



# DINÂMICA SIMBÓLICA DE APLICAÇÕES MULTIMODAIS RENORMALIZÁVEIS, RENORMALIZAÇÃO EM TEMPLATES

*Pedro Miguel Lola Simões*

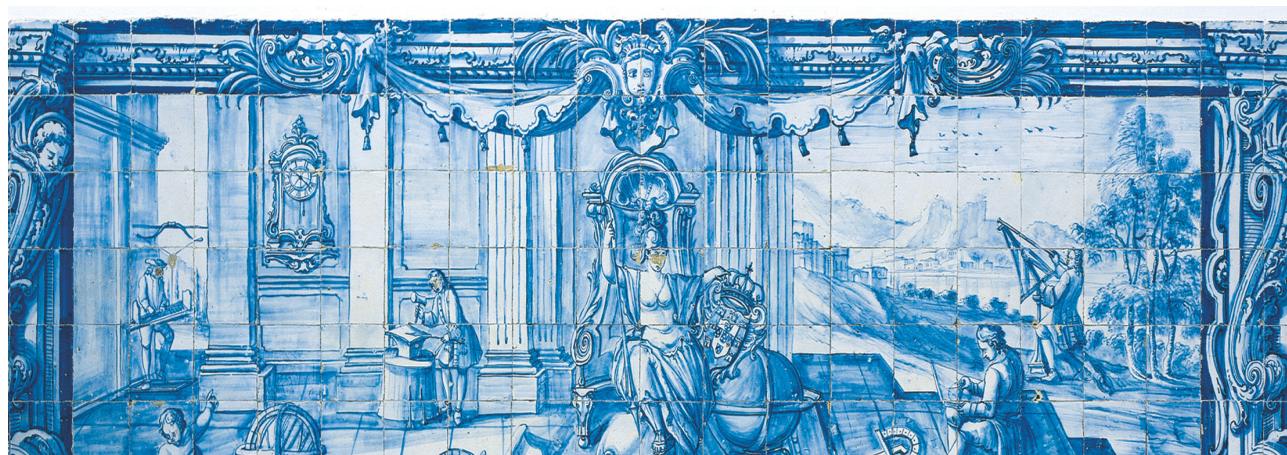
Tese apresentada à Universidade de Évora  
para obtenção do Grau de Doutor em Matemática

Especialidade: Análise Matemática

ORIENTADOR(A/ES) *Luís Ferreira da Silva*

*Nuno Soares Franco*

ÉVORA, JUNHO DE 2015



INSTITUTO DE INVESTIGAÇÃO E FORMAÇÃO AVANÇADA





# DINÂMICA SIMBÓLICA DE APLICAÇÕES MULTIMODAIS RENORMALIZÁVEIS, RENORMALIZAÇÃO EM TEMPLATES

*Pedro Miguel Lola Simões*

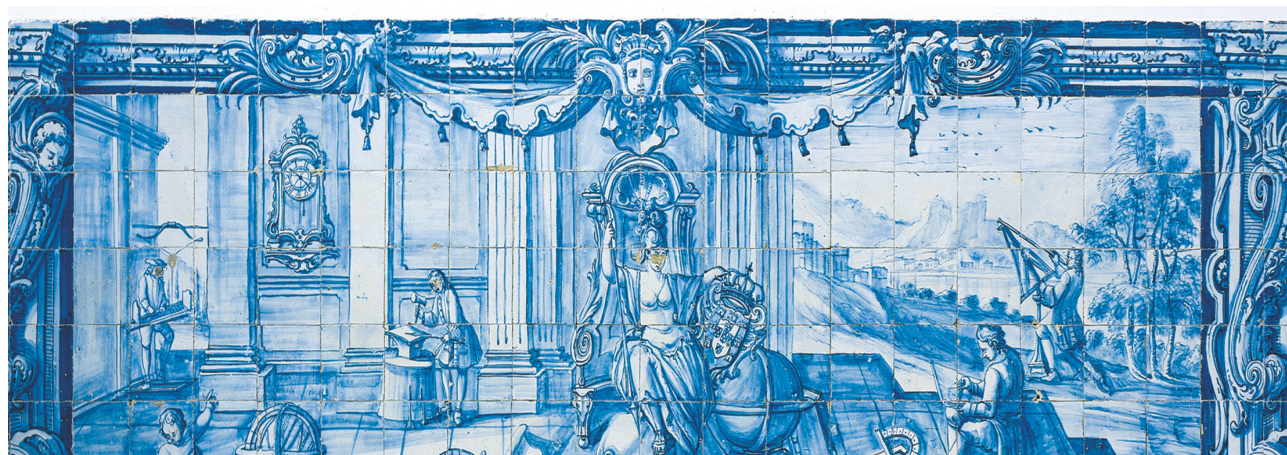
Tese apresentada à Universidade de Évora  
para obtenção do Grau de Doutor em Matemática

Especialidade: Análise Matemática

ORIENTADOR(A/ES) *Luís Ferreira da Silva*

*Nuno Soares Franco*

ÉVORA, JUNHO DE 2015



INSTITUTO DE INVESTIGAÇÃO E FORMAÇÃO AVANÇADA



UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Doutoramento em Matemática



Dinâmica simbólica de aplicações multimodais renormalizáveis,  
renormalização em templates

Dissertação apresentada por:

Pedro Miguel Lola Simões

Orientador: Luís Ferreira da Silva (ADM-ISEL)

Co-orientador: Nuno Soares Franco (DM-Univ. Évora)

Évora 2015



**Resumo:****Dinâmica simbólica de aplicações multimodais renormalizáveis,  
renormalização em templates**

Este trabalho dedica-se à interpretação do conceito de renormalização em sistemas dinâmicos não autónomos periódicos gerados pela iteração sequencial de aplicações do tipo de Lorenz. Para tal socorremo-nos da dinâmica simbólica e do produto estrela sobre os invariantes de amassamento.

Começamos por decompor o espaço de fases simbólico de sistemas renormalizáveis e em seguida estudamos a entropia topológica destes sistemas restringidos aos intervalos de renormalização. Finalmente, interpretamos estes conceitos no contexto dos templates com vários segmentos de ramificação, obtendo uma descrição geométrica dos nós e elos correspondentes a órbitas de pontos nos intervalos de renormalização e apresentando fórmulas explícitas para o cálculo do genus destes nós e elos.

**Palavras chave:**

Sistemas dinâmicos não autónomos, renormalização, entropia, dinâmica simbólica, invariantes de amassamento, produto estrela, templates, nós, elos, tranças, genus.

**Abstract:****Symbolic dynamics of renormalizable multimodal applications,  
renormalization in templates**

This work is dedicated to the interpretation of renormalization of periodic nonautonomous dynamical systems generated by the sequential iteration of Lorenz like applications. For this we use symbolic dynamics and star product on the kneading invariants.

We start by decomposing the symbolic phase space of renormalizable systems and then we study the topological entropy of these systems restricted the renormalization intervals. Finally, we interpret these concepts in the context of templates with multiple branching segments, obtaining a geometric description of the knots and links corresponding to orbits of points in renormalization intervals and featuring explicit formulas for calculating the genus of these knots and links.

**Key-words:**

Nonautonomous dynamical systems, renormalization, entropy, symbolic dynamics, kneading invariants, star product, templates, knots, links, braids, genus.



**Agradecimentos:**

Agradeço aos meus pais, à minha irmã e à minha mulher, por toda a ajuda que deram durante este momento de aprendizagem. Sem eles, sem o seu apoio e ânimo, o prazer de concluir este trabalho não teria tido lugar.

Devo também agradecer aos meus orientadores por todo o apoio que me deram em todos os momentos da elaboração desta dissertação. O seu apoio científico foi indiscutível, e ser seu orientando um enorme privilégio.

“A matemática, vista correctamente, possui não apenas verdade, mas também suprema beleza - uma beleza fria e austera, como a da escultura.”.

Bertrand Russell em *Misticismo e Lógica*.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Preliminares</b>	<b>8</b>
2.1	Sistemas Dinâmicos . . . . .	8
2.1.1	Sistemas dinâmicos contínuos e discretos . . . . .	10
2.2	Aplicações seccionalmente contínuas e monótonas com dois troços . . . . .	15
2.2.1	Dinâmica simbólica de aplicações <i>scm2</i> . . . . .	19
2.2.2	Produto $*$ . . . . .	24
2.2.3	Renormalização . . . . .	25
2.3	Nós, tranças e templates entrançados: uma breve introdução . . . . .	27
2.3.1	Nós . . . . .	30
2.3.2	Tranças . . . . .	34
2.3.3	Invariantes numéricos . . . . .	39
2.3.4	Templates entrançados . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Dinâmica simbólica e renormalização de sistemas <math>(k, 2)</math></b>	<b>50</b>
3.1	Sistemas dinâmicos $(k, 2)$ . . . . .	51
3.1.1	Dinâmica simbólica associada a sistemas $(k, 2)$ . . . . .	52
3.1.2	Invariantes de amassamento . . . . .	56
3.2	Renormalização e produto $*$ associados a sistemas $(k, 2)$ . . . . .	62

---

3.3	Entropia associada a sistemas $(k, 2)$ . . . . .	72
<b>4</b>	<b>Renormalização de templates com vários intervalos de ramificação</b>	<b>82</b>
4.1	Nós e elos associados a sistemas $(k, 2)$ . . . . .	84
4.2	Nós e elos renormalizáveis . . . . .	87
4.3	Genus dos nós e elos renormalizáveis . . . . .	96
	<b>Índice remissivo</b>	<b>108</b>

# Lista de Figuras

1.1	O atrator de Lorenz e algumas órbitas periódicas . . . . .	3
1.2	Cartas do atlas de um template e o Template de Lorenz . . . . .	4
2.1	Exemplos dos gráficos de uma aplicação unimodal e outra de tipo Lorenz . . . . .	16
2.2	Representação da corda do nó que passa sobre o outro. . . . .	31
2.3	Exemplos de projecções regulares de nós. . . . .	31
2.4	Exemplo de um nó orientado . . . . .	31
2.5	Convenção do sinal para cruzamentos. . . . .	32
2.6	Movimentos de Reidemeister . . . . .	33
2.7	Ilustração da Definição 2.3.6. . . . .	35
2.8	Exemplo da representação geométrica de uma trança. . . . .	36
2.9	Trança elementar. . . . .	37
2.10	Produto de duas tranças. . . . .	37
2.11	Relações para o grupo $B_n$ . . . . .	38
2.12	Fecho de uma trança. . . . .	39
2.13	O nó trivial com diferentes números de cruzamento. . . . .	40
2.14	Genus de uma superfície orientada com fronteira . . . . .	42
2.15	Ilustração do algoritmo de Seifert . . . . .	43
2.16	Cartas do atlas de um template . . . . .	45
2.17	Template de Lorenz . . . . .	45

2.18	Geradores do semigrupo dos templates entrançados . . . . .	47
2.19	Aplicação de primeiro retorno e template de Lorenz . . . . .	48
2.20	O nó de Lorenz associado a uma sequência simbólica periódica . . . . .	49
4.1	Template associado à ferradura de Smale . . . . .	83
4.2	Template com vários intervalos de ramificação e várias torções . . . . .	84
4.3	Nó associado a uma sequência simbólica . . . . .	86
4.4	Subtemplate de renormalização associado a uma trança . . . . .	89
4.5	Ilustração do Teorema 4.2.1 . . . . .	90

# Capítulo 1

## Introdução

Esta dissertação de Doutorado tem como objectivo o estudo, desde o ponto de vista da dinâmica simbólica, de sistemas dinâmicos não autónomos, periódicos, obtidos a partir da iteração sequencial de aplicações reais de variável real com uma descontinuidade e monótonas em cada subintervalo de continuidade. Estes sistemas dinâmicos permitirão descrever o semifluxo contido em templates do tipo de Lorenz, com vários intervalos de ramificação e faixas com diferentes tipos de torções, bem como caracterizar os nós e os elos, correspondentes a órbitas periódicas de pontos pertencentes aos intervalos de renormalização, através de fórmulas recursivas para o cálculo de invariantes numéricos, tais como o genus.

Embora a teoria dos nós seja, por si só, um assunto fascinante, e as suas ideias fundamentais passíveis de verificação experimental (ver [6, pag. 9]), só no século *XIX* se constituiu como uma verdadeira teoria matemática. A sua origem remonta ao interesse de Gauss pelo estudo dos campos electromagnéticos (ver [56]) e à tentativa feita por Lord Kelvin de, por um lado, fundamentar as características ondulatórias e corpusculares da matéria e, por outro, classificar os diferentes elementos químicos (ver [14], [54]). Contudo rapidamente ganhou maturidade e importância, tornando-se numa das pedras angulares da teoria topológica de baixa dimensão (ver [6, pag. 6]).

Já quanto à origem da ideia de sistema dinâmico, podemos afirmar que é tão antiga quanto a da própria ciência. Grosso modo, um sistema dinâmico pode definir-se como aquele que evolui com o decorrer do tempo e cuja característica principal é a de ser determinista, isto é, aquele em que o seu estado futuro se pode prever se forem conhecidos o seu estado actual e as leis que governam a sua evolução (ver [36, pag. 1]).

Não é injusto afirmar que (ver [32]) cientistas como Kepler (que procurou determinar as leis que governavam as trajetórias dos astros), Galileu (que pela primeira vez considerou o tempo, o movimento e a velocidade não como misteriosas qualidades, ou essenciais, mas sim como meras variáveis passíveis de ser medidas e calculadas matematicamente), Descartes (com a sua percepção do espaço e a sua concepção do mundo como um mecanismo), Isaac Newton (que no seu “*Principia Mathematica*” estabeleceu os princípios que, para além de libertar a ciência dos seus argumentos metafísicos e assentar as bases do pensamento científico moderno, permitiram modelar os movimentos dos corpos) e Malthus (ver [1, pag. III – 8]) (cuja pessimista e errónea, mas matematicamente fundada, visão da evolução da população humana nos advertiu que não só os dados exactos contam mas também as tendências) merecem figurar entre os pioneiros do estudo dos Sistemas Dinâmicos.

Assim, embora fortemente influenciado pelo trabalho de Newton, o estudo deste tema tenha requerido uma enorme bagagem de fundamentos diferenciais e integrais, a partir do celebrado artigo de Henri Poincaré, “*Nouvelles Methodes de la Mécanique Celeste*”, (re)adquiriu uma forte componente geométrica. A partir da formulação da moderna *Teoria Geométrica dos Sistemas Dinâmicos*, de Poincaré, abandonou-se a procura de soluções exactas, em termos de funções elementares ou especiais, para procurar caracterizar qualitativamente estes sistemas.

Ao longo das últimas décadas foram feitas várias tentativas para relacionar a *Teoria dos Nós e dos Elos* e a *Teoria dos Sistemas Dinâmicos* (ver [8], [9], [16], [22], [28], [30], [33], [37], [42], [68]). Com efeito, uma órbita fechada (periódica) num fluxo tridimensional



é um mergulho de  $\mathbb{S}^1$  numa variedade tridimensional, correspondente ao espaço de fases do sistema, e, portanto, é um nó. De modo similar, uma colecção finita de órbitas periódicas definem um elo.

Assim, coloca-se de imediato a seguinte questão: *Dado um fluxo tridimensional, será possível descrever e caracterizar os nós e os elos que podem ser encontrados entre as suas órbitas periódicas?*

Sobre este problema, Williams num seminário sobre turbulência no Departamento de Matemática em Berkeley, em 1976, (ver [9], [25], [37]) conjecturou sobre a existência de nós não triviais no sistema de Lorenz ( modelo meteorológico introduzido, em 1963, por E. N. Lorenz para modelar as correntes de convecção do ar em planos verticais, produzidas por aquecimento na aresta inferior dos planos). As três equações diferenciais do modelo podem ser dadas, por exemplo, por

$$\frac{dx}{dt} = -10(y - x); \quad \frac{dy}{dt} = 28x - y - xz; \quad \frac{dz}{dt} = xy - \frac{8}{3}z.$$

A curva de evolução caótica do sistema de Lorenz, projectada no plano  $xz$ , está representada na Figura 1.1 (onde se reproduz uma Figura de [9].)

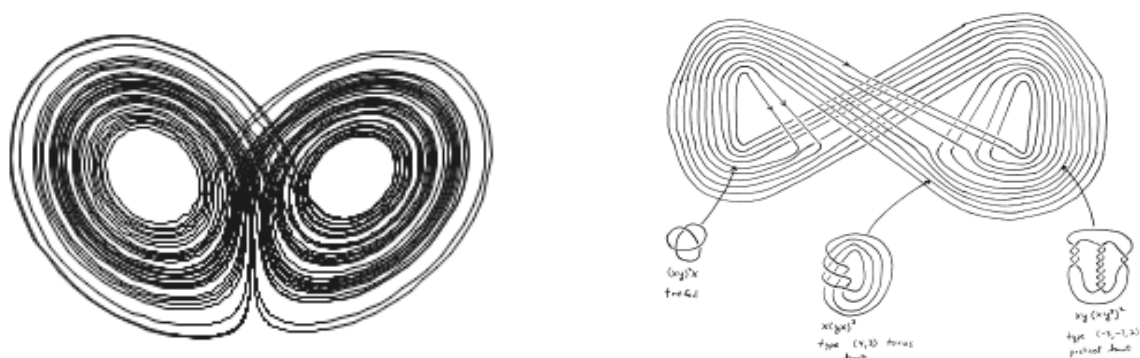


Figura 1.1: O atrator de Lorenz e algumas órbitas periódicas

Guckenheimer e Williams em [33] propuseram um modelo bidimensional para estudar o fluxo no atrator, o chamado *Atrator de Lorenz Geométrico* (vamos socorrer-nos da descrição do modelo efectuada em [48]). Basicamente, este modelo é obtido tomando uma secção bidimensional  $S$ , intersectando a variedade estável local numa linha  $l$  e analisando a aplicação de primeiro retorno a  $S$ . Esta aplicação não está definida na linha  $l$ , sendo aí descontínua, dado que na vizinhança de  $l$  as órbitas em lados opostos seguem ramos diferentes da variedade instável. Para descrever as dinâmicas deste fluxo, Guckenheimer e Williams adicionaram a seguinte hipótese: a existência de uma folheação unidimensional em  $S$ , invariante para a aplicação de primeiro retorno, tendo  $l$  como folha e tal que os pontos da mesma folha sejam contraídos exponencialmente pela aplicação de primeiro retorno. Devido a esta contração exponencial as dinâmicas do fluxo podem ser descritas pela ação de aplicações de primeiro retorno no espaço das folhas da folheação estável. Este espaço das folhas, é um intervalo e a aplicação induzida é uma aplicação unidimensional com uma única descontinuidade no ponto correspondente a  $l$  e crescente em ambos os intervalos de continuidade. Estas aplicações são vulgarmente conhecidas por aplicações de Lorenz.

Mais tarde, em 1983, no celebrado artigo [9], Birman e Williams introduziram a noção de template com o objectivo de estudar os nós e os elos contidos no atrator de Lorenz geométrico. Um template,  $T$ , consiste numa variedade ramificada de dimensão dois, compacta e com bordo, com um atlas constituído por cartas de dois tipos, de junção e de divisão (Figura 1.2), e um semifluxo expansivo definido em  $T$ .

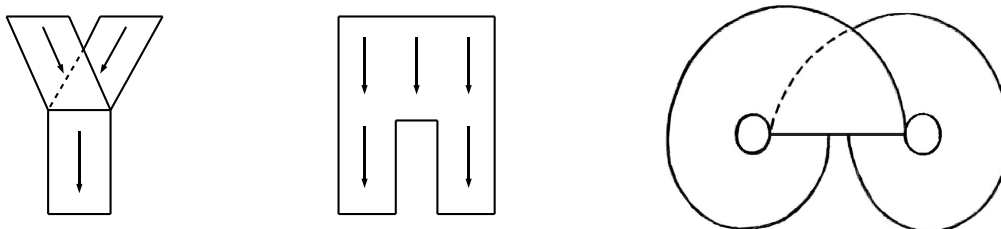


Figura 1.2: Cartas do atlas de um template (junção e divisão) e o Template de Lorenz

---

Em [9], Birmann e Williams demonstraram que, *para qualquer fluxo tridimensional com um conjunto recorrente por cadeias hiperbólico, existe um template tal que os elos de órbitas periódicas do fluxo estão em correspondência bijectiva com os elos de órbitas periódicas do template, além disso esta correspondência é uma isotopia ambiente, ou seja, preserva os tipos de nós e de elos.*

Este resultado é particularmente importante, uma vez que os templates podem ser estudados através das aplicações entre os segmentos de ramificação de certos nódulos do template, sendo estas aplicações unidimensionais multimodais (geralmente descontínuas).

Utilizando esta abordagem, Luís Silva e Nuno Franco, em [25], introduziram o conceito de nó e elo de Lorenz renormalizável, obtendo decomposições relevantes para as fórmulas dos invariantes índice de trança e genus, de nós e elos de Lorenz renormalizáveis.

À semelhança do exemplo anterior, a maior parte dos modelos matemáticos descritos por sistemas dinâmicos discretos aplicados em situações provenientes de outros campos científicos como a Biologia, a Física, a Economia, são gerados pela iteração consecutiva de uma única aplicação. Contudo, muito frequentemente, esta abordagem tem-se mostrado pouco realista pois existem muitos processos que envolvem diferentes respostas consoante os diferentes passos que se tomam. Estes sistemas dinâmicos denominam-se não autónomos, e quando a sequência de aplicações, que modela os diferentes passos, é periódica, denominam-se sistemas dinâmicos não autónomos periódicos. A dinâmica deste tipo de sistemas foi estudada por diversos autores (vejam-se por exemplo [5], [19], [20], [43]). A nossa contribuição para o estudo destes sistemas encontra-se publicada em [26], onde definimos a renormalização de sistemas dinâmicos não autónomos periódicos gerados pela iteração sequencial de aplicações seccionalmente contínuas e monótonas com dois troços (*scm2*) e estudámos este conceito a partir do ponto de vista da dinâmica simbólica, e em [61], onde estudámos a entropia topológica associada a sistemas dinâmicos não autónomos, gerados pela iteração sequencial de  $k$  aplicações *scm2* do tipo  $(+, +)$ .

A nossa contribuição para o estudo dos nós e dos elos contidos em templates, gerados por sistemas dinâmicos periódicos não autónomos, que correspondem a órbitas periódicas de pontos pertencentes aos intervalos de renormalização, foi dada em [62]. Neste artigo aplicamos a dinâmica simbólica e a teoria de amassamento desenvolvida em [26] na generalização dos resultados de [25], com o objectivo de descrever os nós e os elos contidos nesses templates generalizados acima descritos. Seguindo esta linha de raciocínio descrevemos os nós e os elos que correspondem a órbitas de pontos pertencentes aos intervalos de renormalização e obtemos fórmulas recursivas para o cálculo do seu genus.

Passamos ao resumo individualizado de cada capítulo.

No Capítulo 2 é feita uma apresentação sumária de alguns conceitos e resultados imprescindíveis para o estudo dos problemas considerados. Assim, recordam-se resultados da teoria matemática dos Sistemas Dinâmicos, da teoria dos Nós e da teoria dos Templates e toda uma série de resultados essenciais associados ao estudo da dinâmica simbólica de aplicações *scm2*.

No Capítulo 3 começamos, na secção 3.1, por definir de forma rigorosa o que se entende por sistema dinâmico associado à iteração sequencial de aplicações *scm2*, que no caso em que são gerados por  $k$  aplicações *scm2* chamamos, de forma abreviada, sistemas  $(k, 2)$ . Introduzimos os conceitos de dinâmica simbólica destes sistemas dinâmicos: o espaço simbólico e as diferentes ordenações (consoante o tipo das aplicações), o conceito de invariante de amassamento de um dado sistema  $(k, 2)$ , determinamos para um dado sistema  $(k, 2)$ ,  $F$ , com um certo invariante de amassamento,  $K[F]$ , quais as sequências simbólicas correspondentes ao espaço de fases de  $F$  e quais os invariantes de amassamento admissíveis, isto é, que são realizados por algum sistema  $(k, 2)$ .

Na secção 3.2, estudamos e generalizamos o produto  $*$ . Este produto algébrico de sequências simbólicas está directamente relacionado com questões de renormalização. Assim, começamos por definir o produto  $*$  entre invariantes de amassamento de sistemas  $(k, 2)$  e de

aplicações *scm2* e estudamos a propriedade de fecho desta aplicação. Estudamos também a renormalização de sistemas  $(k, 2)$  e demonstramos a equivalência entre a renormalizabilidade dos sistemas  $(k, 2)$  e a reducibilidade, em relação ao produto  $*$ , do invariante de amassamento.

Na secção 3.3, estudamos a entropia topológica associada a sistemas dinâmicos  $(k, 2)$  renormalizáveis, gerados por  $k$  aplicações *scm2* do tipo  $(+, +)$ , que denotamos por  $h_T(F)$ . Verificamos que  $h_T(F)$  é completamente determinada pelo invariante de amassamento  $K[F]$ , através de uma série de potências a que chamamos série de amassamento de  $F$ , e que o cálculo da restrição de  $h_T(F)$  ao intervalo de renormalização de um sistema  $(k, 2)$  renormalizável,  $F$ , depende apenas da série de amassamento da renormalização de  $F$ .

No Capítulo 4, interpretamos o conceito de renormalização de sistemas  $(k, 2)$  no contexto dos templates com vários intervalos de ramificação e obtemos fórmulas recursivas para alguns invariantes numéricos dos nós e dos elos renormalizáveis contidos neste tipo de template. Assim, na secção 4.1, começamos por explicar como associar um nó a uma sequência periódica e dizemos o que entendemos por nó renormalizável.

Na secção 4.2, recorremos ao conceito de renormalização de sistemas  $(k, 2)$  para descrever os nós e os elos contidos em templates com vários intervalos de ramificação e diferentes torções em cada uma das faixas, que correspondem às órbitas dos pontos pertencentes aos intervalos de ramificação. Por fim definimos o que entendemos por subtemplate de renormalização e enunciamos o teorema que descreve geometricamente os nós e os elos renormalizáveis.

Finalmente, na secção 4.3, iremos deduzir fórmulas recursivas para o cálculo do genus dos nós e dos elos renormalizáveis.

# Capítulo 2

## Preliminares

Neste capítulo introduzimos as definições, ideias e resultados relevantes para o estudo que nos propusemos realizar. Assim, para além de uma breve resenha histórica, são apresentados resultados básicos da *Teoria dos Sistemas Dinâmicos*, da *Teoria dos Nós* e da *Teoria dos Templates*. São também apresentados resultados essenciais, associados ao estudo de sistemas dinâmicos discretos, obtidos pela iteração de aplicações reais de variável real que possuem uma descontinuidade e são monótonas em cada um dos intervalos de continuidade (aplicações *scm2*).

### 2.1 Sistemas Dinâmicos

Historicamente, os sistemas dinâmicos diferenciáveis com tempo contínuo apareceram em primeiro lugar devido à descoberta por Newton que os movimentos dos objectos mecânicos podem ser descritos por equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. Mais geralmente, muitos outros fenómenos naturais e sociais podem ser modelados com vários graus de exactidão por sistemas de equações diferenciais ordinárias (ver [3], [1]).

No último século, e sobretudo após o trabalho de Poincaré (1854–1912) sobre o problema dos três corpos da mecânica celeste, no celebrado artigo *Nouvelles Methods de Mécanique*

*Celeste*, com o qual ganhou o prémio atribuído pelo Rei Óscar II, da Suécia e Noruega, o estudo dos sistemas dinâmicos (re)adquiriu uma forte componente geométrica. No seu artigo Poincaré propôs novos métodos para o estudo de equações diferenciais ordinárias não lineares. Recorreu, pela primeira vez, às aplicações de primeiro retorno (de Poincaré) para o estudo dos movimentos periódicos, definiu variedades instáveis e estáveis, discutiu diversos problemas de estabilidade, desenvolveu os novos métodos de perturbação e provou o Teorema de Recorrência (de Poincaré). Enquanto revia o seu artigo notou que certas equações diferenciais, que descreviam sistemas mecânicos com dois ou mais graus de liberdade, não eram integráveis no sentido clássico, devido à existência de órbitas homoclínicas e heteroclínicas. Mais ainda, apercebeu-se que essas órbitas tinham implicações profundas na estabilidade geral do movimento e que, portanto, as suas afirmações iniciais, de que a versão restrita do problema dos três corpos da mecânica celeste só tinha comportamentos estáveis, eram falsas. Entre Dezembro de 1889 e Janeiro de 1890 criou o primeiro exemplo explícito de caos determinista.

Birkhoff (1884 – 1944), no início do século XX, foi um dos poucos matemáticos que deu continuidade ao trabalho de Poincaré. O estudo de Birkhoff foi particularmente relevante no estudo de osciladores periódicos forçados (que, mais tarde, foram também estudados por Ueda).

No início da década de 1920 van der Pol e van den Mark, dois engenheiros dos laboratórios Phillips em Eindhoven, motivados pelo estudo de funções sub-harmónicas repararam que, para certos comprimentos de onda, obtinham resultados que apontavam para a existência de uma determinada estrutura caótica. Cartwright e Littlewood demonstraram a existência de órbitas descontínuas recorrentes na equação de van der Pol. A sua análise foi posteriormente simplificada por Levinson.

No mesmo período, investigadores Soviéticos definiram sistemas estruturalmente estáveis (grosso modo, aqueles que preservam as suas propriedades qualitativas sob pequenas per-

turbações das equações diferenciais ordinárias que os definiam) e deram início ao estudo das bifurcações.

Quando Smale se interessou por sistemas dinâmicos, no período entre 1959 – 1960, conjecturou que qualquer equação diferencial ordinária estruturalmente estável deveria possuir somente conjuntos finitos de órbitas periódicas em qualquer região limitada do seu espaço de fases. Levinson sugeriu que o artigo de Cartwright e Littlewood constituía um contra-exemplo. A interpretação geométrica da aplicação de Poincaré, elaborada por Smale, para a equação forçada de van der Pol levou à construção da “aplicação de ferradura” de Smale.

Ueda, em 1961, e Lorenz, em 1963, foram os responsáveis pela descoberta dos primeiros atractores estranhos (caóticos).

### 2.1.1 Sistemas dinâmicos contínuos e discretos

Introduzimos nesta secção a noção de sistema dinâmico, tanto com tempo discreto como com tempo contínuo.

Assim, a noção mais geral de sistema dinâmico, de uma forma genérica, inclui os seguintes ingredientes, segundo [36]:

- i. Um espaço de fases  $X$ , cujos elementos ou “pontos” representam os possíveis estados do sistema.
- ii. Um tempo, que pode ser discreto ou contínuo. A sucessão de instantes de tempo para um processo reversível com tempo discreto corresponde de forma natural ao conjunto de todos os inteiros; a irreversibilidade corresponde a considerar apenas inteiros não negativos. De forma análoga, para um processo com tempo contínuo o tempo é representado no caso reversível pelo conjunto de todos os números reais e no caso irreversível pelo conjunto dos números reais não negativos.
- iii. A lei de evolução. Esta lei é uma regra que permite determinar o estado do sistema



em cada instante de tempo  $t$  a partir dos estados do sistema nos instantes de tempo anteriores. Assim, se o nosso sistema estava inicialmente num estado  $x \in X$ , no instante  $t$  ficará num novo estado que é univocamente determinado por  $x$  e  $t$  e que portanto pode ser denominado por  $\phi(x, t)$ . Fixando  $t$  obtemos a transformação  $\phi^t$  do espaço de fases em si próprio. Estas transformações para diferentes instantes de tempo  $t$ , estão relacionadas entre si. Nomeadamente a evolução do estado  $x$  para o instante  $s + t$  pode ser efectuada aplicando primeiro a transformação  $\phi^t$  a  $x$  e depois aplicando  $\phi^s$  ao estado  $\phi^t(x)$ .

A característica mais representativa da teoria dos sistemas dinâmicos, e que a distingue de outras áreas da matemática é a ênfase dada ao comportamento assintótico, isto é, de propriedades relacionadas com o comportamento quando o tempo vai para o infinito.

**Observação 2.1.1** *Consideraremos somente sistemas dinâmicos deterministas, nos quais cada estado é determinado de modo único pela lei de evolução. O estado actual pode ser determinado dos estados anteriores, por oposição, por exemplo, aos sistemas dinâmicos estocásticos.*

**Definição 2.1.1** [7, pag. 3] *Uma transformação  $f : X \rightarrow X$  diz-se um sistema dinâmico com tempo discreto ou simplesmente um sistema dinâmico.*

Definimos recursivamente

$$f^{n+1} = f \circ f^n$$

para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Escrevemos ainda  $f^0 = Id$ , onde  $Id$  designa a transformação identidade.

Claramente,

$$f^{m+n} = f^m \circ f^n \tag{2.1}$$

para quaisquer  $m, n \in \mathbb{N}_0$ , onde  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Quando a transformação  $f$  é invertível, definimos também  $f^{-n} = (f^{-1})^n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Neste caso, a identidade 2.1 é satisfeita

para quaisquer  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

**Definição 2.1.2** [7, pag. 4] Chamamos *semifluxo* a uma família de transformações  $\phi^t : X \rightarrow X$ , com  $t \geq 0$ , tal que  $\phi^0 = Id$  e  $\phi^{t+s} = \phi^t \circ \phi^s$  para quaisquer  $t, s \geq 0$ .

Chamamos *fluxo* a uma família de transformações  $\phi^t : X \rightarrow X$ , com  $t \in \mathbb{R}$ , tal que  $\phi^0 = Id$  e  $\phi^{t+s} = \phi^t \circ \phi^s$  para quaisquer  $t, s \in \mathbb{R}$ .

Introduzimos de seguida a noção de ponto periódico.

**Definição 2.1.3** [7, pag. 6] Dado  $q \in \mathbb{N}$ , um ponto  $x \in X$  diz-se *q-periódico* para uma transformação  $f : X \rightarrow X$  se  $f^q(x) = x$ . Além disso, um ponto  $x \in X$  diz-se *periódico* para  $f$  se é periódico para algum  $q \in \mathbb{N}$ .

Em particular, de acordo com a definição, os pontos fixos são também periódicos. Mais geralmente, um ponto  $q$ -periódico é também  $kq$ -periódico para qualquer  $k \in \mathbb{N}$ .

**Definição 2.1.4** [7, pag. 6] Dizemos que um ponto periódico tem período  $q$  se é  $q$ -periódico mas não é  $l$ -periódico para nenhum  $l < q$ .

Descrevemos de seguida algumas relações entre sistemas dinâmicos com tempo discreto e sistemas dinâmicos com tempo contínuo.

Para construirmos uma classe de semifluxos a partir de um sistema dinâmico com tempo discreto

$$f : X \rightarrow X,$$

dada uma função  $\tau : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ , consideramos o conjunto  $Y$  obtido a partir de

$$Z = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leq t \leq \tau(x)\}$$

identificando os pontos  $(x, \tau(x))$  e  $(f(x), 0)$ . Ou seja, definimos  $Y = Z / \sim$ , onde  $\sim$ , designa a relação de equivalência em  $Z$  definida por

$$(x, t) \sim (y, s) \Leftrightarrow y = f(x), t = \tau(x) \text{ e } s = 0.$$

**Definição 2.1.5** [7, pag. 10] *Definimos o semifluxo suspensão  $\phi^t : Y \rightarrow Y$  sobre  $f$  com altura  $\tau$  por  $\phi^t(x, s) = (x, s + t)$  quando  $s + t \in [0, \tau(x)]$ , para cada  $t \geq 0$ .*

Reciprocamente, dado um semifluxo, podemos por vezes construir um sistema dinâmico com tempo discreto

$$f : X \rightarrow X$$

tal que o semifluxo é um semifluxo suspensão sobre  $f$ . Seja então  $\phi^t : Y \rightarrow Y$  um semifluxo.

**Definição 2.1.6** [7, pag. 17] *Um conjunto  $X \subset Y$  diz-se uma secção de Poincaré para  $\phi^t$  se*

$$\tau(x) = \inf\{t > 0 : \phi^t(x) \in X\} \in \mathbb{R}^+$$

para cada  $x \in X$ , com a convenção de que  $\inf \emptyset = +\infty$ . Chamamos a  $\tau(x)$  o tempo de primeiro retorno de  $x$  ao conjunto  $X$ .

O tempo de primeiro retorno a  $X$  é portanto uma função  $\tau : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ .

**Definição 2.1.7** [7, pag. 17] *Dada uma secção de Poincaré  $X$  para um semifluxo  $\phi^t$ , definimos a sua transformação de Poincaré*

$$f : X \rightarrow X$$

por  $f(x) = \phi^{\tau(x)}(x)$ .

## Conjuntos invariantes

Introduzimos agora a noção de conjunto invariante para sistemas dinâmicos discretos.

**Definição 2.1.8** [7, pag. 18] *Dada uma função  $f : X \rightarrow X$ , dizemos que um conjunto  $A \subset X$  é*

(a)  *$f$ -invariante se  $f^{-1}(A) = A$ , onde  $f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\}$ ;*

(b) *positivamente  $f$ -invariante se  $f(A) \subset A$ ;*

(c) *negativamente  $f$ -invariante se  $f^{-1}(A) \subset A$ .*

Introduzimos agora as noções de órbita e semiórbita.

**Definição 2.1.9** [7, pag. 20] *Para uma transformação  $f : X \rightarrow X$ , dado um ponto  $x \in X$ , dizemos que*

$$\text{orb}_f^+(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}_0\}$$

*é a semiórbita positiva de  $x$ . Quando  $f$  é invertível, dizemos ainda que*

$$\text{orb}_f^-(x) = \{f^{-n}(x) : n \in \mathbb{N}_0\}$$

*é a semiórbita negativa de  $x$  e que*

$$\text{orb}_f(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$$

*é a órbita de  $x$ .*

Um conceito mais fraco que o de periodicidade, mas crucial na descrição do comportamento assintótico das órbitas de um sistema dinâmico, é o de recorrência por cadeias.

**Definição 2.1.10** [30, pag. 19](**Recorrência por cadeias**). Para uma transformação  $f : X \rightarrow X$ , um ponto  $x \in X$  é *recorrente por cadeias* para  $f$  se, para todo  $\epsilon > 0$ , existe uma sequência de pontos  $x_0 = x, x_1, x_2, \dots, x_k = x$ , tais que  $d(f(x_i), x_{i+1}) < \epsilon$ , para todos  $i = 0, 1, \dots, k - 1$ .

Note-se que órbitas periódicas são exemplos de conjuntos recorrentes por cadeias, no entanto nem todo o conjunto recorrente por cadeias é uma órbita periódica.

## 2.2 Aplicações seccionalmente contínuas e monótonas com dois troços

Nesta secção são apresentados resultados fundamentais de sistemas dinâmicos associados à iteração de aplicações descontínuas, em particular de aplicações com apenas uma descontinuidade (classe de aplicações que contém as aplicações de tipo Lorenz) e que foram estudadas de forma unificada em [57], [58] e [60]. Começa-se por formalizar a noção de aplicação seccionalmente contínua e monótona com dois troços (aplicação *scm2*), e enuncia-se uma generalização do teorema de Singer a este contexto, ver [60, pag. 16], que nos diz que numa aplicação *scm2* com derivada de Schwarz negativa podem existir no máximo duas órbitas periódicas estáveis.

Seja  $I = [-1, 1]$ . Dizemos que a aplicação

$$f : I \setminus \{0\} \rightarrow I$$

é uma aplicação seccionalmente contínua e monótona com dois troços (abreviadamente *scm2*), se as restrições de  $f$  a cada um dos intervalos  $[-1, 0[$  e  $]0, 1]$  são contínuas, estritamente monótonas, e

$$f(\{-1, 1\}) \subset \{-1, 1\}.$$

Assim,

$$f(x) = \begin{cases} f^L(x) & \text{se } x < 0 \\ f^R(x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

é tal que  $f^L$  (respectivamente  $f^R$ ) é contínua e monótona de  $[-1, 0[$  (respectivamente  $]0, 1]$ ) em  $[-1, 1]$  e  $f$  aplica a fronteira  $\{-1, 1\}$  nela própria.

Como consequência da definição anterior, podemos escrever  $f^L(0) = \lim_{x \nearrow 0} f(x)$  e  $f^R(0) = \lim_{x \searrow 0} f(x)$ .

Para  $i \in \{L, R\}$  definimos o sinal

$$\epsilon(f^i) = \begin{cases} +, & \text{se } f^i \text{ é crescente} \\ -, & \text{se } f^i \text{ é decrescente} \end{cases}$$

e dizemos que  $f$  é do tipo  $(\gamma, \delta)$  onde  $\gamma = \epsilon(f^L)$  (respectivamente  $\gamma = \epsilon(f^R)$ ).

Esta classe de aplicações contém as aplicações unimodais  $((\gamma, \delta) = (+, -)$  e  $f^L(0) = f^R(0)$ ) e as aplicações de Lorenz  $((\gamma, \delta) = (+, +))$ .

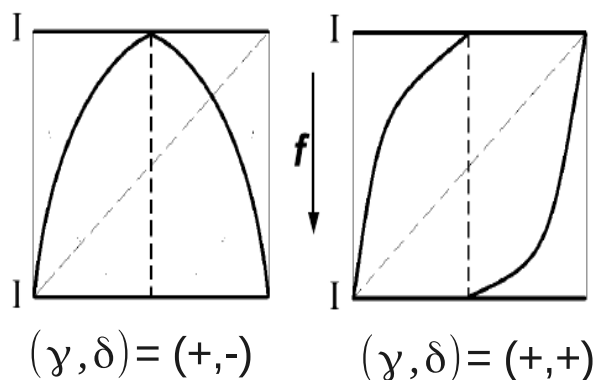


Figura 2.1: Exemplos dos gráficos de uma aplicação unimodal e outra de tipo Lorenz

Como é usual, no contexto dos sistemas dinâmicos discretos, denota-se por  $f^0 = \textit{identidade}$ ,  $f^1 = f, \dots, f^n = f \circ f^{n-1}$ . Devido à ambiguidade no ponto 0, definimos  $f^n(0^-) =$

$f^{n-1}(f^L(0))$  e  $f^n(0^+) = f^{n-1}(f^R(0))$ .

Se  $x$  é uma pré-imagem de 0, isto é, existe  $k$  minimal tal que  $f^k(x) = 0$ , definimos as órbitas laterais de  $x$ ,

$$orb_f^+(x^\pm) = \{x, f(x), \dots, f^{k-1}(x), 0, f(0^\pm), \dots, f^n(0^\pm), \dots\}.$$

Dizemos que 0 é o ponto crítico de  $f$  e às suas órbitas laterais  $orb_f^+(0^\pm)$  chamamos órbitas críticas.

Um ponto  $x \in I$  tal que  $f^n(x) \neq 0$  qualquer que seja  $n \in \mathbb{N}$ , diz-se periódico se  $f^n(x) = x$  para algum  $n \in \mathbb{N}$ . Por outro lado, dizemos que o ponto crítico 0 é periódico à esquerda (respectivamente à direita) se  $f^n(0^-) = 0$  (respectivamente  $f^n(0^+) = 0$ ). Chamamos período de  $x$  (respectivamente  $0^\pm$ ) ao menor natural  $n$  tal que  $f^n(x) = x$  (respectivamente  $f^n(0^\pm) = 0$ ).

Para simplificar a redacção, de ora em diante, quando nos referirmos a um ponto periódico  $x$  estamos a incluir a possibilidade de  $x \in \{0^-, 0^+\}$ , logo quando falamos de derivadas em  $0^-$  (respectivamente em  $0^+$ ) ou de derivadas numa pré-imagem de 0 estamos a referir-nos à derivada à esquerda (respectivamente direita), analogamente, nestes casos quando nos referimos a vizinhanças estamos a referir-nos a vizinhanças esquerdas (respectivamente direitas).

Seja  $f$  uma aplicação *scm2* de classe  $C^1$ , e seja  $x \in I$  um ponto periódico com período  $p$  de  $f$ . Dizemos que  $x$  é um ponto periódico atractivo e que a sua órbita é estável, se  $|(f^p)'(x)| < 1$ .

A importância das órbitas periódicas estáveis nos sistemas dinâmicos vem do facto que, se  $P$  é uma órbita periódica estável de período  $p$  de  $f$  então para qualquer  $x \in P$  existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{np}(y) = x$  qualquer que seja  $y \in U$  (neste caso dizemos que  $P$  atrai  $U$ ).

Aqui cometemos um pequeno abuso de linguagem, pois estamos a incluir na mesma

classe aquilo a que normalmente se dá o nome de órbitas estáveis e semi-estáveis, as últimas são aquelas em que  $0^\pm \in P$ , e nesses casos, quando falamos de vizinhanças estamos de facto a referir-mo-nos a vizinhanças laterais.

Uma questão natural será a de saber quantas órbitas periódicas estáveis podem ter uma aplicação *scm2*.

Singer, [63], em 1978 demonstrou que para aplicações de classe  $C^3$  com derivada de Schwarz negativa, cada órbita periódica atractiva atrai pelo menos um dos pontos críticos.

No resto desta secção apresentamos os resultados obtidos por Luís Silva e Sousa Ramos, em [57], onde se generalizou o resultado de Singer para aplicações *scm2*.

Seja  $f$  uma aplicação de classe  $C^3$ . A derivada de Schwarz de  $f$  no ponto  $x$ ,  $Sf(x)$ , é definida por (ver [48, pag. 56] ou [60, pag. 16])

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2. \quad (2.2)$$

Dizemos que uma aplicação *scm2*,  $f$ , de classe  $C^3$  em cada um dos ramos de continuidade, tem derivada de Schwarz negativa se

$$Sf^L(x) < 0 \quad \forall x \in [-1, 0) \quad \text{e} \quad Sf^R(x) < 0 \quad \forall x \in (0, 1].$$

Da definição de derivada de Schwarz, usando a regra da cadeia, obtemos imediatamente a seguinte fórmula

$$S(g \circ f)(x) = Sg(f(x))|f'(x)|^2 + Sf(x) \quad (2.3)$$

daí concluímos imediatamente que a composição de duas funções com derivada de Schwarz negativa, tem derivada de Schwarz negativa. Por recorrência podemos então afirmar que qualquer iterada de uma aplicação *scm2* com derivada de Schwarz negativa, tem derivada de Schwarz negativa nos seus intervalos de continuidade.



O seguinte resultado é uma generalização do teorema de Singer para aplicações  $l$ -modais.

**Teorema 2.2.1** [60, pag. 17]) *Seja  $f$  uma aplicação  $scm2$  de classe  $C^3$  com derivada de Schwarz negativa e tal que*

$$f'(0^-) = f'(0^+) = 0$$

*então qualquer órbita periódica estável atrai pelo menos uma órbita crítica.*

A generalização deste resultado a aplicações com maior número de descontinuidades é imediata, daí se poder concluir que o número de órbitas periódicas estáveis ou semi-estáveis de uma aplicação seccionalmente monótona e contínua em cada um dos intervalos de continuidade é limitado superiormente pelo dobro do número de descontinuidades.

### 2.2.1 Dinâmica simbólica de aplicações $scm2$

Grosso modo, a ideia de dinâmica simbólica pode resumir-se a efectuar uma partição do espaço de fases de um sistema dinâmico discreto e a cada elemento dessa partição associar um símbolo. A cada órbita

$$x, f(x), f^2(x), \dots$$

associamos uma sequência (órbita) simbólica

$$X_0, X_1, X_2, \dots$$

onde  $X_i$  é o símbolo correspondente ao elemento da partição ao qual pertence  $f^i(x)$ .

Esta ideia remonta aos trabalhos de Hadamard, em [34], Morse e Hedlund, em [50]. Desde então inúmeros trabalhos têm sido desenvolvidos nesta área, dos quais um dos mais celebrados é, sem dúvida, [46]. Neste artigo Milnor e Thurston introduziram o conceito de invariante de amassamento. Este invariante permite-nos abordar o problema de classificação

topológica interpretando simbolicamente as dinâmicas das aplicações unidimensionais. Inicialmente este conceito foi utilizado para estudar aplicações contínuas, tendo sido generalizado, por Rand, para aplicações de Lorenz, ver [60, pag.20].

De seguida apresentam-se conceitos essenciais de dinâmica simbólica das aplicações *scm2*.

Dada  $f$  uma aplicação *scm2*, codificamos as suas dinâmicas da seguinte forma: considere-mos  $x \in I$  e  $n \leq +\infty$  o menor inteiro para o qual se verifica a condição  $f^n(x) = 0$ .

Definimos o *itinerário* de  $x$  como a sequência simbólica

$$i_f(x) = (i_f(x))_j, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

onde

$$(i_f(x))_j = \begin{cases} L & \text{se } f^j(x) < 0 \\ 0 & \text{se } f^j(x) = 0 \\ R & \text{se } f^j(x) > 0 \end{cases}$$

Como é óbvio o itinerário de um ponto  $x$  é uma sequência simbólica finita de símbolos  $L$  e  $R$  terminada em  $0$  se e só se  $x$  é a pré-imagem de  $0$ . Caso contrário é uma sequência infinita de símbolos  $L$  e  $R$ , não contendo o símbolo  $0$ .

Consideremos o conjunto  $\Sigma$ , das sequências simbólicas

$$X_0 \dots X_n$$

nos símbolos  $\{L, 0, R\}$ , tais que  $n = \infty$  e  $X_i \neq 0$  para todo  $i < n$  ou  $n < \infty$  e  $X_n = 0$ .

Definimos a aplicação deslocamento

$$s : \Sigma \setminus \{0\} \rightarrow \Sigma$$

$$X_0 \dots X_{n-1}0 \mapsto X_1 \dots X_{n-1}0$$

Notemos que  $s$  não está definido na sequência 0, para daqui em diante não ser necessário referi-lo sempre que tal surja.

Se considerarmos  $i_f$  como a aplicação de  $I$  em  $\Sigma$  que a cada ponto associa o respectivo itinerário, temos que  $i_f$  semiconjuga as dinâmicas de  $f$  com as de  $s$  através da comutatividade do seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 & f & \\
 I \setminus \{0\} & \longrightarrow & I \\
 i_f \downarrow & & \downarrow i_f \\
 \Sigma \setminus \{0\} & \longrightarrow & \Sigma \\
 & s &
 \end{array}$$

Vamos de seguida introduzir alguma notação:

Seja  $(\gamma, \delta) \in \{-, +\}^2$ , ao símbolo  $L$  associamos o sinal  $\epsilon_{(\gamma, \delta)}(L) = \gamma$  e ao símbolo  $R$  o sinal  $\epsilon_{(\gamma, \delta)}(R) = \delta$ , note-se que o sinal associado a  $L$  corresponde ao sinal de  $f'$  no intervalo  $[-1, 0[$  e que o sinal associado a  $R$  corresponde ao sinal de  $f'$  no intervalo  $]0, +1]$ . A partir de agora, os sinais  $\gamma$  e  $\delta$  vão muitas vezes surgir num contexto multiplicativo, sempre que tal aconteça identificamos  $\pm$  com  $\pm 1$ . Podemos então definir a paridade de  $X_0 \dots X_p$  no contexto  $(\gamma, \delta)$ , como

$$\epsilon_{(\gamma, \delta)}(X_0 \dots X_p) = \epsilon_{(\gamma, \delta)}(X_0) \cdots \epsilon_{(\gamma, \delta)}(X_p).$$

Para cada par  $(\gamma, \delta) \in \{-, +\}^2$  podemos definir uma relação de ordem diferente no conjunto  $\Sigma$ . Primeiro convencionamos que

$$L < 0 < R \quad \text{e} \quad -R < 0 < -L.$$

Sejam  $X, Y \in \Sigma$ , dizemos então que  $X$  é menor (relativamente à ordem  $(\gamma, \delta)$ ) que  $Y$  e

escrevemos

$$X <_{(\gamma, \delta)} Y$$

se, e somente se, existe  $0 < r < \min\{|X|, |Y|\}$  tal que  $X_i = Y_i$  para todo o  $i < r$  e

$$\epsilon_{(\gamma, \delta)}(X_0 \dots X_{r-1}) X_r < \epsilon_{(\gamma, \delta)}(X_0 \dots X_{r-1}) Y_r.$$

Estas relações de ordem são motivadas pela seguinte proposição, cuja demonstração pode ser encontrada em [60].

**Proposição 2.2.1** [60, pag. 22] *Sejam  $f$  uma aplicação scm2 do tipo  $(\gamma, \delta)$  e  $x, y \in I$ . Verificam-se as seguintes condições:*

1. *Se  $x < y$  então  $i_f(x) \leq_{(\gamma, \delta)} i_f(y)$ , e*
2. *Se  $i_f(x) <_{(\gamma, \delta)} i_f(y)$  então  $x < y$ .*

Para uma aplicação scm2,  $f$ , definimos o seu *invariante de amassamento* como sendo o par

$$K_f = (K_f^L, K_f^R) = (Li_f(f^L(0)), Ri_f(f^R(0))).$$

Denotamos por  $\Sigma = \Sigma_\infty \cup \Sigma_0$ , onde  $\Sigma_\infty$  é o subconjunto das sequências infinitas e  $\Sigma_0$  das sequências finitas terminadas em 0.

Seja  $(X, Y) \in \Sigma \times \Sigma$  tal que  $X_0 = L$  e  $Y_0 = R$ , consideremos os conjuntos

$$\Sigma_{(\gamma, \delta)}^+(X, Y) = \{Z \in \Sigma : Z_p = L \Rightarrow s^p(Z) <_{(\gamma, \delta)} X, Z_p = R \Rightarrow s^p(Z) >_{(\gamma, \delta)} Y\}$$

e  $\overline{\Sigma}_{(\gamma, \delta)}^+(X, Y)$  o conjunto correspondente a substituir na definição de  $\Sigma_{(\gamma, \delta)}^+$  as desigualdades  $<_{(\gamma, \delta)}$  e  $>_{(\gamma, \delta)}$  por  $\leq_{(\gamma, \delta)}$  e  $\geq_{(\gamma, \delta)}$  respectivamente.

O seguinte Teorema põe em evidência que o invariante de amassamento determina o conjunto  $i_f(I)$ , isto é, das sequências simbólicas realizadas pelos pontos de  $I$  através da

iteração por  $f$ .

**Teorema 2.2.2** [60, pag. 25] *Sejam  $f$  uma aplicação scm2 do tipo  $(\gamma, \delta)$ , então*

$$i_f(I) \subset \overline{\Sigma}_{(\gamma, \delta)}^+(K_f) \quad e \quad \Sigma_{(\gamma, \delta)}^+(K_f) \subset i_f(I).$$

De seguida caracterizam-se os pares de sequências que podem ocorrer como invariantes de amassamento de aplicações scm2.

**Definição 2.2.1** [60, pag. 27]) *Dizemos que uma sequência  $X \in \Sigma$  é maximal  $(\gamma, \delta)_L$  se  $X_0 = L$  e, para todo  $1 \leq p < |X|$ ,  $X_p = L \Rightarrow s^p(X) \leq_{(\gamma, \delta)} X$ .*

*Analogamente dizemos que uma sequência  $Y \in \Sigma$  é minimal  $(\gamma, \delta)_R$  se  $Y_0 = R$  e, para todo  $1 \leq p < |Y|$ ,  $Y_p = R \Rightarrow s^p(Y) \geq_{(\gamma, \delta)} Y$ .*

**Definição 2.2.2** [60, pag. 27] *Dizemos que o par  $(X, Y) \in \Sigma \times \Sigma$  é admissível no contexto  $(\gamma, \delta)$ , se  $X$  e  $Y$  são respectivamente maximal  $(\gamma, \delta)_L$  e minimal  $(\gamma, \delta)_R$  e verificam as seguintes condições de compatibilidade:*

1.  $X_p = R \Rightarrow s^p(X) \geq_{(\gamma, \delta)} Y$ .
2.  $Y_p = L \Rightarrow s^p(Y) \leq_{(\gamma, \delta)} X$ .
3. Se  $|X| < \infty$  ou  $|Y| < \infty$  então as desigualdades anteriores são ambas estritas.

Denotamos o conjunto de todos os pares admissíveis no contexto  $(\gamma, \delta)$  por  $\Sigma_{(\gamma, \delta)}^+$ . Denotamos, ainda, por  $\Sigma_{(\gamma, \delta)}^*$  o conjunto de todos os pares admissíveis  $(\gamma, \delta)$  em que ambos  $|X|$  e  $|Y|$  são finitos e  $|X| + |Y| \geq 3$ .

**Teorema 2.2.3** [60, pag. 27] *Seja  $(X, Y) \in \Sigma \times \Sigma$ , então existe uma aplicação scm2,  $f$ , do tipo  $(\gamma, \delta)$  tal que  $(X, Y) = K_f$  se e só se  $(X, Y) \in \Sigma_{(\gamma, \delta)}^+$ .*

Assim, dizemos que o par  $(X, Y) \in \Sigma \times \Sigma$  é *admissível*  $(\gamma, \delta)$  se  $(X, Y) = K_f$ , para alguma aplicação *scm2* do tipo  $(\gamma, \delta)$  e que uma sequência  $X$  é *maximal*  $(\gamma, \delta)$  (respectivamente *minimal*  $(\gamma, \delta)$ ) se coincide com  $K_f^L$  (respectivamente  $K_f^R$ ) para alguma aplicação,  $f$ , *scm2* do tipo  $(\gamma, \delta)$ .

### 2.2.2 Produto \*

De seguida introduz-se o chamado produto  $*$  para invariantes de amassamento de aplicações *scm2*. Assim, começamos por enunciar as suas propriedades de fecho e associatividade. De seguida apresentam-se resultados que demonstram a equivalência entre a redutibilidade do invariante de amassamento e a renormalizabilidade da aplicação. A demonstração destes resultados encontra-se em [60] e [58].

**Definição 2.2.3** [25] *Seja  $(X, Y) \in \Sigma_{(\gamma, \delta)}^*$ . Definimos o produto  $*$  entre um par de sequências finitas  $(X, Y)$ , e a sequência  $U \in \Sigma$  por*

$$(X, Y) * U = \bar{U}_0 \bar{U}_1 \dots \bar{U}_{|U|-1} 0,$$

onde

$$\bar{U}_i = \begin{cases} X_0 \dots X_{|X|-1} & \text{se } U_i = L \\ Y_0 \dots Y_{|Y|-1} & \text{se } U_i = R \end{cases}.$$

Definimos o produto  $*$  de  $(X, Y)$  por um par  $(U, T)$  pela expressão

$$(X, Y) * (U, T) = ((X, Y) * U, (X, Y) * T).$$

**Definição 2.2.4** [60, pag. 52] *Dizemos que uma sequência  $A \in \Sigma$  é *redutível*  $(\gamma, \delta)$  e que  $(X, Y)$  é *factor  $*$*  de  $A$ , se  $A = (X, Y) * S$  com  $(X, Y) \in \Sigma_{(\gamma, \delta)}^*$ , caso contrário dizemos que  $A$  é *irredutível*  $(\gamma, \delta)$ . Analogamente, dizemos que um par  $(A, B) \in \Sigma_{(\gamma, \delta)}^+$  é *redutível*  $(\gamma, \delta)$*

e que  $(X, Y)$  é factor  $*$  de  $(A, B)$ , se  $(A, B) = (X, Y) * (S, W)$  com  $(X, Y) \in \Sigma_{(\gamma, \delta)}^*$ , caso contrário dizemos que  $(A, B)$  é irredutível  $(\gamma, \delta)$ .

**Lema 2.2.1** [60, pag. 53] Se  $(X, Y) \in \Sigma_{(\gamma, \delta)}^*$  tem paridade  $\tau_{(\gamma, \delta)}(X, Y) = (\alpha, \beta)$  então para qualquer sequência finita  $Z$ , temos que  $\tau_{(\gamma, \delta)}((X, Y) * Z) = \tau_{(\alpha, \beta)}(Z)$ .

Deste Lema conclui-se imediatamente que a ordem no contexto  $(\gamma, \delta)$  é transportada para o contexto  $(\alpha, \beta)$  através do produto  $*$ .

**Corolário 2.2.1** [60, pag. 53] Sejam  $(X, Y) \in \Sigma_{(\gamma, \delta)}^*$  com  $\tau_{(\gamma, \delta)}(X, Y) = (\alpha, \beta)$  e  $Z$  e  $Z'$  duas sequências tais que  $Z <_{(\alpha, \beta)} Z'$ , então  $(X, Y) * Z <_{(\gamma, \delta)} (X, Y) * Z'$ .

Finalmente, pode-se concluir que:

**Teorema 2.2.4** [60, pag. 59] Seja  $(X, Y) \in \Sigma_{(\gamma, \delta)}^*$  tal que  $\tau_{(\gamma, \delta)}(X, Y) = (\alpha, \beta)$ , então  $(X, Y) * (S, W) \in \Sigma_{(\gamma, \delta)}^+$  se e só se  $(S, W) \in \Sigma_{(\alpha, \beta)}^*$ .

O produto  $*$  satisfaz a seguinte propriedade:

**Teorema 2.2.5** [60, pag. 59] (**Associatividade**) Sejam  $(X, Y) \in \Sigma_{(\gamma, \delta)}^*$ ,  $(S, W) \in \Sigma_{\tau_{(\gamma, \delta)}(X, Y)}^*$  e  $(K, M) \in \Sigma_{\tau_{(\gamma, \delta)}((X, Y) * (S, W))}^+$ , então

$$((X, Y) * (S, W)) * (K, M) = (X, Y) * ((S, W) * (K, M)).$$

Como é óbvio o produto  $*$  não é comutativo.

### 2.2.3 Renormalização

Nesta secção relaciona-se o produto  $*$  com a renormalização de aplicações *scm2*.

**Definição 2.2.5** [60, pag. 60] *Seja  $f$  uma aplicação scm2 de tipo  $(\gamma, \delta)$ . Dizemos que  $f$  é renormalizável com renormalização  $R^{(n,m)}f$  do tipo  $(\alpha, \beta)$  se existirem pontos  $y_L, y_R \in I$  e  $n, m \in \mathbb{N}$ , tais que a aplicação*

$$R^{(n,m)}f(x) = \begin{cases} f^n(x) & \text{se } x < 0 \\ f^m(x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

*restringida a  $[y_L, y_R]$  é uma aplicação scm2 do tipo  $(\alpha, \beta)$ .*

*A aplicação  $R^{(n,m)}f$  denomina-se renormalização de  $f$ .*

Note-se que, ao contrário do que se passa no caso das aplicações de Lorenz, se  $(\gamma, \delta) \neq (+, +)$  é usual que  $f$  do tipo  $(\gamma, \delta)$  seja renormalizável com renormalização do tipo  $(\alpha, \beta) \neq (\gamma, \delta)$ .

Consideremos as sequências  $m_L(\gamma, \delta)$  (respectivamente  $M_L(\gamma, \delta)$ ) que representa a menor (respectivamente maior) sequência iniciada em  $L$ , para a ordem  $(\gamma, \delta)$ , e  $m_R(\gamma, \delta)$  (respectivamente  $M_R(\gamma, \delta)$ ) que representa a menor (respectivamente maior) sequência iniciada em  $R$ , para a ordem  $(\gamma, \delta)$ .

O próximo teorema estabelece a relação entre  $f$  ser renormalizável e  $K_f$  ser redutível com respeito ao produto  $*$ .

**Teorema 2.2.6** [60, pag. 62] *Seja  $f$  uma aplicação scm2 de classe  $C^3$  com derivada de Schwarz negativa,  $f'(0^-) = f'(0^+) = 0$  e tal que*

$$K_f = (X, Y) * (S, W)$$

*com  $(X, Y) \in \Sigma_{(\gamma, \delta)}^*$ ,  $\tau_{(\gamma, \delta)}(X, Y) = (\alpha, \beta)$ ,  $(S, W) \in \Sigma_{(\alpha, \beta)}^+$ ,  $S \neq m_L(\alpha, \beta)$  e  $W \neq M_R(\alpha, \beta)$ , então:*

1. *O par  $R^{(|X|, |Y|)}f = (f^{|X|}, f^{|Y|})$  restringido a  $[y_L, y_R]$  define uma aplicação scm2 do tipo  $(\alpha, \beta)$ .*



2. O “espaço de fases simbólico”  $\Sigma_{(\gamma,\delta)}^+(K_f)$  pode decompor-se da seguinte forma:

$x \in [y_L, y_R]$  se e só se  $i_f(x) = (X, Y) * Z$  com  $Z \in \Sigma_{(\alpha,\beta)}^+(S, W)$ . Por outro lado,  $x \in I \setminus [y_L, y_R]$  se e só se

$$\left( \exists l : f^l(x) \in [y_L, y_R] \text{ ou } i_f(x) \in \Sigma_{(\gamma,\delta)}^+((X, Y) * (m_L(\alpha, \beta), M_R(\alpha, \beta))) \right).$$

3. Reciprocamente, se  $f$  é uma aplicação scm2 do tipo  $(\gamma, \delta)$  com renormalização  $R^{(n,m)}f$  do tipo  $(\alpha, \beta)$  então existe  $(X, Y) \in \Sigma_{(\gamma,\delta)}^*$  tal que  $|X| = n$ ,  $|Y| = m$ ,  $n_{(\gamma,\delta)}(X, Y) = (\alpha, \beta)$  e  $K_f = (X, Y) * (S, W)$  com  $(S, W) = K_{R^{(n,m)}f} \in \Sigma_{(\alpha,\beta)}^+$ .

## 2.3 Nós, tranças e templates entrançados: uma breve introdução

Segundo é do nosso conhecimento (ver [14] e [54]) a primeira referência à Teoria dos Nós, e que seguiu uma abordagem puramente matemática, remonta ao século XVI e ao trabalho do matemático Francês Allexandre-Theophile Vandermonde (1735 – 1796) que, em 1771, escreveu um artigo intitulado “*Remarques sur les problemes de situation*”.

Mais tarde, no século XIX, Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) (ver [56]) motivado pelo estudo do electromagnetismo foi o primeiro a descobrir um invariante numérico para os nós e elos.

Inspirado pelo trabalho de Gauss, de quem foi aluno em Göttingen, Johann Listing (1808 – 1882) interessou-se pelo estudo dos nós e publicou um artigo parcialmente dedicado ao seu estudo, intitulado “*Vorstudien zur Topology*”. Estava particularmente interessado na quiralidade dos nós, isto é, na equivalência dos nós pela sua imagem refletida num espelho.

William Thomson (Lord Kelvin) (1824–1907) (ver [14]) procurou desenvolver uma teoria que englobasse a “*Teoria Corpuscular da Matéria*” e a “*Teoria Ondulatória da Matéria*”.

Influenciado pelos trabalhos de Helmholtz (1821 – 1894), Thomson propôs que os átomos seriam modelados por nós e que a forma como os nós estavam entrançados determinaria as suas propriedades físicas e químicas.

No mesmo período (ver [14] e [56]), motivado pelos trabalhos de Gauss, James Maxwell (1831 – 1879) interessou-se pelas aplicações que os nós poderiam ter no estudo da electricidade e do magnetismo. Escreveu, em 1873, um trabalho intitulado “*A Treatise on Electricity and Magnetism*” onde utilizou os resultados sobre nós devidos a Gauss. Também se dedicou ao estudo dos nós e dos elos. Determinou diagramas, nos quais especificou o tipo de cruzamento (identificou de diferente forma as partes do nó que passam sobre as outras) e considerou quais as alterações que poderiam ser feitas no diagrama de modo a que o nó continuasse equivalente. Com efeito, identificou os três movimentos, a que mais tarde Reidemeister deu o nome. Apesar dos imensos resultados que obteve nunca os submeteu a apreciação e só um século mais tarde, a título póstumo, foram publicados.

Foi Peter Tait (1831 – 1901) que, em 1867, propôs uma primeira classificação para os nós (ver [14]). A Tait deveram-se ainda uma série de conjecturas que só mais tarde, na década de 80 do século *XX* e após a descoberta do polinómio de Jones, foram demonstradas.

Thomas Kirkman (1806 – 1905) e Charles Little (1858 – 1923) (ver [14] e [54]) conseguiram classificar nós com até onze cruzamentos. Kirkman apercebeu-se que existiam inúmeras duplicações pelo que desenvolveu um método, análogo ao segundo movimento de Reidemeister, para simplificar os seus diagramas dos nós e assim obter uma tabela mais precisa. Este trabalho era moroso e muito complexo pois para além da análise visual não existiam outras formas de identificar nós equivalentes.

A Teoria das Tranças foi desenvolvida por Emil Artin na primeira metade da década de 20 do século *XX* (ver [4], [8]). Uma trança pode definir-se como um conjunto de  $n$  cordas, todas fixas em dois planos horizontais, um em cima e outro em baixo, de tal modo que cada corda intersecta cada plano horizontal exatamente uma única vez. Artin demonstrou

que a disposição das cordas da trança poderia ser alterada de modo a poder obter duas representações da mesma trança. Classificou as tranças usando a *palavra da trança*, isto é, uma sequência de geradores que podiam ser utilizados para construir a trança. Se se identificarem os pontos iniciais e finais da trança, o fecho da trança, obtém-se um nó ou um elo. Artin definiu um outro invariante numérico dos nós, o índice da trança, que corresponde ao menor número de cordas necessárias para formar o fecho de trança correspondente ao nó.

James Alexander (1888 – 1971) (ver [14] e [52]) apercebeu-se das vantagens em relacionar tranças com nós e, em 1923, provou que qualquer elo pode ser representado pelo fecho de uma trança.

Assim, surgiu a questão, ainda sem resposta: *A classificação das tranças pode ser usada para classificar os nós?*

Alexander descobriu, em 1928, um polinómio invariante para caracterizar os nós. Para construir o seu polinómio baseou-se na formulação do Grupo das Tranças proposto por Artin e nos resultados de Reidemeister (1893 – 1971), publicados no livro de nome *Knottentheorie*. O polinómio de Alexander foi o primeiro polinómio invariante em teoria dos nós.

Reidemeister tentou classificar os nós recorrendo a diagramas similares aos publicados por Tait, Little e Kirkman e provou que os três movimentos com o seu nome seriam os únicos necessários para ilustrar a equivalência de dois nós. Este foi o elemento essencial à descoberta de novos invariantes.

Na década de 1960, o matemático Inglês John Conway (1937–) desenvolveu uma versão normalizada do polinómio de Alexander (ver [14], [45] e [52]). Conway usou os movimentos de Reidemeister para demonstrar a invariância do seu polinómio (este polinómio não é um invariante completo para nós, pois existem nós não isotópicos com o mesmo polinómio de Conway). Contudo o polinómio de Conway consegue distinguir a quiralidade em casos em que o polinómio de Alexander não consegue.

Em Maio de 1984 (ver [14], [45] e [52]), Vaughan Jones (1952–) propôs um novo polinómio invariante por isotopia ambiente e, portanto, capaz de identificar dois nós equivalentes.

### 2.3.1 Nós

Grosso modo, a teoria clássica dos nós estuda os modos como uma curva simples, fechada, pode estar mergulhada no espaço.

Ao longo desta secção seja  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  a esfera unitária  $n$ -dimensional, e  $M^3$  uma variedade fechada (compacta, sem bordo) e orientável de dimensão três (por exemplo a esfera unitária  $\mathbb{S}^3$ ).

**Definição 2.3.1** [30, pag. 5] *Um nó,  $K$ , é um mergulho*

$$K : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow M^3.$$

**Definição 2.3.2** [30, pag. 5] *Um elo,  $L$ , é um mergulho*

$$L : \bigsqcup_k \mathbb{S}^1 \hookrightarrow M^3,$$

onde  $\bigsqcup_k \mathbb{S}^1$  representa a união disjunta de uma colecção finita de cópias de  $\mathbb{S}^1$ . (Deste modo, qualquer nó é um elo).

Apesar de os nós serem curvas no espaço, em teoria dos nós, todo o nó é representado pela sua projecção (regular) num plano, construindo-se um diagrama, designado *diagrama do nó*, no qual se representam as partes do nó que passam sobre as outras. Esta informação

é transmitida pela Figura 2.2, onde o segmento quebrado passa sob o segmento sólido, formando um ponto de cruzamento.



Figura 2.2: Representação da corda do nó que passa sobre o outro.

**Definição 2.3.3** [13, pag. 2] *Uma projecção de um nó  $K$  é regular se*

1. *contém apenas um número finito de pontos múltiplos;*
2. *todos os pontos múltiplos são duplos e correspondem a pontos de cruzamento.*

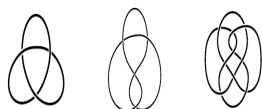


Figura 2.3: Exemplos de projecções regulares de nós.

É usual considerar elos e nós orientados, tal como representado na Figura 2.4 (uma orientação num diagrama de um elo é a escolha de uma direcção em cada uma das componentes, representada por uma seta).

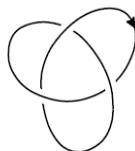


Figura 2.4: Exemplo de um nó orientado

A cada cruzamento num diagrama de um elo orientado é atribuído um sinal. Adoptamos a convenção usada em [30] que está ilustrada na seguinte Figura 2.5.

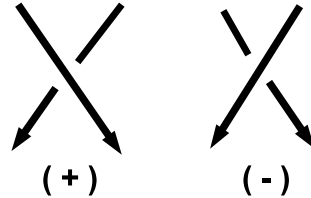


Figura 2.5: Convenção do sinal para cruzamentos.

O problema central na teoria dos nós é o de decidir quando dois nós são o mesmo, ou nós distintos.

**Definição 2.3.4** [30, pag. 5] *Uma isotopia ambiente entre dois nós  $K_1$  e  $K_2$ , é uma homotopia*

$$h_t : M^3 \rightarrow M^3, \quad t \in [0, 1],$$

que verifica as condições,

1.  $h_0 = id_{M^3}$  ;
2. para cada  $t \in [0, 1]$ ,  $h_t$  é um homeomorfismo;
3.  $h_1(K_1) = K_2$ .

Diz-se então que  $K_1$  e  $K_2$  são ambiente isotópicos.

**Observação 2.3.1** *Considerando o parâmetro  $t$  como a variável tempo,  $h_t$  é uma deformação de  $M^3$  que, gradualmente, deforma  $K_1$  em  $K_2$ . A deformação é realizada de modo que todo o espaço ambiente é deformado.*

É de salientar que a restrição  $h_1|_{M^3 \setminus K_1} : M^3 \setminus K_1 \rightarrow M^3 \setminus K_2$ , do homeomorfismo  $h_1 : M^3 \rightarrow M^3$ , é igualmente um homeomorfismo sempre que  $K_1$  e  $K_2$  são ambiente isotópicos.

**Definição 2.3.5** [30, pag. 6] *Dois nós  $K_1$  e  $K_2$  são equivalentes, e escreve-se  $K_1 \sim K_2$ , se são ambiente isotópicos. Definimos o tipo de nó como a classe de equivalência à qual pertence esse nó.*

É conveniente chamar a atenção para o facto de a relação de equivalência entre nós ter por base o conceito de isotopia ambiente. O conceito, mais fraco, de isotopia não é suficiente.

Apesar de ser possível representar nós equivalentes por vários diagramas distintos, dois diagramas de nó são equivalentes se estão relacionados por uma sequência finita de três movimentos  $R_1, R_2$  e  $R_3$  (e respectivos inversos), designados movimentos de Reidemeister, descritos na Figura 2.6.

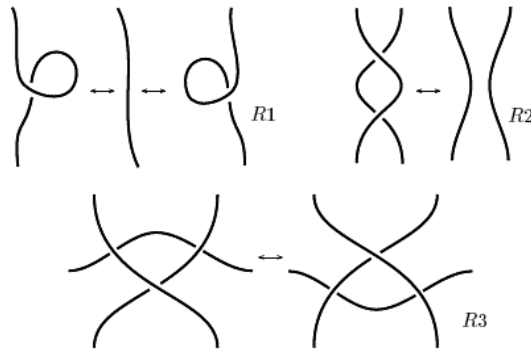


Figura 2.6: Movimentos de Reidemeister

Os movimentos de Reidemeister efectuam alterações locais no diagrama do nó, deixando inalterado o diagrama fora da zona na qual se executou o movimento. Uma vez que cada um dos movimentos de Reidemeister pode ser realizado por uma isotopia ambiente do nó, diagramas equivalentes definem nós equivalentes.

Reciprocamente, Reidemeister demonstrou, em 1935, o próximo resultado

**Teorema 2.3.1** [10] *Sejam  $D$  e  $D'$  dois diagramas do mesmo nó (ou elo),  $K$ . Então existe uma sequência de diagramas*

$$D = D_1 \longrightarrow D_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow D_k = D'$$

*tais que qualquer diagrama  $D_{i+1}$  pertencente à sequência é obtido de  $D_i$  por aplicação de um dos três movimentos de Reidemeister.*

### 2.3.2 Tranças

Das várias definições, equivalentes, de trança, no presente texto vamos começar por considerar a seguinte formulação da definição original de Artin (ver [4] e [8]), de trança geométrica como um sistema de  $n$  cordas entre dois planos paralelos do espaço.

Considerem-se em  $\mathbb{R}^3$  os planos

$$\mathbf{P}_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\} \quad \text{e} \quad \mathbf{P}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1\},$$

estando o referencial orientado de cima para baixo.

**Definição 2.3.6** [30, pag. 10] *Seja  $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$  um conjunto de  $n$  pontos colineares, distintos, do plano  $\mathbf{P}_0$ , que projectamos ortogonalmente no plano  $\mathbf{P}_1$ , obtendo o conjunto de pontos  $\mathcal{P}' = \{P'_1, \dots, P'_n\}$ .*

*Uma trança geométrica suportada por  $\mathcal{P}$ , é um  $n$ -uplo  $b = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  de caminhos*

$$\gamma_i : [0, 1] \rightarrow P_i \times [0, 1]$$

*verificando as condições:*

1.  $\gamma_i(0) = P_i$ , para todos os  $i = 1, \dots, n$ ;



2. cada caminho  $\gamma_i$  une um ponto  $P_i \in \mathbf{P}_0$ , ao ponto  $\gamma_i(1)$  do plano  $\mathbf{P}_1$ , onde  $\gamma_i(1) = P'_{\tau(i)}$ , e  $\tau$  representa uma permutação de  $\{1, \dots, n\}$ ;
3.  $\gamma_i$  é monótona crescente na direcção de  $z$ , para todos os  $i = 1, \dots, n$ ;
4.  $\gamma_i(t) \neq \gamma_j(t), \forall t \in [0, 1]$ , com  $i \neq j, i, j = 1, \dots, n$ .

Os caminhos (ou arcos)  $\gamma_i$  denominam-se cordas da trança  $b$ , e  $\tau$  a permutação da trança.

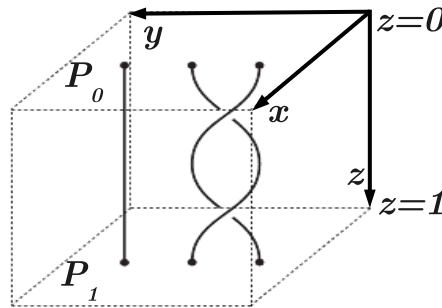


Figura 2.7: Ilustração da Definição 2.3.6.

Para que o conceito de trança seja útil e livre de ambiguidades, é necessário definir equivalência de tranças.

**Definição 2.3.7** [30, pag. 10] Duas tranças  $b_1$  e  $b_2$  são equivalentes, e escreve-se  $b_1 \sim b_2$ , se são ambiente isotópicas em  $\mathbb{R}^3$ , por uma isotopia ambiente que mantém os pontos dos semi-espaços fechados  $z \leq 0$  e  $z \geq 1$ , fixos.

Para todos os  $n \in \mathbb{N}$ , denotemos por  $\mathcal{B}_n$  o conjunto de todas as tranças com  $n$  cordas.

**Proposição 2.3.1** [12, pag. 13] *A relação  $\sim$ , definida no conjunto  $\mathcal{B}_n$  das tranças geométricas, é uma relação de equivalência.*

Por trança  $b$  entendemos um elemento do conjunto  $B_n = \mathcal{B}_n / \sim$ , ou seja,  $b$  é a classe de equivalência de uma trança geométrica.

Tal como no caso dos nós, será conveniente considerar o diagrama de uma trança  $b$ , i.e., a projecção ortogonal de um representante de  $b$  no plano contendo os pontos  $P_1, \dots, P_n$  e  $P'_{\tau(1)}, \dots, P'_{\tau(n)}$ , (ver Figura 2.8).

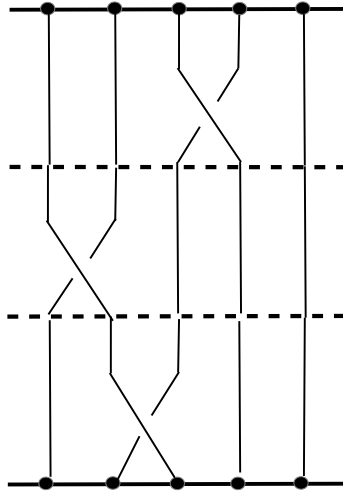


Figura 2.8: Exemplo da representação geométrica de uma trança.

Como se pode observar no diagrama da Figura 2.8, podemos decompor o diagrama de uma trança em diferentes níveis, de forma que em cada nível ocorre apenas um cruzamento entre duas cordas da trança.

Cada um destes níveis é o diagrama de uma trança, denominada trança elementar, e que representaremos por  $\sigma_i$ , ou  $\sigma_i^{-1}$  para  $1 \leq i \leq n-1$ , dependendo do tipo de cruzamento entre a corda  $\gamma_i$  e a corda  $\gamma_{i+1}$ , como indicado na Figura 2.9.

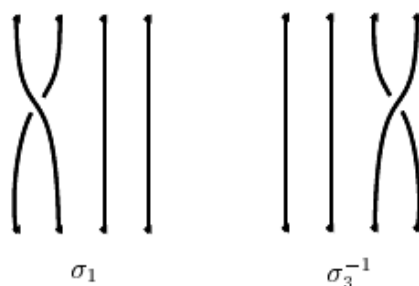


Figura 2.9: Trança elementar.

Uma trança diz-se positiva se, de acordo com a convenção adotada na Figura 2.5, é uma trança em que todos os pontos de cruzamento são positivos.

Uma trança diz-se simples se é uma trança positiva na qual duas cordas diferentes se cruzam uma e uma única vez.

### O grupo das Tranças

É possível munir o conjunto  $B_n$  de uma estrutura de grupo, definindo uma operação, produto de tranças, do seguinte modo.

Dados dois representantes de  $b_1$  e  $b_2$  em  $B_n$ , identificamos a parte inferior de  $b_1$  com a parte superior de  $b_2$ , de forma que as extremidades das cordas de cada uma das tranças resultam igualmente identificadas, como se pode observar na Figura 2.10.

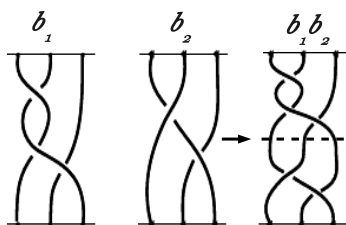


Figura 2.10: Produto de duas tranças.

Deste modo obtemos uma nova trança, denotada  $b_1b_2$ , trança produto de  $b_1$  por  $b_2$ . Podemos, portanto, enunciar o seguinte resultado:

**Teorema 2.3.2** [12, pag. 20] *Sejam  $b_1$  e  $b_2 \in B_n$ , Então  $b_1b_2 \in B_n$ .*

**Teorema 2.3.3** [12, pag. 20] *Com a operação binária, produto de duas tranças. acima definida o conjunto das tranças,  $B_n$ , é um grupo não comutativo.*

O grupo  $B_n$ , denominado grupo de Artin, admite uma apresentação, tendo como conjunto de geradores o conjunto das tranças elementares  $\sigma_i^{\pm 1}$ .

Para definir uma representação de  $B_n$ , uma vez que  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}$  é um conjunto de geradores, basta determinar um conjunto de relações entre os elementos de  $B_n$ .

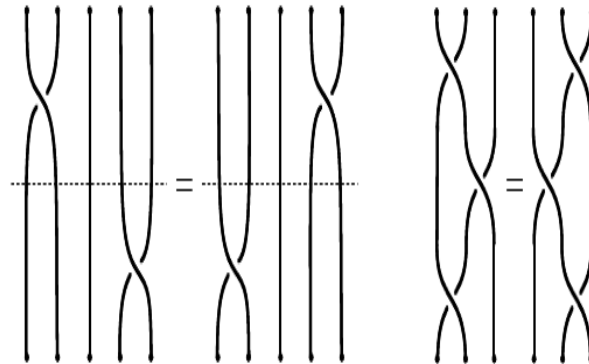


Figura 2.11: Relações para o grupo  $B_n$ .

**Teorema 2.3.4** [8] *O grupo  $B_n$  admite uma apresentação da forma*

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1} \left| \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & (|i - j| \geq 2) \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & (i = 1, \dots, n - 2) \end{array} \right. \right\rangle. \quad (2.4)$$

Seja  $b$  uma trança suportada por  $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$ . O fecho de  $b$  é um elo obtido de  $b$  unindo os pontos  $P_i$  a  $P'_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , com arcos  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  de forma que, à exceção

dos pontos  $P_i$  e  $P'_i$ , os arcos  $\gamma_i$  não possuem outros pontos em comum com  $b$ , e além disso  $\gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset$  se  $i \neq j$ .

Denotamos o fecho de uma trança,  $b$ , por  $\bar{b}$ .

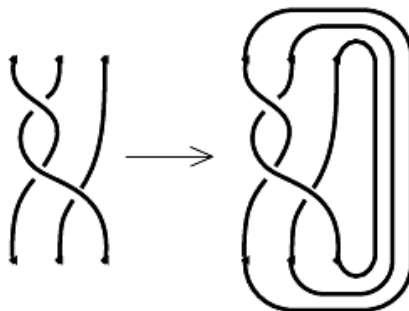


Figura 2.12: Fecho de uma trança.

**Teorema 2.3.5** ([12, pag. 65]) (*Teorema de Alexander*, 1923). *Seja  $E$  um elo arbitrário. Então existe uma trança  $b$  tal que  $\bar{b} \sim E$ .*

### 2.3.3 Invariantes numéricos

Um dos problemas associados à Teoria dos nós é o “*Problema da equivalência para nós (e elos)*”, que pode ser enunciado do seguinte modo: “Quando é que dois nós são isotópicos por uma isotopia ambiente?”

Nesta secção apresentaremos um conceito que nos permite abordar este problema.

Suponhamos que a cada nó,  $K$ , associamos uma determinada quantidade  $\rho(K)$ . Se para dois nós equivalentes as quantidades associadas forem sempre iguais então, a essa quantidade  $\rho(K)$ , chamamos invariante do nó.

Portanto a quantidade  $\rho(K)$ , ao ser um invariante para cada classe de isotopia do nó, também não pode ser modificada por aplicação de um número finito de movimentos de Reidemeister.

Contudo, refira-se que até ao momento não foram construídos invariantes numéricos completos, o que significa que tais funções não são injectivas. Apesar disso estes invariantes revelam a sua utilidade na distinção de nós e elos não equivalentes.

Com efeito, embora possamos afirmar que se dois nós são equivalentes então os seus invariantes são iguais, o recíproco não é, em muitos casos, verdade. Apesar disso, se para dois nós existirem invariantes numéricos com valores diferentes, esses nós não são equivalentes, pelo que é uma forma muito eficiente de mostrar que dois nós não são equivalentes.

Apresentamos de seguida alguns invariantes numéricos simples.

### O número mínimo de pontos de cruzamento

Consideremos  $D$  a projecção regular de um nó (ou elo)  $K$ . Como sabemos,  $D$  contém um número finito de pontos de cruzamento. Contudo, este número de pontos de cruzamento  $cr(D)$  não é um invariante de nós. Por exemplo, o nó trivial admite como projecção regular os seguintes diagramas  $D$  e  $D'$ , com diferentes números de cruzamento.

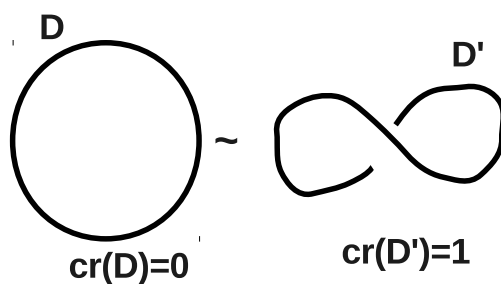


Figura 2.13: O nó trivial com diferentes números de cruzamento.

Contudo, se considerarmos todas as possíveis projecções regulares de  $K$  e definirmos  $cr(K)$  como o número mínimo de pontos de cruzamento para todos os diagramas regulares, este número  $cr(K)$ , é um invariante numérico para nós.

Podemos então enunciar o seguinte Teorema:

**Teorema 2.3.6** [52, pag. 57] *Seja  $\mathcal{D}$  o conjunto de todas as representações regulares,  $D$ , de  $K$ . Então, o número mínimo de pontos de cruzamento*

$$cr(K) = \min_{\mathcal{D}} cr(D),$$

*é um invariante de nós.*

Para definir este invariante não tivemos necessidade de considerar uma orientação para o nó.

### O número de ligação

Consideremos um elo  $E$  com duas componentes  $K$  e  $K'$ . Existe uma função numérica, que indica o quão “enlaçados” estão  $K$  e  $K'$ , denominada número de ligação,  $l(K, K')$ , do elo.

A definição que apresentamos a seguir exige a representação do elo através de um diagrama regular ao qual será atribuída uma determinada orientação. Assim, poderemos associar a cada ponto de cruzamento, da representação, um dos números  $+1$  e  $-1$  de acordo com a definição anteriormente adoptada, ver Figura 2.5.

Consideremos agora  $D$  o diagrama regular orientado de  $E$  cujos pontos de cruzamento entre  $K$  e  $K'$  são  $cr_1, \dots, cr_m$  (onde não são considerados os pontos de cruzamento entre cordas do mesmo nó).

Então, o número de ligação é dado pela expressão

$$l(K, K') = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \text{sign}(cr_i).$$

**Teorema 2.3.7** [52, pag. 65] *Seja  $E$  um elo com duas componentes  $K$  e  $K'$ . O número de ligação  $l(K, K')$  é um invariante de  $E$ .*

O número de ligação é um invariante que depende da orientação do elo.

## Genus

Neste parágrafo, introduzimos o conceito de genus e superfície de Seifert.

Seja  $\mathcal{M}$ , uma superfície orientada sem fronteira. Definimos o seu genus, que denotamos por  $g(\mathcal{M})$ , como o número de buracos da superfície. Deste modo, se  $\mathcal{M}$  for homeomorfa a um  $n$ -toro,  $g(\mathcal{M}) = n$ .

Como uma superfície com fronteira corresponde a uma superfície sem fronteira à qual foram removidos  $B$  discos, a que chamamos número de componentes da fronteira, o seu genus é igual ao da superfície sem fronteira obtida pela remoção de  $B$  discos.

Assim, uma superfície orientada, de genus  $n$ , com fronteira, com  $B$  componentes, é homeomorfa a um  $n$ -toro ao qual foram removidos  $B$  discos.

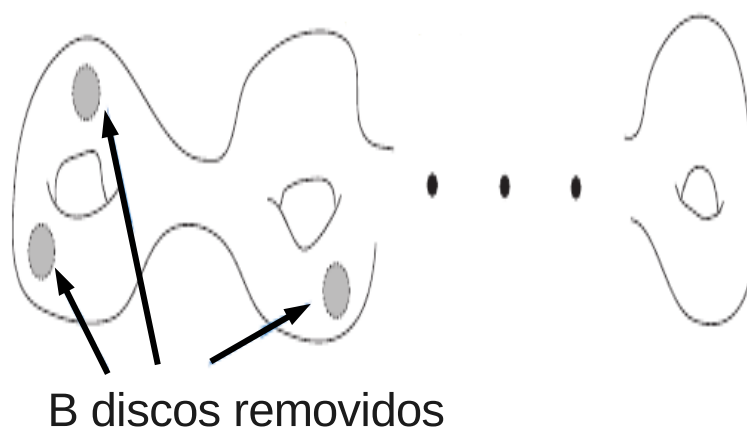


Figura 2.14: Ilustração da definição de genus de uma superfície orientada com fronteira

O seguinte resultado, é devido a Pontrjagin e Frankl:

**Teorema 2.3.8** [52, pag. 76] *Qualquer que seja o nó (ou elo),  $K$ , existe em  $\mathbb{R}^3$  uma superfície conexa, orientada  $F$  que tem como fronteira  $K$  (isto é, existe uma superfície conexa e orientada que gera  $K$ ).*



Este Teorema foi também demonstrado por Seifert. Para o fazer, Seifert construiu uma superfície compacta conexa e orientada cuja fronteira é representada pelo diagrama do nó.

Embora possa parecer surpreendente que tal superfície possa existir para qualquer nó (ou elo) Seifert demonstrou que pode ser obtida seguindo o seguinte algoritmo (ver [52, pag. 77]):

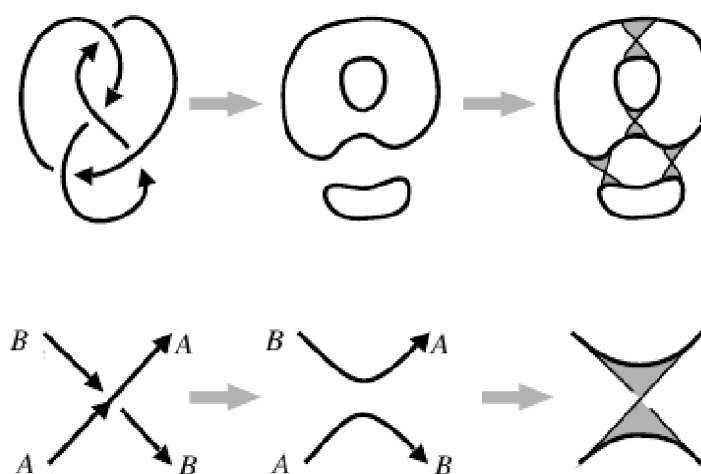


Figura 2.15: Ilustração do algoritmo de Seifert

1. Fixamos um diagrama orientado para o nó;
2. Eliminamos todos os pontos de cruzamento. Tendo em conta que em cada cruzamento da projecção, duas cordas se “encontram ”o cruzamento é eliminado “cortando” as cordas e juntando o fim de um com o início da outra, e vice versa. Como resultado, obtemos um conjunto de círculos topológicos que não se intersectam, denominados círculos de Seifert, que podemos imaginar a diferentes alturas em vez de sobre o plano. Por exemplo, se um círculo está contido noutra podemos imaginar o mais pequeno um nível acima do maior;

3. Preenchemos cada um dos círculos com discos. De seguida ligamos os discos colando tiras com torções determinadas pelo sinal dos cruzamentos. A direcção das torções em cada uma das tiras pode identificar-se com a direcção dos cruzamentos no diagrama do nó.

Contudo, para diferentes projecções regulares do nó podemos obter diferentes superfícies de Seifert e, conseqüentemente, diferentes genus. Ultrapassamos este problema usando o mesmo artifício utilizado no cálculo do número mínimo de pontos de cruzamento de um nó.

**Definição 2.3.8** [52, pag. 81] *Dado um elo  $L$ , o genus de  $L$ ,  $g(L)$ , é o mínimo de todos os genus das superfícies de Seifert de  $L$ .*

O seguinte teorema é devido a Birman e Williams, [9].

**Teorema 2.3.9** [30, pag. 14] *Dado um elo,  $K$ , e uma trança representativa desse elo,  $b_K$ , temos que*

$$g(K) = \frac{C - N - u}{2} + 1,$$

onde  $C$  é o número de cruzamentos de  $b_K$ ,  $N$  o número de cordas do nó e  $u$  o número de componentes do elo.

### 2.3.4 Templates entrançados

Nesta secção temos como objectivo a introdução dos princípios básicos da *Teoria de Templates*. Grosso modo, um template é uma variedade ramificada com dimensão dois, que suporta órbitas periódicas de um fluxo. Esta ideia foi introduzida por Birman e Williams em [9] para estudar órbitas periódicas no sistema de Lorenz. Birman e Williams conjecturaram que qualquer nó ou elo gerado por órbitas periódicas do sistema de Lorenz, pode ser mergulhado no template de Lorenz. Este resultado foi recentemente demonstrado por Tucker, em [67].

**Definição 2.3.9** [30, pag. 37] Um *template* é uma variedade ramificada de dimensão dois, compacta e com bordo, com um atlas constituído por cartas de dois tipos: de junção e divisão. Cada carta, como ilustra a Figura 2.16, suporta um semifluxo e as aplicações de colagem de cartas devem respeitar os respectivos semifluxos, dotando assim o template de um semifluxo.

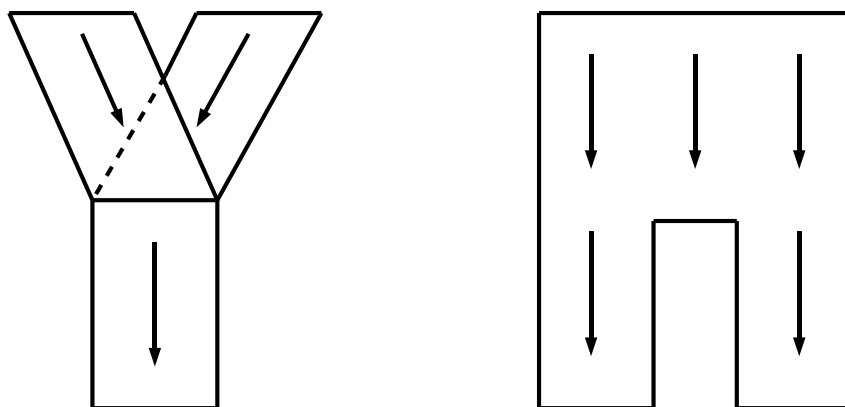


Figura 2.16: Cartas do atlas de um template: junção e divisão.

Em particular, o template de Lorenz obtém-se colando a parte inferior da carta de junção com o topo da carta de divisão e a parte inferior da carta de divisão com os ramos da carta de junção, como ilustra a Figura 2.17.

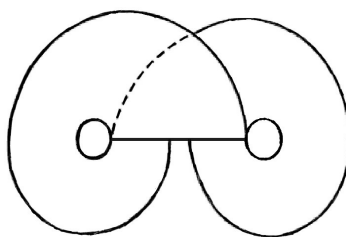


Figura 2.17: Template de Lorenz

A relação entre os templates e os elos de órbitas periódicas no fluxo tridimensional foi estabelecida mediante um resultado chave, o **Teorema do Template**, obtido por Birman

e Williams em 1983, [9].

**Teorema 2.3.10 (Teorema do Template).** [30, pag. 38] *Seja  $\phi^t$  um fluxo numa variedade de dimensão três,  $M$ , possuindo uma estrutura hiperbólica no seu conjunto recorrente por cadeias. Então, existe um template  $\mathcal{T}$  mergulhado em  $M$ , tal que o elo de órbitas periódicas  $\mathcal{E}_\phi$  está em correspondência bijectiva com o elo de órbitas periódicas  $\mathcal{E}_\mathcal{T}$ , (salvo a possível existência de uma ou duas órbitas periódicas em  $\mathcal{E}_\mathcal{T}$ ). Em qualquer sub-elos finito, a correspondência é via isotopia ambiente.*

Em [27], J. Franks e R. Williams recorrem ao Teorema de Alexander 2.3.5 para transformar mediante isotopia, um template numa forma que designaram template entrançado.

**Definição 2.3.10** [30, pag. 69] *Um template  $\mathcal{T}$  diz-se entrançado se  $\mathcal{T}$  está mergulhado em  $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$  de tal forma que toda a órbita periódica em  $\mathcal{T}$  é o fecho de uma trança. Um template diz-se positivo se puder ser entrançado de modo a qualquer órbita fechada corresponder a uma trança positiva.*

Assim, tendo em conta que um template,  $\mathcal{T}$ , diz-se orientável se a translação de um qualquer sistema de coordenadas ao longo de órbitas periódicas em  $\mathcal{T}$  preserva a orientação, o seguinte Teorema estabelece um resultado análogo ao Teorema de Alexander 2.3.5 no contexto dos templates entrançados.

**Teorema 2.3.11 (Teorema de Alexander para o entrançamento do template)** [30, pag. 69] *Todo o template  $\mathcal{T}$  pode ser transformado, por isotopia, num template entrançado. Mais, se o template é orientável então é sempre possível encontrar uma sua projecção plana na qual as faixas de  $\mathcal{T}$  não apresentam torção.*

Segundo [30, pag. 98], podemos tomar uma estrutura de semigrupo no conjunto dos templates entrançados. Os geradores para este semigrupo são, como demonstra o Lema 2.3.1:

1.  $\sigma_i^\pm$ , um cruzamento positivo (resp.negativo) entre as faixas situadas nas  $i$ -ésima e  $(i + 1)$ -ésima posições. Estes geradores admitem inverso;
2.  $\tau_i^\pm$ , uma torção na faixa que ocupa a  $i$ -ésima posição, no sentido positivo (resp. negativo). Estes geradores também admitem inverso;
3.  $\beta_i^\pm$ , uma carta de intervalo de ramificação com as  $i$ -ésima e  $(i + 1)$ -ésima faixas juntando-se, e duas saindo e um cruzamentos positivo ( $\beta_i$ ) ou negativo ( $\beta_i^-$ ) na linha de ramificação. Estes geradores não são invertíveis.

A Figura 2.18 ilustra estes geradores.

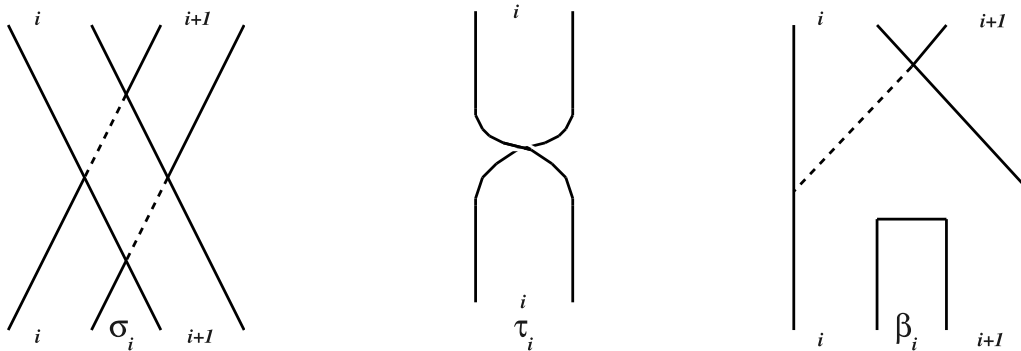


Figura 2.18: Geradores do semigrupo dos templates entrançados

**Lema 2.3.1** [30, pag. 98] *O conjunto  $\{\sigma_i^\pm, \beta_i^\pm, \tau_i^\pm\}$  é base da classe dos templates entrançados.*

Recorrendo ao modelo geométrico do atrator de Lorenz, podemos descrever simbolicamente o fluxo de Lorenz, associando a cada ponto  $x \in I$ , uma sequência simbólica gerada pela aplicação sequencial de uma aplicação de primeiro retorno  $f$  do tipo de Lorenz, isto é, do tipo  $(+, +)$ , como ilustra a Figura 2.19.

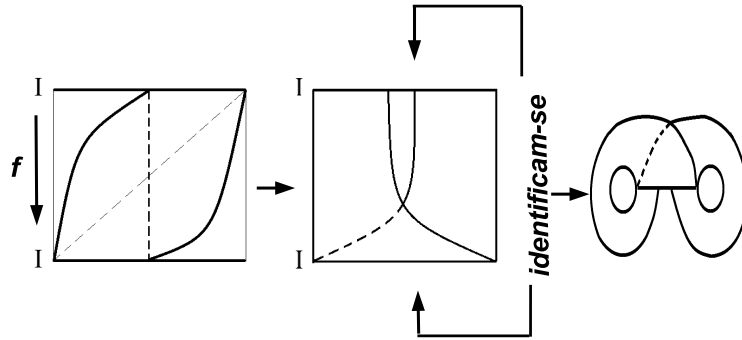


Figura 2.19: A aplicação de primeiro retorno  $f$  definida em  $[-1, 1]$  e o template de Lorenz induzido pela aplicação de  $f$ .

Birman e Williams apresentaram, em [9], o seguinte algoritmo que permitirá associar um nó a uma sequência simbólica periódica:

Começa-se por considerar  $X \in \{L, R\}^{\mathbb{N}}$  uma sequência periódica, de período mínimo  $k$  e define-se  $\varphi \in \Sigma_k$  a permutação que associa a cada  $i$ , a posição ocupada por  $s^i(X)$  segundo a ordem lexicográfica do  $k$ -uplo  $(s(X), \dots, s^k(X))$  ( $s^k(X) = X$ ) e  $\pi \in \Sigma_k$  a permutação dada por  $\pi(\varphi(i)) = \varphi(i \bmod k + 1)$ , isto é,  $\pi(i) = \varphi(\varphi^{-1}(i) + 1)$ .

De seguida associa-se a  $\pi$  a correspondente trança simples  $b_\pi \in B_k$  a que chamamos *trança de Lorenz* associada a  $X$ . Como  $X$  é uma sequência simbólica periódica, esta trança representa um nó, a que damos o nome de *nó de Lorenz* associado a  $X$ .

**Exemplo 2.3.1** Seja  $X = (LRRLR)^\infty$ . Então, aplicando sucessivamente a aplicação de deslocamento, tem-se que  $s^5(X) = X$ ,  $s(X) = (RRLRL)^\infty$ ,  $s^2(X) = (RLRLR)^\infty$ ,  $s^3(X) = (LRLRR)^\infty$  e  $s^4(X) = (RLRRL)^\infty$ .

Após ordenar lexicograficamente as sequências  $s^i(X)$  obtém-se

$$s^3(X) < s^5(X) < s^2(X) < s^4(X) < s(X).$$

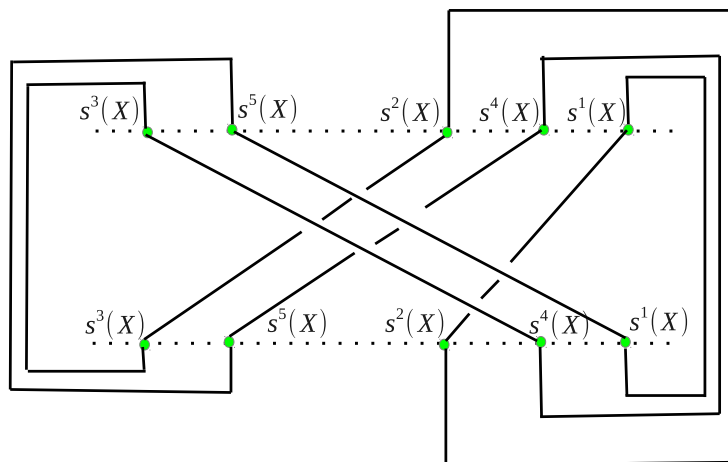


Figura 2.20: O nó de Lorenz associado a  $X = (LRRLR)^\infty$

## Capítulo 3

# Dinâmica simbólica e renormalização de sistemas $(k, 2)$

A maior parte dos modelos matemáticos utilizados em sistemas dinâmicos discretos aplicados em diferentes áreas científicas como a Biologia, a Física, a Economia, ou outras, são gerados pela iteração sucessiva de uma única aplicação. Contudo, muito frequentemente, esta abordagem não é realista pois existem muitos processos que envolvem diferentes respostas de acordo com os diferentes passos tomados (ver, por exemplo, [19], [20], [47] e [43]). Então, para modelar estes sistemas é necessário recorrer à iteração consecutiva de uma sequência de aplicações. Estes sistemas dinâmicos denominam-se não autónomos e quando a sequência de aplicações é periódica denominam-se não autónomos periódicos.

Neste capítulo desenvolveremos o formalismo simbólico, baseado na teoria do amassamento, necessário ao estudo da renormalização de sistemas dinâmicos não autónomos periódicos gerados pela iteração sequencial de aplicações *scm2*. Para o fazer, recorreremos ao formalismo dos produtos enviesados (ver [20]), de modo a poder desenvolver a teoria do amassamento para sistemas dinâmicos não autónomos periódicos gerados por uma sequência finita de aplicações unidimensionais  $f_0, \dots, f_{k-1}$  seccionalmente contínuas e monótonas com



dois troços que, tal como anteriormente, denotaremos por  $scm2$ .

Após estabelecermos o formalismo simbólico, introduziremos o conceito de renormalização para estes sistemas, generalizaremos a definição de produto-\*, de modo a poder ser aplicado a estes sistemas, e estabeleceremos a equivalência entre a renormalização de sistemas dinâmicos não autónomos periódicos e a redutibilidade da sua informação de amassamento relativamente ao produto \*.

Os resultados deste capítulo encontram-se publicados em [26] e [61].

### 3.1 Sistemas dinâmicos $(k, 2)$

Nesta secção vamos formalizar a noção de sistemas dinâmicos associados à iteração sequencial de aplicações  $scm2$  e introduzimos os conceitos de dinâmica simbólica associada a estes sistemas dinâmicos.

Consideremos uma sequência de aplicações  $scm2$ ,  $f_0, \dots, f_{k-1}$ , definidas no intervalo  $I = [-1, 1]$ . Definimos o sistema dinâmico não autónomo gerado por  $f_0, \dots, f_{k-1}$  como sendo o sistema dinâmico definido pela iteração da aplicação

$$F : (I \setminus \{0\}) \times \{0, \dots, k-1\} \rightarrow I \times \{0, \dots, k-1\},$$

onde

$$F(x, i) = (f_i(x), (i+1) \bmod k).$$

Então, para cada  $n \geq 1$ , a  $n$ -ésima iteração de  $F$  é dada pela expressão

$$F^n(x, i) = (f_{(i+n-1) \bmod k} \circ f_{(i+n-2) \bmod k} \circ \dots \circ f_i(x), (i+n) \bmod k),$$

que para quando  $F^n(x, i) = (0, (i+n) \bmod k)$ . Denominamos estes sistemas de sistemas dinâmicos por sistemas  $(k, 2)$ .

Dizemos que o sistema  $(k, 2)$ ,  $F$ , gerado por uma sequência finita de aplicações  $scm2$   $f_0, \dots, f_{k-1}$ , é do tipo  $(\Gamma, \Delta)$ , onde

$$(\Gamma, \Delta) = (\gamma_0 \dots \gamma_{k-1}, \delta_0 \dots \delta_{k-1})$$

e  $f_i$  é do tipo  $(\gamma_i, \delta_i)$ , para cada  $i = 0, \dots, k-1$ .

Aos espaços  $I \times \{j\}$ ,  $j \in \{0, \dots, k-1\}$ , chamamos fibras de  $F$ .

### 3.1.1 Dinâmica simbólica associada a sistemas $(k, 2)$

Grosso modo a ideia da dinâmica simbólica pode resumir-se a efectuar uma partição do espaço de fases de um sistema dinâmico discreto e a cada elemento dessa partição associar um símbolo.

Assim, com o objectivo de caracterizar a dinâmica simbólica dos sistemas  $(k, 2)$ , associamos a cada ponto  $x \in I$ , o seu endereço simbólico  $ad(x)$ ,

$$ad(x) = \begin{cases} L & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ R & \text{se } x > 0 \end{cases},$$

e definimos o itinerário de um ponto  $(x, i) \in I \times \{0, \dots, k-1\}$ , pela iteração de  $F$ , como o par simbólico

$$i_F(x, i) = (ad(x)ad(f_i(x)) \dots ad((f_{(i+n) \bmod k} \circ \dots \circ f_i)(x)) \dots, i).$$

Assim, o itinerário de um ponto  $(x, i) \in I \times \{0, \dots, k-1\}$  corresponde a um par simbólico  $(X, i)$ , cuja primeira projecção é uma sequência finita, de comprimento  $n$ , se e só se

$$F^n(x, i) = (0, (i+n) \bmod k).$$

Consideremos o conjunto  $\Sigma$  das seqüências simbólicas  $X_0 \dots X_{n-1} X_n$  onde cada um dos símbolos  $X_i \in \{L, R\}$ , para todos os  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ , e  $n = \infty$  ou  $n < \infty$  e  $X_n = 0$ . O nosso espaço simbólico será então  $\Sigma \times \{0, \dots, k-1\}$ .

Definimos a aplicação deslocamento

$$s : (\Sigma \setminus \{0\}) \times \{0, \dots, k-1\} \rightarrow \Sigma \times \{0, \dots, k-1\}$$

de tal modo que

$$s(X_0 \dots X_n, i) = (X_1 \dots X_n, (i+1) \bmod k).$$

Se considerarmos  $i_F$  como a aplicação de  $I \times \{0, \dots, k-1\}$  em  $\Sigma \times \{0, \dots, k-1\}$  que a cada ponto associa o respectivo itinerário, temos que  $i_F$  semiconjuga as dinâmicas de  $F$  com as de  $s$  através da comutatividade do seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} I \setminus \{0\} \times \{0, \dots, k-1\} & \xrightarrow{F} & I \times \{0, \dots, k-1\} \\ i_F \downarrow & & \downarrow i_F \\ \Sigma \setminus \{0\} \times \{0, \dots, k-1\} & \xrightarrow{s} & \Sigma \times \{0, \dots, k-1\} \end{array}$$

Consideremos agora um par de seqüências de sinais

$$(\Gamma, \Delta) = (\gamma_0 \dots \gamma_{k-1}, \delta_0 \dots \delta_{k-1})$$

com  $\gamma_i, \delta_i \in \{-, +\}$ , para todos os  $i \in \{0, \dots, k-1\}$ . Para cada  $X \in \{L, R\}$  tomamos os sinais

$$\epsilon_{(\Gamma, \Delta)}(X, i) = \begin{cases} \gamma_i & \text{se } X = L \\ \delta_i & \text{se } X = R \end{cases}.$$

Dada uma seqüência finita  $S = S_0 \dots S_{n-1} \in \{L, R\}^n$ , para cada  $i \in \{0, \dots, k-1\}$ ,

definimos a paridade de  $(S, i)$ , no contexto  $(\Gamma, \Delta)$ , por

$$n_{(\Gamma, \Delta)}(S, i) = \# \{0 \leq j < n : \epsilon_{(\Gamma, \Delta)}(S_j, (i + j) \bmod k) = -\}.$$

Considerando as relações de ordem naturais  $L < 0 < R$  e  $-R < 0 < -L$ , e dependendo do contexto  $(\Gamma, \Delta)$ , induzimos em cada fibra simbólica  $\Sigma \times \{i\}$  a relação de ordem  $<_{[(\Gamma, \Delta), i]}$  onde

$$(X, i) <_{[(\Gamma, \Delta), i]} (Y, i)$$

se e só se existir  $j \geq 0$  tal que

$$X_0 \dots X_{j-1} = Y_0 \dots Y_{j-1}$$

e

$$(-1)^{n_{(\Gamma, \Delta)}(X_0 \dots X_{j-1}, i)} X_j < (-1)^{n_{(\Gamma, \Delta)}(Y_0 \dots Y_{j-1}, i)} Y_j.$$

De agora em diante denotamos por  $\pi$ , tanto a primeira projecção  $\pi(X, i) = X$  como  $\pi(x, i) = x$ . Tendo em conta esta notação, verificamos que  $\pi(F^n(x, i)) = (f_{i+(n-1) \bmod k} \circ \dots \circ f_i)(x)$  e, para  $k \leq n$ ,  $\pi(s^k(X_0 \dots X_n, i)) = X_k \dots X_n$ .

Consideremos agora um sistema  $(k, 2)$ ,  $F$ , gerado por uma sequência  $f_0, \dots, f_{k-1}$  de aplicações *scm2*, de tipos,  $(\gamma_0, \delta_0), \dots, (\gamma_{k-1}, \delta_{k-1})$ , respectivamente. Consideremos também, o par de sequências de sinais  $(\Gamma, \Delta) = (\gamma_0 \dots \gamma_{k-1}, \delta_0 \dots \delta_{k-1})$ , então o seguinte resultado mostra que os itinerários reproduzem nas fibras simbólicas  $\Sigma \times \{i\}$  a estrutura de ordem natural de  $I$ .

**Proposição 3.1.1** *Seja  $F$  um sistema  $(k, 2)$  não autónomo e  $x, y \in I$ ; temos que:*

1. *Se  $x < y$  então  $i_F(x, i) \leq_{[(\Gamma, \Delta), i]} i_F(y, i)$  para todo o  $i$ ;*
2. *Se  $i_F(x, i) <_{[(\Gamma, \Delta), i]} i_F(y, i)$ , para algum  $i$ , então  $x < y$ .*

**Demonstração:**

Suponhamos que  $x, y \in I$  são tais que  $x < y$  e  $i_F(x, i) \neq i_F(y, i)$ . Seja  $n \geq 0$  tal que

$$\pi(i_F(x, i))_j = \pi(i_F(y, i))_j \quad \text{para } j = 0, \dots, n-1$$

e  $\pi(i_F(x, i))_n \neq \pi(i_F(y, i))_n$ .

Isto significa que  $0 \in \pi(F^n([x, y], i))$  e que, portanto, as aplicações

$$\pi(F(\cdot, i)), \dots, \pi(F^n(\cdot, i))$$

são contínuas e monótonas em  $[x, y]$ .

Com efeito,  $\pi(F^n(\cdot, i))$  é crescente se e só se

$$n_{(\Gamma, \Delta)}(\pi(i_F(x, i))_0 \dots \pi(i_F(x, i))_{n-1}, i)$$

é um número par, e decrescente se e só se é ímpar.

Consequentemente, se  $\pi(F^n(\cdot, i))$  é crescente então  $\pi(F^n(x, i)) < \pi(F^n(y, i))$ ,  $ad(\pi(F^n(x, i))) < ad(\pi(F^n(y, i)))$  e

$$(-1)^{n_{(\Gamma, \Delta)}(\pi(i_F(x, i))_0 \dots \pi(i_F(x, i))_{n-1}, i)} \pi(i_F(x, i))_n < (-1)^{n_{(\Gamma, \Delta)}(\pi(i_F(x, i))_0 \dots \pi(i_F(x, i))_{n-1}, i)} \pi(i_F(y, i))_n.$$

Analogamente, se  $\pi(F^n(\cdot, i))$  é decrescente então  $\pi(F^n(x, i)) > \pi(F^n(y, i))$  e

$$(-1)^{n_{(\Gamma, \Delta)}(\pi(i_F(x, i))_0 \dots \pi(i_F(x, i))_{n-1}, i)} \pi(i_F(x, i))_n > (-1)^{n_{(\Gamma, \Delta)}(\pi(i_F(x, i))_0 \dots \pi(i_F(x, i))_{n-1}, i)} \pi(i_F(y, i))_n.$$

Isto prova **1.**

A demonstração de **2.** é imediata, bastando para tal inverter a argumentação da demonstração de **1.**

■

### 3.1.2 Invariantes de amassamento

Milnor e Thurston, no artigo [46], introduziram o conceito de invariante de amassamento. Este invariante permite-nos abordar o problema da classificação topológica interpretando simbolicamente as dinâmicas das aplicações unidimensionais. Inicialmente este conceito foi usado para estudar aplicações contínuas, tendo sido generalizado para aplicações de Lorenz em [55] e usado desde então por diversos autores, nomeadamente, em [41] onde Hubbard e Sparrow mostram que os invariantes de amassamento são um invariante topológico completo no caso das aplicações de Lorenz expansivas.

Aqui generalizamos estes conceitos e os introduzidos em [60], para o estudo dos invariantes de amassamento de aplicações  $scm2$ .

Dado um sistema  $(k, 2)$ ,  $F$ , definimos o seu invariante de amassamento como o  $k$ -uplo de pares de sequências simbólicas

$$K[F] = [(X^0, Y^0); \dots; (X^{k-1}, Y^{k-1})] = [(X^i, Y^i)]_{i=0}^{k-1}$$

onde,

$$(X^i, Y^i) = (L\pi(i_F(f_i^L(0), (i+1) \bmod k)), R\pi(i_F(f_i^R(0), (i+1) \bmod k))).$$

Interessa-nos saber quais são os  $k$ -uplos de pares de sequências simbólicas que são realizáveis como invariantes de amassamento de sistemas  $(k, 2)$  do tipo  $(\Gamma, \Delta)$ .

Neste contexto, dizemos que o  $k$ -uplo de pares de sequências simbólicas  $[(X^i, Y^i)]_{i=0}^{k-1}$  é  $(\Gamma, \Delta)$ -admissível se se verificam as seguintes condições:

1.  $[(X^i, Y^i)]_{i=0}^{k-1} \in (\Sigma^2)^k$ , com  $X_0^j = L$  e  $Y_0^j = R$  para todos os  $j = 0, \dots, k-1$ ;

2. Quaisquer que sejam  $n > 0$ , e  $(S, i) \in \bigcup_{i=0}^{k-1} \{(X^i, i), (Y^i, i)\}$ :

- Se  $S_n = L$  então  $s^n(S, i) \leq_{[(\Gamma, \Delta), (i+n) \bmod k]} (X^{(i+n) \bmod k}, (i+n) \bmod k)$ ;
- Se  $S_n = R$  então  $s^n(S, i) \geq_{[(\Gamma, \Delta), (i+n) \bmod k]} (Y^{(i+n) \bmod k}, (i+n) \bmod k)$ .

3. As desigualdades anteriores são estritas se alguma das sequências simbólicas envolvidas for finita.

Denotamos por  $\Sigma_{(\Gamma, \Delta)}^+ \subset (\Sigma^2)^k$ , o conjunto dos  $2k$ -uplos de sequências  $(\Gamma, \Delta)$ -admissíveis.

O próximo teorema estabelece que as condições de  $(\Gamma, \Delta)$ -admissibilidade determinam com exactidão quais os  $2k$ -uplos de sequências simbólicas realizadas como invariante de amassamento de algum sistema  $(k, 2)$  de tipo  $(\Gamma, \Delta)$ .

**Teorema 3.1.1** *Se  $[(X^i, Y^i)]_{i=0}^{k-1} \in (\Sigma^2)^k$ , então existe um sistema  $(k, 2)$ ,  $F$ , de tipo  $(\Gamma, \Delta)$  tal que  $[(X^i, Y^i)]_{i=0}^{k-1} = K[F]$  se e só se*

$$[(X^i, Y^i)]_{i=0}^{k-1} \in \Sigma_{(\Gamma, \Delta)}^+.$$

### Demonstração:

Se  $[(X^i, Y^i)]_{i=0}^{k-1} = K[F]$ , para algum  $F$  do tipo  $(\Gamma, \Delta)$ , como consequência da definição de  $K[F]$  e da Proposição 3.1.1, verificamos que  $[(X^i, Y^i)]_{i=0}^{k-1}$  satisfaz as condições (1) e (2) de  $(\Gamma, \Delta)$ -admissibilidade. A condição (3) é um resultado imediato do facto das aplicações  $f_i^L$  e  $f_i^R$  serem estritamente monótonas.

Suponhamos agora que  $[(X^i, Y^i)]_{i=0}^{k-1} \in \Sigma_{(\Gamma, \Delta)}^+$ .

Começamos por considerar que  $|X^i|, |Y^i| < \infty$ , para  $i = 0, \dots, k-1$ .

Para  $p = 0, \dots, k-1$ , consideramos o conjunto

$$A_p := \{s^j(X^i, i) : 0 \leq i \leq k-1, 0 \leq j \leq |X^i| - 1 \text{ e } (i+j) \bmod k = p\} \cup \\ \{s^j(Y^i, i) : 0 \leq i \leq k-1, 0 \leq j \leq |Y^i| - 1 \text{ e } (i+j) \bmod k = p\},$$

$n_p = \sharp(A_p)$  e  $n_p^L = \sharp\{(S, i) \in A_p : \pi(S, i)_0 = L\}$ .

Denotemos os elementos de  $A_p$  por  $Z_k^p$  os quais, para  $k = 1, \dots, n_p$ , satisfazem a desigualdade  $Z_k^p <_{[(\Gamma, \Delta), p]} Z_{k'}^p$  se e só se  $k < k'$ .

Agora, para cada  $p$ , fixamos  $n_p - 1$  pontos  $z_1^p, \dots, z_{n_p-1}^p$  no intervalo  $] -1, 1[\setminus \{0\}$ , igualmente espaçados, que satisfazem a condição  $z_{n_p}^p = 0$ .

Consideremos a correspondência

$$i_p : A_p \rightarrow \{z_1^p, \dots, z_{n_p-1}^p\}$$

a qual, para todo o  $i \leq n_p^L$ , faz corresponder a cada sequência  $Z_i^p$  o ponto  $z_i^p$ , isto é,  $i_p(Z_i^p) = z_i^p$  e, de modo análogo, consideramos a correspondência  $i_p(Z_i^p) = z_{i-1}^p$ , para todo  $i > n_p^L$ .

Tendo em conta que  $Z_{n_p^L}^p = X_0^p$ ,  $Z_{n_{p+1}^L}^p = Y_0^p$ , resulta, para  $p = 0, \dots, k-1$ ,

$$i_p(X_0^p) = i_p(Y_0^p) = 0.$$

Consideremos a aplicação seccionalmente linear,  $f_p$ , com número mínimo de diferentes segmentos, e tal que, para cada  $W^i \in \{X^i, Y^i\}$  e  $j$ , tal que  $s^j(W^i) \in A_p$ , satisfaz as seguintes condições:

- (i)  $f_p(i_p(s^j(W^i, i))) = i_{(p+1) \bmod k}(s^{j+1}(W^i, i))$  se  $j < |W^i| - 1$  e  $(i, p, j) \neq (p, p, 0)$ ;
- (ii)  $f_p(0^-) = i_{(p+1) \bmod k}(s(X^p, p))$  e  $f_p(0^+) = i_{(p+1) \bmod k}(s(Y^p, p))$ ;
- (iii) se  $j = |W^i| - 1$  então  $f_p(i_p(s^j(W^i, i))) = 0$
- (iv)  $f_p(-1)$  e  $f_p(+1)$  iguais a  $\pm 1$  de forma a preservar a monotonia de  $f_p$  no respectivo segmento.

Como consequência é de verificação imediata que, para  $p = 0, \dots, k-1$ ,  $f_p$  é uma



aplicação  $scm2$  de tipo  $(\gamma_p, \delta_p)$ , e que, conseqüentemente, o sistema dinâmico correspondente é um sistema  $(k, 2)$  de tipo  $(\Gamma, \Delta)$ .

Agora, se alguma das seqüências  $X^i$ , ou  $Y^i$ ,  $i = 0, \dots, k-1$  não é finita, tomamos a seqüência de aplicações seccionalmente lineares  $f_{p_n}$ , obtidas pelo mesmo processo que no caso finito, e consideramos o conjunto

$$A_{p_n} := \{s^j(X^i, i) : 0 \leq i \leq k-1, 0 \leq j \leq \min\{n, |X^i| - 1\} \text{ e } (i+j) \bmod k = p\} \cup \\ \{s^j(Y^i, i) : 0 \leq i \leq k-1, 0 \leq j \leq \min\{n, |Y^i| - 1\} \text{ e } (i+j) \bmod k = p\}.$$

Para cada  $n$ , e  $j < n$ , definimos  $f_{p_n}(i_p(s^j(W^i, i)))$ .

Então, cada uma das seqüências de aplicações  $f_{p_n}$  converge, em  $C^0(I \setminus \{0\})$ , para uma aplicação seccionalmente contínua com dois troços  $f_p$  de tipo  $(\gamma_p, \delta_p)$  e a demonstração segue imediatamente, bastando para tal considerar o sistema dinâmico gerado pela iteração sequencial destas aplicações.

■

Interessa-nos agora saber, quais as seqüências que são realizadas como itinerário através de um dado sistema  $(k, 2)$ ,  $F$ .

Seja  $[(X^i, Y^i)]_{i=0}^{k-1} \in \Sigma_{(\Gamma, \Delta)}^+$ . Definimos  $\Sigma_{(\Gamma, \Delta)}^+ [[(X^i, Y^i)]_{i=0}^{k-1}]$ , como o conjunto dos pares  $(S, i) \in \Sigma \times \{0, \dots, k-1\}$  que satisfazem as seguintes condições:

1. Se  $S_n = L$  então  $s^n(S, i) <_{[(\Gamma, \Delta), (i+n) \bmod k]} (X^{(i+n) \bmod k}, (i+n) \bmod k)$ ;
2. Se  $S_n = R$  então  $s^n(S, i) >_{[(\Gamma, \Delta), (i+n) \bmod k]} (Y^{(i+n) \bmod k}, (i+n) \bmod k)$ ;

De modo análogo definimos  $\bar{\Sigma}_{(\Gamma, \Delta)}^+ [[(X^i, Y^i)]_{i=0}^{k-1}]$  substituindo as desigualdades estritas em (1) e (2) pelas versões não estritas correspondentes.

De agora em diante, para um sistema  $(k, 2)$ ,  $F$ , utilizaremos as seguintes notações:  $\Sigma_{(\Gamma, \Delta)}^+[F] = \Sigma_{(\Gamma, \Delta)}^+[K[F]]$  e  $\bar{\Sigma}_{(\Gamma, \Delta)}^+[F] = \bar{\Sigma}_{(\Gamma, \Delta)}^+[K[F]]$ .

O seguinte Teorema demonstra que o invariante de amassamento determina o conjunto

$i_F(I, i)$ , isto é, o conjunto das sequências simbólicas realizadas pelos pontos de  $I$  através da iteração por  $F$ .

**Teorema 3.1.2** *Seja  $F$  um sistema  $(k, 2)$  de tipo  $(\Gamma, \Delta)$ . Então, para todos os  $i = 0, \dots, k - 1$ ,*

1.  $i_F(I, i) \subset \bar{\Sigma}_{(\Gamma, \Delta)}^+[F]$ ;
2.  $\Sigma_{(\Gamma, \Delta)}^+[F] \subset i_F(I, i)$ .

**Demonstração:**

Da Proposição 3.1.1 e das condições enunciadas na definição do conjunto  $\bar{\Sigma}_{(\Gamma, \Delta)}^+[F]$  resulta de imediato a inclusão (1).

Para provar (2), começamos por demonstrar que, qualquer que seja a sucessão  $(S, j) \in \Sigma_{(\Gamma, \Delta)}^+[F]$ , os conjuntos

$$\mathcal{L}_S^j = \{x \in I : i_F(x, j) <_{[(\Gamma, \Delta), j]} (S, j)\}$$

e

$$\mathcal{R}_S^j = \{x \in I : i_F(x, j) >_{[(\Gamma, \Delta), j]} (S, j)\}$$

são abertos.

Provaremos agora que o conjunto  $\mathcal{R}_S^j$  é aberto. Assim para o fazer, começamos por considerar  $y \in \mathcal{R}_S^j$  e provaremos que qualquer que seja  $y \in \mathcal{R}_S^j$  existem  $y^-, y^+ \in I$  tais que  $]y^-, y^+[ \subset \mathcal{R}_S^j$ .

Seja  $n$  o menor inteiro tal que  $\pi(i_F(y, j))_n \neq S_n$ .

Suponhamos  $\pi(i_F(y, j))_n \neq 0$ . Neste caso,  $\pi(F^m(\cdot, j))$  é contínua em  $y$  para todo o  $m < n$ , pelo que, existe  $]y^-, y^+[$ , uma vizinhança de  $y$ , onde  $\pi(F^m(\cdot, j))$  é contínua para todo o  $m < n$ .

Portanto, qualquer que seja  $z \in ]y^-, y^+[$ , verifica-se a igualdade  $\pi(i_F(z, j))_0 \dots \pi(i_F(z, j))_n = \pi(i_F(y, j))_0 \dots \pi(i_F(y, j))_n$ , pelo que,  $]y^-, y^+[ \subset \mathcal{R}_S^j$ .

Suponhamos agora que  $\pi(i_F(y, j))_n = 0$  e que  $n_{(\Gamma, \Delta)}(X_0^j \dots X_{n-1}^j, j)$  é par ( o caso em que  $n_{(\Gamma, \Delta)}(X_0^j \dots X_{n-1}^j, j)$  é ímpar prova-se de modo similar).

Definimos a sequência simbólica

$$S = \pi(i_F(y, j))_0 \dots \pi(i_F(y, j))_n LS_{n+1} \dots$$

e, com o objectivo de aligeirar a notação, consideramos  $l = (j + n) \bmod k$ . Como  $(S, j) \in \Sigma_{(\Gamma, \Delta)}^+[F]$  resulta que

$$(LS_{n+1} \dots, l) \leq_{[(\Gamma, \Delta), l]} (X^l, l).$$

Seja  $m$  o menor inteiro para o qual é satisfeita a condição  $S_{n+m} \neq X_m^l$ .

Então, por um lado, existe  $x_m < 0$  tal que, para todo o  $x \in ]x_m, 0[$ ,  $\pi(i_F(x, l))_0 \dots \pi(i_F(x, l))_m = X_0^l \dots X_m^l$ . Por outro lado, existe  $y^- < y$  tal que  $\pi(F^n(\cdot, j))$  é contínua em  $]y^-, y[$  e  $\pi(F^n(]y^-, y[, j)) \subset ]x_m, 0[$ . Portanto, quaisquer que sejam  $z \in ]y^-, y[$ , verifica-se a desigualdade

$$i_F(z, j) = (S_0 \dots S_{n-1} X_0^l \dots X_m^l \dots, j) >_{[(\Gamma, \Delta), j]} (S_0 \dots S_{n+m} \dots, j).$$

De modo análogo, existe  $y^+ > y$  tal que  $\pi(F^n(\cdot, j))$  é contínua e crescente em  $]y, y^+[$ , pelo que, para qualquer que seja  $z \in ]y, y^+[$   $\pi(i_F(z, j))_0 \dots \pi(i_F(z, j))_{n-1} = \pi(i_F(y, j))_0 \dots \pi(i_F(y, j))_{n-1}$ , e  $\pi(i_F(z, j))_n = R$ . Assim, resulta que  $]y_-, y_+[ \subset R_S^j$ .

A demonstração de que  $\mathcal{L}_{X^j}^j$  é um conjunto aberto obtém-se procedendo de modo análogo.

Consideramos agora os conjuntos

$$(\mathcal{L}_S^j)^\perp = \{x \in I : i_F(x, j) \geq_{[(\Gamma, \Delta), j]} (S, j)\}$$

e

$$(\mathcal{R}_S^j)^\perp = \{x \in I : i_F(x, j) \leq_{[(\Gamma, \Delta), j]} (S, j)\}.$$

Estes conjuntos,  $(\mathcal{L}_S^j)^\perp$  e  $(\mathcal{R}_S^j)^\perp$ , são fechados e, além disso,

$$(\mathcal{L}_S^j)^\perp \cup (\mathcal{R}_S^j)^\perp = I.$$

Então  $(\mathcal{L}_S^j)^\perp \cap (\mathcal{R}_S^j)^\perp \neq \emptyset$ , e podemos concluir que existe  $x \in I$  tal que  $i_F(x, j) = S$ , de onde segue de imediato a inclusão

$$\Sigma_{(\Gamma, \Delta)}^+[F] \subset i_F(I, j).$$

■

## 3.2 Renormalização e produto $*$ associados a sistemas

$(k, 2)$

Nesta secção vamos generalizar o produto  $*$ , introduzido em [17], aos invariantes de amassamento dos sistemas  $(k, 2)$ , vamos demonstrar as suas propriedades de fecho e a equivalência entre a redutibilidade do invariante de amassamento e a renormalizabilidade do sistema.

**Definição 3.2.1** *Sejam  $[(X^i, Y^i)]_{i=0}^{k-1} \in (\Sigma \times \Sigma)^k$  e  $(U, V) \in \Sigma \times \Sigma$ . Consideremos  $j$  tal que  $|X_j| \bmod k = |Y_j| \bmod k = 0$ .*

*Definimos o produto  $*_j$*

$$[(X^i, Y^i)]_{i=0}^{k-1} *_j (U, V) = [(X^i, Y^i)]_{i=0}^{k-1}$$

*onde  $(X^i, Y^i) = (X^i, Y^i)$  se  $i \neq j$  e  $(X^j, Y^j) = ((X^j, Y^j) * U, (X^j, Y^j) * V)$  onde*

“\*” representa o produto \* da Definição 2.2.3.

Para  $[(X^i, Y^i)]_{i=0}^{k-1} \in \Sigma_{(\Gamma, \Delta)}^+$ , dizemos que  $(X^j, Y^j)$  é do tipo  $(\alpha, \beta)$  no contexto  $(\Gamma, \Delta)$  onde  $\alpha = +$  ou  $-$  (respectivamente  $\beta = +$  ou  $-$ ) de acordo com  $n_{(\Gamma, \Delta)}(X^j, j)$  (respectivamente  $n_{(\Gamma, \Delta)}(Y^j, j)$ ) ser par ou ímpar.

O próximo resultado, diz-nos que o produto  $*_j$  preserva a estrutura da ordem do segundo factor.

**Proposição 3.2.1** *Sejam  $(\Gamma, \Delta) = (\gamma_0 \dots \gamma_{k-1}, \delta_0 \dots \delta_{k-1})$ ,  $[(X^i, Y^i)]_{i=0}^{k-1} \in \Sigma_{(\Gamma, \Delta)}^+$ ,  $j$  tal que  $|X^j| \bmod k = |Y^j| \bmod k = 0$  e  $Z, Z' \in \Sigma$ , então*

$$((X^j, Y^j) * Z, j) <_{[(\Gamma, \Delta), j]} ((X^j, Y^j) * Z', j)$$

se e só se  $Z <_{(\alpha, \beta)} Z'$ , sendo  $(\alpha, \beta)$  o tipo de  $(X^j, Y^j)$  no contexto  $(\Gamma, \Delta)$ .

**Demonstração:**

Consideremos

$$n_L(Z) = \#\{0 \leq p \leq |Z| - 1 : Z_p = L\} \text{ e } n_R(Z) = \#\{0 \leq p \leq |Z| - 1 : Z_p = R\}. \quad (3.1)$$

Como

$$\begin{aligned} n_{(\Gamma, \Delta)}((X^j, Y^j) * Z, j) \bmod 2 &= (n_{(\Gamma, \Delta)}(X^j, j)n_L(Z) + n_{(\Gamma, \Delta)}(Y^j, j)n_R(Z)) \bmod 2 \\ &= n_{(\alpha, \beta)}(Z) \bmod 2, \end{aligned}$$

resulta que

$$(-1)^{n_{(\Gamma, \Delta)}((X^j, Y^j) * Z, j)} = (-1)^{n_{(\alpha, \beta)}(Z)}.$$

Assim, obtém-se o resultado pretendido.

■

**Lema 3.2.1** *Consideremos  $[(X^i, Y^i)]_{i=0}^{k-1} \in \Sigma_{(\Gamma, \Delta)}^+$ , e os inteiros positivos  $j, l, p, q$  tais que  $0 \leq j, l \leq k-1$ ,  $|X^j| \bmod k = |Y^j| \bmod k = 0$  e  $(j+p) \bmod k = (l+q) \bmod k = m$ .*

(1) *Se  $l \neq j$ ,  $S \in \{X^j, Y^j\}$ ,  $W \in \{X^l, Y^l\}$  então:*

a) *se*

$$s^p(S, j) <_{[(\Gamma, \Delta), m]} s^q(W, l),$$

*temos que*

$$(S_p \dots S_{|S|-1}(X^j, Y^j) * Z, m) \leq_{[(\Gamma, \Delta), m]} s^q(W, l)$$

*qualquer que seja  $Z \in \Sigma$ , com a desigualdade estrita se alguma das sequências fôr finita;*

b) *se*

$$s^p(S, j) >_{[(\Gamma, \Delta), m]} s^q(W, l),$$

*temos que*

$$(S_p \dots S_{|S|-1}(X^j, Y^j) * Z, m) \geq_{[(\Gamma, \Delta), m]} s^q(W, l)$$

*qualquer que seja  $Z \in \Sigma$ , com a desigualdade estrita se alguma das sequências fôr finita;*

(2) *Se,  $l = j$ ,  $\{S, W\} \subset \{X^j, Y^j\}$  e*

$$s^p(S, j) <_{[(\Gamma, \Delta), m]} s^q(W, j),$$

*então*

$$(S_p \dots S_{|S|-1}(X^j, Y^j) * Z, m) <_{[(\Gamma, \Delta), m]} (W_q \dots W_{|W|-1}(X^j, Y^j) * Z', m)$$

*quaisquer que sejam  $Z, Z' \in \Sigma$ .*

Deste Lema, concluímos que, geometricamente, o produto  $*_j$

$$[(X^i, Y^i)]_{i=0}^{k-1} *_j (Z, Z'),$$

se obtém de  $[(X^i, Y^i)]_{i=0}^{k-1}$ , insuflando cada ponto correspondente à sequência  $s^n(X^j, j)$ ,  $n = 0, \dots, |X^j| - 1$ , por  $|Z|$  pontos e cada ponto correspondente à sequência  $s^n(Y^j, j)$ ,  $n = 0, \dots, |Y^j| - 1$ , por  $|Z'|$  pontos na respectiva fibra.

**Demonstração:**

(1)

Suponhamos primeiro que  $s^p(S, j) <_{[(\Gamma, \Delta), m]} s^q(W, l)$ . Então, existe  $r$  para o qual

$$S_p \dots S_{p+r-1} = W_q \dots W_{q+r-1}$$

e

$$(-1)^{n_{(\Gamma, \Delta)}(S_p \dots S_{p+r-1}, m)} S_{p+r} < (-1)^{n_{(\Gamma, \Delta)}(S_p \dots S_{p+r-1}, m)} W_{q+r}.$$

Se  $r < \min\{|S| - p, |W| - q\}$ , então o resultado segue de imediato.

Se  $r \geq \min\{|S| - p, |W| - q\}$  existem quatro possibilidades:

A.  $|S| - p \leq |W| - q$ ;

$$S_p \dots S_{|S|-1} = W_q \dots W_{q+|S|-p-1}$$

e

A.i.  $n_{(\Gamma, \Delta)}(S_p \dots S_{|S|-1}, j)$  par, ou;

A.ii.  $n_{(\Gamma, \Delta)}(S_p \dots S_{|S|-1}, j)$  ímpar.

B.  $|S| - p \geq |W| - q$ ;

$$W_q \dots W_{|W|-1} = S_p \dots S_{p+|W|-q-1} \text{ e :}$$

B.i.  $n_{(\Gamma, \Delta)}(W_q \dots W_{|W|-1}, l)$  par, ou;

B.ii.  $n_{(\Gamma, \Delta)}(W_q \dots W_{|W|-1}, l)$  ímpar.

Demonstramos o caso **(A.i.)**. Nesta situação  $W_{q+|S|-p} = R$ , pelo que, se  $Z_0 = L$ , obtemos o resultado pretendido. Caso contrário, se  $Z_0 = R$ , resulta que

$$S_p \dots S_{|S|-1}(X^j, Y^j) * Z = S_p \dots S_{|S|-1} Y^j(X^j, Y^j) * s(Z)$$

e como consequência das condições de admissibilidade

$$Y^j <_{[(\Gamma, \Delta), j]} s^{q+|S|-p}(W, l)$$

e obtemos novamente a condição inicial.

Aplicando argumentos análogos aos anteriores, verificamos que o mesmo acontece para as possibilidades **(A.i.i.)**, **(B.i.)** e **(B.i.i.)**, pelo que o resultado fica demonstrado.

O ponto **(2.)** demonstra-se de modo análogo.

■

O seguinte resultado estabelece as condições de fecho para o produto  $*_j$ .

**Teorema 3.2.1** *Consideremos um par de sequências de sinais  $(\Gamma, \Delta) = (\gamma_0 \dots \gamma_{k-1}, \delta_0 \dots \delta_{k-1})$ ,  $[(X^i, Y^i)]_{i=0}^{k-1} \in \Sigma_{(\Gamma, \Delta)}^+$  e  $j$  tais que  $|X_j| \bmod k = |Y_j| \bmod k = 0$  e  $(U, V) \in \Sigma \times \Sigma$ . Então  $[(X^i, Y^i)]_{i=0}^{k-1} *_j (U, V)$  é  $(\Gamma, \Delta)$  admissível se e só se  $(U, V)$  é  $(\alpha, \beta)$  admissível, onde  $(\alpha, \beta)$  é o tipo de  $(X^j, Y^j)$  no contexto  $(\Gamma, \Delta)$ .*



**Demonstração:**

A demonstração segue considerando a Proposição 3.2.1 e o Lema 3.2.1.

■

**Definição 3.2.2** Dizemos que um sistema  $(k, 2)$ ,  $F$ , de tipo  $(\Gamma, \Delta)$  é renormalizável em  $I \times \{j\}$ , se existirem

$$-1 < a < 0 < b < 1,$$

e inteiros positivos  $p$  e  $q$ , tais que, para  $n = pk$  e  $m = qk$ , a aplicação

$$R_j^{(n,m)}[F] = \begin{cases} \pi(F^n(x, j)) & \text{se } a \leq x < 0 \\ \pi(F^m(x, j)) & \text{se } 0 < x \leq b \end{cases}$$

é uma aplicação scm2 de  $[a, b]$  para si mesmo.

Dizemos que  $R_j^{(n,m)}[F]$  é uma renormalização de  $F$ .

Até final desta secção, consideramos que as sequências simbólicas  $m(\gamma, \delta)$  e  $M(\gamma, \delta)$  representam as sequências, respetivamente, minimal e maximal no contexto  $(\gamma, \delta)$ . Assim,  $m(+, +) = L^\infty$ ,  $M(+, +) = R^\infty$ ,  $m(+, -) = L^\infty$ ,  $M(+, -) = RL^\infty$ ,  $m(-, +) = LR^\infty$ ,  $M(-, +) = R^\infty$ ,  $m(-, -) = (LR)^\infty$ ,  $M(+, +) = (RL)^\infty$ . Consideramos ainda que  $F$  representa um sistema  $(k, 2)$  não autónomo, gerado por aplicações scm2 com derivada de Schwarz negativa em  $[-1, 0] \cup [0, 1]$ . Isto permitir-nos-á garantir que cada sequência  $X \in \Sigma_{(\Gamma, \Delta)}^+[F]$  periódica ou pré-periódica se pode realizar como itinerário de um ponto  $x \in ]-1, 1[$  periódico ou pré-periódico.

**Teorema 3.2.2** Seja  $F$  um sistema  $(k, 2)$  do tipo  $(\Gamma, \Delta)$ , gerado por  $k$  aplicações scm2 com derivada de Schwarz negativa. Então,  $F$  é renormalizável em  $I \times \{j\}$  com renormalização  $R_j^{(n,m)}[F]$ , onde  $m = |X^j|$  e  $n = |Y^j|$ , se e só se  $m \bmod k = n \bmod k = 0$  e existem  $[(X^i, Y^i)]_{i=0}^{k-1} \in \Sigma_{(\Gamma, \Delta)}^+$  e  $(U, V) \in \Sigma_{(\alpha, \beta)}^+$  onde  $(\alpha, \beta)$  é o tipo de  $(X^j, Y^j)$  no contexto  $(\Gamma, \Delta)$ ,

tais que

$$K[F] = [(X^i, Y^i)]_{i=0}^{k-1} *_j (U, V).$$

Além disso,  $(U, V) = K[R_j^{(n,m)}[F]]$ .

### Demonstração:

Suponhamos que  $K[F] = [(X^i, Y^i)]_{i=0}^{k-1} *_j (U, V)$ .

Seja  $(\alpha, \beta)$  o tipo de  $(X^j, Y^j)$  no contexto  $(\Gamma, \Delta)$ . Como  $(X^j, Y^j) * m(\alpha, \beta)$  e  $(X^j, Y^j) * M(\alpha, \beta)$  pertencem a  $\Sigma_{(\Gamma, \Delta)}^+[F]$ , e são periódicas ou pré-periódicas, existem e são únicos, os pontos  $a, b$  tais que

$$i_F(a, j) = ((X^j, Y^j) * m(\alpha, \beta), j)$$

e

$$i_F(b, j) = ((X^j, Y^j) * M(\alpha, \beta), j).$$

Além disso, estes pontos são periódicos ou pré-periódicos, de acordo com o que  $m(\alpha, \beta)$  e  $M(\alpha, \beta)$  são.

Assim, se considerarmos que  $n = |X^j|$  e  $m = |Y^j|$  e como por definição

$$\pi(i_F(a, j))_0 \dots p(i_F(a, j))_{n-1} = X_0^j \dots X_{n-1}^j,$$

resulta que  $\pi(F^n(\cdot, j))$  é contínua e monótona em  $[a, 0[$ . Analogamente  $\pi(F^m(\cdot, j))$  é contínua e monótona em  $]0, b]$ .

Por outro lado, como  $i_F(\pi(F^n(0^-, j)), j) = ((X^j, Y^j) * s(S), j)$ , da Proposição 3.2.1 decorre que

$$i_F(a, j) \leq_{[(\Gamma, \Delta), j]} i_F(\pi(F^n(0^-, j), j)) \leq_{[(\Gamma, \Delta), j]} i_F(b, j),$$

o que implica que a transformação  $\pi(F^n(\cdot, j))$  aplica  $[a, 0[$  em  $[a, b]$ . Analogamente  $\pi(F^m(\cdot, j))$  aplica  $]0, b]$  em  $[a, b]$ .

Assim, pela conjugação destes argumentos com o Teorema 3.2.1 podemos concluir que tanto  $\pi(F^n(a, j))$  como  $\pi(F^m(b, j))$  pertencem a  $\{a, b\}$ . Podemos assim concluir que  $R_j^{(n,m)}[F]$  é uma aplicação *scm2* de  $[a, b]$  em  $[a, b]$ . O tipo de  $R_j^{(n,m)}[F]$  é igual ao tipo de  $(X^j, Y^j)$ , no contexto  $(\Gamma, \Delta)$ , e que

$$R \left[ R_j^{(n,m)}[F] \right] = (U, V).$$

Com vista a provar o recíproco, suponhamos agora que  $F$  é renormalizável em  $I \times \{j\}$  com renormalização  $R_j^{(n,m)}[F]$ ,  $n = pk$ ,  $m = qk$  e que tem como intervalo de renormalização  $[a, b]$ . Então  $\pi(F^n(\cdot, j))$  e  $\pi(F^m(\cdot, j))$  são ambas funções contínuas e monótonas. Para além disso tanto  $\pi(F^n([a, 0[, j))$  como  $\pi(F^m(]0, b], j))$  estão contidas em  $[a, b]$ .

Considerando a sequência simbólica

$$X_0 \dots X_{n-1} = \pi(i_F(0^-, j))_0 \dots \pi(i_F(0^-, j))_{n-1},$$

concluimos que, para todos os  $x \in [a, 0[$ ,

$$\pi(i_F(x, j))_0 \dots \pi(i_F(x, j))_{n-1} = X_0 \dots X_{n-1}.$$

Analogamente, considerando a sequência simbólica

$$Y_0 \dots Y_{m-1} = \pi(i_F(0^+, j))_0 \dots \pi(i_F(0^+, j))_{m-1},$$

facilmente concluimos que, para todos os  $y \in ]0, b]$ ,

$$\pi(i_F(y, j))_0 \dots \pi(i_F(y, j))_{m-1} = Y_0 \dots Y_{m-1}.$$

Assim  $\pi(i_F(0^-, j))$  e  $\pi(i_F(0^+, j))$  são constituídas como a concatenação de palavras  $X_0 \dots X_{n-1}$  e  $Y_0 \dots Y_{m-1}$  conforme as trajectórias de  $0^-$  e  $0^+$  retornam a  $[a, b]$  à esquerda ou à direita de zero, motivo pelo qual

$$K[F] = [(X^i, Y^i)]_{i=0}^{k-1} *_j (S, W)$$

com  $(S, W) = K \left[ R_j^{(n,m)}[F] \right]$ .

Logo, como consequência do Teorema 3.2.1,  $[(X^i, Y^i)]_{i=0}^{k-1} \in \Sigma^+(\Gamma, \Delta)$ .

■

Do Teorema anterior concluímos imediatamente o seguinte resultado.

**Corolário 3.2.1** *Seja  $F$  um sistema  $(k, 2)$  de tipo  $(\Gamma, \Delta)$ , gerado por  $k$  aplicações  $scm2$  com derivada de Schwarz negativa, renormalizável na fibra  $I \times \{j\}$  com intervalo de renormalização  $[a, b]$  e invariante de amassamento*

$$K[F] = [(X^i, Y^i)]_{i=0}^{k-1} *_j (S, W).$$

Então  $F^{|X^j|}([a, 0[, j) \subset [a, b] \times \{j\}$ ,  $F^{|Y^j|}([0, b], j) \subset [a, b] \times \{j\}$  e, conseqüentemente,

$$\mathcal{R} = \left\{ \bigcup_{i=0}^{|X^j|-1} F^i([a, 0[, (j+i) \bmod k) \right\} \cup \left\{ \bigcup_{l=0}^{|Y^j|-1} F^l([0, b], (j+l) \bmod k) \right\}$$

é uma união finita de intervalos nas fibras, invariante por  $F$ .

Além disso, se  $x \in [a, b]$  então existe  $Z \in \Sigma_{(\alpha, \beta)}^+(S, W)$ , onde  $(\alpha, \beta)$  é o tipo de  $(X^j, Y^j)$  no contexto  $(\Gamma, \Delta)$ , para o qual se verifica a igualdade

$$i_F(x, j) = (X^j, Y^j) * Z.$$

Por outro lado, se  $(x, i) \in I \times \{0, \dots, k-1\} \setminus \mathcal{R}$ , e  $F^l(x, i) \notin \mathcal{R}$  qualquer que seja  $l$ ,

então  $i_F(x, i) \in \Sigma_{(\Gamma, \Delta)}^+ \left( [(X^i, Y^i)]_{i=0}^{k-1} \right)$ .

### Demonstração:

Como  $F$  é renormalizável, resulta que  $I \times \{j\}$ , então  $F^{|X^j|}([a, 0[, j) \subset [a, b]$  e  $F^{|Y^j|}([0, b], j) \subset [a, b]$ . Consequentemente  $\mathcal{R}$  é  $F$ -invariante.

Da última parte da demonstração do Teorema 3.2.2, se  $x \in [a, b]$  então  $i_F(x, j) = (X^j, Y^j) * Z$  e, da Proposição 3.2.1, concluímos que  $Z \in \Sigma_{(\alpha, \beta)}^+(S, W)$ .

Consideremos agora que  $(x, p) \in I \times \{0, \dots, k-1\} \setminus \mathcal{R}$  e que existe  $l$  para o qual  $F^l(x, p) \notin \mathcal{R}$ . Denotemos por  $(Z_0 \dots, p) = i_F(x, p)$ .

Da definição de produto  $*_j$ , se  $[(X^i, Y^i)]_{i=0}^{k-1} = [(X^i, Y^i)]_{i=0}^{k-1} *_j (S, W)$ , temos que  $(X^i, Y^i) = (X^i, Y^i)$  para todo o  $i \neq j$ , pelo que só temos que verificar as condições de admissibilidade na fibra  $I \times \{j\}$ .

Para tal, consideremos  $l$  tal que  $(p+l) \bmod k = j$ . Como  $F^l(x, p) \notin \mathcal{R}$ , resulta que

$$\pi(F^l(x, p)) < a \text{ ou } \pi(F^l(x, p)) > b.$$

No primeiro caso  $Z_l = L$  e  $s^l(Z_0, \dots, p) <_{[(\Gamma, \Delta), j]} i_F(a, j) <_{[(\Gamma, \Delta), j]} X^j$ .

Analogamente, no segundo caso  $Z_l = R$  e  $s^l(Z_0, \dots, p) >_{[(\Gamma, \Delta), j]} i_F(b, j) >_{[(\Gamma, \Delta), j]} Y^j$ .

■

O resultado anterior demonstra que, se  $F$  é renormalizável em  $I \times \{j\}$ , com invariante de amassamento

$$K[F] = [(X^i, Y^i)]_{i=0}^{k-1} *_j (S, W)$$

então a dinâmica simbólica de  $F$  pode decompor-se como a união de  $(X^j, Y^j) * \Sigma_{(\alpha, \beta)}^+(U, V)$  e  $\Sigma_{(\Gamma, \Delta)}^+ \left( [(X^i, Y^i)]_{i=0}^{k-1} \right)$ .

Tal como no caso da duplicação do período na família das aplicações quadráticas, a criação de intervalos de renormalização em famílias parametrizadas de sistemas  $(k, 2)$  não autónomos corresponde a uma bifurcação. Neste caso estas bifurcações ocorrem para valores

dos parâmetros tais que

$$F^{mk}(0^-, j) = F^{nk}(0^+, j) = (0, j).$$

Do corolário anterior concluímos que esta bifurcação mantém todos os períodos anteriores e que todos os novos períodos são do tipo  $amk + bnk$  com  $a, b \in \mathbb{N}$ .

Mais precisamente, sejam  $h$  uma aplicação *scm2* do tipo  $(\alpha, \beta)$  para a qual  $K[h] = (S, W)$ ,  $F$  e  $G$  sistemas  $(k, 2)$  para os quais  $K[G] = [(X^i, Y^i)]_{i=0}^{k-1}$ , com  $|X^j| \bmod k = |Y^j| \bmod k = 0$ , e  $K[F] = [(X^i, Y^i)]_{i=0}^{k-1} *_j (S, W)$ .

Então, denotando por

$$Per(F) = \{l \in \mathbb{N} : F^l(x, i) = (x, i) \text{ para algum } x \in I \text{ e algum } 0 \leq i \leq k-1\},$$

resulta que

$$Per(F) = Per(G) \cup Per(F|_{[a,b] \times \{j\}}),$$

em particular se  $|X^j| = |Y^j|$  então

$$Per(F|_{[a,b] \times \{j\}}) = |X^j| Per(h).$$

### 3.3 Entropia associada a sistemas $(k, 2)$ gerados por sequências de aplicações *scm2* do tipo $(+, +)$

Nesta secção estudamos a entropia topológica associada a sistemas dinâmicos não autónomos renormalizáveis, gerados pela iteração sequencial de  $k$  aplicações *scm2* do tipo  $(+, +)$ .

A entropia topológica é sem dúvida um dos invariantes topológicos mais estudados em teoria dos sistemas dinâmicos. Grosso modo, no contexto das aplicações unidimensionais, a entropia topológica mede a taxa de crescimento, quando  $n$  converge para o infinito e  $\epsilon$

converge para zero, do número de órbitas periódicas de período  $n$ , se usarmos uma precisão  $\epsilon$  para distinguir duas órbitas. Em [47] foi demonstrado que, para aplicações contínuas do intervalo, a entropia topológica coincide com a taxa de crescimento, quando  $n$  converge para o infinito, do número de pontos  $x \in I$  tais que  $f^n(x)$  é um ponto crítico, o qual coincide com a taxa de crescimento do número de intervalos de monotonia maximais da aplicação  $f^n$ . Este é o conceito de entropia topológica que vamos adoptar no nosso trabalho.

Em [31], Glendinning e Hall estudaram a entropia topológica nos conjuntos básicos da decomposição de renormalização de aplicações de Lorenz renormalizáveis e em [59] Luís Silva e Sousa Ramos provaram que a entropia topológica é constante nos arquipélagos de renormalização das aplicações de Lorenz.

No que segue utilizaremos o formalismo e os resultados introduzidos na primeira secção deste capítulo com o intuito de generalizar os resultados de [31] e [59] e assim estudar a entropia topológica de sistemas  $(k, 2)$ , gerados pela iteração sequencial de  $k$  aplicações do tipo  $(+, +)$ , restringidas ao intervalo de renormalização. Chamamos a atenção para o facto de os resultados apresentados serem facilmente generalizáveis a sistemas  $(k, 2)$  gerais.

Os resultados desta secção encontram-se publicados em [61].

Até final desta secção apenas consideraremos que  $F$  é um sistema  $(k, 2)$  gerado por aplicações do tipo  $(+, +)$ .

Durante esta secção substituímos o símbolo  $L$  por  $-1$  e  $R$  por  $+1$ .

Definimos, para quaisquer  $x \in I$ , os itinerários limite

$$i_F(x^-, i) = \lim_{y \nearrow x} i_F(y, i) \text{ e } i_F(x^+, i) = \lim_{y \searrow x} i_F(y, i),$$

onde os limites são tomados para os  $y$ 's tais que

$$F^n(y, i) \neq (0, i + n), \quad \text{qualquer que seja } n.$$

Seja  $S \in \Sigma$  uma sequência simbólica. Associamos a  $S$  os polinômios, no caso finito, ou as séries de potências, no caso infinito, definidas por

$$S(t^p, t^q) = \sum_{n=0}^{|S|-1} S_n t^{p(n-l_n)+ql_n},$$

onde  $l_n = \#\{j : 0 \leq j < n, S_j = +1\}$ . Assim, a cada ponto  $x \in I$  associamos

$$P_x^n(t^\alpha, t^\beta) = i_F(x, n)(t^\alpha, t^\beta)$$

e a  $F$  associamos a série

$$P_F^n(t^\alpha, t^\beta) = P_{0^+}^n(t^\alpha, t^\beta) - P_{0^-}^n(t^\alpha, t^\beta).$$

Como vimos, para uma aplicação  $scm2$ ,  $f$ , de tipo  $(+, +)$ , podemos definir a entropia topológica como o logaritmo  $\log(s(f))$  onde  $s(f)$  é a taxa de crescimento

$$s(f) = \limsup_{n \rightarrow \infty} (\gamma_n^I(f))^{\frac{1}{n}}$$

da sequência

$$\gamma_n = \#\{x \in I : f^n(x) = 0\}.$$

Consideramos agora o conjunto

$$\Gamma_n = \#\{x \in I : F^n(x, 0) = (0, n)\}, \quad \text{e a sequência } \gamma_n = \#\(\Gamma_n),$$

para todos os  $n \in \mathbb{N}$ .

Definimos a entropia topológica dos sistemas  $(k, 2)$  gerados pela iteração sequencial de aplicações  $scm2$  do tipo  $(+, +)$ ,  $F$ , como sendo o logaritmo  $h_T(F) = \log(\gamma)$  onde  $\gamma$  é a taxa



de crescimento

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (\gamma_n)^{\frac{1}{n}}$$

da sequência  $\gamma_n$ .

Esta taxa de crescimento,  $\gamma$ , é o inverso do raio de convergência da série de potências

$$\gamma(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n t^n.$$

Em [24] os autores provaram que a entropia topológica de um sistema  $(k, 2)$ ,  $F$ , gerado por  $k$  aplicações  $scm2$  do tipo  $(+, +)$ ,  $f_0, \dots, f_{k-1}$ , é dada por

$$h_T(F) = \frac{h_T(f_{k-1} \circ \dots \circ f_0)}{k}.$$

Como consequência do Lema 3.2.1 podemos concluir que, se  $F$  é renormalizável em  $I \times \{0\}$ , com renormalização  $R_0^{(n,m)}[F]$ , onde  $n = |X^0|k = n^-k$  e  $m = |Y^0|k = n^+k$ , e intervalo de renormalização  $[a, b]$ , então, considerando

$$\mathcal{L} = \left( \bigcup_{j=0}^{n^- - 1} F^{jk}([a, 0[, jk) \right) \cup \left( \bigcup_{j=0}^{n^+ - 1} F^{jk}([0, b], jk) \right),$$

$\mathcal{L}$  é invariante para  $F^k$ . Portanto, considerando

$$\gamma_n^{\mathcal{L}} = \#(\Gamma_n \cap Int(\mathcal{L}))$$

e  $\gamma^{\mathcal{L}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\gamma_n^{\mathcal{L}})^{\frac{1}{n}}$ , definimos a entropia topológica de  $F|_{\mathcal{L}}$ ,  $h_T(F|_{\mathcal{L}})$ , como o logaritmo  $\log(\gamma^{\mathcal{L}})$ . Como é óbvio, à semelhança do que vimos anteriormente,  $\gamma^{\mathcal{L}}$  é o inverso do raio de convergência da série de potências

$$\gamma^{\mathcal{L}}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^{\mathcal{L}} t^n.$$

Sejam  $J = [a, b]$ ,  $J_- = [a, 0[$  e  $J_+ = ]0, b]$ , então, da Proposição 3.2.1 e do Lema 3.2.1,  $F^k$  aplica homeomorficamente

$$(J_{\pm}, 0) \rightarrow F^k(J_{\pm}, 0) \rightarrow \dots \rightarrow F^{n_{\pm}k}(J_{\pm}, 0) \subset (J, 0).$$

Podemos então repetir os argumentos de Glendinning e Hall, em [31], para concluir que, para calcular  $h_T(F|_L)$ , é suficiente considerar unicamente as pré-imagens da descontinuidade em  $J$ , isto é,  $\gamma^{\mathcal{L}} = \gamma^J$ .

**Lema 3.3.1** *Seja  $F$  um sistema  $(k, 2)$  gerado pela iteração sequencial de  $k$  aplicações scm2 do tipo  $(+, +)$ , renormalizável em  $I \times \{0\}$  com renormalização  $R_0^{(n,m)}[F]$ ,  $n = n^-k$  e  $m = n^+k$ , e com intervalo de renormalização  $J = [a, b]$ , então*

$$P_{b^-}^0(t, t) - P_{a^+}^0(t, t) = P_F^0(t^{n^-}, t^{n^+})\gamma^J(t).$$

### Demonstração:

A aplicação  $x \mapsto P_x^0(t, t)$  é uma função degrau, cujas descontinuidades são os pontos pertencentes a  $\cup_n \Gamma_n$ . Para além disso, se

$$x \in \Gamma_n \cap [a, b] \quad \text{para algum } n,$$

então, como consequência do Teorema 3.2.2,  $n \bmod k = 0$ , e portanto

$$P_{x^+}^0(t, t) = P_x^0(t, t) + t^n P_{0^+}^0(t, t)$$

e

$$P_{x^-}^0(t, t) = P_x^0(t, t) + t^n P_{0^-}^0(t, t),$$

pelo que o resultado segue de imediato, tomando a soma sobre todas as descontinuidades

em  $[a, b]$ .

■

Sejam  $[(X^i, Y^i)]_{i=0}^{k-1} \in \Sigma_{(\Gamma, \Delta)}^+$ ,  $l_i^- = \#\{l : 0 \leq l < i, X_l^0 = +1\}$  e  $l_i^+ = \#\{l : 0 \leq l < i, Y_l^0 = +1\}$ .

Definamos então, para  $j = 0, \dots, k-1$ ,

$$P_{(X^0, Y^0)}(t^p, t^q) = \frac{\sum_{i=0}^{n^+k-1} Y_i^0 t^{p(i-l_i^+) + ql_i^+}}{1 - t^{n^+k}} - \frac{\sum_{i=0}^{n^-k-1} X_i^0 t^{p(i-l_i^-) + ql_i^-}}{1 - t^{n^-k}},$$

onde  $|X^0| = n^-k$  e  $|Y^0| = n^+k$ .

**Lema 3.3.2** *Seja  $F$  um sistema  $(k, 2)$  gerado pela iteração sequencial de  $k$  aplicações scm2 do tipo  $(+, +)$ , renormalizável em  $I \times \{0\}$ , com*

$$K[F] = [(X^i, Y^i)]_{i=0}^{k-1} *_0 (S, W),$$

$|X^0| = n^-k$  e  $|Y^0| = n^+k$ . Então

$$P_F^0(t, t) = \left[ \frac{Y^0(t, t)}{1 - t^{n^+k}} - \frac{X^0(t, t)}{1 - t^{n^-k}} \right] \left[ \frac{2 - t^{n^+k} - t^{n^-k}}{(1 - t^{n^+k})(1 - t^{n^-k})} \right] P_{(S, W)}(t^{n^-k}, t^{n^+k}).$$

**Demonstração:**

Note-se que, se  $S$  e  $W$  são sequências finitas, então

$$P_{((X^0, Y^0) * (S, W))}(t, t) = P_{((X^0, Y^0) * (S^\infty, W^\infty))}(t, t),$$

logo, identificando  $S$  com  $S^\infty$  e  $W$  com  $W^\infty$ , consideramos sempre  $|S^\infty| = |W^\infty| = \infty$ .

Sejam então,

$$(S, W) = (L^{c_0} R^{d_0} L^{c_1} R^{d_1} \dots, R^{a_0} L^{b_0} R^{a_1} L^{b_1} \dots)$$

e

$$(X^0, Y^0) * (S, W) = ((X^0)^{c_0}(Y^0)^{d_0}(X^0)^{c_1}(Y^0)^{d_1} \dots, (Y^0)^{a_0}(X^0)^{b_0}(Y^0)^{a_1}(X^0)^{b_1} \dots).$$

Temos então,

$$\begin{aligned} P_{(S,W)}(t^{n-k}, t^{n+k}) &= W(t^{n-k}, t^{n+k}) - S(t^{n-k}, t^{n+k}) = \\ &= 1 + t^{n+k} + \dots + t^{(a_0-1)n+k} - t^{a_0n+k} \left( 1 + t^{n-k} + \dots + t^{(b_0-1)n-k} \right) + \\ &\quad + t^{a_0n+k+b_0n-k} \left( 1 + t^{n+k} + \dots + t^{(a_1-1)n+k} \right) + \dots + \\ &\quad + 1 + t^{n-k} + \dots + t^{(c_0-1)n-k} - t^{c_0n-k} \left( 1 + t^{n+k} + \dots + t^{(d_0-1)n+k} \right) + \dots = \\ &= \frac{1}{1-t^{n+k}} \left[ 1 - t^{a_0n+k} + t^{a_0n+k+b_0n-k} \left( 1 - t^{a_1n+k} \right) + \dots - t^{c_0n-k} \left( 1 - t^{d_0n+k} \right) - \dots \right] + \\ &\quad \frac{1}{1-t^{n-k}} \left[ -t^{a_0n+k} \left( 1 - t^{b_0n-k} \right) - \dots + 1 - t^{c_0n-k} + \dots - t^{c_0n-k+d_0n+k} \left( 1 - t^{c_1n-k} \right) + \dots \right] = \\ &= \frac{1}{1-t^{n+k}} \times \\ &\times \left[ 1 - t^{a_0n+k} + \sum_{j=0}^{\infty} t^{\sum_{i=0}^j a_i n+k+b_i n-k} \left( 1 - t^{a_{j+1}n+k} \right) - t^{c_0n-k} + \sum_{j=0}^{\infty} t^{\sum_{i=0}^j c_i n+k+d_i n-k} \left( 1 - t^{c_{j+1}n-k} \right) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{1-t^{n-k}} \times \\ &\times \left[ 1 - t^{a_0n+k} + \sum_{j=0}^{\infty} t^{\sum_{i=0}^j a_i n+k+b_i n-k} \left( 1 - t^{a_{j+1}n+k} \right) - t^{c_0n-k} + \sum_{j=0}^{\infty} t^{\sum_{i=0}^j c_i n+k+d_i n-k} \left( 1 - t^{c_{j+1}n-k} \right) \right] = \\ &= \left( \frac{1}{1-t^{n+k}} + \frac{1}{1-t^{n-k}} \right) \times \\ &\times \left[ 1 - t^{a_0n+k} + \sum_{j=0}^{\infty} t^{\sum_{i=0}^j a_i n+k+b_i n-k} \left( 1 - t^{a_{j+1}n+k} \right) - t^{c_0n-k} + \sum_{j=0}^{\infty} t^{\sum_{i=0}^j c_i n+k+d_i n-k} \left( 1 - t^{c_{j+1}n-k} \right) \right]. \end{aligned}$$

Sejam agora  $X^0(t, t) = \sum_{i=0}^{n-k-1} X_i^0 t^i$  e  $Y^0(t, t) = \sum_{i=0}^{n+k-1} Y_i^0 t^i$ , temos então

$$P_{0+}^0(t, t) =$$

$$\begin{aligned}
&= Y^0(t, t)t^{\sum_{i=0}^{a_0-1} in^+k} + X^0(t, t)t^{a_0n^+k}t^{\sum_{i=0}^{b_0-1} in^-k} + \\
&+ Y^0(t, t)t^{a_0n^+k+b_0n^-k}t^{\sum_{i=0}^{a_1-1} in^+k} + X^0(t, t)t^{(a_0+a_1)n^+k+b_0n^-k}t^{\sum_{i=0}^{a_1-1} in^-k} + \dots = \\
&= \frac{Y^0(t, t)}{1-t^{n^+k}} \left[ 1 - t^{a_0n^+k} + t^{a_0n^+k+b_0n^-k} \left( 1 - t^{a_1n^+k} \right) + \dots \right] + \\
&\quad + \frac{X^0(t, t)}{1-t^{n^-k}} \left[ t^{a_0n^+k} - t^{a_0n^+k+b_0n^-k} \left( 1 - t^{a_1n^+k} \right) - \dots \right] = \\
&= \frac{Y^0(t, t)}{1-t^{n^+k}} \left[ 1 - t^{a_0n^+k} + \sum_{j=0}^{\infty} t^{\sum_{i=0}^j a_i n^+k + b_i n^-k} \left( 1 - t^{a_{j+1}n^+k} \right) \right] + \\
&\quad + \frac{X^0(t, t)}{1-t^{n^-k}} \left[ t^{a_0n^+k} - \sum_{j=0}^{\infty} t^{\sum_{i=0}^j a_i n^-k + b_i n^+k} \left( 1 - t^{c_{j+1}n^-k} \right) \right].
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
&P_{0-}^0(t, t) = \\
&= \frac{X^0(t, t)}{1-t^{n^-k}} \left[ 1 - t^{c_0n^-k} + \sum_{j=0}^{\infty} t^{\sum_{i=0}^j c_i n^-k + d_i n^+k} \left( 1 - t^{c_{j+1}n^-k} \right) \right] + \\
&\quad + \frac{Y^0(t, t)}{1-t^{n^+k}} \left[ t^{c_0n^-k} - \sum_{j=0}^{\infty} t^{\sum_{i=0}^j c_i n^-k + d_i n^+k} \left( 1 - t^{c_{j+1}n^-k} \right) \right].
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&P_F^0(t, t) = P_{0+}^0(t, t) - P_{0-}^0(t, t) = \\
&= \left[ \frac{Y^0(t, t)}{1-t^{n^+k}} - \frac{X^0(t, t)}{1-t^{n^-k}} \right] \times \\
&\times \left[ 1 - t^{a_0n^+k} + \sum_{j=0}^{\infty} t^{\sum_{i=0}^j a_i n^+k + b_i n^-k} \left( 1 - t^{a_{j+1}n^+k} \right) - t^{c_0n^-k} + \sum_{j=0}^{\infty} t^{\sum_{i=0}^j c_i n^-k + d_i n^+k} \left( 1 - t^{c_{j+1}n^-k} \right) \right] = \\
&= \left[ \frac{Y^0(t, t)}{1-t^{n^+k}} - \frac{X^0(t, t)}{1-t^{n^-k}} \right] \left[ \frac{2 - t^{n^-k} - t^{n^+k}}{(1-t^{n^+k})(1-t^{n^-k})} \right] P_{(S,W)}(t^{n^-k}, t^{n^-k})
\end{aligned}$$

■

Por fim podemos demonstrar o principal resultado desta secção.

**Teorema 3.3.1** *Seja  $F$  um sistema  $(k, 2)$  gerado pela iteração sequencial de  $k$  aplicações scm2 do tipo  $(+, +)$ , renormalizável em  $I \times \{0\}$ , com invariante de amassamento*

$$K[F] = [(X^i, Y^i)]_{i=0}^{k-1} *_0 (S, W),$$

com  $|X^0| = n^-k$  e  $|Y^0| = n^+k$ , e com o intervalo de renormalização correspondente  $J = [a, b]$ , com imagem

$$L = \left( \bigcup_{j=0}^{n^- - 1} F^{jk}([a, 0[, jk) \right) \cup \left( \bigcup_{j=0}^{n^+ - 1} F^{jk}([0, b], jk) \right).$$

Então

$$h_T(F|_L) = \frac{1}{k} \log(s),$$

onde

$$s = \frac{1}{\min_{t \in ]0, 1[} \{t : P_{(S, W)}(t^{n^-}, t^{n^+}) = 0\}}.$$

**Demonstração:**

Da demonstração do Teorema 3.2.2,  $i_F(a^+, 0) = ((X, Y) * L^\infty, 0)$  e  $i_F(b^-, 0) = ((X, Y) * R^\infty, 0)$ , pelo que

$$P_{b^-}^0(t, t) = \frac{Y(t, t)}{1 - t^{n^+k}} \quad \text{e} \quad P_{a^+}^0(t, t) = \frac{X(t, t)}{1 - t^{n^-k}}.$$

Logo, como consequência dos Lemas 3.3.1 e 3.3.2,

$$\gamma^{[a, b]}(t) = \left[ \frac{2 - t^{n^+k} - t^{n^-k}}{(1 - t^{n^+k})(1 - t^{n^-k})} \right] \frac{1}{P_{(S, W)}(t^{n^-k}, t^{n^+k})}$$

de onde segue o resultado.

■

**Exemplo 3.3.1** Consideremos o sistema  $(k, 2)$  gerado pela iteração sequencial de 2 aplicações  $scm2$  do tipo  $(+, +)$   $F$ , com invariante de amassamento

$$K[F] = [(-1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1 + 1 - 1 - 1 - 10, 1 - 1 - 1 - 1 - 1 + 10), (-1 + 1 + 10, +1 - 10)].$$

É fácil verificar que  $F$  é renormalizável em  $I \times \{0\}$  e que

$$K[F] = [(-1 + 10, +1 - 1 - 1 - 1 - 1 + 10), (-1 + 1 + 10, +1 - 10)] *_0 (-1 + 1 + 10, +1 - 10).$$

Então,  $P_{(-1+1+10,+1-10)}(t, t^2) = 1 - t^2 - (-1 + t + t^3) = 2 - t - t^2 - t^3$  e

$$s \simeq \frac{1}{0.811} \simeq 1.234.$$

Assim, a entropia da restrição de  $F$  ao intervalo de renormalização é

$$h_T(F|_L) = \frac{1}{2} \log(s) \simeq 0.105.$$

## Capítulo 4

# Renormalização de templates com vários intervalos de ramificação

Neste capítulo interpretamos o conceito de renormalização de sistemas  $(k, 2)$  no contexto dos templates com vários intervalos de ramificação e obtemos fórmulas recursivas para o genus dos nós e dos elos renormalizáveis contidos neste tipo de template.

A teoria dos templates foi introduzida por Birman e Williams, em [9], para estudar os elos de órbitas periódicas associados ao atrator de Lorenz. Neste trabalho, Birman e Williams demonstraram que, para qualquer fluxo tridimensional com um conjunto recorrente por cadeias hiperbólico, existe um template tal que os elos de órbitas periódicas do fluxo estão em correspondência bijectiva com os elos de órbitas periódicas do template e que, para além, disso esta correspondência é uma isotopia ambiente, ou seja, preserva os tipos de nós e de elos. Este resultado é particularmente importante, uma vez que os templates podem ser estudados através das aplicações de retorno aos intervalos de ramificação de certos nódulos, sendo estas aplicações, unidimensionais unimodais (geralmente descontínuas). Com efeito, a dinâmica do semifluxo no template de Lorenz pode ser descrita pela aplicação de primeiro retorno ao intervalo de ramificação, a qual consiste numa aplicação unidimensional com uma



descontinuidade, sobrejectiva e estritamente crescente em cada intervalo de continuidade, ver Figura 2.19.

Utilizando esta abordagem, Luís Silva e Nuno Franco, em [25], introduziram o conceito de nó e elo de Lorenz renormalizável, e obtiveram decomposições relevantes para as fórmulas dos invariantes índice de trança e genus de nós e elos de Lorenz renormalizáveis.

Quando permitimos inversões na orientação das faixas então obtemos os denominados templates de tipo Lorenz, como ilustra a Figura 4.1.

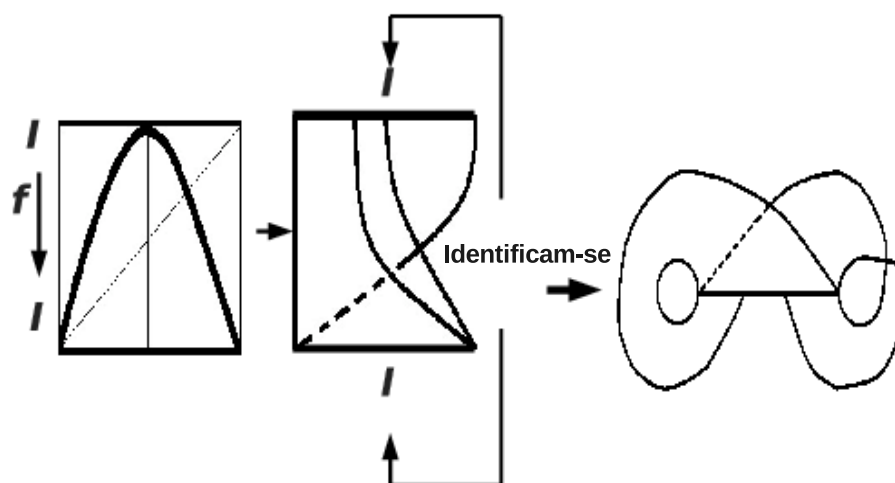


Figura 4.1: A aplicação de primeiro retorno  $f$  está definida em  $I = [-1, 1]$ . Note-se que a orientação é revertida para os pontos no intervalo  $(0, 1]$ , o que induz uma torção na faixa da direita.

Analogamente, um fluxo contido num template com vários intervalos de ramificação pode ser descrito pela iteração sequencial de um sistema  $(k, 2)$ , como ilustra a Figura 4.2.

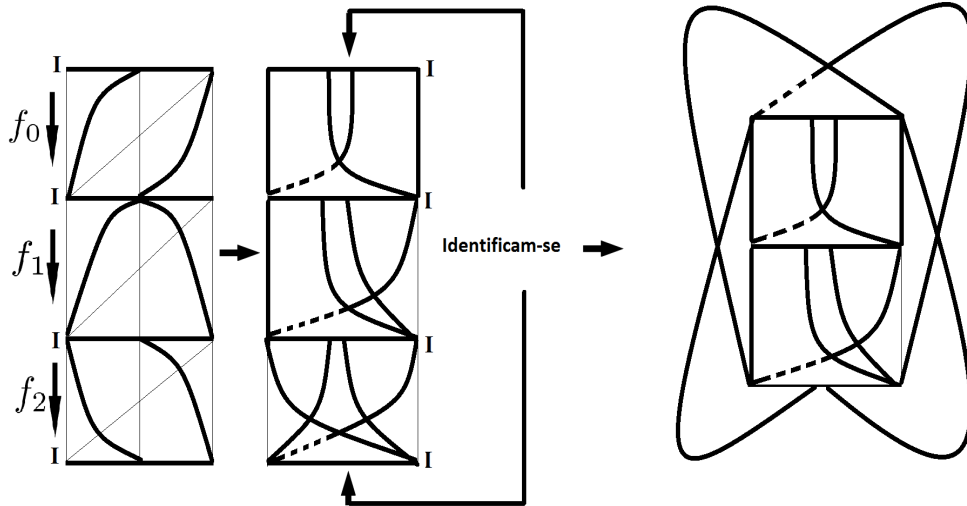


Figura 4.2: Um Template com vários intervalos de ramificação e várias torções induzidas pela iteração de uma sequência periódica de aplicações unidimensionais com uma única descontinuidade e monótonas em cada uma dos subintervalos de continuidade.

Os resultados deste capítulo encontram-se em [62].

## 4.1 Nós e elos associados a sistemas $(k, 2)$

Começamos por explicar como associar um nó a uma sequência periódica. Para tal comecemos por considerar o grupo das tranças com  $n$  cordas,  $B_n$ , definido pela representação (2.4).

Sejam  $(\Gamma, \Delta)$  um par de sequências  $k$ -periódicas de sinais e  $X$  uma sequência  $nk$ -periódica de símbolos  $\{L, R\}$ , para  $n \in \mathbb{N}$ .

Para cada  $0 \leq j \leq k-1$ , sejam  $\phi_j$  a permutação que associa a cada  $1 \leq m \leq n$  a posição relativa ocupada por  $s^{mk+j}(X, 0)$  na fibra  $\Sigma \times \{j\}$ , segundo a relação de ordem  $<_{[(\Gamma, \Delta), j]}$ , e  $\pi_j$  a permutação definida por

$$\pi_j(\phi_j(m)) = \phi_{(j+1) \bmod k}(m).$$

Assim,  $\pi_j$  é a permutação que associa a posição ocupada por  $s^{mk+j}(X, 0)$  em  $\Sigma \times \{j\}$  à posição ocupada por  $s^{mk+j+1}(X, 0)$  em  $\Sigma \times \{(j+1) \bmod k\}$ .

Recordamos que uma trança diz-se elementar se duas cordas se cruzam, no máximo uma vez, segundo o sentido positivo e que qualquer que seja  $l \in \mathbb{N}$ , existe uma bijecção canónica entre o grupo das permutações de  $\{1, \dots, l\}$  e o conjunto das tranças elementares com  $l$  cordas, que associa a cada permutação  $\pi$ , a trança  $b_\pi$ , onde cada ponto  $i$  se liga por uma linha recta a  $\pi(i)$ , mantendo todos os cruzamentos positivos.

Consideramos, portanto,  $b_{\pi_j} = \sigma_{p_j(1)} \cdots \sigma_{p_j(n_j)}$  e definimos a trança  $b_{(\Gamma, \Delta)}(X)$ , por

$$b_{(\Gamma, \Delta)}(X) = b_{\pi_0} \cdots b_{\pi_{k-1}}.$$

Como  $X$  é uma sequência  $nk$ -periódica, o fecho da trança  $b_{(\Gamma, \Delta)}(X)$  representa um nó.

Analogamente definimos a trança associada ao  $p$ -uplo  $(X_1, \dots, X_p)$  de sequências periódicas com todos os períodos múltiplos de  $k$ . Neste caso, o fecho da trança  $b_{(\Gamma, \Delta)}(X_1, \dots, X_p)$  representa um elo.

**Exemplo 4.1.1** Consideremos  $k = 3$ ,  $(\Gamma, \Delta) = (+++, +++)$  e  $X = (LRLLRRLRLLRRRR)^\infty$ .

Então,

$$s^0(X, 0), \quad s^3(X, 0), \quad s^6(X, 0), \quad s^9(X, 0), \quad s^{12}(X, 0) \in \Sigma \times \{0\}$$

$$s^1(X, 1), \quad s^4(X, 1), \quad s^7(X, 1), \quad s^{10}(X, 1), \quad s^{13}(X, 1) \in \Sigma \times \{1\}$$

$$s^2(X, 2), \quad s^5(X, 2), \quad s^8(X, 2), \quad s^{11}(X, 2), \quad s^{14}(X, 2) \in \Sigma \times \{2\}$$

Agora, após reordenarmos lexicograficamente as sequências nas respectivas fibras obtemos

$$s^3(X, 0) <_{[(\Gamma, \Delta), 0]} s^9(X, 0) <_{[(\Gamma, \Delta), 0]} s^0(X, 0) <_{[(\Gamma, \Delta), 0]} s^6(X, 0) <_{[(\Gamma, \Delta), 0]} s^{12}(X, 0)$$

$$s^7(X, 1) <_{[(\Gamma, \Delta), 1]} s^4(X, 1) <_{[(\Gamma, \Delta), 1]} s^{10}(X, 1) <_{[(\Gamma, \Delta), 1]} s^1(X, 1) <_{[(\Gamma, \Delta), 1]} s^{13}(X, 1)$$

$$s^2(X, 2) <_{[(\Gamma, \Delta), 2]} s^8(X, 2) <_{[(\Gamma, \Delta), 2]} s^{14}(X, 2) <_{[(\Gamma, \Delta), 2]} s^5(X, 2) <_{[(\Gamma, \Delta), 2]} s^{11}(X, 2).$$

Então, obtemos  $b_{(\Gamma, \Delta)}(X) = \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_2 \sigma_1$ , como podemos observar na Figura 4.3.

O que fazemos é considerar 3 linhas horizontais paralelas, correspondentes a cada uma das fibras, e marcar em cada uma delas  $5 = \frac{|X|}{3}$  pontos, identificando cada um deles com a correspondente sequência segundo a ordem correspondente a cada fibra.

Então ligamos o ponto correspondente a cada sequência  $s^q(X, 0)$  com o ponto correspondente a  $s^{(q+1)}(X, 0)$ , mantendo todos os cruzamentos positivos.

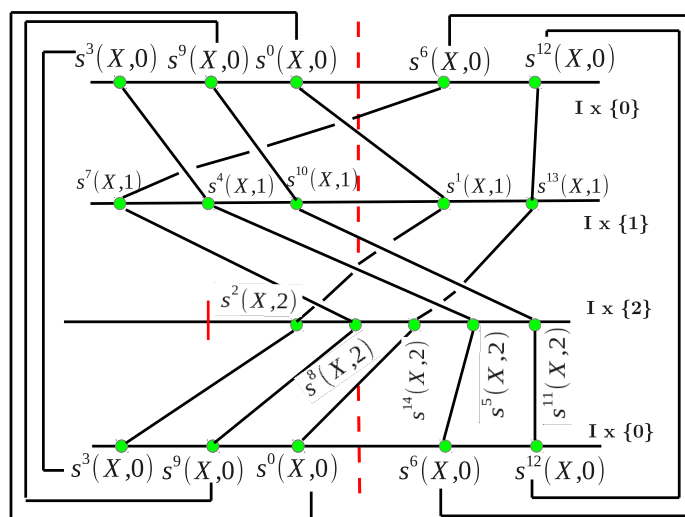


Figura 4.3: Nó associado à sequência simbólica  $(X, 0) = ((LRLLRRLRLLRRR)^\infty, 0)$

## 4.2 Nós e elos renormalizáveis

Nesta secção recorreremos ao conceito de renormalização de sistemas  $(k, 2)$  para descrever os nós e os elos, contidos em templates com vários intervalos de ramificação e diferentes torções em cada uma das faixas, que pertencem às órbitas de pontos pertencentes a intervalos de renormalização.

Assim, nos resultados que se seguem faremos uso do Teorema 3.2.2 de modo a poder restringir o nosso estudo ao itinerário dos pontos pertencentes ao intervalo de renormalização contido numa das fibras  $I \times \{j\}$ , com  $j = 1, \dots, k - 1$ , obtido por aplicação de um sistema  $(k, 2)$  renormalizável de tipo  $(\Gamma, \Delta)$  com invariante de amassamento

$$[(X^i, Y^i)]_{i=0}^{k-1} *_j (U, V).$$

Como consequência do Corolário 3.2.1 sabemos então que os itinerários dos pontos pertencentes ao intervalo de renormalização, contido em qualquer das fibras  $I \times \{j\}$  com  $j = 0, \dots, n - 1$ , podem escrever-se como produtos \*

$$(X^j, Y^j) * Z.$$

Assim, nestas condições, ao fecho de tranças do tipo  $b_{(\Gamma, \Delta)}((X^j, Y^j) * Z)$  damos o nome de nós renormalizáveis.

Sem perda de generalidade consideraremos  $j = 0$ .

De ora em diante fixamos  $k \in \mathbb{N}$ , um par de sequências  $k$ -periódicas de sinais  $(\Gamma, \Delta)$ , e um  $k$ -uplo  $[(X^i, Y^i)]_{i=0}^{k-1} \in \Sigma_{(\Gamma, \Delta)}^+$ , tal que  $|X^0| \bmod k = |Y^0| \bmod k = 0$ .

Seja  $(\alpha, \beta)$  o tipo de  $(X^0, Y^0)$  no contexto  $(\Gamma, \Delta)$ .

Dado um par de sequências finitas  $(X, Y) \in \Sigma \times \Sigma$ , definimos o comprimento da cauda

$m(X, Y)$  por

$$m(X, Y) = \min\{i \geq 0 : X_{|X|-1-i} \neq Y_{|Y|-1-i} \text{ e } (|X| - 1 - i) \pmod k = 0\}.$$

**Observação 4.2.1** Como  $[(X^i, Y^i)]_{i=0}^{k-1} \in \Sigma_{(\Gamma, \Delta)}^+$ , então  $(X^0, 0) >_{[(\Gamma, \Delta), 0]} s^{nk}(X^0, 0)$  para todos os  $n$  tais que  $nk \leq |X|$  e  $X_{nk}^0 = L$ , isto significa que  $(X^0, 0)$  corresponde à sequência que se encontra mais à direita em relação a todas as suas iteradas que estão à esquerda de 0 na fibra  $I \times \{0\}$ .

Analogamente  $(Y^0, 0)$  corresponde à sequência que se encontra mais à esquerda em relação a todas as suas iteradas que estão à direita de 0 na fibra  $I \times \{0\}$ .

Isto permite-nos identificar  $X_0^0$  com 0 e associar a  $X^0$  a sequência periódica  $(X_0^0 \dots X_{|X^0|-1}^0)^\infty$ .

Analogamente podemos identificar  $Y_0^0$  com 0 e associar a  $Y^0$  a sequência periódica  $(Y_0^0 \dots Y_{|Y^0|-1}^0)^\infty$ .

Deste modo podemos associar nós e tranças a estas sequências finitas.

Definimos agora o que entendemos por subtemplate de renormalização  $R(X^0, Y^0)$  associado ao par  $(X^0, Y^0)$ :

Consideramos a trança associada a  $(X^0, Y^0)$ ,

$$b_{(\Gamma, \Delta)}(X_0, Y_0) = \sigma_{p_0(1)} \dots \sigma_{p_0(n_0)} \dots \sigma_{p_{k-1}(1)} \dots \sigma_{p_{k-1}(n_{k-1})}$$

e seja  $t$  a posição relativa de  $s^{|X^0|-m(X^0, Y^0)-1}(X^0, 0)$  na fibra  $I \times \{0\}$ .

Então  $R(X^0, Y^0)$  é o template entrançado com  $\frac{|X^0|+|Y^0|}{k}$  faixas e palavra

$$\sigma'_0 \beta'_t \sigma'_1 \dots \sigma'_{k-1},$$

onde

$$\beta'_t = \begin{cases} \beta_t & \text{se } s^{\frac{|X^0|-m(X^0,Y^0)-1}{k}}(X^0, 0) = L \\ \beta_t^- & \text{se } s^{\frac{|X^0|-m(X^0,Y^0)-1}{k}}(X^0, 0) = R \end{cases}$$

e

- $\sigma'_j = \sigma_{p_j(1)} \dots \sigma_{p_j(n_j)}$  se  $(\gamma_j, \delta_j) = (+, +)$ ;
- $\sigma'_j = \tau_{\frac{|X^0|}{k}} \dots \tau_{\frac{|X^0|+|Y^0|}{k}} \sigma_{p_j(1)} \dots \sigma_{p_j(n_j)}$  se  $(\gamma_j, \delta_j) = (+, -)$ ;
- $\sigma'_j = \tau_0 \dots \tau_{\frac{|X^0|}{k}} \sigma_{p_j(1)} \dots \sigma_{p_j(n_j)}$  se  $(\gamma_j, \delta_j) = (-, +)$ ;
- $\sigma'_j = \tau_0 \dots \tau_{\frac{|X^0|+|Y^0|}{k}} \sigma_{p_j(1)} \dots \sigma_{p_j(n_j)}$  se  $(\gamma_j, \delta_j) = (-, -)$ ;

Onde  $\sigma_i$ ,  $\beta_i$  e  $\tau_i$  são os geradores dos templates entrançados (ver o Lema 2.3.1).

A Figura 4.4 ilustra a definição do subtemplate de renormalização:

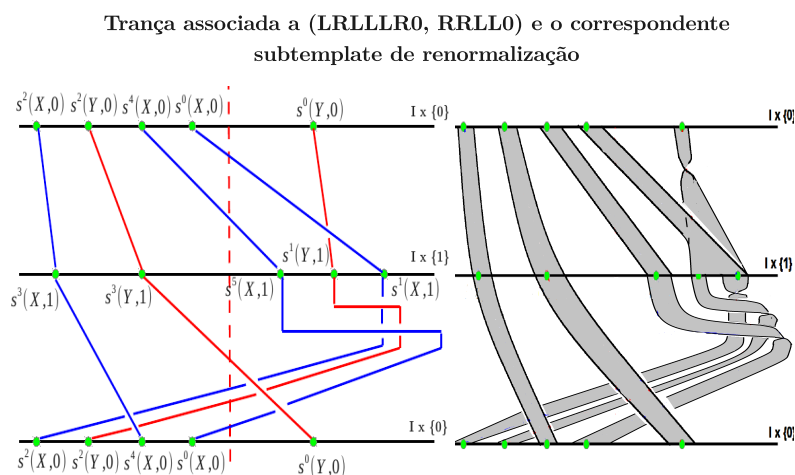


Figura 4.4: Subtemplate de renormalização associado à trança definida por  $(LRLLL0, RRLLO)$ , com  $k = 2$  e  $(\Gamma, \Delta) = (++, --)$ .

Enunciamos agora o seguinte teorema, que descreve geometricamente os nós e os elos renormalizáveis:

**Teorema 4.2.1** *Sejam  $[(X^i, Y^i)]_{i=0}^{k-1} \in \Sigma_{(\Gamma, \Delta)}^+$  tal que  $|X^0| \bmod k = |Y^0| \bmod k = 0$ ,  $(\alpha, \beta)$  o tipo de  $(X^0, Y^0)$  no contexto  $(\Gamma, \Delta)$  e  $(Z_1, \dots, Z_l) \in \Sigma^l$  um  $l$ -uplo de sequências periódicas cuja palavra da trança que lhe está associada no contexto  $(\alpha, \beta)$  é dada por  $b_{(\alpha, \beta)}(Z) = \sigma_{p_1} \sigma_{p_2} \dots \sigma_{p_u}$ .*

*Então o elo associado a  $((X^0, Y^0) * Z_1, \dots, (X^0, Y^0) * Z_l)$  é o elo contido em  $R(X^0, Y^0)$  com:*

1.  $|Z_1| + \dots + |Z_l|$  cordas em cada faixa se  $s^p(X^0, 0) = (Y^0, 0)$  para algum  $p$ ;
2.  $n_L(Z_1) + \dots + n_L(Z_l)$  cordas em cada faixa associada a  $X^0$  e  $n_R(Z_1) + \dots + n_R(Z_l)$  cordas em cada faixa associada a  $Y^0$  se  $s^p(X^0, 0) \neq (Y^0, 0)$ , para todos os  $p$  e com  $n_L(\cdot)$  e  $n_R(\cdot)$  definidos como em (3.1).

*Em ambos os casos, a palavra associada à trança da restrição à carta de ramificação  $\beta_t$  (respectivamente  $\beta_t^-$ ) é  $\sigma_{p_1+q} \dots \sigma_{p_u+q}$  (respectivamente  $\sigma_{p_1+q}^- \dots \sigma_{p_u+q}^-$ ) onde  $q + 1$  corresponde à corda mais à esquerda em  $\beta_t$  (respectivamente  $\beta_t^-$ ).*

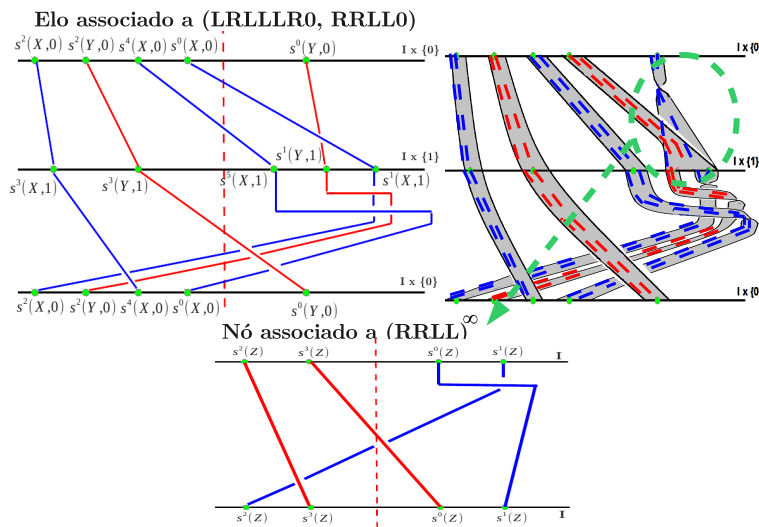


Figura 4.5: Ilustração do Teorema 4.2.1 para o exemplo  $(LRLLLR0, RRLLO) * (RRLLO)^\infty$  com  $k = 2$  e  $(\Gamma, \Delta) = (++, --)$ .



**Demonstração:**

Sem perda de generalidade, podemos considerar  $l = 1$  e  $(\alpha, \beta) = (+, +)$ .

Para cada  $0 \leq j \leq k - 1$ , consideremos a aplicação  $\phi_j$  que associa a cada sequência  $s^{mk+j}(X^0, 0)$  ou  $s^{mk+j}(Y^0, 0)$  a posição relativa que ocupa na fibra  $\Sigma \times \{j\}$  sob a relação de ordem  $<_{[(\Gamma, \Delta), j]}$ ; e a permutação  $\phi_Z$  associada à ordenação lexicográfica das sequências  $(s(Z), \dots, s^{|Z|}(Z))$ .

Analogamente consideremos  $\pi_j$  a permutação que associa à posição ocupada por  $s^{mk+j}(X^0, 0)$  em  $\Sigma \times \{j\}$  a posição ocupada por  $s^{(mk+j+1) \bmod k}(X^0, 0)$  em  $\Sigma \times \{(mk+j+1) \bmod k\}$  e à posição ocupada por  $s^{mk+j}(Y^0, 0)$  em  $\Sigma \times \{j\}$  a posição ocupada por  $s^{(mk+j+1) \bmod k}(Y^0, 0)$  em  $\Sigma \times \{(mk+j+1) \bmod k\}$ ;  $\pi_j^*$  a permutação que associa à posição ocupada por  $s^{(mk+j)}((X^0, Y^0) * Z, 0)$  em  $\Sigma \times \{j\}$  a posição ocupada por  $s^{(mk+j+1) \bmod k}((X^0, Y^0) * Z, 0)$  em  $\Sigma \times \{(mk+j+1) \bmod k\}$ ; e  $\pi_Z$  a permutação induzida pela aplicação de deslocamento na correspondente ordenação lexicográfica da sequência  $Z$ .

Seja

$$W^c = \begin{cases} X^0 & \text{se } Z_{\phi_Z^{-1}(c)} = L \\ Y^0 & \text{se } Z_{\phi_Z^{-1}(c)} = R. \end{cases}$$

Para cada  $1 \leq c \leq |Z|$  e  $0 \leq p \leq \frac{|W^c|-1}{k}$ , definimos

$$\begin{aligned} \Phi_j(p, c) &= \phi_j^*(s^{pk+j}((X^0, Y^0) * s^{\phi_Z^{-1}(c)}(Z), 0) = \\ &= \phi_j^*(W_{pk}^c \dots W_{|W^c|-1}^c(X^0, Y^0) * s^{\phi_Z^{-1}(c)+1}(Z), j). \end{aligned}$$

Da Proposição 3.2.1 e do Lema 3.2.1 quaisquer que sejam  $1 \leq i \leq n_L(Z) - 1$  e  $0 \leq p \leq \frac{|X^0|-m(X^0, Y^0)-k}{k}$ , temos que

$$\Phi_j(p, i+1) = \Phi_j(p, i) + 1$$

e, analogamente, para todo  $n_L(Z) + 1 \leq t \leq |Z| - 1$  e todo  $0 \leq q \leq \frac{|Y^0| - m(X^0, Y^0) - k}{k}$

$$\Phi_j(q, t + 1) = \Phi_j(q, t) + 1.$$

Isto significa que em cada fibra  $\Sigma \times \{j\}$ , segundo a ordenação lexicográfica de  $s^{mk+j}((X^0, Y^0) * Z, 0)$ , as seqüências

$$(W_{pk} \dots W_{|W|-1}(X^0, Y^0) * s^c(Z), j)$$

são dispostas lado a lado, constituindo um conjunto de  $n_L(Z)$  seqüências se  $W = X^0$  e  $n_R(Z)$  seqüências se  $W = Y^0$ , ordenadas segundo a ordenação lexicográfica de  $s^c(Z)$ .

Além disso,

$$\begin{aligned} & s \left( W_{pk} \dots W_{|W|-1}(X^0, Y^0) * s^{\phi_Z^{-1}(c)+1}(Z), j \right) = \\ & = \left( W_{pk+1} \dots W_{|W|-1}(X^0, Y^0) * s^{\phi_Z^{-1}(c)+1}(Z), (j+1) \pmod k \right). \end{aligned}$$

Isto significa que  $\pi_j^*(\Phi_j(p, c)) = \Phi_{(j+1) \pmod k}(p, c)$ .

Então há exactamente  $n_L(Z)$  (respectivamente  $n_R(Z)$ ) cordas do conjunto

$$\{\Phi_j(p, c), c = 1, \dots, n_L(Z)\}$$

para o conjunto  $\{\Phi_{(j+1) \pmod k}(p, c), c = 1, \dots, n_L(Z)\}$  ( respectivamente de  $\{\Phi_j(p, c), c = n_L(Z) + 1, \dots, |Z|\}$  para  $\{\Phi_{(j+1) \pmod k}(p, c), c = n_L(Z) + 1, \dots, |Z|\}$ ).

Consideremos agora o caso  $p > \frac{|W^c| - m(X^0, Y^0)}{k}$ .

Como  $\phi_Z^{-1}(\pi_Z^{-1}(c)) = \phi_Z^{-1}(c) - 1$  temos que  $\pi_Z^{-1}(c) = \phi_Z(\phi_Z^{-1}(c) - 1)$ .

Então, se  $1 \leq l \leq m(X^0, Y^0) - k$  e  $1 \leq i \leq |Z| - 1$  resulta que

$$\Phi_j \left( \frac{|W^{\pi_Z^{-1}(i)}| - l}{k}, \pi_Z^{-1}(i) \right) =$$

$$= \phi_j^* \left( W_{|W^{\pi_Z^{-1}(i)}| - l}^{\pi_Z^{-1}(i)} \cdots W_{|W^{\pi_Z^{-1}(i)}| - 1}^{\pi_Z^{-1}(i)} (X^0, Y^0) * s^{\phi_Z^{-1}(i)}(Z), j \right).$$

Pela aplicação da Proposição 3.2.1 e do Lema 3.2.1, para cada  $1 \leq i \leq |Z| - 1$  e  $1 \leq l \leq m(X^0, Y^0)$ , temos que

$$\Phi_j \left( \frac{|W^{\pi_Z^{-1}(i+1)}| - l}{k}, \pi_Z^{-1}(i+1) \right) = \Phi_j \left( \frac{|W^{\pi_Z^{-1}(i)}| - l}{k}, \pi_Z^{-1}(i) \right) + 1.$$

Além disso, se  $l > 1$  então

$$\pi_j^* \left( \Phi_j \left( \frac{|W^i(u)| - l}{k}, i \right) \right) = \Phi_{(j+1) \bmod k} \left( \frac{|W^i| - l}{k}, i \right),$$

pelo que segundo a ordenação lexicográfica de  $s^i((X^0, Y^0) * Z, 0)$ , as sequências

$$(W_{|W| - l} \cdots W_{|W| - 1}(X^0, Y^0) * s^c(Z), j)$$

(com  $W = W^{\phi_Z(c-1)}$ ) são dispostas lado a lado, constituindo um conjunto de  $|Z|$  sequências ordenadas segundo  $\pi_Z^{-1}(c)$  pelo que existem exactamente  $|Z|$  cordas do conjunto

$$\left\{ \Phi_j \left( \frac{|W^c| - l}{k}, c \right), c = 1, \dots, |Z| \right\} \quad \text{para} \quad \left\{ \Phi_j \left( \frac{|W^c| - l + 1}{k}, c \right), c = 1, \dots, |Z| \right\}.$$

Como consequência do Lema 3.2.1, para as cordas no elo associado a  $(X^0, Y^0)$ , temos que

$$s^{|X^0| - l + j}(X^0, 0) \mapsto s^{|X^0| - l + 1 + j}(X^0, 1),$$

e

$$s^{|Y^0| - l + j}(Y^0, 0) \mapsto s^{|Y^0| - l + j + 1}(Y^0, 1).$$

Então só teremos que dividir cada conjunto de  $|Z|$  cordas de

$$\left\{ \Phi_j \left( \frac{|W^c| - l}{k}, c \right), c = 1, \dots, |Z| \right\}$$

para

$$\left\{ \Phi_{(j+1) \bmod k} \left( \frac{|W^c| - l}{k}, c \right), c = 1, \dots, |Z| \right\}$$

em dois subconjuntos, uma à esquerda com  $n_L(Z)$  cordas na faixa associada a  $s^{|X^0| - l + j}(X^0, 0) \mapsto s^{|X^0| - l + 1 + j}(X^0, 1)$ , e um à direita com  $n_R(Z)$  cordas contidas na faixa associada a  $s^{|X^0| - l + j}(X^0, 0) \mapsto s^{|X^0| - l + 1 + j}(X^0, 1)$ .

Do Lema 3.2.1 resulta ainda que  $s^{pk+j}(W^c, 0) < s^{qk+j}(W^{c'}, 0)$ , o que implica que  $\Phi_j(p, c) < \Phi_j(p, c')$ , de onde se pode concluir que as transições entre estes conjuntos são realizadas segundo as transições na trança associada a  $(X^0, Y^0)$ .

Para compreender o que acontece no intervalo de ramificação teremos que olhar para a transição da cauda, isto é, para

$$l = m(X^0, Y^0) + 1.$$

Se  $X^0_{|X^0| - l} = L$  então  $Y^0_{|Y^0| - l} = R$  e

$$\Phi_j \left( \frac{|X^0| - l}{k}, c \right) < \Phi_j \left( \frac{|X^0| - l}{k}, c' \right)$$

quaisquer que sejam  $1 \leq c \leq n_L(Z)$  e  $n_L(Z) < c' \leq |Z|$ .

Por outro lado,

$$\begin{aligned} & s \left( W^c_{|W^c| - l} \dots W^c_{|W^c| - 1}(X^0, Y^0) * s^{\phi_{\bar{Z}}^{-1}(c)+1}(Z), 0 \right) = \\ & = \begin{cases} \left( W^c_{|W^c| - l} \dots W^c_{|W^c| - 1}(X^0, Y^0) * s^{\phi_{\bar{Z}}^{-1}(c)+1}(Z), 1 \right), & \text{se } m(X^0, Y^0) > 1 \\ \left( (X^0, Y^0) * s^{\phi_{\bar{Z}}^{-1}(c)+1}(Z), 1 \right), & \text{se } m(X^0, Y^0) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Como os elementos

$$\left( W_{|W^c|-l}^c \cdots W_{|W^c|-1}^c(X^0, Y^0) * s^{\phi_Z^{-1}(c)+1}(Z), 0 \right)$$

são ordenados de acordo com  $c$ , isto significa que a permutação dada pelas cordas que ligam os dois conjunto é  $\pi_Z$ .

Se  $X_{|X^0|-l}^0 = R$  então  $Y_{|Y^0|-l}^0 = L$  e

$$\pi_j(\phi_j(s^{|X^0|-l+j}(X^0, 0))) <_{[(\Gamma, \Delta), j]} \pi_j(\phi_j(s^{|Y^0|-l+j}(Y^0, 0))).$$

Isto origina o cruzamento  $\sigma_i$  na trança associada a  $(X^0, Y^0)$ .

Relativamente à trança associada a  $(X^0, Y^0) * Z$ , temos que

$$\Phi_j \left( \frac{|Y^0|-l}{k}, c' \right) < \Phi_j \left( \frac{|X^0|-l}{k}, c \right)$$

para todo  $1 \leq c \leq n_L(Z)$  e  $n_L(Z) < c' \leq |Z|$ .

Agora, considerando

$$\xi(u) = \begin{cases} n_L(Z) + c & \text{se } 1 \leq c \leq n_R(Z) \\ c - n_R(Z) & \text{se } n_R(Z) \leq c \leq |Z|. \end{cases}$$

enquanto que os elementos

$$\left( W_{|W^c|-l}^c \cdots W_{|W^c|-1}^c(X^0, Y^0) * s^{\phi_Z^{-1}(c)+1}(Z), 0 \right)$$

são ordenados de acordo com  $\xi(c)$ , as suas imagens são ordenadas de acordo com  $\pi_Z^{-1}(c)$ .

Isto significa que a permutação dada pelas cordas que ligam os conjuntos, após o cruzamento da faixa de  $X^0$  com a de  $Y^0$ , é exactamente  $\pi_Z$  pelo que, aplicando os mo-

vimentos de Reidemeister, a trança associada ao intervalo de ramificação é exactamente  $\sigma_{p_j}^{-1}(1) \dots \sigma_{p_j}^{-1}(n_j)$ .

■

### 4.3 Genus dos nós e elos renormalizáveis

Nesta secção iremos utilizar o Teorema 4.2.1 anterior para deduzir fórmulas recursivas para o cálculo do genus de nós e elos renormalizáveis.

Começamos por fixar  $(\Gamma, \Delta)$ , um par de sequências  $k$ -periódicas de sinais, e por estabelecer alguma terminologia necessária seguindo a utilizada, por Birman e Williams, em [9].

1. O *número de cruzamentos*  $c(b_{(\Gamma, \Delta)}(X))$  é o número de pontos duplos na imagem projectada da trança  $b_{(\Gamma, \Delta)}(X)$ .
2. O *número de cruzamentos*  $c(b_{(\Gamma, \Delta)}(X, Y))$  é o número de pontos duplos na imagem projectada da trança  $b_{(\Gamma, \Delta)}(X, Y)$ .
3. O *número de ligação*  $l(b_{(\Gamma, \Delta)}(X, Y))$  corresponde ao número de cruzamentos entre uma corda correspondente ao nó associado a  $X$  e uma corda correspondente ao nó associado a  $Y$  na imagem projectada do elo.
4. O *genus*  $g$  do elo  $b_{(\Gamma, \Delta)}(X, Y)$  é o genus de  $M$ , onde  $M$  é uma superfície orientável de genus mínimo gerada por  $b_{(\Gamma, \Delta)}(X, Y)$ .

Ao longo de toda esta secção, fixamos  $[(X^i, Y^i)]_{i=0}^{k-1} \in \Sigma_{(\Gamma, \Delta)}^+$  tal que  $|X^0| \bmod k = |Y^0| \bmod k = 0$ , e  $(\alpha, \beta)$  o tipo de  $(X^0, Y^0)$  no contexto  $(\Gamma, \Delta)$ .

**Lema 4.3.1** *Seja  $U \in \Sigma$  uma sequência finita.*

Então o número de cruzamentos da trança  $b_{(\Gamma,\Delta)}((X^0, Y^0) * U)$ , é dado por

$$c(b_{(\Gamma,\Delta)}((X^0, Y^0) * U)) = \\ = c(b_{(\Gamma,\Delta)}(X^0)) n_L(U)^2 + c(b_{(\Gamma,\Delta)}(Y^0)) n_R(U)^2 + l(b_{(\Gamma,\Delta)}((X^0, Y^0))) n_L(U) n_R(U) \pm T(U),$$

onde

1. Se  $\epsilon_{(\Gamma,\Delta)}(X^0, Y^0) = (+, +)$ , então  $T(U) = c(b_{(+,+)}(U))$ ;
2. Se  $\epsilon_{(\Gamma,\Delta)}(X^0, Y^0) = (+, -)$ , então  $T(U) = c(b_{(+,-)}(U)) - \frac{n_R(U)[n_R(U)-1]}{2}$ ;
3. Se  $\epsilon_{(\Gamma,\Delta)}(X^0, Y^0) = (-, +)$ , então  $T(U) = c(b_{(-,+)}(U)) - \frac{n_L(U)[n_L(U)-1]}{2}$ ;
4. Se  $\epsilon_{(\Gamma,\Delta)}(X^0, Y^0) = (-, -)$ , então  $T(U) = c(b_{(-,-)}(U)) - \frac{n_L(U)[n_L(U)-1]}{2} - \frac{n_R(U)[n_R(U)-1]}{2}$ ;

Além disso, tomamos o sinal  $+$  em  $T(U)$  se  $X^0_{|X^0|-m(X^0, Y^0)} = L$  e o sinal  $-$  se  $X^0_{|X^0|-m(X^0, Y^0)} = R$ .

### Demonstração:

Consideraremos unicamente o caso em que  $\epsilon_{(\Gamma,\Delta)}(X^0, Y^0) = (+, -)$ , pois as demonstrações dos outros casos são análogas.

São quatro as expressões que contribuem para o cálculo de  $c(b_{(\Gamma,\Delta)}((X^0, Y^0) * U))$ .

As primeiras são  $c(b_{(\Gamma,\Delta)}(X^0))$  e  $c(b_{(\Gamma,\Delta)}(Y^0))$ , a terceira é  $l(b_{(\Gamma,\Delta)}(X^0, Y^0))$  e a quarta corresponde a  $c(b_{(+,-)}(U))$ . Então, a contribuição  $c(b_{(\Gamma,\Delta)}(X^0))$  será contabilizada  $n_L(U)^2$  vezes (respectivamente  $c(b_{(\Gamma,\Delta)}(Y^0))$  e  $n_R(U)^2$ ), isto corresponde à substituição de um cruzamento em  $b_{(\Gamma,\Delta)}(X^0)$  (respectivamente  $b_{(\Gamma,\Delta)}(Y^0)$ ) por  $n_L(U)^2$  (respectivamente  $n_R(U)^2$ ) cruzamentos que surgem quando se insufla cada corda correspondente a  $b_{(\Gamma,\Delta)}(X^0)$  (respectivamente cada corda correspondente a  $b_{(\Gamma,\Delta)}(Y^0)$ ) com  $n_L(U)$  (respectivamente  $n_R(U)$ ) cordas.

De forma similar, por cada cruzamento contabilizado no número de ligação  $l(b_{(\Gamma,\Delta)}(X^0, Y^0))$  obtemos  $n_L(U) \times n_R(U)$  cruzamentos.

Por fim devemos contabilizar os cruzamentos em  $\beta_i$ , isto é, teremos que adicionar ou subtrair  $c(b_{(+,-)}(U)) - \frac{n_R(U)[n_R(U)-1]}{2}$  de acordo com os símbolos  $X^0_{\frac{|X^0|-m(X^0,Y^0)}{k}} = L$  ou  $X^0_{\frac{|X^0|-m(X^0,Y^0)}{k}} = R$ .

■

**Lema 4.3.2** *Seja  $(U, V)$  um par de sequências finitas.*

*Então o número de ligação associado à trança  $b_{(\Gamma,\Delta)}((X^0, Y^0) * (U, V))$ , é dado por*

$$\begin{aligned} & l(b_{(\Gamma,\Delta)}((X^0, Y^0) * (U, V))) = \\ & = l(b_{(\Gamma,\Delta)}((X^0, Y^0) * U, (X^0, Y^0) * V)) = 2c(b_{(\Gamma,\Delta)}(X^0))n_L(U)n_L(V) + \\ & + 2c(b_{(\Gamma,\Delta)}(Y^0))n_R(U)n_R(V)l(b_{(\Gamma,\Delta)}(X^0, Y^0)) [n_L(V)n_R(U) + n_R(V)n_L(U)] \pm D(U, V), \end{aligned}$$

onde

1. Se  $\epsilon_{(\Gamma,\Delta)}(X^0, Y^0) = (+, +)$ , então  $D(U, V) = l(b_{(+,+)}(U, V))$ ;
2. Se  $\epsilon_{(\Gamma,\Delta)}(X^0, Y^0) = (+, -)$ , então  $D(U, V) = l(b_{(+,-)}(U, V)) - n_R(U) \times n_R(V)$ ;
3. Se  $\epsilon_{(\Gamma,\Delta)}(X^0, Y^0) = (-, +)$ , então  $D(U, V) = l(b_{(-,+)}(U, V)) - n_L(U) \times n_L(V)$ ;
4. Se  $\epsilon_{(\Gamma,\Delta)}(X^0, Y^0) = (-, -)$ , então  $D(U, V) = l(b_{(-,-)}(U, V)) - n_R(U) \times n_R(V) - n_L(U) \times n_L(V)$ .

Além disso, tomamos o sinal  $+$  em  $D(U)$  se  $X^0_{\frac{|X^0|-m(X^0,Y^0)}{k}} = L$  e o sinal  $-$  se  $X^0_{\frac{|X^0|-m(X^0,Y^0)}{k}} = R$ .



**Demonstração:**

A prova é análoga à anterior, só que neste caso teremos que contabilizar os cruzamentos entre as cordas da trança associada a  $(X^0, Y^0) * (U, V) = ((X^0, Y^0) * U, (X^0, Y^0) * V)$  e as cordas das tranças associadas às sequências  $(X^0, Y^0) * U$  e  $(X^0, Y^0) * V$ .

■

Seja  $(U, V) \in \Sigma \times \Sigma$  um par de sequências finitas. Denotamos por

$$A_{13} = \begin{bmatrix} (n_L(U) + n_L(V))^2 \\ (n_R(U) + n_R(V))^2 \\ (n_L(U) + n_L(V))(n_R(U) + n_R(V)) \end{bmatrix}.$$

**Lema 4.3.3** *Seja  $(U, V) \in \Sigma \times \Sigma$  um par de sequências finitas.*

*Então*

$$c(b_{(\Gamma, \Delta)}((X^0, Y^0) * (U, V))) = \begin{bmatrix} c(b_{(\Gamma, \Delta)}(X^0)) & c(b_{(\Gamma, \Delta)}(Y^0)) & l(b_{(\Gamma, \Delta)}(X^0, Y^0)) \end{bmatrix} A_{13} \pm T(U, V);$$

onde

1. Se  $\epsilon_{(\Gamma, \Delta)}(X^0, Y^0) = (+, +)$ , então  $T(U, V) = c(b_{(+, +)}(U, V))$ ;
2. Se  $\epsilon_{(\Gamma, \Delta)}(X^0, Y^0) = (+, -)$ , então  $T(U, V) = c(b_{(+, -)}(U, V)) - \frac{n_R(U)[n_R(U)-1]}{2} + \frac{n_R(V)[n_R(V)-1]}{2}$ ;
3. Se  $\epsilon_{(\Gamma, \Delta)}(X^0, Y^0) = (-, +)$ , então  $T(U, V) = c(b_{(-, +)}(U, V)) - \frac{n_L(U)[n_L(U)-1]}{2} + \frac{n_L(V)[n_L(V)-1]}{2}$ ;
4. Se  $\epsilon_{(\Gamma, \Delta)}(X^0, Y^0) = (-, -)$ , então
 
$$T(U, V) = c(b_{(-, -)}(U, V)) - \left( \frac{n_R(U)[n_R(U)-1]}{2} + \frac{n_R(V)[n_R(V)-1]}{2} + \frac{n_L(U)[n_L(U)-1]}{2} + \frac{n_L(V)[n_L(V)-1]}{2} \right).$$

Além disso, tomamos o sinal  $+$  em  $T(U, V)$  se  $X_{|X^0|-m(X^0, Y^0)}^0 = L$  e o sinal  $-$  se  $X_{|X^0|-m(X^0, Y^0)}^0 = R$ .

**Demonstração:**

O resultado é consequência imediata dos Lemas 4.3.1 e 4.3.3 precedentes, bastando, par tal, ter em atenção que

$$\begin{aligned} & c(b_{(\Gamma, \Delta)}((X^0, Y^0) * (U, V))) = \\ & = c(b_{(\Gamma, \Delta)}((X^0, Y^0) * U)) + c(b_{(\Gamma, \Delta)}((X^0, Y^0) * V)) + l(b_{(\Gamma, \Delta)}((X^0, Y^0) * (U, V))). \end{aligned}$$

■

Do **Teorema** 1.1.18, em [30], demonstrado inicialmente em [9], dado um elo  $K$  e uma trança representativa desse elo  $b_K$ , temos que

$$g(K) = \frac{C - N - u}{2} + 1, \quad (4.1)$$

onde  $C$  é o número de cruzamentos de  $b_K$ ,  $N$  o número de cordas e  $u$  o número de componentes do elo.

Podemos agora enunciar os resultados principais desta secção.

**Proposição 4.3.1** *Seja  $U \in \Sigma$  uma sequência finita.*

*Então o genus do nó associado a  $b_{(\Gamma, \Delta)}((X^0, Y^0) * U)$  é dado por*

$$\begin{aligned} & g(b_{(\Gamma, \Delta)}((X^0, Y^0) * U)) = \\ & \frac{c(b_{(\Gamma, \Delta)}(X^0))n_L(U)^2 + c(b_{(\Gamma, \Delta)}(Y^0))n_R(U)^2}{2} + \\ & + \frac{l(b_{(\Gamma, \Delta)}(X^0, Y^0))n_L(U)n_R(U) - n_L(U)|X^0| - n_R(U)|Y^0| + 1 \pm T(U)}{2}, \end{aligned}$$

onde  $T(U)$  está definido tal como no **Lema** 4.3.1.

**Demonstração:**

Consideraremos unicamente o caso em que  $\epsilon_{(\Gamma, \Delta)}(X^0, Y^0) = (+, -)$ , pois as demonstrações dos outros casos são análogas.

Queremos calcular  $g(b_{(\Gamma, \Delta)}((X^0, Y^0) * U))$ .

Com o intuito de aplicar a expressão 4.1, começamos por observar que  $u = 1$ , porque  $(X^0, Y^0) * U$  é um nó. Por outro lado, o número de cordas na trança  $b_{(\Gamma, \Delta)}((X^0, Y^0) * U)$  é dado por  $|(X^0, Y^0) * U| = n_L(U)|X^0| + n_R(U)|Y^0|$  e o valor de  $c(b_{(\Gamma, \Delta)}((X^0, Y^0) * U))$  determina-se à custa do resultado obtido no Lema 4.3.1.

Assim, podemos concluir que

$$\begin{aligned} g(b_{(\Gamma, \Delta)}((X^0, Y^0) * U)) &= \frac{c(b_{(\Gamma, \Delta)}((X^0, Y^0) * U)) - |(X^0, Y^0) * U| + 1}{2} = \\ &= \frac{c(b_{(\Gamma, \Delta)}(X^0))n_L(U)^2 + c(b_{(\Gamma, \Delta)}(Y^0))n_R(U)^2}{2} + \\ &+ \frac{l(b_{(\Gamma, \Delta)}(X^0, Y^0))n_L(U)n_R(U) - n_L(U)|X^0| - n_R(U)|Y^0| + 1 \pm T(U)}{2} \end{aligned}$$

■

**Proposição 4.3.2** *Seja  $(U, V) \in \Sigma \times \Sigma$  um par de sequências finitas.*

*Então o genus do elo associado a  $b_{(\Gamma, \Delta)}((X^0, Y^0) * (U, V))$  é dado por*

$$\begin{aligned} g(b_{(\Gamma, \Delta)}((X^0, Y^0) * (U, V))) &= \\ &= \frac{c(b_{(\Gamma, \Delta)}(X^0))(n_L(U)^2 + n_L(V)^2) + c(b_{(\Gamma, \Delta)}(Y^0))(n_R(U)^2 + n_R(V)^2)}{2} + \\ &+ \frac{l(b_{(\Gamma, \Delta)}(X^0, Y^0))(n_L(U)n_R(U) + n_L(V)n_R(V)) \pm T(U, V) + l(b_{(\Gamma, \Delta)}((X^0, Y^0) * (U, V)))}{2} \\ &+ \frac{(n_L(U) + n_L(V))|X^0| + (n_R(U) + n_R(V))|Y^0|}{2} \end{aligned}$$

onde  $T(U, V)$  se define tal como no **Lema 4.3.3**.

**Demonstração:**

A demonstração é análoga à anterior.

■

# Bibliografia

- [1] J. Andrade. *“Introdução à Economia”*. Editorial Minerva (1996)
- [2] L. Alsedà, M. Misiurewicz, J. Llibre. *“Combinatorial Dynamics and Entropy in Dimension One - second edition”*. World Scientific. Advanced Series in Nonlinear Dynamics (2000)
- [3] V. I. Arnold. *“Mathematical methods of classical mechanics (second edition)”*. Springer Verlag (1989).
- [4] E. Artin. *“Theory of braids”*. Ann. of Math. (2) 48 (1947) 101-126.
- [5] F. Balibrea, P. Oprocha. *“Weak mixing and chaos in nonautonomous discrete systems”*. Applied Mathematics Letters 25:8, 2012, 1135–1141.
- [6] P. Bangert. *“Braids and knots”*. Springer Berlin Heidelberg Lecture Notes in Mathematics 2009, 1–73.
- [7] L. Barreira, C. Valls. *“Sistemas dinâmicos: uma introdução”*. IST Press (2012).
- [8] J. Birman and T. Brendle. *“Braids: a survey”*. Página consultada a 8 de Dezembro de 2014, < <http://arxiv.org/abs/math/0409205> >.
- [9] J. Birman and R.F. Williams. *“Knotted periodic orbits in dynamical systems I: Lorenz’s equations”*. Topology 22 (1983), 47–82.

- 
- [10] G. Burde and H. Zieschang. “*Knots*”. de Gruyter, Berlin and New York (1985).
- [11] K. Brucks and H. Bruin. “*Topics from one-dimensional dynamics*”. Cambridge University Press. London Mathematical Society. Student Texts (62) (2004).
- [12] M. Chiodo. “*An introduction to Braid theory*”. Msc Thesis. University of Melbourn (2005).
- [13] P. Coelho. “*Templates e Elos de Órbitas Periódicas em Fluxos de Dimensão 3*”. Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa (2008).
- [14] E. Colberg. “*A brief history of knot theory*”. Página consultada a 8 de Dezembro de 2014, < <http://www.math.ucla.edu/radko/191.1.05w/erin.pdf> >.
- [15] P. Coullet, C. Tresser. “*Itération d'endomorphismes et groupe de renormalisation*”. C. R. Acad. Sci. Paris **287** (1978), 577-588.
- [16] P. Dehornoy. “*Les noeuds de Lorenz*”. Página consultada a 8 de Dezembro de 2014, < <http://arxiv.org/abs/0904.2437> >.
- [17] B. Derrida, A. Gervois and Y. Pomeau. “*Iterations of endomorphisms on the real axis and representation of numbers*”. Ann. Inst. Henri Poincaré **29**, 305-306.
- [18] R. L. Devaney. “*An introduction to chaotic dynamical systems*”. Westview Press (2003).
- [19] S. Elaydi, R. Sacker. “*Global stability of periodic orbits of nonautonomous difference equations in population biology and the Cushing-Henson conjectures*”. Proceedings of 8<sup>th</sup> ICDEA, 113 - 126 Chapman and Hall(2005).
- [20] S. Elaydi, R. Sacker. “*Skew-product dynamical systems: Applications to difference equations*”. Proceedings of the Second Annual Celebration of Mathematics, (United Arab Emirates).

- [21] E. A. El Rifai, H. R. Morton. “*Algorithms for positive braids*”. The Quarterly Journal of Mathematics **45** (4), 479–497 (1994).
- [22] E. A. El Rifai. “*Necessary and sufficient condition for Lorenz knots to be closed under satellite construction*”. Chaos, Solitons and Fractals 10 (1) (1999), 137-146.
- [23] M. J. Feigenbaum. “*Quantitative universality for a class of nonlinear transformations*”. J. Statist. Phys. **19** (1978), no. 1, 25–52.
- [24] J. Ferreira Alves, L. Silva. “*Nonautonomous graphs and topological entropy of nonautonomous Lorenz systems*”. International Journal of Bifurcation and Chaos, to appear.
- [25] N. Franco, L. Silva. “*Genus and braid index associated to a sequence of renormalizable Lorenz maps*”. Discrete and Continuous Dynamical systems (A), **50**, 2 (2012) 565–586.
- [26] N. Franco, L. Silva, P. Simões. “*Symbolic dynamics and renormalization of nonautonomous  $k$  periodic dynamical systems*”. Journal of Difference Equations and Applications, **19**, (2013) 27–38.
- [27] J. Franks, R. Williams. “*Entropy and knots*”, Trans. Am. Math. Soc., 279(1), 241–253 (1985).
- [28] E. Ghys. “*Knots and Dynamics*”. Página consultada a 8 de Dezembro de 2014, < <http://www.icm2006.org/proceedings/Vol1/15.pdf> >.
- [29] R. Ghrist. “*Branched two-manifolds supporting all links*”. Topology 36(2) (1997), 423–488.
- [30] R. Ghrist, P. Holmes and M. Sullivan. “*Knots and Links in Three-Dimensional Flows*”. Lecture Notes in Mathematics, Springer (1997).

- [31] P. Glendinning, T. Hall. “Zeros of the kneading invariant and topological entropy for Lorenz maps”. *Nonlinearity* 9, 1996, 999-1014.
- [32] J. Girao. “Conjuntos  $\omega$ -límite y Entropía Topológica de Aplicaciones Triangulares Bidimensionales”. Tese de Doutorado, Universidad de Murcia (2004).
- [33] J. Guckenheimer and R. Williams. “Structural stability of Lorenz attractors”. *Publ. Math. IHES.* 50 (1979) 59–72.
- [34] J. Hadamard. “Les surfaces á courbes opposées et leur lignes géodésics”. *J. Math. Pures Appl.* 4, 27, (1898)
- [35] B.-L Hao e W.-M Zheng. “Applied symbolic dynamics and chaos”. World Scientific (1998)
- [36] B. Hasselblatt, A. Katok. “A Moderna Teoria de Sistemas Dinâmicos”. Fundação Calouste Gulbenkian ( 2005)
- [37] J. Hinks. “Knot Theory and Dynamics”. Cornell University, MATH 4530 ( 2009)
- [38] R. Hoberg. “Knots and braids”. Página consultada a 8 de Dezembro de 2014, < [http : //www.math.uchicago.edu/ may/VIGRE/VIGRE2011/REUPapers/Hoberg.pdf](http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2011/REUPapers/Hoberg.pdf) >.
- [39] P. Holmes. “Knoted periodic orbits in suspensions of Smale’s Horseshoe: Period multiplying and cabled knots”. *Phys.* 21 D (1986), 7–41.
- [40] P. Holmes. “A short history of dynamical systems theory: 1885 – 2007”. History of mathematics: Princeton University, Princeton, NJ 08544, U.S.A.
- [41] J. H. Hubbard e C. Sparrow. “The classification of topological expansive Lorenz maps”. *Comm. Pure and Appl. Math.* 4 (1990), 431 – 443

- [42] G. Keller and M. Pierre. “*Topological and measurable dynamics of Lorenz maps*”. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. Ergodic Theory, Analysis, and Efficient Simulation of Dynamical Systems 2001, 333–361
- [43] S. Kolyada, L. Snoha. “*Topological entropy of nonautonomous dynamical systems on the interval*”. Random Comput. Dynam. 4, no. 2-3, 1996, 205–233.
- [44] J.P. Lampreia, R. Severino, and J. Sousa Ramos. “*Symbolic product of bimodal kneading invariants*”. Grazer Mathematische Berichte, 346 (2004) 245-254.
- [45] V. Manturov. “*Knot theory*”. Chapman & Hall/CRC (2004).
- [46] J. Milnor, W. Thurston, “*On iterated maps of the interval*”. Lectures Notes in Mathematics **1342** (1988), Springer.
- [47] M. Misiurewicz e W. Szlenk. “*Entropy of piecewise monotone mappings*”. Studia Math. **67** (1980), 45-63.
- [48] W. de Melo, M. Martens. “*Universal models for Lorenz maps*”. Ergod. Th and Dynam. Sys., **21** (2001), 833-860.
- [49] W. de Melo, S. van Strien. “*One-dimensional dynamics*”. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], 25. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [50] M. Morse e G. A. Hedlund. “*Symbolic dynamics*”. Am. J. Math. **60**, 815 (1938) Stony Brook IMS Preprint, (2005).
- [51] H. R. Morton, R. J. Hadji. “*Conjugacy for positive permutation braids*”. Fundamenta Mathematicae **188**, 155–166 (2005).
- [52] K. Murasugi. “*Knot theory ans its applicatios*”. Birhkäuser (1996).



- [53] Peng, Shou-Li; Zhang, Xu-Sheng. “*The generalized Milnor-Thurston conjecture and equal topological entropy classes in symbolic dynamics of order topological space of three letters*”. Commun. in Math. Phys. 213, No2, 381-411.
- [54] J. H. Przytycki. “*Classical roots of knot theory*”. Chaos, Solitons and Fractal, Vol. 9, No 415, pp. 531 – 545, 1998.
- [55] D. Rand. “*The topological classification of Lorenz attractors*”. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **83** (1978), 451 – 460.
- [56] R. Ricca and B.Nipoti. “*Gauss’linking number revisited*”. J. Knot Theory Ramifications 20, 1325–1343 (2011).
- [57] L. Silva, J. Sousa Ramos. “*Two parameter families of discontinuous onedimensional maps*”. Annales Mathematicae Silesianae, **13**, (1999) 257–270.
- [58] L. Silva, J. Sousa Ramos. “*A unified renormalization scheme for two-piecewise monotonous maps of the interval*”. International Journal of Bifurcation and Chaos, **13**, 7 (2003) 1711–1719.
- [59] L. Silva, J. Sousa Ramos. “*Topological invariants and renormalization of Lorenz maps*”. Phys. **D 162** (2002), No. 3-4, 233–243.
- [60] L. Silva. “*Famílias de aplicações unidimensionais com descontinuidades*”. Tese de Doutoramento, Universidade Técnica de Lisboa (2002).
- [61] L. Silva, P. Simões, N. Franco. “*Topological entropy of renormalizable Lorenz systems*”. Aceite para publicação em Applied Mathematics & Information Sciences.
- [62] P. Simões, L. Silva, N. Franco. “*Genus for knots and links in renormalizable templates with several branch nodes*”. Nonlinear Dyn. 76, April (2014), No. 1, 1035–1045.

- 
- [63] Singer. “*Stable orbits and bifurcations of maps of the interval*”. SIAM J. Appl. Math., **35**, (1978) 260–267.
- [64] S. Smale. “*Differentiable dynamical systems* ”. Bull. Am. Math. Soc, **73**, 747–817, 1967.
- [65] M. Schub. “*Global stability of Dynamical Systems*”. Springer-Verlag (1987).
- [66] W. Thurston. “*On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces*”. Bull. Amer. Math. Soc. **19**, 417–431 (1988).
- [67] W. Tucker. “*The Lorenz attractor exists*”. C. R. Acad. Sci. Paris, **328**, 1197–1202, (1999).
- [68] R. Williams. “*The structure of Lorenz attractors*”. Publ. Math. I.H.E.S., **50** (1979), 73-99.
- [69] C. Zhang, X. Han, Q. Bi. “*Dynamical behaviors of the periodic parameter-switching system*”. Nonlinear Dyn. **73**, 29–37 (2013)

# Índice

- órbita, 14
- órbita crítica, 17
- órbita simbólica, 19
  
- algoritmo de Seifert, 43
- aplicação de Lorenz, 16
- aplicação deslocamento, 20, 53
- aplicação renormalizável, 26
- aplicação renormalização, 26
- aplicações *scm2*, 15
- atractor de Lorenz geométrico, 4
  
- carta divisão, 45
- carta junção, 45
- comprimento da cauda, 88
- conjunto invariante, 14
- conjunto negativamente invariante, 14
- conjunto positivamente invariante, 14
- cordas da trança, 35
  
- derivada de Schwarz, 18
- diagrama da trança, 36
- diagrama do nó, 30
  
- elo, 30
- endereço simbólico, 52
- entropia topológica, 74
  
- fecho de um trança, 85
- fecho de uma trança, 38, 39
- fluxo, 12
  
- genus, 44, 96
  
- invariante de amassamento, 22, 56
- invariante do nó, 39
- isotopia ambiente, 32
- itinerário, 20
- itinerário de um ponto, 52
  
- movimentos de Reidemeister, 33
  
- nó, 30
- nós ambiente equivalentes, 33
- nós ambiente isotópicos, 32
- nós renormalizáveis, 87
- número de cruzamentos, 96
- número de ligação, 41, 96
- número de pontos de cruzamento, 40

- número mínimo de pontos de cruzamento, 40
- par admissível  $(\gamma, \delta)$ , 24
- paridade de uma sequência simbólica, 21
- ponto periódico, 12
- produto  $*_j$ , 62
- projecção regular, 31
- renormalização de  $F$ , 67
- secção de Poincaré, 13
- semiórbita negativa, 14
- semiórbita positiva, 14
- semifluxo, 12
- semifluxo suspensão, 13
- sequência maximal, 23
- sequência minimal, 23
- sequência redutível, 24
- sequência simbólica, 19
- sistema dinâmico não autónomo, 51
- sistema  $(k, 2)$  renormalizável, 67
- sistema dinâmico, 10, 11
- sistemas  $(k, 2)$ , 51
- subtemplate de renormalização, 88
- template, 45
- template entrançado, 46
- tempo de primeiro retorno, 13
- tipo de nó, 33
- trança elementar, 36
- trança geométrica, 34
- trança positiva, 37
- trança produto, 38
- trança simples, 37
- tranças equivalentes, 35



---

**Contactos:**

Universidade de Évora

**Instituto de Investigação e Formação Avançada - IIFA**

Palácio do Vimioso — Largo Marquês de Marialva, Apart. 94

7002-554 Évora — Portugal

Tel: (+351) 266 706 581

Fax: (+351) 266 744 677

email: [iifa@uevora.pt](mailto:iifa@uevora.pt)