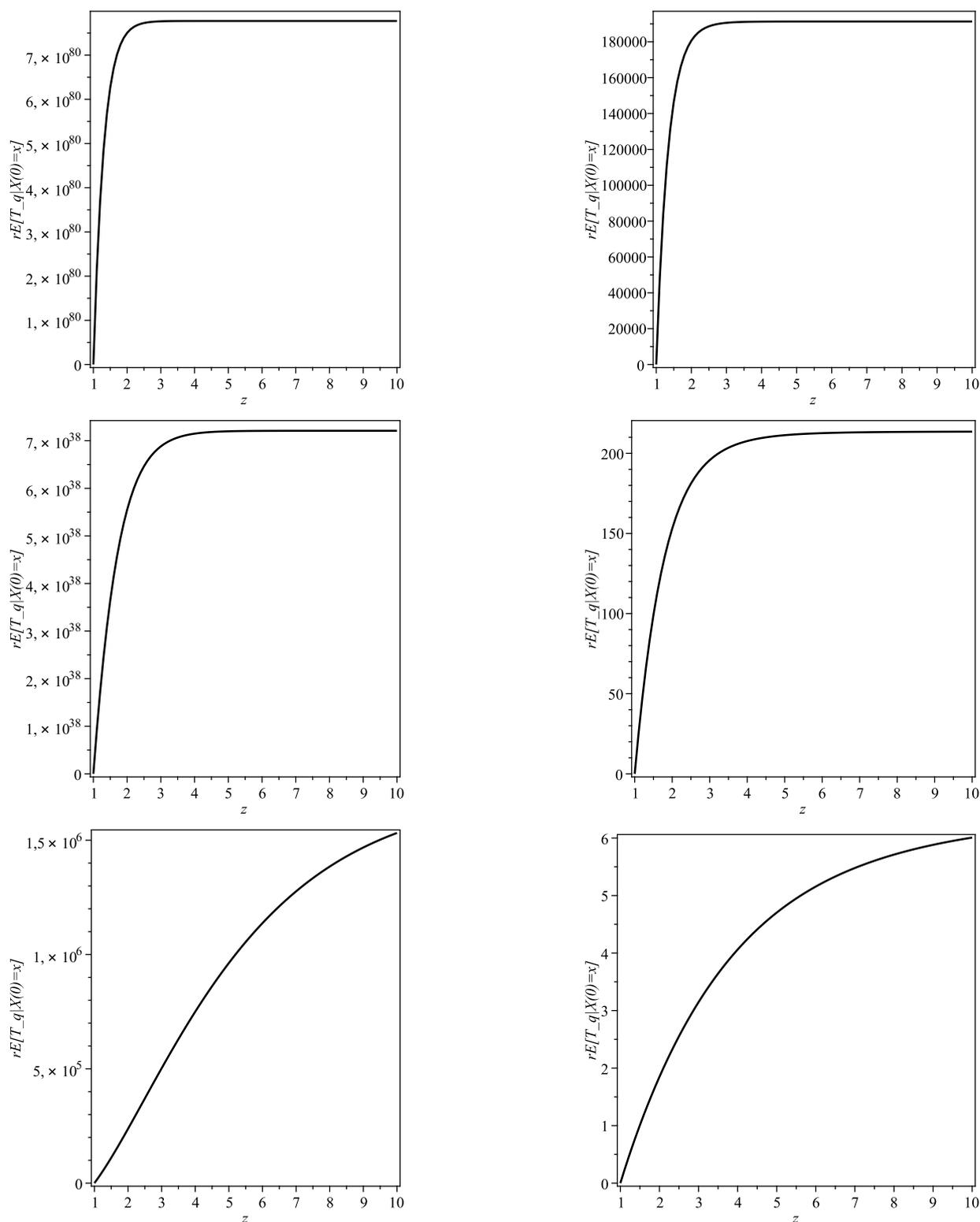


Figura 7.2: Comportamento do tempo médio de extinção da população, para o modelo logístico com efeitos de Allee, em função de $z := \frac{x}{q}$. A ordenada representa $rE[T_q | X(0) = x]$. Consideramos $R := \frac{r}{\sigma^2} = 1$, $d := \frac{q}{K} = 0.01$ (à esquerda) e $d := \frac{q}{K} = 0.1$ (à direita), $\gamma := \frac{E}{K} = 0.5d$ (em cima), $\gamma := \frac{E}{K} = d$ (no centro) e $\gamma := \frac{E}{K} = 5d$ (em baixo).

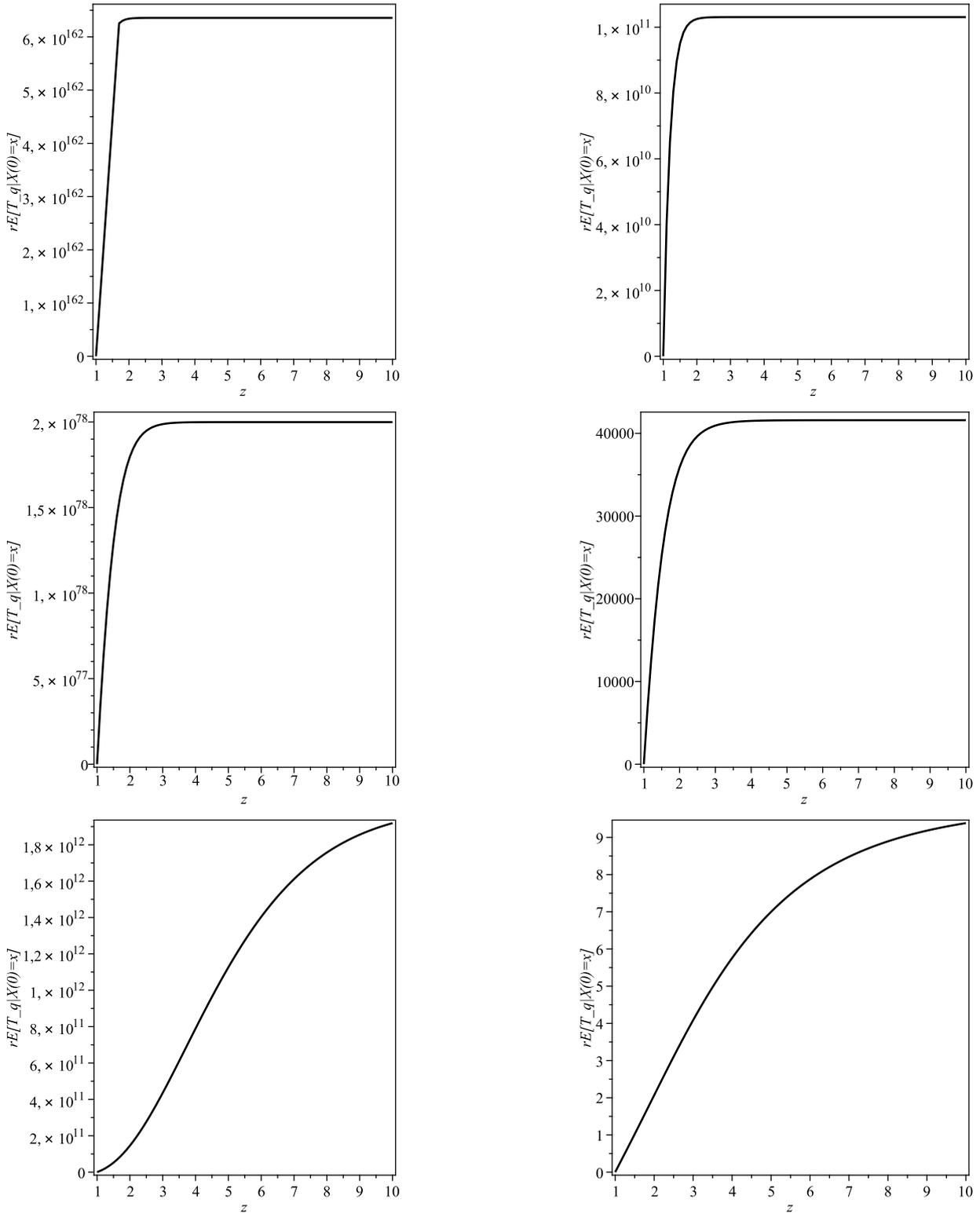


Figura 7.3: Comportamento do tempo médio de extinção da população, para o modelo logístico com efeitos de Allee, em função de $z := \frac{x}{q}$. A ordenada representa $rE[T_q | X(0) = x]$. Consideramos $R := \frac{r}{\sigma^2} = 2$, $d := \frac{q}{K} = 0.01$ (à esquerda) e $d := \frac{q}{K} = 0.1$ (à direita), $\gamma := \frac{E}{K} = 0.5d$ (em cima), $\gamma := \frac{E}{K} = d$ (no centro) e $\gamma := \frac{E}{K} = 5d$ (em baixo).

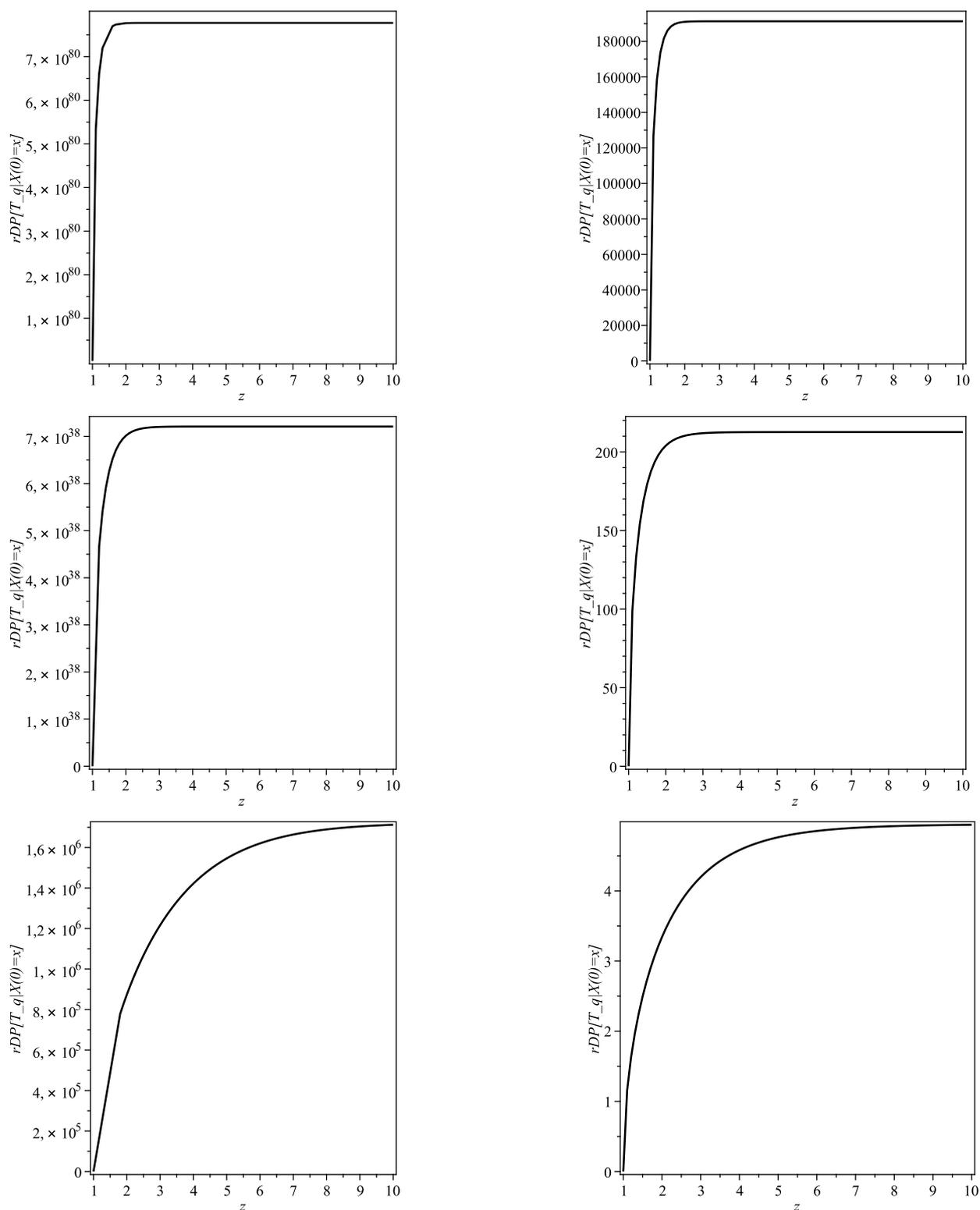


Figura 7.4: Comportamento do desvio padrão do tempo de extinção da população, para o modelo logístico com efeitos de Allee, em função de $z := \frac{x}{q}$. A ordenada representa $rDP[T_q|X(0) = x]$. Consideramos $R := \frac{r}{\sigma^2} = 1$, $d := \frac{q}{K} = 0.01$ (à esquerda) e $d := \frac{q}{K} = 0.1$ (à direita), $\gamma := \frac{E}{K} = 0.5d$ (em cima), $\gamma := \frac{E}{K} = d$ (no centro) e $\gamma := \frac{E}{K} = 5d$ (em baixo).

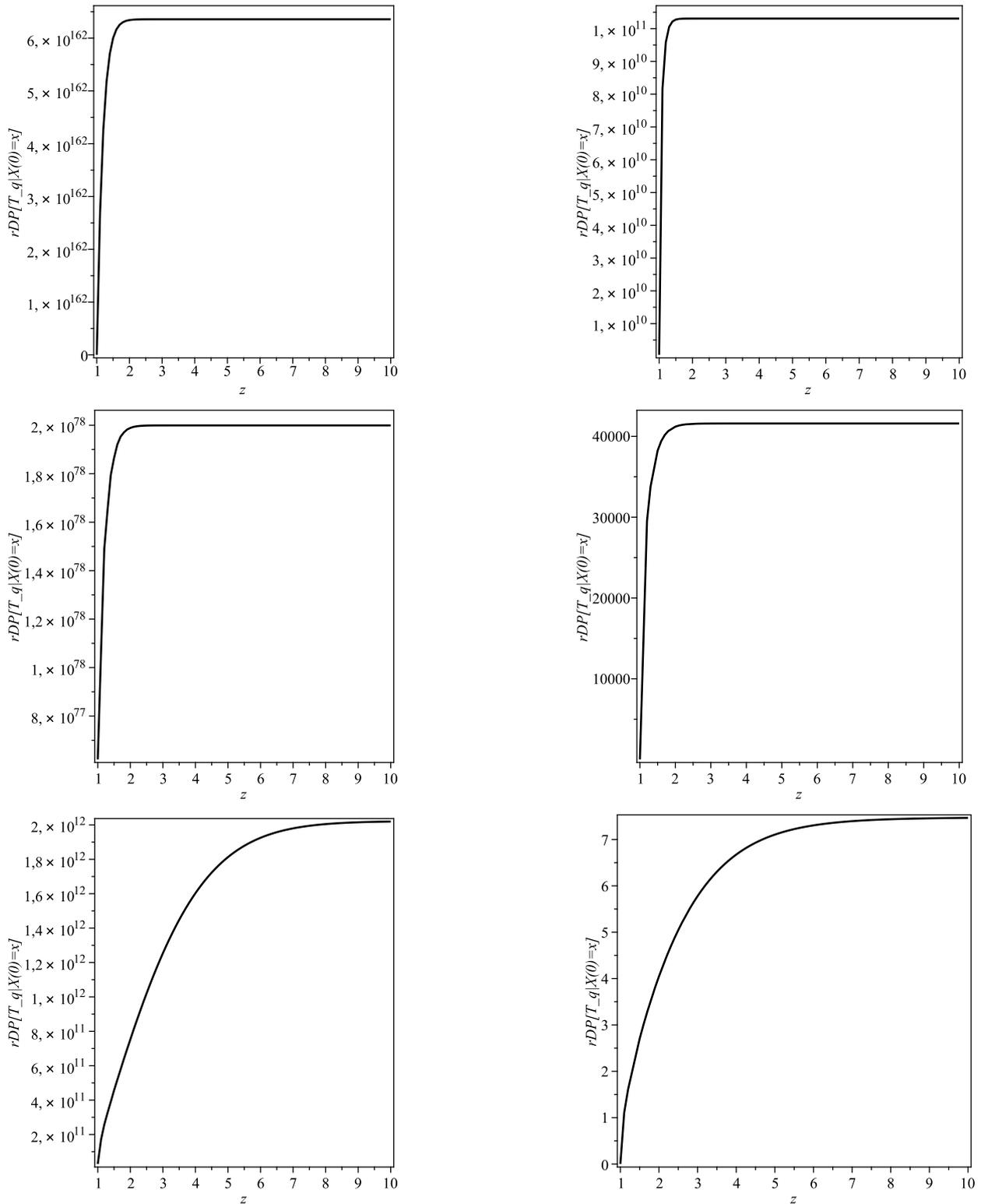


Figura 7.5: Comportamento do desvio padrão do tempo de extinção da população, para o modelo logístico com efeitos de Allee, em função de $z := \frac{x}{q}$. A ordenada representa $rDP[T_q|X(0)=x]$. Consideramos $R := \frac{r}{\sigma^2} = 2$, $d := \frac{q}{K} = 0.01$ (à esquerda) e $d := \frac{q}{K} = 0.1$ (à direita), $\gamma := \frac{E}{K} = 0.5d$ (em cima), $\gamma := \frac{E}{K} = d$ (no centro) e $\gamma := \frac{E}{K} = 5d$ (em baixo).

diferentes. Em particular, o parâmetro r tem significado completamente diferente no modelo logístico com efeitos de Allee.

7.1.2 Modelo de Gompertz com efeitos de Allee

De modo semelhante podemos escrever o modelo de Gompertz com efeitos de Allee, com $f(X) = r \ln \frac{K}{X} \ln \frac{X}{E}$, cuja taxa de crescimento *per capita* é descrita por

$$\frac{1}{X} \frac{dX}{dt} = r \ln \frac{K}{X} \ln \frac{X}{E},$$

com $r > 0$. O limiar de Allee, com $0 < E < K$, é incorporado de modo que a taxa de crescimento seja negativa para valores inferiores a E e, como $f(0^+) < 0$, temos o chamado efeito de Allee forte. Quando $X < E$ a taxa de crescimento é negativa e a extinção matemática é inevitável. Se $E < X < K$, a taxa de crescimento é positiva. Para $X > K$ voltamos a ter uma taxa de crescimento negativa.

Para este modelo temos três pontos de equilíbrio, $X = 0$, $X = E$ e $X = K$. O ponto $X = E$ é um ponto de equilíbrio instável e os pontos $X = 0$ e $X = K$ são assintoticamente estáveis. Quando $t \rightarrow +\infty$, $X(t)$ converge para 0 ou para K , dependendo do tamanho da população no instante inicial ser inferior ou superior a E .

A solução implícita do modelo determinístico é dada por

$$\frac{\ln \frac{X(t)}{K}}{\ln \frac{X(t)}{E}} = \frac{\ln \frac{X(0)}{E}}{\ln \frac{X(0)}{K}} e^{-rt \ln \frac{K}{E}}.$$

Supondo que o ambiente está sujeito a flutuações aleatórias que afetam a taxa de crescimento per capita, podemos escrever a equação diferencial estocástica de Stratonovich

$$\frac{1}{X} \frac{dX}{dt} = r \ln \frac{K}{X} \ln \frac{X}{E} + \sigma \varepsilon(t),$$

com $X(0) = x$ conhecido, onde $\varepsilon(t)$ é o ruído branco padrão e $\sigma > 0$ é a intensidade do ruído. A equação anterior pode ser escrita da forma

$$dX = rX \ln \frac{K}{X} \ln \frac{X}{E} dt + \sigma X dW(t),$$

e é equivalente à EDE de Itô

$$(I) \quad dX = \left(r \ln \frac{K}{X} \ln \frac{X}{E} + \frac{\sigma^2}{2} \right) X dt + \sigma X dW(t).$$

Como a EDE é autónoma e os coeficientes de tendência e de difusão são de classe C^1 , garantimos a existência e unicidade de solução até um instante de explosão e a solução é um

processo de difusão homogéneo com coeficiente de tendência e coeficiente de difusão,

$$a(x) = \left(r \ln \frac{K}{x} \ln \frac{x}{E} + \frac{\sigma^2}{2} \right) x$$

e

$$b^2(x) = \sigma^2 x^2,$$

respetivamente. A densidade de escala é

$$\begin{aligned} s(y) &= \frac{n}{y} \exp \left(-\frac{2r}{\sigma^2} \int_n^y \frac{1}{\theta} \ln \frac{K}{\theta} \ln \frac{\theta}{E} d\theta \right) \\ &= \frac{C}{y} \exp \left(\frac{r}{\sigma^2} \ln \frac{y}{E} \ln^2 \frac{K}{y} + \frac{r}{3\sigma^2} \ln^3 \frac{K}{y} \right) \end{aligned}$$

e a densidade de velocidade

$$\begin{aligned} m(y) &= \frac{1}{n\sigma^2 y} \exp \left(\frac{2r}{\sigma^2} \int_n^y \frac{1}{\theta} \ln \frac{K}{\theta} \ln \frac{\theta}{E} d\theta \right) \\ &= \frac{1}{C\sigma^2 y} \exp \left(-\frac{r}{\sigma^2} \ln \frac{y}{E} \ln^2 \frac{K}{y} - \frac{r}{3\sigma^2} \ln^3 \frac{K}{y} \right), \end{aligned}$$

com C constante.

As fronteiras do espaço de estados são $X = 0$ e $X = +\infty$. Provamos anteriormente que a fronteira $X = 0$ é atrativa e a fronteira $X = +\infty$ é não atrativa. No entanto, não podemos assumir que a fronteira $X = 0$ é não atingível porque neste caso $f(0^+) = -\infty$. A fronteira $X = +\infty$ é não atrativa, ou seja, não existem explosões, o que garante a existência e unicidade de solução da equação diferencial estocástica para todo o $t \geq 0$.

O facto de a fronteira $X = 0$ ser atrativa significa que, para este modelo, modelo de Gompertz com efeitos de Allee, ocorre "extinção matemática". No entanto o conceito de "extinção realista" é mais vantajoso e mais realista. Assim, fixamos à priori o limiar de extinção q da população, e supomos que a população no instante inicial x é superior ao limiar de extinção q , para que a população não esteja extinta logo à partida. De seguida apresentamos as expressões dos tempos de extinção.

Usando a expressão (4.2.2) e fazendo as mudanças de variáveis $u = \ln \frac{\zeta}{K}$ e $y = \ln \frac{\theta}{K}$, obtemos, depois de efetuar alguns cálculos

$$E[T_q | X(0) = x] = \frac{2}{\sigma^2} \int_{\ln \frac{q}{K}}^{\ln \frac{x}{K}} \exp \left(\frac{r}{\sigma^2} \ln \left(\frac{K}{E} \right) u^2 + \frac{2r}{3\sigma^2} u^3 \right) \int_u^{+\infty} \exp \left(-\frac{r}{\sigma^2} \ln \left(\frac{K}{E} \right) y^2 - \frac{2r}{3\sigma^2} y^3 \right) dy du.$$

Para reduzir o número de parâmetros e trabalhar com grandezas adimensionais, escrevemos

$R = \frac{r}{\sigma^2}$, $d = \frac{q}{K}$, $z = \frac{x}{q}$ e $\gamma = \frac{E}{K}$. Deste modo,

$$rE[T_q|X(0) = x] = 2R \int_{\ln d}^{\ln(dz)} \exp\left(\frac{2}{3}Ru^3 - R \ln(\gamma)u^2\right) \int_u^{+\infty} \exp\left(R \ln(\gamma)y^2 - \frac{2}{3}Ry^3\right) dy du.$$

Para a variância do tempo de extinção, usamos a expressão (4.2.6) e fazemos o mesmo exercício que fizemos para o tempo médio de extinção, obtendo a seguinte expressão

$$\begin{aligned} Var(T_q|X(0) = x) &= \frac{8}{\sigma^4} \int_{\ln \frac{q}{K}}^{\ln \frac{x}{K}} \exp\left(\frac{r}{\sigma^2} \ln\left(\frac{K}{E}\right)u^2 + \frac{2r}{3\sigma^2}u^3\right) \int_u^{+\infty} \exp\left(\frac{r}{\sigma^2} \ln\left(\frac{K}{E}\right)v^2 + \frac{2r}{3\sigma^2}v^3\right) \\ &\quad \left(\int_v^{+\infty} \exp\left(-\frac{r}{\sigma^2} \ln\left(\frac{K}{E}\right)y^2 - \frac{2r}{3\sigma^2}y^3\right) dy\right)^2 dv du. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} r^2 Var(T_q|X(0) = x) &= 8R^2 \int_{\ln d}^{\ln(dz)} \exp\left(\frac{2}{3}Ru^3 - R \ln(\gamma)u^2\right) \int_u^{+\infty} \exp\left(\frac{2}{3}Rv^3 - R \ln(\gamma)v^2\right) \\ &\quad \left(\int_v^{+\infty} \exp\left(R \ln(\gamma)y^2 - \frac{2}{3}Ry^3\right) dy\right)^2 dv du. \end{aligned}$$

Nas figuras 7.6 e 7.7 apresentamos o comportamento do tempo médio de extinção para o modelo de Gompertz com efeitos de Allee. Nestes gráficos não temos o tempo médio de extinção $E[T_q|X(0) = x]$ mas a grandeza adimensional $rE[T_q|X(0) = x]$, que depende apenas das grandezas dimensionais R , d , z e γ . Esta técnica usual em estudo de sistemas dinâmicos permite-nos simplificar o estudo, além de reduzir o número de gráficos necessários para ilustrar o fenómeno.

Como seria de esperar, para o mesmo limiar de extinção q , quanto maior for a população no instante inicial (quanto maior for x , isto é, quanto maior for z) maior será o tempo médio de extinção, como facilmente se reconhece na expressão do tempo médio de extinção, em que o limite superior de integração aumenta. À medida que d aumenta, o que significa que a capacidade de sustento do meio K está mais próxima do limiar de extinção q , o tempo médio de extinção diminui. Para r fixo, à medida que a intensidade do ruído diminui (R aumenta) mais demorado se torna em média a extinção da população. Em relação a γ , quando $\gamma = 0.5d$ significa que o limiar de Allee E está antes do limiar de extinção q , se $\gamma = d$ o limiar de Allee coincide com o limiar de extinção e para $\gamma = 5d$ o limiar de Allee E está depois do limiar de extinção q . À medida que γ aumenta, o tempo médio de extinção diminui.

As figuras 7.8 e 7.9 representam o comportamento do desvio padrão do tempo de extinção para o modelo de Gompertz com efeitos de Allee. Também aqui a ordenada não representa o desvio padrão $DP[T_q|X(0) = x]$ mas sim a grandeza adimensional $rDP[T_q|X(0) = x]$ e esta só depende das grandezas dimensionais, R , d , z e γ . Nos exemplos aqui apresentados

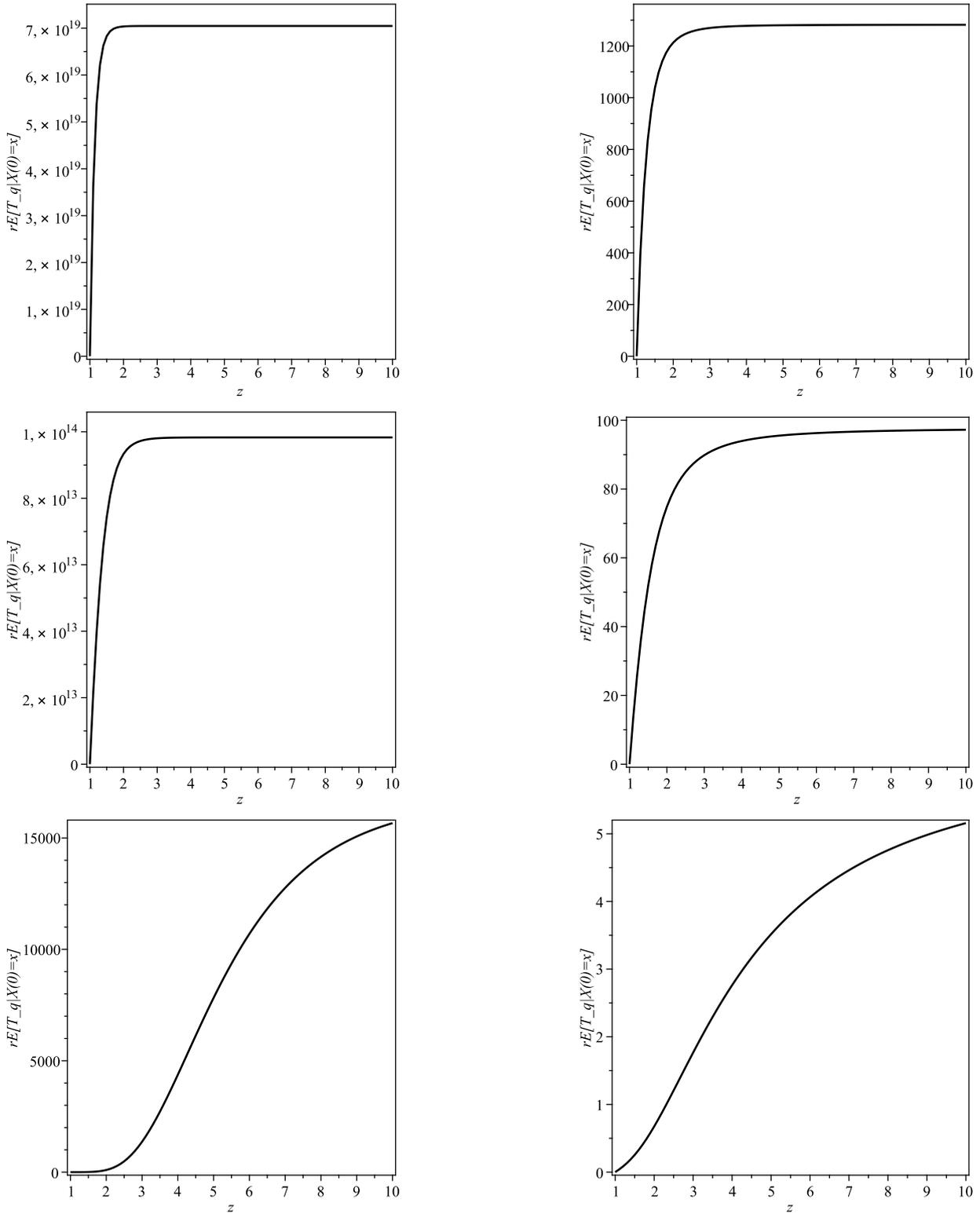


Figura 7.6: Comportamento do tempo médio de extinção da população, para o modelo de Gompertz com efeitos de Allee, em função de $z := \frac{x}{q}$. A ordenada representa $rE[T_q | X(0) = x]$. Consideramos $R := \frac{r}{\sigma^2} = 1$, $d := \frac{q}{K} = 0.01$ (gráficos da esquerda) e $d := \frac{q}{K} = 0.1$ (gráficos da direita), $\gamma := \frac{E}{K} = 0.5d$ (em cima), $\gamma := \frac{E}{K} = d$ (no centro) e $\gamma := \frac{E}{K} = 5d$ (em baixo).

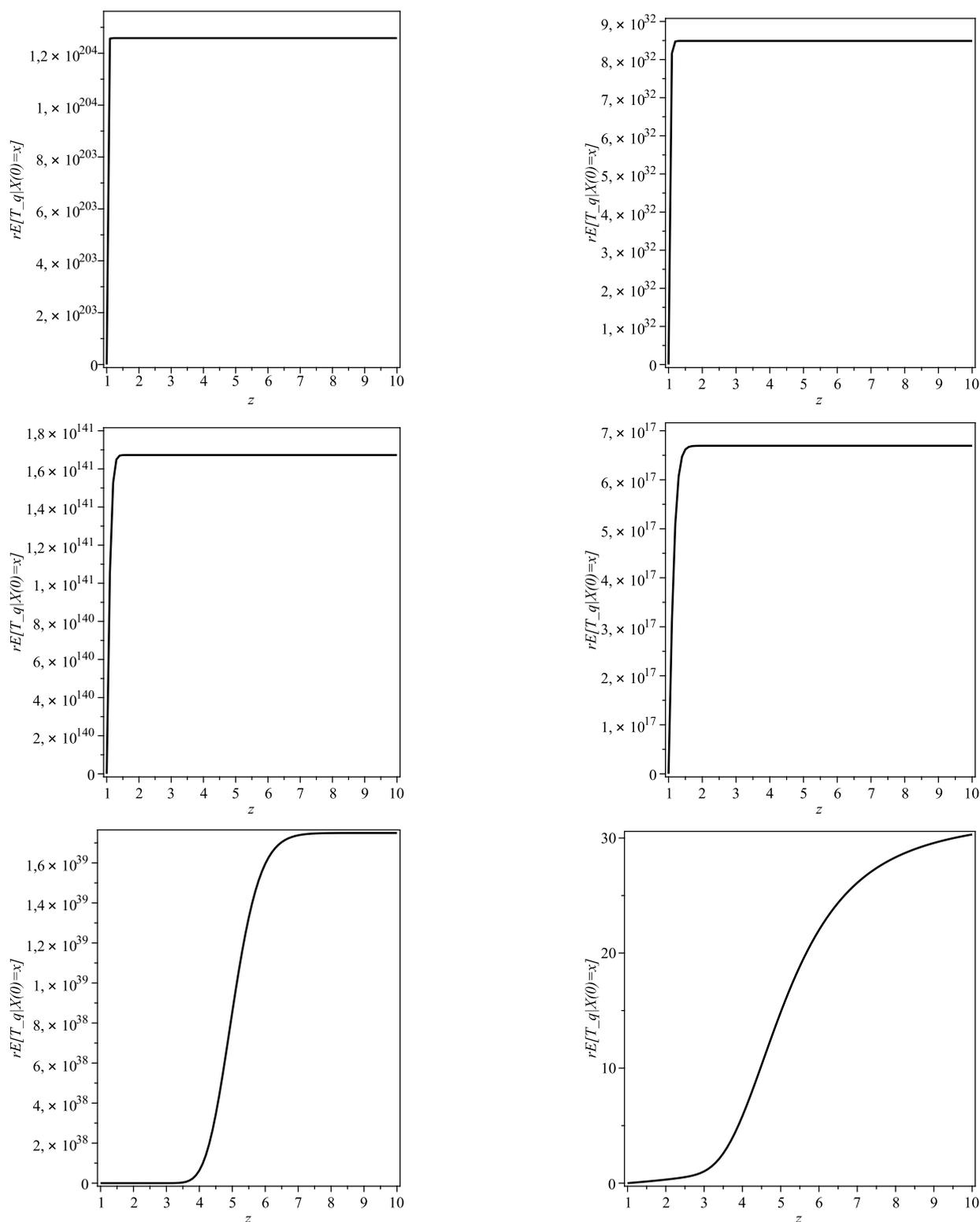


Figura 7.7: Comportamento do tempo médio de extinção da população, para o modelo de Gompertz com efeitos de Allee, em função de $z := \frac{x}{q}$. A ordenada representa $rE[T_q | X(0) = x]$. Consideramos $R := \frac{r}{\sigma^2} = 10$, $d := \frac{q}{K} = 0.01$ (gráficos da esquerda) e $d := \frac{q}{K} = 0.1$ (gráficos da direita), $\gamma := \frac{E}{K} = 0.5d$ (em cima), $\gamma := \frac{E}{K} = d$ (no centro) e $\gamma := \frac{E}{K} = 5d$ (em baixo).

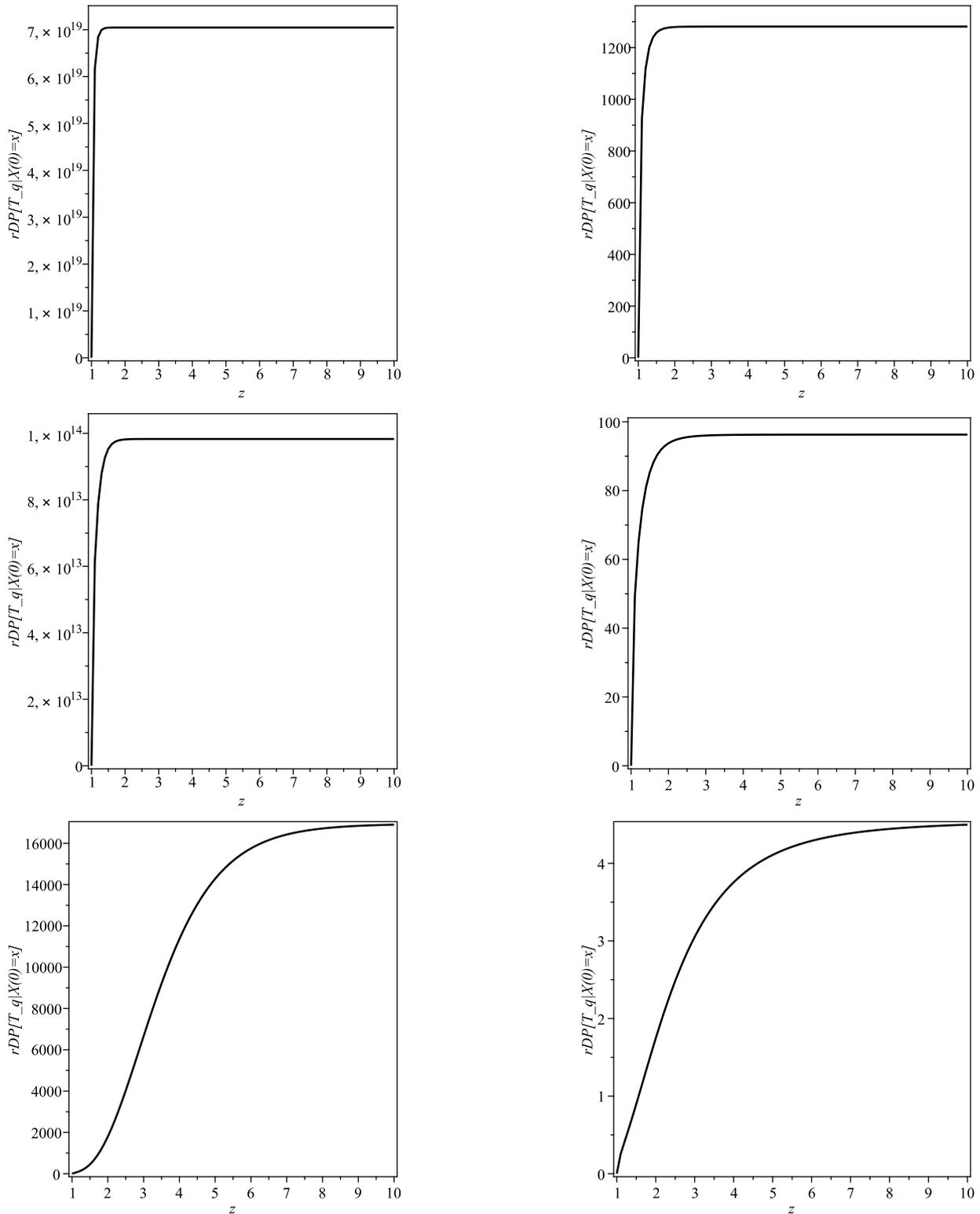


Figura 7.8: Comportamento do desvio padrão do tempo de extinção da população, para o modelo de Gompertz com efeitos de Allee, em função de $z := \frac{x}{q}$. A ordenada representa $rDP[T_q|X(0) = x]$. Consideramos $R := \frac{r}{\sigma^2} = 1$, $d := \frac{q}{K} = 0.01$ (gráficos da esquerda) e $d := \frac{q}{K} = 0.1$ (gráficos da direita), $\gamma := \frac{E}{K} = 0.5d$ (em cima), $\gamma := \frac{E}{K} = d$ (no centro) e $\gamma := \frac{E}{K} = 5d$ (em baixo).

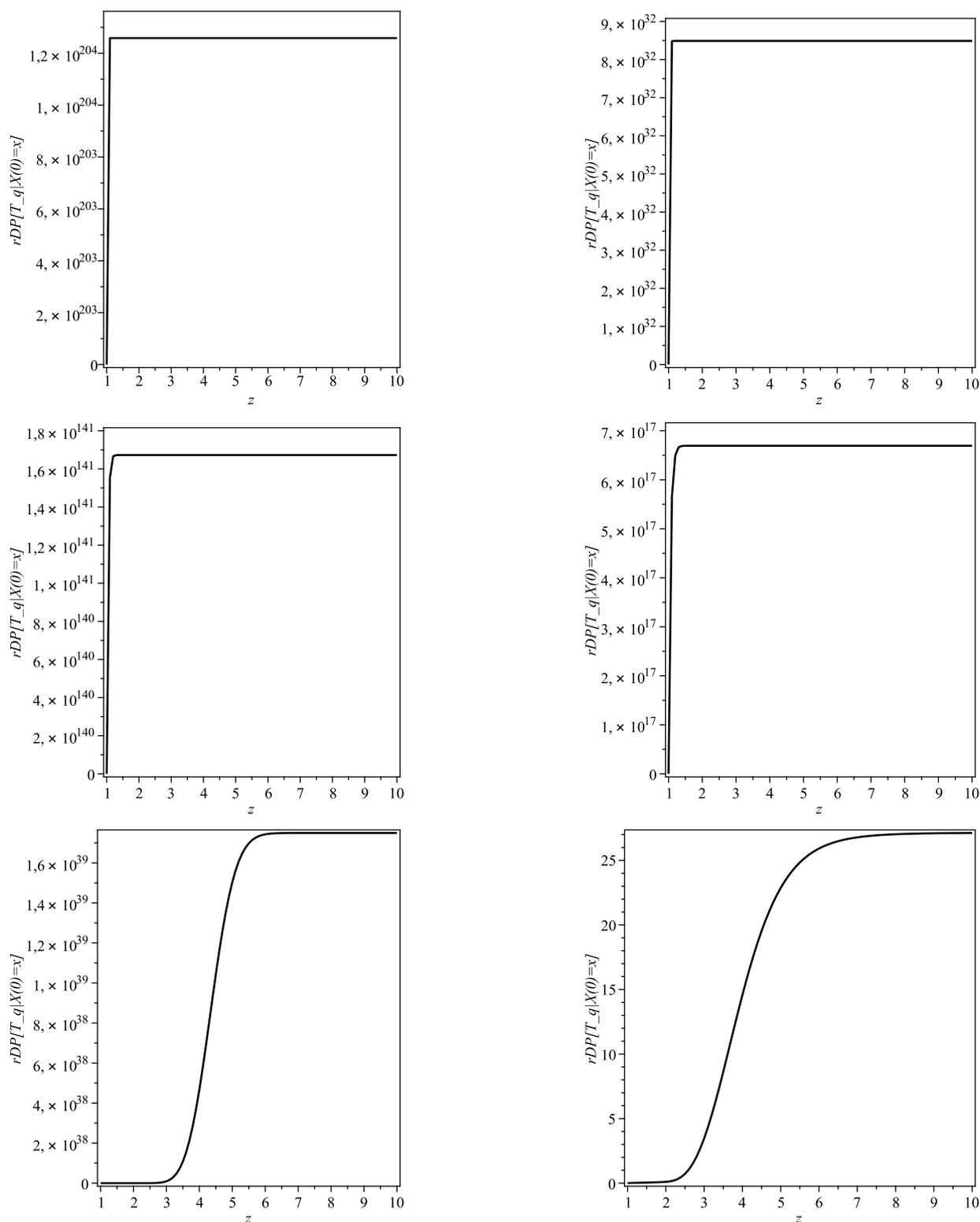


Figura 7.9: Comportamento do desvio padrão do tempo de extinção da população, para o modelo de Gompertz com efeitos de Allee, em função de $z := \frac{x}{q}$. A ordenada representa $rDP[T_q|X(0) = x]$. Consideramos $R := \frac{r}{\sigma^2} = 10$, $d := \frac{q}{K} = 0.01$ (gráficos da esquerda) e $d := \frac{q}{K} = 0.1$ (gráficos da direita), $\gamma := \frac{E}{K} = 0.5d$ (em cima), $\gamma := \frac{E}{K} = d$ (no centro) e $\gamma := \frac{E}{K} = 5d$ (em baixo).

o desvio padrão do tempo de extinção tem a mesma ordem de grandeza da média do tempo de extinção, donde se conclui que existe uma grande variabilidade do tempo de extinção.

Estes gráficos não podem ser comparados com os gráficos obtidos para os modelos de Gompertz e aproximadamente de Gompertz, uma vez que os parâmetros r e K têm significados completamente diferentes. Em particular o parâmetro r é bastante diferente no modelo de Gompertz com efeitos de Allee.

7.2 Modelos estocásticos com efeitos de Allee fracos

Suponhamos agora que a taxa de crescimento *per capita* é da forma

$$\frac{1}{X} \frac{dX}{dt} = f(X) + \sigma \varepsilon(t),$$

onde a taxa média (média geométrica) f é uma função de classe C^1 definida para valores de $X > 0$, tal que $f(0^+) > 0$ e a função f é crescente para valores próximos de zero e a partir de certo tamanho da população L passa a ser decrescente, tornando-se negativa para valores do tamanho da população maiores que K , com $K > L$. Neste caso, dizemos que temos um modelo estocástico com efeitos de Allee fracos.

Vamos mostrar que para este tipo muito geral de modelos a fronteira $X = 0$ é não atrativa. Sejam $0 < x_0 < n$ e $0 < y \leq x_0 < L$. Temos

$$\begin{aligned} S(0, x_0] &= \int_0^{x_0} \frac{n}{y} \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2} \int_n^y \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta\right) dy \\ &= \int_0^{x_0} \frac{n}{y} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int_y^n \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta\right) dy \\ &\geq \int_0^{x_0} \frac{n}{y} dy = +\infty, \end{aligned}$$

o que prova que a fronteira $X = 0$ é não atrativa.

De seguida vamos mostrar que a fronteira $X = +\infty$ é também não atrativa. Seja $K < x_0 \leq y < +\infty$. Temos

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2} \int_n^y \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta\right) &= \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2} \int_n^{x_0} \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta\right) \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2} \int_{x_0}^y \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta\right) \\ &\geq \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2} \int_n^{x_0} \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta\right). \end{aligned}$$

Assim,

$$S[x_0, +\infty) = \int_{x_0}^{+\infty} s(y) dy \geq \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2} \int_n^{x_0} \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta\right) \int_{x_0}^{+\infty} \frac{n}{y} dy = +\infty,$$

ou seja, a fronteira $X = +\infty$ é não atrativa.

O facto de ambas as fronteiras serem não atrativas garante que não existe extinção matemática nem existem explosões, garantido a existência e unicidade de solução da EDE.

Como ambas as fronteiras são não atrativas, a existir densidade estacionária será da forma

$$p(y) = D m(y).$$

Para isso basta que $\int_0^{+\infty} m(y)dy$ seja convergente. Os próximos passos mostram que neste caso existe densidade estacionária. Seja

$$M = \int_0^{+\infty} m(y)dy = M_1 + M_2 + M_3 = \int_0^{y_1} m(y)dy + \int_{y_1}^{y_2} m(y)dy + \int_{y_2}^{+\infty} m(y)dy.$$

Suponhamos que $y_1 < K < y_2$ e $0 < y_1 < n < y_2$. Suponhamos $n < L$. Para $n > L$, a demonstração é análoga. Assim, $0 < y_1 < n < L < K < y_2$.

Começamos por provar que $M_1 = \int_0^{y_1} m(y)dy$ é convergente. Sejam $y \in (0, y_1]$ e $\theta \in [y, n]$. Como $f(0^+) > 0$ e $f(0^+) < +\infty$ (porque f cresce numa vizinhança de zero), vem

$$\begin{aligned} m(y) &= \frac{n}{\sigma^2 y} \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2} \int_y^n \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta\right) \\ &\leq \frac{n}{\sigma^2 y} \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2} \int_y^n \frac{f(0^+)}{\theta} d\theta\right) \\ &= \frac{n}{\sigma^2 y} \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2} f(0^+) \ln \frac{n}{y}\right) \\ &= \frac{n}{\sigma^2} \left(\frac{y}{n}\right)^{\frac{2}{\sigma^2} f(0^+) - 1}, \end{aligned}$$

porque f é crescente neste intervalo. Assim, $M_1 < +\infty$.

Em segundo lugar, vamos provar que M_3 é finito. Sejam $[y_2, +\infty)$ e $\theta \in [n, y]$. Fazemos

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sigma^2} \int_n^y \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta &= \frac{2}{\sigma^2} \int_n^{y_2} \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta + \frac{2}{\sigma^2} \int_{y_2}^y \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta \\ &= A + B(y) \end{aligned}$$

e sabemos que

$$\frac{2}{\sigma^2} \int_{y_2}^y \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta \leq \frac{2}{\sigma^2} f(y_2) \int_{y_2}^y \frac{1}{\theta} d\theta = \frac{2}{\sigma^2} f(y_2) \ln \frac{y}{y_2}.$$

Assim

$$m(y) \leq \frac{n}{\sigma^2 y} \exp(A) \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} f(y_2) \ln \frac{y}{y_2}\right).$$

Como $K < y_2$ e $f(y_2) < 0$, temos

$$M_3 = \int_{y_2}^{+\infty} m(y)dy = c_1 \int_{y_2}^{+\infty} y^{\frac{2}{\sigma^2}f(y_2)-1} dy < +\infty.$$

Finalmente, é fácil ver que M_2 é convergente pois se trata de um integral de uma função contínua num intervalo fechado $[y_1, y_2]$.

Deste modo, garantimos a existência de densidade estacionária para o modelo estocástico com efeitos de Allee fracos, ao contrário do que aconteceu para o modelo com efeitos de Allee fortes. A expressão da densidade estacionária é dada por

$$p(y) = D m(y) = D \frac{1}{\sigma^2 y} \exp \left(\frac{2}{\sigma^2 y} \exp \left(\frac{2}{\sigma^2} \int_n^y \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta \right) \right),$$

com $D = \frac{1}{\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sigma^2 y} \exp \left(\frac{2}{\sigma^2} \exp \left(\frac{2}{\sigma^2} \int_n^y \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta \right) dy \right)}$ constante.

É natural que neste caso exista densidade estacionária como também existe para os modelos que não incluem efeitos de Allee. Se quisermos comparar, e se a função f do modelo com efeitos de Allee fracos e a função f^* de um modelo sem efeitos de Allee são tais que $f \leq f^*$, podemos dizer que a massa de probabilidade está concentrada mais à direita e a probabilidade de extinção é maior no caso de haver efeitos de Allee fracos.

Como exemplo de um modelo que inclui os efeitos de Allee fracos, apresentamos o modelo logístico com efeitos de Allee fracos, com $f(X) = r \left(1 - \frac{X}{K}\right) \left(\frac{X}{E} + 1\right)$, cuja taxa de crescimento *per capita* é dada por

$$\frac{1}{X} \frac{dX}{dt} = r \left(1 - \frac{X}{K}\right) \left(\frac{X}{E} + 1\right),$$

com $r > 0$. Neste caso a taxa de crescimento é positiva para valores de $X < K$. Para $X < L = \frac{K-E}{2}$ a taxa de crescimento cresce e para valores de $X > L$ a taxa de crescimento decresce.

Supondo que o ambiente está sujeito a flutuações aleatórias que afetam a taxa de crescimento *per capita*, temos a equação diferencial estocástica de Stratonovich

$$\frac{1}{X} \frac{dX}{dt} = r \left(1 - \frac{X}{K}\right) \left(\frac{X}{E} + 1\right) + \sigma \varepsilon(t),$$

com $X(0) = x$ conhecido.

A equação diferencial estocástica é autónoma e os coeficientes de tendência e de difusão são de classe C^1 , garantindo a existência e unicidade de solução até um instante de explosão

e a solução é um processo e difusão com coeficiente de tendência

$$a(x) = \left(r \left(1 - \frac{x}{K} \right) \left(\frac{x}{E} + 1 \right) + \frac{\sigma^2}{2} \right) x,$$

e coeficiente de difusão

$$b(x) = \sigma^2 x^2.$$

As densidades de escala e de velocidade são

$$s(y) = C y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} \exp \left(\frac{r}{\sigma^2 K E} (y^2 - 2y(K - E)) \right)$$

e

$$m(y) = \frac{1}{C \sigma^2} y^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} \exp \left(-\frac{r}{\sigma^2 K E} (y^2 - 2y(K - E)) \right),$$

respetivamente, com $C > 0$ constante.

O espaço de estados tem fronteiras $X = 0$ e $X = +\infty$. Este modelo é um caso particular do modelo mais geral, por isso, podemos afirmar que as fronteiras $X = 0$ e $X = +\infty$ são não atrativas, ou seja, não ocorre "extinção matemática" e não existem explosões, garantindo a existência e unicidade de solução para todo o $t \geq 0$.

De modo análogo ao modelo logístico com efeitos de Allee fortes, usando as grandezas adimensionais $R = \frac{r}{\sigma^2}$, $d = \frac{q}{K}$, $z = \frac{q}{K}$ e $\gamma = \frac{E}{K}$, obtém-se a média e a variância do tempo de primeira passagem pelo limiar inferior q

$$\begin{aligned} rE[T_q|X(0) = x] &= 2R \int_{\sqrt{\frac{R}{\gamma}d}}^{\sqrt{\frac{R}{\gamma}dz}} u^{-2R-1} \exp \left(\left(u - \sqrt{\frac{R}{\gamma}(1-\gamma)} \right)^2 \right) \\ &\quad \int_u^{+\infty} y^{2R-1} \exp \left(- \left(y - \sqrt{\frac{R}{\gamma}(1-\gamma)} \right)^2 \right) dy du \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} r^2 Var[T_q|X(0) = x] &= 8R^2 \int_{\sqrt{\frac{R}{\gamma}d}}^{\sqrt{\frac{R}{\gamma}dz}} u^{-2R-1} \exp \left(\left(u - \sqrt{\frac{R}{\gamma}(1-\gamma)} \right)^2 \right) \\ &\quad \int_u^{+\infty} v^{-2R-1} \exp \left(\left(v - \sqrt{\frac{R}{\gamma}(1-\gamma)} \right)^2 \right) \\ &\quad \left(\int_v^{+\infty} y^{2R-1} \exp \left(- \left(y - \sqrt{\frac{R}{\gamma}(1-\gamma)} \right)^2 \right) dy \right)^2 dv du, \end{aligned}$$

respetivamente.

O crescimento populacional deve ter em conta o efeito das flutuações aleatórias do ambiente que afetam a taxa de crescimento e é usualmente modelado por equações diferenciais estocásticas. Apresentámos modelos estocásticos de crescimento populacional que são baseados em modelos determinísticos, possuindo um termo adicional que incorpora o efeito das flutuações aleatórias do ambiente no crescimento populacional.

Procurámos sempre trabalhar com modelos gerais no estudo das propriedades de forma a que estas reflitam mais as propriedades das populações do que do modelo específico usado para as modelar. Contudo, apresentámos os modelos clássicos, logístico e de Gompertz, para ilustração e determinação de expressões explícitas para os momentos dos tempos de extinção.

Em ambiente aleatório supusemos que a taxa de crescimento *per capita* pode ser descrita pela seguinte equação diferencial estocástica autónoma

$$\frac{1}{X} \frac{dX}{dt} = f(X) + \sigma \varepsilon(t), \quad X(0) = x,$$

onde $X = X(t)$ representa o tamanho da população no instante $t \geq 0$ e f é uma função real definida para $X > 0$. O efeito das flutuações ambientais é um ruído que pode ser aproximado por $\sigma \varepsilon(t)$, onde $\sigma > 0$ é a intensidade do ruído e $\varepsilon(t)$ é um ruído branco padrão. Usámos o cálculo de Stratonovich, pelo que f representa a taxa média geométrica de crescimento *per capita*. Quando $f(X) = r \left(1 - \frac{X}{K}\right)$ temos o modelo logístico estocástico e com $f(X) = r \ln \frac{K}{X}$ o modelo de Gompertz estocástico, onde r representa a taxa de crescimento intrínseca e K a capacidade de sustento do meio. Fazendo $\sigma = 0$ temos os conhecidos modelos logístico e

de Gompertz determinísticos.

Na maior parte dos casos pouco se conhece sobre a verdadeira taxa de crescimento *per capita* e, em particular, sobre a função f , que incorpora os efeitos dessas limitações, alimentares, territoriais, entre outras... Se f é uma função estritamente decrescente para $X > 0$, positiva para valores de $X < K$ (onde K é a capacidade de sustento do meio) e negativa para valores $X > K$, temos um modelo estocástico que não inclui os efeitos de Allee. Os modelos logístico e de Gompertz clássicos são dois casos particulares deste. Se a função f é crescente e negativa para $0 < X < E$, onde E é o limiar de Allee, positiva para valores $E < X < K$ e decrescente e negativa para valores de $X > K$ temos um modelo que inclui os efeitos de Allee fortes. Exemplificámos com dois modelos particulares deste, o modelo logístico com efeitos de Allee e o modelo de Gompertz com efeitos de Allee. Se a função f é crescente e positiva para $X < L$ e decrescente para $X > L$, com valores negativos para $X > K > L$, temos um modelo que inclui os efeitos de Allee fracos.

Começámos por fazer um estudo prévio dos modelos estocásticos com ruído branco aditivo, o modelo logístico e o modelo de Gompertz. Recapitulámos o estudo do comportamento das fronteiras do espaço de estados, as fronteiras $X = 0$ e $X = +\infty$, e provámos que ambas são não atrativas. O que significa que não existe extinção matemática, ou seja, não existe nenhum t tal que $X(t) = 0$ nem pode acontecer que $X(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$. Também não existem explosões, garantindo a existência e unicidade de solução das equações diferenciais estocásticas para todo o $t \geq 0$. Para estes modelos garantimos ainda a existência de densidade estacionária e apresentámos a sua expressão.

Estudámos em seguida os tempos de primeira passagem e em particular os tempos de extinção. Não existindo extinção matemática para estes modelos, pode existir extinção realista, ou seja, a população pode extinguir-se no sentido biológico. Tomámos assim como extinção a população atingir pela primeira vez um limiar $q > 0$, a que chamámos limiar de extinção. Importa por isso estudar os tempos de extinção (tempos de primeira passagem pelo limiar de extinção) para este tipo de modelos de crescimento populacional. A probabilidade de extinção realista para os modelos em estudo é igual a um, dado que a ergodicidade implica que todos os estados comunicam entre si, o que significa que a extinção ocorre mais cedo ou mais tarde, resta saber quando. Para que a população não estivesse extinta à partida, supusemos que $q < X(0) = x$ e considerámos ainda um limiar superior $Q > X(0) = x$. Começámos por determinar os tempos de primeira passagem por um dos limiares inferior (q) ou superior (Q) em função do tamanho x da população no instante inicial. Obtivemos a expressão do momento de ordem n do tempo de primeira passagem de $X(t)$ por q ou por Q . Fizemos $Q \rightarrow +\infty$, e uma vez que a fronteira $X = +\infty$ é inatingível obtivemos o momento de ordem n do tempo de primeira passagem de $X(t)$ por q (tempo de extinção). Com os momentos de primeira e segunda ordem escrevemos a expressão geral do tempo médio de

extinção e a respetiva variância. Estas expressões foram utilizadas para escrever a expressão do comportamento da média e do desvio padrão dos tempos de extinção para os modelos clássicos, modelo logístico estocástico e modelo de Gompertz estocástico, sendo a expressão da variância mais simples do que a anteriormente apresentada por Thomas (1975) para um modelo semelhante ao de Gompertz.

No entanto, a verdadeira taxa de crescimento *per capita* pode afastar-se ligeiramente do modelo estocástico, em particular pode haver um pequeno desvio no termo determinístico, onde o modelo logístico e o modelo de Gompertz são apenas aproximações ao modelo real que se desconhece. Por outro lado, a verdadeira taxa de crescimento *per capita* pode afastar-se ligeiramente do modelo estocástico no termo estocástico, onde a intensidade do efeito das flutuações aleatórias na taxa de crescimento *per capita* pode não ser uma constante σ , como se supôs, mas apenas aproximadamente constante. Estudámos o efeito de cada uma destas alterações, no comportamento das fronteiras, na existência de densidade estacionária e no comportamento dos tempos de extinção. O comportamento dos "verdadeiros modelos" coincide com o comportamento dos modelos clássicos aproximados, os modelos logístico e de Gompertz. A "extinção matemática" ocorre com probabilidade zero e garantimos a existência de densidade estacionária. A "extinção realista" ocorre com probabilidade um.

Para estes modelos fizemos o estudo dos tempos de extinção, em particular, escrevemos as expressões da média e da variância dos tempos de primeira passagem pelo limiar inferior. Apresentámos alguns exemplos numéricos do comportamento da média e do desvio padrão dos tempos de extinção. Obtivemos minorantes e majorantes para a média e para o desvio padrão dos tempos de extinção, o que nos permite estudar o erro cometido no cálculo dos tempos de extinção quando o modelo real não é exatamente o tradicionalmente usado na literatura. Estes limites podem ser escritos em função das expressões do comportamento da média e do desvio padrão dos modelos clássicos com outros parâmetros. Assim, poderemos obter os modelos clássicos como aproximação e estimar o erro cometido quando o fazemos.

Por último apresentámos modelos gerais que incluem os efeitos de Allee fortes e os efeitos de Allee fracos. Começámos por mostrar que, para os modelos com efeitos de Allee fortes, a fronteira $X = 0$ é atrativa com "extinção matemática" ($X(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$), a qual, porém, no caso de $f(0^+)$ ser finito, não pode ocorrer em tempo finito (isto é, não pode suceder que $X(t) = 0$ para t finito). A fronteira $X = +\infty$ é não atrativa, o que significa que não existem explosões, garantindo a existência e unicidade de solução da equação diferencial estocástica para estes modelos estocásticos com efeitos de Allee. Depois mostrámos que não existe densidade estacionária, ao contrário dos modelos anteriormente estudados. Fizemos o estudo dos modelos logístico e de Gompertz com efeitos de Allee fortes. Apresentámos, para estes dois modelos, as expressões dos tempos de primeira passagem pelo limiar inferior. Ilustrámos com alguns exemplos numéricos o comportamento da média e do desvio padrão

dos tempos de extinção.

Finalmente estudámos o modelo geral que inclui os efeitos de Allee fracos. Mostrámos que ambas as fronteiras são não atrativas e garantimos a existência de densidade estacionária. Tal como era esperado, o comportamento deste tipo de modelos é muito semelhante ao comportamento dos modelos sem efeitos de Allee. Como exemplo, apresentámos o modelo logístico com efeitos de Allee fracos.

Muitos outros aspetos ficaram por abordar e que pretendemos desenvolver em trabalhos futuros. O estudo dos tempos de extinção ficaria mais completo com a determinação da função densidade de probabilidade dos tempos de extinção mas essa determinação esbarra com as dificuldades de solução da equação diferencial que permite a determinação da transformada de Laplace e com a inversão desta, sendo os algoritmos numéricos praticáveis respetivos muito instáveis, requerendo-se um estudo dos mesmos. A aplicação destes modelos a populações reais, particularmente no que concerne aos tempos de extinção é um projeto futuro que exige registos temporais relativamente extensos difíceis de encontrar. Outra área de interesse é o da incorreta especificação do modelo ocorrer simultaneamente no coeficiente de tendência e no coeficiente de difusão. Também o efeito do erro na determinação dos parâmetros é relevante. Pretendemos também alargar o nosso estudo a modelos de crescimento individual e estudar o efeito da incorreta especificação dos mesmos, em particular estudar os tempos de primeira passagem do processo pelo limiar superior e as eventuais alterações pela incorreta especificação do modelo.

Referências Bibliográficas

- L. Alili, P. Patie, e J.L. Pedersen. Representations of the first hitting time density of an Ornstein-Uhlenbeck process. *Stochastic Models*, 21(4):967–980, 2005. Citado na pág. 44
- W.C. Allee, A.E. Emerson, O. Park, T. Park, e K.P. Schmidt. *Principles of Animal Ecology*. Saunders, Philadelphia, 1949. Citado na pág. 97
- P. Amarasekare. Allee effects in metapopulation dynamics. *The American Naturalist*, 152(2):298–302, 1998. Citado na pág. 98
- L. Arnold. *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*. John Wiley & Sons, New York, 1974. Citado na pág. 7, 12, 14, 17, 19, 20, 104
- L. Bachelier. Théorie de la speculation. *Annales Scientifiques de l'École Normal Supérieure, 3ème Série*, 17:21–88, 1900. Citado na pág. 11
- C.A. Braumann. Population extinction probabilities and methods of estimation for population stochastic differential equation models. Em R.S. Bucy e J.M.F. Moura, editores, *Nonlinear Stochastic Problems*, páginas 553–559. D. Reidel, Dordrecht, 1983. Citado na pág. 25
- C.A. Braumann. Population growth in random environments. *Bulletin Mathematical Biology*, 45:635–641, 1993. Citado na pág. 29
- C.A. Braumann. Threshold crossing probabilities for population growth models in random environments. *Journal of Biological Systems*, 3(2):505–517, 1995. Citado na pág. 2, 29, 35
- C.A. Braumann. Applications of stochastic differential equations to population growth. Em D. Bainov, editor, *Proceedings of the Ninth International Colloquium on Differential Equations*, páginas 47–52. VSP, Utrecht, 1999. Citado na pág. 25
- C.A. Braumann. *Introdução às Equações Diferenciais Estocásticas*. Edições SPE, Lisboa, 2005. Citado na pág. 29, 37
- C.A. Braumann. Harvesting in a random environmental: Itô or Stratonovich calculus. *Journal Theoretical Biology*, 244:424–432, 2007a. Citado na pág. 2, 18, 28

- C.A. Braumann. Itô versus Stratonovich calculus in random population growth. *Mathematical Biosciences*, 206:81–107, 2007b. Citado na pág. 2, 18, 28
- C.A. Braumann. Population growth in a random environment: which stochastic calculus? *Bulletin of the International Statistical Institute*, LXII:5802–5805, 2007c. Citado na pág. 2, 18, 28
- C.A. Braumann. Growth and extinction of populations in randomly varying environments. *Computers and Mathematics with Applications*, 56:631–644, 2008. Citado na pág. 25, 36
- C.A. Braumann, P.A. Filipe, C. Carlos, e C.J. Roquete. Growth of individuals in randomly fluctuating environments. Em J. Vigo-Aguiar, P. Alonso, S. Oharu, E. Venturino, e B. Wade, editores, *Proceedings of the International Conference in Computational and Mathematical Methods in Science e Engineering*, páginas 201–212. Gijón, 2009. Citado na pág. 36, 49, 50
- C.A. Braumann, P.A. Filipe, C. Carlos, e C.J. Roquete. Stochastic differential equation general models of individual growth in uncertain environments and application to profit optimization in livestock production. Em *Proceedings of 58th World Statistics Congress of the International Statistics Institute*, páginas 4450–4455, 2011. Citado na pág. 36, 49
- R. Brown. A brief account of microscopical observations made in the months of June, July, and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; e on the general existence of active molecules in organic e inorganic bodies. *Edinburg New Philosophical Journal*, 5:358–371, 1828. Citado na pág. 8
- R.M. Capocelli e L.M. Ricciardi. A diffusion model for population growth in random environment. *Theoretical Population Biology*, 5:28–41, 1974. Citado na pág. 25, 29
- C. Carlos. *Tempos de extinção para populações em ambiente aleatório*. Master Thesis, Universidade de Évora, Évora, 2004. Citado na pág. 2
- C. Carlos e C.A. Braumann. Tempos de extinção para populações em ambiente aleatório. Em C.A. Braumann, P. Infante, M.M. Oliveira, R. Alpizar-Jara, e F. Rosado, editores, *Estatística Jubilar, Actas do XII Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística*, páginas 133–142. Edições SPE, 2005. Citado na pág. 2, 3, 36, 47, 49
- C. Carlos e C.A. Braumann. Tempos de extinção para populações em ambiente aleatório e cálculos de Itô e Stratonovich. Em L. Canto, Castro, E.G. Martins, C. Rocha, M.F. Oliveira, M. M. Leal, e F. Rosado, editores, *Ciência Estatística, Actas do XIII Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística*, páginas 229–238. Edições SPE, 2006. Citado na pág. 2, 3, 36, 47, 49
- C. Carlos, C.A. Braumann, e P.A. Filipe. Models of individual growth in a random environment: study and application of first passage times. Em J. Lita da Silva, F. Caeiro, I. Natário, C.A. Braumann, M.L. Esquível, e J.T. Mexia, editores, *Advances in Regression, Survival Analysis, Extreme Values, Markov Processes and Other Statistical Applications*, páginas 91–98. Physica-Verlag, Springer, 2013. Citado na pág. 36, 50
- F. Courchamp, L. Berec, e J. Gascoigne. *Allee Effects in Ecology and Conservation*. Oxford University Press, New York, 2008. Citado na pág. 97

- F. Courchamp, T.H. Clutton-Brock, e B. Grenfell. Inverse density dependence and the Allee effect. *Trends in Ecology & Evolution*, 14:405–410, 1999. Citado na pág. 97, 98, 103
- D.R. Cox e H.D. Miller. *The Theory of Stochastic Processes*. Chapman and Hall, London, 1965. Citado na pág. 7
- B. Dennis. Allee effects: Population growth, critical density and the change of extinction. *Natural Resource Modelling*, 3:481–539, 1989. Citado na pág. 98
- B. Dennis. Allee effects in stochastic populations. *Oikos*, 96:389–401, 2002. Citado na pág. 98
- B. Dennis e G.P. Patil. The gamma distribution and weighted multimodal gamma distributions as models of population abundance. *Mathematical Biosciences*, 68:187–212, 1984. Citado na pág. 25
- S. Ditlevsen. A result on the first-passage time of an Ornstein-Uhlenbeck process. *Statistics & Probability Letters*, 77(18):1744 – 1749, 2007. Citado na pág. 44
- A. Einstein. Über die von der molekularkinetischen theorie der wärme geforderte bewegung von in ruhenden flüssigkeiten suspendierten teilchen. *Annals of Physics*, 17:549–560, 1905. Citado na pág. 8, 11
- S. Engen, R. Lande, e B.-E. Sæther. Demographic stochasticity and Allee effects in populations with two sexes. *Ecology*, 84(9):2378–2386, 2003. Citado na pág. 98
- M.W. Feldman e J. Roughgarden. A population's stationary distribution and change of extinction in a stochastic environmental with remarks on the theory of species packing. *Theoretical Population Biol.*, 7:197–207, 1975. Citado na pág. 25
- P.A. Filipe. *Equações Diferenciais Estocásticas na Modelação do Crescimento Individual em Ambiente Aleatório*. Ph. D. Thesis, UE, Évora, 2011. Citado na pág. 50
- P.A. Filipe e C.A. Braumann. Animal growth in random environments: estimation with several paths. *Bulletin of the International Statistical Institute*, Vol. LXII:5806–5809, 2007. Citado na pág. 36
- P.A. Filipe e C.A. Braumann. Modelling individual animal growth in random environments. Em P.H.C. Eilers, editor, *Proceedings of the 23rd International Workshop on Statistical Modelling*, páginas 232–237, Utrecht, 2008. Citado na pág. 36
- P.A. Filipe, C.A. Braumann, e C.J. Roquete. Modelos de crescimento de animais em ambiente aleatório. Em M.E. Ferro, C. Nunes, e C.A. Braumann, editores, *Estatística Ciência Interdisciplinar, Actas do XIV Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística*, páginas 401–410. Edições SPE, 2007. Citado na pág. 36
- P.A. Filipe, C.A. Braumann, e C.J. Roquete. Crescimento individual em ambiente aleatório: várias trajetórias. Em M.M. Hill, M.A. Ferreira, J.G. Dias, M.F. Salgueiro, H. Carvalho, P. Vicente, e C.A. Braumann, editores, *Estatística da Teoria à Prática, Actas do XV Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística*, páginas 259–268. Edições SPE, 2008. Citado na pág. 36
- O. Garcia. A stochastic differential equation model for the height of forest stands. *Biometrics*, 39:1059–1072, 1983. Citado na pág. 36

- I.I. Ghikman e A.V. Skorohod. *Introduction to the Theory of Random Processes*. W.B. Saunders, Philadelphia, 1969. Citado na pág. 7, 10, 11
- I.I. Ghikman e A.V. Skorohod. *Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin, 1972. Citado na pág. 7, 19, 20, 24, 37
- B. Gompertz. On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies. *Philosophical Transaction of the Royal Society of London*, 115:513–585, 1825. Citado na pág. 27
- P. Hängi e F. Marchesoni. Introduction: 100 years of brownian motion. *Chaos*, 15(2): 026101–1–5, 2005. Citado na pág. 8
- S. Karlin e H.M. Taylor. *A Second Course in Stochastic Processes*. Academic Press, New York, 1981. Citado na pág. 7, 21, 22, 37, 100
- Y.A. Kutoyants. *Statistical inference for ergodic diffusion processes*. Springer, 2004. Citado na pág. 24
- R. Lande, S. Engen, e B.-E. Sæther. *Stochastic Population Dynamics in Ecology and Conservation*. Oxford University Press, New York, 2003. Citado na pág. 2, 35
- R. Levins. The effect of random variations of different types on population growth. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, 62:1061–1065, 1969. Citado na pág. 25, 29
- M.A. Lewis e P. Kareiva. Allee dynamics and the spread of invading organisms. *Theoretical Population Biology*, 43:141–158, 1993. Citado na pág. 98
- V. Linetsky. Computing hitting time densities for OU and CIR processes: Applications to mean-reverting models. *Journal of Computational Finance*, 7:1–22, 2004. Citado na pág. 50
- T.K. Malthus. *An Essay on the Principle of Population*. London, 1798. Citado na pág. 26
- R.M. May. Stability in randomly fluctuating versus deterministic environments. *American Naturalist*, 107:621–650, 1973. Citado na pág. 25
- B. Øksendal. *Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications*. Springer-Verlag, Berlin, 6ª edição, 2003. Citado na pág. 7, 17, 19, 34, 37
- P. Patie. *On Some First Passage Time Problems Motived by Financial Applications*. Ph. D. Thesis, Swiss Federal Institute of Tecnology Zurich, Zurich, 2004. Citado na pág. 35
- Lv. Qiming e J. Pitchford. Stochastic von bertalanffy models, with applications to fish recruitment. *Journal of Theoretical Biology*, 244:640–655, 2007. Citado na pág. 37
- L.M. Ricciardi e S. Sato. First-passage-time density and moments of the Ornstein-Uhlenbeck process. *Journal of Applied Probability*, 25(1):43–57, 1988. Citado na pág. 44, 50
- A.J.F. Siegert. On the first passage time probability problem. *Physical Review*, 81(4): 617–623, 1951. Citado na pág. 44
- M.U. Thomas. Some mean first-passage time approximations for the Ornstein-Uhlenbeck process. *J. Applied Probability*, 12:600–604, 1975. Citado na pág. 4, 49, 125

- H.C. Tuckwell. A study of some diffusion models of population growth. *Theoretical Population Biology*, 3:345–357, 1974. Citado na pág. 25, 29
- G.E. Uhlenbeck e L.S. Ornstein. On the theory of the brownian motion. *Physical Review*, 36(5):823–841, 1930. Citado na pág. 50
- P.F. Verhulst. Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement. *Correspondance Mathématique et Physique*, 10:113–121, 1838. Citado na pág. 26
- N. Wiener. The mean of a functional of arbitrary elements. *Annals of Mathematics*, 22:66–72, 1920. Citado na pág. 11
- E. Wong e M. Zakai. Riemann-Stieltjes approximation of stochastic integrals. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, 12:87–97, 1969. Citado na pág. 18
- C. Yi. On the first passage time distribution of an Ornstein-Uhlenbeck process. *Journal of Quantitative Finance*, 10(9):957–960, 2010. Citado na pág. 50

- cálculo
 - de Itô, 15, 18, 19
 - de Stratonovich, 15, 18
- capacidade de sustento do meio, 27, 29
- coeficiente
 - de difusão, 9, 20
 - de tendência, 9, 19, 20
- crescimento populacional, 26, 28
- densidade
 - de escala, 21
 - de transição, 8
 - de velocidade, 21
 - estacionária, 23, 24, 33
 - invariante, 23
- difusão de Itô, 20
- distribuição
 - transiente, 23, 34
- efeitos
 - de Allee, 97
 - de Allee fortes, 97, 98
 - de Allee fracos, 97, 98
- equação
 - de difusão, 10
 - de Folker-Plank, 10
 - de Kolmogorov progressiva, 10, 11
 - de Kolmogorov regressiva, 9, 10
 - diferencial estocástica, 13, 18
 - diferencial estocástica autônoma, 19
 - integral estocástica, 13, 19
- espaço de estados, 20
- existência de densidade estacionária, 32
- existência e unicidade de solução, 20
- extinção
 - matemática, 31, 35
 - realista, 35, 46, 48
- fórmula
 - de Dynkin, 37
 - de Itô, 16
- filtração, 15
 - não-antecipativa, 15
- fronteira, 20
 - atingível, 22
 - não atingível, 22
 - atingível, 22
 - atrativa, 22
 - inatingível, 22
 - não atrativa, 22
- função
 - de escala, 21
 - de velocidade, 21
- grandezas adimensionais, 47
- integral
 - antecipativo, 15
 - de Itô, 15
 - de Riemann-Stieltjes, 14
 - de Stratonovich, 15
 - estocástico, 16
 - não antecipativo, 15
- limiar
 - de Allee, 99
 - de extinção, 46
- média
 - do tempo de extinção, 45

- do tempo de primeira passagem pelo
 - limiar q , 45
 - infinitesimal, 9
- medida
 - de escala, 21
 - de velocidade, 21
- modelo
 - aproximadamente de Gompertz, 64
 - aproximadamente logístico, 52
 - de Gompertz, 27, 29, 33
 - de Gompertz com σ aproximado, 76
 - de Gompertz com efeitos de Allee, 111
 - de Pearl-Verhulst, 26
 - determinístico, 26
 - estocástico, 28
 - exponencial, 26
 - logístico, 26, 29, 32
 - logístico com σ aproximado, 76
 - logístico com efeitos de Allee, 103
 - logístico com efeitos de Allee fracos, 120
 - malthusiano, 26
- momento
 - de ordem n do tempo de primeira
 - passagem do processo $X(t)$ por q ou Q , 43
- movimento browniano, 8, 11
- operador de difusão, 9
- pontos de equilíbrio, 27
- probabilidade
 - de transição, 8
- probabilidade de o processo atingir q antes de
 - atingir Q , 39
- problema de Cauchy, 13
- processo
 - de difusão, 8, 19, 20
 - de difusão homogéneo, 9, 20
 - de Itô, 16
 - de Markov, 19
 - de Markov homogéneo, 19
 - de Wiener, 11
 - de Wiener padrão, 11–13
 - ergódico, 24
 - regular, 37
- regra da cadeia, 16
- ruído branco padrão, 12
- solução da equação diferencial estocástica, 13
- tamanho da população, 20, 26
- taxa
 - de crescimento, 28
 - de crescimento *per capita*, 26–28
 - intrínseca de crescimento, 27, 29
 - média aritmética de crescimento, 29
 - média de crescimento *per capita*, 28
 - média geométrica de crescimento, 29
- tempo
 - de extinção, 45
 - de primeira passagem, 37
 - médio de extinção, 45
 - médio para o processo atingir q ou Q , 41
- teorema da existência e unicidade de solução,
 - 19
- transformada de Laplace da densidade do
 - tempos de primeira passagem, 44
- variância
 - do tempo de extinção, 46
 - infinitesimal, 9