UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Mestrado em Matemática Aplicada

CONJUNTOS EXTERNOS DE $\Re^2$

Tese de Mestrado realizada por:

Rute Isabel Loulé Gil

Orientador:

Prof. Imme van den Berg

Esta dissertação não inclui as criticas e sugestões feitas pelo juri.

Évora

2003

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Mestrado em Matemática Aplicada

CONJUNTOS EXTERNOS DE $\Re^2$

Tese de Mestrado realizada por:
Rute Isabel Loulé Gil
Orientador:
Prof. Imme van den Berg

Esta dissertação não inclui as criticas e sugestões feitas pelo jurí.

Évora

2003

Em primeiro lugar, quero agradecer ao Prof. Imme van den Berg pela sua disponibilidade e paciência para comigo, pois sem a sua preciosa ajuda, este trabalho não estaria concluído.

Agradeço a meus pais por todos os sacrifícios que fizeram ao longo de suas vidas para que eu pudesse ter as melhores oportunidades do mundo e estar aqui hoje, completando mais uma etapa da minha vida.

RESUMO

O objectivo desta dissertação é o estudo, no âmbito da Análise não Standard, dos subgrupos convexos externos do plano.

Este estudo necessita de um conhecimento aprofundado dos subgrupos convexos externos de $\Re$, que é o assunto dos dois primeiros capítulos.

A denominação comum de todos estes grupos é neutrix.

Nos restantes capítulos estudámos os neutrices do plano. Considerámos vários exemplos relativamente a esta noção e estudámos propriedades geométricas e algébricas. Verificou-se que uma propriedade importante é a noção de tamanho, que é uma espécie de distância externa à origem.

Mostrámos , em certos casos, que um neutrix de $\Re^2$, a menos de uma rotação, é o produto cartesiano de dois neutrices de $\Re$, que de facto se interpretam como tamanhos segundo direcções ortogonais.

ABSTRACT

The aim of this master's thesis is the study, in the setting of Non Standard Analysis, of the external convex subgroups of the plane.

This study needs a profound knowledge of the external convex subgroups of $\mathfrak{R}$, which is the subject of the first two chapters.

The subgroups in question are called neutrices.

In the remaining chapters we study the neutrices of the plane. We consider several examples related to this notion, and study geometric and algebraic properties. It appeared that the notion of size, which is a sort of external distance to the origin, played a substancial role.

In certain cases, we proved that a neutrix of $\mathfrak{R}^2$ is, up to a rotation, the Cartesian product of two neutrices of $\mathfrak{R}$, which in fact represent sizes which correspond to orthogonal directions.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

A Análise Não Standard (ANS) é uma extensão importante da matemática clássica. Mais concretamente, dos axiomas da Teoria de Conjuntos, inclusive do Axioma da Escolha.

A ANS foi inventada por Robinson na década de sessenta, utilizando a teoria dos modelos, mas foi Nelson que, mais tarde, formulou axiomas para a sua análise. Simplificou conceitos e demonstrações da análise e algumas teorias matemáticas, como os processos estocásticos e as equações diferenciais parciais, formulou novos modelos matemáticos para fenómenos não matemáticos, em particular na física e na economia e integrou os conceitos de pequeno e grande nos modelos e diferentes ordens de grandeza no mesmo modelo, tornando, assim, possível que novos fenómenos fossem explicados com métodos matemáticos e, mais acessíveis algumas teorias matemáticas para mais pessoas.

Toda a matemática clássica se reduz a um sistema formal com um único conceito primitivo – o de pertença ($\in$). Expandimos este sistema com um novo símbolo predicativo unário : 'standard', abreviado 'st'. Um conjunto X pode ser standard, e escrevemos st X, ou não standard, $\neg$st X.

Como teoria matemática que é, a ANS rege-se de regras e teoremas. Por ter sido Leibniz, no fim do sec. XVII, um dos fundadores da Análise, e devido à maior proximidade entre a sua análise e a ANS, que entre a ANS e a análise clássica, chamámos as seguintes regras de cálculo de *Regras de Leibniz* (regras estas, que são bastante semelhantes a algumas regras de cálculo da matemática clássica, em particular os axiomas de Peano):

1) $st\ 0$;
2) $\forall n \in \aleph,\ st\ n \rightarrow st\ n+1$;
3) $\forall n,m \in \aleph,\ st\ n,m \rightarrow st\ n+m$;
4) $\forall n,m \in \aleph,\ st\ n,m \rightarrow st\ n.m$;
5) $\forall n,m \in \aleph,\ st\ n,m \rightarrow st\ n^m$;
6) $\forall n,m \in \aleph,\ st\ n \wedge m \leq n \rightarrow st\ m$;
7) $\exists \omega \in \aleph,\ \neg st\ \omega$.

Note-se que, com a ANS não mudámos os conceitos da matemática clássica, apenas falamos das mesmas noções de forma diferente, pois a linguagem da ANS é mais rica.

Os Axiomas 1 a 5, são as regras de cálculo, análogas às da matemática clássica; o axioma 6 garante-nos a convexidade. Por fim, o Axioma 7, garante-nos a existência de um número natural não standard.

Com o predicativo st definimos ordens de grandeza dentro do conjunto dos números reais, $\Re$.

Dizemos que um número real x é *limitado* se existe $st\ n \in \aleph$ tal que $|x| \leq n$; *ilimitado* ou *infinitamente grande*, se x não é limitado; *infinitésimo* ou *infinitamente pequeno* se para todo $st\ n \in \aleph$ se tem $|x| \leq \frac{1}{n}$; e *apreciável* se x é limitado mas não é infinitesimal. Note-se que, se ω é ilimitado, então $\frac{1}{\omega}$ é infinitesimal.

Com estas definições, as regras de Leibniz são extendidas para os reais limitados da seguinte forma:

1) 0 é limitado
2) Se x é limitado, então $x+1$ é limitado

Para x e y limitados, temos

3) $x+y$ é limitado
4) $x.y$ é limitado
5) Se $y>0$, x^y está bem definido e é limitado.
6) Se x limitado e $|y|<x$, y é limitado

Outra extensão da Matemática Clássica que surgiu com a ANS é uma extensão do Princípio de Indução Matemática aos números não standard, para todas as fórmulas matemáticas – o Axioma de Indução Externa. É uma ferramenta muito utilizada em ANS, para aplicar em demonstrações, pois é mais forte que as Regras de Leibniz, e que nos diz que para qualquer fórmula interna ou externa, A, se tivermos

(i) $A(0)$

(ii) $\forall^{st} n\, (A(n) \rightarrow A(n+1))$.

Então, concluímos $\forall^{st} n\, A(n)$.

Com as Regras de Leibniz e o Axioma de Indução Externa, vem sido desenvolvida uma extensão rica da Matemática Clássica com muitas aplicações.

Através destas regras, surgem conjuntos novos em $\Re$ que são chamados de conjuntos externos, pois não obedecem a teoremas da Matemática Clássica. Por exemplo, o conjunto de todos os reais limitados é uma parte limitada de $\Re$ não majorada.

Dentro dos conjuntos externos, distinguimos duas classes de conjuntos: os halos e as galáxias. Em traços gerais, os halos são conjuntos externos definidos por uma fórmula interna quantificada universalmente, e as galáxias são conjuntos externos definidos por uma fórmula interna quantificada existencialmente, objectos estes que abordaremos mais pormenorizadamente neste trabalho.

Esta é uma das grandes diferenças entre a Matemática Clássica e a Análise Não Standard. Enquanto que na Matemática Clássica todos os conjuntos são da mesma natureza, na ANS temos várias espécies diferentes de conjuntos: internos, externos, halos ou galáxias.

No entanto, pode se tornar complicado distinguir estas diferentes espécies de conjuntos. Para facilitar a classificação dos conjuntos podemos utilizar ferramentas da Análise Não standard, que são Princípios de Permanência.

Um deles é o Princípio de Cauchy, que nos diz que nenhum conjunto interno é externo. Outro é o Princípio de Fehrele, que nos diz que nenhum halo é uma galáxia.

Além destes Princípios de Permanência, alguns dos axiomas introduzidos com a ANS dizem-nos como proceder com estes conjuntos, mas que também têm muitas aplicações na Matemática Clássica. São eles o Princípio de Transferência, o Princípio de Idealização e o Princípio de Standardização.

O *Princípio de Transferência* diz-nos que, para toda a fórmula standard $F(x,t_1,\dots,t_n)$, onde $x,t_1,\dots,t_n$ são as únicas variáveis livres, tem-se

$$\forall^{st} t_1,t_2,\dots,t_n\ (\forall^{st} x\ F(x,t_1,\dots,t_n) \rightarrow \forall x\ F(x,t_1,\dots,t_n)),$$

ou

$$\forall^{st} t_1,t_2,\dots,t_n\ (\exists x\ F(x,t_1,\dots,t_n) \rightarrow \exists^{st} x\ F(x,t_1,\dots,t_n)).$$

Com este princípio provam-se axiomas da teoria ZFC, como o axioma da igualdade, e também que uma função standard é continua se e somente se é continua para todos os pontos standard, e é bastante útil nos teoremas de continuidade.

O *Princípio de Idealização* diz-nos que, para toda a fórmula interna B, contendo pelo menos duas variáveis livres x e y, temos

$$\forall^{st} z, \text{ finito}, \exists x \forall y \in z B(x,y) \rightarrow \exists x \forall^{st} y B(x,y)$$

O Princípio de Idealização permite-nos demonstrar, por exemplo, que $\aleph$ contém naturais ilimitados, que um conjunto é standard se todos os seus elementos são standard, e, em particular, o Teorema de Nelson, que diz que para todo o conjunto E existe um conjunto finito F que contém todos os elementos standard de E. Uma aplicação deste princípio é a demonstração do teorema do valor intermédio, onde também se utiliza o Princípio de Tansferência.

Por último, o *Princípio de Standardização* diz-nos que para a toda fórmula standard F(z), interna ou externa, temos

$$\forall^{st} x \exists^{st} y \forall^{st} z (z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge F(z))$$

Este princípio garante a existência de um conjunto standard y e além disso, para todos os elementos standard, os elementos standard z de x satisfazem F(z). Também permite formalizar a ideia de que toda a colecção intuitiva de objectos standard determinam um conjunto standard único. Uma aplicação deste princípio é a demonstração do Teorema de Bolzano-Weierstrass.

Neste trabalho a ANS tem um papel muito importante. Por um lado é a base fundamental para os conceitos desenvolvidos, e por outro lado esta tese é uma extensão de uma área da ANS, nomeadamente o estudo de conjuntos externos do plano.

Ao pensarmos em conjuntos a nossa mente, intuitivamente pensa em "balõezinhos". No entanto, à medida que vamos aumentando os nossos conhecimentos matemáticos, apercebemo-nos que existe um universo de conjuntos com possibilidades infinitas para as suas formas, que nem todos conseguimos vislumbrar. Estudámos conjuntos com características especiais e tentámos perceber como seriam as suas formas, que propriedades e generalizações poderíamos concluir.

No Capítulo 1 abordamos algumas noções sobre a ANS, em particular, a representação geométrica da recta real e as ordens de grandeza. Falamos principalmente de conjuntos externos de $\Re$, damos propriedades e exemplos, mostramos que estes conjuntos formalizam as ordens de grandeza, e falamos de um sub-espécie de conjuntos externos importantes – os halos e as galáxias – e vimos exemplos e propriedades destes conjuntos.

Os instrumentos principais, e à volta dos quais se desenvolve todo este estudo, são os neutrices (isto é, subgrupos aditivos convexos de $\Re$). No Capítulo 2 fazemos um estudo aprofundado sobre os neutrices de $\Re$. Apresentam-se propriedades e resultados importantes para o estudo em $\Re^2$. Entre outros resultados, vemos que, em $\Re$, os únicos neutrices absolutos (isto é, neutrices definidos sem paramêtros não standard) são o conjunto de todos os infinitésimais, o conjuntos de todos os números limitados, 0 e $\Re$. Estudamos também alguns neutrices especiais, como os micro-neutrices e os neutrices idempotentes.

Os aspectos mais importantes do Capítulo 2 para esta tese, são as operações entre neutrices. Como se somam e multiplicam, e também os seus absorventes e explodentes, para sabermos como lidar com essas operações no plano.

Estes dois capítulos têm como base o livro de Fouad Koudjeti [1], com alguns esclarecimentos e exemplos suplementares.

Finalmente, no Capítulo 3, apresentamos o objectivo do nosso estudo. Definições e exemplos de alguns neutrices do plano, resultados que tiramos desses mesmos exemplos e definições (com a finalidade de provar que qualquer neutrix do plano se pode escrever como o produto de dois neutrices da recta real). Vamos estudar os neutrices de $\Re^2$, e em particular os seus tamanhos, ou seja, o conjunto das distâncias de qualquer ponto, sobre uma recta com um declive dado, à origem. Estes conjuntos são, de facto, neutrices de $\Re$. Calculamos tamanhos e demonstramos algumas propriedades sobre esses tamanhos que encontrámos à medida que os cálculavamos.

Por último, juntamos um anexo matemático onde apresentamos certas noções e teoremas que são utilizadas neste trabalho, como o Lema de DuBois-Reymond, o Teorema do Corte e os números externos.

1. ALGUMAS NOÇÕES SOBRE ANÁLISE NÃO STANDARD

1.1. INTRODUÇÃO

A base de estudo para esta dissertação é a Análise Não Standard. Como tal, introduzimos neste capítulo algumas definições e propriedades básicas desta teoria matemática. Formalizamos os conceitos de interno e externo, ordens de grandeza, halos e galáxias, fazendo assim a introdução aos objectos e à teoria que necessitamos para desenvolver este trabalho.

Assim sendo, e por uma questão de coerência e simplicidade, denotamos por $\mathcal{C}$ o conjunto de todos os subconjuntos convexos de $\Re$. Para indicar igualdade estrita entre conjuntos reservamos o símbolo "$\equiv$". O símbolo "$=$" representará a igualdade entre números reais. Inclusão entre conjuntos será representada com os símbolos usuais, e para indicar disjunção estrita entre conjuntos (intersecção vazia), usaremos o símbolo "#".

1.2. DEFINIÇÕES E EXEMPLOS

DEFINIÇÃO 1.2.1: Se A é um elemento de $\mathcal{E}$, definimos

i) $\left]-\infty, A\right] \equiv \bigcup_{x \in A} \left]-\infty, x\right]$

ii) $\left]-\infty, A\right[\equiv \bigcap_{x \in A} \left]-\infty, x\right[$

iii) $\left[A, +\infty\right[\equiv \left]-\infty, A\right[^c$

iv) $\left]A, +\infty\right[\equiv \left]-\infty, A\right]^c$

v) $|A| \equiv \{|x| : x \in A\}$

vi) $A_* \equiv \{x \in A : x \neq 0\}$

vii) $A^+ \equiv \{x \in A : x \geq 0\}$

viii) $A^- \equiv \{x \in A : x \leq 0\}$

Note-se que se A contém 0, então $A \equiv A^+ \cup A^-$.

EXEMPLO 1.2.1: Denotamos por $\oslash$ o conjunto externo de infinitesimais positivos e negativos. Note-se que $0 \in \oslash$. Então $]-\infty, \oslash]$ é o conjunto de todos os números reais que são no máximo infinitesimais positivos; $]-\infty, \oslash[$ é o conjunto de todos os números reais negativos que não são infinitesimais; $\oslash^+$ é o conjunto de todos infinitesimais positivos; e $\oslash^-$ é o conjunto de todos infinitesimais negativos.

EXEMPLO 1.2.2: Seja $A \equiv]0,1[$. Temos que $]-\infty, A] \equiv]-\infty, 1[$ e que $]-\infty, A[\equiv]-\infty, 0]$.

DEFINIÇÃO 1.2.2:

i. Uma *fórmula externa* é uma fórmula de ZFC contendo o predicado standard, *st*, ou um dos seus derivados.

ii. Uma *fórmula interna* é uma fórmula de ZFC que não contém o predicado standard, *st*, ou um dos seus derivados.

iii. Uma *fórmula standard* é uma fórmula interna sem parâmetros que possam tomar valores não standard.

iv. Um *conjunto externo* é uma colecção de entidades matemáticas obedecendo a uma fórmula externa e no qual é falso pelo menos um teorema da matemática clássica.

v. Um *conjunto interno* é uma colecção de entidades matemáticas que obedecem a uma fórmula interna.

EXEMPLO 1.2.3: Vejamos alguns exemplos de fórmulas e conjuntos internos e externos

1) As fórmulas $x=0$; $\left(\forall n\in\aleph, \frac{n}{2}\in\aleph\right)$; $[0,1[\subseteq\Re$, são internas.

2) As fórmulas st 0; $\varepsilon\simeq 0$; $\left(\forall a, a \text{ apreciável} \rightarrow a \text{ limitado}\right)$ são externas.

3) Todos os conjuntos da Teoria ZFC são conjuntos internos, por exemplo, $[-1,3[$; $\{x:-1\leq x<3-\varepsilon\}$ mesmo se $\varepsilon\simeq 0$. No entanto, o conjunto $\{x:-1\leq x\lesssim\varepsilon\}$ é externo.

4) Para $\omega\in\Re$, o conjunto $[-1,\omega]=\{x\in\Re:-1\leq x\leq\omega\}$ é interno pois ω é uma variável livre, no entanto, é externo se $\omega\simeq\infty$, pois $(\forall\omega\simeq+\infty, [-1,\omega]\subseteq\Re)$ é uma fórmula externa, mas $(\forall\omega\in\Re, [-1,\omega]\subseteq\Re)$ é uma fórmula interna.

DEFINIÇÃO 1.2.3: Com base nas definições dadas na introdução, definimos:

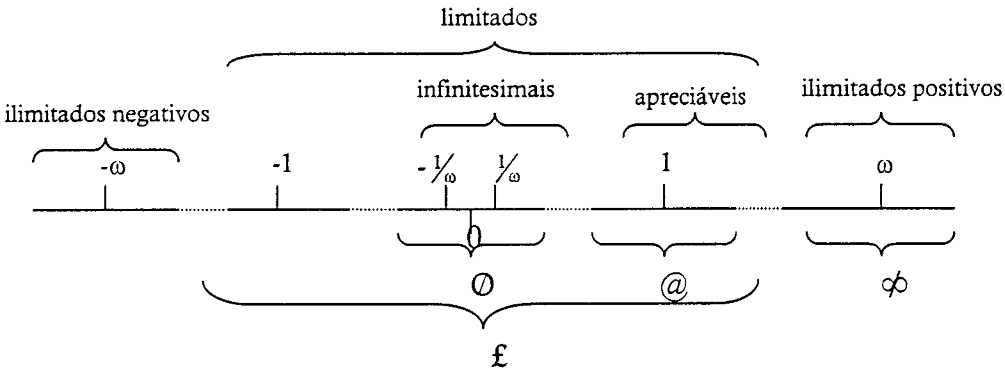
1. O *conjunto de todos os infinitesimais* : $\oslash \equiv \bigcap_{st\, n\in\aleph} \left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[$

2. O *conjunto de todos os números reais limitados* : $\pounds \equiv \bigcup_{st\, n\in\mathbb{N}}]-n,n[$

3. O *conjunto de todos os números reais apreciáveis* : $@ \equiv \bigcap_{st\, n\in\mathbb{N}} \left]\frac{1}{n},n\right[$

4. O *conjunto de todos os ilimitados positivos* : $\text{¢} \equiv \bigcap_{st\, n\in\mathbb{N}}]n,+\infty[$

Esta definição dá-nos a seguinte interpretação da recta real:



Vemos que $@ \equiv (\pounds \setminus \oslash)^+$ e $\text{¢} \equiv (\Re \setminus \pounds)^+$.

Nota 1.1: Estas definições são de conjuntos externos porque são partes limitadas e convexas de $\Re$ mas não têm extremos no sentido usual.

EXEMPLO 1.2.4: Se ω é um ilimitado positivo, existem muitos números ilimitados maiores que ω, e existem números menores que ω, que são ainda ilimitados:

$$log\,\omega < \sqrt{\omega} < \omega < \omega^2 < \omega^3 < e^{\omega} < \omega! < \omega^{\omega} .$$

Consequentemente, existem muitos números infinitesimais:

$$\frac{1}{log\left(\frac{1}{\omega}\right)} < -\frac{1}{\omega} < 0 < e^{-\omega} < \frac{1}{\omega^2} < \frac{1}{\omega}$$

EXEMPLO 1.2.5: Calculemos os logaritmos e exponenciais para os neutrices da definição anterior:

1) $log(\oslash) \equiv]-\infty, £[$
2) $exp(\oslash) \equiv 1 + \oslash$
3) $exp(\oslash) \equiv]-1 + \oslash, 1 + \oslash[$
4) $log(@) \equiv £$
5) $exp(@) \equiv 1 + @$
6) $exp(£) \equiv exp(£) \equiv @$
7) $log(\phi) \equiv \phi$
8) $exp(\phi) \equiv \phi$

DEFINIÇÃO 1.2.4: Sejam x e y dois números reais.

i. Dizemos que *x e y são infinitamente próximos* se x-y é infinitesimal e escrevemos $x \simeq y$

ii. Dizemos que *x é assimptótico a y* sse $x=(1+\oslash)y$, ou seja $\frac{x}{y} \simeq 1$, e escrevemos $x \sim y$.

iii. Suponhamos que $x \neq 0$. Dizemos que *x e y são da mesma ordem de magnitude* se $\frac{y}{x}=@$.

Nota 1.2:

1) A ordem de magnitude de um número real $x \neq 0$ é o conjunto externo convexo $@x$. A ordem de magnitude de 0 é 0.
2) "ser assimptótico a um número real dado" implica "ter a mesma ordem de magnitude".
3) Seja x um número real. Temos que $\frac{x}{2}, \frac{x}{3}, 2x, 3x, \ldots, @x$ são da mesma ordem de magnitude de x, mas não o são todos múltiplos de x, pois se ω é

um inteiro infinitamente grande então ωx não é da mesma ordem de magnitude que x.

4) Sejam y e z dois números reais, da ordem de x. Como y e z são convexos (uma vez que todo o número real é convexo), então,

   a) $y+z$ é da ordem de x e yz é da ordem de x^2.

   b) y-z e z-y são no máximo da ordem de x.

   c) Se $x\neq 0$ então y/z e z/y são de ordem 1.

EXEMPLO 1.2.6: Vejamos alguns exemplos de números assimptóticos, infinitamente próximos e de ordens de magnitude:

1) Seja $\varepsilon\simeq 0$. Temos que $1+\varepsilon\simeq 1$, pois $1+\varepsilon-1=\varepsilon\simeq 0$, e temos também que $\frac{1}{1+\varepsilon}\simeq 1$, pois $\frac{1}{1+\varepsilon}-1=\frac{-\varepsilon}{1+\varepsilon}\simeq 0$, uma vez que $1+\varepsilon\simeq 1$.

2) Seja $\omega\simeq+\infty$. Como $\frac{\omega+1}{\omega}=\frac{\omega}{\omega}+\frac{1}{\omega}\simeq 1$, então $\omega+1\sim\omega$. Temos também que $\sqrt{\omega+1}\simeq\sqrt{\omega}$, e que $\sqrt{\omega+1}\sim\sqrt{\omega}$, pois

$$\sqrt{\omega+1}-\sqrt{\omega}=\frac{\left(\sqrt{\omega+1}-\sqrt{\omega}\right)\times\left(\sqrt{\omega+1}+\sqrt{\omega}\right)}{\sqrt{\omega+1}+\sqrt{\omega}}=\frac{1}{\sqrt{\omega+1}+\sqrt{\omega}}\simeq 0,$$

e por outro lado, $\frac{\sqrt{\omega+1}}{\sqrt{\omega}}=\sqrt{1+\frac{1}{\omega}}\simeq 1$, pois $\frac{1}{\omega}\simeq 0$.

3) Seja $n>0$ um inteiro standard. Então existe apenas um inteiro que é assimptótico a n, e é o próprio n. A colecção de números reais que são assimptóticos a n é $n+\oslash$, e a ordem de magnitude de n é @.

4) Seja $\varepsilon>0$ um infinitesimal. Os números reais que são assimptóticos a ε são da forma $\varepsilon(1+\delta)$, onde δ é um infinitesimal positivo ou negativo. A ordem de magnitude de ε são todos os números reais incluídos em ε@. Note-se que $0<\varepsilon^2<\varepsilon$@$<\sqrt{\varepsilon}$, o que significa que ε^2 e $\sqrt{\varepsilon}$ não são da mesma ordem de

magnitude de ε. Note-se também que as ordem de magnitude de ε^2, ε e $\sqrt{\varepsilon}$ são disjuntas. De facto, $\varepsilon^2 @ < \varepsilon^{3/2} < \varepsilon @ < \varepsilon^{2/3} < \sqrt{\varepsilon}\, @$.

5) Seja $x \simeq 0$. Vejamos que, $e^x \simeq 1$, $e^x - 1 \sim x$, e também $log(1+x) \simeq 0$ e $log(1+x) \sim x$.

Temos que, pelo desenvolvimento em série de Taylor,

$$e^x = 1 + x(1+\emptyset) \text{ e } log(1+x) = x - \frac{x^2}{2}(1+\emptyset)$$

logo, $e^x - 1 = x(1+\emptyset) \simeq 0$, donde $e^x \simeq 1$, e $\frac{e^x - 1}{x} = (1+\emptyset) \simeq 1$, e portanto $e^x - 1 \simeq x$.

Por outro lado, e pelo desenvolvimento em série de Taylor, $log(1+x) \simeq 0$, e $\frac{log(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2}(1+\emptyset) \simeq 1$, donde $log(1+x) \simeq x$

6) Não existe nenhum número com ordem de magnitude $\emptyset$.

1.3. HALOS E GALÁXIAS

DEFINIÇÃO **1.3.1:** Sejam X, I e J três conjuntos standard e F, G e H três fórmulas internas.

i. Definimos três subconjuntos A,B e C de X por

$$A \equiv \{x \in X\colon \forall^{st} i \in I,\ F(i, x)\},$$

$$B \equiv \{x \in X\colon \exists^{st} j \in J,\ G(j, x)\},$$

$$C \equiv \{x \in X\colon \forall^{st} i \in I,\ \exists^{st} j \in J,\ H(i, j, x)\}.$$

O conjunto A chama-se um *pré-halo* e o conjunto B chama-se uma *pré-galáxia*.

ii. Se A e B forem externos então A é um *halo* e B é uma *galáxia* de X. Se C não for nem interno, nem um halo, nem uma galáxia então chama-se *galo* ou *haláxia*.

iii. Se o conjunto I for totalmente ordenado com uma relação binária "$\leq$", isto é

$$(i \leq i') \Rightarrow (\{x \in X\colon F(i, x)\} \supseteq \{x \in X\colon F(i', x)\})$$

então A diz-se um halo com uma representação decrescente. Se, analogamente, para $j, j' \in J$ se tem

$$(j \leq j') \Rightarrow (\{x \in X\colon G(j, x)\} \subseteq \{x \in X\colon g(j', x)\})$$

então B diz-se uma galáxia com uma representação crescente.

iv. Halos que possuem representação decrescente e galáxias que possuem representação crescente são *monótonos*.

v. Se F, G e H são fórmulas standard então os conjuntos A, B e C são *absolutos*.

Nota 1.3: Se os conjuntos A e B dados na definição anterior são conjuntos externos, então os conjuntos standard I e J devem ser de cardinalidade infinita, pelo ***princípio de standardização***.

EXEMPLO 1.3.1: Vejamos exemplos de alguns halos e galáxias:

1) $\overline{\aleph} \equiv \{n \in \aleph : n \simeq +\infty\}$, $\oslash$, ϕ são halos

2) $\{0\} \equiv \bigcap_{st\, n \in \aleph} [-n, n]$ é um pré-halo mas não é um halo

3) $\aleph^{\sigma} \equiv \{n \in \aleph : st\, n\}$, £, @ são galáxias

4) $\Re^{+} \equiv \bigcup_{st\, n \in \aleph} [n, +\infty[$ é uma pré-galáxia mas não é uma galáxia

5) O conjunto $\{x : 0 \underset{\neq}{<} x \leq 1\} = \bigcup_{st\, n \in \aleph} [\frac{1}{n}, 1]$ é uma galáxia, e o conjunto $\{x : 0 \underset{\simeq}{<} x \leq 1\} = \bigcap_{st\, n \in \aleph} [\frac{1}{n}, 1]$ é um halo.

6) Seja ε infinitesimal. O conjunto $\varepsilon£ = \{x \in \Re : \exists^{st} n, |x| \leq \varepsilon n\}$ é uma galáxia, e o conjunto $\varepsilon\oslash = \{x \in \Re : \forall^{st} n, |x| \leq \varepsilon/n\}$ é um halo.

7) O conjunto $\{x \in \Re : 0 \underset{\simeq}{<} x \underset{\neq}{<} 1\}$ não é um halo nem uma galáxia.

PROPOSIÇÃO 1.3.1

Seja X um conjunto standard.

1. Um subconjunto externo H de X é um halo sse existe uma sucessão interna de subconjuntos internos $\{A_i\}_{i \in \aleph}$ de X, estritamente decrescente para pelo menos os índices standard, e tal que
$$H \equiv \bigcap_{st\, i \in \aleph} A_i .$$
O conjunto H é absoluto sse a família $\{A_i\}_{i \in \aleph}$ possa ser escolhida standard.

2. Um subconjunto externo G de X é uma galáxia sse existe uma sucessão interna de subconjuntos internos $\{B_i\}_{i \in \aleph}$ de X, estritamente crescente para pelo menos os índices standard, e tal que
$$G \equiv \bigcup_{st\, j \in \aleph} B_j .$$
O conjunto G é absoluto sse a família $\{B_j\}_{j \in \aleph}$ possa ser escolhida standard.

Demonstração:

1. Suponhamos que H é um halo e seja $\{H_j\}_{j\in\aleph}$ uma sucessão interna decrescente tal que $H\equiv\bigcap_{\iota\in\aleph}H_\iota$. Definimos a sucessão $\{A_j\}_{j\in\aleph}\equiv\{H_j\}_{j\in\aleph}$, estritamente decrescente para pelo menos os índices standard, por

   a) $A_0=H_0$

   b) Se $A_k=H_{n_k}$ está definido, pomos $n_{k+1}=min\{m\in\aleph : m>n_k, A_{n_k}\supsetneq H_m\}$.

   Vejamos que $H\equiv\bigcap_{st\,k}A_k$.

   Suponhamos que $n_k\geq k$. Então $H_k\supset H_{n_k}=A_k$, logo $H\equiv\bigcap_{st\,k}H_k\supset\bigcap_{st\,k}A_k$.

   Para mostrar a outra inclusão, provemos, por indução externa, que

   $$st\,k\to st\,n_k.$$

   Note-se que $A_k\supset H_{n_k}$, para todos os A_k.

   Temos que, $n_0=0$ é standard.

   Suponhamos que n_k é standard. Se $n_{k+1}\equiv\nu$ não fosse standard, $\nu\simeq+\infty$, e $H_m\equiv H_{n_k}$ para todo m, tal que $n_k\leq m\leq\nu\text{-}1$, então $H\equiv\bigcap_{st\,k}H_k\equiv B_{\nu-1}$ e portanto H seria interno, o que é absurdo. Logo, $st\,n_{k+1}$.

   Portanto, pelo axioma de indução interna, n_k é standard, para todo o $st\,k$, donde

   $$\bigcap_{st\,k}A_k\equiv\bigcap_{st\,k}H_{n_k}\supset H\text{, e portanto } H\equiv\bigcap_{st\,k}A_k$$

   Suponhamos agora que se tem $H\equiv\bigcap_{st\,k}A_k$, onde $\{A_k\}_{k\in\aleph}$ é uma sucessão interna decrescente para os índices standard, e provemos que H é um halo, por absurdo.

   Se H fosse interno, então $A_k\supset H$ para todo $st\,k$. Consideremos o conjunto $I\equiv\{k : A_k\supset H\}$. I é um conjunto interno, pois todos os conjuntos A_k e H também o são, e $I\supset\{st\,k : k\in\aleph\}$. Pelo Princípio de Cauchy, temos que $I\supsetneq\{st\,k : k\in\aleph\}$.

   Seja $\nu\in I\setminus\{st\,k : k\in\aleph\}$, então $\nu\simeq+\infty$, e $A_\nu\supset H$. Seja $J\equiv\{k : A_{k+1}\subsetneq A_k\}$. J é interno, pois todos os conjuntos A_k o são. De novo usando o princípio de Cauchy, existe ω tal que $A_{k+1} \subsetneq A_k$, para $k \leq \omega$. Seja $\gamma = min(\nu,\omega)$. Então $\gamma \simeq +\infty$, $A_\gamma \supset H$, $A_\gamma \subsetneq A_{\gamma-1}$, para $n \leq \omega$. E como γ é muito grande, então $A_{\gamma-1} \subset H$, γ-1 não é standard.

Então $H \subset A_\gamma \subsetneq A_{\gamma-1} \subset H$, o que é absurdo, logo H é externo.

2. Suponhamos que G é uma galáxia e seja $\{G_j\}_{j\in\aleph}$ uma sucessão interna crescente tal que $G \equiv \bigcup_{i\in\aleph} G_i$. Definimos a subsucessão $\{B_j\}_{j\in\aleph} \equiv \{G_j\}_{j\in\aleph}$, estritamente crescente para pelo menos os índices standard, por

   a) $B_0 = G_0$

   b) Se $B_k = G_{n_k}$ está definido, pomos $n_{k+1} = min\{m \in \aleph : m > n_k, B_{n_k} \subsetneq G_m\}$.

Vejamos que $G \equiv \bigcup_{st\,k} B_k$.

Suponhamos que temos $n_k \geq k$. Então $G_k \subseteq G_{n_k} = B_k$, logo

$$G \equiv \bigcup_{st\,k} G_k \subseteq \bigcup_{st\,k} B_k .$$

Para mostrar a outra inclusão, provemos, por indução externa, que

$$st\ k \rightarrow st\ n_k.$$

Note-se que $B_k \subset G_{n_k}$, para todos os B_k.

Temos que, $n_0 = 0$ é standard.

Suponhamos que n_k é standard. Se $n_{k+1} \equiv \nu$ não fosse standard, $\nu \simeq +\infty$, e $G_m \equiv G_{n_k}$ para todo m, tal que $n_k \leq m \leq \nu$-1, então $G \equiv \bigcup_{st\,k} G_k \equiv G_{\nu-1}$ e portanto G seria interno, o que é absurdo. Logo, $st\ n_{k+1}$.

Portanto, pelo axioma de indução interna, n_k é standard, para todo o $st\ k$, donde

$$\bigcup_{st\,k} B_k \equiv \bigcup_{st\,k} G_{n_k} \subset G \text{, e portanto } G \equiv \bigcup_{st\,k} B_k .$$

Suponhamos agora que se tem $G \equiv \bigcup_{st\,k} B_k$, onde $\{B_k\}_{k \in \aleph}$ é uma sucessão interna crescente para os índices standard, e provemos que G é uma galáxia, por absurdo. Se G fosse interno, então $B_k \subset G$ para quase todo $st\ k$. Consideremos o conjunto $I \equiv \{k : B_k \subset G\}$. I é um conjunto interno, pois todos os conjuntos B_k e G também o são, e $I \supset \{st\,k : k \in \aleph\}$. Pelo Princípio de Cauchy, temos que $I \underset{\neq}{\supset} \{st\,k : k \in \aleph\}$. Seja $\nu \in I \setminus \{st\,k : k \in \aleph\}$, então $\nu \simeq +\infty$, e $B_\nu \subset G$. Seja $J \equiv \{k : B_k \underset{\neq}{\subset} B_{k+1}\}$. J é interno, pois todos os conjuntos B_k o são. De novo usando o princípio de Cauchy, existe ω tal que $B_k \underset{\neq}{\subset} B_{k+1}$, para $k \leq \omega$. Seja $\gamma = min(\nu, \omega)$. Então $\gamma \simeq +\infty$, $B_\gamma \subset G$, $B_{\gamma-1} \underset{\neq}{\subset} B_\gamma$, para $n \leq \omega$. E como γ é muito grande, então $G \subset B_{\gamma-1}$, γ-1 não é standard.

Então $G \subset A_{\gamma-1} \underset{\neq}{\subset} B_\gamma \subset G$, o que é absurdo, logo G é externo.

∵

TEOREMA 1.3.1

Seja $G \subset \Re$ uma galáxia convexa.

Suponhamos que ambos os conjuntos $]-\infty, G]$ e $[G, -\infty[$ são externos. Então existe um conjunto standard I de cardinalidade infinita, e duas aplicações internas $a: I \to \Re$ e $a': I \to \Re$ tais que

$$G \equiv \bigcup_{st\,\iota \in I}]a(\iota), a'(\iota)[.$$

Demonstração:

Pela Proposição 1.3.1, existe uma família externa de subconjuntos $\{A_\iota\}_{\iota \in I}$ de $\Re$, para algum conjunto standard I, tal que

$$G \equiv \bigcup_{st\,\iota \in J} A_\iota.$$

Seja c um número real qualquer em G, e para cada $\iota \in I$, ponhamos

$$a(\iota) = inf\{x \in A_\iota : x \leq c\}$$
$$a'(\iota) = sup\{x \in A_\iota : x \geq c\}$$

Como G é convexo, temos então que

$$G \equiv \bigcup_{st\, \iota \in I}]a(\iota), a'(\iota)[$$

Se I fosse de cardinalidade finita, então $\{st\, \iota \in I\} \equiv I$, consequentemente

$$G \equiv \bigcup_{\iota \in I}]a(\iota), a'(\iota)[$$

o que significaria que G era interno, o que está em contradição com a hipótese.

$\because$

COROLÁRIO **1.3.1**

Seja $H \subset \Re$ um halo convexo.

Suponhamos que ambos os conjuntos $]-\infty, H]$ e $[H, \infty[$ são externos. Então existe um conjunto standard J de cardinalidade infinita, e duas aplicações internas $b: J \to \Re$ e $b': J \to \Re$ tais que

$$H \equiv \bigcap_{st\, j \in J}]b(j), b'(j)[.$$

Demonstração: Demonstração análoga à do teorema anterior.

Nota 1.4:

1. Se os conjuntos $]-\infty, G]$, $[G, \infty[$, $]-\infty, H]$ e $[H, \infty[$ forem externos não é importante se os intervalos $]a(\iota), a'(\iota)[$ e $]b(\iota), b'(\iota)[$ são abertos ou fechados.
2. Pelo contrário, se algum destes conjuntos for interno, por exemplo $[G, \infty[$, então existe um número real c tal que $[G, \infty[\equiv [c, \infty[$, ou, $[G, \infty[\equiv]c, \infty[$, e consequentemente

$$G \equiv \bigcup_{\iota \in I} [c, a'(\iota)[\quad \text{ou} \quad G \equiv \bigcup_{\iota \in I}]c, a'(\iota)[.$$

1.4. SUBCONJUNTOS EXTERNOS MONÓTONOS DE $\Re$

EXEMPLO 1.4.1: Vejamos um exemplo de uma galáxia convexa de $\Re$, cujos ambos os lados são externo mas que não é monótona.

Seja F_∞ um conjunto standard de funções com valores reais f de uma variável real x tal que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty .$$

Seja ω um real infinitamente grande positivo, e consideremos a galáxia externa

$$G \equiv \bigcup_{\substack{st\ n\in\aleph \\ st\ f\in F_\infty}}]-n, f(\omega)[.$$

Seja X o conjunto standard, totalmente ordenado, de subconjuntos internos de $\Re$, e suponhamos que existe uma família crescente $\{A_x\}_{x\in\Re}$, tal que

$$G \equiv \bigcup_{st\ x\in\Re} A_x .$$

Para cada $x\in X$, ponhamos $a_x = inf(A_x)$ e $b_x = sup(A_x)$. Então a aplicação $\{a_x\}_x$ é decrescente e a aplicação $\{b_x\}_x$ é crescente. Usando indução externa, escolha-se para cada inteiro standard $n\in\aleph$ um índice standard x_n em X tal que

$$a_{x_n} \leq -n \leq a_{x_{n-1}} .$$

Obviamente,

$$\bigcup_{st\ n\in\aleph}]-n, 0[\doteq \bigcup_{st\ n\in\aleph}]a_{x_n}, 0[.$$

Usando o princípio de standardização, extendemos a família $\{x_n\}_{st\, n\in\mathbb{N}}$ a uma sucessão standard, estritamente crescente $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset X$, e aplicando o princípio de Cauchy à desigualdade anterior obtemos

$$\exists\nu=\infty : \forall\mu\leq\nu, a_{x_\mu} <-\mu.$$

Logo, $a_{x_\mu}\notin G$ para qualquer inteiro ilimitado $\mu\leq\nu$. Note-se que à sucessão $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset X$ corresponde uma sucessão crescente $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset F_\infty$. Sem perda de generalidade, podemos supor que para cada inteiro standard n, b_{x_μ} é da forma $f_n(\omega)$ onde f_n é alguma função standard em F_∞. Pelo Lema DuBois-Reymond[1],

$$\exists^{st} g\in F_\infty : \forall^{st} n\in\mathbb{N},\ b_{x_\mu} <g(\omega).$$

Isto significa que

$$G\equiv\bigcup_{st\, n\in\mathbb{N}} A_{x_\mu}\equiv\bigcup_{st\, n\in\mathbb{N}}]a_{x_\mu}, b_{x_\mu}[\subset\bigcup_{st\, n\in\mathbb{N}}]a_{x_\mu}, g(\omega)[$$

o que é uma contradição.

DEFINIÇÃO 1.4.1: Seja A um conjunto, que pode ser interno ou externo.

1) O *standardizado* de A, denotado por ${}^{st}A$, é o conjunto standard, único, cujos elementos standard são exactamente os mesmos elementos standard de A.
2) Se A é um subconjunto de um espaço métrico E, o halo de A, denotado $°(A)$, é o conjunto standard dado por $°(A)\equiv {}^{st}\{ x\in E : hal(x)\cap A\neq\emptyset \}$.

A existência e a unicidade do conjunto ${}^{st}A$, para qualquer conjunto A, é assegurado pelo *princípio de standardização*.

[1] Vide Anexo 4.1.

EXEMPLO 1.4.2: Seja ω infinitamente grande. Então:

1) ${}^{st}\{1,2,\omega\} \equiv \{1,2\}$

2) ${}^{st}\{1,2,\ldots,\omega\} \equiv \aleph\setminus\{0\}$

3) ${}^{st}\oslash \equiv \{0\}$

4) ${}^{st}\{\omega+\oslash\} \equiv \{0\}$

TEOREMA 1.4.1

Sejam I e J dois conjuntos standard, e a:I→J uma aplicação interna. Então existe um conjunto standard X⊂$\mathcal{P}$(I), uma aplicação standard p:I→X sobrejectiva e uma aplicação interna $\overline{a}$:X→J tal que

i. $\forall^{st} i \in \mathrm{I}, (\overline{a} o p)(i) = \overline{a}(i)$

ii. $\forall^{st} \overline{x}, \overline{y} \in \mathrm{X}, (\overline{x} \# \overline{y}) \to (\overline{a}(\overline{x}) \# \overline{a}(\overline{y}))$.

Demonstração:

Denotemos por ~ a relação de equivalência definida em I por

$$x \sim y \leftrightarrow a(x) = a(y)$$

Para cada elemento standard x∈I, seja $\overline{x}$ o standardizado da classe de x com respeito a ~. Isto é dizer que

$$\overline{x} \equiv^{st} \{i \in \mathrm{I} : a(i) = a(x)\}.$$

Ponhamos

$$\mathrm{X} :=^{st} \{\overline{x} : \mathrm{st}\, x \in \mathrm{I}\}.$$

e para cada elemento standard y∈I, defina-se $p(y) := \overline{y}$.

Usando o princípio de standardização, extendemos a aplicação p a uma aplicação standard definida em todo o I. Como a imagem de p é um conjunto standard e contém todos os elementos standard de X, p é uma sobrejectiva sobre X.

Consideremos a aplicação, tomando valores em J, definida em todos os elementos standard de X por

$$\overline{a}(\overline{z}) := a(z)$$

Sejam $\overline{x}$ e $\overline{y}$ dois elementos standard de X tais que $\overline{a}(\overline{x}) = \overline{a}(\overline{y})$. Então, por definição, $x \sim y$, o que implica que

$$\{i \in I : a(i) = a(x)\} \equiv \{i \in I : a(i) = a(y)\}$$

e consequentemente, $\overline{x} \equiv \overline{y}$.

$\because$

TEOREMA **1.4.2**

Seja A um halo ou uma galáxia de $\Re$. Se A é convexo e simétrico com respeito a 0 então A é monótono.

Demonstração:

Seja A um conjunto de $\Re$ convexo e simétrico com respeito a 0. Suponhamos que A é uma galáxia.

Então

$$A \equiv \{x \in \Re : \exists^{st} i \in I, G(i,x)\}$$

onde I é um conjunto standard de cardinalidade infinita, e G uma fórmula interna. Para cada $i \in I$, ponhamos $a(i) = sup\{x \geq 0 : G(i,x)\}$ e $A_i \equiv [-a(i), a(i)]$. Como A é convexo e simétrico com respeito a 0, temos

$$A \subset \bigcup_{st\, i \in I} A_i \equiv \bigcup_{st\, i \in I} [-a(i), a(i)]$$

Por A ser convexo e pela sua definição é claro que cada elemento do conjunto $\bigcup_{st\, i \in I} [-a(i), a(i)]$ é também um elemento de A. Donde

$$A \equiv \bigcup_{st\, i \in I} [-a(i), a(i)]$$

Como A é externo, temos

$$\forall^{st} s \in I, \exists^{st} t \in I : s \neq t \wedge a(s) < a(t) \qquad (1.1)$$

Pelo Teorema 1.4.1, existe um conjunto standard $X \subset \mathcal{P}(I)$ e uma aplicação interna $\overline{a} : X \to \Re$ tais que

$$\forall^{st} \bar{\imath} \# \bar{\jmath} \in X, a(\imath) = \overline{a}(\bar{\imath}) \# \overline{a}(\bar{\jmath}) = a(\jmath)$$

de modo que

$$A \equiv \bigcup_{st\ \bar{\imath} \in I} [-\overline{a}(\bar{\imath}), \overline{a}(\bar{\imath})].$$

Consideremos, em X, a relação binária " $\preceq$ " definida por

$$x \preceq y \leftrightarrow \overline{a}(x) \leq \overline{a}(y).$$

Como $\overline{a}$ é injectiva nos elementos standard de X, $\preceq$ pode extendida a uma relação de ordenação total em X. Por (1.10), $\overline{a}$ é estritamente crescente nos elementos standard de X, o que significa que A tem uma representação crescente. Logo A é monótono.

Analogamente se A for um halo.

∵

2. INTRODUÇÃO AOS NEUTRICES

2.1. INTRODUÇÃO

Os neutrices de $\Re^2$ são o objecto de estudo desta tese. Como tal, neste capítulo vamos estudar alguns neutrices especiais de $\Re$, como os neutrices idempotentes, e também alguns resultados, propriedades e principalmente as operações entre neutrices.

Uma vez que vamos vamos trabalhar com estes objectos em $\Re^2$, necessitamos saber como se pode trabalhar com estes objectos em $\Re$ para depois podermos estender essas noções para o plano.

Como neutrices especiais têm propriedades especiais, fomos estudar os micro-neutrices e os neutrices idempotentes. Também quisemos saber o que altera os neutrices de $\Re$, o que os aumenta ou diminui, e para tal fomos estudar os absorventes e explodentes de um neutrice.

Lembremos somente que um conjunto X é convexo se

$$\forall x,y\in X,\ \lambda x+(1-\lambda)y\in X, \forall\lambda\in(0,1).$$

Este capítulo foi baseado no livro de [1].

2.2. DEFINIÇÃO E PRIMEIRAS PROPRIEDADES

DEFINIÇÃO 2.2.1: Um subconjunto $\mathcal{A}$ de $\mathfrak{R}$, que pode ser interno ou externo, é chamado um *neutrix* se $(\mathcal{A},+)$ é um subgrupo convexo de $(\mathfrak{R},+)$.

Nota 2.1: Denotamos por $\mathcal{N}$ o conjunto de todos os neutrices.

PROPOSIÇÃO 2.2.1

Um subconjunto convexo não vazio $\mathcal{A}$ de $\mathfrak{R}$ é um neutrix sse

i. $\mathcal{A}$ é simétrico com respeito a 0

ii. $2\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}$.

Demonstração:

A implicação directa é trivial, pois se $\mathcal{A}$ é um neutrix então temos *i.* e *ii.* por definição de subgrupo aditivo.

Vejamos agora que *i.* e *ii.* $\rightarrow$ $\mathcal{A}$ é um neutrix.

Pela convexidade de $\mathcal{A}$, 0 é um seu elemento. Sejam x e y dois elementos de $\mathcal{A}$. Então $2max(x,y)$ é um elemento de $\mathcal{A}$, por *ii.*, de modo que $x+y$ também é. Por simetria, se a é elemento de $\mathcal{A}$, então $-a$ também o é.

Logo, $\mathcal{A}$ é um neutrix.

$\because$

Nota 2.2: Esta proposição dá-nos uma caracterização importante dos neutrices, nomeadamente o facto de que um neutrix $\mathcal{A}$ de $\mathfrak{R}$ satisfaz $2\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}$.

PROPOSIÇÃO 2.2.2

Os únicos neutrices internos de $\Re$ são 0 e $\Re$. Todos os outros neutrices são externos.

Demonstração:

É obvio que 0 e $\Re$ são neutrices.

Suponhamos que existe um subconjunto interno $\mathcal{A}$ de $\Re$, $\mathcal{A} \not\equiv \{0\}$ e $\mathcal{A} \not\equiv \Re$, que é um subgrupo aditivo convexo. Então existe algum número real estritamente positivo x que não pertence a $\mathcal{A}$. Consequentemente, $\mathcal{A}$ estará incluído no intervalo $]-x,x[$ e será então limitado. Isto significa que $\mathcal{A}$ admite pelo menos limite superior, $x_0>0$. Seja agora a um real positivo em $\mathcal{A}$ e consideremos $y=x_0+a$. Então $\mathcal{A} \subset]-y,y[$. Mas, temos que $y=(x_0 - a)+2a$ é a soma de dois elementos de $\mathcal{A}$ e portanto pertence a $\mathcal{A}$, o que é absurdo.

Donde $\mathcal{A}$ não pode ser limitado, o que por sua vez implica que $\mathcal{A} \equiv \Re$, por simetria e convexidade de $\mathcal{A}$, ou que não é interno.

$\because$

EXEMPLO 2.2.1: É fácil ver que ⊘ e £ são neutrices, enquanto que @ e ¢ não são, uma vez que não contém o 0.

PROPOSIÇÃO 2.2.3

Seja $\mathcal{A}$ um neutrix. Então $\forall^{st} n>0$, $n\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}$.

Demonstração:

Por indução externa em $\aleph$.

Se $n=1$ então $1.\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}$, é trivial.

Suponhamos agora que, para algum inteiro n standard, temos $n\mathcal{A}\equiv\mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ é um neutrix, obtemos

$$(n+1)\mathcal{A}\equiv n\mathcal{A}+\mathcal{A}\equiv\mathcal{A}+\mathcal{A}\equiv\mathcal{A}.$$

Donde $\forall^{st}\, n>0$, $n\mathcal{A}\equiv\mathcal{A}$.

$\because$

PROPOSIÇÃO 2.2.4

Seja $\mathcal{A}$ um neutrix. Então

i. $@\mathcal{A}\equiv\mathcal{A}$

ii. $£\mathcal{A}\equiv\mathcal{A}$.

Demonstração:

i. Seja a um real apreciável positivo qualquer. Então $\exists^{st} n \in \aleph : \dfrac{1}{n} \leq a \leq n$.

Pela Proposição 2.2.3, $n\mathcal{A}\equiv\mathcal{A}$, logo, por simetria e convexidade de $\mathcal{A}$, obtemos

$$\mathcal{A} \equiv \frac{n\mathcal{A}}{n} \equiv \frac{\mathcal{A}}{n} \subseteq a\mathcal{A} \subseteq n\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}.$$

Ou seja, $\forall a\in\mathcal{A}$, $\mathcal{A}\equiv a\mathcal{A}$, logo $\mathcal{A}\equiv@\mathcal{A}$.

ii. $£\mathcal{A}\equiv\mathcal{A}$ é uma consequência directa do facto de que $[-@,@]\equiv£$ e como $\mathcal{A}$ é convexo e simétrico em relação a 0 obtemos o resultado.

$\because$

DEFINIÇÃO 2.2.2: Definimos a relação binária '$\leq$' em $\mathcal{N}$, o conjunto de todos os neutrices, por

$$\forall \mathcal{A},\ \mathcal{B}\in\mathcal{N},\ \mathcal{A}\leq\mathcal{B}\leftrightarrow\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}.$$

DEFINIÇÃO 2.2.3: Definimos a adição e multiplicação de dois neutrices da seguinte forma:

$$`+' : \mathcal{N}\times\mathcal{N}\to\mathcal{N}$$

$$(\mathcal{A},\mathcal{B})\to\mathcal{A}+\mathcal{B}\equiv\{a+b : (a,b)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}\}$$

$$`\bullet' : \mathcal{N}\times\mathcal{N}\to\mathcal{N}$$

$$(\mathcal{A},\mathcal{B})\to\mathcal{A}\mathcal{B}\equiv\{ab : (a,b)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}\}$$

PROPOSIÇÃO 2.2.5

A soma de dois neutrices é o maior deles.

Demonstração:

Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ dois neutrices. Suponhamos que $\mathcal{B}$ contém $\mathcal{A}$. Então

$$\mathcal{B}\leq\mathcal{A}+\mathcal{B}\leq\mathcal{B}+\mathcal{B}\equiv\mathcal{B}$$

$\because$

Nota 2.3: Vejamos, através de um exemplo, que tipo de complexidade podemos esperar ao calcular o produto de dois neutrices. Seja ω um real infinitamente grande positivo. Então $\omega\oslash$ contém £ e o produto

$$(\omega\oslash)\text{£}\equiv\omega(\oslash\text{£})\equiv\omega\oslash$$

que é o maior dos dois neutrices. No cálculo do produto usámos o facto de que $\oslash\text{£}\equiv\oslash$, que é o menor dos dois neutrices. O que mostra que o produto de neutrices não se resume a uma questão de tamanho, como a soma.

2.3. NATUREZA DOS NEUTRICES

Nota 2.4: Neste capítulo vamos enunciar um teorema bastante importante porque nos dá uma caracterização para todos os neutrices de $\Re$ - o Teorema da Natureza de um Neutrix. Uma consequência imediata deste teorema é que nenhum galo pode ser um neutrix de $\Re$. No entanto, estendendo a noção de neutrices a $\Re^n$, $n>1$, encontramos neutrices que são galos, como por exemplo, $\oslash \times £$ em $\Re^2$. Este teorema é uma consequência imediata do Teorema do Corte[2]. Embora façamos uma breve introdução aos cortes, não desenvolveremos este assunto, por não se enquadrar nos objectivos deste trabalho.

DEFINIÇÃO **2.3.1:** Seja $\mathcal{O}$ um conjunto totalmente ordenado.

i) Um subconjunto A tal que $a \in A \rightarrow x \in A, \forall x \leq a$, isto é, $A \equiv \{x : x \leq a\}$, é chamado de *semi-linha inferior.*

i) Um subconjunto B tal que $b \in B \rightarrow x \in B, \forall x \leq b$, isto é, $B \equiv \{x : x \leq b\}$, é chamado de *semi-linha superior.*

ii) Um par ordenado (A,B), composto por uma semi-linha inferior e uma semi-linha superior, tal que $A \cup B \equiv \mathcal{O}$, $A \cap B = \emptyset$ é chamado um *corte.*

iii) Um corte (A,B) diz-se *externo* se A for um subconjunto externo, e diz-se *interno* caso contrário.

Nota 2.5: É claro que se (A,B) é um corte de $\Re$, então A e B são ambos convexos, e que se A é um subconjunto externo de $\Re$ então também o é B.

---

[2] Vide Anexo 4.2.

TEOREMA 2.3.1(Natureza de um Neutrix)

Seja $\mathcal{A}$ um neutrix de $\Re$. Então,

ou $\mathcal{A} \equiv 0$,

ou $\mathcal{A} \equiv \Re$,

ou $\mathcal{A}$ é um halo,

ou $\mathcal{A}$ é uma galáxia.

Demonstração: Vide [1].

2.3.1. CARACTERIZAÇÃO DE NEUTRICES EXTERNOS DE $\Re$

EXEMPLO **2.3.1:** Seja ω um real positivo infinitamente grande.

Seja F um conjunto standard de funções reais de uma variável. Consideremos o conjunto $\mathcal{F}$, convexo e simétrico em relação a 0, definido por

$$\mathcal{F} \equiv \bigcup_{st\, f \in F}]-f(\omega), f(\omega)[.$$

Então $\mathcal{F}$ é um neutrix. De facto, se x é um número real em $\mathcal{F}$ então existe uma função standard $f_0 \in$ F tal que

$$x \in]-f_0(\omega), f_0(\omega)[.$$

Logo

$$2x \in]-2f_0(\omega), 2f_0(\omega)[\subset \mathcal{F}$$

pois $2f$ é também uma função standard em F. A galáxia $\mathcal{F}$ não é uma $\aleph$ - galáxia.

De facto, suponhamos que existe uma sucessão standard $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de F tal que

$$\mathcal{F} \equiv \bigcup_{st\, n\in\mathbb{N}}]-f_n(\omega), f_n(\omega)[.$$

O Lema de DuBois – Reymond garante a existência de uma função real standard g tal que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f_n(x)}{g(x)} = 0$$

para qualquer inteiro n. Donde

$$\bigcup_{st\, n\in\mathbb{N}}]-f_n(\omega), f_n(\omega)[\subset]-g(\omega), g(\omega)[$$

o que é uma contradição.

TEOREMA 2.3.2

Um subconjunto $\mathcal{A}$ de $\Re$ é um neutrix externo sse

i. $2\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}$

ii. Existe um conjunto standard totalmente ordenado X de cardinalidade infinita e uma, e apenas uma, das seguintes afirmações é verdadeira:

a) existe uma aplicação $\overline{a} : X \to \Re^+$ estritamente decrescente nos elementos standard de X tal que

$$\mathcal{A} \equiv \bigcap_{st\, \bar{\imath}\in X}]-\overline{a}(\bar{\imath}), \overline{a}(\bar{\imath})[$$

b) existe uma aplicação $\overline{b} : X \to \Re^+$ estritamente crescente nos elementos standard de X tal que

$$\mathcal{A} \equiv \bigcup_{st\, \bar{\imath}\in X}]-\overline{b}(\bar{\imath}), \overline{b}(\bar{\imath})[$$

Demonstração:

Suponhamos que $\mathcal{A}$ é um neutrix. Então $\mathcal{A}$ é um subgrupo convexo de $\Re$, logo *i.* é verificada. E como $\mathcal{A}$ é simétrico em relação a 0, então pelo Teorema 1.4.2, $\mathcal{A}$ é monótono. Donde, se $\mathcal{A}$ for um halo, temos *a)*, e se $\mathcal{A}$ for uma galáxia temos *b)*.

Suponhamos agora que temos *i.* e *ii.* .

Então, por *ii.*, $\mathcal{A}$ é simétrico em relação a 0, e $0 \in \mathcal{A}$. Logo, por *ii.*, $\mathcal{A}$ é um neutrix.

$\because$

Nota 2.6: Note-se que um dado neutrix não é necessariamente caracterizado por uma única aplicação. De facto, suponhamos que um neutrix $\mathcal{A}$ é representado por uma aplicação $\{a(\iota)\}_{\iota \in I}$, isto é o mesmo que

$$\mathcal{A} \equiv \bigcap_{st\, \iota \in X} \left]-a(\iota), a(\iota)\right[$$

então a aplicação $\{2a(\iota)\}_{\iota \in I}$ também representa $\mathcal{A}$ pois

$$\bigcap_{st\, \iota \in X} \left]-a(\iota), a(\iota)\right[\equiv \bigcap_{st\, \iota \in X} \left]-2a(\iota), 2a(\iota)\right[.$$

Por vezes, até o conjunto de índices pode ser alargado ou reduzido.

Vejamos dois exemplos:

1. Seja F_0 o conjunto standard de funções reais de uma variável tal que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$$

Então

$$\bigcap_{st\, x \in \Re \setminus \{0\}} \left]-x, x\right[\equiv \bigcap_{st\, f \in F_0} \left]-f(1), f(1)\right[\equiv \bigcap_{st\, n \in \mathbb{N}} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$$

2. Seja F o conjunto standard de todas as funções reais de uma variável. Então

$$\bigcup_{st\, x\in\Re\setminus\{0\}}]-x,x[\equiv \bigcup_{st\, f\in F_0}]-f(1),f(1)[\equiv \bigcup_{st\, n\in\mathbb{N}}]-n,n[.$$

Finalmente, a condição $2\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}$ é muito importante. De facto, a monotonia da aplicação, a simetria em relação a 0 e a união ou intersecção externas não são suficientes para concluir que $\mathcal{A}$ é um neutrix. Vejamos o seguinte exemplo. Consideremos a aplicação estritamente decrescente $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ e defina-se o subconjunto B de $\Re$ por

$$B \equiv \bigcap_{st\, n\in\mathbb{N}} \left]-1-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right[.$$

B é externo, convexo e simétrico em relação a 0, mas não é um neutrix.

EXEMPLO **2.3.2:** Vejamos alguns exemplos de neutrices definidos através de aplicações.

1) As sucessões $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ são estritamente crescentes e standard, e podemos representar a galáxia dos números limitados por

$$£ \equiv \bigcup_{st\, n\in\mathbb{N}}]-n^2,n[.$$

2) As sucessões $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\left\{\frac{2}{\sqrt{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ são estritamente decrescentes e standard, e podemos representar o halo de 0 por

$$\oslash \equiv \bigcap_{st\, n\in\mathbb{N}} \left]-\frac{1}{n^2},\frac{2}{\sqrt{n}}\right[.$$

2.4. NEUTRICES ABSOLUTOS DE $\Re$

DEFINIÇÃO **2.4.1:** Um neutrix absoluto é um neutrix definido através de uma fórmula sem parâmetros não standard.

LEMA **2.4.1**

Seja $\mathcal{A}$ um neutrix. Então $\mathcal{A} \subset £ \leftrightarrow \mathcal{A} \subseteq \oslash$.

Demonstração:

Suponhamos que um neutrix $\mathcal{A}$ está estritamente contido em £. Se supusermos que contém 1, então por indução externa, irá conter todos os inteiros standard n. Por convexidade e simetria em relação a 0 obteríamos $\mathcal{A} \supseteq £$, o que é absurdo.

Então $\mathcal{A}$ não contém 1. Por indução externa, $\mathcal{A}$ não contém $1/n$ para qualquer inteiro standard n. Por convexidade e simetria em relação a 0, temos $\mathcal{A} \subseteq \oslash$.

A implicação contrária é óbvia, uma vez que $\oslash \subseteq £$, e a relação $\subseteq$ é transitiva.

$\therefore$

TEOREMA **2.4.1**

Os únicos neutrices absolutos de $\Re$ são 0, $\oslash$, £ e o próprio $\Re$.

Demonstração:

É óbvio que 0, $\oslash$, £ e $\Re$ são neutrices absolutos, uma vez que 0 e $\Re$ são standard.

Mais, $\oslash$ e £ podem ser definidos através de fórmulas internas por

$$\oslash \equiv \left\{x \in \Re : \forall^{st} n \in \aleph, |x| < \frac{1}{n}\right\} \text{ e } £ \equiv \{x \in \Re : \exists^{st} n \in \aleph, |x| < n\}.$$

É também claro que a inversa simetrizada de um neutrix absoluto é também um neutrix absoluto.

Seja $\mathcal{A}$ um neutrix externo. Suponhamos que $\mathcal{A}$ é um halo absoluto, mas que não é idêntico a $\oslash$. Então $\mathcal{A}$ não pode ser idêntico a £, pelo Princípio de Fehrele. Pelo Teorema 2.3.2, existe uma aplicação standard estritamente decrescente $\{a(\iota)\}_{\iota\in X}$ em $\Re^+$, onde X é um conjunto standard de cardinalidade, tal que $\mathcal{A} \equiv \bigcap\limits_{st\,\iota\in X}]-a(\iota), a(\iota)[$.

Suponhamos que $\mathcal{A}$ contém £. Então existe um real ilimitado positivo ω em $\mathcal{A}$. Consequentemente,

$$\forall^{st} \iota \in X, \omega < a(\iota). \tag{2.1}$$

Mas, para todo standard $\iota\in X$, $a(\iota)$ é standard. Donde (2.1) é impossível. Logo, excepto $\Re$, não existe nenhum halo absoluto contendo £, e pelo
Lema 2.4.1 vemos que, excepto 0, não existe nenhuma galáxia absoluta contida em $\oslash$.

Suponhamos então que $\mathcal{A}$ está estritamente contido em $\oslash$. Então existe algum número infinitamente pequeno positivo ε que não pertence a $\mathcal{A}$. Isto implica que existe algum standard $\iota\in X$ tal que $\varepsilon > a(\iota)$. Como a e ι são standard, $a(\iota)$ também é, donde $a(\iota)=0$. obteríamos então $\mathcal{A}\equiv 0$, o que é uma contradição. Logo, excepto 0, não existe nenhum halo absoluto contido em $\oslash$ e, pelo mesmo argumento que anteriormente, não existe nenhuma galáxia absoluta contendo £, excepto $\Re$.

Donde o único halo absoluto externo de $\Re$ é $\oslash$ e a única galáxia absoluta de $\Re$ é £.

$\therefore$

2.4.1. MICRO – NEUTRICES

DEFINIÇÃO **2.4.2:** Seja $\mathcal{A}$ um neutrix externo. Dizemos que $\mathcal{A}$ é um *neutrix linear* se existe um número real a tal que $\mathcal{A} \equiv a£$ ou se existe um número real b tal que $\mathcal{A} \equiv b\oslash$. Caso contrário chama-se *não linear.* Um *micro-neutrix* é um neutrix não linear que está contido em $\oslash$.

Nota 2.7: Note-se que para qualquer real apreciável positivo ou negativo a o neutrix linear $a£$ reduz-se a £ e o neutrix linear $a\oslash$ reduz-se a $\oslash$. Isto significa que um neutrix linear não é absoluto sse é um neutrix $a£$ ou $a\oslash$ onde a é um número real que não é apreciável positivo nem negativo. Mais, se a é infinitamente grande então $a\oslash$ contém £, e se a é infinitamente pequeno então $\oslash$ contém $a£$. Mas isto não significa que todos os neutrices são lineares.

DEFINIÇÃO **2.4.3:** Seja ε um real em $]0,1[$. O conjunto externo

$$M(\varepsilon) \equiv \bigcap_{st\, n \in \mathbb{N}} \left]-\varepsilon^n, \varepsilon^n\right[\tag{2.2}$$

é um halo monótono chamado *ε - microhalo* de 0.

O conjunto externo

$$m(\varepsilon) \equiv \bigcup_{st\, n \in \mathbb{N}} \left]-exp\left(-\frac{1}{n\varepsilon}\right), exp\left(-\frac{1}{n\varepsilon}\right)\right[\tag{2.3}$$

é uma galáxia monótona chamada *ε - microgaláxia* de 0.

PROPOSIÇÃO 2.4.1

Seja $\varepsilon>0$ infinitesimal. Então $M(\varepsilon)$ e $m(\varepsilon)$ são micro-neutrices.

Demonstração:

Vejamos que $2M(\varepsilon)\equiv M(\varepsilon)$ e $2m(\varepsilon)\equiv m(\varepsilon)$. Seja então x um real em $M(\varepsilon)$. Então $|x|<\varepsilon^n$, para qualquer standard n. Por permanência, existe um inteiro ilimitado ω tal que $|x|<\varepsilon^\omega$, logo $|2x|<\varepsilon^{\omega-1}$, e portanto, $\forall^{st} n\in\mathbb{N}, |2x|<\varepsilon^n$.

Logo $2x\in M(\varepsilon)$.

Seja agora y um real em $m(\varepsilon)$. Existe algum inteiro standard n tal que $|y|<exp\left(-\frac{1}{n\varepsilon}\right)$. Logo $|2y|<exp\left(-\frac{1}{(n+1)\varepsilon}\right)$. Como n é standard, $n+1$ também é, donde

$$\exists^{st} n\in\mathbb{N}, |2y|<exp\left(-\frac{1}{n\varepsilon}\right)$$

e portanto, $2y\in m(\varepsilon)$.

Prova-se que um neutrix $\mathcal{A}$ não é linear sse existe algum real infinitamente grande ω tal que $\omega\mathcal{A}\equiv\mathcal{A}$. De facto, tem-se

$$\frac{1}{\varepsilon}M(\varepsilon)\equiv\bigcap_{st\, n\in\mathbb{N}}\left]-\frac{1}{\varepsilon}\varepsilon^n,\frac{1}{\varepsilon}\varepsilon^n\right[\equiv\bigcap_{st\, k\in\mathbb{N}}\left]-\varepsilon^k,\varepsilon^k\right[\equiv M(\varepsilon)$$

e $\frac{1}{\varepsilon}$ é infinitamente grande.

$$exp\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)m(\varepsilon)\equiv\bigcup_{st\, n\in\mathbb{N}}\left]-exp\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)exp\left(-\frac{1}{n\varepsilon}\right),exp\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)exp\left(-\frac{1}{n\varepsilon}\right)\right[\equiv$$
$$\equiv\bigcup_{st\, k\in\mathbb{N}}\left]-exp\left(-\frac{1}{k\varepsilon}\right),exp\left(-\frac{1}{n\varepsilon}\right)\right[\equiv m(\varepsilon)$$

e $exp\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$ é infinitamente grande.

$\because$

Notação: Vamos representar o ε - microhalo de 0 por $\pounds\varepsilon^{\phi}$, e a ε - microgaláxia por $\pounds e^{-@/\varepsilon}$.

EXEMPLO **2.4.1:** Vejamos exemplos de micro-neutrices.

1) Note-se que, se $\varepsilon>0$, $\varepsilon\simeq 0$, então

$$\varepsilon^{\phi}\equiv\{\varepsilon^{\omega},\omega\in\phi\}\equiv\bigcap_{st\, n\in\mathbb{N}}]0,\varepsilon^{n}[,$$

é um subconjunto convexo de $\Re$ que é externo e satisfaz $2\varepsilon^{\phi}\equiv\varepsilon^{\phi}$, mas não é simétrico em relação a 0. Logo multiplicamos ε^{ϕ} por $\pounds$ simplesmente por causa da simetria. De facto,

$$\bigcap_{st\, n\in\mathbb{N}}]-n\varepsilon^{n},n\varepsilon^{n}[\equiv\bigcap_{st\, n\in\mathbb{N}}]-\varepsilon^{n},\varepsilon^{n}[\equiv\bigcap_{st\, n\in\mathbb{N}}\left]-\frac{\varepsilon^{n}}{n},\frac{\varepsilon^{n}}{n}\right[.$$

No caso da ε - microgaláxia de 0, acontece o mesmo. O subconjunto convexo e externo de $\Re$

$$\pounds e^{-@/\varepsilon}\equiv\{e^{-a/\varepsilon}:a\in @\}\equiv\bigcup_{st\, n\in\mathbb{N}}]-e^{-n/\varepsilon},e^{-1/n\varepsilon}[$$

satisfaz $2e^{-@/\varepsilon}\equiv e^{-@/\varepsilon}$ mas não é simétrico em relação a 0. De facto,

$$\bigcup_{st\, n\in\mathbb{N}}]-ne^{-1/n\varepsilon},ne^{-1/n\varepsilon}[\equiv\bigcup_{st\, n\in\mathbb{N}}]-e^{-1/n\varepsilon},e^{-1/n\varepsilon}[\equiv\bigcup_{st\, n\in\mathbb{N}}\left]-\frac{e^{-1/n\varepsilon}}{n},\frac{e^{-1/n\varepsilon}}{n}\right[$$

Em ambos os casos obteríamos o mesmo resultado se em vez multiplicarmos estes conjuntos por $\pounds$ multiplicássemos por $\oslash$ ou os representássemos da forma $]-\varepsilon^{\phi},\varepsilon^{\phi}]$ e $\left[-e^{-@/\varepsilon},e^{-@/\varepsilon}\right]$.

2) Note-se também que na Proposição 2.4.1 é muito importante que ε seja um infinitesimal positivo. De facto, se tomássemos ε standard positivo inferior a 1 em (2.3) então a sucessão $\{\varepsilon^n\}_{n\in\aleph}$ seria uma sucessão *standard* estritamente decrescente e $£\varepsilon^{\not\infty} \equiv \emptyset$. Se o tomássemos standard positivo e maior que 1, então (2.3) seria igual a $]-\varepsilon,\varepsilon[$ que nem sequer é externo. E se o tomássemos negativo então a sucessão $\{\varepsilon^n\}_{n\in\aleph}$ nem seria monótona.

Por outro lado, se ε não fosse infinitesimal positivo em (2.3) então a sucessão $\left\{exp\left(-\frac{1}{n\varepsilon}\right)\right\}_{n\in\aleph}$ seria uma sucessão estritamente crescente e $£e^{-@/\varepsilon}$ reduzir-se-ia a alguma galáxia contendo $]-1+\emptyset, 1+\emptyset[$ e contida em $[-1,1]$. Isto significaria que $£e^{-@/\varepsilon}$ nem seria um neutrix. Se tomássemos ε negativo, então $£e^{-@/\varepsilon}$ seria igual a $\left]-e^{-1/\varepsilon}, e^{-1/\varepsilon}\right[$ que nem sequer é externo.

2.5. NEUTRICES IDEMPOTENTES

DEFINIÇÃO 2.5.1: Seja $\mathcal{A}$ um neutrix. Se $\mathcal{A}\mathcal{A}\equiv\mathcal{A}$ então $\mathcal{A}$ é um *neutrix idempotente*.

Nota 2.8: Seja $\mathcal{A}$ um neutrix. Se $\mathcal{A}$ está contido em $\oslash$ então $\mathcal{A}\mathcal{A}\subseteq\mathcal{A}$, logo $\mathcal{A}$ é idempotente sse $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{A}\mathcal{A}$. Se $\mathcal{A}$ contém £ então $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{A}\mathcal{A}$, logo $\mathcal{A}$ é idempotente sse $\mathcal{A}\mathcal{A}\subseteq\mathcal{A}$.

PROPOSIÇÃO 2.5.1

Seja $\mathcal{A}$ um neutrix idempotente, e seja n>0 um inteiro standard qualquer. Então

$$\underbrace{\mathcal{A}.\mathcal{A}.\dots.\mathcal{A}}_{n \text{ vezes}}\subseteq\mathcal{A}$$

Demonstração:

Por indução externa em n.

Para $n=1$, $\mathcal{A}\equiv\mathcal{A}$, logo $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{A}$.

Suponhamos agora que para n standard se tem

$$\underbrace{\mathcal{A}.\mathcal{A}.\dots.\mathcal{A}}_{n \text{ vezes}}\subseteq\mathcal{A}$$

Então, como $\mathcal{A}$ é um neutrix idempotente,

$$\underbrace{\mathcal{A}.\mathcal{A}.\dots.\mathcal{A}}_{n+1 \text{ vezes}}\subseteq\mathcal{A}.\mathcal{A}\equiv\mathcal{A}$$

$\because$

EXEMPLO 2.5.1: Vejamos alguns exemplos de neutrices idempotentes

1) Os neutrices absolutos 0, $\oslash$, £ e $\Re$ são idempotentes.

2) Seja ε um infinitesimal positivo, não nulo. Então os micro-neutrices $£\varepsilon^{\oslash}$ e $£e^{-@/\varepsilon}$ são idempotentes. De facto, pela nota 2.7, vemos que $£\varepsilon^{\oslash}.£\varepsilon^{\oslash} \equiv £\varepsilon^{\oslash}$ e $£e^{-@/\varepsilon}.£e^{-@/\varepsilon} \equiv £e^{-@/\varepsilon}$.

Seja então y um real positivo em $£\varepsilon^{\oslash}$. Então $\forall^{st} n \in \aleph, y < \varepsilon^{n}$.

Pelo princípio de Cauchy, existe um inteiro infinitamente grande ω tal que $y < \varepsilon^{\omega}$. Logo, $\sqrt{y} < \varepsilon^{\omega/2}$, o que significa que $\forall^{st} n \in \aleph, \sqrt{y} < \varepsilon^{n}$. Donde,

$$£\varepsilon^{\oslash}.£\varepsilon^{\oslash} \equiv £\varepsilon^{\oslash}.$$

Seja agora z um real positivo em $£\ e^{-@/\varepsilon}$. Então $\exists^{st} n \in \aleph, z < exp\left(-\frac{1}{n\varepsilon}\right)$. Logo, $\sqrt{z} < exp\left(-\frac{1}{2n\varepsilon}\right)$. Donde $\exists^{st} n \in \aleph, \sqrt{z} < exp\left(-\frac{1}{n\varepsilon}\right)$. E consequentemente,

$$£e^{-@/\varepsilon}.£e^{-@/\varepsilon} \equiv £e^{-@/\varepsilon}.$$

3) Seja ω um real infinitamente grande positivo qualquer. Consideremos o neutrix

$$\mathcal{F} \equiv \bigcup_{st\, f \in F}]-f(\omega), f(\omega)[$$

onde F é um conjunto standard de funções reais de variável real. Claramente $\mathcal{F}$ é um neutrix contendo £. Mais, é idempotente. De facto, se x e y são dois números reais em $\mathcal{F}$ então existem duas funções standard f e g em F tais que

$$x \in]-f(\omega), f(\omega)[\ \wedge\ y \in]-g(\omega), g(\omega)[.$$

O produto fg é uma função em F, logo o produto xy está em $\mathcal{F}$. E portanto, $\mathcal{F}\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}$.

4) Seja r um real positivo, não nulo, não apreciável. Então os neutrices lineares $r\oslash$ e $r\pounds$ não são neutrices idempotentes. De facto, suponhamos que r é infinitesimal. Então $r\oslash$ e $r\pounds$ são neutrices estritamente incluídos em $\oslash$. Então $r^2 \in r\oslash$ mas $r^2 \notin r\oslash . r\oslash \equiv r^2\oslash$. Donde, $r\oslash$ não é idempotente. Mais, $r \in r\pounds$ mas $r \notin r\pounds . r\pounds \equiv r^2\pounds$. Donde $r\pounds$ não é idempotente. Suponhamos agora que r é um real infinitamente grande positivo. Então $r\oslash$ e $r\pounds$ são neutrices que contém estritamente £. O neutrix $r\oslash$ não contém o real r, enquanto que $r\oslash . r\oslash \equiv r^2\oslash$ contém. Donde, $r\oslash$ não é idempotente. O neutrix $r\pounds$ não contém o real r^2, enquanto que $r\pounds . r\pounds \equiv r^2\pounds$ contém. Donde, $r\pounds$ não é idempotente.

Seja ω um real infinitamente grande positivo qualquer.

5) Os neutrices $\pounds e^{\pounds\omega}, \pounds e^{\omega^{\pounds}}$ e $\pounds e^{e^{\omega\pounds}}$ contém £, logo pela nota 2.7, temos que

$$\pounds e^{\pounds\omega} \subseteq \pounds e^{\pounds\omega} \pounds e^{\pounds\omega}$$

$$\pounds e^{\omega^{\pounds}} \subseteq \pounds e^{\omega^{\pounds}} \pounds e^{\omega^{\pounds}}$$

$$\pounds e^{e^{\omega\pounds}} \subseteq \pounds e^{e^{\omega\pounds}} \pounds e^{e^{\omega\pounds}}$$

basta-nos verificar a inclusão contrária.

i) $\pounds e^{\pounds\omega} \pounds e^{\pounds\omega} \subseteq \pounds e^{\pounds\omega}$

$\forall \iota \in \pounds$, tem-se $\iota e^{\iota\omega} . \iota e^{\iota\omega} \equiv \iota^2 e^{\iota\omega + \iota\omega} \equiv \iota^2 e^{2\iota\omega}$. Como $\iota^2 e^{2\iota\omega} \in \pounds e^{\pounds\omega}$, tem-se $\pounds e^{\pounds\omega} \pounds e^{\pounds\omega} \subseteq \pounds e^{\pounds\omega}$ e portanto $\pounds e^{\pounds\omega} \equiv \pounds e^{\pounds\omega} \pounds e^{\pounds\omega}$.

ii) $\pounds e^{\omega^{\pounds}} \pounds e^{\omega^{\pounds}} \subseteq \pounds e^{\omega^{\pounds}}$

$\forall \iota \in \pounds$, tem-se $\iota e^{\omega^{\iota}} . \iota e^{\omega^{\iota}} \equiv \iota^2 e^{\omega^{\iota} + \omega^{\iota}} \equiv \iota^2 e^{2\omega^{\iota}}$. Como $\iota^2 e^{2\omega^{\iota}} \in \pounds e^{\omega^{\pounds}}$, tem-se $\pounds e^{\omega^{\pounds}} \pounds e^{\omega^{\pounds}} \subseteq \pounds e^{\omega^{\pounds}}$ e portanto $\pounds e^{\omega^{\pounds}} \equiv \pounds e^{\omega^{\pounds}} \pounds e^{\omega^{\pounds}}$.

iii) $\pounds e^{e^{\omega\pounds}}\pounds e^{e^{\omega\pounds}} \subseteq \pounds e^{e^{\omega\pounds}}$

$\forall \iota \in \pounds$, tem-se $\iota e^{e^{\omega\iota}}.\iota e^{e^{\omega\iota}} \equiv \iota^2 e^{e^{\omega\iota}+e^{\omega\iota}} \equiv \iota^2 e^{2e^{\omega\iota}}$. Como $\iota^2 e^{2e^{\omega\iota}} \in \pounds e^{e^{\omega\pounds}}$, tem-se $\pounds e^{e^{\omega\pounds}}\pounds e^{e^{\omega\pounds}} \subseteq \pounds e^{e^{\omega\pounds}}$ e portanto $\pounds e^{e^{\omega\pounds}} \equiv \pounds e^{e^{\omega\pounds}}\pounds e^{e^{\omega\pounds}}$.

Logo, são neutrices idempotentes.

6) O neutrice $\pounds e^{\oslash\omega}$ está contido em $\oslash$, logo, pela nota 2.7, temos que $\pounds e^{\oslash\omega} \subseteq \pounds e^{\oslash\omega}\pounds e^{\oslash\omega}$, pelo que basta-nos provar a outra inclusão.

Sejam $\iota \in \pounds$ e $\varepsilon \in \oslash$, quaisquer. Tem-se $\iota e^{\varepsilon\omega}.\iota e^{\varepsilon\omega} \equiv \iota^2 e^{2\varepsilon\omega}$. Como $\iota^2 e^{2\varepsilon\omega} \in \pounds e^{\oslash\omega}$, tem-se $\pounds e^{\oslash\omega}\pounds e^{\oslash\omega} \subseteq \pounds e^{\oslash\omega}$ e portanto

$$\pounds e^{\oslash\omega}\pounds e^{\oslash\omega} \equiv \pounds e^{\oslash\omega}$$

e portanto, é idempotente.

2.6. ABSORVENTES E EXPLODENTES DE UM NEUTRIX

Nota 2.9: Se um neutrix externo for multiplicado por um real, então pode manter-se invariante, pode ficar menor ou maior. Por exemplo, $2£\equiv£$, se $\varepsilon\simeq 0, \varepsilon£\subset£$, e para $\omega\simeq+\infty, \omega£\supset£$. Desta forma, podemos distinguir números reais que são *apreciáveis com respeito a* um neutrix externo, *absorventes* ou *explodentes* de um neutrix externo.

DEFINIÇÃO **2.6.1:** Sejam $\mathcal{A}$ um neutrix externo e t um real.

i) Dizemos que t é *apreciável com respeito a* $\mathcal{A}$ se $t\mathcal{A}\equiv\mathcal{A}$, e denotamos o conjunto de reais apreciáveis positivos com respeito a $\mathcal{A}$ por $@_{\mathcal{A}}$;

ii) Dizemos que t é um *absorvente de* $\mathcal{A}$ se $t\mathcal{A}\subset\mathcal{A}$, e denotamos o conjunto de absorventes de $\mathcal{A}$ por $\oslash_{\mathcal{A}}$;

iii) Dizemos que t é um *explodente de* $\mathcal{A}$ se $t\mathcal{A}\supset\mathcal{A}$, e denotamos o conjunto de explodentes de $\mathcal{A}$ por $\phi_{\mathcal{A}}$;

iv) Dizemos que t é *assimptoticamente limitado com respeito a* $\mathcal{A}$ se $t\mathcal{A}\subseteq\mathcal{A}$, e denotamos o conjunto de reais assimptoticamente limitados com respeito a $\mathcal{A}$ por $£_{\mathcal{A}}$.

EXEMPLO **2.6.1:** Seja $\mathcal{A}$ um neutrix externo, e seja t um real. Então

1) $\phi_{\mathcal{A}} \equiv]@_{\mathcal{A}},+\infty[$

$\oslash_{\mathcal{A}} \equiv £_{\mathcal{A}}\backslash(\pm @_{\mathcal{A}})$

$$\frac{1}{@_{\mathcal{A}}} \equiv @_{\mathcal{A}}$$

$$t = \oslash_{\mathcal{A}} \setminus \{0\} \leftrightarrow \left|\frac{1}{t}\right| = \not\pounds_{\mathcal{A}}$$

2) Se $\mathcal{A} \equiv \oslash$ então $@_{\mathcal{A}} \equiv @$, $\oslash_{\mathcal{A}} \equiv \oslash$, e $\not\pounds_{\mathcal{A}} \equiv \not\pounds$.

3) Se $\mathcal{A} \equiv \pounds$ então $@_{\mathcal{A}} \equiv @$, $\oslash_{\mathcal{A}} \equiv \oslash$, e $\not\pounds_{\mathcal{A}} \equiv \not\pounds$

Nota 2.10: Note-se que, para qualquer neutrice A, os conjuntos $\not\pounds_{\mathcal{A}}$ e $@_{\mathcal{A}}$ não são neutrices pois não contém 0. Prova-se que os conjuntos $\oslash_{\mathcal{A}}$ e $\pounds_{\mathcal{A}}$ são neutrices idempotentes. A demonstração desta propriedade não a daremos pois utiliza noções que não são abordadas nesta tese, mas pode ser consultada em [1].

EXEMPLO **2.6.2:** Calculemos os conjuntos dos explodentes, dos absorventes e dos apreciáveis dos seguintes neutrices:

1) Seja $\omega \simeq +\infty$, e consideremos o neutrice $A \equiv \pounds e^{\pounds\omega}$. Vejamos que:

i) $\not\pounds_{A} \equiv e^{\not\pounds\omega}$

ii) $\oslash_{A} \equiv e^{-\not\pounds\omega}$

iii) $@_{A} \equiv e^{\pounds\omega}$

Mostremos então estas igualdades

i) $\not\pounds_{A} \equiv e^{\not\pounds\omega}$

Sejam $k \in e^{\pounds\omega}$ e $t \in e^{\not\pounds\omega}$ e vejamos que $t.k > e^{\pounds\omega}$.

Como $k \in e^{\pounds\omega}$ e $t \in e^{\not\pounds\omega}$, então $k = e^{\iota\omega}$, para algum $\iota \in \pounds$ e $t = e^{\upsilon\omega}$, para algum $\upsilon \simeq +\infty$. Logo, $e^{\upsilon\omega} e^{\iota\omega} = e^{\omega(\upsilon+\iota)}$, e como $\upsilon + \iota \simeq +\infty$, então $t.k > e^{\pounds\omega}$ e $e^{\not\pounds\omega} \subseteq \not\pounds_{A}$.

Seja agora $t \in \not\pounds_{A}$. Temos que $t = e^{k}$, com $k > 0$, e

$$e^{k}.\pounds e^{\pounds\omega} \supset \pounds e^{\pounds\omega} \leftrightarrow e^{k}.e^{\pounds\omega} \supset e^{\pounds\omega} \leftrightarrow k + \pounds\omega \supset \pounds\omega$$

donde $k\simeq+\infty$ e $k\in\not\pounds\,\omega$, e portanto, $t\in e^{\not\pounds\omega}$ e $\not\pounds_A\subseteq e^{\not\pounds\omega}$. Logo $\not\pounds_A \equiv e^{\not\pounds\omega}$.

ii) $\oslash_A \equiv e^{-\not\pounds\omega}$

Sejam $k\in e^{\pounds\omega}$ e $t\in e^{-\not\pounds\omega}$ e vejamos que $t.k< e^{\pounds\omega}$.

Como $k\in e^{\pounds\omega}$ e $t\in e^{-\not\pounds\omega}$, então $k=e^{\iota.\omega}$, para algum $\iota\in\pounds$ e $t=e^{-\upsilon\omega}$, para algum $\upsilon\simeq+\infty$. Logo, $e^{-\upsilon\omega}e^{\iota.\omega}=e^{\omega(-\upsilon+\iota)}$, e como $-\upsilon+\iota\simeq-\infty$, então $t.k<e^{\pounds\omega}$ e $e^{-\not\pounds\omega}\subseteq\oslash_A$.

Seja agora $t\in\oslash_A$. Temos que $t=e^k$, com $k<0$, e

$$e^k.\pounds e^{\pounds\omega}\subset \pounds e^{\pounds\omega} \leftrightarrow e^k.e^{\pounds\omega}\subset e^{\pounds\omega}\leftrightarrow k+\pounds\omega\subset\pounds\omega$$

donde $k\simeq-\infty$ e $k\in-\not\pounds\,\omega$, e portanto, $t\in e^{-\not\pounds\omega}$ e $\oslash_A\subseteq e^{-\not\pounds\omega}$. Logo $\oslash_A\equiv e^{-\not\pounds\omega}$.

iii) $@_A\equiv e^{\pounds\omega}$

Note-se que $@_A \equiv \Re^+\setminus\left(\oslash_A\cup\not\pounds_A\right)\equiv \Re^+\setminus\left(e^{-\not\pounds\omega}\cup e^{\not\pounds\omega}\right)$, donde obtemos o resultado.

2) Seja $\omega\simeq+\infty$, e consideremos o neutrice $A\equiv\pounds e^{\oslash\omega}$. Vejamos que:

i) $\not\pounds_A\equiv e^{\omega]\oslash,+\infty[}$

ii) $\oslash_A \equiv e^{-\omega]\oslash,+\infty[}$

iii) $@_A\equiv e^{\oslash\omega}$

Mostremos então estas igualdades.

i) $\not\pounds_A\equiv e^{\omega]\oslash,+\infty[}$

Sejam $k\in e^{\oslash\omega}$ e $t\in e^{\omega]\oslash,+\infty[}$ e vejamos que $t.k>e^{\oslash\omega}$.

Como $k\in e^{\oslash\omega}$ e $t\in e^{\omega]\oslash,+\infty[}$,. então $k=e^{\varepsilon\omega}$, para algum $\varepsilon\simeq0$ e $t=e^{\upsilon\omega}$, para algum $\upsilon>0$ e $\upsilon\not\simeq0$. Logo, $e^{\upsilon\omega}e^{\varepsilon\omega}=e^{\omega(\upsilon+\varepsilon)}$,e como $\upsilon+\varepsilon\simeq\upsilon$ mas $\upsilon\not\simeq0$, então $t.k>e^{\oslash\omega}$ e $e^{\omega]\oslash,+\infty[}\subseteq\not\pounds_A$.

Seja agora $t\in\not\pounds_A$. Temos que $t=e^k$, com $k>0$, e

$$e^{k}.£e^{\oslash\omega} \supset £e^{\oslash\omega} \leftrightarrow e^{k}.e^{\oslash\omega} \supset e^{\oslash\omega} \leftrightarrow k+\oslash\omega \supset \oslash\omega$$

donde $k>\oslash\,\omega$, e portanto, $t\in e^{\omega]\oslash,+\infty[}$ e $\phi_A \subseteq e^{\omega]\oslash,+\infty[}$. Logo $\phi_A \equiv e^{\omega]\oslash,+\infty[}$.

ii) $\oslash_A \equiv e^{-\omega]\oslash,+\infty[}$

Sejam $k\in e^{\oslash\omega}$ e $t\in e^{-\omega]\oslash,+\infty[}$ e vejamos que $t.k< e^{\oslash\omega}$.

Como $k\in e^{\oslash\omega}$ e $t\in e^{-\omega]\oslash,+\infty[}$, então $k=e^{\varepsilon\omega}$, para algum $\varepsilon\simeq 0$ e $t=e^{-\upsilon\omega}$, para algum $\upsilon>0$ e $\upsilon\not\simeq 0$. Logo, $e^{-\upsilon\omega}e^{\varepsilon\omega}=e^{\omega(-\upsilon+\varepsilon)}$, e como $-\upsilon+\varepsilon\simeq-\upsilon \underset{\neq}{<} 0$, então $t.k< e^{\oslash\omega}$ e $e^{-\omega]\oslash,+\infty[} \subseteq \oslash_A$.

Seja agora $t\in \oslash_A$. Temos que $t=e^{k}$, com $k<0$, e

$$e^{k}.£e^{\oslash\omega} \subset £e^{\oslash\omega} \leftrightarrow e^{k}.e^{\oslash\omega} \subset e^{\oslash\omega} \leftrightarrow k+\oslash\omega \subset \oslash\omega$$

donde $k<\oslash\,\omega$, e portanto, $t\in e^{-\omega]\oslash,+\infty[}$ e $\oslash_A \subseteq e^{-\omega]\oslash,+\infty[}$. Logo $\oslash_A \equiv e^{-\omega]\oslash,+\infty[}$.

iii) $@_A \equiv \Re^{+}\backslash\left(\oslash_A \cup \phi_A\right) \equiv \Re^{+}\backslash\left(e^{-\omega]\oslash,+\infty[} \cup e^{\omega]\oslash,+\infty[}\right) \equiv e^{\oslash\omega}$.

3) Seja $\omega\simeq+\infty$, e consideremos o neutrice $A\equiv £e^{\omega^{£}}$. Vejamos que:

i) $\phi_A \equiv e^{\omega^{\phi}}$

ii) $\oslash_A \equiv e^{-\omega^{\phi}}$

iii) $@_A \equiv e^{£\omega^{£}}$

Mostremos então estas igualdades.

i) $\phi_A \equiv e^{\omega^{\phi}}$

Sejam $k\in e^{\omega^{£}}$ e $t\in e^{\omega^{\phi}}$ e vejamos que $t.k> e^{\omega^{£}}$.

Como $k\in e^{\omega^{£}}$ e $t\in e^{\omega^{\phi}}$, então $k=e^{\omega^{a}}$, para algum $a\in £$ e $t=e^{\omega^{\upsilon}}$, para algum $\upsilon\simeq+\infty$. Logo, $e^{\omega^{\upsilon}}e^{\omega^{a}}=e^{\omega^{\upsilon}+\omega^{a}}$, e como $\omega^{\upsilon}+\omega^{a}\in\omega^{\phi}$ então $t.k> e^{\omega^{£}}$ e $e^{\omega^{\phi}} \subseteq \phi_A$.

Seja agora $t\in \phi_A$. Temos que $t=e^{k}$, com $k>0$, e

$$e^{k}.£e^{\omega^{£}} \supset £e^{\omega^{£}} \leftrightarrow e^{k}.e^{\omega^{£}} \supset e^{\omega^{£}} \leftrightarrow k+\omega^{£} \supset \omega^{£}$$

donde $k \simeq +\infty$ e $k \in \omega^{\phi}$, e portanto, $t \in e^{\omega^{\phi}}$ e $\phi_{A} \subseteq e^{\omega^{\phi}}$. Logo $\phi_{A} \equiv e^{\omega^{\phi}}$.

ii) $\oslash_{A} \equiv e^{-\omega^{\phi}}$

Sejam $k \in e^{\omega^{£}}$ e $t \in e^{-\omega^{\phi}}$ e vejamos que $t.k < e^{\omega^{£}}$.

Como $k \in e^{\omega^{£}}$ e $t \in e^{-\omega^{\phi}}$, então $k = e^{\omega^{a}}$, para algum $a \in £$ e $t = e^{-\omega^{\upsilon}}$, para algum $\upsilon \simeq +\infty$. Logo $e^{-\omega^{\upsilon}} e^{\omega^{a}} = e^{-\omega^{\upsilon}+\omega^{a}} > e^{\omega^{a}}$, porque $-\omega^{\upsilon}+\omega^{a} \in -\omega^{\phi}$ então $t.k < e^{\omega^{£}}$ e $e^{-\omega^{\phi}} \subseteq \oslash_{A}$.

Seja agora $t \in \oslash_{A}$. Temos que $t = e^{k}$, com $k < 0$, e

$$e^{k}.£e^{\omega^{£}} \subset £e^{\omega^{£}} \leftrightarrow e^{k}.e^{\omega^{£}} \subset e^{\omega^{£}} \leftrightarrow k + £\omega \subset £\omega$$

donde $k \simeq -\infty$ e $k \in -\omega^{\phi}$, e portanto, $t \in e^{-\omega^{\phi}}$ e $\oslash_{A} \subseteq e^{-\omega^{\phi}}$. Logo $\oslash_{A} \equiv e^{-\omega^{\phi}}$.

iii) $@_{A} \equiv \Re^{+} \setminus (\oslash_{A} \cup \phi_{A}) \equiv \Re^{+} \setminus \left(e^{-\omega^{\phi}} \cup e^{\omega^{\phi}}\right) \equiv e^{£\omega^{£}}$

3. CONJUNTOS EXTERNOS DE $\Re^2$

3.1. INTRODUÇÃO

Este capítulo nasceu da ideia de que todo o neutrix do plano se pode escrever como o produto cartesiano de dois neutrices da recta real. Daí resultaram uma série de propriedades e de conceitos que aqui são desenvolvidos.

Embora a ideia principal desta tese fosse, como já se referiu, mostrar que qualquer neutrix do plano é o produto cartesiano de dois neutrices reais, não foi, no entanto, possível atingir esse objectivo e esta dissertação centra-se predominantemente nos tamanhos dos neutrices. É de facto um estudo dos tamanhos dos neutrices de $\Re^2$, isto é, um estudo nas distâncias de qualquer ponto do neutrix, sobre uma recta com um declive dado, à origem.

Lembremos que denotamos o conjunto de todos os neutrices por $\mathcal{N}$.

Uma vez que vamos estudar os neutrices do plano, e como já foram introduzidas no capítulo 2 as operações de soma e produto de neutrices, basta-nos provar que o produto cartesiano de dois neutrices de $\Re$ é ainda um elemento de $\mathcal{N}$, e portanto todas as propriedades de $\mathcal{N}$ são extendidas aos neutrices de $\Re^2$ que sejam produtos de neutrices reais. Para nós isto basta-nos pois vamos começar por estudar certos produtos cartesianos e ver se são de facto neurices.

PROPOSIÇÃO 3.1.1

O produto cartesiano de dois neutrices de $\Re$ é um elemento de $\mathcal{N}$.

Demonstração:

Sejam N, M dois neutrices reais quaisquer, ou seja, subgrupos convexos de $\Re$.

Queremos mostrar que $N \times M \subseteq \Re^2$ é um neutrix. Obviamente $(0,0) \in N \times M$, pois $0 \in N$ e $0 \in M$. Sejam $a, b \in N \times M$ quaisquer.

Então, existem $n_1, n_2 \in N$, $m_1, m_2 \in M$, tais que $(n_1, m_1) = a$ e $(n_2, m_2) = b$. Como N e M são neutrices, $n_1 + n_2 \in N$ e $m_1 + m_2 \in M$, e portanto,

$$a + b = (n_1 + m_1, n_2 + m_2) \in N \times M.$$

Por outro lado, seja $a \in N \times M$ qualquer. Então, existem $n \in N$, $m \in M$, tais que $(n, m) = a$. Como N e M são neutrices, $-n \in N$ e $-m \in M$, logo,

$$(-n, -m) = -a \in N \times M \ .$$

Então $N \times M$ é um subgrupo.

Finalmente, vejamos que é convexo. Ou seja, vejamos que,

$$\forall x, y \in N \times M, \lambda x + (1 - \lambda) y \in N \times M, \lambda \in (0,1).$$

Sejam então $x, y \in N \times M$ quaisquer. Então, existem $n_1, n_2 \in N$, $m_1, m_2 \in M$, tais que $(n_1, m_1) = a$ e $(n_2, m_2) = b$. Como N e M são convexos, temos que, para $\lambda \in (0,1)$

$$\lambda x + (1 - \lambda) y = (\lambda n_1, \lambda m_1) + ((1 - \lambda) n_2, (1 - \lambda) m_2) = (\lambda n_1 + (1 - \lambda) n_2, \lambda m_1 + (1 - \lambda) m_2) \in N \times M$$

Então $N \times M$ é um neutrix.

$\therefore$

3.2. TAMANHO DE UM NEUTRIX

DEFINIÇÃO 3.2.1: Seja $\mathscr{C}$ um neutrice de $\Re^2$ e $\varphi \in [0,\pi]$ um ângulo qualquer.

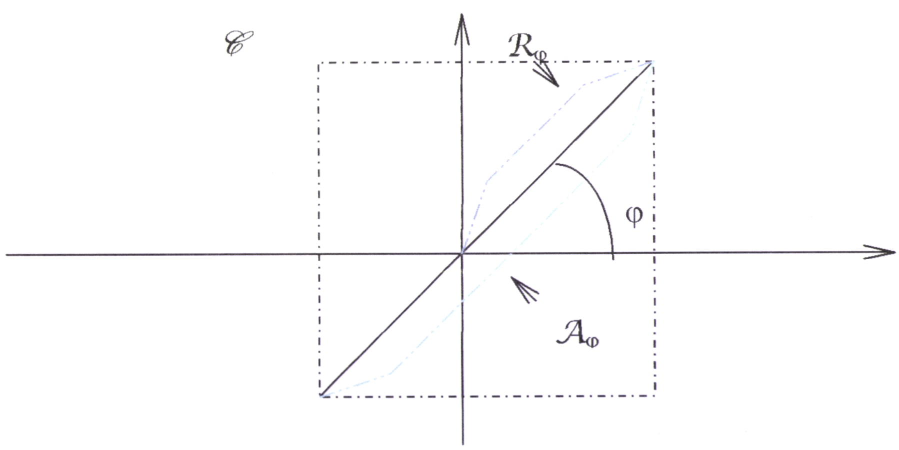
1)Definimos por

$$\mathcal{R}_\varphi \equiv \{k \geq 0 : (k\cos\varphi, k\,sen\,\varphi) \in \mathscr{C}\},$$

o conjunto das distâncias de qualquer ponto em $\mathscr{C}$, sobre uma recta com declive $tg\varphi$, à origem.

2) Ao conjunto $\mathcal{A}_\varphi \equiv \{k : (k\cos\varphi, k\,sen\,\varphi) \in \mathscr{C}\}$ chamamos direcção de $\mathscr{C}$ por φ.

Nota 3.1: Temos que $|\mathcal{A}_\varphi| \equiv \{|k| : (k\cos\varphi, k\,sen\,\varphi) \in \mathscr{C}\} \equiv \mathcal{R}_\varphi$.



PROPOSIÇÃO 3.2.1

O conjunto A_φ é um grupo convexo, para qualquer ângulo $\varphi \in [0,\pi]$.

Demonstração:

Seja φ um ângulo qualquer do conjunto $[0,\pi]$. Consideremos o conjunto $\mathcal{A}_\varphi$, e sejam $x, y \in \mathcal{A}_\varphi$.

Vejamos que $\mathcal{A}_\varphi$ é um grupo convexo. Por definição de $\mathcal{A}_\varphi$, tem-se

$$(x\cos\varphi, x sen\varphi),\ (y\cos\varphi, y sen\varphi) \in \mathcal{C},$$

e, como $\mathcal{C}$ é grupo,

$$(x\cos\varphi, x sen\varphi)+(y\cos\varphi, y sen\varphi)=((x+y)\cos\varphi,(x+y) sen\varphi) \in \mathcal{C},$$

logo $x+y \in \mathcal{A}_\varphi$.

Como $(0,0)=(0\cos\varphi, 0 sen\varphi) \in \mathcal{C}$, então $0 \in \mathcal{A}_\varphi$.

Portanto, $\mathcal{A}_\varphi$ é grupo.

Por convexidade de $\mathcal{C}$, temos

$$\lambda(x\cos\varphi, x sen\varphi)+(1-\lambda)(y\cos\varphi, y sen\varphi) \in \mathcal{C},\ \forall\lambda \in (0,1)$$

logo

$$\lambda(x\cos\varphi, x sen\varphi)+(1-\lambda)(y\cos\varphi, y sen\varphi)=$$
$$=((\lambda x+(1-\lambda)y)\cos\varphi,(\lambda x+(1-\lambda)y) sen\varphi) \in \mathcal{C},\ \forall\lambda \in (0,1)$$

donde, por definição, $\lambda x+(1-\lambda)y \in \mathcal{A}_\varphi, \forall\lambda \in (0,1)$

Portanto $\mathcal{A}_\varphi$ é um grupo convexo.

$\because$

DEFINIÇÃO 3.2.2: Sejam $\mathscr{C}$ um subgrupo convexo de $\Re^2$ e $\varphi \in [0,\pi]$.

1)O *tamanho*, T_φ, *de* $\mathscr{C}$ *segundo o ângulo de* φ, é o conjunto

$$T_\varphi \equiv \left\{\sqrt{x^2+y^2} : (x,y) \in \mathscr{C}, tg\varphi = \frac{y}{x}\right\}, \text{ com } \varphi \neq \frac{\pi}{2}.$$

2) Definimos o conjunto de todas as direcções com tamanho T, por

$$\phi_T \equiv \{\varphi : T_\varphi = T\}.$$

3) Um tamanho **T** de $\mathscr{C}$ num dado ângulo diz-se *maximal* se não existe $\psi \in [0,\pi]$ tal que $T_\psi > T$; **T** diz-se *minimal* se para todo o ângulo $\psi \in [0,\pi]$ se tem $T_\psi \geq T$.

4) Denotamos por l_α a linha que tem por declive $tg\alpha$.

Nota 3.2: A restricção $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ na definição de tamanho, deve-se ao facto de a tangente não estar definida em $\frac{\pi}{2}$. Também quando $x=0$, podemos ter problemas no claculo dos tamanhos. Embora, neste caso último caso, possamos sempre escrever $y = x tg\varphi$, temos também outra hipótese, pois de facto, $\mathbf{T}_\varphi \equiv \mathcal{R}_\varphi$.

Vejamos então que $\mathbf{T}_\varphi \equiv \mathcal{R}_\varphi$ para qualquer ângulo $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$.

Seja $t \in \mathbf{T}_\varphi$ qualquer. Então $t \geq 0$ e $t = \sqrt{x^2 + y^2}$, com $(x,y) \in \mathscr{C}$, tais que $tg\varphi = \frac{y}{x}$, por definição de T_φ. Ou seja, $t^2 = x^2 + y^2 \leftrightarrow x = t\cos\varphi$ e $y = tsen\varphi$, com $(t\cos\varphi, tsen\varphi) \in \mathscr{C}$.

Logo $t \in \mathcal{R}_\varphi$.

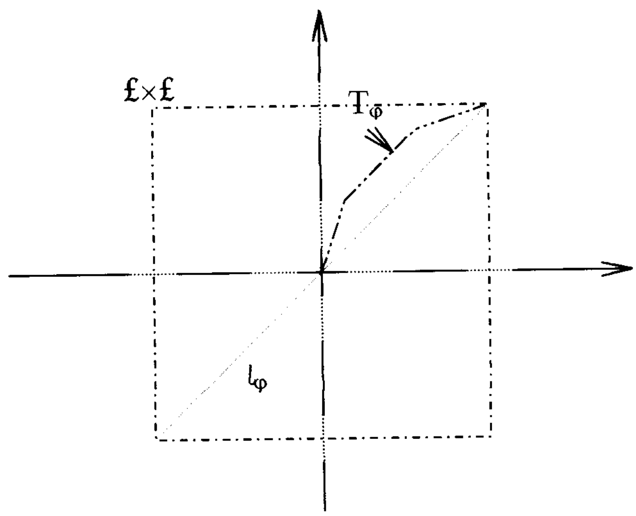
Seja agora $t \in \mathcal{R}_\varphi$. qualquer. Então $(t\cos\varphi, tsen\varphi) \in \mathscr{C}$, por definição de $\mathcal{R}_\varphi$. Donde tomando $x = t\cos\varphi$ e $y = tsen\varphi$, obtemos $t^2 = x^2 + y^2 \leftrightarrow t = \sqrt{x^2 + y^2}$, e $tg\varphi = \frac{sen\varphi}{\cos\varphi} = \frac{y}{x}$.

Logo $t \in \mathbf{T}_\varphi$.

Assim, para $\varphi = \frac{\pi}{2}$, usamos a definição de $\mathcal{R}_\varphi$ em vez de T_φ.

Nota 3.3: Tamanhos diferentes implicam ângulos diferentes, no entanto, tamanhos iguais não significam ângulos iguais, como se pode ver no seguinte exemplo.

EXEMPLO 3.2.1: Consideremos o conjunto $£\times£$.



Temos que $£\times£$ é um neutrix e todos os tamanhos são iguas a £

De facto, $\forall\varphi\in[0,\pi]$ tem-se $tg\varphi=\dfrac{y}{x}$, logo

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_\varphi &\equiv\left\{\sqrt{x^2+y^2} : (x,y)\in £\times£, tg\varphi=\frac{y}{x}\right\}\\ &\equiv\left\{|x|\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} : (x,y)\in £\times£, tg\varphi=\frac{y}{x}\right\}\\ &\equiv\left\{|x|\sqrt{1+(tg\varphi)^2} : (x,y)\in £\times£\right\}\end{aligned}$$

Se $\varphi\neq\dfrac{\pi}{2}$, então $tg\varphi\in£$, donde

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_\varphi &\equiv\left\{|x|\sqrt{1+(tg\varphi)^2} : (x,y)\in £\times£\right\}\\ &\equiv £^+\sqrt{1+£^2}\equiv £^+\end{aligned}$$

Se $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$, então,

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_\varphi \equiv \mathcal{R}_\varphi &\equiv\{k>0 : (k\cos\varphi, k\,sen\varphi)\in £\times£\}\\ &\equiv\{k>0 : (0,k)\in £\times£\}\equiv £^+\end{aligned}$$

PROPOSIÇÃO 3.2.2

Sejam $A,B \subset \Re^2$ neutrices, α, $\varphi \in [0,\pi]$ dois ângulos quaisquer. Denotamos o tamanho de α em B por $\mathbf{T}_{\alpha,B}$ e o tamanho de α em A por $\mathbf{T}_{\alpha,A}$.

$$\text{Se } B = R_\varphi(A) \text{ então } \mathbf{T}_{\alpha,B} = \mathbf{T}_{\alpha+\varphi,A}.$$

Antes de darmos a demonstração vejamos apenas algumas definições e resultados necessários.

DEFINIÇÃO 3.2.3:

(a) Uma *matriz ortogonal* é uma matriz quadrada com coeficientes reais, cuja transposta é também a sua inversa.

(b) Uma *rotação* é uma matriz ortogonal 2×2 ρ cujo determinante é um. Também encaramos ρ como uma aplicação de $\Re^2$ em $\Re^2$, pondo $\rho(x)$ como sendo o vector obtido multiplicando ρ pelo vector coluna x:

$$\rho(x) = y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ com } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\rho = \begin{vmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{12} \end{vmatrix}, \quad y_i = \sum_{j=1}^{2} \rho_{ij} x_j, \text{ para } i = 1,2.$$

(c) Denotamos a matriz identidade 2×2 por ι.

PROPOSIÇÃO 3.2.3

Seja ρ uma rotação. Então :

(i) A imagem por ρ de qualquer recta é uma recta : $\rho(b+tc)=\rho(b)+t\rho(c)$, para todo $b,c \in \Re^2$ e $t \in \Re$.

(ii) Os produtos internos são preservados por ρ : se $x,x' \in \Re^2$, $\rho(x)=y$ e $\rho(x')=y'$, então $\sum_{i=1}^{2} y_i y'_i = \sum_{j=1}^{2} x_j x'_j$

(iii) As distâncias são preservadas por ρ : se $x \in \Re^2$, então $|\rho(x)| = |x|$.

Demonstração:

(i) Queremos provar que $\rho(b+tc)=\rho(b)+t\rho(c)$, para todo $b,c \in \Re^2$ e $t \in \Re$. Temos por hipótese que ρ é uma rotação ,isto é, ρ é uma matriz ortogonal 2×2 cujo determinante é 1. Como toda a matriz representa uma aplicação linear, temos que $\rho(b+tc)=\rho(b)+t\rho(c)$.

(ii) Queremos mostrar que se $x,x' \in \Re^2$, $\rho(x)=y$ e $\rho(x')=y'$, então $\sum_{i=1}^{2} y_i y'_i = \sum_{j=1}^{2} x_j x'_j$.

Como ρ é ortogonal, temos que $\sum_i \rho_{ij}\rho_{ik} = \iota_{jk}$, onde $\iota_{jk}=1$ se $j=k$ e $\iota_{jk}=0$ se $j \neq k$, logo,

$$\sum_i y_i y'_i = \sum_i \left(\sum_j \rho_{ij} x_j \right)\left(\sum_k \rho_{ik} x'_k \right) = \sum_i \left(\sum_j \sum_k \rho_{ij}\rho_{ik} x_j x'_k \right)$$
$$= \sum_j \sum_k \iota_{jk} x_j x'_k = \sum_j x_j x'_j$$

(iii) Queremos provar que se $x \in \Re^2$ então $|\rho(x)| = |x|$.

Tomando $x=x'$ em (ii), temos que $\rho(x)=y$ e $\rho(x)=y'$, donde $y=y'$ porque ρ é uma aplicação. Então

$$\sum_{i=1}^{2} y_i^2 = \sum_{j=1}^{2} x_j^2 \leftrightarrow y_1^2 + y_2^2 = x_1^2 + x_2^2 \leftrightarrow \left(y_1^2 + y_2^2\right)^{1/2} = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2} \leftrightarrow |\rho(x)| = |y| = |x|$$

∵

Demonstração da Proposição 3.2.2:

Seja $\alpha \in [0,\pi]$ uma ângulo qualquer em B, e $\varphi \in [0,\pi]$ tal que $B = R_\varphi(A)$, ou seja, $B=\rho(A)$, onde ρ é a rotação de A por φ.

Assim, provar que $T_{\alpha,B}=T_{\alpha+\varphi,A}$ é equivalente a mostrar que para qualquer rotação ρ os tamanhos não se alteram. De facto, pela sua definição, os tamanhos são distâncias e, em $\Re^2$, as distâncias são preservadas qualquer que seja a rotação φ, pela proposição anterior.

Logo, $\mathbf{T}_{\alpha,B} \equiv \mathbf{T}_{\alpha+\varphi,A}$.

$\because$

LEMA 3.2.1

Se $\varphi \simeq 0$ então $tg\ \varphi \simeq (1+\oslash)\varphi$.

Demonstração:

Pelo desenvolvimento em série de Taylor, temos que

$$tg\varphi = \varphi + \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} + \cdots + \frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots .$$

Se $\varphi=0$, então não há nada a demonstrar.

Se $\varphi \neq 0$, $\varphi > 0$, então,

$$\begin{aligned} tg\varphi &= \varphi\left(1 + \frac{\varphi^2}{3!} + \frac{\varphi^4}{5!} + \cdots + \frac{\varphi^{2n}}{(2n+1)!} + \cdots\right) \\ &< \varphi\left(1 + \varphi^2 + \varphi^4 + \cdots + \varphi^{2n} + \cdots\right) \end{aligned}$$

Como $1+\varphi^2+\varphi^4+\cdots+\varphi^{2n}+\cdots$, é uma série geométrica de razão $\varphi^2 \simeq 0$, pois $\varphi \simeq 0$, logo $|\varphi^2| \leq 1$, e portanto a série é convergente.

Então

$$\begin{aligned} tg\varphi &= \varphi\left(1 + \frac{\varphi^2}{3!} + \frac{\varphi^4}{5!} + \cdots + \frac{\varphi^{2n}}{(2n+1)!} + \cdots\right) \\ &< \varphi\left(1 + \varphi^2 + \varphi^4 + \cdots + \varphi^{2n} + \cdots\right) = \varphi.\frac{1}{1-\varphi^2} \\ &= \varphi(1+\oslash) \end{aligned}$$

Como a tangente é uma função impar, se $\varphi<0$, obtemos o resultado por simetria.

$\because$

3.3. EXEMPLOS E CÁLCULO DOS SEUS TAMANHOS

3.3.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo vamos estudar alguns neutrices de $\Re^2$, e calcular os seus tamanhos. Uma vez que a definição de tamanho é

$$\mathbf{T}_\varphi \equiv \left\{ \sqrt{x^2+y^2} : (x,y) \in \mathscr{E}, tg\varphi = \frac{y}{x} \right\}$$

poderia se colocar a questão sobre qual a variável a escrever como função da outra, no cálculo dos tamanhos, a fim de simplificar o conjunto.

Tome-se, por exemplo, o conjunto $£\omega \times \oslash$, com $\omega \simeq +\infty$ e um ângulo $\alpha \simeq \frac{\pi}{2}$. Então, existe $\omega' \simeq +\infty$ tal que, $tg\alpha = \omega'$, ou seja, existe $(x,y) \in \Re^2$ tal que $\frac{y}{x} = \omega'$. Se escrevermos $x = \frac{y}{\omega'}$, não teremos problemas uma vez que $\frac{y}{\omega'} \in £\omega$, pois $y \in \oslash$. Se, por outro lado, escrevermos $y = x\omega'$, como $x \in £\omega'$, então se $x = \omega'$, viria $y = \omega'^2$, o que é absurdo pois $y \in \oslash$.

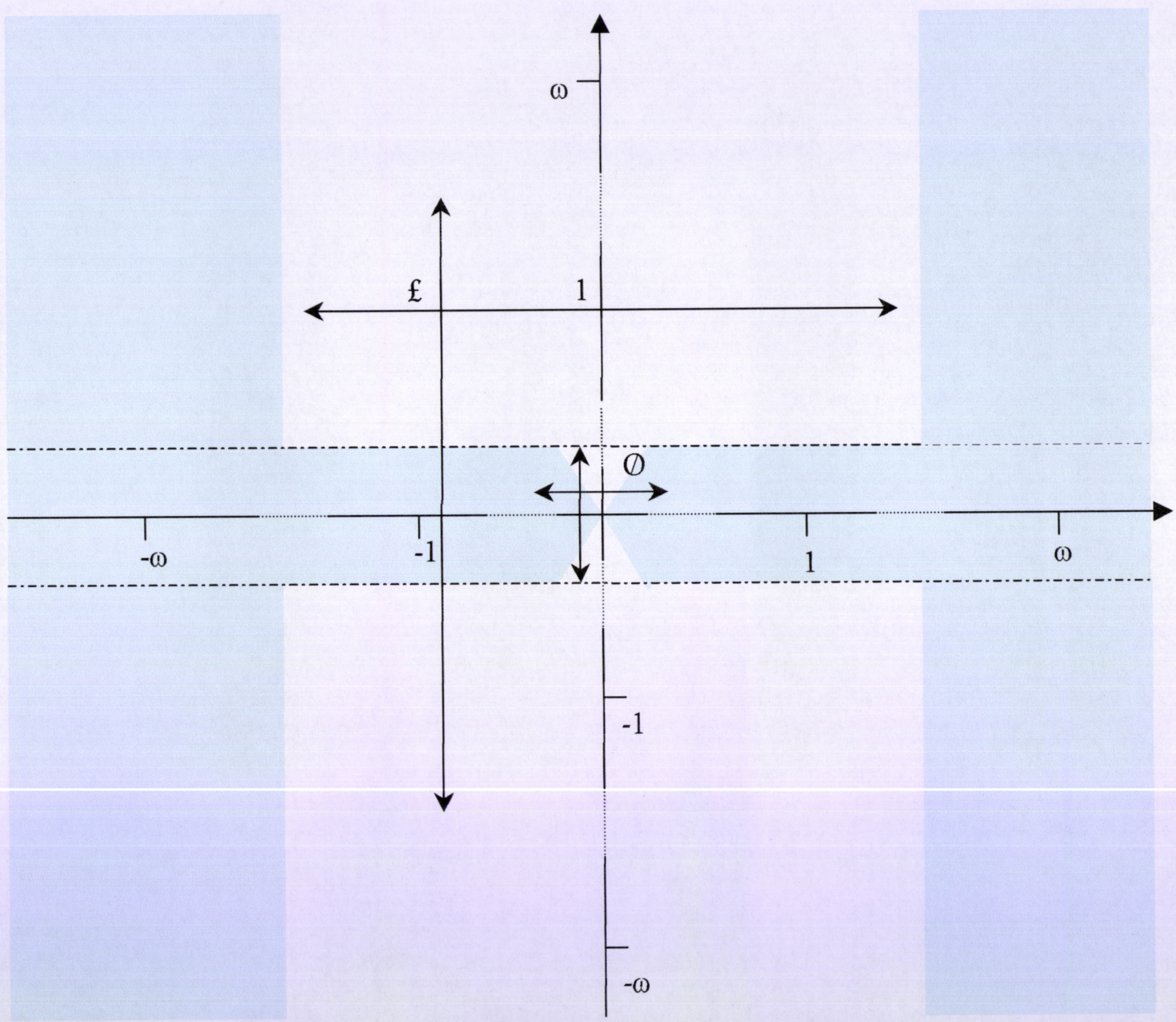
Outros exemplos há, como veremos a seguir, que nenhuma das situações gera ambiguidade.

Assim, a fim de evitar ambiguidades no cálculo de tamanhos, temos que testar as hipóteses possíveis e escolher a que não gerar contradições.

Nota 3.4: Em todos os exemplos que se seguem, consideramos sempre $\omega \simeq +\infty$ e $\varepsilon \simeq 0$.

3.3.2. EXEMPLOS

1) $\mathcal{A} \equiv \{(x,y): y = \varepsilon x, x \in \Re, \varepsilon \simeq 0\}$

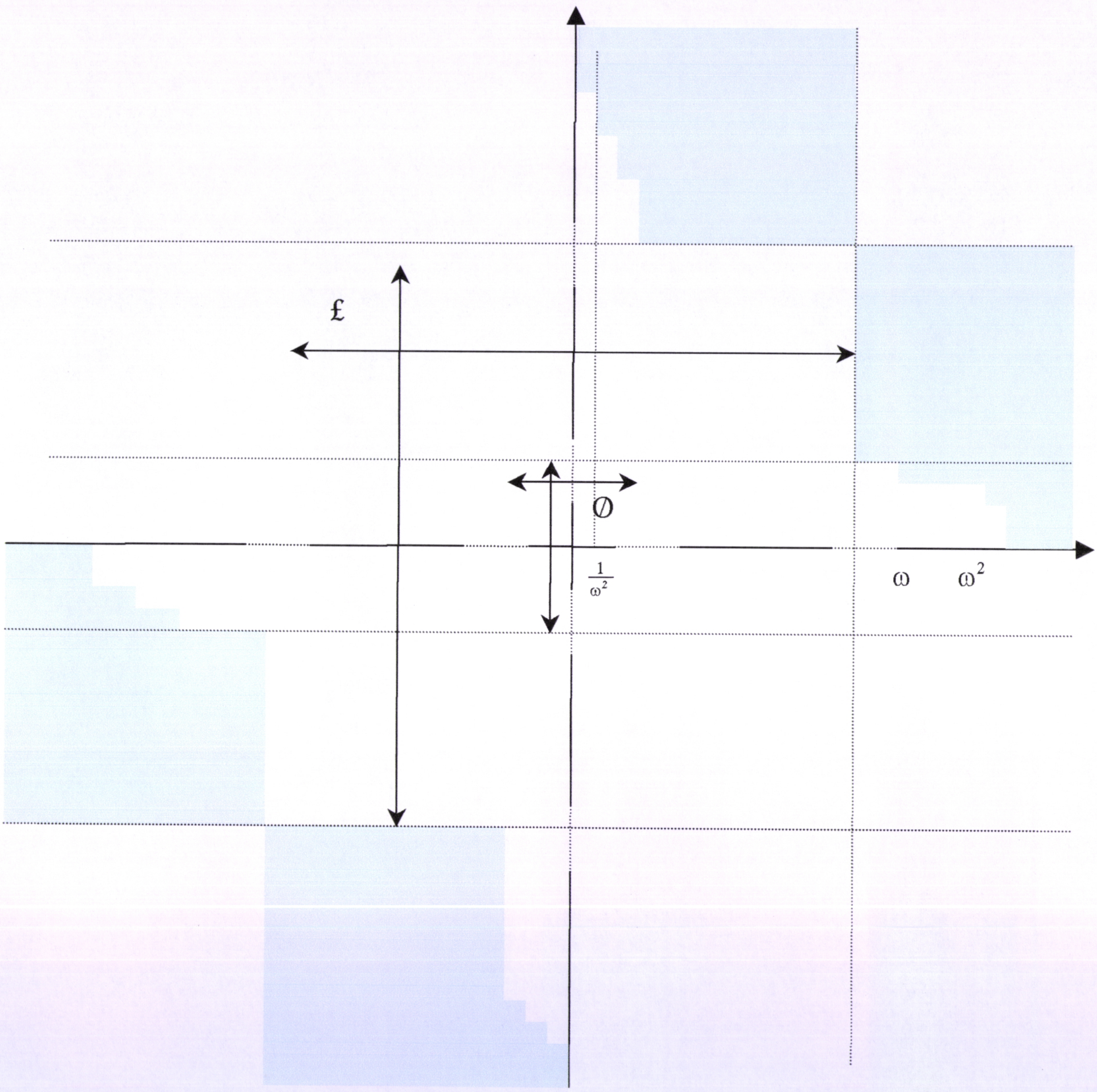


Não é um neutrice, pois para x=0, o único ponto pertencente a $\mathcal{A}$ é (0,0).

No entanto, para $x \in \emptyset$, $(\frac{1}{\varepsilon},\varepsilon)$, $(-\frac{1}{\varepsilon},\varepsilon) \in \mathcal{A}$ mas a sua soma é $(0,\varepsilon) \notin \mathcal{A}$.

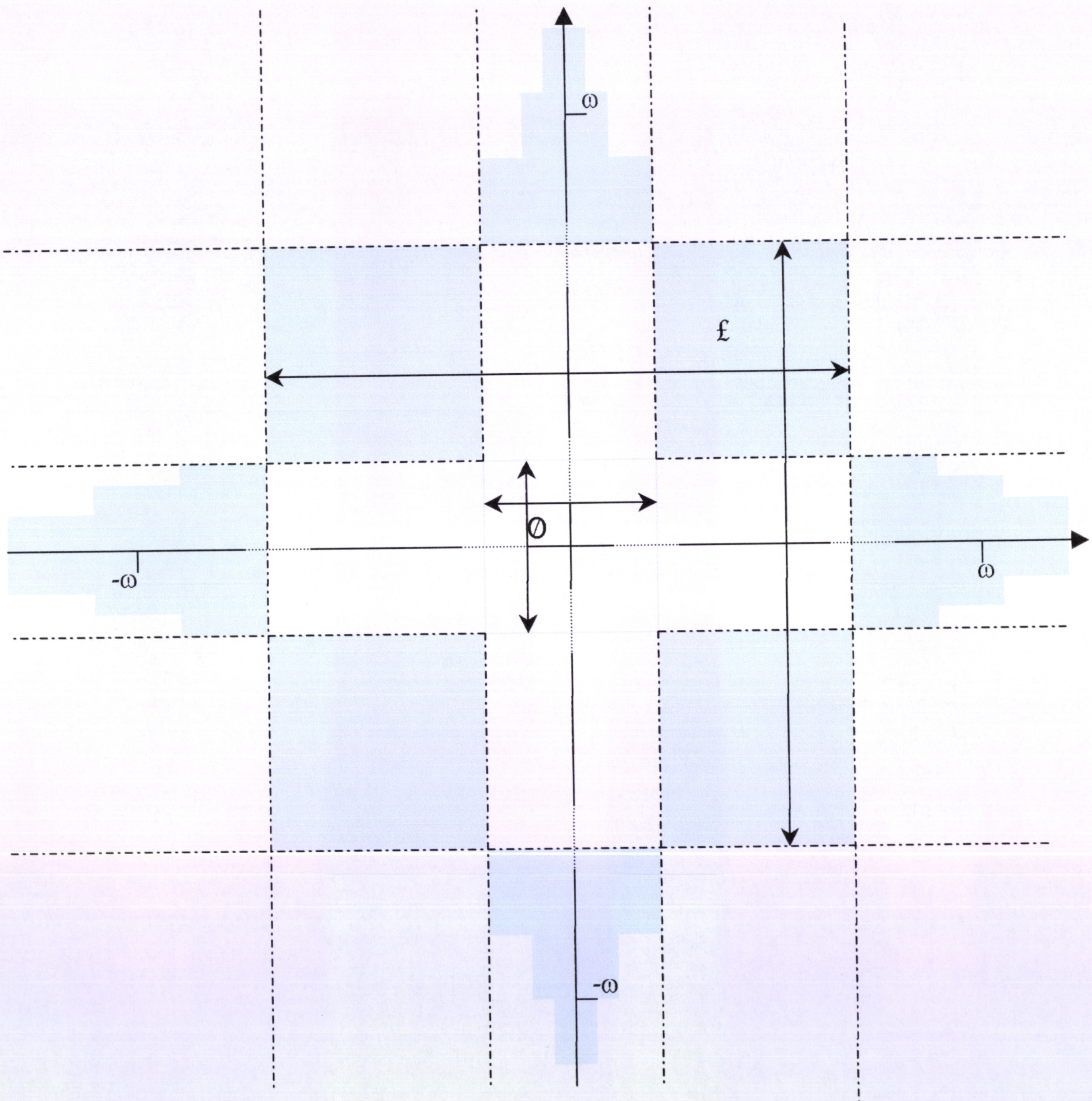
Portanto, $\mathcal{A}$ não é um subgrupo aditivo.

2) $\mathcal{B} \equiv \left\{(x,y): y = \frac{\omega}{x}, x \in \Re\right\}$, com $\omega \simeq +\infty$



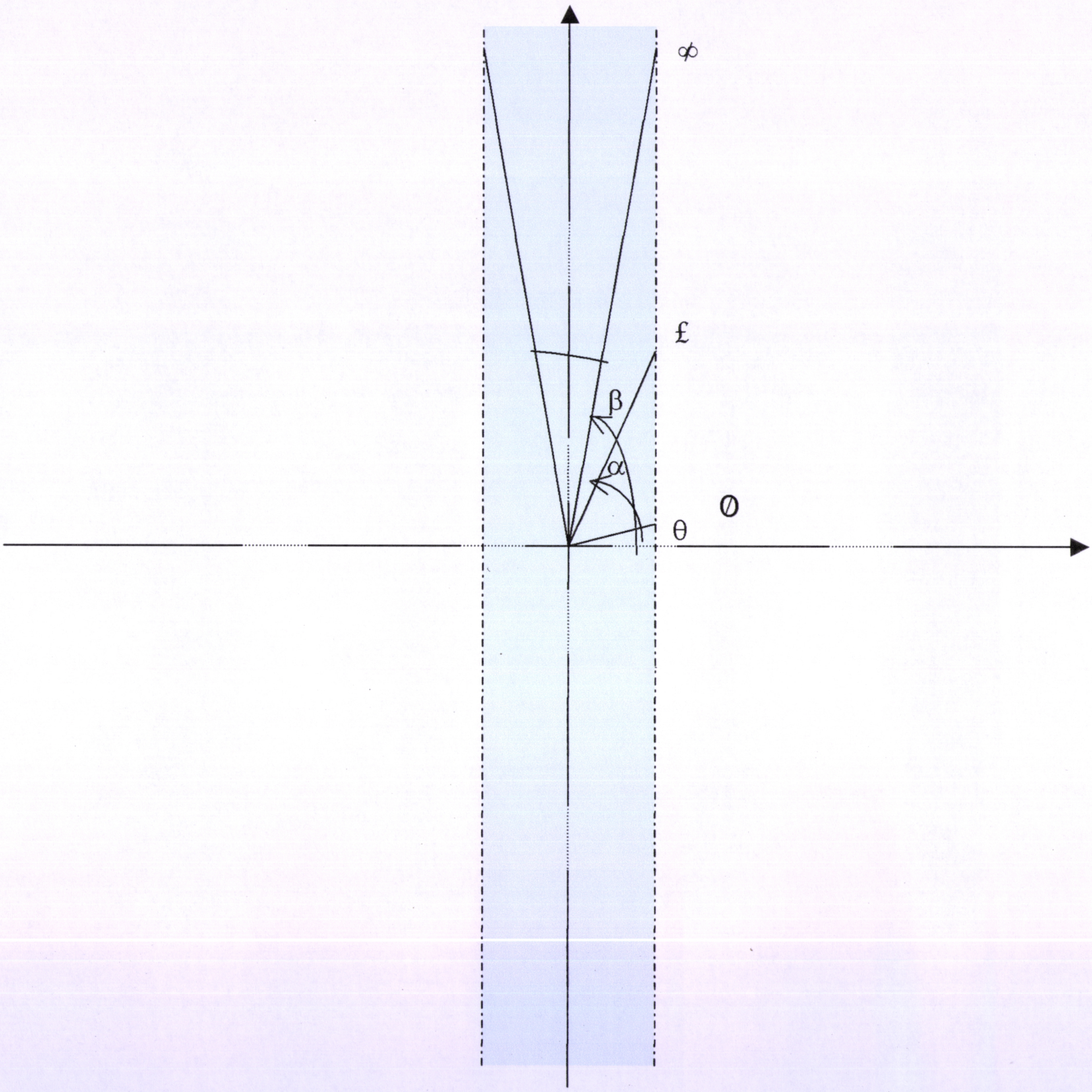
Não é um neutrice porque $(0,0) \notin \mathcal{B}$.

3) $C \equiv \left\{ (x,y) : y = \frac{\pm @}{x}, x \in \Re \right\}$



Não é um neutrice porque $(0,0) \notin C$.

4) $\mathcal{D} \equiv \{(x,y): x \simeq 0, y \in \Re\} = \emptyset \times \Re$



Calculemos alguns tamanhos. Temos que

$$\mathbf{T}_\theta \equiv \left\{ \sqrt{x^2 + y^2} : (x,y) \in \mathcal{D}, tg\theta = \frac{y}{x} \right\}$$

Note-se que, se escrevermos $y = xtg\theta$, como $x \simeq 0$ tem-se $y \in \Re$, mas se escrevermos $x = \dfrac{y}{tg\theta}$, como $y \in \Re$, se $y \in @$, e $tg\theta \in @$ vem $x \in @$, o que é absurdo.

Portanto vamos escrever sempre $y=xtg\theta$ ou $tg\theta = \frac{y}{x}$.

i. $\varphi \simeq 0$

Pelo lema 1, $\varphi \simeq 0 \rightarrow tg\varphi \simeq (1+\oslash)\varphi$, logo $\frac{y}{x} \simeq (1+\oslash)\varphi$. Donde,

$$\mathbf{T}_\varphi \equiv \left\{\sqrt{x^2+y^2} : x \in \oslash, \frac{y}{x} \simeq \varphi(1+\oslash)\right\} \equiv \left\{|x|\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} : x \in \oslash, \frac{y}{x} \simeq \varphi(1+\oslash)\right\} \equiv$$

$$\equiv \left\{|x|\sqrt{1+\varphi^2(1+\oslash)} : x \in \oslash\right\} \equiv \oslash^+ \sqrt{1+\varphi^2(1+\oslash)} \equiv \oslash^+ (1+\oslash) \equiv \oslash^+ \text{, porque } \varphi \simeq 0.$$

ii. $\alpha \in @$

Como $\frac{\pi}{2} \in @$, e $tg\frac{\pi}{2} \simeq \not\infty$, se $\alpha \notin \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+\oslash\right]$, então $tg\alpha = @$.

Consideremos então $\alpha \in @$, $\alpha \notin \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+\oslash\right]$. Temos que $\frac{y}{x} = @ \leftrightarrow y = x@$

$$\mathbf{T}_\alpha \equiv \left\{\sqrt{x^2+y^2} : x \in \oslash, y = x@\right\} \equiv \left\{\sqrt{x^2+x^2@} : x \in \oslash\right\} \equiv \left\{|x|\sqrt{1+@} : x \in \oslash\right\} \equiv$$

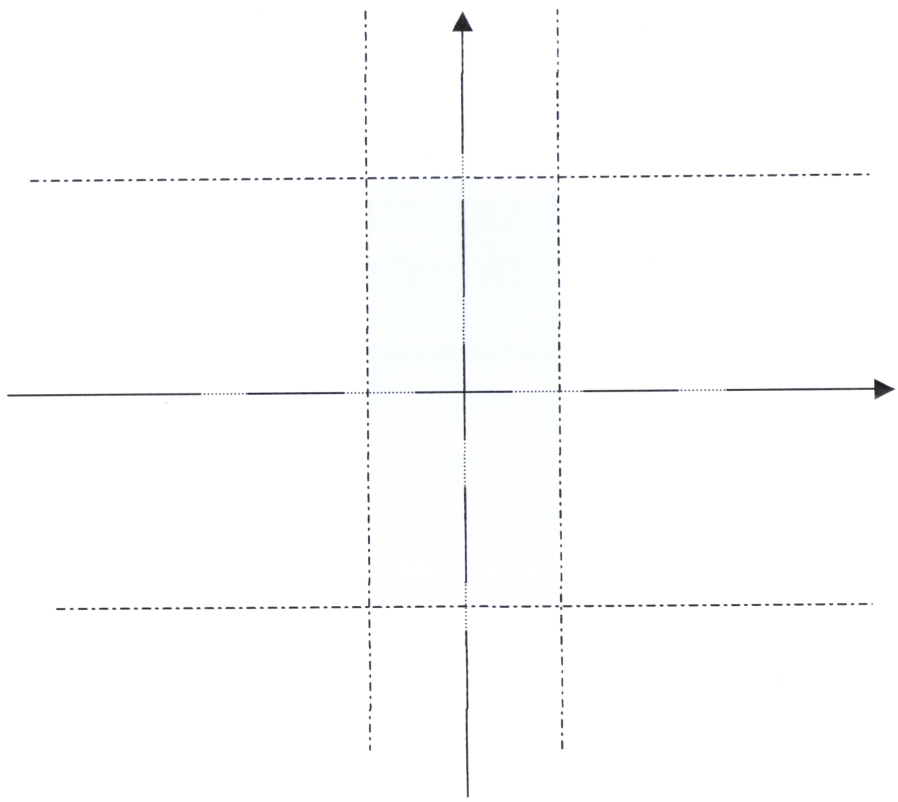
$\equiv \oslash^+ \sqrt{(1+@)} \equiv \oslash^+ @ \equiv \oslash^+$, pois $@^2 \equiv @$, $\sqrt{(1+@)} \equiv @$ e usando a Proposição 2.2.4.

Consideremos agora $\beta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+\oslash\right]$. Temos que $tg\beta = \omega$, onde $\omega \simeq +\infty$, e portanto, pela nota 3.2, vem

$$\mathbf{T}_\beta \equiv \mathcal{R}_{\pi/2} \equiv \left\{k > 0 : \left(k\cos\frac{\pi}{2}, k\,sen\frac{\pi}{2}\right) \in \oslash \times \Re\right\} \equiv \left\{k > 0 : (0,k) \in \oslash \times \Re\right\}$$

$$\equiv \Re$$

5) $\mathcal{E} \equiv \{(x,y) : x \simeq 0 \text{ , } y \text{ limitado}\} = \emptyset \times £$



Calculemos tamanhos. Temos que $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}$, logo

i. Se $\varphi \simeq 0$ então estamos na situação do exemplo 4, logo $\mathbf{T}_\varphi \equiv \emptyset^+$.

Se $\alpha \in @$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, $\alpha \not\simeq \pi$ então $tg\alpha \in @$, estamos também na situação do exemplo 4,

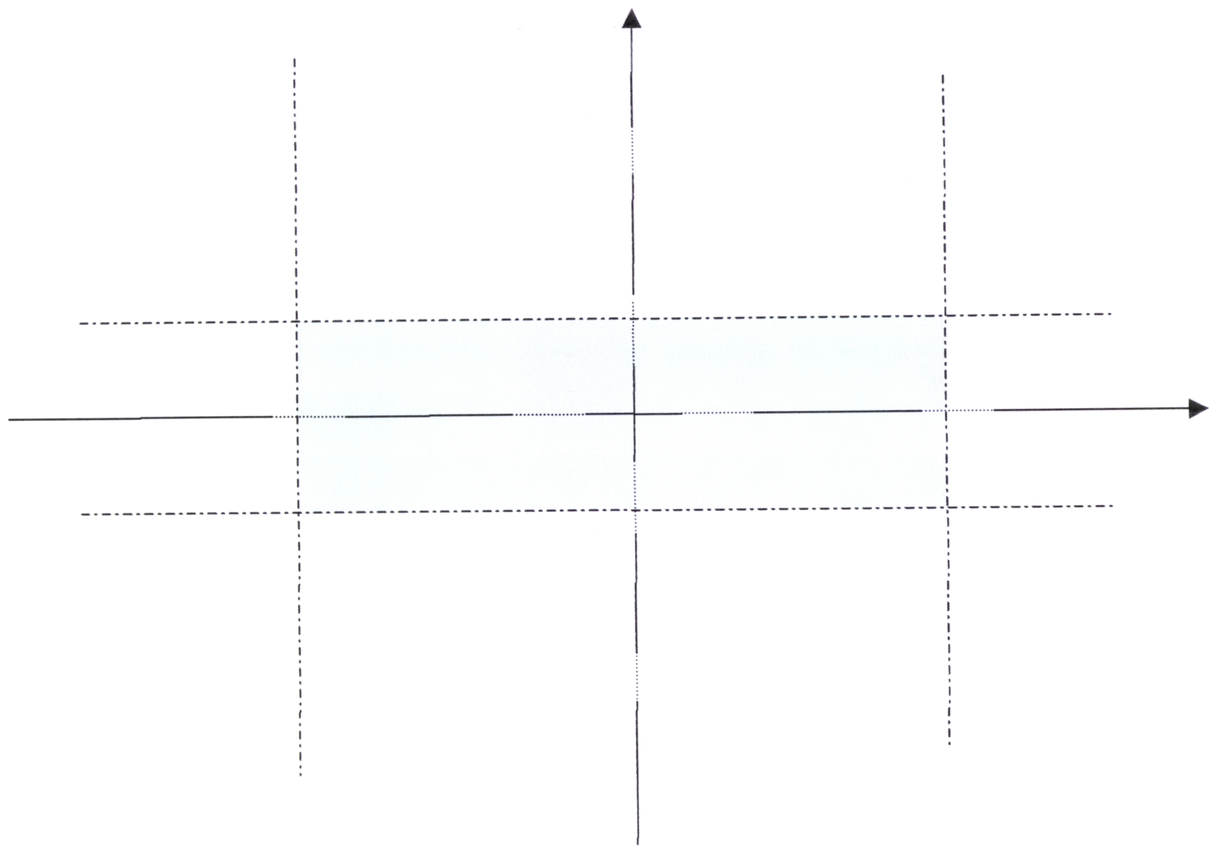
e portanto $\mathbf{T}_\alpha \equiv \emptyset^+$

ii. Se $\beta = \frac{\pi}{2}$, então $tg\beta \simeq +\infty$, e o tamanho vertical de $\mathcal{E}$ é £. Então pela nota 3.2,

vem

$$\mathbf{T}_\beta \equiv \mathcal{R}_{\pi/2} \equiv \left\{ k > 0 : \left(k\cos\frac{\pi}{2}, k\,sen\frac{\pi}{2} \right) \in \emptyset \times £ \right\} \equiv \{ k > 0 : (0,k) \in \emptyset \times £ \} \equiv £^+.$$

6) $\mathcal{F} \equiv \{(x,y) : y \simeq 0 \text{ , } x \text{ limitado}\} \equiv £ \times \emptyset$



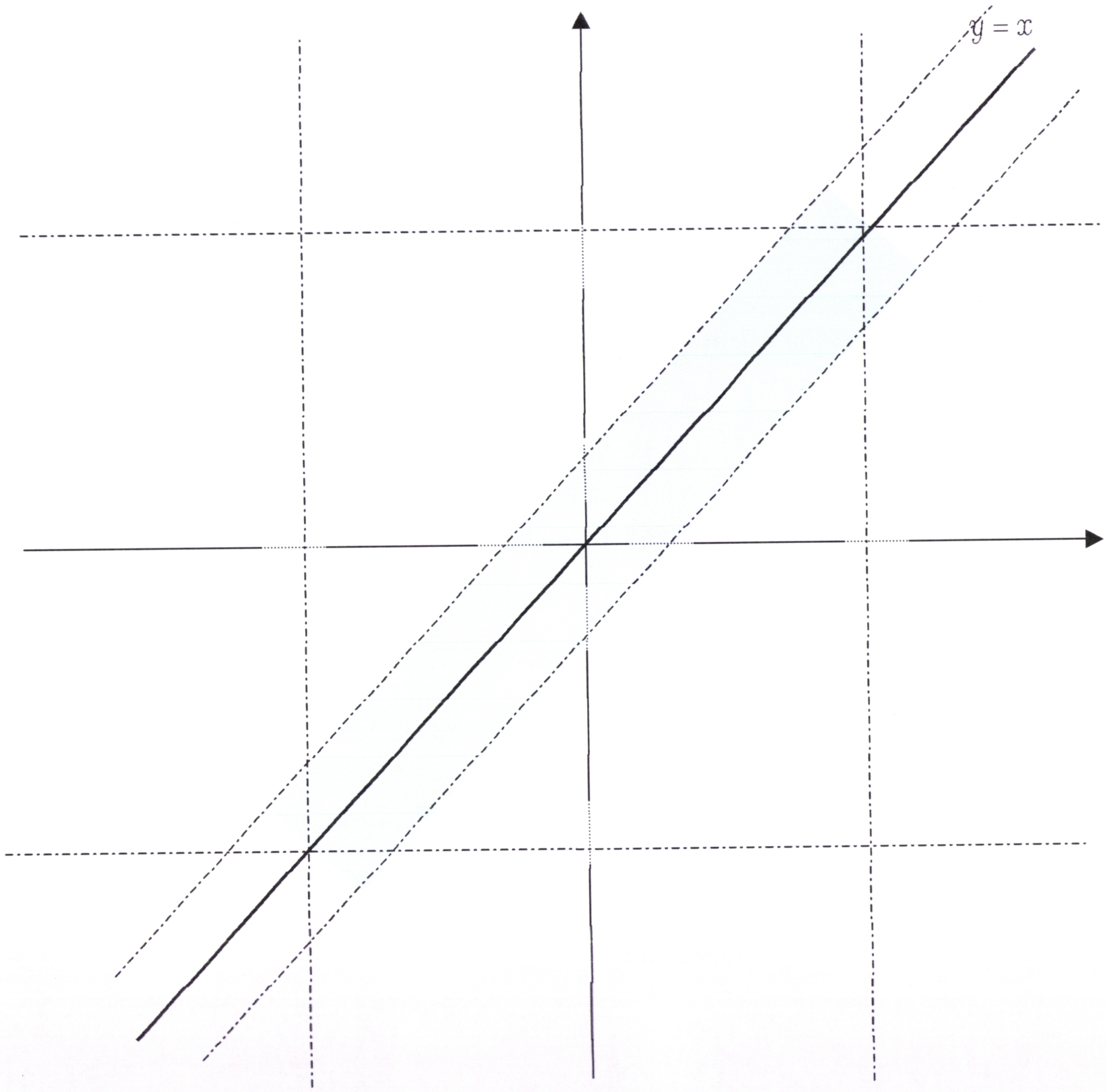
Temos que $£\times\emptyset \equiv R_{\frac{\pi}{2}}(\emptyset\times£)$, logo pela Proposição 3.2.2, denotando $\mathcal{F}$=$£\times\emptyset$, $\mathcal{E}$= $\emptyset\times£$ e usando os resultados do exemplo 5, temos que

i. Se $\varphi\simeq 0$ então $\varphi+\frac{\pi}{2}\simeq\frac{\pi}{2}$, e portanto $\mathbf{T}_{\varphi,\mathcal{E}}$= $\mathbf{T}_{\varphi+\frac{\pi}{2},\mathcal{F}}$ $=£^{+}$.

ii. Se $\alpha\in@$, $\alpha\not\simeq\pi$, $\alpha\not\simeq\frac{\pi}{2}$então $tg\alpha\in@$. Temos que $\alpha+\frac{\pi}{2}\in@$, $\alpha+\frac{\pi}{2}\not\simeq\frac{\pi}{2}$, $\alpha+\frac{\pi}{2}\not\simeq\pi$, logo $\mathbf{T}_{\alpha,\mathcal{E}}$= $\mathbf{T}_{\alpha+\frac{\pi}{2},\mathcal{F}}$ $=\emptyset^{+}$.

iii. Se $\beta\simeq\frac{\pi}{2}$, então $tg\beta\simeq+\infty$. Seja ω, tal que $tg\beta$=ω. Então $\beta+\frac{\pi}{2}\simeq\pi$, e como $\mathbf{T}_{\pi}$=$\mathbf{T}_{0}$, logo $\mathbf{T}_{\beta,\mathcal{E}}$= $\mathbf{T}_{\beta+\frac{\pi}{2},\mathcal{F}}$ $=\emptyset^{+}$

7) $\mathcal{G} \equiv \{(x,y) : x \in \pounds,\ y = x + \emptyset\}$



Em primeiro lugar, vejamos que $\mathcal{G} \equiv R_{\frac{\pi}{4}}(\pounds \times \emptyset)$.

Para tal, note-se que $R_{\frac{\pi}{4}}(\pounds \times \emptyset) \equiv \{(x,y) : d((x,y), \iota_{\pi/4}) \simeq 0\}$, ou seja, é o conjunto de todas as distâncias infinitésimais à recta com declive $\frac{\pi}{4}$.

Então $d((x,y), l_{\pi/4}) \simeq 0$

Como $l_{\pi/4} \equiv \{(a,a) : a \in £\}$, então

$$d((x,y), l_{\pi/4}) \simeq 0 \leftrightarrow y \simeq x \leftrightarrow y \simeq x + \varepsilon, \text{com } \varepsilon \simeq 0$$

Logo, $(x,y) \in \mathcal{G}$.

Seja agora $(x,y) \in \mathcal{G}$ qualquer. Então $y = x + \emptyset$, ou seja,

$$y \simeq x + \varepsilon, \text{com } \varepsilon \simeq 0 \leftrightarrow y \simeq x$$

Logo $d((x,y), l_{\pi/4}) \simeq 0$, e portanto, $(x,y) \in R_{\frac{\pi}{4}}(£ \times \emptyset)$.

Provámos então que $\mathcal{G} \equiv R_{\frac{\pi}{4}}(£ \times \emptyset)$

Então pela Proposição 3.2.2, denotando $\mathcal{F} = £ \times \emptyset$ e usando os resultados do exemplo 6, temos que

i. Se $\varphi \simeq 0$ então $\varphi + \frac{\pi}{4} \simeq \frac{\pi}{4}$, e portanto $\mathbf{T}_{\varphi,\mathcal{G}} = \mathbf{T}_{\varphi+\frac{\pi}{4},\mathcal{F}} = \emptyset^+$.

ii. Se $\alpha \in @$, $\alpha \not\simeq \pi$, $\alpha \not\simeq \frac{\pi}{2}$ então $tg\alpha \in @$. Temos que distinguir dois casos

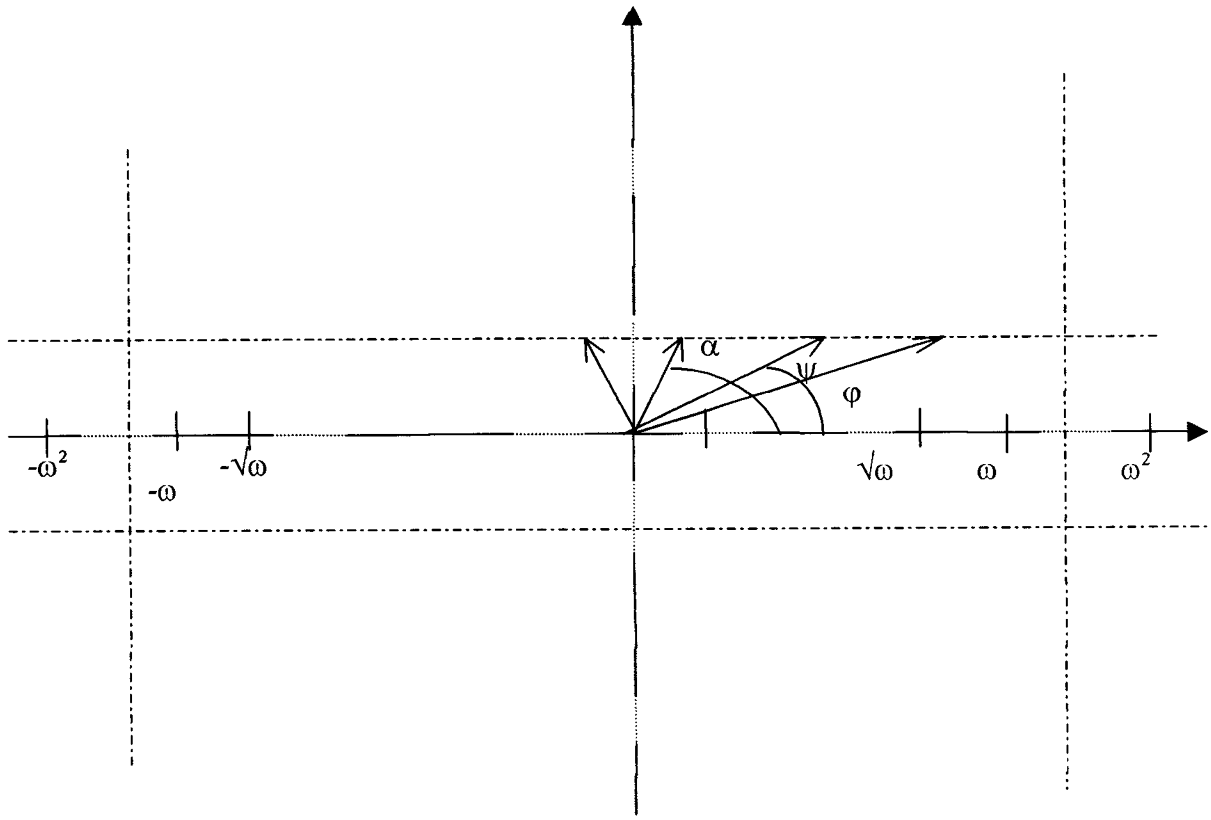
   1. $\alpha \simeq \frac{\pi}{4}$, então $\mathbf{T}_{\alpha,\mathcal{G}} = \mathbf{T}_{0,\mathcal{F}} = £^+$, porque é o eixo sobre o qual fazemos a rotação.

   2. $\alpha \not\simeq \frac{\pi}{4}$, então $\alpha + \frac{\pi}{4} \in @$ e $\alpha + \frac{\pi}{4} \not\simeq \frac{\pi}{2}$, logo $\mathbf{T}_{\alpha,\mathcal{G}} = \mathbf{T}_{\alpha+\frac{\pi}{4},\mathcal{F}} = \emptyset^+$

iii. Se $\beta \simeq \frac{\pi}{2}$, então $\beta + \frac{\pi}{4} \simeq \frac{3\pi}{4} \in @$, logo $\mathbf{T}_{\beta,\mathcal{G}} = \mathbf{T}_{\beta+\frac{\pi}{4},\mathcal{F}} = \emptyset^+$

iv. Se $\psi \simeq \pi$, então $\psi + \frac{\pi}{4} \in @$, logo $\mathbf{T}_{\psi,\mathcal{G}} = \mathbf{T}_{\psi+\frac{\pi}{4},\mathcal{F}} = \emptyset^+$.

8) $\mathcal{H} \equiv £\omega \times \emptyset$, $\omega \simeq +\infty$



Vamos determinar tamanhos segundo alguns ângulos.

Temos que

$$\mathbf{T}_\theta \equiv \left\{ \sqrt{x^2 + y^2} : (x,y) \in £\omega \times \emptyset, tg\theta = \frac{y}{x} \right\}$$

Note-se que, se escrevermos $x = \frac{y}{\omega'}$, não teremos problemas uma vez que $\frac{y}{\omega'} \in £\omega$, pois $y \in \emptyset$. Mas, se escrevermos $y = x tg\theta$, se $tg\alpha = \omega'$, para algum $\omega' \simeq +\infty$, então como $x \in £\omega$, se $x = \omega'$, viria $y = \omega'^2$, o que é absurdo pois $y \in \emptyset$

Portanto vamos escrever sempre $x = \frac{y}{tg\theta}$ ou $tg\theta = \frac{y}{x}$, no cálculo dos tamanhos.

i. Se $\varphi \simeq 0$ então $tg\varphi \simeq \varphi(1+\oslash)$, donde

$$\mathbf{T}_{\varphi} \equiv \left\{\sqrt{x^2+y^2} : (x,y) \in £\omega \times \oslash, tg\varphi = \frac{y}{x}\right\} \equiv \left\{|x|\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} : (x,y) \in £\omega \times \oslash, \varphi(1+\oslash) = \frac{y}{x}\right\}$$

$$\equiv £^{+} \,|\, \omega \,|\, \sqrt{1+\varphi^2(1+\oslash)} \equiv £^{+} \,|\, \omega \,|\, (1+\oslash)$$

Vejamos os tamanhos de algumas direcções infinitesimais

Seja $\varphi = \frac{1}{\omega}$, então $\mathbf{T}_{\varphi} \equiv \left\{\sqrt{x^2+y^2} : (x,y) \in £\omega \times \oslash, \frac{1}{\omega}(1+\oslash) = \frac{y}{x}\right\} \equiv$

$$\equiv \left\{\sqrt{x^2+y^2} : (x,y) \in £\omega \times \oslash, x = \frac{y\omega}{(1+\oslash)} = y\omega(1+\oslash)\right\} \equiv$$

$$\equiv \sqrt{\oslash^2\omega^2(1+\oslash)+\oslash^2} \equiv \oslash^{+}|\omega|\sqrt{(1+\oslash)+\frac{1}{\omega^2}} \equiv \oslash^{+}|\omega|(1+\oslash) \equiv \oslash^{+}|\omega|$$

Seja $\varphi = \frac{1}{\sqrt{\omega}}$, então $\mathbf{T}_{\varphi} \equiv \left\{\sqrt{x^2+y^2} : (x,y) \in £\omega \times \oslash, \frac{1}{\sqrt{\omega}}(1+\oslash) = \frac{y}{x}\right\} \equiv$

$$\equiv \left\{\sqrt{x^2+y^2} : (x,y) \in £\omega \times \oslash, x = \frac{y\sqrt{\omega}}{(1+\oslash)} = y\sqrt{\omega}(1+\oslash)\right\} \equiv$$

$$\equiv \sqrt{\oslash^2\omega(1+\oslash)+\oslash^2} \equiv \oslash^{+}\sqrt{|\omega|}(1+\oslash) \equiv \oslash^{+}\sqrt{|\omega|}$$

ii. Se $\alpha \in @$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, $\alpha \not\simeq \pi$ então $tg\alpha \in @$, logo

$$\mathbf{T}_{\alpha} \equiv \left\{\sqrt{x^2+y^2} : (x,y) \in £\omega \times \oslash, tg\alpha = \frac{y}{x}\right\} \equiv \left\{|y|\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}} : £\omega \times \oslash, \frac{y}{x} = \frac{1}{@} = @\right\}$$

$$\equiv \oslash^{+}\sqrt{1+@} \equiv \oslash^{+} @ \equiv \oslash^{+}$$

iii. Se $\beta = \frac{\pi}{2}$, então $tg\beta$ não está definida e portanto, pela nota 3.2, temos

$$\mathbf{T}_{\beta} \equiv \mathcal{R}_{\pi/2} \equiv \left\{k > 0 : \left(k\cos\frac{\pi}{2}, k\,sen\frac{\pi}{2}\right) \in £\omega \times \oslash\right\} \equiv \{k > 0 : (0,k) \in £\omega \times \oslash\}$$

$$\equiv \oslash^{+}.$$

9) $I \equiv £ e^{-@/\varepsilon} \times \Re$, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \simeq 0$

Determinemos tamanhos:

i. Se $\varphi \simeq 0$, então $tg\varphi \simeq \varphi(1+\emptyset)$, donde

$$T_\varphi \equiv \left\{ \sqrt{x^2+y^2} : (x,y) \in £e^{-@/\varepsilon} \times \Re, tg\varphi = \frac{y}{x} \right\} \equiv$$

$$\equiv \left\{ \sqrt{x^2+y^2} : (x,y) \in £e^{-@/\varepsilon} \times \Re, \frac{y}{x} = \varphi(1+\emptyset) \right\} \equiv \left\{ |x|\sqrt{1+\varphi^2(1+\emptyset)} : x \in £e^{-@/\varepsilon} \right\}$$

$$\equiv £^+ e^{-@/\varepsilon} \sqrt{1+\varphi^2(1+\emptyset)} \equiv £^+ e^{-@/\varepsilon} (1+\emptyset)$$

ii. Se $\alpha \in @$, $\alpha \not\simeq \pi$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, então $tg\alpha \in @$, logo

$$T_\alpha \equiv \left\{ \sqrt{x^2+y^2} : (x,y) \in £e^{-@/\varepsilon} \times \Re, tg\alpha = \frac{y}{x} \right\} \equiv$$

$$\equiv \left\{ \sqrt{x^2+y^2} : (x,y) \in £e^{-@/\varepsilon} \times \Re, \frac{y}{x} = @ \right\} \equiv \left\{ |x|\sqrt{1+@} : x \in £e^{-@/\varepsilon} \right\}$$

$\equiv £^+ e^{-@/\varepsilon} @ \equiv £^+ e^{-@/\varepsilon}$, pois, pela $@A \equiv A$, para todo o neutrix A.

iii. Se $\beta = \frac{\pi}{2}$, então $tg\beta = +\infty$, logo

$$T_\beta \equiv \mathcal{R}_{\pi/2} \equiv \left\{ k > 0 : \left(k\cos\frac{\pi}{2}, k sen\frac{\pi}{2} \right) \in £e^{-@/\varepsilon} \times \Re \right\} \equiv \left\{ k > 0 : (0,k) \in £e^{-@/\varepsilon} \times \Re \right\}$$

$\equiv \Re^+$.

10) $\mathcal{J} \equiv £e^{\omega £} \times £e^{-\omega @}$, $\omega \simeq +\infty$.

Determinemos tamanhos:

i. Se $\varphi \simeq 0$, então $tg\varphi \simeq \varphi\,(1+\oslash)$.

Note-se que o vector $\begin{pmatrix}\omega\\ \frac{1}{\omega}\end{pmatrix} \notin \mathcal{J}$, de facto, os ângulos $\varphi \simeq 0$ tais que $\mathbf{T}_\varphi \subseteq \mathcal{J}$ são da ordem de grandeza de $e^{-\not{\infty}\omega}$. Logo

$$\mathbf{T}_\varphi \equiv \left\{\sqrt{x^2+y^2} : (x,y) \in £e^{\omega £} \times £e^{-\omega @}, \frac{y}{x} = e^{-\not{\infty}\omega}(1+\oslash)\right\}$$

$$\equiv \left\{\sqrt{x^2+\left(xe^{-\not{\infty}\omega}\right)^2(1+\oslash)} : x \in £e^{\omega £}\right\} \equiv \sqrt{\left(£e^{\omega £}\right)^2+\left(£e^{\omega £}e^{-\not{\infty}\omega}\right)^2(1+\oslash)}$$

$$\equiv \sqrt{\left(£e^{\omega £}\right)^2+\left(£e^{\omega £}e^{-\not{\infty}\omega}\right)^2} \equiv \sqrt{\left(£e^{\omega £}\right)^2+\left(£e^{-\not{\infty}\omega}\right)^2} \equiv £^+ e^{\omega £}$$

ii. Se $\alpha \in @$, temos que para todo $\alpha \not\simeq \pi$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, então $tg\alpha \in @$, logo

Note-se que como $(x,y) \in £e^{\omega £} \times £e^{-\omega @}$ e $tg\alpha = \frac{y}{x}$ então se escrevermos $x = \frac{y}{tg\alpha}$, não teremos problemas uma vez que $x = \frac{y}{tg\alpha} \in £e^{-\omega @} \subset £e^{\omega £}$. Mas, se escrevermos $y = x tg\alpha$, então como $x \in £e^{\omega £}$, viria $x tg\alpha \in £e^{\omega £}$ e $y \in £e^{\omega £}$, o que é absurdo pois $y \in £e^{-\omega @}$. Logo,

$$\mathbf{T}_\alpha \equiv \left\{\sqrt{x^2+y^2} : (x,y) \in £e^{\omega £} \times £e^{-\omega @}, tg\alpha = \frac{y}{x}\right\} \equiv$$

$$\equiv \left\{\sqrt{x^2+y^2} : (x,y) \in £e^{\omega £} \times £e^{-\omega @}, x = \frac{y}{@} = @y\right\} \equiv \left\{\sqrt{(y@)^2+y^2} : y \in £e^{-\omega @}\right\}$$

$$\equiv \sqrt{\left(£e^{-\omega @}@\right)^2+\left(£e^{-\omega @}\right)^2} \equiv £^+ e^{-\omega @}.$$

iii. Se $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, então, pela nota 3.2, vem

$$\mathbf{T}_\beta \equiv \mathcal{R}_{\pi/2} \equiv \left\{ k > 0 : \left(k\cos\frac{\pi}{2}, k sen\frac{\pi}{2} \right) \in £e^{\omega £} \times £e^{\cdot\omega @} \right\} \equiv \left\{ k > 0 : (0,k) \in £e^{\omega £} \times £e^{\cdot\omega @} \right\}$$

$$\equiv £^{+} e^{\cdot\omega @}$$

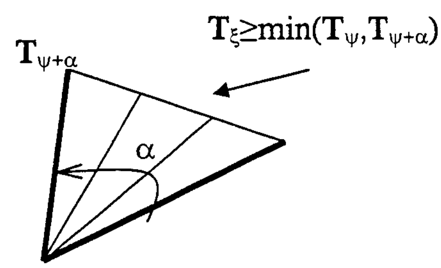
3.4. PROPRIEDADES DOS TAMANHOS

Nota 3.5: Seja α uma ângulo qualquer num neutrix $\mathscr{E}$. Temos que $\mathbf{T}_\alpha$ é um semi-grupo aditivo, para todo o α.

1) $0 \in \mathbf{T}_\alpha$, pois todas as direcções passam pela origem, por definição.
2) Se $x \in \mathbf{T}_\alpha$, então $\exists y \in \mathscr{E} \cap l_\alpha$, tal que $\|y\| = x$. Como $y \in \mathscr{E}$, então $£y \in \mathscr{E}$, e $\|£y\| = £^+\|y\| = £^+x$. Então, $£^+x \in \mathbf{T}_\alpha$, pois $£y \in \mathscr{E}$, e portanto $£y \in \mathscr{E} \cap l_\alpha$.

PROPRIEDADE **3.4.1**

Seja $\mathscr{E}$ um neutrice. Sejam α,ψ direcções em $\mathscr{E}$ tais que $0 \leq \alpha \lessapprox \pi$ e ξ uma ângulo em $\mathscr{E}$ tal que $\xi \in [\psi, \psi+\alpha]$. Então $\mathbf{T}_\xi \geq \min(\mathbf{T}_\psi, \mathbf{T}_{\psi+\alpha})$.

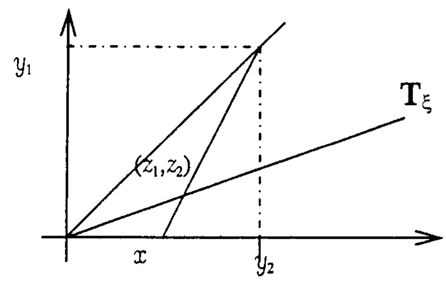


Demonstração:

Seja α, $0 \leq \alpha \lessapprox \pi$, uma ângulo em $\mathscr{E}$.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\psi=0$ e que $\mathbf{T}_0$ é minimal. Caso contrário, poderíamos considerar uma rotação de ψ que as propriedades se mantém, uma vez que $\mathscr{E}$ é um subgrupo aditivo convexo de $\Re^2$.

Queremos mostrar que, para qualquer $\xi \in [0,\pi]$, $\mathbf{T}_\xi \geq \mathbf{T}_0$.

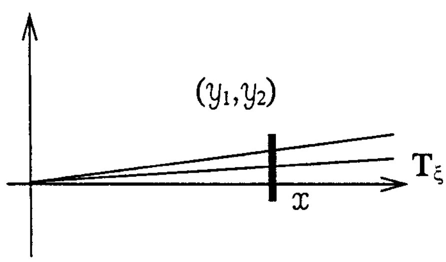


Ou seja, para qualquer $x \in \mathbf{T}_0$, $x>0$, existe $(z_1,z_2) \in \mathscr{C}$ tal que $\frac{z_1}{z_2} = tg\xi$ e $\sqrt{z_1{}^2 + z_2{}^2} \geq x$.

Seja $(y_1,y_2) \in \mathscr{C}$ tal que $\sqrt{y_1{}^2 + y_2{}^2} \geq x$, $\frac{y_1}{y_2} = tg\alpha$ e $\sqrt{y_1{}^2 + y_2{}^2} \in \mathbf{T}_\alpha$.

Distinguimos 2 casos. Seja $x>0$.

1) $\alpha \simeq 0$



Então, por hipótese em $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, temos que $\begin{cases} y_1 = (1+\emptyset)x \\ y_2 = \emptyset x \end{cases}$.

Como $\mathscr{C}$ é convexo,

$$\lambda\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + (1-\lambda)\begin{pmatrix} (1+\emptyset)x \\ \emptyset x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x + (1-\lambda)(1+\emptyset)x \\ (1-\lambda)\emptyset x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+\emptyset)x \\ \emptyset x \end{pmatrix} \in \mathscr{C}.$$

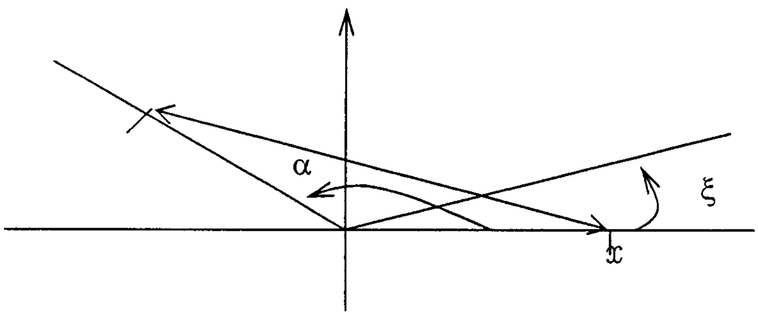
Então,

$$\sqrt{(1+\emptyset)x^2 + \emptyset x^2} = |x|\sqrt{1+\emptyset},$$

logo, tomando $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} (1+\emptyset)x \\ \emptyset x \end{pmatrix}$, temos que $\left\|\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right\| \geq x$, com $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{T}_\xi$ e portanto

$\mathbf{T}_\xi > \mathbf{T}_0$.

2) Suponhamos $\alpha \not\simeq 0$, $0 \lesssim \alpha \lesssim \pi$.



Então $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} £x \\ @x \end{pmatrix}$. Sejam $\iota \in £$, $a \in @$ tais que $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \iota x \\ a x \end{pmatrix}$.

Como $\mathscr{E}$ é convexo,

$$\lambda\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + (1-\lambda)\begin{pmatrix} \iota x \\ a x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x + (1-\lambda)\iota x \\ (1-\lambda)a x \end{pmatrix} \in \mathscr{E} .$$

(ι) Se $\lambda \simeq 0$, $1-\lambda \in @$, logo

$$\begin{pmatrix} \lambda x + (1-\lambda)£x \\ (1-\lambda)@x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} £x \\ @x \end{pmatrix}.$$

Sejam $\iota \in £$, $a \in @$ quaisquer. Temos

$$\sqrt{a^2x^2 + \iota^2x^2} = |x|\sqrt{a^2 + \iota^2} \ ,£$$

logo, tomando $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{a^2+\iota^2}}\begin{pmatrix} \iota x \\ a x \end{pmatrix}, \iota \in £, a \in @$, tem-se, $\left\|\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right\| \geq x$.

(ιι) Se $\lambda \not\simeq 0$, $1-\lambda \simeq 0$, então

$$\begin{pmatrix} \lambda x + (1-\lambda)£x \\ (1-\lambda)@x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x + \emptyset x \\ \emptyset x \end{pmatrix},$$

e tomando $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \lambda x + \oslash x \\ \oslash x \end{pmatrix}$ tem-se o resultado por 1).

(ιιι) Se $\lambda, 1\text{-}\lambda \in \text{@}$,

$$\begin{pmatrix} \lambda x + (1-\lambda)\pounds x \\ (1\text{-}\lambda)\text{@}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pounds x \\ \text{@}x \end{pmatrix},$$

e tomando $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \dfrac{2}{\sqrt{a^2+\iota^2}}\begin{pmatrix} \iota x \\ ax \end{pmatrix}, \iota \in \pounds,\ a \in \text{@}$, tem-se o resultado por 2), (ι).

$$\therefore\ T_\xi \geq \min(T_\psi, T_{\psi+\alpha}).$$

$\because$

COROLÁRIO **3.4.1**

Se, $T_{\pi/2} \leq T_0$, então temos que, para qualquer ângulo α com $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, $T_\alpha \geq T_{\pi/2}$.

Demonstração:

Consequência imediata da propriedade anterior.

PROPRIEDADE **3.4.2**

Sejam $\mathscr{E}$ um neutrice e α um ângulo em $\mathscr{E}$ tal que $0 \lneqq \alpha \lneqq \pi$. Se $T_\alpha < T_0$ então $T_\psi \geq T_\alpha$, para todo ψ e T_α é minimal.

Demonstração:

Seja α tal que $0 \lneqq \alpha \lneqq \pi$ e $T_\alpha < T_0$. Então, pela propriedade anterior, para qualquer ângulo ξ em $\mathscr{E}$, com $\xi \in [0,\alpha]$, tem-se $T_\xi \geq \min(T_0, T_\alpha) = T_\alpha$.

Seja α tal que $\alpha \lneqq \pi\text{-}\alpha \lneqq \pi$. Se $\varphi = \pi - \alpha$, então pela proposição anterior, para qualquer ângulo ξ em $\mathscr{E}$ com $\xi \in [\alpha, \alpha+\varphi]$, ou seja $\xi \in [\alpha, \pi]$, tem-se $T_\xi \geq \min(T_\alpha, T_\pi)$.

Mas como $T_\pi = T_0$, e $T_\alpha < T_0$, então $T_\xi \geq T_\alpha$.

Logo, T_α é minimal.

∵

LEMA 3.4.1

Sejam $\mathscr{E}$ um neutrice de $\Re^2$ e $\mathfrak{B}=\{\mathfrak{b} : (0,\mathfrak{b}) \in \mathscr{E}\}$. Então $\mathfrak{B}$ é um subgrupo convexo de $\Re^2$.

Demonstração:

Seja $\mathscr{E}$ um neutrice de $\Re^2$ e $\mathfrak{B}=\{\mathfrak{b} : (0,\mathfrak{b}) \in \mathscr{E}\}$.

Queremos mostrar que $\mathfrak{B}$ é um subgrupo convexo de $\Re^2$.

Obviamente, $0 \in \mathfrak{B}$, pois $\mathscr{E}$ é um grupo, e $\mathfrak{B} \subseteq \Re^2$.

Seja $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}$ qualquer. Então $(0,\mathfrak{b}) \in \mathscr{E}$, por definição de $\mathfrak{B}$.

Como $\mathscr{E}$ é grupo, então $(0,-\mathfrak{b}) \in \mathscr{E}$, donde $-\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}$.

Sejam $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 \in \mathfrak{B}$ quaisquer. Então $(0,\mathfrak{b}_1),(0,\mathfrak{b}_2) \in \mathscr{E}$, por definição de $\mathfrak{B}$. Como $\mathscr{E}$ é grupo, então

$$(0,\mathfrak{b}_1)+(0,\mathfrak{b}_2) = (0,\mathfrak{b}_1+\mathfrak{b}_2) \in \mathscr{E}$$

donde $\mathfrak{b}_1+\mathfrak{b}_2 \in \mathfrak{B}$. Portanto, $\mathfrak{B}$ é grupo.

Por outro lado, como $\mathscr{E}$ é convexo, tem-se

$$\forall \lambda \in (0,1),\ \lambda(0,\mathfrak{b}_1)+(1-\lambda)(0,\mathfrak{b}_2) = (0,\lambda\mathfrak{b}_1+(1-\lambda)\mathfrak{b}_2) \in \mathscr{E}$$

donde, $\lambda\mathfrak{b}_1+(1-\lambda)\mathfrak{b}_2 \in \mathfrak{B}$. E portanto $\mathfrak{B}$ é convexo.

∴ $\mathfrak{B}$ é um grupo convexo, ou seja, $\mathfrak{B}$ é um neutrice.

∵

Nota 3.6: O conjunto $\mathfrak{B}$ pode ser encarado como o conjunto de todas as distâncias da origem à fronteira de $\mathscr{E}$ na ângulo $\frac{\pi}{2}$, ou seja, é a *direcção vertical* de $\mathscr{E}$, que também se pode escrever $\mathcal{A}_{\pi/2}$.

Corolário 3.4.2

Toda a direcção de $\mathscr{E}$ é um grupo convexo.

Demonstração:

Note-se, em particular, que o conjunto $\mathfrak{B}$ definido no lema anterior, é a direcção de $\mathscr{E}$ por $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Como $\mathscr{E}\subseteq\Re^2$, e $\mathfrak{B}\subseteq\Re^2$, então para qualquer ângulo $\psi\in[0,\pi]$, a direcção de $\mathscr{E}$ por φ pode ser descrita como uma rotação de $\mathfrak{B}$, e portanto é um subgrupo convexo de $\Re^2$.

$\because$

Vejamos alguns resultados no caso em que os neutrices não estão centrados com os eixos do plano.

PROPOSIÇÃO 3.4.1

Sejam $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \in \Re^2$ qualquer, e $\mathscr{E}$ um neutrix de $\Re^2$ qualquer.

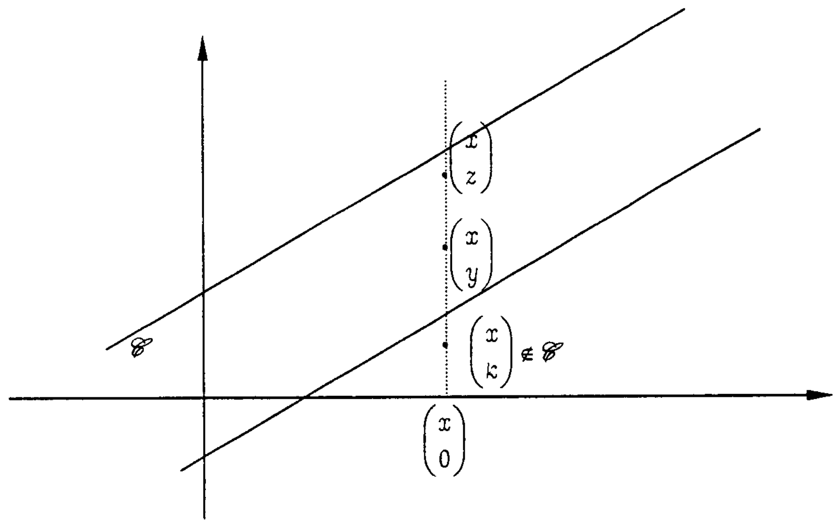
Definimos

$$\mathcal{P}_a = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ y \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{E} \right\}, \text{ e}$$

$$\tilde{\mathcal{T}}_a = \left\{ z - y : \begin{pmatrix} a \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_a \right\}.$$

Então

$$\tilde{\mathcal{T}}_a = \mathbf{T}_{\pi/2} \text{ ou } \tilde{\mathcal{T}}_a = \emptyset .$$



Demonstração:

Suponhamos que $\tilde{\mathcal{T}}_a \neq \emptyset$, e vejamos que $\tilde{\mathcal{T}}_a = \mathbf{T}_{\pi/2}$.

(i) Sejam $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{G}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_a$. Então, por definição de $\mathcal{P}_a$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathcal{G}$.

Como $\mathcal{G}$ é grupo aditivo, $\begin{pmatrix} a \\ y+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathcal{G}$.

Logo, por definição, $\begin{pmatrix} a \\ y+b \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_a$.

Então, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_a, \begin{pmatrix} a \\ y+b \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_a$, donde, por definição de $\tilde{\mathcal{T}}_a$, $y = y+b-y \in \tilde{\mathcal{T}}_a$, e portanto, $\mathbf{T}_{\pi/2} \subset \tilde{\mathcal{T}}_a$.

(ii) Sejam $\begin{pmatrix} a \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_a$, quaisquer. Então, por definição de $\tilde{\mathcal{T}}_a$, $y - z \in \tilde{\mathcal{T}}_a$.

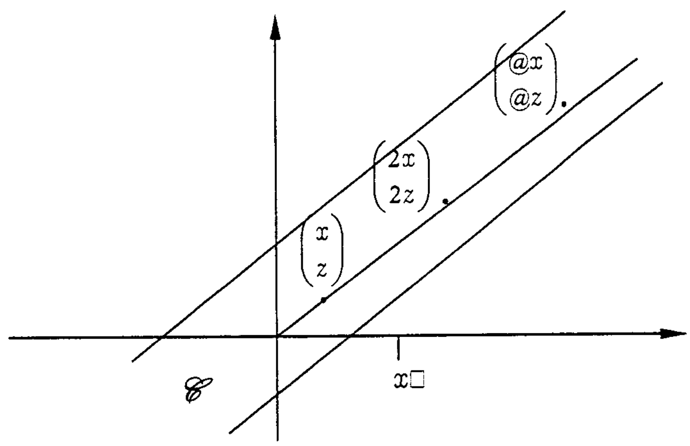
Por outro lado, e por definição de $\mathcal{P}_a$, $\begin{pmatrix} a \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{G}$, logo $\begin{pmatrix} 0 \\ y-z \end{pmatrix} \in \mathcal{G}$,

pois $\mathcal{G}$ é um grupo aditivo. Ou seja, $\begin{pmatrix} 0 \\ y-z \end{pmatrix} \in \mathbf{T}_{x/2}$, e portanto,

$\tilde{\mathcal{T}}_a \subset \mathbf{T}_{x/2}$.

Logo, provámos que $\tilde{\mathcal{T}}_a = \mathbf{T}_{x/2}$.

∵



PROPOSIÇÃO 3.4.2

Defina-se $\mathcal{M} = \{x : \tilde{\mathcal{T}}_x = \mathbf{T}_{x/2}\}$.

$@\mathcal{M} = \mathcal{M}$.

Demonstração:

Seja $x \in \mathcal{M}$.

Então $\tilde{\mathcal{T}}_x = \mathbf{T}_{x/2}$, e existe z tal que $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{G}$. Como $\mathcal{G}$ é um grupo aditivo, $\begin{pmatrix} @x \\ @z \end{pmatrix} \in \mathcal{G}$, e portanto $\begin{pmatrix} @x \\ @z \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_x$, logo $\tilde{\mathcal{T}}_{@x} \neq \emptyset$, donde $\tilde{\mathcal{T}}_{@x} = \mathbf{T}_{x/2}$, ou seja $@x \in \mathcal{M}$.

Portanto, $@\mathcal{M} = \mathcal{M}$.

∵

3.5. NEUTRICES DE $\Re^2$ COMO PRODUTO CARTESIANO DOS SEUS TAMANHOS

TEOREMA **3.5.1**

Seja $\mathscr{C}$ um neutrice de $\Re^2$. $\mathscr{C}$ pode ser escrito como um produto cartesiano de dois grupos convexos, quando a direcção horizontal de $\mathscr{C}$ tem tamanho $\Re$.

Demonstração:

Consideremos o conjunto definido no Lema 3.4.1, $\mathfrak{B}=\{\mathfrak{b} : (0,\mathfrak{b})\in \mathscr{C}\}$.

Queremos mostrar que $\mathscr{C}=\Re\times\mathfrak{B}$.

Obviamente, $\Re$ é um grupo convexo, e pelo Lema 3.4.1 e seu corolário, $\mathfrak{B}$ e qualquer direcção de $\mathscr{C}$ é um grupo convexo.

Vejamos então que $\mathscr{C}\subseteq\Re\times\mathfrak{B}$. Seja $(x,y)\in \mathscr{C}$ qualquer.

Então $x\in\Re$, pois $\mathscr{C}\subseteq\Re^2$. E, como o tamanho da direcção horizontal de $\mathscr{C}$ é $\Re$, então $(x,0)\in \mathscr{C}$. Logo,

$$(x,y)-(x,0)=(0,y)\in \mathscr{C},$$

pois $\mathscr{C}$ é grupo. Donde, $y\in\mathfrak{B}$, por definição de $\mathfrak{B}$. Portanto, $(x,y)\in\Re\times\mathfrak{B}$.

$$\therefore\ \mathscr{C}\subseteq\Re\times\mathfrak{B}.$$

Vejamos agora que $\Re\times\mathfrak{B}\subseteq \mathscr{C}$. Seja agora $(x,y)\in\Re\times\mathfrak{B}$ qualquer.

Então $x\in\Re$, e $y\in\mathfrak{B}$. Logo, $(0,y)\in \mathscr{C}$, por definição de $\mathfrak{B}$. E, como o tamanho da direcção horizontal de $\mathscr{C}$ é $\Re$, então $(x,0)\in \mathscr{C}$.

Logo,

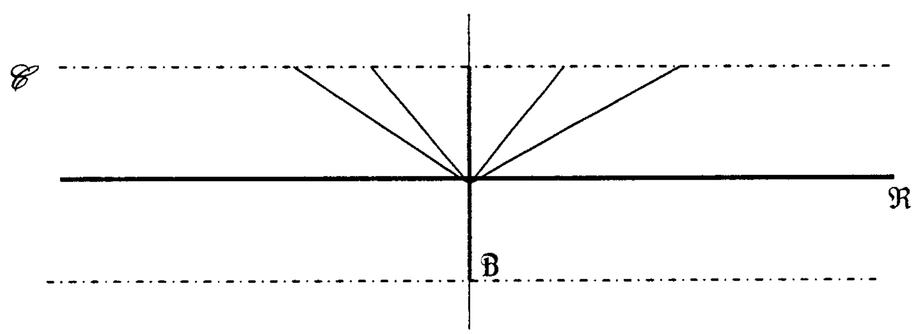
$$(x,0)+(0,y)=(x,y)\in \mathcal{G}$$

porque $\mathcal{G}$ é subgrupo de $\mathfrak{R}^2$. Portanto, $(x,y)\in \mathcal{G}$ ou seja,

$$\mathfrak{R}\times\mathfrak{B}\subseteq \mathcal{G}$$

Provámos então que $\mathcal{G}=\mathfrak{R}\times\mathfrak{B}$, isto é, $\mathcal{G}$ é o produto cartesiano de dois grupos convexos, quando a direcção horizontal de $\mathcal{G}$ tem tamanho $\mathfrak{R}$.

∵



TEOREMA 3.5.2

Seja $\mathcal{G}$ um neutrice de $\mathfrak{R}^2$. $\mathcal{G}$ pode ser escrito como um produto cartesiano de dois grupos convexos, quando a direcção horizontal de $\mathcal{G}$ tem tamanho maximal $\mathbf{T}\subsetneq\mathfrak{R}$.

Demonstração:

Seja **T** o tamanho maximal da direcção horizontal de $\mathcal{G}$, e consideremos o conjunto definido no Lema 3.4.1, $\mathfrak{B}=\{\mathfrak{b} : (0,\mathfrak{b})\in \mathcal{G}\}$.

Pelo Lema 3.4.1, $\mathfrak{B}$ é um grupo convexo e pelo seu corolário qualquer direcção de $\mathcal{G}$ é um grupo convexo, logo a direcção horizontal de $\mathcal{G}$ é um grupo convexo. Seja $\mathfrak{A}$ a direcção horizontal de $\mathcal{G}$ com tamanho maximal **T**. Queremos então mostrar que $\mathcal{G}=\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$.

Vejamos que $\mathcal{C}\subseteq\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$. Seja $(x,y)\in\mathcal{C}$ qualquer e seja $\psi\in[0,\pi]$ um ângulo tal que $tg\psi=\frac{y}{x}$. Consideremos o tamanho de $\mathcal{C}$ na direcção ψ, $\mathbf{T}_\psi$.

Como $\mathbf{T}$ é o tamanho maximal de $\mathcal{C}$, $\mathbf{T}_\psi\leq\mathbf{T}$, logo,

$$\exists a\in\mathbf{T} : a>\sqrt{x^2+y^2}\geq x.$$

E como $\mathfrak{A}$ é a direcção horizontal de $\mathcal{C}$ com tamanho maximal, $x\in\mathfrak{A}$. Donde $(x,0)\in\mathcal{C}$. Portanto, como $\mathcal{C}$ é um subgrupo de $\Re^2$,

$$(x,y)-(x,0)=(0,y)\in\mathcal{C}$$

logo, por definição de $\mathfrak{B}$, $y\in\mathfrak{B}$. Donde, como $x\in\mathfrak{A}$ e $y\in\mathfrak{B}$, tem-se $(x,y)\in\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$, ou seja

$$\mathcal{C}\subseteq\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}.$$

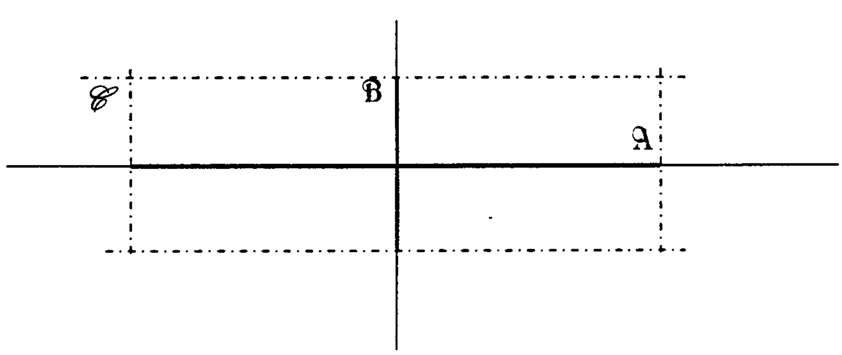
Vejamos agora que $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}\subseteq\mathcal{C}$. Seja $(x,y)\in\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$ qualquer.

Então, $x\in\mathfrak{A}$ e $y\in\mathfrak{B}$. Logo, por definição de $\mathfrak{B}$, $(0,y)\in\mathcal{C}$ e como $\mathfrak{A}$ é a direcção horizontal de $\mathcal{C}$ com tamanho maximal, $(x,0)\in\mathcal{C}$. Donde, como $\mathcal{C}$ é grupo,

$$(x,0)+(0,y)=(x,y)\in\mathcal{C}$$

E portanto, $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}\subseteq\mathcal{C}$.

Provámos então que $\mathcal{C}$ é o produto cartesiano de dois neutrices, quando a direcção horizontal de $\mathcal{C}$ tem tamanho maximal $\mathbf{T}\subsetneq\Re$.



∵

DEFINIÇÃO 3.5.1: Seja $\mathscr{E}$ um neutrice. Definimos a dimensão de $\mathscr{E}$, *dim* $\mathscr{E}$, como sendo o número máximo de parcelas que formam uma combinação linear contida em $\mathscr{E}$. Isto é, *dim* $\mathscr{E}$=n

$\exists \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_j \in \Re^n, j = 1,\ldots,n$ vectores independentes, $\exists N_j \subset \Re, j = 1,\ldots,n$ neutrices únicos, não vazios e $N_j \neq \{0\}, \forall j = 1,\ldots,n$, tais que $N_1\vec{v}_1 + N_2\vec{v}_2 + \ldots + N_j\vec{v}_j \subset \mathscr{E}$.

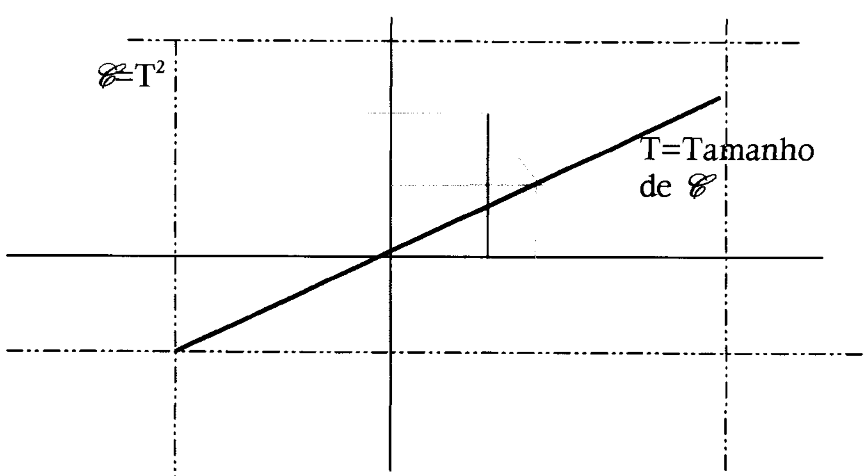
Se $\vec{v}_j \in \Re, \forall j=1,\ldots,n$, a *dim* $\mathscr{E}$*=1*, ou seja, $\mathscr{E}$ é um subgrupo de $\Re$.

Se $\vec{v}_j \in \Re^2, \forall j=1,\ldots,n$, a *dim* $\mathscr{E}$*=2*, ou seja, $\mathscr{E}$ é subgrupo de $\Re^2$.

Nota 3.7: Esta noção é baseada na noção de dimensão de um espaço vectorial, no entanto os neutrices não são espaços vectoriais reais. Por exemplo, considerando o neutrice £×£, a multiplicação de um real $\omega \simeq +\infty$, não está em £×£. No entanto, os neutrices são espaços vectoriais sobre £.

TEOREMA 3.5.3

Seja $\mathscr{E}$ um neutrice. Suponhamos que dim $\mathscr{E}$>1. Se todos os tamanhos são iguais a **T**, então $\mathscr{E}$=**T**^{2}.



Demonstração:

Suponhamos que todos os tamanhos de $\mathscr{E}$ são iguais a **T**.

Queremos mostrar que $\mathscr{E}=\mathbf{T}^2$.

Se todos os tamanhos são iguais, então a direcção horizontal maximal de $\mathscr{E}$ tem tamanho **T**. Pelo Teorema 3.5.2, temos que $\mathscr{E}=\mathbf{T}\times\mathfrak{B}$, onde $\mathfrak{B}=\{b : (0,b)\in \mathscr{E}\}$ é um grupo convexo.

Mas, $\mathfrak{B}$ é a direcção vertical de $\mathscr{E}$ com direcção $\frac{\pi}{2}$, pela nota 3.6, logo tem tamanho **T**, por hipótese.

Logo, $\mathscr{E}=\mathbf{T}\times\mathbf{T}=\mathbf{T}^2$.

$\because$

DEFINIÇÃO **3.5.2:** Dizemos que o neutrix N é *estreito* se $\nexists M\subseteq\Re : N = M\times M$.

EXEMPLO **3.5.1:** Vejamos exemplos de alguns neutrices estreitos

1) $£\times\oslash$ é estreito
2) O neutrix $\{(x,y) : x\in £ , y = x+\oslash\}$ é estreito.
3) O neutrix $£\times£=£^2$ não é estreito.

TEOREMA **3.5.4**

Seja N um neutrix de $\Re^2$ qualquer.

Então $\exists\alpha\in[0,2\pi]$ com $\mathbf{T}_\alpha$ minimal, tal que

$$\forall\beta \text{ com } \beta-\alpha \lneq \frac{\pi}{2} \text{ tem-se } \mathbf{T}_\beta = \mathbf{T}_\alpha$$

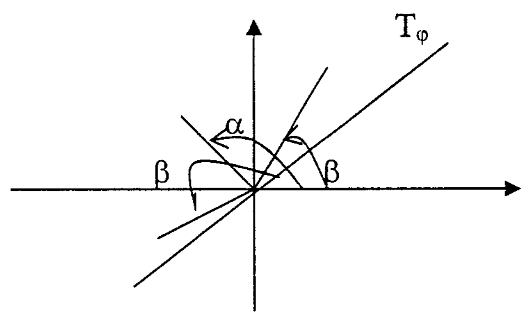
Demonstração:

Seja N um neutrix qualquer.

Se N não é estreito então todos os tamanhos são iguais e portanto o resultado é válido.

Se N é estreito, então seja $\alpha \in [0,2\pi]$ tal que $\mathbf{T}_\alpha$ minimal, que sabemos que existe pela Propriedade 3.4.2. Seja $\varphi \in [0,2\pi]$ tal que $\mathbf{T}_\varphi$ não é minimal.

Como N é estreito, por hipótese, então nem todos os tamanhos são iguais. Logo existe um tamanho mínimo. Tomemos $\alpha=\varphi+\frac{\pi}{2}$ com $\mathbf{T}_\alpha$ minimal



Seja β um ângulo qualquer, tal que $\beta-\alpha \lneq \frac{\pi}{2}$. Como $\mathbf{T}_\alpha$ é minimal, $\mathbf{T}_\psi \geq \mathbf{T}_\alpha$, $\forall \psi$, logo, em particular, $\mathbf{T}_\beta \geq \mathbf{T}_\alpha$.

Por outro lado, como $\beta-\alpha \lneq \frac{\pi}{2}$ então $\beta \lneq \frac{\pi}{2}+\alpha=\pi+\varphi$.

Donde $\forall \psi \in [\varphi,\beta]$, $\mathbf{T}_\psi \geq \min(\mathbf{T}_\beta,\mathbf{T}_\varphi)$, logo em particular, $\mathbf{T}_\alpha \geq \min(\mathbf{T}_\beta,\mathbf{T}_\varphi)$, pois $\alpha=\varphi+\frac{\pi}{2}$, logo

Se, $\min(\mathbf{T}_\beta,\mathbf{T}_\varphi)=\mathbf{T}_\beta$, então $\mathbf{T}_\alpha \geq \mathbf{T}_\beta$.

Se, $\min(\mathbf{T}_\beta,\mathbf{T}_\varphi)=\mathbf{T}_\varphi$, então $\mathbf{T}_\alpha \geq \mathbf{T}_\varphi$, o que é uma contradição pois, por hipótese $\mathbf{T}_\alpha < \mathbf{T}_\varphi$, uma vez que $\mathbf{T}_\varphi$ não é minimal.

Logo, $\mathbf{T}_\alpha \geq \mathbf{T}_\beta$, e portanto, $\mathbf{T}_\beta=\mathbf{T}_\alpha$.

∵

Comentário:

Embora não tenhamos aqui atingido o objectivo a que nos propusémos, uma vez que não foi possível demonstrar a existência de um tamanho maximal, cremos que será possível. Conjectura-se que o caminho será este, envolvendo demonstrações de maior complexidade, para as quais necessitaremos de IST e da noção, analítica, de supremo.

Os métodos aqui desenvolvidos, são predominantemente algébricos, e pouca análise se fez nesta dissertação, acabando por se estudar os tamanhos e suas propriedades.

4. ANEXOS

4.1. LEMA DE DUBOIS-REYMOND

O Lema de DuBois Reymond é a versão standard do Lema de Robinson, que é uma das muitas ferramentas utilizadas em Análise não Standard. Estes dois lemas são muito semelhantes e foi Laugniz que, em 1880, reparou na semelhança entre ambos. Não daremos as suas demonstrações, porque o Lema de DuBois-Reymond utiliza Transferência, o que sai do âmbito deste trabalho, no entanto, ambas podem ser consultadas em [2].

LEMA 4.1.1 – LEMA DE ROBINSON

Se $(a_n)_{n\in\aleph}$ é uma sucessão interna de reais tal que $a_n \simeq 0, \forall n \in \aleph$, limitado, então existe um ilimitado $\omega \in \Re$ tal que $a_n \simeq 0, \forall n \leq \omega$.

LEMA 4.1.2 - LEMA DE DUBOIS REYMOND

Se $(a_{n,k})_{n,k\in\aleph}$ é uma dupla sucessão tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n,k} = 0, \forall n \in \aleph$, então existe uma sucessão $(k_n)_{n\in\aleph}$ tal que $k_n \to +\infty$ e ainda $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n,k_n} = 0$.

4.2. CORTES E ESPESSURAS DE CORTES EM $\Re$

TEOREMA DO CORTE

Seja (A,B) um corte externo de $\Re$. Então A é um halo ou uma galáxia de $\Re$.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [1], não a daremos aqui por utilizar predominantemente o Princípio de Idealização, o que não tem uma ligação directa com o tema deste trabalho, embora se pense que este poderá ser o caminho para chegar à demonstração desejada.

DEFINIÇÃO 4.2.1:

Seja (A,B) um corte de um grupo totalmente ordenado, comutativo e standard, $\mathcal{G}$. Ao conjunto

$$\mathcal{E} \equiv \{z \in \mathcal{G} : |z| < a - b, \forall a \in A, \forall b \in B\}$$

é chamado de *espessura do corte* (A,B).

Seja (A,B) um corte externo de $\Re$. Vejamos como construir $\mathcal{E}$, a espessura do corte (A,B). Consideremos o conjunto de números reais definido por

$$\Delta \equiv \{x \in \Re : \exists a \in A \exists b \in B, a + |x| = b\}$$

Então Δ é simétrico com respeito a 0. Num certo sentido, Δ mede o "tamanho do salto" que leva um elemento de A para B. Seja Γ o complemento de Δ. Então Γ seria a colecção de reais que, quando adicionados a números reais em A ou B, não move nem A nem B. É fácil ver que

$$\Gamma \equiv \{y \in \Re : \forall a \in A, a + |y| \in A\} \equiv \{y \in \Re : \forall b \in B, b - |y| \in B\}.$$

Claramente, Γ é convexo e simétrico com respeito a 0. Mais, sempre que y é um elemento de Γ então $2y$ também é um elemento de Γ. Logo Γ é um neutrix. De facto, o neutrix $\mathcal{E}$ é exactamente o conjunto Γ.

EXEMPLO 4.2.1: Vejamos alguns exemplos de cortes e suas espessuras

1) Consideremos A a colecção externa de reais que sejam inferiores ou infinitamente próximos de 1. Então (A, A^c) é um corte externo de $\Re$ e temos

$$A \equiv \{x \in \Re : x \simeq 1 \vee x < 1\} \equiv]-\infty, 1] \cup (1 + \oslash) \equiv]-\infty, 1 + \oslash] \equiv 1 +]-\infty, \oslash],$$

e a espessura do corte (A, A^c) é $\oslash$.

2) Consideremos B a colecção externa de reais infinitamente grandes. Então (B^c,B) é um corte externo de $\Re$ e temos

$$B^c \equiv \{x \in \Re : x \in \not\propto\} \equiv]-\infty, 0] \cup £ \equiv]-\infty, £]$$

e a espessura do corte (B^c, B) é £.

3) Consideremos o conjunto interno C cujos elementos são todos os reais inferiores ou iguais a 2. Então (C, C^c) é um corte interno de $\Re$ e temos

$$C \equiv]-\infty, 2] \equiv 2 +]-\infty, 0]$$

e a espessura do corte (C, C^c) é 0.

4) A espessura de um corte de um intervalo é 0.

4.3. NÚMEROS EXTERNOS

Uma vez que esta dissertação se centra, predominantemente, nos neutrices, mas como o cálculo externo também é necessário para trabalhar com os neutrices de $\Re^2$, damos, neste anexo, algumas definições e propriedades algébricas dos números externos.

Denotamos o conjunto de todos os números externos por $\mathcal{E}$.

DEFINIÇÃO 4.3.1:

Um *número externo* é a soma algébrica entre um número real e um neutrix. Denotamos um número externo por um carácter grego. E, temos que qualquer número externo α, se pode escrever da forma $\alpha \equiv a+\mathcal{A} \equiv \{a+x : x \in \mathcal{A}\}$, onde a é um número real e $\mathcal{A}$ um neutrix.

EXEMPLO 4.3.1: Vejamos alguns exemplos de números externos

1) Os números reais são números externos com parte neutrix nula, e os neutrices são números externos sem parte real.
2) O conjunto $1+\oslash \equiv \{1+x : x \simeq 0\}$ é um número externo.
3) Seja ω ilimitado. Os seguintes conjuntos são números externos:
   i. $\omega+\oslash$
   ii. $\omega+\pounds$
4) O número externo $\omega+1$ é um número real.
5) O número externo $\varepsilon+\varepsilon\pounds$ é um neutrix.

PROPOSIÇÃO 4.3.1

A parte neutrix de um número externo é o conjunto de todos os números reais que o deixam invariante por translação.

Demonstração:

Seja $\alpha \equiv a+\mathcal{A}$ um número externo, e x um número real qualquer. Então,

$x+\alpha=\alpha \leftrightarrow x+a+\mathcal{A}=a+\mathcal{A} \leftrightarrow x+\mathcal{A}=\mathcal{A} \leftrightarrow x=\mathcal{A}$

$\because$

EXEMPLO 4.3.2: Seja ε um infinitesimal positivo.

1) $1+\varepsilon+\varepsilon\pounds \equiv 1+\varepsilon\pounds$

2) $5+2\sqrt{\varepsilon}+\varepsilon\pounds+\dfrac{\oslash}{\log\varepsilon} \equiv 5+\dfrac{\oslash}{\log\varepsilon}$

TEOREMA 4.3.1

Sejam $\alpha \equiv a+\mathcal{A}$ e $\beta \equiv b+\mathcal{B}$ dois números externos quaisquer. Então

$\alpha+\beta \equiv a+b+\mathcal{A}+\mathcal{B} \equiv a+b+max(\mathcal{A},\mathcal{B})$

$\alpha-\beta \equiv a-b+max(\mathcal{A},\mathcal{B})$

$\alpha.\beta \equiv ab+a\mathcal{B}+b\mathcal{A}+\mathcal{A}\mathcal{B} \equiv ab+max(a\mathcal{B},b\mathcal{A},\mathcal{A}\mathcal{B})$

Demonstração

$\alpha+\beta \equiv a+\mathcal{A}+b+\mathcal{B} \equiv a+b+\mathcal{A}+\mathcal{B} \equiv a+b+max(\mathcal{A},\mathcal{B})$, pela Proposição 2.2.5.

$\alpha-\beta \equiv a+\mathcal{A}-(b+\mathcal{B}) \equiv a-b+\mathcal{A}+\mathcal{B} \equiv a-b+max(\mathcal{A},\mathcal{B})$, pela Proposição 2.2.5.

$\alpha.\beta \equiv (a+\mathcal{A}).(b+\mathcal{B}) \equiv ab+a\mathcal{B}+b\mathcal{A}+\mathcal{A}\mathcal{B} \equiv ab+max(a\mathcal{B},b\mathcal{A},\mathcal{A}\mathcal{B})$, pela Proposição 2.2.5.

$\because$

BIBLIOGRAFIA

[1] KOUDJETI, F.: Elements of External Calculus, Graduate School/Research Institute Systems, Organisations and Management, 1995

[2] V. D. BERG, I.: Non Standard Asymptotic Analysis, Springer-Verlag, Lecture in Mathematics 1249, 1987

[3] DIENER, F., REEB, G.: Analyse Non Standard, Herman Editeurs des Sciences et des Arts, 1989

[4] LUTZ, R., GOZE, M.: NonStandard Analysis – A practical guide with aplications, Springer-Verlag, Lectures Notes in Mathematics 881, 1981

[5] FRALEIGH, J.B.: A First Course in Abstract Algebra, Fifth Edition, Addison-Wesley Publishing Company, 1994

[6] HUNGERFORD, T.: Algebra, Springer-Verlag, 1974

[7] ROBER, A.: NST – Non Standard Analysis, University of Neuchâtel, A Wiley-Interscience Publication, 1988

[8] F.OLIVEIRA, A.J.: Matemática Não Standard, Notas para a cadeira de Análise Não Standard, Mestrado de Matemática Aplicada, Universidade de Évora 1997

[9] GIL, R.: O Axioma da Escolha, Trabalho de Fim de Curso, Unversidade de Évora, 1999