Universidade de Évora

Mestrado em Matemática Aplicada
Biénio 1999/2001

A análise não-suave e aplicações à existência de minimizantes para integrais variacionais não-coercivos

Dissertação apresentada por
Fátima Maria Filipe Pereira

Orientador: Professor Doutor António da Costa Ornelas Gonçalves
(Professor Associado)

"Esta dissertação não inclui as críticas e as sugestões feitas pelo júri."

Évora
2003

Universidade de Évora

Mestrado em Matemática Aplicada
Biénio 1999/2001

A análise não-suave e aplicações à existência de minimizantes para integrais variacionais não-coercivos

Dissertação apresentada por
Fátima Maria Filipe Pereira

Orientador: Professor Doutor António da Costa Ornelas Gonçalves
(Professor Associado)

"Esta dissertação não inclui as críticas e as sugestões feitas pelo júri."

Évora
2003

Agradecimentos

A realização desta dissertação foi possível graças à colaboração de várias pessoas às quais deixo aqui os meus sinceros agradecimentos.

Gostaria de agradecer ao meu orientador, Professor Doutor António Ornelas, pelas suas sugestões e críticas, e por todo o apoio prestado durante a elaboração da mesma.

À Dra. Clara Carlota, agradeço a ajuda e disponibilidade que sempre manifestou.

À minha família, e em especial aos meus pais e ao meu irmão, agradeço a compreensão e o apoio que sempre me deram, transmitindo-me força e coragem em todos os momentos.

A todas as pessoas que directa ou indirectamente contribuíram para a elaboração desta dissertação e que, por lapso, poderão não ter sido mencionadas queria manifestar também o meu apreço.

Índice

1 Introdução 1

2 Preliminares 5

2.1 Espaços topológicos 5
2.2 Espaços métricos 7
2.3 Espaços vectoriais 9
2.4 Espaços vectoriais topológicos 10
2.5 Espaços normados 10
2.6 Medidas 12
2.6.1 Sigma-álgebra 12
2.6.2 A σ-álgebra de Borel em $\mathbb{R}^n$ 13
2.6.3 Medidas 13
2.6.4 Medidas exteriores 15
2.6.5 A medida exterior de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ 16
2.6.6 Subconjuntos Lebesgue-mensuráveis de $\mathbb{R}^n$ 16
2.6.7 A medida de Lebesgue 17
2.6.8 Propriedades que se verificam quase sempre 17
2.7 Funções mensuráveis 18
2.7.1 Definição e propriedades 18
2.8 O integral de Lebesgue 21
2.8.1 Definição 21
2.8.2 Propriedades 22
2.9 Topologias fracas 24
2.9.1 Definições e propriedades básicas 24
2.9.2 Propriedades da topologia fraca $\sigma(X, X')$ 25
2.9.3 Propriedades da topologia fraca* $\sigma(X', X)$ 26
2.10 Espaços reflexivos e espaços separáveis 27
2.10.1 Espaços reflexivos 27
2.10.2 Espaços separáveis 27
2.11 Os espaços de Lebesgue $L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ 28
2.11.1 Definição e propriedades 28
2.11.2 Teoremas de representação 31
2.11.3 Convergências forte, fraca e fraca* 31
2.11.4 Convergência em medida 32
2.11.5 Critério de compacidade fraca em $L^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ 32
2.12 Os espaços de Sobolev $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ 33
2.12.1 Definição e propriedades 33
2.12.2 Um teorema de representação 34
2.12.3 Convergências forte e fraca 35
2.13 Funções monótonas 35
2.14 Funções absolutamente contínuas 35
2.15 Conjuntos convexos 38
2.16 Funções convexas 39

2.16.1 Definição . . . 39
2.16.2 Continuidade . . . 41
2.17 Funções semicontínuas inferiormente . . . 42
2.17.1 Definição . . . 42
2.18 Γ-Regularização . . . 44
2.19 Funções polares . . . 45
2.19.1 Definição . . . 45
2.19.2 Bipolares . . . 46
2.20 Subdiferenciabilidade . . . 46
2.20.1 Definição . . . 46
2.20.2 Cálculo subdiferencial . . . 48
2.20.3 Relação com a diferenciabilidade à Gâteaux . . . 48
2.21 Gradientes generalizados . . . 50
2.21.1 Definição . . . 50
2.21.2 Regras básicas de cálculo . . . 51
2.21.3 Relação com o subdiferencial . . . 52
2.22 Integrandos normais . . . 53
2.22.1 Definição e propriedades . . . 53
2.23 Multifunções . . . 53
2.23.1 Definição e propriedades . . . 53
2.23.2 Mensurabilidade . . . 54
2.24 Alguns resultados de *sci* para funcionais integrais . . . 56

3 Condições necessárias para os minimizantes **59**
3.1 Introdução . . . 59
3.2 Definições e resultados preliminares . . . 60
3.3 O problema não-autónomo . . . 61
3.3.1 Existência de solução . . . 65
3.3.2 O problema relaxado . . . 78
3.4 O problema autónomo . . . 89
3.4.1 Definições e resultados preliminares . . . 90
3.4.2 Existência de solução . . . 99

4 Uma teoria intermédia de existência no cálculo das variações **115**
4.1 Introdução . . . 115
4.2 Resultados e definições preliminares . . . 115
4.2.1 A convexidade estrita no infinito . . . 116
4.2.2 Valores essenciais . . . 121
4.2.3 Valores essenciais e extremais . . . 124
4.3 O resultado principal . . . 127
4.3.1 Exposição . . . 128
4.3.2 Exemplos . . . 129
4.4 Existência de solução para o problema lipschitziano . . . 137
4.4.1 Observação . . . 142
4.5 O fenómeno de Lavrentiev . . . 143
4.6 Existência local . . . 146
4.7 Existência e regularidade globais . . . 151
4.7.1 Existência de solução . . . 152
4.7.2 Lagrangianos de crescimento lento . . . 154
4.7.3 Lagrangianos coercivos (de crescimento rápido) . . . 156
4.7.4 Condições tipo Morrey . . . 159

5 Um método indirecto no cálculo das variações **161**
5.1 Introdução 161
5.2 O problema autónomo 162
5.2.1 Hipóteses básicas 162
5.2.2 Existência de solução para os problemas aproximantes 163
5.2.3 O resultado principal 175
5.2.4 Casos particulares 181
5.2.5 O conjunto K tem de ser um cone 193
5.3 O problema não-autónomo 196
5.3.1 Hipóteses básicas 196
5.3.2 O resultado principal 197
5.3.3 Um exemplo 200
5.3.4 O caso $n = 1$ 201
5.4 Anexos 203
5.4.1 Subgradientes proximais 203
5.4.2 Um resultado em análise não-suave 205
5.4.3 Um resultado de *sci* 208
5.4.4 O Princípio do Máximo 210
5.4.5 Uma condição de Lipschitz 211
5.4.6 Um resultado em optimização não-suave 213

Capítulo 1

Introdução

Desde há muito tempo que se estudam, no cálculo das variações, propriedades de regularidade para minimizantes de problemas da forma

$$\min \left\{ \int_a^b L(t, u(t), u'(t))\, dt : u \in AC([a,b], \mathbb{R}^n), u(a) = A, u(b) = B \right\}, \tag{1.1}$$

(onde os pontos A, B em $\mathbb{R}^n$, o intervalo $[a,b]$ e o integrando $L : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (chamado lagrangiano) são dados e u' representa a derivada du/dt). Alguns dos resultados obtidos serão vistos aqui.

O problema (1.1), com $n = 1$ e $L(t, s, \xi)$ finita e de classe C^2 (ou seja, L é duas vezes continuamente diferenciável), foi estudado por Tonelli (ver [48]). O qual provou que se a função $\xi \to L(t, s, \xi)$ verifica $L_{\xi\xi} \geq 0$ para qualquer (t, s) e $L(t, s, \xi) \geq \varphi(|\xi|)$ para qualquer $(t, s, \xi) \in [a,b] \times \mathbb{R}^2$, onde φ é uma função limitada inferiormente e verificando $\frac{\varphi(x)}{x} \to +\infty$ quando $x \to +\infty$, então o problema atinge um mínimo absoluto na classe das funções absolutamente contínuas definidas em $[a,b]$ e com valores em $\mathbb{R}$: $AC([a,b], \mathbb{R})$ (este é o chamado teorema clássico de existência de Tonelli). Adicionando algumas hipóteses a L é também possível provar teoremas de regularidade (ver, por exemplo, [9], Capítulo 2, Secção 6).

Nos últimos anos tem sido dada muita atenção aos problemas da forma (1.1), por um lado enfraquecendo as hipóteses de Tonelli e por outro encontrando contra-exemplos de minimizantes não-regulares para funcionais coercivos. Em relação a este último aspecto provou-se (ver [4] e [20]) que existem funções polinomiais $L(t, s, \xi)$ verificando as hipóteses do teorema de Tonelli mas para as quais o problema (1.1) não tem minimizantes lipschitzianos.

A propriedade de Lipschitz para os minimizantes é importante por duas razões: a primeira é que (quando $L(t, s, \xi)$ é localmente limitada) implica que o ínfimo do funcional em (1.1) definido em $AC([a,b], \mathbb{R}^n)$ coincide com o ínfimo em $C^1([a,b], \mathbb{R}^n)$ excluindo assim o fenómeno de Lavrentiev (ver [4]); a segunda razão é que a continuidade Lipschitz dos minimizantes juntamente com a convexidade estrita de $L(t, s, \xi)$ em ξ e com a condição de Erdmann implica a regularidade C^1 (ver [9], Teorema 2.6.ii).

Os três temas centrais e comuns em qualquer problema de minimização são: (1) existência - o problema terá solução?; (2) regularidade de solução - pode-se afirmar que a solução pertence a alguma subclasse de $AC([a,b], \mathbb{R}^n)$, tal como a das funções lipschitzianas?; (3) condições necessárias - quais são as condições que devem ser verificadas por qualquer solução?

Estes três temas serão abordados ao longo dos vários capítulos e para diferentes hipóteses no lagrangiano.

Depois do Capítulo 2, onde se expõem definições e resultados preliminares, estuda-se, detalhadamente, no Capítulo 3, o artigo [2], no qual se considera o problema não-autónomo

$$\min \left\{ I(u) := \int_a^b L(t, u'(t))\, dt : u \in W^{1,1}((a,b), \mathbb{R}^n), u(a) = A, u(b) = B \right\}$$

onde $L : (a,b) \times \mathbb{R}^n \to [0,+\infty]$ é mensurável em t, convexa e *sci* em ξ, e verifica uma condição de crescimento, isto é,

$$L(t,\xi) \geq \theta(|\xi|) \quad \text{para qualquer } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ e quase todo } t \in (a,b)$$

com $\theta : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ superlinear, ou seja,

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\theta(r)}{r} = +\infty.$$

Mostra-se que existe um minimizante para o problema e que se u é um minimizante local tal que $I(u) \in \mathbb{R}$ então existe $c \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$c \in \partial_\xi L(t, u'(t)) \quad \text{qs em } (a,b). \tag{1.2}$$

Em seguida, com base neste resultado, estuda-se o problema autónomo

$$\min \left\{ I(u) := \int_a^b L(u(t), u'(t))\, dt : u \in W^{1,1}((a,b), \mathbb{R}^n), u(a) = A, u(b) = B \right\} \tag{1.3}$$

onde $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0,+\infty]$ é uma função boreliana e para cada $s \in \mathbb{R}^n$ a função $L(s,\cdot)$ é convexa e *sci* em $\mathbb{R}^n$.

Mostra-se que, sob certas condições, existe um minimizante para o problema (1.3) e que se $u \in W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}^n)$ é um minimizante local para o funcional I com $I(u) \in \mathbb{R}$ e tal que

$$u'(t) \in int(\text{dom}\, L(u(t), \cdot)) \quad \text{qs em } [a,b]$$

então, existem uma constante $c \in \mathbb{R}$ e uma função mensurável $p(t)$ tais que, para quase todo $t \in (a,b)$,

$$p(t) \in \partial_\xi L(u(t), u'(t)), \tag{1.4}$$

$$c = \langle p(t), u'(t) \rangle - L(u(t), u'(t)).$$

Quando L não é necessariamente diferenciável, como é o caso em toda esta dissertação, não se tem a equação de Euler-Lagrange mas existe uma versão não-suave desta equação e que qualquer minimizante u deve satisfazer. No caso em que L pode tomar o valor $+\infty$, como acontece no Capítulo 2, esta versão afirma que existe $c \in \mathbb{R}^n$ tal que se verifica (1.2), isto quando L não depende explicitamente de s, e quando L não depende explicitamente de t temos (1.4). Além disso, se L toma apenas valores reais prova-se em [15] que existe uma função p absolutamente contínua em $[a,b]$ tal que

$$(p'(t), p(t)) \in \partial L(t, u(t), u'(t)) \qquad \text{qs} \tag{1.5}$$

onde ∂L representa o gradiente generalizado de L em relação a (s,ξ) para t fixado.

No Capítulo 4 estuda-se o artigo [17] começando-se por obter propriedades de regularidade para o problema de minimização local

$$\min \left\{ \int_a^b L(t, u(t), u'(t))\, dt : u(a) = A, u(b) = B \right\},$$

onde o intervalo $[a,b]$, a constante R e a função $L : [a,b] \times R\bar{B} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são dados e o mínimo é tomado sob todas as funções absolutamente contínuas definidas em $[a,b]$ e com valores em $\mathbb{R}^n$ e tais que $|u(t)| < R$ qualquer que seja o $t \in [a,b]$. As hipóteses implicarão que L é contínua conjuntamente em todas as variáveis e convexa em ξ para cada $(t,s) \in \Omega := [a,b] \times R\bar{B}$ fixado. Prova-se, adicionado algumas hipóteses ao lagrangiano, que o problema

$$\min \left\{ \int_a^b L(t, u(t), u'(t))\, dt : u \in AC([a,b], \mathbb{R}^n), u(a) = A, u(b) = B, |u(t)| < R \;\; \forall t \in [a,b] \right\}$$

tem solução e que qualquer solução é lipschitziana. Em seguida prova-se que qualquer solução do problema global ($R = +\infty$) também é lipschitziana quer o lagrangiano seja ou não coercivo.

Por fim, no Capítulo 5, estuda-se o artigo [11] o qual apresenta um método indirecto para provar a existência de solução do problema básico do cálculo das variações (1.1) com L semicontínua inferiormente, limitada inferiormente e convexa com respeito a ξ. A coercividade é substituida por uma condição mais fraca que permite obter minimizantes para problemas aproximantes adequados. O passo principal da demonstração é mostrar que qualquer minimizante dos problemas aproximantes satisfaz uma condição necessária.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo preliminar enunciamos algumas definições e resultados (sem demonstração), os quais são supostos serem conhecidos no restante texto.

2.1 Espaços topológicos

Definição 2.1.1 *Uma família τ de subconjuntos de um conjunto X diz-se uma* **topologia** *em X se τ contém o conjunto $\emptyset$, o conjunto X, a união de qualquer sua subfamília e a intersecção de qualquer sua subfamília finita.*

Definição 2.1.2 *O par (X, τ) diz-se um* **espaço topológico**. *Os conjuntos em τ são chamados os* **conjuntos abertos** *de (X, τ).*

Nota 2.1.3 *Quando não há perigo de confusão dizemos apenas que X é um espaço topológico.*

Definição 2.1.4 *Se τ e τ_1 são duas topologias em X, diz-se que τ é* **mais forte** *que τ_1 (ou que τ_1 é* **mais fraca** *que τ) se $\tau_1 \subset \tau$.*

Definição 2.1.5 *Sejam X um conjunto e τ uma topologia em X.*

(i) Um conjunto $E \subset X$ diz-se **fechado** *se o seu complementar (relativamente a X),*

$$X \backslash E := \{x \in X : x \notin E\}$$

é aberto em X.

(ii) O **fecho** *$\overline{E}$ de E é a intersecção de todos os conjuntos fechados que contém E.*

(iii) O **interior** *de E, $int(E)$, é a união de todos os seus subconjuntos abertos; um ponto $p \in int(E)$ diz-se* **ponto interior** *de E.*

(iv) O conjunto ∂E, dos pontos em $\overline{E}$ que não pertencem ao interior de E, diz-se a **fronteira** *de E.*

(v) Uma **vizinhança de um ponto** *$p \in X$ é um subconjunto de X contendo um aberto contendo p.*

(vi) Uma **vizinhança de um conjunto** *$A \subset X$ é um conjunto contendo um aberto contendo A.*

Definição 2.1.6 *Uma família β de subconjuntos de X diz-se uma* **base** *para a topologia τ se $\beta \subset \tau$ e se cada conjunto em τ é a união de alguma subfamília de β.*

Se β é uma colecção de vizinhanças de um conjunto $A \subset X$ e qualquer vizinhança de A contém um conjunto em β, então β diz-se um **sistema** *(ou uma* **família**) **fundamental de vizinhanças** *para A.*

Definição 2.1.7 *Seja X um espaço topológico. Diz-se que uma sucessão (x_k)* **converge** *para um ponto $x \in X$, e escreve-se*

$$\lim_{k \to \infty} x_k = x \quad ou \quad (x_k) \to x,$$

se qualquer vizinhança de x contém todos os pontos x_k, excepto um número finito.

Uma sucessão $(x_k) \subset X$ diz-se **convergente** *em X se $(x_k) \to x$ para algum $x \in X$.*

Definição 2.1.8 *Sejam X um espaço topológico e D um subconjunto de X. Diz-se que D é* **denso** *se $\overline{D} = X$.*

Proposição 2.1.9 *Um subconjunto de um espaço topológico é aberto se e só se contém uma vizinhança de cada um dos seus pontos.*

Demonstração:
Ver [27], Lema I.4.2.

Proposição 2.1.10 *(i) A intersecção de qualquer família de conjuntos fechados é um conjunto fechado.*

(ii) A união de uma família finita de conjuntos fechados é um conjunto fechado.

(iii) Os conjuntos $\emptyset$ e X são fechados.

Demonstração:
Ver [27], Lema I.4.4.

Definição 2.1.11 *Sejam X um conjunto, Y um subconjunto de X e τ uma topologia para X. A topologia*

$$\tau_Y := \{A : A = B \cap Y, B \in \tau\}$$

diz-se a **topologia relativa** *de Y gerada por τ.*

Um subconjunto de Y diz-se **relativamente aberto** *se pertence a τ_Y;* **relativamente fechado** *se é o complementar, relativamente a Y, de um conjunto relativamente aberto. Outros conceitos análogos definem-se da mesma forma.*

Nota 2.1.12 *No que segue, um subconjunto de um espaço topológico será sempre encarado como um espaço topológico com a sua topologia relativa, excepto se outra topologia for especificada.*

Definição 2.1.13 *Sejam (X, τ) e (Y, τ_1) dois espaços topológicos e f uma aplicação de X em Y. A aplicação f é* **contínua** *se o conjunto*

$$f^{-1}(A) := \{x \in X : f(x) \in A\}$$

é um elemento de τ qualquer que seja o conjunto $A \in \tau_1$ (isto é, f é contínua se a imagem inversa por f de qualquer aberto A em Y é um conjunto aberto em X).

A aplicação f é **contínua no ponto** *$x \in X$ se para qualquer vizinhança U de $f(x)$ existe uma vizinhança V de x tal que o conjunto*

$$f(V) := \{f(x) : x \in V\}$$

está contido em U.

Proposição 2.1.14 *Sejam X e Y espaços topológicos e seja $f : X \to Y$. Então cada uma das seguintes afirmações é equivalente à continuidade de f:*

(i) f é contínua em cada ponto $x \in X$;

(ii) a imagem inversa de cada conjunto fechado em Y é um conjunto fechado em X.

Demonstração:
Ver [27], Lema I.4.16.

Definição 2.1.15 *Um espaço topológico X é um* **espaço de Hausdorff** *se se verificam as seguintes propriedades:*

(i) qualquer subconjunto de X constituido apenas por um elemento é um conjunto fechado

e

(ii) quaisquer dois pontos distintos em X admitem vizinhanças disjuntas.

Definição 2.1.16 *Seja X um espaço topológico e seja A um subconjunto de X. Uma* **cobertura aberta** *de A é uma família de abertos cuja união contém A.*

Definição 2.1.17 *Se X é um espaço topológico, então X diz-se* **compacto** *se qualquer sua cobertura contém um número finito de subconjuntos que também é uma cobertura de X, isto é se X admite uma subcobertura finita.*

Definição 2.1.18 *Seja X um espaço topológico. Um conjunto $A \subset X$ é* **compacto** *na sua topologia relativa se qualquer cobertura de A por abertos em X contém uma subcobertura finita.*

Proposição 2.1.19 *(i) Um subconjunto fechado de um espaço compacto é compacto.*

(ii) A imagem de um espaço compacto por uma função contínua é um compacto.

(iii) Um subconjunto compacto de um espaço de Hausdorff é fechado.

Demonstração:
Ver [27], Lema I.5.7.

Proposição 2.1.20 *Uma função real contínua definida num espaço compacto atinge o seu ínfimo e o seu supremo.*

Demonstração:
Ver [27], Lema I.5.10.

Definição 2.1.21 *Seja X um espaço topológico e seja A um subconjunto de X. O conjunto A é* **sequencialmente compacto** *se qualquer sucessão (numerável [1]) de pontos em A admite uma subsucessão convergente para um elemento de A.*

2.2 Espaços métricos

Definição 2.2.1 *Seja X um conjunto. Uma função real ρ definida em $X \times X$, com as seguintes propriedades:*

(i) $\rho(x,y) \geq 0$

(ii) $\rho(x,y) = 0$ *se e só se* $x = y$

(iii) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$

(iv) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$

diz-se uma **métrica** *em X.*

Definição 2.2.2 *Sejam X um conjunto, ρ uma métrica em X, $x \in X$ e $\varepsilon > 0$. O subconjunto*

$$B_\varepsilon(x) := \{y \in X : \rho(x,y) < \varepsilon\}$$

diz-se a **bola aberta** *de centro em x e raio ε.*

[1] Diremos que um conjunto A é **numerável** se for equipotente a $\mathbb{N}$, isto é, se existir uma bijecção entre A e $\mathbb{N}$.

Definição 2.2.3 *Seja X um conjunto e ρ uma métrica em X. A mais pequena topologia em X que contém as bolas abertas em X diz-se a* ***topologia da métrica****.*

Proposição 2.2.4 *Seja X um conjunto e ρ uma métrica em X. Então as bolas abertas constituem uma base para a topologia da métrica.*

Demonstração:
Ver [27], Lema I.6.2.

Definição 2.2.5 *Seja X um conjunto e ρ uma métrica em X. Então X, munido da sua topologia da métrica, diz-se um* ***espaço métrico****.*

Definição 2.2.6 *Seja X um espaço topológico. Se existe em X uma métrica tal que a topologia da métrica coincide com a topologia inicial, então diz-se que X é* ***metrizável****.*

Proposição 2.2.7 *Qualquer espaço métrico é um espaço topológico de Hausdorff.*

Demonstração:
Ver [27], Teorema I.6.3.

Proposição 2.2.8 *Qualquer subconjunto de um espaço métrico, com a topologia relativa, é um espaço métrico.*

Demonstração:
Ver [27], Lema I.6.4.

Proposição 2.2.9 *Seja X um espaço métrico e A um subconjunto de X. Um ponto a pertence ao fecho de A se e só se existe uma sucessão (a_k) de pontos de A convergente para a.*

Demonstração:
Ver [27], Lema I.6.6.

Proposição 2.2.10 *Um subconjunto de um espaço métrico é compacto se e só se é sequencialmente compacto.*

Demonstração:
Ver [27], Teorema I.6.13.

Definição 2.2.11 *Seja X um espaço métrico e (x_k) uma sucessão em X. Diz-se que (x_k) é uma* ***sucessão de Cauchy*** *se*

$$\lim_{k,j\to\infty} \rho(x_k, x_j) = 0.$$

Se qualquer sucessão de Cauchy em X é convergente, então X diz-se um ***espaço métrico completo****.*

Proposição 2.2.12 *Sejam X e Y espaços métricos. Uma função $f : X \to Y$ é contínua se e só se*

$$(f(x_k)) \to f(x) \text{ sempre que } (x_k) \to x.$$

Demonstração:
Ver [27], Lema I.6.8.

Definição 2.2.13 *Sejam X e Y espaços métricos. Uma aplicação $f : X \to Y$ é* ***uniformemente contínua*** *em X se para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\rho(x, y) < \delta$ implica $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

2.3 Espaços vectoriais

Definição 2.3.1 *Um* ***espaço vectorial*** *sobre o corpo* $\mathbb{R}$, *também chamado* ***espaço vectorial real,*** *é um conjunto não-vazio* X *(cujos elementos são chamados* ***vectores****) onde estão definidas duas operações: uma adição entre elementos de* X *e uma multiplicação de um elemento de* X *por um* ***escalar*** *(isto é, por um elemento do corpo* $\mathbb{R}$*), com as seguintes propriedades algébricas:*

(A) A cada par de vectores (x, y) *corresponde um vector* $x + y$ *de tal forma que:*

(A1) $x + y = y + x$ *e* $x + (y + z) = (x + y) + z,\ \forall x, y, z \in X$;

(A2) X *contém um único vector* 0 *(o vector nulo de* X*) tal que* $x + 0 = x$ *para qualquer* $x \in X$;

(A3) a cada $x \in X$ *corresponde um único vector* $-x$ *(o simétrico de* x*) tal que* $x + (-x) = 0$.

(M) A cada par (α, x), *com* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e* $x \in X$, *corresponde um vector* αx *de tal forma que:*

(M1) $1x = x,\quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x,\ \forall x \in X,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

(M2) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y,\ (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x,\ \forall x, y \in X,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Definição 2.3.2 *Um espaço vectorial* X *tem* ***dimensão*** n, *isto é* $\dim X = n$, *se possui uma* ***base*** $\{u_1, ..., u_n\}$ *com* n *elementos. Isto significa que qualquer* $x \in X$ *admite uma única representação da forma* $x = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_u$, *onde* $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, ..., n$.

Definição 2.3.3 *Se para algum* n, $\dim X = n$ *então diz-se que* X *tem* ***dimensão finita****. Caso contrário diz-se que* X *tem* ***dimensão infinita****.*

Definição 2.3.4 *Seja* X *um espaço vectorial real. Um* ***produto interno*** *em* X *é uma função* $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$, *que associa a cada par ordenado de vectores* $x, y \in X$ *um número real* $\langle x, y \rangle$, *chamado o produto interno de* x *por* y, *de modo a serem verificadas as condições abaixo, para quaisquer* $x, x', y \in X$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$:

(P1) $\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$;

(P2) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$;

(P3) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;

(P4) $x \neq 0 \Rightarrow \langle x, x \rangle > 0$.

A partir do produto interno define-se a ***norma*** *de um vector* $x \in X$ *pondo* $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Definição 2.3.5 *Se* X *e* Y *são espaços vectoriais reais, uma aplicação* $L : X \to Y$ *diz-se* ***linear*** *se*

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y),\quad \forall x, y \in X,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Definição 2.3.6 *Seja* X *um espaço vectorial. Chama-se* ***funcional*** *a qualquer aplicação* $L : X \to \mathbb{R}$. *Se* L *é linear, diz-se que* L *é um* ***funcional linear****.*

Definição 2.3.7 *Se* X *é um espaço vectorial,* $A \subset X$, $B \subset X$, $x \in X$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$, *define-se*

$$\begin{array}{ll} x + A := \{x + a : a \in A\}, & x - A := \{x - a : a \in A\} \\ A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}, & \lambda A := \{\lambda a : a \in A\}. \end{array}$$

2.4 Espaços vectoriais topológicos

Definição 2.4.1 *Seja X um espaço vectorial real. Diz-se que X é um* ***espaço vectorial topológico*** *se está munido de uma topologia relativamente à qual:*

(i) qualquer subconjunto de X constituido apenas por um elemento é um conjunto fechado

e

(ii) as operações

$$\begin{array}{rcl} (u,v) & \to & u+v \quad \text{de } X \times X \text{ em } X \\ (\lambda,u) & \to & \lambda u, \quad \text{de } \mathbb{R} \times X \text{ em } X \end{array}$$

são contínuas.

Proposição 2.4.2 *Qualquer espaço vectorial topológico é um espaço de Hausdorff.*

Demonstração:
Ver [45], Teorema 1.12, pág. 11.

Definição 2.4.3 *Um espaço vectorial topológico diz-se* ***localmente convexo*** *se a origem possui um sistema fundamental de vizinhanças convexas.*

2.5 Espaços normados

Definição 2.5.1 *Seja X um espaço vectorial real. Diz-se que X é um* ***espaço normado*** *se a cada $x \in X$ está associado um número real $|x|_X$, dito a norma de x, de tal forma que:*

(i) $|x|_X > 0$ *se* $x \neq 0$;

(ii) $|x+y|_X \leq |x|_X + |y|_X$, *para quaisquer* $x, y \in X$;

(iii) $|\alpha x|_X = |\alpha|\,|x|_X$ *para qualquer* $x \in X$ *e para qualquer* $\alpha \in \mathbb{R}$.

*A expressão "**norma**" é usada para significar a aplicação que associa a cada $x \in X$ o número $|x|_X$.*

Definição 2.5.2 *Sejam X um espaço normado, $x \in X$ e $r \in \mathbb{R}$. A* ***bola aberta*** *de centro em x e raio r é o conjunto*

$$B_r(x) := \{y \in X : |y-x|_X < r\}.$$

A ***bola fechada*** *de centro em x e raio r é o conjunto*

$$\overline{B}_r(x) := \{y \in X : |y-x|_X \leq r\}.$$

Observação 2.5.3 *Seja $(X, |\cdot|_X)$ um espaço normado. É fácil ver que a aplicação ρ definida em $X \times X$ por*

$$\rho(x,y) = |x-y|_X$$

é uma métrica em X.

Assim,

Proposição 2.5.4 *Qualquer espaço normado é um espaço métrico.*

Daqui resulta, pela Proposição 2.2.7, que

Proposição 2.5.5 *Qualquer espaço normado é um espaço de Hausdorff.*

Proposição 2.5.6 *Qualquer espaço normado, com a topologia da métrica, é um espaço vectorial topológico localmente convexo.*

Demonstração:
Ver [26], pág. 415.

Definição 2.5.7 *Seja $(X, |\cdot|_X)$ um espaço normado. Um subconjunto A de X diz-se* **limitado** *se existe $M > 0$ tal que*

$$|x|_X \leq M, \quad \forall x \in A.$$

Proposição 2.5.8 *Seja $(X, |\cdot|_X)$ um espaço normado. Então qualquer subconjunto compacto de X é limitado e fechado.*

Demonstração:
Ver [31], pág. 176 e 178.

Proposição 2.5.9 *Um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ é compacto se e só se é limitado e fechado.*

Demonstração:
Ver [31], capítulo VII, Proposição 10.

Definição 2.5.10 *Seja $(X, |\cdot|_X)$ um espaço normado. Diz-se que X é um* **espaço de Banach** *se é um espaço métrico completo com a métrica definida pela sua norma.*

Proposição 2.5.11 *Sejam X e Y espaços normados e seja $L : X \to Y$ uma função linear. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) L é contínua;

(ii) L é contínua nalgum ponto de X;

(iii)

$$\sup_{x \in X, |x|_X \leq 1} |L(x)|_Y \in \mathbb{R};$$

(iv) L é limitada, isto é, existe $M > 0$ tal que

$$|L(x)|_Y \leq M |x|_X \ , \ \forall x \in X.$$

Demonstração:
Ver [27], Lema II.3.4.

Definição 2.5.12 *Seja X um espaço normado. Nota-se por X' o* **espaço dual** *de X, isto é o conjunto de todos os funcionais lineares contínuos definidos em X.*

É fácil ver que:

Proposição 2.5.13 *Se $(X, |\cdot|_X)$ é um espaço normado e X' é o seu dual, então a função real $|\cdot|_{X'}$, definida em X' por*

$$|f|_{X'} := \sup_{x \in X, |x|_X \leq 1} |f(x)|,$$

é uma norma em X', dita a **norma dual.**

Proposição 2.5.14 *Sejam $(X, |\cdot|_X)$ um espaço normado e X' o seu dual, equipado com a norma dual. Então X' é um espaço de Banach.*

Demonstração:
Ver [27], Lema II.3.8.

É fácil ver que:

Observação 2.5.15 *Se X é um espaço normado, então uma sucessão $(x_k) \subset X$ converge para um ponto $x \in X$ se e só se $\lim_{k \to \infty} |x_k - x|_X = 0$. Assim,*

$$(x_k) \to x \Leftrightarrow (|x_k - x|_X) \to 0.$$

2.6 Medidas

2.6.1 Sigma-álgebra

Seja X um conjunto.

Definição 2.6.1 *Uma colecção $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X diz-se uma* ***σ-álgebra*** *em X se*

(i) $X \in \mathcal{A}$;

(ii) se $A \in \mathcal{A}$, então $X \backslash A = \{x \in X : x \notin A\} \in \mathcal{A}$;

(iii) se $A_j \in \mathcal{A}$ para cada $j = 1, 2, ...$ então $\cup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$.

Assim, uma σ-álgebra em X é um família de subconjuntos de X que contém X e que é fechada para a complementação e para as uniões numeráveis.

Definição 2.6.2 *Se $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra em X, então o par $(X, \mathcal{A})$ diz-se um* ***espaço mensurável.***

Definição 2.6.3 *Se $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra em X, então um subconjunto de X diz-se* ***$\mathcal{A}$-mensurável*** *se pertence a $\mathcal{A}$.*

A proposição seguinte é uma consequência imediata de definição anterior:

Proposição 2.6.4 *Se uma colecção $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X é uma σ-álgebra, então:*

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$;

(ii) se $A_j \in \mathcal{A}$ para cada $j = 1, 2, ..., n$, então $\cup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{A}$;

(iii) se $A_j \in \mathcal{A}$ para cada $j = 1, 2, ...$, então $\cap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$;

(iv) se $A, B \in \mathcal{A}$, então $A \backslash B \in \mathcal{A}$.

Demonstração:
Ver [46], pág. 10.

Proposição 2.6.5 *Seja X um conjunto e seja $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de X. Então existe a mais pequena σ-álgebra em X que contém $\mathcal{F}$.*

Demonstração:
Ver [21], Corolário 1.1.2.

Observação 2.6.6 *Dizer que $\mathcal{A}$ é a mais pequena σ-álgebra em X que contém $\mathcal{F}$ significa dizer que $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra em X que inclui $\mathcal{F}$, e que qualquer σ-álgebra em X que contém $\mathcal{F}$ também contém $\mathcal{A}$. Esta mais pequena σ-álgebra em X que contém $\mathcal{F}$ é única e diz-se a* ***σ-álgebra gerada*** *por $\mathcal{F}$ e designa-se por $\sigma(\mathcal{F})$.*

Definição 2.6.7 *Sejam $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ e $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ dois espaços mensuráveis. O* ***espaço produto*** *$\Omega_1 \times \Omega_2$ é dado pelo conjunto*

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \in \Omega_1, x_2 \in \Omega_2\}.$$

Definição 2.6.8 *A* ***σ-álgebra produto*** *$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ dos conjuntos em Ω é a mais pequena σ-álgebra contendo todos os conjuntos da forma $A_1 \times A_2$, com $A_1 \in \mathcal{A}_1$ e $A_2 \in \mathcal{A}_2$, ou seja, é a σ-álgebra gerada por todos esses conjuntos.*

2.6.2 A σ-álgebra de Borel em $\mathbb{R}^n$

Definição 2.6.9 *A **σ-álgebra de Borel** em $\mathbb{R}^n$, notada por $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ou simplesmente por $\mathcal{B}_n$, é a σ-álgebra em $\mathbb{R}^n$ gerada pelos subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$.*

Definição 2.6.10 *Os **conjuntos borelianos** de $\mathbb{R}^n$ são os elementos de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.*

Proposição 2.6.11 *A σ-álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, dos subconjuntos borelianos de $\mathbb{R}^n$, é gerada por cada uma das seguintes colecções de conjuntos:*

(i) a colecção de todos os subconjuntos fechados de $\mathbb{R}^n$;

(ii) a colecção de todos os semi-espaços de $\mathbb{R}^n$ da forma

$$\{(x_1, ..., x_n) : x_i \leq b\},$$

para algum índice i e para algum $b \in \mathbb{R}$;

(iii) a colecção de todos os rectângulos de $\mathbb{R}^n$ da forma

$$\{(x_1, ..., x_n) : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, ..., n\}.$$

Demonstração:
Ver [21], Proposição 1.1.4.

Definição 2.6.12 *Seja $\mathcal{G}$ a família de todos os subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$ e seja $\mathcal{F}$ a família de todos os subconjuntos fechados de $\mathbb{R}^n$. Seja $\mathcal{G}_\delta$ a colecção de todas as intersecções de famílias numeráveis de elementos de $\mathcal{G}$ e seja $\mathcal{F}_\sigma$ a colecção de todas as uniões de famílias numeráveis de elementos de $\mathcal{F}$. Cada conjunto em $\mathcal{G}_\delta$ diz-se um **G_δ** e cada conjunto em $\mathcal{F}_\sigma$ diz-se um **F_σ**.*

Proposição 2.6.13 *Qualquer subconjunto fechado de $\mathbb{R}^n$ é um G_δ e qualquer subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ é um F_σ.*

Demonstração:
Ver [21], Proposição 1.1.5.

2.6.3 Medidas

Seja X um conjunto e seja $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra em X.

Definição 2.6.14 *Uma função μ definida em $\mathcal{A}$ com valores em $[0, +\infty]$ diz-se **numeravelmente aditiva** se*

$$\mu\left(\cup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

sempre que $A_j \in \mathcal{A}$, $j = 1, 2, ...$ e $A_j \cap A_k = \emptyset$ para $j \neq k$ (note-se que como para cada j, $\mu(A_j)$ é não-negativo, a soma $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$ existe sempre como um número real ou como $+\infty$).

Definição 2.6.15 *Uma **medida** positiva μ em $\mathcal{A}$ é uma função definida em $\mathcal{A}$ com valores em $[0, +\infty]$ numeravelmente aditiva.*

Definição 2.6.16 *Se $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra em X e μ é uma medida em $\mathcal{A}$ diz-se que o terno $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um **espaço de medida**.*

Definição 2.6.17 *Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida diz-se que μ é uma medida em $(X, \mathcal{A})$. Se a σ-álgebra $\mathcal{A}$ está subentendida, diz-se apenas que μ é uma medida em X.*

Proposição 2.6.18 *Seja μ uma medida positiva no espaço mensurável $(X, \mathcal{A})$. Então:*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) *se* $A_1, ..., A_n$ *são elementos de* $\mathcal{A}$ *disjuntos dois a dois, então*

$$\mu(A_1 \cup ... \cup A_n) = \mu(A_1) + ... + \mu(A_n);$$

(iii) *se* $A, B \in \mathcal{A}$ *e* $A \subset B$, *então*

$$\mu(A) \leq \mu(B);$$

além disso, se $\mu(A) < +\infty$ *então*

$$\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A);$$

(iv) *se* $A = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$, *com* $A_j \in \mathcal{A}$ *para cada* $j = 1, 2, ...$ *e* $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset ...$, *então*

$$\lim_{j \to \infty} \mu(A_j) = \mu(A);$$

(v) *se* $A = \cap_{j=1}^{\infty} A_j$, *com* $A_j \in \mathcal{A}$ *para cada* $j = 1, 2, ...$ *e* $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset ...$ *e* $\mu(A_1) < \infty$, *então*

$$\lim_{j \to \infty} \mu(A_j) = \mu(A).$$

Demonstração:
Ver [46], Teorema 1.19 e [21], Proposição 1.2.1.

Definição 2.6.19 *Uma medida em* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ *diz-se uma* **medida de Borel** *em* $\mathbb{R}^n$. *Mais geralmente, se* X *é um subconjunto boreliano de* $\mathbb{R}^n$ *e se* $\mathcal{A}$ *é a* σ*-álgebra cujos elementos são todos os borelianos de* $\mathbb{R}^n$ *que estão contidos em* X, *então uma medida em* $(X, \mathcal{A})$ *diz-se uma medida de Borel em* X.

Definição 2.6.20 *Seja* μ *uma medida num espaço mensurável* $(X, \mathcal{A})$. *Diz-se que* μ *é uma* **medida finita** *se* $\mu(X) < +\infty$ *e neste caso,* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *diz-se um* **espaço de medida finita**.

A medida μ *diz-se uma* **medida** σ**-finita** *e o espaço* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *um* **espaço de medida** σ**-finita**, *se* X *é a união de uma família* $A_1, A_2, ...$ *de elementos de* $\mathcal{A}$ *satisfazendo* $\mu(A_j) < +\infty$ *para cada* j.

Definição 2.6.21 *Seja* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *um espaço de medida. Diz-se que* μ *é uma* **medida completa**, *e que* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *é um* **espaço de medida completa**, *se as condições* $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = 0$ *e* $B \subset A$ *implicam* $B \in \mathcal{A}$.

Definição 2.6.22 *Seja* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *um espaço de medida. Um subconjunto* B *de* X *diz-se* μ**-nulo** *se existe um subconjunto* A *de* X *tal que* $A \in \mathcal{A}$, $B \subset A$ *e* $\mu(A) = 0$.

Assim:

Proposição 2.6.23 *Se* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *é um espaço de medida, então* μ *é completa se e só se cada conjunto* μ*-nulo pertence a* $\mathcal{A}$.

Demonstração:
Ver [21], pág. 35.

Definição 2.6.24 *Seja* $(X, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável e seja* μ *uma medida em* $\mathcal{A}$. *Chama-se* **completamento** *de* $\mathcal{A}$ *por* μ *à colecção* $\mathcal{A}_\mu$ *de todos os subconjuntos* A *de* X *para os quais existem conjuntos* E *e* F *em* $\mathcal{A}$ *tais que:*

(i) $E \subset A \subset F$

e

(ii) $\mu(F \backslash E) = 0$.

Um conjunto em $\mathcal{A}_\mu$ diz-se ***μ-mensurável.***

Sejam A, E e F como na definição anterior. É evidente que $\mu(E) = \mu(F)$. Além disso, se B é um qualquer subconjunto de A pertencente a $\mathcal{A}$, tem-se $\mu(B) \leq \mu(F) = \mu(E)$. Então $\mu(E) = \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{A} \text{ e } B \subset A\}$, e portanto o valor comum de $\mu(E)$ e $\mu(F)$ depende apenas do conjunto A (e da medida μ) e não da escolha dos conjuntos E e F satisfazendo as condições (i) e (ii) da definição anterior. Isto significa que podemos enunciar a seguinte definição:

Definição 2.6.25 *Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e μ uma medida em $\mathcal{A}$. Seja $\mathcal{A}_\mu$ o completamento de $\mathcal{A}$ por μ. A função $\overline{\mu} : \mathcal{A}_\mu \to [0, +\infty]$, definida por $\overline{\mu}(A) = \mu(E) = \mu(F)$, onde E e F pertencem a $\mathcal{A}$ e satisfazem as condições (i) e (ii) da definição anterior, diz-se o* ***completamento*** *de μ.*

Proposição 2.6.26 *Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e μ uma medida em $\mathcal{A}$. Então:*

(i) $\mathcal{A}_\mu$ é uma σ-álgebra em X que inclui $\mathcal{A}$

e

(ii) $\overline{\mu}$ é uma medida completa em $\mathcal{A}_\mu$ cuja restrição a $\mathcal{A}$ é μ.

Demonstração:
Ver [21], Proposição 1.5.1.

2.6.4 Medidas exteriores

Seja X um conjunto e seja 2^X a colecção de todos os subconjuntos de X.

Definição 2.6.27 *Uma* ***medida exterior*** *em X é uma função $\mu^* : 2^X \to [0, +\infty]$ verificando:*

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$;

(ii) se $A \subset B \subset X$, então $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;

(iii) se $\{A_j\}$ é uma família numerável de subconjuntos de X, então

$$\mu^*\left(\cup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j).$$

Assim, uma medida exterior em X é uma função de 2^X em $[0, +\infty]$ monótona e numeravelmente subaditiva, cujo valor em $\emptyset$ é 0.

Proposição 2.6.28 *Uma medida em X é uma medida exterior em X se e só se o seu domínio é 2^X.*

Demonstração:
Ver [21], pág. 14.

Definição 2.6.29 *Seja X um conjunto e seja μ^* uma medida exterior em X. Um subconjunto B de X diz-se* ***μ^*-mensurável*** *(ou mensurável com respeito a μ^*) se*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \backslash B)$$

para cada subconjunto A de X.

Proposição 2.6.30 *Sejam X um conjunto, μ^* uma medida exterior em X e $\mathcal{M}_{\mu^*}$ a colecção de todos os subconjuntos de X μ^*-mensuráveis. Então:*

(i) $\mathcal{M}_{\mu^*}$ é uma σ-álgebra

e

(ii) a restrição de μ^* a $\mathcal{M}_{\mu^*}$ é uma medida em $\mathcal{M}_{\mu^*}$.

Demonstração:
Ver [21], Teorema 1.3.4.

Proposição 2.6.31 *Sejam X um conjunto, μ^* uma medida exterior em X e $\mathcal{M}_{\mu^*}$ a colecção de todos os subconjuntos de X que são μ^*-mensuráveis. Então a restrição de μ^* a $\mathcal{M}_{\mu^*}$ é uma medida completa.*

Demonstração:
Ver [21], pág. 35.

2.6.5 A medida exterior de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$

Definição 2.6.32 *Um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ diz-se um intervalo* ***n-dimensional*** *se é da forma $I_1 \times ... \times I_n$, onde $I_1, ..., I_n$ são intervalos de $\mathbb{R}$.*

Definição 2.6.33 *O volume de um intervalo n-dimensional $I_1 \times ... \times I_n$, notado vol $(I_1 \times ... \times I_n)$, é o produto dos comprimentos dos intervalos $I_1, ..., I_n$.*

Definição 2.6.34 *Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e seja $\mathcal{C}_A$ o conjunto de todas as famílias numeráveis $\{R_i\}$ de intervalos n-dimensionais abertos e limitados tais que $A \subset \cup_{i=1}^{\infty} R_i$. Então a* ***medida exterior de Lebesgue*** *de A, notada por $m^*(A)$, é o ínfimo do conjunto*

$$\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} vol\ (R_i) : \{R_i\} \in \mathcal{C}_A \right\}.$$

Proposição 2.6.35 *A medida exterior de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ é uma medida exterior e associa a cada intervalo n-dimensional o seu volume.*

Demonstração:
Ver [21], Proposição 1.3.2.

Proposição 2.6.36 *A medida exterior de Lebesgue é invariante para translações. Mais precisamente, se $x \in \mathbb{R}^n$ e $A \subset \mathbb{R}^n$ então $m^*(x + A) = m^*(A)$.*

Demonstração:
Ver [21], Proposição 1.4.4.

2.6.6 Subconjuntos Lebesgue-mensuráveis de $\mathbb{R}^n$

Definição 2.6.37 *Um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ diz-se* ***Lebesgue-mensurável*** *se é mensurável com respeito à medida exterior de Lebesgue m^*.*

Proposição 2.6.38 *Qualquer subconjunto boreliano de $\mathbb{R}^n$ é Lebesgue-mensurável.*

Demonstração:
Ver [21], Proposição 1.3.6.

Proposição 2.6.39 *Seja $x \in \mathbb{R}^n$. Um subconjunto $B \subset \mathbb{R}^n$ é Lebesgue-mensurável se e só se $B + x$ é Lebesgue--mensurável.*

Demonstração:
Ver [21], Proposição 1.4.4.

2.6.7 A medida de Lebesgue

Notemos por $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ a colecção de todos os subconjuntos Lebesgue-mensuráveis de $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.6.40 *A restrição da medida exterior de Lebesgue, m^*, a $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ diz-se a* ***medida de Lebesgue*** *de $\mathbb{R}^n$ e será notada por m.*

Nota 2.6.41 *Observe-se que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, pelo que a restrição de m^* a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ será ainda denominada medida de Lebesgue.*

Da Proposição 2.6.36 resulta que

Proposição 2.6.42 *A medida de Lebesgue é invariante para translações. Mais precisamente, se $x \in \mathbb{R}^n$ e $A \subset \mathbb{R}^n$ então $m(x + A) = m(A)$.*

A seguinte proposição é uma consequência da Proposição 2.6.31.

Proposição 2.6.43 *A medida de Lebesgue na σ-álgebra $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ dos subconjuntos Lebesgue-mensuráveis é completa.*

Porém,

Proposição 2.6.44 *A restrição da medida de Lebesgue à σ-álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ dos subconjuntos borelianos de $\mathbb{R}^n$ não é completa.*

Demonstração:
Ver [21], Secção 2.1.

Proposição 2.6.45 *A medida de Lebesgue em $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$ é o completamento da medida de Lebesgue em $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.*

Demonstração:
Ver [21], Proposição 1.5.2.

Proposição 2.6.46 *Seja A um subconjunto Lebesgue-mensurável de $\mathbb{R}^n$. Então existem subconjuntos borelianos E e F de $\mathbb{R}^n$ tais que $E \subset A \subset F$ e $m(F \backslash E) = 0$.*

Demonstração:
Ver [21], Lema 1.5.3.

Nota 2.6.47 *Nos capítulos seguintes usaremos em geral as expressões "conjunto mensurável" e "medida" quando nos quisermos referir a "conjuntos Lebesgue-mensuráveis" e a "medida de Lebesgue", respectivamente.*

2.6.8 Propriedades que se verificam quase sempre

Definição 2.6.48 *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Diz-se que uma determinada propriedade é verificada* ***μ-quase sempre*** *em X, ou satisfeita por quase todo o elemento de X, se o conjunto dos elementos de X onde não se verifica é μ-nulo. Por outras palavras, uma propriedade verifica-se μ-quase sempre em X se existe um conjunto $N \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(N) = 0$ e N contém todos os pontos de X onde a tal propriedade não se verifica.*

Mais geralmente, temos a seguinte definição:

Definição 2.6.49 *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e seja E um subconjunto de X. Então uma determinada propriedade é verificada* ***μ-quase sempre*** *em E se o conjunto dos pontos de E onde não se verifica é μ-nulo.*

Nota 2.6.50 *Abreviamos por vezes a expressão "μ-quase sempre" escrevendo "μ-qs". Nos casos em que não haja perigo de confusão quanto à medida que se está a considerar, usaremos as expressões "quase sempre" e "qs".*

2.7 Funções mensuráveis

2.7.1 Definição e propriedades

Proposição 2.7.1 *Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e A um subconjunto de X pertencente a $\mathcal{A}$. Para cada função $f : A \to [-\infty, +\infty]$, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) $\forall t \in \mathbb{R}, \{x \in A : f(x) \leq t\} \in \mathcal{A}$;

(ii) $\forall t \in \mathbb{R}, \{x \in A : f(x) < t\} \in \mathcal{A}$;

(iii) $\forall t \in \mathbb{R}, \{x \in A : f(x) \geq t\} \in \mathcal{A}$;

(iv) $\forall t \in \mathbb{R}, \{x \in A : f(x) > t\} \in \mathcal{A}$.

Demonstração:
Ver [21], Proposição 2.1.1.

Definição 2.7.2 *Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e seja A um subconjunto de X pertencente a $\mathcal{A}$. Uma função $f : A \to [-\infty, +\infty]$ diz-se **$\mathcal{A}$-mensurável** (ou mensurável com respeito a $\mathcal{A}$) se satisfaz uma, e portanto todas, as condições da proposição anterior.*

Definição 2.7.3 *Se $X = \mathbb{R}^n$, uma função que é mensurável com respeito a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ diz-se **Borel-mensurável** ou **função boreliana**; uma função que é mensurável com respeito a $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ diz-se **Lebesgue-mensurável.***

Nota 2.7.4 *Nos capítulos seguintes, usaremos em geral a expressão "função mensurável" para significar "função Lebesgue-mensurável".*

Proposição 2.7.5 *Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e A um subconjunto de X pertencente a $\mathcal{A}$. Então, para qualquer função $f : A \to \mathbb{R}$, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) a função f é mensurável com respeito a $\mathcal{A}$;

(ii) qualquer que seja o subconjunto aberto U de $\mathbb{R}$, o conjunto $f^{-1}(U)$ pertence a $\mathcal{A}$;

(iii) qualquer que seja o subconjunto fechado C de $\mathbb{R}$, o conjunto $f^{-1}(C)$ pertence a $\mathcal{A}$;

(iv) qualquer que seja o subconjunto boreliano B de $\mathbb{R}$, o conjunto $f^{-1}(B)$ pertence a $\mathcal{A}$.

Demonstração:
Ver [21], Proposição 2.1.8.

Proposição 2.7.6 *Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e $A \in \mathcal{A}$. Se f e g são funções $\mathcal{A}$-mensuráveis definidas em A com valores em $[-\infty, +\infty]$. Então os conjuntos*

(i) $\{x \in A : f(x) < g(x)\}$

(ii) $\{x \in A : f(x) \leq g(x)\}$

(iii) $\{x \in A : f(x) = g(x)\}$

pertencem a $\mathcal{A}$.

Demonstração:
Ver [21], Proposição 2.1.2.

Proposição 2.7.7 *Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e $A \in \mathcal{A}$. Suponhamos que f e g são funções $\mathcal{A}$-mensuráveis definidas em A com valores em $[-\infty, +\infty]$. Então as funções $f \vee g : A \to [-\infty, +\infty]$ e $f \wedge g : A \to [-\infty, +\infty]$, definidas respectivamente por*

$$(f \vee g)(x) := \max(f(x), g(x)) \quad e \quad (f \wedge g)(x) := \min(f(x), g(x))$$

são $\mathcal{A}$-mensuráveis.

Demonstração:
Ver [21], Proposição 2.1.3.

Proposição 2.7.8 *Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e $A \in \mathcal{A}$. Suponhamos que (f_n) é uma sucessão de funções $\mathcal{A}$-mensuráveis definidas em A com valores em $[-\infty, +\infty]$. Então as funções $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$ e $\liminf_{n\to\infty} f_n$, com domínio A e com valores em $[-\infty, +\infty]$, definidas respectivamente por:*

$$\begin{aligned}
\left(\sup_n f_n\right)(x) &= \sup_n (f_n(x)), \\
\left(\inf_n f_n\right)(x) &= \inf_n (f_n(x)), \\
\left(\limsup_{n\to\infty} f_n\right)(x) &= \limsup_{n\to\infty} (f_n(x)), \\
\left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right)(x) &= \liminf_{n\to\infty} (f_n(x)),
\end{aligned}$$

são $\mathcal{A}$-mensuráveis.

Demonstração:
Ver [21], Proposição 2.1.4.

Proposição 2.7.9 *Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e $A \in \mathcal{A}$. Suponhamos que (f_n) é uma sucessão de funções $\mathcal{A}$-mensuráveis definidas em A com valores em $[-\infty, +\infty]$. Então a função $\lim_{n\to\infty} f_n$ com domínio*

$$\left\{x \in A : \limsup_{n\to\infty} (f_n(x)) = \liminf_{n\to\infty} (f_n(x))\right\}$$

e valores em $[-\infty, +\infty]$, definida por

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)(x) = \lim_{n\to\infty} (f_n(x)),$$

é $\mathcal{A}$-mensurável.

Demonstração:
Ver [21], Proposição 2.1.4.

Proposição 2.7.10 *Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e $A \in \mathcal{A}$. Suponhamos que f é uma função $\mathcal{A}$-mensurável com domínio A e com valores em $[-\infty, +\infty]$. Então a função $|f|$ é $\mathcal{A}$-mensurável.*

Demonstração:
Ver [21], pág. 53.

Proposição 2.7.11 *Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e $A \in \mathcal{A}$. Suponhamos que f é uma função $\mathcal{A}$-mensurável com domínio A e com valores em $[-\infty, +\infty]$. Então se B é um subconjunto de A pertencente a $\mathcal{A}$, a restrição $f|_B$, de f a B, é uma função $\mathcal{A}$-mensurável.*

Demonstração:
Ver [21], pág. 53.

Proposição 2.7.12 *Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável, $A \in \mathcal{A}$, f e g funções reais $\mathcal{A}$-mensuráveis definidas em A e α um número real. Então as funções $\alpha f, f+g, f-g, fg$ e f/g (cujo o domínio é o conjunto $\{x \in A : g(x) \neq 0\}$) são $\mathcal{A}$-mensuráveis.*

Demonstração:
Ver [21], Proposição 2.1.6

Proposição 2.7.13 *Qualquer função boreliana em $\mathbb{R}^n$ é Lebesgue-mensurável.*

Demonstração:
Ver [21], pág. 49.

Proposição 2.7.14 *Qualquer função contínua* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *é uma função boreliana.*

Demonstração:
Ver [21], pág. 49.

Proposição 2.7.15 *Se* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua e* g *é uma função Lebesgue-mensurável com valores reais então a função composta de* f *e* g, $f \circ g$, *é Lebesgue-mensurável.*

Demonstração:
Ver [21], Lema 8.1.7.

Proposição 2.7.16 *Seja* $(X, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável e seja* B *um subconjunto de* X. *Então a função característica de* B, $\mathcal{X}_B : X \to \mathbb{R}$, *definida por* $\mathcal{X}_B(x) = 1$ *se* $x \in B$ *e* $\mathcal{X}_B(x) = 0$ *caso contrário, é* $\mathcal{A}$*-mensurável se e só se* $B \in \mathcal{A}$.

Demonstração:
Ver [21], pág. 49.

Proposição 2.7.17 *Seja* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *um espaço de medida e sejam* f *e* g *funções definidas em* X *com valores em* $[-\infty, +\infty]$. *Suponhamos que* $f = g$ *quase sempre. Se* μ *é uma medida completa e se* f *é* $\mathcal{A}$*-mensurável então também* g *é* $\mathcal{A}$*-mensurável.*

Demonstração:
Ver [21], Proposição 2.2.1.

Proposição 2.7.18 *Seja* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *um espaço de medida e seja* (f_n) *uma sucessão de funções definidas em* X *com valores em* $[-\infty, +\infty]$. *Suponhamos que* f *é uma função definida em* X *com valores em* $[-\infty, +\infty]$ *tal que* $(f_n(x))$ *converge para* $f(x)$ *para quase todo* $x \in X$. *Neste caso, se* μ *é completa e se cada* f_n *é* $\mathcal{A}$*-mensurável, então* f *é* $\mathcal{A}$*-mensuravel.*

Demonstração:
Ver [21], Corolário 2.2.2.

Proposição 2.7.19 *Seja* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *um espaço de medida e seja* $\mathcal{A}_\mu$ *o completamento de* $\mathcal{A}$ *por* μ. *Então uma função* $f : X \to [-\infty, +\infty]$ *é* $\mathcal{A}_\mu$*-mensurável se e só se existem funções* $\mathcal{A}$*-mensuráveis* $f_0, f_1 : X \to [-\infty, +\infty]$ *tais que:*

(i) qualquer que seja $x \in X$, $f_0(x) \leq f(x) \leq f_1(x)$

e

(ii) $f_0 = f_1$ μ*-quase sempre em* X.

Demonstração:
Ver [21], Proposição 2.2.3.

Note-se que desta proposição resulta, em particular, que:

Proposição 2.7.20 *Se* f *é uma função Lebesgue-mensurável definida em* $\mathbb{R}^n$ *então existe uma função boreliana* g, *definida em* $\mathbb{R}^n$, *tal que* $f = g$ *quase sempre.*

Definição 2.7.21 *Sejam* $(X, \mathcal{A})$ *e* $(Y, \mathcal{B})$ *espaços mensuráveis. Uma função* $f : X \to Y$ *é* ***mensurável em relação a*** $\mathcal{A}$ ***e*** $\mathcal{B}$ *se para cada* $B \in \mathcal{B}$ *o conjunto* $f^{-1}(B)$ *pertence a* $\mathcal{A}$. *Em vez de dizer que* f *é mensurável em relação a* $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{B}$ *pode-se dizer que* f *é mensurável de* $(X, \mathcal{A})$ *em* $(Y, \mathcal{B})$, *ou ainda que* $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ *é mensurável.*

Definição 2.7.22 *Sejam* $(X, \mathcal{A})$ *e* $(Y, \mathcal{B})$ *espaços mensuráveis. Se* $A \in \mathcal{A}$, *então uma função* $f : A \to Y$ *diz-se mensurável se* $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ *para cada* $B \in \mathcal{B}$.

A seguinte definição generaliza o conceito de "função mensurável" a funções com valores em $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.7.23 *Seja* $(X, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável. Uma função* $f : X \to \mathbb{R}^n$ *é* ***$\mathcal{A}$-mensurável*** *se* $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$ *qualquer que seja o conjunto aberto* $U \subset \mathbb{R}^n$.

Proposição 2.7.24 *Sejam* $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$ *e* $(Z, \mathcal{C})$ *espaços mensuráveis e sejam* $f : (Y, \mathcal{B}) \to (Z, \mathcal{C})$ *e* $g : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ *funções mensuráveis. Então* $f \circ g : (X, \mathcal{A}) \to (Z, \mathcal{C})$ *é mensurável.*

Demonstração:
Ver [21], pág. 79.

Proposição 2.7.25 *Seja* $(X, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável e sejam* $f_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$, *as funções componentes de uma função* $f : X \to \mathbb{R}^n$, *isto é* $f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))$ *para cada* $x \in X$. *Então* f *é* $\mathcal{A}$*-mensurável se e só se cada uma das suas funções componentes é* $\mathcal{A}$*-mensurável (no sentido da Definição 2.7.2).*

Demonstração:
Ver [21], pág. 80.

2.8 O integral de Lebesgue

2.8.1 Definição

Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.8.1 *A função característica do conjunto* A *é a função* $\mathcal{X}_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\mathcal{X}_A(x) := \begin{cases} 1 & se\ x \in A \\ 0 & se\ x \notin A. \end{cases}$$

Definição 2.8.2 *Uma função* $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *diz-se uma* ***função simples*** *se toma apenas um número finito de valores.*

A seguinte proposição resulta da definição de função simples e das Proposições 2.7.16 e 2.7.12.

Proposição 2.8.3 *Seja* $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *uma função simples. Suponhamos que para cada* $x \in \mathbb{R}^n$ *temos* $s(x) \in \{a_1, ..., a_k\}$. *Então* $s = \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}_{A_i}$, *onde* $A_i = \{x \in \mathbb{R}^n : s(x) = a_i\}$, *e* s *é Lebesgue-mensurável se e só se os conjuntos* $A_1, ..., A_k$ *são Lebesgue-mensuráveis.*

Seja A um subconjunto Lebesgue-mensurável de $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.8.4 *Seja* $s : A \to \mathbb{R}$ *uma função simples,* $s = \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}_{A_i}$, *onde cada* A_i, $i = 1, ..., k$, *é um conjunto Lebesgue-mensurável. Define-se o* ***integral de Lebesgue*** *de* s *em* A, *notado por* $\int_A s(x)\,dx$, *pondo*

$$\int_A s(x)\,dx := \sum_{i=1}^{k} a_i m(A_i).$$

Se $f : A \to \mathbb{R}$ *é uma função Lebesgue-mensurável com valores não-negativos, define-se*

$$\int_A f(x)\,dx := \sup \int_A s(x)\,dx,$$

sendo o supremo tomado no conjunto de todas as funções simples $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *anulando-se fora de* A *e satisfazendo* $0 \leq s(x) \leq f(x)$, *para cada* $x \in A$.

Observação 2.8.5 *Note-se que o integral de uma função não-negativa $f : A \to \mathbb{R}$ pode ser $+\infty$.*

Seja $f : A \to \mathbb{R}$ é uma função Lebesgue-mensurável. Então temos

$$f = f^+ - f^-,$$

onde

$$f^+ := \max(f, 0) \quad \text{e} \quad f^- := -\min(f, 0)$$

são funções não-negativas Lebesgue-mensuráveis. Assim, faz sentido a seguinte definição:

Definição 2.8.6 *Seja $f : A \to \mathbb{R}$ uma função Lebesgue-mensurável. O* ***integral de Lebesgue*** *de f em A é*

$$\int_A f(x)\, dx := \int_A f^+(x)\, dx - \int_A f^-(x)\, dx$$

sempre que pelo menos um dos integrais que surge no membro direito desta igualdade seja finito.

Se ambos os integrais são finitos, diz-se que f é ***Lebesgue-integrável*** *em A.*

Definição 2.8.7 *Seja $f : A \to \mathbb{R}^n$ é uma função Lebesgue-mensurável. Diz-se que f é* ***Lebesgue-integrável*** *em A se cada uma das suas funções componentes $f_i : A \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$, é Lebesgue-integrável. Nesse caso, define-se*

$$\int_A f(x)\, dx := \left(\int_A f_1(x)\, dx, ..., \int_A f_n(x)\, dx \right).$$

Observação 2.8.8 *No que segue, em vez de "Lebesgue-integrável" escreveremos apenas "integrável".*

2.8.2 Propriedades

A seguinte proposição é uma consequência imediata da definição de integral de Lebesgue.

Proposição 2.8.9 *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto Lebesgue-mensurável e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função Lebesgue-mensurável. Então*

$$\int_A f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (f \mathcal{X}_A)(x)\, dx,$$

onde $\mathcal{X}_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ denota a função característica do conjunto A.

Proposição 2.8.10 *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto Lebesgue-mensurável e $f, g : A \to \mathbb{R}$ funções Lebesgue-mensuráveis. Se $f = g$ quase sempre em A então*

$$\int_A f(x)\, dx = \int_A g(x)\, dx.$$

Demonstração:
Ver [1], pág. 16.

Proposição 2.8.11 *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto Lebesgue-mensurável e $f, g : A \to \mathbb{R}$ funções Lebesgue-mensuráveis.*

(i) Se f é limitada quase sempre em A e $m(A) < +\infty$, então f é integrável em A.

(ii) Se $a \leq f(x) \leq b$ quase sempre em A, então

$$a\, m(A) \leq \int_A f(x)\, dx \leq b\, m(A).$$

(iii) Se f e g são integráveis em A e $f(x) \leq g(x)$ quase sempre em A, então

$$\int_A f(x)\, dx \leq \int_A g(x)\, dx.$$

(iv) Se f e g são integráveis em A, então $f+g$ é integrável em A e

$$\int_A (f+g)(x)\, dx = \int_A f(x)\, dx + \int_A g(x)\, dx.$$

(v) Se f é integrável em A e α é um número real, então αf é integrável em A e

$$\int_A (\alpha f)(x)\, dx = \alpha \int_A f(x)\, dx.$$

(vi) Se f é integrável em A então $|f|$ é integrável em A e

$$\left| \int_A f(x)\, dx \right| \leq \int_A |f(x)|\, dx.$$

(vii) Se f é integrável em A e $B \subset A$ é Lebesgue-mensurável, então f é integrável em B; se, além disso, $f(x) \geq 0$ quase sempre em A, então

$$\int_B f(x)\, dx \leq \int_A f(x)\, dx.$$

Demonstração:
Ver [1], Teorema 1.41.

Proposição 2.8.12 *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto Lebesgue-mensurável e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função Lebesgue-mensurável. Se $f(x) \geq 0$ quase sempre em A e $\int_A f(x)\, dx = 0$ então $f = 0$ quase sempre.*

Demonstração:
Ver [46], Teorema 1.41.

Proposição 2.8.13 *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto Lebesgue-mensurável e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função Lebesgue-mensurável. Se $m(A) = 0$ ou se $f = 0$ quase sempre em A então*

$$\int_A f(x)\, dx = 0.$$

Demonstração:
Ver [50], Teorema 5.25.

Proposição 2.8.14 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Se f é Riemann-integrável em $[a,b]$ então f é Lebesgue integrável em $[a,b]$ e os integrais são iguais.*

Demonstração:
Ver [50], Teorema 5.52.

Proposição 2.8.15 ***(Lema de Fatou)*** *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto Lebesgue-mensurável e seja (f_k) uma sucessão de funções Lebesgue-mensuráveis não-negativas. Então*

$$\int_A \left(\liminf_{k\to\infty} f_k(x) \right) dx \leq \liminf_{k\to\infty} \int_A f_k(x)\, dx.$$

Demonstração:
Ver [21], Teorema 2.4.3.

2.9 Topologias fracas

2.9.1 Definições e propriedades básicas

Seja X um espaço vectorial e seja X^+ o espaço de todos os funcionais lineares definidos em X.

Definição 2.9.1 *Um subespaço vectorial L de X^+ diz-se* ***total*** *se*

$$(f(x) = 0, \ \ \forall f \in L) \Rightarrow x = 0.$$

Definição 2.9.2 *Seja L um subespaço total de X^+ e seja $\mathcal{F}$ a família de todos os subconjuntos finitos de L. Chamam-se* ***subconjuntos básicos*** *de X os conjuntos do tipo*

$$V(x_0, F, \varepsilon) := \{x \in X : |f(x - x_0)| < \varepsilon, \forall f \in F\},$$

onde $\varepsilon > 0$ e $F \in \mathcal{F}$.

Definição 2.9.3 *A* ***L-topologia*** *em X é a topologia obtida tomando como base os subconjuntos básicos. (Assim, dizer que um conjunto A é aberto para a L-topologia de X é o mesmo que dizer que A é união de subconjuntos básicos.)*

Proposição 2.9.4 *O espaço X é, com a L-topologia de qualquer subespaço vectorial total L de X^+, um espaço vectorial topológico localmente convexo.*

Demonstração:
Ver [27], Lema V.3.3.

Proposição 2.9.5 *Seja L um qualquer subespaço vectorial total de X^+. A L-topologia em X é a topologia mais fraca na qual qualquer funcional em L é contínuo.*

Demonstração:
Ver [27], Lema V.3.8.

Proposição 2.9.6 *Seja L um qualquer subespaço vectorial total de X^+. Os funcionais lineares em X, contínuos para a L-topologia, são precisamente os elementos de L.*

Demonstração:
Ver [27], Lema V.3.9.

Observação 2.9.7 *Se X é um espaço da Banach, então X tem uma topologia natural, a chamada* ***topologia forte*** *ou topologia induzida pela métrica $\rho(x, y) = |x - y|_X$ associada à norma $|\cdot|_X$ de X.*

Se $(x_k) \subset X$ converge na topologia forte de X, isto é, se

$$(|x_k - x|_X) \to 0,$$

diz-se que (x_k) ***converge fortemente*** *para x.*

Observação 2.9.8 *Quando se faz referência a um conjunto fechado em X ou a uma aplicação contínua em X, sem referir a topologia subentende-se que se está a considerar a topologia forte.*

Definição 2.9.9 *Seja X um espaço vectorial topológico localmente convexo e seja $L = X'$ (o subespaço de X^+ formado pelos funcionais lineares contínuos definidos em X). Então a L-topologia chama-se X'-topologia ou topologia $\sigma(X, X')$, ou* ***topologia fraca*** *de X.*

Definição 2.9.10 *Dada uma sucessão $(x_k) \subset X$, se existe $x \in X$ tal que (x_k) converge para x na topologia fraca $\sigma(X, X')$ diz-se que (x_k)* ***converge fracamente*** *para x em X e escreve-se*

$$(x_k) \rightharpoonup x.$$

Definição 2.9.11 *Sejam X um espaço vectorial, X^+ o espaço de todos os funcionais lineares definidos em X e seja Y um subespaço vectorial de X^+. A cada $x \in X$ pode-se associar um funcional φ_x, definido em Y por*

$$\varphi_x(f) = f(x), \quad \forall f \in Y.$$

*O subespaço vectorial $L := \{\varphi_x : x \in X\}$ de Y^+ é total. A L-topologia diz-se a X-**topologia** de Y.*

*Se X é um espaço vectorial topológico localmente convexo e $Y = X'$, a X-topologia de X' diz-se a topologia $\sigma(X', X)$ ou **topologia fraca*** de X'.*

Dada uma sucessão $(f_k) \subset X'$, se existe $f \in X'$ tal que (f_k) converge para f na topologia fraca $\sigma(X', X)$ diz-se que (f_k) **converge fracamente*** para f em X' e escreve-se*

$$(f_k) \stackrel{*}{\rightharpoonup} f.$$

2.9.2 Propriedades da topologia fraca $\sigma(X, X')$

Sejam X um espaço de Banach e X' o seu dual.

Proposição 2.9.12 *A topologia fraca de X é mais fraca (isto é, possui menos abertos) que a topologia forte.*

Demonstração:
Ver [27], Corolário V.3.5.

Proposição 2.9.13 *Se X tem dimensão finita, a topologia fraca $\sigma(X, X')$ e a topologia forte coincidem. Em particular, uma sucessão $(x_n) \subset X$ é fracamente convergente se e só se é fortemente convergente.*

Demonstração:
Ver [7], Proposição III.6.

Assim os abertos (resp. fechados) da topologia fraca $\sigma(X, X')$ são também abertos (resp. fechados) da topologia forte. Se X tem dimensão finita então temos também a recíproca, pois, nesse caso, a topologia fraca e a topologia forte coincidem.

Porém, se X tem dimensão infinita, a topologia fraca é estritamente mais fraca que a topologia forte, ou seja, existem abertos (resp. fechados) para a topologia forte que não são abertos (resp. fechados) para a topologia fraca (ver [7], pág. 36).

Proposição 2.9.14 *Um subconjunto convexo de um espaço de Banach (ou, mais geralmente, de um espaço vectorial topológico localmente convexo) é fracamente fechado se e só se é fechado.*

Demonstração:
Ver [27], Proposição V.3.13.
Resulta da Proposição 2.9.4 que

Proposição 2.9.15 *O espaço X é, com a topologia fraca, um espaço vectorial topológico localmente convexo.*

Proposição 2.9.16 *Seja $(x_k) \subset X$. Temos*

(i) $(x_k) \rightharpoonup x \Leftrightarrow (f(x_k)) \to f(x), \ \forall f \in X'$;

(ii) *se* $(x_k) \to x$ *então* $(x_k) \rightharpoonup x$;

(iii) *se* $(x_k) \rightharpoonup x$ *então* $(|x_k|_X)$ *é limitada e* $|x|_X \leq \liminf_{k\to\infty} |x_k|_X$;

(iv) *se* $(x_k) \rightharpoonup x$ *e* $(f_k) \to f$ *em* X' *(isto é* $(|f_k - f|_{X'}) \to 0$*) então* $(f_k(x_k)) \to f(x)$.

Demonstração:
Ver [7], Proposição III.5.

2.9.3 Propriedades da topologia fraca* $\sigma(X', X)$

Seja X um espaço de Banach, seja X' o seu dual munido da norma dual

$$|f|_{X'} = \sup_{x \in X, |x|_X \leq 1} |f(x)|,$$

e seja X'' o seu bidual, isto é, o dual de X', munido da norma

$$|\xi|_{X''} = \sup_{f \in X', |f|_{X'} \leq 1} |\xi(f)|.$$

No espaço X' podemos considerar três topologias:

- a topologia forte, associada à norma de X';
- a topologia fraca $\sigma(X', X'')$;
- a topologia fraca* $\sigma(X', X)$.

Proposição 2.9.17 *A topologia fraca* $\sigma(X', X)$ *de* X' *é mais fraca que a topologia fraca* $\sigma(X', X'')$.

Demonstração:
Ver [27], Corolário V.3.7.

Proposição 2.9.18 *Se* X *tem dimensão finita, as topologias forte, fraca e fraca* coincidem.*

Demonstração:
Ver [7], pág. 41.

Da Proposição 2.9.4 resulta que

Proposição 2.9.19 *O espaço* X' *é, com a topologia fraca*, um espaço vectorial topológico localmente convexo.*

Proposição 2.9.20 *(**Teorema da Banach-Alaoglu-Bourbaki**) O conjunto*

$$B_{X'} := \{f \in X' : |f|_{X'} \leq 1\}$$

*é compacto para a topologia fraca** $\sigma(X', X)$.

Demonstração:
Ver [7], Proposição III.15.

Proposição 2.9.21 *Seja* $(f_k) \subset X'$. *Temos:*

(i) $(f_k) \overset{*}{\rightharpoonup} f \Leftrightarrow (f_k(x)) \to f(x), \ \forall x \in X$;

(ii) se $(f_k) \rightharpoonup f$ *então* $(f_k) \overset{*}{\rightharpoonup} f$;

(iii) se $(f_k) \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *então* $(|f_k|_{X'})$ *é limitada e* $|f|_{X'} \leq \liminf_{k \to \infty} |f_k|_{X'}$;

(iv) se $(f_k) \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *e* $(x_k) \to x$ *em* X *(isto é* $(|x_k - x|_X) \to 0$*) então* $(f_k(x_k)) \to f(x)$.

Demonstração:
Ver [7], Teorema III.12.

2.10 Espaços reflexivos e espaços separáveis

2.10.1 Espaços reflexivos

Seja X um espaço de Banach e sejam X' o seu dual e X'' o seu bidual.

Fixemos $x \in X$ e consideremos a aplicação $J_x : X' \to \mathbb{R}$ definida por

$$J_x(f) := f(x).$$

A aplicação J_x é linear contínua, isto é, é um elemento de X''.

Consideremos agora a aplicação $J : X \to X''$, definida por

$$J(x) := J_x.$$

Esta aplicação é linear, e além disso, é uma isometria, isto é, tem-se $|J_x|_{X''} = |x|_X$ para cada $x \in X$, no entanto, não é necessariamente sobrejectiva.

Definição 2.10.1 *Seja X um espaço de Banach e seja J a aplicação definida acima. O espaço X diz-se* ***reflexivo*** *se $J(X) = X''$.*

Nota 2.10.2 *Sempre que X é um espaço reflexivo identifica-se X com X''.*

Proposição 2.10.3 *Seja X um espaço de Banach. Então X é reflexivo se e só se X' é reflexivo.*

Demonstração:
Ver [7], Corolário III18.

Proposição 2.10.4 *Seja X um espaço de Banach reflexivo, seja $M > 0$ e seja (x_k) uma sucessão em X tal que $|x_k|_X \leq M, \forall k \in \mathbb{N}$. Então existem $x \in X$ e uma subsucessão (x_{k_j}) de (x_k) tais que $(x_{k_j}) \rightharpoonup x$ em X.*

Demonstração:
Ver [7], Teorema III.27.

2.10.2 Espaços separáveis

Definição 2.10.5 *Um espaço métrico X diz-se* ***separável*** *se tem um subconjunto D numeravelmente denso.*

Proposição 2.10.6 *Sejam X um espaço métrico separável e F um subconjunto de X. Então F é separável.*

Demonstração:
Ver [7], Proposição III.22.

Proposição 2.10.7 *Seja X um espaço de Banach e suponha-se que X' é separável. Então X é separável.*

Demonstração:
Ver [7], Teorema III.23.

Proposição 2.10.8 *Seja X um espaço de Banach separável. Então o conjunto*

$$B_{X'} = \{f \in X' : |f|_{X'} \leq 1\}$$

é metrizável para a topologia fraca $\sigma(X', X)$, isto é, existe uma métrica definida em $B_{X'}$ tal que a topologia associada coincide, em $B_{X'}$, com a topologia $\sigma(X', X)$.*

Reciprocamente, se $B_{X'}$ é metrizável para $\sigma(X', X)$ então X é separável.

Demonstração:
Ver [7], Teorema III.25.

Proposição 2.10.9 *Seja X um espaço de Banach separável, seja $M > 0$ e seja (f_k) uma sucessão em X' tal que $|f_k|_{X'} \leq M, \forall k \in \mathbb{N}$. Então existem $f \in X'$ e uma subsucessão (f_{k_j}) de (f_k) tais que $(f_{k_j}) \stackrel{*}{\rightharpoonup} f$ em X'.*

Demonstração:
Ver [7], Corolário III.26.

Definição 2.10.10 *Sejam X, Y dois espaços métricos separáveis completos e seja $(\Omega, \mathcal{A})$ um espaço mensurável. Uma função $f : \Omega \times X \to Y$ diz-se* ***função de Carathéodory*** *se, para qualquer $x \in X$, $f(\cdot, x)$ é mensurável e para qualquer $t \in \Omega$, $f(t, \cdot)$ é contínua.*

2.11 Os espaços de Lebesgue $L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$

2.11.1 Definição e propriedades

Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.11.1 *Uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ diz-se uma **função nula** se é Lebesgue-integrável e*

$$\int_\Omega |f(x)|\, dx = 0.$$

Definição 2.11.2 *Duas funções $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ e $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ são **equivalentes** se $f - g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é uma função nula.*

Definição 2.11.3 *A **classe de equivalência** de uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $[f]$, é o conjunto de todas as funções $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ Lebesgue-integráveis que lhe são equivalentes. Isto é,*

$$[f] := \left\{ g : \Omega \to \mathbb{R}^n \mid g \text{ é Lebesgue-integrável e } \int_\Omega |(f-g)(x)|\, dx = 0 \right\}.$$

Definição 2.11.4 *O espaço $L^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ é o conjunto das classes de equivalência das funções $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ Lebesgue-integráveis:*

$$L^1(\Omega, \mathbb{R}^n) := \{[f] \mid f : \Omega \to \mathbb{R}^n \text{ é Lebesgue-integrável}\}.$$

Definição 2.11.5 *Seja $p \in \mathbb{R}$, $1 \le p < \infty$. Então*

$$L^p(\Omega, \mathbb{R}^n) := \left\{ [f] \mid f : \Omega \to \mathbb{R}^n \text{ é mensurável e } \left[|f|^p\right] \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \right\}.$$

Proposição 2.11.6 *O funcional $|\cdot|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)} : L^p(\Omega, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ dado por*

$$|[f]|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)} := \left(\int_\Omega |f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

define uma norma em $L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$.

Demonstração:
Ver [7], Teorema IV.7.

Nota 2.11.7 *Esta é a norma que iremos considerar em $L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, e quando não existir perigo de confusão denotaremo-la por $\|\cdot\|_p$.*

Definição 2.11.8 *Se $p = \infty$ tem-se*

$$L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n) := \{[f] \mid f : \Omega \to \mathbb{R}^n \text{ é mensurável e } \exists c \ge 0 \text{ tal que } |f(x)| \le c \text{ qs em } \Omega\}.$$

Proposição 2.11.9 *O funcional $|\cdot|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)} : L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ dado por*

$$|[f]|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)} := \inf\{c : |f(x)| \le c \text{ qs em } \Omega\} := \sup_{x \in \Omega} ess |f(x)|$$

define uma norma em $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Demonstração:
Ver [7], Teorema IV.7.

Nota 2.11.10 *Esta é a norma que iremos considerar em $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, e quando não existir perigo de confusão denotaremo-la por $\|\cdot\|_\infty$.*

Nota 2.11.11 *No que segue escrevemos, por comodidade e como é habitual, f em vez de $[f]$.*

Proposição 2.11.12 *Para cada $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração:
Ver [7], Teorema IV.8.

Proposição 2.11.13 *Para cada $1 < p < \infty$, $L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ é um espaço reflexivo.*

Demonstração:
Ver [7], Teorema IV.10.

Proposição 2.11.14 *Para cada $1 \leq p < \infty$, $L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ é um espaço separável.*

Demonstração:
Ver [7], Teorema IV.13.

Proposição 2.11.15 *Se $f \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ então*

$$|f(x)| \leq |f|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)} \quad \textit{quase sempre em } \Omega.$$

Demonstração:
Ver [7], pág. 56.

Seja $1 \leq p \leq \infty$. Designamos por p' o expoente conjugado de p, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ [2].

Proposição 2.11.16 ***(Desigualdade de Hölder)*** *Sejam $f \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e $g \in L^{p'}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então $fg \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$ e*

$$\int_\Omega |f(x)\, g(x)|\, dx \leq |f|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)}\, |g|_{L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^n)}\,.$$

Demonstração:
Ver [7], Teorema IV.6.

Vejamos uma caso particular desta desigualdade.

Proposição 2.11.17 *Sejam $f \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e $g \in L^{p'}(\Omega, \mathbb{R})$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então $fg \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$ e*

$$\int_\Omega |f(x)\, g(x)|\, dx \leq n\, |f|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)}\, |g|_{L^{p'}(\Omega,\mathbb{R})}\,.$$

Demonstração:
Sejam $f_1, ..., f_n$ as componentes de f, isto é,

$$f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x)) \qquad \forall x \in \Omega.$$

Como $f \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ então cada $f_i \in L^p(\Omega, \mathbb{R})$.

[2] Note-se que é

$$p' = \begin{cases} \infty, & \text{se } p = 1 \\ \frac{p}{p-1}, & \text{se } 1 < p < \infty \\ 1, & \text{se } p = \infty\,. \end{cases}$$

Pela Proposição 2.11.16 e pela definição de norma da soma em $\mathbb{R}^n$ [3], temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f(x)\,g(x)|\,dx &= \int_\Omega |(f_1(x)\,g(x),\dots,f_n(x)\,g(x))|\,dx \\
&= \int_\Omega |f_1(x)\,g(x)|\,dx + \dots + \int_\Omega |f_n(x)\,g(x)|\,dx \\
&\le |f_1|_{L^p(\Omega,\mathbb{R})}\,|g|_{L^{p'}(\Omega,\mathbb{R})} + \dots + |f_n|_{L^p(\Omega,\mathbb{R})}\,|g|_{L^{p'}(\Omega,\mathbb{R})} \\
&= \left(|f_1|_{L^p(\Omega,\mathbb{R})} + \dots + |f_n|_{L^p(\Omega,\mathbb{R})}\right)|g|_{L^{p'}(\Omega,\mathbb{R})}\,. \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

Pela definição de norma euclidana e para cada $i \in \{1,\dots,n\}$ fixado, temos

$$\begin{aligned}
|f_i|_{L^p(\Omega,\mathbb{R})} &= \left(\int_\Omega |f_i(x)|^p\,dx\right)^{1/p} = \left(\int_\Omega \left(\sqrt{f_i^2(x)}\right)^p dx\right)^{1/p} \\
&\le \left(\int_\Omega \left(\sqrt{f_1^2(x)+\dots+f_n^2(x)}\right)^p dx\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_\Omega |(f_1(x),\dots,f_n(x))|^p\,dx\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_\Omega |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} = |f|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)}\,. \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

Assim, por (2.1) e (2.2), temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f(x)\,g(x)|\,dx &\le \left(|f_1|_{L^p(\Omega,\mathbb{R})} + \dots + |f_n|_{L^p(\Omega,\mathbb{R})}\right)|g|_{L^{p'}(\Omega,\mathbb{R})} \\
&\le n\,|f|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)}\,|g|_{L^{p'}(\Omega,\mathbb{R})}\,.
\end{aligned}$$

■

Proposição 2.11.18 *(Desigualdade de Minkowski) Se $f,g \in L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)$, para $1 \le p \le \infty$, então*

$$|f+g|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)} \le |f|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)} + |g|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)}\,,$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\left(\int_\Omega |f+g|^p\right)^{1/p} &\le \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |g|^p\right)^{1/p} \qquad (1 \le p < \infty) \\
\sup_\Omega ess\,|f+g| &\le \sup_\Omega ess\,|f| + \sup_\Omega ess\,|g|\,.
\end{aligned}$$

Demonstração:
Ver [50], Teorema 8.10, pág. 129.

[3] Em $\mathbb{R}^n$ definem-se as três normas equivalentes:

$$\begin{aligned}
|x| &= \sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2} && \text{(norma euclideana)} \\
|x|_+ &= |x_1|+\dots+|x_n| && \text{(norma da soma)} \\
|x|_m &= \max\{|x_1|,\dots,|x_n|\} && \text{(norma do máximo).}
\end{aligned}$$

Demonstração:
Ver [49], Teorema 15.9.

2.11.2 Teoremas de representação

Proposição 2.11.19 *(**Teorema de representação de Riesz para** $L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)$, $1<p<\infty$) Seja $\varphi \in (L^p(\Omega,\mathbb{R}^n))'$, com $1<p<\infty$. Então existe uma única função $u \in L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$\varphi(f) = \int_\Omega u(x) f(x)\, dx \quad \forall f \in L^p(\Omega,\mathbb{R}^n).$$

Além disso,

$$|u|_{L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^n)} = |\varphi|_{(L^p(\Omega,\mathbb{R}^n))'}.$$

Demonstração:
Ver [7], Teorema IV.11.

Nota 2.11.20 *No que segue identificaremos sempre $(L^p(\Omega,\mathbb{R}^n))'$ com $L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^n)$.*

Proposição 2.11.21 *(**Teorema de representação de Riesz para** $L^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$) Seja $\varphi \in \left(L^1(\Omega,\mathbb{R}^n)\right)'$. Então existe uma única função $u \in L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$\varphi(f) = \int_\Omega u(x) f(x)\, dx \quad \forall f \in L^1(\Omega,\mathbb{R}^n).$$

Além disso,

$$|u|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)} = |\varphi|_{(L^1(\Omega,\mathbb{R}^n))'}.$$

Demonstração:
Ver [7], Teorema IV.14.

Nota 2.11.22 *No que segue identificaremos sempre $\left(L^1(\Omega,\mathbb{R}^n)\right)'$ com $L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)$.*

2.11.3 Convergências forte, fraca e fraca*

Observação 2.11.23 *Seja $1 \le p \le \infty$. Então a sucessão $(f_n) \subset L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)$ **converge fortemente** para a função $f \in L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)$ ($(f_n) \to f$) se e só se*

$$\left(|f_n - f|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)}\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Proposição 2.11.24 *Seja $1 \le p < \infty$. A sucessão $(f_n) \subset L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)$ **converge fracamente** para a função $f \in L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)$ ($(f_n) \rightharpoonup f$) se e só se*

$$\left(\int_\Omega f_n(t)\,\psi(t)\, dt\right) \underset{n\to\infty}{\to} \int_\Omega f(t)\,\psi(t)\, dt,$$

qualquer que seja a função $\psi \in L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^n)$.

Demonstração:
Ver [22], pág. 17.

Proposição 2.11.25 *Uma sucessão $(f_n) \subset L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)$ **converge fracamente*** para a função $f \in L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)$ ($(f_n) \overset{*}{\rightharpoonup} f$) se e só se*

$$\left(\int_\Omega f_n(t)\,\psi(t)\, dt\right) \underset{n\to\infty}{\to} \int_\Omega f(t)\,\psi(t)\, dt,$$

qualquer que seja a função $\psi \in L^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$.

Demonstração:
Ver [22], pág. 18.

Proposição 2.11.26 *Seja $1 \leq p \leq \infty$ e sejam (f_n) uma sucessão em $L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e $f \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ tais que*

$$\left(|f_k - f|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)}\right) \to 0.$$

Então existe uma subsucessão $\left(f_{n_j}\right)$ de (f_n) tal que

$$\left(f_{n_j}(x)\right) \to f(x) \quad qs \text{ em } \Omega.$$

Demonstração:
Ver [7], Teorema IV.9.

2.11.4 Convergência em medida

Seja Ω um subconjunto limitado não-vazio de $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.11.27 *Sejam $f, f_k : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$. Diz-se que a sucessão (f_k) converge em medida em Ω para f se*

$$\lim_{k \to \infty} m^*\left(\{x \in \Omega : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0,$$

onde m^* é a medida exterior de Lebesgue.

Proposição 2.11.28 *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Se a sucessão $(f_k) \subset L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ converge fortemente para $f \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ então também $(f_k) \to f$ em medida em Ω.*

Demonstração:
Ver [37], pág. 88.

2.11.5 Critério de compacidade fraca em $L^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$

Recordemos que um subconjunto U de um espaço topológico diz-se *sequencialmente relativamente compacto* quando qualquer sucessão com termos em U possui uma subsucessão convergente (cujo limite não pertence necessariamente a U). Vejamos alguns resultados de compacidade para espaços de funções. Comecemos por enunciar o mais importante: o Teorema de Ascoli-Arzelà.

Definição 2.11.29 *Uma sucessão (u_k), de funções definidas num intervalo de números reais $[a, b]$ com valores em $\mathbb{R}^n$, diz-se **equilimitada** se existe $N > 0$ tal que $|u_k(t)| \leq N, \forall t \in [a, b], \forall k \in \mathbb{N}$. A sucessão (u_k) diz-se **equicontínua** sempre que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que, quaisquer que sejam $t', t'' \in [a, b]$ verificando $|t' - t''| < \delta$ e para cada $k \in \mathbb{N}$, se tenha $|u_k(t') - u_k(t'')| < \varepsilon$.*

Proposição 2.11.30 ***(Teorema de Ascoli-Arzelà)*** *Seja (u_k) uma sucessão de funções definidas num intervalo de números reais $[a, b]$ com valores em $\mathbb{R}^n$, equilimitada e equicontínua. Então existem uma subsucessão (u_{k_s}) de (u_k) e uma função contínua u tais que $(u_{k_s}) \to u$ uniformemente em $[a, b]$ quando $s \to \infty$.*

Demonstração:
Ver [27], Teorema IV.6.7.

O teorema seguinte (Teorema de Dunford-Pettis) diz respeito a conjuntos de funções integráveis em $[a, b]$. Antes de o enunciar vamos recordar algumas definições.

Seja $\Omega := [a, b]$.

Definição 2.11.31 *Um conjunto $F \subset L^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$ diz-se* ***fortemente (fracamente) sequencialmente relativamente compacto*** *se qualquer sucessão com termos em F contém uma subsucessão fortemente (fracamente) convergente em $L^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$. Se além disso o limite forte (fraco) de uma tal (sub)sucessão pertence a F diz-se que F é* ***fortemente (fracamente) sequencialmente compacto****.*

Definição 2.11.32 *Uma família F de funções $f \in L^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$ diz-se* ***equiabsolutamente integrável*** *se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\int_E |f(t)|\,dt \leq \varepsilon$, para toda a função $f \in F$ e para qualquer que seja o subconjunto mensurável E de Ω com $m(E) \leq \delta$.*

Nota 2.11.33 *Notemos que qualquer função $f \in L^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$ é absolutamente integrável, isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(f,\varepsilon) > 0$ tal que $\int_E |f(t)|\,dt \leq \varepsilon$, qualquer que seja o subconjunto mensurável E de Ω com $m(E) \leq \delta$.*

Proposição 2.11.34 ***(Teorema de Dunford-Pettis)*** *Seja F um subconjunto de $L^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$. Então F é* ***fracamente sequencialmente relativamente compacto*** *se e só se*

(i) F é limitado, isto é, $\sup_{f\in F} |f|_{L^1(\Omega,\mathbb{R}^n)} < +\infty$, e

(ii) F é equiabsolutamente integrável.

Demonstração:
Ver [27], Corolário IV.8.11.

Proposição 2.11.35 *Seja F um subconjunto de $L^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$. Então F é equiabsolutamente integrável se e só se existem uma constante M e uma função $\Theta : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ (que se pode supor convexa, de classe C^1 e estritamente crescente) verificando $\lim_{r\to+\infty} \frac{\Theta(r)}{r} = +\infty$, tais que*

$$\int_\Omega \Theta(|f(t)|)\,dt \leq M$$

para qualquer função $f \in F$.

Demonstração:
Ver [6] Teorema 2.12.

2.12 Os espaços de Sobolev $W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)$

2.12.1 Definição e propriedades

Nesta secção, a letra Ω denotará um intervalo limitado $(a,b) \subset \mathbb{R}$.
Seja p um número real, $1 \leq p \leq \infty$.

Definição 2.12.1 *O* ***espaço de Sobolev*** *$W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ é dado por*

$$W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^n) := \left\{ u \in L^p(\Omega,\mathbb{R}^n) : \exists v \in L^p(\Omega,\mathbb{R}^n) \text{ tal que} \int_\Omega u\varphi' = -\int_\Omega v\varphi,\ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n) \right\}$$

onde $C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)$ denota o conjunto das funções de classe C^∞ definidas em Ω e com valores em $\mathbb{R}^n$, com suporte [4] compacto.

Observação 2.12.2 *A função v diz-se a* ***derivada fraca (ou derivada distribucional)*** *de u.*

[4] O suporte de uma função $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é, por definição, o conjunto

$$\operatorname{supp}\varphi := \overline{\{t \in \Omega : \varphi(t) \neq 0\}}.$$

Proposição 2.12.3 *O funcional* $|\cdot|_{W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)} : W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *dado por*

$$|u|_{W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)} := |u|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)} + |u'|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)}$$

define uma norma em $W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Demonstração:
Ver [7], pág. 121.

Proposição 2.12.4 *O espaço* $W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ *é um espaço de Banach para qualquer* $1 \leq p \leq \infty$*; é reflexivo se* $1 < p < \infty$ *e é separável se* $1 \leq p < \infty$.

Demonstração:
Ver [7], Teorema VIII.1.

Proposição 2.12.5 *Seja* $u \in W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)$. *Então existe uma função* $\overline{u} \in C\left(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n\right)$ *tal que*

$$u = \overline{u} \text{ quase sempre em } \Omega,$$

além disso, verifica-se o Teorema fundamental do cálculo:

$$\overline{u}(x) - \overline{u}(y) = \int_y^x u'(t)\,dt \quad \forall x, y \in \overline{\Omega}.$$

Demonstração:
Ver [7], Teorema VIII.2.

Proposição 2.12.6 *(Teorema de Densidade) Seja* $u \in W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R})$ *com* $1 \leq p < +\infty$. *Então existe uma sucessão* (u_n) *em* $C_c^\infty(\mathbb{R})$ *tal que* $u_{n|\Omega} \to u$ *em* $W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R})$.

Demonstração:
Ver [7], Teorema VIII.6.

2.12.2 Um teorema de representação

Proposição 2.12.7 *Seja* $L \in \left(W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)\right)'$. *Então existe uma única função* $v = (v_1, v_2) \in L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^n) \times L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ *tal que*

$$L(u) = \int_\Omega v_1(t)\,u(t)\,dt + \int_\Omega v_2(t)\,u'(t)\,dt \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^n). \tag{2.3}$$

Além disso,

$$|L|_{(W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^n))'} = \inf\left(|v_1|^p_{L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^n)} + |v_2|^p_{L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{p}} = \min\left(|v_1|^p_{L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^n)} + |v_2|^p_{L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{p}},$$

onde o ínfimo é tomado no conjunto de todas as funções $v = (v_1, v_2) \in L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^n) \times L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ *para as quais é válida a igualdade (5.2.1), qualquer que seja a função* $u \in W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)$.

Demonstração:
Ver [1], Teorema 3.8.

2.12.3 Convergências forte e fraca

Observação 2.12.8 *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Uma sucessão $(u_n) \subset W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$* ***converge fortemente*** *para uma função $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ($(u_n) \to u$) se e só se*

$$\left(|u_n - u|_{W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Observação 2.12.9 *Seja $1 \leq p < \infty$. A sucessão $(u_n) \subset W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$* ***converge fracamente*** *para a função $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ($(u_n) \rightharpoonup u$) se e só se*

$$\begin{cases} (i) & \left(\int_\Omega u_n(t)\,\psi(t)\,dt\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega u(t)\,\psi(t)\,dt, \quad \forall \psi \in L^{p'}(\Omega, \mathbb{R}^n), \\ (ii) & \left(\int_\Omega u_n'(t)\,\psi(t)\,dt\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega u'(t)\,\psi(t)\,dt, \quad \forall \psi \in L^{p'}(\Omega, \mathbb{R}^n). \end{cases}$$

Proposição 2.12.10 *Existe uma constante C (dependendo apenas de $m(\Omega) \leq \infty$) tal que*

$$|u|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)} \leq C\,|u|_{W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n), \ \forall 1 \leq p \leq \infty.$$

Além disso, quando Ω é limitado, se $(u_n) \rightharpoonup u$ em $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ então:

(i) se $p > 1$, existe uma subsucessão (u_{n_k}) de (u_n) tal que $(u_{n_k}) \to u$ em $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$;

(ii) se $p = 1$, existe uma subsucessão (u_{n_k}) de (u_n) tal que $(u_{n_k}) \to u$ em $L^q(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $1 \leq q < \infty$.

Demonstração:
Ver [7], Teorema VIII.7.

2.13 Funções monótonas

Se X um subconjunto qualquer de $\mathbb{R}$.

Definição 2.13.1 *A função $f : X \to \mathbb{R}$ diz-se* ***crescente*** *em X (resp.* ***estritamente crescente*** *em X) quando $f(x_1) \leq f(x_2)$ (resp. $f(x_1) < f(x_2)$) sempre que $x_1 < x_2$. Substituindo o sinal $\leq$ por $\geq$ (resp. $<$ por $>$), obtemos a definição de função* ***decrescente*** *(resp.* ***estritamente decrescente****) em X.*

Qualquer uma destas funções diz-se ***monótona****.*

2.14 Funções absolutamente contínuas

Para funções suaves, os conceitos de derivada (no sentido clássico) e de derivada fraca coincidem. No entanto, para funções não-suaves, por exemplo para funções que são apenas diferenciáveis quase sempre no sentido clássico, as duas derivadas podem ser diferentes. A maior classe de funções para as quais estes dois conceitos coincidem é a classe das funções absolutamente contínuas.

Definição 2.14.1 *Uma função $f : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ diz-se* ***absolutamente contínua*** *se para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para qualquer família finita de intervalos abertos disjuntos dois a dois*

$$(\alpha_k, \beta_k) \subset (a,b), \ k = 1, ..., N$$

verificando

$$\sum_{k=1}^{N} |\beta_k - \alpha_k| < \delta,$$

se tiver

$$\sum_{k=1}^{N} |f(\beta_k) - f(\alpha_k)| < \varepsilon.$$

A classe de todas as funções absolutamente contínuas definidas em $\Omega = (a,b)$ com valores em $\mathbb{R}^n$ será denotada por $AC(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Definição 2.14.2 *Uma função $u : \mathbb{R} \supset X \to \mathbb{R}$ diz-se **uniformemente contínua** se*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in X, |x - y| < \delta \Rightarrow |u(x) - u(y)| < \varepsilon.$$

Proposição 2.14.3 *Se $u : X \to \mathbb{R}$ é uma função uniformemente contínua então para cada $a \in X'$ existe $\lim\limits_{x \to a} u(x)$.*

Demonstração:
Ver [30], pág. 190.

Proposição 2.14.4 *Qualquer função uniformemente contínua $u : X \to \mathbb{R}$ admite uma extensão contínua $v : \overline{X} \to \mathbb{R}$, v é a única extensão contínua de u a $\overline{X}$ e é uniformemente contínua.*

Demonstração:
Ver [30], Teorema 18, pág. 192.

Observação 2.14.5 *Qualquer função $u \in AC(\Omega, \mathbb{R}^n)$ é uniformemente contínua em Ω, pelo que podemos sempre prolonga-la por continuidade a $\overline{\Omega}$.*

Proposição 2.14.6 *Qualquer função $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$ que verifique a desigualdade de Lipschitz*

$$|u(x) - u(y)| \leq K |x - y| \quad \forall x, y \in \Omega$$

para algum $K > 0$, é absolutamente contínua.

Demonstração:
Ver [30], pág. 190.

Nota 2.14.7 *Por analogia com $AC(\Omega, \mathbb{R}^n)$ denota-se por $AC^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ a subclasse de todas as funções lipschitzianas.*

Então, temos a seguinte proposição

Proposição 2.14.8 *Qualquer função lipschitziana $u : X \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua.*

Demonstração:
Ver [30], pág. 190.

Proposição 2.14.9 *Se $u, v \in AC(\Omega, \mathbb{R}^n)$ o mesmo acontece com a função soma $u + v : \Omega \to \mathbb{R}^n$ definida por $(u + v)(x) := u(x) + v(x)$.*

Demonstração:
Ver [25], pág. 461.

Proposição 2.14.10 *Tem-se*

$$AC(\Omega, \mathbb{R}^n) = W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^n).$$

Mais precisamente, qualquer função $u \in AC(\Omega, \mathbb{R}^n)$ possui derivada clássica $[u']$ em quase todos os pontos de Ω, $[u'] \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e $[u']$ é a derivada fraca de u. Reciprocamente, qualquer função $u \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ é, a menos de uma modificação num conjunto de medida nula, uma função absolutamente contínua. Finalmente, $u \in AC(\Omega, \mathbb{R}^n)$ se e só se u é diferenciável, no sentido clássico, em quase todos os pontos de Ω, $[u'] \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e verifica-se o teorema fundamental do cálculo, isto é, para quaisquer $x, y \in \Omega$, tem-se

$$u(x) - u(y) = \int_y^x [u'(t)]\, dt.$$

Demonstração:
Ver [6], Teorema 2.17.

Proposição 2.14.11 *Se* $g \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$*, e para cada* $x \in (a,b)$

$$f(x) := \int_a^x g(t)\,dt,$$

então f *é absolutamente contínua e* $[f'(x)] = g(x)$ *quase sempre em* (a,b).

Demonstração:
Ver [6], Teorema 2.32.

Proposição 2.14.12 *Uma função* $f \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ *pertence a* $W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ *se e só se existe uma constante* C *tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|, \text{ para quase todos } x, y \in \Omega.$$

Demonstração:
Ver [7], Corolário VIII.4.

Proposição 2.14.13 *Seja* $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ *uma função contínua e diferenciávle em* Ω*. Se existe* $K \in \mathbb{R}$ *tal que* $|f'(x)| \leq K$ *para qualquer* $x \in \Omega$ *então tem-se*

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x-y| \qquad \forall x, y \in \Omega.$$

Demonstração:
Ver [30], pág. 215.

Proposição 2.14.14 *Sejam* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *e* $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ *funções absolutamente contínuas. Se* g *é monótona e se* $g([a,b]) \subset [c,d]$ *então* $f \circ g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é uma função absolutamente contínua.*

Demonstração:
Ver [25], pág. 462.

Proposição 2.14.15 *Se* g *é monótona em* $[a,b]$ *e se* f *é absolutamente contínua em* $[c,d]$ *então* $f \circ g$ *tem derivada finita quase sempre em* $[a,b]$ *e verifica-se a regra da cadeia*

$$(f \circ g)'(t) = f'(g(t))\,g'(t) \quad qs \text{ em } [a,b].$$

Demonstração:
Ver [47], Corolário 4.

Proposição 2.14.16 *Seja* $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ *uma função absolutamente contínua. Então* x *é uma função crescente se e so se* $x'(t) \geq 0$ *qs em* $[a,b]$.

Demonstração:
Se existe $x'(\bar{t})$ então $x'(\bar{t}) \geq 0$ pois

$$\frac{x(t) - x(\bar{t})}{t - \bar{t}} \geq 0 \quad \forall t \neq \bar{t}.$$

Reciprocamente, se $x'(t) \geq 0$ para quase todo $t \in [a,b]$ então, para quaisquer $t_1, t_2 \in [a,b]$ com $t_1 < t_2$,

$$x(t_1) - x(t_2) = \int_a^{t_1} x'(t)\,dt - \int_a^{t_2} x'(t)\,dt = -\left(\int_a^{t_2} x'(t)\,dt - \int_a^{t_1} x'(t)\,dt\right) = -\int_{t_1}^{t_2} x'(t)\,dt \leq 0.$$

■

Proposição 2.14.17 *Se $t(s)$, $a \leq s \leq b$, $t(a) = c, t(b) = d$, é uma função absolutamente contínua crescente, então a função inversa $s(t)$, $c \leq t \leq d$, de $t(s)$, existe, é contínua e absolutamente contínua em $[c, d]$ se e só se $t'(s) > 0$ quase sempre em $[a, b]$.*

Demonstração:
Ver [9], pág. 438.

Proposição 2.14.18 *Seja $x : X \subset \mathbb{R} \to Y \subset \mathbb{R}$ uma função derivável em $a \in X \cap X'$* [5]*. Suponhamos que existe $y = x^{-1} : Y \to X$ contínua em $b = x(a)$. Então y é derivável em b se e só se $x'(a) \neq 0$. No caso afirmativo tem-se*

$$y'(b) = \frac{1}{x'(a)}.$$

Demonstração:
Ver [30], pág. 206.

Assim temos a seguinte proposição

Proposição 2.14.19 *Se $x : [a, b] \to [c, d]$ é uma função absolutamente contínua e tal que $x'(t) > 0$ quase sempre em $[a, b]$ então existe inversa $x^{-1} : [c, d] \to [a, b]$ e é absolutamente contínua. Além disso, em qualquer ponto $\bar{t}$ onde existe $x'(\bar{t})$ $(\neq 0)$ existe $(x^{-1})'(x(\bar{t}))$ e*

$$(x^{-1})'(x(\bar{t})) = \frac{1}{x'(\bar{t})}.$$

2.15 Conjuntos convexos

Seja V em espaço vectorial real.

Definição 2.15.1 *Se u_1 e u_2 são dois elementos de V, u_1 e u_2 dizem-se os* ***extremos*** *do* ***segmento de recta*** *denotado por $[u_1, u_2]$, onde*

$$[u_1, u_2] := \{\lambda u_1 + (1 - \lambda) u_2 : 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Definição 2.15.2 *Um* ***conjunto*** *$A \subset V$ diz-se* ***convexo*** *se para qualquer par (u_1, u_2) de elementos de A, o segmento $[u_1, u_2]$ está contido em A. Por outras palavras, A é convexo se para quaisquer $u_1, u_2 \in A$ e $0 \leq \lambda \leq 1$ tem-se*

$$\lambda u_1 + (1 - \lambda) u_2 \in A.$$

Proposição 2.15.3 *Sejam $K_1, K_2 \subset V$ conjuntos convexos e seja α um número real. Então os conjuntos αK_1 e $K_1 + K_2$ são conjuntos convexos.*

Demonstração:
Ver [27], Lema V.1.4.

Definição 2.15.4 *Dados m pontos em V, qualquer ponto u da forma*

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_m u_m$$

com

$$\lambda_s \geq 0, \quad s = 1, 2, ..., m,$$

e

$$\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_m = 1,$$

diz-se uma ***combinação convexa*** *de $u_1, u_2, ..., u_m$.*

[5] Representa-se por X' o conjunto dos pontos de acumulação de X.
Dizemos que um ponto $a \in \mathbb{R}$ é **ponto de acumulação** do conjunto X se, para qualquer $\varepsilon > 0$, o intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ contém pelo menos um ponto $x \in X$ diferente de a.

Proposição 2.15.5 *Se V é um espaço vectorial topológico, o fecho e o interior (possivelmente vazio) de um conjunto convexo $A \subset V$ são conjuntos convexos.*

Demonstração:
Ver [27], Teorema V.2.1.

Definição 2.15.6 *Dado um qualquer subconjunto A de V, designa-se por $\text{co}\, A$ (ou $\text{co}\,(A)$) o mais pequeno conjunto convexo em V contendo A. O conjunto $\text{co}\,(A)$ diz-se o* ***invólucro convexo*** *de A.*

Definição 2.15.7 *Seja V um espaço vectorial topológico e A um qualquer subconjunto de V. Então a intersecção de todos os conjuntos convexos fechados contendo A é o mais pequeno conjunto convexo fechado contendo A e é o fecho do invólucro convexo de A (e não o invólucro convexo do fecho de A). Este conjunto diz-se o* ***invólucro convexo fechado*** *de A e designa-se por $\overline{\text{co}}\, A$.*

Proposição 2.15.8 *Se A é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^n$, então $\overline{\text{co}}\, A = \text{co}\, \overline{A}$. Em particular, se A é fechado e limitado então $\text{co}\, A$ é fechado e limitado.*

Demonstração:
Ver [43], Teorema 17.2.

2.16 Funções convexas

2.16.1 Definição

Seja V um espaço vectorial real.

Definição 2.16.1 *Uma função F definida num subconjunto convexo A de V com valores em $[-\infty, +\infty]$ diz-se* ***convexa*** *em A se para quaisquer $u, v \in A$,*

$$F(\lambda u + (1-\lambda) v) \leq \lambda F(u) + (1-\lambda) F(v), \quad \lambda \in [0,1], \tag{2.4}$$

sempre que o membro direito da desigualdade esteja definido.

Nota 2.16.2 *A desigualdade anterior deverá portanto ser válida, a não ser que se tenha $F(u) = -F(v) = \pm\infty$.*

Definição 2.16.3 *Uma função $F : A \to [-\infty, +\infty]$ diz-se* ***côncava*** *se $-F$ é convexa.*

Definição 2.16.4 *Seja F uma aplicação de V em $[-\infty, +\infty]$. O conjunto*

$$\text{dom}\ F := \{u \in V : F(u) < +\infty\}$$

diz-se o ***domínio*** *de F.*

A seguinte proposição sai imediatamente das definições de função convexa e de domínio.

Proposição 2.16.5 *O domínio de uma função convexa é um conjunto convexo.*

Proposição 2.16.6 *Se F é convexa então para qualquer conjunto finito $u_1, ..., u_n$ de elementos de A e para qualquer família $\lambda_1, ..., \lambda_n$ de números reais positivos com soma unitária, tem-se*

$$F\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F(u_i),$$

sempre que o membro direito desta desigualdade esteja definido.

Demonstração:
Ver [28], pág. 7.

Proposição 2.16.7 ***(Desigualdade de Jensen)*** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}$ um conjunto aberto limitado, $u \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Então*

$$f\left(\frac{1}{m(\Omega)}\int_\Omega u(x)\,dx\right) \leq \frac{1}{m(\Omega)}\int_\Omega f(u(x))\,dx.$$

Demonstração:
Ver [22], Teorema 2.2, pág. 29.

Definição 2.16.8 *O* ***epigráfico*** *de uma função $F : V \to [-\infty, +\infty]$ é o conjunto*

$$epi\ F := \{(u, a) \in V \times \mathbb{R} : F(u) \leq a\}.$$

Proposição 2.16.9 *Uma função $F : V \to [-\infty, +\infty]$ é convexa se e só se o seu epigráfico é um conjunto convexo.*

Demonstração:
Ver [28], capítulo I, Proposição 2.1.

Nota 2.16.10 *A proposição anterior é muitas vezes usada como definição de função convexa, dado que na desigualdade (2.4) pode ter-se, no membro direito, a expressão $\infty - \infty$.*

Proposição 2.16.11 *Se $F : V \to [-\infty, +\infty]$ é uma função convexa e λ é um número real positivo, então λF é uma função convexa.*

Demonstração:
Ver [28], capítulo I, Proposição 2.2.

Proposição 2.16.12 *Se $F, G : V \to [-\infty, +\infty]$ são funções convexas, então $F+G$ é convexa. Convencionamos que $(F+G)(u) = +\infty$ se $F(u) = -G(u) = \pm\infty$.*

Demonstração:
Ver [28], capítulo I, Proposição 2.2.

Proposição 2.16.13 *Se $(F_i)_{i\in I}$ é uma qualquer família de funções convexas de V em $[-\infty, +\infty]$ então o seu supremo pontual $F = \sup\limits_{i\in I} F_i$ é uma função convexa.*

Demonstração:
Ver [28], capítulo I, Proposição 2.2.

Proposição 2.16.14 *Seja $A \subset V$. A* ***função indicatriz*** *de A*

$$\delta_A(u) := \begin{cases} 0 & se\ u \in A \\ +\infty & se\ u \notin A \end{cases}$$

é convexa se e só se A é um conjunto convexo.

Demonstração:
Ver [43], pág. 28.

Daqui e da Proposição 2.16.12 resulta que

Proposição 2.16.15 *Se F é uma função de $A \subset V$ em $\mathbb{R}$, então pode-se associar-lhe uma função $\widetilde{F}$ definida em V por*

$$\widetilde{F}(u) := \begin{cases} F(u) & se\ u \in A \\ +\infty & se\ u \notin A. \end{cases}$$

Assim, $\widetilde{F}$ é convexa se e só se A é convexo e $F : A \to \mathbb{R}$ é convexa.

Definição 2.16.16 *Sejam A um subconjunto convexo de V e F uma aplicação de A em $\mathbb{R}$. Diz-se que F é* ***estritamente convexa*** *se é convexa e a desigualdade estrita de (2.4) é verificada para quaisquer $u, v \in A$ tais que $u \neq v$ e para qualquer $\lambda \in (0,1)$.*

Proposição 2.16.17 *Se $F : V \to [-\infty, +\infty]$ é uma função estritamente convexa, então F tem quando muito um ponto de mínimo em V.*

Demonstração:
Ver [23], Proposição 1.20.

Definição 2.16.18 *Uma função convexa $F : V \to [-\infty, +\infty]$ diz-se* ***própria*** *se o seu epigráfico é não-vazio e não contém rectas verticais, isto é, se F nunca toma o valor $-\infty$ e não é identicamente igual a $+\infty$.*

Assim, F é uma função convexa própria se o conjunto convexo $C = dom\, F$ é não-vazio e a restrição de F a C é uma função com valores finitos. Por outras palavras, uma função convexa própria em V é uma função obtida tomando uma função real convexa num subconjunto convexo e não-vazio de V e prolongando-a a todo o V pondo $F(u) = +\infty$ para $u \notin C$.

Definição 2.16.19 *Uma função convexa que não é própria diz-se* ***imprópria.***

Proposição 2.16.20 *Se F é uma função convexa imprópria então $F(u) = -\infty$, qualquer que seja o $u \in int\,(dom\, F)$. Assim, qualquer função convexa imprópria é necessariamente infinita, excepto talvez, nos pontos da fronteira do seu domínio.*

Demonstração:
Ver [43], Teorema 7.2.

Proposição 2.16.21 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2, isto é, f é duas vezes continuamente diferenciável no intervalo Ω. Então f é convexa se e só se a sua segunda derivada, f'', é não-negativa em I.*

Demonstração:
Ver [43], pág. 227.

Observação 2.16.22 *Notemos que se $f''(x) > 0$ qualquer que seja o $x \in \Omega$ então f é estritamente convexa em Ω.*

2.16.2 Continuidade

Nesta secção enunciaremos apenas resultados de continuidade de funções convexas definidas em $\mathbb{R}^n$.

Proposição 2.16.23 *Qualquer função convexa f definida em $\mathbb{R}^n$ é contínua no interior do seu domínio.*

Demonstração:
Ver [28], capítulo I, Corolário 2.3.

Consequentemente:

Proposição 2.16.24 *Qualquer função convexa finita f definida em $\mathbb{R}^n$ é contínua.*

Definição 2.16.25 *Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Uma função $f : X \to [-\infty, +\infty]$ diz-se* ***lipschitziana*** *(em X) sempre que, para algum real não-negativo K, se tiver*

$$|f(x) - f(x')| \leq K\,|x - x'| \tag{2.5}$$

quaisquer que sejam os elementos x e x' de X.

Definição 2.16.26 *Diz-se que f é **lipschitziana numa vizinhança** de x se existirem $\varepsilon > 0$ e $K > 0$ tais que f satisfaz a condição de Lipschitz (2.5), no conjunto $x + \varepsilon B$, onde B denota a bola aberta unitária em $\mathbb{R}^n$ (assim $x + \varepsilon B$ é a bola aberta de raio ε e centro x).*

Proposição 2.16.27 *Qualquer função convexa f definida em $\mathbb{R}^n$ é localmente lipschitziana no interior do seu domínio. Isto é, é lipschitziana numa vizinhança de cada ponto $x_0 \in int\,(dom\ f)$. Consequentemente, é lipschitziana em qualquer subconjunto compacto de $int\,(dom\ f)$.*

Demonstração:
Ver [40], Teorema A.

Proposição 2.16.28 *Seja $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ uma função convexa própria e seja $X \subset \mathbb{R}^n$ tal que f é limitada inferiormente por α em X. Se existe $\varepsilon > 0$ tal que f é limitada superiormente por β em $X + \varepsilon B$ então f é lipschitzana em X com constante $K := (\beta - \alpha)/\varepsilon$.*

Demonstração:
Ver [44], pág. 360.

Proposição 2.16.29 *Seja $\Omega := (a, b) \subset \mathbb{R}$. Qualquer função lipschitziana $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$ possui derivada clássica $[u']$ e derivada distribucional u' em quase todos os pontos de Ω, e são iguais quando vistas como funções de $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Em particular, u pertence a todos os espaços de Sobolev $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$.*

Demonstração:
Ver [6], Corolário 2.23.

Observação 2.16.30 *Note-se que da proposição anterior resulta que se $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é lipschitziana, então $u \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Na realidade também temos a recíproca (ver Proposição 2.14.12).*

2.17 Funções semicontínuas inferiormente

2.17.1 Definição

Seja V um espaço vectorial real topológico localmente convexo.

Definição 2.17.1 *Uma função $F : V \to [-\infty, +\infty]$ é **semicontínua inferiormente num ponto** $x \in V$ se*

$$F(x) \leq \liminf_{h \to \infty} F(x_h)$$

*para qualquer sucessão $(x_h) \subset V$ convergente para $x \in V$. A função F é **semicontínua inferiormente** (abrevia-se sci) em V se F é semicontínua inferiormente em cada ponto $x \in V$.*

Definição 2.17.2 *Uma função F diz-se **semicontínua superiormente** (scs) se $-F$ é semicontínua inferiormente.*

Observação 2.17.3 *Uma função é contínua se e só se é simultaneamente semicontínua inferiormente e superiormente.*

A seguinte proposição segue directamente da definição.

Proposição 2.17.4 *Uma função $F : V \to [-\infty, +\infty]$ é semicontínua inferiormente num ponto $a \in V$ se e só se para cada $\lambda < F(a)$ existe uma vizinhança U de a tal que $\lambda < F(u)$, $\forall u \in U$.*

Demonstração:
Ver [10], capítulo II, Proposição 7.2.

Proposição 2.17.5 *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $F : V \to [-\infty, +\infty]$ *é semicontínua inferiormente;*

(ii) qualquer que seja $t \in \mathbb{R}$, *o conjunto* $\{x \in V : F(x) > t\}$ *é aberto;*

(iii) qualquer que seja $t \in \mathbb{R}$, *o conjunto* $\{x \in V : F(x) \leq t\}$ *é fechado;*

(iv) epi F *é um subconjunto fechado de* $V \times \mathbb{R}$.

Demonstração:
Ver [10], capítulo II, Proposições 8.1 e 8.3.

Proposição 2.17.6 *Seja* $(F_i)_{i \in I}$ *uma família de funções semicontínuas inferiormente definidas em* V *com valores em* $[-\infty, +\infty]$. *Então a função* $F : V \to [-\infty, +\infty]$ *definida por* $F(x) = \sup\limits_{i \in I} F_i(x)$ *é semicontínua inferiormente. Se* I *é finito, então a função* $G : V \to [-\infty, +\infty]$ *definida por* $G(x) = \inf\limits_{i \in I} G_i(x)$ *é semicontínua inferiormente.*

Demonstração:
Ver [10], capítulo II, Teorema 8.6.

A seguinte afirmação segue directamente da definição.

Proposição 2.17.7 *Se* F *e* G *são funções semicontínuas inferiormente definidas em* V *com valores em* $[-\infty, +\infty]$ *e se* $F+G$ *está bem definida em* V *(isto é,* $(-\infty, +\infty) \neq (F(x), G(x)) \neq (+\infty, -\infty)$ *qualquer que seja o* $x \in V$*), então* $F + G$ *é semicontínua inferiormente.*

Proposição 2.17.8 *Seja* $U \subset V$. *A função indicatriz de* U

$$\delta_U(u) = \begin{cases} 0 & \text{se } u \in U \\ +\infty & \text{se } u \notin U \end{cases}$$

é semicontínua inferiormente se e só se U *é um conjunto fechado.*

Demonstração:
Ver [28], pág. 10.

Daqui e da Proposição 2.17.7 resulta que

Proposição 2.17.9 *Se* F *é uma função de* $U \subset V$ *em* $\mathbb{R}$, *então pode-se associar-lhe uma função* $\widetilde{F}$ *definida em* V *por*

$$\widetilde{F}(u) := \begin{cases} F(u) & \text{se } u \in U \\ +\infty & \text{se } u \notin U. \end{cases}$$

Assim, $\widetilde{F}$ *é semicontínua inferiormente se e só se* U *é um conjunto fechado e* F *é semicontínua inferiormente.*

Proposição 2.17.10 *Seja* $F : V \to [-\infty, +\infty]$ *uma função convexa. Então* F *é semicontínua inferiormente na topologia forte de* V *se e só se é semicontínua inferiormente na topologia fraca de* V.

Demonstração:
Ver [23] Proposição 1.18.

Proposição 2.17.11 *Seja* E *um espaço compacto e seja* F *uma função definida em* E *com valores em* $[-\infty, +\infty]$. *Suponhamos que* F *é semicontínua inferiormente. Então existe pelo menos um ponto* $a \in E$ *tal que*

$$F(a) = \inf_{x \in E} F(x).$$

Analogamente, se F *é semicontínua superiormente, existe pelo menos um* $b \in E$ *tal que*

$$F(b) = \sup_{x \in E} F(x).$$

Demonstração:
Ver [10], capítulo II Teorema 10.1.

2.18 Γ-Regularização

Seja V um espaço vectorial real topológico localmente convexo.

Definição 2.18.1 *Uma **função afim contínua** definida em V é uma função do tipo*

$$v(u) = l(u) + \alpha,$$

onde l é um funcional linear contínuo e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Definição 2.18.2 *O conjunto das funções $F : V \to [-\infty, +\infty]$ que são pontualmente o supremo de uma família de funções afins contínuas será designado por $\Gamma(V)$. A expressão $\Gamma_0(V)$ designará o subconjunto de $\Gamma(V)$ das funções de $\Gamma(V)$ não identicamente iguais a $\pm\infty$.*

Proposição 2.18.3 *As seguintes afirmações são equivalentes.*

(i) $F \in \Gamma(V)$;

(ii) F é uma função convexa semicontínua inferiormente de V em $[-\infty, +\infty]$ e se F toma o valor $-\infty$ nalgum ponto de V, então F é identicamente igual a $-\infty$.

Demonstração:
Ver [28], capítulo I, Proposição 3.1.

Proposição 2.18.4 *Sejam F e G duas funções definidas em V com valores em $[-\infty, +\infty]$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) G é pontualmente o supremo das funções afins contínuas, minorantes de F;

(ii) G é a maior função minorante de F em $\Gamma(V)$.

Demonstração:
Ver [28], pág. 15.

Definição 2.18.5 *Nas condições da proposição anterior, G diz-se a **Γ-regularização** de F.*

Nota 2.18.6 *Em particular, se $F \in \Gamma(V)$, então F coincide com a sua Γ-regularização.*

Proposição 2.18.7 *Seja $F : V \to [-\infty, +\infty]$ e G a sua Γ-regularização. Se existe uma função afim contínua minorante de F então*

$$epi\ G = \overline{co}\, epi\ F,$$

onde $\overline{co}\, epi\ F$ denota o invólucro convexo fechado do conjunto epi F, isto é, o mais pequeno conjunto convexo fechado que contém o epigráfico de F.

Demonstração:
Ver [28], capítulo I, Proposição 3.2.

Proposição 2.18.8 *Seja $F : V \to [-\infty, +\infty]$ e G a sua Γ-regularização. Então*

(i) $G \leq \bar{F} \leq F$,

e

(ii) se F é convexa e admite uma função afim contínua como minorante, então $\bar{F} = G$.

Demonstração:
Ver [28], capítulo I, Proposição 3.3.

2.19 Funções polares

2.19.1 Definição

No que segue, V é um espaço vectorial real topológico localmente convexo e V' denota o seu dual, isto é, o conjunto de todos os funcionais lineares contínuos definidos em V.
Se $u^* \in V'$ e $u \in V$, em vez de $u^*(u)$, escrevemos como é habitual, $\langle u, u^* \rangle$.

Seja F uma função de V em $[-\infty, +\infty]$. Se $u^* \in V'$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, a função afim contínua

$$u \to \langle u, u^* \rangle - \alpha$$

é minorante de F em V se e só se

$$\alpha \geq \langle u, u^* \rangle - F(u), \forall u \in V$$

ou, se definirmos

$$F^*(u^*) := \sup_{u \in V} \{\langle u, u^* \rangle - F(u)\}, \tag{2.6}$$

se e só se

$$\alpha \geq F^*(u^*).$$

Definição 2.19.1 *Se $F : V \to [-\infty, +\infty]$, a fórmula (2.6) define uma função de V' em $[-\infty, +\infty]$, designada por F^* e denominada a **função polar** (ou **função conjugada**) de F.*

Nota 2.19.2 *Em (2.6) podemos restringir-nos aos $u \in dom\, F$:*

$$F^*(u^*) := \sup_{u \in\, dom\, F} \{\langle u, u^* \rangle - F(u)\}. \tag{2.7}$$

Assim, a função F^* é pontualmente o supremo da família de funções afins contínuas $\langle u, \cdot \rangle - F(u)$, $u \in dom\, F$, de V' em $[-\infty, +\infty]$, pelo que:

Proposição 2.19.3 *A função $F^* \in \Gamma(V')$. Em particular, F^* é convexa e semicontínua inferiormente.*

Proposição 2.19.4 *A função conjugada de F, F^*, é própria se e só se F é própria.*

Demonstração:
Ver [43], Teorema 12.2.

Observação 2.19.5 *De (2.7) resulta que*

$$\langle u, u^* \rangle \leq F(u) + F^*(u^*) \quad \forall u \in dom F, \forall u^* \in V'.$$

Os pares que satisfazem a igualdade constituem o gráfico de uma multifunção, $\widetilde{\partial} F$, denominada o subdiferencial de F.

Proposição 2.19.6 *Seja $F : V \to [-\infty, +\infty]$ e F^* a sua polar. Tem-se:*

(i) $F^*(0) = -\inf_{u \in V} F(u)$;

(ii) *se* $F \leq G$ *então* $F^* \geq G^*$;

(iii) $\left(\inf_{i \in I} F_i\right)^* = \sup_{i \in I} F_i^*$ *para qualquer família* $(F_i)_{i \in I}$ *de funções definidas em* V;

(iv) $\left(\sup_{i \in I} F_i\right)^* \leq \inf_{i \in I} F_i^*$ *para qualquer família* $(F_i)_{i \in I}$ *de funções definidas em* V;

(v) $(\lambda F)^*(u^*) = \lambda F^*\left(\frac{u^*}{\lambda}\right), \forall \lambda > 0$;

(vi) $(F+\alpha)^* = F^* - \alpha, \forall \alpha \in \mathbb{R}$;

(vii) $(F_a)^*(u^*) = F^*(u^*) + \langle a, u^* \rangle$, *onde* $F_a(v) := F(v-a)$ *para cada* $a \in V$.

Demonstração:
Ver [28], pág. 17.

2.19.2 Bipolares

Definição 2.19.7 *Seja F uma função definida em V e com valores em $[-\infty, +\infty]$. A **função bipolar** de F, notada por F^{**}, é a função $F^{**} : V \to [-\infty, +\infty]$ definida por*

$$F^{**}(u) := \sup_{u^* \in V'} \{\langle u, u^* \rangle - F^*(u^*)\}.$$

Observação 2.19.8 *Se $F : V \to [-\infty, +\infty]$ então $F^{**} \in \Gamma(V)$. Em particular, F^{**} é convexa e semicontínua inferiormente.*

Proposição 2.19.9 *Seja F uma função de V em $[-\infty, +\infty]$. Então a sua bipolar F^{**} é a sua Γ-regularização. Em particular, se $F \in \Gamma(V)$ temos $F = F^{**}$.*

Demonstração:
Ver [28], capítulo I, Proposição 4.1.

2.20 Subdiferenciabilidade

2.20.1 Definição

Sejam V um espaço vectorial topológico localmente convexo, V' o seu dual e F uma aplicação de V em $[-\infty, +\infty]$.

Definição 2.20.1 *Uma função afim contínua l, minorante de F, é **exacta** no ponto $u \in V$ se $l(u) = F(u)$.*

Necessariamente, $F(u)$ será finito e l terá a forma:

$$l(v) = \langle v-u, u^* \rangle + F(u) = \langle v, u^* \rangle + F(u) - \langle u, u^* \rangle.$$

Por outro lado, l é necessariamente maximal: o termo constante é o maior possível, logo

$$F(u) - \langle u, u^* \rangle = -F^*(u^*).$$

Definição 2.20.2 *Uma função F de V em $[-\infty, +\infty]$ diz-se **subdiferenciável** no ponto $u \in V$ se existe uma função afim contínua minorante de F exacta em u. O declive $u^* \in V'$ de uma tal função minorante diz-se um **subgradiente** de F em u. O conjunto dos subgradientes de F em u diz-se o **subdiferencial** de F em u e é notado por $\widetilde{\partial} F(u)$.*

Nota 2.20.3 *Se F não é subdiferenciável em u então $\widetilde{\partial} F(u) = \emptyset$.*

Assim, temos a seguinte caracterização para o subdiferencial:

Proposição 2.20.4 *Seja $F : V \to [-\infty, +\infty]$. Então $u^* \in \widetilde{\partial} F(u)$ se e só se $F(u)$ é finito (isto é, se $u \in dom\, F$) e*

$$\langle v-u, u^* \rangle + F(u) \leq F(v), \quad \forall v \in V.$$

Demonstração:
Ver [28], pág. 21.

Proposição 2.20.5 *Tem-se:*

(i) se $\widetilde{\partial} F(u) \neq \emptyset$ *então* $F(u) = F^{**}(u)$*;*

(ii) se $F(u) = F^{**}(u)$ *então* $\widetilde{\partial} F(u) = \widetilde{\partial} F^{**}(u)$.

Demonstração:
Ver [28], pág. 21.

Proposição 2.20.6 *Seja* F *uma função de* V *em* $[-\infty, +\infty]$ *e* F^* *a sua polar. Então* $u^* \in \widetilde{\partial} F(u)$ *se e só se*

$$F(u) + F^*(u^*) = \langle u, u^* \rangle .$$

Demonstração:
Ver [28], capítulo I, Proposição 5.1.

Proposição 2.20.7 *Seja* F *uma função de* V *em* $[-\infty, +\infty]$. *O conjunto* $\widetilde{\partial} F(u)$ *(possivelmente vazio) é convexo e* $\sigma(V, V')$*-fechado em* V'.

Demonstração:
Ver [28], capítulo I, Corolário 5.1.

Daqui resulta que:

Proposição 2.20.8 *Se* $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ *é uma função convexa então para cada* $x \in \mathbb{R}^n$*, o conjunto* $\widetilde{\partial} f(x)$ *(possivelmente vazio) é convexo e fechado em* $\mathbb{R}^n$.

No entanto temos o seguinte resultado

Proposição 2.20.9 *Seja* $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ *uma função própria convexa. Para* $x \notin \mathrm{dom}\, f$, $\widetilde{\partial} f(x)$ *é vazio e* $\widetilde{\partial} f(x)$ *é um conjunto limitado e não-vazio se e só se* $x \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}\, f)$.

Demonstração:
Ver [43], Teorema 23.4.

Proposição 2.20.10 *Para qualquer função* F *de* V *em* $[-\infty, +\infty]$ *temos*

$$u^* \in \widetilde{\partial} F(u) \Rightarrow u \in \widetilde{\partial} F^*(u^*) .$$

Além disso, se $F \in \Gamma(V)$*, isto é, se* F *é convexa e semicontínua inferiormente, então*

$$u^* \in \widetilde{\partial} F(u) \Leftrightarrow u \in \widetilde{\partial} F^*(u^*) .$$

Demonstração:
Ver [28], capítulo I, Corolário 5.2.

Proposição 2.20.11 *Seja* F *uma função convexa de* V *em* $[-\infty, +\infty]$*, finita e contínua num ponto* $u \in V$. *Então* $\widetilde{\partial} F(v) \neq \emptyset$ *qualquer que seja o* $v \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}\, F)$*; em particular,* $\widetilde{\partial} F(u) \neq \emptyset$.

Demonstração:
Ver [28], capítulo I, Proposição 5.2.

2.20.2 Cálculo subdiferencial

A seguinte proposição segue imediatamente da definição de subdiferencial.

Proposição 2.20.12 *(i) Sejam $F : V \to [-\infty, +\infty]$ e $\lambda > 0$. Para cada elemento u de V tem-se*

$$\widetilde{\partial} F(\lambda u) = \lambda \widetilde{\partial} F(u).$$

(ii) Sejam F_1 e F_2 funções de V em $[-\infty, +\infty]$. Então qualquer que seja $u \in V$, tem-se

$$\widetilde{\partial}(F_1 + F_2)(u) \supseteq \widetilde{\partial} F_1(u) + \widetilde{\partial} F_2(u) \quad \forall u \in V.$$

Proposição 2.20.13 *Se F_1 e F_2 são elementos de $\Gamma(V)$ e se existe um ponto $\bar{u} \in dom\, F_1 \cap dom\, F_2$ onde F_1 é contínua, então*

$$\widetilde{\partial}(F_1 + F2)(u) = \widetilde{\partial} F_1(u) + \widetilde{\partial} F_2(u) \quad \forall u \in V.$$

Demonstração:
Ver [28], capítulo I, Proposição 5.6.

2.20.3 Relação com a diferenciabilidade à Gâteaux

Definição 2.20.14 *Seja F uma função de V em $[-\infty, +\infty]$. Se existir o limite*

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{F(u + \lambda v) - F(u)}{\lambda},$$

*este diz-se a **derivada direccional** de F em u na direcção v, e denota-se por $F'(u; v)$.*

Se existe $u^* \in V'$ tal que

$$F'(u, v) = \langle v, u^* \rangle \quad \forall v \in V$$

*diz-se que F é **diferenciável à Gâteaux** em u e que u^* é a **derivada de Gâteaux** de F no ponto u, designada por $F'(u)$.*

Observação 2.20.15 *A derivada de Gâteaux de F no ponto u, se existe, é única e caracteriza-se por*

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{F(u + \lambda v) - F(u)}{\lambda} = \langle v, F'(u) \rangle \quad \forall v \in V.$$

Observação 2.20.16 *Se $V = \mathbb{R}^n$ então os conceitos de diferenciabilidade e diferenciabilidade à Gâteaux coincidem:*

*Se $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ e $x \in \mathbb{R}^n$ é um ponto onde f é finita, dizemos que f é **diferenciável** em x se existir um vector $x^* \in \mathbb{R}^n$ (necessariamente único) tal que*

$$f(z) = f(x) + \langle z - x, x^* \rangle + o(|z - x|),$$

isto é, tal que

$$\lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x) - \langle z - x, x^* \rangle}{|z - x|} = 0.$$

*Um tal x^*, se existe, diz-se o **gradiente** de f em x e é notado por $\nabla f(x)$.*

Suponhamos que f é diferenciável em x. Então, por definição, para cada $y \in \mathbb{R}^n$, $y \neq 0$, temos

$$0 = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x + \lambda y) - f(x) - \langle \lambda y, \nabla f(x) \rangle}{\lambda |y|} = \frac{f'(x; y) - \langle y, \nabla f(x) \rangle}{|y|}.$$

Donde $f'(x;y)$ existe e é uma função linear em y :

$$f'(x;y) = \langle y, \nabla f(x) \rangle \qquad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Em particular, para $i = 1, ..., n$,

$$\langle e_i, \nabla f(x) \rangle = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x + \lambda e_i) - f(x)}{|y|} = \frac{\partial f}{\partial \xi_i}(x),$$

onde e_i é o vector que constitui a í-ésima coluna da matriz identidade $n \times n$, e ξ_i denota a i-ésima componente de x. Daqui resulta que

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_1}(x), ..., \frac{\partial f}{\partial \xi_n}(x) \right).$$

Proposição 2.20.17 *Se f é uma função convexa própria definida em $\mathbb{R}^n$ então o conjunto $\mathcal{D}(f)$, dos pontos onde f é diferenciável, é um subconjunto denso de $int(dom\ f)$ e o seu complementar em $int(dom\ f)$ é um conjunto de medida nula. Além disso, a função $\nabla f : x \to \nabla f(x)$ é uma função contínua em $\mathcal{D}(f)$.*

Demonstração:
Ver [43], Teorema 25.5.

Proposição 2.20.18 *Seja F um função convexa de V em $[-\infty, +\infty]$. Se F é diferenciável à Gâteaux em $u \in V$ então é subdiferenciável em u e $\widetilde{\partial} F(u) = \{F'(u)\}$.*

Demonstração:
Ver [28], capítulo I, Proposição 5.3.

Das Proposições 2.20.17 e 2.20.18 resulta que:

Proposição 2.20.19 *Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função convexa então f é diferenciável em quase todo o ponto $u \in \mathbb{R}^n$. Além disso, tem-se $\widetilde{\partial} f(u) = \{\nabla f(u)\}$, qualquer que seja o u onde f é diferenciável.*

A convexidade de uma função diferenciável à Gâteaux pode ser caracterizada da seguinte forma:

Proposição 2.20.20 *Seja F uma função diferenciável à Gâteaux definida num conjunto convexo $A \subset V$, com valores em $\mathbb{R}$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *F é convexa em A;*

(ii) $F(v) \geq F(u) + \langle F'(u), v - u \rangle, \quad \forall u, v \in A.$

Analogamente, são equivalentes as seguintes afirmações:

(iii) *F é estritamente convexa em A;*

(iv) $F(v) > F(u) + \langle F'(u), v - u \rangle, \quad \forall u, v \in A, u \neq v.$

Demonstração:
Ver [28], capítulo I, Proposição 5.4.

Proposição 2.20.21 *Seja F uma função diferenciável à Gâteaux de $A \subset V$, A convexo, em $\mathbb{R}$. Então F é convexa se e só se a sua derivada F' é uma aplicação monótona de V em V', isto é, se*

$$\langle u_1 - u_2, F'(u_1) - F'(u_2) \rangle \geq 0 \quad \forall u_1, u_2 \in A.$$

Demonstração:
Ver [28], capítulo I, Proposição 5.5.

2.21 Gradientes generalizados

2.21.1 Definição

Nesta secção consideraremos apenas funções definidas em $\mathbb{R}^n$.
Recordemos que

Proposição 2.21.1 *Qualquer função lipschitziana num subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ é diferenciável quase sempre nesse conjunto.*

Notemos por $\mathcal{D}(f)$ o conjunto dos pontos de diferenciabilidade de f.

Definição 2.21.2 *Seja $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ uma função lipschitziana numa vizinhança de um ponto x. O* ***gradiente generalizado*** *de f em x é dado por*

$$\partial f(x) := co\left\{\lim_{i\to\infty} \nabla f(x_i) : (x_i) \to x, x_i \in \mathcal{D}(f), \forall i \in \mathbb{N} \text{ e } (\nabla f(x_i)) \text{ converge}\right\}.$$

Proposição 2.21.3 *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função lipschitziana numa vizinhança de um ponto x, com constante de Lipschitz K. Então $\partial f(x)$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ não-vazio, convexo e compacto. Além disso, para cada $\xi \in \partial f(x)$, temos $|\xi| \leq K$.*

Demonstração:
Ver [13], Proposição 2.1.2.

Desta proposição e atendendo a que qualquer função convexa é localmente lipschitziana no interior do seu domínio (Proposição 2.16.27) resulta que:

Proposição 2.21.4 *Se $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ é uma função convexa então para cada $x \in int(dom\, f)$, o conjunto $\partial f(x)$ é um subconjunto não-vazio, convexo e compacto de $\mathbb{R}^n$.*

No caso de f tomar apenas valores finitos temos a seguinte

Proposição 2.21.5 *Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função convexa então qualquer que seja o $x \in \mathbb{R}^n$, $\partial f(x)$ é um subconjunto não-vazio, convexo e compacto de $\mathbb{R}^n$.*

Proposição 2.21.6 *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função lipschitziana numa vizinhança de x. Então a multifunção ∂f é semicontínua superiormente em x, isto é, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$\partial f(x') \subset \partial f(x) + \varepsilon B \quad \forall x' \in x + \delta B.$$

Demonstração:
Ver [13], Proposição 2.1.5.

Proposição 2.21.7 *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função lipschitziana numa vizinhança de cada ponto de um subconjunto convexo U de $\mathbb{R}^n$. Então f é convexa em U se e só se a multifunção ∂f é monótona em U, isto é, se e só se quaisquer que sejam $x, x' \in U$,*

$$\langle x - x', \xi - \xi' \rangle \geq 0 \quad \forall \xi \in \partial f(x), \forall \xi' \in \partial f(x').$$

Demonstração:
Ver [13], Proposição 2.2.9.

Definição 2.21.8 *Diz-se que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ admite* ***derivada estrita*** *em x, um funcional linear contínuo notado por $D_s f(x)$ se, para cada v,*

$$\lim_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{f(y+tv) - f(y)}{t} = \langle D_s f(x), v \rangle,$$

e a convergência é uniforme para v em conjuntos compactos.

Proposição 2.21.9 *Se f é continuamente (Gâteaux) diferenciável em x, então f é estritamente diferenciável em x e portanto lipschitziana numa vizinhança de x.*

Demonstração:
Ver [13], Corolário da pág. 32.

Proposição 2.21.10 *Se f é estritamente diferenciável em x então f é lipschitziana numa vizinhança de x e $\partial f(x) = \{D_s f(x)\}$. Reciprocamente, se f é lipschitziana numa vizinhança de x e $\partial f(x) = \{\xi\}$ então f é estritamente diferenciável em x e $D_s f(x) = \xi$.*

Demonstração:
Ver [13], Proposição 2.2.4.

Definição 2.21.11 *Diz-se que a função f é* ***regular*** *em x se, para cada v, existe $f'(x;v)$ e $f'(x;v) = f^0(x;v)$, onde*

$$f^0(x;v) = \limsup_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} \frac{f(y+tv) - f(y)}{t}$$

é a derivada direccional generalizada de f em x segundo o vector v e onde

$$f'(x;v) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$$

é a derivada direccional de f em x segundo o vector v.

Proposição 2.21.12 *Suponhamos que f é uma função lipschitziana numa vizinhança de x. Se além disso, f é convexa então é regular em x.*

Demonstração:
Ver [13], Proposição 2.3.6.

Proposição 2.21.13 *Seja $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função lipschitziana próximo de um ponto (x_1, x_2). Se f é regular em (x_1, x_2) então*

$$\partial f(x_1, x_2) \subset \partial_{x_1} f(x_1, x_2) \times \partial_{x_2} f(x_1, x_2).$$

Demonstração:
Ver [13], Proposição 2.3.15.

Proposição 2.21.14 *Seja $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função lipschitziana numa vizinhança convexa $U \times V$ de um ponto $x = (\alpha, \beta)$, e suponhamos que, para cada α' próximo de α, a função $f(\alpha', \cdot)$ é convexa em V. Então $w \in \partial_2 f(\alpha, \beta)$ sempre que $(z, w) \in \partial f(x)$.*

Demonstração:
Ver [13], Proposição 2.5.3.

Nota 2.21.15 *Na proposição anterior $\partial_2 f(\alpha, \beta)$ representa o gradiente generalizado da função f em ordem à segunda variável, no ponto (α, β).*

2.21.2 Regras básicas de cálculo

Seja X um espaço de Banach e Y um subconjunto de X.
Nos resultados que se seguem consideramos, caso não seja dito o contrário, $f : Y \to \mathbb{R}$.

Proposição 2.21.16 *Suponhamos que f é uma função lipschitziana numa vizinhança de $x \in Y$. Então para qualquer real s, tem-se*

$$\partial (sf)(x) = s \partial f(x).$$

Demonstração:
Ver [13], Proposição 2.3.1.

Mais geralmente temos a proposição:

Proposição 2.21.17 *Seja $\{f_i\}$, $i = 1, ..., m$, uma família finita de funções lipschitzianas numa vizinhança de um ponto $x \in Y$. Então*

$$\partial\left(\sum_{i=1}^{m} s_i f_i\right)(x) \subset \sum_{i=1}^{m} s_i \partial f_i(x)$$

e a igualdade verifica-se se todas as funções f_i, à excepção no máximo de uma, são estritamente diferenciáveis.

Demonstração:
Ver [13], Corolário 2, pág. 39.

Proposição 2.21.18 *Se f atinge um mínimo ou máximo local em x, então $0 \in \partial f(x)$.*

Demonstração:
Ver [13], Proposição 2.3.2.

Proposição 2.21.19 *Suponhamos que $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ é estritamente diferenciável em x e que $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é lipschitziana numa vizinhança de $F(x)$. Então $f := g \circ F$ é lipschitziana numa vizinhança de x e tem-se* [6]

$$\partial f(x) \subset \partial g(F(x)) \circ D_s F(x).$$

Verifica-se a igualdade se g (ou $-g$) é regular em $F(x)$, e nesse caso f (ou $-f$) é também regular em x.

Demonstração:
Ver [13], Teorema 2.3.10.

Proposição 2.21.20 *Se f_1 e f_2 são funções lipschitzianas próximo de x então $f_1 f_2$ é lipschitziana próximo de x e tem-se*

$$\partial(f_1 f_2)(x) \subset f_2(x)\,\partial f_1(x) + f_1(x)\,\partial f_2(x).$$

Se além disso, $f_1(x) \geq 0$, $f_2(x) \geq 0$ e f_1, f_2 são regulares em x então verifica-se a igualdade e $f_1 f_2$ é regular em x.

Demonstração:
Ver [13], Proposição 2.3.13.

2.21.3 Relação com o subdiferencial

Proposição 2.21.21 *Se uma função convexa $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ é lipschitziana numa vizinhança de um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ então $\partial f(x)$ coincide com o subdiferencial de f em x, isto é,*

$$\partial f(x) = \{p \in \mathbb{R}^n : f(y) \geq f(x) + \langle y - x, p\rangle\,,\ \ \forall y \in \mathbb{R}^n\}$$

e, para qualquer v fixado, $f^0(x; v)$ coincide com a derivada direccional $f'(x; v)$.

Demonstração:
Ver [13], Proposição 2.2.7.

Portanto

[6] Esta inclusão significa que qualquer elemento z de $\partial f(x)$ pode ser representado como a composição de uma função ξ em $\partial g(F(x))$ com $D_s F(x)$, ou seja,

$$\langle z, v\rangle = \langle \xi, D_s F(x)(v)\rangle \quad \forall v \in \mathbb{R}.$$

Proposição 2.21.22 *Se $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ é uma função convexa, então o gradiente generalizado de f coincide em int (dom f) com o subdiferencial de f no sentido da análise convexa.*

Em particular, se f toma apenas valores finitos, temos a seguinte

Proposição 2.21.23 *Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função convexa, então o gradiente generalizado de f coincide com o subdiferencial de f em cada $x \in \mathbb{R}^n$.*

2.22 Integrandos normais

2.22.1 Definição e propriedades

Definição 2.22.1 *Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e B um subconjunto boreliano de $\mathbb{R}^p$. Diz-se que $f : \Omega \times B \to [-\infty, +\infty]$ é um* ***integrando normal*** *se:*

(i) para quase todo $t \in \Omega$, $f(t, \cdot)$ é semicontínua inferiormente em B;

(ii) existe uma função boreliana $\widetilde{f} : \Omega \times B \to [-\infty, +\infty]$ tal que $\widetilde{f}(t, \cdot) = f(t, \cdot)$, para quase todo $t \in \Omega$.

Definição 2.22.2 *O integrando normal $f : \Omega \times B \to [-\infty, +\infty]$ diz-se* ***convexo*** *se a função $f(t, u)$ é convexa em u para quase todo $t \in \Omega$ fixado.*

Definição 2.22.3 *O integrando normal $f : \Omega \times B \to [-\infty, +\infty]$ diz-se* ***próprio*** *se $f(t, \cdot)$ é uma função própria para cada $t \in \Omega$, isto é se $f(t, u) > -\infty$ e $f(t, u) \neq +\infty$, para qualquer $u \in B$.*

Proposição 2.22.4 *Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, B um subconjunto boreliano de $\mathbb{R}^p$, $f : \Omega \times B \to [-\infty, +\infty]$ um integrando normal e $u : \Omega \to B$ uma função mensurável. Então a função*

$$t \to f(t, u(t))$$

é mensurável em Ω.

Demonstração:
Ver [28], pág. 232.

Proposição 2.22.5 *Sejam B um subconjunto boreliano de $\mathbb{R}^p$ e $f : \Omega \times B \to [-\infty, +\infty]$ uma função. A função f é um integrando normal se e só se, para cada conjunto compacto $K \subset \Omega$ e para cada $\varepsilon > 0$, existe um conjunto compacto $K_\varepsilon \subset K$, com $m(K \backslash K_\varepsilon) \leq \varepsilon$, tal que a restrição de f a $K_\varepsilon \times B$ é uma função semicontínua inferiormente.*

Demonstração:
Ver [28], capítulo VIII, Teorema 1.1.

Proposição 2.22.6 *Sejam Ω um intervalo aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ uma função $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$-mensurável. Então a função f^{**} tal que, para cada $t \in \Omega$ fixado, $f^{**}(t, \cdot)$ é a função bipolar de $f(t, \cdot)$, é um integrando convexo em $\Omega \times \mathbb{R}^n$.*

Demonstração:
Ver [5], Proposição 2.6.3.

2.23 Multifunções

2.23.1 Definição e propriedades

Seja X um conjunto não-vazio.

Definição 2.23.1 *Seja Ω um conjunto não-vazio. Uma* ***multifunção*** *F de Ω em X é uma aplicação que associa a cada ponto $x \in \Omega$ um subconjunto $F(x)$ de X. Os subconjuntos $F(x)$ dizem-se os* ***valores*** *de F.*

Definição 2.23.2 *O conjunto*

$$Dom\ (F) := \{x \in \Omega : F(x) \neq \emptyset\}$$

diz-se o ***domínio*** *de F.*

Definição 2.23.3 *Quando Dom $(F) = \Omega$ a multifunção F diz-se* ***estrita****.*

Definição 2.23.4 *O* ***gráfico*** *de F, Graf (F), é o subconjunto do espaço $\Omega \times X$ dado por*

$$Graf\ (F) := \{(x,y) \in \Omega \times X : y \in F(x)\}.$$

Definição 2.23.5 *A* ***imagem*** *de F, $R(F)$ (ou Im (F)) é a união dos valores $F(x)$:*

$$R\ (F) := \cup_{x \in \Omega} F(x).$$

Definição 2.23.6 *A* ***inversa*** *F^{-1} de F é a multifunção de $R\ (F)$ em X definida por*

$$x \in F^{-1}(y) \text{ se e só se } y \in F(x).$$

Definição 2.23.7 *Diz-se que a multifunção $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ tem* ***valores fechados*** *se $F(x)$ é um conjunto fechado em $\mathbb{R}^n$ para cada $x \in \Omega$.*

Definição 2.23.8 *Sejam X e Y dois espaços de Banach e $\emptyset \neq \Omega \subset Y$. Uma multifunção $F : \Omega \to X$ diz-se* ***semicontínua superiormente no ponto*** *$x_0 \in Dom\ (F)$ se para qualquer vizinhança U de $F(x_0)$,*

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } \forall x \in B_\varepsilon(x_0) \cap \Omega, \quad F(x) \subset U.$$

Diz-se que F é ***semicontínua superiormente*** *se é semicontínua superiormente em qualquer ponto do seu domínio.*

2.23.2 Mensurabilidade

Seja $(\Omega, \mathcal{A})$ um espaço mensurável.

Definição 2.23.9 *Seja X um espaço métrico completo separável e $F : \Omega \to X$ uma multifunção com valores fechados. A multifunção F diz-se* ***mensurável*** *se a imagem inversa de cada conjunto fechado é um conjunto mensurável, isto é, se para qualquer conjunto fechado $C \subset X$*

$$F^{-1}(C) := \{w \in \Omega : F(w) \cap C \neq \emptyset\} \in \mathcal{A}.$$

Nota 2.23.10 *Prova-se (ver [44], Teorema 14.3) que na definição anterior é indiferente considerar conjuntos fechados, abertos ou compactos.*

Proposição 2.23.11 *Seja $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma multifunção com valores fechados. Com respeito à σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ verificam-se as implicações $(c) \Rightarrow (b) \Rightarrow (a)$ onde*

(a) F é uma multifunção mensurável

(b) Graf (F) é um subconjunto de $\Omega \times \mathbb{R}^n$ $\mathcal{A} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-mensurável

(c) $F^{-1}(D) \in \mathcal{A}$ para qualquer $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Quando o espaço $(\Omega, \mathcal{A})$ é completo para alguma medida μ, estas condições são equivalentes. Então tem-se $(b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a)$ mesmo que F não tenha valores fechados.

Demonstração:
Ver [44], Teorema 14.8.

Proposição 2.23.12 *Se $\Gamma : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é uma multifunção mensurável com valores fechados, então existe pelo menos uma* ***selecção mensurável*** *de Γ, isto é, uma função $x : Dom\,\Gamma \to \mathbb{R}^n$ mensurável e tal que $x(t) \in \Gamma(t)$ para qualquer $t \in Dom\,\Gamma$.*

Demonstração:
Ver [41], Corolário 1C.

Proposição 2.23.13 *Sejam $\Gamma_i : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $i \in I$ (conjunto contável de índices), multifunções mensuráveis e com valores fechados e seja $\Gamma : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma multifunção definida por*

$$\Gamma(s) = \cap_{i \in I} \Gamma_i(t) .$$

Então Γ é mensurável e tem valores fechados.

Demonstração:
Ver [41], Teorema 1M.

Proposição 2.23.14 *Seja $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma multifunção da forma*

$$F(t) = \{s : f(t,s) \leq \alpha(t)\} ,$$

onde f é um integrando normal em $\Omega \times \mathbb{R}^n$ (por exemplo se f é um integrando de Carathéodory [7]) e $\alpha : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ é uma função mensurável. Então F é mensurável e tem valores fechados.

Demonstração:
Ver [41], Proposição 2I.

Proposição 2.23.15 *Sejam $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ um integrando convexo próprio, $x : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função mensurável e*

$$\Gamma(t) = \partial f(t, x(t)) .$$

Então Γ é mensurável e tem valores fechados.

Demonstração:
Ver [41], Corolário 2X.

Proposição 2.23.16 *Se $\delta_C : \Omega \times \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ é a função indicatriz de uma multifunção $C : \Omega \to \mathbb{R}^n$, ou seja, se*

$$\delta_C(t,x) = \delta_{C(t)}(x) = \begin{cases} 0 & se\ x \in C(t) \\ +\infty & se\ x \notin C(t) . \end{cases}$$

Então δ_C é um integrando normal se e só se C tem valores fechados e mensuráveis.

Além disso, se $f_0 : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é um integrando normal então a função $f = f_0 + \delta_C$, definida por

$$f(t,x) = \begin{cases} f_0(t,x) & se\ x \in C(t) \\ +\infty & se\ x \notin C(t) \end{cases}$$

é um integrando normal.

Demonstração:
Ver [44], pág. 663.

[7] Recordemos que um integrando $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diz-se de **Carathéodory** se para qualquer $s \in \mathbb{R}$, $f(\cdot, s)$ é mensurável e para qualquer $t \in \Omega$, $f(t, \cdot)$ é contínua.

2.24 Alguns resultados de *sci* para funcionais integrais

Seja Ω um subconjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^n$.

Proposição 2.24.1 *Seja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ uma função tal que*

(i) a função $f(s, \cdot)$ é convexa em $\mathbb{R}^n$, para qualquer $s \in \mathbb{R}$;

(ii) a função $f(\cdot, \xi)$ é mensurável em $\mathbb{R}$, para qualquer $\xi \in \mathbb{R}^n$;

(iii) a função $f(\cdot, 0)$ é sci em $\mathbb{R}$;

(iv) a função α_f definida abaixo [8] *pertence a $L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$* [9]

$$\alpha_f(s) := \limsup_{\xi \to 0} \frac{(f(s,0) - f(s,\xi))^+}{|\xi|}.$$

Então o funcional

$$I(u) := \int_\Omega f(u(t), u'(t))\, dt$$

está bem definido em $W^{1,1}_{loc}(\Omega, \mathbb{R})$ e é sci em $W^{1,1}_{loc}(\Omega, \mathbb{R})$ com respeito à topologia de $L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R})$.

Demonstração:
Ver [5], Teorema 4.2.1.

Observação 2.24.2 *Se $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ verifica as condições (i) e (ii) da Proposição 2.24.1, então a condição (iv) é verificada desde que existam $\varepsilon > 0$ e $\beta \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tais que*

$$f(s, \xi) \le \beta(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n \text{ com } |\xi| \le \varepsilon$$

(ver [5], Observação 4.2.12).

Proposição 2.24.3 *Seja $f : \Omega \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \to [0, +\infty)$ um integrando normal, tal que*

$$\theta(|\xi|) \le f(t, s, \xi)$$

onde $\theta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função convexa crescente sci e tal que

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\theta(r)}{r} = +\infty$$

e,

$$f(t, s, \cdot) \text{ é convexa em } \mathbb{R}^m \text{ para cada } (t, s) \in \Omega \times \mathbb{R}^l \text{ fixado.}$$

Sejam (p_k) uma sucessão fracamente convergente em $L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ para $\overline{p}$ e (u_k) uma sucessão de funções mensuráveis convergindo qs para $\overline{u}$. Então

$$\int_\Omega f(t, \overline{u}(t), \overline{p}(t))\, dt \le \liminf_{k \to \infty} \int_\Omega f(t, u_k(t), p_k(t))\, dt.$$

[8] Para qualquer $t \in \mathbb{R}$ definimos $t^+ := \max(t, 0)$.

[9] Seja Ω um subconjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^n$. O espaço $L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R})$ é constituido por todas as funções u definidas qs em Ω tais que $u \in L^1(K, \mathbb{R})$ para qualquer compacto $K \subset \Omega$. De forma análoga se define $L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Assim, $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega, \mathbb{R})$ se, para qualquer compacto $K \subset \Omega$, a restrição de u a K pertence a $W^{1,1}(K, \mathbb{R})$.
(Ver [37], pág. 253.)

Demonstração:
Ver [28] Teorema 2.1, pág. 243.

Consideremos agora o funcional integral

$$I(u,p) := \int_G f(t, u(t), p(t))\, dt$$

onde:

(a) $G \subset \mathbb{R}^v$ é um conjunto limitado;

(b) $f : \mathbb{R}^v \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \to [-\infty, +\infty]$ é tal que

 (b1) para cada $\varepsilon > 0$ existe um conjunto compacto $K_\varepsilon \subset G$ tal que $m(G \backslash K_\varepsilon) < \varepsilon$ e $f(t, s, \xi)_{|K_\varepsilon \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r}$ é Borel-mensurável;

 (b2) para quase todo $\bar{t} \in G$ a função $(s, \xi) \to f(\bar{t}, s, \xi)$ toma valores em $(-\infty, +\infty]$ e é *sci*;

 (b3) para quase todo $\bar{t} \in G$ o conjunto

$$A(\bar{t}) := \left\{\bar{s} \in \mathbb{R}^n : f\left(\bar{t}, \bar{s}, \xi\right) \neq +\infty\right\}$$

 é não-vazio;

 (b4) para quase todo $\bar{t} \in G$ e para qualquer $\bar{s} \in A\left(\bar{t}\right)$, $\xi \to f\left(\bar{t}, \bar{s}, \xi\right)$ é convexa.

(c) $u : G \to \mathbb{R}^n$ e $p : G \to \mathbb{R}^r$ são funções mensuráveis.

Para cada $(\bar{t}, \bar{s}) \in G \times \mathbb{R}^n$, seja

$$Q(\bar{t}, \bar{s}) := \{\xi \in \mathbb{R}^r : f(\bar{t}, \bar{s}, \xi) \neq +\infty\}.$$

Então temos a seguinte

Proposição 2.24.4 *Sejam $u, u_k : G \to \mathbb{R}^n$ e $p, p_k : G \to \mathbb{R}^r$, $k \in \mathbb{N}$, funções mensuráveis tais que:*

(i) $(u_k) \to u$ *em medida em* G;

(ii) $p, p_k \in L^1(G, \mathbb{R}^r)$, $(p_k) \rightharpoonup p$ *em* $L^1(G, \mathbb{R}^r)$;

(iii) para qualquer $k \in \mathbb{N}$, $u_k(t) \in A(t)$ *e* $p_k(t) \in Q(t, u_k(t))$ *qs em* G;

(iv) $-\infty < i := \liminf_{k \to \infty} \int_G f(t, u_k(t), p_k(t))\, dt$.

Então

$$u(t) \in A(t) \quad e \quad \xi(t) \in Q(t, u(t)) \quad qs \text{ em } G$$

e

$$\int_G f(t, u(t), p(t))\, dt \leq \liminf_{k \to \infty} \int_G f(t, u_k(t), p_k(t))\, dt.$$

Demonstração:
Ver [9], 10.7.i e 10.8.i.

Capítulo 3

Condições necessárias para os minimizantes

3.1 Introdução

Neste capítulo consideramos problemas de minimização da forma

$$\min \left\{ \int_a^b f(u(t), u'(t))\, dt : u \in W^{1,1}((a,b), \mathbb{R}^n), u(a) = A, u(b) = B \right\} \tag{P'}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$, $f(s, \xi)$ é uma função convexa e *sci* em ξ e apenas mensurável em s. Na Secção 3.4 provaremos que, sob hipóteses muito fracas, qualquer solução u do problema (P') verifica a inclusão diferencial de DuBois-Reymond:

$$\text{constante} \in \langle u'(t), \partial_\xi f(u(t), u'(t)) \rangle - f(u(t), u'(t)) \qquad \text{qs em } (a,b) \tag{3.1}$$

e é lipschitziana em $[a,b]$. Para provar este resultado, temos primeiro que provar o seguinte:

Se u é uma solução de (P'), então a aplicação identidade $\varphi(t) = t$ é um minimizante local para o funcional

$$G(\Psi) = \int_a^b g(t, \Psi'(t))\, dt, \qquad \Psi \in W^{1,\infty}((a,b), \mathbb{R}), \;\; \Psi(a) = a, \Psi(b) = b,$$

onde

$$g(t,p) = f\left(u(t), \frac{u'(t)}{p}\right) p.$$

Além disso, a equação (3.1) segue da condição necessária de Euler-Lagrange associada ao funcional G. Por esta razão, a Secção 3.3 é dedicada a funcionais da forma

$$I(u) = \int_a^b f(t, u'(t))\, dt,$$

onde, sob hipóteses fracas, estudaremos a condição diferencial necessária (Proposição 3.3.1) e a continuidade Lipschitz (Teorema 3.3.5) para os minimizantes. Além disso, veremos também o caso em que a função $f(t, \cdot)$ não é convexa (Proposição 3.3.9).

3.2 Definições e resultados preliminares

Definição 3.2.1 *Dada uma função* $f : (a,b) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0,+\infty]$, *diz-se que* $u \in W^{1,p}((a,b),\mathbb{R}^n)$, *para* $p \in [1,+\infty]$, *é* ***admissível*** *para o problema*

$$min \left\{ \int_a^b f(t,v(t),v'(t))\,dt : v \in W^{1,p}((a,b),\mathbb{R}^n), v(a) = A, v(b) = B \right\}$$

se $u(a) = A, u(b) = B$.

Definição 3.2.2 *Dada uma função* $f : (a,b) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0,+\infty]$, *diz-se que* $u \in W^{1,p}((a,b),\mathbb{R}^n)$, *para* $p \in [1,+\infty]$, *é um* $W^{1,p}$***-minimizante local*** *para o funcional*

$$I(v) = \int_a^b f(t,v(t),v'(t))\,dt, \quad v(a) = A, v(b) = B$$

se se verificam as seguintes condições:

(i) $u(a) = A, u(b) = B$;

(ii) existe $\delta > 0$ *tal que* $|\varphi|_{W^{1,p}((a,b),\mathbb{R}^n)} < \delta$, $\varphi(a) = 0, \varphi(b) = 0 \Rightarrow I(u+\varphi) \geq I(u)$.

Consideremos o problema de Bolza generalizado

$$\min\ \Lambda(v) := l(v(a),v(b)) + \int_a^b L(t,v(t),v'(t))\,dt \tag{3.2}$$

sobre todas as funções v absolutamente contínuas definidas em (a,b) e com valores em $\mathbb{R}^n$, onde $l : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to (-\infty,+\infty]$ e $L : (a,b) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to (-\infty,+\infty]$ são funções dadas.

Definição 3.2.3 *Diz-se que uma função absolutamente contínua u é* ***solução*** *do problema (ou* ***resolve*** *o problema) de Bolza generalizado se*

(i) para $v = u$, *o integral em (3.2) está bem definido* [1] *e é finito, e* $l(u(a),u(b))$ *é finito*

e se

(ii) para qualquer outra função absolutamente contínua v para a qual $l(v(a),v(b))$ *é finito e o integral em (3.2) está definido, temos* $\Lambda(u) \leq \Lambda(v)$.

Proposição 3.2.4 *Sejam* $f : (a,b) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0,+\infty]$ *um integrando normal* [2] *e* $u \in W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}^n)$ *um* $W^{1,1}$*-minimizante local para o funcional I, com* $I(u) < +\infty$. *Então u resolve localmente o seguinte problema de Bolza generalizado*

$$min\ \Lambda(v) = \delta_S(v(a),v(b)) + \int_a^b f(t,v(t),v'(t))\,dt \tag{3.3}$$

onde δ_S *é a função indicatriz* [3] *do conjunto* $S = \{(A,B)\}$.

[1] Um integral variacional diz-se **bem definido** quando a função integranda é não-negativa, ou limitada inferiormente por uma função de L^1 e é Lebesgue-mensurável (ver [6], pág. 104).

[2] Recordemos que uma função $f : \Omega \times B \to [-\infty,+\infty]$, onde Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e B é um subconjunto boreliano de $\mathbb{R}^p$, diz-se um **integrando normal** se: $f(t,\cdot)$ é s.c.i. em B, para quase todo $t \in \Omega$ e se existe uma função boreliana $\tilde{f} : \Omega \times B \to [-\infty,+\infty]$ tal que $\tilde{f}(t,\cdot) = f(t,\cdot)$, para quase todo $t \in \Omega$.

[3] Seja E um conjunto qualquer. A **função indicatriz** de E é dada por

$$\delta_E(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in E \\ +\infty, & \text{se } x \notin E. \end{cases}$$

Demonstração:
Se $u \in W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}^n)$ é um $W^{1,1}$-minimizante local para o funcional I então $u(a) = A, u(b) = B$ e portanto $\delta_S(u(a), u(b)) = 0$. Pela Proposição 2.14.10, $u \in AC((a,b),\mathbb{R}^n)$ então para mostrar que u resolve localmente o problema (3.3) basta mostrar que u resolve localmente o seguinte problema

$$\min \ \Lambda(v) = \int_a^b f(t, v(t), v'(t))\, dt.$$

Por (ii) da Definição 3.2.2, existe $\delta > 0$ tal que

$$I(u) \leq I(u+\varphi) \quad \forall \varphi \in W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}^n) \text{ com } \varphi(a) = \varphi(b) = 0 \text{ e } |\varphi|_{W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}^n)} < \delta. \tag{3.4}$$

Fixemos tal $\delta > 0$ e fixemos $v \in W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}^n)$ tal que $v(a) = A$, $v(b) = B$ e $|v-u|_{W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}^n)} < \delta$.

Em particular (3.4) vale para $\varphi = v - u \in W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}^n)$ e $\varphi(a) = v(a) - u(a) = 0$, $\varphi(b) = v(b) - u(b) = 0$ e portanto

$$I(u) \leq I(v) \quad \forall v \in W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}^n) \text{ com } v(a) = A, v(b) = B \text{ e } |v-u|_{W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}^n)} < \delta.$$

Além disso, a função $t \to f(t, u(t), u'(t))$ é mensurável (ver Proposição 2.22.4), o mesmo acontece com a função $t \to f(t, v(t), v'(t))$ qualquer que seja a função $v \in W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}^n)$. Donde se conclui que u resolve localmente o problema (3.3).■

Proposição 3.2.5 *Suponhamos que a função absolutamente contínua u resolve o problema de Bolza generalizado (3.2). Suponhamos que l é sci e que $L(t,s,\xi)$ é epi-mensurável* [4] *em t e sci em (s,ξ). Além disso, suponhamos que existem $\delta > 0$, uma função positiva mensurável $\alpha(t)$ e uma função integrável $k(t)$ tais que, para quase todo o $t \in (a,b)$, a função $L(t,\cdot,\cdot)$ é lipschitziana no conjunto*

$$\left\{(s,\xi) \in \mathbb{R}^{2n} : |s - u(t)| < \delta, |\xi - u'(t)| \leq \alpha(t)\right\},$$

com constante de Lipschitz $k(t)$. Então existe uma função absolutamente contínua p tal que [5]

$$(p'(t), p(t)) \in \partial L(t, u(t), u'(t)) \quad qs \text{ em } (a,b) \tag{3.5}$$

$$(p(a), -p(b)) \in \partial l(u(a), u(b)). \tag{3.6}$$

Demonstração:
Ver [14], Proposição 4.

Nota 3.2.6 *1. As relações (3.5) e (3.6) são generalizações, respectivamente, da equação de Euler-Lagrange e das condições de transversalidade.*

2. Apesar de, aparentemente, a Proposição 3.2.5 aplicar-se apenas a minimizantes globais, é fácil adaptá-la a minimizantes locais (ver [14], observação da pág. 686).

3.3 O problema não-autónomo

Consideremos o problema não-autónomo

$$\min \left\{ \int_a^b f(t, v'(t))\, dt : v \in W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}^n), v(a) = A, v(b) = B \right\} \tag{P}$$

[4] Uma função $L : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ diz-se **epi-mensurável** (em t) se para cada $s \in \mathbb{R}^n$ a multifunção

$$E(t,s) := \text{epi } L(t,s,\cdot)$$

é Lebesgue-mensurável em t.
Esta definição é equivalente a dizer que $L(\cdot,s,\cdot)$ é $\mathcal{L} \times \mathcal{B}_n$-mensurável (ver [14], Definição 3).

[5] Recordemos que, para cada $t \in (a,b)$ fixado, $\partial L(t, u(t), u'(t))$ denota o gradiente generalizado (de Clarke) da função $L(t,\cdot,\cdot)$ em $(u(t), u'(t))$ (ver Definição 2.21.2).

onde $f:(a,b)\times\mathbb{R}^n\longrightarrow[0,+\infty]$ é mensurável com respeito à σ-álgebra $\mathcal{L}\times\mathcal{B}_n$ e $f(t,\cdot)$ é convexa e *sci* para quase todo $t\in(a,b)$ fixado.

Neste capítulo mostramos que o problema (P) tem solução quando $f(t,\cdot)$ verifica, para cada $t\in(a,b)$ fixado, uma certa condição de crescimento. Também provamos que, sob certas condições, as soluções do problema (P) são lipschitzianas.

Proposição 3.3.1 *Sejam $f:(a,b)\times\mathbb{R}^n\longrightarrow[0,+\infty]$ um integrando normal e $u\in W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}^n)$ um $W^{1,1}$-minimizante local para o funcional I com $I(u)<+\infty$. Além disso, suponhamos que existe uma função positiva mensurável $\alpha(t)$ e uma função integrável $k(t)$ tais que, para quase todo o $t\in(a,b)$, a função $f(t,\cdot)$ é lipschitziana no conjunto*

$$\Delta:=\{\xi\in\mathbb{R}^n:|\xi-u'(t)|\leq\alpha(t)\},$$

com constante de Lipschitz $k(t)$. Então existe uma constante $c\in\mathbb{R}^n$ tal que

$$c\in\partial_\xi f(t,u'(t)) \quad qs\ em\ (a,b).$$

Demonstração:

Pela Proposição 3.2.4, u resolve localmente o problema de Bolza generalizado

$$\min\ \Lambda(v)=\delta_S(v(a),v(b))+\int_a^b f(t,v'(t))\,dt$$

onde δ_S é a função indicatriz do conjunto $S=\{(A,B)\}$. Como S é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^{2n}$ então, pela Proposição 2.17.8, δ_S é *sci* em $\mathbb{R}^{2n}$.

Por outro lado, f é $\mathcal{L}\times\mathcal{B}_n$-mensurável, $f(t,\cdot)$ é *sci* em $\mathbb{R}^n$ para quase todo $t\in(a,b)$ e é lipschitziana no conjunto Δ com constante de Lipschitz $k(t)$. Pela Proposição 3.2.5, existe uma função absolutamente contínua p tal que, para quase todo $t\in(a,b)$,

$$p'(t)\in\partial_s f(t,u'(t)) \tag{3.7}$$

e

$$p(t)\in\partial_\xi f(t,u'(t)). \tag{3.8}$$

Como a função $f(t,\xi)$ não depende de s então $\partial_s f(t,u'(t))=\{0\}\subset\mathbb{R}^n$ [6] e portanto, por (3.7), $p'(t)=c$ para algum $c\in\mathbb{R}^n$. Por outro lado, como $\partial\delta_S(u(a),u(b))=N_S(u(a),u(b))=\mathbb{R}^{2n}$ [7] então (3.6) não nos dá, neste caso, nenhuma informação sobre a função p. Donde, e tendo em conta (3.8), existe $c\in\mathbb{R}^n$ tal que

$$c\in\partial_\xi f(t,u'(t)) \quad \text{qs em } (a,b).$$

■

Observação 3.3.2 *Não faz sentido, como veremos, procurar condições necessárias para os $W^{1,1}$-minimizantes locais u tais que $I(u)=+\infty$ porque assim estávamos à procura de condições que podiam não se verificar para todos os minimizantes e portanto não seriam condições necessárias para os minimizantes.*

Vejamos um caso em que isso acontece, isto é, mostremos que de facto, na Proposição 3.3.1, a condição

$$I(u)<+\infty \tag{3.9}$$

não pode ser desprezada. (Agradeço ao orientador a indicação deste exemplo.)

[6] Representamos por $\partial_\xi f(t,\cdot)$ o gradiente generalizado de $f(t,\xi)$ em ordem a ξ para t fixado.

[7] Se $f(\cdot)=\delta_E(\cdot)$ para algum conjunto fechado E então, para cada $x\in E$ fixado,

$$\partial f(x)=N_E(x)$$

(ver [13], pág. 62). Onde $N_E(x)$ representa o **cone dos vectores normais** a E em x (ver [13], pág. 51).

Consideremos a função $f:(0,1)\times\mathbb{R}\to[0,+\infty]$ *definida por*

$$f(t,\xi)=\begin{cases}\frac{1}{\xi}+\left(\frac{1}{\sqrt{\xi}}-\frac{\sqrt{\xi}}{t}\right)^2 & se\ \xi>0,t>0\\ +\infty & se\ \xi\le 0,t=0.\end{cases} \tag{3.10}$$

Mostremos que esta função não verifica a condição (3.9), ou seja,

$$\int_0^1 f(t,x'(t))\,dt=+\infty,\quad \forall x\in W:=\left\{x\in W^{1,1}((0,1),\mathbb{R}):x(0)=0,x(1)=1\right\}. \tag{3.11}$$

Com efeito, mostremos que o conjunto

$$X=\left\{x\in W^{1,1}((0,1),\mathbb{R}):x(0)=0,x(1)=1,\int_0^1 f(t,x'(t))\,dt<+\infty\right\}$$

é vazio.

Fixemos $x\in X$.

Então

$$\int_0^1 f(t,x'(t))\,dt\in\mathbb{R}$$

o que implica

$$0<x'(t)<+\infty\quad e\quad 0<f(t,x'(t))<+\infty\quad qs\ em\ (0,1).$$

Mas desta última desigualdade, e tendo em conta a definição de f, *sai que*

$$\int_0^1\frac{1}{x'(t)}dt<+\infty\quad e\quad \int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{x'(t)}}-\frac{\sqrt{x'(t)}}{t}\right)^2dt<+\infty. \tag{3.12}$$

A função

$$y(t):=primitiva\ de\,(x'(t))^{-1/2}$$

tem derivada y' *em* $L^2((0,1),\mathbb{R})$ *pois, por (3.12),*

$$\int_0^1|y'(t)|^2dt=\int_0^1\frac{1}{|x'(t)|}dt<+\infty$$

e, pela Proposição 2.7.12, y *é mensurável em* $(0,1)$.

Por outro lado,

$$z(t):=y'(t)-\frac{1}{ty'(t)}\in L^2((0,1),\mathbb{R}),$$

pois, por (3.12),

$$\int_0^1|z(t)|^2dt=\int_0^1\left|\frac{1}{\sqrt{x'(t)}}-\frac{\sqrt{x'(t)}}{t}\right|^2dt<+\infty.$$

Pela Proposição 2.7.12, z *é mensurável em* $(0,1)$. *Donde se conclui que* $y'-z\in L^2((0,1),\mathbb{R})$. *Então se*

$$w(t):=\frac{2}{t}$$

tem-se

$$w = y'^2 - z^2 + (y' - z)^2 \in L^1((0,1), \mathbb{R}).$$

O que é absurdo, pois

$$\int_0^1 |w(t)|\, dt = 2 \int_0^1 \frac{1}{t} dt = +\infty.$$

Donde o conjunto X é vazio e portanto

$$\int_0^1 f(t, x'(t))\, dt = +\infty \qquad \forall x \in W.$$

Mostremos agora que a função f verifica todas as outras condições da Proposição 3.3.1.

Como facilmente se pode verificar a função $f(t,\cdot)$ é contínua e convexa para qualquer $t \in (0,1)$. A função $(t,\xi) \to f(t,\xi)$ é contínua portanto $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$-mensurável. Então a função f é um integrando convexo.

Agora suponhamos que existe $u \in W^{1,1}((0,1), \mathbb{R})$ verificando as condições da proposição, então concluimos que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$c \in \partial_\xi f(t, u'(t)) \qquad qs \text{ em } (0,1).$$

Como $\partial_\xi f(t,\xi)$ denota o gradiente generalizado de f com respeito a ξ para t fixado então, pela Proposição 2.21.10,

$$\partial_\xi f(t, u'(t)) = \left\{ -\frac{2}{u'^2(t)} + \frac{1}{t^2} \right\}, \tag{3.13}$$

logo

$$c = -\frac{2}{u'^2(t)} + \frac{1}{t^2} \quad qs \text{ em } (0,1),$$

donde sai que

$$u'(t) = \frac{\sqrt{2}t}{(1 - ct^2)^{1/2}} \quad qs \text{ em } (0,1).$$

Integrando ambos os membros entre 0 e t obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^t u'(s)\, ds = \int_0^t \frac{\sqrt{2}s}{(1-cs^2)^{1/2}} ds \quad &\Leftrightarrow \quad u(t) - u(0) = \frac{\sqrt{2}}{-2c} \int_0^t \frac{-2cs}{(1-cs^2)^{1/2}} ds \\
&\Leftrightarrow \quad u(t) = \frac{\sqrt{2}}{-2c}\left(2\left(1 - ct^2\right)^{1/2} - 2\right) \\
&\Leftrightarrow \quad u(t) = -\frac{\sqrt{2}}{c}\left(\left(1 - ct^2\right)^{1/2} - 1\right) \quad qs \text{ em } (0,1),
\end{aligned}$$

tendo em conta as condições de fronteira $u(0) = 0$ *e* $u(1) = 1$ *vem*

$$\begin{aligned}
-\frac{\sqrt{2}}{c}\left((1-c)^{1/2}-1\right) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{2}(1-c)^{1/2} = -c+\sqrt{2} \\
&\Leftrightarrow \quad 2|1-c| = \left(\sqrt{2}-c\right)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad 2(1-c) = 2-2\sqrt{2}c+c^2 \vee 2(1-c) = -\left(2-2\sqrt{2}c+c^2\right) \\
&\Leftrightarrow \quad -2c = -2\sqrt{2}c+c^2 \vee 2-2c = -2+2\sqrt{2}c-c^2 \\
&\Leftrightarrow \quad -2\sqrt{2}c+c^2+2c = 0 \vee -4+2\sqrt{2}c-c^2+2c = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad c\left(2-2\sqrt{2}+c\right) = 0 \vee c^2-\left(2+2\sqrt{2}\right)c+4 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad c = 0 \vee c = 2\sqrt{2}-2 \vee c = \frac{2+2\sqrt{2}\pm\sqrt{(2+2\sqrt{2})^2-16}}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad c = 0 \vee c = 2\sqrt{2}-2 \vee c = 1+\sqrt{2}\pm\sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^2-4} \\
&\Leftrightarrow \quad c = 0 \vee c = 2\sqrt{2}-2 \vee c = 1+\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}-1} \vee c = 1+\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}.
\end{aligned}$$

Mas para qualquer $c > 0$ *temos*

$$0 < t < 1 \Rightarrow 0 < ct^2 < c \Rightarrow (1-c)^{1/2} < \left(1-ct^2\right)^{1/2} < 1,$$

o que implica que tem que ser $c < 1$, *pelo que a constante* c *procurada tem que pertencer ao intervalo* $(0,1)$, *então só pode ser*

$$c = 1+\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1},$$

logo

$$u(t) = -\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}\left[\left(1-\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}\right)t^2\right)^{1/2}-1\right] \quad qs \text{ em } (0,1), \tag{3.14}$$

e $u'(t) \in int(dom\, f(t,\cdot)) = (0,+\infty)$ *quase sempre em* $(0,1)$. *Assim vemos que para o integrando definido em (3.10) o único* $W^{1,1}$*-minimizante local que verifica a condição*

$$\exists c \in \mathbb{R} : c \in \partial_\xi f(t, u'(t)) \quad qs \text{ em } (0,1)$$

é a função u *dada por (3.14).*

Consideremos, por exemplo a função,

$$u_0(t) = t^2.$$

Como facilmente se verifica, $u_0 \in W$, $f(t, u_0'(t)) = \frac{1}{t}$ *e, por (3.13),*

$$\partial f(t, u_0'(t)) = \left\{-\frac{2}{u_0'^2(t)} + \frac{1}{t^2}\right\} = \left\{\frac{1}{2t^2}\right\},$$

donde não existe nenhum real $c \in \partial_\xi f(t, u_0'(t))$ *para quase todo* $t \in (0,1)$. *O que mostra que, sem a hipótese* $I(u) < +\infty$, *a Proposição 3.3.1 nem sempre é válida.*

3.3.1 Existência de solução

Hipóteses básicas

A existência de solução para o problema de minimização não-autónomo

$$\min \quad \left\{I(u) : u \in W^{1,1}((a,b), \mathbb{R}^n), u(a) = A, u(b) = B\right\}$$

onde

$$I(u) = \int_a^b f(t, u'(t))\, dt,$$

será estabelecida considerando as seguintes hipóteses básicas na função $f : (a, b) \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$.

(H1) A função f é um integrando convexo.

(H2) Existe uma função $\theta : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\theta(r)}{r} = +\infty \quad \text{e} \quad f(t, \xi) \geq \theta(|\xi|) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \text{ e quase todo } t \in (a, b).$$

(H3) Existem uma função positiva mensurável $\alpha(t)$ e uma função integrável $k(t)$ tais que para quase todo $t \in (a, b)$, a função $f(t, \cdot)$ é lipschitziana no conjunto

$$\Delta := \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi - u'(t)| \leq \alpha(t)\},$$

com constante de Lipschitz $k(t)$.

Proposição 3.3.3 *A função θ introduzida na hipótese (H2) pode supor-se convexa, sci, crescente e não-negativa.*

Demonstração:
Dizer que

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\theta(r)}{r} = +\infty$$

significa que,

$$\forall m > 0 \ \exists R_m > 0 : |r| > R_m \Rightarrow \frac{\theta(r)}{r} > m. \tag{3.15}$$

Fixemos $m > 0$ e seja R_m dado por (3.15). Então

$$\theta(r) > mr \quad \text{sempre que } r > R_m$$

e existe b_m tal que

$$\theta(r) \geq mr + b_m \quad \forall r \in [0, +\infty).$$

Daqui e das Proposições 2.19.6 e 2.19.9 sai que

$$\theta^{**}(r) \geq mr + b_m \quad \forall r \in [0, +\infty). \tag{3.16}$$

Assim,

$$\forall m > 0 \ \exists b_m : \frac{\theta^{**}(r)}{r} \geq m + \frac{b_m}{r} \geq m - \frac{|b_m|}{r} \quad \forall r \in [0, +\infty),$$

o que implica

$$\forall m > 0 \ \exists R_m > 0 : |r| > R_m \Rightarrow \frac{\theta^{**}(r)}{r} \geq m - 1$$

e portanto

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\theta^{**}(r)}{r} = +\infty.$$

Assim, se θ não é *sci* ou não é convexa substituimos θ por θ^{**} (ver Observação 2.19.8).

Suponhamos que θ^{**} atinge o seu mínimo $\bar{a}$ em $\bar{r}$ (onde $\bar{r} := \max\{r \geq 0 : \theta^{**}(r) = \bar{a}\}$, o qual existe por θ^{**} ser contínua em todo o seu domínio). Temos

$$\min_{r\in[0,+\infty)} \theta^{**} = \theta^{**}(\bar{r}) = \bar{a} = \inf_{r\in[0,+\infty)} \theta.$$

Mostremos que, de facto, temos $\bar{a} = \inf_{r\in[0,+\infty)} \theta$. Por definição de bipolar temos

$$\theta^{**}(r) = \sup_{r^*\in[0,+\infty)} \{r^*r - \theta^*(r^*)\} \geq 0 - \theta^*(0) = -\theta^*(0),$$

mas, pela Proposição 2.19.6,

$$\theta^*(0) = -\inf_{r\in[0,+\infty)} \theta(r)$$

então

$$\theta^{**}(r) \geq \inf_{r\in[0,+\infty)} \theta(r),$$

o que implica

$$\bar{a} = \min_{r\in[0,+\infty)} \theta^{**} \geq \inf_{r\in[0,+\infty)} \theta(r).$$

Vejamos que não pode ser $\inf_{r\in[0,+\infty)} \theta(r) < \bar{a}$. Se $\inf_{r\in[0,+\infty)} \theta(r) < \bar{a}$ então, como

$$\theta^{**}(r) \leq \theta(r) \quad \forall r \in [0,+\infty),$$

viria

$$\bar{a} = \inf_{r\in[0,+\infty)} \theta^{**}(r) \leq \inf_{r\in[0,+\infty)} \theta(r) < \bar{a},$$

o que é absurdo.

Portanto θ^{**} é decrescente em $[0,\bar{r}]$ e crescente em $[\bar{r},+\infty)$.

Defina-se então a função convexa $\widetilde{\theta}$, crescente e *sci* em $[0,+\infty)$ por

$$\widetilde{\theta}(r) := \begin{cases} \bar{a} & \text{se } r \in [0,\bar{r}] \\ \theta^{**}(r) & \text{se } r \in [\bar{r},+\infty). \end{cases}$$

Se $\bar{a} \geq 0$ então esta função toma apenas valores não-negativos e verifica todas as condições desejadas, assim substituimos θ por esta função; caso contrário, isto é se $\bar{a} < 0$, existe $\bar{\bar{r}} := \min\left\{r \geq 0 : \widetilde{\theta}(r) \geq 0\right\}$ tal que a função $\widehat{\theta}$ definida por

$$\widehat{\theta}(r) := \begin{cases} 0 & \text{se } r \in \left[0,\bar{\bar{r}}\right] \\ \theta^{**}(r) - \bar{a} & \text{se } r \in \left[\bar{\bar{r}},+\infty\right), \end{cases}$$

é convexa, *sci*, crescente e não-negativa.

Além disso, a função θ é tal que

$$f(t,\xi) \geq \theta(|\xi|) \geq \theta^{**}(|\xi|) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \text{ e quase todo } t \in (a,b),$$

então também

$$f(t,\xi) - \bar{a} \geq \theta^{**}(|\xi|) - \bar{a} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \text{ e quase todo } t \in (a,b).$$

Como a função $\bar{f}(t,\xi) := f(t,\xi) - \bar{a}$ difere de f apenas numa constante então minimizar o problema (P) com f é o mesmo que o minimizar com $\bar{f}$. Logo não há perda de generalidade em supor que a função θ introduzida na hipótese (H2) é convexa, *sci*, crescente e não-negativa.■

Teorema 3.3.4 *Suponhamos que $f : (a,b) \times \mathbb{R}^n \to [0,+\infty]$ verifica (H1) e (H2). Além disso, suponhamos que existe uma função v admissível para o problema (P) tendo $I(v) < +\infty$* [8]*. Então o problema (P) tem solução.*

Demonstração [9]**:**

Como f é um integrando convexo e $u \in W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}^n)$ então, pela Proposição 2.22.4, a função $t \to f(t,u'(t))$ é mensurável em (a,b) e portanto o funcional

$$I(u) = \int_a^b f(t,u'(t))\,dt$$

está bem definido na classe de funções

$$\Delta := \left\{u \in W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}^n) : u(a) = A,\ u(b) = B\right\},$$

tomando possivelmente o valor $+\infty$.

Como existe uma função admíssivel v com $I(v) < +\infty$, então seja

$$I(v) = \int_a^b f(t,v'(t))\,dt =: M. \tag{3.17}$$

Para mostrar a existência de uma solução u não é necessário considerar toda a classe de funções Δ, basta considerar o conjunto de subnível

$$\Gamma(v) := \left\{u \in W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}^n) : u(a) = A,\ u(b) = B,\ I(u) \leq I(v)\right\}.$$

O qual é não-vazio, visto que $v \in \Gamma(v)$.

Vamos ver que $\Gamma(v)$ é um subconjunto de $W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}^n)$ fracamente sequencialmente relativamente compacto, isto é, que qualquer sucessão em $\Gamma(v)$ contém uma subsucessão fracamente convergente em $W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}^n)$.

Seja (u_k) uma qualquer sucessão em $\Gamma(v)$, isto é, uma sucessão em $W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}^n)$ verificando

$$u_k(a) = A,\ u_k(b) = B, \tag{3.18}$$

e

$$I(u_k) \leq I(v) \tag{3.19}$$

para qualquer $k \in \mathbb{N}$.

Por (H2), (3.17) e (3.19) sai que

$$\int_a^b \theta(|u_k'(t)|)\,dt \leq \int_a^b f(t,u_k'(t))\,dt \leq \int_a^b f(t,v'(t))\,dt = M \tag{3.20}$$

para qualquer $k \in \mathbb{N}$, isto é a sucessão (u_k') é equiabsolutamente integrável (Proposição 2.11.35).

Por outro lado, como $\lim\limits_{r\to+\infty} \frac{\theta(r)}{r} = +\infty$ então existe $N \geq 0$ (que depende apenas de θ) tal que $\theta(r) \geq r$ sempre que $r \geq N$.

Fixemos $k \in \mathbb{N}$.

Seja E^* o subconjunto de (a,b) onde $|u_k'(t)| \geq N$ e seja $E := (a,b) \backslash E^*$.

[8] Por exemplo,

$$v(t) := A + (t-a)\frac{B-A}{b-a},$$

desde que $f\left(\cdot,\frac{B-A}{b-a}\right) \in L^1((a,b),\mathbb{R})$.

[9] A demonstração deste teorema segue o habitual método directo do cálculo das variações.

Temos, utilizando (3.20),

$$\begin{aligned}|u_k'|_{L^1((a,b),\mathbb{R}^n)} &= \int_a^b |u_k'(t)|\,dt = \int_{E^*} |u_k'(t)|\,dt + \int_E |u_k'(t)|\,dt \le \int_{E^*} \theta(|u_k'(t)|)\,dt + \int_E N dt \\ &\le \int_a^b \theta(|u_k'(t)|)\,dt + \int_a^b N dt \le M + (b-a)\,N\end{aligned}$$

pelo que

$$|u_k'|_{L^1((a,b),\mathbb{R}^n)} \le M + (b-a)\,N, \tag{3.21}$$

o que significa, dado que k é qualquer, que a sucessão (u_k') é limitada em $L^1((a,b),\mathbb{R}^n)$.

Assim, pelo Teorema de Dunford-Pettis (Proposição 2.11.34), podemos afirmar que existem uma subsucessão de (u_k'), ainda notada por (u_k'), e uma função $v \in L^1((a,b),\mathbb{R}^n)$ tais que $(u_k') \rightharpoonup v$ em $L^1((a,b),\mathbb{R}^n)$, isto é, temos

$$\left(\int_a^b \langle u_k'(t), \varphi(t)\rangle\,dt\right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b \langle v(t), \varphi(t)\rangle\,dt, \quad \forall\varphi \in L^\infty((a,b),\mathbb{R}^n) \tag{3.22}$$

donde resulta que

$$\left(\int_a^b u_k'(t)\,dt\right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b v(t)\,dt$$

e

$$\left(\int_a^t u_k'(s)\,ds\right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^t v(s)\,ds, \quad \forall t \in (a,b). \tag{3.23}$$

A sucessão (u_k) é equicontínua. De facto, uma vez que (u_k') é equiabsolutamente integrável, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\int_E |u_k'(t)|\,dt \le \varepsilon$$

para cada k em $\mathbb{N}$ e qualquer que seja o subconjunto mensurável E de (a,b) com $m(E) \le \delta$ [10]. Então, se $|t'' - t'| \le \delta$, temos

$$|u_k(t'') - u_k(t')| = \left|u_k(a) + \int_a^{t''} u_k'(s)\,ds - u_k(a) - \int_a^{t'} u_k'(s)\,ds\right| = \left|\int_{t'}^{t''} u_k'(s)\,ds\right| \le \int_{t'}^{t''} |u_k'(s)|\,ds \le \varepsilon,$$

para cada $k \in \mathbb{N}$.

Além disso, (u_k) é equilimitada. Com efeito, atendendo a (3.18) e (3.21), temos para cada $k \in \mathbb{N}$ e para cada $t \in (a,b)$,

$$\begin{aligned}|u_k(t)| &= \left|u_k(a) + \int_a^t u_k'(s)\,ds\right| \le |A| + \int_a^t |u_k'(s)|\,ds \le |A| + \int_a^b |u_k'(s)|\,ds \\ &= A + |u_k'|_{L^1((a,b),\mathbb{R}^n)} \le |A| + M + (b-a)\,N.\end{aligned} \tag{3.24}$$

Assim, pelo Teorema de Ascoli-Arzelá (Proposição 2.11.30), existe uma subsucessão de (u_k), que notaremos ainda por (u_k), que converge uniformemente em (a,b) para uma função contínua u, isto é, temos

$$\left(\sup_{t\in(a,b)} |u_k(t) - u(t)|\right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{3.25}$$

[10] Recordemos que se E é um subconjunto Lebesgue-mensurável de $\mathbb{R}^n$ então $\mathbf{m}(\mathbf{E})$ denota a medida de Lebesgue de E.

e consequentemente, temos também a convergência pontual

$$(u_k(t)) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u(t) \quad \forall t \in (a,b). \tag{3.26}$$

A convergência

$$\begin{cases} (u_k) \to u & \text{uniformemente em } (a,b) & \text{(por (3.25))} \\ (u_k') \rightharpoonup v & \text{(fracamente) em } L^1((a,b),\mathbb{R}^n) & \text{(por (3.22))} \end{cases}$$

implica que $u \in W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}^n)$, $u' = v$ quase sempre em (a,b) e $(u_k) \rightharpoonup u$ (fracamente) em $W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}^n)$.

De facto, atendendo a (3.18) e a que para cada $k \in \mathbb{N}$, u_k é absolutamente contínua, temos

$$u_k(t) = u_k(a) + \int_a^t u_k'(s)\,ds = A + \int_a^t u_k'(s)\,ds \ \forall k \in \mathbb{N}, \text{ qs em } (a,b).$$

Daqui, atendendo a (3.23) e a (3.26), resulta que

$$u(t) = \lim_{k\to\infty} u_k(t) = \lim_{k\to\infty}\left(A + \int_a^t u_k'(s)\,ds\right) = A + \lim_{k\to\infty}\left(\int_a^t u_k'(s)\,ds\right) = A + \int_a^t v(s)\,ds \quad \forall t \in (a,b)$$

o que significa que u é absolutamente contínua e $u'(t) = v(t)$ para quase todo $t \in (a,b)$ (ver Proposição 2.14.11).

Note-se que a convergência uniforme de (u_k) para u implica ainda que

$$u(a) = A, \quad u(b) = B.$$

Falta então ver que $(u_k) \rightharpoonup u$ em $W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}^n)$, isto é, que

$$\text{(i)} \quad \left(\int_a^b \langle u_k(t), \varphi(t)\rangle\,dt\right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b \langle u(t), \varphi(t)\rangle\,dt, \quad \forall \varphi \in L^\infty((a,b),\mathbb{R}^n)$$

$$\text{(ii)} \quad \left(\int_a^b \langle u_k'(t), \varphi(t)\rangle\,dt\right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b \langle u'(t), \varphi(t)\rangle\,dt, \quad \forall \varphi \in L^\infty((a,b),\mathbb{R}^n).$$

Como temos (3.22) e $u'(t) = v(t)$ para quase todo $t \in (a,b)$ então verifica-se (ii).

Por outro lado, pela Desigualdade de Hölder (Proposição 2.11.16) e por (3.25), podemos escrever

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left|\int_a^b \langle u_k(t) - u(t), \varphi(t)\rangle\,dt\right| \leq \int_a^b |\langle u_k(t) - u(t), \varphi(t)\rangle|\,dt \leq |u_k - u|_{L^1((a,b),\mathbb{R}^n)} |\varphi|_{L^\infty((a,b),\mathbb{R}^n)} \\ &= |\varphi|_{L^\infty((a,b),\mathbb{R}^n)} \int_a^b |u_k(t) - u(t)|\,dt \leq |\varphi|_{L^\infty((a,b),\mathbb{R}^n)} \int_a^b \sup_{t\in(a,b)} |u_k(t) - u(t)|\,dt \\ &= (b-a)\,|\varphi|_{L^\infty((a,b),\mathbb{R}^n)} \sup_{t\in(a,b)} |u_k(t) - u(t)| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

o que significa que também se verifica (i).

Ficou assim provado que se $(u_k) \subset \Gamma(v)$ então existe uma função $u \in W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}^n)$ tal que, passando se necessário a uma subsucessão, $(u_k) \rightharpoonup u$ em $W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}^n)$. Além disso, temos $u(a) = A$ e $u(b) = B$.

Vejamos agora que o funcional I é *sci* na topologia fraca de $W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}^n)$, isto é, temos

$$I(u) \leq \liminf_{k\to\infty} I(u_k)$$

sempre que $(u_k) \rightharpoonup u$ em $W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}^n)$, quando $k \to \infty$.

Consideremos o funcional $\overline{I} : L^1((a,b), \mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ dado por

$$\overline{I}(u) = \int_a^b f(t, u(t))\, dt.$$

Seja $(u_k) \subset L^1((a,b), \mathbb{R}^n)$ uma sucessão fortemente convergente para $u \in L^1((a,b), \mathbb{R}^n)$.

Pela Proposição 2.11.26 existe uma subsucessão de (u_k), que notaremos ainda por (u_k), tal que

$$(u_k(t)) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u(t) \quad \text{qs em } (a,b).$$

Como f é uma função $\mathcal{L} \times \mathcal{B}_n$-mensurável, temos que para qualquer função $v \in L^1((a,b), \mathbb{R}^n)$ a função $t \to f(t, v(t))$ é mensurável em (a,b) (ver Proposição 2.22.4).

Por (H2) existem constantes α e β, com $\beta > 0$, tais que

$$f(t,\xi) - \alpha - \beta|\xi| \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \text{ e quase todo } t \in (a,b). \tag{3.27}$$

Então

$$(f(\cdot, u_k(\cdot)) - \alpha - \beta |u_k(\cdot)|)$$

é uma sucessão de funções mensuráveis não-negativas.

Por hipótese a função $f(t, \cdot)$ é *sci* para quase todo $t \in (a,b)$ fixado. Então temos

$$f(t, u(t)) \leq \liminf_{k\to\infty} f(t, u_k(t)) \quad \text{qs em } (a,b)$$

e portanto

$$\begin{aligned} f(t,u(t)) - \alpha - \beta|u(t)| &\leq \liminf_{k\to\infty} f(t, u_k(t)) - \alpha - \beta|u(t)| \\ &= \liminf_{k\to\infty} f(t, u_k(t)) - \alpha - \liminf_{k\to\infty} \beta|u_k(t)| \\ &\leq \liminf_{k\to\infty} (f(t, u_k(t)) - \alpha - \beta|u_k(t)|) \quad \text{qs em } (a,b). \end{aligned}$$

Portanto, pelo Lema de Fatou (Proposição 2.8.15), sai que

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t,u(t))\,dt - \alpha(b-a) - \beta|u|_1 &= \int_a^b (f(t,u(t)) - \alpha - \beta|u(t)|)\,dt \\ &\leq \int_a^b \liminf_{k\to\infty} (f(t,u_k(t)) - \alpha - \beta|u_k(t)|)\,dt \\ &\leq \liminf_{k\to\infty} \left(\int_a^b (f(t,u_k(t)) - \alpha - \beta|u_k(t)|)\,dt \right) \\ &= \liminf_{k\to\infty} \left(\int_a^b f(t,u_k(t))\,dt - \alpha(b-a) - \beta|u_k|_{L^1((a,b),\mathbb{R}^n)} \right). \end{aligned}$$

Por outro lado, atendendo a que (u_k) converge fortemente para u em $L^1((a,b), \mathbb{R}^n)$, temos

$$0 \leq \left| \int_a^b (|u_k(t)| - |u(t)|)\,dt \right| \leq \int_a^b ||u_k(t)| - |u(t)||\,dt \leq \int_a^b |u_k(t) - u(t)|\,dt \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

o que significa que

$$\left(|u_k|_{L^1((a,b),\mathbb{R}^n)}\right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} |u|_{L^1((a,b),\mathbb{R}^n)}.$$

Assim podemos escrever,

$$\int_a^b f(t,u(t))\,dt - \alpha(b-a) - \beta|u|_{L^1((a,b),\mathbb{R}^n)} \leq \liminf_{k\to\infty} \int_a^b f(t,u_k(t))\,dt - \alpha(b-a) - \beta|u|_{L^1((a,b),\mathbb{R}^n)},$$

o que é equivalente a

$$\overline{I}(u) \leq \liminf_{k\to\infty} \overline{I}(u_k)$$

e mostra que o funcional $\overline{I}$ é *sci* na topologia forte de $L^1((a,b),\mathbb{R}^n)$.

A aplicação $D : W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}^n) \to L^1((a,b),\mathbb{R}^n)$ definida por

$$D(u) = u'$$

é contínua, por ser uma função linear limitada. De facto, se u e v são dois elementos arbitrários de $W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}^n)$ então, para qualquer função $\psi \in C_c^\infty((a,b),\mathbb{R}^n)$,

$$\exists!\ h_1 \in L^1((a,b),\mathbb{R}^n) : \int_a^b u(t)\,\psi'(t)\,dt = -\int_a^b h_1(t)\,\psi(t)\,dt, \quad h_1 = u' = D(u)$$

e

$$\exists!\ h_2 \in L^1((a,b),\mathbb{R}^n) : \int_a^b v(t)\,\psi'(t)\,dt = -\int_a^b h_2(t)\,\psi(t)\,dt, \quad h_2 = v' = D(v).$$

Por outro lado,

$$\exists!\ h_3 \in L^1((a,b),\mathbb{R}^n) : \int_a^b (u+v)(t)\,\psi'(t)\,dt = -\int_a^b h_3(t)\,\psi(t)\,dt, \quad h_3 = (u+v)' = D(u+v)$$

e como

$$\begin{aligned} \int_a^b (u+v)(t)\,\psi'(t)\,dt &= \int_a^b u(t)\,\psi'(t)\,dt + \int_a^b v(t)\,\psi'(t)\,dt = -\left(\int_a^b h_1(t)\,\psi(t)\,dt + \int_a^b h_2(t)\,\psi(t)\,dt\right) \\ &= -\int_a^b (h_1+h_2)(t)\,\psi(t)\,dt \end{aligned}$$

então temos

$$D(u+v) = h_3 = h_1 + h_2 = D(u) + D(v).$$

Analogamente se mostra que para qualquer escalar λ

$$D(\lambda u) = \lambda D(u),$$

o que prova que D é linear.

Para ver que D é limitada basta atender a que

$$|D(u)|_{L^1((a,b),\mathbb{R}^n)} = |u'|_{L^1((a,b),\mathbb{R}^n)} \leq |u'|_{L^1((a,b),\mathbb{R}^n)} + |u|_{L^1((a,b),\mathbb{R}^n)} = |u|_{W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}^n)}.$$

Como $\overline{I}$ é *sci*, pela Proposição 2.17.5, o conjunto

$$\left\{v \in L^1((a,b),\mathbb{R}^n) : \overline{I}(v) \leq \lambda\right\} = \overline{I}^{-1}([0,\lambda])$$

é fechado para cada $\lambda \geq 0$. Então o conjunto

$$D^{-1}\left(\overline{I}^{-1}([0,\lambda])\right) = \left(\overline{I}\circ D\right)^{-1}([0,\lambda]) = \left\{v \in W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}^n) : \overline{I}(D(v)) \leq \lambda\right\},$$

por ser a imagem inversa de um conjunto fechado por uma função contínua, é fechado.

Isto, pela Proposição 2.17.5, significa que $I = \overline{I}\circ D$ é *sci* na topologia forte de $W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}^n)$.

Por outro lado, para cada t fixado tal que $f(t,\cdot)$ é convexa, temos

$$\begin{aligned} I((\lambda u + (1-\lambda)v)) &= \int_a^b f(t, \lambda u'(t) + (1-\lambda)v'(t))\,dt \\ &\leq \lambda \int_a^b f(t,u'(t))\,dt + (1-\lambda)\int_a^b f(t,v'(t))\,dt \\ &= \lambda I(u) + (1-\lambda)I(v) \end{aligned}$$

para qualquer $\lambda \in [0,1]$ e quaisquer $u, v \in W^{1,1}((a,b), \mathbb{R}^n)$, pelo que I é uma função convexa. O espaço $W^{1,1}((a,b), \mathbb{R}^n)$ é localmente convexo (Proposição 2.5.6). Assim, pela Proposição 2.17.10, podemos afirmar que I é *sci* na topologia fraca de $W^{1,1}((a,b), \mathbb{R}^n)$.

Vamos ver que I é limitado inferiormente em $\Gamma(v)$.

Seja u um elemento qualquer de $\Gamma(v)$. Como existem constantes α e β, com $\beta > 0$, tais que (ver (3.27))

$$f(t, \xi) \geq \alpha + \beta |\xi| \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \text{ e quase todo } t \in (a,b)$$

então

$$\begin{aligned} I(u) &= \int_a^b f(t, u'(t))\, dt \geq \int_a^b (\alpha + \beta |u'(t)|)\, dt = \alpha (b-a) + \beta \int_a^b |u'(t)|\, dt \\ &= \alpha (b-a) + \beta |u'|_{L^1((a,b),\mathbb{R}^n)} \geq \alpha (b-a) \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

o que prova que I é limitado inferiormente em $\Gamma(v)$.

Finalmente, seja $(u_k) \subset \Gamma(v)$ uma sucessão minimizante para I, isto é, tal que

$$\lim_{k \to \infty} I(u_k) = \inf \{ I(u) : u \in \Gamma(v) \},$$

e seja

$$i := \inf \{ I(u) : u \in \Gamma(v) \}.$$

Então temos

$$i \leq I(v) = M < +\infty.$$

Por outro lado, temos também

$$i > -\infty$$

pois I é limitado inferiormente no conjunto $\Gamma(v)$.

Dado que $\Gamma(v)$ é fracamente sequencialmente relativamente compacto, então existe uma função $u^* \in W^{1,1}((a,b), \mathbb{R}^n)$, tal que, passando se necessário a uma subsucessão, $(u_k) \rightharpoonup u^*$ em $W^{1,1}((a,b), \mathbb{R}^n)$. Além disso, sabemos que u^* satisfaz as condições de fronteira

$$u^*(a) = A, \quad u^*(b) = B.$$

Atendendo a que I é *sci* na topologia fraca de $W^{1,1}((a,b), \mathbb{R}^n)$ podemos escrever

$$-\infty < i \leq I(u^*) \leq \liminf_{k \to \infty} I(u_k) = \lim_{k \to \infty} I(u_k) = i \leq M < +\infty,$$

donde se conclui que

$$I(u^*) = i,$$

o que significa que u^* é uma solução para o problema (P).■

Teorema 3.3.5 *Suponhamos que a função $f : (a,b) \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ verifica (H1), (H2) e (H3) e que $u \in W^{1,1}((a,b), \mathbb{R}^n)$ é uma solução do problema (P), como na Definição 3.2.3. Além disso, suponhamos que*

(i) $u'(t) \in int(dom\, f(t, \cdot))$ qs em (a,b);

(ii) existe $\xi_0 \in L^\infty((a,b), \mathbb{R}^n)$ tal que a função $t \to f(t, \xi_0(t))$ é essencialmente limitada.

Então u é lipschitziana em $[a,b]$.

Demonstração:
Seja u uma solução do problema (P) e sejam $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$|\xi_0(t)| \leq C_1 \quad \text{e} \quad |f(t,\xi_0(t))| \leq C_2 \quad \text{qs em } (a,b). \tag{3.28}$$

Defina-se

$$\Omega := \{t \in (a,b) : \exists u'(t),\, u'(t) \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f(t,\cdot)),\, f(t,\cdot) \text{ é convexa, } sci,\ |\xi_0(t)| \leq C_1, |f(t,\xi_0(t))| \leq C_2\}.$$

Fixemos $t \in \Omega$. Pela Proposição 3.3.1, existe uma constante $c \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$c \in \partial_\xi f(t, u'(t)). \tag{3.29}$$

Dado que $u'(t) \in int\,(dom\, f(t,\cdot))$ então, pela Proposição 2.21.21, temos

$$\partial f(t,u'(t)) = \{w \in \mathbb{R}^n : f(t,\xi) \geq f(t,u'(t)) + \langle w, \xi - u'(t)\rangle,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n\}.$$

Por (3.29),

$$f(t,\xi) \geq f(t,u'(t)) + \langle c, \xi - u'(t)\rangle \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Em particular,

$$f(t,\xi_0(t)) \geq f(t,u'(t)) + \langle c, \xi_0(t) - u'(t)\rangle.$$

Desta desigualdade e da Desigualdade de Cauchy-Schwarz [11] resulta que

$$f(t,u'(t)) \leq f(t,\xi_0(t)) - \langle c,\xi_0(t)\rangle + \langle c, u'(t)\rangle \leq f(t,\xi_0(t)) + |c|\,|\xi_0(t)| + |c|\,|u'(t)|.$$

Logo, por (3.28), temos

$$\theta(|u'(t)|) \leq f(t,u'(t)) \leq f(t,\xi_0(t)) + |c|\,|\xi_0(t)| + |c|\,|u'(t)| \leq C_2 + |c|\,C_1 + |c|\,|u'(t)|.$$

O que implica que

$$\theta(|u'(t)|) - (C_2 + |c|\,C_1) \leq |c|\,|u'(t)| \quad \text{qs em } (a,b). \tag{3.30}$$

Suponhamos que $u' \notin L^\infty((a,b),\mathbb{R}^n)$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um conjunto de medida positiva $D_n \subset (a,b)$ tal que

$$|u'(t)| > n \quad \forall t \in D_n.$$

De (3.30) vem que

$$\frac{\theta(|u'(t)|)}{|u'(t)|} - \frac{(C_2 + |c|\,C_1)}{|u'(t)|} \leq |c| \quad \text{qs em } D_n. \tag{3.31}$$

Mas [12]

$$\liminf_{n\to\infty} \inf_{t\in D_n} \left(\frac{\theta(|u'(t)|)}{|u'(t)|} - \frac{(C_2 + |c|\,C_1)}{|u'(t)|}\right) \geq \liminf_{n\to\infty} \inf_{|\xi|>n} \left(\frac{\theta(|\xi|)}{|\xi|} - \frac{(C_2+|c|\,C_1)}{|\xi|}\right) = +\infty.$$

[11] **(Desigualdade de Cauchy-Schwarz)** Para quaisquer dois elementos x e y de um espaço com produto interno, temos

$$|\langle x,y\rangle| \leq |x|\,|y|.$$

Demonstração:
Ver [29], pág. 6.

[12] Vamos mostrar que sendo A uma constante real,

$$\liminf_{r\to+\infty} \inf_{|\xi|>r} \left(\frac{\theta(|\xi|)}{|\xi|} - \frac{A}{|\xi|}\right) = +\infty.$$

Logo

$$\liminf_{n\to\infty} \inf_{t\in D_n} \left(\frac{\theta\left(|u'(t)|\right)}{|u'(t)|} - \frac{(C_2 + |c|\, C_1)}{|u'(t)|} \right) = +\infty. \tag{3.32}$$

Por (3.31), dado que $m(D_n) > 0$, temos

$$\inf_{t\in D_n} \left(\frac{\theta\left(|u'(t)|\right)}{|u'(t)|} - \frac{(C_2 + |c|\, C_1)}{|u'(t)|} \right) \leq |c|,$$

o que contradiz (3.32).

Logo u' é essencialmente limitada em (a,b), isto é,

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ : |u'(t)| \leq M \quad \text{qs em } (a,b). \tag{3.33}$$

Como $u \in W^{1,1}((a,b), \mathbb{R}^n) = AC((a,b), \mathbb{R}^n)$ (ver Proposição 2.14.10) e tendo em conta (3.33) temos

$$|u(t_1) - u(t_2)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} u'(t)\, dt \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} |u'(t)|\, dt \leq \int_{t_1}^{t_2} M\, dt = M\, |t_1 - t_2|, \tag{3.34}$$

quaisquer que sejam $t_1, t_2 \in (a,b)$, o que prova que u é lipschitziana em (a,b).

Pela Proposição 2.14.8, u é uniformemente contínua em (a,b) e, pela Proposição 2.14.3,

$$\exists \lim_{t\to a^+} u(t) \quad \text{e} \quad \exists \lim_{t\to b^-} u(t).$$

Então definimos

$$u(a) := \lim_{t\to a^+} u(t) \quad \text{e} \quad u(b) := \lim_{t\to b^-} u(t).$$

Queremos mostrar que

$$|u(t_1) - u(t_2)| \leq M\, |t_1 - t_2|, \quad \forall t_1, t_2 \in [a,b].$$

Por hipótese,

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\theta(r)}{r} = +\infty.$$

Então

$$\frac{\theta(r)}{r} - \frac{A}{r} \to +\infty, \text{ quando } r \to +\infty.$$

Isto significa que

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists R = R(n) : r > R \Rightarrow \frac{\theta(r)}{r} - \frac{A}{r} > n.$$

Se $|\xi| > r$ temos $|\xi| > R$. Portanto

$$\frac{\theta(|\xi|)}{|\xi|} - \frac{A}{|\xi|} > n, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| > R.$$

Isto implica que

$$\inf_{|\xi|>r} \left(\frac{\theta(|\xi|)}{|\xi|} - \frac{A}{|\xi|} \right) \geq n.$$

Portanto podemos escrever

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists R = R(n) : r > R \Rightarrow \inf_{|\xi|>r} \left(\frac{\theta(|\xi|)}{|\xi|} - \frac{A}{|\xi|} \right) \geq n,$$

ou seja

$$\lim_{r\to+\infty} \inf_{|\xi|>r} \left(\frac{\theta(|\xi|)}{|\xi|} - \frac{A}{|\xi|} \right) = +\infty.$$

Se $t_1, t_2 \in (a,b)$ a desigualdade é válida por (3.34).

Suponhamos que $t_1 = a$, $t_2 \in (a,b)$. Então, por (3.34),

$$|u(a) - u(t_2)| = \left| \lim_{t \to a^+} u(t) - u(t_2) \right| = \lim_{t \to a^+} |u(t) - u(t_2)| \leq \lim_{t \to a^+} M\, |t - t_2| = M \left| \lim_{t \to a^+} t - t_2 \right| = M\, |a - t_2|.$$

A desigualdade também é válida nos casos $t_1 \in (a,b)$, $t_2 = b$ e $t_1 = a$, $t_2 = b$, sendo a demonstração análoga à anterior.

Logo u é lipschitziana em $[a,b]$.■

Observação 3.3.6 *É óbvio que se a função integranda não tomar o valor $+\infty$ a condição (i) do Teorema 3.3.5 pode ser desprezada. De facto, assim temos*

$$u'(t) \in dom\, f(t,\cdot) \quad qs \text{ em } (a,b).$$

Por outro lado temos

$$dom\, f(t,\cdot) = \mathbb{R}^n = int\,(dom\, f(t,\cdot)).$$

Donde se conclui que

$$u'(t) \in int\,(dom\, f(t,\cdot)) \quad qs \text{ em } (a,b).$$

Observação 3.3.7 *A hipótese (H2) não pode ser desprezada no Teorema 3.3.5. Consideremos, por exemplo, $n = 1, a = A = 0$, $b = B = 1$ e a função $f : (0,1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(t,\xi) = 0$. Esta função não verifica a hipótese (H2); de facto, como $f(t,\xi) \equiv 0$ então*

$$\begin{array}{rcl} & \nexists & \theta : [0,+\infty) \to \mathbb{R} \text{ tal que } \lim\limits_{r \to +\infty} \dfrac{\theta(r)}{r} = +\infty \\ \text{e } f(t,\xi) & \geq & \theta(|\xi|) \text{ para qualquer } \xi \in \mathbb{R} \text{ e quase todo } t \in (0,1). \end{array}$$

A função f é claramente um integrando convexo e é óbvio que verifica a hipótese (H3) e as condições (i) e (ii) do Teorema 3.3.5, ou seja, esta função verifica todas as outras hipóteses do Teorema 3.3.5, mas as soluções do problema (P) não são todas lipschitzianas. A função $u : (0,1) \to \mathbb{R}$ definida por $u(t) = \sqrt{t}$ é uma solução do problema (P), mas não é lipschitziana em $(0,1)$; na realidade

$$\frac{|u(t_2) - u(t_1)|}{|t_2 - t_1|} = \frac{|\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1}|}{|t_2 - t_1|} = \frac{1}{|\sqrt{t_2} + \sqrt{t_1}|}$$

não é limitado para valores de t_1 e t_2 muito próximos de zero.

Observação 3.3.8 *Para mostrar que a condição (ii) do Teorema 3.3.5 não pode ser desprezada basta tomar $n = 1$, $a = A = 0$, $b = 1$, $B = 2/3$ e*

$$f(t,\xi) = |\xi|^2 + \left|\xi - t^{-1/4}\right|^2.$$

Temos as seguintes desigualdades [13]

$$f(t,\xi) = |\xi|^2 + \left|\xi - t^{-1/4}\right|^2 \leq 2|\xi|^2 + 2|\xi|\, t^{-1/4} + t^{-1/2} \leq 2|\xi|^2 + \left(|\xi|^2 + t^{-1/2}\right) + t^{-1/2} \leq 3\left(|\xi|^2 + t^{-1/2}\right),$$

[13] Para quaisquer dois reais a e b temos

$$0 \leq (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

o que implica que

$$2ab \leq a^2 + b^2.$$

e

$$f(t,\xi) = |\xi|^2 + \left|\xi - t^{-1/4}\right|^2 \geq |\xi|^2 .$$

Donde se conclui que

$$|\xi|^2 \leq f(t,\xi) \leq 3\left(|\xi|^2 + m(t)\right) \quad com\ m \in L^1((0,1),\mathbb{R}).$$

Como facilmente se verifica, f é um integrando convexo, verifica a hipótese (H2) com $\theta : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $\theta(r) = r^2$. Além disso, f verifica a hipótese (H3). Provemos agora que $f(t,\cdot)$ não verifica a condição (ii), isto é, provemos que

$$\forall \xi_0 \in L^\infty((0,1),\mathbb{R}) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists D_n = D_n(\xi_0,n) \subset (0,1),\ m(D_n) > 0 : f(t,\xi_0(t)) > n,\ \forall t \in D_n.$$

Fixemos $\xi_0 \in L^\infty((0,1),\mathbb{R})$, então existe $C_1 > 0$ tal que $|\xi_0(t)| \leq C_1$ quase sempre em $(0,1)$. Fixemos $n \in \mathbb{N}$.
Defina-se

$$\widetilde{D}_n := \left(0, \frac{1}{\left(C_1 + \sqrt{C_1^2 + n}\right)^4}\right).$$

Note-se que $\widetilde{D}_n$ é um subconjunto de $(0,1)$, com medida positiva.
Para qualquer $t \in \widetilde{D}_n$ fixado, temos

$$t^{-1/2} - 2C_1 t^{-1/4} - n > 0. \tag{3.35}$$

Agora, defina-se

$$D_n := \widetilde{D}_n \backslash \{t \in (0,1) : |\xi_0(t)| > C_1\}.$$

Dado que $m\left(\widetilde{D}_n\right) > 0$ e que $m\{t \in (0,1) : |\xi_0(t)| > C_1\} = 0$ então $m(D_n) > 0$. Por (3.35) temos, para cada $t \in D_n$ fixado,

$$f(t,\xi_0(t)) \geq 2\xi_0^2(t) - 2|\xi_0(t)|\, t^{-1/4} + t^{-1/2} \geq -2|\xi_0(t)|\, t^{-1/4} + t^{-1/2} \geq -2C_1 t^{-1/4} + t^{-1/2} > n.$$

O que mostra que a função $t \to f(t,\xi_0(t))$ não é essencialmente limitada em $(0,1)$.
A única solução do problema é

$$u(t) = \frac{2}{3} t^{3/4}.$$

De facto, u é solução pois $u \in W^{1,1}((0,1),\mathbb{R})$, $u(0) = 0, u(1) = 2/3$ e para cada $\varphi \in W^{1,1}((0,1),\mathbb{R})$ tal que $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ temos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(t,u'+\varphi')\,dt &\geq \int_0^1 \left(2(u'+\varphi')^2 - 2(u'+\varphi')\,t^{-1/4} + t^{-1/2}\right) dt \\
&= \int_0^1 \left(2u'^2 - 2u't^{-1/4} + \left(t^{-1/4}\right)^2\right) dt + \int_0^1 \left(4u'\varphi' + 2\varphi'^2 - 2\varphi' t^{-1/4}\right) dt \\
&\geq \int_0^1 \left(|u'|^2 + \left|u' - t^{-1/4}\right|^2\right) dt + \int_0^1 \left(4u'\varphi' - 2\varphi' t^{-1/4}\right) dt \\
&= \int_0^1 f(t,u')\,dt + 2\int_0^1 \left(2u'\varphi' - \varphi' t^{-1/4}\right) dt \\
&= \int_0^1 f(t,u')\,dt.
\end{aligned}$$

Esta última igualdade resulta de

$$\int_0^1 \left(2u'\varphi' - \varphi' t^{-1/4}\right) dt = \int_0^1 \left(2\frac{1}{2}t^{-1/4}\varphi' - \varphi' t^{-1/4}\right) dt = 0.$$

Além disso

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t,u')\,dt &= \int_0^1 \left(|u'|^2 + \left|u' - t^{-1/4}\right|^2\right) dt = \int_0^1 \left(\left|\frac{1}{2}t^{-1/4}\right|^2 + \left|\frac{1}{2}t^{-1/4} - t^{-1/4}\right|^2\right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{4}t^{-1/2} + \frac{1}{4}t^{-1/2}\right) dt = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{-1/2} dt = 1 < +\infty,\end{aligned}$$

assim concluimos que u é de facto uma solução para o problema (P).

Provemos agora que u é a única solução do problema (P).

Suponhamos que existiam duas soluções: u, v. Então

$$\int_a^b f(t,u')\,dt \le \int_a^b f(t,w')\,dt \quad e \quad \int_a^b f(t,v')\,dt \le \int_a^b f(t,w')\,dt$$

para qualquer $w \in W^{1,1}((0,1),\mathbb{R})$ tal que $w(0) = 0$, $w(1) = 2/3$. Como a função $\xi \to f(t,\xi)$ é estritamente convexa em $(0,1)$ (pois $f_{\xi\xi}(t,\xi) = 4 > 0$), então

$$\begin{aligned}\int_0^1 f\left(t, \frac{u'+v'}{2}\right) dt &< \frac{1}{2}\int_0^1 f(t,u')\,dt + \frac{1}{2}\int_0^1 f(t,v')\,dt \\ &\le \frac{1}{2}\int_0^1 f(t,v')\,dt + \frac{1}{2}\int_0^1 f(t,v')\,dt \\ &= \int_0^1 f(t,v')\,dt,\end{aligned}$$

a segunda desigualdade resulta do facto de u ser solução. Chegamos assim a um absurdo visto que v é um minimizante deste funcional. Donde se conclui que existe apenas uma solução: a solução

$$u(t) = \frac{2}{3}t^{3/4}$$

e $u'(t) \in int(\mathrm{dom}\, f(t,\cdot)) = \mathbb{R}$ qs em $(0,1)$ então verifica-se a condição (i). Mas $u'(t) = \frac{1}{2}t^{-1/4}$ não é limitada para valores de t muito próximos de 0, logo u não é lipschitziana em $[0,1]$ (ver Proposição 2.16.29).

3.3.2 O problema relaxado

Nesta secção consideraremos o problema

$$\min \left\{\int_a^b f^{**}(t,v'(t))\,dt : v \in W^{1,p}((a,b),\mathbb{R}^n),\, v(a) = A,\, v(b) = B\right\} \tag{P*}$$

onde, para cada $t \in (a,b)$ fixado, $f^{**}(t,\cdot)$ denota a função bipolar de $f(t,\cdot)$, sendo dados $f : (a,b) \times \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ e $p \in (1,+\infty)$.

Proposição 3.3.9 *Sejam $p \in (1,+\infty)$ e $f : (a,b) \times \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ uma função $\mathcal{L} \times \mathcal{B}_n$-mensurável tal que, para algum $K \ge 1$,*

$$|\xi|^p \le f(t,\xi) \le K(1 + |\xi|^p) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.36}$$

Suponhamos que $u \in W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}^n)$ é uma solução do problema (P). Então existe uma constante $c \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$c \in \partial_\xi f^{**}(t,u'(t)) \quad qs \text{ em } (a,b) \tag{3.37}$$

e u é lipschitziana em $[a,b]$.

Demonstração:

Fixemos $t \in (a,b)$ qualquer e $p \in (1,+\infty)$ tal que (3.36) se verifica.

Pela Proposição 2.22.6, a função f^{**} é um integrando convexo e $f^{**}(t,\cdot)$ é uma função lipschitziana numa vizinhança de u'. Logo para provar (3.37) é suficiente, pela Proposição 3.3.1, mostrar que u é solução do problema (P*), ou seja, mostrar que

$$\int_a^b f^{**}(t,u'(t))\,dt \leq \int_a^b f^{**}(t,v'(t))\,dt,$$

para qualquer $v \in W^{1,p}((a,b),\mathbb{R}^n)$, $v(a)=A, v(b)=B$.

Fixemos $v \in W^{1,p}((a,b),\mathbb{R}^n)$ tal que $v(a)=A, v(b)=B$.

Comecemos por mostrar que existe uma sucessão $(w_h) \subset W^{1,p}((a,b),\mathbb{R}^n)$ convergindo fracamente para v em $W^{1,p}((a,b),\mathbb{R}^n)$ tal que

$$w_h(a)=A, \quad w_h(b)=B \quad \forall h \in \mathbb{N}$$

e

$$\int_a^b f^{**}(t,v'(t))\,dt = \lim_{h\to\infty}\int_a^b f(t,w_h'(t))\,dt. \tag{3.38}$$

Por hipótese, f é $\mathcal{L}\times\mathcal{B}_n$-mensurável e para algum $K \geq 1$ temos

$$|\xi|^p \leq f(t,\xi) \leq K(1+|\xi|^p) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

então, pelas Proposições 2.19.6 e 2.19.9,

$$|\xi|^p \leq f^{**}(t,\xi) \leq K(1+|\xi|^p) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.39}$$

Além disso,

$$\int_a^b f(t,u'(t))\,dt \leq \int_a^b K\left(1+|u'(t)|^p\right)dt < +\infty,$$

para qualquer $u \in W^{1,p}((a,b),\mathbb{R}^n)$. Portanto, por [14], para cada $v \in W^{1,p}((a,b),\mathbb{R}^n)$ existe uma sucessão $(w_h) \subset W^{1,p}((a,b),\mathbb{R}^n)$ convergindo fracamente para v em $W^{1,p}((a,b),\mathbb{R}^n)$ e tal que

$$\int_a^b f^{**}(t,v'(t))\,dt = \liminf_{h\to\infty}\int_a^b f(t,w_h'(t))\,dt.$$

[14] **Proposição:** Seja $f:(a,b)\times\mathbb{R}^n \to [0,+\infty]$ uma função $\mathcal{L}\times\mathcal{B}_n$-mensurável. Suponhamos que existe $v \in L^p((a,b)\times\mathbb{R}^n)$ tal que

$$I(v) := \int_a^b f(t,v'(t))\,dt \in \mathbb{R}.$$

Então o funcional

$$I^{**}(v) := \int_a^b f^{**}(t,v'(t))\,dt$$

é sci na topologia fraca de $L^p((a,b)\times\mathbb{R}^n)$ e para cada $v \in L^p((a,b)\times\mathbb{R}^n)$ existe uma sucessão $(v_h) \subset L^p((a,b)\times\mathbb{R}^n)$ com $(v_h) \rightharpoonup v$ em $L^p((a,b)\times\mathbb{R}^n)$ e tal que

$$\int_a^b f^{**}(t,v'(t))\,dt = \liminf_{h\to\infty}\int_a^b f(t,v_h'(t))\,dt.$$

Demonstração:
Ver [5], Proposição 1.3.1 (i) e (ii), Proposição 1.3.4 e Observação 2.6.5.

Então, passando se necessário a uma subsucessão podemos dizer que existe uma sucessão $(w_h) \subset W^{1,p}((a,b), \mathbb{R}^n)$ tal que $(w_h) \rightharpoonup v$ em $W^{1,p}((a,b), \mathbb{R}^n)$ e

$$\int_a^b f^{**}(t, v'(t))\, dt = \lim_{h\to\infty} \int_a^b f(t, w_h'(t))\, dt, \tag{3.40}$$

o que prova (3.38).

Como $(w_h) \rightharpoonup v$ em $W^{1,p}((a,b), \mathbb{R}^n)$ e $p > 1$ então, pela Proposição 2.12.10, existe uma subsucessão de (w_h), ainda notada por (w_h), tal que

$$(w_h) \to v \text{ em } L^\infty((a,b), \mathbb{R}^n)$$

isto é, tal que

$$\left(|w_h - v|_{L^\infty((a,b),\mathbb{R}^n)}\right) \to 0 \text{ quando } h \to \infty. \tag{3.41}$$

Por outro lado, temos

$$|w_h(t) - v(t)| \le |w_h - v|_{L^\infty((a,b),\mathbb{R}^n)} \quad \text{qs em } (a,b)$$

mas, para cada $h \in \mathbb{N}$ fixado, w_h é contínua e também é contínua a função v [15] então temos

$$|w_h(t) - v(t)| \le |w_h - v|_{L^\infty((a,b),\mathbb{R}^n)} \quad \forall t \in (a,b).$$

Em particular,

$$0 \le |w_h(a) - v(a)| \le |w_h - v|_{L^\infty((a,b),\mathbb{R}^n)} \underset{h\to\infty}{\to} 0$$

donde

$$(|w_h(a) - v(a)|) \underset{h\to\infty}{\to} 0$$

pelo que

$$w_h(a) = v(a) = A, \quad \forall h \in \mathbb{N}. \tag{3.42}$$

Da mesma forma se conclui que

$$w_h(b) = v(b) = B, \quad \forall h \in \mathbb{N}. \tag{3.43}$$

Mostremos agora que

$$\lim_{\substack{\tau-\sigma\to 0\\ a\le\sigma\le\tau\le b}} \left(\limsup_{h\to\infty} \int_\sigma^\tau |w_h'(t)|^p\, dt\right) = 0. \tag{3.44}$$

Mas mostrar (3.44) é o mesmo que mostrar que

$$\forall (\tau_k), (\sigma_k) \text{ com } a \le \sigma_k \le \tau_k \le b\ \forall k \in \mathbb{N} \text{ e tais que } |\tau_k - \sigma_k| \to 0$$

$$\lim_{k\to\infty} \left(\limsup_{h\to\infty} \int_{\sigma_k}^{\tau_k} |w_h'(t)|^p\, dt\right) = 0. \tag{3.45}$$

[15] Recordemos que

$$W^{1,p}((a,b), \mathbb{R}^n) \subseteq W^{1,1}((a,b), \mathbb{R}^n) = AC((a,b), \mathbb{R}^n) \qquad \forall p \in [1, +\infty].$$

A igualdade (3.45) significa que

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N = N(\varepsilon) : \forall k \geq N \left| \limsup_{h\to\infty} \int_{\sigma_k}^{\tau_k} |w_h'(t)|^p \, dt \right| < \varepsilon.$$

Ou seja, mostrar (3.44) é equivalente a mostrar que

$$\forall (\tau_k), (\sigma_k) \quad \text{com } a \leq \sigma_k \leq \tau_k \leq b \ \forall k \in \mathbb{N} \text{ tais que } |\tau_k - \sigma_k| \to 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N = N(\varepsilon) : \forall k \geq N \lim_{i\to\infty} \int_{\sigma_k}^{\tau_k} \left|w_{h_i}'(t)\right|^p dt < \varepsilon$$

para qualquer subsucessão convergente (w_{h_i}) de (w_h).

Se não temos (3.44) então

$$\exists \varepsilon > 0 \qquad \exists (w_{h_i}) \subset (w_h)$$

$$\exists (\tau_k), (\sigma_k) \quad \text{com } a \leq \sigma_k \leq \tau_k \leq b \ \forall k \in \mathbb{N} \text{ tais que } (\tau_k - \sigma_k) \to 0$$

tais que

$$\forall N \in \mathbb{N} \ \ \exists k \geq N : \lim_{i\to\infty} \int_{\sigma_k}^{\tau_k} \left|w_{h_i}'(t)\right|^p dt \geq \varepsilon,$$

ou seja, tais que

$$\forall N \in \mathbb{N} \ \ \exists n = n(N) \in \mathbb{N} \ \ \exists i = i(n) : \int_{\sigma_n}^{\tau_n} \left|w_{h_{i(n)}}'(t)\right|^p dt \geq \varepsilon.$$

Logo, se (3.44) fosse falso seria possível encontrar $\varepsilon > 0$ e sucessões $\left(w_{h(k)}\right)$, (σ_k), (τ_k) com $a \leq \sigma_k \leq \tau_k \leq b$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $(\tau_k - \sigma_k) \to 0$ e

$$\int_{\sigma_k}^{\tau_k} \left|w_{h(k)}'(t)\right|^p dt \geq \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.46}$$

Seja,

$$u_k(t) := A + \int_{[a,t]\setminus[\sigma_k,\tau_k]} w_{h(k)}'(s)\, ds \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Queremos mostrar que existe $u \in W^{1,p}((a,b), \mathbb{R}^n)$ tal que $(u_k) \rightharpoonup u$ em $W^{1,p}((a,b), \mathbb{R}^n)$.

Comecemos por mostrar que a sucessão $\left(|u_k|_{W^{1,p}((a,b),\mathbb{R}^n)}\right)$ é limitada em $W^{1,p}((a,b), \mathbb{R}^n)$. Pela Desigualdade de Minkowski (ver Proposição 2.11.18), temos

$$\begin{aligned}
\left(\int_a^b |u_k(t)|^p dt\right)^{1/p} &= \left(\int_a^b \left|A + \int_{[a,t]\setminus[\sigma_k,\tau_k]} w_{h(k)}'(s)\, ds\right|^p dt\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\int_a^b |A|^p dt\right)^{1/p} + \left(\int_a^b \left|\int_{[a,t]\setminus[\sigma_k,\tau_k]} w_{h(k)}'(s)\, ds\right|^p dt\right)^{1/p} \\
&\leq (b-a)^{1/p} |A| + \left(\int_a^b \left(\int_a^b \left|w_{h(k)}'(s)\right| ds\right)^p dt\right)^{1/p} \\
&= (b-a)^{1/p} |A| + \left((b-a)\left(\int_a^b \left|w_{h(k)}'(s)\right| ds\right)^p\right)^{1/p} \\
&= (b-a)^{1/p} \left(|A| + \int_a^b \left|w_{h(k)}'(s)\right| ds\right)
\end{aligned}$$

e

$$\left(\int_a^b |u_k'(t)|^p\, dt\right)^{1/p} = \left(\int_a^b \left|w_{h(k)}'(t)\right|^p dt\right)^{1/p}$$

visto que

$$u_k'(t) = w_{h(k)}'(t) \quad \text{qs em } (a,b).$$

Como $(w_h) \rightharpoonup v$ em $W^{1,p}((a,b),\mathbb{R}^n)$ então, pela Proposição 2.9.16, $\left(|w_h|_{W^{1,p}((a,b),\mathbb{R}^n)}\right)$ é limitada, logo existe $M > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |w_h|_{W^{1,p}((a,b),\mathbb{R}^n)} &= |w_h|_{L^p((a,b),\mathbb{R}^n)} + |w_h'|_{L^p((a,b),\mathbb{R}^n)} \\ &= \left(\int_a^b |w_h(t)|^p\, dt\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |w_h'(t)|^p\, dt\right)^{1/p} \leq M \quad \forall h \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Em particular,

$$\left(\int_a^b |w_h'(t)|^p\, dt\right)^{1/p} \leq M \quad \forall h \in \mathbb{N}. \tag{3.47}$$

De (3.47) resulta que

$$\left(\int_a^b |u_k'(t)|^p\, dt\right)^{1/p} = \left(\int_a^b \left|w_{h(k)}'(t)\right|^p dt\right)^{1/p} \leq M$$

e, pela Proposição 2.11.17,

$$\int_a^b \left|w_{h(k)}'(t)\right| dt \leq n \left|w_{h(k)}'\right|_{L^p((a,b),\mathbb{R}^n)} |1|_{L^{p'}((a,b),\mathbb{R}^n)} \leq n\,(b-a)^{1/p'} M \quad \forall h \in \mathbb{N}.$$

Portanto

$$|u_k|_{W^{1,p}((a,b),\mathbb{R}^n)} = |u_k|_{L^p((a,b),\mathbb{R}^n)} + |u_k'|_{L^p((a,b),\mathbb{R}^n)} \leq (b-a)^{1/p}\left(|A| + n\,(b-a)^{1/p'} M\right) + M \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

logo $\left(|u_k|_{W^{1,p}((a,b),\mathbb{R}^n)}\right)$ é limitada em $W^{1,p}((a,b),\mathbb{R}^n)$ e, pela Proposição 2.10.4, existem $u \in W^{1,p}((a,b),\mathbb{R}^n)$ e uma subsucessão de (u_k), ainda notada por (u_k), tais que

$$(u_k) \rightharpoonup u \text{ em } W^{1,p}((a,b),\mathbb{R}^n).$$

Mostremos agora que $u = v$.
Como, para cada $k \in \mathbb{N}$

$$u_k(t) = A + \int_{[a,t]\setminus[\sigma_k,\tau_k]} w_{h(k)}'(s)\, ds = A + \int_a^t \mathcal{X}_{[a,t]\setminus[\sigma_k,\tau_k]}(s)\; w_{h(k)}'(s)\, ds$$

então, para quase todo $t \in (a,b)$

$$u_k'(t) = \begin{cases} w_{h(k)}'(t) & \text{se } t \notin [\sigma_k,\tau_k] \\ 0 & \text{se } t \in [\sigma_k,\tau_k]. \end{cases}$$

Fixemos $t \in (a,b)$.

Temos [16]

$$\int_a^t \mathcal{X}_{[a,t]\setminus[\sigma_k,\tau_k]}(s)\ w'_{h(k)}(s)\,ds = \int_a^t u'_k(s)\,ds \underset{h\to\infty}{\rightarrow} \int_a^t u'(s)\,ds. \tag{3.48}$$

Por outro lado, como $(w_h) \rightharpoonup v$ em $W^{1,p}((a,b),\mathbb{R}^n)$, temos

$$\left(\int_a^b w'_h(t)\,\psi(t)\,dt\right) \underset{h\to\infty}{\rightarrow} \int_a^b v'(t)\,\psi(t)\,dt \quad \forall\psi\in L^{p'}((a,b),\mathbb{R}^n).$$

Então, para cada $k\in\mathbb{N}$ fixado, temos

$$\lim_{h\to\infty}\int_a^t \mathcal{X}_{[a,t]\setminus[\sigma_k,\tau_k]}(s)\ w'_h(s)\,ds = \int_a^t \mathcal{X}_{[a,t]\setminus[\sigma_k,\tau_k]}(s)\ v'(s)\,ds.$$

Pelo que

$$\lim_{k\to\infty}\left(\lim_{h\to\infty}\int_a^t \mathcal{X}_{[a,t]\setminus[\sigma_k,\tau_k]}(s)\ w'_h(s)\,ds\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\int_a^t \mathcal{X}_{[a,t]\setminus[\sigma_k,\tau_k]}(s)\ v'(s)\,ds\right) = \int_a^t v'(s)\,ds$$

isto é,

$$\lim_{k\to\infty}\left(\lim_{h\to\infty}\int_a^t \mathcal{X}_{[a,t]\setminus[\sigma_k,\tau_k]}(s)\ w'_h(s)\,ds\right) = \int_a^t v'(s)\,ds.$$

Isto significa que, fixado $\varepsilon>0$,

$$\exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}: k>N \Rightarrow \left|\lim_{h\to\infty}\int_a^t \mathcal{X}_{[a,t]\setminus[\sigma_k,\tau_k]}(s)\ w'_h(s)\,ds - \int_a^t v'(s)\,ds\right| < \varepsilon. \tag{3.49}$$

Então, para cada $k>N$ satisfazendo (3.49), podemos encontrar $h=h(k)$ tal que

$$\left|\int_a^t \mathcal{X}_{[a,t]\setminus[\sigma_k,\tau_k]}(s)\ w'_{h(k)}(s)\,ds - \int_a^t v'(s)\,ds\right| < \varepsilon,$$

ou seja, podemos afirmar que

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}: k>N \Rightarrow \left|\int_a^t \mathcal{X}_{[a,t]\setminus[\sigma_k,\tau_k]}(s)\ w'_{h(k)}(s)\,ds - \int_a^t v'(s)\,ds\right| < \varepsilon$$

ou

$$\lim_{k\to\infty}\left(\int_a^t \mathcal{X}_{[a,t]\setminus[\sigma_k,\tau_k]}(s)\ w'_{h(k)}(s)\,ds\right) = \int_a^t v'(s)\,ds.$$

Então, por (3.48), concluimos que

$$\int_a^t u'(s)\,ds = \int_a^t v'(s)\,ds$$

e como u e v são funções absolutamente contínuas vem $u=v$.

[16] Como $(u_k) \rightharpoonup u$ em $W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ então, por definição, temos

$$\left(\int_\Omega u'_k(t)\,\psi(t)\,dt\right) \underset{k\to+\infty}{\rightarrow} \int_\Omega u'(t)\,\psi(t)\,dt \quad \forall\psi\in L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^n),$$

pondo $\psi=\mathcal{X}_{[a,t]}$, temos

$$\left(\int_a^t u'_k(s)\,ds\right) \underset{k\to+\infty}{\rightarrow} \int_a^t u'(s)\,ds.$$

Logo $(u_k) \rightharpoonup v$ em $W^{1,p}((a,b),\mathbb{R}^n)$.

Por (3.36) e (3.46), temos

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t,u_k'(t))\,dt &= \int_{(a,b)\setminus[\sigma_k,\tau_k]} f\left(t,w_{h(k)}'(t)\right)dt+\int_{\sigma_k}^{\tau_k} f(t,0)\,dt \\
&\leq \int_a^b f\left(t,w_{h(k)}'(t)\right)dt-\int_{\sigma_k}^{\tau_k} f\left(t,w_{h(k)}'(t)\right)dt+K(\tau_k-\sigma_k) \\
&\leq \int_a^b f\left(t,w_{h(k)}'(t)\right)dt-\int_{\sigma_k}^{\tau_k} \left|w_{h(k)}'(t)\right|^p dt+K(\tau_k-\sigma_k) \\
&\leq \int_a^b f\left(t,w_{h(k)}'(t)\right)dt-\varepsilon+K(\tau_k-\sigma_k) \qquad (3.50)
\end{aligned}$$

para cada $k\in\mathbb{N}$ fixado.

Então, pela *sci* (fraca) do funcional (ver a proposição que está na nota de rodapé 14),

$$I_{f^{**}}(u):=\int_a^b f^{**}(t,u'(t))\,dt$$

e por (3.50), temos

$$\begin{aligned}
\int_a^b f^{**}(t,v'(t))\,dt &\leq \liminf_{k\to\infty}\int_a^b f^{**}(t,u_k'(t))\,dt\leq\liminf_{k\to\infty}\int_a^b f(t,u_k'(t))\,dt \\
&\leq \liminf_{k\to\infty}\left(\int_a^b f\left(t,w_{h(k)}'(t)\right)dt-\varepsilon+K(\tau_k-\sigma_k)\right) \\
&\leq \lim_{h\to\infty}\int_a^b f(t,w_h'(t))\,dt-\varepsilon<\lim_{h\to\infty}\int_a^b f(t,w_h'(t))\,dt
\end{aligned}$$

o que contradiz (3.40).

Portanto temos

$$\lim_{\substack{\tau-\sigma\to 0\\ a\leq\sigma\leq\tau\leq b}}\ \limsup_{h\to\infty}\int_\sigma^\tau |w_h'(t)|^p\,dt=0.$$

Sejam

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_h:=|w_n-v|_{L^\infty((a,b),\mathbb{R}^n)} \\
&B_h:=A+\int_a^{b-\varepsilon_h} w_h'(s)\,ds \qquad (3.51)\\
&v_h(t):=\begin{cases} A+\int_a^t w_h'(s)\,ds & \text{se } a\leq t\leq b-\varepsilon_h\\[2mm] B_h+(B-B_h)\frac{(t-b+\varepsilon_h)}{\varepsilon_n} & \text{se } b-\varepsilon_h<t\leq b.\end{cases}
\end{aligned}$$

Notemos que, por (3.41), temos

$$\varepsilon_h\to 0 \quad \text{quando } h\to\infty. \qquad (3.52)$$

Provemos que $v_h\in W^{1,p}((a,b),\mathbb{R}^n)$, para cada $h\in\mathbb{N}$.

Fixemos $h\in\mathbb{N}$.

Temos

$$\begin{aligned}
|v_h|_{L^p((a,b),\mathbb{R}^n)} &= \left(\int_a^b |v_h(t)|^p\,dt\right)^{1/p}=\left(\int_a^{b-\varepsilon_h}|v_h(t)|^p\,dt+\int_{b-\varepsilon_h}^b |v_h(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_a^{b-\varepsilon_h}\left|A+\int_a^t w_h'(s)\,ds\right|^p dt+\int_{b-\varepsilon_h}^b\left|B_h+(B-B_h)\frac{(t-b+\varepsilon_h)}{\varepsilon_n}\right|^p dt\right)^{1/p}
\end{aligned}$$

mas

$$\begin{aligned}\int_a^{b-\varepsilon_h}\left|A+\int_a^t w_h'(s)\,ds\right|^p dt &\leq \int_a^{b-\varepsilon_h}\left(|A|+\int_a^t |w_h'(s)|\,ds\right)^p dt \leq \int_a^{b-\varepsilon_h}\left(|A|+\int_a^b |w_h'(s)|\,ds\right)^p dt\\ &= (b-\varepsilon_h-a)\left(|A|+\int_a^b |w_h'(s)|\,ds\right)^p \leq (b-\varepsilon_h-a)\left(|A|+C_1(h)\right)^p,\end{aligned}$$

para alguma função $C_1(h)>0$[17], e

$$\begin{aligned}\int_{b-\varepsilon_h}^b\left|B_h+(B-B_h)\frac{(t-b+\varepsilon_h)}{\varepsilon_n}\right|^p dt &\leq \int_{b-\varepsilon_h}^b\left(|B_h|+|B-B_h|\left|\frac{t-b+\varepsilon_h}{\varepsilon_n}\right|\right)^p dt\\ &\leq \int_{b-\varepsilon_h}^b\left(|B_h|+|B-B_h|\right)^p dt=\varepsilon_h\left(|B_h|+|B-B_h|\right)^p\end{aligned}$$

pois

$$t\in(b-\varepsilon_h,b]\Rightarrow -\varepsilon_h<t-b\leq 0\Rightarrow 0<t-b+\varepsilon_h\leq\varepsilon_h\Rightarrow 0<\frac{t-b+\varepsilon_h}{\varepsilon_h}\leq\frac{\varepsilon_h}{\varepsilon_h}=1.$$

Logo

$$|v_h|_{L^p((a,b),\mathbb{R}^n)}\leq\left((b-\varepsilon_h-a)\left(|A|+C_1(h)\right)^p+\varepsilon_h\left(|B_h|+|B-B_h|\right)^p\right)^{1/p}\in\mathbb{R}$$

portanto

$$v_h\in L^p\left((a,b),\mathbb{R}^n\right).$$

Provemos agora que $v_h'\in L^p\left((a,b),\mathbb{R}^n\right)$.
Temos

$$|v_h'|_{L^p((a,b),\mathbb{R}^n)}=\left(\int_a^b|v_h'(t)|^p dt\right)^{1/p}=\left(\int_a^{b-\varepsilon_h}|v_h'(t)|^p dt+\int_{b-\varepsilon_h}^b|v_h'(t)|^p dt\right)^{1/p}.$$

Mas, por (3.47),

$$\int_a^{b-\varepsilon_h}|v_h'(t)|^p dt=\int_a^{b-\varepsilon_h}|w_h'(t)|^p dt\leq\int_a^b|w_h'(t)|^p dt\leq M^p$$

e

$$\int_{b-\varepsilon_h}^b|v_h'(t)|^p dt=\int_{b-\varepsilon_h}^b\left|\frac{B-B_h}{\varepsilon_h}\right|^p dt=\varepsilon_h\left|\frac{B-B_h}{\varepsilon_h}\right|^p,$$

logo

$$|v_h'|_{L^p((a,b),\mathbb{R}^n)}\leq\left(M^p+\varepsilon_h\left|\frac{B-B_h}{\varepsilon_h}\right|^p\right)^{1/p}.$$

Então

$$v_h'\in L^p\left((a,b),\mathbb{R}^n\right)$$

[17] Para cada $h\in\mathbb{N}$ fixado, $w_h'\in L^p\left((a,b),\mathbb{R}^n\right)$ então também $w_h'\in L^1\left((a,b),\mathbb{R}^n\right)$ e portanto existe $C_1(h)>0$ tal que

$$\int_a^b|w_h'(s)|\,ds\leq C_1(h).$$

pelo que

$$v_h \in W^{1,p}((a,b), \mathbb{R}^n)$$

e temos também

$$v_h(a) = A \quad \text{e} \quad v_h(b) = B.$$

Usando (3.44) obtemos

$$\limsup_{h\to\infty} \int_a^b f(t, v_h'(t))\, dt \le \lim_{h\to\infty} \int_a^b f(t, w_h'(t))\, dt. \tag{3.53}$$

De facto, por (3.36), temos

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t, v_h'(t))\, dt &= \int_a^{b-\varepsilon_h} f(t, w_h'(t))\, dt + \int_{b-\varepsilon_h}^b f\left(t, \frac{B - B_h}{\varepsilon_h}\right) dt \\
&= \int_a^b f(t, w_h'(t))\, dt - \int_{b-\varepsilon_h}^b f(t, w_h'(t))\, dt + \int_{b-\varepsilon_h}^b f\left(t, \frac{B - B_h}{\varepsilon_h}\right) dt \\
&\le \int_a^b f(t, w_h'(t))\, dt - \int_{b-\varepsilon_h}^b |w_h'(t)|^p\, dt + \int_{b-\varepsilon_h}^b K\left(1 + \left|\frac{B - B_h}{\varepsilon_h}\right|^p\right) dt \\
&= \int_a^b f(t, w_h'(t))\, dt - \int_{b-\varepsilon_h}^b |w_h'(t)|^p\, dt + \varepsilon_h K\left(1 + \left|\frac{B - B_h}{\varepsilon_h}\right|^p\right).
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Por (3.51), (3.42), (3.43) e pela Desigualdade de Jensen (Proposição 2.16.7) temos, respectivamente,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_h \left|\frac{B - B_h}{\varepsilon_h}\right|^p &= \varepsilon_h \left|\frac{1}{\varepsilon_h}\left(B - A - \int_a^{b-\varepsilon_h} w_h'(s)\, ds\right)\right|^p \\
&= \varepsilon_h \left|\frac{1}{\varepsilon_h}\left(B - A - \int_a^b w_h'(s)\, ds + \int_{b-\varepsilon_h}^b w_h'(s)\, ds\right)\right|^p \\
&= \varepsilon_h \left|\frac{1}{\varepsilon_h}\left(B - A - w_h(b) + w_h(a) + \int_{b-\varepsilon_h}^b w_h'(s)\, ds\right)\right|^p \\
&= \varepsilon_h \left|\frac{1}{\varepsilon_h}\int_{b-\varepsilon_h}^b w_h'(s)\, ds\right|^p \le \varepsilon_h \frac{1}{\varepsilon_h}\int_{b-\varepsilon_h}^b |w_h'(s)|^p\, ds = \int_{b-\varepsilon_h}^b |w_h'(s)|^p\, ds.
\end{aligned}$$

Donde, por (3.44) e (3.52),

$$\begin{aligned}
\limsup_{h\to\infty}\left(\varepsilon_h K\left(1 + \left|\frac{B - B_h}{\varepsilon_h}\right|^p\right)\right) &= K \limsup_{h\to\infty}\left(\varepsilon_h + \varepsilon_h \left|\frac{B - B_h}{\varepsilon_h}\right|^p\right) \\
&\le K \limsup_{h\to\infty}\left(\varepsilon_h + \int_{b-\varepsilon_h}^b |w_h'(s)|^p\, ds\right) = 0.
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Portanto, por (3.54), (3.55) e passando se necessário a uma subsucessão, temos

$$\begin{aligned}
\limsup_{h\to\infty} \int_a^b f(t, v_h'(t))\, dt &\le \limsup_{h\to\infty}\left(\int_a^b f(t, w_h'(t))\, dt - \int_{b-\varepsilon_h}^b |w_h'(t)|^p\, dt + \varepsilon_h K\left(1 + \left|\frac{B - B_h}{\varepsilon_h}\right|^p\right)\right) \\
&\le \limsup_{h\to\infty} \int_a^b f(t, w_h'(t))\, dt + \limsup_{h\to\infty}\left(\varepsilon_h K\left(1 + \left|\frac{B - B_h}{\varepsilon_h}\right|^p\right)\right) \\
&\le \lim_{h\to\infty} \int_a^b f(t, w_h'(t))\, dt,
\end{aligned}$$

como se pretendia.

Mostremos agora que u é solução de

$$\min \left\{ \int_a^b f^{**}(t, v'(t))\, dt : v \in W^{1,p}((a,b), \mathbb{R}^n), v(a) = A, v(b) = B \right\}. \tag{P*}$$

De (3.40) e de (3.53) resulta que

$$\limsup_{h\to\infty} \int_a^b f(t, v_h'(t))\, dt \leq \int_a^b f^{**}(t, v'(t))\, dt \tag{3.56}$$

para uma sucessão $(v_h) \subset W^{1,p}((a,b), \mathbb{R}^n)$ tal que $v(a) = A, v(b) = B$.

Agora, por hipótese, $u \in W^{1,1}((a,b), \mathbb{R}^n)$ é uma solução do problema

$$\min \left\{ \int_a^b f(t, v'(t))\, dt : v \in W^{1,1}((a,b), \mathbb{R}^n), v(a) = A, v(b) = B \right\}.$$

Portanto

$$\int_a^b f(t, u'(t))\, dt \leq \int_a^b f(t, v'(t))\, dt \quad \forall v \in W^{1,1}((a,b), \mathbb{R}^n) \text{ tal que } v(a) = A, v(b) = B.$$

Em particular, dado que $W^{1,p}((a,b), \mathbb{R}^n) \subset W^{1,1}((a,b), \mathbb{R}^n)$,

$$\int_a^b f(t, u'(t))\, dt \leq \int_a^b f(t, v'(t))\, dt \quad \forall v \in W^{1,p}((a,b), \mathbb{R}^n) \text{ tal que } v(a) = A, v(b) = B.$$

Então, por (3.56),

$$\int_a^b f(t, u'(t))\, dt \leq \limsup_{h\to\infty} \int_a^b f(t, v_h'(t))\, dt \leq \int_a^b f^{**}(t, v'(t))\, dt \tag{3.57}$$

e portanto

$$\int_a^b f(t, u'(t))\, dt \leq \int_a^b f^{**}(t, v'(t))\, dt, \quad \forall v \in W^{1,p}((a,b), \mathbb{R}^n) \text{ tal que } v(a) = A, v(b) = B. \tag{3.58}$$

Finalmente observemos que aplicando o raciocínio anterior a u [18] obtemos (por (3.56))

$$\exists (u_h) \subset W^{1,p}((a,b), \mathbb{R}^n) \quad \text{tal que} \quad u_h(a) = A, u_h(b) = B \quad \forall h \in \mathbb{N}$$

tal que

$$\limsup_{h\to\infty} \int_a^b f(t, u_h'(t))\, dt \leq \int_a^b f^{**}(t, u'(t))\, dt$$

então, por (3.57),

$$\int_a^b f(t, u'(t))\, dt \leq \limsup_{h\to\infty} \int_a^b f(t, u_h'(t))\, dt \leq \int_a^b f^{**}(t, u'(t))\, dt.$$

Donde

$$\int_a^b f(t, u'(t))\, dt \leq \int_a^b f^{**}(t, u'(t))\, dt$$

[18] É fácil verificar que, por estarmos a assumir que o mínimo é finito e por (3.36), tem que ser $u \in W^{1,p}((a,b), \mathbb{R}^n)$.
De facto, por (3.36) e pelo facto de o mínimo ser finito sai que $u' \in L^p((a,b), \mathbb{R}^n)$. Por outro lado, como u é contínua em (a,b) então $u \in L^\infty((a,b), \mathbb{R}^n)$ o que implica que $u \in L^p((a,b), \mathbb{R}^n)$.

mas, por definição da bipolar,

$$\int_a^b f^{**}(t,u'(t))\,dt \leq \int_a^b f(t,u'(t))\,dt.$$

Concluimos então que

$$\int_a^b f^{**}(t,u'(t))\,dt = \int_a^b f(t,u'(t))\,dt.$$

Então, de (3.58) resulta que

$$\int_a^b f^{**}(t,u'(t))\,dt \leq \int_a^b f^{**}(t,v'(t))\,dt \quad \forall v \in W^{1,p}((a,b),\mathbb{R}^n),\ v(a)=A, v(b)=B.$$

O que mostra que u é solução de (P*). Então, pela Proposição 3.3.1, existe $c \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$c \in \partial f^{**}(t,u'(t)) \quad \text{qs em } (a,b).$$

Agora, aplicando o Teorema 3.3.5 a f^{**} e considerando $\theta(r) := r^p$ (ver (3.39)), concluimos que u é lipschitziana em $[a,b]$.■

Nota 3.3.10 *Na Proposição 3.3.9 não exigimos que f fosse um integrando convexo, pelo que não se pode aplicar o método directo, e além disso o problema (P) pode não ter solução.*

Por exemplo, se $n=1, (a,b)=(0,1), A=B=0$ e

$$f(\xi) = \begin{cases} \xi^2 & se\ \xi > 0 \\ 1+\xi^2 & se\ \xi \leq 0, \end{cases}$$

o problema

$$min \left\{ \int_0^1 f(u'(t))\,dt : u \in D \right\},$$

onde

$$D := \left\{ u \in W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}) : u(0) = 0 = u(1) \right\}$$

não tem solução.

Temos

$$I(u) = \int_0^1 f(u'(t))\,dt \geq 0 \quad \forall u \in D,$$

logo

$$\inf_{u \in D} I(u) \geq 0.$$

Mostremos que temos de facto

$$\inf_{u \in D} I(u) = 0.$$

Consideremos a sucessão (u_n') definida por

$$u_n'(t) = \begin{cases} \frac{1}{2^n-1} & se\ 0 \leq t < 1-\frac{1}{2^n} \\ -1 & se\ 1-\frac{1}{2^n} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. *Temos*

$$\begin{aligned} I(u_n) &= \int_0^{1-\frac{1}{2^n}} f\left(\frac{1}{2^n-1}\right) dt + \int_{1-\frac{1}{2^n}}^1 f(-1)\, dt = \int_0^{1-\frac{1}{2^n}} \left(\frac{1}{2^n-1}\right)^2 dt + \int_{1-\frac{1}{2^n}}^1 \left(1+(-1)^2\right) dt \\ &= \left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(\frac{1}{2^n-1}\right)^2 + 2\left(1-1+\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n(2^n-1)} + \frac{1}{2^{n-1}} \underset{n\to\infty}{\to} 0. \end{aligned}$$

Mas não existe $u \in D$ *tal que* $I(u) = 0$.
Se $u(0) = 0 = u(1)$ *então* $u(t) \equiv 0$ *ou existe* $t \in (0,1)$ *tal que* $u(t) \neq 0$.
Se $u(t) \equiv 0$ *então* $u'(t) \equiv 0$ *e*

$$I(u) = \int_0^1 f(0)\, dt = 1 \neq 0.$$

Se existe $t \in (0,1)$ *tal que* $u(t) \neq 0$ *então, dado que* u *é contínua,*

$$\exists\, M_1 \subset (0,1), m(M_1) > 0 : u'(t) > 0 \text{ qs em } M_1$$

e

$$\exists\, M_2 \subset (0,1), m(M_2) > 0 : u'(t) \leq 0 \text{ qs em } M_2$$

donde

$$\begin{aligned} I(u) &= \int_{M_1} f(u'(t))\, dt + \int_{M_2} f(u'(t))\, dt = \int_{M_1} (u'(t))^2\, dt + \int_{M_2} \left(1+(u'(t))^2\right) dt \\ &= \int_0^1 (u'(t))^2\, dt + m(M_2) > 0. \end{aligned}$$

O que mostra que o problema (P) não tem solução.
Contudo, é possível provar que o problema (P) admite solução se f *verifica as seguintes condições:*

(a) f *é* $\mathcal{L} \times \mathcal{B}_n$*-mensurável;*

(b) a função $f(t,\cdot)$ *é sci em* $\mathbb{R}^n$ *para quase todo* $t \in (a,b)$*;*

(c) $f(t,\xi) \geq \theta(|\xi|)$ *para alguma função* $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *com* $\lim_{r\to+\infty} \frac{\theta(r)}{r} = +\infty$.

(Ver [38], Teorema 3.3.)

3.4 O problema autónomo

Consideremos o problema autónomo

$$\min \left\{ \int_a^b f(v(t), v'(t))\, dt : v \in W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}^n), v(a) = A, v(b) = B \right\} \tag{P'}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0,+\infty]$ é uma função Borel-mensurável e para cada $s \in \mathbb{R}^n$ a função $f(s,\cdot)$ é convexa e *sci* em $\mathbb{R}^n$.

3.4.1 Definições e resultados preliminares

Lema 3.4.1 *Seja $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ uma função convexa e sci e seja $w \in int\,(dom\, f)$. Defina-se*

$$\varphi_w(t) = \begin{cases} f\left(\frac{w}{t}\right) t & se\ t > 0 \\ \liminf\limits_{s \to 0^+} f\left(\frac{w}{s}\right) s & se\ t = 0 \\ +\infty & se\ t < 0. \end{cases}$$

Então φ_w é uma função convexa e sci, $1 \in int\,(dom\ \varphi_w)$ e

$$\partial \varphi_w(1) = f(w) - \langle w, \partial f(w) \rangle. \tag{3.59}$$

Demonstração:
Comecemos por provar que φ_w é convexa e *sci.*
Se $0 = w \in int\,(dom\, f)$ temos

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} f(0)\, t & \text{se } t > 0 \\ \liminf\limits_{s \to 0^+} f(0)\, s & \text{se } t = 0 \\ +\infty & \text{se } t < 0 \end{cases} = \begin{cases} f(0)\, t & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \\ +\infty & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Logo φ_0 é convexa e *sci.*
Suponhamos então que $0 \neq w \in int\,(dom\, f)$. Dado que f é uma função convexa e *sci* então, pela Proposição 2.18.3,

$$f(\xi) = \sup_{\lambda \in \Lambda} \{f_\lambda(\xi)\} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

onde Λ é um conjunto de índices e f_λ, para qualquer $\lambda \in \Lambda$, é uma função afim. Portanto

$$\exists \{r_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset \mathbb{R}, \ \exists \{v_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset \mathbb{R}^n$$

tais que

$$f(\xi) = \sup_{\lambda \in \Lambda} \{\langle v_\lambda, \xi \rangle + r_\lambda\} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Em particular, para qualquer $t > 0$ temos

$$\begin{aligned} \varphi_w|_{(0,+\infty)}(t) &= f\left(\frac{w}{t}\right) t = t \sup_{\lambda \in \Lambda} \left\{\left\langle v_\lambda, \frac{w}{t} \right\rangle + r_\lambda\right\} = t \sup_{\lambda \in \Lambda} \left\{\frac{1}{t} \langle v_\lambda, w \rangle + r_\lambda\right\} \\ &= t \sup_{\lambda \in \Lambda} \left\{\frac{1}{t} (\langle v_\lambda, w \rangle + t r_\lambda)\right\} = \sup_{\lambda \in \Lambda} \{\langle v_\lambda, w \rangle + t r_\lambda\}. \end{aligned}$$

Logo, pela Proposição 2.18.3, $\varphi_w|_{(0,+\infty)}$ é convexa e *sci.*
Consideremos agora a função $\varphi_w|_{[0,+\infty)}$

$$\varphi_w|_{[0,+\infty)}(t) = \begin{cases} f\left(\frac{w}{t}\right) t & \text{se } t > 0 \\ \liminf\limits_{s \to 0^+} f\left(\frac{w}{s}\right) s & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

Queremos provar que

$$\varphi_w|_{[0,+\infty)}(\lambda t_1 + (1-\lambda) t_2) \leq \lambda \varphi_w|_{[0,+\infty)}(t_1) + (1-\lambda) \varphi_w|_{[0,+\infty)}(t_2) \tag{3.60}$$

para quaisquer $t_1, t_2 \in [0, +\infty)$ e qualquer $\lambda \in (0, 1)$.

Se $t_1, t_2 > 0$ então vale a desigualdade anterior para qualquer $\lambda \in (0,1)$ porque $\varphi_w|_{(0,+\infty)}$ é convexa:

$$\begin{aligned} \varphi_w|_{[0,+\infty)}(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) &= \varphi_w|_{(0,+\infty)}(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \\ &\leq \lambda\varphi_w|_{(0,+\infty)}(t_1) + (1-\lambda)\varphi_w|_{(0,+\infty)}(t_2) \\ &= \lambda\varphi_w|_{[0,+\infty)}(t_1) + (1-\lambda)\varphi_w|_{[0,+\infty)}(t_2) \end{aligned}$$

Fixemos $t_0 > 0$ e $\lambda \in (0,1)$. Queremos mostrar que a desigualdade (3.60) também é válida neste caso. Comecemos por mostrar que a função

$$[0, +\infty) \ni t \to \varphi_w|_{(0,+\infty)}(\lambda t + (1-\lambda)t_0) \tag{3.61}$$

é *sci* em $[0, +\infty)$. A função

$$[0, +\infty) \ni t \to u(t) := \lambda t + (1-\lambda)t_0$$

é contínua em $[0, +\infty)$ e a função

$$(0, +\infty) \ni s \to \varphi_w|_{(0,+\infty)}(s)$$

é *sci* em $(0, +\infty)$. Para cada $t \in [0, +\infty)$ temos

$$\varphi_w|_{(0,+\infty)}(\lambda t + (1-\lambda)t_0) = \varphi_w|_{(0,+\infty)}(u(t)) = \left(\varphi_w|_{(0,+\infty)} \circ u\right)(t).$$

Então mostrar que a função em (3.61) é *sci* em $[0, +\infty)$ é equivalente a mostrar que o conjunto

$$\left\{t \in [0, +\infty) : \left(\varphi_w|_{(0,+\infty)} \circ u\right)(t) \leq \alpha\right\}$$

é fechado para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ (ver Proposição 2.17.5).

Fixemos $\alpha \in \mathbb{R}$ qualquer.

Como $\varphi_w|_{(0,+\infty)}$ é *sci* em $(0, +\infty)$, o conjunto

$$\left\{s \in (0, +\infty) : \varphi_w|_{(0,+\infty)}(s) \leq \alpha\right\} = \varphi_w|_{(0,+\infty)}^{-1}((-\infty, \alpha])$$

é fechado, então

$$\begin{aligned} u^{-1}\left(\varphi_w|_{(0,+\infty)}^{-1}((-\infty,\alpha])\right) &= \left(\varphi_w|_{(0,+\infty)} \circ u\right)^{-1}((-\infty,\alpha]) \\ &= \left\{t \in [0,+\infty) : \left(\varphi_w|_{(0,+\infty)} \circ u\right)(t) \leq \alpha\right\} \end{aligned}$$

é fechado, por ser a imagem inversa de um conjunto fechado por uma função contínua. Então,

$$\varphi_w|_{(0,+\infty)}((1-\lambda)t_0) \leq \liminf_{t\to 0^+} \varphi_w|_{(0,+\infty)}(\lambda t + (1-\lambda)t_0).$$

Assim temos

$$\begin{aligned} \varphi_w|_{[0,+\infty)}((1-\lambda)t_0) &= \varphi_w|_{(0,+\infty)}((1-\lambda)t_0) \leq \liminf_{t\to 0^+} \varphi_w|_{(0,+\infty)}(\lambda t + (1-\lambda)t_0) \\ &\leq \liminf_{t\to 0^+}\left(\lambda\varphi_w|_{(0,+\infty)}(t) + (1-\lambda)\varphi_w|_{(0,+\infty)}(t_0)\right) \\ &\leq \lambda \liminf_{t\to 0^+} \varphi_w|_{(0,+\infty)}(t) + (1-\lambda)\liminf_{t\to 0^+} \varphi_w|_{(0,+\infty)}(t_0) \\ &= \lambda\varphi_w(0) + (1-\lambda)\varphi_w|_{(0,+\infty)}(t_0). \end{aligned}$$

Logo, também neste caso se verifica a desigualdade (3.60), e portanto a função $\varphi_w|_{[0,+\infty)}$ é convexa em $[0, +\infty)$.

Quanto à *sci*, sabemos que a função $\varphi_w|_{(0,+\infty)}$ é *sci* em $(0, +\infty)$ então basta mostrar que $\varphi_w|_{[0,+\infty)}$ é *sci* em $t = 0$, isto é

$$\varphi_w|_{[0,+\infty)}(0) \leq \liminf_{s\to 0^+} \varphi_w|_{[0,+\infty)}(s). \tag{3.62}$$

Mas

$$\varphi_w|_{[0,+\infty)}(0) = \liminf_{s\to 0^+} f\left(\frac{w}{s}\right)s \quad \text{e} \quad \liminf_{s\to 0^+} \varphi_w|_{[0,+\infty)}(s) = \liminf_{s\to 0^+} f\left(\frac{w}{s}\right)s$$

o que mostra que se verifica a desigualdade em (3.62) e portanto a função $\varphi_w|_{[0,+\infty)}$ é *sci* em $[0,+\infty)$. Além disso

$$\operatorname{epi}\varphi_w = \{(t,a) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : \varphi_w(t) \leq a\} = \{(t,a) \in [0,+\infty)\times\mathbb{R} : \varphi_w(t) \leq a\} = \operatorname{epi}\varphi_w|_{[0,+\infty)},$$

pelo que se conclui que a função φ_w é convexa e *sci.*

Mostremos agora que

$$1 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom}\varphi_w).$$

Como $\varphi_w(1) = f(w)$ e $w \in int\,(dom\, f)$ então $\varphi_w(1) < +\infty$, portanto $1 \in dom\,\varphi_w$.

Se $0 = w \in int\,(dom\, f)$ então $1 \in int\,(dom\,\varphi_0)$, de facto $dom\,\varphi_0 = [0,+\infty)$.

Suponhamos então que $0 \neq w \in int\,(dom\, f)$. Seja $\varepsilon > 0$ tal que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n : |\xi - w| < \varepsilon \Rightarrow f(\xi) < +\infty. \tag{3.63}$$

Seja $\delta = \frac{\varepsilon}{|w|+\varepsilon}$. Então

$$\begin{aligned}
|t-1| < \delta \quad &\Leftrightarrow \quad |t-1| < \frac{\varepsilon}{|w|+\varepsilon} \Leftrightarrow -\frac{\varepsilon}{|w|+\varepsilon} < t-1 < \frac{\varepsilon}{|w|+\varepsilon} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{|w|}{|w|+\varepsilon} < t < \frac{2\varepsilon+|w|}{|w|+\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{|w|+\varepsilon}{2\varepsilon+|w|} < \frac{1}{t} < \frac{|w|+\varepsilon}{|w|} \\
&\Leftrightarrow \quad -\frac{\varepsilon}{2\varepsilon+|w|} < \frac{1}{t} - 1 < \frac{\varepsilon}{|w|}.
\end{aligned}$$

Como $|w| < |w| + 2\varepsilon$ então $-\frac{\varepsilon}{|w|} < -\frac{\varepsilon}{|w|+2\varepsilon}$ e portanto

$$-\frac{\varepsilon}{|w|} < \frac{1}{t} - 1 < \frac{\varepsilon}{|w|} \Leftrightarrow \left|\frac{1}{t} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{|w|}.$$

Logo

$$|t-1| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{t} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{|w|},$$

o que implica

$$\left|\frac{w}{t} - w\right| = |w|\left|\frac{1}{t} - 1\right| < \varepsilon.$$

Pelo que, por (3.63), $f\left(\frac{w}{t}\right) < +\infty$ e portanto

$$\varphi_w(t) = f\left(\frac{w}{t}\right) < +\infty,$$

para qualquer t tal que $|t-1| < \delta$, o que mostra que $1 \in int\,(dom\,\varphi_w)$.

Para terminar, provemos que

$$\partial\varphi_w(1) = f(w) - \langle w, \partial f(w)\rangle,$$

para qualquer $w \in int\,(dom\, f)$. Com efeito, fixemos $w \in int\,(dom\, f)$ e consideremos as funções $g : (0,+\infty) \to \mathbb{R}^n$ e $h : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definidas, respectivamente, por

$$g(t) = \frac{w}{t}, \qquad h(t) = t.$$

A função

$$g'(t) = -\frac{w}{t^2}$$

é contínua em $(0, +\infty)$ então g é continuamente diferenciável em $(0, +\infty)$ portanto, pela Proposição 2.21.9, g é estritamente diferenciável em t para cada $t > 0$ e designamos por $D_s g(t)$ a derivada estrita de g em t (ver Definição 2.21.8). Pelas Proposições 2.21.10 e 2.21.21 temos

$$\partial g(t) = \{g'(t)\} = \{D_s g(t)\},$$

pelo que $D_s g(t) = g'(t)$ para cada $t > 0$. Em particular, g é estritamente diferenciável em $t = 1$ e

$$D_s g(1) = g'(1) = -w.$$

A função f é lipschitziana numa vizinhança de $g(1) = w \in int(dom\, f)$ (ver Proposição 2.16.27). Por outro lado, como f é convexa então é regular em $g(1)$ (ver Proposição 2.21.12). Então, pela Proposição 2.21.19, a função $f_1 : (0, +\infty) \to [0, +\infty]$ definida por

$$f_1(t) = f \circ g(t) = f(g(t)) = f\left(\frac{w}{t}\right)$$

é lipschitziana numa vizinhança de $t = 1$ e

$$\partial f_1(1) = \langle \partial f(g(1)), D_s g(1) \rangle = \langle \partial f(w), -w \rangle = -\langle w, \partial f(w) \rangle.$$

Além disso, a função h é lipschitziana numa vizinhança de $t = 1$, $\partial h(1) = \{1\}$ e

$$f_1(1) = f(g(1)) = f(w) \geq 0 \quad \text{e} \quad h(1) = 1 \geq 0.$$

Portanto, pela Proposição 2.21.20,

$$\partial \varphi_w(1) = \partial(f_1 h)(1) = \partial f_1(1)\, h(1) + f_1(1)\, \partial h(1) = -\langle w, \partial f(w) \rangle + f(w) = f(w) - \langle w, \partial f(w) \rangle,$$

o que prova (3.59) e completa a demonstração do lema.■

Lema 3.4.2 *Seja* $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ *uma função convexa, sci e seja* $w \in int(dom\, f)$, $w \neq 0$. *Seja* $\theta : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *uma função tal que*

$$\theta(|\xi|) \leq f(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Então, para qualquer $\varepsilon \in (0, |w|)$ *e qualquer* $p \in \partial f(w)$ *temos*

$$\langle p, w \rangle - f(w) \geq \frac{\varepsilon \theta(|w|)}{|w| - \varepsilon} - f\left(\frac{\varepsilon w}{|w|}\right) \frac{|w|}{|w| - \varepsilon}.$$

Demonstração:

Fixemos $w \neq 0$ tal que $w \in int(dom\, f)$ e sejam $\varepsilon \in (0, |w|)$, $p \in \partial f(w)$. Então, por definição de $\partial f(w)$, temos

$$f(x) \geq f(w) + \langle p, x - w \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

em particular

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\varepsilon w}{|w|}\right) &\geq f(w) + \left\langle p, \frac{\varepsilon w}{|w|} - w \right\rangle = f(w) + \left\langle p, \frac{\varepsilon w - w|w|}{|w|} \right\rangle \\ &= f(w) + \langle p, w \rangle \frac{\varepsilon - |w|}{|w|} = f(w) + \langle p, w \rangle \frac{\varepsilon}{|w|} - \langle p, w \rangle, \end{aligned}$$

ou seja,

$$f\left(\frac{\varepsilon w}{|w|}\right) \geq f(w) + \langle p, w\rangle \frac{\varepsilon}{|w|} - \langle p, w\rangle . \tag{3.64}$$

Multiplicando ambos os membros de (3.64) por $|w|/\varepsilon > 0$ obtemos

$$\frac{|w|}{\varepsilon} f\left(\frac{\varepsilon w}{|w|}\right) \geq \frac{|w|}{\varepsilon} f(w) + \langle p, w\rangle - \langle p, w\rangle \frac{|w|}{\varepsilon},$$

o que é equivalente a

$$\langle p, w\rangle \left(1 - \frac{|w|}{\varepsilon}\right) + f(w)\left(\frac{|w|}{\varepsilon} - 1\right) \leq \frac{|w|}{\varepsilon} f\left(\frac{\varepsilon w}{|w|}\right) - f(w),$$

ou seja

$$\left(\langle p, w\rangle - f(w)\right)\left(1 - \frac{|w|}{\varepsilon}\right) \leq \frac{|w|}{\varepsilon} f\left(\frac{\varepsilon w}{|w|}\right) - f(w). \tag{3.65}$$

Dividindo ambos os membros de (3.65) por $1 - |w|/\varepsilon$, que é um real negativo visto que $\varepsilon < |w|$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle p, w\rangle - f(w) &\geq \frac{\varepsilon}{\varepsilon - |w|}\left(\frac{|w|}{\varepsilon} f\left(\frac{\varepsilon w}{|w|}\right) - f(w)\right) \\ &= \frac{|w|}{\varepsilon - |w|} f\left(\frac{\varepsilon w}{|w|}\right) - \frac{\varepsilon}{\varepsilon - |w|} f(w) \\ &= \frac{\varepsilon}{|w| - \varepsilon} f(w) - \frac{|w|}{|w| - \varepsilon} f\left(\frac{\varepsilon w}{|w|}\right). \end{aligned} \tag{3.66}$$

Por hipótese, existe $\theta : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $\theta(|\xi|) \leq f(\xi)$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ então, em particular, temos

$$f(w) \geq \theta(|w|). \tag{3.67}$$

Por (3.66) e (3.67), temos

$$\langle p, w\rangle - f(w) \geq \frac{\varepsilon}{|w| - \varepsilon}\theta(|w|) - \frac{|w|}{|w| - \varepsilon} f\left(\frac{\varepsilon w}{|w|}\right),$$

o que completa a demonstração.■

Lema 3.4.3 *Seja* $(\varphi_h) \subset W^{1,\infty}((a,b), \mathbb{R})$ *uma sucessão de funções convergindo em* $W^{1,\infty}((a,b), \mathbb{R})$ *para* $\varphi(t) := t$ *e tal que*

$$\varphi_h(a) = a, \quad \varphi_h(b) = b \quad \forall\, h \in \mathbb{N}.$$

Então, para qualquer $u \in W^{1,1}((a,b), \mathbb{R})$ *a sucessão* $\left(u \circ \varphi_h^{-1}\right)$ *converge para* u *em* $W^{1,1}((a,b), \mathbb{R})$.

Demonstração:

Seja $(\varphi_h) \subset W^{1,\infty}((a,b), \mathbb{R})$ uma sucessão de funções convergindo em $W^{1,\infty}((a,b), \mathbb{R})$ para $\varphi(t) = t$, tal que

$$\varphi_h(a) = a \text{ e } \varphi_h(b) = b \quad \forall h \in \mathbb{N}.$$

Temos

$$\begin{aligned} (\varphi_h) \to \varphi \text{ em } W^{1,\infty}((a,b), \mathbb{R}) &\Leftrightarrow \left(|\varphi_h - \varphi|_{W^{1,\infty}((a,b),\mathbb{R})}\right) \to 0 \\ &\Leftrightarrow \left(|\varphi_h - \varphi|_{L^\infty((a,b),\mathbb{R})} + |\varphi_h' - \varphi'|_{L^\infty((a,b),\mathbb{R})}\right) \to 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \left(|\varphi_h - \varphi|_{L^\infty((a,b),\mathbb{R})}\right) \to 0 \\ \left(|\varphi_h' - \varphi'|_{L^\infty((a,b),\mathbb{R})}\right) \to 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Mas

$$\left(|\varphi_h - \varphi|_{L^\infty((a,b),\mathbb{R})}\right) \to 0 \Rightarrow (\varphi_h) \to \varphi \text{ uniformemente em } (a,b)$$

e

$$\left(|\varphi_h' - \varphi'|_{L^\infty((a,b),\mathbb{R})}\right) \to 0 \Leftrightarrow \left(\sup_{t\in(a,b)} \text{ess}\, |\varphi_h'(t) - \varphi'(t)|\right) \to 0 \Rightarrow (|\varphi_h'(t) - 1|) \to 0 \quad \text{qs em } (a,b)$$

o que implica que a partir de uma certa ordem temos

$$\varphi_h'(t) > 0 \quad \text{qs em } (a,b).$$

Suponhamos então, sem perda de generalidade, que é

$$\varphi_h'(t) > 0 \quad \text{qs em } (a,b), \tag{3.68}$$

qualquer que seja $h \in \mathbb{N}$. O que implica

$$\varphi_h'(t) > 0 \quad \text{qs em } [a,b],$$

qualquer que seja $h \in \mathbb{N}$, além disso como $(\varphi_h) \subset W^{1,\infty}((a,b),\mathbb{R})$ então

$$(\varphi_h) \subset W^{1,\infty}([a,b],\mathbb{R}) \subset W^{1,1}([a,b],\mathbb{R}) = AC([a,b],\mathbb{R}),$$

ou seja, cada φ_h é uma função absolutamente contínua em $[a,b]$.

Pelas Proposições 2.14.16 e 2.14.17 existe e é absolutamente contínua em $[a,b]$ a função

$$\psi_h := \varphi_h^{-1} \quad \forall h \in \mathbb{N}.$$

Então para cada $h \in \mathbb{N}$, ψ_h é limitada em $[a,b]$ por ser uma função contínua definida num compacto de $\mathbb{R}$, logo

$$\psi_h \in L^\infty([a,b],\mathbb{R}).$$

Para h suficientemente grande ψ_h' é essencialmente limitada. De facto, para quase todo $t \in (a,b)$ temos

$$(|\varphi_h'(t) - 1|) \to 0,$$

ou seja

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : h \geq N \Rightarrow |\varphi_h'(t) - 1| < \varepsilon. \tag{3.69}$$

Então, para $\varepsilon = 1/2$ e h suficientemente grande

$$\frac{1}{2} \leq \varphi_h'(t) \leq \frac{3}{2} \quad \text{qs em } (a,b), \tag{3.70}$$

o que implica

$$\left|\frac{1}{\varphi_h'(t)}\right| \leq 2 \quad \text{qs em } (a,b).$$

Então, pela Proposição 2.14.19, tem-se

$$|\psi_h'(\tau)| = \left|\frac{1}{\varphi_h'(\psi_h(\tau))}\right| \leq 2, \tag{3.71}$$

para quase todo $\tau \in (a,b)$ e para h suficientemente grande.

Mostremos agora que $(\psi_h) \to \varphi$ em $W^{1,\infty}((a,b),\mathbb{R})$ isto é, mostremos que

$$\left(|\psi_h - \varphi|_{L^\infty((a,b),\mathbb{R})} + |\psi_h' - \varphi'|_{L^\infty((a,b),\mathbb{R})}\right) \to 0$$

o que ainda é equivalente a mostrar que

$$\begin{cases} \left(|\psi_h - \varphi|_{L^\infty((a,b),\mathbb{R})}\right) \to 0 \\ \left(|\psi_h' - \varphi'|_{L^\infty((a,b),\mathbb{R})}\right) \to 0. \end{cases}$$

Como $(\varphi_h) \to \varphi$ uniformemente em (a,b), temos

$$\begin{aligned} |\psi_h - \varphi|_{L^\infty((a,b),\mathbb{R})} &= \sup_{\tau\in(a,b)} |\psi_h(\tau) - \varphi(\tau)| = \sup_{\tau\in(a,b)} |\psi_h(\tau) - \tau| \\ &= \sup_{t\in(a,b)} |\psi_h(\varphi_h(t)) - \varphi_h(t)| = \sup_{t\in(a,b)} \left|\varphi_h^{-1}(\varphi_h(t)) - \varphi_h(t)\right| \\ &= \sup_{t\in(a,b)} |t - \varphi_h(t)| = \sup_{t\in(a,b)} |\varphi(t) - \varphi_h(t)| \to 0. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Por outro lado, como sabemos que $(\varphi_h') \to \varphi'$ em $L^\infty((a,b),\mathbb{R})$, ou seja,

$$\sup_{t\in(a,b)} \text{ess} |\varphi_h'(t) - \varphi'(t)| = \sup_{t\in(a,b)} \text{ess} |\varphi_h'(t) - 1| \to 0,$$

então temos [19]

$$\begin{aligned} |\psi_h' - \varphi'|_{L^\infty((a,b),\mathbb{R})} &= \sup_{\tau\in(a,b)} \text{ess} |\psi_h'(\tau) - \varphi'(\tau)| = \sup_{\tau\in(a,b)} \text{ess} \left|\frac{1}{\varphi_h'(\psi_h(\tau))} - \varphi'(\tau)\right| \\ &= \sup_{\tau\in(a,b)} \text{ess} \left|\frac{1}{\varphi_h'(\psi_h(\tau))} - 1\right| = \sup_{\tau\in(a,b)} \text{ess} \left|\frac{1 - \varphi_h'(\psi_h(\tau))}{\varphi_h'(\psi_h(\tau))}\right| \\ &= \sup_{t\in(a,b)} \text{ess} \left|\frac{1 - \varphi_h'(t)}{\varphi_h'(t)}\right| \le 2 \sup_{\tau\in(a,b)} \text{ess} |1 - \varphi_h'(t)| \to 0. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Provemos agora que os operadores $T_h : W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}) \to W^{1,1}((a,b),\mathbb{R})$ definidos por

$$T_h(u) = u \circ \psi_h$$

são lineares contínuos. Como u é uma função absolutamente contínua e, pelas Proposições 2.14.16 e 2.14.17, cada função ψ_h é absolutamente contínua e crescente (pois por (3.70) para cada $h \in \mathbb{N}$ temos $\psi_h \ge 0$ qs em

[19] Vejamos que se $\left|\frac{1}{g(t)}\right| \le 2$ qs em (a,b) então

$$A := \left\{c \ge 0 : \left|\frac{f(t)}{g(t)}\right| \le c \quad \text{qs em } (a,b)\right\} \supseteq \{c \ge 0 : 2|f(t)| \le c \quad \text{qs em } (a,b)\} =: B.$$

De facto, temos

$$c \in B \Rightarrow 2|f(t)| \le c \quad \text{qs em } (a,b)$$

portanto

$$\left|\frac{f(t)}{g(t)}\right| \le 2|f(t)| \le c \quad \text{qs em } (a,b),$$

o que implica que $c \in A$. Então $B \subseteq A$ e portanto

$$\inf\left\{c \ge 0 : \left|\frac{f(t)}{g(t)}\right| \le c \text{ qs em } (a,b)\right\} \le \inf\{\ge 0 : 2|f(t)| \le c \text{ qs em } (a,b)\}.$$

Além disso temos também

$$|2f|_{L^\infty((a,b),\mathbb{R})} = 2|f|_{L^\infty((a,b),\mathbb{R})}.$$

Concluimos assim que se verifica a desigualdade

$$\sup_{t\in(a,b)} \text{ess} \left|\frac{1 - \varphi_h'(t)}{\varphi_h'(t)}\right| \le 2 \sup_{\tau\in(a,b)} \text{ess} |1 - \varphi_h'(t)|.$$

$(a,b))$ então, pela Proposição 2.14.14, $u\circ\psi_h$ é absolutamente contínua e portanto os operadores T_h estão bem definidos. Cada T_h é uma aplicação linear, pois para quaisquer $u,v\in W^{1,1}((a,b),\mathbb{R})$ e quaisquer $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tem-se

$$T_h(\alpha u+\beta v)=(\alpha u+\beta v)\circ\psi_h=\alpha u\circ\psi_h+\beta v\circ\psi_h=\alpha T_h(u)+\beta T_h(v).$$

Vejamos agora que cada T_h é um operador contínuo. Como cada T_h é linear então é contínuo se e só se

$$\exists K>0:|T_h(u)|_{W^{1,1}((a,b),\mathbb{R})}\leq K|u|_{W^{1,1}((a,b),\mathbb{R})}\qquad\forall u\in W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}).$$

Se $u\equiv 0$ tem-se a desigualdade para qualquer K.
Se $u\neq 0$ temos, para qualquer $\varepsilon>0$ fixado,

$$\begin{aligned}|T_h(u)|_{W^{1,1}((a,b),\mathbb{R})} &= |T_h(u)|_{L^1((a,b),\mathbb{R})}+|T_h'(u)|_{L^1((a,b),\mathbb{R})}=|u\circ\psi_h|_{L^1((a,b),\mathbb{R})}+\left|(u\circ\psi_h)'\right|_{L^1((a,b),\mathbb{R})}\\ &= \int_a^b|u(\psi_h(\tau))|\,d\tau+\int_a^b\left|u'(\psi_h(\tau))\,\psi_h'(\tau)\right|d\tau,\end{aligned}$$

pela Proposição 2.14.15. Fazendo $t=\psi_h(\tau)$ temos

$$d\tau=\frac{d\tau}{dt}dt=\frac{d}{dt}(\varphi_h(t))\,dt=\varphi_h'(t)\,dt.$$

Logo

$$\int_a^b|u(\psi_h(\tau))|\,d\tau=\int_a^b|u(t)|\,\varphi_h'(t)\,dt$$

e, por (3.68) e (3.71),

$$\int_a^b\left|u'(\psi_h(\tau))\,\psi_h'(\tau)\right|d\tau=\int_a^b\left|u'(\psi_h(\tau))\frac{1}{\varphi_h'(\psi_h(\tau))}\right|d\tau=\int_a^b\left|u'(t)\frac{1}{\varphi_h'(t)}\right|\varphi_h'(t)\,dt=\int_a^b|u'(t)|\,dt,$$

então, por (3.69),

$$\begin{aligned}|T_h(u)|_{W^{1,1}((a,b),\mathbb{R})} &= \int_a^b|u(t)|\,\varphi_h'(t)\,dt+\int_a^b|u'(t)|\,dt\leq(1+\varepsilon)\int_a^b|u(t)|\,dt+\int_a^b|u'(t)|\,dt\\ &\leq (1+\varepsilon)\left(\int_a^b|u(t)|\,dt+\int_a^b|u'(t)|\,dt\right)=(1+\varepsilon)\left(|u|_{L^1((a,b),\mathbb{R})}+|u'|_{L^1((a,b),\mathbb{R})}\right)\\ &= (1+\varepsilon)\,|u|_{W^{1,1}((a,b),\mathbb{R})}\end{aligned}$$

desde que h seja suficientemente grande.
Suponhamos, sem perda de generalidade, que são contínuos para qualquer $h\in\mathbb{N}$.
Mostremos que são equi-limitados na bola unitária isto é, mostremos que

$$\exists K>0:|T_h(u)|_{W^{1,1}((a,b),\mathbb{R})}\leq K\ \ \forall h\in\mathbb{N},\ \forall u\in\left\{u\in W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}):|u|_{W^{1,1}((a,b),\mathbb{R})}\leq 1\right\}.$$

Vimos acima que

$$|T_h(u)|_{W^{1,1}((a,b),\mathbb{R})}\leq(1+\varepsilon)\,|u|_{W^{1,1}((a,b),\mathbb{R})}\,,$$

então para qualquer $u\in W^{1,1}((a,b),\mathbb{R})$ tal que $|u|_{W^{1,1}((a,b),\mathbb{R})}\leq 1$ temos

$$|T_h(u)|_{W^{1,1}((a,b),\mathbb{R})}\leq(1+\varepsilon).$$

Vejamos agora que $(T_h(u))\to u$ em $W^{1,1}((a,b),\mathbb{R})$ para qualquer $u\in C^2([a,b],\mathbb{R})$.

Fixemos $u \in C^2([a,b], \mathbb{R})$. Então u' é contínua e portanto limitada em $[a,b]$ o que implica que u é lipschitziana em $[a,b]$ com constante de Lipschitz K_1 (ver Proposição 2.14.12). De forma análoga se conclui que u' é lipschitziana em $[a,b]$ com constante de Lipschitz K_2. Além disso, existe $K > 0$ tal que $|u'(t)| \leq K$ para qualquer $t \in (a,b)$.

Dado que

$$|\psi_h - \varphi|_{L^\infty((a,b),\mathbb{R})} = \sup_{t\in(a,b)} \text{ess}\, |\psi_h(t) - \varphi(t)| \geq |\psi_h(t) - \varphi(t)| \quad \text{qs em } (a,b),$$

então

$$\begin{aligned}
|T_h(u) - u|_{L^1((a,b),\mathbb{R})} &= \int_a^b |T_h(u)(t) - u(t)|\, dt = \int_a^b |u(\psi_h(t)) - u(t)|\, dt \\
&= \int_a^b |u(\psi_h(t)) - u(\varphi(t))|\, dt \leq K_1 \int_a^b |\psi_h(t) - \varphi(t)|\, dt \\
&\leq K_1 \int_a^b |\psi_h - \varphi|_{L^\infty((a,b),\mathbb{R})}\, dt = K_1(b-a)\, |\psi_h - \varphi|_{L^\infty((a,b),\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

e, pela Proposição 2.14.15 e por (3.71),

$$\begin{aligned}
|T_h'(u) - u'|_{L^1((a,b),\mathbb{R})} &= \int_a^b \left|(T_h(u))'(t) - u'(t)\right| dt = \int_a^b \left|(u \circ \psi_h)'(t) - u'(t)\right| dt \\
&= \int_a^b \left|u'(\psi_h(t))\, \psi_h'(t) - u'(t)\right| dt = \int_a^b \left|u'(\psi_h(t))\, \psi_h'(t) - u'(\varphi(t))\right| dt \\
&= \int_a^b \left|u'(\psi_h(t))\, \psi_h'(t) - u'(\varphi(t))\, \psi_h'(t) + u'(\varphi(t))\, \psi_h'(t) - u'(\varphi(t))\right| dt \\
&\leq \int_a^b \left(|\psi_h'(t)|\, |u'(\psi_h(t)) - u'(\varphi(t))| + |u'(\varphi(t))|\, \left|\psi_h'(t) - 1\right|\right) dt \\
&\leq 2K_2 \int_a^b |\psi_h(t) - \varphi(t)|\, dt + K \int_a^b \left|\psi_h'(t) - 1\right| dt \\
&\leq 2K_2 \int_a^b |\psi_h - \varphi|_{L^\infty((a,b),\mathbb{R})}\, dt + K \int_a^b \left|\psi_h' - \varphi'\right|_{L^\infty((a,b),\mathbb{R})} dt \\
&= 2K_2(b-a)\, |\psi_h - \varphi|_{L^\infty((a,b),\mathbb{R})} + K\, m(\Omega) \left|\psi_h' - \varphi'\right|_{L^\infty((a,b),\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Então, por (3.72) e (3.73),

$$0 \leq |T_h(u) - u|_{L^1((a,b),\mathbb{R})} \leq K_1(b-a)\, |\psi_h - \varphi|_{L^\infty((a,b),\mathbb{R})} \to 0$$

e

$$0 \leq |T_h'(u) - u'|_{L^1((a,b),\mathbb{R})} \leq 2K_2(b-a)\, |\psi_h - \varphi|_{L^\infty((a,b),\mathbb{R})} + Km(\Omega) \left|\psi_h' - \varphi'\right|_{L^\infty((a,b),\mathbb{R})} \to 0.$$

O que mostra que

$$\left(|T_h(u) - u|_{L^1((a,b),\mathbb{R})}\right) \to 0$$

e

$$\left(|T_h'(u) - u'|_{L^1((a,b),\mathbb{R})}\right) \to 0,$$

portanto $(T_h(u)) \to u$ em $W^{1,1}((a,b), \mathbb{R})$, para qualquer $u \in C^2([a,b], \mathbb{R})$.

Seja $u \in W^{1,1}((a,b), \mathbb{R})$ qualquer.

Como $C^2([a,b], \mathbb{R})$ é denso em $W^{1,1}((a,b), \mathbb{R})$ (ver Proposição 2.12.6) então existe uma sucessão $(u_n) \subset C^2([a,b], \mathbb{R})$ tal que

$$(u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u \;\text{ em } W^{1,1}((a,b), \mathbb{R}). \tag{3.74}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado,

$$(T_h(u_n)) \underset{h\to\infty}{\longrightarrow} u_n \text{ em } W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}). \tag{3.75}$$

Por outro lado, para cada $h \in \mathbb{N}$ fixado

$$(T_h(u_n)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} T_h(u) \text{ em } W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}). \tag{3.76}$$

Queremos mostrar que

$$(T_h(u)) \underset{h\to\infty}{\longrightarrow} u \text{ em } W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}),$$

isto é,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : h > N \Rightarrow |T_h(u) - u|_{W^{1,1}((a,b),\mathbb{R})} < \varepsilon.$$

Fixemos $\varepsilon > 0$ qualquer.
Por (3.74)

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : n > N_1 \Rightarrow |u_n - u|_{W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}^n)} < \frac{\varepsilon}{3},$$

por (3.75)

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} : h > N_2 \Rightarrow |T_h(u_n) - u_n|_{W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}^n)} < \frac{\varepsilon}{3}, \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.77}$$

e por (3.76)

$$\exists N_3 \in \mathbb{N} : n > N_3 \Rightarrow |T_h(u_n) - T_h(u)|_{W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}^n)} < \frac{\varepsilon}{3}, \ \forall h \in \mathbb{N}.$$

Seja

$$N_0 > \max\{N_1, N_3\}$$

e fixemos $\overline{n} > N_0$.
Por (3.77) temos

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} : h > N_2 \Rightarrow |T_h(u_{\overline{n}}) - u_{\overline{n}}|_{W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}^n)} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Então, para qualquer $h > N_2$ temos

$$\begin{aligned}
|T_h(u) - u|_{W^{1,1}((a,b),\mathbb{R})} &= |T_h(u) - u + T_h(u_{\overline{n}}) - T_h(u_{\overline{n}}) - u_{\overline{n}} + u_{\overline{n}}|_{W^{1,1}((a,b),\mathbb{R})} \\
&\leq |T_h(u) - T_h(u_{\overline{n}})|_{W^{1,1}((a,b),\mathbb{R})} + |T_h(u_{\overline{n}}) - u_{\overline{n}}|_{W^{1,1}((a,b),\mathbb{R})} + |u_{\overline{n}} - u|_{W^{1,1}((a,b),\mathbb{R})} \\
&\leq \varepsilon,
\end{aligned}$$

o que mostra que $(T_h(u)) \underset{h\to\infty}{\longrightarrow} u$ em $W^{1,1}((a,b),\mathbb{R})$ e completa a demonstração.■

3.4.2 Existência de solução

Hipóteses básicas

A existência de solução para o problema variacional autónomo

$$\min \ \left\{ I(u) : u \in W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}^n), u(a) = A, u(b) = B \right\} \tag{P'}$$

onde

$$I(u) := \int_a^b f(u(t), u'(t))\, dt$$

será estabelecida considerando as seguintes hipóteses básicas na função

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$$

(H1) $f(s,\xi)$ é uma função boreliana e para cada $s \in \mathbb{R}^n$ a função $f(s,\cdot)$ é convexa e *sci* em $\mathbb{R}^n$;

(H2) existe $\theta : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\theta(r)}{r} = +\infty \quad \text{e} \quad f(s,\xi) \geq \theta(|\xi|) \quad \forall s, \xi \in \mathbb{R}^n;$$

(H3) para cada $r > 0$ existem $\alpha_r > 0$ e $M_r > 0$ tais que

$$f(s,\xi) \leq M_r \quad \text{sempre que} \quad |s| \leq r \quad \text{e} \quad |\xi| \leq \alpha_r.$$

Antes de provar a existência de solução provemos a existência de uma função admissível $\overline{u}$ para o problema (P').

Proposição 3.4.4 *Suponhamos que a função $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0,+\infty]$ verifica as hipóteses (H1) e (H3). Então a função lipschitziana $\overline{u} : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ definida por*

$$\overline{u}(t) := \frac{B-A}{b-a}(t-a) + A$$

é admissível para o problema (P'), e além disso $I(\overline{u})$ é finito.

Demonstração:
Como $\overline{u}$ é uma função lipschitziana, é absolutamente contínua, e evidentemente satisfaz as condições de fronteira $\overline{u}(a) = A, \overline{u}(b) = B$.
Vejamos agora que $I(\bar{u})$ é finito.
Como f não toma valores negativos então

$$I(\bar{u}) \geq 0. \tag{3.78}$$

Por outro lado, como $\bar{u}$ é contínua então é limitada em (a,b) e portanto existe $R > 0$ tal que $|\bar{u}(t)| \leq R$ para qualquer $t \in (a,b)$. Por (H3) existem constantes $\alpha_R, M_R > 0$ tais que

$$f(\bar{u}(t), \bar{u}'(t)) \leq M_R \quad \text{sempre que} \quad |\bar{u}(t)| \leq R \quad \text{e} \quad |\bar{u}'(t)| \leq \alpha_R.$$

Assim temos

$$I(\bar{u}) = \int_a^b f(\bar{u}(t), \bar{u}'(t))\, dt \leq (b-a) M_R. \tag{3.79}$$

Por (3.78) e (3.79) temos

$$0 \leq I(\bar{u}) \leq (b-a) M_R,$$

donde $I(\bar{u}) \in \mathbb{R}$.■

Proposição 3.4.5 *Suponhamos que $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0,+\infty]$ verifica as hipóteses (H1), (H2) e (H3). Seja $\overline{u} : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ a função admissível para o problema (P') dada pela Proposição 3.4.4 e seja $I(\overline{u}) = \mu$. Então o conjunto de subnível*

$$\Gamma(\bar{u}) := \left\{ u \in W^{1,1}((a,b), \mathbb{R}^n) : u(a) = A,\ u(b) = B,\ I(u) \leq I(\bar{u}) \right\}$$

é um subconjunto de $W^{1,1}((a,b), \mathbb{R}^n)$ fracamente sequencialmente relativamente compacto [20].

[20] Dizemos que $\Gamma(\bar{u})$ é um subconjunto de $W^{1,1}((a,b), \mathbb{R}^n)$ **fracamente sequencialmente relativamente compacto** se qualquer sucessão em $\Gamma(\bar{u})$ contém uma subsucessão fracamente convergente em $W^{1,1}((a,b), \mathbb{R}^n)$.

Demonstração:
Note-se que $\Gamma(\bar{u}) \neq \emptyset$, pois $\bar{u} \in \Gamma(\bar{u})$.
Seja (u_k) uma qualquer sucessão em $\Gamma(\bar{u})$, isto é uma sucessão em $W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}^n)$ verificando

$$u_k(a) = A, \ u_k(b) = B, \tag{3.80}$$

e

$$I(u_k) \leq \mu \tag{3.81}$$

para qualquer $k \in \mathbb{N}$.
De (H2) e (3.81) resulta que

$$\int_a^b \theta(|u_k'(t)|)\,dt \leq \int_a^b f(u_k(t), u_k'(t))\,dt \leq \mu \tag{3.82}$$

para qualquer $k \in \mathbb{N}$, isto é, a sucessão (u_k') é equiabsolutamente integrável (ver Proposição 2.11.35).
Por outro lado, dadas as condições em θ existe $N \geq 0$ (que depende apenas de θ) tal que $\theta(\xi) \geq \xi$ sempre que $\xi \geq N$.
Fixemos $k \in \mathbb{N}$.
Seja E^* o subconjunto de $[a,b]$ onde $|u_k'(t)| \geq N$ e seja $E = [a,b] \setminus E^*$. Temos, utilizando (3.82),

$$\begin{aligned} |u_k'|_{L^1((a,b),\mathbb{R}^n)} &= \int_a^b |u_k'(t)|\,dt = \int_{E^*} |u_k'(t)|\,dt + \int_E |u_k'(t)|\,dt \leq \int_{E^*} \theta(|u_k'(t)|)\,dt + \int_E N\,dt \\ &\leq \int_a^b \theta(|u_k'(t)|)\,dt + \int_a^b N\,dt \leq \mu + N(b-a) \end{aligned}$$

pelo que

$$|u_k'|_{L^1((a,b),\mathbb{R}^n)} \leq \mu + N(b-a), \tag{3.83}$$

o que significa, dado que k é qualquer, que a sucessão (u_k') é limitada em $L^1((a,b),\mathbb{R}^n)$.
Pelo Teorema de Dunford-Pettis (Proposição 2.11.34), podemos afirmar que existe uma subsucessão de (u_k'), ainda notada por (u_k'), e uma função $v \in L^1((a,b),\mathbb{R}^n)$ tal que $(u_k') \rightharpoonup v$ em $L^1((a,b),\mathbb{R}^n)$, isto é, temos

$$\left(\int_a^b \langle u_k'(t), \varphi(t)\rangle\,dt\right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b \langle v(t), \varphi(t)\rangle\,dt \quad \forall \varphi \in L^\infty((a,b),\mathbb{R}^n) \tag{3.84}$$

donde resulta que

$$\left(\int_a^b u_k'(t)\,dt\right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b v(t)\,dt$$

e

$$\left(\int_a^t u_k'(s)\,ds\right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^t v(s)\,ds \quad \forall t \in (a,b). \tag{3.85}$$

A sucessão (u_k) é equicontínua. De facto, uma vez que (u_k') é equiabsolutamente integrável, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\int_E |u_k'(t)|\,dt \leq \varepsilon$$

para cada k em $\mathbb{N}$ e qualquer que seja o subconjunto mensurável E de (a,b) com $m(E) \leq \delta$. Então, se $|t'' - t'| \leq \delta$, temos

$$|u_k(t'') - u_k(t')| = \left|\int_a^{t''} u_k'(s)\,ds - \int_a^{t'} u_k'(s)\,ds\right| = \left|\int_{t'}^{t''} u_k'(s)\,ds\right| \leq \int_{t'}^{t''} |u_k'(s)|\,ds \leq \varepsilon,$$

para cada $k \in \mathbb{N}$.

Além disso, (u_k) é equilimitada. Com efeito, atendendo a (3.80) e a (3.83), temos para cada $k \in \mathbb{N}$ e para cada $t \in (a,b)$,

$$\begin{aligned} |u_k(t)| &= \left| u_k(a) + \int_a^t u_k'(s)\,ds \right| \le |A| + \int_a^t |u_k'(s)|\,ds \le |A| + \int_a^b |u_k'(s)|\,ds \\ &= |A| + |u_k'|_{L^1((a,b),\mathbb{R}^n)} \le |A| + \mu + N(b-a). \end{aligned} \tag{3.86}$$

Assim, pelo Teorema de Ascoli-Arzelá (Proposição 2.11.30), existe uma subsucessão de (u_k), que notaremos ainda por (u_k), que converge uniformemente em (a,b) para uma função contínua u, isto é, temos

$$\left(\sup_{t\in(a,b)} |u_k(t) - u(t)| \right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{3.87}$$

e consequentemente, temos também a convergência pontual

$$(u_k(t)) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u(t) \quad \forall t \in (a,b). \tag{3.88}$$

A convergência

$$\begin{cases} (u_k) \to u & \text{uniformemente em } (a,b) & \text{(por (3.87))} \\ (u_k') \rightharpoonup v & \text{(fracamente) em } L^1((a,b),\mathbb{R}^n) & \text{(por (3.84))} \end{cases}$$

implica que $u \in W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}^n)$, $u' = v$ quase sempre em (a,b) e $(u_k) \rightharpoonup u$ (fracamente) em $W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}^n)$. De facto, atendendo a (3.80) e a que para cada $k \in \mathbb{N}$, u_k é absolutamente contínua, temos

$$u_k(t) = u_k(a) + \int_a^t u_k'(s)\,ds = A + \int_a^t u_k'(s)\,ds \quad \forall k \in \mathbb{N}, \text{ quase todo } t \in (a,b).$$

Daqui, atendendo a (3.85) e (3.88), resulta que

$$\begin{aligned} u(t) &= \lim_{k\to\infty} u_k(t) = \lim_{k\to\infty} \left(A + \int_a^t u_k'(s)\,ds \right) = A + \lim_{k\to\infty} \left(\int_a^t u_k'(s)\,ds \right) \\ &= A + \int_a^t v(s)\,ds, \quad \forall t \in (a,b) \end{aligned}$$

o que significa que u é absolutamente contínua e $u'(t) = v(t)$ para quase todo $t \in (a,b)$ (ver Proposição 2.14.11).

Note-se que a convergência uniforme de (u_k) para u implica ainda que

$$u(a) = A, \quad u(b) = B,$$

(basta atender a (3.80) e a (3.88)).

Falta então ver que $(u_k) \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} u$ em $W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}^n)$, isto é, que

$$\text{(i)} \quad \left(\int_a^b \langle u_k(t), \varphi(t) \rangle\,dt \right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b \langle u(t), \varphi(t) \rangle\,dt \quad \forall \varphi \in L^\infty((a,b),\mathbb{R}^n);$$

$$\text{(ii)} \quad \left(\int_a^b \langle u_k'(t), \varphi(t) \rangle\,dt \right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b \langle u'(t), \varphi(t) \rangle\,dt \quad \forall \varphi \in L^\infty((a,b),\mathbb{R}^n).$$

Como temos (3.84) e $u'(t) = v(t)$ para quase todo $t \in (a,b)$ então verifica-se (ii).

Por outro lado, pela Desigualdade de Hölder (Proposição 2.11.16) e por (3.87), podemos escrever

$$\begin{aligned} 0 &\le \left| \int_a^b \langle u_k(t) - u(t), \varphi(t) \rangle\,dt \right| \le \int_a^b |\langle u_k(t) - u(t), \varphi(t) \rangle|\,dt \le |\varphi|_{L^\infty((a,b),\mathbb{R}^n)} |u_k - u|_{L^1((a,b),\mathbb{R}^n)} \\ &= |\varphi|_{L^\infty((a,b),\mathbb{R}^n)} \int_a^b |u_k(t) - u(t)|\,dt \le |\varphi|_{L^\infty((a,b),\mathbb{R}^n)} \int_a^b \sup_{t\in(a,b)} |u_k(t) - u(t)|\,dt \\ &= (b-a)\,|\varphi|_{L^\infty((a,b),\mathbb{R}^n)} \sup_{t\in(a,b)} |u_k(t) - u(t)| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

o que significa que também se verifica (i).

Ficou assim provado que se $(u_k) \subset \Gamma(\bar{u})$ então existe uma função $u \in W^{1,1}((a,b), \mathbb{R}^n)$ tal que, passando se necessário a uma subsucessão, $(u_k) \rightharpoonup u$ em $W^{1,1}((a,b), \mathbb{R}^n)$. Além disso, temos $u(a) = A$, $u(b) = B$.■

Proposição 3.4.6 *Se $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ verifica as hipóteses (H1), (H2) e (H3) então o funcional I é limitado inferiormente no conjunto $\Gamma(\overline{u})$.*

Demonstração:
Seja u um elemento qualquer de $\Gamma(\bar{u})$.
Atendendo a que as igualdades (3.83) e (3.86) são válidas para qualquer função em $\Gamma(\bar{u})$, podemos escrever

$$|u|_{L^1((a,b),\mathbb{R}^n)} = \int_a^b |u(t)|\, dt \leq \int_a^b (|A| + \mu + N(b-a))\, dt = (b-a)(|A| + \mu + N(b-a))$$

e

$$|u'|_{L^1((a,b),\mathbb{R}^n)} \leq \mu + N(b-a).$$

Por (H2) existem duas constantes α e β com $\beta > 0$, tais que

$$f(s,\xi) \geq \beta|\xi| + \alpha \quad \forall s, \xi \in \mathbb{R}^n,$$

pelo que

$$\begin{aligned} I(u) &= \int_a^b f(u(t), u'(t))\, dt \geq \int_a^b (\beta|u'(t)| + \alpha)\, dt = \alpha(b-a) + \beta \int_a^b |u'(t)|\, dt \\ &= (b-a)\left(\alpha + \beta|u'|_{L^1((a,b),\mathbb{R}^n)}\right) \geq (b-a)\alpha \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

o que prova que I é limitado inferiormente em $\Gamma(\bar{u})$.■

Provemos agora que de facto, o problema (P') tem solução. Consideremos separadamente o caso $n = 1$ (caso escalar) e o caso $n > 1$ (caso vectorial).

Proposição 3.4.7 *Suponhamos que $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ verifica as hipóteses (H1), (H2) e (H3). Além disso, suponhamos que*

(H4)' *a função $f(\cdot, 0)$ é sci em $\mathbb{R}$.*

Então, para $n = 1$, o problema (P') tem solução.

Demonstração:
Provemos a existência de solução utilizando o método directo do cálculo das variações.
A função f verifica as hipóteses (i), (ii) e (iii) da Proposição 2.24.1. Além disso, por (H3),

$$\forall r > 0\ \exists \alpha_r > 0\ \exists M_r > 0 : f(s,\xi) \leq M_r, \ \forall s\ |s| \leq r, \ \forall \xi\ |\xi| \leq \alpha_r.$$

Então, para cada $r > 0$ fixado, sejam

$$R := [-r, r] \quad \text{e} \quad \beta(s) := M_r \in L^1(R, \mathbb{R}).$$

Fazendo variar o r em $\mathbb{R}^+$ concluimos que $\beta \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e portanto

$$\exists \varepsilon := \alpha_r\ \exists \beta := M_r \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(s,\xi) \leq \beta(s), \ \forall s \in \mathbb{R}, \ \forall \xi \in \mathbb{R} \text{ com } |\xi| \leq \varepsilon.$$

O que, pela Observação 2.24.2, mostra que f verifica a hipótese (iv) da Proposição 2.24.1.

Logo, pela Proposição 2.24.1, podemos concluir que o funcional I está bem definido na classe de funções

$$\left\{u \in W^{1,1}_{loc}((a,b), \mathbb{R}) : u(a) = A, \ u(b) = B\right\}$$

tomando possivelmente o valor $+\infty$, e em particular está bem definido na classe de funções

$$W := \left\{u \in W^{1,1}\left((a,b), \mathbb{R}\right) : u(a) = A,\ u(b) = B\right\}.$$

Pela Proposição 3.4.4, existe uma função $\overline{u} \in W^{1,1}\left((a,b), \mathbb{R}\right)$ verificando as condições de fronteira $\overline{u}(a) = A$, $\overline{u}(b) = B$ e tal que $I(\overline{u})$ é finito. Digamos que

$$I(\overline{u}) = \mu.$$

Para mostrar a existência de uma solução não é necessário considerar toda a classe de funções W basta considerar o conjunto de subnível

$$\Gamma(\bar{u}) = \left\{u \in W^{1,1}\left((a,b), \mathbb{R}\right) : u(a) = A, u(b) = B,\ I(u) \leq I(\bar{u})\right\}.$$

O conjunto $\Gamma(\bar{u})$ é não-vazio e, pela Proposição 3.4.5, é um subconjunto de $W^{1,1}\left((a,b), \mathbb{R}\right)$ fracamente sequencialmente relativamente compacto, isto é, qualquer sucessão em $\Gamma(\bar{u})$ contém uma subsucessão fracamente convergente em $W^{1,1}\left((a,b), \mathbb{R}\right)$.

Fixemos $(u_k) \subset W^{1,1}\left((a,b), \mathbb{R}\right)$ tal que $(u_k) \rightharpoonup u$ em $W^{1,1}\left((a,b), \mathbb{R}\right)$. Pela Proposição 2.12.10 existe uma subsucessão de (u_k), denotada ainda por (u_k), tal que $(u_k) \to u$ em $L^1\left((a,b), \mathbb{R}\right)$ o que implica que $(u_k) \to u$ em $L^1_{loc}\left((a,b), \mathbb{R}\right)$. Além disso $W^{1,1}\left((a,b), \mathbb{R}\right) \subset W^{1,1}_{loc}\left((a,b), \mathbb{R}\right)$ então $(u_k) \subset W^{1,1}_{loc}\left((a,b), \mathbb{R}\right)$ e $(u_k) \to u$ em $L^1_{loc}\left((a,b), \mathbb{R}\right)$. Pela Proposição 2.24.1 o funcional I é *sci* em $W^{1,1}_{loc}\left((a,b), \mathbb{R}\right)$ em relação à topologia de $L^1_{loc}\left((a,b), \mathbb{R}\right)$ então

$$I(u) \leq \liminf_{k\to\infty} I(u_k). \tag{3.89}$$

Dada a arbitrariedade de (u_k) podemos concluir que I é *sci* na topologia fraca de $W^{1,1}\left((a,b), \mathbb{R}\right)$.

Pela Proposição 3.4.6, I é limitado inferiormente em $\Gamma(\bar{u})$.

Finalmente, seja $(u_k) \subset \Gamma(\bar{u})$ uma sucessão minimizante para o funcional I, isto é, tal que

$$\lim_{k\to\infty} I(u_k) = \inf\left\{I(u) : u \in \Gamma(\bar{u})\right\},$$

e seja

$$i := \inf\left\{I(u) : u \in \Gamma(\bar{u})\right\}.$$

Então temos

$$i \leq I(\bar{u}) = \mu < +\infty.$$

Por outro lado, temos também

$$i > -\infty$$

pois I é limitado inferiormente no conjunto $\Gamma(\bar{u})$.

Como $\Gamma(\bar{u})$ é fracamente sequencialmente relativamente compacto então existe uma função $u^* \in W^{1,1}\left((a,b), \mathbb{R}\right)$, tal que, passando se necessário a uma subsucessão, $(u_k) \rightharpoonup u^*$ em $W^{1,1}\left((a,b), \mathbb{R}\right)$. Além disso, pela Proposição 3.4.5, sabemos que u^* satisfaz as condições de fronteira

$$u^*(a) = A, \quad u^*(b) = B.$$

Atendendo a (3.89) podemos escrever

$$-\infty < i \leq I(u^*) \leq \liminf_{k\to\infty} I(u_k) = i \leq \mu < +\infty,$$

donde se conclui que

$$I(u^*) = i,$$

o que significa que u^* é uma solução admissível para o problema (P').

O que mostra que, no caso $n = 1$, sob a hipótese extra (H4)' o problema (P') tem solução.■

Proposição 3.4.8 *Suponhamos que* $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ *verifica as hipóteses (H1), (H2) e (H3). Além disso, suponhamos que*

(H4)" *a função* $f(s, \xi)$ *é sci em* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Então, para $n > 1$, *o problema (P') tem solução.*

Demonstração:
A existência de solução neste caso segue, tal como no outro, pelo método directo do cálculo das variações.

Para qualquer $u \in W^{1,1}((a,b), \mathbb{R}^n)$, a função $t \to (u(t), u'(t))$ é Lebesgue-mensurável e $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{2n})$ então, pelas Proposições 2.7.13 e 2.7.24, a função

$$(a,b) \ni t \to f(u(t), u'(t))$$

é Lebesgue-mensurável. Além disso, f toma valores não-negativos então o funcional

$$I(u) = \int_a^b f(u(t), u'(t))\, dt$$

está bem definido na classe de funções

$$W = \left\{u \in W^{1,1}((a,b), \mathbb{R}^n) : u(a) = A,\ u(b) = B\right\},$$

tomando possivelmente o valor $+\infty$.

Pela Proposição 3.4.4, existe uma função $\overline{u} \in W^{1,1}((a,b), \mathbb{R}^n)$ verificando as condições de fronteira $\overline{u}(a) = A$, $\overline{u}(b) = B$ tal que $I(\overline{u})$ é finito. Digamos

$$I(\overline{u}) = \mu.$$

Para mostrar a existência de uma solução não é necessário considerar toda a classe de funções W basta considerar o conjunto de subnível

$$\Gamma(\bar{u}) = \left\{u \in W^{1,1}((a,b), \mathbb{R}^n) : u(a) = A, u(b) = B,\ I(u) \leq \mu\right\}.$$

O conjunto $\Gamma(\bar{u})$ é não-vazio e, pela Proposição 3.4.5, é um subconjunto de $W^{1,1}((a,b), \mathbb{R}^n)$ fracamente sequencialmente relativamente compacto, isto é, qualquer sucessão em $\Gamma(\bar{u})$ contém uma subsucessão fracamente convergente em $W^{1,1}((a,b), \mathbb{R}^n)$.

A semicontinuidade inferior (fraca) do funcional I segue da Proposição 2.24.3. Na realidade, como f verifica (H1), (H2), é *sci* em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e além disso, pela Proposição 3.3.3, podemos supor que a função θ de (H2) é convexa, *sci*, crescente e não-negativa então estão verificadas todas as hipóteses da Proposição 2.24.3.

Agora seja $(u_k) \subset W^{1,1}((a,b), \mathbb{R}^n)$ uma sucessão fracamente convergente para $\bar{u}$ em $W^{1,1}((a,b), \mathbb{R}^n)$. Pela Proposição 2.12.10 existe uma subsucessão de (u_k), notada ainda por (u_k), tal que

$$(u_k) \to \bar{u} \quad \text{em } L^1((a,b), \mathbb{R}^n)$$

e, pela Proposição 2.11.26, existe uma subsucessão de (u_k), também notada por (u_k), tal que

$$(u_k(t)) \to \bar{u}(t) \quad \text{qs em } (a,b).$$

Por outro lado, como $(u_k) \rightharpoonup \bar{u}$ fracamente em $W^{1,1}((a,b), \mathbb{R}^n)$ então, pela Observação 2.12.9, $(u_k') \rightharpoonup \bar{u}'$ fracamente em $L^1((a,b), \mathbb{R}^n)$. Logo, pela Proposição 2.24.3, temos

$$\int_a^b f(\bar{u}(t), \bar{u}'(t))\, dt \leq \liminf_{k \to \infty} \int_a^b f(\bar{u}_k(t), \bar{u}_k'(t))\, dt.$$

O que significa que o funcional I é *sci* na topologia fraca de $W^{1,1}((a,b), \mathbb{R}^n)$.

O resto da demonstração segue tal como na Proposição 3.4.7.■

Teorema 3.4.9 *Seja $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ uma função verificando (H1) e seja $u \in W^{1,1}((a,b), \mathbb{R}^n)$ um $W^{1,1}$-minimizante local para o funcional*

$$I(v) = \int_a^b f(v(t), v'(t))\, dt, \quad v \in W^{1,1}((a,b), \mathbb{R}^n), v(a) = A, v(b) = B,$$

com $I(u) \in \mathbb{R}$. Além disso, suponhamos que

$$u'(t) \in int(dom\, f(u(t), \cdot)) \quad qs \text{ em } (a,b).$$

Então, existem uma constante $c \in \mathbb{R}$ e uma função mensurável $p(t)$, tais que para quase todo $t \in (a,b)$

$$p(t) \in \partial_\xi f(u(t), u'(t)),$$

$$c = \langle p(t), u'(t) \rangle - f(u(t), u'(t)).$$

Demonstração:
Seja $u \in W^{1,1}((a,b), \mathbb{R}^n)$ um $W^{1,1}$-minimizante local para o funcional I e seja $g : (a,b) \times \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ uma função definida por

$$g(t,p) = \begin{cases} f\left(u(t), \frac{u'(t)}{p}\right) p & \text{se } p > 0 \\ \liminf\limits_{q \to 0^+} f\left(u(t), \frac{u'(t)}{q}\right) q & \text{se } p = 0 \\ +\infty & \text{se } p < 0. \end{cases}$$

Fixemos $t \in (a,b)$ tal que $u'(t)$ existe e $u'(t) \in int(dom\, f(u(t), \cdot))$.
Pelo Lema 3.4.1 a função

$$p \to g(t,p) \text{ é convexa e } sci \text{ em } \mathbb{R}.$$

Por outro lado, a função f é Borel-mensurável e $u \in W^{1,1}((a,b), \mathbb{R}^n)$ então g é $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$-mensurável e portanto g é um integrando convexo.
Consideremos a função identidade $\varphi(t) := t$ e o conjunto

$$B := \left\{\psi \in W^{1,\infty}((a,b), \mathbb{R}) : |\psi - \varphi|_{W^{1,\infty}((a,b),\mathbb{R})} < 1, \, \psi(a) = a, \, \psi(b) = b\right\}.$$

Fixemos $\psi \in B$.
Temos

$$|\psi - \varphi|_{W^{1,\infty}((a,b),\mathbb{R})} < 1 \Rightarrow \left|\psi' - \varphi'\right|_{L^\infty((a,b),\mathbb{R})} < 1 \Leftrightarrow \sup_{t \in (a,b)} \text{ess} \left|\psi'(t) - 1\right| < 1,$$

o que implica

$$0 < \psi'(t) < 2 \text{ qs em } (a,b) \tag{3.90}$$

e portanto, pela definição da função g, temos

$$\int_a^b g(t, \psi'(t))\, dt = \int_a^b f\left(u(t), \frac{u'(t)}{\psi'(t)}\right) \psi'(t)\, dt. \tag{3.91}$$

Façamos a mudança de variável $t = \psi^{-1}(s)$ no integral da direita. Notemos que, pela Proposição 2.14.19, existe a função inversa ψ^{-1}, é absolutamente contínua e além disso, para quase todo $s \in (a,b)$,

$$\frac{dt}{ds} = \frac{d}{ds}\psi^{-1}(s) = \frac{1}{\psi'(\psi^{-1}(s))}. \tag{3.92}$$

Pelo que

$$\begin{aligned}\int_a^b f\left(u(t), \frac{u'(t)}{\psi'(t)}\right) \psi'(t)\,dt &= \int_a^b f\left(u\left(\psi^{-1}(s)\right), \frac{u'\left(\psi^{-1}(s)\right)}{\psi'\left(\psi^{-1}(s)\right)}\right) \psi'\left(\psi^{-1}(s)\right) \frac{1}{\psi'\left(\psi^{-1}(s)\right)} ds \\ &= \int_a^b f\left(u\left(\psi^{-1}(s)\right), \frac{u'\left(\psi^{-1}(s)\right)}{\psi'\left(\psi^{-1}(s)\right)}\right) ds. \qquad (3.93)\end{aligned}$$

Por (3.90) e (3.92)

$$\left(\psi^{-1}\right)'(s) > 0 \quad \text{qs em } (a,b)$$

o que é equivalente a dizer que ψ^{-1} é uma função crescente (ver Proposição 2.14.16). Portanto, pela Proposição 2.14.15, verifica-se a regra da cadeia

$$\left(u \circ \psi^{-1}\right)'(s) = u'\left(\psi^{-1}(s)\right)\left(\psi^{-1}\right)'(s) = \frac{u'\left(\psi^{-1}(s)\right)}{\psi'\left(\psi^{-1}(s)\right)} \quad \text{qs em } (a,b).$$

Então por (3.91) e (3.93), temos

$$\int_a^b g\left(t, \psi'(t)\right) dt = \int_a^b f\left(\left(u \circ \psi^{-1}\right)(s), \left(u \circ \psi^{-1}\right)'(s)\right) ds \quad \forall \psi \in B.$$

Provemos agora que $\varphi(t) = t$ é um minimizante local em $W^{1,\infty}((a,b), \mathbb{R})$ para o funcional

$$G(\varphi) := \int_a^b g\left(t, \varphi'(t)\right) dt \quad \varphi(a) = a,\ \varphi(b) = b.$$

Seja $(\psi_h) \subset W^{1,\infty}((a,b), \mathbb{R})$ uma sucessão de funções convergindo em $W^{1,\infty}((a,b), \mathbb{R})$ para $\varphi(t) = t$ e tal que, para cada $h \in \mathbb{N}$,

$$\psi_h(a) = a,\ \psi_h(b) = b. \qquad (3.94)$$

Dizer que $(\psi_h) \to \varphi$ em $W^{1,\infty}((a,b), \mathbb{R})$ significa

$$\left(|\psi_h - \varphi|_{W^{1,\infty}((a,b),\mathbb{R})}\right) \underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ou seja,

$$\forall \varepsilon_1 > 0\ \exists N_1 \in \mathbb{N} : h > N_1 \Rightarrow |\psi_h - \varphi|_{W^{1,\infty}((a,b),\mathbb{R})} < \varepsilon_1,$$

então existe uma ordem a partir da qual

$$|\psi_h - \varphi|_{W^{1,\infty}((a,b),\mathbb{R})} < 1. \qquad (3.95)$$

Suponhamos, sem perda de generalidade, que (3.95) se verifica para todo $h \in \mathbb{N}$.

Então $(\psi_h) \subset B$.

Como $u \in W^{1,1}((a,b), \mathbb{R}^n)$ então, pelo Lema 3.4.3, a sucessão $\left(u \circ \psi_h^{-1}\right)$ converge para u em $W^{1,1}((a,b), \mathbb{R}^n)$, isto é,

$$\forall \varepsilon_2 > 0\ \exists N_2 \in \mathbb{N} : h > N_2 \Rightarrow \left|u \circ \psi_h^{-1} - u\right|_{W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}^n)} < \varepsilon_2.$$

Além disso, u é um $W^{1,1}$-minimizante local para I e, por (3.94),

$$\left(u \circ \psi_h^{-1} - u\right)(a) = u\left(\psi_h^{-1}(a)\right) - u(a) = 0 \quad \text{e} \quad \left(u \circ \psi_h^{-1} - u\right)(b) = u\left(\psi_h^{-1}(b)\right) - u(b) = 0$$

então, existe $\delta > 0$, tal que

$$\begin{aligned} \left|u \circ \psi_h^{-1} - u\right|_{W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}^n)} < \delta \quad &\Rightarrow \quad I(u) \leq I\left(u \circ \psi_h^{-1} - u + u\right) \\ &\Leftrightarrow \quad I(u) \leq I\left(u \circ \psi_h^{-1}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad G(\varphi) \leq G(\psi_h). \end{aligned} \tag{3.96}$$

Fixemos tal $\delta > 0$ e suponhamos que (3.96) se verifica para qualquer $h \in \mathbb{N}$.
Então, provámos que

$$\forall (\psi_h) \subset W^{1,\infty}((a,b),\mathbb{R}) : \psi_h(a) = a, \psi_h(b) = b, |\psi_h - \varphi|_{W^{1,\infty}((a,b),\mathbb{R})} < 1$$

temos

$$G(\varphi) \leq G(\psi_h),$$

o que mostra que φ é um $W^{1,\infty}$-minimizante local para o funcional G.
Pela Proposição 3.3.1, existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$-c \in \partial g(t,1) \quad \text{qs em } (a,b). \tag{3.97}$$

Fixemos $t \in \Omega$ onde

$$\Omega := \{t \in (a,b) : \exists u'(t),\ u'(t) \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f(u(t),\cdot)),\ -c \in \partial g(t,1)\}.$$

Consideremos a multifunção

$$\Gamma(t) := \{w \in \mathbb{R}^n : w \in \partial_\xi f(u(t), u'(t)),\ f(u(t), u'(t)) - \langle w, u'(t)\rangle = -c\}.$$

Temos $\Gamma(t) \neq \emptyset$. De facto, como para cada $s \in \mathbb{R}^n$ a função $f(s,\cdot)$ é convexa em $\mathbb{R}^n$ e $u'(t) \in int\,(dom\, f(u(t),\cdot))$ então, pela Proposição 2.21.4,

$$\partial_\xi f(u(t), u'(t)) \neq \emptyset.$$

Além disso, pelo Lema 3.4.1, temos

$$\partial g(t,1) = f(u(t), u'(t)) - \langle u'(t), \partial_\xi f(u(t), u'(t))\rangle.$$

Então,

$$-c = f(u(t), u'(t)) - \langle w, u'(t)\rangle$$

para algum $w \in \partial_\xi f(u(t), u'(t))$.
Provemos agora que $\Gamma(t)$ é uma multifunção mensurável, para isto escrevemos

$$\Gamma(t) = \Theta(t) \cap \partial_\xi f(u(t), u'(t))$$

onde

$$\Theta(t) := \{w \in \mathbb{R}^n : f(u(t), u'(t)) - \langle w, u'(t)\rangle = -c\}.$$

Comecemos então por provar que a multifunção $\Theta(t)$ é mensurável. Temos

$$\Theta(t) = \{w \in \mathbb{R}^n : h(t,w) = -c\}$$

onde $h : (a,b) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é definida por

$$h(t,w) = f(u(t), u'(t)) - \langle w, u'(t)\rangle.$$

Como f é uma função Boreliana e $u \in W^{1,1}((a,b), \mathbb{R}^n)$ então, pelas Proposições 2.7.12, 2.7.13 e 2.7.24, a função $h(\cdot, w)$ é mensurável para qualquer $w \in \mathbb{R}^n$. Por outro lado, para qualquer $t \in \Omega$ a função

$$w \to \langle w, u'(t) \rangle$$

é contínua em $\mathbb{R}^n$, portanto também a função

$$w \to h(t, w)$$

é contínua em $\mathbb{R}^n$ para qualquer $t \in \Omega$. Logo, pela Proposição 2.23.14, a multifunção $\Theta(t)$ é mensurável e tem valores fechados.

Provemos agora que a multifunção $\partial_\xi f(u(t), u'(t))$ é mensurável e tem valores fechados.

Consideremos a função $j : (a,b) \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ definida por

$$j(t, \xi) := f(u(t), \xi).$$

Então a função j é $\mathcal{L} \times \mathcal{B}_n$-mensurável e a função $j(t, \cdot)$ é *sci* e convexa para cada $t \in \Omega$ fixado, ou seja j é um integrando convexo. Portanto, pela Proposição 2.23.15, a multifunção $\partial j(t, u'(t))$ é mensurável e tem valores fechados, ou seja, a multifunção $\partial_\xi f(u(t), u'(t))$ é mensurável e tem valores fechados.

Assim, pela Proposição 2.23.13, a multifunção Γ é mensurável e tem valores fechados e, pela Proposição 2.23.12, existe uma função $p : dom\,\Gamma \to \mathbb{R}^n$ mensurável e tal que

$$p(t) \in \partial_\xi f(u(t), u'(t))$$

$$f(u(t), u'(t)) - \langle p(t), u'(t) \rangle = -c,$$

para alguma constante $c \in \partial g(t, 1)$. Como

$$\text{dom}\,\Gamma := \{t \in (a,b) : \Gamma(t) \neq \emptyset\} = \Omega$$

então existem uma função mensurável p e uma constante $c \in \mathbb{R}$ tais que

$$p(t) \in \partial_\xi f(u(t), u'(t))$$

$$\langle p(t), u'(t) \rangle - f(u(t), u'(t)) = c \quad \text{qs em } (a,b).$$

■

Teorema 3.4.10 *Suponhamos que a função $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ verifica as hipóteses (H1), (H2) e (H3). Então, qualquer $W^{1,1}$-minimizante local u para o funcional I com $I(u) < +\infty$ é lipschitziano em $[a,b]$.*

Demonstração:

Seja $u \in W^{1,1}((a,b), \mathbb{R}^n)$ um $W^{1,1}$-minimizante local para o funcional I e sejam c, p dados pelo Teorema 3.4.9, isto é tais que

$$p(t) \in \partial_\xi f(u(t), u'(t)), \tag{3.98}$$

$$c = \langle p(t), u'(t) \rangle - f(u(t), u'(t)), \tag{3.99}$$

para quase todo $t \in (a,b)$.

Sejam

$$r := |u|_{L^\infty((a,b),\mathbb{R}^n)} = \inf\{R : |u(t)| \leq R \quad \text{qs em } (a,b)\}$$

e

$$\Omega := \{t \in (a,b) : \text{verificam-se (3.98) e (3.99)}, \, u'(t) \in \text{int}(\text{dom}\, f(u(t), \cdot)), \, |u(t)| \leq r\},$$

notemos que $m((a,b)\setminus N) = 0$.

Fixemos $\alpha_r > 0$ e $M_r > 0$ dados por (H3).

Seja $t \in \Omega$ tal que $|u'(t)| > \alpha_r$.

Por (H2) existe $\theta : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f(u(t),\xi) \geq \theta(|\xi|)$ para qualquer $\xi \in \mathbb{R}^n$. Então, pelo Lema 3.4.2, temos

$$\langle p(t), u'(t)\rangle - f(u(t), u'(t)) \geq \varepsilon \frac{\theta(|u'(t)|)}{|u'(t)| - \varepsilon} - f\left(u(t), \varepsilon \frac{u'(t)}{|u'(t)|}\right) \frac{|u'(t)|}{|u'(t)| - \varepsilon} \quad \forall \varepsilon \in (0, |u'(t)|).$$

Então, por (3.98),

$$c \geq \varepsilon \frac{\theta(|u'(t)|)}{|u'(t)| - \varepsilon} - f\left(u(t), \frac{\varepsilon u'(t)}{|u'(t)|}\right) \frac{|u'(t)|}{|u'(t)| - \varepsilon} \quad \forall \varepsilon \in (0, |u'(t)|). \tag{3.100}$$

Como $|u'(t)| > \alpha_r$ então (3.100) verifica-se, em particular, para $\varepsilon = \alpha_r$

$$c \geq \alpha_r \frac{\theta(|u'(t)|)}{|u'(t)| - \alpha_r} - f\left(u(t), \frac{\alpha_r u'(t)}{|u'(t)|}\right) \frac{|u'(t)|}{|u'(t)| - \alpha_r}.$$

Por outro lado, temos

$$|u(t)| \leq r$$

e

$$\left|\frac{\alpha_r u'(t)}{|u'(t)|}\right| = \alpha_r$$

logo, por (H3),

$$f\left(u(t), \frac{\alpha_r u'(t)}{|u'(t)|}\right) \leq M_r$$

e por conseguinte

$$c \geq \alpha_r \frac{\theta(|u'(t)|)}{|u'(t)| - \alpha_r} - M_r \frac{|u'(t)|}{|u'(t)| - \alpha_r}.$$

Assim mostramos que para quase todo $t \in (a,b)$ tal que $|u'(t)| > \alpha_r$ temos

$$\theta(|u'(t)|) \leq \frac{c(|u'(t)| - \alpha_r) + M_r |u'(t)|}{\alpha_r},$$

o que implica

$$\frac{\theta(|u'(t)|)}{|u'(t)|} \leq \frac{c(|u'(t)| - \alpha_r) + M_r |u'(t)|}{\alpha_r |u'(t)|} = \frac{c}{\alpha_r} \frac{|u'(t)| - \alpha_r}{|u'(t)|} + \frac{M_r}{\alpha_r} < \frac{c}{\alpha_r} + \frac{M_r}{\alpha_r}. \tag{3.101}$$

Por (H2) sabemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe R_n tal que $\theta(r) \geq nr$ para cada $r > R_n$.

Se u' não é essencialmente limitada em (a,b) então o conjunto

$$Z_n := \{t \in (a,b) : |u'(t)| \geq R_n\}$$

tem medida positiva. Logo para $t \in Z_n$ temos

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\theta(|u'(t)|)}{|u'(t)|} = +\infty,$$

o que contradiz (3.101), pois

$$\frac{c}{\alpha_r} + \frac{M_r}{\alpha_r} \in \mathbb{R}.$$

Logo u' é essencialmente limitada em (a,b) e portanto existe $M>0$ tal que

$$\left|u(t_1)-u(t_2)\right| = \left|\int_{t_1}^{t_2} u'(t)\,dt\right| \le \int_{t_1}^{t_2} \left|u'(t)\right| dt \le M\left|t_1-t_2\right|,$$

para quaisquer $t_1,t_2 \in (a,b)$, o que mostra que u é lipschitziana em (a,b). O resto da demonstração segue tal como no Teorema 3.3.5.■

Nota 3.4.11 *Em [2] mostra-se que a hipótese (H3) não pode ser desprezada no Teorema 3.4.10 e é dado como exemplo o caso em que* $n=1$, $a=0$, $b=1$, $A=0$, $B\neq 0$ *e* $\widetilde{f}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ *definida por*

$$\widetilde{f}(s,\xi) = \begin{cases} \xi^2 + \left|\xi - \frac{1}{s}\right|^2 & \text{se } s\neq 0,\ \xi\in\mathbb{R} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Mas esta função não serve pois não verifica (H2), isto é, não existe uma função $\theta:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ *tal que*

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\theta(r)}{r} = +\infty \quad e \quad \widetilde{f}(s,\xi) \ge \theta(|\xi|) \quad \forall s,\xi\in\mathbb{R}.$$

Na realidade existe $\theta:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ *definida por*

$$\theta(r) := r^2$$

mas temos apenas

$$\widetilde{f}(s,\xi) \ge \theta(|\xi|) \quad \forall s,\xi\in\mathbb{R} \ \text{ com } s\neq 0.$$

Ainda mais,

$$I(u) = \int_0^1 \widetilde{f}(u(t),u'(t))\,dt = +\infty \quad \forall u\in W^{1,1}((0,1),\mathbb{R}) \ \text{ com } u(0)=0, u(1)=B\neq 0. \tag{3.102}$$

De facto, se

$$X := \left\{u\in W^{1,1}((0,1),\mathbb{R}) : u(0)=0, u(1)=B\neq 0, \int_0^1 \widetilde{f}(u(t),u'(t))\,dt < +\infty\right\} \neq \emptyset$$

então existia $u\in W^{1,1}((0,1),\mathbb{R})$ *tal que* $u(0)=0, u(1)=B\neq 0$ *o que implica que*

$$\exists N\subset[0,1]: \ m(N)>0, \ u(t)\neq 0 \ \text{ qs em } N$$

e tal que

$$\int_0^1 \widetilde{f}(u(t),u'(t))\,dt < +\infty.$$

Esta última desigualdade implica que

$$\int_{[0,1]\setminus N} \widetilde{f}(u(t),u'(t))\,dt + \int_N \widetilde{f}(u(t),u'(t))\,dt < +\infty,$$

o que implica

$$\int_N \left(u'^2(t) + \left|u'(t) - \frac{1}{u(t)}\right|^2\right) dt < +\infty$$

e isto ainda implica que

$$\int_N u'^2(t)\,dt < +\infty \quad e \quad \int_N \left|u'(t) - \frac{1}{u(t)}\right|^2 dt < +\infty,$$

pelo que se pode concluir que

$$u' \in L^2(N,\mathbb{R}) \quad e \quad z := u' - \frac{1}{u} \in L^2(N,\mathbb{R}).$$

Assim temos

$$u' - z \in L^2(N,\mathbb{R})$$

e portanto

$$w(t) := u'^2(t) - z(t) + (u'(t) - z(t))^2 \in L^1(N,\mathbb{R}).$$

Mas depois de alguns cálculos vemos que

$$w(t) = 2\frac{u'(t)}{u(t)} \notin L^1(N,\mathbb{R}). \tag{3.103}$$

Chegamos assim a um absurdo. Provemos que de facto se verifica (3.103). Façamos $N = \cup_{i=1}^{k}[a_i,b_i]$ *para algum* $k \in \mathbb{N}$, *com* $[a_i,b_i] \subset [0,1]$ *para qualquer* $i = 1,...,k$. *Temos* $u(a_1) = 0$ *e* $u(b_k) = B$ *e*

$$\int_N \frac{u'(t)}{u(t)}dt = \sum_{i=1}^{k}\int_{a_i}^{b_i}\frac{u'(t)}{u(t)}dt = \sum_{i=1}^{k}[\log|u(t)|]_{a_i}^{b_i} = \log|u(b_k)| - \log|u(a_1)| \to +\infty.$$

No entanto é possível encontrar um integrando f *que mostre que a hipótese (H3) não pode ser desprezada. Consideremos a função* $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to [0,+\infty)$ *definida por*

$$f(s,\xi) = \begin{cases} \xi^2 + \left|\xi - \frac{1}{|s|^{1/4}}\right|^2 & se\ s \neq 0,\ \xi \in \mathbb{R} \\ \xi^2 & caso\ contrário. \end{cases}$$

Comecemos por mostrar que, neste caso, não se verifica (3.102). Para isso mostremos que

$$I(u) < +\infty \quad \forall u \in W := \left\{ u \in W^{1,2}((0,1),\mathbb{R}) : \int_M \frac{1}{|u|^{1/2}}dt < +\infty, u(0) = 0, u(1) = B \neq 0 \right\},$$

sendo M *um qualquer subconjunto de* $(0,1)$ *com* $m(M) > 0$ *e tal que* $u(t) \neq 0$ *para qualquer* $t \in M$.

Fixemos $u \in W$. *Então temos* $u(1) = B \neq 0$ *o que implica que existe* $M \subset (0,1)$ *com* $m(M) > 0$ *e tal que*

$$u(t) \neq 0 \quad \forall t \in M.$$

Donde

$$\begin{aligned} I(u) &= \int_M \left(u'^2 + \left|u' - \frac{1}{|u|^{1/4}}\right|^2\right)dt + \int_{(0,1)\setminus M} u'^2 dt = \int_0^1 u'^2 dt + \int_M \left|u' - \frac{1}{|u|^{1/4}}\right|^2 dt \\ &\leq \int_0^1 u'^2 dt + \int_M \left(u'^2 + 2\frac{|u'|}{|u|^{1/4}} + \frac{1}{|u|^{1/2}}\right)dt \leq \int_0^1 u'^2 dt + 2\int_M \left(u'^2 + \frac{1}{|u|^{1/2}}\right)dt \\ &\leq 3\int_0^1 u'^2 dt + 2\int_M \frac{1}{|u|^{1/2}}dt < +\infty. \end{aligned}$$

A função f *é sci em* $\mathbb{R}^2$ *então, pela Proposição 2.17.5, o conjunto*

$$\{(s,\xi) \in \mathbb{R}^2 : f(s,\xi) > \alpha\}$$

é aberto para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, *e portanto* $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. *Além disso, a função* $f(s,\cdot)$ *é convexa em* $\mathbb{R}$, *para qualquer* $s \in \mathbb{R}$ *e*

$$dom\ f(u(t),\cdot) = \mathbb{R} \quad \forall t \in (0,1). \tag{3.104}$$

Seja $u \in W$ *um minimizante local para o funcional* I, *por (3.104) temos*

$$u'(t) \in int(dom\ f(u(t),\cdot)) \quad qs\ em\ (0,1).$$

Logo, pelo Teorema 3.4.9, existem uma constante real c *e uma função mensurável* $p(t)$ *tais que para quase todo* $t \in (0,1)$

$$p(t) \in \partial_\xi f(u(t), u'(t)), \tag{3.105}$$

$$c = p(t)u'(t) - f(u(t), u'(t)). \tag{3.106}$$

Fixemos $t \in (0,1)$ *tal que* $u'(t) \in int(dom\, f(u(t),\cdot))$, $u(t) \neq 0$ *e tal que (3.105) e (3.106) se verificam.*

Como a função $f(u(t),\cdot)$ *é convexa em* $\mathbb{R}$ *e* $u'(t) \in int(dom\, f(u(t),\cdot))$ *então, pela Proposição 2.16.27,* $f(u(t),\cdot)$ *é lipschitziana numa vizinhança de* $u'(t)$ *e portanto, pela Proposição 2.21.10,* $\partial_\xi f(u(t), u'(t))$ *coincide com a derivada parcial (usual) de* f *em ordem a* ξ *no ponto* $u'(t)$, *ou seja*

$$\partial_\xi f(u(t), u'(t)) = \left\{ 4u'(t) - \frac{2}{|u(t)|^{1/4}} \right\}.$$

Como $p(t) \in \partial_\xi f(u(t), u'(t))$ *então*

$$p(t) = 4u'(t) - \frac{2}{|u(t)|^{1/4}}.$$

Por outro lado temos

$$\begin{aligned} c &= p(t)u'(t) - f(u(t), u'(t)) \\ &= \left(4u'(t) - \frac{2}{|u(t)|^{1/4}}\right)u'(t) - \left(2u'^2(t) - 2\frac{u'(t)}{|u(t)|^{1/4}} + \frac{1}{|u(t)|^{1/2}}\right) \\ &= 2u'^2(t) - \frac{1}{|u(t)|^{1/2}}. \end{aligned}$$

Pelo que

$$2u'(t) = c + \frac{1}{|u(t)|^{1/2}} \quad \text{para quase todo } t \in (0,1) \text{ tal que } u(t) \neq 0, \tag{3.107}$$

mas $u(0) = 0$ *então* u' *não está definida em* $t = 0$. *Logo* u *não pode ser lipschitziana em* $[0,1]$, *visto que* $u'(t)$ *nem sequer é essencialmente limitada numa vizinhança de* $t = 0$.

Vejamos agora que, de facto, a função f *não verifica a condição (H3) do Teorema 3.4.10.*

Com efeito, fixemos $r > 0$, $|s| < r$ *com* $s \neq 0$ *e* $|\xi| \leq \alpha_r$ *para algum* $\alpha_r > 0$. *Temos*

$$f(s,\xi) \leq 2\xi^2 + 2\frac{|\xi|}{|s|^{1/4}} + \frac{1}{|s|^{1/2}} \leq 2\xi^2 + \left(\xi^2 + \frac{1}{|s|^{1/2}}\right) + \frac{1}{|s|^{1/2}} \leq 3\xi^2 + 2\frac{1}{|s|^{1/2}} \leq 3\alpha_r^2 + 2\frac{1}{|s|^{1/2}},$$

então quando s *se aproxima de zero* f *toma valores muito grandes e portanto não existe* $M_r > 0$ *tal que*

$$f(s,\xi) \leq M_r \quad \text{sempre que } |s| \leq r \text{ e } |\xi| \leq \alpha_r.$$

Para a condição (H2) basta tomar $\theta : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ *definida por* $\theta(r) = r^2$, *pois*

$$f(s,\xi) \geq \xi^2 = \theta(|\xi|) \quad \forall s,\xi \in \mathbb{R}$$

e

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\theta(r)}{r} = +\infty.$$

Capítulo 4

Uma teoria intermédia de existência no cálculo das variações

4.1 Introdução

Este capítulo consiste no estudo de parte do artigo [17] de Clarke e Loewen, não incluindo a última secção por esta estar fora do âmbito de trabalho. Este artigo desenvolve uma teoria de existência de solução para o seguinte problema do cálculo das variações:

$$\min \left\{ \Lambda(x) := \int_a^b L\left(t, x(t), x'(t)\right) dt : x(a) = x_a, x(b) = x_b \right\}, \tag{P}$$

onde o intervalo $[a, b]$, a constante R e a função $L : [a, b] \times R\bar{B} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são dados e o mínimo é tomado sob as funções absolutamente contínuas definidas em $[a, b]$ e com valores em $\mathbb{R}^n$ e tais que $|x(t)| < R \;\; \forall t \in [a, b]$. Ou seja, a teoria desenvolvida em [17] aplica-se ao seguinte problema

$$\min \left\{ \Lambda(x) : \|x\|_\infty < R, x(a) = x_a, x(b) = x_b \right\}, \tag{P$_\mathrm{R}$}$$

onde a desigualdade estrita na restrição do estado x assegura, como veremos, que qualquer solução seja interior (isto é, $|x(t)| < R$ para qualquer $t \in [a, b]$). Não provaremos apenas que existe solução interior como também que todas as soluções são lipschitzianas.

O resultado principal aqui estudado aplica-se tanto a lagrangianos coercivos como a não-coercivos. Talvez a maneira mais fácil de delinear a distinção entre a abordagem de [17] e as habituais seja indicar que esta se aplica mesmo quando os seguintes conjuntos de subnível não são compactos, nem sequer são fechados:

$$\left\{x : \Lambda(x) \leq \lambda,\ \|x\|_\infty < R\right\}, \quad \left\{x : \Lambda(x) \leq \lambda,\ \|x\|_\infty \leq R\right\}.$$

Na Secção 4.3 será dado um exemplo que ilustra o que acabámos de dizer.

As principais técnicas usadas nas demonstrações são de análise não-suave, juntamente com o método de Tonelli dos lagrangianos auxiliares generalizado por Clarke e Vinter em [18] e [19].

A próxima secção é dedicada a algumas técnicas preliminares, em particular acerca da hipótese de "convexidade estrita no infinito". O resultado principal é apresentado na Secção 4.3 e provado nas Secções 4.4 e 4.5. Na Secção 4.6 especificamos a existência local e na Secção 4.7 a existência global ($R = \infty$).

4.2 Resultados e definições preliminares

Antes de expor o resultado principal vamos estabelecer alguma notação e ver algumas definições e resultados preliminares. Daremos a noção de convexidade estrita no infinito e de valores essenciais, e indicaremos a importância que terão nas secções seguintes. Por fim daremos a definição de condição de crescimento extremal (EGC) e provaremos alguns resultados técnicos que serão utilizados mais tarde.

O inteiro positivo n, fixado ao longo de todo este capítulo, denota a dimensão do espaço de estados do nosso problema. Recordemos que, para quaisquer números reais $a < b$, escrevemos $AC([a,b], \mathbb{R}^n)$ para indicar o espaço das funções absolutamente contínuas definidas em $[a,b]$ e com valores em $\mathbb{R}^n$. Uma abreviatura análoga é usada para o subespaço das funções lipschitzianas

$$AC^\infty([a,b], \mathbb{R}^n) = \{x \in AC([a,b], \mathbb{R}^n) : x' \in L^\infty([a,b], \mathbb{R}^n)\}.$$

A letra B representa a bola aberta unitária de $\mathbb{R}^n$ e $\bar{B}$ a bola fechada.

4.2.1 A convexidade estrita no infinito

Recordemos que uma função convexa $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diz-se *estritamente convexa* se o seu gráfico não contém segmentos de recta. Para produzir uma versão local para esta definição, podemos dizer que a função l é estritamente convexa no ponto $x \in \mathbb{R}^n$ se o gráfico não contém segmentos de recta a passar pelo ponto $(x, l(x))$. A convexidade estrita no infinito estende esta ideia para um ponto no infinito e é, como veremos, consideravelmente mais fraca do que a convexidade estrita global.

Comecemos então por recordar que a função conjugada da função convexa $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é a função $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definida por

$$h(p) = l^*(p) = \sup\{\langle p, v\rangle - l(v) : v \in \mathbb{R}^n\}.$$

A função l é contínua por ser convexa e tomar apenas valores finitos (Proposição 2.16.24). Em particular é *sci* e então, pelas Proposições 2.19.3 e 2.19.4, h é uma função *sci* e convexa podendo tomar o valor $+\infty$ mas não identicamente igual a $+\infty$. Além disso, pelas Proposições 2.20.6 e 2.20.10, temos

$$p \in \partial l(v) \Leftrightarrow v \in \partial h(p) \Leftrightarrow h(p) + l(v) = \langle p, v\rangle. \tag{4.1}$$

Definimos a multifunção $W(p) = \{v : p \in \partial l(v)\}$. Por (4.1), para cada $p \in \mathbb{R}^n$ temos

$$W(p) = \partial h(p) = \{v : h(p) = \langle p, v\rangle - l(v)\}. \tag{4.2}$$

Definição 4.2.1 *Uma função $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é **estritamente convexa no infinito** se se verifica alguma das seguintes condições equivalentes:*

(a) o gráfico de l não contém semi-rectas;

(b) para qualquer $p \in \mathbb{R}^n$, $W(p)$ ou é vazio ou é limitado;

(c) para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$, $\partial l(v) \subseteq int(dom\ h)$;

(d) para qualquer $(v,p) \in Gr\,\partial l$ e qualquer $(w,r) \in 0^+ epi\ l$ com $w \neq 0$, tem-se $\langle p, w\rangle < r$;

(e) para qualquer $r > 0$ existe $M > r$ tal que

$$\inf\{l(w) - l(v) - \langle p, w - v\rangle : |v| \leq r, p \in \partial l(v), |w| \geq M\} > 0;$$

(f) para qualquer $r > 0$ existe $M > r$ tal que para qualquer $p \in \mathbb{R}^n$, $W(p) \cap r\overline{B} \neq \emptyset$ implica $W(p) \subseteq MB$.

Escrevemos estas seis condições porque na análise e interpretação é sempre útil ter diferentes pontos de vista, mas por razões práticas preferimos a condição (f). Isto porque (f) dá explicitamente uma propriedade de compacidade para o conjunto

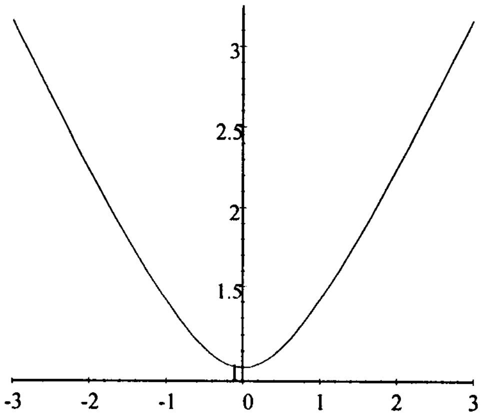
$$\cup\{W(p) : p \text{ verifica } W(p) \cap r\bar{B} \neq \emptyset\}.$$

De facto, por (f), estamos perante a união de um número arbitrário de conjuntos limitados sendo portanto limitado. Assim a fecho deste subconjunto de $\mathbb{R}^n$ é compacto, ou seja o conjunto em questão é relativamente compacto.

Recordemos que uma condição suficiente (mas não necessária) para a convexidade estrita no infinito é que h seja sempre finita, neste caso sabe-se que h é lipschitziana (ver Proposição 2.16.27) e que $\partial h(p)$ é sempre compacto (ver Proposição 2.21.3) então aplica-se o critério (b).

É evidente que qualquer função estritamente convexa é estritamente convexa no infinito.

Por outro lado, também é claro que a recíproca não é verdadeira. Existem funções estritamente convexas no infinito que não são estritamente convexas, e mais, o seu gráfico pode conter segmentos de recta arbitrariamente longe da origem. Por exemplo, se $n = 1$ podemos pensar na função $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cujo gráfico é obtido da seguinte forma: unem-se, por segmentos de recta, os pontos $(i, f(i))$ e $(i+1, f(i+1))$, para $i \in Z$, onde $f(v) = \left(1 + v^2\right)^{1/2}$. Notemos que, para este exemplo, $h(p) = +\infty$ quando $|p| > 1$ (ver [43], pág. 106).



Ao longo deste capítulo consideraremos lagrangianos de valor-finito $L(t, x, v)$ definidos em $\Omega \times \mathbb{R}^n$, onde $\Omega := [a, b] \times R\bar{B}$ é compacto e convexo. As nossas hipóteses implicarão que L é contínua conjuntamente em todas as variáveis e convexa em v para cada $(t, x) \in \Omega$ fixado. Para tais lagrangianos o hamiltoniano $H : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é dado por

$$H(t, x, p) = \sup\{\langle p, v\rangle - L(t, x, v) : v \in \mathbb{R}^n\},$$

e escrevemos, por analogia com (4.2),

$$W(t, x, p) = \{v : p \in \partial_v L(t, x, v)\} = \{v : H(t, x, p) = \langle p, v\rangle - L(t, x, v)\} = \partial_p H(t, x, p). \tag{4.3}$$

Proposição 4.2.2 *Seja $L : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Para cada $w \in \Omega$, suponhamos que $L(w, \cdot)$ é uma função convexa sendo estritamente convexa no infinito. Então para qualquer $r > 0$ existe $M > 0$ tal que*

$$\text{para qualquer } (w, p) \in \Omega \times \mathbb{R}^n,\ W(w, p) \cap r\bar{B} \neq \emptyset \text{ implica } W(w, p) \subseteq M\bar{B}. \tag{4.4}$$

Demonstração:

Fixemos $r > 0$. De acordo com a Definição 4.2.1 (e), para qualquer $w \in \Omega$, o número

$$M(r, w) := \inf\{\mu : I(r, w, \mu) > 0\}$$

é finito, onde

$$I(r, w, \mu) := \inf\{L(w, \omega) - L(w, v) - \langle p, \omega - v\rangle : |v| \leq r, p \in \partial_v L(w, v), |\omega| \geq \mu\}.$$

Queremos que

$$\sup_{w \in \Omega} M(r, w) < +\infty.$$

Para provar isto, suponhamos o contrário, isto é, suponhamos que existe uma sucessão (w_i) em Ω ao longo da qual $M(r, w_i) \to +\infty$. Podemos supor que, ao longo de uma subsucessão conveniente (não renumerada), $M(r, w_i) > i$, para qualquer i. Isto significa que $I(r, w_i, i) = 0$ para qualquer i, portanto existem pontos $v_i \in r\bar{B}$, $p_i \in \partial_v L(w_i, v_i)$ e ω_i com $|\omega_i| = i$ [1] tais que

$$L(w_i, \omega_i) - L(w_i, v_i) - \langle p_i, \omega_i - v_i \rangle = 0 \quad \forall i. \tag{4.5}$$

Como os conjuntos $r\bar{B}$, Ω e $\partial_v L(w, v)$ são compactos podemos passar a uma subsucessão ao longo da qual $(v_i) \to v \in r\bar{B}$, $(w_i) \to w \in \Omega$ e $(p_i) \to p \in \partial_v L(w, v)$. Temos

$$L(w_i, v_i + \lambda(\omega_i - v_i)) = L(w_i, v_i) + \lambda \langle p_i, \omega_i - v_i \rangle \quad \forall \lambda \in [0,1], \ \forall i.$$

De facto, para qualquer $\lambda \in [0,1]$ e para qualquer i temos, por convexidade e por (4.5),

$$\begin{aligned}
L(w_i, v_i + \lambda(\omega_i - v_i)) - L(w_i, v_i) &= L(w_i, (1-\lambda) v_i + \lambda \omega_i) - L(w_i, v_i) \\
&\leq (1-\lambda) L(w_i, v_i) + \lambda L(w_i, \omega_i) - L(w_i, v_i) \\
&= \lambda (L(w_i, \omega_i) - L(w_i, v_i)) \\
&= \lambda \langle p_i, \omega_i - v_i \rangle .
\end{aligned}$$

Mas, por (4.1), temos

$$\begin{aligned}
L(w_i, v_i + \lambda(\omega_i - v_i)) - L(w_i, v_i) &= L(w_i, v_i + \lambda(\omega_i - v_i)) + H(w_i, p_i) - \langle p_i, v_i \rangle \\
&\geq \langle p_i, v_i + \lambda(\omega_i - v_i) \rangle - \langle p_i, v_i \rangle \\
&= \lambda \langle p_i, \omega_i - v_i \rangle \quad \forall \lambda \in [0,1], \ \forall i,
\end{aligned}$$

então

$$L(w_i, v_i + \lambda(\omega_i - v_i)) = L(w_i, v_i) + \lambda \langle p_i, \omega_i - v_i \rangle \quad \forall \lambda \in [0,1], \ \forall i.$$

Em particular, se fixarmos algum $k > r$, para qualquer $i > k$ existe um ponto u_i de norma k da forma $u_i = v_i + \lambda(\omega_i - v_i)$ para algum $\lambda \in (0,1)$ e tal que

$$L(w_i, u_i) = L(w_i, v_i) + \langle p_i, u_i - v_i \rangle \quad \forall i.$$

Ao longo de mais uma subsucessão, podemos supor que u_i converge para um ponto u_k de norma k, e tomando limites na igualdade anterior vem (por continuidade)

$$L(w, u_k) - L(w, v) - \langle p, u_k - v \rangle = 0 \quad \forall k.$$

Isto implica [2]

$$M(r, w) = +\infty,$$

uma contradição.

Podemos assim definir

$$M(r) = 1 + \sup_{w \in \Omega} M(r, w),$$

um número finito para o qual $I(r, w, \mu) > 0$ qualquer que seja o $w \in \Omega$. Mostremos agora que $M(r)$ serve para (4.4). Se esta afirmação fosse falsa existia pelo menos um par $(w, p) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$ tal que $W(w, p)$ continha um ponto $v \in r\bar{B}$ e um ponto $\omega \notin M(r)\bar{B}$. Em particular, por (4.3),

$$H(w, p) = \langle p, v \rangle - L(w, v) = \langle p, \omega \rangle - L(w, \omega)$$

[1] Estamos aqui a usar o facto de que a restrição $|\omega| \geq \mu$, na definição de $I(r, w, \mu)$, pode ser substituida pela restrição $|\omega| = \mu$. Esta redução expõe $I(r, w, \mu)$ como o ínfimo de uma função contínua sobre um conjunto compacto, o qual sabemos que é atingido.

[2] O ínfimo sobre o conjunto vazio é, por convenção, igual a $+\infty$.

e isto implica

$$L(w,\omega) - L(w,v) - \langle p, \omega - v\rangle = 0,$$

o que, pela definição de I, implica

$$I(r, w, M(r)) = 0,$$

uma contradição.■

Recordemos uma propriedade muito útil da multifunção W.

Proposição 4.2.3 *Seja $L : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua e suponhamos que $L(t,x,\cdot)$ é convexa para cada $(t,x) \in \Omega$ fixado. Então a multifunção W tem gráfico fechado.*

Demonstração:
Devemos mostrar que se são dadas sucessões (v_i), (t_i), (x_i) e (p_i) convergindo respectivamente para v, t, x e p então

$$v_i \in W(t_i, x_i, p_i) \quad \forall i \tag{4.6}$$

implica

$$v \in W(t, x, p).$$

Para provar isto notemos que (4.6) é equivalente a

$$H(t_i, x_i, p_i) = \langle p_i, v_i\rangle - L(t_i, x_i, v_i) \quad \forall i$$

mas, por definição,

$$H(t_i, x_i, p_i) \geq \langle p_i, \omega\rangle - L(t_i, x_i, \omega) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^n.$$

Então (4.6) é equivalente a

$$\langle p_i, \omega - v_i\rangle \leq L(t_i, x_i, \omega) - L(t_i, x_i, v_i) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^n, \forall i.$$

A continuidade assumida para L permite-nos passar ao limite quando $i \to \infty$ e obter

$$\langle p, \omega - v\rangle \leq L(t, x, \omega) - L(t, x, v) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^n.$$

Isto é equivalente a

$$p \in \partial_v L(t, x, v),$$

ou seja

$$v \in W(t, x, p).$$

■

Agora definimos a função ρ_0 que é mais ou menos a inversa da aplicação $r \to M$ definida na Proposição 4.2.2. Para qualquer $s > 0$ definimos

$$\rho_0(s) := \inf\left\{r \geq 0 : \text{para algum } (w,p) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \text{ tem-se } W(w,p) \cap r\bar{B} \neq \emptyset \text{ e } W(w,p) \cap (\mathbb{R}^n \backslash sB) \neq \emptyset\right\}.$$

Definimos também

$$\rho(s) := \min\{s, \rho_0(s)\}.$$

Proposição 4.2.4 *Seja $L : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função convexa em v e contínua nas duas variáveis. Então a função ρ tem as seguintes propriedades:*

(i) ρ é crescente e $0 \leq \rho(s) \leq s$ para qualquer $s > 0$;

(ii) $\forall (w,p) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$, $\forall s > 0$ se $W(w,p) \cap \rho(s) B \neq \emptyset$ então $W(w,p) \subseteq sB$;

(iii) se para cada $w \in \Omega$, $L(w,\cdot)$ é estritamente convexa então $\rho(s) = s$ para qualquer $s > 0$;

(iv) se para cada $w \in \Omega$, $L(w,\cdot)$ é estritamente convexa no infinito então $\rho(s) \to +\infty$ quando $s \to +\infty$.

Demonstração:

A primeira propriedade é imediata e sai directamente das definições de ρ e ρ_0. De facto, fixemos $s_1 > s_2 > 0$. Se $s_1 \leq \rho_0(s_1)$ então

$$\rho(s_1) = \min\{s_1, \rho_0(s_1)\} = s_1 > s_2 \geq \min\{s_2, \rho_0(s_2)\} = \rho(s_2).$$

Se $s_1 > \rho_0(s_1)$ temos

$$\rho(s_1) = \min\{s_1, \rho_0(s_1)\} = \rho_0(s_1)$$

e como

$$\begin{aligned} s_1 > s_2 &\Rightarrow s_1 B \supset s_2 B \Rightarrow \mathbb{R}^n \backslash s_1 B \subset \mathbb{R}^n \backslash s_2 B \\ &\Rightarrow W(w,p) \cap (\mathbb{R}^n \backslash s_1 B) \subseteq W(w,p) \cap (\mathbb{R}^n \backslash s_2 B) \\ &\Rightarrow \rho_0(s_1) \geq \rho_0(s_2) \end{aligned}$$

então neste caso temos

$$\rho(s_1) \geq \rho(s_2),$$

o que mostra que ρ é uma função crescente. Também sai da definição de ρ que $0 \leq \rho(s) \leq s$ para qualquer $s > 0$.

Provemos agora a propriedade (ii). Pela definição de $\rho_0(s)$, para cada $s > 0$ fixado,

$$\exists (w,p) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \text{ tal que } W(w,p) \cap \rho_0(s) \bar{B} \neq \emptyset \text{ e } W(w,p) \cap (\mathbb{R}^n \backslash sB) \neq \emptyset.$$

A negação desta condição é

$$\forall (w,p) \in \Omega \times \mathbb{R}^n, \forall s > 0, \; W(w,p) \cap \rho_0(s) \bar{B} \neq \emptyset \Rightarrow W(w,p) \subseteq sB, \tag{4.7}$$

ou seja, a propriedade (ii) é verificada por ρ_0. Como $\rho \leq \rho_0$ então, para qualquer $(w,p) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$ e qualquer $s > 0$,

$$W(w,p) \cap \rho(s) B \neq \emptyset \Rightarrow W(w,p) \cap \rho_0(s) \bar{B} \neq \emptyset$$

e, por (4.7), (ii) verifica-se para ρ.

Vejamos agora (iii). Fixemos $w \in \Omega$ e $s > 0$ quaisquer. Como $L(w,\cdot)$ é localmente lipschitziana (ver Proposição 2.16.27) e é estritamente convexa em $\mathbb{R}^n$ então, para cada $v \in \mathbb{R}^n$ fixado, $\partial_v L(w,v)$, é um conjunto não-vazio e coincide com a derivada parcial de L em ordem a v, $L_v(w,v)$ (ver Proposições 2.20.19 e 2.21.23), ou seja,

$$\partial_v L(w,v) = \{L_v(w,v)\}.$$

Portanto para $p \neq L_v(w,v)$ temos $W(w,p) = \emptyset$ e para $p = L_v(w,v)$ temos $W(w,p) = \{v\}$. De facto, se para $p = L_v(w,v)$ existisse $v' \in W(w,p)$ com $v' \neq v$ então teriamos

$$H(w,p) = \langle p, v' \rangle - L(w,v')$$

e

$$H(w,p) = \langle p, v\rangle - L(w,v).$$

Donde

$$L(w,v) = L(w,v') + \langle p, v - v'\rangle.$$

Mas como $L(w,\cdot)$ é estritamente convexa então, pela Proposição 2.20.20,

$$L(w,v) > L(w,v') + \langle p, v - v'\rangle,$$

chegamos assim à contradição desejada. Quando $W(w,p)$ é um conjunto singular [3] então o r que aparece na definição de $\rho_0(s)$ tem que ser tal que $|v| \le r$. Mas por outro lado, e ainda pela definição de $\rho_0(s)$, temos que ter $W(w,p) \cap (\mathbb{R}^n \backslash sB) \ne \emptyset$, ou seja, temos que ter $|v| \ge s$. Portanto o r da definição de $\rho_0(s)$ tem que ser limitado a $[s,+\infty)$ e assim vem $\rho_0(s) \ge s$, pelo que $\rho(s) = s$. Quando $W(w,p) = \emptyset$ temos $\rho_0(s) = +\infty$ e portanto $\rho(s) = s$. Segue que

$$\rho(s) = s \text{ para qualquer } s > 0.$$

Finalmente, para provar (iv) precisamos apenas de mostrar que $\rho_0(s) \to +\infty$ quando $s \to +\infty$. Se esta afirmação fosse falsa então existiam uma sucessão $(s_i) \to +\infty$, pontos correspondentes $w_i \in \Omega$ e $p_i \in \mathbb{R}^n$ e um número $r_0 > 0$ tais que

$$W(w_i,p_i) \cap r_0\bar{B} \ne \emptyset \ \text{ e } \ W(w_i,p_i) \cap (\mathbb{R}^n \backslash s_iB) \ne \emptyset \quad \forall i.$$

Como, para cada i, $L(w_i,\cdot)$ é estritamente convexa então, pela Proposição 4.2.2, existe $M_i > 0$ tal que

$$\forall (w_i,p_i) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \quad W(w_i,p_i) \cap r_0\bar{B} \ne \emptyset \Rightarrow W(w_i,p_i) \subseteq M_i\bar{B}.$$

Chegámos assim a uma contradição, o que mostra que $\rho_0(s) \to +\infty$ quando $s \to +\infty$ e portanto também $\rho(s) \to +\infty$ quando $s \to +\infty$.■

4.2.2 Valores essenciais

Definição 4.2.5 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ função mensurável. O conjunto dos* ***valores essenciais*** *de f em t é dado por*

$$Ess\ f(t) := \{y \in \mathbb{R}^n : \forall\varepsilon > 0,\ m\{s \in (t-\varepsilon, t+\varepsilon) : |y - f(s)| < \varepsilon\} > 0\}.$$

Pode acontecer este conjunto ser vazio, como ilustra por exemplo $Ess\ f(0)$ para $f(t) = t^{-1}$. De facto, como f não está definida em $t = 0$ e

$$\lim_{t\to 0^-} f(t) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{t\to 0^+} f(t) = +\infty$$

então não existe $y \in \mathbb{R}^n$ tal que para qualquer $\varepsilon > 0$ o conjunto

$$\{s \in (-\varepsilon,\varepsilon) : |y - f(s)| < \varepsilon\}$$

tenha medida positiva e portanto $Ess\ f(0) = \emptyset$.

Vejamos que para cada t, $Ess\ f(t)$ é um conjunto fechado. Fixemos $t \in \mathbb{R}$ e uma sucessão (y_i) convergente para algum $y \in \mathbb{R}$ e tal que $y_i \in Ess\ f(t)$ para qualquer i. Fixemos ainda $\varepsilon > 0$ qualquer e suponhamos, sem perda de generalidade, que

$$|y_i - y| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall i. \tag{4.8}$$

[3] Dizemos que um conjunto é **singular** se tem um e um só elemento.

Como, para cada i fixado, $y_i \in Ess\ f(t)$ então o seguinte conjunto tem medida positiva

$$S_i\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) := \left\{s \in \left(t - \frac{\varepsilon}{2}, t + \frac{\varepsilon}{2}\right) : |y_i - f(s)| < \frac{\varepsilon}{2}\right\}. \tag{4.9}$$

Por (4.8) temos

$$S_i\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \subseteq \left\{s \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon) : |y_i - f(s)| < \frac{\varepsilon}{2}\right\} \subseteq \{s \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon) : |y - f(s)| < \varepsilon\},$$

então, por (4.9), temos

$$m\{s \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon) : |y - f(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

Então, como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, podemos concluir que

$$y \in Ess\ f(t),$$

o que mostra que o conjunto $Ess\ f(t)$ é fechado.

Prova-se mesmo que a multifunção $t \to Ess\ f(t)$ tem gráfico fechado, como veremos na seguinte proposição.

Proposição 4.2.6 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mensurável. Para quaisquer sucessões (t_i), (y_i) tais que $(t_i) \to t$, $(y_i) \to y$ e $y_i \in Ess\ f(t_i)$ para qualquer i, tem-se $y \in Ess\ f(t)$.*

Demonstração:
Dado qualquer $\varepsilon > 0$ escolhemos I suficientemente grande tal que $i \geq I$ implique

$$|t_i - t| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad |y_i - y| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.10}$$

Agora, para qualquer $i \geq I$ fixado, a relação $y_i \in Ess\ f(t_i)$ implica que o seguinte conjunto tem medida positiva:

$$S_i\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \left\{s \in \left(t_i - \frac{\varepsilon}{2}, t_i + \frac{\varepsilon}{2}\right) : |y_i - f(s)| < \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Mas (4.10) implica

$$S_i\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \subseteq \left\{s \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon) : |y_i - f(s)| < \frac{\varepsilon}{2}\right\} \subseteq \{s \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon) : |y - f(s)| < \varepsilon\}.$$

Então, o conjunto do lado direito deve ter medida positiva, e como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue que $y \in Ess\ f(t)$.■

Recordemos que uma multifunção $\Gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ diz-se *semicontínua superiormente* (*scs*) em t_0 se para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|t - t_0| < \delta \Rightarrow \Gamma(t) \subseteq \Gamma(t_0) + \varepsilon B.$$

(Isto implicitamente supõe $\Gamma(t_0) \neq \emptyset$.) Quando $\Gamma(t) = Ess\ f(t)$ para alguma função mensurável f, este conceito é estritamente mais forte do que a propriedade de gráfico fechado provada na Proposição 4.2.6. Por exemplo, para a função

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \in (-\infty, 0] \\ t^{-1} & \text{se } t \in (0, +\infty) \end{cases}$$

temos $Ess\ f(t) = \{f(t)\}$, embora esta multifunção tenha gráfico fechado e valores não-vazios, falha a *scs* em $t_0 = 0$. De facto, temos $Ess\ f(t_0) = \{0\}$ mas para qualquer que seja o $\varepsilon > 0$ não existe $\delta > 0$ tal que

$$t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \Rightarrow Ess\ f(t) \subseteq Ess\ f(t_0) + \varepsilon B,$$

pois $\lim_{x \to 0^+} f(t) = +\infty$ e portanto quando t se aproxima de t_0 por valores superiores $Ess\ f(t)$ toma valores muito grandes.

O seguinte resultado mostra que isto não pode acontecer se f for essencialmente limitada.

Corolário 4.2.7 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mensurável e essencialmente limitada numa vizinhança de algum ponto t_0. Então $Ess\ f(t_0)$ é um conjunto não-vazio compacto e a multifunção $Ess\ f$ é scs em t_0.*

Demonstração:
Por hipótese, existem $\varepsilon > 0$ e $M > 0$ tais que

$$|f(t)| \leq M \text{ qs em } (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon). \tag{4.11}$$

Segue que

$$Ess\ f(t) \subseteq M\bar{B} \quad \forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon). \tag{4.12}$$

De facto, sejam $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ e $y \in Ess\ f(t)$ quaisquer. Então, pela definição de $Ess\ f(t)$ e por (4.11), para cada $\delta > 0$ existe um conjunto de medida positiva $N \subseteq (t - \delta, t + \delta) \cap (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ tal que para qualquer $s \in N$ tem-se

$$|y - f(s)| < \delta \Rightarrow |y| < |f(s)| + \delta \leq M + \delta.$$

Como $\delta > 0$ é arbitrário então

$$|y| \leq M,$$

como se pretendia.

Assim, para cada $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, $Ess\ f(t)$ é um subconjunto fechado do conjunto compacto $M\bar{B}$ então $Ess\ f(t_0)$ é compacto.

Mostra-se que $Ess\ f(t_0)$ contém pelo menos um ponto supondo-se o contrário.

Para provar que $Ess\ f(t)$ é *scs* em t_0, suponhamos o contrário. Isto é, suponhamos que para algum $\varepsilon > 0$ e para alguma sucessão $(t_i) \to t_0$ o correspondente conjunto $Ess\ f(t_i)$ contém um ponto y_i que não pertence a $Ess\ f(t_0) + \varepsilon B$. Por (4.12), $|y_i| \leq M$ para qualquer i suficientemente grande então, pelas Proposições 2.9.13 e 2.10.9, existe uma subsucessão (não renumerada) que converge para algum $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Como, para cada i, y_i não pertence a $Ess\ f(t_0) + \varepsilon B$ então

$$|y_i - x| \geq \varepsilon \quad \forall x \in Ess\ f(t_0).$$

Fixemos $x \in Ess\ f(t_0)$ e $\mu > 0$ tal que $|y_i - y_0| < \mu$ para qualquer i suficientemente grande. Então temos

$$|y_0 - x| \geq |y_i - x| - |y_i - y_0| > \varepsilon - \mu.$$

Dado que μ pode ser tomado arbitrariamente pequeno, então y_0 não pertence a $Ess\ f(t_0) + \varepsilon B$ e portanto também não pertence a $Ess\ f(t_0)$. Mas a existência de uma tal subsucessão contraria a Proposição 4.2.6. Então $Ess\ f$ tem que ser *scs* em t_0.■

O próximo resultado descreve uma construção muito útil baseada na *scs* de $Ess\ f$.

Antecipando a notação que será utilizada nas proximas secções, vamos considerar $f = x'$ para uma função lipschitziana x definida num intervalo $[a, b]$ fixado.

Proposição 4.2.8 *Seja $x \in AC^\infty([a, b], \mathbb{R}^n)$. Suponhamos que $Ess\ x'(\tau) \subseteq \sigma B$ para algum $\tau \in [a, b]$ e algum $\sigma > 0$. Definimos*

$$t_0 = \sup\left(\{t \in [a, \tau) : Ess\ x'(t) \cap (\mathbb{R}^n \backslash \sigma B) \neq \emptyset\} \cup \{a\}\right),$$
$$t_1 = \inf\left(\{t \in (\tau, b] : Ess\ x'(t) \cap (\mathbb{R}^n \backslash \sigma B) \neq \emptyset\} \cup \{b\}\right),$$
$$S = \{v \in \mathbb{R}^n : |v| = 1\}.$$

Então o intervalo $[t_0, t_1]$ contém uma vizinhança de τ relativamente a $[a, b]$ e tem-se

(i) $Ess\ x'(t) \cap \sigma\bar{B} \neq \emptyset \quad \forall t \in [t_0, t_1]$;

(ii) $Ess\ x'(t) \subseteq \sigma B \quad \forall t \in (t_0, t_1)$;

(iii) ou $\overline{co}\, Ess\, x'(t_0) \cap \sigma S \neq \emptyset$*, ou* $t_0 = a$ *e* $Ess\, x'(a) \subseteq \sigma B$*;*

(iv) ou $\overline{co}\, Ess\, x'(t_1) \cap \sigma S \neq \emptyset$*, ou* $t_1 = b$ *e* $Ess\, x'(b) \subseteq \sigma B$*.*

Demonstração:
Como $x \in AC^{\infty}([a,b], \mathbb{R}^n)$ então x' é essencialmente limitada e portanto, pelo Corolário 4.2.7, a multifunção $Ess\, x'$ tem valores não-vazios e compactos. Então a inclusão $Ess\, x'(\tau) \subseteq \sigma B$ implica que $Ess\, x'(\tau) + \varepsilon B \subseteq \sigma B$ para algum $\varepsilon > 0$. Pela *scs* de $Ess\, x'$ (Corolário 4.2.7), existe uma vizinhança de τ relativa a $[a,b]$ na qual esta inclusão ainda é válida. Esta vizinhança é claramente um subconjunto de $[t_0, t_1]$.

De forma semelhante se prova (i). Consequentemente, se (i) fosse falso então existiria algum $t \in [t_0, t_1]$ para o qual $Ess\, x'(t) \subseteq \mathbb{R}^n \backslash \sigma \bar{B}$ e tal como acima existiria algum $\varepsilon > 0$ tal que $Ess\, x'(t) + \varepsilon B \subseteq \mathbb{R}^n \backslash \sigma \bar{B}$. Pela *scs* de $Ess\, x'$ existiria $\delta > 0$ tal que

$$|t' - t| < \delta \Rightarrow Ess\, x'(t') \subseteq Ess\, x'(t) + \varepsilon B \subseteq \mathbb{R}^n \backslash \sigma \bar{B}. \tag{4.13}$$

Mas como $(t - \delta, t + \delta) \cap (t_0, t_1) \neq \emptyset$ então, pela definição de t_0 e t_1, existe $t'' \in (t - \delta, t + \delta)$ tal que

$$Ess\, x'(t'') \subseteq \sigma B,$$

o que contradiz (4.13) e prova (i).

A afirmação (ii) é uma consequência óbvia da escolha de t_0 e t_1. Para provar (iii), consideramos dois casos. Se $Ess\, x'(t_0)$ contém um ponto exterior a σB então também

$$\overline{co}\, Ess\, x'(t_0) \cap (\mathbb{R}^n \backslash \sigma B) \neq \emptyset. \tag{4.14}$$

Pela condição (i) temos $Ess\, x'(t_0) \cap \sigma \bar{B} \neq \emptyset$ o que implica

$$\overline{co}\, Ess\, x'(t_0) \cap \sigma \bar{B} \neq \emptyset. \tag{4.15}$$

Assim, pelas condições (4.14) e (4.15), $\overline{co}\, Ess\, x'(t_0)$ deve conter pelo menos um ponto da fronteira de σB. Esta é a primeira hipótese. A outra única possiblidade é $Ess\, x'(t_0) \subseteq \sigma B$, neste caso aplicando o argumento do primeiro parágrafo a t_0 (em vez de τ) obtemos uma vizinhança de t_0 relativa a $[a,b]$ na qual esta inclusão ainda se verifica. Mas tal como vimos nesse parágrafo esta vizinhança é um subconjunto de $[t_0, t_1]$, chegamos assim a uma contradição a não ser que $t_0 = a$.

A demonstração de (iv) é análoga à de (iii).■

4.2.3 Valores essenciais e extremais

A multifunção $W(t, x, p)$ usada para definir convexidade estrita no infinito volta agora juntamente com o conceito de valores essenciais para estudar os extremais de um lagrangiano dado. Não vemos aqui a definição exacta de extremalidade mas afirmamos que cada uma das três potenciais definições, nomeadamente o Teorema 2.4 de [15] e os Teoremas 4.2.2 e 5.2.1 de [13], dão a condição (4.16) que é usada no seguinte resultado.

Proposição 4.2.9 *Seja* $L : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *contínua, e suponhamos que, para cada* $(t, x) \in \Omega$ *fixado,* $L(t, x, \cdot)$ *é uma função convexa. Além disso, suponhamos que existem duas funções absolutamente contínuas* x *e* p *tais que*

$$p(t) \in \partial_v L(t, x(t), x'(t)) \quad qs. \tag{4.16}$$

Então para qualquer t *sem excepção, temos*

$$\overline{co}\, Ess\, x'(t) \subseteq W(t, x(t), p(t)). \tag{4.17}$$

Demonstração:
Fixemos $t \in [a,b]$ e $w \in Ess\, x'(t)$. Então, para qualquer $\varepsilon > 0$, o seguinte conjunto tem medida positiva

$$\{s \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon) : |w - x'(s)| < \varepsilon\},$$

ou seja, existe um conjunto de medida positiva $N_\varepsilon \subseteq (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$ tal que $|w - x'(s)| < \varepsilon$ para qualquer $s \in N_\varepsilon$. Logo existe uma sucessão $(t_i) \to t$ ao longo da qual se verifica (4.16) e $x'(t_i) \to w$. Agora, em cada tempo t_i, (4.16) é equivalente a

$$x'(t_i) \in W(t_i, x(t_i), p(t_i)).$$

Consequentemente, pela Proposição 4.2.3, $w \in W(t, x(t), p(t))$. Concluimos que

$$Ess\ x'(t) \subseteq W(t, x(t), p(t)).$$

Para deduzir (4.17) a partir disto, é suficiente notar que o lado direito é ele próprio um conjunto convexo fechado, sendo simplesmente $\partial_p H(t, x(t), p(t))$.■

Observação 4.2.10 *Para ver como a Proposição 4.2.9 é importante na regularidade de soluções no cálculo das variações, suponhamos que x é um extremal lipschitziano para algum lagrangiano contínuo L e estritamente convexo em v. O facto de x ser lipschitziano implica que, para cada t, $Ess\ x'(t)$ é compacto e não-vazio (Corolário 4.2.7), enquanto que a convexidade estrita de L implica que $W(t,x,p)$ nunca contém mais do que um ponto. De facto, vimos na demonstração da Proposição 4.2.4 (iii) que, para cada (t,x) fixado,*

$$W(t,x,p) = \begin{cases} \{v\} & se\ p = L_v(t,x,v) \\ \emptyset & caso\ contrário. \end{cases}$$

Como, pelo Teorema 4.2.2 de [13], existe uma função absolutamente contínua $p(t)$ verificando (4.16) então

$$\partial_v L(t, x(t), x'(t)) = \{p(t)\},$$

para qualquer t fixado tal que (4.16) se verifica. Assim, para um tal t, $x'(t) \in W(t, x(t), p(t))$ e, pela Proposição 4.2.9, $x'(t) \in Ess\ x'(t)$. Donde $x'(t) \in Ess\ x'(t)$ qs em Ω. Se existisse $t \in [a,b]$ para o qual (4.16) não se verificasse então $W(t,x,p) = \emptyset$ o que, pela pela Proposição 4.2.9, implicava $Ess\ x'(t) = \emptyset$ contradizendo o facto de que para qualquer $t \in [a,b]$ o conjunto $Ess\ x'(t)$ é compacto e não-vazio. Pelo que

$$x'(t) \in Ess\ x'(t) \quad \forall t \in [a,b],$$

o que serve para dizer que o extremal lipschitziano x é na realidade suave.

Definição 4.2.11 *Para quaisquer escalares $0 < r < s$ definimos os números não-negativos*

$$\Delta_R(r,s) = \inf\{t_1 - t_0\},$$

onde o ínfimo é tomado sobre todos os subintervalos $[t_0, t_1]$ de $[a,b]$ em que existe uma função lipschitziana x verificando

(a) $Ess\ x'(\tau) \cap r\bar{B} \neq \emptyset$ para algum $\tau \in [t_0, t_1]$;

(b) $Ess\ x'(\sigma) \cap (\mathbb{R}^n \backslash \rho(s) B) \neq \emptyset$ para algum $\sigma \in [t_0, t_1]$;

(c) $Ess\ x'(t) \subseteq sB \quad \forall t \in (t_0, t_1)$;

(d) $|x(t)| < R \quad \forall t \in [t_0, t_1]$;

(e) x resolve o seguinte problema

$$min \left\{ \int_{t_0}^{t_1} L(t,y,y')\,dt : y(t_i) = x(t_i), |y(t)| < R \ \ \forall t \in [t_0,t_1], |y'(t)| \leq s \ \ qs \right\}.$$

(Notemos que quando ou σ ou τ é uma das extremidades de $[t_0, t_1]$ as condições (a) e (b) devem ser entendidas como envolvendo o lado apropriado dos valores essenciais.)

Notemos que para valores de s muito grandes, a condição (b) acima pode ser incompatível com (a), (d) e (e). Nestes casos $\Delta_R(r,s)$ iguala-se a $+\infty$, o ínfimo sobre o conjunto vazio. Na Secção 4.7 serão apresentados alguns exemplos em que isto acontece, juntamente com alguns teoremas de existência global. Mesmo quando só podemos afirmar que $\lim_{s \to +\infty} \Delta_R(r,s) > 0$, para quaisquer $R, r > 0$, existem resultados de existência local, como veremos na Secção 4.6.

Definição 4.2.12 *Diz-se que o lagrangiano L satisfaz a* ***condição de crescimento extremal*** *(EGC) se para quaisquer R, $r > 0$ tem-se*

$$\lim_{s \to +\infty} \Delta_R(r,s) = \infty.$$

Nos argumentos que seguem as funções ρ e Δ_R dão-nos o controlo quantitativo acerca das mudanças da grandeza das derivadas dos extremais lipschitzianos. O índice ρ controla, tal como na Proposição 4.2.4 (ii), os possíveis saltos na derivada. Consideremos um extremal lipschitziano x. Pela Proposição 4.2.9 e pelo Teorema 2.4 de [15] vemos que se $Ess\ x'(t)$ contém algum vector v com $|v| \geq s$, então todo o conjunto $\overline{co}\,Ess\ x'(t)$ deve estar fora da bola de raio $\rho(s)$. De facto, se existe $v \in Ess\ x'(t)$ com $|v| \geq s$ então

$$Ess\ x'(t) \cap (\mathbb{R}^n \backslash sB) \neq \emptyset \Rightarrow \overline{co}\,Ess\ x'(t) \cap (\mathbb{R}^n \backslash sB) \neq \emptyset$$

e, pela Proposição 4.2.9, vem

$$W(t, x(t), p(t)) \cap (\mathbb{R}^n \backslash sB) \neq \emptyset.$$

Donde, pela Proposição 4.2.4,

$$W(t, x(t), p(t)) \cap \rho(s) B = \emptyset$$

o que, novamente pela Proposição 4.2.9, implica

$$\overline{co}\,Ess\ x'(t) \cap \rho(s) B = \emptyset.$$

Então $|x'|$ nunca pode saltar de um valor dentro de $\rho(s) B$ para um valor fora de sB. (Notemos que se L é estritamente convexo em v então $W(t,x,p)$ é um conjunto singular e, pela Proposição 4.2.4, $\rho(s) = s$ para qualquer $s > 0$ assim a afirmação anterior diz que $|x'|$ é contínua.)

Quanto a $\Delta_R(r,s)$, mede o tempo mínimo que um extremal lipschitziano x tem que demorar para passar de $|x'(\tau)| \leq r$ para $|x'(\sigma)| \geq s$. Isto é mais claro no caso estritamente convexo, onde se tem $x \in C^1$ e $\rho(s) = s$. Quando consideramos apenas convexidade estrita no infinito, a possibilidade de que $|x'|$ possa atingir o nível s dando um salto ou em t_0 ou em t_1 força-nos a ser cautelosos com a condição (b). Apenas podemos afirmar é que no caso de um salto de um ponto extremo para s, $|x'|$ deve atingir o nível $\rho(s)$ dentro de $[t_0, t_1]$. Este principio é justificado e usado na demonstração do Teorema 4.4.1.

Sai directamente da definição que $\Delta_R(r,s)$ é decrescente em r e também pode ser crescente em s, como mostra a seguinte proposição.

Proposição 4.2.13 *Para $r, R > 0$ fixados, a aplicação $s \to \Delta_R(r,s)$ é crescente em $\left(\rho^{-1}(r), +\infty\right)$.*

Demonstração:

Consideremos $s' < s$ qualquer com $r < \rho(s')$. Fixemos $\varepsilon > 0$ e escolhemos uma função lipschitziana x definida num intervalo $[t_0, t_1]$ tal que $t_1 - t_0 \leq \Delta_R(r,s) + \varepsilon$ e verificam-se as condições (a)-(e). Por (a),

$$Ess\ x'(\tau) \cap r\bar{B} \neq \emptyset \text{ para algum } \tau \in [t_0, t_1]. \tag{4.18}$$

Recorrendo a (e) vemos que x resolve o seguinte problema

$$\min \left\{ \int_{t_0}^{t_1} L(t, y, y')\, dt : y(t_i) = x(t_i), |y(t)| < R \ \ \forall t \in [t_0, t_1], |y'(t)| \leq s \ \text{ qs} \right\}$$

e então, pela Proposição 4.2.9 e pelo Teorema 2.4 de [15],

$$co\,Ess\ x'(\tau) \subseteq W(\tau, x(\tau), p(\tau)) \tag{4.19}$$

para algum $p(\tau)$. Assim, por (4.18), (4.19)

$$W(\tau, x(\tau), p(\tau)) \cap r\bar{B} \neq \emptyset.$$

Logo, para qualquer σ tal que $\rho(\sigma) > r$ e pela Proposição 4.2.4 (ii), segue que

$$W(\tau, x(\tau), p(\tau)) \subseteq \rho^{-1}(r) B \subseteq \sigma B.$$

Então, por (4.19),

$$co\, Ess\; x'(\tau) \subseteq \rho^{-1}(r) B \subseteq \rho^{-1}(r) \bar{B} \subseteq s' B$$

(pois $r < \rho(s')$ e ρ é crescente então tem que ser $\rho^{-1}(r) < s'$ o que implica $\rho^{-1}(r) \bar{B} \subseteq s' B$).

Aplicando a Proposição 4.2.8 encontramos um subintervalo $[t_0', t_1']$ de $[t_0, t_1]$ que é uma vizinhança de τ relativamente a $[t_0, t_1]$ e na qual se tem

(ii) $Ess\; x'(t) \subseteq s' B$ para qualquer $t \in (t_0', t_1')$;

(iii) ou $Ess\; x'(t_0')$ contém pontos exteriores a $s'B$ ou $t_0' = t_0$;

(iv) ou $Ess\; x'(t_1')$ contém pontos exteriores a $s'B$ ou $t_1' = t_1$.

Comparemos x em $[t_0', t_1']$ com a definição de $\Delta_R(r, s')$. As condições (a') e (d') (para $\Delta_R(r, s')$) resultam da definição de $\Delta_R(r, s)$. A condição (c') sai de (ii) acima. O principio de optimalidade [4] dá (e') a partir de (e), então falta apenas verificar (b') ou seja, falta apenas verificar que

$$Ess\; x'(\sigma) \cap (\mathbb{R}^n \backslash \rho(s') B) \neq \emptyset \quad \text{para algum } \sigma \in [t_0', t_1'].$$

Se (b') fosse falso, então teriamos

$$Ess\; x'(\sigma) \subseteq \rho(s') B \subseteq s'B \quad \text{para qualquer } \sigma \in [t_0', t_1']$$

donde, por (iii) e (iv), $[t_0', t_1'] = [t_0, t_1]$. Mas como $s' \leq s$ e ρ é crescente então viria

$$Ess\; x'(\sigma) \subseteq \rho(s') B \subseteq \rho(s) B \quad \text{para qualquer } \sigma \in [t_0, t_1],$$

o que contradiz (b). Então tem de que se verificar (b'). Portanto $[t_0', t_1']$ e x verificam todas as condições (a')-(e') e

$$\Delta_R(r, s') \leq t_1' - t_0' \leq t_1 - t_0 \leq \Delta_R(r, s) + \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário então verifica-se a proposição.■

4.3 O resultado principal

As próximas três secções contém a exposição e a demonstração do resultado principal do artigo [17]. Ao longo dessas secções o intervalo $[a, b]$ e a constante positiva R estão fixados. Também está fixada a aplicação $L : [a, b] \times R\bar{B} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Escrevemos $\Omega := [a, b] \times R\bar{B}$, tal com na Secção 4.2. Suponhamos que se verificam as seguintes hipóteses básicas:

[4] **(O principio da optimalidade)** Seja Ω o conjunto não-vazio de todas as funções admissíveis, isto é, o conjunto de todas as funções x tais que

$$(t, x(t)) \in A, \quad t \in [a, b], \quad (a, x_a, b, x_b) \in B$$

(A é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^{n+1}$ e B é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^{2n+2}$) isto é, com as condições de fronteira dadas e com os seus gráficos em A. Seja $x_0(t)$, $t \in [a, b]$, uma solução óptima em Ω para o funcional

$$\Lambda(x) = \int_a^b L(t, x(t), x'(t))\, dt.$$

Seja y_0 algum subarco da curva y_0, isto é, $x_0(t) = y_0(t)$ para t nalgum intervalo $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$. Seja Ω_0 a classe de todas as funções admissíveis $y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, com $y(\alpha) = x_a$, $y(\beta) = x_b$ e com gráfico em A. Então y_0 é óptima para Λ em Ω_0.

Demonstração:

Ver [9], pág. 27.

(H1) L é lipschitziana em qualquer subconjunto compacto de $\Omega \times \mathbb{R}^n$, e para qualquer $(t, x) \in \Omega$, $L(t, x, \cdot)$ é convexa;

(H2) para qualquer $(t, x) \in \Omega$, $L(t, x, \cdot)$ é estritamente convexa no infinito.

Para uma dada escolha de pontos fronteira $x_a, x_b \in RB$ consideramos o problema:

$$\min \quad \{\Lambda(x) : x \in AC([a, b], \mathbb{R}^n), x(a) = x_a, x(b) = x_b, |x(t)| < R \ \ \forall t \in [a, b]\}, \tag{P_R}$$

onde

$$\Lambda(x) := \int_a^b L(t, x(t), x'(t))\, dt$$

Note que o problema (P_R) tem uma restrição para o estado a qual exige que a solução permaneça no interior de RB. Recordemos que H e Δ_R foram definidos na Secção 4.2.

4.3.1 Exposição

Teorema 4.3.1 *Seja L verificando (H1), (H2) e seja m um número verificando* $\min\{|x_a|, |x_b|\} < m < R$. *Suponhamos que existe uma função lipschitziana $\bar{x}$ admissível para o problema (P_R) e tal que*

(H3) *para algum $\bar{\alpha} > 0$, para qualquer $(t, x) \in \Omega$, para qualquer p com $|p| \leq \bar{\alpha}$ temos*

$$H(t, x, p) \leq \frac{(R - m)\bar{\alpha} - \Lambda(\bar{x})}{b - a};$$

(H4) *$b - a \leq \Delta_R(r, s)$ para alguns números positivos r, s verificando*

$$r > \frac{R - m}{b - a}, \quad \rho(s) > r.$$

Então o problema (P_R) tem pelo menos uma solução e qualquer solução de (P_R) é lipschitziana.

Note que (H4) acima e (H7) abaixo verificam-se certamente se se verifica a condição de crescimento extremal (EGC) (Definição 4.2.12), uma condição que estudaremos na Secção 4.7. Pode-se mostrar que a forma do lagrangiano do seguinte teorema é equivalente à do anterior embora não aparente.

Teorema 4.3.2 *Seja L verificando (H1), (H2) e também*

(H5) *para qualquer $(t, x, v) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$ e para algum $\bar{\alpha} > 0$ tem-se $L(t, x, v) \geq \bar{\alpha}|v|$;*

(H6) *para algum $\alpha \in (0, \bar{\alpha})$ e para alguma função lipschitziana $\bar{x}$ admissível para (P_R)*

$$\frac{\Lambda(\bar{x})}{\alpha} + \min\{|x_a|, |x_b|\} < R;$$

(H7) *$b - a \leq \Delta_R(\bar{r}, \bar{s})$ para algum $\bar{s} > 0$ verificando $\rho(\bar{s}) > \bar{r}$, onde*

$$\bar{r} := \frac{\Lambda(\bar{x})}{\alpha(b - a)}.$$

Então o problema (P_R) tem pelo menos uma solução e qualquer solução de (P_R) é lipschitziana.

A demonstração do Teorema 4.3.2 estende-se pelas Secções 4.4 e 4.5. De facto, provaremos um resultado um pouco mais geral. Para provar que (P_R) tem pelo menos uma solução lipschitziana, podemos enfraquecer a hipótese de convexidade estrita no infinito substituindo-a pela simples hipótese de que (4.4) se verifica quando $r = \bar{r}$. Isto é, para algum $M > 0$

$$W(t,x,p) \cap \bar{r}\bar{B} \neq \emptyset \Rightarrow W(t,x,p) \subseteq M\bar{B}. \tag{4.20}$$

Escolhido um tal M iremos mostrar que qualquer solução lipschitziana x verifica $\|x'\|_\infty \leq \bar{s}$, desde que $\bar{s} > \max\{M, \bar{r}, \|\bar{x}'\|_\infty\}$ e verifique (H7). Para obtermos a conclusão adicional de que todas as soluções de (P_R) são lipschitzianas iremos apenas supor que para algum tal valor de $\bar{s}$ se verifica (4.4) com $r = \bar{s}$. Isto é, para algum $\mu > 0$ tem-se

$$W(t,x,p) \cap \bar{s}\bar{B} \neq \emptyset \Rightarrow W(t,x,p) \subseteq \mu\bar{B}. \tag{4.21}$$

Demonstraremos apenas o Teorema 4.3.2 pois, como veremos em seguida, estes dois teoremas são equivalentes.

Comecemos por ver como é que o Teorema 4.3.1 segue do Teorema 4.3.2. De (H3) deduzimos que para qualquer p com $|p| \leq \bar{\alpha}$, qualquer v e qualquer $(t,x) \in \Omega$ temos

$$L(t,x,v) + \frac{(R-m)\,\bar{\alpha} - \Lambda(\bar{x})}{(b-a)} \geq \langle p, v\rangle .$$

O lado esquerdo desta desigualdade define $\bar{L}(t,x,v)$. Fixando $p = \bar{\alpha}v/|v|$, deduzimos que $\bar{L}$ verifica (H5). Tomando $\bar{\Lambda}$ correspondente a $\bar{L}$, temos $\bar{\Lambda}(\bar{x}) = (R-m)\,\bar{\alpha}$ e (H6) fica

$$(R-m)\frac{\bar{\alpha}}{\alpha} + \min\{|x_a|, |x_b|\} < R.$$

Isto, pela definição de m, verifica-se para qualquer α suficientemente próximo de $\bar{\alpha}$. Analogamente, (H7) fica

$$b - a \leq \Delta_R\left(\frac{(R-m)\,\bar{\alpha}}{(b-a)\,\alpha}, \bar{s}\right)$$

e isto seguirá de (H4) quando α se aproxima de $\bar{\alpha}$, como queriamos. Logo estão verificadas todas as condições do Teorema 4.3.2 para a função $\bar{L}$, então o problema (P_R) para $\bar{L}$ tem pelo menos uma solução e todas as soluções são lipschitzianas. Como $\bar{L}$ e L diferem apenas numa constante então verifica-se o Teorema 4.3.1 para a função L.

Segundo os autores, o Teorema 4.3.1 implica o Teorema 4.3.2.

4.3.2 Exemplos

Exemplo 1

Ilustramos aqui a aplicação do Teorema 4.3.1 a um problema em que os conjuntos de subnível locais de Λ não são compactos, isto é, os conjuntos

$$\{x \in AC([a,b], \mathbb{R}^n) : \Lambda(x) \leq \lambda, |x| \leq \rho,\ x(a) = x_a,\ x(b) = x_b\}$$

não são compactos para quaisquer λ e ρ. Os dados do problema (P_R) são:

$$n = 1, \quad a = 0, \quad x_a = x_b = 0, \quad R = 2, \quad L(t,x,v) = \sqrt{1+v^2} - \frac{x^2}{8} - 1$$

onde b é um número não especificado em $(0, 2/3)$. Para os parâmetros do Teorema 4.3.1 definimos

$$m = 2 - 3b, \quad \bar{\alpha} = \frac{1}{2}, \quad r = 4, \quad \bar{x} \equiv 0.$$

O hamiltoniano é

$$H(t,x,p)=\begin{cases}\frac{x^2}{8}-\sqrt{1-p^2}+1 & \text{se } |p|\leq 1\\ +\infty & \text{caso contrário.}\end{cases}$$

(ver [43] pág. 106 e [44] pág. 475). Verifiquemos as hipóteses (H1)-(H3).

Comecemos por verificar (H1). Fixemos $(t,x)\in\Omega$ qualquer e provemos que $L(t,x,\cdot)$ é convexa em $\mathbb{R}$. Como as funções $L(t,x,\cdot)$, $L_v(t,x,\cdot)$ e $L_{vv}(t,x,\cdot)$ são contínuas e $L_{vv}(t,x,v)>0$ para qualquer $v\in\mathbb{R}$ então a função $L(t,x,\cdot)$ é estritamente convexa em $\mathbb{R}$ (ver Proposição 2.16.21).

Provemos agora que L é lipschitziana em qualquer subconjunto compacto de $\Omega\times\mathbb{R}$, onde $\Omega:=[a,b]\times 2\bar{B}$. Fixemos $A\subseteq\Omega\times\mathbb{R}$ compacto e $(t_1,x_1,v_1),(t_2,x_2,v_2)\in A$. Temos

$$\begin{aligned}|L(t_1,x_1,v_1)-L(t_2,x_2,v_2)| &= \left|\sqrt{1+v_1^2}-\frac{x_1^2}{8}-\sqrt{1+v_2^2}+\frac{x_2^2}{8}\right|\\ &\leq \left|\sqrt{1+v_1^2}-\sqrt{1+v_2^2}\right|+\left|\frac{x_2^2-x_1^2}{8}\right|\\ &= \left|\frac{\left(\sqrt{1+v_1^2}-\sqrt{1+v_2^2}\right)\left(\sqrt{1+v_1^2}+\sqrt{1+v_2^2}\right)}{\sqrt{1+v_1^2}+\sqrt{1+v_2^2}}\right|+\frac{|x_2-x_1|\,|x_2+x_1|}{8}\\ &\leq \frac{|v_1^2-v_2^2|}{\sqrt{1+v_1^2}+\sqrt{1+v_2^2}}+\frac{4\,|x_2-x_1|}{8}\\ &\leq \frac{|v_1-v_2|\,|v_1+v_2|}{2}+\frac{|x_2-x_1|}{2}\\ &\leq \frac{2\mu\,|v_1-v_2|}{2}+\frac{|x_2-x_1|}{2}\\ &\leq K\left(|v_1-v_2|+|x_2-x_1|\right)\end{aligned}$$

onde

$$\mu\geq\max\{|v|:(t,x,v)\in A\}\quad\text{e}\quad K\geq\max\left\{\mu,\frac{1}{2}\right\}.$$

Para (H2) fixemos $(t,x)\in\Omega$ e mostremos que $L(t,x,\cdot)$ é estritamente convexa no infinito mostrando que se verifica a condição (f) da Definição 4.2.1. De facto, para cada $r>0$ fixado existe $M:=r+1$ tal que

$$\forall p\in\mathbb{R}^n,\ W(t,x,p)\cap r\bar{B}\neq\emptyset\Rightarrow W(t,x,p)\subseteq M B.$$

Finalmente mostremos (H3). Fixemos p com $|p|\leq 1/2$ e $(t,x)\in[0,b]\times 2\bar{B}$. Temos

$$H(t,x,p)=\frac{x^2}{8}-\sqrt{1-p^2}+1\leq\frac{4}{8}-\frac{\sqrt{3}}{2}+1\leq\frac{3}{2}$$

e

$$\frac{(R-m)\,\bar{\alpha}-\Lambda(\bar{x})}{b-a}=\frac{\frac{3b}{2}-0}{b}=\frac{3}{2}$$

então verifica-se (H3).

Por um resultado que veremos mais à frente (Lema 4.6.1) resulta que $\Delta_2(4,s)$ (definido em relação ao intervalo $[0,\frac{2}{3}]$) é positivo para s suficientemente grande. Escolhendo um tal $s>r$ e especificando também $b<\Delta_2(4,s)$. É fácil verificar, através da definição, que $\Delta_2(4,s)$ definido em relação ao intervalo mais pequeno $[0,b]$ majora $\Delta_2(4,s)$ definido em relação a $\left[0,\frac{2}{3}\right]$. Isto confirma (H4) e então pode-se aplicar o Teorema 4.3.1. Deduzindo-se assim a existência de uma solução para o problema (P_R).

Salientemos que, se a restrição $|x| < 2$ é retirada, o problema (global) resultante não tem solução. Porque se considerarmos, por exemplo, a sucessão de funções absolutamente contínuas seccionalmente afins cujos os gráficos consistem nos três segmentos de recta que unem os pontos $(0,0)$, $(\frac{1}{i}, i)$, $(b - \frac{1}{i}, i)$, $(b, 0)$, então

$$\begin{aligned}
\Lambda(x_i) &= \int_0^b L(t, x_i(t), x_i'(t))\, dt = \int_0^b \left(\sqrt{1 + (x_i'(t))^2} - \frac{x_i^2(t)}{8} - 1 \right) dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{i}} \left(\sqrt{1+i^4} - \frac{i^4 t^2}{8} - 1 \right) dt + \int_{\frac{1}{i}}^{b-\frac{1}{i}} \left(-\frac{i^2}{8} \right) dt + \int_{b-\frac{1}{i}}^{b} \left(\sqrt{1+i^4} - \frac{i^4 (t-b)^2}{8} - 1 \right) dt \\
&= \frac{1}{i}\left(\sqrt{1+i^4} - 1\right) - \frac{i^4}{24}\left(\frac{1}{i}\right)^3 + \left(b - \frac{2}{i}\right)\left(-\frac{i^2}{8}\right) + \frac{1}{i}\left(\sqrt{1+i^4} - 1\right) + \frac{i^4}{24}\left(-\frac{1}{i}\right)^3 \\
&= \frac{2}{i}\left(\sqrt{1+i^4} - 1\right) - \frac{i^2 b}{8} + \frac{i}{6} \\
&= \frac{48\left(\sqrt{1+i^4} - 1\right) - 3i^3 b + 4i^2}{24i} \to -\infty \quad \text{quando } i \to \infty.
\end{aligned}$$

Os nossos comentários finais acerca deste exemplo mostrarão que nenhum dos relevantes conjuntos de sub-nível locais de Λ é compacto. Demonstraremos que $\min(\mathrm{P}_R) = 0$, que a única solução de (P_R) é $\bar{x} \equiv 0$, e que para quaisquer números positivos λ e ρ, o conjunto de subnível

$$\{x \in AC([0,b], \mathbb{R}) : \Lambda(x) \le \lambda, |x| \le \rho,\ x(0) = x(b) = 0\}$$

não verifica a propriedade de compacidade invocada na teoria clássica de existência de solução. Seja x uma função admissível com $\|x\|_\infty = c \in [0, 2)$. É geometricamente evidente que

$$\int_0^b \sqrt{1 + (x'(t))^2} dt \ge \sqrt{4c^2 + b^2},$$

do que se deduz que $\Lambda(x)$ majora

$$\sqrt{4c^2 + b^2} - \frac{bc^2}{8} - b.$$

Verifica-se facilmente que esta última expressão é não-negativa para b e c nos domínios indicados e anula-se apenas para $c = 0$. Estas observações provam que $\min(\mathrm{P}_R) = 0$, e que a única solução de (P_R) é $\bar{x} \equiv 0$. Fixemos λ e ρ positivos e escolhemos ε em $(0, \rho)$ tal que $2\varepsilon - b\varepsilon^2/8 < \lambda$. Consideremos a sucessão de funções admissíveis (x_i) cujos os gráficos consistem nos três segmentos de recta que unem os pontos $(0,0)$, $(\frac{1}{i}, \varepsilon)$, $(b - \frac{1}{i}, \varepsilon)$, $(b, 0)$. Cálculos como os feitos anteriormente mostram que $\Lambda(x_i)$ tende para $2\varepsilon - b\varepsilon^2/8$, um número menor que λ dada a escolha de ε. Então a cauda da sucessão (x_i) pertence ao conjunto de subnível

$$\{x \in AC([0,b], \mathbb{R}) : \Lambda(x) \le \lambda, |x| \le \rho, x(0) = x(b) = 0\}.$$

A sucessão não tem subsucessões convergentes para uma função admissível visto convergir para a função

$$x(t) := \begin{cases} 0 & \text{se } t = 0 \\ \varepsilon & \text{se } 0 < t < b \\ 0 & \text{se } t = b. \end{cases}$$

Vejamos agora alguns exemplos que ilustram a necessidade de algumas das hipóteses do Teorema 4.3.2.

Exemplo 2

Este exemplo mostra que o Teorema 4.3.2 é falso na falta da convexidade estrita no infinito. Consideremos

$$n = 1,\ \ a = 0,\ \ b = 6,\ \ x_a = x_b = 0,\ \ R = 2,\ \ \bar{\alpha} = 1,\ \ L(t, x, v) = |v| - |x| + x^2 + \frac{1}{4}.$$

Comecemos por verificar a condição de Lipschitz. Sejam $(t_1, x_1, v_1), (t_2, x_2, v_2) \in A$ quaisquer, sendo A um qualquer subconjunto compacto de $\Omega \times \mathbb{R}$. Temos

$$\begin{aligned}
|L(t_1, x_1, v_1) - L(t_2, x_2, v_2)| &= \left||v_1| - |x_1| + x_1^2 - |v_2| + |x_2| - x_2^2\right| \\
&\leq \left||v_1| - |v_2|\right| + \left||x_2| - |x_1| + x_1^2 - x_2^2\right| \\
&\leq |v_1 - v_2| + \left||x_2| - |x_1| + (|x_1| - |x_2|)(|x_1| + |x_2|)\right| \\
&= |v_1 - v_2| + |x_2 - x_1| \left|1 - |x_2| - |x_1|\right| \\
&\leq |v_1 - v_2| + |x_2 - x_1| (1 + 4) \\
&\leq 5 (|v_1 - v_2| + |x_1 - x_2|),
\end{aligned}$$

o que mostra que L é lipschitziana em A com constante de Lipschitz $K = 5$. Para verificar a convexidade fixemos $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in [0, 1]$. Temos

$$\begin{aligned}
L(t, x, \lambda v_1 + (1 - \lambda) v_2) &= |\lambda v_1 + (1 - \lambda) v_2| - |x| + x^2 + \frac{1}{4} \\
&\leq \lambda \left(|v_1| - |x| + x^2 + \frac{1}{4}\right) + (1 - \lambda) \left(|v_2| - |x| + x^2 + \frac{1}{4}\right) \\
&= \lambda L(t, x, v_1) + (1 - \lambda) L(t, x, v_2).
\end{aligned}$$

Concluimos assim que se verifica (H1). Fixemos agora $(t, x, v) \in \Omega \times \mathbb{R}$ e provemos (H5). Temos

$$L(t, x, v) = |v| - |x| + x^2 + \frac{1}{4} = |v| + \left(|x| - \frac{1}{2}\right)^2 \geq |v|.$$

Se a condição de crescimento extremal for válida então para qualquer $r > 0$, $\Delta_R(r, s)$ é $+\infty$ sempre que $\rho(s) > 0$ e portanto verifica-se (H7). Mas a condição de crescimento extremal segue mostrando que não existe nenhuma função x verificando (a)-(e) da definição de $\Delta_R(r, s)$ (Definição 4.2.11). Para ver isto reparemos que uma das condições necessárias que uma tal função x deve satisfazer por verificar a condição (e) é [5]: existe uma função p absolutamente contínua em $[t_0, t_1]$ tal que

$$p'(t) \in \partial_x L(t, x(t), x'(t)) \quad \text{e} \quad p(t) \in \partial_v L(t, x(t), x'(t)) \quad \text{qs em } [t_0, t_1]. \tag{4.22}$$

Mas para cada $(t, x, v) \in \Omega \times \mathbb{R}$ fixado, temos

$$\partial_x L(t, x, v) = \begin{cases} \{2x + 1\} & \text{se } x < 0 \\ \{2x - 1\} & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \partial_v L(t, x, v) = \begin{cases} \{-1\} & \text{se } v < 0 \\ [-1, 1] & \text{se } v = 0 \\ \{1\} & \text{se } v > 0. \end{cases} \tag{4.23}$$

[5] Se x é uma solução do problema

$$\min \left\{ J(y) = l(y(a), y(b)) + \int_a^b L(t, y(t), y'(t))\, dt : y \in AC[a, b] \right\}$$

onde $L(s, v)$ é uma função localmente lipschitziana e independente de t, e se $x'(t)$ é essencialmente limitada. Então existe uma

$$p'(t) \in \partial_s L(x(t), x'(t)), \quad p(t) \in \partial_v L(x(t), x'(t)) \quad \text{qs}$$

$$L(x(t), x'(t)) - \langle p(t), x'(t) \rangle = \text{constante} \quad \text{qs}$$

função absolutamente contínua p tal que $L(x(t), x'(t) + v) \geq L(x(t), x'(t)) + \langle p(t), v \rangle$ para qualquer v, qs

$$\begin{bmatrix} p(a) \\ -p(b) \end{bmatrix} \in \partial l(x(a), x(b)).$$

Demonstração:
Ver [13], Teorema 4.4.3 .

Então (4.22) é equivalente a dizer que existe uma função absolutamente contínua p em $[t_0, t_1]$ tal que, para quase todo o t,

$$p' = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } x<0 \\ 2x-1 & \text{se } x>0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad p \in \begin{cases} \{-1\} & \text{se } x'<0 \\ [-1,1] & \text{se } x'=0 \\ \{1\} & \text{se } x'>0\,. \end{cases}$$

Assim, excepto para pontos isolados, o intervalo $[0,6]$ consiste em intervalos nos quais $p=-1$, $p=+1$ ou $|p|<1$. Segue do que vimos acima que $x'=0$ em qualquer um desses intervalos, portanto x é constante, uma contradição com (a)-(e).

Finalmente, verifica-se (H6) para $\alpha = 7/8$, se escolhermos $x'=0$. De facto, se $x'=0$ temos

$$\Lambda(\bar{x}) = \int_0^6 \left(|x'(t)| - |x(t)| + x^2(t) + \frac{1}{4} \right) dt = \frac{3}{2}$$

e portanto

$$\frac{\Lambda(\bar{x})}{\alpha} + \min\{|x_a|, |x_b|\} = \frac{3}{2\alpha}.$$

Logo para que (H6) se verifique temos que ter

$$\frac{3}{2\alpha} < 2 \Leftrightarrow \alpha > \frac{3}{4},$$

então verifica-se para $\alpha = 7/8$.

Mostremos agora que a função L não é estritamente convexa no infinito. Para isso utilizemos a Proposição 4.2.2 e mostremos que falha a condição (4.4). Por (4.23) vem

$$W(t,x,p) = \{v : p \in \partial_v L(t,x,v)\} = \mathbb{R} \quad \text{para } |p| \leq 1$$

e portanto

$$\forall (t,x) \in \Omega,\ \forall p \text{ com } |p| \leq 1 \ \ W(t,x,p) \cap r\bar{B} \neq \emptyset,$$

para qualquer $r>0$. Mas, como é fácil verificar, não existe $M>r$ tal que

$$W(t,x,p) \subseteq M\bar{B}$$

portanto não se verifica (4.4) e então L não é estritamente convexa no infinito. Assim estão verificadas todas as hipóteses do Teorema 4.3.2, excepto a convexidade estrita no infinito. Para ver que falha a conclusão do teorema, argumentamos exactamente como na estimação de Δ_R feita acima para deduzir que a única possível solução lipschitziana para (P_R) é $x \equiv 0$. Mas cálculos simples mostram que (por exemplo) a função admissível

$$y(t) := \begin{cases} \frac{1}{2}t & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{se } 1 < t \leq 5 \\ -\frac{1}{2}(t-6) & \text{se } 5 < t \leq 6 \end{cases}$$

dá um valor mais pequeno a Λ do que $x \equiv 0$, uma contradição.

Exemplo 3

Este exemplo demonstra que precisamos de (H6) no Teorema 4.3.2. Fixemos

$$n=1,\ \ a=0,\ \ b=\frac{3}{2}\pi,\ \ x_a=x_b=0,\ \ \bar{\alpha}=1,\ \ L(t,x,v) = v^2 - x^2 + R^2 + \frac{1}{4},$$

onde R tem que ser escolhido suficientemente grande tal que

$$\frac{3}{2}\pi\left(R^2+\frac{1}{4}\right)>R.$$

Consideremos $\bar{x}\equiv 0$, então

$$\Lambda(\bar{x})=\frac{3}{2}\pi\left(R^2+\frac{1}{4}\right).$$

Mostremos que se verificam as condições (H1), (H2), (H5) e (H7).

Comecemos pela condição (H1). Sejam $(t_1,x_1,v_1),(t_2,x_2,v_2)\in A$ onde A é um qualquer subconjunto compacto de $\Omega\times\mathbb{R}$. Temos

$$\begin{aligned}|L(t_1,x_1,v_1)-L(t_2,x_2,v_2)| &= \left|v_1^2-x_1^2-v_2^2+x_2^2\right|\leq\left|v_1^2-v_2^2\right|+\left|x_1^2-x_2^2\right| \\ &= |v_1-v_2|\,|v_1+v_2|+|x_1-x_2|\,|x_1+x_2| \\ &\leq K\left(|v_1-v_2|+|x_1-x_2|\right),\end{aligned}$$

ou seja, L é lipschitziana em A com constante $K\geq\max\{2R_A,2R\}$, onde $R_A\geq\max\{|v|:(t,x,v)\in A\}$.

Fixemos agora $(t,x)\in\Omega$ e mostremos que $L(t,x,\cdot)$ é convexa em $\mathbb{R}$. Como as funções $L(t,x,\cdot)$, $L_v(t,x,\cdot)$ e $L_{vv}(t,x,\cdot)$ são contínuas e $L_{vv}(t,x,v)>0$ para qualquer $v\in\mathbb{R}$ então a função $L(t,x,\cdot)$ é estritamente convexa em $\mathbb{R}$ (ver Proposição 2.16.21).

Para verificar (H2) fixemos $(t,x)\in\Omega$. Como, para cada $v\in\mathbb{R}$ fixado,

$$\partial_v L(t,x,v)=\{2v\}$$

então, para qualquer $p\in\mathbb{R}$,

$$W(t,x,v)=\{v:p\in\partial_v L(t,x,v)\}=\left\{\frac{p}{2}\right\}.$$

Logo, para cada $r>0$ fixado existe $M>r$ tal que

$$\forall p\in\mathbb{R}, W(t,x,p)\cap r\bar{B}\neq\emptyset\Rightarrow W(t,x,p)\subseteq MB,$$

então $L(t,x,\cdot)$ é estritamente convexa no infinito (ver Definição 4.2.1 (f)).

Provemos agora (H5), para isso fixemos $(t,x,v)\in\Omega\times\mathbb{R}$ qualquer. Temos

$$L(t,x,v)=v^2-x^2+R^2+\frac{1}{4}>v^2-R^2+R^2+\frac{1}{4}=v^2+\frac{1}{4}\geq v.$$

Para qualquer $\alpha\in(0,1)$ e $\bar{x}\equiv 0$ temos

$$\frac{\Lambda(\bar{x})}{\alpha}+\min\{|x_a|,|x_b|\}=\frac{3}{2\alpha}\pi\left(R^2+\frac{1}{4}\right)>\frac{R}{\alpha}>R,$$

o que mostra que (H6) não se verifica.

Para ver que (H7) se verifica observemos primeiro que todos os extremais (soluções de classe C^1 da equação de Euler) gerados por L são da forma

$$x(t)=c\sin(t+k) \tag{4.24}$$

(ver [35] pág. 15, sabendo que a equação de Euler associada a L é $x''(t)+x(t)=0$). Qualquer x descrito como na definição de $\Delta_R(r,s)$ é necessariamente um extremal, e deduzimos que $|c|$ é pelo menos $s-r$. De facto, pela Proposição 4.2.4, $\rho(s)=s$ para qualquer $s>0$ então, por (b) da definição de $\Delta_R(r,s)$, existe $\sigma\in[t_0,t_1]$ tal que

$$|x'(\sigma)|\geq s$$

e, por (a) da definição de $\Delta_R(r,s)$, existe $\tau \in [t_0, t_1]$ tal que

$$|x'(\tau)| \le r \tag{4.25}$$

mas, por (4.24), $|x(t)| \le |c|$ para qualquer $t \in [a,b]$ então

$$s \le |c| \Rightarrow s - r \le |c| - r < |c| \Rightarrow |c| > s - r. \tag{4.26}$$

Além disso $x^2 + x'^2$ é sempre igual a c^2, então nalgum ponto $\tau \in [t_0, t_1]$ devemos ter $x(\tau)^2 \ge c^2 - r^2$ (por (4.25)). Daqui e por (4.26) sai

$$x(\tau)^2 \ge (s-r)^2 - r^2,$$

o que implica $|x(\tau)| > R$ se s é escolhido suficientemente grande, uma contradição. Isto prova que $\Delta_R(r,s) = \infty$ para s suficientemente grande, então verifica-se (H7).

Verifiquemos agora que falha a conclusão do Teorema 4.3.2. Se x fosse uma solução lipschitziana para (P_R) então x seria um extremal admissível. Mas o único é $x \equiv 0$ pois tem que verificar $x_a = x_b = 0$. Por outro lado, $x \equiv 0$ não é mínimo local para Λ pois, por cálculos variacionais clássicos, o ponto π é conjugado a 0 (ver [9], 2.5.i pág. 54). Isto é a contradição desejada.

Exemplo 4

Demonstramos agora a necessidade da condição (H7) para o Teorema 4.3.2, usando uma versão do problema de Ball-Mizel (ver [4] e/ou [20]). Pomos

$$n = 1,\ \ a = 0,\ \ b = 1,\ \ x_a = 0,\ \ x_b = k > 0,\ \ \bar{\alpha} = 1,\ \ L(t,x,v) = \frac{1}{4\varepsilon} + \varepsilon v^2 + \left(x^3 - t^2\right)^2 v^{14}.$$

É fácil verificar que, para cada $(t,x) \in \Omega$ fixado, $L(t,x,\cdot)$ é estritamente convexa em $\mathbb{R}$ (as funções $L(t,x,\cdot)$, $L_v(t,x,\cdot)$ e $L_{vv}(t,x,\cdot)$ são contínuas e $L_{vv}(t,x,v) > 0$ para qualquer $v \in \mathbb{R}$ então, pela Proposição 2.16.21, a função $L(t,x,\cdot)$ é estritamente convexa em $\mathbb{R}$). Para verificar a propriedade de Lipschitz fixemos $(t_1,x_1,v_1), (t_2,x_2,v_2) \in A$, sendo A um qualquer compacto de $\Omega \times \mathbb{R}$. Temos

$$\begin{aligned}
& |L(t_1,x_1,v_1) - L(t_2,x_2,v_2)| \\
\le\ & |L(t_1,x_1,v_1) - L(t_2,x_1,v_1)| + |L(t_2,x_1,v_1) - L(t_2,x_2,v_1)| + |L(t_2,x_2,v_1) - L(t_2,x_2,v_2)| \\
=\ & \left|\left(x_1^3 - t_1^2\right)^2 - \left(x_1^3 - t_2^2\right)^2\right| \left|v_1^{14}\right| + \left|\left(x_1^3 - t_2^2\right)^2 - \left(x_2^3 - t_2^2\right)^2\right| \left|v_1^{14}\right| + \\
& + \left|\varepsilon\left(v_1^2 - v_2^2\right) + \left(x_2^3 - t_2^2\right)^2 \left(v_1^{14} - v_2^{14}\right)\right| \\
\le\ & \left|x_1^3 - t_1^2 - x_1^3 + t_2^2\right| \left|x_1^3 - t_1^2 + x_1^3 - t_2^2\right| |v_1|^{14} + \left|x_1^3 - t_2^2 - x_2^3 + t_2^2\right| \left|x_1^3 - t_2^2 + x_2^3 - t_2^2\right| |v_1|^{14} + \\
& + |\varepsilon| \left|v_1^2 - v_2^2\right| + \left|x_2^3 - t_2^2\right|^2 \left|v_1^{14} - v_2^{14}\right| \\
\le\ & |v_1|^{14} \left|t_2^2 - t_1^2\right| \left(2|x_1|^3 + |t_1|^2 + |t_2|^2\right) + |v_1|^{14} \left|x_1^3 - x_2^3\right| \left(|x_1|^3 + |x_2|^3 + 2|t_2|^2\right) + \\
& + |\varepsilon| |v_1 - v_2| |v_1 + v_2| + \left(|x_2|^6 + 2|x_2|^3 |t_2|^2 + |t_2|^4\right) \left|v_1^{14} - v_2^{14}\right| \\
\le\ & 2R_A^{14} |t_2 - t_1| |t_2 + t_1| \left(R^3 + (b-a)^2\right) + 2R_A^{14} |x_1 - x_2| \left|x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2\right| \left(R^3 + (b-a)^2\right) + \\
& + 2R_A |\varepsilon| |v_1 - v_2| + 14R_A^{13} \left(R^6 + 2R^3 (b-a)^2 + (b-a)^4\right) |v_1 - v_2| \\
=\ & 4R_A^{14} (b-a) \left(R^3 + (b-a)^2\right) |t_2 - t_1| + 6R^2 R_A^{14} \left(R^3 + (b-a)^2\right) |x_1 - x_2| + \\
& + \left(2R_A |\varepsilon| + 14R_A^{13} \left(R^6 + 2R^3 (b-a)^2 + (b-a)^4\right)\right) |v_1 - v_2| \\
=\ & 4R_A^{14} \left(R^3 + 1\right) |t_2 - t_1| + 6R^2 R_A^{14} \left(R^3 + 1\right) |x_1 - x_2| + \left(2R_A |\varepsilon| + 14R_A^{13} \left(R^6 + 2R^3 + 1\right)\right) |v_1 - v_2| \\
\le\ & K \left(|t_2 - t_1| + |x_1 - x_2| + |v_1 - v_2|\right),
\end{aligned}$$

ou seja, L é lipschitziana em A com constante

$$K \geq \max\left\{4R_A^{14}\left(R^3+1\right), 6R^2R_A^{14}\left(R^3+1\right), 2R_A\left|\varepsilon\right| + 14R_A^{13}\left(R^6+2R^3+1\right)\right\}$$

onde $R_A \geq \max\{|v| : (t,x,v) \in A\}$.

Para verificar (H2) fixemos $(t,x) \in \Omega$ qualquer. Como L é localmente lipschitziana em $\Omega \times \mathbb{R}$ e $L(t,x,\cdot)$ é estritamente convexa então, pela Observação 4.2.10, $W(t,x,p)$ não contém mais do que um ponto, qualquer que seja $p \in \mathbb{R}$. Podemos assim concluir que para cada $r > 0$ fixado existe $M > r$ tal que

$$\forall p \in \mathbb{R}, \quad W(t,x,p) \cap r\bar{B} \neq \emptyset \Rightarrow W(t,x,p) \subseteq MB,$$

o que, pela Definiçao 4.2.1, significa que $L(t,x,\cdot)$ é estritamente convexa no infinito.

A condição (H5) também se verifica. De facto, para cada $(t,x,v) \in \Omega \times \mathbb{R}$ fixado, temos

$$L(t,x,v) = \frac{1}{4\varepsilon} + \varepsilon v^2 + \left(x^3 - t^2\right)^2 v^{14} \geq \frac{1}{4\varepsilon} + \varepsilon v^2 \geq v.$$

Está provado em [20] (Teorema 1) que para escolhas convenientes de constantes positivas k e ε (k suficientemente próximo de 1 mas inferior a 1 e $\varepsilon > 0$) o único minimizante global para Λ sobre $AC([0,1],\mathbb{R})$ e sujeito às condições de fronteira dadas é

$$\widehat{x}(t) := kt^{2/3}.$$

Peguemos nalgum $\bar{x}$ conveniente e escolhemos R suficientemente grande tal que (H6) se verifique (para alguma escolha aproriada de α), e então, pela definição de (P_R), também $|\widehat{x}(t)| < R$ para qualquer $t \in [0,1]$.

Mostremos agora que não se verifica (H7). É fácil ver, pela Definição 4.2.11, que para qualquer $r \geq 2k/3$, $s > r$ e $\widehat{x}(t) = kt^{2/3}$ existe um intervalo $[t_0,t_1] \subseteq [a,b]$ tal que

$$\Delta_R(r,s) = t_1 - t_0 \leq b - a.$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
\Lambda(\widehat{x}) &= \int_0^1 \left(\frac{1}{4\varepsilon} + \varepsilon\left(\frac{2}{3}kt^{-1/3}\right)^2 + \left(k^3t^2 - t^2\right)^2\left(\frac{2}{3}kt^{-1/3}\right)^{14}\right)dt \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{4\varepsilon} + \frac{4}{9}\varepsilon k^2 t^{-2/3} + t^4\left(k^3-1\right)^2\left(\frac{2}{3}k\right)^{14} t^{-14/3}\right)dt \\
&= \frac{1}{4\varepsilon} + \frac{4}{3}\varepsilon k^2 + 3\left(k^3-1\right)^2\left(\frac{2}{3}k\right)^{14} \\
&\geq \frac{1}{4\varepsilon} + \frac{4}{3}\varepsilon k^2 \geq 2\frac{k}{\sqrt{3}} \geq \frac{2k}{3}.
\end{aligned}$$

Então não existe $\bar{s} > 0$ verificando $\rho(\bar{s}) = \bar{s} > \bar{r}$, onde

$$\bar{r} := \frac{\Lambda(\widehat{x})}{\alpha(b-a)} \geq \frac{2k}{3\alpha} > \frac{2k}{3} \quad \text{para algum } \alpha \in (0,\bar{\alpha}),$$

e tal que

$$\Delta_R(\bar{r},\bar{s}) \geq b - a,$$

como pretendiamos.

Então estão verificadas todas as hipóteses do Teorema 4.3.2 (excepto (H7)), e a conclusão falha. A única solução de (P_R) é a própria função $\widehat{x}$, e $\widehat{x}$ não é lipschitziana em $[0,1]$ pois $\widehat{x}'$ não é limitada em nenhuma de vizinhança de $t = 0$. Este exemplo sugere que (H7) pode ser utilizada como uma ferramenta para deduzir a regularidade das soluções, um tema que será desenvolvido na Secção 4.7.

4.4 Existência de solução para o problema lipschitziano

A demonstração do Teorema 4.3.2 é feita essencialmente em duas etapas. A primeira, descrita nesta secção, consiste em encontrar uma solução para a versão lipschitziana do problema (P_R). Este problema auxiliar, denotado (P_R^∞), é idêntico a (P_R) em tudo excepto que a minimização é sobre $AC^\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$ [6] em vez de $AC([a,b],\mathbb{R}^n)$. Na segunda etapa, descrita na Secção 4.5, prova-se que a solução que encontrámos para (P_R^∞) é também óptima para (P_R).

Teorema 4.4.1 *Sobre as hipóteses (H1), (H5)-(H7) e (4.20), o problema (P_R^∞) tem uma solução.*

Demonstração:
Suponhamos que são dados $\alpha \in (0, \bar{\alpha})$ e pontos fronteira x_a e x_b para os quais se verificam (H1), (H5)-(H7) e (4.20). Sejam $\bar{x}$ e $\bar{r}$, respectivamente, a função lipschitziana admissível e a constante que aparecem em (H7) e (4.20). Fixemos também a constante M fornecida por (4.20).

Passo 1. Introdução de problemas auxiliares

Pequenos aperfeiçoamentos de [18] (Lema 5.1) implicam que para cada $s > 0$ existe um lagrangiano auxiliar $L_s : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:

(a) L_s verifica (H1) e (H2);

(b) $L_s(t,x,v) = L(t,x,v), \ \forall (t,x,v) \in \Omega \times s\bar{B}$;

(c) $L_s(t,x,v) \geq \max\left\{\alpha|v|, |v|^2 - s^2\right\}, \ \forall (t,x,v) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$;

(d) Existe um número finito $v(s) > 0$ tal que

$$L_s(t,x,v) = |v|^2 - s^2 \quad \forall (t,x) \in \Omega, \forall |v| \geq v(s).$$

Em função destes lagrangianos auxiliares formulamos os seguintes problemas auxiliares

$$\min \quad \{\Lambda_s(x) : x \in AC([a,b],\mathbb{R}^n), \ x(a) = x_a, \ x(b) = x_b, \ |x(t)| \leq R \ \ \forall t \in [a,b]\}, \qquad (\mathrm{P}^s)$$

onde

$$\Lambda_s(x) := \int_a^b L_s(t, x(t), x'(t))\, dt.$$

Notemos que aqui a minimização é sobre todas as funções absolutamente contínuas (e não apenas sobre as lipschitzianas), e que o conjunto restrição para o estado, $R\bar{B}$, é fechado. Estes dois factos são importantes na teoria clássica de existência.

Passo 2. Existência e regularidade de soluções interiores

Qualquer problema (P^s), $s > 0$, tem uma função admissível unicamente porque L verifica (H1). Como cada $s > 0$ o lagrangiano L_s é contínuo conjuntamente em todos os seus argumentos e, convexo e quadraticamente coercivo em v [7], o teorema clássico de existência de Tonelli (ver [9], 2.20.i) implica que cada problema (P^s) tem uma solução x_s.

Notemos que se $s \geq \|\bar{x}'\|_\infty$ então o Passo 1 (b) implica

$$\Lambda_s(\bar{x}) := \int_a^b L_s(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t))\, dt = \Lambda(\bar{x}),$$

[6] Recordemos que $AC^\infty([a,b],\mathbb{R}^n) = \{x \in AC([a,b],\mathbb{R}^n) : x' \in L^\infty([a,b],\mathbb{R}^n)\}$.

[7] Recordemos que o lagrangiano L diz-se **quadraticamente coercivo** se existem constantes α e β com $\alpha > 0$ tais que

$$L(t,x,v) \geq \alpha|v|^2 + \beta \quad \forall (t,x,v) \in \Omega \times \mathbb{R}^n.$$

donde

$$\begin{aligned}\Lambda(\bar{x}) &= \Lambda_s(\bar{x}) \geq \Lambda_s(x_s) = \int_a^b L_s(t, x_s(t), x_s'(t))\, dt \geq \int_a^b \alpha |x_s'(t)|\, dt \geq \alpha \left| \int_a^b x_s'(t)\, dt \right| \\ &= \alpha |x_b - x_a| \geq \alpha \max\{\|x_s - x_a\|_\infty, \|x_s - x_b\|_\infty\}.\end{aligned} \tag{4.27}$$

Dado que $\|\cdot\|_\infty$ é uma norma em $L^\infty([a,b], \mathbb{R}^n)$ (ver Proposição 2.11.9) então verifica a desigualdade triangular, por conseguinte para qualquer $s \geq \|\bar{x}'\|_\infty$

$$\begin{aligned}\Lambda(\bar{x}) &\geq \alpha \max\{\|x_s - x_a\|_\infty, \|x_s - x_b\|_\infty\} \geq \alpha \max\{\|x_s\|_\infty - |x_a|, \|x_s\|_\infty - |x_b|\} \\ &\geq \alpha(\|x_s\|_\infty - \min\{|x_a|, |x_b|\}),\end{aligned}$$

o que implica

$$\|x_s\|_\infty \leq \frac{\Lambda(\bar{x})}{\alpha} + \min\{|x_a|, |x_b|\}$$

e por (H6) vem

$$\|x_s\|_\infty < R.$$

Assim, dado que x_s é uma função absolutamente contínua em $[a,b]$, vem

$$|x_s(t)| \leq \|x_s\|_\infty < R \quad \forall t \in [a,b]$$

ou seja, x_s está no interior da região $R\bar{B}$ (restrição para o estado). Em particular, x_s é uma solução local forte para a versão de (P^s) sem a restrição para o estado.

Por (d), para cada $s > 0$ fixado, o lagrangiano auxiliar L_s é independente de (t,x) fora do conjunto compacto $\Omega \times v(s)\bar{B}$. Dentro deste conjunto compacto L_s é lipschitziano (ver (a)). Assim existe uma bola grande que contém todos os conjuntos $\partial_{(t,x)} L_s(t,x,v)$, $(t,x,v) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$. De facto, para cada s fixado, se $(t_i, x_i, v_i) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \backslash v(s)\bar{B})$ então $\partial_{(t,x)} L_s(t_i, x_i, v_i) = \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e se $(t_i, x_i, v_i) \in \Omega \times v(s)\bar{B}$ então, pela Proposição 2.21.3, existe $K_i > 0$ tal que $|\xi| \leq K_i$ para qualquer $\xi \in \partial_{(t,x)} L_s(t_i, x_i, v_i)$. Logo existe $K_s > 0$ tal que

$$K_s \geq \max\{K_i : |\xi| \leq K_i \ \forall \xi \in \partial_{(t,x)} L_s(t_i, x_i, v_i), (t_i, x_i, v_i) \in \Omega \times v(s)\bar{B}\}$$

e portanto todo o conjunto $\partial_{(t,x)} L_s(t,x,v)$, para qualquer $(t,x,v) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$, está contido em $K_s\bar{B}$.

Pelo Teorema 4.2.2 de [13], segue que x_s é lipschitziana em $[a,b]$ e verifica a inclusão diferencial de Euler--Lagrange para L_s. É claro que, a constante de Lipschitz de x_s pode depender de s. Mas em qualquer caso, para cada $s > 0$, a multifunção $Ess\ x_s'$ é scs, com valores compactos e não-vazios (ver Corolário 4.2.7).

Passo 3. Aplicar as condições necessárias

Os cálculos (4.27) feitos acima implicam que (quando s é suficientemente grande)

$$(b-a)^{-1} \int_a^b |x_s'(t)|\, dt \leq \bar{r}.$$

De facto, vimos que para $s \geq \|\bar{x}'\|_\infty$

$$\int_a^b \alpha |x_s'(t)|\, dt \leq \Lambda(\bar{x})$$

e por (H6), $\Lambda(\bar{x}) = \bar{r}\alpha(b-a)$ então vem

$$(b-a)^{-1} \int_a^b |x_s'(t)|\, dt \leq \bar{r}. \tag{4.28}$$

Pela Proposição 2.14.10

$$\frac{1}{b-a}\left|\int_a^b x_s'(t)\,dt\right| = \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b x_s'(t)\,dt\right| = \left|\frac{x_s(b)-x_s(a)}{b-a}\right|,$$

então (4.28) implica

$$\left|\frac{x_s(b)-x_s(a)}{b-a}\right| \leq \bar{r}.$$

Por outro lado, como x_s é lipschitziana então, pelo Teorema do Valor Médio [8], existe $\tau \in [a,b]$ tal que

$$x_s(b)-x_s(a) \in \partial x(\tau)(b-a)$$

e portanto existe $\xi \in \partial x_s(\tau)$ tal que

$$x_s(b)-x_s(a) = \xi(b-a).$$

Assim, para cada $s \geq \|\bar{x}'\|_\infty$ existe pelo menos um ponto $\tau \in [a,b]$, dependendo de s, e existe $\xi \in Ess\; x_s'(\tau)$ tal que

$$|\xi| = \left|\frac{x_s(b)-x_s(a)}{b-a}\right| \leq \bar{r},$$

pelo que

$$Ess\; x_s'(\tau) \cap \bar{r}\bar{B} \neq \emptyset. \tag{4.29}$$

Pela inclusão de Euler-Lagrange para L_s (ver Teorema 4.2.2 de [13]) existe uma função absolutamente contínua p_s tal que

$$(p_s'(t), p_s(t)) \in \partial_{(x,v)} L_s(t, x_s(t), x_s'(t)) \qquad \text{qs},$$

o que implica

$$p_s(t) \in \partial_v L_s(t, x_s(t), x_s'(t)) \qquad \text{qs},$$

ou seja, verifica-se a s-versão da inclusão (4.16). Assim, pela Proposição 4.2.9, deduzimos que

$$\overline{co}\, Ess\; x_s'(t) \subseteq W_s(t, x_s(t), p_s(t)) \qquad \forall t \in [a,b]. \tag{4.30}$$

Observemos que, para qualquer $(t,x,v) \in [a,b] \times R\bar{B} \times \mathbb{R}^n$,

$$W_s(t,x,p) \cap rB \subseteq W(t,x,p) \quad \forall r \in (0,s]. \tag{4.31}$$

De facto, se v pertence ao lado esquerdo então o Passo 1 (b) implica

$$p \in \partial_v L_s(t,x,v) = \partial_v L(t,x,v),$$

então v pertence ao lado direito.

[8](**Teorema do Valor Médio** ou **Teorema de Lebourg**) Sejam x e y pontos de X (espaço de Banach) e suponhamos que $f : Y \to \mathbb{R}$ (Y um subconjunto de X) é lipschtziana num aberto contendo o segmento de recta $[x,y]$. Então existe um ponto $u \in (x,y)$ tal que

$$f(y) - f(x) \in \partial f(u)(y-x).$$

Demonstração:
Ver [13], pág. 41.

As condições (4.29) e (4.30) implicam que

$$\emptyset \neq Ess\ x_s'(\tau) \cap \bar{r}\bar{B} \subseteq Ess\ x_s'(\tau) \subseteq \overline{co}\, Ess\ x_s'(\tau) \subseteq W_s(\tau, x_s(\tau), p_s(\tau)),$$

ou seja, $W_s(\tau, x_s(\tau), p_s(\tau))$ contém pelo menos um ponto de $\bar{r}\bar{B}$. Seja w esse ponto.

Desde que $s > \bar{r}$, (4.31) implica que w também está em $W(\tau, x_s(\tau), p_s(\tau))$, pelo que

$$W(\tau, x_s(\tau), p_s(\tau)) \cap \bar{r}\bar{B} \neq \emptyset.$$

Usando a condição (4.20), deduzimos de (4.31) que

$$W_s(\tau, x_s(\tau), p_s(\tau)) \cap sB \subseteq W(\tau, x_s(\tau), p_s(\tau)) \subseteq M\bar{B}.$$

Finalmente, como $W_s(\tau, x_s(\tau), p_s(\tau))$ é um conjunto convexo fechado segue que

$$W_s(\tau, x_s(\tau), p_s(\tau)) \subseteq M\bar{B}$$

sempre que $s > \max\{M, \bar{r}, \|\bar{x}'\|_\infty\}$ e por (4.30) vem

$$Ess\ x_s'(\tau) \subseteq M\bar{B}. \tag{4.32}$$

Passo 4. Estimar $\|x_s'\|_\infty$

Fixemos algum $\sigma > \max\{M, \bar{r}, \|\bar{x}'\|_\infty\}$ tal que $\Delta_R(\bar{r}, \sigma) \geq b - a$. Tal escolha é possível pela hipótese (H7) e pela Proposição 4.2.13. Mostraremos que

$$s > \sigma \text{ implica } Ess\ x_s'(t) \subseteq \sigma B \quad \forall t \in (a, b). \tag{4.33}$$

Por conseguinte, fixemos $s > \sigma$ e apliquemos a Proposição 4.2.8 à função x_s e ao ponto τ identificado no Passo 3. Obtemos assim um intervalo não-vazio $[t_0, t_1] \subseteq [a, b]$ que contem uma vizinhança de τ relativa a $[a, b]$ e no qual se verificam (i)-(iv) da Proposição 4.2.8. Reparando na conclusão (ii), vemos que (4.33) seguirá se podermos mostrar que $t_0 = a$ e $t_1 = b$. Para isso comparemos as propriedades de x_s e $[t_0, t_1]$ com as condições (a)-(e) que definem $\Delta_R(\bar{r}, \sigma)$ (ver Definição 4.2.11). Mostrámos acima que x_s é uma função lipschitziana que, por (4.29), verifica a condição (a). A condição (c) segue da Proposição 4.2.8 (ii), e a condição (d) foi verificada no Passo 2. Para a condição (e), o principio da optimalidade implica que x_s resolve

$$\min \left\{ \int_{t_0}^{t_1} L_s(t, y(t), y'(t))\, dt : y(t_i) = x(t_i), |y(t)| < R, \forall t \in [t_0, t_1] \right\}.$$

Como para qualquer $t \in [t_0, t_1]$ tal que $x_s'(t)$ existe temos

$$Ess\ x_s'(t) = \{x_s'(t)\}$$

então, pela Proposição 4.2.8 (ii), $|x_s'(t)| < \sigma < s$ e portanto x_s continua a resolver o problema acima mesmo na presença da restrição $|y'(t)| \leq s$ qs em $[t_0, t_1]$. Ao longo de qualquer função absolutamente contínua verificando esta condição, L_s coincide com L. Então x_s verifica a condição (e) de $\Delta_R(\bar{r}, \sigma)$. Finalmente vejamos a condição (b). Se (b) é verificado, então temos

$$t_1 - t_0 \geq \Delta_R(\bar{r}, \sigma) \geq b - a,$$

pela escolha de σ e segue a conclusão desejada.

Suponhamos portanto que (b) é falso. Iremos mostrar que isto implica que $t_0 = a$, a demonstração de que $t_1 = b$ é análoga. Se (b) falha então

$$Ess\ x_s'(\xi) \cap (\mathbb{R}^n \backslash \rho(\sigma) B) = \emptyset \qquad \forall \xi \in [t_0, t_1],$$

em particular temos $|v| < \rho(\sigma)$ para qualquer $v \in Ess\ x_s'(t_0^+)$. Fixemos um tal v e observemos que $v \in Ess\ x_s'(t_0)$. Por (4.30) e (4.31), segue que $v \in W(t_0, x_s(t_0), p_s(t_0))$ (visto que $\rho(\sigma) \leq \sigma$). A definição de ρ e a Proposição 4.2.4 (ii) implicam que

$$W(t_0, x_s(t_0), p_s(t_0)) \subseteq \sigma B. \tag{4.34}$$

Aplicando novamente (4.30) e (4.31) obtemos

$$\overline{co}\, Ess\ x_s'(t_0) \cap sB \subseteq W_s(t_0, x_s(t_0), p_s(t_0)) \cap sB \subseteq W(t_0, x_s(t_0), p_s(t_0))$$

(recordemos que $\rho(\sigma) \leq \sigma < s$) o que, por (4.34), implica

$$\overline{co}\, Ess\ x_s'(t_0) \cap sB \subseteq \sigma B.$$

Como, por hipótese, $s > \sigma$ segue que $\overline{co}\, Ess\ x_s'(t_0) \subseteq \sigma B$ e isto, pela Proposição 4.2.8 (iii), implica $t_0 = a$.

Portanto verifica-se (4.33), quer (b) seja verdadeiro ou falso.

Passo 5.

Por (4.33) vemos que, para $s > \sigma$ e $t \in (a, b)$ fixados, $|v| < s$ qualquer que seja o $v \in Ess\ x_s'(t)$. Assim, como $x_s'(t) \in Ess\ x_s'(t)$ qs em (a, b) então $|x_s'(t)| < s$ qs em (a, b). Logo, pelo Passo 1 (b),

$$\Lambda_s(x_s) = \int_a^b L_s(t, x_s(t), x_s'(t))\, dt = \int_a^b L(t, x_s(t), x_s'(t))\, dt = \Lambda(x_s) \qquad \forall s > \sigma \tag{4.35}$$

Fixemos $r, s > \sigma$ e suponhamos que x_r é óptimo para (P^r). Como, por (4.33), $|x_r'(t)| \leq r$ qs em $[a, b]$ então x_r continua a resolver o problema

$$\min \left\{ \int_a^b L_r(t, x(t), x'(t))\, dt : x \in AC([a, b], \mathbb{R}^n), x(a) = x_a, x(b) = x_b, |x(t)| < R \ \ \forall t \in [a, b] \right\}$$

mesmo na presença da restrição $|x'(t)| \leq r$ qs em $[a, b]$. Assim

$$\Lambda_r(x_r) = \int_a^b L_r(t, x_r(t), x_r'(t))\, dt \leq \int_a^b L_r(t, x_s(t), x_s'(t))\, dt = \Lambda_r(x_s) \tag{4.36}$$

para qualquer $x_s \in AC([a, b], \mathbb{R}^n)$, $x_s(a) = x_a$, $x_s(b) = x_b$, $|x_s(t)| < R \ \ \forall t \in [a, b]$ e $|x_s'(t)| \leq r$ qs em $[a, b]$. Por outro lado, pelo Passo 1 (b), para cada um destes x_s temos

$$L_r(t, x_s(t), x_s'(t)) = L(t, x_s(t), x_s'(t)) \quad \text{qs em } [a, b]. \tag{4.37}$$

Além disso, por (4.35), temos

$$\Lambda_r(x_r) = \Lambda(x_r). \tag{4.38}$$

Assim, por (4.36)-(4.38), para qualquer par $r, s > \sigma$ a optimalidade de x_r para (P^r) implica,

$$\Lambda(x_r) = \Lambda_r(x_r) \leq \Lambda_r(x_s) = \Lambda(x_s).$$

É claro que podemos trocar r com s e segue que todos os valores de $\Lambda(x_s)$ são iguais para $s > \sigma$.

Mostremos agora que x_s resolve (P_R^∞). Para isso escolhemos uma função $x \in AC^\infty([a, b], \mathbb{R}^n)$ admissível para (P_R^∞) e fixemos $s > \max\{\|\bar{x}'\|_\infty, \sigma\}$. Então, pela optimalidade de x_s para (P^s) e pelo Passo 1 (b), obtemos

$$\Lambda(x_s) = \Lambda_s(x_s) \leq \Lambda_s(x) = \Lambda(x).$$

Portanto,

$$\Lambda(x_s) \leq \inf\{\Lambda(x) : x \in AC^\infty([a, b], \mathbb{R}^n), x(a) = x_a, x(b) = x_b\}.$$

Mas como x_s resolve (P^s) e continua a resolver quando se acrescenta a restrição $|y'(t)| \leq s$ qs em $[a, b]$ então também $x_s \in AC^\infty([a, b], \mathbb{R}^n)$ e assim

$$\inf\{\Lambda(x) : x \in AC^\infty([a, b], \mathbb{R}^n), x(a) = x_a, x(b) = x_b\} \leq \Lambda(x_s).$$

Donde sai que

$$\Lambda(x_s) = \inf\{\Lambda(x) : x \in AC^\infty([a, b], \mathbb{R}^n), x(a) = x_a, x(b) = x_b\},$$

como queriamos. Mais ainda, como $x_s'(t) \in Ess\ x'(t)$ qs em (a, b) então a condição (4.33) prova que $\|x_s'\|_\infty \leq \sigma$.■

4.4.1 Observação

Os argumentos e conclusões desta secção são importunados por certas alterações no lagrangiano L. Consideremos os mesmos L, α, x_a e x_b utilizados na demonstração anterior. Para qualquer $r > 0$, os valores de $\Delta_R(r, \cdot)$ no intervalo (r, s) são determinados unicamente pelos valores de L no conjunto $\Omega \times s\bar{B}$. Como escolhemos $\sigma > \max\{M, \bar{r}, \|\bar{x}'\|_\infty\}$ tal que $b-a \leq \Delta_R(\bar{r}, \sigma)$ então as quantidades M, $\bar{r}$ e $\Delta_R(\bar{r}, \sigma)$ permanecem inalteradas para qualquer lagrangiano $\widetilde{L}$ que coincida com L em $\Omega \times \sigma\bar{B}$. Em particular, se $\widetilde{L}$ também verifica (H1) e (H5) (para os mesmos $\bar{\alpha}$, R e $[a, b]$) então a função absolutamente contínua x_s do Passo 5 também resolverá $(\widetilde{P}_R^\infty)$.

Para verificar isto, comecemos por aplicar o Teorema 4.4.1 a $\widetilde{L}$ obtendo assim uma solução $\widetilde{x}$ para $(\widetilde{P}_R^\infty)$ e tal que $\|\widetilde{x}'\|_\infty \leq \sigma$. Então temos

$$\widetilde{\Lambda}(\widetilde{x}) \leq \widetilde{\Lambda}(x) \quad \forall x \in AC^\infty([a, b], \mathbb{R}^n), x(a) = x_a, x(b) = x_b, |x(t)| < R \quad \forall t \in [a, b],$$

e, em particular

$$\widetilde{\Lambda}(\widetilde{x}) \leq \widetilde{\Lambda}(x_s).$$

Por outro lado, como

$$\widetilde{L}(t, x, v) = L(t, x, v) \quad \forall (t, x, v) \in \Omega \times \sigma\bar{B}$$

e

$$|x_s'(t)| \leq \sigma \quad \text{qs em } [a, b]$$

então

$$\widetilde{L}(t, x_s(t), x_s'(t)) = L(t, x_s(t), x_s'(t)) \quad \text{qs em } [a, b],$$

o que implica

$$\widetilde{\Lambda}(x_s) = \Lambda(x_s).$$

Como $\|\widetilde{x}'\|_\infty \leq \sigma$ então também temos

$$\widetilde{L}(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)) = L(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)) \quad \text{qs em } [a, b],$$

e portanto

$$\widetilde{\Lambda}(\widetilde{x}) = \Lambda(\widetilde{x}).$$

Além disto, vimos no Passo 5 que

$$\Lambda(x_s) \leq \Lambda(x)$$

para qualquer função $x \in AC([a, b], \mathbb{R}^n)$, admissível para (P_R) e tal que $|x'(t)| \leq \sigma$ qs em $[a, b]$; em particular,

$$\Lambda(x_s) \leq \Lambda(\widetilde{x}).$$

Juntando tudo concluimos que

$$\Lambda(x_s) = \widetilde{\Lambda}(x_s) \geq \widetilde{\Lambda}(\widetilde{x}) = \Lambda(\widetilde{x}) \geq \Lambda(x_s).$$

Portanto $\Lambda(\widetilde{x}) = \Lambda(x_s)$, como queriamos.

4.5 O fenómeno de Lavrentiev

Vamos agora mostrar que a solução de (P_R^∞) descrita na Secção 4.4 continua óptima na classe maior de todas as funções absolutamente contínuas admissíveis para (P_R). Isto apenas pode falhar se o ínfimo de $\Lambda(\cdot)$ sobre a classe das funções absolutamente contínuas for estritamente mais pequeno que o ínfimo sobre a classe das funções lipschitzianas. Este facto, chamado fenómeno de Lavrentiev, tem sido observado numa grande variedade de problemas, nenhum dos quais tratado aqui mas que podem ser vistos, por exemplo, em [9] (Secção 18.5) e [19].

Nesta secção mostramos que as hipóteses (H1), (H5)-(H7) e (4.20) da Secção 4.3 evitam o fenómeno de Lavrentiev, e que se além disso também se verifica (4.21) então todas as soluções de (P_R) são na realidade lipschitzianas.

Na presença das hipóteses (H1) e (H5), o fenómeno de Lavrentiev não pode ocorrer em problemas cujos lagrangianos tenham, pelo menos, crescimento linear em v, como mostra o seguinte resultado que segundo [17] deve-se a Tonelli.

Proposição 4.5.1 *Seja $L : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ verificando (H1) e (H5), e suponhamos que existem constantes $\beta, \lambda, \gamma \geq 0$ tais que se*

$$(t,x) \in \Omega,\ |v| \geq \gamma \quad \text{então} \quad |L(t,x,v)| \leq \beta |v| + \lambda.$$

Então, para qualquer $x \in AC([a,b], \mathbb{R}^n)$ com $\|x\|_\infty < R$, existe uma sucessão (x_i) em $AC^\infty([a,b], \mathbb{R}^n)$ verificando

(a) $x_i(a) = x_a, \quad x_i(b) = x_b$

(b) $(x_i) \to x$ *uniformemente em* $[a,b]$

(c) $(x_i') \to x'$ *qs em* $L^1([a,b], \mathbb{R}^n)$

(d) $\Lambda(x_i) \to \Lambda(x)$.

O resto desta secção completa a demonstração do Teorema 4.3.2. Então suponhamos que se verificam (H1), (H5)-(H7), (4.20) e (4.21), que são dados x_a e x_b em RB e algum $\alpha \in (0, \bar{\alpha})$. Fixemos $\bar{s}$ como em (H7) e tal que $\bar{s} > \max\{M, \bar{r}, \|\bar{x}'\|_\infty\}$. No final desta secção, determinaremos constantes $\mu > \bar{s}$, $\varepsilon \geq 0$, $\beta > 0$, λ e uma família de lagrangianos auxiliares $L_k : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades. Para cada $k > \mu$, $(t,x) \in \Omega$,

(i) L_k verifica (H1) e (H5) mas com α em vez de $\bar{\alpha}$

(ii) $|v| \leq \bar{s} \Rightarrow L_k(t,x,v) = L(t,x,v)$

(iii) $\bar{s} < |v| \leq \mu \Rightarrow L_k(t,x,v) \leq L(t,x,v)$

(iv) $\mu < |v| \leq k \Rightarrow L_k(t,x,v) \leq L(t,x,v) - \varepsilon$

(v) $k < |v| \Rightarrow L_k(t,x,v) \leq \beta |v| + \lambda$.

Primeiro, contudo, mostremos como é que com estes elementos auxiliares se completa a demonstração do Teorema 4.3.2.

Teorema 4.5.2 *Como dito acima, suponhamos que se verificam (H1), (H5)-(H7) e (4.20). Então existe uma família de lagrangianos auxiliares verificando (i)-(v) com $\varepsilon = 0$, e qualquer solução de (P_R^∞) também resolve (P_R). Se além disso também se verifica (4.21) então existe uma família de lagrangianos auxiliares verificando (i)-(v) com $\varepsilon > 0$. Neste caso todas as soluções de (P_R) são funções lipschitzianas.*

Demonstração:
A existência de lagrangianos auxiliares convenientes será mostrada no final desta secção. Aqui mostramos apenas como é que as condições (i)-(v) implicam as outras conclusões do Teorema 4.5.2.

Cada lagrangiano auxiliar L_k dá origem a um problema correspondente ($P_R^{k,\infty}$) com as mesmas condições de fronteira que (P_R^∞). De acordo com a Observação 4.4.1 a igualdade de L_k com L em $\Omega \times \sigma B$ (para $k > \mu$) implica que qualquer solução y de (P_R^∞) fixada também resolve $(\mathrm{P}_R^{k,\infty})$: isto é, para qualquer $x \in AC^\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$ com $\|x\|_\infty < R$, $x(a) = x_a$, $x(b) = x_b$ tem-se

$$\Lambda(y) = \Lambda_k(y) \leq \Lambda_k(x). \tag{4.39}$$

Suponhamos agora que temos uma função x absolutamente contínua não-lipschitziana e tal que $\|x\|_\infty < R$, $x(a) = x_a$, $x(b) = x_b$. Fixemos $k > \mu$ e apliquemos a Proposição 4.5.1 para obter uma sucessão (x_i) de funções lipschitzianas admissíveis e tais que

$$\Lambda_k(x) = \lim_{i\to\infty} \Lambda_k(x_i).$$

Por (4.39), segue que

$$\Lambda(y) = \Lambda_k(y) \leq \lim_{i\to\infty} \Lambda_k(x_i) = \Lambda_k(x) \quad \forall k > \mu. \tag{4.40}$$

Como a função x é não-lipschitziana então o conjunto

$$E := \{t \in [a,b] : |x'(t)| > \mu\}$$

tem medida positiva. Consideremos $U := [a,b] \setminus E$ e a partição $E = F_k \cup G_k$, onde

$$\begin{array}{l} F_k := \{t \in [a,b] : \mu < |x'(t)| \leq k\} \\ G_k := \{t \in [a,b] : k < |x'(t)|\}. \end{array}$$

Então

$$\begin{aligned} \Lambda_k(x) &= \int_a^b L_k(t,x(t),x'(t))\,dt \\ &= \int_{U\cup F_k\cup G_k} L_k(t,x(t),x'(t))\,dt \\ &\leq \int_U L(t,x(t),x'(t))\,dt + \int_{F_k} (L(t,x(t),x'(t)) - \varepsilon)\,dt + \int_{G_k} (\beta|x'(t)| + \lambda)\,dt. \\ &= \int_U L(t,x(t),x'(t))\,dt + \int_{F_k} L(t,x(t),x'(t))\,dt - \varepsilon\, m(F_k) + \int_{G_k} (\beta|x'(t)| + \lambda)\,dt. \end{aligned}$$

Quando $k \to \infty$, o lado direito tende para $\Lambda(x) - \varepsilon\, m(E)$ e então (4.40) dá

$$\Lambda(y) \leq \Lambda(x) - \varepsilon\, m(E). \tag{4.41}$$

Logo se $\varepsilon = 0$ (4.41) mostra que a solução y de (P_R^∞) é tão boa como qualquer outra função x absolutamente contínua não-lipschitziana; e portanto y resolve (P_R). Se $\varepsilon > 0$ então, para qualquer função absolutamente contínua não-lipschitziana x, tem-se

$$\Lambda(x) > \Lambda(y),$$

por (4.41), e portanto todas as soluções de (P_R) tem que ser lipschitzianas.■

O resto desta secção é dedicado à construção dos lagangianos auxiliares descritos acima. Iremos primeiro determinar uma família conveniente com $\varepsilon > 0$ supondo que se verifica (4.21), e em seguida mostramos que (4.21) pode ser omitida se for apenas exigido $\varepsilon = 0$. A condição (4.21) serve apenas para o seguinte lema.

Lema 4.5.3 *Suponhamos (4.21). Então a constante η definida abaixo é positiva:*

$$\eta := \inf\{L(t,x,w) - L(t,x,v) - \langle p, w-v\rangle : (t,x) \in \Omega, |v| \leq \bar{s}, p \in \partial_v L(t,x,v), |w| \geq \mu\}.$$

Demonstração:
Como o ínfimo definindo η pode ser na realidade tomado apenas sobre $|w| = \mu$, então é fácil reconhecer η como o ínfimo de uma função contínua sobre um conjunto compacto de valores (t, x, v, p, w). Portanto é suficiente provar que se tem

$$L(t,x,w) - L(t,x,v) - \langle p, w - v\rangle > 0$$

para qualquer $(t,x) \in \Omega$, $|v| \leq \bar{s}$, $p \in \partial_v L(t,x,v)$ e $|w| = \mu$. Para provar isto, notemos que o lado esquerdo é não-negativo pela desigualdade do subgradiente. Se o lado esquerdo fosse igual a zero viria

$$L(t,x,v) - L(t,x,w) = \langle p, w - v\rangle,$$

pelo que $p \in \partial_v L(t,x,w)$, e portanto

$$p \in \partial_v L(t,x,v) \cap \partial_v L(t,x,w).$$

Por outras palavras, v e w pertenceriam a $W(t,x,p)$; contradição com (4.21).■

Lema 4.5.4 *Dado algum $\mu > \bar{s}$, existem constantes $\beta > 0$, λ e $\rho > \mu$ tais que a função*

$$F(t,x,v) := \max\left\{L(t,x,v)\,\mathcal{X}_{\{v\in\mathbb{R}^n:|v|\leq\rho\}}(v),\ \beta|v| + \lambda\right\}$$

($\mathcal{X}_{\{v\in\mathbb{R}^n:|v|\leq\rho\}}(\cdot)$ denota a função característica do conjunto $\{v \in \mathbb{R}^n : |v| \leq \rho\}$) verifica (H1) e (H5) e, para qualquer $(t,x) \in \Omega$, verifica as seguintes condições

(a) se $|v| \leq \bar{s}$ então $F(t,x,v) = L(t,x,v)$;

(b) se $\mu \leq |v|$ então $F(t,x,v) = \beta|v| + \lambda$.

Demonstração:
Ver [18], Lema 6.2.■

Agora suponhamos (4.21) e recordemos a constante positiva η definida no Lema 4.5.3. Fixemos $\varepsilon \in (0,\eta)$ tal que $\varepsilon < (\bar{\alpha} - \alpha)\mu$.

Lema 4.5.5 *Suponhamos (4.21). Então para cada $k > \mu$ existe $F_k : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tal que*

(a) $F_k(t,x,v)$ é lipschitziana em $\Omega \times k\bar{B}$ e convexa em v;

(b) $F_k(t,x,v) \geq \alpha|v|$, para qualquer $(t,x,v) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$;

(c) $|v| \leq \bar{s} \Rightarrow F_k(t,x,v) = L(t,x,v)$;

(d) $|v| \leq k \Rightarrow F_k(t,x,v) \leq L(t,x,v)$;

(e) $\mu < |v| \leq k \Rightarrow F_k(t,x,v) \leq L(t,x,v) - \varepsilon$;

(f) $k < |v| \Rightarrow F_k(t,x,v) = +\infty$.

Demonstração:
Introduzimos $\widetilde{f}_k : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ como sendo o invólucro convexo da função (na variável v)

$$f_k(t,x,v) := \begin{cases} L(t,x,v) & \text{se } |v| \leq \mu \\ L(t,x,v) - \varepsilon & \text{se } \mu < |v| \leq k \\ +\infty & \text{se } k < |v|. \end{cases}$$

Então definimos F_k como sendo $\widetilde{f}_k$ quando $|v| \leq k$ e $+\infty$ caso contrário. As condições (a)-(f) estão verificadas em [18], Lema 6.3.■

Sob a hipótese (4.21), vamos agora construir os prometidos lagrangianos auxiliares definidos, para cada $(t,x) \in \Omega$, por

$$L_k(t,x,\cdot) := \operatorname{co}\{F(t,x,\cdot), F_k(t,x,\cdot)\}.$$

Isto é,

$$L_k(t,x,v) := \inf\{\lambda F(t,x,v') + (1-\lambda) F_k(t,x,v'') : \lambda \in [0,1], v = \lambda v' + (1-\lambda) v''\}.$$

Como $F_k(t,x,\cdot) = F(t,x,\cdot) = L(t,x,\cdot)$ em $\bar{s}\bar{B}$, segue que $L_k(t,x,\cdot) = L(t,x,\cdot)$ em $\bar{s}\bar{B}$, ([18], Lema 6.4). Também, por construção, L_k é convexa em v e localmente lipschitziana em $\Omega \times \mathbb{R}^n$.

Como F e F_k majoram $\alpha|v|$ então também L_k majora. Como o invólucro convexo de duas funções é majorado pelas próprias funções então as propriedades (iii)-(v) das funções L_k, referidas antes do Teorema 4.5.2, seguem das conclusões dos Lemas 4.5.4 e 4.5.5. Notemos que no Lema 4.5.5 temos apenas $\varepsilon > 0$.

Suponhamos, finalmente, que não se verifica (4.21). Neste caso o Lema 4.5.3 não pode ser utilizado, então para simplificar tomamos $\mu = \bar{s} + 1$ e aplicamos o Lema 4.5.4. Mesmo não sendo possível aplicar o Lema 4.5.5, notemos que as funções $F_k(t,x,v)$ que são iguais a $L(t,x,v)$ quando $|v| \le k$ e $+\infty$ caso contrário verificam toda as conclusões do Lema 4.5.5 com $\varepsilon = 0$. Dadas estas escolhas preliminares, a definição de L_k dada no parágrafo anterior conduz outra vez a uma família de lagrangianos auxiliares verificando (i)-(v), mas agora com $\varepsilon = 0$. Isto completa a demonstração do Teorema 4.5.2 e por conseguinte também a do Teorema 4.3.2.

4.6 Existência local

Podemos agora apresentar uma generalização do Teorema 2.1 de [18], onde a hipótese de convexidade estrita é substituída pela exigência mais fraca de convexidade estrita no infinito. Os argumentos chave aparecem no lema abaixo, o qual está relacionado com (H7).

Lema 4.6.1 *Suponhamos que se verificam (H1) e (H2). Então para quaisquer $r > 0$ e s suficientemente grande tem-se*

$$\Delta_R(r,s) > 0.$$

Demonstração:
Provaremos que, para quaisquer $r > 0$ e $s > 0$,

$$\text{se } \rho(\rho(s)) > r \text{ então } \Delta_R(r,s) > 0. \tag{4.42}$$

Como, por (i) e (iv) da Proposição 4.2.4, $\rho(s)$ é uma função não limitada e crescente, então

$$\rho(\rho(s)) \to +\infty \quad \text{quando } s \to +\infty$$

e portanto, por (4.42), seguirá a conclusão desejada.

Suponhamos que (4.42) é falso. Isto é, fixemos constantes positivas r e s para as quais $\rho(\rho(s)) > r$ mas $\Delta_R(r,s) = 0$. Então a definição de Δ_R implica que para cada i deve existir um intervalo $[t_{0i}, t_{1i}] \subseteq [a,b]$ com $t_{1i} - t_{0i} < 1/i$ e uma função lipschitziana $x_i \in AC([t_{0i}, t_{1i}], \mathbb{R}^n)$ para a qual se verificam as condições (a)-(e) da Definição 4.2.11. Em particular x_i resolve um certo problema de controlo óptimo em $[t_{0i}, t_{1i}]$, e condições necessárias tais como as dadas no Teorema 5.2.1 de [13]. A condição (c) juntamente com essas condições dá a existência de uma função absolutamente contínua p_i em $[t_{0i}, t_{1i}]$ tal que

$$p_i'(t) \in \partial_x L(t, x_i(t), x_i'(t)) \quad \text{e} \quad p_i(t) \in \partial_v L(t, x_i(t), x_i'(t)) \quad \text{qs.} \tag{4.43}$$

Pela condição (a), encontramos um ponto $\tau_i \in [t_{0i}, t_{1i}]$ para o qual se verifica (4.43), $x_i'(\tau_i)$ existe e $|x_i'(\tau_i)| \le r + 1/i$. A condição (b) fornece um ponto $\sigma_i \in [t_{0i}, t_{1i}]$ tal que

$$Ess\, x_i'(\sigma_i) \cap (\mathbb{R}^n \backslash \rho(s) B) \ne \emptyset.$$

De acordo com a Proposição 4.2.8 $\overline{co}\, Ess\, x_i'(\sigma_i)$ contém um ponto w_i tal que $\rho(s) \le |w_i| \le s$.

Para cada i, a condição (c) implica que

$$|x_i(\sigma_i) - x_i(\tau_i)| \leq s\,|\sigma_i - \tau_i| \leq \frac{s}{i}.$$

Como, por (e), $|x_i(\tau_i)| < R$ para qualquer i então, pela Proposição 2.10.4, segue que ao longo de uma subsucessão conveniente, não renumerada, tanto $(x_i(\tau_i))$ como $(x_i(\sigma_i))$ converge para o mesmo limite x. Podemos também supor que $(x_i'(\tau_i))$ converge para algum v com $|v| \leq r$, que $(w_i) \to w$ para algum w fora de $\rho(s)\,B$, e que (σ_i) e (τ_i) convergem para o mesmo ponto $t \in [a,b]$.

Definimos

$$M := \sup\left\{|\xi| : \xi \in \partial_x L(t,x,v),\ (t,x) \in \Omega,\ |v| \leq s\right\},$$

deduzimos de (H1) e da Proposição 2.21.3 que M existe e é finito. A primeira relação de (4.43) e a condição (c) implicam que $|p_i'(t)| \leq M$ qs em (t_{0i}, t_{1i}), o que por sua vez implica

$$Ess\, p_i'(t) \subseteq M\bar{B} \quad \forall t \in (t_{0i}, t_{1i}).$$

Como também

$$p_i(\tau_i) \in \partial_v L(\tau_i, x_i(\tau_i), x_i'(\tau_i)) \tag{4.44}$$

com o lado direito limitado independentemente de i (ver Proposição 2.21.3), podemos passar para mais uma subsucessão ao longo da qual $(p_i(\sigma_i))$ e $(p_i(\tau_i))$ convergem para um mesmo limite p.

Consideremos agora as inclusões

$$x_i'(\tau_i) \in W(\tau_i, x_i(\tau_i), p_i(\tau_i)) \quad \text{e} \quad w_i \in W(\sigma_i, x_i(\sigma_i), p_i(\sigma_i)),$$

que seguem, respectivamente, de (4.44) e da Proposição 4.2.9 juntamente com (4.43). Tomando o limite quando $i \to \infty$, a Proposição 4.2.3 dá

$$v \in W(t,x,p) \quad \text{e} \quad w \in W(t,x,p). \tag{4.45}$$

Como $|v| \leq r$ e $|w| \geq \rho(s)$ então (4.45) implica, respectivamente,

$$W(t,x,p) \cap r\bar{B} \neq \emptyset \quad \text{e} \quad W(t,x,p) \cap (\mathbb{R}^n \backslash \rho(s)\,B) \neq \emptyset.$$

A segunda condição implica, pela Proposição 4.2.4, que

$$W(t,x,p) \cap \rho(\rho(s))\,B = \emptyset.$$

Então temos que ter $\rho(\rho(s)) \leq r$; uma contradição. Isto confirma (4.42) e completa a demonstração.■

Os resultados desta secção são chamados teoremas de existência local porque se aplicam a problemas formulados em pequenos subconjuntos da região Ω onde L está definido. Para um dado intervalo $[a',b'] \subseteq [a,b]$ denotamos por (P'_R) o problema

$$\min \left\{\Lambda'(x) = \int_{a'}^{b'} L(t,x(t),x'(t))\,dt : x(a') = x_a',\ x(b') = x_b',\ |x(t)| < R \ \ \forall t \in [a',b']\right\}. \tag{P'_R}$$

Para passar de (P_R) para (P'_R) basta substituir Ω pelo seu subconjunto $\Omega' := [a',b'] \times R\bar{B}$. Como a definição de Δ_R depende implicitamente do intervalo $[a,b]$, então para o problema (P'_R) denotamos a função análoga por Δ'_R. É evidente que

$$\Delta'_R(r,s) \geq \Delta_R(r,s) \quad \forall r,s > 0.$$

Diminuindo o domínio do problema também se afectam as hipóteses; sublinhemos que (H1)-(H7) introduzidas acima referem-se sempre a um dado conjunto Ω, que consideraremos como fixo ao longo do que se segue. Quando for necessário restringir essas hipóteses a Ω', denotaremo-las por (H1')-(H7').

O nosso primeiro resultado de existência local utiliza explicitamente a hipótese de crescimento linear (H5). Isto faz sobressair a sua relação com o teorema intermédio de existência (Teorema 4.3.2) e dá também um grande passo na direcção da generalização do Teorema 2.1 de [18], como veremos mais tarde.

Teorema 4.6.2 *Suponhamos que se verificam (H1), (H2) e (H5). Então, para quaisquer $M > 0$ e $\rho \in (0, R)$, existe $\delta > 0$ com as seguintes propriedades. Para qualquer par de pontos fronteira (a', x'_a) e (b', x'_b) em Ω verificando*

$$0 < b' - a' < \delta, \qquad |x'_b - x'_a| \leq M(b' - a'), \qquad \min\{|x'_a|, |x'_b|\} < \rho, \tag{4.46}$$

o problema (P'_R) tem uma solução lipschitziana. De facto, todas as soluções de (P'_R) são lipschitzianas.

Demonstração:

Aplicaremos o Teorema 4.3.2 ao problema (P'_R) tal como no enunciado do teorema. Fixemos $M > 0$ e $\rho \in (0, R)$, e definimos

$$\gamma := \max\{L(t, x, v) : (t, x) \in \Omega, \ |v| \leq M\}$$

que, pela hipótese (H5), é positivo. Dado algum $\bar{\alpha}$ verificando (H5), fixemos $\alpha \in (0, \bar{\alpha})$ e definamos

$$\delta := \min\left\{\frac{\alpha(R-\rho)}{\gamma}, \lim_{s \to +\infty} \Delta_R\left(\frac{\gamma}{\alpha}, s\right)\right\}.$$

Do Lema 4.6.1 e da Proposição 4.2.13 sai que

$$\lim_{s \to +\infty} \Delta_R\left(\frac{\gamma}{\alpha}, s\right) > 0$$

e como também

$$\frac{\alpha(R-\rho)}{\gamma} > 0$$

então vem $\delta > 0$.

Agora fixemos pontos fronteira $(a', x'_a), (b', x'_b) \in \Omega$ verificando (4.46). Em $\Omega' = [a', b'] \times R\bar{B}$ as hipóteses (H1'), (H2') e (H5') seguem respectivamente de (H1), (H2) e (H5). Para (H6') podemos escolher a função admissível lipschitziana

$$\bar{x}(t) = x'_a + (x'_b - x'_a)\frac{t - a'}{b' - a'}$$

e observar que

$$\Lambda'(\bar{x}) := \int_{a'}^{b'} L(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t))\, dt \leq \gamma(b' - a'). \tag{4.47}$$

Como

$$b' - a' < \delta \leq \frac{\alpha(R-\rho)}{\gamma}$$

então obtemos

$$\Lambda'(\bar{x}) \leq \gamma(b' - a') < \alpha(R - \rho),$$

o que implica

$$\frac{\Lambda'(\bar{x})}{\alpha} + \rho < R,$$

e portanto (H6') segue disto e de (4.46).

Para verificar (H7') observemos que, por (4.47),

$$\bar{r}' = \frac{\Lambda'(\bar{x})}{\alpha(b' - a')} \leq \frac{\gamma}{\alpha}$$

e então, como para cada $s > 0$ fixado $\Delta'_R(\cdot, s)$ é decrescente, vem

$$\Delta'_R(\bar{r}', s) \geq \Delta'_R\left(\frac{\gamma}{\alpha}, s\right) \geq \Delta_R\left(\frac{\gamma}{\alpha}, s\right).$$

A nossa escolha de δ implica que

$$\Delta_R\left(\frac{\gamma}{\alpha}, s\right) \geq \delta > b' - a'$$

para qualquer s suficientemente grande. Então, para qualquer s suficientemente grande, temos $\rho(s) > \bar{r}'$ e

$$\Delta'_R(\bar{r}', s) \geq b' - a',$$

portanto verifica-se (H7).

Estão verificadas todas as hipóteses do Teorema 4.3.2 para o problema (P_R'), e as conclusões deste resultado completam a demonstração do presente resultado.■

Notemos que se, para cada $(t, x) \in \Omega$, $L(t, x, \cdot)$ é estritamente convexa então verifica-se (H2). Assim as conclusões do Teorema 4.6.2 permanecem válidas e o conjunto solução de (P'_R), para cada escolha apropriada de pontos fronteira (a', x'_a) e (b', x'_b), é um subconjunto não-vazio de $AC^\infty([a', b'], \mathbb{R}^n)$. Qualquer solução lipschitziana é um extremal no sentido do Teorema 2.4 de [15] e, pela Observação 4.2.10, é suave. Então no caso estritamente convexo, as conclusões do Teorema 4.6.2 permanecem válidas se em vez de "lipschitziana" se escrever "continuamente diferenciável".

Voltamos agora ao teorema de existência local no espírito de [18]. No que se segue Ω não se supõe previamente fixado - damos apenas um ponto $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, uma vizinhança U de (t_0, x_0) e uma função $L : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ verificando as condições

$$L \text{ é localmente lipschitziana em } U \times \mathbb{R}^n \tag{4.48}$$

$$\text{para qualquer } (t, x) \in U, \quad L(t, x, \cdot) \quad \text{é estritamente convexa no infinito.} \tag{4.49}$$

Teorema 4.6.3 *Sob as hipóteses do parágrafo anterior, existem constantes $\varepsilon > 0$ e $R > 0$ tais que*

$$\Omega := [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \left(x_0 + R\bar{B}\right)$$

é um subconjunto onde se verifica o seguinte. Para quaisquer $M > 0$ e $\rho \in (0, R)$ existe $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que para qualquer par de pontos fronteira (a', x'_a) e (b', x'_b) em Ω verificando

$$0 < b' - a' < \delta, \quad |x'_b - x'_a| \leq M(b' - a'), \quad \min\{|x'_b - x_0|, |x'_a - x_0|\} < \rho$$

o seguinte problema tem uma solução

$$min \quad \left\{\int_{a'}^{b'} L(t, x(t), x'(t))\, dt : x(a') = x'_a,\ x(b') = x'_b,\ |x(t) - x_0| < R \quad \forall t \in [a', b']\right\}.$$

De facto, todas as soluções deste problema são lipschitzianas.

Demonstração:

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $x_0 = 0$. Então o problema descrito neste teorema é o problema (P'_R) e as conclusões desejadas seguirão do Teorema 4.6.2 se pudermos verificar que Ω pode ser escolhido verificando (H1), (H2) e (H5). Na realidade é suficiente verificar estas condições para um integrando da forma

$$\widetilde{L}(t, x, v) = L(t, x, v) - \langle \xi, v \rangle - \mu,$$

pois o conjunto solução de (P'_R) é idêntico para L e $\widetilde{L}$. De facto, se $\bar{x}(t) = (\bar{x}_1(t), ..., \bar{x}_n(t)) \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma solução de (P'_R) para o lagrangiano L então $\bar{x}_i(t) \in AC([a', b'], \mathbb{R}^n)$ para qualquer $i = 1, ..., n$ e, pela Proposição 2.14.10, vem

$$\int_{a'}^{b'} \langle \xi, \bar{x}'(t) \rangle \, dt = \xi_1 (\bar{x}_1(b') - \bar{x}_1(a')) + ... + \xi_n (\bar{x}_n(b') - \bar{x}_n(a')) = \langle \xi, \bar{x}(b') - \bar{x}(a') \rangle .$$

Logo

$$\int_{a'}^{b'} \widetilde{L}(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t)) \, dt = \int_{a'}^{b'} L(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t)) \, dt - \langle \xi, \bar{x}(b') - \bar{x}(a') \rangle - \mu (b' - a') .$$

Fixados (a', x'_a) e (b', x'_b) pontos fronteira, $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $\mu \in \mathbb{R}$

$$- \langle \xi, \bar{x}(b') - \bar{x}(a') \rangle - \mu (b' - a')$$

é uma constante real, e portanto qualquer função que minimize (P'_R) com a função L também minimiza com a função $\widetilde{L}$; ou seja, o conjunto solução de (P'_R) é idêntico para L e $\widetilde{L}$.

Resumindo, precisamos apenas de mostrar que para algumas constantes $\varepsilon > 0$ pequeno, $R > 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $\mu \in \mathbb{R}$, o lagrangiano $\widetilde{L}$ verifica (H1), (H2) e (H5) em Ω.

De (4.48) e (4.49) obtemos (H1) e (H2), desde que $\Omega \subseteq U$. Para verificar (H5) fixemos $\xi \in \partial_v L(t_0, 0, 0)$. A convexidade de $L(t_0, 0, \cdot)$ implica que para qualquer $M > 0$, o ínfimo definindo

$$\alpha(M) := \inf \left\{ \frac{L(t_0, 0, v) - L(t_0, 0, 0) - \langle \xi, v \rangle}{|v|} : |v| \geq M \right\}$$

é atingido por algum v com $|v| = M$. Além disso, a convexidade estrita no infinito de $L(t_0, 0, \cdot)$ permite-nos fixar um M suficientemente grande tal que $\alpha(M) > 0$ (ver Definição 4.2.1). Então tomamos

$$\bar{\alpha} := \frac{\alpha(M)}{2}.$$

Como L é contínua nos subconjuntos compactos de $U \times \mathbb{R}^n$, então existe uma vizinhança de $(t_0, 0)$ na qual

$$\bar{\alpha} \leq \frac{L(t, x, v) - L(t, x, 0) - \langle \xi, v \rangle}{|v|} \qquad \forall |v| \geq M. \tag{4.50}$$

De facto, se fixarmos $U_1 \subseteq U$ um subconjunto compacto e tal que $(t_0, 0) \in U_1$ então L é contínua em $U_1 \times \{v\}$, para qualquer $|v| \geq M$ fixado, isto é,

$$\forall \lambda > 0 \; \exists \gamma_1 > 0 : (t, x) \in U_1 \cap ((t_0, 0) + \gamma_1 B) \Rightarrow |L(t, x, v) - L(t_0, 0, v)| \leq \frac{\lambda}{2}$$

o que implica

$$L(t_0, 0, v) \leq \frac{\lambda}{2} + L(t, x, v) .$$

Como L também é contínua em $U_1 \times \{0\}$ então

$$\forall \lambda > 0 \; \exists \gamma_2 > 0 : (t, x) \in U_1 \cap ((t_0, 0) + \gamma_2 B) \Rightarrow |L(t, x, 0) - L(t_0, 0, 0)| \leq \frac{\lambda}{2}$$

o que implica

$$-L(t_0, 0, 0) \leq \frac{\lambda}{2} - L(t, x, 0) .$$

Portanto, para cada $\lambda > 0$ fixado, existe uma vizinhança $V = (t_0, 0) + \gamma B \subset U$ de $(t_0, 0)$ onde $\gamma \leq \min\{\gamma_1, \gamma_2\}$ e na qual

$$\bar{\alpha} < \frac{L(t_0, 0, v) - L(t_0, 0, 0) - \langle \xi, v \rangle}{|v|} \leq \frac{L(t, x, v) - L(t, x, 0) + \lambda - \langle \xi, v \rangle}{|v|} \qquad \forall |v| \geq M.$$

Como λ pode ser escolhido suficientemente pequeno então concluimos que existe uma vizinhança de $(t_0, 0)$ na qual

$$\bar{\alpha} \leq \frac{L(t,x,v) - L(t,x,0) - \langle \xi, v \rangle}{|v|} \qquad \forall |v| \geq M.$$

Para valores suficientemente pequenos de ε e R, Ω será um subconjunto desta vizinhança.

Por continuidade e compacidade, a seguinte quantidade é finita:

$$\omega := \inf \{L(t,x,v) - \langle \xi, v \rangle - \bar{\alpha} |v| : (t,x) \in \Omega, |v| \leq M\}.$$

Escolhendo

$$\mu := \min \{\omega, L(t,x,0) : (t,x) \in \Omega\}$$

vem

$$\widetilde{L}(t,x,v) = L(t,x,v) - \langle \xi, v \rangle - \mu \geq L(t,x,v) - \langle \xi, v \rangle - (L(t,x,v) - \langle \xi, v \rangle - \bar{\alpha} |v|) = \bar{\alpha} |v|,$$

para quaisquer $(t,x) \in \Omega$ e $|v| \leq M$ e por (4.50) vem

$$\widetilde{L}(t,x,v) = L(t,x,v) - \langle \xi, v \rangle - \mu \geq L(t,x,v) - \langle \xi, v \rangle - L(t,x,0) = \bar{\alpha} |v|,$$

para quaisquer $(t,x) \in \Omega$ e $|v| \geq M$. Logo

$$\widetilde{L}(t,x,v) \geq \bar{\alpha} |v| \qquad \forall (t,x,v) \in \Omega \times \mathbb{R}^n,$$

como queriamos.■

Corolário 4.6.4 *Suponhamos que se verificam (4.48) e (4.49). Para qualquer $M > 0$, existem $\eta > 0$ e $R > 0$ tais que, para qualquer par de pontos fronteira (a', x'_a) e (b', x'_b) em $(t_0 - \eta, t_0 + \eta) \times (x_0 + \eta B)$ verificando*

$$0 < b' - a', \quad |x'_b - x'_a| \leq M (b' - a'),$$

o problema do enunciado do Teorema 4.6.3 tem uma solução lipschitziana. De facto, todas as soluções são lipschitzianas.

Demonstração:

Sejam ε e R dados pelo Teorema 4.6.3. Para qualquer $M > 0$ dado, escolhemos $\rho = R/2$ e δ dado pelo Teorema 4.6.3. A escolha

$$\eta := \min \left\{ \frac{\delta}{2}, \rho, \varepsilon \right\}$$

mostra a afirmação do corolário como um caso particular do Teorema 4.6.3.■

De todos os resultados desta secção, o Corolário 4.6.4 é na realidade o mais parecido com o Teorema 2.1 de [18]. As suas hipóteses são mais fracas: convexidade estrita no infinito em vez de convexidade estrita, mas as suas conclusões também são mais fracas: soluções apenas lipschitzianas em vez de suaves. Contudo, vimos atrás que na presença da convexidade estrita qualquer solução lipschitziana é suave. Assim, o Corolário 4.6.4 é uma generalização do Teorema 2.1 de [18].

4.7 Existência e regularidade globais

Quando o lagrangiano L está definido e é localmente lipschitziano em $[a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, podemos considerar a variante do problema (P_R) sem a restrição $\|x\|_\infty < R$. Para uma dada escolha de pontos fronteira (a, x_a) e (b, x_b), o problema (P) é:

$$\min \quad \{\Lambda(x) : x \in AC([a,b], \mathbb{R}^n), \; x(a) = x_a, \; x(b) = x_b\}. \tag{P}$$

Esta secção é inteiramente dedicada a (P). Por conseguinte, consideramos as hipóteses básicas (H1) e (H2) com $R = +\infty$.

4.7.1 Existência de solução

O critério para a existência de solução (lipschitziana) para (P) pode ser deduzido a partir dos resultados da Secção 4.3 no sentido em que as seguintes quantidades avaliam o crescimento de L:

$$\alpha(R,V) := \inf\left\{\frac{L(t,x,v)}{|v|} : t \in [a,b],\ |x| \leq R,\ |v| \geq V\right\}$$
$$\beta(R,V) := \inf\{0, L(t,x,v) : t \in [a,b],\ |x| \leq R,\ |v| < V\}.$$

Teorema 4.7.1 *Suponhamos que para algum $R > 0$, para alguma função lipschitziana $\bar{x}$ admissível para (P) com $\|\bar{x}\|_\infty < R$, verificam-se as seguintes condições:*

(H8) *$b - a \leq \Delta_R(r,s)$, onde $r > \frac{R-\min\{|x_a|,|x_b|\}}{b-a}$ e $\rho(s) > r$,*

(H9) *para qualquer $R' \geq R$ existe $V(R') > 0$ tal que $\alpha(R', V(R')) > 0$ e*

$$\Lambda(\bar{x}) < \alpha(R', V(R'))[R' - \min\{|x_a|,|x_b|\} - (b-a)V(R')] + (b-a)\beta(R', V(R')).$$

Então o conjunto solução do problema (P) é um subconjunto não-vazio de $AC^\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$.

Demonstração:
Para estudar a existência de solução para o problema (P) basta considerar as funções admissíveis x tais que $\Lambda(x) \leq \Lambda(\bar{x})$. Mostraremos que essas funções verificam necessariamente $\|x\|_\infty < R$. Com efeito fixemos

$$R' = \|x\|_\infty,\quad V' = V(R'),\quad \alpha' = \alpha(R',V'),\quad \beta' = \beta(R',V'),$$

$$C = \{t \in [a,b] : |x'(t)| \geq V'\},\quad D = \{t \in [a,b] : |x'(t)| < V'\}.$$

Por definição temos

$$\alpha(R,V) = \inf\left\{\frac{L(t,x,v)}{|v|} : t \in [a,b],\ |x| \leq R,\ |v| \geq V\right\} \leq \frac{L(t,x,v)}{|v|}$$

para quaisquer $t \in [a,b]$, $|x| \leq R$ e $|v| \geq V$, o que implica

$$|v|\,\alpha(R,V) \leq L(t,x,v)$$

para quaisquer $t \in [a,b]$, $|x| \leq R$ e $|v| \geq V$. Donde, pelas definições de R', V' e C temos

$$|x'(t)|\,\alpha' \leq L(t,x(t),x'(t)) \qquad \forall t \in C. \tag{4.51}$$

Por outro lado, pela definição de β, temos

$$\beta(R,V) = \inf\{0, L(t,x,v) : t \in [a,b],\ |x| \leq R,\ |v| < V\} \leq L(t,x,v)$$

para quaisquer $t \in [a,b]$, $|x| \leq R$ e $|v| < V$. Então pelas definições de β', R', V' e D temos

$$\beta' \leq L(t,x(t),x'(t)) \qquad \forall t \in D. \tag{4.52}$$

Logo, por (4.51) e (4.52), temos

$$\begin{aligned}
\Lambda(\bar{x}) \geq \Lambda(x) &= \int_a^b L(t,x(t),x'(t))\,dt \geq \alpha' \int_C |x'(t)|\,dt + \int_D \beta' dt \\
&\geq \alpha' \left\{\int_a^b |x'(t)|\,dt - \int_D |x'(t)|\,dt\right\} + (b-a)\beta' \\
&\geq \alpha' \left\{\int_a^b |x'(t)|\,dt - (b-a)V'\right\} + (b-a)\beta' \\
&\geq \alpha'\{R' - \min\{|x_a|,|x_b|\} - (b-a)V'\} + (b-a)\beta'.
\end{aligned}$$

Assim vinha

$$\Lambda(\bar{x}) \geq \alpha' \{R' - \min\{|x_a|, |x_b|\} - (b-a)V'\} + (b-a)\beta',$$

mas por (H9) esta desigualdade verifica-se apenas se $R' < R$, que é a conclusão desejada. Então vimos que qualquer função admissível x tal que $\Lambda(x) \leq \Lambda(\bar{x})$ tem que verificar $\|x\|_\infty < R$.

Como acabámos de ver não faz diferença adicionar a (P) a restrição $\|x\|_\infty < R$, então é suficiente considerar o problema (P_R) resultante. Completaremos a demonstração mostrando que o Teorema 4.3.2 se pode aplicar ao lagrangiano

$$\widetilde{L}(t,x,v) := L(t,x,v) + \alpha(R, V(R))\, V(R) - \beta(R, V(R)).$$

Como $\widetilde{L}$ e L diferem numa constante, a conclusão para o correspondente (P_R) dá o resultado desejado para (P).

Fixemos $\bar{\alpha} = \alpha(R, V(R))$, para o qual (H5) é uma consequência imediata das definições de α e β. De facto, para quaisquer $t \in [a,b]$ e $\|x\|_\infty < R$ temos

$$\widetilde{L}(t,x,v) = L(t,x,v) + \alpha(R,V(R))\,V(R) - \beta(R,V(R)) \geq \alpha(R,V(R))\,V(R) \geq \alpha(R,V(R))\,|v|,$$

para qualquer $|v| < V(R)$ e

$$\begin{aligned}
\widetilde{L}(t,x,v) &= L(t,x,v) + \alpha(R,V(R))\,V(R) - \beta(R,V(R)) \\
&\geq \alpha(R,V(R))\,|v| + \alpha(R,V(R))\,V(R) - \beta(R,V(R)) \\
&\geq \alpha(R,V(R))\,|v|,
\end{aligned}$$

para qualquer $|v| \geq V(R)$. Então, para quaisquer $t \in [a,b]$ e $\|x\|_\infty < R$, temos

$$\widetilde{L}(t,x,v) \geq \alpha(R,V(R))\,|v| \quad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Vejamos agora (H7). Temos

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Lambda}(\bar{x}) &= \int_a^b \widetilde{L}(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t))\,dt \\
&= \int_a^b L(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t))\,dt + (b-a)\left[\alpha(R,V(R))\,V(R) - \beta(R,V(R))\right] \\
&= \Lambda(\bar{x}) + (b-a)\left[\bar{\alpha}V(R) - \beta(R,V(R))\right].
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Por (H9) temos

$$\begin{aligned}
\Lambda(\bar{x}) &< \bar{\alpha}\{R - \min\{|x_a|,|x_b|\} - (b-a)V(R)\} + (b-a)\beta(R,V(R)) \\
&= \bar{\alpha}[R - \min\{|x_a|,|x_b|\}] - (b-a)\left[\bar{\alpha}V(R) - \beta(R,V(R))\right].
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Então, por (4.53) e (4.54), vem

$$\widetilde{\Lambda}(\bar{x}) < \bar{\alpha}[R - \min\{|x_a|,|x_b|\}] \Leftrightarrow \frac{\widetilde{\Lambda}(\bar{x})}{\bar{\alpha}} < R - \min\{|x_a|,|x_b|\}. \tag{4.55}$$

Assim a desigualdade em (H9) pode ser reescrita como

$$\frac{R - \min\{|x_a|,|x_b|\}}{b-a} > \frac{\widetilde{\Lambda}(\bar{x})}{\bar{\alpha}(b-a)}.$$

Então (H8) implica

$$b - a \leq \Delta_R(r,s) \quad \text{para qualquer } s > 0 \text{ tal que } \rho(s) > r, \text{ onde } r = \frac{\widetilde{\Lambda}(\bar{x})}{\alpha(b-a)}$$

para qualquer $\alpha \in (0,\bar{\alpha})$ suficientemente próximo de $\bar{\alpha}$, logo (H7) verifica-se para qualquer α em $(0,\bar{\alpha})$ suficientemente próximo de $\bar{\alpha}$.

Finalmente, a última desigualdade de (4.55) é idêntica a (H6) para $\alpha = \bar{\alpha}$, o que mostra que (H6) é verificada para qualquer α suficientemente próximo de $\bar{\alpha}$. Então o Teorema 4.3.2 aplica-se ao lagrangiano $\widetilde{L}$, o que nos permite concluir que o problema (P_R) tem solução e que qualquer solução é lipschitziana. Assim o conjunto solução do problema (P_R) é um subconjunto não-vazio de $AC^\infty([a,b], \mathbb{R}^n)$, o mesmo acontece com o problema (P).■

4.7.2 Lagrangianos de crescimento lento

Recordemos da Secção 4.2, Definição 4.2.12, a seguinte *condição de crescimento extremal*:

$$\lim_{s\to+\infty} \Delta_R(r,s) = \infty \qquad \forall R, r > 0. \tag{EGC}$$

Parte da análise de dois exemplos da Secção 4.3 consistiu na verificação desta condição. Mais tarde veremos outras situações em que se verifica (EGC). Vejamos agora um corolário do último teorema.

Corolário 4.7.2 *Seja L uma função limitada inferiormente, verificando a condição de crescimento extremal e*

$$\liminf_{\substack{|v|\to\infty \\ (t,x)\in[a,b]\times\mathbb{R}^n}} \frac{L(t,x,v)}{|v|} > 0. \tag{4.56}$$

Então o conjunto solução de (P) é um subconjunto não-vazio de $AC^\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$.

Demonstração:

Pelo Teorema 4.7.1, basta verificar que (H9) é válida para qualquer R suficientemente grande pois, por (EGC), L verifica claramente (H8). Seja $\bar{x}$ uma função lipschitziana admissível para (P) (a qual existe por L ser limitada inferiormente). Fixemos R suficientemente grande tal que $\|\bar{x}\|_\infty < R$. Como L é limitada inferiormente então existe uma constante $K \in \mathbb{R}$ tal que

$$L(t,x,v) \geq K \qquad \forall (t,x,v) \in [a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n. \tag{4.57}$$

Por outro lado, como L verifica (4.56) então

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : \forall|v|>\delta\ \forall(t,x)\in[a,b]\times\mathbb{R}^n \Rightarrow \frac{L(t,x,v)}{|v|} > -\varepsilon. \tag{4.58}$$

Fixemos $R' \geq R$ qualquer. Por (4.58), existe $V(R') > 0$ tal que

$$\alpha(R',V(R')) = \inf\left\{\frac{L(t,x,v)}{|v|} : t\in[a,b],\ |x|\leq R',\ |v|\geq V(R')\right\} > -R',$$

e por (4.57) temos

$$\beta(R',V(R')) = \inf\{0, L(t,x,v) : t\in[a,b],\ |x|\leq R',\ |v|<V(R')\} \leq 0.$$

Como $V(R') > 0$ então temos

$$V(R')\,\alpha(R,V(R)) = \inf\left\{V(R')\frac{L(t,x,v)}{|v|} : t\in[a,b],\ |x|\leq R,\ |v|\geq V(R)\right\} \leq V(R')\frac{L(t,x,v)}{|v|}$$

e

$$\beta(R,V(R)) = V(R)\inf\left\{0, \frac{L(t,x,v)}{V(R)} : t\in[a,b],\ |x|\leq R,\ |v|<V(R)\right\} \leq 0,$$

donde

$$\begin{aligned}
& \alpha(R',V(R'))\left[R'-\min\{|x_a|,|x_b|\}-(b-a)V(R')\right]+(b-a)\beta(R',V(R')) \\
= {} & \alpha(R',V(R'))\left[R'-\min\{|x_a|,|x_b|\}\right]-\alpha(R',V(R'))(b-a)V(R')+(b-a)\beta(R',V(R')) \\
> {} & -\alpha(R',V(R'))(b-a)V(R')+(b-a)\beta(R',V(R')) \\
\geq {} & -\frac{L(t,x,v)}{|v|}(b-a)+(b-a)\beta(R',V(R')),
\end{aligned}$$

o que completa a demonstração.■

A condição de crescimento (4.56) é consideravelmente mais fraca do que a condição de coercividade invocada habitualmente na teoria de existência, a qual veremos mais tarde.

Apresentamos na proposição abaixo um exemplo de um lagrangiano com crescimento lento e que satisfaz a condição de crescimento extremal. Os lagrangianos com esta forma são familiares na teoria dos problemas paramétricos.

Proposição 4.7.3 *Seja* $L(t,x,v)$ *da forma* $\varphi(x)\left(1+|v|^2\right)^{1/2}$, *onde* $\varphi:\mathbb{R}^n\to(0,+\infty)$ *é uma função localmente lipschitziana e tal que*

$$\exists\varepsilon>0:\varphi(x)\geq\varepsilon\quad\forall x\in\mathbb{R}^n.$$

Então L *verifica a condição de crecimento extremal, e também as outras hipóteses do Corolário 4.7.2. Portanto o conjunto solução de (P) é um subconjunto não-vazio de* $C^1[a,b]$.

Demonstração:

Sejam r,s e x como na definição de $\Delta_R(r,s)$ (Definição 4.2.11). A solução x do subproblema em questão verifica a segunda condição de Erdmann (ver [9], pág. 33), que dá a existência de uma constante c tal que

$$\varphi(x(t))^2=c^2\left(1+|x'(t)|^2\right),\text{ para qualquer } t\in[a,b]. \tag{4.59}$$

Por (a) da definição de $\Delta_R(r,s)$, deduzimos que

$$c^2\geq\frac{\varphi(x(\tau))^2}{1+r^2}$$

para algum $\tau\in[t_0,t_1]$; e portanto

$$c^2\geq\frac{\varepsilon_R^2}{1+r^2}$$

onde $\varepsilon_R>0$ é um minorante [9] de $\varphi(x)$ para $|x|\leq R$. Seja M_R um majorante de $\varphi(x)$ para $|x|\leq R$. Então, para qualquer $t\in[t_0,t_1]$, temos (por (4.59))

$$M_R^2\geq\varphi(x(t))^2=c^2\left(1+|x'(t)|^2\right)\geq\frac{\varepsilon_R^2}{1+r^2}\left(1+|x'(t)|^2\right)$$

o que implica

$$|x'(t)|^2\leq M_R^2\,\frac{1+r^2}{\varepsilon_R^2}-1.$$

Portanto se s é escolhido tal que $\rho(s)^2$ é maior do que o lado direito da última desigualdade vem

$$x'(t)\in\rho(s)\bar{B}\quad\forall t\in[t_0,t_1],$$

o que contradiz (b) da definição de $\Delta_R(r,s)$. Assim temos $\Delta_R(r,s)=\infty$. Além disso, como $\Delta_R(r,\cdot)$ é crescente em $\left(\rho^{-1}(r),+\infty\right)$ e

$$\rho(s)^2>M_R^2\,\frac{1+r^2}{\varepsilon_R^2}-1\geq r^2\Rightarrow\rho(s)\geq r\Rightarrow s\in\left(\rho^{-1}(r),+\infty\right)$$

[9] Como φ é localmente lipschitziana em $\mathbb{R}^n$ então para cada $R>0$ fixado φ é lipschitziana no conjunto $\{x\in\mathbb{R}^n:|x|\leq R\}$ e portanto limitada nesse mesmo conjunto. Logo existem $\varepsilon_R,M_R>0$ tais que

$$\varphi(x)\geq\varepsilon_R\quad\text{e}\quad\varphi(x)\leq M_R\quad\forall|x|\leq R.$$

então

$$\lim_{s \to +\infty} \Delta_R(r,s) = \infty,$$

e verifica-se (EGC). As outras hipóteses do Corolário 4.7.2 seguem facilmente e portanto o conjunto solução de (P) é um subconjunto não-vazio de $AC^{\infty}([a,b],\mathbb{R}^n)$. Como $L(t,x,\cdot)$ é estritamente convexa em $\mathbb{R}^n$ para qualquer $(t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n$ (pois as funções $L(t,x,\cdot)$, $L_v(t,x,\cdot)$, $L_{vv}(t,x,\cdot)$ são contínuas e $L_{vv}(t,x,v) > 0$ para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$ então, pela Proposição 2.16.21, a função $L(t,x,\cdot)$ é estritamente convexa em $\mathbb{R}^n$) então, pela Observação 4.2.10, podemos concluir que o conjunto solução de (P) é um subconjunto não-vazio de $C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$.■

Para ilustrar uma situação análoga à anterior mas em que a condição de crescimento extremal falha, consideremos os lagrangianos $L(t,x,v)$ da forma $\varphi(t)\left(1+|v|^2\right)^{1/2}$, onde φ é uma função contínua tal que

$$m := \min\{\varphi(t) : a \leq t \leq b\}$$

é positivo. É conhecido (ver [9], 14.3.iv) que quando L tem esta forma, o problema (P) admite uma solução sse

$$|x_b - x_a| \leq \int_a^b \frac{m}{\sqrt{\varphi(t)^2 - m^2}} dt.$$

Quando esta condição não se verifica (o que claramente pode acontecer), então a condição de crescimento extremal também deve falhar, para que (P) não tenha solução (lipschitziana ou outra qualquer), mesmo que se verifiquem todas as outras hipóteses do Corolário 4.7.2.

4.7.3 Lagrangianos coercivos (de crescimento rápido)

O lagrangiano L diz-se *coercivo* se existe uma função convexa $\theta : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ verificando

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\theta(r)}{r} = +\infty \quad \text{e} \quad L(t,x,v) \geq \theta(|v|) \quad \forall (t,x,v) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Desde o trabalho de Tonelli que esta hipótese de crescimento é familiar na teoria de existência. Pela Definição 4.2.1 vê-se que a convexidade e a coercividade implicam a hipótese (H2).

Corolário 4.7.4 *Seja L coercivo e verificando a condição de crescimento extremal (EGC). Então o conjunto solução de (P) é um subconjunto não-vazio de $AC^{\infty}([a,b],\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração:
A hipótese (H8) sai directamente da condição de crescimento extremal. Então, pelo Teorema 4.7.1, basta verificar que (H9) é válida para qualquer R suficientemente grande para concluir que o conjunto solução de (P) é um subconjunto não-vazio de $AC^{\infty}([a,b],\mathbb{R}^n)$.

Fixemos $\bar{x}$ uma função lipschitziana admissível para (P) (a qual existe por L ser limitada inferiormente) e fixemos $R > 0$ suficientemente grande tal que $\|\bar{x}\|_{\infty} < R$.

Como o lagrangiano L é coercivo então existe uma função convexa $\theta : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ verificando

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\theta(r)}{r} = +\infty \quad \text{e} \quad L(t,x,v) \geq \theta(|v|) \quad \forall (t,x,v) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Mas dizer que

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\theta(r)}{r} = +\infty$$

significa que

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : 0 > r > \delta \Rightarrow \frac{\theta(r)}{r} > \varepsilon \tag{4.60}$$

O que implica que L é limitada inferiormente por 0 e portanto para qualquer $R' > R$ fixado existe $V(R') > 0$ tal que

$$\alpha(R', V(R')) = \inf\left\{\frac{L(t,x,v)}{|v|} : t \in [a,b], |x| \leq R', |v| \geq V(R')\right\} > 0$$

e

$$\beta(R', V(R')) = \inf\{0, L(t,x,v) : t \in [a,b], |x| \leq R', |v| < V(R')\} = 0.$$

Consideremos os conjuntos

$$C = \{t \in [a,b] : |\bar{x}'(t)| \geq V(R')\}, \quad D = \{t \in [a,b] : |\bar{x}'(t)| < V(R')\}.$$

Além disso

$$V(R')\alpha(R', V(R')) = V(R')\inf\left\{\frac{L(t,x,v)}{|v|} : t \in [a,b], |x| \leq R', |v| \geq V(R')\right\} \leq V(R')\frac{L(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{x}'(\tau))}{|\bar{x}'(\tau)|},$$

para qualquer $\tau \in C$. Então

$$\begin{aligned}
& \alpha(R', V(R'))[R' - \min\{|x_a|, |x_b|\} - (b-a)V(R')] + (b-a)\beta(R', V(R')) \\
= \ & \alpha(R', V(R'))[R' - \min\{|x_a|, |x_b|\}] - \alpha(R', V(R'))(b-a)V(R') \\
> \ & -\alpha(R', V(R'))(b-a)V(R') \\
\geq \ & -\frac{V(R')}{|\bar{x}'(\tau)|}(b-a)L(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{x}'(\tau)) \geq L(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{x}'(\tau))(b-a).
\end{aligned}$$

Temos

$$\Lambda(\bar{x}) = \int_a^b L(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t))\,dt < (\alpha(R', V(R'))[R' - \min\{|x_a|, |x_b|\} - (b-a)V(R')])$$

e portanto verifica-se (H9). O que completa a demonstração.■

Este resultado é muito parecido ao teorema original de existência global de Tonelli; tem uma hipótese extra (EGC) mas afirma que as soluções são lipschitzianas enquanto que o de Tonelli apenas afirma que são absolutamente contínuas. Este destaca (EGC) como uma das principais condições para a regularidade das soluções de (P). (Recordemos que uma vez que se sabe que uma solução é lipschitziana, as outras conclusões de regularidade seguem facilmente das hipóteses suplementares de L (ver [19], Secção 2).) Veremos que a coercividade, além de fornecer o crescimento do lagrangiano e a convexidade estrita no infinito, é um ponto de apoio para (EGC). O primeiro destes resultados conduz-nos a uma demonstração alternativa do facto (devido a Clarke e Vinter [19]) que sob as hipóteses de Tonelli as soluções de problemas autónomos são lipschitzianas. (O problema (P) diz-se autónomo quando o lagrangiano $L(t,x,v)$ não depende explicitamente de t.)

Proposição 4.7.5 *Seja L coercivo e independente de t. Então verifica-se (EGC), e portanto são válidas as conclusões do Corolário 4.7.4.*

Antes de demonstrarmos a proposição vejamos um resultado técnico.

Lema 4.7.6 *Para qualquer $m > 0$ existe $M > 0$ tal que se $|x| \leq R$, $|p| \leq m$, então $\partial_p H(x,p) \subseteq M\bar{B}$.*

Demonstração:

Comecemos por fixar R, m e, $|x| \leq R$, e $|p| \leq m$. Escolhemos M suficientemente grande tal que $s > M$ implique

$$\frac{\theta(s) - L(x,0)}{s} > m$$

sempre que $|x| \leq R$.

Então, se $\partial_p H(x,p)$ contém um ponto v com $|v| > M$, a desigualdade do subgradiente correspondente a $p \in \partial_v L(x,v)$:

$$\langle p, v - w\rangle \geq L(x,v) - L(x,w) \qquad \forall w \in \mathbb{R}^n$$

implica, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$|p|\,|v| \geq \langle p, v\rangle \geq L(x,v) - L(x,0).$$

Além disso, por coercividade,

$$|p|\,|v| \geq \theta(|v|) - L(x,0).$$

Dividindo ambos os membros por $|v|$ obtemos $|p| > m$, uma contradição; a qual completa a demonstração do lema.■

Demonstração (da Proposição 4.7.5):
Fixemos R e r; mostraremos que $\Delta_R(r,s) = \infty$ para s suficientemente grande.
Comecemos por definir

$$\begin{aligned} m_1 &= \max\{L(x,v) : |x| \leq R, |v| \leq 1\} + \max\{L(x,v) : |x| \leq R, |v| \leq r\} + \\ &\quad + r\max\{|\xi| : \xi \in \partial_v L(x,v), |x| \leq R, |v| \leq r\} \end{aligned}$$

e seja M_1 o número correspondente a m_1 dado pelo Lema 4.7.6.

Completaremos a demonstração mostrando que se

$$\rho(s) > \max\{r, M_1\} \quad \text{então} \quad \Delta_R(r,s) = \infty. \tag{4.61}$$

De facto, se (4.61) se verifica concluimos que se $\rho(s) > r$ então $\Delta_R(r,s) = \infty$; mas como $\Delta_R(r,\cdot)$ é crescente em $\left(\rho^{-1}(r), +\infty\right)$ então também $\Delta_R(r,s) = \infty$ para qualquer s suficientemente grande o que prova (EGC) e, pelo Corolário 4.7.4, completa a demonstração da proposição.

Coloquemo-nos então no contexto notacional da definição de $\Delta_R(r,s)$ (Definição 4.2.11). Como L não depende explicitamente de t então, pela condição (e) e pelo Teorema 5.2.3 de [13], existe uma função $p \in AC([t_0,t_1], \mathbb{R}^n)$, associada à função absolutamente contínua x, tal que

$$p(t) \in \partial_v L(x(t), x'(t)) \qquad \text{qs em } [t_0,t_1] \tag{4.62}$$

e existe uma constante c tal que

$$H(x(t), p(t)) = c \qquad \text{qs em } [t_0,t_1]. \tag{4.63}$$

Mas, pela Proposição 2.20.6, a igualdade (4.63) é equivalente a

$$\langle p(t), x'(t)\rangle - L(x(t), x'(t)) = c \qquad \text{qs em } [t_0,t_1]. \tag{4.64}$$

A condição (a) afirma que $Ess\ x'(\tau) \cap r\bar{B} \neq \emptyset$ para algum $\tau \in [t_0,t_1]$, ou seja $x'(\tau)$ existe e $|x'(\tau)| \leq r$ para algum $\tau \in [t_0,t_1]$. Segue por (4.62) que, para este τ, $|p(\tau)| \leq \sigma_1$, onde

$$\sigma_1 := \max\{|\xi| : \xi \in \partial_v L(x,v), |x| \leq R, |v| \leq r\}.$$

Se agora definirmos

$$\sigma_2 := r\sigma_1 + \max\{L(x,v) : |x| \leq R, |v| \leq r\},$$

então (4.64) implica que

$$\begin{aligned} |c| &= |\langle p(t), x'(t)\rangle - L(x(t), x'(t))| \\ &\leq |\langle p(t), x'(t)\rangle| + |L(x(t), x'(t))| \\ &\leq |p(t)|\,|x'(t)| + L(x(t), x'(t)) \\ &\leq \sigma_1 r + \max\{L(x,v) : |x| \leq R, |v| \leq r\} = \sigma_2, \end{aligned} \tag{4.65}$$

pois a condição de coercividade implica que L é limitada inferiormente por 0. Da desigualdade do subgradiente correspondente a p juntamente com (4.62) e (4.64) deduzimos que, para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$ e quase todo $t \in [t_0, t_1]$,

$$\begin{aligned} & \langle p(t), v - x'(t) \rangle \leq L(x(t), v) - L(x(t), x'(t)) \\ \Leftrightarrow \quad & \langle p(t), v \rangle - L(x(t), v) \leq \langle p(t), x'(t) \rangle + L(x(t), x'(t)) \\ \Rightarrow \quad & \langle p(t), v \rangle - L(x(t), v) \leq c. \end{aligned}$$

Por continuidade temos mesmo

$$\langle p(t), v \rangle - L(x(t), v) \leq c \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [t_0, t_1].$$

Em particular

$$\langle p(t), v \rangle \leq c + L(x(t), v) \qquad \forall |v| \leq 1, \forall t \in [t_0, t_1]$$

e assim vem

$$|p(t)| \leq |c| + \max\{L(x(t), v) : |v| \leq 1\} \qquad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Mas, por (4.65),

$$\begin{aligned} |c| & \leq \sigma_2 = r\sigma_1 + \max\{L(x, v) : |x| \leq R, |v| \leq r\} \\ & = r \max\{|\xi| : \xi \in \partial_v L(x, v), |x| \leq R, |v| \leq r\} + \max\{L(x, v) : |x| \leq R, |v| \leq r\} \end{aligned}$$

então

$$|p(t)| \leq |c| + \max\{L(x, v) : |x| \leq R, |v| \leq 1\} = m_1 \qquad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Como (4.62) é equivalente a

$$x'(t) \in \partial_p H(x(t), p(t)) \quad \text{qs em } [t_0, t_1],$$

e pela definição de M_1 juntamente com a majoração anterior para $|p(t)|$ vem

$$\partial_p H(x(t), p(t)) \subseteq M_1 \bar{B} \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

então, pela Proposição 4.2.9,

$$Ess\ x'(t) \subseteq M_1 \bar{B} \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \tag{4.66}$$

Se $\rho(s) > M_1$ então (4.66) contradiz a condição (b) da definição de $\Delta_R(r, s)$ e portanto $\Delta_R(r, s) = \infty$ para tal s, como queriamos.■

4.7.4 Condições tipo Morrey

Vejamos agora outro critério que se aplica aos problemas não-autónomos e que quando combinado com a coercividade, dá a condição de crescimento extremal. Suponhamos que existe uma constante positiva c e uma função integrável $\gamma \in L^1([a, b], \mathbb{R})$ tal que

$$|\xi_1| \leq c|\xi_2| + \gamma(t) \qquad \forall (\xi_1, \xi_2) \in \partial L(t, x, v), \forall (t, x, v) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

onde ∂L denota o gradiente generalizado de L em relação a (x, v) para t fixado. (Na realidade, é suficiente pedir isto para $|x| \leq R$, onde esta última é a majoração anterior para as funções x absolutamente contínuas que resolvem (P), imposta pela hipótese de coercividade.) Referiremo-nos a esta condição como a condição de crescimento de Morrey (para mais pormenores ver [19]).

Proposição 4.7.7 *Se L é coercivo e satisfaz a condição de crescimento de Morrey, então verifica-se (EGC), e portanto as conclusões do Corolário 4.7.4 são válidas.*

Demonstração:
Fixemos R e r e mostremos que $\Delta_R(r,s)=\infty$ para s suficientemente grande. A demonstração é análoga à da Proposição 4.7.5: encontraremos um número M_1 tal que $\Delta_R(r,s)=\infty$ sempre que $\rho(s)>\max\{r,M_1\}$ (ver (4.61)). Coloquemo-nos então outra vez no contexto da definição de $\Delta_R(r,s)$; pela condição (e) e pelo Teorema 2.4 de [15] existe uma função absolutamente contínua p associada à solução x, verificando

$$(p'(t),p(t))\in\partial L(t,x(t),x'(t)) \quad \text{qs em } [t_0,t_1]. \tag{4.67}$$

A condição (a) afirma que $Ess\ x'(\tau)\cap r\bar{B}\neq\emptyset$ para algum $\tau\in[t_0,t_1]$; por (4.67) segue que para este τ, $|p(\tau)|<\sigma_1$, onde

$$\sigma_1:=\max\{|\xi_2|:(\xi_1,\xi_2)\in\partial L(t,x,v),t\in[a,b],|x|\leq R,|v|\leq r\}.$$

A condição de crescimento de Morrey implica

$$|p'(t)|\leq c|p(t)|+\gamma(t) \quad \text{qs em } [t_0,t_1],$$

para alguns $c\in\mathbb{R}^+$ e $\gamma\in L^1([a,b],\mathbb{R})$. Da Desigualdade de Gronwall [10] segue que

$$\begin{aligned}
|p(t)|-|p(\tau)| &\leq |p(t)-p(\tau)|\\
&\leq \left(e^{c(t-\tau)}-1\right)|p(\tau)|+\int_\tau^t e^{c(t-s)}\gamma(s)\,ds\\
&\leq \left(e^{c(b-a)}-1\right)|p(\tau)|+e^{c(b-a)}\int_\tau^t \gamma(s)\,ds\\
&\leq \left(e^{c(b-a)}-1\right)|p(\tau)|+e^{c(b-a)}\|\gamma\|_1,
\end{aligned}$$

para qualquer $t\in[t_0,t_1]$. Isto ainda implica que

$$|p(t)|\leq|p(\tau)|+\left(e^{c(b-a)}-1\right)|p(\tau)|+e^{c(b-a)}\|\gamma\|_1=(|p(\tau)|+\|\gamma\|_1)\,e^{c(b-a)}\leq(\sigma_1+\|\gamma\|_1)\,e^{c(b-a)},$$

para qualquer $t\in[t_0,t_1]$. Tal como na demonstração da Proposição 4.7.5, esta independência uniforme de $|p(t)|$ em relação a x, juntamente com o Lema 4.7.6, produz uma constante $M_1>0$ tal que

$$\partial_p H(t,x(t),p(t))\subseteq M_1\bar{B} \quad \forall t\in[t_0,t_1]. \tag{4.68}$$

Por (4.67) e pela Proposição 2.21.14, vem

$$p(t)\in\partial_v L(t,x(t),x'(t)) \quad \text{qs em } [t_0,t_1],$$

o que implica

$$x'(t)\in\partial_p H(t,x(t),p(t)) \quad \text{qs em } [t_0,t_1].$$

Então, por (4.68) e pela Proposição 4.2.9,

$$Ess\ x'(t)\subseteq M_1\bar{B} \quad \forall t\in[t_0,t_1]. \tag{4.69}$$

Se $\rho(s)>M_1$ então (4.69) contradiz a condição (b) da definição de $\Delta_R(r,s)$ e portanto $\Delta_R(r,s)=\infty$ para tal s. Além disso, $\Delta_R(r,\cdot)$ é crescente em $\left(\rho^{-1}(r),+\infty\right)$ então também $\Delta_R(r,s)=\infty$ para qualquer s suficientemente grande o que prova (EGC) e, pelo Corolário 4.7.4, completa a demonstração da proposição.■

[10] **(Desigualdade de Gronwall)** Seja x uma função absolutamente contínua em $[a,b]$ tal que

$$|x'(t)|\leq\gamma|x(t)|+c(t) \quad \text{q.s. em } [a,b]$$

onde γ é uma constante positiva e $c(\cdot)\in L^1[a,b]$. Então, para qualquer $t\in[a,b]$, temos

$$|x(t)-x(a)|\leq\left(e^{\gamma(t-a)}-1\right)|x(a)|+\int_a^t e^{\gamma(t-s)}c(s)\,ds.$$

Demonstração:
Ver [16], pág. 179.

Capítulo 5

Um método indirecto no cálculo das variações

5.1 Introdução

Consideremos o seguinte problema básico do cálculo das variações: minimizar o funcional integral

$$\Lambda(x) := \int_0^T L(x(t), x'(t))\, dt$$

sobre a classe X de todas as funções $x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ sujeitas às condições de fronteira

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T$$

e à restrição de estado

$$x(t) \in \Omega \quad \forall t.$$

Foi Tonelli quem introduziu o que mais tarde se viria a chamar o método directo do cálculo das variações para mostar a existência de solução. Tonelli em [48] considerou X como a classe das funções absolutamente contínuas e introduziu um conjunto de restrições no lagrangiano L as quais asseguram que o funcional Λ é *sci* numa topologia apropriada. Uma versão moderna da teoria de Tonelli é, segundo [11], a seguinte, na qual a classe X das funções em competição é tomada como sendo a classe das funções absolutamente contínuas definidas em $[0,T]$ com valores em $\mathbb{R}^n$: $AC([0,T], \mathbb{R}^n)$.

Teorema 5.1.1 *Suponhamos que $L : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ é contínua e, convexa e coerciva na váriável v. Então, se Ω é fechado, o problema admite um minimizante absolutamente contínuo.*

A palavra "coerciva" refere-se à existência de uma função $\theta : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ satisfazendo

(i) $L(x,v) \geq \theta(|v|) \quad \forall x \in \Omega, \forall v \in \mathbb{R}^n$;

(ii) $\lim\limits_{r \to +\infty} \frac{\theta(r)}{r} = +\infty$.

Não há perda de generalidade em supor que θ é continuamente diferenciável, convexa e estritamente crescente; estas funções θ são chamadas **funções de Nagumo**. A demonstração deste teorema consiste basicamente em mostar que o limite de uma sucessão minimizante (ou, se necessário, de uma sua subsucessão) é solução. Envolve essencialmente uma propriedade de compacidade dos conjuntos de subnível do funcional Λ:

$$\{x \in AC([0,T], \mathbb{R}^n) : \Lambda(x) \leq \Lambda(\bar{x})\}.$$

Neste capítulo apresenta-se uma nova abordagem da teoria de existência. Procede-se de uma maneira indirecta utilizando as condições necessárias. Esta característica original é partilhada com a aproximação vista no Capítulo 4, mas as abordagens são diferentes.

Em vez de utilizar hipóteses que impliquem a compacidade dos conjuntos de subnível de Λ, pede-se que a estrutura do problema implique uma propriedade mais fraca. A propriedade em questão é que para algum $k > 0$, qualquer função admissível verifique

$$\inf_{0 \le t \le T} \operatorname{ess} |x'(t)| < k.$$

Esta condição verifica-se sob a hipótese de corecividade, mas também se verifica para alguns problemas não-coercivos, como veremos na Subsecção 5.2.4.

A próxima secção é dedicada ao caso autónomo. Para mostrar a existência de solução recorre-se ao estudo de uma certa função valor (não-diferenciável). Mostra-se que esta função é definitivamente constante usando técnicas de "análise proximal". Na Secção 5.3 faz-se a extensão ao caso não-autónomo enquanto que a Secção 5.3.4 é dedicada a um aperfeiçoamento desse resultado no caso $n = 1$.

5.2 O problema autónomo

5.2.1 Hipóteses básicas

O problema (P) que iremos estudar consiste em minimizar o funcional integral

$$\Lambda(x) := \int_0^T L(x(t), x'(t))\, dt$$

na classe das funções $x \in AC([0,T], \mathbb{R}^n)$ verificando

$$(x(0), x(T)) \in C, \quad x(t) \in \Omega \;\; \forall t \in [0,T], \quad x'(t) \in K \text{ qs}$$

(estas funções são chamadas *funções admissíveis*), supondo que se verificam as seguintes **hipóteses básicas**:

(**i**) o conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é fechado;

(**ii**) a função $L : \Omega \times \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ é *sci* e é tal que:

- (**ii1**) para cada $x \in \Omega$ a função $v \to L(x,v)$ é convexa no seu domínio [1], o qual é não-vazio convexo e aberto;
- (**ii2**) a função $L(x,v)$ é limitada inferiormente nos subconjuntos $A \times B$ de $\Omega \times \mathbb{R}^n$ com A limitado;

(**iii**) o conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ é fechado e $K \subseteq \mathbb{R}^n$ é um cone [2] convexo fechado;

(**iv**) pelo menos um dos seguintes conjuntos é compacto

$$C_x := \{x \in \mathbb{R}^n : \text{para algum } y \in \mathbb{R}^n,\ (x,y) \in C\}$$
$$C_y := \{y \in \mathbb{R}^n : \text{para algum } x \in \mathbb{R}^n,\ (x,y) \in C\};$$

(**v**) existe pelo menos uma função lipschitziana $\bar{x}$ admissível para o problema (P) e tal que $\Lambda(\bar{x})$ é finito.

Denotamos por $\Gamma(\bar{x})$ o seguinte conjunto de subnível para as funções admissíveis

$$\Gamma(\bar{x}) := \{x \in AC([0,T], \mathbb{R}^n) : (x(0), x(T)) \in C,\ x(t) \in \Omega \;\; \forall t \in [0,T],\ x'(t) \in K \text{ qs},\ \Lambda(x) \le \Lambda(\bar{x})\}.$$

Suponhamos ainda que:

[1] Recordemos que, para cada $x \in \Omega$ fixado, o **domínio** de $L(x,\cdot)$ é dado por

$$\operatorname{dom} L(x,\cdot) := \{v \in \mathbb{R}^n : L(x,v) < +\infty\}.$$

[2] Dizemos que o conjunto K é um **cone** se $tk \in K$ sempre que $k \in K$ e $t > 0$.

(H1) existe $k > 0$ tal que qualquer $x \in \Gamma(\bar{x})$ satisfaz

$$\inf_{0 \le t \le T} \text{ess} \, |x'(t)| < k;$$

(H2) a seguinte desigualdade

$$\lim_{\beta \to +\infty} \sup_{\substack{x \in \Omega, v \in K \\ |v| > \beta}} \sup_{p \in \partial_v L(x,v)} \{L(x,v) - \langle v, p \rangle\} < \inf_{\substack{x \in \Omega, v \in K \\ |v| < k}} \inf_{p \in \partial_v L(x,v)} \{L(x,v) - \langle v, p \rangle\} \qquad (*)$$

verifica-se para o k dado por (H1).

Na expressão acima, para cada $x \in \Omega$ fixado, $\partial_v L(x,v)$ refere-se ao gradiente generalizado de L na variável v (o qual, por convexidade, coincide com o subgradiente de L na variável v no sentido da análise convexa).

Dado que, para cada $x \in \Omega$ fixado, a função $L(x, \cdot)$ é finita e convexa e portanto, pela Proposição 2.16.27, localmente lipschitziana no seu domínio, que é, por hipótese, um conjunto aberto, então, para cada $v \in dom\, L(x, \cdot)$, o conjunto $\partial_v L(x,v)$ é um subconjunto compacto e não-vazio de $\mathbb{R}^n$. Quando L é diferenciável em v, o conjunto $\partial_v L(x,v)$ reduz-se ao conjunto singular cujo o único elemento é $\nabla_v L(x,v)$ (ver Proposição 2.20.19).

Notemos que, como L é *sci* então, pela Proposição 2.17.5, para qualquer $t \in \mathbb{R}$, o conjunto

$$\{(x,v) \in \Omega \times \mathbb{R}^n : L(x,v) > t\}$$

é aberto. Então, por definição, L é $\mathcal{B}_{2n}$-mensurável e portanto para qualquer função $x \in AC([0,T], \mathbb{R}^n)$ a função $t \to L(x(t), x'(t))$ é Lebesgue-mensurável em $[0,T]$ (ver Proposição 2.7.24). Por outro lado, para cada $x \in AC([0,T], \mathbb{R}^n)$ fixado existe uma constante $M_x \ge 0$ tal que $|x(t)| \le M_x$ qualquer que seja o $t \in [0,T]$ e portanto, pela hipótese (ii2), existe uma constante μ_x tal que

$$L(x(t), x'(t)) \ge \mu_x \quad \text{qs em } [0,T],$$

o que implica

$$\int_0^T L(x(t), x'(t))\, dt \ge T\mu_x > -\infty.$$

Podemos assim concluir que o funcional

$$\Lambda(x) = \int_0^T L(x(t), x'(t))\, dt$$

está bem definido na classe de funções

$$\Delta := \{x \in AC([0,T], \mathbb{R}^n) : (x(0), x(T)) \in C,\ x(t) \in \Omega \ \ \forall t \in [0,T],\ x'(t) \in K \text{ qs}\},$$

tomando possivelmente o valor $+\infty$.

5.2.2 Existência de solução para os problemas aproximantes

Seja θ uma função de Nagumo. Consideremos o funcional $\Lambda_\theta : AC([0,T], \mathbb{R}^n) \to [-\infty, +\infty]$ definido por

$$\Lambda_\theta(x) := \int_0^T \theta(|x'(t)|)\, dt.$$

Como θ é contínua então para cada $x \in AC([0,T], \mathbb{R}^n)$ a função $t \to \theta(|x'(t)|)$ é Lebesgue-mensurável em $[0,T]$ (ver Proposições 2.7.10 e 2.7.15). Por outro lado, como θ é estritamente crescente então $\theta(r) \ge \theta(0)$ $\forall r \in [0, +\infty)$ e portanto

$$\Lambda_\theta(x) = \int_0^T \theta(|x'(t)|)\, dt \ge \int_0^T \theta(0)\, dt = T\theta(0) > -\infty.$$

Podemos assim concluir que o funcional Λ_θ está bem definido na classe de funções $AC([0,T],\mathbb{R}^n)$, tomando possivelmente o valor $+\infty$.

Denotemos por $AC_\theta([0,T],\mathbb{R}^n)$ a classe de todas as funções $x \in AC([0,T],\mathbb{R}^n)$ tais que $\Lambda_\theta(x) < +\infty$. Consideremos o problema

$$\min\{\Lambda(x) : x \in AC_\theta([0,T],\mathbb{R}^n),\ (x(0),x(T)) \in C,\ x(t) \in \Omega\ \forall t \in [0,T],\ x'(t) \in K \text{ qs}\}. \qquad (\mathrm{P}_\theta)$$

Para mostrar que o problema P_θ admite solução consideremos os "problemas aproximantes" $P_\theta(\alpha)$ que, para cada valor do parâmetro $\alpha \in \mathbb{R}$, consistem em

$$\min\{\Lambda(x) : x \in AC_\theta^\alpha([0,T],\mathbb{R}^n),\ (x(0),x(T)) \in C,\ x(t) \in \Omega\ \forall t \in [0,T],\ x'(t) \in K \text{ qs}\}, \qquad (\mathrm{P}_\theta(\alpha))$$

onde $AC_\theta^\alpha([0,T],\mathbb{R}^n)$ denota a classe das funções $x \in AC([0,T],\mathbb{R}^n)$ tais que $\Lambda_\theta(x) \leq \alpha$, ou seja, ao problema P_θ adicionámos a restrição $\Lambda_\theta(x) \leq \alpha$.

Proposição 5.2.1 *O funcional Λ_θ é sci na topologia fraca de $W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração:
Consideremos o funcional $\overline{\Lambda}_\theta : L^1([0,T],\mathbb{R}^n) \to [-\infty,+\infty]$ definido por

$$\overline{\Lambda}_\theta(x) = \int_0^T \theta(|x(t)|)\,dt.$$

Seja $(x_i) \subseteq L^1([0,T],\mathbb{R}^n)$ uma sucessão fortemente convergente para $x \in L^1([0,T],\mathbb{R}^n)$. Pela Proposição 2.11.26 existe uma subsucessão de (x_i), que notamos ainda por (x_i), tal que

$$(x_i(t)) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} x(t) \quad \text{qs em } [0,T].$$

Como θ é uma função contínua em $[0,+\infty)$ então, para qualquer função $v \in L^1([0,T],\mathbb{R}^n)$, a função $t \to \theta(|v(t)|)$ é mensurável em $[0,T]$ (ver Proposição 2.7.15).

Por outro lado como θ é estritamente crescente em $[0,+\infty)$ então

$$\theta(r) \geq \theta(0) =: A \quad \forall r \in [0,+\infty).$$

Então $(\theta(x_i(\cdot)) - A)$ é uma sucessão de funções mensuráveis não-negativas.

Por hipótese a função θ é *sci* então

$$\theta(|x(t)|) \leq \liminf_{i\to\infty} \theta(|x_i(t)|) \quad \text{qs em } [0,T]$$

e portanto

$$\theta(|x(t)|) - A \leq \liminf_{i\to\infty} \theta(|x_i(t)|) - A = \liminf_{i\to\infty} (\theta(|x_i(t)|) - A) \quad \text{qs em } [0,T].$$

Então, pelo Lema de Fatou (Proposição 2.8.15), resulta que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \theta(|x(t)|)\,dt - AT &= \int_0^T (\theta(|x(t)|) - A)\,dt \leq \int_0^T \liminf_{i\to\infty} (\theta(|x_i(t)|) - A)\,dt \\
&\leq \liminf_{i\to\infty} \left(\int_0^T (\theta(|x_i(t)|) - A)\,dt\right) = \liminf_{i\to\infty} \left(\int_0^T \theta(|x_i(t)|)\,dt - AT\right) \\
&= \liminf_{i\to\infty} \int_0^T \theta(|x_i(t)|)\,dt - AT.
\end{aligned}$$

O que é equivalente a

$$\overline{\Lambda}_\theta(x) \leq \liminf_{i\to\infty} \overline{\Lambda}_\theta(x_i)$$

e mostra que o funcional $\overline{\Lambda}_\theta$ é *sci* na topologia forte de $L^1([0,T],\mathbb{R}^n)$.

Vimos na demonstração do Teorema 3.3.4 que aplicação $D : W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n) \to L^1([0,T],\mathbb{R}^n)$ definida por

$$D(x) = x'$$

é contínua (por ser uma função linear limitada).

Como $\overline{\Lambda}_\theta$ é *sci*, pela Proposição 2.17.5, o conjunto

$$\left\{v \in L^1([0,T],\mathbb{R}^n) : \overline{\Lambda}_\theta(v) \le \lambda\right\} = \overline{\Lambda}_\theta{}^{-1}([-\infty,\lambda])$$

é fechado para cada $\lambda \ge 0$. Então o conjunto

$$D^{-1}\left(\overline{\Lambda}_\theta{}^{-1}([-\infty,\lambda])\right) = \left(\overline{\Lambda}_\theta \circ D\right)^{-1}([-\infty,\lambda]) = \left\{v \in W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n) : \overline{\Lambda}_\theta(D(v)) \le \lambda\right\},$$

por ser a imagem inversa de um conjunto fechado por uma função contínua, é fechado.

Isto, pela Proposição 2.17.5, significa que $\Lambda_\theta = \overline{\Lambda}_\theta \circ D$ é *sci* na topologia forte de $W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n)$.

Por outro lado, como a função θ é convexa então, para qualquer $\lambda \in [0,1]$ e quaisquer $u, v \in W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n)$, temos

$$\begin{aligned}
\Lambda_\theta((\lambda u + (1-\lambda)v)) &= \int_0^T \theta\,|\lambda u'(t) + (1-\lambda)v'(t)|\,dt \\
&\le \lambda \int_0^T \theta\,|u'(t)|\,dt + (1-\lambda)\int_0^T \theta\,|v'(t)|\,dt \\
&= \lambda\Lambda_\theta(u) + (1-\lambda)\Lambda_\theta(v),
\end{aligned}$$

pelo que Λ_θ é uma função convexa.

O espaço $W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n)$ é localmente convexo (Proposição 2.5.6). Assim, pela Proposição 2.17.10, podemos afirmar que Λ_θ é *sci* na topologia fraca de $W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n)$.■

Teorema 5.2.2 *Suponhamos que se verificam as hipóteses básicas (i)-(v). Então para qualquer α suficientemente grande, o problema $P_\theta(\alpha)$ admite uma solução x^α.*

Demonstração:

Pela hipótese básica (v) existe uma função $\bar{x}$ admissível para o problema (P) e tal que $\Lambda(\bar{x}) \in \mathbb{R}$. Digamos que

$$\Lambda(\bar{x}) = \mu.$$

Dado que θ é estritamente crescente e $|\bar{x}'(t)| \le |\bar{x}'|_{L^\infty([0,T],\mathbb{R}^n)}$ quase sempre em $[0,T]$ (ver Proposição 2.11.15), temos

$$\Lambda_\theta(\bar{x}) = \int_0^T \theta(|\bar{x}'(t)|)\,dt \le \int_0^T \theta\left(|\bar{x}'|_{L^\infty([0,T],\mathbb{R}^n)}\right)dt = T\,\theta\left(|\bar{x}'|_{L^\infty([0,T],\mathbb{R}^n)}\right),$$

pelo que, para cada α suficientemente grande, temos

$$\Lambda_\theta(\bar{x}) = \int_0^T \theta(|\bar{x}'(t)|)\,dt \le \alpha.$$

Fixemos α com esta propriedade.

A desigualdade anterior implica que $\bar{x}$ é uma função admissível para o problema $P_\theta(\alpha)$. Então, para mostrar a existência de uma solução x^α não é necessário considerar toda a classe $AC_\theta^\alpha([0,T],\mathbb{R}^n)$, basta considerar o conjunto de subnível

$$\Gamma_\theta(\bar{x}) := \left\{x \in AC_\theta^\alpha([0,T],\mathbb{R}^n) : (x(0), x(T)) \in C,\ x(t) \in \Omega\ \forall t \in [0,T],\ x'(t) \in K \text{ qs},\ \Lambda(x) \le \mu\right\}.$$

O qual é não-vazio, visto que $\bar{x} \in \Gamma_\theta(\bar{x})$.

Mostremos agora que $\Gamma_\theta(\bar{x})$ é um subconjunto de $W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n)$ fracamente sequencialmente relativamente compacto, isto é, que qualquer sucessão em $\Gamma_\theta(\bar{x})$ contém uma subsucessão fracamente convergente em $W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n)$.

Seja (x_i) uma qualquer sucessão em $\Gamma_\theta(\bar{x})$, isto é, uma sucessão em $W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n)$ verificando

$$(x_i(0), x_i(T)) \in C, \quad x_i(t) \in \Omega \ \ \forall t \in [0,T], \quad x_i'(t) \in K \text{ qs} \tag{5.1}$$

$$\Lambda_\theta(x_i) = \int_0^T \theta(|x_i'(t)|)\, dt \leq \alpha \tag{5.2}$$

e

$$\Lambda(x_i) \leq \mu \tag{5.3}$$

para qualquer $i \in \mathbb{N}$.

De (5.2) resulta que a sucessão (x_i') é equiabsolutamente integrável (Proposição 2.11.35).

Por outro lado, dadas as condições em θ, existe $N \geq 0$ tal que $\theta(r) \geq r$ sempre que $r \geq N$.

Fixemos $i \in \mathbb{N}$.

Seja E^* o subconjunto de $[0,T]$ onde $|x_i'(t)| \geq N$ e seja $E := [0,T] \setminus E^*$. Temos

$$\begin{aligned} |x_i'|_{L^1([0,T],\mathbb{R}^n)} &= \int_0^T |x_i'(t)|\, dt = \int_{E^*} |x_i'(t)|\, dt + \int_E |x_i'(t)|\, dt \leq \int_{E^*} \theta(|x_i'(t)|)\, dt + \int_E N dt \\ &\leq \int_0^T \theta(|x_i'(t)|)\, dt + \int_0^T N dt \end{aligned}$$

pelo que

$$|x_i'|_{L^1([0,T],\mathbb{R}^n)} \leq \alpha + T\,N, \tag{5.4}$$

o que significa, dado que i é qualquer, que a sucessão (x_i') é limitada em $L^1([0,T],\mathbb{R}^n)$. Assim, pelo Teorema de Dunford-Pettis (Proposição 2.11.34), podemos afirmar que existem uma subsucessão de (x_i'), ainda notada por (x_i'), e uma função $v \in L^1([0,T],\mathbb{R}^n)$ tais que $(x_i') \rightharpoonup v$ em $L^1([0,T],\mathbb{R}^n)$, isto é, temos

$$\left(\int_0^T \langle x_i'(t), \varphi(t) \rangle\, dt \right) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \langle v(t), \varphi(t) \rangle\, dt \qquad \forall \varphi \in L^\infty([0,T],\mathbb{R}^n), \tag{5.5}$$

donde resulta que

$$\left(\int_0^T x_i'(t)\, dt \right) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T v(t)\, dt$$

e

$$\left(\int_0^t x_i'(s)\, ds \right) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^t v(s)\, ds \qquad \forall t \in [0,T]. \tag{5.6}$$

A sucessão (x_i) é equicontínua. De facto, uma vez que (x_i') é equiabsolutamente integrável, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\int_E |x_i'(t)|\, dt \leq \varepsilon$$

para cada i em $\mathbb{N}$ e qualquer que seja o subconjunto mensurável E de $[0,T]$ com $m(E) \leq \delta$. Então, se $|t'' - t'| \leq \delta$, temos

$$|x_i(t'') - x_i(t')| = \left| x_i(0) + \int_0^{t''} x_i'(s)\, ds - x_i(0) - \int_0^{t'} x_i'(s)\, ds \right| = \left| \int_{t'}^{t''} x_i'(s)\, ds \right| \leq \int_{t'}^{t''} |x_i'(s)|\, ds \leq \varepsilon,$$

para cada $i \in \mathbb{N}$.

Como, pela hipótese (iv), pelo menos um dos conjuntos C_x ou C_y é compacto então pelo menos uma das sucessões $(x_i(0))$, $(x_i(T))$ é limitada. Suponhamos, sem perda de generalidade, que a sucessão $(x_i(0))$ é limitada (isto é, existe $M > 0$ tal que $|x_i(0)| \leq M$ $\forall i \in \mathbb{N}$), então admite uma subsucessão, ainda notada $(x_i(0))$, convergente para um ponto x_0.

A sucessão (x_i) é também equilimitada. Com efeito, atendendo a que a sucessão $(x_i(0))$ é limitada e a (5.4), temos para cada $i \in \mathbb{N}$ e para cada $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned} |x_i(t)| &= \left| x_i(0) + \int_0^t x_i'(s)\, ds \right| \leq |x_i(0)| + \int_0^t |x_i'(s)|\, ds \leq M + \int_0^T |x_i'(s)|\, ds \\ &= M + |x_i'|_{L^1([0,T],\mathbb{R}^n)} \leq M + \alpha + TN \end{aligned} \tag{5.7}$$

Assim, pelo Teorema de Ascoli-Arzelá (Proposição 2.11.30), existe uma subsucessão de (x_i), que notaremos ainda por (x_i), que converge uniformemente em $[0,T]$ para uma função contínua x, isto é, temos

$$\left(\sup_{t\in[0,T]} |x_i(t) - x(t)| \right) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{5.8}$$

e consequentemente, temos também a convergência pontual

$$(x_i(t)) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} x(t) \qquad \forall t \in [0,T]. \tag{5.9}$$

A convergência,

$$\begin{cases} (x_i) \to x & \text{uniformemente em } [0,T] & (\text{por } (5.8)) \\ (x_i') \rightharpoonup v & (\text{fracamente}) \text{ em } L^1([0,T],\mathbb{R}^n) & (\text{por } (5.5)) \end{cases}$$

implica que $x \in W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n)$, $x' = v$ quase sempre em $[0,T]$ e $(x_i) \rightharpoonup x$ (fracamente) em $W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n)$.

De facto, atendendo a que para cada $i \in \mathbb{N}$, x_i é absolutamente contínua, temos

$$x_i(t) = x_i(0) + \int_0^t x_i'(s)\, ds \qquad \forall i \in \mathbb{N},\ \text{qs em } [0,T].$$

Daqui, atendendo a (5.6) e a que $(x_i(0)) \to x_0$, resulta que

$$x(t) = \lim_{i\to\infty} x_i(t) = \lim_{i\to\infty} \left(x_i(0) + \int_0^t x_i'(s)\, ds \right) = x_0 + \int_0^t v(s)\, ds \quad \forall t \in [0,T],$$

o que significa que x é absolutamente contínua e $x'(t) = v(t)$ para quase todo $t \in [0,T]$ (ver Proposição 2.14.11).

Falta então ver que $(x_i) \rightharpoonup x$ em $W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n)$, isto é, que

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad \left(\int_0^T \langle x_i(t), \varphi(t) \rangle\, dt \right) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \langle x(t), \varphi(t) \rangle\, dt, \quad \forall \varphi \in L^\infty([0,T],\mathbb{R}^n) \\ &\text{(ii)} \quad \left(\int_0^T \langle x_i'(t), \varphi(t) \rangle\, dt \right) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \langle x'(t), \varphi(t) \rangle\, dt, \quad \forall \varphi \in L^\infty([0,T],\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Como temos (5.5) e $x'(t) = v(t)$ para quase todo $t \in [0,T]$ então verifica-se (ii).

Por outro lado, pela Desigualdade de Hölder (Proposição 2.11.16) e por (5.8), podemos escrever

$$\begin{aligned}
0 \leq \left| \int_0^T \langle x_i(t) - x(t), \varphi(t) \rangle \, dt \right| &\leq \int_0^T \left| \langle x_i(t) - x(t), \varphi(t) \rangle \right| dt \\
&\leq |x_i - x|_{L^1([0,T],\mathbb{R}^n)} |\varphi|_{L^\infty([0,T],\mathbb{R}^n)} \\
&= |\varphi|_{L^\infty([0,T],\mathbb{R}^n)} \int_0^T |x_i(t) - x(t)| \, dt \\
&\leq |\varphi|_{L^\infty([0,T],\mathbb{R}^n)} \int_0^T \sup_{t \in [0,T]} |x_i(t) - x(t)| \, dt \\
&= T |\varphi|_{L^\infty([0,T],\mathbb{R}^n)} \sup_{t \in [0,T]} |x_i(t) - x(t)| \underset{i \to \infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

o que significa que também se verifica (i).

Ficou assim provado que se $(x_i) \subset \Gamma_\theta(\bar{x})$ então existe uma função $x \in W^{1,1}([0,T], \mathbb{R}^n)$ tal que, passando se necessário a uma subsucessão, $(x_i) \rightharpoonup x$ em $W^{1,1}([0,T], \mathbb{R}^n)$.

Note-se que a convergência pontual de (x_i) para x juntamente com as hipóteses básicas em C e Ω implicam, respectivamente, que

$$(x(0), x(T)) \in C, \quad x(t) \in \Omega \ \ \forall t \in [0,T].$$

Por outro lado, dado que $(x_i) \rightharpoonup x$ em $W^{1,1}([0,T], \mathbb{R}^n)$ então, pelas Proposições 2.12.10 e 2.11.28, e passando se necessário a uma subsucessão, $(x_i) \to x$ em medida em $[0,T]$ o que, juntamente com a convergência fraca de (x_i') para x' em $L^1([0,T], \mathbb{R}^n)$ e as hipóteses básicas em K, implica [3]

$$x'(t) \in K \ \text{ qs.}$$

Mostremos que o funcional $\Lambda : W^{1,1}([0,T], \mathbb{R}^n) \to [-\infty, +\infty]$ dado por

$$\Lambda(x) := \int_0^T L(x(t), x'(t)) \, dt$$

é limitado inferiormente em $\Gamma_\theta(\bar{x})$.

Seja $x \in \Gamma_\theta(\bar{x})$. Por (5.7) temos

$$|x(t)| \leq M + \alpha + TN \quad \forall t \in [0,T].$$

Assim, pela hipótese (ii2), existe uma constante $\eta \in \mathbb{R}$ tal que, para qualquer $x \in \Gamma_\theta(\bar{x})$,

$$L(x(t), x'(t)) \geq \eta \ \text{ qs em } [0,T]$$

e portanto

$$\Lambda(x) = \int_0^T L(x(t), x'(t)) \, dt \geq \int_0^T \eta \, dt = \eta T > -\infty,$$

[3] Seja $G \subset \mathbb{R}$ um conjunto mensurável e com medida finita. Suponhamos que, para quase todo $\bar{t} \in G$, a multifunção $A : G \to \mathbb{R}^n$ tem valores fechados e que para cada $\bar{x} \in A(\bar{t})$ a multifunção $Q(\bar{t}, \cdot) : A(\bar{t}) \to \mathbb{R}^m$ tem valores fechados e convexos e verifica a seguinte propriedade:

$$Q(\bar{t}, \bar{x}) = \bigcap_{\delta > 0} \overline{\bigcup_{x \in \bar{x} + \delta B} Q(\bar{t}, x)}.$$

Sejam $x, x_k : G \to \mathbb{R}^n$ e $\xi, \xi_k : G \to \mathbb{R}^m$, $k \in \mathbb{N}$, funções mensuráveis tais que $\xi, \xi_k \in L^1(G, \mathbb{R}^m)$ e

$$x_k(t) \in A(t), \quad \xi_k(t) \in Q(t, x_k(t))$$

para qualquer $k \in \mathbb{N}$ e para quase todo $t \in G$, onde $(\xi_k) \rightharpoonup \xi$ (fracamente) em $L^1(G, \mathbb{R}^m)$ e $(x_k) \to x$ em medida em G quando $k \to \infty$. Então

$$x(t) \in A(t), \quad \xi(t) \in Q(t, x(t)) \ \text{ qs em } G.$$

Demonstração:
Ver [9], 10.6.i.

o que mostra que Λ é limitado inferiormente em $\Gamma_\theta(\bar{x})$.

Vejamos agora que o funcional Λ é *sci* na topologia fraca de $W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n)$, isto é, tem-se

$$\Lambda(x) \leq \liminf_{i\to\infty} \Lambda(x_i).$$

sempre que $(x_i) \rightharpoonup x$ em $W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n)$.

Seja $(x_i) \subset W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n)$ uma sucessão fracamente convergente para $x \in W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n)$. Então, tal como vimos acima, existe uma subsucessão de (x_i), não renumerada, tal que $(x_i) \to x$ em medida em $[0,T]$. Além disso, temos também $(x_i') \rightharpoonup x'$ em $L^1([0,T],\mathbb{R}^n)$.

Como, por (5.7), temos

$$|x_i(t)| \leq M + \alpha + TN \quad \forall i \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,T]$$

então, tal como vimos acima, temos

$$I := \liminf_{i\to\infty} \int_0^T L(x_i(t), x_i'(t))\,dt > -\infty.$$

Portanto, pela Proposição 2.24.4, concluimos que

$$\int_0^T L(x(t), x'(t))\,dt \leq \liminf_{i\to\infty} \int_0^T L(x_i(t), x_i'(t))\,dt,$$

o que mostra que o funcional Λ é *sci* na topologia fraca de $W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n)$.

Finalmente, seja $(x_i) \subset \Gamma_\theta(\bar{x})$ uma qualquer sucessão minimizante para Λ, isto é, tal que

$$\lim_{i\to\infty} \Lambda(x_i) = \inf\{\Lambda(x) : x \in \Gamma_\theta(\bar{x})\},$$

e seja

$$I := \inf\{\Lambda(x) : x \in \Gamma_\theta(\bar{x})\}.$$

Então temos

$$I \leq \Lambda(\bar{x}) = \mu < +\infty.$$

Por outro lado, temos também

$$I > -\infty,$$

pois Λ é limitado inferiormente no conjunto $\Gamma_\theta(\bar{x})$.

Dado que $\Gamma_\theta(\bar{x})$ é fracamente sequencialmente relativamente compacto, então existe uma função $x^\alpha \in W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n)$, tal que, passando se necessário a uma subsucessão, $(x_i) \rightharpoonup x^\alpha$ em $W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n)$. Além disso, sabemos que x^α satisfaz as condições

$$(x^\alpha(0), x^\alpha(T)) \in C, \quad x^\alpha(t) \in \Omega \ \ \forall t \in [0,T], \quad x^{\alpha\prime}(t) \in K \ \text{ qs.}$$

Por outro lado,

$$\Lambda_\theta(x^\alpha) = \int_0^T \theta(|x^{\alpha\prime}(t)|)\,dt \leq \alpha.$$

De facto, pela Proposição 5.2.1, Λ_θ é *sci* na topologia fraca de $W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n)$, pelo que

$$\Lambda_\theta(x^\alpha) \leq \liminf_{i\to\infty} \int_0^T \theta(|x_i'(t)|)\,dt \leq \alpha.$$

Assim, x^α é uma função admissível para o problema $P_\theta(\alpha)$, e atendendo a que Λ é *sci* na topologia fraca de $W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n)$ podemos escrever

$$-\infty < I \leq \Lambda(x^\alpha) \leq \liminf_{i\to\infty} \Lambda(x_i) = \lim_{i\to\infty} \Lambda(x_i) = I \leq \mu < +\infty,$$

donde se conclui que

$$\Lambda(x^\alpha) = I,$$

o que significa que x^α é uma solução para o problema $P_\theta(\alpha)$.■

Seja

$$V_\theta(\alpha) := \inf\{\Lambda(x) : x \in AC_\theta^\alpha([0,T],\mathbb{R}^n),\ (x(0),x(T)) \in C,\ x(t) \in \Omega\ \forall t \in [0,T],\ x'(t) \in K \text{ qs}\}.$$

Então, sob as hipóteses do Teorema 5.2.2, temos a seguinte

Proposição 5.2.3 *(a) Para qualquer valor de α suficientemente grande, $V_\theta(\alpha)$ é finito.*

(b) Sempre que $V_\theta(\alpha)$ é finito, o ínfimo definido por $V_\theta(\alpha)$ é atingido.

(c) A função $V_\theta(\cdot)$ é sci.

Demonstração:
(a) Na demonstração do Teorema 5.2.2 vimos que se

$$\alpha \geq T\,\theta\left(|\bar{x}'|_{L^\infty([0,T],\mathbb{R}^n)}\right),$$

então o problema $P_\theta(\alpha)$ admite solução x^α, isto é,

$$\Lambda(x^\alpha) := \min\{\Lambda(x) : x \in AC_\theta^\alpha([0,T],\mathbb{R}^n),\ (x(0),x(T)) \in C,\ x(t) \in \Omega\ \forall t \in [0,T],\ x'(t) \in K \text{ qs}\},$$

e que além disso,

$$-\infty < \Lambda(x^\alpha) \leq \Lambda(\bar{x}) < +\infty,$$

onde $\bar{x}$ é a função lipschitziana admissível para o problema (P), que existe pela hipótese básica (v).

Portanto, podemos afirmar que para α suficientemente grande,

$$V_\theta(\alpha) = \Lambda(x^\alpha)$$

é finito.

(b) Suponhamos que α é tal que

$$I(\alpha) := \inf\{\Lambda(x) : x \in AC_\theta^\alpha([0,T],\mathbb{R}^n),\ (x(0),x(T)) \in C,\ x(t) \in \Omega\ \forall t \in [0,T],\ x'(t) \in K \text{ qs}\}$$

é finito. Então seguindo a demonstração do Teorema 5.2.2, com $\Gamma_\theta(\bar{x})$ substituido, por exemplo, por

$$\Gamma_\theta(\alpha) := \{x \in AC_\theta^\alpha([0,T],\mathbb{R}^n) : (x(0),x(T)) \in C,\ x(t) \in \Omega\ \forall t \in [0,T],\ x'(t) \in K \text{ qs},\ \Lambda(x) \leq I(\alpha)+1\},$$

podemos concluir que existe uma função x^α tal que

$$\Lambda(x^\alpha) = \min\{\Lambda(x) : x \in AC_\theta^\alpha([0,T],\mathbb{R}^n),\ (x(0),x(T)) \in C,\ x(t) \in \Omega\ \forall t \in [0,T],\ x'(t) \in K \text{ qs}\}$$

e

$$V_\theta(\alpha) = \Lambda(x^\alpha) \in \mathbb{R},$$

pelo que o ínfimo definido por $V_\theta(\alpha)$ é atingido.

(c) Vamos mostrar que se $(\alpha_i) \subseteq \mathbb{R}$ é uma sucessão convergente para α, então

$$V_\theta(\alpha) \leq \liminf_{i\to\infty} V_\theta(\alpha_i).$$

Se existe $\bar{i}$ tal que para $i \geq \bar{i}$, se tem $V_\theta(\alpha_i) = +\infty$ nada há a provar. Suponhamos então que para qualquer i bastante grande, $V_\theta(\alpha_i)$ é finito (e vamos pensar em (α_i) como sendo a sucessão cujos termos verificam esta condição). Neste caso, por (b), qualquer que seja o $i \in \mathbb{N}$, o problema $P_\theta(\alpha_i)$ admite uma solução x^{α_i}. Então temos

$$x^{\alpha_i} \in AC_\theta^{\alpha_i}([0,T],\mathbb{R}^n), \quad (x^{\alpha_i}(0), x^{\alpha_i}(T)) \in C, \quad x^{\alpha_i}(t) \in \Omega \ \forall t \in [0,T], \quad x^{\alpha_i\prime}(t) \in K \text{ qs} \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

e

$$\Lambda(x^{\alpha_i}) = V_\theta(\alpha_i).$$

Por outro lado, a sucessão (α_i) é limitada por ser convergente. Assim, existe $N \geq 0$ tal que

$$|\alpha_i| \leq N \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Daqui resulta que

$$\Lambda_\theta(x^{\alpha_i}) = \int_0^T \theta(|x^{\alpha_i\prime}(t)|)\, dt \leq \alpha_i \leq N$$

e então podemos mostrar, usando o mesmo argumento que na Proposição 5.2.2, que a sucessão (x^{α_i}) admite uma subsucessão fracamente convergente para uma função $x \in W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n)$, e que além disso, x satisfaz as condições

$$(x(0), x(T)) \in C, \quad x(t) \in \Omega \ \ \forall t \in [0,T], \quad x'(t) \in K \text{ qs}.$$

Por outro lado, Λ_θ é um funcional *sci* na topologia fraca de $W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n)$. Portanto, temos

$$\Lambda_\theta(x) \leq \liminf_{i\to\infty} \Lambda_\theta(x^{\alpha_i}) \leq \liminf_{i\to\infty} \alpha_i = \alpha$$

pelo que x é uma função admissível para o problema $P_\theta(\alpha)$.

Finalmente, uma vez que também o funcional Λ é *sci* na topologia fraca de $W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n)$, temos

$$V_\theta(\alpha) \leq \Lambda(x) \leq \liminf_{i\to\infty} \Lambda(x^{\alpha_i}) = \liminf_{i\to\infty} V_\theta(\alpha_i)$$

o que mostra o pretendido.■

No que segue vamos precisar de utilizar os subgradientes proximais, cuja teoria básica se encontra em anexo. A última proposição mostra-nos que $V_\theta(\cdot)$ é *sci*; assim, pela Proposição 5.4.10 abaixo, existem subgradientes proximais de $V_\theta(\cdot)$ próximo de cada ponto α.

Proposição 5.2.4 *Se ξ é um subgradiente proximal de $V_\theta(\cdot)$ em α então $\xi \leq 0$.*

Demonstração:

Comecemos por notar que se $\alpha_1 < \alpha_2$ então $AC_\theta^{\alpha_1} \subseteq AC_\theta^{\alpha_2}$, pelo que $V_\theta(\alpha_1) \geq V_\theta(\alpha_2)$ (o que significa que V_θ é decrescente).

Suponhamos que ξ é um subgradiente proximal de $V_\theta(\cdot)$ em α. Por definição de subgradiente proximal, existem $\sigma > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que, para qualquer $\lambda \in \alpha + \varepsilon B$, temos

$$V_\theta(\lambda) - V_\theta(\alpha) + \sigma|\lambda - \alpha|^2 \geq \xi(\lambda - \alpha). \tag{5.10}$$

Suponhamos, com vista a um absurdo, que $\xi > 0$ e que se verifica (5.10).

Seja $\lambda \in \alpha + \varepsilon B$, $\lambda > \alpha$. De (5.10) sai que

$$\xi \leq \frac{V_\theta(\lambda) - V_\theta(\alpha)}{\lambda - \alpha} + \sigma \frac{|\lambda - \alpha|^2}{\lambda - \alpha} = \frac{V_\theta(\lambda) - V_\theta(\alpha)}{\lambda - \alpha} + \sigma |\lambda - \alpha| .$$

Então

$$\begin{aligned} 0 &< \limsup_{\lambda \to \alpha} \xi \leq \limsup_{\lambda \to \alpha} \left(\frac{V_\theta(\lambda) - V_\theta(\alpha)}{\lambda - \alpha} + \sigma |\lambda - \alpha| \right) \\ &\leq \limsup_{\lambda \to \alpha} \frac{V_\theta(\lambda) - V_\theta(\alpha)}{\lambda - \alpha} + \limsup_{\lambda \to \alpha} \sigma |\lambda - \alpha| = \limsup_{\lambda \to \alpha} \frac{V_\theta(\lambda) - V_\theta(\alpha)}{\lambda - \alpha}, \end{aligned}$$

pelo que

$$\limsup_{\lambda \to \alpha} \frac{V_\theta(\lambda) - V_\theta(\alpha)}{\lambda - \alpha} > 0.$$

Isto significa que existe $\lambda > \alpha$ suficientemente próximo de α tal que

$$\frac{V_\theta(\lambda) - V_\theta(\alpha)}{\lambda - \alpha} > 0,$$

portanto

$$V_\theta(\lambda) - V_\theta(\alpha) > 0 \Leftrightarrow V_\theta(\lambda) > V_\theta(\alpha),$$

o que contradiz o facto de V_θ ser decrescente.■

Definição 5.2.5 *Diremos que a função $V_\theta(\cdot)$ é **definitivamente constante** se existe $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ tal que*

$$V_\theta(\alpha) = V_\theta(\alpha_0) \qquad \forall \alpha \geq \alpha_0.$$

Proposição 5.2.6 *Suponhamos que $V_\theta(\cdot)$ é definitivamente constante, isto é:*

$$\exists \alpha_* : V_\theta(\alpha) = V_\theta(\alpha_*), \ \forall \alpha \geq \alpha_*.$$

Seja

$$\alpha_0 := \inf \{\alpha_1 \leq \alpha_* : V_\theta(\alpha) = V_\theta(\alpha_*), \ \forall \alpha \geq \alpha_1\}.$$

Então

$$V_\theta(\alpha) = V_\theta(\alpha_0) \qquad \forall \alpha \geq \alpha_0$$

e

$$\partial^\pi V_\theta(\alpha) = \{0\} \subseteq \partial^\pi V_\theta(\alpha_0) \subseteq (-\infty, 0] \qquad \forall \alpha > \alpha_0.$$

Demonstração:
Comecemos por mostrar que

$$V_\theta(\alpha) = V_\theta(\alpha_0) \qquad \forall \alpha \geq \alpha_0.$$

Seja $(\alpha_i) \to \alpha_0$ tal que, para cada $i \in \mathbb{N}$ fixado, $\alpha_i \leq \alpha_*$ e $V_\theta(\alpha) = V_\theta(\alpha_*)$ para qualquer $\alpha \geq \alpha_i$. Como $V_\theta(\cdot)$ é *sci* então

$$V_\theta(\alpha_0) \leq \liminf_{i \to \infty} V_\theta(\alpha_i) = \liminf_{i \to \infty} \ V_\theta(\alpha_*) = V_\theta(\alpha_*). \tag{5.11}$$

Por outro lado, como $V_\theta(\cdot)$ é decrescente e $\alpha_0 \leq \alpha_*$, temos

$$V_\theta(\alpha_0) \geq V_\theta(\alpha_*),$$

o que, juntamente com (5.11), implica

$$V_\theta(\alpha_0) = V_\theta(\alpha_*).$$

Consideremos agora $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_*)$. Como $\alpha > \alpha_0$ então $V_\theta(\alpha) \leq V_\theta(\alpha_0)$ e como $\alpha < \alpha_*$ então $V_\theta(\alpha) \geq V_\theta(\alpha_*)$, pelo que

$$V_\theta(\alpha_0) = V_\theta(\alpha).$$

Assim mostrámos que

$$V_\theta(\alpha_0) = V_\theta(\alpha) = V_\theta(\alpha_*) \quad \forall \alpha \in [\alpha_0, \alpha_*],$$

o que, por definição de α^*, implica

$$V_\theta(\alpha_0) = V_\theta(\alpha) \quad \forall \alpha \geq \alpha_0.$$

Mostremos agora que

$$\{0\} \subseteq \partial^\pi V_\theta(\alpha_0) \subseteq (-\infty, 0]. \tag{5.12}$$

Seja $\varepsilon > 0$. Para qualquer $\lambda \in \alpha_0 + \varepsilon B$, $\lambda < \alpha_0$, temos $V_\theta(\lambda) \geq V_\theta(\alpha_0)$, pelo que

$$V_\theta(\lambda) - V_\theta(\alpha_0) + \sigma|\lambda - \alpha_0|^2 \geq 0 = 0(\lambda - \alpha_0) \quad \forall \sigma > 0. \tag{5.13}$$

Por outro lado, se $\lambda \in \alpha_0 + \varepsilon B$ é tal que $\lambda \geq \alpha_0$, então $V_\theta(\lambda) = V_\theta(\alpha_0)$, e portanto

$$V_\theta(\lambda) - V_\theta(\alpha_0) + \sigma|\lambda - \alpha_0|^2 = \sigma|\lambda - \alpha_0|^2 \geq 0 = 0(\lambda - \alpha_0) \quad \forall \sigma > 0. \tag{5.14}$$

De (5.13) e (5.14) concluimos que

$$\{0\} \subseteq \partial^\pi V_\theta(\alpha_0).$$

Além disso, pela Proposição 5.2.4, temos

$$\partial^\pi V_\theta(\alpha_0) \subseteq (-\infty, 0].$$

Então está provado (5.12).

Finalmente mostremos que

$$\partial^\pi V_\theta(\alpha) = \{0\}.$$

Seja $\alpha > \alpha_0$. Então existe $\delta > 0$ tal que

$$\alpha + \delta B \subseteq (\alpha_0, +\infty).$$

Para qualquer $\lambda \in \alpha + \delta B$ temos

$$V_\theta(\lambda) - V_\theta(\alpha) + \sigma|\lambda - \alpha|^2 = \sigma|\lambda - \alpha|^2 \geq 0 = 0(\lambda - \alpha) \quad \forall \sigma > 0.$$

Então

$$\{0\} \subseteq \partial^\pi V_\theta(\alpha).$$

Suponhamos agora que $\xi < 0$ é um qualquer outro subgradiente proximal de $V_\theta(\cdot)$ em α. Por definição, existem $\sigma > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$V_\theta(\lambda) - V_\theta(\alpha) + \sigma|\lambda - \alpha|^2 \geq \xi(\lambda - \alpha) \quad \forall \lambda \in \alpha + \varepsilon B.$$

Então se $\lambda \in (\alpha + \varepsilon B) \cap [\alpha_0, +\infty)$ e $\lambda < \alpha$, temos

$$-\sigma |\lambda - \alpha| \leq \xi < 0,$$

pelo que fazendo $\lambda \to \alpha$ obtemos

$$0 \leq \xi < 0,$$

o que é absurdo. Pela Proposição 5.2.4, concluimos então que

$$\partial^\pi V_\theta(\alpha) \subseteq \{0\},$$

o que completa a demonstração.■

Teorema 5.2.7 *A função $V_\theta(\cdot)$ é definitivamente constante se e só se existe uma solução para o problema*

$$\min\{\Lambda(x) : x \in AC_\theta([0,T], \mathbb{R}^n), \quad (x(0), x(T)) \in C, \quad x(t) \in \Omega \ \ \forall t \in [0,T], \quad x'(t) \in K \ qs\}, \qquad (\mathrm{P}_\theta)$$

onde $AC_\theta([0,T], \mathbb{R}^n)$ denota a classe de todas as funções $x \in AC([0,T], \mathbb{R}^n)$ tais que $\Lambda_\theta(x) < +\infty$.

Demonstração:
Suponhamos que $V_\theta(\cdot)$ é definitivamente constante.

Como, pela Proposição 5.2.3, para α suficientemente grande $V_\theta(\alpha)$ é finito, podemos afirmar que existe $\alpha_0 > 0$ tal que $V_\theta(\alpha_0)$ é finito e

$$V_\theta(\alpha) = V_\theta(\alpha_0) \quad \forall \alpha \geq \alpha_0.$$

Seja x^{α_0} uma solução do problema $P_\theta(\alpha_0)$ (a qual existe pela Proposição 5.2.3). Então x^{α_0} é admissível para P_θ. Mostremos que x^{α_0} é uma solução de P_θ. Suponhamos que não. Então existe uma função $x \in W^{1,1}([0,T], \mathbb{R}^n)$ verificando

$$\Lambda_\theta(x) = \int_0^T \theta |x'(t)| \, dt < +\infty$$

e

$$(x(0), x(T)) \in C, \quad x(t) \in \Omega \ \ \forall t \in [0,T], \quad x'(t) \in K \text{ qs},$$

tal que

$$\Lambda(x) < \Lambda(x^{\alpha_0}).$$

Seja $\alpha > \alpha_0$ tal que

$$\Lambda_\theta(x) < \alpha$$

(este α existe pois $\Lambda_\theta(x) < +\infty$). Então temos

$$V_\theta(\alpha) \leq \Lambda(x) < \Lambda(x^{\alpha_0}) = V_\theta(\alpha_0),$$

o que contradiz a hipótese de $V_\theta(\cdot)$ ser constante para $\alpha > \alpha_0$.

Suponhamos agora que o problema P_θ admite uma solução x^∞.

Seja α_0 suficientemente grande tal que

$$V_\theta(\alpha_0) \in \mathbb{R}$$

e

$$\Lambda_\theta(x^\infty) = \int_0^T \theta \left| x^{\infty\prime}(t) \right| dt \leq \alpha_0.$$

Como $V_\theta(\alpha_0)$ é finito, existe uma solução x^{α_0} para o problema $P_\theta(\alpha_0)$ (ver Proposição 5.2.3). A função x^{α_0} é admissível para P_θ. Assim,

$$\Lambda(x^\infty) \leq \Lambda(x^{\alpha_0}). \tag{5.15}$$

Por outro lado, dado que x^∞ é admissível para $P_\theta(\alpha_0)$, podemos também escrever

$$\Lambda(x^{\alpha_0}) \leq \Lambda(x^\infty). \tag{5.16}$$

De (5.15) e (5.16) resulta que

$$V_\theta(\alpha_0) = \Lambda(x^{\alpha_0}) = \Lambda(x^\infty). \tag{5.17}$$

Fixemos $\alpha > \alpha_0$ (o que implica $V_\theta(\alpha) \leq V_\theta(\alpha_0) \in \mathbb{R}$).
Como $V_\theta(\alpha)$ é finito então, pela Proposição 5.2.3, o problema $P_\theta(\alpha)$ admite uma solução x^α.
Seguindo o mesmo raciocínio que acima, podemos concluir que

$$V_\theta(\alpha) = \Lambda(x^\alpha) = \Lambda(x^\infty). \tag{5.18}$$

De (5.17) e (5.18) resulta

$$V_\theta(\alpha) = \Lambda(x^\alpha) = \Lambda(x^\infty) = \Lambda(x^{\alpha_0}) = V_\theta(\alpha_0),$$

o que mostra que $V_\theta(\cdot)$ é definitivamente constante.■

5.2.3 O resultado principal

Estamos agora em condições de mostrar a existência de solução para o problema

$$\min\{\Lambda(x) : x \in AC([0,T], \mathbb{R}^n),\ \ (x(0), x(T)) \in C,\ \ x(t) \in \Omega\ \forall t \in [0,T],\ \ x'(t) \in K \text{ qs}\} \tag{P}$$

onde

$$\Lambda(x) := \int_0^T L(x(t), x'(t))\, dt.$$

Teorema 5.2.8 *Suponhamos que se verificam as hipóteses básicas, bem como (H1) e (H2). Então (P) admite uma solução. Além disso, qualquer solução $\widetilde{x}$ é lipschitziana e verifica*

$$L(\widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)) - \langle \widetilde{x}'(t), p(t)\rangle = c \quad qs \tag{5.19}$$

onde c é uma constante e p é uma função mensurável tal que $p(t) \in \partial_v L(\widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t))$ qs.

Demonstração:
A demonstração divide-se em quatro partes:

- mostramos que $V_\theta(\cdot)$ é definitivamente constante, donde o problema P_θ admite uma solução $\widetilde{x}$ satisfazendo (5.19);
- mostramos que $\widetilde{x}$ é lipschitziana;
- mostramos que $\widetilde{x}$ é solução de (P);

finalmente,

- mostramos que qualquer outra solução do problema (P) é, tal como $\widetilde{x}$, lipschitziana e satisfaz (5.19).

Provemos que $V_\theta(\cdot)$ é definitivamente constante.

Atendendo à Proposição 5.4.12 basta mostrar que para α suficientemente grande, sempre que ζ é um subgradiente proximal de V_θ em α, temos $\zeta = 0$.

Fixemos α suficientemente grande tal que $V_\theta(\alpha)$ seja finito e V_θ admita um subgradiente proximal ζ em α.

Suponhamos, com vista a um absurdo, que $\zeta \neq 0$. Pela Proposição 5.2.4, os subgradientes proximais de $V_\theta(\cdot)$, quando existem, são não-positivos. Logo temos $\zeta = -r$, para algum $r > 0$.

Seja x^α uma solução de $P_\theta(\alpha)$, que existe pela Proposição 5.2.3; então

$$V_\theta(\alpha) = \Lambda(x^\alpha) \quad \text{e} \quad \Lambda_\theta(x^\alpha) \leq \alpha.$$

Queremos mostrar que $\Lambda_\theta(x^\alpha) = \alpha$.

Então suponhamos que $\Lambda_\theta(x^\alpha) < \alpha$. Para qualquer α' verificando

$$\Lambda_\theta(x^\alpha) < \alpha' < \alpha$$

(note-se que a desigualdade $\Lambda_\theta(x^\alpha) < \alpha'$ implica que x^α é uma função admissível para $P_\theta(\alpha')$ e portanto $V_\theta(\alpha') \leq \Lambda(x^\alpha)$), obtemos, por definição de V_θ e uma vez que V_θ é decrescente,

$$V_\theta(\alpha') \leq \Lambda(x^\alpha) = V_\theta(\alpha) \leq V_\theta(\alpha').$$

Pelo que

$$V_\theta(\alpha') = V_\theta(\alpha) \qquad \forall \alpha' \in (\Lambda_\theta(x^\alpha), \alpha],$$

o que significa que V_θ é constante no intervalo $(\Lambda_\theta(x^\alpha), \alpha]$.

Dado que $-r$, $r > 0$, é um subgradiente proximal de V_θ em α então, por definição, existem $\sigma > 0$ e $\delta > 0$ tais que para qualquer $\alpha' \in \alpha + \delta B$, temos

$$V_\theta(\alpha') - V_\theta(\alpha) + \sigma|\alpha' - \alpha|^2 \geq -r(\alpha' - \alpha).$$

Em particular, se $\alpha' \in (\Lambda_\theta(x^\alpha), \alpha] \cap (\alpha + \delta B)$ então $V_\theta(\alpha') = V_\theta(\alpha)$, pelo que a desigualdade anterior implica

$$\sigma|\alpha' - \alpha|^2 \geq -r(\alpha' - \alpha),$$

com $\alpha' - \alpha \leq 0$. Se $\alpha' \neq \alpha$ resulta que

$$0 < r \leq \sigma \frac{|\alpha' - \alpha|^2}{\alpha - \alpha'} = \sigma|\alpha' - \alpha|$$

e fazendo $\alpha' \to \alpha$, obtemos

$$0 < r \leq 0,$$

o que é absurdo.

Concluimos então que $\Lambda_\theta(x^\alpha) = \alpha$.

Vejamos agora que isto implica que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \text{ess}\, |x^{\alpha'}(t)| > \beta, \tag{5.20}$$

onde β é um qualquer número inferior a $\theta^{-1}(\alpha/T)$.

Para quase todo $t \in [0, T]$ temos (ver Proposição 2.11.15)

$$|x^{\alpha'}(t)| \leq |x^{\alpha'}|_{L^\infty([0,T],\mathbb{R}^n)}$$

e como θ é uma função estritamente crescente então

$$\theta(|x^{\alpha'}(t)|) \leq \theta\left(|x^{\alpha'}|_{L^\infty([0,T],\mathbb{R}^n)}\right) \quad \text{qs em } [0, T].$$

Daqui resulta que

$$\theta\left(|x^{\alpha\prime}|_{L^\infty([0,T],\mathbb{R}^n)}\right)T=\int_0^T\theta\left(|x^{\alpha\prime}|_{L^\infty([0,T],\mathbb{R}^n)}\right)dt\geq\int_0^T\theta\left(|x^{\alpha\prime}(t)|\right)dt=\Lambda_\theta\left(x^\alpha\right)=\alpha$$

e portanto

$$\theta\left(|x^{\alpha\prime}|_{L^\infty([0,T],\mathbb{R}^n)}\right)\geq\frac{\alpha}{T},$$

donde [4]

$$|x^{\alpha\prime}|_{L^\infty([0,T],\mathbb{R}^n)}\geq\theta^{-1}\left(\frac{\alpha}{T}\right),$$

o que mostra (5.20).

Note-se que como $\theta^{-1}(\alpha/T)\to+\infty$ quando $\alpha\to+\infty$, podemos tomar β arbitrariamente grande fazendo α suficientemente grande.

Por definição de subgradiente proximal, existem $\sigma>0$ e $\delta>0$ tais que

$$V_\theta(\alpha')-V_\theta(\alpha)+\sigma|\alpha'-\alpha|^2\geq-r(\alpha'-\alpha)\qquad\forall\alpha'\in\alpha+\delta B.$$

Atendendo a que x^α é uma solução para o problema $P_\theta(\alpha)$, temos $\Lambda(x^\alpha)=V_\theta(\alpha)$. Além disso, vimos que $\Lambda_\theta(x^\alpha)=\alpha$. Então substituindo na desigualdade anterior $V_\theta(\alpha)$ por $\Lambda(x^\alpha)$ e α por $\Lambda_\theta(x^\alpha)$, obtemos

$$V_\theta(\alpha')-\Lambda(x^\alpha)+\sigma|\alpha'-\Lambda_\theta(x^\alpha)|^2\geq-r(\alpha'-\Lambda_\theta(x^\alpha))\qquad\forall\alpha'\in\Lambda_\theta(x^\alpha)+\delta B.$$

Seja x uma função admissível para o problema P_θ tal que

$$\Lambda_\theta(x)\in\Lambda_\theta(x^\alpha)+\delta B.$$

Então, substituindo α' por $\Lambda_\theta(x)$, obtemos

$$\begin{aligned}&V_\theta(\Lambda_\theta(x))-\Lambda(x^\alpha)+\sigma|\Lambda_\theta(x)-\Lambda_\theta(x^\alpha)|^2\geq-r(\Lambda_\theta(x)-\Lambda_\theta(x^\alpha))\\ \Leftrightarrow\quad&\Lambda(x^\alpha)+r\Lambda_\theta(x^\alpha)\leq V_\theta(\Lambda_\theta(x))+r\Lambda_\theta(x)+\sigma|\Lambda_\theta(x)-\Lambda_\theta(x^\alpha)|^2\end{aligned}$$

e atendendo a que $V_\theta(\Lambda_\theta(x))\leq\Lambda(x)$ (pois x é admissível para o problema $P_\theta(\Lambda_\theta(x))$), temos

$$\begin{aligned}&\Lambda(x^\alpha)+r\Lambda_\theta(x^\alpha)\leq\Lambda(x)+r\Lambda_\theta(x)+\sigma|\Lambda_\theta(x)-\Lambda_\theta(x^\alpha)|^2\\ \Leftrightarrow\quad&\Lambda(x^\alpha)+r\Lambda_\theta(x^\alpha)+\sigma|\Lambda_\theta(x^\alpha)-\Lambda_\theta(x^\alpha)|^2\leq\Lambda(x)+r\Lambda_\theta(x)+\sigma|\Lambda_\theta(x)-\Lambda_\theta(x^\alpha)|^2.\end{aligned}$$

Podemos assim afirmar que existe uma constante $\sigma>0$ tal que se definirmos

$$f(x):=\Lambda(x)+r\Lambda_\theta(x)+\sigma|\Lambda_\theta(x)-\Lambda_\theta(x^\alpha)|^2,$$

obtemos

$$f(x^\alpha)\leq f(x)$$

para qualquer função x admissível para o problema P_θ e tal que $\Lambda_\theta(x)$ está suficientemente próximo de $\Lambda_\theta(x^\alpha)$.

Aplicando o Teorema 5.4.16, obtemos uma função integrável $\xi(\cdot)$ tal que

$$\xi(t)\in\partial_t L(x^\alpha(t),x^{\alpha\prime}(t))\quad\text{qs em }[0,T];$$

uma função mensurável $p(\cdot)$ tal que

$$p(t)\in\partial_v L(x^\alpha(t),x^{\alpha\prime}(t))\quad\text{qs em }[0,T];$$

[4] Se f é uma função real definida num intervalo I estritamente crescente (resp. estr. decrescente) e contínua (em I), então a função inversa, f^{-1}, existe e é também estritamente crescente (resp. estr. decrescente) e contínua (em $f(I)$).
Demonstração:
Ver [8], Teorema 22, pág. 318.

e uma constante c, tais que

$$L(x^\alpha(t), x^{\alpha\prime}(t)) - \langle x^{\alpha\prime}(t), p(t)\rangle + r\theta(|x^{\alpha\prime}(t)|) - r|x^{\alpha\prime}(t)|\,\theta'(|x^{\alpha\prime}(t)|) = c + \int_0^t \xi(\tau)\,d\tau \quad \text{qs em } [0,T]. \tag{5.21}$$

Como a função L não depende explicitamente da variável t então $\xi \equiv 0$ e portanto (5.21) reduz-se a

$$L(x^\alpha(t), x^{\alpha\prime}(t)) - \langle x^{\alpha\prime}(t), p(t)\rangle + r\theta(|x^{\alpha\prime}(t)|) - r|x^{\alpha\prime}(t)|\,\theta'(|x^{\alpha\prime}(t)|) = c \quad \text{qs.} \tag{5.22}$$

Donde, para algum $x_1 \in \Omega$, algum $v_1 \in K$ com $|v_1| > \beta$, e algum $p_1 \in \partial_v L(x_1, v_1)$, temos

$$L(x_1, v_1) - \langle v_1, p_1\rangle + r\theta(|v_1|) - r|v_1|\,\theta'(|v_1|) = c.$$

Deduzimos desta igualdade que

$$c \leq \sup_{\substack{x\in\Omega, v\in K\\ |v|>\beta}} \sup_{p\in\partial_v L(x,v)} \{L(x,v) - \langle v,p\rangle\} + r \sup_{\substack{x\in\Omega, v\in K\\ |v|>\beta}} \{\theta(|v|) - |v|\,\theta'(|v|)\}. \tag{5.23}$$

Como, para α suficientemente grande, $\bar{x}$ é admissível para o problema $P_\theta(\alpha)$ [5], segue que

$$\Lambda(x^\alpha) \leq \Lambda(\bar{x})$$

e portanto x^α pertence a $\Gamma(\bar{x})$. Por (H1), $|x^{\alpha\prime}(t)|$ é inferior a k num conjunto de medida positiva. Então por (5.22) vem

$$c \geq \inf_{\substack{x\in\Omega, v\in K\\ |v|<k}} \inf_{p\in\partial_v L(x,v)} \{L(x,v) - \langle v,p\rangle\} + r \inf_{\substack{x\in\Omega, v\in K\\ |v|<k}} \{\theta(|v|) - |v|\,\theta'(|v|)\}. \tag{5.24}$$

Pelas desigualdades (5.23) e (5.24) temos

$$\begin{aligned} 0 \leq\ & \sup_{\substack{x\in\Omega, v\in K\\ |v|>\beta}} \sup_{p\in\partial_v L(x,v)} \{L(x,v) - \langle v,p\rangle\} - \inf_{\substack{x\in\Omega, v\in K\\ |v|<k}} \inf_{p\in\partial_v L(x,v)} \{L(x,v) - \langle v,p\rangle\} + \\ & + r \sup_{\substack{x\in\Omega, v\in K\\ |v|>\beta}} \{\theta(|v|) - |v|\,\theta'(|v|)\} - r \inf_{\substack{x\in\Omega, v\in K\\ |v|<k}} \{\theta(|v|) - |v|\,\theta'(|v|)\} \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} & r\left[\inf_{\substack{x\in\Omega, v\in K\\ |v|<k}} \{\theta(|v|) - |v|\,\theta'(|v|)\} - \sup_{\substack{x\in\Omega, v\in K\\ |v|>\beta}} \{\theta(|v|) - |v|\,\theta'(|v|)\}\right] \\ \leq\ & \sup_{\substack{x\in\Omega, v\in K\\ |v|>\beta}} \sup_{p\in\partial_v L(x,v)} \{L(x,v) - \langle v,p\rangle\} - \inf_{\substack{x\in\Omega, v\in K\\ |v|<k}} \inf_{p\in\partial_v L(x,v)} \{L(x,v) - \langle v,p\rangle\}. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Para α, e portanto para β, suficientemente grande, o lado direito desta desigualdade é negativo pela hipótese (H2), enquanto que o termo dentro de parênteses do lado esquerdo é positivo (Lema 5.2.9 aplicado a θ). Segue que r é negativo, uma contradição que prova que $r = 0$.

Concluimos então que $V_\theta(\cdot)$ é definitivamente constante.

Portanto, podemos encontrar α suficientemente grande tal que $V_\theta(\alpha)$ é finito e $V_\theta(\lambda) = V_\theta(\alpha)\ \ \forall\lambda \geq \alpha$.

Seja x^α uma solução do problema $P_\theta(\alpha)$ (que existe pela Proposição 5.2.3).

Vamos mostrar que

$$V_\theta(\Lambda_\theta(x^\alpha)) = V_\theta(\alpha) = \Lambda(x^\alpha). \tag{5.26}$$

[5] Ver demonstração do Teorema 5.2.2.

Como x^α é uma solução de $P_\theta(\alpha)$, temos

$$\Lambda_\theta(x^\alpha) \leq \alpha, \qquad \Lambda(x^\alpha) = V_\theta(\alpha) \tag{5.27}$$

e

$$\Lambda(x^\alpha) \leq \Lambda(y) \text{ qualquer que seja a função } y \text{ admissível para } P_\theta(\alpha).$$

Se $\Lambda_\theta(x^\alpha) = \alpha$ evidentemente temos (5.26). Admitamos então que

$$\Lambda_\theta(x^\alpha) < \alpha.$$

A função x^α é admissível para o problema $P_\theta(\Lambda_\theta(x^\alpha))$.
Seja y uma qualquer outra função admissível para $P_\theta(\Lambda_\theta(x^\alpha))$. Então

$$\Lambda_\theta(y) \leq \Lambda_\theta(x^\alpha) < \alpha,$$

donde podemos concluir que y também é admissível para $P_\theta(\alpha)$. Logo temos

$$\Lambda(x^\alpha) \leq \Lambda(y),$$

o que mostra que x^α é solução de $P_\theta(\Lambda_\theta(x^\alpha))$, e portanto, por (5.27),

$$V_\theta(\Lambda_\theta(x^\alpha)) = \Lambda(x^\alpha) = V_\theta(\alpha),$$

como queriamos.

Note-se que de forma análoga podemos mostar que x^α é solução do problema $P_\theta(\alpha_*)$, qualquer que seja $\alpha_* \in (\Lambda_\theta(x^\alpha), \alpha)$, e portanto $V_\theta(\cdot)$ é constante em

$$[\Lambda_\theta(x^\alpha), +\infty).$$

Então, pela Proposição 5.2.6, tem-se

$$\{0\} \subseteq \partial^\pi V_\theta(\Lambda_\theta(x^\alpha)),$$

pelo que existem $\sigma > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$V_\theta(\lambda) - V_\theta(\Lambda_\theta(x^\alpha)) + \sigma|\lambda - \Lambda_\theta(x^\alpha)|^2 \geq 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda_\theta(x^\alpha) + \varepsilon B.$$

Por (5.26), $V_\theta(\Lambda_\theta(x^\alpha)) = \Lambda(x^\alpha)$, então

$$V_\theta(\lambda) - \Lambda(x^\alpha) + \sigma|\lambda - \Lambda_\theta(x^\alpha)|^2 \geq 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda_\theta(x^\alpha) + \varepsilon B.$$

Seja x uma função admissível para o problema P_θ tal que

$$\Lambda_\theta(x) \in \Lambda_\theta(x^\alpha) + \varepsilon B.$$

Então

$$V_\theta(\Lambda_\theta(x)) - \Lambda(x^\alpha) + \sigma|\Lambda_\theta(x) - \Lambda_\theta(x^\alpha)|^2 \geq 0$$

e como $V_\theta(\Lambda_\theta(x)) \leq \Lambda(x)$ (porque x é admissível para o problema $P_\theta(\Lambda_\theta(x))$), temos

$$\begin{aligned} & \Lambda(x) - \Lambda(x^\alpha) + \sigma|\Lambda_\theta(x) - \Lambda_\theta(x^\alpha)|^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \Lambda(x) + \sigma|\Lambda_\theta(x) - \Lambda_\theta(x^\alpha)|^2 \geq \Lambda(x^\alpha) + \sigma|\Lambda_\theta(x^\alpha) - \Lambda_\theta(x^\alpha)|^2, \end{aligned}$$

e portanto existe uma constante $\sigma > 0$ tal que se definirmos

$$f_0(x) := \Lambda(x) + \sigma|\Lambda_\theta(x) - \Lambda_\theta(x^\alpha)|^2,$$

obtemos

$$f_0(x^\alpha) \le f_0(x),$$

para qualquer função x admissível para o problema P_θ e tal que $\Lambda_\theta(x)$ está suficientemente próximo de $\Lambda_\theta(x^\alpha)$. Assim, pelo Teorema 5.4.16 (para $r = 0$), obtemos uma função mensurável $p(\cdot)$ tal que

$$p(t) \in \partial_v L(x^\alpha(t), x^{\alpha\prime}(t)) \quad \text{qs em } [0,T];$$

e uma constante c, tais que

$$L(x^\alpha(t), x^{\alpha\prime}(t)) - \langle x^{\alpha\prime}(t), p(t)\rangle = c \quad \text{qs em } [0,T]. \tag{5.28}$$

A demonstração do Teorema 5.2.7 mostra que x^α é solução de P_θ.

Seja $\widetilde{x} := x^\alpha$.

Mostremos agora que a relação (5.28), juntamente com (H2), implica que $\widetilde{x}'(t)$ é essencialmente limitada.

Suponhamos, com vista a um absurdo, que $\widetilde{x}' \notin L^\infty([0,T], \mathbb{R}^n)$. Então para qualquer $\beta > 0$, podemos encontrar um subconjunto I de $[0,T]$, com $m(I) > 0$ e tal que

$$|\widetilde{x}'(t)| > \beta \quad \forall t \in I.$$

Daqui resulta, por (5.28) e seguindo o mesmo raciocínio que acima (ver (5.25)) com $r = 0$, que

$$0 \le \sup_{\substack{x\in\Omega, v\in K\\ |v|>\beta}} \sup_{p\in\partial_v L(x,v)} \{L(x,v) - \langle v,p\rangle\} - \inf_{\substack{x\in\Omega, v\in K\\ |v|<k}} \inf_{p\in\partial_v L(x,v)} \{L(x,v) - \langle v,p\rangle\},$$

o que é absurdo, pois já vimos que para α, e portanto para β, suficientemente grande, o lado direito desta desigualdade é, por (H2), negativo.

Assim concluimos que $\widetilde{x}' \in L^\infty([0,T], \mathbb{R}^n)$ e por conseguinte $\widetilde{x} \in W^{1,\infty}([0,T], \mathbb{R}^n)$ (pois claramente $\widetilde{x} \in L^\infty([0,T], \mathbb{R}^n)$).

Mostremos que a função lipschitziana $\widetilde{x}$ também é solução do problema (P).

A demonstração anterior foi elaborada considerando uma função de Nagumo θ fixada. Seja agora ψ uma qualquer outra função de Nagumo.

Vejamos que $\widetilde{x}$ também é solução do problema

$$\min\{\Lambda(x) : x \in AC([0,T], \mathbb{R}^n),\ (x(0), x(T)) \in C,\ x(t) \in \Omega\ \forall t \in [0,T],\ x'(t) \in K \text{ qs},\ \Lambda_\psi(x) < +\infty\} \tag{P_ψ}$$

onde

$$\Lambda_\psi(x) := \int_0^T \psi(|x'(t)|)\,dt.$$

Seja y uma solução lipschitziana de P_ψ (a sua existência é garantida pela demonstração anterior substituindo θ por ψ). Temos que y é admissível para P_θ.

De facto, dado que $y' \in L^\infty([0,T], \mathbb{R}^n)$ temos, pela Proposição 2.11.15,

$$|y'(t)| \le |y'|_{L^\infty([0,T],\mathbb{R}^n)} \quad \text{qs em } [0,T],$$

e como θ é estritamente crescente, podemos escrever

$$\theta(|y'(t)|) \le \theta\left(|y'|_{L^\infty([0,T],\mathbb{R}^n)}\right) \quad \text{qs em } [0,T].$$

Assim, se y não fosse admissível para P_θ, isto é, se $\Lambda_\theta(y) = +\infty$, teriamos

$$+\infty = \Lambda_\theta(y) = \int_0^T \theta(|y'(t)|)\,dt \le \int_0^T \theta\left(|y'|_{L^\infty([0,T],\mathbb{R}^n)}\right) dt = T\theta\left(|y'|_{L^\infty([0,T],\mathbb{R}^n)}\right),$$

o que é absurdo.

Analogamente se mostra que $\widetilde{x}$ é admissível para P_ψ.
Portanto temos

$$\Lambda(y) \leq \Lambda(\widetilde{x}) \leq \Lambda(y)$$

(porque $\widetilde{x}$ é admissível para P_ψ e y é solução de P_ψ, e y é admissível para P_θ e $\widetilde{x}$ é solução de P_θ, respectivamente). Donde $\Lambda(y) = \Lambda(\widetilde{x})$, e portanto $\widetilde{x}$ é solução de P_ψ.

Seja agora x uma qualquer função admissível para o problema (P). Então como $x' \in L^1([0,T], \mathbb{R}^n)$, o conjunto $\{x'\}$ é equiabsolutamente integrável (ver Nota 2.11.33) e então, pela Proposição 2.11.35, existe uma função de Nagumo ψ tal que $x \in AC_\psi$. Consequentemente, x é admissível para P_ψ. Mas então, como $\widetilde{x}$ é solução de P_ψ, temos

$$\Lambda(\widetilde{x}) \leq \Lambda(x),$$

donde $\widetilde{x}$ é solução de (P).

Finalmente, note-se que qualquer outra solução $\widetilde{\widetilde{x}}$ de (P) será também solução de P_ψ, para alguma função de Nagumo ψ tal que $\widetilde{\widetilde{x}} \in AC_\psi$. De facto, se y é uma solução de P_ψ, temos

$$\Lambda(y) \leq \Lambda\left(\widetilde{\widetilde{x}}\right) \leq \Lambda(y)$$

(porque y é solução de P_ψ e $\widetilde{\widetilde{x}}$ é admissível para P_ψ, e $\widetilde{\widetilde{x}}$ é solução de P e y é admissível para P, respectivamente), donde $\Lambda\left(\widetilde{\widetilde{x}}\right) = \Lambda(y)$.

Portanto, como vimos acima, $\widetilde{\widetilde{x}}$ será lipschitziana e satisfaz (5.28), o que completa a demonstração do Teorema 5.2.8.■

5.2.4 Casos particulares

O caso coercivo

Mostremos que, neste caso, o Teorema 5.2.8 implica o Teorema 5.1.1.

Suponhamos que $K := \mathbb{R}^n$ e que L verifica as hipóteses do Teorema 5.1.1, em particular, L verifica as hipóteses básicas (ii) e (ii1).

A condição de coercividade [6] implica que $L(x,v)$ majora uma função da forma $\varepsilon|v| + \gamma$, para algum $\varepsilon > 0$ e para algum $\gamma \in \mathbb{R}$ (ver Proposição 3.3.3). O que implica que L é limitada inferiormente em $\mathbb{R}^2$ por γ e portanto verifica a hipótese (ii2).

Consideremos $C := \{(x_0, x_T)\}$, o qual verifica (iii) e (iv). A condição (i) verifica-se por hipótese do Teorema 5.1.1.

Suponhamos que existe uma função $\bar{x}$ admissível para (P) e tal que $\Lambda(\bar{x}) \in \mathbb{R}$. Por coercividade segue que qualquer função absolutamente contínua x em $\Gamma(\bar{x})$ verifica

$$\int_0^T (\varepsilon|x'(t)| + \gamma)\, dt \leq \int_0^T L(x(t), x'(t))\, dt = \Lambda(x) \leq \Lambda(\bar{x}), \tag{5.29}$$

o que dá uma majoração *a priori* para $\|x\|_\infty$. De facto, para qualquer $x \in \Gamma(\bar{x})$ temos $x(0) = x_0$ e portanto, por (5.29), vem

$$\begin{aligned}
\Lambda(\bar{x}) &\geq \int_0^T (\varepsilon|x'(t)| + \gamma)\, dt = \varepsilon \int_0^T |x'(t)|\, dt + \gamma T \geq \varepsilon \int_0^t |x'(s)|\, ds + \gamma T \\
&\geq \varepsilon \left| \int_0^t x'(s)\, ds \right| + \gamma T = \varepsilon|x(t) - x(0)| + \gamma T \geq \varepsilon(|x(t)| - |x_0|) + \gamma T \qquad \forall t \in [0,T],
\end{aligned}$$

[6] Recordemos que a função L diz-se **coerciva** se existe uma função $\theta : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ tal que

$$L(x,v) \geq \theta(|v|) \quad \forall (x,v) \in \Omega \times \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \lim_{r\to+\infty} \frac{\theta(r)}{r} = +\infty.$$

o que implica

$$|x(t)| \leq \frac{\Lambda(\bar{x}) - \gamma T}{\varepsilon} + |x_0| \in \mathbb{R} \qquad \forall t \in [0,T]$$

e portanto

$$\|x\|_\infty := \sup_{0\leq t\leq T} \text{ess}\, |x(t)| \leq \frac{\Lambda(\bar{x}) - \gamma T}{\varepsilon} + |x_0|.$$

Assim, sem perda de generalidade, podemos supor que Ω é compacto.

Para ver que o Teorema 5.2.8 se aplica resta-nos verificar a presença das hipóteses (H1) e (H2).

Comecemos por verificar (H1). Temos

$$\Lambda(\bar{x}) \geq \int_0^T (\varepsilon\, |x'(t)| + \gamma)\, dt \geq \varepsilon \int_0^T \inf_{0\leq t\leq T} \text{ess}\, |x'(t)|\, dt + \gamma T = \varepsilon T \inf_{0\leq t\leq T} \text{ess}\, |x'(t)| + \gamma T,$$

o que implica

$$\inf_{0\leq t\leq T} \text{ess}\, |x'(t)| \leq \frac{\Lambda(\bar{x}) - \gamma T}{\varepsilon T}$$

e portanto (H1) verifica-se para qualquer k superior a $(\Lambda(\bar{x}) - \gamma T)/\varepsilon T$.

Para (H2) temos

Lema 5.2.9 *A desigualdade* $(*)$ *verifica-se para qualquer* $k > 0$.

Demonstração:

Fixemos $k > 0$. Mostremos primeiro que o lado direito de $(*)$ é finito e depois que o lado esquerdo é $-\infty$.

Suponhamos que o lado direito é ilimitado inferiormente. Então existe uma sucessão (x_i, v_i) em $\Omega \times k\bar{B}$ tal que, para qualquer p_i em $\partial_v L(x_i, v_i)$, tem-se

$$L(x_i, v_i) - \langle v_i, p_i \rangle \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

Passando se necessário a uma subsucessão, podemos supor que (x_i, v_i) converge para $(x, v) \in \Omega \times k\bar{B}$. Como, por hipótese, L é contínua em $\mathbb{R}^{2n}$ e toma apenas valores finitos então

$$-\infty < L(x,v) = \lim_{i\to\infty} L(x_i, v_i) < +\infty.$$

Segue que $\langle p_i, v_i \rangle$ converge para $+\infty$. Fixemos $\varepsilon > 0$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, a desigualdade do subgradiente dá

$$L(x_i, v_i + \varepsilon_0 v_i) - L(x_i, v_i) \geq \langle v_i + \varepsilon_0 v_i - v_i, p_i \rangle = \varepsilon_0 \langle v_i, p_i \rangle.$$

Tomando o limite quando $i \to \infty$, deduzimos que $L(x, v + \varepsilon_0 v) = +\infty$, o que é absurdo. Logo o lado direito de $(*)$ é finito, uma vez que não pode ser $+\infty$ pois os conjuntos Ω e K são não-vazios e, pela Proposição 2.21.5, também $\partial_v L(x,v)$ é não-vazio qualquer que seja o $(x,v) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$.

Mostremos agora que o lado esquerdo de $(*)$ é $-\infty$. Fixemos $x \in \Omega$ e apliquemos o Lema 3.4.2 à função convexa e contínua $\widetilde{L}_x : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ definida por $\widetilde{L}_x(v) := L(x,v) - \gamma$. Fixemos $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$. Para quaisquer $p \in \partial \widetilde{L}_x(v) = \partial_v L(x,v)$ e $\varepsilon \in (0, |v|)$ temos

$$\langle v, p \rangle - \widetilde{L}_x(v) \geq \frac{\varepsilon}{|v| - \varepsilon}\theta(|v|) - \widetilde{L}_x\left(\frac{\varepsilon v}{|v|}\right)\frac{|v|}{|v| - \varepsilon}$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned} & \langle v, p \rangle - L(x,v) \geq \frac{\varepsilon}{|v| - \varepsilon}\theta(|v|) - \left(L\left(x, \frac{\varepsilon v}{|v|}\right) - \gamma\right)\frac{|v|}{|v| - \varepsilon} - \gamma \\ \Leftrightarrow\ & L(x,v) - \langle v, p \rangle \leq L\left(x, \frac{\varepsilon v}{|v|}\right)\frac{|v|}{|v| - \varepsilon} - \gamma\frac{|v|}{|v| - \varepsilon} - \frac{\varepsilon}{|v| - \varepsilon}\theta(|v|) + \gamma. \end{aligned} \tag{5.30}$$

Como L é limitada nos subconjuntos compactos de $\Omega \times \mathbb{R}^n$ e

$$\left|\frac{\varepsilon v}{|v|}\right| = \varepsilon \quad \forall v \in \mathbb{R}^n,$$

então existe uma constante $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned}
&\lim_{|v|\to\infty}\left(L\left(x,\frac{\varepsilon v}{|v|}\right)\frac{|v|}{|v|-\varepsilon}-\gamma\frac{|v|}{|v|-\varepsilon}-\frac{\varepsilon}{|v|-\varepsilon}\theta\left(|v|\right)+\gamma\right)\\
= &\lim_{|v|\to\infty}\left(L\left(x,\frac{\varepsilon v}{|v|}\right)\frac{|v|}{|v|-\varepsilon}\right)-\gamma\lim_{|v|\to\infty}\frac{|v|}{|v|-\varepsilon}-\lim_{|v|\to\infty}\left(\frac{\varepsilon}{|v|-\varepsilon}\theta\left(|v|\right)\right)+\gamma\\
\leq\ & M\lim_{|v|\to\infty}\frac{|v|}{|v|-\varepsilon}-\gamma-\lim_{|v|\to\infty}\left(\frac{\varepsilon\,|v|}{|v|-\varepsilon}\frac{\theta\left(|v|\right)}{|v|}\right)+\gamma=M-\varepsilon\lim_{|v|\to\infty}\frac{\theta\left(|v|\right)}{|v|}=-\infty,
\end{aligned}$$

onde a última igualdade resulta da propriedade de crescimento em θ.

Ou seja, para cada $N>0$ fixado existe $\delta>0$ tal que, se $|v|>\delta$, então

$$L\left(x,\frac{\varepsilon v}{|v|}\right)\frac{|v|}{|v|-\varepsilon}-\gamma\frac{|v|}{|v|-\varepsilon}-\frac{\varepsilon}{|v|-\varepsilon}\theta\left(|v|\right)+\gamma<-N \quad \forall x\in\Omega,$$

donde

$$\sup_{x\in\Omega}\left\{L\left(x,\frac{\varepsilon v}{|v|}\right)\frac{|v|}{|v|-\varepsilon}-\gamma\frac{|v|}{|v|-\varepsilon}-\frac{\varepsilon}{|v|-\varepsilon}\theta\left(|v|\right)+\gamma\right\}\leq -N.$$

Assim, para cada $N>0$ fixado, existe $\delta>0$ tal que se $|v|>\beta>\delta$ então

$$\sup_{\substack{x\in\Omega,v\in K\\|v|>\beta}}\left\{L\left(x,\frac{\varepsilon v}{|v|}\right)\frac{|v|}{|v|-\varepsilon}-\gamma\frac{|v|}{|v|-\varepsilon}-\frac{\varepsilon}{|v|-\varepsilon}\theta\left(|v|\right)+\gamma\right\}\leq -N,$$

pelo que

$$\lim_{\beta\to+\infty}\sup_{\substack{x\in\Omega,v\in K\\|v|>\beta}}\left\{L\left(x,\frac{\varepsilon v}{|v|}\right)\frac{|v|}{|v|-\varepsilon}-\gamma\frac{|v|}{|v|-\varepsilon}-\frac{\varepsilon}{|v|-\varepsilon}\theta\left(|v|\right)+\gamma\right\}=-\infty.$$

Logo, tendo em conta (5.30), vem

$$\lim_{\beta\to+\infty}\sup_{\substack{x\in\Omega,v\in K\\|v|>\beta}}\left\{L\left(x,v\right)-\langle v,p\rangle\right\}=-\infty \quad \forall p\in\partial_v L\left(x,v\right),$$

o que mostra que o lado esquerdo de $(*)$ é $-\infty$, como queriamos.■

Logo verificam-se todas as hipóteses do Teorema 5.2.8 o que nos permite concluir que, sob as hipóteses do Teorema 5.1.1, o problema

$$\min\left\{\Lambda\left(x\right):x\in AC\left(\left[0,T\right],\mathbb{R}^n\right),\ x\left(0\right)=x_0,\ x\left(T\right)=x_T,\ x\left(t\right)\in\Omega\ \forall t\right\},$$

onde

$$\Lambda\left(x\right):=\int_0^T L\left(x\left(t\right),x'\left(t\right)\right)dt,$$

tem solução, e portanto verifica-se o Teorema 5.1.1.

Crescimento linear

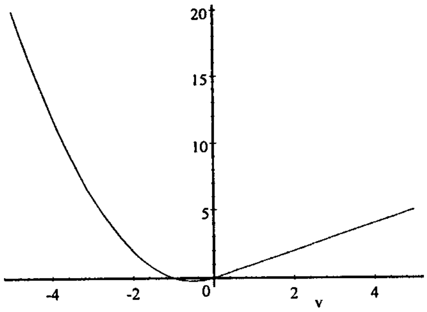
Vimos no caso anterior que a *condição de crescimento linear*

$$L(x,v) \geq \varepsilon |v| + \gamma \qquad \forall x \in \Omega, \forall v \in K,$$

para algum $\varepsilon > 0$ e algum $\gamma \in \mathbb{R}$, implica (H1) para certos valores de k. Contudo, na ausência de (H2), isto não implica a existência de solução para (P), como nos mostra o seguinte exemplo.

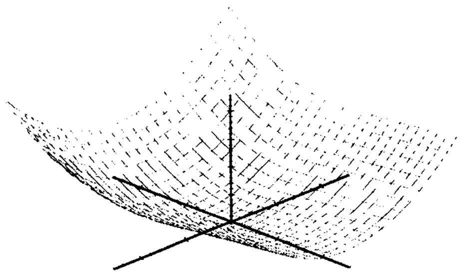
Exemplo 5.2.10 *Consideremos $n = 1$, $T = 1$, $C = \{(0,1)\}$, $\Omega = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{R}$ e $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $L(x,v) := x^2 + f(v)$, onde f é uma função convexa suave dada por*

$$f(v) := v(1 + \min(v,0)) = \begin{cases} v + v^2 & se\ v < 0 \\ v & se\ v \geq 0 \end{cases}$$



ou seja, para cada $(x,v) \in \mathbb{R}^2$ temos

$$L(x,v) = \begin{cases} x^2 + v^2 + v & se\ v < 0 \\ x^2 + v & se\ v \geq 0. \end{cases}$$



A função L é contínua em $\mathbb{R}^2$ e em particular é sci, além disso, para qualquer $x \in \mathbb{R}$ fixado, a função $v \to L(x,v)$ é convexa em $\mathbb{R}$ (por f o ser) e portanto verificam-se as hipóteses básicas (ii) e (iii).

Para $x \in \mathbb{R}$ fixado e para $v < 0$ tem-se

$$L(x,v) = x^2 + v^2 + v \geq v^2 + v \geq |v| - 1$$

e para $v \geq 0$

$$L(x,v) = x^2 + v \geq v = |v| \geq |v| - 1$$

o que mostra que L verifica a condição de crescimento linear com $\varepsilon = 1$ e $\gamma = -1$. Pelo que se conclui que L é limitada inferiormente em $\mathbb{R}^2$ por -1 e portanto verifica a hipótese (ii2).

As hipótese (i), (iii) e (iv) resultam directamente dos dados do problema.

Consideremos a função lipschitziana $\bar{x} : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\bar{x}(t) := t.$$

Esta função é admissível para (P) e $\Lambda(\bar{x}) = 4/3 \in \mathbb{R}$, o que mostra que também se verifica (v). Mostrámos assim que se verificam todas as hipóteses básicas.

Tal como vimos no caso coercivo, a condição de crescimento linear implica (H1) para qualquer valor de k superior a $(\Lambda(\bar{x}) - \gamma T)/\varepsilon T = 7/3$.

Mostremos agora que falha (H2). Para qualquer $x \in \mathbb{R}$ fixado, temos

$$L_v(x,v) = \begin{cases} 2v+1 & se\ v < 0 \\ 1 & se\ v \geq 0 \end{cases}$$

e portanto para $v < 0$ temos

$$L(x,v) - vL_v(x,v) = x^2 + v^2 + v - v(2v+1) = x^2 - v^2$$

e para $v \geq 0$

$$L(x,v) - vL_v(x,v) = x^2 + v - v = x^2.$$

Logo

$$\lim_{\beta \to +\infty} \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R} \\ |v| > \beta}} \{L(x,v) - vL_v(x,v)\} = \lim_{\beta \to +\infty} \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R} \\ |v| > \beta}} x^2 = +\infty$$

e

$$\inf_{\substack{x \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R} \\ |v| < k}} \{L(x,v) - vL_v(x,v)\} = \inf_{\substack{x \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R} \\ |v| < k}} \{x^2 - v^2\} = -k^2,$$

o que mostra que a desigualdade $(*)$ não se verifica qualquer que seja o $k > 0$ e portanto não se verifica (H2).

Para qualquer função admissível x tem-se

$$\Lambda(x) = \int_0^1 \left(x^2(t) + f(x'(t))\right) dt > \int_0^1 f(x'(t))\, dt \geq \int_0^1 x'(t)\, dt = 1,$$

onde a última desigualdade resulta de $f(v) \geq v \quad \forall v \in \mathbb{R}$. Então o ínfimo em (P) não é menor que 1, um valor que $\Lambda(x)$ nunca pode atingir. O ínfimo é de facto igual a 1, como nos mostra a sucessão de funções admissíveis $x_i : [0,T] \to \mathbb{R}$ dadas por

$$x_i(t) := \begin{cases} 0 & se\ t \in \left[0, 1 - \frac{1}{i}\right] \\ 1 + i(t-1) & se\ t \in \left[1 - \frac{1}{i}, 1\right] \end{cases} \qquad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Temos

$$\begin{aligned} \Lambda(x_i) &= \int_0^1 \left(x_i^2(t) + f(x_i'(t))\right) dt = \int_{1-\frac{1}{i}}^1 \left[(1 + i(t-1))^2 + i\right] dt \\ &= \frac{(1 + i(1-1))^3}{3i} - \frac{\left(1 + i\left(1 - \frac{1}{i} - 1\right)\right)^3}{3i} + i\left(1 - 1 + \frac{1}{i}\right) = \frac{1}{3i} + 1, \end{aligned}$$

então $\Lambda(x_i) \to 1$ quando $i \to \infty$, o que mostra que (P) não admite solução.

Vejamos agora um primeiro exemplo ao qual não se pode aplicar o Teorema 5.1.1 mas pode-se aplicar o Teorema 5.2.8.

Exemplo 5.2.11 *Consideremos a função $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por*

$$L(x, v) := g(x)\sqrt{1 + |v|^2},$$

onde g é uma função em $\mathbb{R}^n$ localmente limitada e sci com $\inf\{g(x) : x \in \Omega\} > 0$.

Mostremos que para qualquer escolha de conjuntos C, Ω e K satisfazendo as hipóteses básicas, (P) admite solução (e qualquer solução é lipschitziana).

Suponhamos, sem perda de generalidade, que o conjunto C_x é compacto então, para qualquer elemento x em $\Gamma(\bar{x})$, $x(0)$ é limitado à partida o que dá uma majoração à partida para $\|x\|_\infty$ (tal como vimos no caso coercivo). Consequentemente podemos supor que Ω é compacto sem afectar a natureza do problema. Assim, pela Proposição 2.17.11,

$$0 < \inf\{g(x) : x \in \Omega\} = \min\{g(x) : x \in \Omega\} =: g_0$$

e seja g_1 o supremo de g em Ω.

A função L é sci e, para qualquer $x \in \Omega$ fixado, a função $v \to L(x, v)$ é convexa em $\mathbb{R}^n$ por a função $v \to \sqrt{1 + |v|^2}$ o ser (ver Proposição 2.16.21), portanto L verifica (ii) e (ii1). A função L verifica (ii2), pois L é limitada inferiormente em $\Omega \times \mathbb{R}^n$ por 0:

$$L(x, v) = g(x)\sqrt{1 + |v|^2} \geq \min\{g(x) : x \in \Omega\} > 0.$$

Por outro lado,

$$L(x, v) = g(x)\sqrt{1 + |v|^2} \geq \min\{g(x) : x \in \Omega\}|v| = g_0|v| \qquad \forall (x, v) \in \Omega \times \mathbb{R}^n,$$

o que mostra que L verifica a condição de crescimento linear em $\Omega \times \mathbb{R}^n$ com $\varepsilon = g_0$ e $\gamma = 0$.

Notemos que faz sentido falar em $\Gamma(\bar{x})$ pois existe uma função lipschitziana e admissível para (P) $\bar{x} : [0, T] \to \mathbb{R}^n$, dada por

$$\bar{x}(t) := x(0) + t\frac{x(T) - x(0)}{T}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \Lambda(\bar{x}) = \int_0^T L(\bar{x}(t), \bar{x}'(t))\,dt = \int_0^T g(\bar{x}(t))\sqrt{1 + \left|\frac{x(T) - x(0)}{T}\right|^2}dt \leq \int_0^T g_1\left(1 + \frac{|x(T) - x(0)|}{T}\right)dt \\ &= Tg_1\left(1 + \frac{|x(T) - x(0)|}{T}\right) \leq Tg_1\left(1 + \frac{|x(T)| + |x(0)|}{T}\right) \leq Tg_1\left(1 + \frac{\|\bar{x}\|_\infty + |x(0)|}{T}\right), \end{aligned}$$

o que mostra que $\Lambda(\bar{x}) \in \mathbb{R}$.

Como o crescimento linear implica (H1) para uma escolha conveniente de k (tal como vimos no caso coercivo), então para aplicar o Teorema 5.2.8 é suficiente confirmar que $(*)$ se verifica para qualquer $k > 0$. Temos

$$\begin{aligned} L(x, v) - \langle v, \nabla_v L(x, v)\rangle &= g(x)\sqrt{1 + |v|^2} - \left\langle v, v\frac{g(x)}{\sqrt{1 + |v|^2}}\right\rangle = g(x)\sqrt{1 + |v|^2} - \frac{g(x)}{\sqrt{1 + |v|^2}}\langle v, v\rangle \\ &= g(x)\sqrt{1 + |v|^2} - \frac{g(x)|v|^2}{\sqrt{1 + |v|^2}} = \frac{g(x)\left(1 + |v|^2\right) - g(x)|v|^2}{\sqrt{1 + |v|^2}} = \frac{g(x)}{\sqrt{1 + |v|^2}}. \end{aligned}$$

Então, pela definição de g_1, temos

$$\lim_{\beta\to+\infty}\sup_{\substack{x\in\Omega,v\in K\\|v|>\beta}}\{L(x,v)-\langle v,\nabla_v L(x,v)\rangle\}=\lim_{\beta\to+\infty}\sup_{\substack{x\in\Omega,v\in K\\|v|>\beta}}\frac{g(x)}{\sqrt{1+|v|^2}}=\lim_{\beta\to+\infty}\frac{g_1}{\sqrt{1+\beta^2}}=0$$

e, pela definição de g_0, temos

$$\inf_{\substack{x\in\Omega,v\in K\\|v|<k}}\{L(x,v)-\langle v,\nabla_v L(x,v)\rangle\}=\inf_{\substack{x\in\Omega,v\in K\\|v|<k}}\frac{g(x)}{\sqrt{1+|v|^2}}=\frac{g_0}{\sqrt{1+k^2}},$$

o que mostra que se verifica $(*)$ para qualquer $k>0$.

Logo aplica-se o Teorema 5.2.8 e portanto o problema dado admite uma solução lipschitziana.

No exemplo anterior vimos que $(*)$ se verifica para qualquer $k>0$. Agora vamos ver uma situação em que isso não acontece, isto é, em que $(*)$ verifica-se apenas para alguns valores de k.

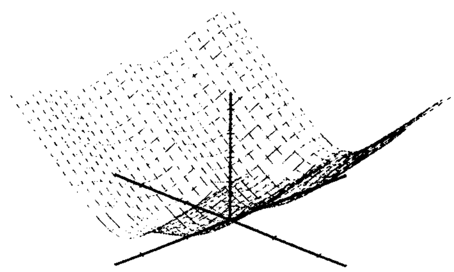
Exemplo 5.2.12 *Fixemos $K=\Omega=\mathbb{R}^n$, $C=\{(0,0)\}$ e $T=1$, logo as condições de fronteira são $x(0)=0$, $x(1)=0$. O funcional Λ é dado por*

$$\Lambda(x):=\int_0^1\left(\sqrt{1+|x'(t)|^2}-r\sin|x(t)|\right)dt,$$

onde r é uma constante positiva. Os conjuntos K,Ω e C verificam as hipóteses básicas (i), (iii) e (iv).

A função $L:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ dada por

$$L(x,v):=\sqrt{1+|v|^2}-r\sin|x|$$



é contínua, e portanto verifica (ii); além disso, para cada $x\in\mathbb{R}^n$, a função $v\to L(x,v)$ é convexa por $v\to\sqrt{1+|v|^2}$ o ser, e portanto também se verifica (ii1). Para qualquer $(x,v)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ fixado, temos

$$L(x,v)=\sqrt{1+|v|^2}-r\sin|x|\geq 1-r\sin|x|\geq 1-r\in\mathbb{R},$$

o que mostra que L é limitada inferiormente em $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ e em particular verifica (ii2).

Consideremos a função lipschitziana $\bar{x}(t)\equiv 0$ admissível para (P). Temos $\Lambda(\bar{x})=1\in\mathbb{R}$, logo verifica-se (v).

Portanto estão verificadas todas as hipóteses básicas então para aplicar o Teorema 5.2.8 resta-nos verificar (H1) e (H2).

Para qualquer $(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ fixado, temos

$$\begin{aligned} L(x,v) - \langle v, \nabla_v L(x,v)\rangle &= \sqrt{1+|v|^2} - r\sin|x| - \left\langle v, \frac{v}{\sqrt{1+|v|^2}}\right\rangle \\ &= \sqrt{1+|v|^2} - r\sin|x| - \langle v, v\rangle \frac{1}{\sqrt{1+|v|^2}} \\ &= \sqrt{1+|v|^2} - \frac{|v|^2}{\sqrt{1+|v|^2}} - r\sin|x| = \frac{1}{\sqrt{1+|v|^2}} - r\sin|x|. \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned} \lim_{\beta\to+\infty} \sup_{\substack{x\in\Omega, v\in K \\ |v|>\beta}} \{L(x,v) - \langle v, \nabla_v L(x,v)\rangle\} &= \lim_{\beta\to+\infty} \sup_{\substack{x\in\Omega, v\in K \\ |v|>\beta}} \left(\frac{1}{\sqrt{1+|v|^2}} - r\sin|x|\right) \\ &= \lim_{\beta\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} + r\right) = r \end{aligned}$$

e

$$\inf_{\substack{x\in\Omega, v\in K \\ |v|<k}} \{L(x,v) - \langle v, \nabla_v L(x,v)\rangle\} = \inf_{\substack{x\in\Omega, v\in K \\ |v|<k}} \left(\frac{1}{\sqrt{1+|v|^2}} - r\sin|x|\right) = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} - r.$$

Pelo que a desigualdade $(*)$ se reduz à condição

$$2r\sqrt{1+k^2} < 1$$

e então, para aplicar o Teorema 5.2.8, devemos mostrar que (H1) se verifica para algum tal k.

A função L verifica a condição de crescimento linear com $\varepsilon = 1, \gamma = -r$. De facto, temos

$$L(x,v) = \sqrt{1+|v|^2} - r\sin|x| \geq |v| - r \quad \forall (x,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Assim, tal como vimos no caso corecivo, (H1) verifica-se para qualquer $k > (\Lambda(\bar{x}) - \gamma T)/\varepsilon T = 1 + r$.

Deduzimos assim que (P) admite uma solução sempre que

$$2r\sqrt{1+(1+r)^2} < 1,$$

isto é, quando r é suficientemente pequeno.

Mostremos agora que não existe solução quando r é suficientemente grande.

Se x é solução então verifica-se a segunda condição de Erdmann:

$$L(x(t), x'(t)) - \langle x'(t), \nabla_v L(x(t), x'(t))\rangle = c \Leftrightarrow -r\sin|x(t)| + \frac{1}{\sqrt{1+|x'(t)|^2}} = c,$$

para alguma constante $c \in \mathbb{R}$ e para quase todo $t \in [0,1]$. Como $x(0) = 0$ então c é positivo, e segue que

$$-r\sin|x(t)| > -\frac{1}{\sqrt{1+|x'(t)|^2}} > -1 \quad qs \text{ em } [0,1],$$

o que implica que $\Lambda(x)$ é positivo. Por outro lado, considerando $r > 1+\pi$ e a sucessão de funções admissíveis $x_i : [0,T] \to \mathbb{R}^n$, dadas por

$$x_i(t) := \begin{cases} iyt & se\ t \in \left[0, \frac{1}{i}\right] \\ y & se\ t \in \left(\frac{1}{i}, 1-\frac{1}{i}\right) \\ -iy(t-1) & se\ t \in \left[1-\frac{1}{i}, 1\right] \end{cases} \qquad \forall i \in \mathbb{N},$$

onde y é um vector constante com norma $\pi/2$, obtemos $\lim_{i\to\infty}\Lambda(x_i)<0$. De facto, para qualquer $i\in\mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}
\Lambda(x_i) &= \int_0^1\left(\sqrt{1+|x_i'(t)|^2}-r\sin|x_i(t)|\right)dt\\
&= \int_0^{\frac{1}{i}}\left(\sqrt{1+|iy|^2}-r\sin|iyt|\right)dt+\int_{\frac{1}{i}}^{1-\frac{1}{i}}(1-r\sin|y|)\,dt+\int_{1-\frac{1}{i}}^{1}\left(\sqrt{1+|iy|^2}-r\sin|iy(t-1)|\right)dt\\
&= \frac{1}{i}\sqrt{1+|iy|^2}+\frac{r}{|iy|}(\cos|y|-1)+\left(1-\frac{2}{i}\right)(1-r\sin|y|)+\frac{1}{i}\sqrt{1+|iy|^2}+\frac{r}{|iy|}(1-\cos|y|)\\
&= \frac{2}{i}\sqrt{1+|iy|^2}-\frac{r}{|iy|}+\left(1-\frac{2}{i}\right)(1-r)+\frac{r}{|iy|}\\
&= 2\sqrt{\frac{1+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 i^2}{i^2}}+\left(1-\frac{2}{i}\right)(1-r)
\end{aligned}$$

e portanto

$$\lim_{i\to\infty}\Lambda(x_i)=\pi+1-r<0,$$

o que mostra que não pode existir nenhuma solução x com $\Lambda(x)>0$, ou seja, quando r é suficientemente grande (P) não tem solução.

Notemos que para qualquer valor de r, a função Λ é limitada ao longo da sucessão (x_i) dada acima. Na realidade temos

$$|\Lambda(x_i)|\le 2\sqrt{\frac{1+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 i^2}{i^2}}+\left|1-\frac{2}{i}\right||1-r|\le 2\left(\frac{1}{i}+\frac{\pi}{2}\right)+\left(1+\frac{2}{i}\right)|1-r|\le 2\left(1+\frac{\pi}{2}\right)+3|1-r|\qquad \forall i\in\mathbb{N}.$$

Notemos também, que nenhuma subsucessão de (x_i) converge para uma função absolutamente contínua, visto que (x_i) converge para a função

$$x(t):=\begin{cases}0 & se\ t=0\\ y & se\ t\in(0,1)\\ 0 & se\ t=1,\end{cases}$$

que não é contínua em $[0,1]$. Então o conjunto $\Gamma(\bar{x})$ não é compacto, o que mostra que, quando se aplica o Teorema 5.2.8, os conjuntos de subnível $\Gamma(\bar{x})$ não têm necessariamente de ser compactos (propriedade que possuem no caso coercivo).

A questão mantém-se mesmo para uma melhor estimativa para k (isto é, para um valor mais pequeno). Recordemos que k é um número superior a $\inf\{|x'(t)|:0\le t\le T\}$, onde x é um elemento arbitrário de $\Gamma(\bar{x})$, e que a nossa escolha de k resulta da condição de crescimento linear. Podemos melhorar em k (e portanto deduzir a existência de um maior conjunto de valores para r) melhorando em $\bar{x}$: isto é, encontrando outra função lipschitziana admissível que dê um valor mais pequeno a Λ. Mas o melhor resultado será obtido tomando k arbitrariamente próximo de zero, e isto é possível quando $n=1$, por uma aproximação alternativa característica do caso $n=1$ (ver Secção 5.3.4 para uma continuação desta discussão).

Exemplos sem crescimento linear

Nos exemplos anteriores obtivemos a condição (H1) a partir da condição de crescimento linear no lagrangiano. Agora vamos ver alguns exemplos em que L não possui tal crescimento e em que (H1) resulta da estrutura do cone e das condições de fronteira.

Exemplo 5.2.13 *Fixemos $n = 1$ e consideremos o problema de minimização do funcional integral*

$$\Lambda(x) := \int_0^1 \left(e^{-x'(t)} + rg(x(t))\right) dt$$

na classe das funções $x \in AC([0,1], \mathbb{R})$ tais que $x'(t) \geq 0$ qs, $x(0) = 0, x(1) = \delta > 0$; onde g é uma função sci e localmente limitada, e r é um real não-negativo. Então temos $K = [0, +\infty)$ e $C = \{(0, \delta)\}$ e portanto verificam-se as hipóteses básicas (iii) e (iv).

Notemos que qualquer função admissível toma necessariamente valores em $[0, \delta]$, então podemos considerar $\Omega = [0, \delta]$, o que implica (i).

A função $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$L(x, v) := e^{-v} + rg(x)$$

é sci (por ser a soma de duas funções sci) e além disso, para cada $x \in \Omega$ fixado, a função $v \to L(x, v)$ é convexa em $\mathbb{R}$ por $v \to e^{-v}$ o ser (ver Proposição 2.16.21). Logo L verifica as hipóteses (ii) e (ii1).

Como Ω é compacto então g é limitada em Ω. Sejam g_1 o supremo de g em Ω e g_0 o mínimo (ver Proposição 2.17.11). Assim, para qualquer $(x, v) \in \Omega \times \mathbb{R}$, temos

$$L(x, v) = e^{-v} + rg(x) > rg(x) \geq rg_0,$$

o que mostra que L é limitada inferiormente em $\Omega \times \mathbb{R}$ e em particular verifica (ii2).

Consideremos a função lipschitziana e admissível para (P) $\bar{x} : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $\bar{x}(t) := \delta t$. Temos

$$\Lambda(\bar{x}) = \int_0^1 L(\bar{x}(t), \bar{x}'(t))\, dt = \int_0^1 \left(e^{-\delta} + rg(\delta t)\right) dt = e^{-\delta} + r \int_0^1 g(\delta t)\, dt$$

e pela definição de g_0 e g_1 vem

$$rg_0 < e^{-\delta} + rg_0 \leq \Lambda(\bar{x}) \leq e^{-\delta} + rg_1 < 1 + rg_1,$$

o que mostra que $\Lambda(\bar{x}) \in \mathbb{R}$ e por conseguinte verifica-se (v).

Fixemos $k > \delta$. Qualquer função admissível deve verificar $|x'(t)| < k$ para t nalgum conjunto de medida positiva. Pois, se assim não fosse existiria uma função admissível x tal que $|x'(t)| \geq k$ para t em qualquer conjunto de medida positiva, e em particular em $[0,1]$, o que implica

$$k = \int_0^1 k dt \leq \int_0^1 |x'(t)|\, dt = \int_0^1 x'(t)\, dt = x(1) - x(0) = \delta,$$

uma contradição. Então (H1) verifica-se para qualquer um destes k.

Vejamos agora (H2). Temos

$$L(x, v) - vL_v(x, v) = e^{-v} + rg(x) + ve^{-v} = rg(x) + e^{-v}(1 + v).$$

Dado que a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(v) := e^{-v}(1 + v)$ é decrescente então temos

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \to +\infty} \sup_{\substack{x \in \Omega, v \in K \\ |v| > \beta}} \{L(x, v) - vL_v(x, v)\} &= \lim_{\beta \to +\infty} \sup_{\substack{x \in [0,\delta], v \in K \\ v > \beta}} \left(rg(x) + e^{-v}(1 + v)\right) \\ &= \lim_{\beta \to +\infty} \left(rg_1 + e^{-\beta}(1 + \beta)\right) = rg_1 \end{aligned}$$

e

$$\inf_{\substack{x \in \Omega, v \in K \\ |v| < k}} \{L(x, v) - vL_v(x, v)\} = \inf_{\substack{x \in [0,\delta], v \in K \\ 0 \leq v < k}} \left(rg(x) + e^{-v}(1 + v)\right) = rg_0 + e^{-k}(1 + k).$$

Portanto, se $(*)$ se verifica para algum $k > \delta$, temos que ter

$$rg_1 < rg_0 + e^{-k}(1 + k) < rg_0 + e^{-\delta}(1 + \delta),$$

ou seja,

$$rg_1 < rg_0 + e^{-\delta}(1+\delta),$$

o que se verifica para r suficientemente pequeno. (Como alternativa, fixado r isto verifica-se para δ suficientemente pequeno.) Para um tal r pode-se aplicar o Teorema 5.2.8 e conclui-se que existe uma solução lipschitziana.

Vejamos agora um exemplo em que o domínio de $L(x,\cdot)$ não é todo o $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 5.2.14 *Fixemos $n=1, T=1$, e consideremos o problema de minimização do funcional integral*

$$\Lambda(x) := \int_0^1 \left((x'(t))^{-2} - (x(t))^2\right) dt$$

na classe das funções $x \in AC([0,1],\mathbb{R})$ tais que

$$x(0)=0, \quad x(1)=\delta>0, \quad x'(t)\geq 0 \ \ qs.$$

Tal como no exemplo anterior temos $K=[0,+\infty)$, $C=\{(0,\delta)\}$ e podemos considerar $\Omega=[0,\delta]$, sem alterar a natureza do problema. Estão assim verificadas as hipóteses básicas (i), (iii) e (iv).

Notemos que, para cada $x\in\Omega$ fixado, o domínio de $L(x,\cdot)$ é $(0,+\infty)$ e a função $(0,+\infty)\ni v\to L(x,v)$ é convexa (ver Proposição 2.16.21), portanto verifica-se (ii1). Além disso, a função L verifica também (ii) pois é sci em $\Omega\times\mathbb{R}$ e, para qualquer $(x,v)\in\Omega\times\mathbb{R}\backslash\{0\}$, tem-se

$$L(x,v) = v^{-2} - x^2 \geq -x^2 \geq -\delta^2,$$

o que mostra que L é limitada inferiormente em $\Omega\times\mathbb{R}\backslash\{0\}$ e em particular verifica (ii2).

Consideremos a função lipschitziana $\bar{x}:[0.1]\to\mathbb{R}$ dada por $\bar{x}(t):=\delta t$. Esta função é admissível para (P) e

$$\Lambda(\bar{x}) = \int_0^1 \left(\delta^{-2} - (\delta t)^2\right) dt = \delta^{-2} - \frac{\delta^2}{3} \in \mathbb{R},$$

logo verifica-se (v).

É claro que, tal como no exemplo anterior, (H1) verifica-se para qualquer k maior que δ. Vejamos agora (H2). Temos

$$L(x,v) - vL_v(x,v) = v^{-2} - x^2 + 2v^{-2} = 3v^{-2} - x^2,$$

pelo que

$$\lim_{\beta\to+\infty} \sup_{\substack{x\in\Omega, v\in K\\ |v|>\beta}} \{L(x,v) - vL_v(x,v)\} = \lim_{\beta\to+\infty} \sup_{\substack{x\in[0,\delta], v\in K\\ v>\beta}} \left(3v^{-2} - x^2\right) = \lim_{\beta\to+\infty} 3\beta^{-2} = 0$$

e

$$\inf_{\substack{x\in\Omega, v\in K\\ |v|<k}} \{L(x,v) - vL_v(x,v)\} = \inf_{\substack{x\in[0,\delta], v\in K\\ 0\leq v<k}} \left(3v^{-2} - x^2\right) = 3k^{-2} - \delta^2.$$

Assim, para ter $(*)$ para algum $k>\delta$, temos que exigir que

$$0 < 3k^{-2} - \delta^2 < 3\delta^{-2} - \delta^2,$$

ou seja, $\delta^2 < 3\delta^{-2}$, o que se verifica para δ suficientemente pequeno. Para algum tal δ o Teorema 5.2.8 aplica-se e o problema tem pelo menos uma solução lipschitziana.

Exemplo 5.2.15 *Fixemos $n=2, T=1$ e consideremos o problema de minimização de*

$$\Lambda(x) := \int_0^1 \left(e^{-x_1'(t)} + (x_2'(t))^2 + x_1'(t)\, g(x(t))\right) dt$$

na classe das funções $x \in AC\left([0,1], \mathbb{R}^2\right)$ *tais que*

$$x_i'(t) \geq 0 \quad qs \quad (i = 1, 2), \qquad x(0) = (0, 0), \qquad x(1) = (\delta_1, \delta_2),$$

onde $\delta_i > 0$ *(*$i = 1, 2$*) e* g *é contínua.*

As hipóteses básicas (i), (iii) e (iv) são verificadas pelos conjuntos $\Omega := [0, \delta_1] \times [0, \delta_2]$, $C := \{(0, 0, \delta_1, \delta_2)\}$ *e* $K := [0, +\infty) \times [0, +\infty)$.

A função $L : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por* $L(x, v) := e^{-v_1} + (v_2)^2 + v_1 g(x_1, x_2)$ *é contínua e em particular verifica (ii). Para cada* $x \in \Omega$ *o domínio da função* $L(x, \cdot)$ *é* $\mathbb{R}^2$ *e a função* $\mathbb{R}^2 \ni v \to L(x, v)$ *é convexa (por ser a soma de três funções convexas) e portanto verifica-se (ii1).*

Dado que g *é continua então é limitada em* Ω*; sejam* g_0 *o mínimo de* g *em* Ω *e* g_1 *o máximo. Assim temos*

$$L(x, v) = e^{-v_1} + (v_2)^2 + v_1 g(x_1, x_2) > v_1 g(x_1, x_2) \geq v_1 g_0 \quad \forall (x, v) \in \Omega \times \mathbb{R}^2$$

e portanto também se verifica (ii2).

Consideremos a função lipschitziana $\bar{x} : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $\bar{x}(t) := (\delta_1 t, \delta_2 t)$. *Esta função é admissível para (P) e tem-se*

$$\begin{aligned}\Lambda(\bar{x}) &= \int_0^1 \left(e^{-\bar{x}_1'(t)} + (\bar{x}_2'(t))^2 + \bar{x}_1'(t)\, g(\bar{x}(t))\right) dt = \int_0^1 \left(e^{-\delta_1} + (\delta_2)^2 + \delta_1 g(x(t))\right) dt \\ &= e^{-\delta_1} + (\delta_2)^2 + \delta_1 \int_0^1 g(x(t))\, dt,\end{aligned}$$

pela definição de g_0 *e* g_1 *podemos concluir que*

$$e^{-\delta_1} + (\delta_2)^2 + \delta_1 g_0 \leq \Lambda(\bar{x}) \leq e^{-\delta_1} + (\delta_2)^2 + \delta_1 g_1,$$

portanto $\Lambda(\bar{x}) \in \mathbb{R}$ *e verifica-se (iv).*

Vejamos agora (H1). Seja x *uma função admissível. Como, para qualquer* $v = (v_1, v_2) \in K$*, temos*

$$\langle (1, 1), (v_1, v_2) \rangle = v_1 + v_2 \geq \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = |v|$$

então

$$\int_0^1 |x'(t)|\, dt \leq \int_0^1 \langle (1, 1), x'(t) \rangle\, dt = \int_0^1 (x_1'(t) + x_2'(t))\, dt = x_1(1) - x_1(0) + x_2(1) - x_2(0) = \delta_1 + \delta_2.$$

Dado que

$$\underset{0 \leq t \leq 1}{infess} |x'(t)| \leq |x'(t)| \quad qs \text{ em } [0, 1]$$

então vem

$$\underset{0 \leq t \leq 1}{infess} |x'(t)| = \int_0^1 \underset{0 \leq t \leq 1}{infess} |x'(t)| \leq \int_0^1 |x'(t)|\, dt \leq \delta_1 + \delta_2$$

e portanto verifica-se (H1) para qualquer $k > \delta_1 + \delta_2$.

Finalmente, vejamos (H2). Temos

$$\begin{aligned}L(x, v) - \langle v, \nabla_v L(x, v) \rangle &= e^{-v_1} + v_2^2 + v_1 g(x) - \left\langle (v_1, v_2), \left(-e^{-v_1} + g(x), 2v_2\right) \right\rangle \\ &= e^{-v_1} + v_2^2 + v_1 g(x) - v_1 \left(-e^{-v_1} + g(x)\right) - 2v_2^2 = e^{-v_1}(1 + v_1) - v_2^2.\end{aligned}$$

Pelo que

$$\lim_{\beta \to +\infty} \sup_{\substack{x \in \Omega, v \in K \\ |v| > \beta}} \{L(x, v) - \langle v, \nabla_v L(x, v) \rangle\} = \lim_{\beta \to +\infty} \sup_{\substack{x \in \Omega, v \in K \\ |v| > \beta}} \left\{e^{-v_1}(1 + v_1) - v_2^2\right\} = \lim_{\beta \to +\infty} e^{-\beta}(1 + \beta) = 0$$

e

$$\begin{aligned}\inf_{\substack{x\in\Omega,v\in K\\|v|<k}}\{L(x,v)-\langle v,\nabla_v L(x,v)\rangle\} &= \inf_{\substack{x\in\Omega,v\in K\\|v|<k}}\left\{e^{-v_1}(1+v_1)-v_2^2\right\}\\ &\geq \inf_{\substack{x\in\Omega,v\in K\\|v|<k}}\left\{e^{-v_1}(1+v_1)\right\}+\inf_{\substack{x\in\Omega,v\in K\\|v|<k}}\left\{-v_2^2\right\}\\ &= e^{-k}(1+k)-k^2.\end{aligned}$$

Segue que $(*)$ *verifica-se para qualquer* k *suficientemente pequeno, isto é, para qualquer* $k>0$ *tal que*

$$0<e^{-k}(1+k)-k^2,$$

e portanto para $\delta_1+\delta_2$ *suficientemente pequeno. O Teorema 5.2.8 dá a existência de uma solução lipschitziana.*

5.2.5 O conjunto K tem de ser um cone

Pode-se pensar que, no Teorema 5.2.8, a restrição de K ser um cone é um truque para a demonstração. Contudo, o seguinte exemplo mostra que quando K é apenas um conjunto convexo fechado contendo o 0 mesmo que se verifiquem todas as outras hipóteses do teorema a existência de solução pode falhar.

Exemplo 5.2.16 *Fixemos* $n=2$, $T=1$ *e consideremos o problema de minimização de*

$$\Lambda(x):=\int_0^1\left(\sqrt{1+(x_2'(t))^2}-rx_1'(t)\sin|x_2(t)|\right)dt$$

na classe das funções $x\in AC\left([0,1],\mathbb{R}^2\right)$ *tais que*

$$x(0)=(0,0),\quad x(1)=\left(1,\frac{\pi}{2}\right)\quad e\quad x'(t)\in K\quad qs,$$

onde r *é uma constante positiva e* $K:=\{(v_1,v_2):0\leq v_1\leq 1, v_2\geq 0\}$. *Notemos que* K *não é um cone pois* $(1/2,0)\in K$ *mas* $3(1/2,0)=(3/2,0)\notin K$.

Os conjuntos $\Omega:=[0,1]\times[0,\pi/2]$, $C:=\{(0,0,1,\pi/2)\}$ *verificam as hipóteses básicas (i), (iii) e (iv).*

A função $L:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *definida por*

$$L(x,v):=\sqrt{1+v_2^2}-rv_1\sin|x_2|$$

é contínua e portanto verifica (ii). Para cada $x\in\Omega$ *fixado, a função* $v\to L(x,v)$ *é convexa no seu domínio,* $\operatorname{dom}L(x,\cdot)=\mathbb{R}^2$, *logo verifica (ii1). Além disso, temos*

$$L(x,v)=\sqrt{1+v_2^2}-rv_1\sin|x_2|\geq 1-rv_1\sin|x_2|\geq 1-rv_1\geq 1-r\in\mathbb{R}\qquad\forall(x,v)\in\Omega\times\mathbb{R}^2,$$

o que mostra que L *é limitada inferiormente em* $\Omega\times\mathbb{R}^2$ *e, em particular, verifica (ii2).*

Consideremos a função lipschitziana $\bar{x}:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ *definida por* $\bar{x}(t):=\left(t,\frac{\pi}{2}t\right)$. *Esta função é admissível e*

$$\begin{aligned}\Lambda(\bar{x}) &= \int_0^1\left(\sqrt{1+(\bar{x}_2'(t))^2}-r\bar{x}_1'(t)\sin|\bar{x}_2(t)|\right)dt=\int_0^1\left(\sqrt{1+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}-r\sin\left|\frac{\pi}{2}t\right|\right)dt\\ &= \sqrt{1+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}+\frac{2r}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)=\sqrt{1+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}-\frac{2r}{\pi}\in\mathbb{R},\end{aligned}$$

logo $\bar{x}$ *verifica (v).*

Vejamos (H1). Fixemos $x\in\Gamma(\bar{x})$. *Temos*

$$\begin{aligned}L(x(t),x'(t)) &= \sqrt{1+(x_2'(t))^2}-rx_1'(t)\sin|x_2(t)|\geq|x_2'(t)|-rx_1'(t)\sin|x_2(t)|\\ &\geq |x_2'(t)|-rx_1'(t)\geq|x_2'(t)|-r\qquad qs\ em\ [0,1]\end{aligned}$$

e portanto

$$\Lambda(\bar{x}) \geq \Lambda(x) = \int_0^1 L(x(t), x'(t))\, dt \geq \int_0^1 (|x_2'(t)| - r)\, dt,$$

o que implica

$$\int_0^1 |x_2'(t)|\, dt \leq \Lambda(\bar{x}) + r. \tag{5.31}$$

Por definição

$$\underset{0\leq t\leq 1}{\mathit{inf\,ess}} |x_2'(t)| \leq |x_2'(t)| \qquad \mathit{qs\ em}\ [0,1]$$

então, por (5.31),

$$\underset{0\leq t\leq 1}{\mathit{inf\,ess}} |x_2'(t)|\, dt = \int_0^1 \underset{0\leq t\leq 1}{\mathit{inf\,ess}} |x_2'(t)|\, dt \leq \int_0^1 |x_2'(t)|\, dt \leq \Lambda(\bar{x}) + r.$$

Além disso, $|x_1'(t)|$ *é limitado por* 1 *e*

$$|x'(t)| = \sqrt{|x_1'(t)|^2 + |x_2'(t)|^2} \leq |x_1'(t)| + |x_2'(t)| \leq 1 + |x_2'(t)| \qquad \mathit{qs\ em}\ [0,1].$$

Assim [7]

$$\underset{0\leq t\leq 1}{\mathit{inf\,ess}} |x'(t)| \leq \underset{0\leq t\leq 1}{\mathit{inf\,ess}} (1 + |x_2'(t)|) = 1 + \underset{0\leq t\leq 1}{\mathit{inf\,ess}} |x_2'(t)| \leq 1 + \Lambda(\bar{x}) + r$$

e portanto (H1) verifica-se para qualquer $k > 1 + \Lambda(\bar{x}) + r$.

Vejamos agora (H2). Temos

$$\begin{aligned} L(x,v) - \langle v, \nabla_v L(x,v)\rangle &= \sqrt{1+v_2^2} - rv_1 \sin|x_2| - \left\langle (v_1, v_2), \left(-r\sin|x_2|, \frac{v_2}{\sqrt{1+v_2^2}}\right)\right\rangle \\ &= \sqrt{1+v_2^2} - \frac{v_2^2}{\sqrt{1+v_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+v_2^2}}. \end{aligned}$$

Pelo que

$$\lim_{\beta\to+\infty} \sup_{\substack{x\in\Omega, v\in K \\ |v|>\beta}} \{L(x,v) - \langle v, \nabla_v L(x,v)\rangle\} = \lim_{\beta\to+\infty} \sup_{\substack{x\in\Omega, v\in K \\ |v|>\beta}} \frac{1}{\sqrt{1+v_2^2}}$$

---

[7] Sejam $u, v : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ tais que $u(t) \leq v(t)$ qs em $[0,T]$. Temos

$$\underset{0\leq t\leq T}{\inf \operatorname{ess}} u(t) := \sup\{\delta : u(t) \geq \delta \text{ qs em } [0,T]\} \leq u(t) \quad \text{qs em } [0,T]$$

e portanto

$$\underset{0\leq t\leq T}{\inf \operatorname{ess}} u(t) \leq u(t) \leq v(t) \quad \text{qs em } [0,T].$$

Por outro lado,

$$\underset{0\leq t\leq T}{\inf \operatorname{ess}} v(t) \geq \delta$$

qualquer que seja o δ tal que $v(t) \geq \delta$ qs em $[0,T]$ e em particular para $\delta := \underset{0\leq t\leq T}{\inf \operatorname{ess}} u(t)$. Assim vem

$$\underset{0\leq t\leq T}{\inf \operatorname{ess}} u(t) \leq \underset{0\leq t\leq T}{\inf \operatorname{ess}} v(t),$$

como queriamos.

mas $|v| > \beta$ *e* $0 \le v_1 \le 1$ *implicam*

$$\beta < |v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \le \sqrt{1 + v_2^2}$$

então

$$\frac{1}{\sqrt{1+v_2^2}} < \frac{1}{\beta}$$

e portanto

$$\lim_{\beta \to +\infty} \sup_{\substack{x\in\Omega, v\in K \\ |v|>\beta}} \{L(x,v) - \langle v, \nabla_v L(x,v)\rangle\} = 0.$$

Por outro lado, temos

$$\inf_{\substack{x\in\Omega, v\in K \\ |v|<k}} \{L(x,v) - \langle v, \nabla_v L(x,v)\rangle\} = \inf_{\substack{x\in\Omega, v\in K \\ |v|<k}} \frac{1}{\sqrt{1+v_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}},$$

pois

$$|v| < k \Rightarrow |v_2| < k \Rightarrow \sqrt{1+v_2^2} < \sqrt{1+k^2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+v_2^2}} > \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}.$$

Concluimos assim que $(*)$ *se verifica para qualquer* $k > 0$ *e, em particular, para aqueles em que se verifica (H1). Logo verifica-se (H2). Então verificam-se todas as hipóteses do Teorema 5.2.8 excepto* K *ser um cone.*

Mostremos agora que para r *suficientemente grande o problema não admite solução. Para isso observemos que as restrições implicam que qualquer função admissível* x *tem que ter* $x_1(t) = t$*. Dado isto, o problema dado é equivalente ao problema de minimização de*

$$\int_0^1 \left(\sqrt{1+y'^2} - r \sin|y|\right) dt$$

na classe das funções $y \in AC([0,1], \mathbb{R})$ *tais que* $y(0) = 0$, $y(1) = \pi/2$*. Mostremos que não existe solução quando* r *excede* $1 + \pi/2$*. Fixemos* $r > 1 + \pi/2$*. Tal como no Exemplo 5.2.12 mostra-se que se* y *é solução então* $\Lambda(y) > 0$*. Mas se considerarmos a sucessão de funções admissíveis* $y_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ *dadas por*

$$y_i(t) := \begin{cases} i\frac{\pi}{2}t & se\ t \in \left[0, \frac{1}{i}\right] \\ \frac{\pi}{2} & se\ t \in \left(\frac{1}{i}, 1\right] \end{cases} \qquad \forall i \in \mathbb{N},$$

obtemos

$$\begin{aligned} \Lambda(y_i) &= \int_0^{\frac{1}{i}} \left(\sqrt{1+\left(i\frac{\pi}{2}\right)^2} - r\sin\left|i\frac{\pi}{2}t\right|\right) dt + \int_{\frac{1}{i}}^1 \left(1 - r\sin\left|\frac{\pi}{2}\right|\right) dt \\ &= \frac{1}{i}\sqrt{1+\left(i\frac{\pi}{2}\right)^2} + r\left(\cos\left(i\frac{\pi}{2}\frac{1}{i}\right) - \cos 0\right) + (1-r)\left(1 - \frac{1}{i}\right) \\ &= \sqrt{\frac{1+i^2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{i^2}} - r + (1-r)\left(1-\frac{1}{i}\right) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} + 1 - r < 0, \end{aligned}$$

o que mostra que não pode existir nenhuma solução y *com* $\Lambda(y) > 0$*. Logo o problema não tem solução para qualquer* $r > 1 + \pi/2$*.*

5.3 O problema não-autónomo

5.3.1 Hipóteses básicas

O problema (P) que iremos estudar nesta secção consiste em minimizar o funcional integral

$$\Lambda(x) := \int_0^T L(t, x(t), x'(t))\, dt$$

na classe das funções $x \in AC([0,T], \mathbb{R}^n)$ verificando

$$(x(0), x(T)) \in C, \quad x(t) \in \Omega \ \forall t \in [0,T], \quad x'(t) \in K \ \text{ qs},$$

supondo que se verificam as seguintes **hipóteses básicas**:

(i) os conjuntos Ω, C e K são como na Secção 5.2, isto é, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ fechado, $C \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ fechado e $K \subseteq \mathbb{R}^n$ cone convexo fechado;

(ii) a função $L : [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ é *sci* em (x, v) e é tal que:

- **(ii1)** para cada $(t, x) \in [0,T] \times \Omega$ a função $v \to L(t, x, v)$ é convexa e tem como domínio um conjunto aberto convexo não-vazio;
- **(ii2)** para $x \in \Omega, t \in [0,T]$ e $v \in dom\, L(t, x, \cdot)$ a função $s \to L(s, x, v)$ é lipschitziana em $[0,T]$;
- **(ii3)** existem constantes não-negativas κ e η (não dependentes de (t, x, v)) tais que [8]

$$|L_s(s, x, v)| \le \kappa L(s, x, v) + \eta; \tag{5.32}$$

(iii) pelo menos um dos seguintes conjuntos é compacto

$$C_x := \{x \in \mathbb{R}^n : \text{para algum } y \in \mathbb{R}^n,\ (x, y) \in C\}$$
$$C_y := \{y \in \mathbb{R}^n : \text{para algum } x \in \mathbb{R}^n,\ (x, y) \in C\};$$

(iv) existe pelo menos uma função lipschitziana $\bar{x}$ admissível para o problema (P) e tal que $\Lambda(\bar{x})$ é finito.

Tal como na Secção 5.2, denotamos por $\Gamma(\bar{x})$ o conjunto de subnível para as funções admissíveis

$$\Gamma(\bar{x}) := \{x \in AC([0,T], \mathbb{R}^n) : (x(0), x(T)) \in C,\ x(t) \in \Omega\ \forall t \in [0,T],\ x'(t) \in K \text{ qs},\ \Lambda(x) \le \Lambda(\bar{x})\}.$$

Além disso, supomos ainda que

(H1) existe $k > 0$ tal que qualquer $x \in \Gamma(\bar{x})$ satisfaz

$$\inf_{0 \le t \le T} \operatorname{ess} |x'(t)| < k;$$

(H2)' a seguinte desigualdade

$$\lim_{\beta \to +\infty} \sup_{\substack{x \in \Omega, v \in K \\ |v| > \beta \\ t \in [0,T]}} \sup_{p \in \partial_v L(t,x,v)} \{L(t, x, v) - \langle v, p \rangle\} + \{\kappa \Lambda(\bar{x}) + \eta T\} < \inf_{\substack{x \in \Omega, v \in K \\ |v| < k \\ t \in [0,T]}} \inf_{p \in \partial_v L(t,x,v)} \{L(t, x, v) - \langle v, p \rangle\} \tag{$*$}'$$

verifica-se para algum k verificando (H1).

---

[8] Pela hipótese (ii2) acima, para $x \in \Omega, t \in [0,T]$ e $v \in dom\, L(t, x, \cdot)$ fixados e para quase todo $s \in [0,T]$ existe a derivada $L_s(s, x, v)$.

As hipóteses (ii) e (ii2) implicam que L é sci em (t,x,v) (ver Proposição 5.4.13) então, pela Proposição 2.17.5, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto

$$\{(t,x,v) \in [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^n : L(t,x,v) > \alpha\}$$

é aberto. Portanto, por definição, L é $\mathcal{L} \times \mathcal{B}_{2n}$-mensurável. Assim, para qualquer função $x \in AC([0,T],\mathbb{R}^n)$ a função $t \to L(t,x(t),x'(t))$ é Lebesgue-mensurável em $[0,T]$ (ver Proposição 2.7.24). Por outro lado, como L não toma valores negativos então, para qualquer $x \in AC([0,T],\mathbb{R}^n)$,

$$L(t,x(t),x'(t)) \geq 0 \quad \text{qs em } [0,T],$$

o que implica

$$\int_0^T L(t,x(t),x'(t))\,dt \geq 0.$$

Podemos assim concluir que o funcional

$$\Lambda(x) = \int_0^T L(t,x(t),x'(t))\,dt$$

está bem definido na classe de funções

$$\Delta := \{x \in AC([0,T],\mathbb{R}^n) : (x(0),x(T)) \in C,\ x(t) \in \Omega \ \ \forall t \in [0,T],\ x'(t) \in K \text{ qs}\},$$

tomando possivelmente o valor $+\infty$.

Tal como no caso autónomo, (H1) e (H2)' verificam-se quando L é coerciva.

Note-se que (H2)' se reduz a (H2) quando L é autónomo, pois neste caso podemos considerar $\kappa = \eta = 0$.

5.3.2 O resultado principal

Teorema 5.3.1 *Suponhamos que se verificam as hipóteses básicas, também como (H1) e (H2)'. Então (P) admite uma solução. Além disso, qualquer solução $\widetilde{x}$ é lipschitziana e satisfaz*

$$L(t,\widetilde{x}(t),\widetilde{x}'(t)) - \langle \widetilde{x}'(t),p(t)\rangle = c + \int_0^t \xi(\tau)\,d\tau \quad qs,$$

onde c é uma constante, e onde p e ξ são funções mensuráveis satisfazendo

$$\begin{aligned} p(t) &\in \partial_v L(t,\widetilde{x}(t),\widetilde{x}'(t)) \quad && qs \\ \xi(t) &\in \partial_t L(t,\widetilde{x}(t),\widetilde{x}'(t)) \quad && qs. \end{aligned}$$

Demonstração:

Esta demonstração é muito parecida à do Teorema 5.2.8, faremos aqui apenas as alterações necessárias.

Seguimos a referida demonstração até à primeira aplicação do Teorema 5.4.16, que neste caso nos permite concluir que

$$L(t,x^\alpha(t),x^{\alpha\prime}(t)) - \langle x^{\alpha\prime}(t),p(t)\rangle + r\theta(|x^{\alpha\prime}(t)|) - r|x^{\alpha\prime}(t)|\,\theta'(|x^{\alpha\prime}(t)|) = c + \int_0^t \xi(\tau)\,d\tau \quad \text{qs}, \tag{5.33}$$

para alguma uma constante c, alguma função integrável $\xi(\cdot)$ e alguma função mensurável $p(\cdot)$ tais que

$$\begin{aligned} \xi(t) &\in \partial_t L(t,x^\alpha(t),x^{\alpha\prime}(t)) \quad && \text{qs} \\ p(t) &\in \partial_v L(t,x^\alpha(t),x^{\alpha\prime}(t)) \quad && \text{qs}. \end{aligned}$$

Sejam

$$I_1 := \{t \in [0,T] : |x^{\alpha\prime}(t)| > \beta,\ p(t) \in \partial_v L(t,x^\alpha(t),x^{\alpha\prime}(t)),\ \text{verifica-se (5.33)}\}$$

e

$$I_2 := \{t \in [0,T] : |x^{\alpha\prime}(t)| < k,\ p(t) \in \partial_v L(t, x^\alpha(t), x^{\alpha\prime}(t)),\ \text{verifica-se (5.33)}\}.$$

Então temos, por I_1 ter medida positiva,

$$\begin{aligned} c &\leq \sup_{\substack{x\in\Omega, v\in K \\ |v|>\beta \\ t\in I_1}} \sup_{p\in\partial_v L(t,x,v)} \left\{ L(t,x,v) - \langle v,p\rangle + r\theta(|v|) - r|v|\theta'(|v|) - \int_0^t \xi(\tau)\,d\tau \right\} \\ &\leq \sup_{\substack{x\in\Omega, v\in K \\ |v|>\beta \\ t\in [0,T]}} \sup_{p\in\partial_v L(t,x,v)} \left\{ L(t,x,v) - \langle v,p\rangle + r\theta(|v|) - r|v|\theta'(|v|) - \int_0^t \xi(\tau)\,d\tau \right\} \end{aligned}$$

donde

$$c \leq \sup_{\substack{x\in\Omega, v\in K \\ |v|>\beta \\ t\in [0,T]}} \sup_{p\in\partial_v L(t,x,v)} \{L(t,x,v) - \langle v, \partial_v L(t,x,v)\rangle\} + r \sup_{\substack{x\in\Omega, v\in K \\ |v|>\beta \\ t\in [0,T]}} \{\theta(|v|) - |v|\theta'(|v|)\} + \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t -\xi(\tau)\,d\tau.$$

Por outro lado, como I_2 tem medida positiva,

$$\begin{aligned} c &\geq \inf_{\substack{x\in\Omega, v\in K \\ |v|<k \\ t\in I_2}} \inf_{p\in\partial_v L(t,x,v)} \left\{ L(t,x,v) - \langle v,p\rangle + r\theta(|v|) - r|v|\theta'(|v|) - \int_0^t \xi(\tau)\,d\tau \right\} \\ &\geq \inf_{\substack{x\in\Omega, v\in K \\ |v|<k \\ t\in [0,T]}} \inf_{p\in\partial_v L(t,x,v)} \left\{ L(t,x,v) - \langle v,p\rangle + r\theta(|v|) - r|v|\theta'(|v|) - \int_0^t \xi(\tau)\,d\tau \right\} \end{aligned}$$

donde

$$c \geq \inf_{\substack{x\in\Omega, v\in K \\ |v|<k \\ t\in [0,T]}} \inf_{p\in\partial_v L(t,x,v)} \{L(t,x,v) - \langle v,p\rangle\} + r \inf_{\substack{x\in\Omega, v\in K \\ |v|<k \\ t\in [0,T]}} \{\theta(|v|) - |v|\theta'(|v|)\} + \inf_{t\in[0,T]} \int_0^t -\xi(\tau)\,d\tau.$$

Então

$$\begin{aligned} 0 \leq\ & \sup_{\substack{x\in\Omega, v\in K \\ |v|>\beta \\ t\in [0,T]}} \sup_{p\in\partial_v L(t,x,v)} \{L(t,x,v) - \langle v,p\rangle\} - \inf_{\substack{x\in\Omega, v\in K \\ |v|<k \\ t\in [0,T]}} \inf_{p\in\partial_v L(t,x,v)} \{L(t,x,v) - \langle v,p\rangle\} + \\ & + r \sup_{\substack{x\in\Omega, v\in K \\ |v|>\beta \\ t\in [0,T]}} \{\theta(|v|) - |v|\theta'(|v|)\} - r \inf_{\substack{x\in\Omega, v\in K \\ |v|<k \\ t\in [0,T]}} \{\theta(|v|) - |v|\theta'(|v|)\} + \\ & + \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t -\xi(\tau)\,d\tau - \inf_{t\in[0,T]} \int_0^t -\xi(\tau)\,d\tau \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} & r \left[\inf_{\substack{x\in\Omega, v\in K \\ |v|<k \\ t\in [0,T]}} \{\theta(|v|) - |v|\theta'(|v|)\} - \sup_{\substack{x\in\Omega, v\in K \\ |v|>\beta \\ t\in [0,T]}} \{\theta(|v|) - |v|\theta'(|v|)\} \right] \\ \leq\ & \sup_{\substack{x\in\Omega, v\in K \\ |v|>\beta \\ t\in [0,T]}} \sup_{p\in\partial_v L(t,x,v)} \{L(t,x,v) - \langle v,p\rangle\} - \inf_{\substack{x\in\Omega, v\in K \\ |v|<k \\ t\in [0,T]}} \inf_{p\in\partial_v L(t,x,v)} \{L(t,x,v) - \langle v,p\rangle\} + \\ & + \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t -\xi(\tau)\,d\tau - \inf_{t\in[0,T]} \int_0^t -\xi(\tau)\,d\tau. \end{aligned}$$

Estas estimativas juntamente com (H2)' completam a demonstração tal como no caso autónomo, desde que mostremos que o termo

$$\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t -\xi(\tau)\,d\tau - \inf_{t\in[0,T]}\int_0^t -\xi(\tau)\,d\tau \tag{5.34}$$

é majorado por

$$\kappa\Lambda(\bar{x})+\eta T.$$

Para ver isto, notemos que o termo que estamos a tentar limitar se pode escrever na forma

$$\pm\int_{t_0}^{t_1}\xi(\tau)\,d\tau,$$

onde t_0 e t_1 são pontos no intervalo $[0,T]$, com $t_0 < t_1$. De facto, pela Proposição 2.14.11, como $\xi\in L^1([0,T],\mathbb{R}^n)$ então a função $g:[0,T]\to\mathbb{R}$ definida por

$$g(t):=\int_0^t\xi(\tau)\,d\tau$$

é absolutamente contínua e portanto existem $t_0,t_1\in[0,T]$ tais que

$$\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t -\xi(\tau)\,d\tau := \int_0^{t_1} -\xi(\tau)\,d\tau \quad \text{e} \quad \inf_{t\in[0,T]}\int_0^t -\xi(\tau)\,d\tau := \int_0^{t_0} -\xi(\tau)\,d\tau.$$

Assim, (5.34) é equivalente a

$$\int_0^{t_1} -\xi(\tau)\,d\tau - \int_0^{t_0} -\xi(\tau)\,d\tau = -\int_0^{t_1}\xi(\tau)\,d\tau + \int_0^{t_0}\xi(\tau)\,d\tau$$

e se $t_0\le t_1$ vem

$$-\int_{t_0}^{t_1}\xi(\tau)\,d\tau,$$

caso contrário vem

$$\int_{t_1}^{t_0}\xi(\tau)\,d\tau,$$

como se queria.

Como

$$\xi(t)\in\partial_t L(t,x^\alpha(t),x^{\alpha\prime}(t)) \quad \text{qs em } [0,T],$$

temos, pela hipótese (ii2),

$$|\xi(t)|\le\kappa L(t,x^\alpha(t),x^{\alpha\prime}(t))+\eta \quad \text{qs em } [0,T].$$

Então

$$\pm\int_{t_0}^{t_1}\xi(\tau)\,d\tau\le\left|\int_{t_0}^{t_1}\xi(\tau)\,d\tau\right|\le\int_{t_0}^{t_1}|\xi(\tau)|\,d\tau\le\int_{t_0}^{t_1}\{\kappa L(\tau,x^\alpha(\tau),x^{\alpha\prime}(\tau))+\eta\}\,d\tau,$$

como L é não-negativa e $\bar{x}$ é admissível para o problema resolvido por x^α obtemos

$$\int_{t_0}^{t_1}\{\kappa L(\tau,x^\alpha(\tau),x^{\alpha\prime}(\tau))+\eta\}\,d\tau\le\kappa\int_0^T L(\tau,x^\alpha(\tau),x^{\alpha\prime}(\tau))\,d\tau+\eta T=\kappa\Lambda(x^\alpha)+\eta T\le\kappa\Lambda(\bar{x})+\eta T.$$

A demonstração segue como no Teorema 5.2.8.■

5.3.3 Um exemplo

Consideremos $n = 1, \eta = 1, T = 1$ e $L : [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$L(t,x,v) := \varphi(t)\sqrt{1+v^2},$$

onde $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável e tal que

$$m := \min_{t\in[0,1]} \varphi(t) > 0.$$

Consideremos o problema (P) de minimização de

$$\Lambda(x) := \int_0^1 L(t, x(t), x'(t))\,dt$$

na classe das funções $x \in AC([0,1], \mathbb{R})$ tais que $x(0) = 0$, $x(1) = c > 0$.

Consideremos $K = \mathbb{R}$. Temos $C = \{(0,c)\}$ e, dado que L verifica a condição de crescimento linear com $\varepsilon := m$ e $\gamma := 0$ pois

$$L(t,x,v) \geq m|v| \quad \forall (t,x,v) \in [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

podemos supor que Ω é um conjunto compacto, sem alterar a natureza do problema. Logo verifica-se a hipótese básica (i).

A função L é contínua, em particular verifica (ii); e para cada $(t,x) \in [0,1] \times \Omega$ a função $v \to L(t,x,v)$ é convexa em $dom\,L(t,x,\cdot) = \mathbb{R}$ e portanto verifica (ii1). Além disso, para cada $x \in \Omega, t \in [0,1]$ e $v \in dom\,L(t,x,\cdot)$ a função $s \to L(s,x,v)$ é lipschitziana em $[0,1]$. De facto, pela Proposição 2.14.13,

$$|\varphi(s_1) - \varphi(s_2)| \leq \mu|s_1 - s_2| \quad \forall s_1, s_2 \in [0,1],$$

onde

$$\mu := \max_{t\in[0,1]} |\varphi'(t)|$$

e portanto também a função $s \to L(s,x,v)$ é lipschitziana em $[0,1]$ com constante μ, glogo verifica-se (ii2).

Por outro lado, temos

$$|\varphi'(t)| \leq \mu \leq \mu\frac{\varphi(t)}{m}$$

para qualquer $t \in [0,1]$, e segue que L verifica (ii3) com $\kappa = \mu/m$ e $\eta = 0$.

Consideremos a função lipschitziana $\bar{x} : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $\bar{x}(t) := ct$. Esta função é admissível para (P) e

$$\Lambda(\bar{x}) = \int_0^1 \varphi(t)\sqrt{1+c^2}dt = \bar{\varphi}\sqrt{1+c^2} \leq m_1\sqrt{1+c^2},$$

onde

$$\bar{\varphi} := \int_0^1 \varphi(t)\,dt \quad \text{e} \quad m_1 := \max_{t\in[0,1]} \varphi(t),$$

então verifica-se (iv).

Segue, como no caso coercivo, que (H1) se verifica para qualquer

$$k > \frac{\Lambda(\bar{x}) - \gamma T}{\varepsilon T} = \frac{\bar{\varphi}\sqrt{1+c^2}}{m}$$

Resta-nos verificar (H2)' para algum tal k. Temos

$$L(t,x,v) - vL_v(t,x,v) = \frac{\varphi(t)}{\sqrt{1+v^2}},$$

então

$$\lim_{\beta\to+\infty} \sup_{\substack{x\in\Omega, v\in\mathbb{R}\\ |v|>\beta\\ t\in[0,1]}} \{L(t,x,v) - \langle v,p\rangle\} = \lim_{\beta\to+\infty} \sup_{\substack{x\in\Omega, v\in\mathbb{R}\\ |v|>\beta\\ t\in[0,1]}} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{1+v^2}} = \lim_{\beta\to+\infty} \frac{m_1}{\sqrt{1+\beta^2}} = 0$$

e

$$\inf_{\substack{x\in\Omega, v\in\mathbb{R}\\ |v|<k\\ t\in[0,1]}} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{1+v^2}} = \frac{m}{\sqrt{1+k^2}}.$$

Como

$$\kappa\Lambda(\bar{x}) + \eta T = \frac{\mu}{m}\bar{\varphi}\sqrt{1+c^2}$$

então, para algum k suficientemente próximo de $\bar{\varphi}\sqrt{1+c^2}/m$, $(*)'$ reduz-se a

$$\frac{\mu}{m}\bar{\varphi}\sqrt{1+c^2} < \frac{m}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{m^2}{\sqrt{m^2+\bar{\varphi}^2(1+c^2)}},$$

o que implica

$$\mu\bar{\varphi}\sqrt{1+c^2}\sqrt{m^2+\bar{\varphi}^2(1+c^2)} < m^3.$$

Assim, como $\bar{\varphi}$ é limitada superiormente por $m+\mu$, uma condição suficiente para que (H2)' se verifique é a seguinte

$$2\mu(m+\mu)\sqrt{1+c^2}\sqrt{m^2+(m+\mu)^2(1+c^2)} < m^3.$$

Portanto deduzimos:

Proposição 5.3.2 *Para m e c dados o problema (P) admite uma solução se φ é quase constante; isto é, se μ é suficientemente pequeno.*

Na análise anterior, falámos de condições que são apenas suficientes para garantir a existência de uma solução. No entanto é possivel uma caracterização exacta das condições em φ para as quais existe solução: o problema (P) admite uma solução x se e só se

$$|x(T) - x(0)| \leq \int_0^T \frac{m}{\sqrt{\varphi(t)^2 - m^2}}dt$$

(ver [9], 14.3.iv).

5.3.4 O caso $n = 1$

Quando $n = 1$ pode-se introduzir algo diferente que nos permite usar o Teorema do Valor Médio para determinar o k invocado em (H1) e (H2)'. Adicionamos as seguintes condições às hipóteses básicas:

(A) para qualquer função $x \in \Gamma(\bar{x})$ tem-se $x(t) \in \operatorname{int}\Omega \quad \forall t \in [0,T]$;

(B) a função L é localmente lipschitziana em (t,x,v) e verifica, para constantes k_0 e c_0,

$$|\partial_x L(t,x,v)| \leq k_0 |L(t,x,v)| + c_0 \quad \forall (t,x,v) \in [0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}.$$

Não supomos (H1), em vez disso supomos que a desigualdade $(*)'$ se verifica para algum $k > k_0$, onde

$$k_0 := \sup\left\{\frac{|x_1 - x_0|}{T} : (x_0, x_1) \in C\right\}.$$

Teorema 5.3.3 *Quando $n = 1$ e se verificam as hipóteses acima, são válidas as conclusões do Teorema 5.3.1.*

Demonstração:
A demonstração é igual à do Teorema 5.3.1 até ao ponto em que se aplica o Teorema 5.4.16, ou melhor, a única alteração é na determinação do minorante para c. A segunda parte do Teorema 5.4.16 afirma que x^α é continuamente diferenciável e então, pelo Teorema do Valor Médio [9], existe $t^* \in (0, T)$ tal que

$$x^{\alpha\prime}(t^*) = \frac{x^\alpha(T) - x^\alpha(0)}{T}.$$

Como x^α é admissível para $P_\theta(\alpha)$ então $(x^\alpha(0), x^\alpha(T)) \in C$ e portanto

$$|x^{\alpha\prime}(t^*)| = \frac{|x^\alpha(T) - x^\alpha(0)|}{T} \leq k_0,$$

pelo que

$$\inf_{0\leq t\leq T} \operatorname{ess} |x^{\alpha\prime}(t)| \leq k_0.$$

Então, por hipótese, $(*)'$ verifica-se para algum $k > k_0$. A demonstração prossegue sem alterações.∎

Exemplo 5.3.4 *Voltemos ao Exemplo 5.2.12, no caso particular $n = 1$.*

Dado que L não depende explicitamente de t então $\kappa = \eta = 0$ e portanto verifica-se (ii3). Como $\operatorname{int}\Omega = \Omega = \mathbb{R}$ então (A) verifica-se pela definição de $\Gamma(\bar{x})$.

Para cada $(t, x) \in [0, 1] \times \Omega$ a função $v \longrightarrow \sqrt{1 + v^2}$ é localmente lipschitziana em $\operatorname{int}(\operatorname{dom} L(t, x, \cdot)) = \mathbb{R}$ (ver Proposição 2.16.27), e pela Proposição 2.14.13, a função $x \longrightarrow \sin|x|$ também é localmente lipschitziana em Ω com constante 1. Assim para cada $A \times B \times C \subset [0, 1] \times \Omega \times \mathbb{R}$ limitado temos

$$\begin{aligned}
|L(t_1, x_1, v_1) - L(t_2, x_2, v_2)| &= \left|\sqrt{1 + v_1^2} - \sqrt{1 + v_2^2} - r\sin|x_1| + r\sin|x_2|\right| \\
&\leq \left|\sqrt{1 + v_1^2} - \sqrt{1 + v_2^2}\right| + r\,|\sin|x_1| + \sin|x_2|| \\
&\leq K_C|v_1 - v_2| + r|x_1 - x_2| \\
&\leq (K_C + r)(|v_1 - v_2| + |x_1 - x_2| + |t_1 - t_2|) \\
&= (K_C + r)\,|(t_1, x_1, v_1) - (t_2, x_2, v_2)|,
\end{aligned}$$

onde K_C é a constante de Lipschitz da função $v \longrightarrow \sqrt{1 + v^2}$ no conjunto C. Além disso, temos

$$|L_x(t, x, v)| = \left|-r\frac{x}{|x|}\cos x\right| \leq r \quad \forall (t, x, v) \in [0, 1] \times \Omega \times \mathbb{R}$$

e portanto verifica-se (B).

Considerando $\bar{x} \equiv 0$ vem $\Lambda(\bar{x}) = 1$ e como $\kappa = \eta = 0$ então a desigualdade $(*)'$ reduz-se a

$$2r\sqrt{1 + k^2} < 1.$$

Como $C = \{(0, 0)\}$ então temos $k_0 = 0$ e portanto $(*)'$ verifica-se para algum $k > k_0$ desde que $2r < 1$. Assim, para qualquer $r < 1/2$, verificam-se todas as hipóteses do Teorema 5.3.3 e portanto conclui-se que existe solução. Isto é melhor do que obtivemos aplicando o Teorema 5.2.8.

[9] **Teorema do Valor Médio** (de Lagrange) Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se f é derivável em (a, b) então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstração:
Ver [30], pág. 213.

5.4 Anexos

5.4.1 Subgradientes proximais

Definição 5.4.1 *Seja C um subconjunto fechado e não-vazio de $\mathbb{R}^n$ e seja x um ponto de $\mathbb{R}^n$. A distância de x a C é dada por*

$$d_C(x) = \inf\{|x - c'| : c' \in C\}.$$

Proposição 5.4.2 *Seja C um subconjunto fechado e não-vazio de $\mathbb{R}^n$ e seja x um ponto de $\mathbb{R}^n$ não pertencente a C. Então existe pelo menos um ponto c em C que é o ponto, em C, mais próximo de x, isto é, tal que*

$$d_C(x) = |x - c|,$$

ou, que é o mesmo, tal que

$$|x - c'| \geq |x - c| \quad \forall c' \in C. \tag{5.35}$$

Demonstração:

Como o ínfimo de um conjunto de números reais é o limite de uma sucessão de elementos desse conjunto, temos

$$d_C(x) = \lim_{n \to \infty} |x - c_n|,$$

onde (c_n) é uma sucessão conveniente de pontos de C.

Da desigualdade

$$|c_n| \leq |x - c_n| + |x|$$

resulta que a sucessão (c_n) é limitada, pois é limitada a sucessão $(|x - c_n|)$, por ser convegente, e $|x|$ é um número real fixado. Assim, passando se necessário a uma subsucessão, podemos afirmar que existe $c \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} c_n = c$$

e como C é fechado temos mesmo $c \in C$. Além disso,

$$d_C(x) = \lim_{n \to \infty} |x - c_n| = |x - c|,$$

o que completa a demonstração.■

Assim, se c é o ponto mais próximo em C de x, a bola aberta de raio $|x - c|$ e centro em x não contém pontos de C e c pertence à fronteira.

Podemos reescrever (5.35) como se segue

$$\langle x - c', x - c' \rangle \geq \langle x - c, x - c \rangle,$$

bastando para isso elevar ambos os membros da referida desigualdade ao quadrado e expressando essa nova desigualdade em termos do produto interno. Agora expandindo o produto interno em ambos os membros e reorganizando os termos obtemos

$$\langle w, c' - c \rangle \leq \frac{1}{2} |c' - c|^2 \quad \forall c' \in C$$

onde $w = x - c$. Ou seja, mostrámos assim que

$$|x - c'| \geq |x - c| \Leftrightarrow \langle w, c' - c \rangle \leq \frac{1}{2} |c' - c|^2 \quad \forall c' \in C, \tag{5.36}$$

onde $w = x - c$.

A condição (5.36) está relacionada com o conceito de hiperplano de suporte. Com efeito, se o membro direito fosse substituido por 0, então (5.36) significaria que para qualquer ponto c' em C, o vector $c' - c$ faria um ângulo de amplitude $\pi/2$ ou mais, com o vector w, isto é, o hiperplano com direcção normal w e passando por c seria um hiperplano de suporte a C em c (todos os pontos de C estariam de um dos lados do hiperplano). A presença do termo quadrático modifica esta situação. Nem todos os pontos c' de C estão necessariamente de um dos lados do hiperplano, mas quando c' se aproxima de c o que acontece é isto: os pontos de C estão todos do mesmo lado de uma hipersuperfície.

Definição 5.4.3 *O vector w diz-se **perpendicular** (externo) ao conjunto C no ponto c.*

Definição 5.4.4 *Um **vector normal proximal** (externo) a C em c é um qualquer múltiplo não-negativo de um vector perpendicular a C em c.*

Equivalentemente, atendendo a (5.36), temos que

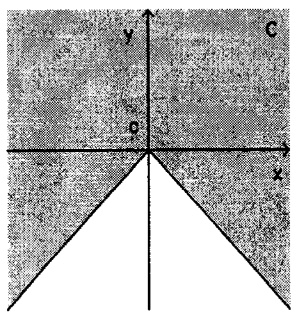
Proposição 5.4.5 *O vector ξ é um vector normal proximal a C no ponto c se e só se para algum escalar positivo σ, tivermos*

$$\langle \xi, c' - c \rangle \leq \sigma \left| c' - c \right|^2 \qquad \forall c' \in C.$$

Designamos por $\Pi_C(c)$ o conjunto dos vectores normais proximais ao conjunto C no ponto c. Nem todo o ponto c na fronteira de C admite um vector normal proximal não-trivial (ou seja, não-nulo). Isto é o que acontece, por exemplo, com o conjunto

$$C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y + |x| \geq 0 \right\}$$

e o ponto $c = (0, 0)$.



No entanto temos a seguinte

Proposição 5.4.6 *Qualquer ponto c na fronteira de C está arbitrariamente próximo de um ponto $\tilde{c}$ que admite um vector proximal normal (não-trivial).*

Demonstração:
Ver [32], Teorema 3C.4.

Definição 5.4.7 *Seja $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ uma função sci. Um vector ξ diz-se um **subgradiente proximal** de f em $x \in \operatorname{dom} f$ se existem $\sigma > 0$ e $\delta > 0$ tais que*

$$f(y) - f(x) + \sigma |y - x|^2 \geq \langle \xi, y - x \rangle \qquad \forall y \in x + \delta B.$$

Designamos por $\partial^\pi f(x)$ o conjunto de todos os subgradientes proximais de f em x e será referido como o subdiferencial proximal.

Proposição 5.4.8 *Seja $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ uma função sci. O vector ξ é um subgradiente proximal da função f em $x \in \operatorname{dom} f$ se e só se* [10]

$$(\xi, -1) \in \Pi_{epi\, f}(x, f(x)).$$

Demonstração:
Ver [32], Proposição 4A.3.

Proposição 5.4.9 *Seja $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ uma função sci. Se f é diferenciável à Gâteaux em x e com derivada $f'(x)$ então*

$$\partial^\pi f(x) \subseteq \{f'(x)\}.$$

Demonstração:
Ver [32], Corolário 4A.5.

Proposição 5.4.10 *Seja $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ uma função sci. Então o conjunto*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \partial^\pi f(x) \neq \emptyset\}$$

é um subconjunto denso de $\operatorname{dom} f$.

Demonstração:
Ver [32], Proposição 3C.6.

Proposição 5.4.11 *Seja U um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, sejam $f, g : U \to (-\infty, +\infty]$ funções sci finitas em $x^* \in U$, e seja $\xi \in \partial^\pi (f+g)(x^*)$. Então, para cada $\varepsilon > 0$ existem y^* e z^* em $x^* + \varepsilon B$ tais que*

$$f(y^*) \in f(x^*) + \varepsilon B$$
$$g(z^*) \in g(x^*) + \varepsilon B$$

e

$$\xi \in \partial^\pi f(y^*) + \partial^\pi g(z^*) + \varepsilon B.$$

Demonstração:
Ver [12], Proposição 1.4.

5.4.2 Um resultado em análise não-suave

Proposição 5.4.12 *Seja U um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e seja $f : U \to (-\infty, +\infty]$ uma função sci. Suponhamos que sempre que ξ é um subgradiente proximal de f em $x \in U$, temos $\xi = 0$. Então f é localmente constante em U.*

Demonstração:
Seja x_0 um ponto de U onde f é finita (nada há a provar se um tal ponto não existe).
Seja $\varepsilon > 0$ tal que $x_0 + \varepsilon B \subseteq U$ e seja x um qualquer outro ponto na bola $x_0 + \varepsilon B$.
Comecemos por mostrar que

$$f(x) \geq f(x_0).$$

Esta desigualdade é verdadeira se $f(x) = +\infty$. Suponhamos então que $f(x) \in \mathbb{R}$.
Suponhamos, com vista a um absurdo, que

$$f(x) < f(x_0).$$

Podemos encontrar uma função $g : x_0 + \varepsilon B \to \mathbb{R}$ tal que

[10] Recordemos que o **epigráfico** de uma função $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ é dado por

$$epi\ f = \{(x, r) \in dom\ f \times \mathbb{R} : f(x) \leq r\}.$$

(a) g é continuamente diferenciável em $x_0 + \varepsilon B$,

(b) g admite um único ponto de mínimo global em x_0,

(c) ∇g anula-se apenas em x_0,

(d) $g(w) \to +\infty$ e $|\nabla g(w)| \to +\infty$ quando w se aproxima da fronteira da bola $x_0 + \varepsilon B$,

(e) $g(x) - g(x_0) < f(x_0) - f(x)$.

Como, por hipótese, f é *sci* e g é, em particular, contínua então, pela Proposição 2.17.7, $f + g$ é *sci*. Assim, o conjunto

$$\Gamma := \{y \in x_0 + \varepsilon B : (f + g)(y) \leq f(x_0) + g(x_0)\}$$

é um subconjunto fechado (ver Proposição 2.17.5) e limitado de $\mathbb{R}^n$; ou seja, Γ é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ e portanto existe $z \in \Gamma$ tal que z é um ponto de mínimo global para $f + g$ em Γ, isto é,

$$(f + g)(y) \geq f(z) + g(z) \qquad \forall y \in \Gamma.$$

Daqui resulta que $\xi = 0$ é um subgradiente proximal de $f + g$ em z. De facto, se $\gamma > 0$ é tal que $z + \gamma B \subseteq \Gamma$ e $\sigma > 0$ é qualquer, então temos

$$(f + g)(y) - (f + g)(z) + \sigma |y - z|^2 \geq 0 = \langle 0, y - z \rangle \qquad \forall y \in z + \gamma B.$$

Pela Proposição 5.4.11, dado $\delta > 0$ podemos encontrar pontos u e v em $z + \delta B$ tais que

$$\xi = 0 \in \left(\overline{\xi} + \overline{\overline{\xi}}\right) + \delta B,$$

onde $\overline{\xi}$ é um subgradiente proximal de f em u e $\overline{\overline{\xi}}$ é um subgradiente proximal de g em v. Então para cada $i \in \mathbb{N}$, existem pontos u_i e v_i tais que

$$|u_i - z| < \frac{1}{i}, \quad |v_i - z| < \frac{1}{i} \quad \text{e} \quad \left|\overline{\xi}_i + \overline{\overline{\xi}}_i\right| < \frac{1}{i},$$

onde $\overline{\xi}_i$ é um subgradiente proximal de f em u_i e $\overline{\overline{\xi}}_i$ é um subgradiente proximal de g em v_i.

Por hipótese temos

$$\overline{\xi}_i = 0 \qquad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Logo, de $\left|\overline{\xi}_i + \overline{\overline{\xi}}_i\right| < 1/i$ resulta que

$$\left|\overline{\overline{\xi}}_i\right| < \frac{1}{i} \qquad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, dado que g é continuamente diferenciável, temos

$$\overline{\overline{\xi}}_i = \nabla g(v_i) \qquad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Então

$$|\nabla g(v_i)| = \left|\overline{\overline{\xi}}_i\right| < \frac{1}{i} \qquad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Isto significa que

$$(\nabla g(v_i)) \to 0, \quad \text{quando } i \to \infty.$$

De $|v_i - z| < 1/i$ para qualquer $i \in \mathbb{N}$ resulta que

$$(v_i) \to z, \quad \text{quando } i \to \infty.$$

Então, como g é de classe C^1, temos

$$0 = \lim_{i\to\infty} \nabla g(v_i) = \nabla g(z)$$

e portanto

$$\nabla g(z) = 0.$$

Assim, pela hipótese (c), temos

$$z = x_0.$$

Concluimos então que

$$(f+g)(x) \geq (f+g)(z) = (f+g)(x_0)$$

donde

$$f(x) + g(x) \geq f(x_0) + g(x_0),$$

o que contraria a hipótese (e) e mostra que $f(x) \geq f(x_0)$.

Para mostrar que se f é finita em x então não pode ser $f(x) > f(x_0)$, podemos seguir um raciocínio análogo ao anterior, supondo que era verdade que $f(x) > f(x_0)$, mas considerando agora a função $f + \widetilde{g}$ onde $\widetilde{g} : x_0 + \varepsilon B \to \mathbb{R}$ verifica

(a') $\widetilde{g}$ é continuamente diferenciável em $x_0 + \varepsilon B$,

(b') $\widetilde{g}$ admite um único ponto de máximo global em x_0,

(c') $\nabla\widetilde{g}$ anula-se apenas em x_0,

(d') $\widetilde{g}(w) \to -\infty$ e $|\nabla\widetilde{g}(w)| \to +\infty$ quando w se aproxima da fronteira da bola $x_0 + \varepsilon B$,

(e') $\widetilde{g}(x_0) - \widetilde{g}(x) > f(x) - f(x_0)$.

Obtém-se assim, tal como anteriormente, uma contradição da qual resulta que f tem um valor constante f_0 em todos os pontos da bola $x_0 + \varepsilon B$ nos quais é finita.

Para completar a demonstração, vamos mostrar que f é finita em todos os pontos da bola

$$x_0 + \frac{\varepsilon}{4}B.$$

Suponhamos que não, isto é, suponhamos que existe um ponto $z \in x_0 + (\varepsilon/4)B$ tal que $f(z) = +\infty$.

Seja $\delta > 0$ tal que

$$\delta < \frac{\varepsilon}{4}.$$

O ponto $(z, f_0 - \delta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ não pertence ao epigráfico de f, o qual é fechado dado que f é *sci* (e não-vazio). Pela Proposição 5.4.2, existe pelo menos um ponto

$$(w, r) \in \operatorname{epi} f$$

que está o mais próximo possível de $(z, f_0 - \delta)$, isto é, tal que

$$|(z, f_0 - \delta) - (w, r)| \leq |(z, f_0 - \delta) - (x, y)| \quad \forall (x, y) \in \operatorname{epi} f.$$

Como $(x_0, f_0) \in \mathit{epi}\, f$ então, em particular, temos

$$|(z, f_0 - \delta) - (w, r)| \leq |(z, f_0 - \delta) - (x_0, f_0)|.$$

Então podemos escrever

$$\begin{aligned} |z-w| &\leq |(z-w, f_0-\delta-r)| = |(z, f_0-\delta)-(w,r)| \leq |(z, f_0-\delta)-(x_0, f_0)| \\ &= |(z-x_0, f_0-\delta-f_0)| = |(z-x_0, -\delta)| \leq |z-x_0| + |\delta| < \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

e portanto

$$|w-x_0| = |w-z+z-x_0| \leq |w-z| + |z-x_0| \leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon,$$

o que significa que

$$w \in x_0 + \varepsilon B.$$

Como $(w,r) \in \mathit{epi}\, f$, temos que f é finita em w e então

$$f(w) = f_0.$$

Segue daqui que

$$r = f(w) = f_0.$$

Mostrámos assim que o ponto $(w, f(w)) = (w, f_0)$ é o ponto de *epi* f mais próximo do ponto $(z, f_0-\delta)$. Em termos geométricos isto significa que

$$(z-w, -\delta) = \delta\left(\frac{z-w}{\delta}, -1\right)$$

é um vector proximal normal ao conjunto *epi* f no ponto $(w, f(w))$, o que é equivalente a afirmar (ver Proposição 5.4.8) que o vector não nulo $(z-w)/\delta$ é um subgradiente proximal de f em w, o que contradiz a hipótese de se ter $\xi = 0$ sempre que ξ é um subgradiente proximal de f nalgum ponto.■

5.4.3 Um resultado de *sci*

Proposição 5.4.13 *Seja $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(t,x) \to f(t,x)$, uma função lipschitziana em t uniformemente para x em qualquer bola fechada, isto é, para cada $r > 0$ existe $K_r > 0$ tal que*

$$|f(t_1,x) - f(t_2,x)| \leq K_r |t_2 - t_1| \quad \forall t_1, t_2 \in [0,T], \ \forall x \in r\bar{B}, \tag{5.37}$$

além disso, suponhamos que f é sci em relação a x. Fixemos $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Então para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ tal que

$$|x-x_0| < \delta \Rightarrow f(t,x) > f(t,x_0) - \varepsilon \quad \forall t \in [0,T]. \tag{5.38}$$

Além disso, f é sci em $[0,T] \times \mathbb{R}^n$.

Demonstração:
Suponhamos, com vista a um absurdo, que existiam $\varepsilon > 0$ e sucessões $(t_k) \subset [0,T]$ e $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ tais que

$$|x_k - x_0| < \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad f(t_k, x_0) - f(t_k, x_k) \geq \varepsilon.$$

Como $[0,T]$ é compacto então, passando se necessário a uma subsucessão, podemos afirmar que existe $t \in [0,T]$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} t_k = t. \tag{5.39}$$

Além disso, dado que para cada $k \in \mathbb{N}$, $|x_k - x_0| < \frac{1}{k}$, temos

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x_0.$$

Como existe $r > 0$ tal que $|x_k| \leq r$, $\forall k \in \mathbb{N}$, e $|x_0| \leq r$, então, por (5.37), existe $K_r \geq 0$ tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$|f(t_k, x_k) - f(t, x_k)| \leq K_r |t_k - t| \quad \text{e} \quad |f(t_k, x_0) - f(t, x_0)| \leq K_r |t_k - t|.$$

Assim temos

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq f(t_k, x_0) - f(t_k, x_k) = (f(t_k, x_0) - f(t, x_0)) + f(t, x_0) - f(t, x_k) + (f(t, x_k) - f(t_k, x_k)) \\ &\leq |f(t_k, x_0) - f(t, x_0)| + f(t, x_0) - f(t, x_k) + |f(t, x_k) - f(t_k, x_k)| \\ &\leq 2K_r |t_k - t| + f(t, x_0) - f(t, x_k), \end{aligned}$$

donde se conclui que

$$f(t, x_k) - f(t, x_0) - 2K_r |t_k - t| \leq -\varepsilon. \tag{5.40}$$

Por outro lado, f é *sci* em relação a x. Então como $\lim_{k \to \infty} x_k = x_0$, temos

$$f(t, x_0) \leq \liminf_{k \to \infty} f(t, x_k).$$

Daqui e atendendo a (5.39) e a (5.40), resulta que

$$0 = f(t, x_0) - f(t, x_0) - 2K_r |t - t| \leq \liminf_{k \to \infty} (f(t, x_k) - f(t, x_0) - 2K_r |t_k - t|) \leq -\varepsilon,$$

o que contradiz a hipótese de $\varepsilon > 0$ e prova (5.38).

Agora fixemos $(t_0, x_0) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ e mostremos que f é *sci* em (t_0, x_0), isto é, mostremos que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon, x_0, t_0) > 0$ tal que

$$|t - t_0| + |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(t, x) > f(t_0, x_0) - \varepsilon.$$

Fixemos então $\varepsilon > 0$.

Pelo que vimos acima, existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$|x - x_0| < \delta_0 \Rightarrow f(t, x) > f(t, x_0) - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Em particular, temos

$$|x - x_0| < \delta_0 \Rightarrow f(t_0, x) > f(t_0, x_0) - \frac{\varepsilon}{2}$$

e portanto,

$$|x - x_0| < \delta_0 \Rightarrow f(t_0, x_0) - f(t_0, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por outro lado, como f é lipschitziana em relação a t uniformemente para x em qualquer bola fechada, existe $K > 0$ tal que

$$|f(t, x) - f(t_0, x)| \leq K |t - t_0| \quad \forall t \in [0, T], \ \forall x \in x_0 + \delta_0 \bar{B}.$$

Então se $|t - t_0| < \varepsilon / 2K$ e $|x - x_0| < \delta_0$, temos

$$\begin{aligned} f(t_0, x_0) - f(t, x) &= f(t_0, x_0) - f(t_0, x) + f(t_0, x) - f(t, x) \leq f(t_0, x_0) - f(t_0, x) + |f(t_0, x) - f(t, x)| \\ &\leq f(t_0, x_0) - f(t_0, x) + K |t - t_0| < \frac{\varepsilon}{2} + K \frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon, \end{aligned}$$

donde

$$f(t, x) > f(t_0, x_0) - \varepsilon,$$

o que mostra o pretendido.■

5.4.4 O Princípio do Máximo

Suponhamos que o *estado* $\bar{x}$ e o *controlo* $\bar{u}$ resolvem o problema de controlo óptimo

$$\min \left\{ f(x(T)) + \int_0^T F(t, x(t), u(t))\, dt \right\} \tag{P_C}$$

$$u(t) \in U(t) \quad \text{qs}, \quad x'(t) = \phi(t, x(t), u(t)) \quad \text{qs}, \quad x(0) \in C_0, \quad x(T) \in C_1,$$

supondo que se verificam as seguintes **hipóteses básicas**:

(a) A multifunção U aplica $[0, T]$ nos subconjuntos não-vazios de $\mathbb{R}^m$ e o controlo u é uma selecção mensurável para U; o gráfico de U, $Graf\ (U)$, é $\mathcal{L} \times \mathcal{B}_m$-mensurável.

(b) O estado é uma função $x : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ absolutamente contínua e diz-se uma *trajectória* (associada ao controlo u). As trajectórias que pertencem a $\Omega := \{(t, y) : 0 \leq t \leq T, y \in \bar{x}(t) + \varepsilon B\}$, para algum $\varepsilon > 0$, dizem-se *admissíveis*.

(c) A função $\phi : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é tal que, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, a função $\phi(\cdot, x, \cdot)$ é $\mathcal{L} \times \mathcal{B}_m$-mensurável e tal que existe uma função $k : Graf\ (U) \to \mathbb{R}$ $\mathcal{L} \times \mathcal{B}_m$-mensurável, tal que, para cada $(t, u) \in Graf\ (U)$, a função $\phi(t, \cdot, u)$ é lipschitziana em $\Omega_t := \{y \in \mathbb{R}^n : y \in \bar{x}(t) + \varepsilon B\}$, para algum $\varepsilon > 0$, com constante $k(t, u)$.

(d) Os conjuntos C_0 e C_1 são fechados.

(e) A função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é localmente lipschitziana.

(f) A função $F : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ verifica as mesmas condições que a função ϕ (ver (c)).

Consideremos a função $H_p : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$H_p(t, x, p, u, \lambda) := \langle p, \phi(t, x, u) \rangle - \lambda F(t, x, u).$$

Temos o seguinte resultado.

Teorema 5.4.14 *(Princípio do Máximo) Suponhamos que se verificam as hipóteses básicas, $(\bar{x}, \bar{u})$ resolve o problema (P_C) e que a função $t \to k(t, \bar{u}(t))$ é integrável. Então existem um escalar λ igual a 0 ou 1 e uma função absolutamente contínua p tais que:*

(i) a função p verifica a "equação adjunta"

$$-p'(t) \in \partial_x H_p(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t), \lambda) \quad qs;$$

(ii) a função $\bar{u}$ maximiza H_p:

$$\max \{H_p(t, \bar{x}(t), p(t), u, \lambda) : u \in U(t)\} = H_p(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t), \lambda) \quad qs;$$

(iii) para algum $\xi \in \partial f(\bar{x}(T))$, verificam-se as seguintes condições de transversalidade

$$p(0) \in N_{C_0}(\bar{x}(0)), \qquad -\lambda\xi - p(T) \in N_{C_1}(\bar{x}(T));$$

(iv) $\max \{|p(t)| : t \in [0, T]\} + |\lambda| > 0$.

Demonstração:
Ver [13], Teorema 5.2.1.

5.4.5 Uma condição de Lipschitz

Teorema 5.4.15 *Seja $L : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função lipschitziana com respeito à primeira variável. Suponhamos ainda que existem constantes não-negativas κ e η tais que*

$$|L_s(s,x,\xi)| \leq \kappa |L(s,x,\xi)| + \eta, \tag{5.41}$$

para qualquer $(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e para quase todo $s \in [0,T]$. Seja $x \in W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^n)$ e suponhamos que a função $t \to L(t,x(t),x'(t)) \in L^1([0,T],\mathbb{R})$. Então existe $k_0 \in L^1([0,T],\mathbb{R})$ tal que

$$|L(s_2,x(t),x'(t)) - L(s_1,x(t),x'(t))| \leq k_0(t)|s_2 - s_1|,$$

para quaisquer t, s_1, $s_2 \in [0,T]$.

Demonstração:
Fixemos quaisquer t_1, $t_2 \in [0,T]$ e $x, \xi \in \mathbb{R}^n$.
Consideremos a função definida por

$$g(\lambda) := |L(t_1 + \lambda d, x, \xi) - L(t_1, x, \xi)|, \quad \lambda \in [0,1]$$

onde

$$d = t_2 - t_1.$$

A função

$$t \to L(t,x,\xi) =: \rho(t), \quad t \in [0,T]$$

é, por hipótese, lipschitziana. Então existe $M > 0$ tal que

$$|L(t',x,\xi) - L(t'',x,\xi)| \leq M|t' - t''|, \quad \forall t', t'' \in [0,T].$$

Portanto, dado que

$$t_1 + \lambda d \in [0,T], \quad \forall \lambda \in [0,1],$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} |L(t_1 + \lambda_2 d, x, \xi) - L(t_1 + \lambda_1 d, x, \xi)| &\leq M|t_1 + \lambda_2 d - t_1 - \lambda_1 d| \\ &= M|\lambda_2 d - \lambda_1 d| \\ &= M|d||\lambda_2 - \lambda_1| \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in [0,1] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & ||L(t_1 + \lambda_2 d, x, \xi) - L(t_1, x, \xi)| - |L(t_1 + \lambda_1 d, x, \xi) - L(t_1, x, \xi)|| \\ \leq\ & |L(t_1 + \lambda_2 d, x, \xi) - L(t_1, x, \xi) - L(t_1 + \lambda_1 d, x, \xi) + L(t_1, x, \xi)| \\ =\ & |L(t_1 + \lambda_2 d, x, \xi) - L(t_1 + \lambda_1 d, x, \xi)| \\ \leq\ & M|d||\lambda_2 - \lambda_1| \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in [0,1], \end{aligned}$$

o que mostra que as funções

$$\lambda \to L(t_1 + \lambda d, x, \xi) =: h(\lambda), \quad \lambda \in [0,1]$$

e

$$\lambda \to |L(t_1 + \lambda d, x, \xi) - L(t_1, x, \xi)| = g(\lambda), \quad \lambda \in [0,1]$$

são também lipschitzianas. Em particular são absolutamente contínuas. Podemos então afirmar que ρ', h' e g' existem quase sempre (a primeira em $[0,T]$ e as duas últimas em $[0,1]$), pelo que para quase todo $\lambda \in [0,1]$, temos

$$g'(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}\left|L(t_1+\lambda d, x, \xi) - L(t_1, x, \xi)\right| = \frac{d}{d\lambda}\left|\rho(t_1+\lambda d) - \rho(t_1)\right| = \pm |d| \left|\rho'(t_1+\lambda d)\right|.$$

Por outro lado, como

$$L_s(t_1+\lambda d, x, \xi) = \rho'(t_1+\lambda d),$$

por (5.41), para quase todo $\lambda \in [0,1]$, vale

$$\left|\rho'(t_1+\lambda d)\right| \le \kappa \left|L(t_1+\lambda d, x, \xi)\right| + \eta$$

e portanto

$$\begin{aligned}
g'(\lambda) &\le \left|g'(\lambda)\right| = |d| \left|\rho'(t_1+\lambda d)\right| \le |d| \left(\kappa \left|L(t_1+\lambda d, x, \xi)\right| + \eta\right) \\
&= |d| \left(\kappa \left|L(t_1+\lambda d, x, \xi) - L(t_1, x, \xi) + L(t_1, x, \xi)\right| + \eta\right) \\
&\le |d| \left(\kappa \left|L(t_1+\lambda d, x, \xi) - L(t_1, x, \xi)\right| + \kappa \left|L(t_1, x, \xi)\right| + \eta\right) \\
&= |d| \left(\kappa g(\lambda) + \kappa \left|L(t_1, x, \xi)\right| + \eta\right),
\end{aligned}$$

para quase todo $\lambda \in [0,1]$.

Uma vez que g é absolutamente contínua, pela Proposição 2.14.10, para qualquer $\lambda \in [0,1]$ tem-se

$$g(\lambda) - g(0) = \int_0^\lambda g'(\tau)\, d\tau.$$

Mas

$$g(0) = \left|L(t_1 + 0.d, x, \xi) - L(t_1, x, \xi)\right| = 0$$

e

$$g'(\lambda) \le |d| \left(\kappa g(\lambda) + \kappa \left|L(t_1, x, \xi)\right| + \eta\right) \quad \text{qs em } [0,1].$$

Então

$$\begin{aligned}
g(\lambda) &= g(\lambda) - g(0) = \int_0^\lambda g'(\tau)\, d\tau \le \int_0^\lambda |d| \left(\kappa g(\tau) + \kappa \left|L(t_1, x, \xi)\right| + \eta\right) d\tau \\
&= \int_0^\lambda |d|\, \kappa g(\tau)\, d\tau + \int_0^\lambda |d| \left(\kappa \left|L(t_1, x, \xi)\right| + \eta\right) d\tau \\
&\le \int_0^\lambda |d|\, \kappa g(\tau)\, d\tau + \int_0^1 |d| \left(\kappa \left|L(t_1, x, \xi)\right| + \eta\right) d\tau \\
&= \int_0^\lambda |d|\, \kappa g(\tau)\, d\tau + |d| \left(\kappa \left|L(t_1, x, \xi)\right| + \eta\right),
\end{aligned}$$

pelo que

$$g(\lambda) \le |d| \left(\kappa \left|L(t_1, x, \xi)\right| + \eta\right) + |d|\, \kappa \int_0^\lambda g(\tau)\, d\tau \qquad \forall \lambda \in [0,1].$$

Assim, aplicando a desigualdade de Gronwall [11] com

$$C_1 := |d| \left(\kappa \left|L(t_1, x, \xi)\right| + \eta\right) \quad \text{e} \quad C_2 := |d|\, \kappa$$

[11] Seja $u : [0,T] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e não-negativa. Suponhamos que $C_1 \ge 0$ e $C_2 \ge 0$ são tais que

$$u(t) \le C_1 + C_2 \int_0^t u(s)\, ds \quad \forall t \in [0,T].$$

Então

$$u(t) \le C_1 e^{C_2 t} \quad \forall t \in [0,T].$$

(Ver [35], pág. 169.)

obtemos

$$\begin{aligned} g(\lambda) &\leq |d|\left(\kappa\left|L\left(t_1,x,\xi\right)\right|+\eta\right)e^{|d|\kappa}=|t_2-t_1|\left(\kappa\left|L\left(t_1,x,\xi\right)\right|+\eta\right)e^{|t_2-t_1|\kappa} \\ &\leq |t_2-t_1|\left(\kappa\left|L\left(t_1,x,\xi\right)\right|+\eta\right)e^{T\kappa} \quad \forall\lambda\in[0,1] \end{aligned}$$

e portanto

$$\left|L\left(t_2,x,\xi\right)-L\left(t_1,x,\xi\right)\right|=\left|L\left(t_1+d,x,\xi\right)-L\left(t_1,x,\xi\right)\right|=g(1)\leq|t_2-t_1|\left(\kappa\left|L\left(t_1,x,\xi\right)\right|+\eta\right)e^{T\kappa}. \tag{5.42}$$

Fazendo, em (5.42), $t_1=t$ e $t_2=s_1$ obtemos

$$\left|L\left(s_1,x,\xi\right)-L\left(t,x,\xi\right)\right|\leq|s_1-t|\left(\kappa\left|L\left(t,x,\xi\right)\right|+\eta\right)e^{T\kappa},$$

donde

$$\begin{aligned} \left|L\left(s_1,x,\xi\right)\right| &= \left|L\left(s_1,x,\xi\right)-L\left(t,x,\xi\right)+L\left(t,x,\xi\right)\right|\leq\left|L\left(s_1,x,\xi\right)-L\left(t,x,\xi\right)\right|+\left|L\left(t,x,\xi\right)\right| \\ &\leq |s_1-t|\left(\kappa\left|L\left(t,x,\xi\right)\right|+\eta\right)e^{T\kappa}+\left|L\left(t,x,\xi\right)\right| \\ &\leq Te^{T\kappa}\left(\kappa\left|L\left(t,x,\xi\right)\right|+\eta\right)+\left|L\left(t,x,\xi\right)\right| \end{aligned}$$

e portanto

$$\left|L\left(s_1,x,\xi\right)\right|\leq\left|L\left(t,x,\xi\right)\right|+Te^{T\kappa}\left(\kappa\left|L\left(t,x,\xi\right)\right|+\eta\right). \tag{5.43}$$

Fazendo agora, em (5.42), $t_1=s_1$ e $t_2=s_2$ obtemos

$$\left|L\left(s_2,x,\xi\right)-L\left(s_1,x,\xi\right)\right|\leq|s_2-s_1|\left(\kappa\left|L\left(t_1,x,\xi\right)\right|+\eta\right)e^{T\kappa}.$$

Assim, por (5.43), resulta que

$$\begin{aligned} \left|L\left(s_2,x,\xi\right)-L\left(s_1,x,\xi\right)\right| &\leq |s_2-s_1|\left(\kappa\left|L\left(t_1,x,\xi\right)\right|+\eta\right)e^{T\kappa} \\ &\leq |s_2-s_1|\,e^{T\kappa}\left[\kappa\left(\left|L\left(t,x,\xi\right)\right|+Te^{T\kappa}\left(\kappa\left|L\left(t,x,\xi\right)\right|+\eta\right)\right)+\eta\right] \\ &= |s_2-s_1|\,e^{T\kappa}\left[\kappa\left(\left|L\left(t,x,\xi\right)\right|+Te^{T\kappa}\kappa\left|L\left(t,x,\xi\right)\right|+Te^{T\kappa}\eta\right)+\eta\right] \\ &= |s_2-s_1|\,e^{T\kappa}\left[\kappa\left|L\left(t,x,\xi\right)\right|\left(1+Te^{T\kappa}\kappa\right)+\eta\left(1+\kappa Te^{T\kappa}\right)\right] \\ &= |s_2-s_1|\left(\kappa e^{T\kappa}\left|L\left(t,x,\xi\right)\right|\left(1+Te^{T\kappa}\kappa\right)+\eta e^{T\kappa}\left(1+\kappa Te^{T\kappa}\right)\right), \end{aligned}$$

isto é,

$$\left|L\left(s_2,x,\xi\right)-L\left(s_1,x,\xi\right)\right|\leq|s_2-s_1|\left(C_0\left|L\left(t,x,\xi\right)\right|+C_1\right), \tag{5.44}$$

onde

$$C_0:=\kappa e^{T\kappa}\left(1+Te^{T\kappa}\kappa\right) \quad \text{e} \quad C_1:=\eta e^{T\kappa}\left(1+\kappa Te^{T\kappa}\right).$$

Finalmente, por hipótese, a função $t\to L\left(t,x\left(t\right),x'\left(t\right)\right)$ pertence a $L^1\left([0,T],\mathbb{R}\right)$. Logo também pertence a $L^1\left([0,T],\mathbb{R}\right)$ a função

$$k_0\left(t\right):=C_0\left|L\left(t,x\left(t\right),x'\left(t\right)\right)\right|+C_1,$$

o que completa a demonstração.■

5.4.6 Um resultado em optimização não-suave

Vamos finalmente deduzir a condição necessária utilizada na demonstração do Teorema 5.2.8. As hipóteses em L são as da Secção 5.3 excepto a primeira, ou seja, aqui não exigimos que L seja não-negativa (as hipóteses reduzem-se, portanto, às da Secção 5.2 quando L é autónomo). Em resumo, supomos que:

(i) $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ e $C\subseteq\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ são conjuntos fechados e $K\subseteq\mathbb{R}^n$ é um cone convexo fechado;

(ii) a função $L : [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ é *sci* em (x,v) e é tal que:

(ii1) para cada $(t,x) \in [0,T] \times \Omega$ a função $v \to L(t,x,v)$ é convexa e tem como domínio um conjunto aberto convexo não-vazio;

(ii2) para $x \in \Omega, t \in [0,T]$ e $v \in dom\, L(t,x,\cdot)$ fixados, a função $s \to L(s,x,v)$ é lipschitziana em $[0,T]$;

(ii3) existem constantes não-negativas κ e η (não dependentes de (t,x,v)) tais que

$$|L_s(s,x,v)| \leq \kappa |L(s,x,v)| + \eta;$$

(ii4) para cada $t \in [0,T]$ a função $(x,v) \to L(t,x,v)$ é limitada inferiormente nos subconjuntos $A \times B$ de $\Omega \times R^n$ com A limitado;

(iii) pelo menos um dos seguintes conjuntos é compacto

$$C_x := \{x \in \mathbb{R}^n : \text{para algum } y \in \mathbb{R}^n,\ (x,y) \in C\}$$
$$C_y := \{y \in \mathbb{R}^n : \text{para algum } x \in \mathbb{R}^n,\ (x,y) \in C\};$$

(iv) existe pelo menos uma função lipschitziana $\bar{x}$ admissível para o problema (P) e tal que $\Lambda(\bar{x})$ é finito.

Suponhamos que z é uma função absolutamente contínua verificando as restrições de (P):

$$(x(0), x(T)) \in C, \quad x(t) \in \Omega \quad \forall t \in [0,T], \quad x'(t) \in K \text{ qs}$$

e tal que $\Lambda(z) \in R$.

Seja θ uma função de Nagumo e, para constantes $r \geq 0$ e $\sigma > 0$, seja f uma função definida em $AC_\theta([0,T], \mathbb{R}^n)$ por

$$f(x) := \Lambda(x) + r\Lambda_\theta(x) + \sigma |\Lambda_\theta(x) - \Lambda_\theta(z)|^2.$$

Então temos o seguinte

Teorema 5.4.16 *Suponhamos que para cada função x admissível para (P) temos $f(x) \geq f(z)$, sempre que $\Lambda_\theta(x)$ está suficientemente próximo de $\Lambda_\theta(z)$. Então existem uma constante c, uma função integrável ξ e uma função mensurável p tais que*

$$\xi(t) \in \partial_t L(t, z(t), z'(t)) \quad qs$$
$$p(t) \in \partial_v L(t, z(t), z'(t)) \quad qs$$

e

$$L(t, z(t), z'(t)) - \langle z'(t), p(t)\rangle + r\theta(|z'(t)|) - r|z'(t)|\theta'(|z'(t)|) = c + \int_0^t \xi(\tau)\, d\tau \quad qs. \tag{5.45}$$

Se além disso temos $n = 1$, $(*)'$ verifica-se para algum k e verificam-se as hipóteses (A) e (B) (definidas na Secção 5.3.4), então z é continuamente diferenciável.

Demonstração:

Fixemos $0 < \varepsilon_0 < 1$. Seja u uma qualquer função mensurável definida em $[0,T]$ com valores em $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ e tal que

$$\int_0^T u(t)\, dt = 0.$$

Usamos u para definir uma transformação invertível de $[0,T]$ em si próprio:

$$t = \tau + \int_0^\tau u(s)\, ds. \tag{5.46}$$

De facto, pela Proposição 2.14.11, a função $\varphi : [0,T] \to [0,T]$ dada por

$$\varphi(\tau) := \tau + \int_0^T u(s)\, ds$$

é absolutamente contínua e $\varphi'(\tau) = 1 + u(\tau)$ qs. Como, para qualquer $\tau \in [0,T]$, $u(\tau) \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \subset (-1,1)$ então $\varphi'(\tau) = 1+u(\tau) > 0$ qs e portanto, pela Proposição 2.14.16, φ é crescente em $[0,T]$ o que, pela Proposição 2.14.19, implica que existe φ^{-1}, é absolutamente contínua em $[0,T]$ e para quase todo $t \in [0,T]$ tem-se

$$\left(\varphi^{-1}\right)'(t) = \frac{1}{\varphi'(\tau)} > 0.$$

Isto, por uma reparametrização, conduz a uma nova função x absolutamente contínua (ver Proposições 2.14.16 e 2.14.14):

$$x(t) := z\left(\varphi^{-1}(t)\right) = z(\tau),$$

onde τ e t estão relacionados como em (5.46).

Obtemos

$$x'(t) = \frac{dx}{dt}(t) = \frac{dz}{dt}(\tau) = \frac{dz}{d\tau}(\tau)\frac{d\tau}{dt} = \frac{dz}{d\tau}(\tau)\frac{1}{\frac{dt}{d\tau}} = \frac{z'(\tau)}{1+u(\tau)}.$$

Então, dado que K é um cone, $z'(\tau) \in K$ qs em $[0,T]$ e $1/(1+u(\tau)) > 0$ $\forall \tau \in [0,T]$, vem $x'(t) \in K$ qs. Além disso, x satisfaz também as outras restrições de (P), pois $(x(0), x(T)) = (z(0), z(T)) \in C$ e como $z(\tau) \in \Omega$ $\forall \tau \in [0,T]$ então também $x(t) \in \Omega$ $\forall t \in [0,T]$.

Temos

$$\Lambda_\theta(x) := \int_0^T \theta(|x'(t)|)\, dt = \int_0^T \theta\left(\frac{|z'(\tau)|}{1+u(\tau)}\right)(1+u(\tau))\, d\tau.$$

Para qualquer $\varepsilon > 0$ dado existe, para quase todo τ, um número positivo $\gamma(\tau)$ tal que se $|u(\tau)| \leq \gamma(\tau)$ então a última função integranda acima pertence à bola aberta $\theta(|z'(\tau)|) + \varepsilon B$. De facto, para qualquer τ fixado tal que $z'(\tau)$ exista, a função $g : [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g_\tau(s) := \theta\left(\frac{|z'(\tau)|}{1+s}\right)(1+s)$$

é contínua. Em particular é contínua em $s = 0$, isto é, para cada $\varepsilon > 0$ fixado existe $\delta = \delta(\tau, \varepsilon) > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |s - 0| < \delta \quad &\Rightarrow \quad |g_\tau(s) - g_\tau(0)| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad \left|\theta\left(\frac{|z'(\tau)|}{1+s}\right)(1+s) - \theta(|z'(\tau)|)\right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Fixemos $\varepsilon > 0$ e seja $\delta = \delta(\tau, \varepsilon) > 0$ como acima. Assim, se $u(\tau)$ é tal que $|u(\tau)| < \delta$, vem

$$\left|\theta\left(\frac{|z'(\tau)|}{1+u(\tau)}\right)(1+u(\tau)) - \theta(|z'(\tau)|)\right| < \varepsilon,$$

como se queria.

Limitaremos a escolha de u desta maneira. A função γ pode ser tomada mensurável e também tal que

$$x'(t) \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} L(t, x(t), \cdot)) \quad \text{qs.}$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\gamma \leq \varepsilon_0$.

Para ε suficientemente pequeno, temos $\Lambda_\theta(x)$ suficientemente próximo de $\Lambda_\theta(z)$. De facto, para ε suficientemente pequeno existe $\gamma(\tau)$ tal que se $|u(\tau)| < \gamma(\tau)$ então

$$\left|\theta\left(\frac{|z'(\tau)|}{1+u(\tau)}\right)(1+u(\tau)) - \theta(|z'(\tau)|)\right| < \varepsilon,$$

o que implica

$$\begin{aligned}
\varepsilon T &= \int_0^T \varepsilon d\tau > \int_0^T \left| \theta\left(\frac{|z'(\tau)|}{1+u(\tau)}\right)(1+u(\tau)) - \theta(|z'(\tau)|) \right| d\tau \\
&\geq \left| \int_0^T \left(\theta\left(\frac{|z'(\tau)|}{1+u(\tau)}\right)(1+u(\tau)) - \theta(|z'(\tau)|) \right) d\tau \right| \\
&= \left| \int_0^T \theta\left(\frac{|z'(\tau)|}{1+u(\tau)}\right)(1+u(\tau))\, d\tau - \int_0^T \theta(|z'(\tau)|)\, d\tau \right| \\
&= |\Lambda_\theta(x) - \Lambda_\theta(z)|.
\end{aligned}$$

Assim, por hipótese, para ε suficientemente pequeno obtemos $f(x) \geq f(z)$. Fixemos um tal ε.

Vamos traduzir isto em termos de um problema de controlo óptimo de estado $(s,y) \in \mathbb{R}^2$ e dinâmica

$$\frac{ds}{dt} = 1 + u(t), \quad \frac{dy}{dt} = \theta\left(\frac{|z'(t)|}{1+u(t)}\right)(1+u(t)).$$

O controlo u está sujeito à restrição $|u(t)| \leq \gamma(t)$, e as condições de fronteira são $s(0) = 0$, $s(T) = T$, $y(0) = 0$. Ou seja, vamos considerar o problema de minimização do funcional integral

$$I((s,y),u) := \tilde{f}(s(T), y(T)) + \int_0^T \tilde{L}(t,(s(t),y(t)),u(t))\, dt$$

sujeito a

$$u(t) \in U(t) \text{ qs}, \quad (s'(t), y'(t)) = \phi(t,(s(t),y(t)),u(t)) \text{ qs}, \quad (s(0),y(0)) \in C_0, \quad (s(T),y(T)) \in C_1,$$

onde

(a) a função $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é dada por $\tilde{f}(s,y) := \sigma |y - \Lambda_\theta(z)|^2$;

(b) a função integranda $\tilde{L} : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ é dada por

$$\tilde{L}(t,(s,y),u) := L\left(s, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u) + r\theta\left(\frac{|z'(t)|}{1+u}\right)(1+u);$$

(c) a função $\phi : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ é dada por

$$\phi(t,(s,y),u) := \left(1+u, \theta\left(\frac{|z'(t)|}{1+u}\right)(1+u)\right);$$

(d) a multifunção $U : [0,T] \to \mathbb{R}$ é dada por $U(t) := [-\gamma(t), \gamma(t)]$;
e

(e) $C_0 := \{0\} \times \mathbb{R}$ e $C_1 := \mathbb{R}^2$.

O nosso objectivo é aplicar as condições necessárias dadas no Teorema 5.2.1 de [13], cujas hipóteses vamos verificar.

Comecemos por mostrar que o estado $(s,y) \in \mathbb{R}^2$ cuja dinâmica é dada por

$$\frac{ds}{dt} = 1 + u(t), \quad \frac{dy}{dt} = \theta\left(\frac{|z'(t)|}{1+u(t)}\right)(1+u(t))$$

é uma função absolutamente contínua. Como u é mensurável e

$$\int_0^T |1 + u(t)|\, dt \leq \int_0^T (1+\varepsilon_0)\, dt < 2T \in \mathbb{R}$$

então, pela Proposição 2.14.11, a função $s : [0,T] \to \mathbb{R}$ dada por

$$s(t) := \int_0^t (1 + u(\tau))\, d\tau$$

é absolutamente contínua.

A função $t \to |z'(t)| / (1 + u(t))$ é mensurável, por ser o quociente de duas funções mensuráveis (ver Proposição 2.7.12) e portanto, pelas Proposições 2.7.15 e 2.7.12, a função

$$t \to \theta\left(\frac{|z'(t)|}{1 + u(t)}\right)(1 + u(t))$$

é mensurável. Além disso, para ε suficientemente pequeno, temos

$$\int_0^T (\theta(|z'(t)|) - \varepsilon)\, dt \leq \int_0^T \theta\left(\frac{|z'(t)|}{1 + u(t)}\right)(1 + u(t))\, dt \leq \int_0^T (\theta(|z'(t)|) + \varepsilon)\, dt$$

e como $z \in AC_\theta$ então

$$\int_0^T \theta(|z'(t)|)\, dt \in \mathbb{R}$$

e portanto também

$$\int_0^T \theta\left(\frac{|z'(t)|}{1 + u(t)}\right)(1 + u(t))\, dt \in \mathbb{R}.$$

Assim, pela Proposição 2.14.11, a função $y : [0,T] \to \mathbb{R}$ dada por

$$y(t) := \int_0^t \theta\left(\frac{|z'(\tau)|}{1 + u(\tau)}\right)(1 + u(\tau))\, d\tau$$

é absolutamente contínua.

Mostremos agora que o controlo $\bar{u} \equiv 0$ e o estado correspondente

$$\bar{s}(t) = t, \quad \bar{y}(t) = \int_0^t \theta(|z'(\tau)|)\, d\tau,$$

resolvem o problema de minimização descrito acima. Fixados um qualquer controlo mensurável $u \in U(t)$ e estado (s, y) correspondente, isto é, cuja dinâmica é dada por

$$\frac{ds}{dt} = 1 + u(t), \quad \frac{dy}{dt} = \theta\left(\frac{|z'(t)|}{1 + u(t)}\right)(1 + u(t)),$$

temos

$$\begin{aligned}
I((s,y), u) &= \sigma |y(T) - \Lambda_\theta(z)|^2 + \int_0^T \widetilde{L}(\tau, (s(\tau), y(\tau)), u(\tau))\, d\tau \\
&= \sigma \left| \int_0^T \theta\left(\frac{|z'(\tau)|}{1 + u(\tau)}\right)(1 + u(\tau))\, d\tau - \Lambda_\theta(z) \right|^2 + \\
&\quad + \int_0^T \left(L\left(\tau + \int_0^\tau u(s)\, ds, z(\tau), \frac{z'(\tau)}{1 + u(\tau)}\right) + r\theta\left(\frac{|z'(\tau)|}{1 + u(\tau)}\right)\right)(1 + u(\tau))\, d\tau.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável

$$t = \tau + \int_0^\tau u(s)\, ds$$

em ambos os integrais e recordando que assim obtemos uma função absolutamente contínua $x(t) = z(\tau)$ e tal que

$$x'(t) = \frac{z'(\tau)}{1+u(\tau)},$$

então a última expressão é igual a

$$\begin{aligned}
&\sigma \left| \int_0^T \theta(|x'(t)|)\,dt - \Lambda_\theta(z) \right|^2 + \int_0^T (L(t, x(t), x'(t)) + r\theta(|x'(t)|))\,dt \\
= \;& \sigma |\Lambda_\theta(x) - \Lambda_\theta(z)|^2 + \Lambda(x) + r\Lambda_\theta(x) = f(x) \\
\leq \;& f(z) = \sigma |\Lambda_\theta(z) - \Lambda_\theta(z)|^2 + \Lambda(z) + r\Lambda_\theta(z) \\
= \;& \sigma |\Lambda_\theta(z) - \Lambda_\theta(z)|^2 + \int_0^T (L(t, z(t), z'(t)) + r\theta(|z'(t)|))\,dt \\
= \;& \sigma |\bar{y}(T) - \Lambda_\theta(z)|^2 + \int_0^T \widetilde{L}(t, (\bar{s}(t), \bar{y}(t)), \bar{u}(t))\,dt = I((\bar{s}, \bar{y}), \bar{u}).
\end{aligned}$$

A desigualdade $f(x) \leq f(z)$ resulta da escolha de ε feita atrás.

A função $\widetilde{f}$ é localmente lipschitziana em $\mathbb{R}^2$. De facto, para qualquer compacto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e quaisquer $(s_1, y_1), (s_2, y_2) \in A$, temos

$$\begin{aligned}
\left| \widetilde{f}(s_2, y_2) - \widetilde{f}(s_1, y_1) \right| &= \sigma \left| |y_2 - \Lambda_\theta(z)|^2 - |y_1 - \Lambda_\theta(z)|^2 \right| \\
&= \sigma |(y_2 - \Lambda_\theta(z) - y_1 + \Lambda_\theta(z))(y_2 - \Lambda_\theta(z) + y_1 - \Lambda_\theta(z))| \\
&= \sigma |(y_2 - y_1)(y_2 + y_1 - 2\Lambda_\theta(z))| \\
&\leq \sigma (|y_2| + |y_1| + 2|\Lambda_\theta(z)|)\,|y_2 - y_1| \\
&\leq \sigma (2K_A + 2|\Lambda_\theta(z)|)\,|y_2 - y_1| \\
&\leq \sigma ((2K_A + 2|\Lambda_\theta(z)|))\,|(s_2, y_2) - (s_1, y_1)|,
\end{aligned}$$

pois, dado que A é compacto, existe $K_A \geq 0$ tal que $|(s, y)| \leq K_A \; \forall (s, y) \in A$ e considerando em $\mathbb{R}^2$ a norma da soma (isto é, $|(s, y)| = |s| + |y|$, $\forall (s, y) \in \mathbb{R}^2$) vem $|y| \leq K_A \; \forall (s, y) \in A$. O que mostra que $\widetilde{f}$ é localmente lipschitziana em $\mathbb{R}^2$ com constante

$$K_f := \sigma ((2K_A + 2|\Lambda_\theta(z)|)) \geq 0.$$

Para cada $(s, y) \in \mathbb{R}^2$ a função $(t, u) \to \widetilde{L}(t, (s, y), u)$ é $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$-mensurável. De facto, como a função L é $\mathcal{L} \times \mathcal{B}_{2n}$-mensurável (ver Secção 5.3) e a função $(t, u) \to \left(s, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)$ é $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$-mensurável então também a função

$$(t, u) \to L\left(s, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u)$$

é $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$-mensurável (ver Proposições 2.7.24 e 2.7.12); por outro lado, como a função $(t, u) \to \left|\frac{z'(t)}{1+u}\right|$ é $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$-mensurável (ver Proposição 2.7.10) então, pelas Proposições 2.7.15 e 2.7.12, a função

$$(t, u) \to r\theta\left(\frac{|z'(t)|}{1+u}\right)(1+u)$$

é $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$-mensurável. Assim, pela Proposição 2.7.12, a função $(t, u) \to \widetilde{L}(t, (s, y), u)$ é $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$-mensurável.

Agora fixemos $(t, u) \in Graf\ (U)$ e mostremos que a função $\widetilde{L}(t, \cdot, u)$ é lipschitziana em

$$\Omega_t := \left\{(s, y) \in \mathbb{R}^2 : (s, y) \in (\bar{s}(t), \bar{y}(t)) + \delta B\right\} = (\bar{s}(t), \bar{y}(t)) + \delta B, \text{ para algum } \delta > 0$$

com constante $k : Graf\ (U) \to \mathbb{R}$ $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$-mensurável e tal que $t \to k(t, \bar{u}(t)) = k(t, 0) =: k_0(t)$ é uma função integrável.

Temos

$$\begin{aligned} Graf\ (U) \quad : &= \{(t,u) \in [0,T] \times \mathbb{R} : u \in U(t)\} = \{(t,u) \in [0,T] \times \mathbb{R} : u \in [-\gamma(t), \gamma(t)]\} \\ &= \bigcup_{t \in [0,T]} \{t\} \times [-\gamma(t), \gamma(t)] \end{aligned}$$

então dizer que $(t,u) \in Graf\ (U)$ significa que $t \in [0,T]$ e $u \in [-\gamma(t), \gamma(t)]$.

Fixemos também algum $\delta > 0$ e $(s_1, y_1), (s_2, y_2) \in \Omega_t$. Temos

$$\begin{aligned} \left|\widetilde{L}(t,(s_1,y_1),u) - \widetilde{L}(t,(s_2,y_2),u)\right| &= \left|L\left(s_2, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u) - L\left(s_1, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u)\right| \\ &= \left|L\left(s_2, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right) - L\left(s_1, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)\right| |1+u|. \end{aligned} \tag{5.47}$$

Então para mostar o que queremos, basta mostar que a função $L\left(\cdot, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)$ é lipschitziana em $\bar{s}(t) + \delta B$ $(= t + \delta B)$ com constante $k(t,u)$, como acima.

Como estamos a supor que γ é tal que

$$x'(t) \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} L(t, x(t), \cdot)) \quad \text{qs}$$

então podemos aplicar o Teorema 2.14.8. Seguindo a sua demonstração até (5.44) concluimos que $L(\cdot, x(t), x'(t))$ é lipschitziana em $[0,T]$ com constante

$$\widetilde{k}(t,u) := \widetilde{C}\,|L(t, x(t), x'(t))| + \widetilde{\widetilde{C}} = \widetilde{C}\left|L\left(t, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)\right| + \widetilde{\widetilde{C}},$$

$\mathcal{L} \times \mathcal{B}$-mensurável, onde

$$\widetilde{C} := \kappa e^{T\kappa}\left(1 + Te^{T\kappa}\kappa\right) \quad \text{e} \quad \widetilde{\widetilde{C}} := \eta e^{T\kappa}\left(1 + \kappa T e^{T\kappa}\right).$$

Ou seja, mostrámos que

$$\left|L\left(s_2, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right) - L\left(s_1, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)\right| \le \widetilde{k}(t,u)\,|s_2 - s_1| \quad \forall s_1, s_2 \in [0,T]$$

e em particular para qualquer $s_1, s_2 \in \bar{s}(t) + \delta B = t + \delta B$. O que, por (5.47) e por $u \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \subset (-1,1)$, implica

$$\begin{aligned} \left|\widetilde{L}(t,(s_1,y_1),u) - \widetilde{L}(t,(s_2,y_2),u)\right| &\le |1+u|\,\widetilde{k}(t,u)\,|s_2 - s_1| \\ &\le 2\widetilde{k}(t,u)\,|s_2 - s_1| \\ &\le 2\widetilde{k}(t,u)\,|(s_2,y_2) - (s_1,y_1)| \quad \forall (s_1,y_1), (s_2,y_2) \in \Omega_t \end{aligned}$$

e mostra que $\widetilde{L}(t, \cdot, u)$ é lipschitziana em Ω_t com constante

$$k(t,u) := 2\widetilde{k}(t,u) = 2\widetilde{C}\left|L\left(t, z(t), \frac{z'(t)}{1+u}\right)\right| + 2\widetilde{\widetilde{C}}$$

$\mathcal{L} \times \mathcal{B}$-mensurável.

Além disso, quando $u = \bar{u} \equiv 0$ a função $t \to L(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t)) = L(t, z(t), z'(t))$ pertence a $L^1([0,T], \mathbb{R})$ (por hipótese). Logo também pertence a $L^1([0,T], \mathbb{R})$ a função

$$k_0(t) := k(t,0) = 2\widetilde{C}\,|L(t, z(t), z'(t))| + 2\widetilde{\widetilde{C}}.$$

Mostremos agora que a função ϕ verifica as mesmas condições que a função $\widetilde{L}$. Por conseguinte fixemos $(s,y) \in \mathbb{R}^2$ e mostremos que a função $(t,u) \to \phi(t,(s,y),u)$ é $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$-mensurável. Vimos acima que a função $(t,u) \to r\theta\left(\frac{|z'(t)|}{1+u}\right)(1+u)$ é $\mathcal{L}\times\mathcal{B}$-mensurável e como também o é a função $(t,u) \to 1+u$ então, pela Proposição 2.7.25, a função $(t,u) \to \phi(t,(s,y),u)$ é $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$-mensurável. Agora fixemos $(t,u) \in Graf\ (U)$ e mostremos que a função $\phi(t,\cdot,u)$ é lipschitziana em Ω_t com constante k (a mesma que para a função $\widetilde{L}$). Como a função ϕ não depende de (s,y) então a função $\phi(t,\cdot,u)$ é lipschitziana em Ω_t com qualquer constante $k \geq 0$, e em particular para a constante de Lipschitz encontrada para a função $\widetilde{L}$. Além disso temos

$$(\bar{s}'(t),\bar{y}'(t)) = (1,\theta(|z'(t)|)) = \phi(t,(\bar{s}(t),\bar{y}(t)),0) \quad \text{qs.}$$

Como γ é mensurável então, pelas Proposições 2.23.14 e 2.23.13, a multifunção $U:[0,T] \to \mathbb{R}$ definida por

$$U(t) := [-\gamma(t),\gamma(t)] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq \gamma(t)\} \cap \{x \in \mathbb{R} : -x \leq \gamma(t)\}$$

é mensurável e portanto, pela Proposição 2.23.11, $Graf\ (U)$ é $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$-mensurável. Por outro lado, a função $\bar{u}(t) = 0$ é mensurável e $\bar{u}(t) \in U(t)\ \forall t \in [0,T]$, então $\bar{u}$ é uma selecção mensurável para U.

Quanto aos conjuntos fechados C_0 e C_1 temos

$$(\bar{s}(0),\bar{y}(0)) = (0,0) \in C_0 \quad \text{e} \quad (\bar{s}(T),\bar{y}(T)) = (T,\Lambda_\theta(z)) \in C_1.$$

Então podemos aplicar o Teorema 5.2.1 de [13] e concluir que existem um escalar λ_0 igual a 0 ou 1 e uma função absolutamente contínua (λ_1,λ_2), tais que

$$-\left(\lambda_1'(t),\lambda_2'(t)\right) \in \partial_{(s,y)}H_p(t,(\bar{s}(t),\bar{y}(t)),(\lambda_1(t),\lambda_2(t)),\bar{u}(t),\lambda_0) \quad \text{qs,} \tag{5.48}$$

onde $H_p:[0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por

$$H_p(t,(s,y),(\lambda_1,\lambda_2),u,\lambda_0) := \langle(\lambda_1,\lambda_2),\phi(t,(s,y),u)\rangle - \lambda_0\widetilde{L}(t,(s,y),u).$$

Ou seja, para qualquer $(t,(s,y),(\lambda_1,\lambda_2),u,\lambda_0) \in [0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tem-se

$$\begin{aligned}&H_p(t,(s,y),(\lambda_1,\lambda_2),u,\lambda_0)\\ =\ &\lambda_1(1+u)+\lambda_2\theta\left(\frac{|z'(t)|}{1+u}\right)(1+u)-\lambda_0L\left(s,z(t),\frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u)-\lambda_0r\theta\left(\frac{|z'(t)|}{1+u}\right)(1+u).\end{aligned}$$

Então, pelas Proposições 2.21.17 e 2.21.16,

$$\begin{aligned}\partial_{(s,y)}H_p(t,(s,y),(\lambda_1,\lambda_2),u,\lambda_0) &= \partial_{(s,y)}\left(-\lambda_0L\left(s,z(t),\frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u)\right)\\ &= -\lambda_0\partial_{(s,y)}L\left(s,z(t),\frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u)\\ &\subseteq -\lambda_0\partial_sL\left(s,z(t),\frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u)\times\{0\}.\end{aligned}$$

Assim (5.48) é equivalente a

$$-\left(\lambda_1'(t),\lambda_2'(t)\right) \in -\lambda_0\partial_tL(t,z(t),z'(t)) \times \{0\} \quad \text{qs,}$$

o que mostra que, para quase todo $t \in [0,T]$,

$$\lambda_1'(t) \in \lambda_0\partial_tL(t,z(t),z'(t)) \quad \text{e} \quad \lambda_2'(t) = 0, \tag{5.49}$$

mas como λ_2 é contínua temos mesmo $\lambda_2'(t) = 0\ \forall t \in [0,T]$.

Temos também as condições de transversalidade

$$(\lambda_1(0),\lambda_2(0)) \in N_{C_0}(\bar{s}(0),\bar{y}(0)) \tag{5.50}$$

e

$$-\lambda_0(\xi_1,\xi_2)-(\lambda_1(T),\lambda_2(T))\in N_{C_1}(\bar{s}(T),\bar{y}(T)), \tag{5.51}$$

para algum $(\xi_1,\xi_2)\in\partial f(\bar{s}(T),\bar{y}(T))$.

Como $C_1=\{0\}\times\mathbb{R}$ é convexo então [12]

$$\begin{aligned} N_{C_0}(\bar{s}(0),\bar{y}(0)) &= N_{C_0}(0,0)=\left\{(a,b)\in\mathbb{R}^2:\langle(a,b),(0,0)-(c_1,c_2)\rangle\geq 0\ \ \forall(c_1,c_2)\in C_0\right\} \\ &= \left\{(a,b)\in\mathbb{R}^2: bc_2\leq 0\ \forall c_2\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}\times\{0\} \end{aligned}$$

e (5.50) implica

$$\lambda_2(0)=0.$$

Assim, como $\lambda_2'(t)=0\ \forall t\in[0,T]$ e $\lambda_2(0)=0$ vem $\lambda_2\equiv 0$.

Para ver o que significa (5.51) comecemos por determinar $\partial f(s,y)$. Como, pelas Proposições 2.21.3, 2.21.13 e 2.21.10, respectivamente, temos

$$\emptyset\neq\partial_{(s,y)}f(s,y)=\partial_{(s,y)}\left(\sigma\left|y-\Lambda_\theta(z)\right|^2\right)\subset\{0\}\times\partial_y\left(\sigma\left|y-\Lambda_\theta(z)\right|^2\right)=\{0\}\times\{2\sigma(y-\Lambda_\theta(z))\}$$

então

$$\partial f(\bar{s}(T),\bar{y}(T))=\{(0,0)\}$$

e portanto (5.51) reduz-se a

$$-(\lambda_1(T),\lambda_2(T))\in N_{C_1}(T,\Lambda_\theta(z)).$$

Como $C_1=\mathbb{R}^2$ então

$$N_{C_1}(s(T),y(T))=\{(0,0)\},$$

o que implica

$$\lambda_1(T)=0 \quad \text{e} \quad \lambda_2(T)=0. \tag{5.52}$$

Suponhamos agora que $\lambda_0=0$. Por (iv) do referido teorema temos

$$0<\max_{t\in[0,T]}\left|(\lambda_1(t),\lambda_2(t))\right|+|\lambda_0|=\max_{t\in[0,T]}\left|(\lambda_1(t),0)\right|=\max_{t\in[0,T]}\left|\lambda_1(t)\right|,$$

o que mostra que λ_1 não pode ser a função nula. Mas se $\lambda_0=0$ resulta que $\lambda_1'(t)=0$ qs (ver (5.49)) e como λ_1 é contínua então $\lambda_1'(t)=0\ \forall t\in[0,T]$; por (5.52), $\lambda_1(T)=0$ então também $\lambda_1\equiv 0$, o que não pode acontecer. Portanto $\lambda_0=1$. Segue, por (5.49), que

$$\lambda_1(t)\in\partial_t L(t,z(t),z'(t)) \quad \text{qs.}$$

Como $\lambda_1\in AC([0,T],\mathbb{R})=W^{1,1}([0,T],\mathbb{R})$ então $\lambda_1'\in L^1([0,T],\mathbb{R})$ e portanto $\partial_t L(t,z(t),z'(t))$ tem uma selecção integrável (a própria função λ_1). Defina-se $\xi:[0,T]\to\mathbb{R}$ por

$$\xi(t):=\lambda_1'(t) \quad \text{qs.}$$

[12] Representamos por $N_{C_0}(\bar{s}(0),\bar{y}(0))$ o cone dos vectores normais a C_0 em $(\bar{s}(0),\bar{y}(0))$ (no sentido de Clarke).

Se C é convexo $N_C(x)$ coincide com o cone das normais no sentido da análise convexa, isto é, $\xi\in\mathbb{R}^n$ é normal a C em x se

$$\langle\xi,x-c\rangle\geq 0 \quad \forall c\in C.$$

Demonstração:
Ver [13], Proposição 2.4.4.

Pela Proposição 2.14.10, temos

$$\lambda_1(t) = \lambda_1(0) + \int_0^t \lambda_1'(\tau)\,d\tau = c + \int_0^t \xi(\tau)\,d\tau$$

para $c := 0$. Encontrámos assim uma constante real c e uma função integrável ξ como no enunciado do Teorema 5.4.16.

Além disso, pelo Teorema 5.2.1 de [13], a função $\bar{u}$ maximiza H_p qs, isto é,

$$\max_{-\gamma(t)\le u\le\gamma(t)} H_p(t,(\bar{s}(t),\bar{y}(t)),(\lambda_1(t),0),u,1) = H_p(t,(\bar{s}(t),\bar{y}(t)),(\lambda_1(t),0),\bar{u}(t),1) \quad \text{qs},$$

o que é equivalente a

$$\begin{aligned}&\max_{-\gamma(t)\le u\le\gamma(t)}\left\{\lambda_1(t)(1+u) - L\left(t,z(t),\frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u) - r\theta\left(\frac{|z'(t)|}{1+u}\right)(1+u)\right\}\\ &= \lambda_1(t) - L(t,z(t),z'(t)) - r\theta(|z'(t)|) \quad \text{qs}.\end{aligned}$$

Como, para quase todo $t\in[0,T]$ a função $u\to\lambda_1(t)(1+u)$ é afim e, pelo Lema 3.4.1, as funções

$$u\to L\left(t,z(t),\frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u) \quad \text{e} \quad u\to\theta\left(\frac{|z'(t)|}{1+u}\right)(1+u)$$

são convexas então também o é a função

$$u\to -H_p((t,(\bar{s}(t),\bar{y}(t)),(\lambda_1(t),0),u,1)).$$

Portanto, pela Proposição 2.16.27, esta função é lipschitziana no interior do seu domínio e como

$$u=0\in\operatorname{int}(\operatorname{dom}H_p(t,(\bar{s}(t),\bar{y}(t)),(\lambda_1(t),0),\cdot,1))$$

(ver Lema 3.4.1) então H_p é lipschitziana nalguma vizinhança de $\bar{u}$. Portanto dizer que $\bar{u}$ maximiza H_p qs implica, pela Proposição 2.21.18, que 0 pertence qs ao seu subgradiente generalizado em $\bar{u}$. Temos

$$\begin{aligned}&\partial_u H_p((t,(\bar{s}(t),\bar{y}(t)),(\lambda_1(t),0),u,1))\\ &= \partial_u\left(\lambda_1(t)(1+u) - L\left(t,z(t),\frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u) - r\theta\left(\frac{|z'(t)|}{1+u}\right)(1+u)\right)\\ &\subseteq \lambda_1(t) - \partial_u\left(L\left(t,z(t),\frac{z'(t)}{1+u}\right)(1+u)\right) - r\partial_u\left(\theta\left(\frac{|z'(t)|}{1+u}\right)(1+u)\right)\end{aligned}$$

(ver Proposições 2.21.17 e 2.21.10). Além disso, pelo Lema 3.4.1,

$$\begin{aligned}\partial_u\left(L\left(t,z(t),\frac{z'(t)}{1+\bar{u}(t)}\right)(1+\bar{u}(t))\right) &= L\left(t,z(t),\frac{z'(t)}{1+\bar{u}(t)}\right) - \left\langle\frac{z'(t)}{1+\bar{u}(t)},\partial_v L\left(t,z(t),\frac{z'(t)}{1+u}\right)\right\rangle\\ &= L(t,z(t),z'(t)) - \langle z'(t),\partial_v L(t,z(t),z'(t))\rangle\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\partial_u\left(\theta\left(\frac{|z'(t)|}{1+\bar{u}(t)}\right)(1+\bar{u}(t))\right) &= r\theta\left(\frac{|z'(t)|}{1+\bar{u}(t)}\right) - r\frac{|z'(t)|}{1+\bar{u}(t)}\theta'\left(\frac{|z'(t)|}{1+\bar{u}(t)}\right)\\ &= r\theta(|z'(t)|) - r|z'(t)|\theta'(|z'(t)|).\end{aligned}$$

Assim

$$0\in\lambda_1(t) + \langle z'(t),\partial_v L(t,z(t),z'(t))\rangle - L(t,z(t),z'(t)) + r|z'(t)|\theta'(|z'(t)|) - r\theta(|z'(t)|) \quad \text{qs},$$

o que é equivalente a

$$L(t,z(t),z'(t)) - \langle z'(t),p(t)\rangle + r\theta(|z'(t)|) - r|z'(t)|\theta'(|z'(t)|) = c + \int_0^t \xi(\tau)\,d\tau \quad \text{qs},$$

para alguma função mensurável $p \in \partial_v L(t, z(t), z'(t))$ e ξ como no enunciado do teorema. Obtivemos assim (5.45).

Resta-nos provar a afirmação final do teorema. Vamos aplicar directamente as condições necessárias do Teorema 5.2.1 de [13] ao problema sem o transformar, aplicando a transformação de Erdmann, num problema em dimensão 1.

Fixemos k tal que $(*)'$ se verifica.

O que vimos até aqui é válido para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e em particular para $n = 1$. Suponhamos, com vista a um absurdo, que z' não é essencialmente limitada. Então para qualquer $\beta > 0$ podemos encontrar um subconjunto I_β de $[0, T]$, com $m(I_\beta) > 0$ e tal que

$$|z'(t)| > \beta \quad \forall t \in I_\beta.$$

Tal como vimos na demonstração do Teorema 5.3.1 a condição (5.45) permite-nos chegar a

$$\begin{aligned} & r \left[\inf_{\substack{x\in\Omega, v\in K \\ |v|<k \\ t\in[0,T]}} \{\theta(|v|) - |v|\,\theta'(|v|)\} - \sup_{\substack{x\in\Omega, v\in K \\ |v|>\beta \\ t\in[0,T]}} \{\theta(|v|) - |v|\,\theta'(|v|)\} \right] \\ \leq & \sup_{\substack{x\in\Omega, v\in K \\ |v|>\beta \\ t\in[0,T]}} \sup_{p\in\partial_v L(t,x,v)} \{L(t,x,v) - \langle v, p\rangle\} - \inf_{\substack{x\in\Omega, v\in K \\ |v|<k \\ t\in[0,T]}} \inf_{p\in\partial_v L(t,x,v)} \{L(t,x,v) - \langle v, p\rangle\} + \kappa\Lambda(\bar{x}) + \eta T. \end{aligned}$$

Para $r = 0$ obtemos

$$0 \leq \sup_{\substack{x\in\Omega, v\in K \\ |v|>\beta \\ t\in[0,T]}} \sup_{p\in\partial_v L(t,x,v)} \{L(t,x,v) - \langle v, p\rangle\} - \inf_{\substack{x\in\Omega, v\in K \\ |v|<k \\ t\in[0,T]}} \inf_{p\in\partial_v L(t,x,v)} \{L(t,x,v) - \langle v, p\rangle\} + \kappa\Lambda(\bar{x}) + \eta T,$$

o que é absurdo pois para β suficientemente grande o lado direito é, por $(*)'$, negativo.

Portanto a função z' é essencialmente limitada em $[0, T]$.

Vamos traduzir o problema em termos de um problema de controlo óptimo de estado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e dinâmica

$$\frac{dx}{dt} = v(t), \quad \frac{dy}{dt} = \theta(|v(t)|).$$

O controlo v está sujeito à restrição $v(t) \in K$ qs, e as condições de fronteira são $x(0) = 0$, $y(0) = 0$. Ou seja, vamos considerar o problema de minimização do funcional

$$I((x,y), v) := \widetilde{f}(x(T), y(T)) + \int_0^T \widetilde{L}(t, (x(t), y(t)), v(t))\, dt$$

sujeito a

$$v(t) \in K \text{ qs}, \quad (x'(t), y'(t)) = \phi(t, (x(t), y(t)), v(t)) \text{ qs}, \quad (x(0), y(0)) \in C_0, \quad (x(T), y(T)) \in C_1,$$

onde

(a) a função $\widetilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é dada por $\widetilde{f}(x, y) := \sigma\,|y - \Lambda_\theta(z)|^2$;

(b) a função integranda $\widetilde{L} : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ é dada por

$$\widetilde{L}(t, (x, y), v) := L(t, x, v) + r\theta(|v|);$$

(c) a função $\phi : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ é dada por $\phi(t, (x, y), v) := (v, \theta(|v|))$;

(d) a multifunção $U : [0, T] \to \mathbb{R}$ é dada por $U(t) := K$;

e

(e) $C_0 := \{0\} \times \mathbb{R}$ e $C_1 := \mathbb{R}^2$.

Também aqui queremos aplicar as condições necessárias dadas no Teorema 5.2.1 de [13].

Comecemos por mostrar que o estado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cuja dinâmica é dada por

$$\frac{dx}{dt} = v(t), \quad \frac{dy}{dt} = \theta(|v(t)|).$$

é uma função absolutamente contínua. Como v é mensurável e

$$\int_0^T |v(t)| \, dt \in \mathbb{R}$$

então, pela Proposição 2.14.11, a função $x : [0, T] \to \mathbb{R}$ dada por

$$x(t) := \int_0^t v(\tau) \, d\tau$$

é absolutamente contínua.

A função $t \to \theta(|v(t)|)$ é mensurável (ver Proposição 2.7.15). Além disso, para $t \in [0, T]$ tal que $z'(t)$ exista, a função $v \to \theta(|v|)$ é, em particular, contínua em $v = z'(t)$, isto é, para cada $\varepsilon > 0$ existe um $\delta = \delta(t, \varepsilon) > 0$ tal que

$$|v - z'(t)| < \delta \Rightarrow |\theta(|v|) - \theta(|z'(t)|)| < \varepsilon.$$

Fixemos $\varepsilon > 0$ e seja $\delta = \delta(t, \varepsilon) > 0$ como acima. Então, para quase todo t tal que $|v(t) - z'(t)| < \delta$, obtemos

$$\int_0^T \theta(|z'(t)|) \, dt - \varepsilon < \int_0^T \theta(|v(t)|) \, dt < \int_0^T \theta(|z'(t)|) \, dt + \varepsilon$$

e como $z \in AC_\theta$ então

$$\int_0^T \theta(|v(t)|) \, dt \in \mathbb{R}.$$

Assim, pela Proposição 2.14.11, a função $y : [0, T] \to \mathbb{R}$ dada por

$$y(t) := \int_0^t \theta(|v(\tau)|) \, d\tau$$

é absolutamente contínua.

Mostremos agora que o controlo $\bar{v}(t) = z'(t)$ e o estado correspondente

$$\bar{x}(t) = z(t), \quad \bar{y}(t) = \int_0^t \theta(|z'(\tau)|) \, d\tau,$$

resolvem o problema de minimização descrito acima. Fixados um qualquer controlo mensurável tal que $v \in K$ qs e estado (x,y) correspondente, obtemos

$$\begin{aligned}
I((x,y),u) &= \sigma\left|y(T)-\Lambda_\theta(z)\right|^2+\int_0^T \widetilde{L}(t,(x(t),y(t)),v(t))\,dt \\
&= \sigma\left|\int_0^T \theta(|v(t)|)\,dt-\Lambda_\theta(z)\right|^2+\int_0^T (L(t,x(t),v(t))+r\theta(|v(t)|))\,dt \\
&= \sigma\left|\int_0^T \theta(|x'(t)|)\,dt-\Lambda_\theta(z)\right|^2+\int_0^T (L(t,x(t),x'(t))+r\theta(|x'(t)|))\,dt \\
&= \sigma\left|\Lambda_\theta(x)-\Lambda_\theta(z)\right|^2+\Lambda(x)+r\Lambda_\theta(x)=f(x) \\
&\leq f(z)=\sigma\left|\Lambda_\theta(z)-\Lambda_\theta(z)\right|^2+\Lambda(z)+r\Lambda_\theta(z) \\
&= \sigma\left|\Lambda_\theta(z)-\Lambda_\theta(z)\right|^2+\int_0^T (L(t,z(t),z'(t))+r\theta(|z'(t)|))\,dt \\
&= \sigma\left|\bar{y}(T)-\Lambda_\theta(z)\right|^2+\int_0^T \widetilde{L}(t,(\bar{x}(t),\bar{y}(t)),\bar{v}(t))\,dt=I((\bar{x},\bar{y}),\bar{v}).
\end{aligned}$$

A desigualdade $f(x)\leq f(z)$ resulta da escolha de ε feita atrás e desde que v seja tal que $|v(t)-z'(t)|<\delta$ qs.

Vimos no caso geral que a função $\widetilde{f}$ é localmente lipschitziana em $\mathbb{R}^2$.

Para cada $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ a função $(t,v)\to\widetilde{L}(t,(x,y),v)$ é $\mathcal{L}\times\mathcal{B}$-mensurável. De facto, vimos na Secção 5.3 que a função L é $\mathcal{L}\times\mathcal{B}_{2n}$-mensurável então, em particular, a função $(t,v)\to L(t,x,v)$ é $\mathcal{L}\times\mathcal{B}$-mensurável e como a função $(t,v)\to r\theta(|v|)$ também o (ver Proposição 2.7.14) então, pela Proposição 2.7.12, a função $(t,v)\to\widetilde{L}(t,(x,y),v)$ é $\mathcal{L}\times\mathcal{B}$-mensurável.

Agora fixemos $(t,v)\in Graf\ (U)$ e mostremos que a função $\widetilde{L}(t,\cdot,v)$ é lipschitziana em

$$\Omega_t:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x,y)\in(\bar{x}(t),\bar{y}(t))+\mu B\right\}=(\bar{x}(t),\bar{y}(t))+\mu B,\text{ para algum }\mu>0$$

com constante $k:Graf\ (U)\to\mathbb{R}$ $\mathcal{L}\times\mathcal{B}$-mensurável e tal que $t\to k(t,\bar{v}(t))$ é uma função integrável.

Temos

$$Graf\ (U):=\{(t,v)\in[0,T]\times\mathbb{R}:v\in U(t)\}=\{(t,v)\in[0,T]\times\mathbb{R}:v\in K\}=[0,T]\times K$$

então dizer que $(t,v)\in Graf\ (U)$ significa que $t\in[0,T]$ e $v\in K$.

Fixemos também algum $\mu>0$ e $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\Omega_t$. Temos

$$\left|\widetilde{L}(t,(x_1,y_1),v)-\widetilde{L}(t,(x_2,y_2),v)\right|=\left|L(t,x_1,v)-L(t,x_2,v)\right|.$$

Então para mostar o que queremos, basta mostar que a função $L(t,\cdot,v)$ é lipschitziana em $\bar{x}(t)+\mu B$ $(=z(t)+\mu B)$ com constante $k(t,v)$, como acima.

Como estamos a supor que

$$v\in\operatorname{int}(\operatorname{dom}L(t,x(t),\cdot))\quad\text{qs}$$

e se verifica a hipótese (B):

$$|\partial_x L(t,x,v)|\leq k_0\,|L(t,x,v)|+c_0\quad\forall(t,x,v)\in[0,T]\times\Omega\times\mathbb{R},$$

para algumas constantes k_0 e c_0 então, fixado t tal que $z'(t)$ exista, temos [13]

$$|L(t,x_1,v) - L(t,z(t),v)| \leq \alpha_\mu [k_0 |L(t,z(t),v)| + c_0] |x_1 - z(t)| \leq \alpha_\mu [k_0 |L(t,z(t),v)| + c_0] \mu$$

o que implica

$$|L(t,x_1,v)| \leq (\alpha_\mu k_0 \mu + 1) |L(t,z(t),v)| + \alpha_\mu c_0 \mu.$$

Aplicando outra vez o mesmo raciocínio vem

$$\begin{aligned} |L(t,x_1,v) - L(t,x_1,v)| &\leq \alpha_\mu [k_0 |L(t,x_1,v)| + c_0] |x_2 - x_1| \\ &\leq \alpha_\mu [k_0 ((\alpha_\mu k_0 \mu + 1) |L(t,z(t),v)| + \alpha_\mu c_0 \mu) + c_0] |x_2 - x_1| \\ &= (c_1 |L(t,z(t),v)| + c_2) |x_2 - x_1|, \end{aligned}$$

onde

$$c_1 := \alpha_\mu k_0 (\alpha_\mu k_0 \mu + 1) \quad \text{e} \quad c_2 := \alpha_\mu c_0 (\alpha_\mu k_0 \mu + 1).$$

Então a função $L(t,\cdot,v)$ é lipschitziana em $\bar{x}(t) + \mu B$ com constante

$$k(t,v) := c_1 |L(t,z(t),v)| + c_2.$$

Como $(t,v) \to (t,z(t),v)$ é $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$-mensurável e L é $\mathcal{L} \times \mathcal{B}_2$-mensurável então também a função k é $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$--mensurável. Além disso, a função $t \to L(t,z(t),z'(t))$ pertence a $L^1([0,T],\mathbb{R})$ (por hipótese). Logo também pertence a $L^1([0,T],\mathbb{R})$ a função

$$t \to k(t,z'(t)) = c_1 |L(t,z(t),z'(t))| + c_2.$$

Mostremos agora que a função ϕ verifica as mesmas condições que a função $\widetilde{L}$. Como a função $(t,v) \to (v,\theta(|v|))$ é $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$-mensurável (ver Proposição 2.7.14) então também o é a função $(t,v) \to \phi(t,(x,y),v)$ qualquer que seja o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ fixado. Dado que a função ϕ não depende explicitamente de (x,y) então para qualquer $(t,v) \in Graf\ (U)$ a função $\phi(t,\cdot,u)$ é lipschitziana em Ω_t com constante k (a mesma da função $\widetilde{L}$). Além disso temos

$$(\bar{x}'(t),\bar{y}'(t)) = (z'(t),\theta(|z'(t)|)) = \phi(t,(\bar{x}(t),\bar{y}(t)),\bar{v}(t)) \quad \text{qs.}$$

O gráfico da multifunção $U : Gr(U) = [0,T] \times K$ é um conjunto é $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$-mensurável. Além disso, como a função $t \to z'(t)$ é mensurável e $z'(t) \in K$ qs então é uma selecção mensurável para $U(t) = K$.

Quanto aos conjuntos fechados C_0 e C_1 temos

$$(x(0),y(0)) = (0,0) \in C_0 \quad \text{e} \quad (x(T),y(T)) = \left(\int_0^T v(\tau)\,d\tau, \Lambda_\theta(x)\right) \in C_1.$$

Assim podemos aplicar o Teorema 5.2.1 de [13] e concluir que existem uma função absolutamente contínua (λ_1,λ_2) e um escalar λ_0 igual a 0 ou 1, tais que

$$-\left(\lambda_1'(t),\lambda_2'(t)\right) \in \partial_{(x,y)} H_p(t,(\bar{x}(t),\bar{y}(t)),(\lambda_1(t),\lambda_2(t)),\bar{v}(t),\lambda_0) \quad \text{qs,}$$

[13] Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é tal que

$$|\partial f(x)| \leq k_0 |f(x)| + k_1 |x| + c_0 \quad \forall x,$$

então, para qualquer x e qualquer $y \in x + iB$, tem-se

$$|f(y) - f(x)| \leq \alpha_i [k_0 |f(x)| + c_0 + k_1 \max\{|x|,|y|\}] |y - x|$$

onde $\alpha_i := \left(e^{k_0 i} - 1\right)/k_0 i$. (Onde i pode ser qualquer real positivo.)

Demonstração:
Ver [13], Lema 1, pág. 181.

onde $H_p : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por

$$H_p\left(t,(x,y),(\lambda_1,\lambda_2),v,\lambda_0\right) := \left\langle (\lambda_1,\lambda_2), \phi\left(t,(x,y),v\right)\right\rangle - \lambda_0 \widetilde{L}\left(t,(x,y),v\right).$$

Ou seja, para qualquer $(t,(x,y),(\lambda_1,\lambda_2),v,\lambda_0) \in [0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tem-se

$$H_p\left(t,(x,y),(\lambda_1,\lambda_2),v,\lambda_0\right) = \lambda_1 v + \lambda_2 \theta\left(|v|\right) - \lambda_0 L\left(t,x,v\right) - \lambda_0 r\theta\left(|v|\right).$$

Então, pelas Proposições 2.21.17 e 2.21.16,

$$\begin{aligned} \partial_{(x,y)} H_p\left(t,(x,y),(\lambda_1,\lambda_2),v,\lambda_0\right) &= \partial_{(x,y)}\left(-\lambda_0 L\left(t,x,v\right)\right) = -\lambda_0 \partial_{(x,y)} L\left(t,x,v\right) \\ &\subseteq -\lambda_0 \partial_x L\left(t,x,v\right) \times \{0\}, \end{aligned}$$

o que implica

$$\lambda_1'(t) \in \lambda_0 \partial_x L\left(t,z(t),z'(t)\right) \text{ qs} \quad \text{e} \quad \lambda_2'(t) = 0 \text{ qs} \tag{5.53}$$

mas como λ_2 é contínua temos mesmo $\lambda_2'(t) = 0 \ \forall t \in [0,T]$.

Temos também as condições de transversalidade

$$(\lambda_1(0), \lambda_2(0)) \in N_{C_0}\left(\bar{x}(0), \bar{y}(0)\right)$$

e

$$-\lambda_0(\xi_1,\xi_2) - (\lambda_1(T), \lambda_2(T)) \in N_{C_1}\left(\bar{x}(T), \bar{y}(T)\right),$$

para algum $(\xi_1,\xi_2) \in \partial f\left(x(T), y(T)\right)$.

Tal como vimos acima podemos mostrar que

$$N_{C_0}\left(\bar{x}(0), \bar{y}(0)\right) = \mathbb{R} \times \{0\} \qquad \text{e} \qquad N_{C_1}\left(\bar{x}(T), \bar{y}(T)\right) = \{(0,0)\}.$$

Assim, pela primeira condição de transversalidade resulta que $\lambda_2 \equiv 0$ e pela segunda $\lambda_1(T) = 0$.

Por outro lado, sabemos que o máximo abaixo é atingido qs em $v = z'(t)$

$$\max_{v \in K} H_p\left(t,(\bar{x}(t),\bar{y}(t)),(\lambda_1(t),0),v,\lambda_0\right) = \max_{v \in K}\left\{\lambda_1(t)v - \lambda_0 L\left(t,z(t),v\right) - \lambda_0 r\theta\left(|v|\right)\right\}.$$

Suponhamos agora que $\lambda_0 = 0$. Por (iv) do referido teorema temos

$$0 < \max_{t\in[0,T]} \left|(\lambda_1(t),\lambda_2(t))\right| + |\lambda_0| = \max_{t\in[0,T]}\left|(\lambda_1(t),0)\right| = \max_{t\in[0,T]}|\lambda_1(t)|,$$

o que mostra que λ_1 não pode ser a função nula.

Para $\lambda_0 = 0$ (5.53) implica $\lambda_1'(t) = 0$ qs e como λ_1 é contínua temos mesmo $\lambda_1'(t) = 0 \ \forall t \in [0,T]$. Portanto, por (iv) do referido teorema, temos $\lambda_1(t) \equiv p_0 \neq 0$. Da condição do máximo segue que, para quase todo $t \in [0,T]$ fixado,

$$\lambda_1(t)v \leq \lambda_1(t)z'(t) \quad \forall v \in K$$

o que é equivalente a

$$\lambda_1(t)\left(z'(t) - v\right) \geq 0 \quad \forall v \in K$$

e isto significa que $\lambda_1(t) \neq 0$ é um vector normal a K em $z'(t)$; mas isto só pode acontecer se $z'(t) = 0$ qs, pois o único ponto num cone K em $\mathbb{R}$ que admite um vector normal não-nulo é a origem. Então z é constante e portanto é de classe C^1.

Examinemos agora o caso $\lambda_0 = 1$. Então, pela condição do máximo, o máximo abaixo é atingido qs em $v = z'(t)$

$$\max_{v \in K}\left\{\lambda_1(t)v - L\left(t,z(t),v\right) - r\theta\left(|v|\right)\right\}.$$

Portanto, pela Proposição 2.21.18,

$$0 \in \partial_v \left(\lambda_1 (t)\, z' (t) - L (t, z (t)\, , z' (t)) - r\theta \left(\left|z' (t)\right|\right)\right) \quad \text{qs}$$

donde

$$\lambda_1 (t) \in \partial_v g \left(t, z' (t)\right) \qquad \text{qs,}$$

onde g é dada por

$$g (t, v) := L (t, z (t)\, , v) + r\theta \left(|v|\right) + \psi_K (v)$$

e onde ψ_K é a função incatriz de K [14]. Como $g (t, \cdot)$ é estritamente convexa, isto implica que z' é contínua; o argumento é dado em [19], pág. 86.■

[14] A **função indicatriz** de um subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$, $\delta_C (\cdot)$, define-se por

$$\delta_C (x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \in C \\ +\infty & \text{se } x \notin C. \end{cases}$$

Bibliografia

[1] ADAMS, R.: Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.

[2] AMBROSIO, L., ASCENZI, O. and BUTTAZZO, G.: Lipschitz Regularity for Minimizers of Integral Functionals with Highly Discontinuous Integrands, J. Math. Anal. Appli., **142**, 1989, 301-316.

[3] AUBIN, J. and FRANKOSWKA, H.: Set-valued Analysis, Birkhäuser, Boston, 1990.

[4] BALL, J. and MIZEL, V.: One-dimensional Variational Problems whose Minimizers do not Satisfy the Euler-Lagrange Equation, Arch. Rational Mech. Anal., **90**, 1985, 325-388.

[5] BUTTAZZO, G.: Semicontinuity, Relaxation and Integral Representation in the Calculus of Variations, Longman Scientific & Technical, New York, 1989.

[6] BUTTAZZO, G.; GIAQUINTA, M. and HILDEBRANDT, S.: One-dimensional Variational Problems-An Introduction, Oxford University Press, 1998.

[7] BRÉZIS, H.: Análisis Funcional, Alianza Universidad Textos, 1983.

[8] CAMPOS FERREIRA J.: Introdução à Análise Matemática, Fundação Caloustre Gulbenkian, 5^{a}ed., 1993.

[9] CESARI, L.: Optimization - Theory and Applications: Problems with Ordinary Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1983.

[10] CHOQUET, G.: Toplogy, Academic Press, New York, 1966.

[11] CLARKE, F.: An Indirect Method in the Calculus of Variations, Trans. Amer. Math. Soc., **336**, 1993, 655-673.

[12] CLARKE, F.: Methods of Dynamic and Nonsmooth Optimization, CBMS-NSF Regional Conf. Ser. in Appl. Math., vol. 57, SIAM, Philadelphia, 1989

[13] CLARKE, F.: Optimization and Nonsmooth Analysis, Wiley-Interscience, New York, 1983.

[14] CLARKE, F.: The Generalized Problem of Bolza, SIAM J. Control and Optimization, **14** (4), 1976, 682-699.

[15] CLARKE, F.: The Euler-Lagrange Differential Inclusion, J. Differential Equations, **19**, 1975, 80-90.

[16] CLARKE, F., LEDYAEV, Yu., STERN, R. and WOLENSKI, P.: Nonsmooth Analysis and Control Theory, Springer, 1998.

[17] CLARKE, F. and LOEWEN, P.: An Intermediate Existence Theory in the Calculus of Variations, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., **16** (4), 1989, 487-526.

[18] CLARKE, F. and VINTER R.: Existence and Regularity in the Small in the Calculus of Variations, J. Differential Equations, **59**, 1985, 336-354.

[19] CLARKE, F. and VINTER R.: Regularity Properties of Solutions to the Basic Problem in the Calculus of Variations, Trans. Amer. Math. Soc., **289**, 1985, 73-98.

[20] CLARKE, F. and VINTER R.: On the Conditions under which the Euler Equation or the Maximum Principle Hold, Appl. Math. Optim., **12**, 1984, 73-79.

[21] COHN, D.: Measure Theory, Birkhäuser, Boston, 1980.

[22] DACOROGNA, B.: Direct Methods in the Calculus of Variations, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[23] DAL MASO, G.: An Introduction to Γ-Convergence, Birkhäuser, Boston, 1993.

[24] DE GIORGI, E.; BUTTAZZO, G. and DAL MASO, G.: On the Lower Semicontinuity of Certain Integral Functionals, Accademia Nazionale dei Lincei (8) **74**, 1983, 274-282.

[25] DE LA VALLÉE POUSSIN, C.: Sur l'intégrale de Lebesgue, Trans. Amer. Math. Soc., **16**, 1915, 435-501.

[26] DUGUNDJI, J.: Topology, Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[27] DUNFORD, N. and SCHWARTZ, J.: Linear Operators, Part I: General Theory, Interscience, New York, 1958.

[28] EKELAND, I. and TEMAM, R.: Convex Analysis and Variational Problems, North-Holland, Amsterdam 1976.

[29] LIMA, E.: Espaços Métricos, Projeto Euclides, 1993.

[30] LIMA, E.: Curso de Análise Real, vol. 1, Projeto Euclides, 1992.

[31] LIMA, E.: Elementos de Topologia Geral, IMPA, Ao Livro Técnico S.A., Rio de Janeiro, 1970.

[32] LOEWEN, P.: Optimal Control via Nonsmooth Analysis, CRM Proceedings & Lecture Notes, **2**, Amer. Math. Soc., 1993.

[33] HIMMELBERG, C.: Measurable Relations, Fundamenta Mathematicae, **87**, 1975, 53-72.

[34] HIRIART-URRUTY, J. and LEMARÉCHAL, C.: Convex Analysis and Minimization Algorithms I - Fundamentals, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[35] HIRSCH, M. and SMALE, S.: Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra, Academic Press, 1974.

[36] KOLMOGOROV, A. and FOMIN, S.: Elementos da Teoria das Funções e de Análise Funcional, Editora Mir., 1982.

[37] KUFNER, A., JOHN, O. and FUČIK, S.: Function Spaces. Monographs and Textbooks on Mechanics of Solids and Fluids; Mechanics: Analysis. Noordhoff International Publishing, Leyden; Academia, Prague, 1977.

[38] OLECH, C.: Existence Theory in Optimal Control, in Control Theory and Topics in Functional Analysis, Vol. I, International Atomic Energy Agency, Vienna, 1976.

[39] PEDREGAL, P.: Parametrized Measures and Variational Principles, Birkhäuser, Basel, 1997.

[40] ROBERTS, A. and VARBERG, D.: Another Proof that Convex Functions are Locally Lipschitz, Amer. Math. Mon., **81**, 1974, 1014-1016.

[41] ROCKAFELLAR, R.: Integral Functionals, Normal Integrands and Measurable Selections, in Nonlinear Operators and the Calculus of Variations, Lecture Notes in Mathematics, vol. **543**, Springer-Verlag, New York, 1976.

[42] ROCKAFELLAR, R.: Existence Theorems for General Control Problems of Bolza and Lagrange, Adv. in Math., **15**, 1975, 312-333.

[43] ROCKAFELLAR, R.: Convex Analysis, Princeton University Press, New Jersey, 1970.

[44] ROCKAFELLAR, R. and WETS, R.: Variational Analysis, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[45] RUDIN, W.: Functional Analysis, 2^aed., McGraw-Hill, 1991.

[46] RUDIN, W.: Real and Comlpex Analysis, 3^aed., McGraw-Hill, 1987.

[47] SERRIN, J. and VARBERG, D.: A General Chain Rule for Derivatives and the Change of Variables Formula for the Lebesgue Integral, Amer. Math. Mon. **76**, 1969, 514-520.

[48] TONELLI, L.: Sur une Méthode Directe du Calcul des Variations, Rend. Circ. Mat. Palermo **39**, 1915, 233-264.

[49] YEH, J.: Lectures on Real Analysis, World Scientific, Singapore, 2000.

[50] WHEEDEN, R. and ZYGMUND, A.: Measure and Integral - An Introduction to Real Analysis, Marcel Dekker, New York, 1977.