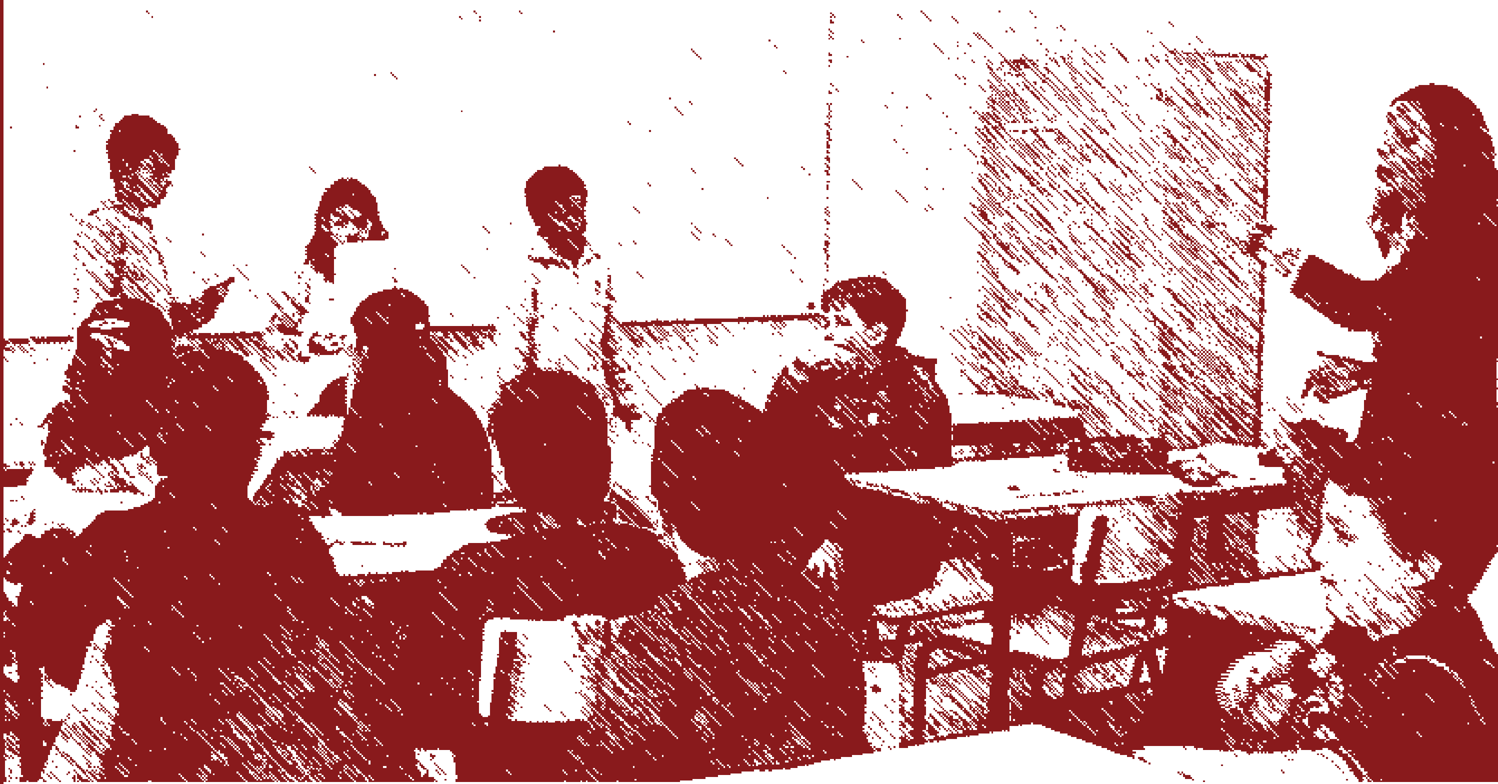
Práticas Profissionais dos Professores de Matemática

João Pedro da Ponte (org.)



U LISBOA
UNIVERSIDADE DE LISBOA
ie Instituto de Educação
UIDEF
Unidade de Investigação em Educação e Formação

Ficha Técnica

Organização .... João Pedro da Ponte

Edição .... Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

1.ª edição .... Junho de 2014

Coleção .... Encontros de Educação

Composição e arranjo gráfico .... Sérgio Pires

Disponível em .... www.ie.ulisboa.pt

ISBN 978-989-8753-06-9

Instituições participantes no Projeto Práticas Profissionais dos Professores de Matemática

- Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
- Instituto de Educação, Universidade do Minho, Braga
- Universidade do Porto (ADFC/FC/UP)
- Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Viseu
- Universidade Aberta
- Universidade de Évora

projeto P3M

Este livro tem por base o trabalho do Projeto Práticas Profissionais dos Professores de Matemática, financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008)

FCT Fundação para a Ciência e a Tecnologia
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

LISBOA UNIVERSIDADE DE LISBOA

ie Instituto de Educação

Práticas Profissionais dos Professores de Matemática

João Pedro da Ponte (org.)

Apresentação

Na Matemática como nas outras disciplinas escolares, a aprendizagem dos alunos depende em grande medida do que acontece na sala de aula. E isso, como não poderia deixar de ser, tem muito a ver com o modo como o professor ensina. Esta constatação tem promovido um grande interesse pelo estudo da prática profissional do professor e das condições da sua transformação, tendo em conta as necessidades de uma sociedade em mudança. Este livro é dedicado a este tema, apresentando trabalhos empíricos que estudam diversos aspetos da prática profissional do professor de Matemática e da sua transformação e regulação, bem como revisões teóricas que procuram sistematizar o estado da arte das investigações nacionais e internacionais neste campo.

As orientações curriculares atuais para a disciplina de Matemática a nível internacional estabelecem objetivos ambiciosos para a aprendizagem dos alunos, colocando desafios significativos à prática profissional dos professores. Na verdade, pretende-se que os alunos não só aprendam conceitos, representações e procedimentos matemáticos, mas sejam capazes de os usar para resolver uma grande variedade de problemas. Pretende-se, também, que sejam capazes de raciocinar matematicamente e de comunicar os seus raciocínios ao mesmo tempo que desenvolvem uma apreciação geral da Matemática como modo de pensar, de interpretar a realidade e de intervir sobre ela. No quadro de uma escolaridade obrigatória alargada, estes objetivos colocam-se a todos os níveis de ensino, e para a generalidade dos alunos.

Estas orientações curriculares têm vindo progressivamente a afirmar-se, conduzindo a um tipo de ensino designado por "ensino exploratório" (em inglês, *inquiry-based teaching*) que se afasta do modelo bem conhecido em que o professor "expõe a matéria", apresenta alguns exemplos e passa exercícios para o aluno resolver. No ensino exploratório, o professor começa por propor tarefas para os alunos trabalharem, estimulando-os a mobilizar os seus conhecimentos e elaborando soluções originais. Pretende-se que estas tarefas estejam ao alcance dos alunos, interagindo uns com os outros ou contando com uma ajuda discreta por parte do professor. Ou seja, usando a popular expressão de Lev Vygotsky, pretende se que estas tarefas se situem na "zona proximal de desenvolvimento" dos alunos e espera-se que estes possam ultrapassar as dificuldades que surjam no decurso do trabalho a realizar na sala de aula.

Note-se que, hoje em dia, vivemos um período de transição que não sabemos muito bem ainda onde nos levará. Muitas das aulas de Matemática já não se situam completamente no modelo expositivo usual, mas também não podem ser consideradas aulas de ensino totalmente exploratório. Têm elementos de um e de outro modelo, em consequência do nível de ensino, do tipo de turma, das características dos alunos, da escola e do próprio professor. Poderá o ensino da Matemática vir a tornar-se essencialmente exploratório? Haverá lugar para vários estilos diferenciados, em função da cultura da sociedade, dos objetivos do ensino, do perfil dos alunos? Não será possível responder desde já de forma definitiva a estas questões mas é desejável começar a refletir sobre elas.

Neste livro a prática profissional do professor é estudada em dois aspetos principais: por um lado, a seleção ou elaboração de tarefas para a sala de aula e a sua apresentação e condução e, por outro lado, a comunicação que o professor promove na sala de aula. É natural imaginar que estes aspetos da prática letiva tendem para um estado de equilíbrio relativamente a fatores como tradições pedagógicas, orientações curriculares, perspetivas sobre as capacidades e interesses dos alunos, recursos disponíveis, cultura de escola e influências profissionais, curriculares, académicas e sociais. Por isso, iniciativas voluntaristas de mudanças abruptas de prática são inevitavelmente problemáticas. No entanto, um conhecimento mais aprofundado dos processos subjacentes à constituição das práticas dos professores cria oportunidades acrescidas para a sua mudança. Mais do que uma descrição normativa de modelos de prática letiva ou de gestão curricular, pretendemos identificar estratégias e conceitos que podem ser úteis para os professores definirem a sua ação no quadro dos objetivos dos documentos curriculares e das especificidades dos contextos profissionais em que atuam.

Para um estudo aprofundado da prática profissional do professor é necessário começar por discutir este conceito. Na verdade, a prática profissional tem sido apresentada na literatura de investigação numa variedade de perspetivas, por vezes fortemente redutoras, por vezes identificada com as ações do professor e noutras vezes com a sua perspetiva curricular geral. Assim, podemos distinguir duas grandes abordagens ao estudo deste conceito – a sociocultural e a cognitiva. Numa perspetiva sociocultural as práticas podem ser vistas como as atividades recorrentes e socialmente organizadas que permeiam a vida quotidiana. Isto significa que as práticas são “atividades”, ou seja, envolvem os atores sociais nos seus contextos com as suas motivações e objetivos. Além disso, têm um carácter recorrente, isto é, realizam-se com frequência e não apenas ocasionalmente. São, ainda, socialmente organizadas, ou seja, não são compreensíveis apenas pela consideração de um ator individual, mas requerem a consideração do grupo social relevante. E, finalmente, são reconhecíveis na vida de todos os dias. No centro desta perspetiva está a noção de atividade, que pode ser vista como uma cadeia de ações relacionadas pelo mesmo "objeto" e pelo mesmo "motivo". O objeto da atividade é a realização de uma certa tarefa e o motivo é o conjunto de razões que leva um dado indivíduo a realizar essa tarefa. Dito de outro modo, uma atividade comporta três elementos principais: em primeiro lugar as ações, que são os seus componentes básicos; em segundo lugar, os motivos que levam à realização da atividade, tendo em atenção o contexto de trabalho e os seus significados e intenções para os respetivos atores; e, em terceiro lugar, o objeto ou tarefa, que dirige e dá unidade a toda a atividade. Um aspeto que é importante sublinhar, e que decorre desta abordagem sociocultural, é a ideia que as práticas profissionais do professor são co-construídas em conjunto com outros intervenientes – colegas, alunos, diretores, formadores e outros atores sociais. Em particular, as práticas letivas na sala de aula são o resultado de uma construção conjunta de professor e alunos. Ambos são fundamentais nessa construção, embora com papéis claramente distintos.

As práticas profissionais podem também ser abordadas numa perspetiva essencialmente cognitiva. Estão nesse caso os estudos sobre o trabalho do professor na sala de aula recorrendo a conceitos como "guião curricular", "rotina" e "agenda". Nesta perspetiva estão também os estudos em que o centro da atenção está nas "decisões" que o professor assume na sua prática, decorrentes dos seus "planos de ação", e que se procura explicar, tendo por base o conhecimento, as crenças e os objetivos desse mesmo docente. Este modo de encarar a prática profissional aplica-se a qualquer tipo de ensino e pode ser usado em diversas escalas, desde a planificação anual e mensal até à aula, num segmento alargado ou num micro episódio de interação professor-aluno. No essencial, a perspetiva cognitiva procura ter em atenção o modo como o professor toma decisões, atendendo às prioridades que estabelece e aos planos de ação que formula, e atende também ao modo como estes planos são depois concretizados ou não em sequências de ação. Nos trabalhos reunidos neste livro encontramos elementos das duas perspetivas, que podemos considerar como complementares e que se unem num mesmo ponto – as ações e decisões dos atores.

Para além da prática profissional do professor, este livro ocupa-se também das condições da sua transformação, o que significa estudar os processos de formação e desenvolvimento profissional. Para isso relatam-se diversos estudos realizados em contexto de formação inicial e contínua onde a prática letiva desempenha um papel central, perspetivado justamente nas duas dimensões assinaladas – as tarefas propostas e a comunicação que tem lugar na sala de aula. Damos também conta do desenvolvimento de recursos multimédia de professores de Matemática que foram produzidos sob a forma de protótipo e que foram experimentados em ambos os contextos de formação. Estes recursos multimédia para formação de professores dos diversos ciclos incluem descrições da prática profissional, tarefas para os professores e sugestões para os formadores de professores, de modo a poderem ser utilizados com flexibilidade, tendo por base um quadro organizador para análise das ações e intenções do professor que orienta a estrutura dos casos e serve de suporte às atividades formativas em torno dos seus conteúdos.

Entre os diversos capítulos que compõem este livro, alguns são aqui publicados pela primeira vez enquanto outros foram apresentados em versões preliminares em seminários e outros encontros. O primeiro conjunto (capítulos 1-5) incide principalmente na noção de tarefa. O capítulo 1 aborda diversas questões fundamentais a respeito desta noção, que têm sido discutidas tanto nacional como internacionalmente. Os quatro capítulos seguintes abordam aspetos particulares das tarefas, nomeadamente no que respeita ao seu processo de construção tendo em conta objetivos específicos (exemplificando-se com tarefas a usar no desenvolvimento do cálculo mental e da capacidade de modelação), e também ao papel das diferentes representações e conversão entre representações.

O conjunto seguinte foca-se na comunicação na sala de aula. O capítulo 6 discute diversas questões que se colocam relativamente à condução da comunicação pelo professor seguindo-se sete capítulos que apresentam trabalhos empíricos centrados nas ações do professor na condução de discussões coletivas e outros momentos de trabalho, em conexões com outros domínios como as normas sociais e sociomatemáticas, e na relação entre comunicação e outras capacidades como raciocínio e argumentação.

O capítulo 14 abre um conjunto dedicado à problemática da formação e desenvolvimento profissional do professor. Os capítulos 15, 16 e 17 abordam diferentes problemáticas, a partir de experiências realizadas em contextos formativos e estudadas empiricamente, tanto na formação inicial e contínua. Assim, consideram a relação teoria-prática, a articulação entre pedagogia e conteúdo, e as possibilidades dos estudos de aula, como contexto colaborativo e promotor de uma atitude investigativa por parte dos professores participantes. Finalmente o capítulo 18 descreve a conceção de materiais multimédia para a formação de professores, seguindo-se três capítulos em que se dá conta da sua experimentação em contextos de formação inicial e contínua.

O processo de transformação da prática profissional do professor, no contexto de uma sociedade em mudança, irá certamente definir novos rumos para o ensino, desenvolver novos recursos para a aprendizagem e para a formação, bem como novas formas de organização escolar. Os professores serão chamados a enfrentar novos desafios, de onde tanto pode resultar uma responsabilidade e uma competência acrescida, em termos do exercício da sua atividade, como pode resultar uma degradação do estatuto e da qualificação da profissão. Com este livro estamos a dar o nosso contributo para a reflexão em torno deste processo, disponibilizando tanto a investigadores como a formadores e professores instrumentos conceptuais e práticos para trabalhar estas questões, tornando-os mais conscientes e competentes no exercício da sua prática profissional.

Este livro foi produzido no quadro de um projeto de investigação dedicado a este tema – o Projeto *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática*. Sendo um trabalho eminentemente coletivo, envolvendo numerosos autores, para ele contribuíram não só os formadores/investigadores e os professores/investigadores autores dos diversos capítulos, mas também outros professores, alunos e formandos em cujas aulas decorreram as atividades do projeto. Uma palavra especial de agradecimento é devida aos funcionários do Instituto de Educação e das restantes instituições participantes no projeto, bem como aos bolseiros que deram a sua colaboração, e cuja ação foi fundamental para que se pudessem realizar os diversos estudos aqui coligidos.

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

TAREFAS

Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática, *por João Pedro da Ponte*

1. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

jpponte@ie.ulisboa.pt

• **Resumo:** Esta introdução passa em revista diversas questões fundamentais da problemática das tarefas como suporte fundamental do ensino-aprendizagem. Para isso, começa por discutir a relação entre os conceitos de tarefa e atividade, tantas vezes confundidos nos manuais escolares e na linguagem do dia-a-dia. Assume-se que os alunos aprendem a partir da sua atividade, que constitui portanto o conceito central a que há que dar atenção. As tarefas são importantes sobretudo pelo modo como podem (ou não) dar origem a atividade educacionalmente promissora. De seguida, presta-se atenção às orientações curriculares e modo como estas valorizam sobretudo um ou outro tipo de tarefa, ao mesmo tempo que se apresentam diversas tipologias que têm sido propostas para distinguir as tarefas que podem usadas no ensino da Matemática. Numa terceira parte dá-se especial atenção à noção de "representação", necessariamente presente em todo o trabalho nesta disciplina, e também no modo como se apresenta e como se trabalha na resolução de tarefas matemáticas. Finalmente, aborda-se os que acontece às tarefas, entre o momento em que são construídas ou selecionadas pelo professor, até ao momento em que são apresentadas e resolvidas pelos alunos. Na verdade, este processo, da apresentação à realização comporta necessariamente diversas transformações, que tanto podem enriquecer a oportunidade de aprendizagem como comprometer as suas potencialidades. Procura-se, assim, desenvolver um quadro conceptual que ajude a compreender o papel central que as tarefas podem ter na aprendizagem bem como os desafios que o seu uso coloca à prática profissional do professor.

• **Palavras-chave:** Tarefa, Atividade, Representação, Exercício, Problema, Exploração.

Introdução

O ensino da Matemática baseado na exposição magistral do professor não pode mostrar muito interesse na noção de tarefa. Em contrapartida, o ensino que valoriza o papel ativo do aluno na aprendizagem precisa de forma fundamental desta noção, uma vez que as tarefas são o elemento organizador da atividade de quem aprende. Note-se, no entanto, que as tarefas podem desempenhar uma variedade de papéis. Assim, existem tarefas cuja principal finalidade é apoiar a aprendizagem, outras que servem para verificar o que aluno aprendeu (tarefas para avaliação), outras, ainda, que servem para compreender de modo aprofundado as capacidades, processos de pensamento e dificuldades dos alunos (tarefas para investigação).

Uma questão importante, desde logo, é clarificar o conceito de tarefa, relacionando-o do conceito próximo mas distinto de atividade. Outra questão a considerar são as várias tipologias de tarefas, analisando as vantagens e limitações de cada uma delas. Um aspeto especialmente importante das tarefas são as representações que lhes estão associadas, sendo necessário perceber como articular diferentes tipos de representações. Finalmente. uma questão a considerar tem a ver com o que acontece quando as tarefas são propostas na sala de aula? Como são interpretadas por professores e alunos? De que modo podem ser trabalhadas na sala de aula? Que dificuldades podem surgir nos alunos decorrentes da realização deste ou daquele tipo de tarefa e de que modo pode o professor lidar com estas dificuldades?

Tarefa e atividade

O termo "atividade" ocupa um lugar de grande evidência no vocabulário da educação matemática. A sua aceitação está certamente relacionada com a ideia que o aluno deve desempenhar um "papel ativo" no processo de aprendizagem. No entanto, a popularidade traz muitas vezes problemas imprevistos. Neste caso, a sobre utilização deste termo tornou o seu significado ambíguo, servindo com frequência para designar coisas muito diferentes como "exercício", "projeto", "problema", "raciocínio", etc.

Devemos começar por notar que a noção de atividade desempenha um papel fundamental numa teoria educacional designada precisamente por "teoria da atividade", elaborada por psicólogos e educadores soviéticos, em especial Vygotsky, Leont'ev e

Galperin e descrita em referência à aprendizagem da Matemática por Christiansen e Walther (1986). Esta teoria distingue claramente entre atividade e tarefa:

> A *atividade* humana realiza-se através de um sistema de ações, que são processos dirigidos para objetivos causados pelo motivo da atividade. A *atividade* é realizada através destas ações, que podem ser vistas como as suas componentes. A atividade existe apenas nas ações, mas atividade e ações são entidades diferentes. Por isso, uma ação específica pode servir para realizas diferentes atividades, e a mesma atividade pode dar origem a diferentes objetivos e desse modo iniciar diferentes ações ... Uma *tarefa* é então ... o objetivo de uma ação (Christiansen & Walther, 1986, pp. 255-256)

Atividade e tarefa são noções que estes educadores matemáticos consideram constituírem categorias didáticas básicas. Uma atividade pode incluir a execução de numerosas tarefas. Mais importante, a atividade, que pode ser física ou mental, diz respeito essencialmente ao aluno e refere-se àquilo que ele faz num dado contexto. Pelo seu lado, a tarefa representa apenas o objetivo de cada uma das ações em que a atividade se desdobra e é exterior ao aluno (embora possa ser decidida por ele). Na verdade, as tarefas são usualmente (mas não necessariamente) propostas pelo professor, mas, uma vez propostas, têm de ser interpretadas pelo aluno e podem dar origem a atividades muito diversas (ou a nenhuma atividade).

No entender de Christiansen e Walther (1986) a proposta de tarefas e a condução da sua resolução na sala de aula constituem a principal forma como se ensina Matemática:

> A *tarefa* proposta torna-se o objeto da atividade dos alunos e a proposta de tarefas em conjunto com as ações a elas respeitantes realizada pelo professor constitui o principal método pelo qual se espera que a Matemática seja transmitida aos alunos. (p. 224)

Mais adiante, estes autores chamam a atenção que as tarefas proporcionam uma oportunidade para o trabalho em Matemática, mas não apresentam diretamente os conceitos e procedimentos. matemáticos. Ou seja, a aprendizagem resulta da atividade, não das tarefas, e o mais determinante são sempre as atitudes e conceções dos atores envolvidos.

> A tarefa em si não 'contém' conceitos ou estruturas matemáticas. Uma *atividade* 'cega' numa *tarefa* não assegura que a aprendizagem ocorra como se pretende. A *tarefa* é interpretada sob influência de diversos fatores, e a *atividade* é condicionada pelas ações do professor, que são também realizadas e interpretadas segundo as atitudes e conceções, respetivamente, do professor e do aluno. (p. 250)

O primeiro documento português onde se refere com algum pormenor o conceito de atividade é *Renovação do Currículo de Matemática* (APM, 1988), que lhe dedica todo um capítulo. Nele lêse, por exemplo, o seguinte:

> A natureza das *atividades* dos alunos na aula de Matemática é uma questão central no ensino desta disciplina. A aprendizagem da Matemática é sempre produto da *atividade*, e se esta se reduz, por exemplo, à resolução repetitiva de exercícios para aplicação de certas fórmulas, é exatamente isto que se aprende e vai perdurar, enquanto ficar a memória das fórmulas. (pp. 55-56)

Nesta passagem, o que está em causa são as atividades que os alunos realizam na sala de aula, sendo sublinhada a sua importância para a aprendizagem.

As *Normas Profissionais para o Ensino da Matemática* (NCTM, 1991/1994) são um documento de grande importância, empenhado na concretização de uma nova orientação curricular para o ensino da Matemática, que também assume a distinção entre tarefa e atividade. Logo no início apresenta o conceito de tarefa:

> As tarefas são os projetos, questões, problemas, construções, aplicações, e exercícios em que os alunos se envolvem. Elas fornecem os contextos intelectuais para o desenvolvimento matemático dos alunos. (p. 20)

Em resumo, as tarefas são ferramentas de mediação fundamentais no ensino e na aprendizagem da Matemática. Uma *tarefa* pode ter ou não potencialidades em termos de conceitos e processos matemáticos que pode ajudar a mobilizar. Pode dar lugar a *atividades* diversas, conforme o modo como for proposta, a forma de organização do trabalho dos alunos, o ambiente de aprendizagem, e a sua própria capacidade e experiência anterior. Pelo seu lado, uma atividade corresponde a uma ou mais tarefas realizadas no quadro de uma certa situação. É pela sua atividade e pela sua reflexão sobre essa atividade que o aluno aprende mas é importante ter presente que esta depende de dois elementos igualmente importantes: (i) a tarefa proposta; e (ii) a situação didática criada pelo professor.

Orientações curriculares e tipologias de tarefas

As tarefas que o professor propõe na sala de aula marcam de forma fundamental o ensino que este realiza. O NCTM (1991/1994) indica que o professor de Matemática deve colocar tarefas aos alunos que sejam baseadas (i) em Matemática correta e significativa; (ii) no conhecimento das compreensões, interesses e experiências dos alunos, e (iii) no conhecimento das diversas maneiras como diferentes alunos aprendem Matemática. Além disso, aponta que as tarefas a propor devem:

- envolver os alunos em atividade intelectuais;
- desenvolver as compreensões e capacidades matemáticas dos alunos;
- estimular os alunos a fazer ligações e a desenvolver um quadro coerente de ideias matemáticas;
- exigir a formulação e resolução de problemas e o raciocínio matemático;
- promover a comunicação acerca da Matemática;
- representar a Matemática como uma atividade humana em constante desenvolvimento;
- mostrar sensibilidade apoiar-se nas experiências e disposições dos alunos;
- promover o desenvolvimento da disposição de todos os alunos para fazer Matemática.

Trata-se de caraterísticas sem dúvida importantes e a ter em conta. Para saber de que modo podem ser concretizadas vários autores têm procurado desenvolver tipologias de tarefas e discutido o modo de as trabalhar na sala de aula.

Uma primeira distinção básica é feita por George Pólya (1945/2003), entre exercício e problema. O ensino tradicional é muito marcado pelo exercício, que se carateriza por ser uma questão para cuja resolução o aluno dispõe já de um método de solução apropriado. Toda a tentativa de formular uma orientação curricular alternativa ao currículo tradicional passa por caraterizar outros tipos de tarefa que possam ampliar a experiência matemática dos alunos. Um tipo de tarefa bem distinto do exercício é um problema, uma questão que requer da parte do aluno a conceção de uma estratégia de resolução para ele desconhecida. No entanto, a noção de problema revela-se, ela própria, problemática, havendo muitos entendimentos do que é ou não é um problema e, especialmente, um bom problema para propor aos alunos. Será que os problemas que aparecem nos manuais, às vezes numa seção à parte, são tarefas que podem ajudar a dar corpo a uma orientação curricular alternativa?

Tomado como ponto de partida a distinção entre problema e exercício, Paulo Abrantes (1989) retoma a distinção entre exercício e problema e carateriza diversos tipos de problemas: de palavras (“*word problem*” ou problemas verbais), para equacionar, para demonstrar, para descobrir, da vida real, situação problemática e situação. Valoriza sobretudo as três últimas categorias, que se destacam pela sua relação próxima com a realidade e, em especial, pela sua natureza aberta.

Aprofundando também a distinção entre problema e exercício de George Pólya (2003), Mary Kay Stein e Margaret Smith (1998) apresentam uma tipologia sobre as tarefas usadas na aula como base da aprendizagem dos alunos. Distinguem entre as tarefas com “baixo” e “alto” nível de exigência cognitiva. Nas tarefas de baixo nível cognitivo distinguem entre (i) memorização e (ii) procedimentos sem conexões. Nas tarefas com alto nível de exigência cognitiva distinguem entre (iii) procedimentos com conexões e (iv) fazendo Matemática. Ilustram estas diferentes categorias de tarefas com exemplos relativos à determinação da relação entre um dado número na forma de fração, na forma decimal e como percentagem.

Ole Skovsmose (2000), pelo seu lado, contrapõe “exercícios” e “cenários de investigação”, campo onde inclui o trabalho de projeto. Indica que um cenário para investigação é um contexto de trabalho que convida os alunos a formularem questões e a procurarem explicações. Sublinha, no entanto, que para que isso aconteça é necessário que os alunos aceitem o convite que lhes é feito pelo professor. Defende também que as tarefas podem remeter para três grandes tipos de referências – à Matemática, à vida real e ao que designa de “semi-realidade” – ou seja, situações com a aparência de reais, mas que na verdade são artificiais e concebidas exclusivamente para a aprendizagem. Deste modo, identifica seis tipos de ambientes de aprendizagem (Quadro 1).

Quadro 1 – Exercícios e cenários para investigação (Skovsmose, 2000)

	Exercícios	Cenários para Investigação
Referências à Matemática pura	(1)	(2)
Referências à semi-realidade	(3)	(4)
Referências à realidade	(5)	(6)

Skovsmose (2000) tem o cuidado de dizer que as linhas divisórias entre os seis ambientes são fluidas e que os alunos se movem frequentemente entre diferentes ambientes de aprendizagem. Indica, também, que a educação matemática não deve situar-se exclusivamente num dos ambientes mas sim mover-se entre eles. Para o autor, as duas colunas da tabela correspondem a duas tradições distintas – a Matemática escolar e a Matemática investigativa – e dá vários exemplos como o “planeamento de um parque infantil”, o “trabalho num escritório”, a “grande corrida de cavalos” e o “projeto energia”. Sublinha que o desenvolvimento da autonomia intelectual dos alunos requer que estes sejam convidados a realizar Matemática investigativa. Aponta, ainda, as dificuldades que um trabalho deste tipo traz para o professor, obrigando-o a modificar o “contrato didático” implicitamente estabelecido com os alunos, retirando-o da “zona de conforto” e colocando-o numa “zona de risco”, para o que tem toda a vantagem em se apoiar num trabalho colaborativo a realizar com os seus colegas de profissão.

Uma outra tipologia para as tarefas é dada por David Kirshner (2000). Este autor toma como ponto de partida a intenção do professor, distinguindo entre exercícios, provas (“*probes*”) e puzzles. Para ele, os exercícios são tarefas escolhidas dentro de um certo domínio ao serviço da habituação do aluno, tendo em vista o refinamento de habilidades (“*skills*”) e a aprendizagem de memória (“*rote learning*”). As provas são as tarefas ou questões que têm em vista avaliar a compreensão dos alunos, ao mesmo tempo que servem como veículos para a sua aprendizagem. Finalmente, os puzzles ou problemas não-rotineiros são as tarefas para as quais a pessoa não dispõe de um método de resolução, necessitando de empregar a sua “persistência, curiosidade, coragem, criatividade, iniciativa e sensibilidade estética” (p. 12).

Mais recentemente, Torulf Palm (2009) tem vindo a desenvolver o que designa por “teoria das situações autênticas”. Centrando a sua atenção nos problemas verbais, caracteriza-os como descrições em linguagem textual de situações que se assumem ser compreensíveis para o leitor e nas quais as questões matemáticas podem ser contextualizadas. Nestas questões inclui tanto tarefas puramente matemáticas apresentadas como problemas em contextos reais como tarefas que requerem a realização do ciclo completo de modelação. Assume, no entanto, que existem problemas "pseudo-realísticos", que requerem que os alunos pensem de modo diferente do que pensariam num contexto real e refere a tendência que estes manifestam, na resolução destes problemas, de não fazerem uso dos seus conhecimentos do mundo real e suspenderem a exigência que a solução faça sentido em relação com a situação extra-aula descrita na tarefa.

Na sua teoria das situações autênticas, Palm (2009) considera que o fundamental é que as tarefas sejam "representativas", o que, por sua vez depende do modo como traduzem uma situação de forma completa ("*comprehensivness*") e fidedigna ("*fidelity*"). Aponta, ainda, diversos fatores que, na sua perspetiva, são decisivos para esta representatividade, tais como os acontecimentos, a questão a resolver, a informação e os dados indicados (na sua existência, realismo e especificidade), a apresentação (no seu modo e na sua linguagem), as estratégias de solução (disponibilidade e plausibilidade experimentadas), as circunstâncias (disponibilidade de ferramentas externas, orientação, consulta e colaboração, oportunidades de discussão, tempo e consequências), as exigências da solução (método de solução e resposta final), e o propósito no contexto apresentado. O autor considera que existe uma correlação positiva entre a representatividade das tarefas apresentadas, tal como experimentada pelos alunos, e a semelhança dos comportamentos em situações dentro e fora da escola. Indica, no entanto, que os aspetos que afetam a representatividade variam de tarefa para tarefa. Finalmente, defende que a realização repetida de problemas verbais com alto grau de representatividade e que incluem contextos significativos para os alunos tende a levá-los a envolvimentos cada vez mais fortes

Ponte (2005) considera que duas dimensões fundamentais das tarefas são o seu grau de desafio matemático e o seu grau de estrutura. O grau de desafio matemático depende da perceção da dificuldade da questão, variando entre o "reduzido" e "elevado". Por outro lado, o grau de estrutura varia entre os polos "aberto" e "fechado". Numa tarefa fechada é claramente dito o que é dado e o que é pedido e uma tarefa aberta comporta alguma indeterminação pelo menos num destes aspetos. Cruzando as duas dimensões, obtêm-se quatro tipos de tarefa:

- Um *exercício* é uma tarefa fechada e de desafio reduzido;
- Um *problema* é uma tarefa também fechada, mas com desafio elevado;
- Uma *investigação* é uma tarefa aberta com desafio elevado;
- Uma *exploração* é uma tarefa aberta e acessível à maioria dos alunos.

Tal como Skovsmose, também este autor aponta que nem sempre é muito nítida a linha de demarcação entre os diferentes tipos de tarefa. Por exemplo, uma certa tarefa pode ser uma exploração ou um exercício, conforme os conhecimentos prévios dos alunos. Contrariando a ideia que os alunos não podem realizar uma tarefa se não tiverem sido ensinados diretamente a resolvê-la, indica que estes aprendem fora da escola muitos conhecimentos que podem mobilizar na aula de Matemática – e é isso que se procura potenciar na abordagem exploratória. Valoriza assim a (re)descoberta pelos alunos de métodos próprios para resolver uma questão, sublinhando que essa é muitas vezes a melhor forma de aprender.

Ponte (2005) aponta ainda a duração e o contexto como dimensões importantes. As tarefas de longa duração, como os projetos, podem ser muito ricas, conduzindo a aprendizagens profundas e interessantes, mas também comportam o risco dos alunos se dispersarem. Finalmente, o contexto constitui outra dimensão a ter em conta, distinguindo entre as tarefas enquadradas num contexto da realidade e as tarefas formuladas em termos puramente matemáticos. Refere, a propósito, que as tarefas de modelação apresentam um contexto de realidade, se revestem muitas vezes de natureza desafiante, constituindo problemas ou investigações, conforme o grau de estruturação do seu enunciado. Também se fala em muitas vezes em tarefas de aplicação da Matemática, que, na maior parte dos casos, são exercícios ou problemas de aplicação de conceitos e ideias Matemáticas.

No seu trabalho de planificação, o professor considera habitualmente diversos tipos de tarefa. Ponte (2005) refere que essa diversificação é necessária porque cada tipo de tarefa desempenha o seu papel relativamente à aprendizagem:

- As tarefas de natureza mais *fechada* (exercícios, problemas) são importantes para o desenvolvimento do raciocínio matemático nos alunos, uma vez que este raciocínio se baseia numa relação estreita e rigorosa entre dados e resultados.
- As tarefas de natureza mais *acessível* (explorações, exercícios), pelo seu lado, possibilitam a todos os alunos um elevado grau de sucesso, contribuindo para o desenvolvimento da sua autoconfiança.

- As tarefas de natureza mais *desafiante* (investigações, problemas), pela sua parte, são indispensáveis para que os alunos tenham uma efetiva experiência matemática.
- As tarefas de cunho mais *aberto* são essenciais para o desenvolvimento de certas capacidades nos alunos, como a autonomia, a capacidade de lidar com situações complexas, etc. (p. 26)

No que se refere aos contextos e à complexidade do trabalho a realizar, Ponte (2005) considera que se podem também diversificar as tarefas a propor aos alunos. Sugere que "para que os alunos se apercebam do modo como a Matemática é usada em muitos contextos e para tirar partido do seu conhecimento desses contextos é fundamental que lhes seja proposta a realização de tarefas enquadradas em *contextos da realidade* (tarefas de aplicação e de modelação)" (p. 26). Aponta, contudo, que "os alunos podem também sentir-se desafiados por tarefas formuladas em *contextos matemáticos* (investigações, problemas, explorações) e a sua realização permite-lhes perceber como se desenvolve a atividade matemática dos matemáticos profissionais" (p. 26). E sublinha, igualmente, o papel que considera insubstituível das "tarefas de *longa duração* (os projetos) … no desenvolvimento de diversos objetivos curriculares" (p. 26).

Mais do que tarefas isoladas, o professor tem de organizar para os seus alunos sequências de tarefas devidamente organizadas, de modo a estes possam atingir os objetivos de aprendizagem previstos. A este respeito, Ponte (2005) refere, ainda, que, para além da diversificação das tarefas, é importante que estas proporcionem um percurso de aprendizagem coerente, que permita aos alunos a construção dos conceitos, a compreensão dos procedimentos, o conhecimento das formas de representação relevantes e das conexões de cada conceito dentro da Matemática e com outros domínios. Indica que, para isso, é preciso fazer escolhas e estabelecer percursos de ensino com tarefas cuidadosamente selecionadas.

Representações matemáticas

Na resolução de uma tarefa é decisivo o modo como os alunos interpretam as representações indicadas nos enunciados e como criam e interpretam as suas próprias representações. Uma representação é "uma configuração que representa algo, de alguma forma" (Goldin, 2008, p. 180). Bruner (1999) distingue entre representações ativas, icónicas e simbólicas:

> O que queremos dizer com representação? O que significa traduzir a experiência num modelo do mundo? A minha sugestão é que os seres humanos têm provavelmente três maneiras diferentes de realizarem esta proeza. A primeira é através da ação. Conhecemos muitas coisas para as quais não há imagética nem palavras e é muito difícil ensiná-la através de palavras, diagramas ou imagens (...) Há um segundo sistema de representação que depende da organização visual ou outra organização sensória e do recurso a imagens de resumo (...) A primeira forma de representação veio a ser designada como *ativa* e a segunda como *icónica* (...). Por fim, há a representação por palavras ou linguagem. O seu traço distintivo é ser *simbólica* por natureza (...) (pp. 27-29)

Em Matemática os objetos são abstrações que não existem no mundo real, só sendo possível pensar neles através de representações. No entanto, a relação entre a representação e o objeto não é biunívoca. Assim, um dado objeto matemático pode ter diversas representações – por exemplo, o número natural quatro pode ser representado por “4” (dígito),“IV” (numeração romana), “100” (no sistema binário), “quatro” (palavra da língua portuguesa), “four” (em inglês), “●●●●”, etc. Além disso, uma certa representação pode designar diferentes objetos, consoante o contexto – por exemplo, o sinal de = tanto pode representar uma equivalência como o resultado de uma operação. Por isso, não podemos interpretar uma representação matemática a não ser num contexto bem determinado e à luz de um sistema de representação com as suas regras e significados. Duval (2006) salienta que os objetos matemáticos não devem ser confundidos com a sua representação e refere que este é um dos grandes problemas da compreensão matemática. Uma vez que não é possível aceder a um objeto matemático sem o representar, é sempre ambígua a distinção entre o objeto e a sua representação.

Goldin (2008) distingue entre representações externas e internas. As representações externas, também designadas de semióticas, têm existência física, seja em papel, seja num ecrã de computador, seja noutro suporte. É o caso, por exemplo, de símbolos que representam os números e suas operações, notação algébrica, comandos da linguagem Logo, sistemas geométricos como a reta numérica e gráficos cartesianos, e outros diagramas. Bishop e Goffree (1986) categorizam as representações que se podem encontrar nas aulas de Matemática em quatro grupos principais – *símbolos* *matemáticos, linguagem verbal, figuras e objetos* – e indicam que "cada um destes tipos tem o seu próprio vocabulário ou código que precisa ser apreendido de forma a compreender as ideias matemáticas expressas" (p. 34). As figuras, imagens, ícones, etc. dão origem ao que podemos designar por *representações pictóricas*.

As representações internas emergem no decurso da atividade do indivíduo, nas suas interações com os contextos material e social. Duval (2004) refere que os registros semióticos de representação constituem "a margem de liberdade de um sujeito para objetivar ele mesmo uma ideia ainda confusa, um sentimento latente, para explorar as informações ou, simplesmente, para as comunicar a um interlocutor" (p. 30). Daí, o interesse em estimular os alunos a produzirem as suas representações próprias, como suporte para a aprendizagem. As representações externas que um aluno produz são fáceis de observar mas o mesmo não se passa com as suas representações internas. No entanto, pode procurar-se interpretar as representações externas usadas pelo aluno no decurso da realização de uma tarefa para perceber a sua representação interna e o seu raciocínio.

Webb, Boswinkel e Dekker (2008) argumentam que um mesmo conceito admite representações informais, pré-formais e formais. Nas representações informais os conceitos são abordados de forma concreta e em contexto familiar, nas pré-formais surgem aspetos progressivamente mais abstratos, e as formais assumem forma simbólica própria da Matemática convencional. Consideram importante que os alunos possam trabalhar com informais e pré-formais como preparação para o trabalho posterior com representações formais, de natureza simbólica, usualmente consideradas como as representações matemáticas convencionais. Defendem mesmo que, ao trabalhar com representações formais, há grande vantagem que os alunos possam recorrer a representações informais e pré-formais.

Para além de conhecerem diversas representações, os alunos têm de aprender a transformar representações. Duval (2004, 2006) apresenta duas transformações de representações que considera distintas: tratamentos e conversões. Os tratamentos são transformações que ocorrem dentro de um mesmo registo, como resolver equações ou sistemas de equações, realizar um cálculo sem sair de um dado sistema de notação ou ainda completar uma figura utilizando critérios ou simetria. As conversões são transformações que consistem em transformar uma representação de um registo para outro registo, como a passagem de uma equação algébrica para a sua representação gráfica ou a passagem de um enunciado ou afirmação em linguagem natural para linguagem simbólica. O NCTM (2007) refere que "representações distintas focam, geralmente, aspetos diferentes de relações e conceitos complexos" pelo que, para se tornarem conhecedores de conceitos matemáticos, "os alunos necessitam de uma diversidade de representações que suportem a sua compreensão" (p. 77). Para Duval (2004), a aprendizagem da Matemática requer a diversificação dos registos de representação, a diferenciação entre representante e representado e a coordenação dos diferentes registros.

Na sala de aula

O modo como as tarefas são trabalhadas na sala de aula tem uma influência decisiva na aprendizagem dos alunos. Stein e Smith (1998) abordam este assunto propondo um quadro relativo à realização das tarefas matemáticas na sala de aula no qual distinguem três fases (Figura 1): (i) as tarefas como aparecem nos materiais curriculares; (ii) como são apresentadas pelo professor; (iii) como são realizadas pelos alunos. A sua tese é que, muitas vezes, a natureza da tarefa muda quando se passa de uma fase a outra. Ou seja, a tarefa que o professor apresenta aos alunos, muitas vezes escrita no quadro e complementada com alguma informação oral, não é a exatamente a mesma tarefa que aparece nos materiais curriculares (principalmente o manual do aluno). Por outro lado, por diferenças de interpretação, ou por terem tido informações adicionais do próprio professor, ou de outras fontes, a tarefa que os alunos fazem muitas vezes não é a mesma que o professor apresentou no início. Tendo por base os casos de diversos professores, as autoras apontam fatores que contribuem para o sucesso ou fracasso de uma tarefa, dando especial destaque aos fatores associados com a manutenção de níveis cognitivos elevados ou com o seu declínio.

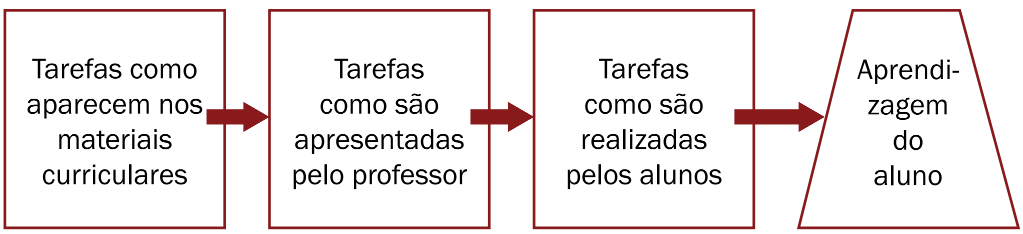


Figura 1 – Quadro para a análise das tarefas matemáticas (adaptado de Stein & Smith, 1998).

Pelo seu lado, Sullivan (2008), reconhece que alguns alunos são capazes de se envolver muito ativamente na resolução de uma tarefa aberta, ou de nível cognitivo elevado, enquanto outros precisam de um apoio adicional por parte do professor. Graduar esse apoio, sem pôr em causa as potencialidades educativas da tarefa, constitui um desafio adicional para o professor.

A concluir

Em síntese, a importância das tarefas como ponto de partida para a aprendizagem dos alunos é hoje amplamente reconhecida. Isso, aliás, também aconteceu no passado, levando numerosos autores a investir na produção de materiais didáticos onde surgiam tarefas dos mais diversos tipos, embora, frequentemente usando terminologias muito diversas. A novidade, hoje em dia, está numa maior diferenciação entre diversos tipos de tarefa e na compreensão que estas, para além de proporcionarem uma oportunidade de trabalhar certos conceitos e procedimentos matemáticos, têm de atender a aspetos fundamentais da aprendizagem relacionados com o modo como o aluno constrói o seu conhecimento trabalhando em diversos contextos. Outro aspeto igualmente importante é a compreensão da importância das diferentes representações que podem surgir e ser usadas na resolução das tarefas, bem como nos processos que ocorrem na sala de aula no trabalho com diferentes tipos de tarefa e que podem enriquecer ou empobrecer de modo muito significativo as experiências de aprendizagem dos alunos.

Referências

Abrantes, P. (1989). Um (bom) problema (não) é (só)... *Educação e Matemática, 8*, 7-10 e 35.

APM (1988). *A renovação do currículo de Matemática*. Lisboa: APM.

Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.

Bruner, J. (1999). *Para uma teoria da educação*. Lisboa: Relógio d'Água.

Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*. Bagotá: Merlín,

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehensionin a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 6*, 103-131.

Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 178-203). New York, NY: Routledge.

Kirshner, D. (2000). Exercises, probes, puzzles: A crossdisciplinary typology of school mathematics problems. *Journal of Curriculum Theorizing, 16*(2), 9-36.

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: IIE e APM.

OCDE (2004). *Learning for Tomorrow's World: First results from PISA 2003*. Paris: OCDE.

Palm, T. (2009). Theory of authentic task situations. In L. Verschaffel, B. Greer, W. Van Dooren & S. Mukhopadhyay (Eds.), *Words and worlds: Modeling verbal descriptions of situations* (pp. 3-19). Rotterdam: Sense.

Pólya, G. (2003). *Como resolver problemas*. Lisboa: Gradiva. (Edição original de 1945)

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema, 14*, 66-91.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(4), 268-275.

Sullivan, P. (2008). Developing mathematical connections and fostering procedural fluency: Are they in tension? In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepulveda (Eds.), *Proceedings of the International PME Conference* (Vol. 4, pp. 305-312). Morelia, Mexico.

Webb, D. C., Boswinkel, N., & Dekker, T. (2008). Beneath the tip of the iceberg. *Mathematics Teaching in the Middle School, 14*(2), 110-113.

TAREFAS

2. O papel das tarefas no desenvolvimento de estratégias de cálculo mental com números racionais

por Renata Carvalho e João Pedro da Ponte

2. O papel das tarefas no desenvolvimento de estratégias de cálculo mental com números racionais

Renata Carvalho
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
renatacarvalho@campus.ul.pt

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ulisboa.pt

• **Resumo:** Este capítulo apresenta quatro princípios para a construção de tarefas que visam contribuir para o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental e clarificação dos erros dos alunos no trabalho com números racionais. O nosso objetivo é refletir acerca da adequação de tarefas de cálculo mental com números racionais, elaboradas segundo estes princípios, à luz das estratégias e erros revelados pelos alunos. Os resultados mostram que as tarefas usadas contribuíram para o aparecimento de estratégias de cálculo mental cada vez mais flexíveis e concetuais, reforçando a importância da definição de princípios orientadores que nos permita focar no objetivo para o qual as tarefas foram construídas.

• **Palavras-Chave:** Tarefa, Cálculo mental, Números racionais, Estratégias, Erros.

Introdução

No *Programa de Matemática* (ME, 2007), a aprendizagem dos números racionais, inicia-se no 1.º ciclo, primeiro com a representação fracionária e posteriormente com a decimal, recorrendo igualmente a outras representações (pictórica, reta numérica, grelha 10x10, simbólica) e números de referência. Dá-se ênfase ao desenvolvendo de estratégias de cálculo mental e escrito, incluindo a realização de algoritmos com a representação decimal. No 5.º e 6.º ano, os alunos passam a trabalhar com novas representações dos números racionais (percentagem, numeral misto) e as quatro operações básicas. O programa considera que o cálculo mental e escrito deve continuar a ser desenvolvido uma vez que contribui para o desenvolvimento de sentido de número e de operação, o que constitui um objetivo transversal a todo o ensino básico.

Tendo em conta estas orientações curriculares e a importância que diversos autores (e.g., Bourdenet, 2007; Heirdsfield, 2011; Taton, 1969; Threlfall, 2002) atribuem ao desenvolvimento do cálculo mental, investigámos as estratégias que usam os alunos quando calculam mentalmente com números racionais e os erros e dificuldades que evidenciam. Esta investigação foi feita no quadro de uma experiência de ensino realizada no 6.º ano centrada em tarefas de cálculo mental com números racionais envolvendo as quatro operações e a discussão de estratégias e erros dos alunos. Procurámos saber, em especial, como evoluem as estratégias e os erros ao longo da experiência. Neste capítulo descrevemos os princípios que estiveram na base da construção das tarefas e refletimos acerca da adequação destas tarefas de cálculo mental com números racionais, elaboradas segundo estes princípios, à luz das estratégias e erros revelados pelos alunos. Em termos epistemológicos, assumimos que o conhecimento dos alunos se desenvolve através da atividade matemática que ocorre em momentos de trabalho individual e coletivo e, muito em especial, em momentos de reflexão acerca dessa mesma atividade.

Design de tarefas: Princípios orientadores

O desenvolvimento de estratégias de cálculo mental nos alunos deve ser sistemático e intencional (Taton, 1969) o que requer a criação de tarefas que promovam o desenvolvimento de capacidades de cálculo com compreensão, tanto com números naturais como com números racionais. Na nossa perspetiva, as tarefas são o ponto de partida para a atividade matemática dos alunos e a sua realização na sala de aula deve ser sistemática, promover a reflexão e ser objeto de discussão e partilha. A criação das tarefas para a experiência de ensino seguiu quatro princípios que consideramos importantes para promover o desenvolvimento do cálculo mental, relacionados com os contextos, as representações dos números racionais, as estratégias e erros dos alunos, e o nível cognitivo das tarefas.

Princípio 1 – Usar contextos que possam ajudar os alunos a dar significado aos números. Na perspetiva de Bell (1993) os contextos e os conceitos que os alunos deverão trabalhar são aspetos importantes na construção das tarefas. Segundo o autor, um conhecimento estruturado, por norma, está relacionado com o contexto em que foi aprendido, sendo difícil para o aluno transpor esse conhecimento para novas situações. Também Galen, Feijs, Figueiredo, Gravemejer, Herpen e Keijzer (2008) e Rathouz (2011) consideram que os contextos podem ajudar os alunos a dar significado aos números. Para perceber como os contextos podem promover ou dificultar o cálculo mental dos alunos, criámos dois tipos de tarefas envolvendo números racionais: exercícios em termos matemáticos e problemas em situações contextualizadas.

Princípio 2 – Usar diversas representações de um número racional. Nas várias tarefas os alunos têm a oportunidade de trabalhar com números racionais em diferentes representações (decimal, fração e percentagem) estando a representação usada em cada tarefa de acordo com o tópico que a professora está a trabalhar. No momento em que se estudam volumes usa-se sobretudo a representação decimal, no estudo das relações e regularidades usa-se a representação em fração e na organização e tratamento de dados usam-se as três representações. Esta opção irá permitir aos alunos o desenvolvimento do cálculo mental de forma integrada com uma aprendizagem dos números racionais prolongada no tempo e estabelecendo relações entre diferentes tópicos matemáticos. As diversas representações vão surgindo repetidamente e, por vezes, em simultâneo ao longo da experiência. O uso de diferentes representações dos números racionais permite aos alunos estabelecerem equivalências (Caney & Watson, 2003) bem como relações entre estas representações e as imagens mentais que possuem acerca dos conceitos matemáticos (Swan, 2008).

Princípio 3 – Ter em conta a investigação sobre o cálculo mental e os números racionais na construção de tarefas (estratégias de cálculo mental e aspetos da aprendizagem dos números racionais). No domínio do cálculo mental Heirdsfield (2011) considera que existem quatro elementos fundamentais que estão na base do desenvolvimento de estratégias dos alunos: (i) conhecer a numeração e compreender a grandeza e valor dos números, (ii) o efeito das operações sobre os números, (iii) ter capacidade para fazer estimativas para verificar a razoabilidade do resultado, e (iv) conhecer um conjunto de factos numéricos que permita calcular rapidamente e com precisão. No domínio dos números racionais e tendo em conta a perspetiva de vários autores (e.g., Behr, Post & Wachsmuth, 1986; Galen et al., 2008; Lamon, 2006; Rathouz, 2011), para além das decisões relativas aos contextos e representações já referidas, privilegiámos o uso de números de referência. Tendo em atenção o que referem Empson, Levi e Carpenter (2010), também considerámos os conhecimentos prévios dos alunos relativos aos números racionais, incluindo as operações estudadas no 5.º e 6.º ano importantes para o desenvolvimento de estratégias. Segundo os autores, cada estratégia surge em função da compreensão que cada criança tem acerca dos números e operações e das relações numéricas que lhe são familiares e que usa para estabelecer novas relações e efetuar o cálculo. Os autores denominam de pensamento relacional esta rede de relações que os alunos estabelecem. Relativamente às estratégias de cálculo mental com números racionais, Caney e Watson (2003) realçam a importância de perceber a relação entre diferentes representações de um número racional para desenvolver o cálculo mental com estes números. Num estudo realizado com alunos do 3.º ao 10.º ano, identificaram onze estratégias por eles usadas. Numa primeira fase, estes começam por usar *formas mentais de algoritmos escritos* e *imagens mentais pictóricas,* passando depois para estratégias relacionadas com conhecimentos que já possuem do trabalho com números naturais (como o *trabalho da esquerda para a direita* ou *com partes de um segundo número*), *estabelecem ligações,* recorrem a *adições e a multiplicações sucessivas* e utilizam *factos numéricos conhecidos* e *regras memorizadas*. As estratégias dos alunos no cálculo com números naturais são uma referência importante para o desenvolvimento das novas estratégias com números racionais. Numa fase mais avançada, e de forma gradual, as estratégias dos alunos passam a envolver a *utilização de representações equivalentes* de um número racional e a *transição entre operações inversas*. As autoras caracterizam as estratégias dos alunos de instrumentais, se estes aplicam factos e regras memorizadas, ou concetuais, se usam o conhecimento sobre números e operações.

Princípio 4 – Usar tarefas com diferentes níveis de exigência cognitiva. Tarefas com características diferentes podem levar os alunos a desenvolverem níveis de raciocínio diferentes (Henningsen & Stein, 1997). As tarefas permitem o uso de diferentes representações dos números racionais e o desenvolvimento de diferentes estratégias e formas de comunicação matemática, uma vez que os alunos têm de explicar e justificar os seus raciocínios e ser críticos face às explicações dos colegas.

Para a criação das tarefas, considerámos: (i) os níveis de desenvolvimento de cálculo mental (Callingham & Watson, 2004) dos alunos em cada representação dos números racionais; (ii) as possíveis estratégias de cálculo mental dos alunos em cada exercício ou problema propostos; e (iii) os possíveis erros e dificuldades que podem surgir no cálculo mental realizado em cada exercício ou problema. Assim, tivemos em atenção que, num nível mais básico de cálculo mental os alunos devem reconhecer metades na forma de 1/2 pelo que as primeiras tarefas proporcionam trabalho neste sentido. Num nível mais desenvolvido, devem ser capazes de usar estruturas de base (isto é, conhecimentos baseados em números de referência) para calcular com números menos familiares ou frações com denominadores diferentes, sendo propostas tarefas que gradualmente vão apelando ao uso, por exemplo, de terços ou sextos. Tendo em atenção as estratégias de cálculo mental com números racionais referidas por Caney e Watson (2003), construímos tarefas que potenciam o uso e desenvolvimento de relações numéricas, onde se inclui a mudança de representação ou as propriedades das operações. Para promover este tipo de atividade matemática, usámos fundamentalmente: números de referência tais como 1/4, 0,5 ou 75%; múltiplos; números racionais na representação decimal com uma ou duas casas decimais para facilitar a equivalência entre frações decimais e percentagens; diferentes representações de um número racional na mesma tarefa; expressões equivalentes que permitam o uso de propriedades das operações e relações numéricas; e problemas que os alunos podem resolver com expressões semelhantes às que previamente foram discutidas na aula. Enquanto algumas tarefas permitem aos alunos operar facilmente recorrendo a factos ou regras, outras requerem o uso de relações numéricas. Por exemplo, para calcular 1/2+1/2 os alunos apenas têm de usar factos numéricos conhecidos (duas metades formam a unidade). Esta é uma tarefa de nível cognitivo reduzido. Mas, para calcular ?x0,5=30, os alunos têm de relacionar números, mudar de representação ou usar propriedades das operações, o que confere à tarefa um nível cognitivo mais elevado.

Em todas as representações dos números racionais os alunos cometem erros (e.g., Lamon, 2006; Parker & Leinhardt 1995; Rathouz, 2011). Por exemplo, na adição e subtração na representação fracionária operam com numeradores e denominadores, na representação decimal operam ignorando o valor posicional dos algarismos e na representação em percentagem operam com os números ignorando o sinal %. McIntosh (2006) considera que os alunos cometem fundamentalmente dois tipos de erros: (i) concetuais e (ii) processuais. Na sua perspetiva, um erro concetual surge quando o aluno não compreende a natureza dos números ou a operação envolvida enquanto num erro processual o aluno sabe que estratégia usar mas comete erros de cálculo ao pô-la em prática.

Neste sentido criámos tarefas que pudessem proporcionar o aparecimento de certos erros para que estes pudessem ser discutidos e clarificados no momento da discussão coletiva. Assim, na adição e subtração de números racionais representados por frações existem situações em que os denominadores são diferentes, na representação decimal surgem operações envolvendo números com décimas e centésimas e na representação em percentagem selecionámos números que permitiam obter um resultado correto seguindo uma estratégia errada (e.g., para calcular 20% de 25, em que o cálculo de 25-20 dá o mesmo resultado que 0,2 x 25). Para nós, era importante perceber as estratégias e erros dos alunos e discutir estas situações na sala de aula para clarificar conceções erradas acerca dos números e das operações com números racionais.

Modo de trabalho na sala de aula

No que respeita à realização das tarefas na sala de aula, consideramos que as interações sociais, principalmente as que se verificam durante as discussões coletivas, são fundamentais para a aprendizagem da Matemática pois potenciam a reflexão dos alunos. Neste sentido, o professor deve: (i) criar um ambiente de sala de aula onde os alunos se sintam à vontade para falar das suas estratégias; (ii) escutar atentamente as suas explicações acerca dos seus métodos de cálculo pessoais; (iii) ser capaz de identificar estratégias particulares dos alunos e reforçar positivamente o seu uso; (iv) valorizar o conhecimento sobre os números e a capacidade dos alunos para executarem estratégias eficientes; e (v) assegurar que os alunos passam por experiências suficientes que lhes permitam desenvolver progressivamente estratégias cada vez mais sofisticadas (Thompson, 2009). Este tipo de ambiente de aprendizagem promove a interação aluno(s)/professor e aluno(s)/alunos(s) permitindo aos alunos discutirem os seus erros e comunicarem matematicamente, contribuindo assim para a melhoria da sua linguagem matemática. Quando surgem erros por parte dos alunos, estes devem ser discutidos na sala de aula ajudando à sua clarificação (Bell, 1993). A discussão de tarefas na sala de aula é fundamental uma vez que permite aos alunos partilharem como pensam quando calculam mentalmente e apresentarem os seus argumentos e justificações que serão validados pelos seus pares, sendo o professor um elemento indispensável na gestão desta discussão.

Metodologia de investigação

Este é um estudo qualitativo e interpretativo (Denzin & Lincoln, 2005)) com uma abordagem metodológica centrada no *design research* (Collins, Joseph, & Bielaczyc, 2004). Participam uma professora e uma turma do 6.º ano com 20 alunos que já trabalhou os números racionais em várias representações (decimal, fração, percentagem) e a primeira autora no papel de investigadora. Esta foi a primeira experiência de cálculo mental dos alunos com números racionais.

A recolha de dados decorreu entre fevereiro e maio de 2012, através de observação direta das aulas com tarefas de cálculo mental. As aulas foram áudio e vídeo-gravadas para posterior análise e reflexão acerca dos momentos de discussão coletiva. Para a análise de dados foram visionados os episódios da aula para identificar as estratégias de cálculo mental que os alunos referem nos momentos de discussão, os erros que cometem e como evoluem ao longo da experiência.. As categorias de análise são baseadas no estudo de Caney e Watson (2003), tendo presente a perspetiva de autores como Callingham e Watson (2004), Galen et al. (2008), Lamon (2006) e Empson e Carpenter (2010).

A experiência de ensino

A experiência de ensino foi elaborada pela investigadora (primeira autora) e discutida quinzenalmente com a professora. A condução da aula, incluindo os momentos de discussão, é da responsabilidade da professora, intervindo a investigadora pontualmente para esclarecer aspetos relacionados com a comunicação de estratégias e erros dos alunos. A experiência é composta por dez tarefas de cálculo mental, sete em contextos matemáticos, duas com problemas e uma tarefa mista, projetadas na sala de aula, semanalmente, usando um *PowerPoint* temporizado. As tarefas temporizadas foram encaradas como uma forma de desafiar os alunos a calcularem mentalmente com destreza. As estratégias que os alunos constroem individualmente no tempo estipulado são importantes mas tão ou mais importantes são as estratégias que constroem coletivamente na turma, através da discussão e partilha.

Cada tarefa é constituída por duas partes e tem uma duração prevista de 15 minutos. Os alunos têm 15 segundos para resolver cada exercício e 20 segundos para resolver cada problema, individualmente, e anotar o resultado numa folha de papel, seguindo-se um momento de discussão. Na primeira parte, das tarefas em contexto matemático, os alunos têm que escrever o resultado de uma expressão numérica e na segunda parte indicar o número que torna a igualdade verdadeira. Nos problemas apenas têm de escrever o resultado. Em qualquer um dos casos podendo registar cálculos intermédios.

Em termos gerais, as tarefas para além de promoverem o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental e a clarificação dos erros dos alunos também iriam permitir rever e consolidar o trabalho com números racionais de referência. Toda a experiência de ensino foi pensada em articulação com o trabalho da professora com os alunos e, por isso, como já referido, em cada aula, a representação do número racional usada estava de acordo com o tópico que a professora estava a trabalhar. No momento em que a professora estava a trabalhar relações e regularidades, os alunos foram desafiados primeiro a adicionar e a subtrair mentalmente números racionais representados por frações e depois a multiplicar e dividir frações. De seguida, no trabalho com volumes, realizaram cálculo mental com números racionais nas representações fracionária e decimal com as quatro operações, com exercícios e problemas, adicionaram e subtraíram decimais, multiplicaram e dividiram decimais e resolveram problemas com a representação fracionária e decimal. Aquando da abordagem do tópico estatística, realizaram cálculo mental com a representação em percentagem, depois multiplicação de números racionais usando as três representações e, posteriormente, usaram as quatro operações básicas e as três representações dos números racionais. Por fim, resolveram problemas usando as três representações e contextos relacionados com os tópicos trabalhados enquanto decorria a experiência de ensino.

A título de exemplo, explicamos de seguida os aspetos que considerámos importantes na construção de três das dez tarefas que os alunos resolverem na experiência de ensino.

Pensa rápido!

Qual o valor exato?

$a)\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}$	$b)\ \frac{3}{4}-\frac{1}{4}$	$c)\ \frac{1}{2}+\frac{2}{4}$	$d)\ \frac{3}{4}-\frac{1}{2}$	$e)\ \frac{4}{8}+\frac{2}{4}$
$f)\ \frac{1}{2}+?=1$	$g)\ ?-\frac{5}{10}=\frac{3}{10}$	$h)\ \frac{3}{6}+?=1$	$i)\ \frac{1}{2}-?=\frac{1}{4}$	$j)\ \frac{1}{2}+?=\frac{3}{4}$

Figura 1 – Primeira tarefa de cálculo mental da experiência de ensino.

A primeira tarefa de cálculo mental (figura 1) envolve adição e subtração de números racionais na representação fracionária e foi realizada pelos alunos no momento em que a professora tinha iniciado o trabalho com sequências e regularidades, por considerarmos que a representação fracionária é uma das mais usadas neste tópico.

Nesta tarefa foram usados números de referência, como 1/2, 1/4 e 3/4 (Galen et al., 2008) e, essencialmente apelámos ao trabalho com metades, uma vez que reconhecer e operar com metades na forma de fração é uma capacidade básica de cálculo mental com números racionais nesta representação (Callingham & Watson, 2004). Iniciámos com as operações adição e subtração por serem as primeiras que os alunos realizam com frações. Os cálculos a realizar envolvem números racionais na representação em fração com o mesmo denominador ou com denominadores múltiplos um do outro para permitir facilmente o recurso a equivalências.

Em termos de estratégias, esperávamos que os alunos recorressem a imagens mentais pictóricas de frações de referência para operar, a que se associa o conceito de fração como uma relação parte-todo, à inclusão das representações simbólicas em contextos com significado para estes (se a 3/4 de hora retiro 1/4 de hora, fica...), ao uso mental de algoritmos e ao uso de factos numéricos (e.g., duas metades constituem uma unidade...). Relativamente aos erros, prevíamos que os alunos operassem com numeradores e denominadores como se fossem números naturais, um erro frequente, calculassem erradamente frações equivalentes ou que manifestassem dificuldades na relação parte-todo ao imaginar mentalmente a representação pictórica das frações envolvidas.

A quinta tarefa (figura 2), em contexto matemático, envolve multiplicação e divisão de números racionais na representação decimal, tendo sido realizada no momento em que os alunos estavam a abordar o tópico volumes. Tendo em conta os níveis de desenvolvimento de cálculo mental de Callingham e Watson (2004), foram usados numerais decimais equivalentes a representações de referência, como 1/2, 1/4 e 1/5; multiplicação de dois decimais com o mesmo número de casas decimais ou diferentes; divisão por 0,5 e divisão de decimais quando os dígitos são múltiplos.

Esperávamos que os alunos, tendo em conta o trabalho realizado no 1.º ciclo com números racionais na representação decimal e o trabalho realizado nas primeiras tarefas da experiência de ensino, tivessem estratégias baseadas em regras memorizadas como a multiplicação por potências de 10, o uso de factos numéricos para a reconstrução da unidade (e.g., 0,25 x 4 = 1), a mudança de representação de decimal para fração, o uso de equivalências, a decomposição, a compensação e as propriedades das operações. No que se refere a erros, esperávamos que os alunos comparassem erradamente dois números racionais na representação decimal; escrevessem o produto ou quociente não considerando corretamente o valor posicional dos algarismos; ou estabelecessem equivalências erradas entre representações de um número racional e manifestassem dificuldades no sentido de operação multiplicação e divisão de decimais.

Pensa rápido!
Qual o valor exato?

a) $0{,}25\times4$ *b)* $12{,}2\div0{,}5$ *c)* $0{,}6\times0{,}30$ *d)* $0{,}14\div0{,}2$ *e)* $4{,}2\times0{,}2$

f) $?\times0{,}5=30$ *g)* $2{,}1\div?=8{,}4$ *h)* $?\times0{,}4=0{,}16$ *i)* $0{,}82\div?=1{,}64$

j) $25{,}5\times?=5{,}1$

Figura 2 – Quinta tarefa de cálculo mental da experiência de ensino.

Na última tarefa da experiência de ensino (figura 3) de que, por questões de espaço, apenas apresentamos a primeira parte, o contexto dos problemas relaciona-se com tópicos matemáticos que a professora trabalhou na aula de Matemática ao longo da realização da experiência de ensino (nomeadamente, Estatística, medida, comparação de números racionais e percentagem). Foram criados problemas que pudessem originar expressões semelhantes às discutidas ao longo da experiência de ensino (por exemplo, em a) os alunos teriam de formar a unidade partindo de 0,40 e em d) podem usar 10% como valor de referência para efetuar o cálculo).

Pensa rápido!

Qual o valor exato?

a) Lançou-se uma moeda ao ar 20 vezes e registaram-se os valores numa tabela de frequências relativas. Se à face Euro corresponder 0,40 de frequência relativa, qual a frequência relativa da face nacional?

b) A avó da Sofia vai-lhe fazer uma saia. De uma peça de tecido com 8,16 m retirou $\frac{1}{8}$. Que porção de tecido usou?

c) A mãe da Catarina fez um bolo de chocolate. Ao almoço a Catarina comeu $\frac{1}{10}$ e o pai $\frac{1}{5}$. Ambos comeram mais ou menos de metade do bolo de chocolate?

d) Uma camisola custa 25€. O Vasco comprou-a com 20% de desconto. Calcula o valor do desconto.

Figura 3 – Última tarefa de cálculo mental da experiência de ensino.

Como estes problemas envolvem as três representações dos números racionais, esperávamos que os alunos usassem algumas das estratégias que já referimos anteriormente, mas que deixassem de cometer alguns dos erros manifestados, como a adição e subtração de numeradores e denominadores na adição e subtração de números racionais na representação fracionária, ou a adição/subtração de números racionais na representação percentagem com outros valores (e.g., para calcular 20% de 25, calcular 25-20). Esperávamos que os alunos continuassem, a ter dificuldades na interpretação do problema e na escolha da operação correta para o resolver. Estes são aspetos da aplicação do conhecimento e destreza com números e operações em situações de cálculo que McIntosh, Reys e Reys (1992) destacam como importantes para a aquisição do sentido de número, e onde os alunos manifestam dificuldades.

As tarefas de cálculo mental e as estratégias dos alunos

Considerando o objetivo para o qual as tarefas foram criadas, apresentamos nas tabelas de 1 a 4 exemplos de questões que constam das tarefas da experiência de ensino e algumas das estratégias dos alunos para resolver essas questões, bem como alguns dos erros revelados aquando da discussão coletiva. De seguida, analisamos as estratégias e os erros que se evidenciaram refletindo acerca da adequação dos princípios definidos para a construção das tarefas de cálculo mental.

Contextos. O recurso a dois tipos de contextos (exercícios e problemas) nas tarefas de cálculo mental com números racionais fez-nos perceber que, nos problemas, os alunos usam mais estratégias concetuais do que instrumentais ou uma combinação destas duas (tabela 2). Assim, Marta, Eva e Lídia usam estratégias concetuais baseadas na mudança de representação e em equivalências, enquanto Maria recorre a uma equivalência e depois aplica a regra do algoritmo da multiplicação de frações usando uma combinação de estratégias instrumentais e concetuais.

Nos exercícios (tabela 1), os alunos começam por usar estratégias instrumentais aplicando regras memorizadas, como fizeram João e Ana, mas, a partir da tarefa 3, quando surgem duas representações diferentes (fração e decimal) em simultâneo, começam a surgir estratégias mais concetuais baseadas na mudança de representação.

A utilização de exercícios e problemas nas tarefas de cálculo mental tinha como objetivo diversificar contextos e permitir aos alunos o estabelecimento de relações entre a representação simbólica dos números racionais e situações que pudessem ser resolvidas usando essas mesmas representações simbólicas. Por isso, surgem estrategicamente três tarefas com problemas após cada duas/três tarefas com exercícios. Marta (tabela 2) refere que: "Eu fiz...da conta e) $\left[0{,}74 \div \frac{1}{4} = 3\right]$ quando estavamos a fazer, eu lembrei-me que os 12/4 eram equivalente a 3", mostrando que uma expressão realizada anteriormente foi importante para estabelecer equivalências num problema da tarefa 3.

Tabela 1 – Estratégias dos alunos em tarefas com exercícios. ▶▶

Tarefa	Questão	Resposta dos alunos	Estratégia
Fração			
1	$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}=$ __	"Transformei o meio em $\frac{2}{4}$ depois 3 – 2, 1" (João)	Regra do algoritmo de adição de frações
2	$\frac{1}{4}\div$ __ $=\frac{1}{2}$	"Como eu sei que $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ dá $\frac{1}{4}$ pus logo $\frac{1}{2}$" (Ana)	Facto numérico Relação numérica
Decimal			
4	0,7 + __ = 1	"Eu vi logo, para dar 1 era 7+3, que dá 10. Tirei o zero e vi logo que era 0,3" (Rogério)	Mudança de representação
5	12,2 : 0,5 = __	Eu sabia que... transformei logo o 0,5 em $\frac{1}{2}$ e depois como sabia que sempre que dividir $\frac{1}{2}$ era sempre vezes 2, então fiz assim" (Marta)	Mudança de representação Mudança de operação
Percentagem			
6	75% de 80	"Eu fiz 80 : 4 que dá 20 e fiz 80 – 20 que dá 60" (Dina)	Mudança de operação Relação parte-todo
7	10% de __ = 5	"10% pode representar-se por $\frac{10}{100}$, então eu vi que, como 5 é metade de 10, o resultado que faltava tinha que ser metade de 100 e para ser equivalente a 5 tinha de ser metade de 100" (João)	Equivalências

Várias representações			
3	$\frac{1}{5} \times 0{,}25 = \_$	"Deu-me $\frac{1}{20}$ porque eu transformei 25 centésimas num quarto. 5×4 é 20 como denominador, 11 é 1 como numerador. Fica $\frac{1}{20}$" (Eva)	Mudança de representação
8	0,2 *de* 10	"Fiz 20% de 10 que é 2" (Pedro)	Mudança de representação

No entanto, em alguns problemas, os alunos manifestaram dificuldades em associar uma expressão já conhecida (1-0,40) que, segundo a professora, tinha sido realizada numa aula relativamente próxima da aula de cálculo mental no cálculo de frequências relativas em organização e tratamento de dados. Por exemplo, no problema "*Lançou-se uma moeda ao ar 20 vezes e registaram-se os valores numa tabela de frequências relativas. Se à face Euro corresponder 0,40 de frequência relativa, qual a frequência relativa da outra face?*" apenas 4 dos 20 alunos conseguiram resolver corretamente o problema. Os restantes alunos manifestaram dificuldades em compreender a situação apresentada e em estabelecer relações com situações que já conheciam e estavam a trabalhar em organização e tratamento de dados.

Consideramos que o uso de dois contextos foi útil para ajudar os alunos a perceberem que é importante relacionarem conhecimentos que possuem acerca dos números e suas operações tanto em tarefas de contexto matemático como de problemas, quer nas sessões de cálculo mental quer nas restantes aulas de Matemática.

Diferentes representações de um número racional. Uma das estratégias mais usadas pelos alunos foi a mudança de representação, uma estratégia reconhecidamente importante no cálculo mental com números racionais (Caney & Watson, 2003). No cálculo mental com frações, numa fase inicial, os alunos usaram sobretudo estratégias instrumentais aplicando regras, como fizeram João e Ana (tabela 1). A partir da tarefa 3, onde surgem as representações decimal e fracionária em simultâneo, os alunos começam a usar mais a mudança de representação. Na tabela 1, as estratégias dos alunos mostram-nos que: Rogério prefere adicionar números racionais na representação decimal, mudando a representação e considerando o

Tabela 2 – Estratégias dos alunos em tarefas com problemas.

Tarefa	Problema	Resposta dos alunos	Estratégia
Várias representações			
3	Quatro livros de banda desenhada custam 12,8€. **Qual o preço de cada livro?**	"Eu fiz… da conta e) $[0{,}74 \div \frac{1}{4} = 3]$ quando estavamos a fazer, eu lembrei-me que os $\frac{12}{4}$ eram equivalente a 3. Então fui ver que na tabuada do 4 qual é que dava 12 e era o 3 e depois fui ver… e depois o outro já fiz…dividi 8 por 4 e deu 2 e fiz 3,2" (Marta)	Equivalências Opera da esquerda para direita
3	Para fazer refresco de laranja é necessário $\frac{1}{10}$ de concentrado por cada $\frac{1}{2}l$ de água. **Que quantidade de concentrado se deve usar para 1,5 l de água?**	"Eu fiz, um meio, meio litro vezes 3 para dar um e meio. Depois fiz 3 sobre 1 vezes $\frac{1}{10}$ que é $\frac{1}{10} \times \frac{3}{1}$" (Maria)	Equivalências Regra do algoritmo de multiplicação de frações
6	Uma tina tem de capacidade 22,5 l de água. **Quantos baldes de $\frac{1}{2}l$ são necessários para encher por completo a tina?**	"Deu-me 45 baldes. Bastou--me multiplicar 22,5 por 2 e deu-me logo 45 baldes. Porque $\frac{1}{2}$ para dar uma unidade temos de somar 0,5 duas vezes, por isso multipliquei por 2" (Eva)	Mudança de representação Equivalências
10	Uma camisola custa 25€. O Vasco comprou-a com 20% de desconto. **Calcula o valor do desconto.**	"5€. 20% transformei em 20 centésimas. 20 centésimas é $\frac{1}{5}$, então fiz 25€ $\times \frac{1}{5}$ que é o mesmo que dividir por 5, que me deu 5"(Lídia)	Mudança de representação

decimal referente a 10/100; Marta usa 1/2 em vez de 0,5; Dina, para calcular 75%, em vez de multiplicar por 0,75, divide por 4, mostrando saber que falta 1/4 a 75% para ter o todo; Eva, na multiplicação de uma fração por um decimal, usa 1/4 em vez de 0,25; e Pedro, para calcular 0,2 de 10, calcula 20%.Na tabela 2, as estratégias de cálculo mental dos alunos em problemas envolvendo várias representações mostram igualmente o uso da mudança de representação. Eva pensa em 1/2 como sendo 0,5 e Lídia calcula 20% multiplicando por 1/5. Os alunos usaram mais a mudança de representação de decimal ou percentagem para fração principalmente quando a operação envolvida era a multiplicação ou divisão de números racionais.

Estratégias de cálculo mental e aspetos da aprendizagem dos números racionais. Para promoverem o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental, as tarefas devem incentivar o uso dessas mesmas estratégias por parte dos alunos, como, por exemplo, o recurso a relações numéricas onde se incluem a mudança de representação e equivalências entre operações ou a construção de estratégias através de discussões coletivas.

Relativamente a aspetos da aprendizagem dos números racionais, o uso de números de referência facilita a construção das estratégias referidas anteriormente, bem como números múltiplos de números de referência. O conhecimento acerca dos possíveis erros dos alunos é igualmente importante para que o professor os possa identificar, discutir e clarificar. Para tal, as tarefas devem potenciar o aparecimento desses erros caso a aprendizagem dos alunos acerca dos números racionais seja pouco consistente. Nas tabelas 3 e 4 apresentamos algumas das estratégias erradas dos alunos para operar com números racionais.

A primeira tarefa envolve frações que representam metade ou equivalente, uma vez que operar com metades é um nível básico de cálculo mental (Callingham & Watson, 2004). Inicialmente, os alunos recorreram à aplicação de uma regra (algoritmo), como fez João (tabela 1), mas posteriormente, reconhecem frações equivalentes a metade e usam este conhecimento como um facto numérico abandonando a aplicação de regras.

Privilegiámos o uso de números de referência (e.g., tarefas 2, 3 e 6 da tabela 1) potenciando assim a mudança de representação, a estratégia mais usada pelos alunos no cálculo mental, e contribuindo para a compreensão das quantidades representadas pelos números racionais. Na representação decimal usámos apenas décimas e centésimas para facilitar a mudança de representação para percentagem.

Tabela 3 – Erros dos alunos em tarefas com exercícios.

Tarefa	Questão	Resposta dos alunos	Erro
Fração			
1	$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}$	"A mim deu-me $\frac{3}{4}$. Deixei o 4 em baixo e somei os numeradores" (Rúben) "Eu apliquei a lei do corte e depois deu-me $\frac{2}{4}$" (Bruno)	Opera com numeradores e mantem denominadores Aplica uma regra memorizada para a multiplicação de frações
2	$\frac{4}{6} \div \frac{2}{6}$	"A mim deu-me $\frac{2}{6}$. Como os numeradores... os denominadores eram iguais fiz só 4 : 2" (Dina)	Aplica à divisão as regras do algoritmo de adição de frações
Decimal			
4	__ – 4,3 = 0,5	"Deu-me 3 unidades e 8 décimas. (...) Ao 3 tirei 8" (José)	Aplica uma propriedade da operação (o aditivo é igual à soma do subtrativo com o resto) mas apenas na parte decimal.
5	0,6 × 0,30	"A mim deu-me 18 décimas (...) Eu fiz logo 6 × 3 que dá 18, então juntei o zero e depois pus a vírgula" (Lídia)	Opera com decimais mas não considera o valor posicional dos algarismos
Percentagem			
7	90% de 30	"Deu-me 3. Fiz 90 : 3 que me deu 30" (Luís)	Tenta encontrar uma relação entre os números que visualiza esquecendo que a percentagem atua como um operador
Várias representações			
3	$2,4 \div \frac{1}{2}$	"Deu-me 1,2. Então fiz 2,4 a dividir por um meio. Primeiro dividi o 2 por $\frac{1}{2}$ que me deu 1 e depois dividi 4 por $\frac{1}{2}$ e deu-me um... e pus 1,2... deu-me 2" (Marta)	Usa a divisão por ½ como sendo equivalente a dividir por 2.

Para potenciar o uso de equivalências, usámos números múltiplos de 5 e 10 ou números racionais na representação decimal que, caso fossem operados como números naturais, pudessem ser pares ou divisíveis por 5 (e.g., tarefa 8 da tabela 1 e tarefa 3 da tabela 2). É disto exemplo a estratégia de João (tarefa 7 da tabela 1), que analisa a relação parte-parte ($\frac{5}{10\%}$) e percebe que 5 é metade de 10, logo a relação $\frac{?}{100}$ teria de se manter para que as razões fossem equivalentes. Também Eva (tarefa 7 da tabela 2), para resolver o problema, baseia-se em equivalências: se para ter a unidade necessita de 0,5 × 2, para ter o número total de baldes, necessita de 22,5 × 2.

Na divisão de frações, para promover o uso de outras estratégias para além da regra de "inverte e multiplica" propusemos a divisão de duas frações em que os denominadores são iguais ou múltiplos um do outro (tarefa 2, tabela 3). Incentivámos o desenvolvimento de relações numéricas, recorrendo, em tarefas diferentes ou na mesma tarefa em momentos diferentes, a operações onde se verificam relações numéricas. Por exemplo colocámos na tarefa 1 a questão $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$ e na mesma tarefa, na segunda parte, a questão $\frac{1}{2}+\_=\frac{3}{4}$. Para resolver a questão $\frac{1}{4}\div\_=\frac{1}{2}$ da tarefa 2, Ana (tabela 1) refere que: "Como sei que $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ dá $\frac{1}{4}$ pus logo" revelando compreender e usar a relação entre a divisão e a multiplicação para calcular o valor em falta na divisão.

Nas operações com números racionais representeados por frações é frequente os alunos operarem com numeradores e denominadores como se fossem números naturais, ignorando a significado de uma fração. Para verificar a existência deste erro, ou a aplicação desadequada de regras memorizadas numa dada operação, as tarefas contemplam, por exemplo, a adição/subtração de frações com denominadores diferentes (tarefa 1, tabela 3) ou a divisão de frações com o mesmo denominador (tarefa 2, tabela 3). Assim, Rúben adicionou os numeradores, escolhendo o maior denominador para a fração resultante, Bruno aplicou na adição de frações uma regra que usa na multiplicação de uma fração pela sua inversa e Dina recorreu a um procedimento na divisão de frações semelhante ao da adição, operando com os numeradores e mantendo os denominadores uma vez que estes eram iguais.

Nas operações com números racionais na representação decimal, um erro frequente dos alunos é operar sem considerarem o valor posicional dos algarismos como fez Lídia (tarefa 5, tabela 3) ou cometer erros na aplicação das propriedades das operações como fez José, que aplica uma propriedade da subtração, mas só a aplica à parte decimal subtraindo a parte inteira. Na realidade, José adiciona a parte inteira e subtrai a parte decimal quando não existe valor a transportar.

Nas quatro operações, mas principalmente na multiplicação e divisão, alguns dos erros poderiam não existir caso os alunos revelassem sentido de operação e sentido crítico perante o resultado. No caso de Marta (tarefa 3, tabela 3), a aluna verbaliza que deve dividir por um meio mas o que faz na realidade é dividir por 2. Caso tivesse sentido de operação perceberia que o resultado obtido não era possível, uma vez que ao dividir por um número racional menor que 1 o quociente não diminui, ao contrário do que acontece quando se divide por um número natural.

No cálculo de percentagem um erro comum é operar com os valores dados no exercício ou problema ignorando o significado do sinal de %, como fez Luís (tarefa 7, tabela 3). O aluno assume que o resultado é 3 pois tentou encontrar um valor que operado com 90 desse 30. No cálculo de 5% de __ = 3, a maioria dos alunos responde 15, pois multiplica 3 por 5. Este tipo de erros realça a necessidade de continuar a desenvolver nos alunos o sentido crítico e a capacidade de estimar e avaliar a razoabilidade de um resultado, sendo a discussão na sala de aula fundamental para atingir este objetivo.

Nos problemas, a interpretação do enunciado é fundamental para que o aluno consiga seguir uma estratégia que o conduza ao resultado certo. A inclusão de pequenos problemas teve o objetivo de reforçar a importância da interpretação e de contextualizar expressões iguais ou semelhantes às utilizadas nos exercícios. Os erros dos alunos nos problemas revelam não só dificuldades de interpretação, como foi o caso de Ana (tarefa 3, tabela 4), que possivelmente associou 1,5 a 1500, mas também erros concetuais como Rogério que revelou alguma confusão entre o conceito envolvido no problema (área) e o conceito que revelou usar na sua resposta (perímetro).

Nível cognitivo das tarefas. Propor exercícios (tabela 1) e problemas (tabela 2) de cálculo mental envolve desafios diferentes para os alunos. Num exercício a operação já está explicita sendo necessário efetuar apenas o cálculo, enquanto um problema requer uma interpretação da situação e escolha da operação adequada à sua resolução. Como exercícios, propusemos expressões que os alunos devem calcular e indicar o resultado (e.g., tarefas 1, 3, 5, 6 e 8 da tabela 1), mas também expressões onde devem calcular o valor em falta dado um determinado resultado (e.g., tarefas 2, 4 e 7 da tabela 1).

Tabela 4 – Erros dos alunos em tarefas com problemas.

Tarefa	Problema	Resposta dos alunos	Erro
Várias representações			
3	O João desenhou, numa folha de papel, a distância de sua casa à escola através de um segmento de 1,5 cm. Sabendo que a escala que usou foi de 1:2000, qual a distância real de casa à escola?	"A mim deu-me 1500. Mas esta eu acho que... se 1 é 2000 e se nós queriamos um meio [1,5]... um e meio fiz 2000 menos... eu não sei explicar. Que dava 1500" (Ana)	Erro de procedimento em que confunde 1,5 com 1500.
6	A Rita construiu um cubo em que a área da base era 0,36 m^2. Qual a medida do lado?	"Deu-me 9 centésimas porque é um cubo e é 36 a dividir por 4 que era 9" (Rogério)	Estratégia baseada no perímetro quando o conceito envolvido era área.

É de notar que tarefas com níveis cognitivos diferentes requerem por parte dos alunos raciocínios e estratégias com níveis de exigências diferentes. Para calcular $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}$, João (tarefa 1, tabela 1), apenas teve de aplicar uma regra, mas para calcular 10% de __ = 5 (tarefa 7, tabela 1) o mesmo aluno teve de recorrer a equivalências.

No âmbito das percentagens, seguindo Parker e Leinhardt (1995), propusemos três tipos de exercícios: a aplicação de uma percentagem (e.g., 75% de 80) que envolve a multiplicação de um número natural por um decimal ou uma estratégia mais complexa envolvendo a relação parte-todo e a mudança de representação, como fez Dina (tabela 1), ou apenas a mudança de representação, como fez Lídia (tabela 2); o cálculo do valor sobre o qual aplicamos uma percentagem (e.g., 10% de __ = 5) que levou João (tabela 1) a usar equivalências; e o cálculo da percentagem aplicada a um valor (e.g., __% de 30 = 0,3) que permitiu a Pedro mostrar algum pensamento algébrico ao generalizar um procedimento que envolve a multiplicação de números racionais: "É assim, 10% de 30 é 3 e 10% de 3 é 0,3. 10% de 10% é 1% (...) 10% de 10% de 30. A stora não diz metade de metade é $\frac{1}{4}$!". Este aluno mostra uma estratégia intuitiva, com um argumento baseado num facto que conhece "metade de metade é " em que aplica um operador a outro operador.

Consideramos que a opção por tarefas de níveis cognitivos diferentes foi bem-sucedida, dada a variedade de estratégias que proporcionou. De forma crescente os alunos foram apresentando estratégias mais complexas começando pela aplicação de regras memorizadas e terminado em raciocínios que envolvem pensamento algébrico.

Conclusão

A análise da adequação das tarefas de cálculo mental com números racionais, à luz das estratégias e erros revelados pelos alunos, reforçou a nossa convicção de que a construção de tarefas deve basear-se em princípios orientadores alinhados com o objetivo pretendido. O nosso objetivo era promover o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental e clarificação de erros dos alunos no trabalho com números racionais, e é o momento de fazer o balanço sobre os quatro princípios considerados para a criação das tarefas.

O uso de dois contextos diferentes (exercícios e problemas) mostrou que nos problemas os alunos usam mais estratégias concetuais do que instrumentais e que nos exercícios os alunos começam por usar estratégias instrumentais evoluindo para estratégias concetuais. Estes dois contextos complementam-se e ajudam os alunos a compreender como é que as representações simbólicas dos números racionais e suas operações podem modelar situações do dia-a-dia, sendo uma mais-valia para a construção do sentido de número e de operação dos alunos. Esta complementaridade revela-se portanto adequada, podendo ser reforçado o uso de problemas com o intuito de melhorar a capacidade de interpretação, onde os alunos mostraram dificuldades, e a relação entre conhecimentos que os alunos possuem sobre números e operações tanto em contextos matemáticos como em problemas.

O uso gradual e sistemático de diferentes representações dos números racionais ao longo da experiência de ensino fez emergir a mudança de representação como uma estratégia potente no cálculo mental com números racionais e promoveu a transição de estratégias instrumentais para estratégias mais concetuais. A mudança da representação decimal para fração e de percentagem para fração foi uma das estratégias mais usadas pelos alunos. Considerar o uso de diferentes representações como um princípio orientador na construção das tarefas permitiu aos alunos desenvolverem flexibilidade no uso das representações fracionária, decimal e percentagem qualquer que fosse a operação a realizar.

Assumir o contributo da investigação sobre o cálculo mental e os números racionais como princípio orientador para a construção das tarefas, reforçou a eficácia e adequação dos outros três princípios. O recurso a números de referência apoiou a mudança de representação enquanto estratégia de cálculo mental com números racionais, o uso de números múltiplos de números de referência, de operações diferentes onde se verificam relações numéricas e tarefas de níveis cognitivos diferentes potenciou o recurso a equivalências e relações numéricas. O conhecimento dos erros comuns dos alunos no trabalho com números racionais em cada uma das representações fez-nos antecipar o aparecimento desses erros para que pudessem ser discutidos e clarificados.

A variação do nível cognitivo das tarefas permite aos alunos desenvolverem estratégias pessoais cada vez mais complexas. Alunos que usam estratégias instrumentais no cálculo do resultado de uma expressão, ao ser-lhe apresentada uma expressão em que têm de calcular um valor em falta usam estratégias concetuais. Alguns alunos, neste último tipo de tarefa, revelam aspetos notáveis de pensamento algébrico reforçando a tese de que tarefas com características diferentes podem levar os alunos a desenvolverem modos de raciocínio diferentes (Henningsen & Stein, 1997).

Como reflexão final, consideramos que os princípios orientadores seguidos na construção das tarefas revelaram-se adequados e que as tarefas contribuíram para desenvolver as estratégias de cálculo mental dos alunos e para detetar e discutir os seus erros. Diferentes contextos fizeram emergir estratégias diferentes, diferentes representações permitiram aos alunos ser flexíveis nas suas estratégias e o uso de tarefas com níveis cognitivos diversos e contemplando aspetos da aprendizagem do cálculo mental e dos números racionais promoveram o aparecimento de estratégias cada vez mais concetuais ao longo da experiência de ensino. Gradualmente, os alunos foram usando estratégias cada vez mais diversificadas e flexíveis. Desenvolver o cálculo mental dos alunos de forma intencional e integrada com tarefas pensadas com um propósito específico, como apresentámos, permite rever e consolidar aprendizagens relacionadas com Números e Operações e também com Álgebra, Geometria e Estatística.

Referências

Behr, M. J., Post, T. R., & Wachsmuth, I. (1986). Estimation and children's concept of rational number size. In H. L. Schoen (Ed.), *Estimation and mental computation* (pp. 103-111). Reston, VA: NCTM.

Bell, A. (1993). Principles for the design of teaching, *Educational Studies in Mathematics,* 24(1), 5-34.

Bourdenet, G. (2007). Le calcul mental. *Activités mathématiques et scientifiques,* 61, 5-32.

Callingham, R., & Watson, J. M. (2004). A developmental scale of mental computation with part-whole numbers. *Mathematics Education Research Journal,* 16(2), 69-86.

Caney, A., & Watson, J. M. (2003). Mental computation strategies for part-whole numbers. *AARE 2003 Conference papers, International Education Research.* (retirado de http://www.aare.edu.au/03pap/can03399.pdf em15/05/2010).

Collins, A., Joseph, D., & Bielaczyc, K. (2004). Design research: Theoretical and methodological issues. *The Journal of the Learning Sciences,* 13(1), 15–42.

Denzin, N. & Lincoln, Y. S. (2005). Introduction: The discipline and practice of qualitative research. In N. Denzin & Y. S. Lincoln (Ed.) *The Sage handbook of qualitative research.* Thousand Oaks, CA: SAGE.

Empson, S., Levi, L., & Carpenter, T. (2010). The algebraic nature of fraction: Developing relational thinking in elementary school. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 409-428). Heidelberg: Springer.

Galen, F., Feijs, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, K., Herpen, E., & Keijzer, R. (2008). *Fractions, percentages, decimals and proportions: A learning-teaching trajectory for grade 4, 5 and 6.* Rotterdam: Sense.

Heirdsfield, A. (2011). Teaching mental computation strategies in early mathematics. *Young Children,* 66(2), 96-102.

Henningsen, M., & Stein, M. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(5), 524-549.

Lamon, S. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content and instructional strategies for teaching* (2nd ed.). Mahwah, NJ: Erlbaum.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics,* 12(3), 2-8 & 44.

McIntosh, A. (2006). *Mental computation of school-aged students: Assessment, performance level and common errors.* (retirado de http://www.mai.liu.se/SMDF/madif5/papers/McIntosh.pdf em 21/10/2011).

Ministério da Educação. (2007). *Programa de Matemática do ensino básico. Lisboa.* (retirado de http://sitio.dgidc.medu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf em 29/02/2008).

Parker, M., & Leinhardt, G. (1995). Percent: A privileged proportion. *Review of Educational Research,* 65(4), 421-481.

Rathouz, M. M. (2011). Making sense of decimal multiplication. *Mathematics Teaching in the Middle School,* 16(7), 430-437.

Swan, M. (2008). Designing a multiple representation learning experience in secondary algebra, *Educational Designer,* 1, 1-17.

Taton, R. (1969). *O cálculo mental* (Tradução M. A. Videira). Lisboa: Arcádia.

Thompson, I. (2009). Mental calculation. *Mathematics Teaching.* 40-42.

Threlfall, J. (2002). Flexible mental calculation. *Educational Studies in Mathematics,* 50, 29–47.

TAREFAS

3. Modelação matemática no ensino profissional: As tarefas e o conhecimento extra-matemático

por Cláudia Oliveira, Hélia Oliveira

3. Modelação matemática no ensino profissional: As tarefas e o conhecimento extra-matemático

Cláudia Oliveira

Instituto Profissional de Transportes, Loures

claratejo@gmail.com

Hélia Oliveira

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

hmoliveira@ie.ulisboa.pt

• **Resumo:** Este capítulo discute a construção e exploração de uma tarefa que envolve a modelação matemática de uma situação próxima da realidade, realizada por alunos do 2.º ano de um curso profissional de nível secundário. A tarefa foi construída segundo os princípios das *tarefas geradoras de um modelo*. A análise de dados centra-se na atividade desenvolvida por um grupo de alunos, segundo um modelo do ciclo de modelação matemática. Os resultados evidenciam o papel do conhecimento extra-matemático nos processos de modelação, reforçando a importância das características específicas da tarefa proposta.

• **Palavras-Chave:** Ciclo de modelação, Modelação matemática, Conhecimento extra-matemático, Tarefas geradoras de um modelo, Ensino profissional.

Introdução

As aplicações e modelação matemática constituem o tema transversal no *Programa de Matemática para os Cursos Profissionais de Nível Secundário* (ME, 2004), onde é preconizado que o ensino dos vários temas seja suportado por atividades que contemplem a modelação matemática e o estudo de situações da realidade, adequadas a cada curso. Neste programa perspetiva-se também o estabelecimento de conexões entre temas matemáticos, aplicações da Matemática noutras disciplinas e com relevância para interesses profissionais. No que se refere à proposta de tarefas relevantes e com significado para os alunos e à criação de oportunidades para a expressão e fundamentação de opiniões, o mesmo documento curricular salienta a importância do professor como mediador da estruturação das aprendizagens, disponibilizando ferramentas matemáticas necessárias e participando na organização das ideias. As situações apresentadas, que podem apresentar vários níveis de resolução, contribuem "para o desenvolvimento da autoconfiança dos estudantes criando-lhes oportunidades para se exprimirem, fundamentarem as suas opiniões e revelarem espírito crítico, de rigor e confiança nos seus raciocínios" (p. 5).Também de forma idêntica, o documento *Princípios e Normas* (NCTM, 2007) destaca um ensino da Matemática que apele às capacidades de compreensão e de aplicação da Matemática, salientando que as aptidões que o mundo profissional hoje exige, ultrapassaram a rotina e os procedimentos mecânicos que antes se consideravam como desejáveis, pelo que "as exigências para os locais de trabalho e para a participação cívica do mundo contemporâneo incluem a flexibilidade de raciocínio sobre informação quantitativa e a sua utilização" (p. 21).

A necessidade de os alunos desenvolverem capacidades de interpretação e de trabalhar com sistemas complexos que envolvam processos matemáticos, como construir, descrever, explicar, predizer, representar e quantificar e ainda de usar a Matemática para trabalhar, por exemplo, com questões do mundo profissional, faz emergir a modelação matemática como uma atividade importante no ensino e aprendizagem da Matemática (Lesh & Doerr, 2003). Contudo, a concretização destas ideias e propósitos para a Matemática escolar desafiam a prática dos professores, relativamente à construção de tarefas que favoreçam o envolvimento dos alunos nos processos de modelação.

Este capítulo decorre de uma investigação em que se assume a importância de construir e explorar tarefas de modelação matemática que partam de situações próximas da futura realidade profissional dos alunos (Oliveira, 2010). O estudo apresentado centra-se nas características de uma tarefa de modelação realizada por uma turma do 2.º ano de um curso profissional de nível secundário e na atividade que gerou, procurando perceber o papel do conhecimento extra-matemático dos alunos no desenvolvimento dos processos de modelação em torno dessa tarefa.

Modelos e modelação matemática

A investigação sobre modelação matemática tem procurado compreender o conceito geral de modelo, de processo de modelação e os seus objetivos principais (Blomhøj, 2008), assim como pensar as características que as tarefas de modelação devem possuir para que possam suscitar a atividade de modelação (Lesh, Hole, Hoover, Kelly & Post, 2000). É sobre estes aspetos que nos debruçamos nesta seção.

A atividade de modelação. A resolução de tarefas de modelação traduz uma correspondência entre a realidade, "resto do mundo" fora da Matemática, e a Matemática (Pollak, 1979, citado em Blum & Ferri, 2009). No ciclo de modelação o ponto de partida é uma *situação real* que tem de ser estruturada pelo resolvedor do problema, que lida com um *modelo real* da situação. O modelo real é traduzido matematicamente, dando origem ao *modelo matemático* da situação original e, inclusivamente, podem ser construídos diferentes modelos da mesma situação. O processo de resolução do problema continua, através da escolha de métodos adequados e do trabalho no seio da Matemática, obtendo-se assim *resultados matemáticos*. Estes devem ser traduzidos para o mundo real relativamente à situação original. Assim, o resolvedor do problema também valida o modelo matemático (Blum & Ferri, 2009).

Na literatura existem estudos cujo foco é o processo cognitivo dos alunos enquanto modelam. Matos e Carreira (1995), por exemplo, analisaram o processo de transição entre a realidade e a Matemática e vice-versa, embora não reconstruíssem as transições entre as fases. Ferri (2006, 2007) analisa os processos de modelação dos alunos com o propósito de reconstruir as suas rotas individuais, através da transição entre as fases do ciclo.

Na análise dos processos de modelação dos alunos, veio a tornar-se notória a influência da mobilização do seu conhecimento prévio (Ferri, 2007), tendo em conta os contextos das tarefas. Os alunos invocam as suas experiências pessoais para, por exemplo, estimarem a altura de um cilindro de feno que se pode observar numa paisagem rural, com o objetivo de resolverem um problema que envolve determinar a altura de vários cilindros empilhados de uma certa forma, sem que mais indicações sejam fornecidas. A autora observou que os alunos que tinham tido a experiência de contactar com um cilindro de feno estimavam a sua altura de forma diferente dos colegas que, por exemplo, apenas os viam ao longe quando passavam de carro. Desta forma, Ferri (2007) conclui que a influência do conhecimento prévio do contexto da tarefa define a rota de modelação (caminho percorrido entre as várias fases do processo de modelação e que permite a descrição das fases de modelação).

Stillman (2000) detalha as várias formas de mobilização do conhecimento prévio pelos alunos durante a resolução de tarefas de modelação. Num estudo levado a cabo pela autora, o conhecimento prévio foi mobilizado para: compreender a tarefa, possibilitando que os alunos relacionassem o seu objetivo com o contexto da mesma; apoiar as tomadas de decisão durante a resolução da tarefa no que se refere à seleção de modelos matemáticos; e, por último, facilitar a validação dos resultados finais.

Também Brown e Edwards (2011) observaram que os alunos usam o seu conhecimento prévio para compreenderem o objetivo da tarefa e nela se envolverem. Os autores concluem que a proposta de resolução de tarefas de modelação onde se integrem o conhecimento matemático e o conhecimento prévio dos alunos, estimula a compreensão matemática proporcionando ainda oportunidades para que os alunos revelem os seus raciocínios através da comunicação oral e escrita.

Neste capítulo, o conhecimento prévio dos alunos é denominado por conhecimento extra-matemático (CEM) e está ligado ao “resto do mundo” (no sentido referido no início desta secção), incluindo a natureza, a sociedade, a vida quotidiana e outras áreas do saber assim como às experiências pessoais de cada aluno no contexto das tarefas propostas.

Assim, a mobilização do conhecimento extra-matemático assume neste estudo um aspeto chave no estabelecimento de conexões entre a Matemática e o mundo real. Esta ideia vem corroborar a importância, quer para os investigadores quer para os professores, de se conhecer os passos de modelação relevantes levados a cabo na resolução de uma tarefa de modelação, a sua transição e barreiras cognitivas (Blum & Ferri, 2009; Galbraith & Stillman, 2006).

Vários estudos com uma abordagem cognitiva da modelação observam ser frequente a ocorrência da *representação mental da situação* durante a resolução de tarefas de modelação e por isso incluem-na no ciclo de modelação, que adotam nas suas investigações, como se observa na Figura 1 (Ferri, 2006).

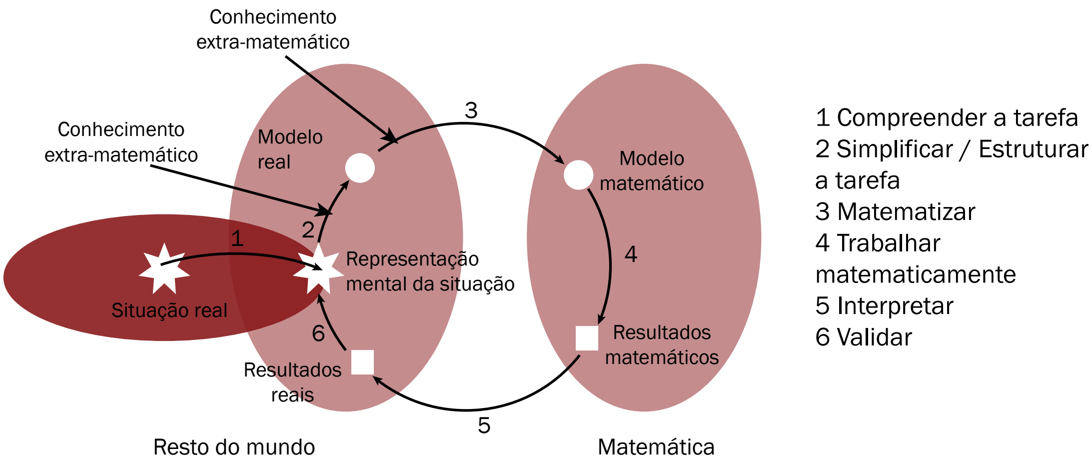


Figura 1 – Ciclo de modelação (Blum & Leiss, 2005; Ferri, 2006).

A transição da *situação real* para a *representação mental da situação* constitui o passo mais importante do processo de modelação, correspondendo à compreensão da tarefa (Ferri, 2006). As vantagens, para a investigação, deste modelo sobre outros, relacionam-se com o fato de este constituir uma ilustração, não normativa, de um processo teórico de resolução que não é linear (Ärlebäck, 2009) e que permite dividir o ciclo de modelação, por exemplo, em *sub-atividades* (Ferri, 2006). As sub-atividades constituem os passos de modelação: *compreender*, *simplificar/ estruturar*, *matematizar*, *trabalhar matematicamente*, *interpretar* e *validar*. O ciclo de modelação, assim descrito, pretende auxiliar os investigadores e os professores, a conhecer os passos de modelação relevantes na resolução de uma tarefa de modelação e, em especial, a mobilização do CEM na transição entre as várias fases do processo (Blum & Ferri, 2009).

Tarefas geradoras de um modelo. Especial atenção tem sido dada ao conceito de modelo através da criação das tarefas geradoras de um modelo (*model-eliciting activities*) que se caracterizam pelo seu contexto significativo e pela relevância dada à forma como os alunos resolvem e interpretam situações problemáticas (Lesh & Doerr, 2003). A conceção das tarefas geradoras de um modelo pauta-se por dois critérios centrais: serem estimulantes e relevantes para os alunos e gerarem ideias matemáticas (Doerr & English, 2003). O contexto do problema deverá ser significativo e real, do ponto de vista da experiência dos alunos.

As tarefas geradoras de um modelo apresentam aos alunos situações onde o produto a ser desenvolvido não é conhecido. Apenas são dadas as condições para a sua criação e poderá existir mais do que uma forma de satisfazer essas condições, pelo que vários produtos são possíveis. Ao trabalharem neste tipo de tarefas, os alunos têm de produzir uma descrição ou modelo que foque relações importantes dos dados fornecidos precisando para isso de os simplificar ou reduzir. Outro aspeto importante das tarefas geradoras de um modelo é a documentação da aprendizagem e da explicação dos raciocínios utilizados que os alunos fazem ao partilhar e escreverem as suas ideias com os membros do seu grupo de trabalho. O uso de representações como tabelas, gráficos ou desenhos são componentes importantes do processo de documentação (Lesh & Doerr, 2003).

Os benefícios destes contextos reais têm sido bem documentados na investigação sob a Educação Matemática Realística. Uma das características-chave dos contextos reais é que estes proporcionam uma plataforma para o crescimento das capacidades de matematização dos alunos, permitindo-lhes usarem a Matemática como um recurso na sua vida para além da sala de aula (Boaler, 1999; Gravemeijer & Doorman, 1999; Lesh & Doerr, 2003).

Nas investigações sobre as conceções dos professores, acerca da natureza das situações problemáticas baseadas na vida real e nas quais o raciocínio matemático é útil, foram desenvolvidos princípios orientadores para a construção de tarefas geradoras de um modelo onde para cada um é evocada uma questão que testa se o princípio é cumprido (Lesh et al., 2000). Os princípios orientadores são os seguintes: (i) *Princípio da realidade*. Os problemas devem ser significativos e relevantes para os alunos. É importante que os alunos deem sentido às situações problemáticas baseados no seu conhecimento e nas suas experiências pessoais. S*erá que esta situação pode acontecer na realidade?* (ii) *Princípio da construção do modelo*. A tarefa proposta deve proporcionar ao aluno a oportunidade de descrever, explicar ou justificar as suas conjeturas sobre o problema dado. *A situação cria a necessidade de desenvolver constructos matemáticos significativos?* (iii) *Princípio da autoavaliação.* A situação deve proporcionar aos alunos a oportunidade de validar a utilidade do seu modelo. *A situação exige que os alunos acedam continuamente aos modelos gerados?* (iv) *Princípio da documentação da construção*. A situação e o contexto devem permitir que os alunos expressem por escrito os seus raciocínios enquanto resolvem o problema. *A situação exige que os alunos revelem o seu pensamento enquanto trabalham* *na resolução do problema* (v) *Princípio da reutilização e partilha da construção*. As soluções encontradas pelos alunos devem ser generalizáveis e facilmente adaptáveis a outras situações. *O modelo gerado pode ser generalizado a situações similares?* e (vi) *Princípio da simplicidade*. A situação problemática deve ser simples e facilmente interpretada por outros. *A situação apresentada é simples?* (Lesh et al., 2000). As ideias apresentadas nortearam a construção das tarefas e a análise da sua exploração na investigação realizada (Oliveira, 2010), onde se inclui a que analisamos neste capítulo.

Metodologia

Na investigação realizada pretendeu-se compreender os processos de modelação desenvolvidos pelos alunos de uma turma do 2.º ano do curso profissional de Técnico de Transportes a partir da resolução de tarefas imbuídas em contextos da *vida real*, envolvendo a modelação de situações reais, decorrentes de atividades de natureza profissional. Neste capítulo, a análise de dados incide sobre a atividade de um grupo de quatro alunos: Andreia, José, Rodrigo e Sandro. A principal fonte de dados foi a gravação em vídeo do grupo mas foram também utilizados os registos escritos produzidos pelos alunos e notas de campo registados pela primeira autora, enquanto investigadora e professora da turma. Para a análise dos dados, recorreu-se ao diagrama adotado neste estudo para representar o ciclo de modelação (Figura 1). Na análise das transcrições, as elocuções e as ações dos alunos foram codificadas de acordo com as fases apresentadas. O resultado final foi traduzido através do diagrama (Figura 2) que acompanha a caracterização do processo de modelação, na secção 5 deste texto. As setas a tracejado representam a rota descrita pelo grupo durante a resolução da tarefa proposta.

Princípios gerais da tarefa de modelação "Entregas ao domicílio"

A construção da tarefa. Na elaboração das tarefas de modelação, foi sentida a necessidade de ganhar familiaridade com o prospetivo contexto profissional dos alunos. Assim, a professora conversou longamente com o professor da disciplina de Tecnologias de Gestão de Transportes, de modo que as situações propostas fossem contextualizadas na realidade profissional da área dos transportes e que os alunos lhe reconhecessem autenticidade. Com esse mesmo objetivo, contactou também com antigos alunos da escola que trabalham na área dos transportes, que partilharam as suas reflexões sobre a Matemática que usam no seu quotidiano profissional e sua relação com a Matemática escolar. Conversou, ainda, com diretores de empresas da área dos transportes sobre a forma como encaravam a importância das aprendizagens de Matemática dos seus empregados.

A tarefa em análise. A tarefa "Entregas ao domicílio" surgiu na sequência de um conjunto de aulas onde foram exploradas algumas situações modeladas por funções racionais e insere-se no cenário hipotético de uma empresa de transportes rodoviários de mercadorias, na qual os alunos ocupam o cargo de gestores de tráfego e onde o professor desempenha o papel de diretor da empresa que distribui tarefas aos seus colaboradores. A elaboração do seu enunciado procurou seguir os princípios apresentados anteriormente na seção 2.2, com forte ligação à disciplina de Tecnologias e Gestão de Transportes, incluída no plano curricular do curso. O enunciado, que pretendia levar os alunos a simular uma atividade de uma empresa de transportes de mercadorias, "Transportes 2TT", tem duas mensagens: uma do diretor da empresa e outra de um potencial cliente que pretende fazer o aluguer de uma carrinha para distribuição de compras ao domicílio e que pede a ajuda da empresa para fazer o cálculo do preço a cobrar aos seus próprios clientes pela prestação deste serviço. Na primeira mensagem, o diretor fornece algumas informações respeitantes ao aluguer da carrinha e sobre a distância do domicílio dos clientes ao supermercado e pede que seja calculado um valor por quilómetro a cobrar ao cliente do supermercado. Na resolução desta tarefa os alunos precisam da informação complementar (Anexo 2) fornecida com uma tarefa que realizaram anteriormente.

Objetivos principais. Estes são: (i) ligar a Matemática com o CEM do aluno, encarando esta ligação como uma ferramenta motivadora na resolução da tarefa; (ii) promover a mobilização de conhecimentos matemáticos adequados para dar respostas próprias face a problemas imbuídos na realidade; (iii) promover a comunicação por escrito e oral das soluções encontradas, e (iv) observar a interação estabelecida entre os alunos participantes no estudo.

Desenvolvimento da tarefa. Para a realização desta tarefa previu-se a utilização de duas aulas de 90 minutos cada. Uma parte da segunda aula seria dedicada à apresentação dos resultados de cada grupo, à turma, para discussão alargada. Os alunos poderiam começar por identificar o número de quilómetros como a variável independente e o custo da carrinha por dia como a variável dependente e relacionar estas variáveis com o objetivo de encontrar um modelo matemático que fornecesse o custo da carrinha por dia, para o dono do supermercado, em função do número de quilómetros percorridos, com a aplicação da percentagem de lucro que decidissem apurar. Para calcular o valor por quilómetro, os alunos poderiam socorrer-se da tabela que consta do Anexo 2.

Na relação que fornece o custo diário do aluguer da carrinha para o dono do supermercado está envolvida uma função afim. Para que pudessem propor um valor por quilómetro, a cobrar ao cliente do supermercado, os alunos poderiam observar a relação entre o custo diário da carrinha e o número de quilómetros realizados diariamente, isto é, o preço médio a pagar por quilómetro. Nesta relação está envolvida uma função racional. Os alunos poderiam explorar a representação gráfica destas funções utilizando a calculadora gráfica (CG).

Modo de trabalho. Os alunos trabalharam na resolução da tarefa em pequenos grupos, de modo a fomentar a comunicação e assim potenciar a compreensão da tarefa e a procura de estratégias de resolução. Durante a resolução das tarefas, a professora procurou acompanhar os alunos, esclarecendo as suas dúvidas e ajudando a ultrapassar as suas dificuldades, questionando-os no sentido de clarificarem as suas respostas e refletirem sobre os seus raciocínios. Foi também realizada uma discussão da tarefa em grande grupo, para tornar visível, a toda a turma, a valorização do raciocínio dos alunos em detrimento dos resultados finais, sendo proporcionado ao representante de cada grupo a oportunidade de expor a sua resolução.

Exploração da tarefa "Entregas ao domicílio"

Depois de analisada a atividade dos alunos, durante as duas aulas dedicadas à resolução desta tarefa, observou-se que o ciclo de modelação é percorrido uma vez, embora se observem avanços e recuos na transição entre as fases do *modelo matemático*, dos *resultados matemáticos*, dos *resultados reais* e da *representação mental da situação*, como se pode observar na Figura 2, através das setas de duplo sentido. A atividade dos alunos é, predominante, entre a fase da *situação real* e a fase do *modelo matemático*. Na primeira aula a atividade dos alunos começa com o confronto com a situação real. Os alunos fazem uma representação mental da situação, através da compreensão da tarefa e usando o conhecimento extra-matemático. Na tentativa de simplificar o problema apresentado e de delinear uma abordagem, os alunos deparam-se com algumas dificuldades para fazer emergir um modelo real, superadas pela mobilização do CEM, e já perto do final da primeira aula os alunos iniciam a matematização do problema. Na segunda aula, a atividade dos alunos, apoiada pelo CEM, centra-se em torno da matematização e do trabalho matemático para encontrar resultados que virão a ser considerados, pelo grupo, como os resultados reais e que permitem, na sua interpretação, a conclusão da resolução da tarefa.

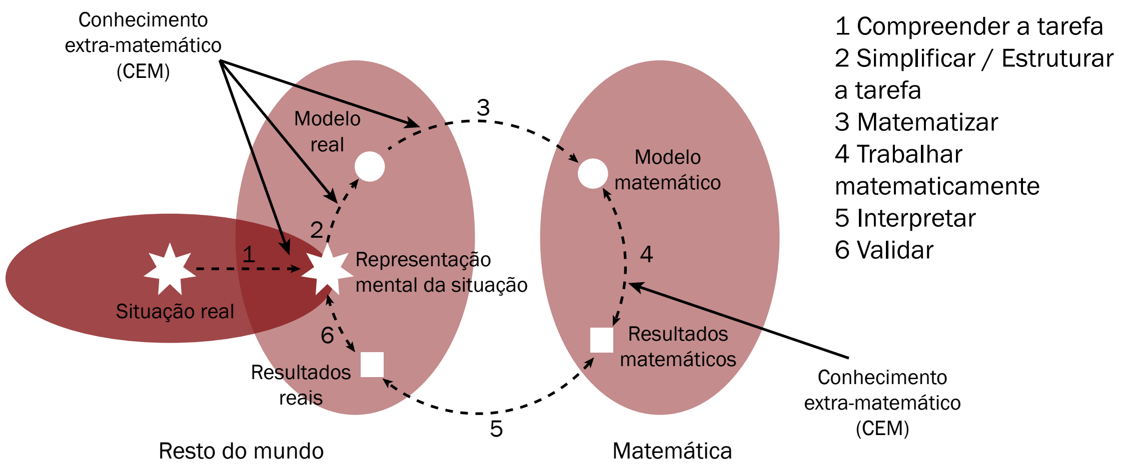


Figura 2 – Ciclo de modelação e subatividades na tarefa de modelação “Entregas ao domicílio”.

De seguida, pormenoriza-se a atividade dos alunos do grupo escolhido durante a resolução da tarefa, de acordo com a rota no ciclo de modelação apresentada na Figura 2.

Situação real → Representação mental da situação. Após a professora ter distribuído a tarefa observa-se um grande silêncio entre os elementos do grupo de alunos. Em especial, Rodrigo e Sandro demoram-se na leitura atenta da tarefa. Ao fim de quatro minutos, Rodrigo e José trocam algumas palavras, que revelam a primeira tentativa de compreensão da situação apresentada.

Rodrigo: Isto é um aluguer...
José: Temos de aplicar o lucro...aplicar...

Rodrigo manifesta a necessidade de mais dados para além dos que são fornecidos no texto, o que decorre do contexto em que se insere a situação apresentada e do fato de esta lhe ser familiar no âmbito de outras disciplinas.

Perante a situação real apresentada na forma de texto, os alunos procuram compreender a tarefa e transitam da situação real para a representação mental da situação (seta 1, Figura 2), pois mostram estar a focar-se nos factos que consideram essenciais para a resolução do problema e que pretendem relacionar. A forma como Rodrigo sumariza o que é pedido na tarefa, como sendo um aluguer, evidencia o uso do conhecimento extra-matemático, na transição entre estas fases.

Representação mental da situação → Modelo real. Na transição da *representação mental da situação* para o *modelo real*, os alunos tentam simplificar e estruturar uma abordagem à resolução da tarefa, apelando ao CEM ao estabelecer a comparação com situações reais idênticas. Observa-se que se deparam com muitas dificuldades, como, por exemplo, na identificação da estrutura interna da situação.

> **Rodrigo**: Olha a taxa de saída é como os taxistas, ele paga logo os dois euros e depois começa a contar... pagas dois euros mais os quilómetros que fizeres...
> **Rodrigo**: Uma coisa que eu não sei é como é que os gajos do *Continente* fazem...eles não fazem preços certos?
> **Andreia**: É, é preços certos...
> **Rodrigo**: Por exemplo, eles não levam cinco euros quer tu leves o que levares?...nem que seja só uma coisinha...levam-te cinco euros...
> **Andreia**: É, é assim... Tu vais ter o valor do frete e depois vais dividir o frete pelos quilómetros... aí vai dar quanto é que ele vai cobrar...

Na última intervenção de Andreia, neste excerto, a aluna parece ter em mente um modelo, embora não fique claro se este diz respeito ao cliente da empresa ou do supermercado. Contudo, esta é uma primeira tentativa onde o número de quilómetros surge como uma potencial variável. Mais adiante, observa-se que os alunos continuam com dificuldade em clarificar uma variável para a relação que pretendem estabelecer e voltam a mobilizar os seus conhecimentos extra-matemáticos, associados a situações reais idênticas.

> **Andreia**: Eu acho que é mais lógico pelo número de quilómetros... não... tu tens aqui... acho que são vinte e nove... (conta o número de clientes) tens aqui os trinta... tu vais fazer os dois euros a dividir pelos trinta? O que te interessa no frete é os quilómetros...logo eu

acho que tem mais lógica é fazer os dois euros a dividir pelo número de quilómetros…e é assim que a *Sonae Distribuição* faz as contas…é pelo número de quilómetros… o número vai variar conforme o número de quilómetros…porque é assim, eles dão-te um *x*, tu moras na zona *n*, a zona *n* levam-te até, imagina, pelo serviço, seis euros, mas depois já fazes mais quilómetros e pertences à zona *m*, a zona *m* já vai pagar sete euros por exemplo, porque eles fazem conforme os quilómetros…logo as contas são feitas a partir dos quilómetros e não do número de pessoas… porque tu estás a fazer variar o número de pessoas e não o número de quilómetros…

Os alunos discutem o problema no seio do seu grupo, até que Sandro acaba por pedir a intervenção da professora, evidenciando a sua dificuldade em representar a estrutura da situação fornecida.

Sandro: *Setora*, a gente sabe os quilómetros que vai fazer mas não sabe pensar o custo por quilómetro, como não sabemos o número de clientes nem a quantos clientes vamos aplicar aquela taxa de dois euros. Como é que se faz essa conta? Quantas incógnitas podemos utilizar numa fórmula?
Professora: Eu ainda não percebi o que estás a considerar… Quais são as tuas variáveis? O que é que vocês estão a relacionar? É o número de quilómetros ou é o número de clientes?
Andreia: Ele defende os clientes e eu defendo os quilómetros…
Rodrigo: se usássemos com os quilómetros estávamos a perder dinheiro… (não conclui)
Sandro: como é que é essa fórmula agora?

Modelo real → modelo matemático

Na tentativa de definir uma variável e uma relação funcional, as afirmações dos alunos, no excerto anterior, progridem ao nível matemático, o que evidencia que a sua atividade está a situar-se na transição do *modelo real* para o *modelo matemático*. Rodrigo apela ao seu CEM, com o objetivo de atribuir significado aos conhecimentos matemáticos que vão sendo mobilizados para definir um modelo matemático que traduza a situação enunciada.

Mais adiante, depois de apurado o preço por quilómetro (0,637), de acordo com os valores da tabela que consta do Anexo 2 e com o CEM na área do transporte de mercadorias, Andreia assume a expressão $y = 0{,}637x + 2$ como um bom modelo matemático, o que provoca a discussão no grupo:

> **Andreia**: Temos de ir ao *graph.* (Introduz na máquina a função $y=0{,}637x+2$ e obtém a sua representação gráfica)
> **Rodrigo**: O que é que é o *x*?
> **Andreia**: O *x* cá em baixo? (refere-se ao eixo das abcissas) É os quilómetros. É suposto o preço subir conforme o número de quilómetros...
> **Sandro**: Não...
> **José**: Não, vai ser suposto descer...
> **Rodrigo**: Isto está mal... não pode ser.
> **Sandro**: Está mal o quê?
> **Rodrigo**: Não pode ser...
> **José**: Quanto mais quilómetros fizerem, vais pagar menos...

Na última afirmação, José identifica a existência de uma relação de proporcionalidade inversa entre o custo diário da carrinha e o número de quilómetros realizados diariamente. Mais adiante, Andreia refere-se a esta relação por função "inversa". Os alunos discutem a propriedade que esperam encontrar na representação gráfica que traduz a situação, mas José, com base no seu CEM, critica o modelo linear encontrado por Andreia:

> **Professora**: O que é te faz confusão com essa função?
> **Andreia**: É que não é inversa, *setora*... isso é que lhe está a fazer confusão...
> **Professora**: Inversa?
> **Andreia**: É que ele está a pensar na inversa. É isso é que lhe está a fazer confusão.
> **Professora**: Inversa como?
> **Andreia**: (vira-se para José) Não é? Tu estavas a pensar que quanto maior fosse o número de quilómetros menor era o custo.
> **José:** Quanto maior é o número de quilómetros menor é o custo.

Andreia: Tens uma empresa que faz uma coisa de Loures para Santarém e de Loures para o Porto. Para o Porto fica mais barato do que para Santarém? Eu acho que o do Porto fica mais caro.
José: Tens que cobrar mais aos que estão mais perto.
Andreia: O custo por quilómetro diz tudo… logo tem de ser aquele custo por *x* quilómetros. Se aumenta os quilómetros, aumenta o custo. Por isso, nunca pode ser de outra maneira.

O sentido que atribuem à representação gráfica obtida com a CG permite-lhes decidir sobre a validade do modelo encontrado. Esta é a estratégia que Sandro utiliza ao introduzir na máquina a expressão $\frac{0.637x+2}{x}$. Dá sentido aos comentários de José e de Andreia, ao procurar, intuitivamente, a função "inversa" que sabia não ser representada por uma reta, mas de uma forma que obrigaria que, na expressão algébrica, surgisse uma divisão pela letra utilizada para representar o número de quilómetros.

Sandro obtém uma representação (Figura 3), e através da interação entre Rodrigo, José e Sandro, compreendem a representação gráfica obtida, no contexto da situação apresentada e obtêm a validação do seu modelo. Interpretam o significado do eixo das abcissas e discutem a redefinição da janela de visualização, no que diz respeito ao domínio e o contradomínio adequado ao contexto da situação:

Sandro: É que eu não sei explicar o que está aí. Eu não percebo bem esta matéria.
Professora: Não percebes esta matéria? Rodrigo ajuda lá um bocadinho.
Rodrigo: Para dizer o quê?
Professora: Ele conseguiu ver o gráfico, mas agora está com dificuldade em dizer o que é isso.
Rodrigo: Isto não nos interessa. (Aponta para a ramo negativo da hipérbole)
Professora: Porque é que isso não interessa?
Rodrigo: Não há quilómetros negativos. Nós não fazemos quilómetros negativos.
José: O que é que é o eixo dos *xx*?
Sandro: É o número de quilómetros.

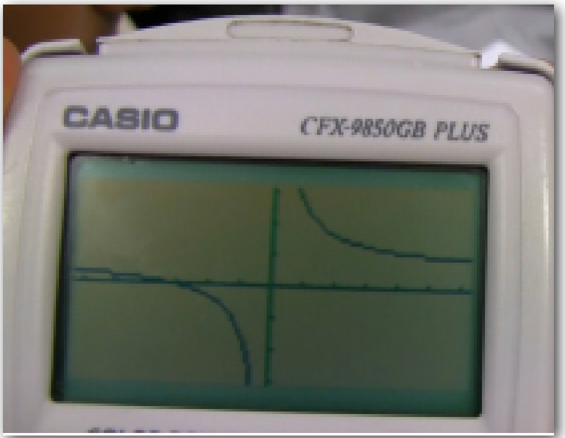


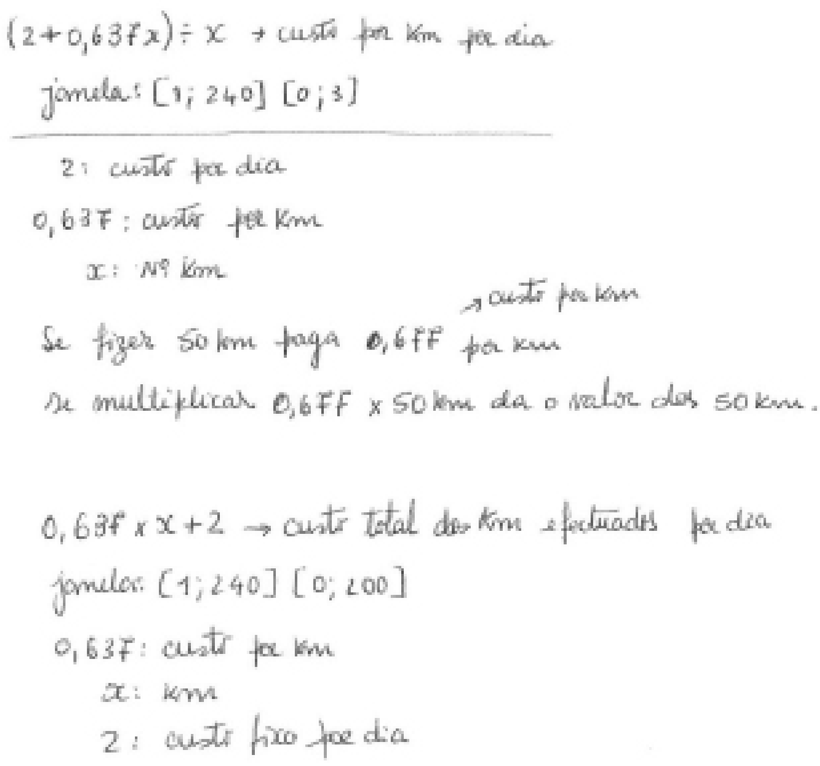
Figura 3 – Representação gráfica obtida por Sandro.

Os valores utilizados para a janela de visualização ([1,240]×[0,3]) partem de uma análise dos dados, do contexto do problema e do sentido atribuído à expressão analítica. Nesta altura, os alunos tinham gerado dois modelos: $y = 0{,}637x + 2$ e $y = \frac{0{,}637x + 2}{x}$. No entanto, o grupo não tinha ainda clarificado a correspondência destes modelos com as situações apresentadas no enunciado da tarefa.

Modelo matemático ↔ *Resultados matemáticos* ↔ *Resultados reais*. A atividade do grupo, nesta etapa, já transitou do *modelo matemático* para os *resultados matemáticos*, muito embora retorne ao *modelo matemático* que os alunos perseguem na tentativa de o compreender.

A discussão dos alunos baseia-se na leitura das representações gráficas obtidas com a CG, procurando validar os modelos que lhes correspondem através de metáforas com o seu CEM. Na tentativa de encontrar um modelo que traduza a situação, mostram alguma dificuldade em estabelecer relações entre as diferentes formas de representar uma função, especialmente a analítica e a gráfica. A validação do potencial modelo para a situação problemática continua dependente do significado da variável na expressão da função introduzida na CG e da interpretação que fazem da sua representação gráfica. Esta interpretação é feita de acordo com a intuição, conhecimentos matemáticos adquiridos em momentos anteriores e com o CEM, nomeadamente na área do transporte de mercadorias.

Os alunos continuam a usar as potencialidades gráficas da CG para fazer procedimentos, tais como concretizar o valor da variável para 50 quilómetros, de forma a tirar conclusões. Não manipulam algebricamente as expressões que vão procurando estabelecer mas procuram dar sentido às expressões encontradas.


(2+0,637x)÷x → custo por km por dia
janela: [1; 240] [0; 3]

2: custo por dia
0,637: custo por km
x: Nº km

custo por km
Se fizer 50 km paga 0,677 por km
se multiplicar 0,677 x 50 km dá o valor dos 50 km.

0,637 x x + 2 → custo total dos km efectuados por dia
janela: [1; 240] [0; 200]
0,637: custo por km
x: km
2: custo fixo por dia

Figura 4 – Primeiro registo escrito sobre a tarefa.

Na resposta apresentada, registam as expressões analíticas das funções obtidas através do sentido dado à sua representação gráfica obtida pela CG, indicando a janela de visualização utilizada.

Na transição do *modelo matemático* para os *resultados matemáticos*, os alunos trabalham matematicamente muito apoiados na interpretação das representações gráficas e os resultados matemáticos são interpretados de acordo com a sua possível correspondência com resultados reais.

Resultados reais ↔ *Representação mental da situação.* Depois de terem obtido alguns resultados matemáticos, os alunos procuram adequá-los à representação mental da situação apresentada e concluir a tarefa, verificando se respondem ao que é solicitado, evidenciando a transição para a representação mental da situação. Contudo, observa-se, também, um retorno aos resultados reais e à validação dos seus raciocínios através da interpretação dos resultados matemáticos obtidos com a CG.

Já perto do final da segunda aula, os alunos consideram a tarefa concluída produzindo o registo escrito da Figura 5.

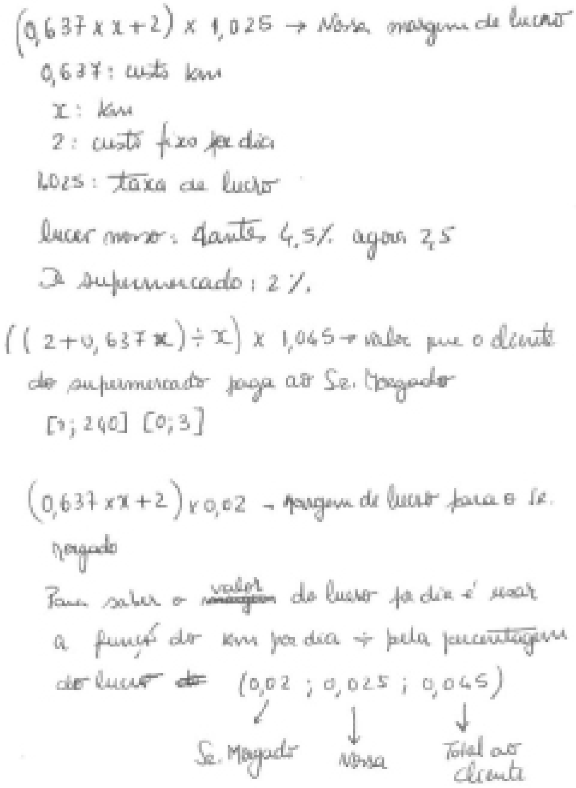

$(0{,}637 \times x + 2) \times 1{,}025 \rightarrow$ Nossa margem de lucro
0,637: custo km
x: km
2: custo fixo por dia
1,025: taxa de lucro
lucro nosso: antes 4,5% agora 2,5
Sr. supermercado: 2%
$((2 + 0{,}637x) \div x) \times 1{,}045 \rightarrow$ valor que o cliente do supermercado paga ao Sr. Morgado
[1; 240] [0; 3]
$(0{,}637 \times x + 2) \times 0{,}02 \rightarrow$ margem de lucro para o Sr. Morgado
Para saber o ~~margem~~ valor do lucro por dia é usar a função do km por dia ÷ pela percentagem do lucro ~~do~~ (0,02 ; 0,025 ; 0,045)
Sr. Morgado — Nossa — Total ao cliente

Figura 5 – Registos escritos como resposta à tarefa.

Conclusões

Um dos objetivos deste estudo diz respeito ao papel do CEM no desenvolvimento dos processos de modelação. Através da análise da atividade de modelação dos alunos em torno da tarefa proposta, podemos concluir que o CEM permitiu dar sentido ao objetivo da tarefa e interpretar os modelos encontrados, indo ao encontro dos aspetos referidos por Stillman (2000). O CEM foi requerido não só na transição da *representação mental da situação* para o *modelo real*, e deste para o *modelo matemático,* como referido por Ferri (2006), mas também na transição entre as fases da *situação real* para a *representação mental da situação* e entre o *modelo matemático* e os *resultados matemáticos*. Em particular, o CEM emerge nas sub-atividades relativas à compreensão, simplificação e estruturação da tarefa e ao trabalho matemático. Por exemplo, o CEM permitiu a construção de relações funcionais, guiando os alunos na compreensão da tarefa, e assumiu especial relevância na definição das variáveis e construção de hipóteses ao longo do desenvolvimento do modelo matemático.

A tarefa foi construída com a intenção de apresentar um contexto complexo e exigente do ponto de vista da interpretação requerida, uma vez que nem os elementos essenciais da situação nem os conceitos ou procedimentos matemáticos envolvidos eram facilmente identificáveis. Esta situação criou um bloqueio na atividade desenvolvida pelos alunos que, tal como se pretendia, foi ultrapassado pelo uso do CEM que se caracterizou pela comparação com situações reais idênticas, utilização de conhecimentos da área de estudo do transporte de mercadorias e associação a experiências pessoais.

Um dos propósitos bem-sucedidos da tarefa foi a promoção da comunicação oral e escrita, aspeto também referido no estudo realizado por Brown e Edwards (2011). Uma parte da discussão, cujo foco saiu do âmbito da Matemática, foi fundamental para que os alunos, nos momentos de bloqueio, não desistissem da tarefa. As interações observadas no uso do seu CEM conduziram o processo de modelação e revelaram-se essenciais para a transição entre as fases e a ativação das diferentes sub-atividades no ciclo de modelação. Deste modo, a opção pelo trabalho em grupo revelou-se bastante adequada às características da tarefa proposta.

Relativamente ao segundo objetivo do estudo, conclui-se que as características da tarefa, baseadas nos princípios que nortearam a sua construção (Lesh et al., 2000), potenciaram o desenvolvimento dos processos de modelação, como a seguir se fundamenta. A tarefa tem um contexto significativo para os alunos, tornando-a acessível, cumprindo assim o *princípio da simplicidade*, embora, como referimos acima, a situação exija um elevado nível de interpretação. A reação inicial positiva que se observou por parte dos alunos relaciona-se com a familiaridade da situação apresentada e coma proposta de aplicação da Matemática no âmbito de outra disciplinada esfera da prática profissional. Desta forma, foi também cumprido o *princípio da realidade*, já que os alunos deram sentido à situação com base no seu conhecimento e nas suas experiências pessoais. A ligação da Matemática com o CEM do aluno, como uma ferramenta motivadora na resolução da tarefa, foi assim um objetivo que veio a ser atingido.

A situação apresentada procurou criar oportunidades para aplicar ou gerar um modelo através do estabelecimento de conexões matemáticas entre tópicos relacionados com o tema das funções. O conhecimento matemático necessário para a sua resolução procurou ser ajustado ao nível de competência matemática dos alunos e de forma a constituir um desafio. A forma como os alunos foram progredindo na resolução da tarefa leva-nos a crer que esta lhes proporcionou a oportunidade de descrever, explicar e justificar as suas conjeturas e ainda de mobilizar conhecimentos matemáticos adequados para dar respostas próprias face à situação apresentada. Assim, cumpriu-se o *princípio da construção do modelo*.

A utilização da calculadora gráfica desempenhou um papel fundamental no desenvolvimento dos processos de modelação. Os alunos usaram as representações gráficas obtidas e interpretaram-nas de acordo com o seu CEM. A CG usada como ferramenta de visualização (Doerr & Zangor, 2000) permitiu experimentar, formular e testar as suas conjeturas, pelo que se conclui que foi utilizada com reflexão sobre os conceitos matemáticos envolvidos e permitiu que desenvolvessem o seu conhecimento matemático e a capacidade para criar e modificar modelos matemáticos (Lesh & Doerr, 2003). Desta forma, ao longo da resolução da tarefa os alunos acederam continuamente aos modelos que foram criando, tendo-se cumprido o *princípio da autoavaliação*.

Na resolução desta tarefa o processo de comunicação desempenhou um papel importante na interação social entre os alunos assim como no desenvolvimento da comunicação matemática. Embora os alunos produzissem respostas escritas pouco detalhadas ou incompletas, o *princípio da documentação* revela-se igualmente presente na atividade dos alunos em torno da tarefa.

Os modelos encontrados pelos alunos poderiam ser generalizáveis e adaptáveis a outras situações análogas, envolvendo outro tipo de variáveis, o que sugere um possível desenvolvimento desta tarefa. Desta forma, a construção da tarefa seria ampliada ao *princípio da generalização da construção* (Lesh et al., 2000).

A construção e a aplicação desta tarefa constituíram um desafio à prática profissional da professora, tanto no planeamento como na concretização destas aulas. A contextualização da tarefa num campo profissional relacionado com o prospetivo futuro profissional dos alunos só é possível com o conhecimento efetivo desse campo. De outra forma, as tarefas correm o risco de se tornar artificiais para os alunos e, consequentemente, não suscitarão a mobilização de CEM. Deste modo, a professora procurou familiarizar-se com o tema contactando com profissionais da área e encontrar conexões com a Matemática escolar. Procurou ainda respeitar a complexidade inerente ao contexto real da situação-problema criada não só na forma como esta foi proposta à turma mas também adotar uma postura não diretiva no acompanhamento do trabalho dos alunos. Ao trazer o "resto do mundo" para dentro da sala de aula, a professora tornou-a num espaço privilegiado para a mobilização de aprendizagens anteriores, dentro e fora da Matemática.

Referências

Ärlebäck, J. (2009). On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Montana Mathematics Enthusiast, 6*(3), 331-364.

Blomhøj, M. (2008). Different perspectives on mathematical modelling in educational research - categorising the TSG21. In *ICMI 11*, Monterey, México. (Retirado no dia 20 de Janeiro de 2009 de http://tsg.icme11.org/document/get/811).

Blum, W., & Leiss, D. (2005). "Filling up" – the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. In *Proceedings of CERME-4, WG 13 Modelling and Applications* (pp. 1623-1633). Sant Feliu de Guíxols, Spain.

Blum, W., & Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(1), 45-58.

Boaler, J. (1999). Participation, knowledge and beliefs: A community perspective on mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics, 40*, 259-281.

Brown, J., & Edwards, I. (2011). Modelling tasks: Insight into mathematical understanding. In G. Kaiser, W. Blum, R. Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (ICTMA – 14) (pp.187-197). New York, NY: Springer.

Doerr, H., & Zangor, R. (2000). Creating meaning for and with the graphing calculator. *Educational Studies in Mathematics, 41*, 143-163.

Ferri, B. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. ZDM, *38*(2), 86-95.

Ferri, B. (2007). Personal experiences and extra-mathematical knowledge as an influence factor on modelling routes of pupils. In *Proceedings of CERME-5, WG 13 Modelling and Applications* (pp. 2080-2089). Larnaca, Cyprus.

Galbraith, P., & Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. ZDM, *38*(2), 143-163.

Gravemeijer, K., & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics, 39*, 11-129.

Lesh, R., & Doerr, H. (2003). *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching.* Mahwah, NJ: Erlbaum.

Lesh, R., Hole, B., Hoover, M., Kelly, E., & Post, T. (2000). Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers. In R. Lesh (Ed.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 591-645). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Matos, J., & Carreira, S. (1995). Cognitive processes and representations involved in applied problem solving. In C. Sloyer, W. Blum, & I. Huntley (Eds.), *Advances and perspectives in the teaching of mathematical modelling and applications (ICTMA- 6)*(pp. 71-80). Chichester: Ellis Horwood.

ME (2004). *Programa de Matemática para cursos profissionais de nível secundário.* Lisboa: Ministério da Educação, Direcção-Geral de Formação Vocacional.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar.* Lisboa: APM.

Oliveira, C. (2010). *Modelação e funções: Uma experiência no ensino profissional* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa).

Stillman, G. (2000). Impact of prior knowledge of task context on approaches to application tasks. *Journal of Mathematical Behavior, 19*(3), 333-361.

Anexo 1 – Tarefa "Entregas ao domicílio"

Entregas ao domicílio Caixa de entrada | X

Transportes2TT para colaboradores mostrar detalhes 10 Mar (10:30)

Responder

Caro colega:

O Sr. Morgado é proprietário do supermercado *Sempre Fresco* e hoje de manhã enviou-me o *e-mail* que reencaminho e a lista dos seus habituais clientes com algumas informações. Deve ser-lhe cobrada uma taxa de saída da carrinha de 2 euros por dia e aplicar o valor habitual por quilómetro. É nosso cliente há muitos anos, pelo que neste caso, podemos não aplicar a margem de lucro que habitualmente usamos.

Peço-lhe que sugira um valor por quilómetro a cobrar ao cliente do supermercado para que seja rentável ao Sr. Morgado a realização das entregas ao domicílio. Dê detalhes e uma explicação o mais clara possível para que ele possa decidir se a sua sugestão é boa para ser usada.

Cumprimentos do vosso director.

Manuel Pedrinhas

Transportes 2TT@gmail.com

De: Rui Morgado [ruimorgado@gmail.com]
Enviado: quarta-feira, 10 de Março de 2010 09:52
Para: Transportes 2TT
Assunto: Entregas ao domicílio

Olá Amigo Pedrinhas!
Espero que vá bem. Eu vou bem mais a minha Maria, mas esta crise está a notar-se cada vez mais! Os clientes aqui da zona cada vez mais se atormentam em vir cá ao meu estabelecimento… as pernas já não ajudam! Vejo passar as carrinhas do hipermercado ali do Centro Comercial para cima e para baixo e pensei que se calhar também podia fazer as entregas à casa dos meus clientes de há tantos anos. Talvez assim não perdesse tanta clientela! Olhe, mando-lhe uma lista com algumas informações sobre os nossos habituais clientes. Eu próprio farei a distribuição todos os dias, da parte da tarde. Mande-me lá os preços de quanto ficaria a custar-me este serviço e ajude-me a pensar no preço a cobrar aos meus clientes. Só preciso da carrinha porque o meu carrito não serve para estas coisas.
Até breve,
Rui Morgado

Lista dos clientes do Sr. Morgado

Nome da(o) cliente	Distância da residência ao supermercado (em km)	Nome da(o) cliente	Distância da residência ao supermercado (em km)
Maria	9,4	Madalena	10,9
Rosa	5,1	Fátima	5,9
Gertrudes	7,6	João	8,3
Luísa	13	Inácia	11,2
Josefa	10,1	Miquelina	6,7
Teresa	6,9	Francisco	9,3
Antónia	13,2	Maria Inês	3,2
Conceição	7,9	Matilde	11,4
Maria Clara	4,9	Maria Joana	4,6
Mariana	10,5	Maria do Céu	12,6
Fernanda	6,3	Vítor	3,3
Ana	6,9	Luís	8,1
José	6,2	Filipe	6,4
Maria Rita	7,8	José António	3,7
António	4,9	Maria de Fátima	12,6

Anexo 2 – Informação complementar à tarefa "Entregas ao domicílio"

Excerto de informação sobre custos padrão do transporte de carga completa para o transporte internacional (Anuário da ANTRAM, 2009, p.59)

	€/Km		€/Km
Gasóleo	0,294*	Renovação de Alvará	0,0004
Pneus	0,033	Pedido de licença do veículo	0,00004
Óleo	0,004	Autorização comunitária	0,00004
Manutenção e reparação	0,048	Motorista	0,272
Trânsitos	0,083	Seguros	0,027
Inspecção obrigatória	0,001	Impostos	0,004
Total custos variáveis	**0,462**	Amortizações	0,112
		Juros	0,033
		Total custos fixos	**0,448**
			0,909

Fonte: Logistema – Estudo Comparativo das Condições Económicas de exploração dos transportes de Mercadorias em Portugal e Espanha

* **Preços actualizados em Fevereiro de 2009**

TAREFAS

4. Uma abordagem paralela das várias representações dos números racionais através de tarefas que promovem o modelo da barra numérica

por Hélia Ventura, Hélia Oliveira

4. Uma abordagem paralela das várias representações dos números racionais através de tarefas que promovem o modelo da barra numérica

Hélia Ventura
UIDEF – Unidade de Investigação
do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
helialopes@gmail.com

Hélia Oliveira
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
hmoliveira@ie.ulisboa.pt

• **Resumo:** Este capítulo surge a partir de uma experiência de ensino (EE) numa turma do 5.º ano, com o objetivo principal de promover o sentido de número racional dos alunos. Esta EE procurou favorecer o estabelecimento de conexões entre as várias representações dos números racionais, em diferentes significados, através de uma sequência de tarefas com contextos significativos e do uso de modelos, principalmente a barra/dupla linha numérica. O presente capítulo evidencia, a partir da atividade de um grupo de alunos, como a integração da barra/dupla linha numérica nas tarefas propostas como *modelo de* se transformou num *modelo para* raciocinar, contribuindo para alcançar os objetivos da EE, em especial no que diz respeito à flexibilidade no uso das várias representações de um número racional e de unidades de referência. São apontadas as principais potencialidades e limitações das opções tomadas na EE e destaca-se o importante papel da professora na condução da aula.

• **Palavras-Chave:** Números racionais, Representações, Modelo da barra numérica, Tarefas.

Introdução

Os números racionais ocupam um lugar destacado no currículo, sendo amplamente reconhecida a sua importância na aprendizagem da matemática, assim como as dificuldades que lhes estão associadas. Em muitos países, a abordagem de ensino destes números que tem prevalecido é o tratamento isolado das suas várias representações, o que tem contribuído para uma visão compartimentada por parte dos alunos (Moseley, 2005). Essa situação evidencia-se também na investigação realizada na década de 80, que tendia a centrar-se nos numerais decimais ou nas frações, mas pouca atenção era dada à capacidade de relacionar estas duas representações (Markovits & Sowder, 1991). Nas décadas seguintes, porém, surgiram diversos estudos incidindo sobre as várias representações destes números (Fosnot & Dolk, 2002; van Galen, Feijs, Figueiredo, Gravemeijer, Herpen, & Keijer 2008), bem como sobre as conexões entre elas (Moss, 2005; Sweeney & Quinn, 2000). Também as orientações curriculares do NCTM (2007) começam, então, a referir a importância de encorajar os alunos a trabalhar as diversas representações de um número racional e de serem dadas oportunidades para estabelecer conexões entre elas.

A nível nacional, no momento em que este estudo se iniciou, vivia-se uma mudança a nível curricular com a experimentação do Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) (ME, 2007), que preconizava uma abordagem paralela das várias representações dos números racionais, abrangendo os seus vários significados ao longo dos primeiros anos de escolaridade. Indo ao encontro destas orientações curriculares, foi realizada uma experiência de ensino (EE), numa turma do 5.º ano, tendo por base uma sequência de tarefas em contextos familiares (Ventura, 2013). Neste capítulo discutimos o contributo desta EE para o desenvolvimento do sentido de número racional dos alunos, em particular, no que diz respeito ao papel do modelo da barra/dupla linha numérica, cujo uso foi incentivado através dos contextos das tarefas propostas.

O conceito de número racional e as múltiplas representações

O conceito de número racional é fundamental no desenvolvimento matemático dos alunos no ensino básico, sendo a sua importância visível no grande volume de estudos que surgiram nas últimas décadas centrados no ensino e aprendizagem destes números (Lamon, 2007), e que revelam também a dificuldade de que este se reveste. A complexidade associada ao conceito de número racional decorre, principalmente: a) dos seus diferentes significados (relação parte-todo, medida, quociente, operador, razão) que necessitam ser compreendidos de uma forma individual e em relação às representações que estes números podem assumir; b) da comparação de quantidades através das diferentes representações; e c) do facto de, muitas vezes, este tema não ser abordado com os alunos segundo um modelo adequado (Moss, 2005).

No âmbito do ensino dos números racionais diversos estudos mostram que é fundamental que se coloque maior ênfase na compreensão conceptual destes números, em vez de se introduzirem precocemente regras, procedimentos algorítmicos e linguagem simbólica (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2006; Lamon, 2007) com o objetivo último de levar os alunos a operar com frações. É reconhecido também que uma abordagem isolada das frações, dos decimais e das percentagens é uma fonte de dificuldades por parte dos alunos neste tema (Sweeney & Quinn, 2000). É nesse sentido que é sugerido no PMEB (ME, 2007) um trabalho paralelo entre frações e decimais, partindo do significado parte-todo. Nesse contexto, a introdução dos números e operações está associada ao sentido do número (Brocardo, Serrazina & Kraemer, 2003; ME, 2007), sendo que uma abordagem dos vários significados dos números racionais pode contribuir significativamente para o seu desenvolvimento (Yang, Hsu & Huang, 2004).

Embora os números racionais compreendam diversos significados, existem ideias fundamentais em torno das quais os alunos desenvolvem e constroem o conceito de número racional. Entre estas destacam-se: a) o raciocínio multiplicativo, b) a densidade e o valor de posição, c) a concetualização de unidade[1], d) a partição, e) a equivalência e ordenação, e f) as estruturas comuns para adicionar ou subtrair (Martinie, 2007).

As representações dos racionais, aspeto focado no modelo de Yang et al. (2004) relativamente ao sentido de número racional, constituem a base do raciocínio com estes números e, por isso, os alunos devem desenvolver a sensibilidade para

---

1 A concetualização da unidade é uma noção complexa que diz respeito à interpretação da unidade – *unitizing*–, sendo este aspeto considerado muito importante para a compreensão dos números racionais (Clarke, Fisher, Marks & Ross, 2010). A noção de *unitizing* é ampla referindo-se não só à interpretação da unidade como também à compreensão flexível que se tem a seu respeito (Martinie, 2007), abarcando ainda a noção de *reunitizing* – reorganização da unidade – e *reversing* – reconstrução da unidade (Baturo, 2004).

compreender o seu significado relativamente ao contexto em que surgem (Moseley, 2005). No entanto, a flexibilidade dos alunos para lidar com as várias representações de um número racional depende largamente do ensino que lhes é proporcionado, uma vez que o simples contacto com um grande número de representações externas não resulta necessariamente numa reestruturação da sua compreensão. Esta apenas se desenvolve através da articulação entre as diferentes representações internas (Barmby, Harries, Higgins & Suggate, 2009).

Um aspeto realçado por diversos autores é o importante papel dos contextos que permitam visualizar e compreender estas relações (Huinker, 2002), facilitando o desenvolvimento de uma compreensão gradual mas sustentada dos números racionais (Confrey, 2009) e que podem favorecer o recurso a diversas estratégias aquando da resolução de problemas (Panaoura, Gagatsis, Deliyianni, & Elia, 2009), não deixando os alunos reféns de procedimentos que efetuam sem sentido. Devem também ser dadas oportunidades para estabelecer ligações entre as situações do quotidiano e os modelos (pictóricos, físicos, esquemáticos e representações simbólicas) para favorecer o estabelecimento de conexões entre representações (Fosnot & Dolk, 2002). Quando se estabelece uma ligação entre a linguagem informal dos alunos e a compreensão concetual promove-se a sua capacidade de lidar com os símbolos e a linguagem matemática formal, transformando-se estes últimos em ferramentas com sentido que os ajudam a pensar (Fosnot & Dolk, 2002; Huinker, 2002). Desta forma, torna-se possível que os alunos usem de forma flexível os seus conhecimentos matemáticos (Huinker, 2002), optando por usar a representação que lhes é mais favorável num determinado contexto.

Em suma, o desenvolvimento de sentido de número racional é um processo complexo que abarca aspetos do sentido de número mencionados por diversos autores (Yang et al., 2004). Tendo em conta estes aspetos e devido à complexidade do conceito de número racional (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2006; Lamon 2007; Martinie, 2007), o desenvolvimento do sentido de número racional deve englobar os diferentes significados dos números racionais, as suas diversas representações, a concetualização da unidade, da densidade dos números e o seu valor de posição, assim como a utilização de sistemas de valores de referência. Além disso, os alunos devem ser capazes de aplicar este conhecimento e ter destreza com estes números, utilizando múltiplas estratégias e revelar predisposição para utilizar uma ou outra representação e/ou método, em função da situação com que se deparam.

Modelo da barra numérica

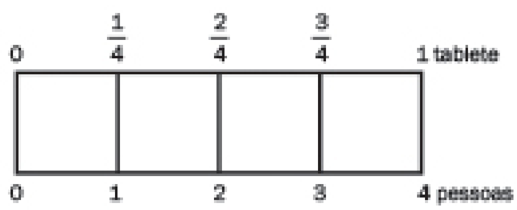
Entre os modelos que têm sido apontados como potenciadores do desenvolvimento do conceito de número racional, encontra-se a barra numérica, presente em diversos estudos no âmbito da Educação Matemática Realista (van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Este modelo é uma representação matemática que facilita a abordagem dos números racionais, sendo uma extensão de materiais que alguns professores já utilizam, tais como *tiras de fração* e réguas, mas que pode ser usado para abranger situações mais complexas (Middleton, van den Heuvel-Panhuizen, & Shew, 1998). Este modelo permite que os alunos explorem relações entre números e contribui para a compreensão das relações entre as várias representações simbólicas dos números racionais (van Galen et al., 2008). Bright, Behr, Post e Wachsmuth (1988) enumeram algumas das suas vantagens: a) o comprimento representa uma extensão da unidade e, simultaneamente, de todas as subdivisões da unidade; b) é um modelo contínuo; e c) requer o uso de símbolos para transmitir o significado pretendido. Deste modo, o modelo da barra numérica é apontado como sendo particularmente útil numa fase inicial de exploração das várias representações simbólicas dos números racionais, em contextos que envolvam medida e divisão.

Os primeiros modelos que os alunos utilizam são geralmente representações das suas ações, sendo muito semelhantes às situações contextualizadas apresentadas nos enunciados. Constituem representações das suas interações com o objeto (Fosnot & Dolk, 2002), os *modelos de*, que gradualmente se transformam em modelos mais generalizados, isto é, em *modelos para* raciocinar matematicamente (van Galen et al., 2008). De acordo com Gravemeijer (2005), a “mudança de um *modelo de* para um *modelo para* corresponde a uma alteração na forma de pensar do aluno, (...) [sobre a] situação do contexto modelado para um enfoque nas relações matemáticas” (p. 95).

Assim no processo de desenvolvimento da compreensão matemática, o modelo da barra numérica vai mudando de uma representação concreta e contextualizada, para um modelo de representação mais abstrato que orienta os alunos na escolha dos cálculos que têm que ser feitos e que permite também mostrar como se raciocinou numericamente. Van Galen et al. (2008) defendem que um uso eficiente da barra numérica no ensino permite que os alunos que inicialmente utilizam a barra numérica para representar uma situação (*modelo de*), posteriormente, a utilizem como um modelo para pensar (*modelo para*), e onde podem surgir em simultâneo as várias representações simbólicas dos números racionais, reforçando-se a compreensão das relações entre as representações em fração, percentagem e decimal. Segundo os autores, utilizando a barra numérica com estas três representações de número racional pode estabelecer-se uma ligação clara entre diferentes partes do currículo, incluindo as proporções.

No contexto dos números racionais, Middleton et al. (1998) defendem que os alunos facilmente se familiarizaram com a barra numérica através da divisão de objetos do quotidiano ou outros modelos lineares. Os alunos podem caracterizar qualquer situação de partilha na barra numérica e contar o número de pedaços do todo que cada pessoa recebe, assim como comparar o tamanho dos pedaços, atribuindo novo significado a esta representação. O modelo da barra numérica pode surgir facilmente após a utilização de um retângulo que simboliza determinada situação concreta, pelo que, de início, o nível de abstração no seu uso não é muito elevado (Middleton et al., 1998). No trabalho com uma situação de partilha equitativa (Quadro 1A), a barra numérica pode servir para os alunos imaginarem o processo de dividir algo em partes iguais, sendo a barra numérica a unidade e, ao mesmo tempo, o objeto a ser dividido (van Galen et al. 2008).

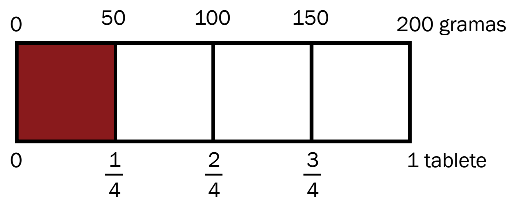
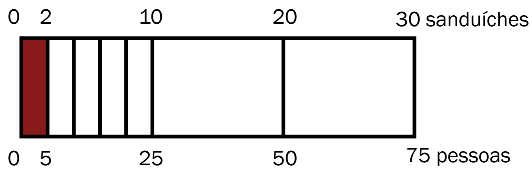
Quadro 1A – Contextos de utilização da barra numérica (adaptado de Middleton et al., 1998).

Contexto	Modelo	Problema
Partilha equitativa		O Nicolau tinha uma tablete de chocolate que partilhou igualmente por ele e três amigos. Que porção receberá cada um?

Segundo Middleton et al. (1998), os alunos também podem recorrer ao modelo da barra numérica para efetuar cálculos quando estão perante uma situação mais complexa ou num contexto menos familiar, onde tenham de relacionar um número racional com uma propriedade física, como, por exemplo, o peso (Quadro 1B. Representação a).

A barra numérica também pode ser utilizada para representar uma quantidade que não é mensurável na própria representação (Quadro 1B. Representação b). Neste exemplo, ao partilhar equitativamente 30 sandes por 75 pessoas, os alunos podem recorrer ao raciocínio proporcional para dividir em partes iguais a barra numérica descobrindo que cinco pessoas partilham duas sandes entre si. Aqui, os alunos dividem a barra numérica em três terços e depois cada terço em quintos. Deste modo, com a ajuda do modelo, os alunos podem começar a ver a relação entre $\frac{30}{75}, \frac{20}{50}$ e $\frac{10}{25}$ e as frações com termos menores, tais como $\frac{2}{5}$.

Quadro 1B – Contextos da utilização da barra numérica (adaptado de Middleton et al., 1998).

Contexto	Modelo	Problema
a) Relacionando frações com propriedades de objetos		Cada tablete pesa 200g. Se cada amigo recebe $\frac{1}{4}$ da tablete, quantos gramas de chocolate cada um recebe?
b) Relação entre dois conjuntos de objetos		Houve um lanche no cineteatro, onde estavam 30 sanduíches para serem distribuídas por 75 pessoas. Quanto vai receber cada uma?

O modelo da barra numérica pode ser usado de forma flexível para diferentes significados de números racionais e permite estabelecer relações entre números racionais e quantidades, assim como conexões entre as suas várias representações (van Galen, et al., 2008). Além de ser importante na comparação e ordenação de números racionais, uma vez que o comprimento da barra representa uma extensão da unidade (Bright, et al., 1988) e, simultaneamente, de todas as suas subdivisões, também pode ser reduzida a uma dupla linha numérica, através de uma alteração física (van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

A experiência de ensino

Abordagens recentes no campo do desenvolvimento de currículos inovadores de matemática e, também, de investigação sobre a aprendizagem desta disciplina, têm tido por base a construção de trajetórias de aprendizagem (Clements & Sarama, 2004). De acordo com os autores, para que se consiga promover uma trajetória de aprendizagem, é necessário implementar uma sequência de tarefas, que não é fixa nem única, mas que é apenas uma hipótese a seguir, em que é fundamental uma contínua transformação. Este trabalho é complexo pois requer, em simultâneo, um conhecimento aprofundado do tópico e das orientações curriculares, assim como a tomada de decisões sobre o que os alunos têm de aprender e o modo como os ensinar (Silvestre & Ponte, 2011).

Inspirada na ideia de Clements e Sarama (2004) foi delineada uma EE constituída por uma sequência de tarefas, no tema dos Números Racionais, que aposta no estabelecimento de conexões entre as várias representações destes números, bem como no uso de modelos, e que proporciona um trabalho em torno dos vários significados de número racional. Esta EE baseia-se na conjetura de que os alunos desenvolvem a compreensão do conceito de número racional se trabalharem com tarefas de natureza exploratória, em contextos familiares propícios à utilização do modelo da barra/dupla linha numérica, que envolvam: a) as várias representações dos números racionais (pictórica – barra/dupla linha numérica, setores circulares –, frações, decimais e percentagens), bem como as suas conexões – sendo-lhes dada oportunidade de escolher a representação que usam; b) os seus vários significados; e c) os diferentes tipos de grandezas.

As tarefas propostas nesta EE articulam-se com os objetivos da brochura de materiais de apoio ao professor (Menezes, Rodrigues, Tavares & Gomes, 2008) do PMEB (ME, 2007) e a sua exploração visa promover a observação, confronto de resultados, discussão de estratégias e a formalização de conceitos e representações matemáticas. Fez-se esta opção uma vez que, de acordo com o PMEB, é esperado que os alunos consigam desenvolver o sentido de número, a compreensão dos números racionais não negativos nas suas diversas representações, a compreensão das operações de adição e subtração, bem como a capacidade de cálculo mental e escrito. No entanto, foi feita uma adequação das tarefas tendo em conta que, quando esta turma frequentou o 1.º ciclo, este programa ainda não estava em vigor. Na construção da sequência de tarefas, atendeu-se a noções importantes associadas ao conceito de número racional, como partição, *unitizing*, densidade, valor de posição, equivalência e ordenação, que são necessárias para que os alunos possam resolver problemas envolvendo os diversos significados dos números racionais (Martinie, 2007). Reconhecendo também a importância de trabalhar com vários tipos de unidades (Lamon, 2007), foram propostas tarefas que envolvem três tipos de grandezas: contínuas, discretas e compostas. Todas as tarefas têm um contexto familiar de cunho imaginário que lhes é transversal: os seus protagonistas. Trata-se de três alunos – Luana, Nicolau e João – que supostamente frequentam a mesma escola e que, ao longo do ano letivo, estão envolvidos em várias atividades em que surgem números racionais.

O processo de construção da sequência das tarefas foi faseado. Num primeiro momento, foram pensadas algumas tarefas, havendo uma ideia global sobre a sequência de significados que estas devem abranger. Após a análise dos resultados obtidos pelos alunos num teste inicial, algumas tarefas que já tinham sido pensadas foram adaptadas e outras foram construídas de novo. Foi então definido o primeiro grupo de quatro tarefas e o seu enunciado foi reajustado. Enquanto os alunos foram trabalhando nestas quatro tarefas foram-se ajustando as quatro seguintes (tarefas 5, 6, 7 e 8), tendo em conta a forma como estes evoluíam na aprendizagem, mantendo a ideia de continuidade entre as tarefas. Por fim, as últimas três tarefas (9, 10 e 11) foram reajustadas à medida que as tarefas 5, 6, 7 e 8 foram sendo resolvidas na aula.

A planificação desta sequência de tarefas encontra-se organizada num quadro (Quadro 2), onde são indicados os objetivos, os significados de número racional envolvidos e o tempo sugerido para a realização de cada tarefa.

Foi feita uma previsão do tempo necessário para cada tarefa, no entanto, a sua realização prolongou-se mais do que o previsto. O reduzido contacto dos alunos com as frações no 1.º ciclo e o tempo alargado ocupado com as discussões (em pequeno grupo e grande grupo), dado os alunos serem muito participativos e comunicativos, foram factores que levaram a que se gastasse mais tempo do que o inicialmente pensado. Assim, embora o tempo previsto para a implementação desta EE fosse de dez aulas de 90 minutos, esta ocupou cerca de 16 aulas.

Esta EE foi realizada com a colaboração da professora de Matemática da turma (Inês) que, ao ser convidada para o estudo, prontamente se dispôs a participar. Apesar de a elaboração das tarefas ser da iniciativa das investigadoras (autoras), segundo o acordo estabelecido com Inês, estas foram sempre discutidas e ajustadas conjuntamente. Antes da realização de cada tarefa, havia uma discussão prévia sobre os objetivos da aula e como a discussão no grupo turma deveria ser dirigida para que esses objetivos fossem atingidos. Como a maioria das discussões em grande grupo ficou para a aula seguinte, as reflexões realizadas com a professora, no fim de cada aula, permitiram aperfeiçoar determinadas questões para que estas se tornassem mais claras para os alunos e delinear um conjunto de perguntas a colocar aquando da discussão no grupo turma, de modo a colmatar eventuais falhas. Após a realização de cada tarefa pela turma, a investigadora (primeira autora) e a professora reuniam-se para refletir sobre as dificuldades demonstradas pelos alunos e a adequação da tarefa aos seus propósitos. Nestes encontros tentou-se compreender as potencialidades ou limitações de cada tarefa e o trabalho que devia ser desenvolvido *a posteriori*. Estas discussões tornaram-se fundamentais para a EE, na medida em que as tarefas seguintes puderam ser reajustadas tendo em conta as ideias que aí emergiram.

Quadro 2 – A sequência de tarefas[2]

Tarefa	Objetivos	Significados Envolvidos	Tempo (minutos)
Tarefa 1 *Partilha de chocolate*	- Identificar a metade, a quarta e a oitava partes de uma grandeza contínua, e representá-las na forma de fração, decimal, percentagem e numeral misto. - Comparar quantidades resultantes de uma situação de partilha equitativa. - Identificar e dar exemplos de frações equivalentes. - Adicionar números racionais não negativos representados de diferentes formas.	Quociente Parte-todo	180
Tarefa 2 *Adereços nos bastidores*	- Identificar partes de uma grandeza discreta. - Recorrer a diferentes representações de números racionais (fração, decimal e numeral misto). - Identificar frações equivalentes. - Reconstruir a unidade a partir das suas partes.	Operador Parte-todo	90
Tarefa 3 Eventos no Cineteatro	- Representar um número racional não negativo (escrito de diferentes formas) na barra numérica. - Determinar uma parte de determinada quantidade, a partir da unidade.	Operador Medida	45

2 Para mais detalhes consultar Ventura (2013).

Tarefa	Objetivos	Significados Envolvidos	Tempo (minutos)
Tarefa 4 *Cenário de espelhos*	- Resolver problemas envolvendo números racionais na sua representação decimal. - Localizar e posicionar números racionais não negativos na linha/barra numérica. - Recorrer à representação de numeral misto.	Medida Parte-todo	45
Tarefa 5 *Tarde nas piscinas municipais*	- Comparar e ordenar números racionais representados de várias formas. - Localizar e posicionar números racionais não negativos na barra numérica, na representação de fração. - Converter frações em decimais e percentagens.	Parte-todo Operador Medida	45
Tarefa 6 *Lanche no Cineteatro*	- Distribuir equitativamente grandezas contínuas e discretas. - Comparar e ordenar números racionais não negativos. - Adicionar números racionais não negativos.	Quociente Parte-todo	90
Tarefa 7 Estacionamento no Cineteatro	- Representar relações (parte-todo; parte-parte) sob a forma de fração, percentagem e decimal. - Localizar e posicionar na barra numérica um número racional não negativo.	Parte-todo Razão	90
Tarefa 8 *Depósito de gasolina*	- Resolver problemas envolvendo racionais (frações, decimais e numerais mistos) num novo modelo. - Reconhecer a densidade dos números racionais.	Parte-todo Medida	45
Tarefa 9 *O pintor Pedro e as vitaminas*	- Representar relações parte-parte. - Comparar números racionais não negativos.	Razão	90
Tarefa 10 *Compras na Bit-@-byte*	- Compreender a noção de percentagem e relacionar diferentes formas de a representar. - Calcular e usar percentagens. - Traduzir uma fração por uma percentagem.	Parte-todo Operador	90

Tarefa	Objetivos	Significados Envolvidos	Tempo (minutos)
Tarefa 11 *Descobrindo comprimentos e quantidades*	- Reconstruir a unidade a partir das suas partes. - Representar números racionais na dupla linha numérica. - Adicionar e subtrair números racionais não negativos representados em diferentes formas. - Comparar números racionais não negativos. - Resolver problemas que envolvam números racionais não negativos.	Parte-todo Medida	90

Esta EE foi realizada com a colaboração da professora de Matemática da turma (Inês) que, ao ser convidada para o estudo, prontamente se dispôs a participar. Apesar de a elaboração das tarefas ser da iniciativa das investigadoras (autoras), segundo o acordo estabelecido com Inês, estas foram sempre discutidas e ajustadas conjuntamente. Antes da realização de cada tarefa, havia uma discussão prévia sobre os objetivos da aula e como a discussão no grupo turma deveria ser dirigida para que esses objetivos fossem atingidos. Como a maioria das discussões em grande grupo ficou para a aula seguinte, as reflexões realizadas com a professora, no fim de cada aula, permitiram aperfeiçoar determinadas questões para que estas se tornassem mais claras para os alunos e delinear um conjunto de perguntas a colocar aquando da discussão no grupo turma, de modo a colmatar eventuais falhas. Após a realização de cada tarefa pela turma, a investigadora (primeira autora) e a professora reuniam-se para refletir sobre as dificuldades demonstradas pelos alunos e a adequação da tarefa aos seus propósitos. Nestes encontros tentou-se compreender as potencialidades ou limitações de cada tarefa e o trabalho que devia ser desenvolvido *a posteriori*. Estas discussões tornaram-se fundamentais para a EE, na medida em que as tarefas seguintes puderam ser reajustadas tendo em conta as ideias que aí emergiram.

Metodologia

O estudo realizado adotou o paradigma metodológico de *design research* (Bereiter, 2002), de natureza qualitativa, que envolve experiências de ensino e que visa compreender o processo de ensino e aprendizagem (Cobb, diSessa, Lehrer, & Schauble, 2003). A EE foi realizada com uma turma do 5.º ano, no contexto da qual se recorreu à construção de um estudo de caso relativo ao percurso de aprendizagem de um grupo de quatro alunos (Stake, 2007): Aida, Cristiano, Dinorah e Mariana (nomes fictícios).

No decurso da EE, a primeira autora realizou a recolha de dados e teve uma interação privilegiada com o grupo estudo de caso. Foram gravados em vídeo todos os momentos de trabalho do grupo escolhido e de interação da professora com toda a turma. Foi também realizada uma recolha documental das produções escritas destes alunos. Neste capítulo apresentam-se elementos da atividade do grupo estudado em três das tarefas (4, 10 e 11) da sequência que foi elaborada (Ventura, 2013), evidenciando-se as estratégias que adotaram e as dificuldades que enfrentaram. Estas tarefas abrangem diversos significados dos números racionais, permitindo perceber como o desenvolvimento de sentido de número racional é apoiado pelo uso do modelo da barra.

Concretização da experiência de ensino

A introdução da barra numérica nas aulas

A EE iniciou-se com o apoio de materiais manipuláveis (tiras de papel), uma vez que estes podem facilitar a compreensão concetual das frações e dos numerais decimais (Sweeney & Quinn, 2000). Assim, na primeira tarefa (em anexo) são introduzidas as tiras de papel para os alunos modelarem a situação proposta, com o intuito de passarem, posteriormente, a usar a barra numérica. A tarefa suscita o uso de várias representações de um número racional de modo que os alunos possam começar a apoiar-se na barra numérica para realizar as conversões entre as representações.

A exploração da tira de papel que Inês[3] fez com os alunos, nesta primeira tarefa, foi fundamental para que estes compreendessem como a poderiam usar e se apropriassem do modelo da situação. A professora começou por distribuir quatro tiras de papel por cada grupo, referindo que cada uma representava um chocolate e solicitou aos alunos que escrevessem o nome da Luana numa, do Nicolau noutra e do João noutra, ficando

3 A professora Inês é identificada pela letra (I) e a professora-investigadora, primeira autora do capítulo, pela letra (H).

a quarta tira em branco. Mencionou que a tira de papel podia servir para representar um objeto que não se tem fisicamente e assim facilitar o raciocínio.

Propôs então que parte da primeira questão (relativa a Luana) fosse realizada em grupo, com a sua orientação, de modo que os alunos compreendessem bem a situação. Após esse momento inicial, os alunos trabalharam em pequeno grupo nas questões seguintes. Desde logo, foi evidente que, para completar a resposta à primeira questão, os alunos recorriam às tiras de papel distribuídas de modo a concretizarem a partilha equitativa das tabletes de chocolate e para facilitar a comparação de quantidades. Quando Inês se apercebia da existência de dificuldades por parte dos alunos, sugeria frequentemente que estes recorressem à barra para pensar sobre as situações, o que também aconteceu na tarefa 2.

Outro aspeto a destacar na forma como as aulas foram conduzidas, é que a professora favoreceu o confronto de estratégias de resolução, incentivando os alunos a argumentar e a explicar os seus raciocínios e tentou sequenciar as suas respostas para apresentação à turma (por exemplo, da mais simples à mais complexa). Procurava aproveitar essas situações para estabelecer relação entre as diferentes respostas de modo a fazer emergir as ideias matemáticas fundamentais (Smith, Hughes, Engle & Stein, 2009). Assim, nesse momento, surgia, frequentemente, o recurso ao modelo da barra numérica como uma das estratégias adotadas pelos alunos e, como tal, era discutida com a turma, conferindo-lhe destaque enquanto estratégia válida e eficaz para resolver as situações matemáticas presentes nas tarefas.

Tarefa 4 – Cenário de Espelhos

Nesta tarefa estão subjacentes os significados de medida e parte-todo contextualizados numa situação que se refere a uma montagem de um cenário do teatro, onde o fundo do palco seria tapado com espelhos, sendo dadas as medidas do comprimento do palco[4] e de cada espelho (Figura 1). Como a medida do comprimento do palco (7m) não era um múltiplo da de cada espelho (1,2m), a tarefa levava os alunos a identificarem que parte de um espelho teria de ser cortado para encaixar no fundo do palco.

4 No enunciado da tarefa é usado o termo “largura do palco” que pareceu ser mais natural para os alunos.

Na última aula de matemática, a professora pediu aos alunos para inventarem um problema com números racionais. O Nicolau que tinha acompanhado parte da montagem do cenário do teatro a que assistiu no cineteatro, lembrou-se de propor o seguinte:

O produtor da peça de teatro "O Espelho Dividido" mandou fazer espelhos com 1,2m de comprimento para colocar no fundo do palco, o qual tem 7 metros de largura. Identifica a quantidade exata de espelhos que vão ser usados?

Figura 1 – Tarefa 4

Após concluírem que necessitavam de cinco espelhos inteiros e parte de um sexto (1m), e após interpelação da professora em grande grupo, Aida sugere aos seus colegas de grupo que recorram à barra numérica para encontrarem uma forma de representar a parte do sexto espelho utilizada (Figura 2).

Mariana: Cinco não chegam!

Aida: Mas seis são demais. E agora?!

Cristiano: Cortamos o sexto espelho!

(...)

Mariana: Do outro vamos usar só 1m! (referindo-se ao sexto espelho)

(...)

Aida: Temos de fazer a barra!

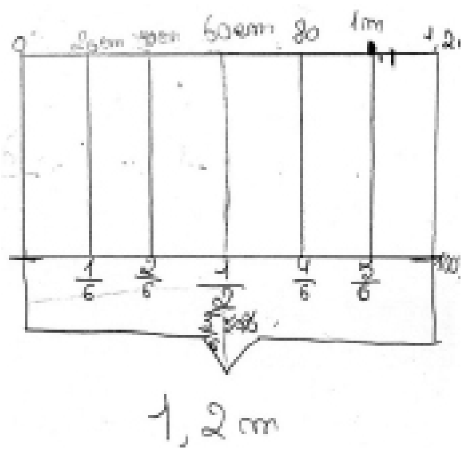


Figura 2 – Divisão do sexto espelho pelo grupo, na tarefa 4.

Como mostra a figura, os alunos deste grupo desenham a barra, que dividem em seis partes iguais, e utilizam as várias representações (percentagem, decimal e fração) da mesma porção de uma unidade, na barra. Utilizam a barra com bastante rigor de representação, uma vez que fazem claramente a separação entre a representação das medidas na parte superior da barra e das frações e percentagens correspondentes em baixo. A utilização do modelo com compreensão é visível na forma como respondem às perguntas da professora, explicando o que fizeram:

> **Professora (I):** Porque dividiram a barra em seis partes?
> **Aida:** Primeiro dividimos a barra ao meio, que era 50% e 60cm!
> **Professora (I):** OK! No fim então era...
> **Cristiano:** 100% e 120cm!
> **Mariana:** Nós precisávamos de um metro do sexto espelho! Depois de sabermos quanto era metade do espelho, fomos ver quanto é que lhe faltava para chegar aos 100!
> **Professora (I):** E como raciocinaram para dividir cada metade em três?
> **Mariana:** Vimos que do 60 para chegar a 100 faltava 40! E do 100 para chegar ao 120 faltava 20! Como só queríamos 40cm, dava-nos jeito que cada bocadinho valesse 20cm!
> **Aida:** Então ficámos com uma marca nos 100cm, que corresponde a $\frac{5}{6}$!
> **Dinorah:** Que é a parte do sexto espelho que se utiliza!

Como é ilustrado pelo desenho (Figura 2) e pela sua explicação, os alunos tomaram o espelho como unidade (120cm) e usaram uma fração ou percentagem de referência (um meio ou 50%, respetivamente) para tentar estabelecer uma relação da parte (100cm) que queriam relacionar com o todo. De seguida, ao fazerem a diferença entre 100 e 60cm e entre 120 e 100cm, verificaram que a segunda é metade da primeira e aperceberam-se que a metade da barra, entre os 60 e os 120cm, podia ser dividida em três secções iguais. Na sua totalidade, a barra podia ser dividida em seis partes iguais, correspondendo cada uma a 20cm. É visível a sua flexibilidade ao lidarem com as várias representações que fazem coexistir no modelo, sem que isso os confunda.

Tarefa 10 – Compras na Bite-@-byte

1. Na loja Bit-@-byte o preço de um MP3 é de 30€, mas está em promoção com 20% de desconto. Passada uma semana o MP3 teve um novo desconto de 40%, sobre o seu valor promocional. Será que isto equivale a um desconto de  sobre os 30€? Explica o teu raciocínio.

Figura 3 – Questão 1 da Tarefa 10.

Nesta situação, os alunos utilizam a barra numérica com duas intenções: para esclarecer as suas ideias e para ajudar um dos elementos do grupo a encarar a percentagem como um valor relativo a uma unidade. Num primeiro momento, os alunos, apesar de identificarem facilmente o valor do desconto inicial pedido, manifestaram algumas dificuldades de interpretação, pois referiam que seria esse o valor a pagar. Como estratégia para responderem à questão, os alunos recorreram à barra, que dividiram em cinco partes iguais e assinalaram, na parte superior, as percentagens, às quais fizeram corresponder a respetiva fração e quantia monetária (Figura 4). Os alunos colocaram, por engano, os 30 euros na parte superior da barra e os 100% na parte inferior mas isso não perturbou a sua estratégia de resolução.

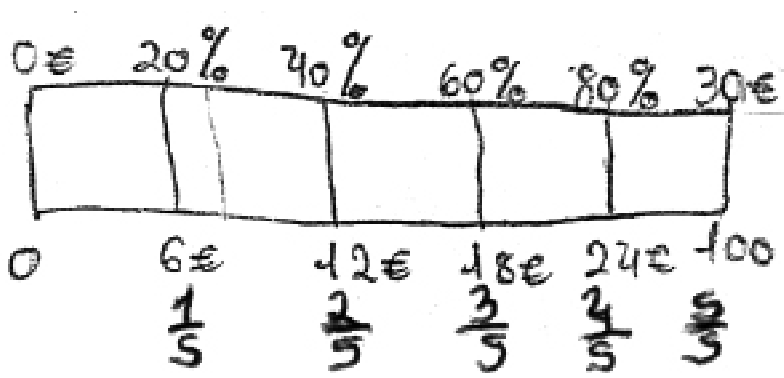


Figura 4 – Estratégia do grupo para determinar 20% de 30€, na tarefa 10.

Nesse momento, um dos elementos do grupo, Cristiano, fez uma leitura precipitada da barra tendo em conta o enunciado do problema:

Cristiano: Então 40% de desconto é 12€!

Professora (H): Como sabes que é 12€?

Cristiano: Está aqui na barra! (Figura 2)

Professora (H): Atenção! O desconto de 40% é sobre o valor já com o desconto de 20%!

Cristiano: Mas não é igual?

Perante a interpelação da investigadora, Cristiano parece assumir que 40% representa sempre o mesmo valor independentemente da unidade considerada. Duas colegas explicam-lhe então que o seu raciocínio não está correto:

Aida: Não! Um desconto de 20% é 6€, 30€ menos 6€ dá 24€! E agora se o MP3 tem outro desconto, …

Mariana: Já não é com os 30€, é com os 24€ que é o novo preço!

Cristiano: Então faz-se 24€ menos 12€!

Mariana: Não podes fazer isso! 12€ é 40% de 30€! Mas nós queremos 40% de 24€!

Cristiano: E não é igual?!

Mariana: Claro que não!

Aida: Olha, vamos fazer outra barra!

Apesar de as colegas tentarem explicar a Cristiano que à noção de percentagem está subjacente uma relação com a unidade, o aluno não se mostrava muito convencido, pelo que Aida sugeriu que recorressem a uma outra barra para representar o novo valor sobre o qual poderiam calcular a percentagem (Figura 5). Dividiram a barra em cinco partes, tomando-a como unidade (100%) a que fizeram corresponder os 24 euros e estabeleceram uma associação entre as percentagens e os respetivos valores monetários.

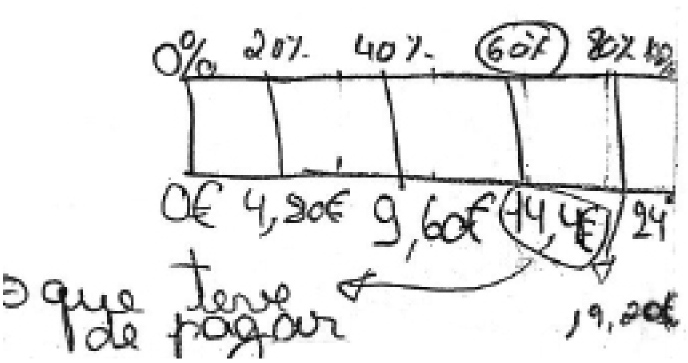


Figura 5 – Estratégia do grupo para determinar 40% de 24€, na tarefa 10.

Cristiano, ao fazer a leitura dos valores nesta nova barra, tomou então consciência que a 40% correspondia agora um novo valor monetário, apercebendo-se que estava errado.

> **Cristiano:** Agora aqui 40% é 9,60€!
> **Mariana:** Vês que não é a mesma coisa?!
> **Cristiano:** Pois não!

Inicialmente, o aluno não conseguiu reconhecer a grandeza relativa das percentagens, uma vez que interpretou 40% como sendo um número ao qual corresponde sempre o mesmo valor, independentemente da unidade em questão. Somente depois de recorrer à barra, por sugestão da colega, é que pareceu ficar convencido que, de facto, 40% representa valores diferentes consoante o valor da unidade presente na situação.

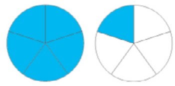
Neste problema, os alunos deste grupo também tiraram partido da informação que a barra lhes faculta, para encontrarem uma forma mais rápida de responder ao que lhes era pedido. Ao visualizar a barra, Mariana alertou os colegas para uma estratégia mais rápida e menos trabalhosa de determinar o preço a pagar:

> **Mariana:** Esperem lá! (…) 100% menos 20% dá 80%! Que é o que se paga! Assim basta vermos quantos € correspondem aos 80%!
> **Aida:** Olha, pois é! Boa! Assim é mais rápido! (…)
> **Dinorah:** Com um desconto de 60% sobre 30€, basta olharmos para os 40% …

Os colegas compreendem que através da estratégia de Mariana, recorrendo à barra, podiam identificar, de imediato, o valor a pagar numa situação de desconto, adotando uma estratégia mais eficaz para efetuar o cálculo. Além disso, concluíram de forma direta, através da observação das barras, qual a situação de desconto mais favorável.

É de salientar que o modelo da barra não é a única estratégia adotada pelos alunos, pois numa outra questão da mesma tarefa (Figura 6), seguiram um procedimento de cálculo.

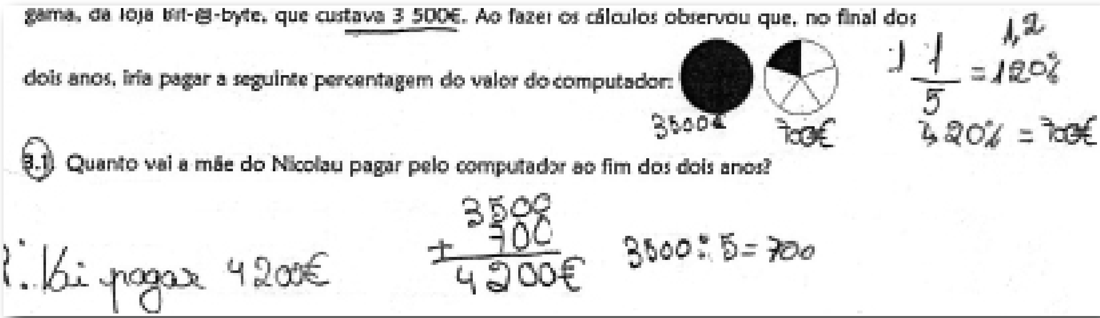
3. A mãe do Nicolau fez um empréstimo, por dois anos, para comprar um computador topo de gama, da loja Bit-@-byte, que custava 3 500€. Ao fazer os cálculos observou que, no final dos dois anos, iria pagar a seguinte percentagem do valor do computador:



3.1. Quanto vai a mãe do Nicolau pagar pelo computador ao fim dos dois anos?

Figura 6 – Questão 3 da Tarefa 10.

Nesta tarefa o valor monetário de um determinado artigo surge através de uma representação pictórica (setor circular) que os alunos rapidamente transformaram em numeral misto, que convertem em percentagem, e este em numeral decimal (Figura 7).



gama, da loja Bit-@-byte, que custava 3 500€. Ao fazer os cálculos observou que, no final dos dois anos, iria pagar a seguinte percentagem do valor do computador:

3500€ 700€

1,2

$1\frac{1}{5} = 120\%$

$20\% = 700€$

3.1. Quanto vai a mãe do Nicolau pagar pelo computador ao fim dos dois anos?

R: Vai pagar 4200€

$$\begin{array}{r} 3500 \\ +\ 700 \\ \hline 4200€ \end{array}$$

3500 : 5 = 700

Figura 7 – Estratégia do grupo na Questão 3 da Tarefa 10.

Os alunos começaram por traduzir a representação gráfica respeitante a um valor superior à unidade por um numeral misto, associando à sua parte fracionária a percentagem de 20% e, ao seu conjunto, a percentagem de 120%, convertendo-a de seguida num numeral decimal (1,2). Posteriormente, abandonaram esse processo e determinaram o valor monetário correspondente a um quinto, adicionando-o de seguida ao valor inicial referido no enunciado da tarefa (Figura 7). A investigadora questionou-os sobre a sua opção:

> **Professora (H):** Porque representaram isto de várias formas? (apontando para informação gráfica)
> **Cristiano:** Porque a gente quis, é giro!
> **Aida:** Assim vamos vendo números diferentes!
> **Mariana:** E mais tarde podem dar jeito!

O diálogo mostra que os alunos optaram por converter as representações umas nas outras porque, aparentemente, é uma atividade que gostam de realizar ("é giro"), tendo a noção de que perante uma situação podem enveredar por uma ou por outra representação consoante o que lhes é mais favorável. A flexibilidade que manifestaram na conversão de diferentes representações de um número racional evidenciou-se também na sua opção de realizar conversões como estratégia de resolução de problemas.

Tarefa 11 – Descobrindo Comprimentos e Quantidades

Uma das questões desta tarefa envolvia uma situação de reconstrução da unidade, sendo dada uma medida de um comprimento de um comboio de brincar (1,6m) que correspondia a uma parte (0,8) de um certo comprimento de um outro comboio que se pretendia que os alunos descobrissem (Figura 8).

1.4. Também o Jorge começou a construir um comboio como o do Norberto, uma vez que o seu pai também é serralheiro. No entanto, o Jorge começou a sua construção muito antes do Norberto. Quando o Norberto lhe disse o comprimento do seu comboio, o Jorge respondeu: "O comprimento do teu comboio é apenas 0,80 do meu". Qual é o comprimento do comboio do Jorge?

Figura 8 – Questão 1.4. da Tarefa 11.

Por sugestão de Aida, os alunos do grupo recorreram, de imediato, à representação na linha numérica a qual dividiram em dez partes. Marcaram na linha a medida do comprimento conhecido, ao qual fazem corresponder o valor 0.8, conforme explicam à professora:

Aida: Fazemos uma linha e dividimos em 10 partes iguais!
Professora (I): Em dez partes? Porquê?
Aida: Porque o enunciado diz que 1,60m são oito décimos!
Professora (I): E...?
Mariana: "Décimos" vem de dez!
Aida: Sim! Oito em dez!

Os alunos identificam o numeral decimal do enunciado como a oitava parte da unidade, evidenciando compreender também que se trata de oito décimas embora referindo "oito em dez". Deste modo, como estratégia para responderem à questão, optaram por recorrer à linha numérica dividindo-a em dez partes iguais (Figura 9), começando por registar na oitava marca a medida do comprimento conhecido (1,60m) que lhe corresponde.

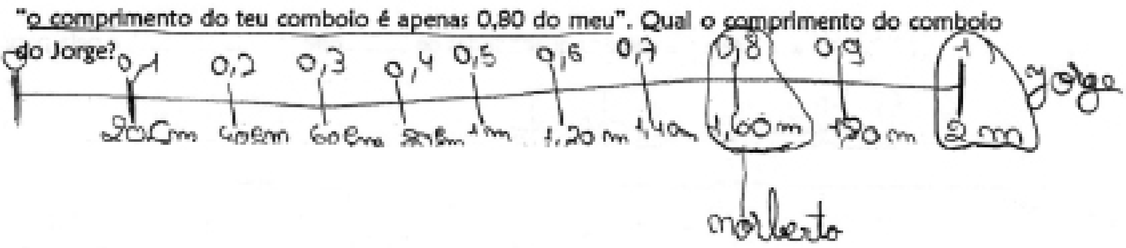


Figura 9 – Estratégia do grupo, na questão 1.4. da tarefa 11.

De seguida, os alunos assinalaram, na parte superior da linha, uma décima em cada segmento. Para encontrarem a medida correspondente a cada décima (20cm) que colocaram na parte inferior da linha, recorreram à divisão, como se observa no diálogo seguinte:

> **Mariana:** Fazemos 1,60 a dividir por 8!
>
> **Aida:** Mas a dividir dá menos! Dá 0,2!
>
> **Mariana:** Calma! Isso é quanto vale uma parte! (referindo-se a $\frac{1}{8}$ de 1,60)
>
> **Aida:** Ah! Pois é! Isto é o que vale uma décima!
>
> **Mariana:** Cada espaço vale 20cm, que foi o que eu disse!

Os alunos analisaram então na barra numérica quantos segmentos iguais faltam para a unidade (Aida). Observaram que têm duas décimas, a que correspondem duas vezes 20cm e que, como tal, a unidade corresponderá a dois metros:

> **Aida:** Agora quanto é que falta aqui?
>
> **Dinorah:** Faltam dois bocados.
>
> **Cristiano:** O comboio do Jorge mede 2m!

O modo como os alunos resolveram esta questão, evidencia a sua facilidade na reconstrução da unidade (*reversing*), recorrendo à dupla linha numérica. Embora na dupla linha numérica coexistam duas unidades de medida (centímetros e metros) os alunos não se confundem, evidenciando flexibilidade ao lidar com diferentes representações dos números racionais.

A concluir

No conjunto das tarefas analisadas os alunos revelam compreensão de vários aspetos que comportam o desenvolvimento do sentido de número racional, mostrando capacidade para: a) resolver tarefas que envolvem os significados de “medida”, “parte-todo” e “operador”; b) estabelecer conexões entre as diferentes representações de um número racional, conseguindo convertê-las umas nas outras; c) interpretar (*unitizing*) e reconstruir (*reversing*) a unidade em situações que envolvem grandezas contínuas; e d) utilizar uma ou outra representação em função da situação com que se deparam.

Na tarefa 4, embora se trate de uma situação de medida em que a forma geométrica do espelho facilmente remete para a forma da barra, o uso eficiente que fazem desta permite-nos afirmar que a barra que começou como *modelo de uma situação,* na primeira tarefa da sequência (van den Heuvel-Panhuizen, 2003), foi apropriada pelos alunos como uma ferramenta útil, evoluindo para *um modelo para pensar,* através da qual estes fazem uso das várias representações dos números racionais.

Na tarefa 10, a barra numérica foi fundamental para os alunos resolverem um problema com números racionais, envolvendo o cálculo de percentagens. Os alunos usam-na fazendo a separação entre a representação das medidas na parte superior da barra e das frações e percentagens correspondentes em baixo. Esta utilização da barra indicia uma relativa facilidade na transição para o trabalho com outro modelo semelhante, através de uma alteração física: a dupla linha numérica. Tal facto torna-se evidente quando, na tarefa 11, perante uma questão que envolve o difícil conceito de *reversing*, os alunos recorrem à dupla linha numérica como suporte ao seu raciocínio.

Globalmente, os resultados deste estudo apontam no sentido do que van Galen et al. (2008) advogam como sendo o papel do raciocínio numérico a partir da barra, ou seja, o reforço da compreensão das relações entre as várias representações dos números racionais. A forma flexível como lidam com as representações na barra ou linha numérica dá mostras também de um reforço da compreensão da relação entre as diferentes unidades de referência com que se vão confrontando nas situações propostas, aspeto central no trabalho com os números racionais, nos seus vários significados. Ainda assim, persistem dificuldades como é evidente no caso de um dos alunos do grupo que, de início, não consegue reconhecer a grandeza relativa das percentagens, considerando que uma determinada percentagem vale sempre o mesmo, independentemente do valor da unidade em causa. No entanto, com a discussão que se gera no grupo, o aluno parece evoluir na compreensão de percentagem conseguindo resolver as questões seguintes de forma correta.

A manipulação de materiais, nomeadamente as tiras de papel *(modelos de)*, da primeira tarefa, revelaram-se importantes para que os alunos consigam resolver problemas envolvendo números racionais, fazendo um uso eficiente do modelo da barra/linha numérica como estratégia de resolução *(modelos para)* (Fosnot & Dolk, 2002). Para tal evolução contribuíram também significativamente os contextos criados para as tarefas, em particular, os que diziam respeito a situações de medida, como nas tarefas 4 e 11 aqui analisadas, e que suscitavam o recurso à barra ou linha numérica. No entanto, os alunos também fazem uso do modelo, de forma espontânea, numa situação que envolve o significado operador, num problema de cálculo de percentagens (tarefa 10 – questão 1). É notório o papel desempenhado pelo modelo na clarificação do pensamento dos alunos sobre uma situação matemática e de como o seu uso os leva a tomar consciência da existência de uma estratégia mais eficaz na resolução deste problema. Verifica-se, assim, que o modelo não é utilizado de uma forma acrítica pelos alunos mas que se trata de um recurso para pensar, tanto mais que estes recorrem a outras estratégias em outras situações, como no caso da questão 3 desta mesma tarefa.

Há a destacar, também, o papel da professora no decurso das aulas, pela forma como introduziu o modelo físico e ajudou os alunos a se aperceberem da potencialidade do uso do modelo na representação da situação para raciocinar e resolver problemas. A dinâmica das aulas também contribuiu para a apropriação deste modelo pelos alunos, pelo facto de ter sido dado um período substancial de tempo para o trabalho em pequenos grupos e ser realizada uma discussão em grande grupo em torno das estratégias adotadas. Deste modo, os alunos tiveram oportunidade de compreender uma variedade de estratégias e de se irem apercebendo do seu potencial para resolver as diferentes situações, o que reforçou o seu sentido de número racional.

Apesar dos resultados muito positivos, temos consciência que o sentido de número racional é um conceito muito abrangente, tendo-se verificado que aspetos diversos como o significado de razão, a densidade dos números racionais e o cálculo com percentagens poderiam ser reforçados numa nova realização da EE (Ventura, 2013). O trabalho realizado releva a importância das opções tomadas, a partir do percurso anterior da turma, no que diz respeito à criação de uma sequência de tarefas articuladas e com contextos familiares que fazem emergir determinados modelos que apoiam o pensamento dos alunos e os fazem progredir no conhecimento matemático, reforçando a validade da conjectura que orientou a EE. Salienta-se também a importância de ir monitorizando o progresso dos alunos ao longo da experiência para que as tarefas proporcionem uma trajetória de aprendizagem compatível com os objetivos estabelecidos.

Referências

Barmby, P., Harries, T., Higgins, S. & Suggate, J. (2009). The array representation and primary children's understanding and reasoning in multiplication. *Educational Studies in Mathematics, 70*, 217-241.

Baturo, A. R. (2004). Empowering Andrea to help year 5 students construct fraction understanding. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.). *Proceedings of the 28th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics* (vol. 2, pp. 95-102). Bergen, Norway: PME.

Bereiter, C. (2002). Design research for sustained innovation. *Cognitive Studies, Bulletin of the Japanese Cognitive Science Society, 9(3)*, 321-327. Retirado em 4 de agosto de 2012, de http://ikit.org/fulltext/2002 Design_Research.pdf

Brocardo, J., Serrazina, L., & Kraemer, J. M. (2003). Algoritmos e sentido do número. *Educação e Matemática, 75*, 11-15.

Bright, G., Behr, M., Post, T., & Wachsmuth, I. (1988). Identifying fractions on number lines. *Journal for Research in Mathematics Education, 19(3)*, 215-232.

Charalambous C. Y., & Pitta-Pantazi D. (2006). Drawing on a theoretical model to study Students' understanding of fractions. *Educational Studies in Mathematics, 64(3)*, 293-316.

Clarke, C. B., Fisher, W., Marks, R., & Ross, S. (2010). *Developing essential understanding of rational numbers for teaching mathematics in grade 3-5*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Clements, D. H. & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning,* 6(2), 81-89.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, *32(1)*, 9-13.

Confrey, J. (2009). Equipartioning/spliting as a foundation of rational number reasoning using learning trajectories. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics,* (vol. 2, pp. 345-352). Thessaloniki, Greece: PME.

Fosnot, C., & Dolk. M. (2002). *Young mathematician at work: Constructing fractions, decimals and percents*. Portsmouth NH: Hiemann.

Gravemeijer, K. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In L. Santos, A. P. Canavarro, & J. Brocardo (Eds), *Educação Matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 83-101). Lisboa: APM.

Huinker, D. (2002). Examining dimensions of fractions operation sense. In B. Litwiller & G. Bright (Org.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 Yearbook* (pp. 72-78). Reston, VA: NCTM.

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). Charlotte, NC: Information Age.

Markovits, Z., & Sowder, J. (1991). Students' understanding of the relationship between fractions and decimals. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 13*(1), 3-11.

Martinie, S. (2007). *Middle school of rational numbers knowledge*. Abstract of dissertation. Kansas State University, Manhattan, Kansas.

Menezes, L., Rodrigues, C., Tavares, F., & Gomes, H. (2008). *Números racionais não negativos: tarefas para o 5.º ano*. Lisboa: DGIDC, Ministério da Educação.

Middleton, J. A., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Shew, J. A. (1998). Using bar representations as a model for connecting concepts of rational number. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3(4)*, 302–311.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC, Ministério da Educação.

Moseley, B. (2005). Students' early mathematical representation knowledge: The effects of emphasizing single or multiple perspectives of the rational number domain in problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 60*, 37–69.

Moss, J. (2005). Pipes, tubes, and beakers: rational-number system new approaches to teaching the rational-number system. *National Academy of Sciences*. Retirado em 10 de maio de 2008, de http://books.nap.edu/catalog/10126.html.

National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Panaoura, A., Gagatsis, A., Deliyianni, E., & Elia, I. (2009). Affective and cognitive factors on the use of representations in the learning of fractions and decimals. In M. Kaldrimidou &

H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics* (vol. 4, pp. 273-280). Thessaloniki, Greece: PME.

Silvestre, A., & Ponte, J. P. (2011). Uma unidade de ensino de cunho exploratório para o desenvolvimento do raciocínio proporcional. *Atas do XXII SIEM: Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Lisboa: APM.

Smith, M. S., Hughes, E. K., Engle, R. A., & Stein, M. K. (2009). Orchestrating discussions. *Mathematics Teaching in the Middle School, 14(9)*, 549-556.

Stake, R. (2007). *A arte da investigação com estudos de caso.* Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Sweeney, E., & Quinn, R. J. (2000). Connecting fractions, decimals & percents. *Mathematics Teaching in the Middle School, 5(5)*, 324–328.

van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics, 54(1)*, 9-35.

van Galen, F., Feijs, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, K., Herpen, E., & Keijer, R. (2008). *Fractions, percentages and proportions*. Rotterdam: Sense.

Ventura, H. (2013). *A aprendizagem dos números racionais através das conexões entre as suas representações: Uma experiência de ensino no 2.º ciclo do ensino básico* (Tese de Doutoramento, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa).

Yang, D. C., Hsu, C., & Huang, M. C. (2004). A study of teaching and learning number sense for sixth grade students in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education, 2*(3), 407-430.

Anexo 1 – Tarefa 1 - Questão 1

A Luana, o Nicolau e o João moram na mesma localidade, andam na Escola do Trigo e são da mesma turma, que por sinal é a melhor turma do concelho de Vila Nova da Alegria.

Hoje cada um deles trouxe para a escola uma tablete de chocolate do mesmo tamanho e da mesma marca. Como são muito amigos dos seus colegas, resolveram partilhá-las com eles.

- A **Luana** partilhou a sua tablete com uma amiga **(partiu-a em duas partes iguais)**.

- O **Nicolau** partilhou a sua tablete com três amigos **(partiu-a em quatro partes iguais)**.

- O **João** partilhou a sua tablete com sete amigos **(partiu-a em oito partes iguais)**.

1. Escreve de diferentes formas (fração, decimal e percentagem), o que representa cada uma das partes obtidas em cada tablete, em relação à totalidade da mesma?

Uma parte da tablete representada sob a forma de:			
	Fração	**Decimal**	**Percentagem**
Luana			
Nicolau			
João			

TAREFAS

5. A adaptação das tarefas matemáticas: Como promover o uso de múltiplas representações

por Ana Patrícia Gafanhoto, Ana Paula Canavarro

5. A adaptação das tarefas matemáticas: Como promover o uso de múltiplas representações

Ana Patrícia Gafanhoto
Escola Secundária Mouzinho da Silveira, Portalegre
patriciagafanhoto@hotmail.com

Ana Paula Canavarro
Universidade de Évora e UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
apc@uevora.pt

• **Resumo:** O presente capítulo discute o modo como tarefas matemáticas intencionalmente adaptadas pelo professor promovem o uso flexível e eficaz pelos alunos das representações matemáticas relativas às funções. As tarefas caracterizam-se por serem diversificadas no seu contexto (puramente matemático ou relacionado com a realidade) e por se estruturarem de modo a apelarem à familiarização com uma dada representação inicial, pedirem explicitamente a transição entre diversas representações e requerem a escolha de uma ou mais representações para responder a questões de exploração. Analisamos as representações utilizadas por alunos de 9.º ano na resolução de seis tarefas adaptadas, no domínio das funções, recorrendo ao Geogebra. Em cada tarefa, independentemente do seu contexto, os alunos foram capazes de obter e utilizar todas as representações das funções, conforme solicitado nas questões de transição. Nas questões de exploração, recorreram de forma eficaz às representações já criadas e, em alguns casos, conciliaram algumas delas para produzir as respostas. Assim, o contexto das tarefas não parece ter sido determinante no uso das representações pelos alunos, mas a sua estrutura revelou-se especialmente adequada, evidenciando a importância da adaptação criteriosa das tarefas pelo professor, nomeadamente quando recorre ao computador.

• **Palavras-Chave:** Adaptação de tarefas matemáticas, Representações múltiplas, Ensino das funções, Geogebra.

Introdução

A valorização e quase exclusividade da representação algébrica no estudo da álgebra, associada à execução de procedimentos desprovidos de significado, contribuiu para os problemas de aprendizagem de muitos alunos nas últimas décadas (Ponte, 2006). As orientações curriculares para a Matemática têm vindo a reclamar uma abordagem distinta da Álgebra, em particular das funções, em que as diversas representações sejam exploradas de forma integrada e aproveitando as mais-valias de cada uma. O uso das representações verbal, numérica, tabular, gráfica e algébrica, tem o potencial de tornar a aprendizagem da Álgebra significativa e eficaz (Brown & Mehilos, 2010; Friedlander & Tabach, 2001).

Na sua norma para a representação (6.º ao 8.º ano), o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2007) refere especificamente que os alunos conseguirão ser melhores resolvedores de problemas algébricos se conseguirem mover-se com facilidade entre os diversos tipos de representações:

> É comum os alunos começarem a trabalhar com tabelas de dados numéricos para investigarem o padrão associado a uma função linear; porém, também deverão aprender a representar esses dados sob a forma de gráfico, ou equação, quando pretendem determinar a relação linear geral. Os alunos deverão, ainda, adquirir flexibilidade na identificação de formas equivalentes de equações e expressões lineares. Essa flexibilidade poderá surgir à medida que os alunos forem adquirindo prática com as múltiplas formas de representação de um problema de contexto (p. 334).

O uso de representações múltiplas de funções no ensino e aprendizagem da Matemática encontra um aliado no computador, cuja utilização didática é atualmente viável na maioria das salas de aula de Matemática (Laborde, 2008; NCTM, 2007). É diverso o *software* que permite aos alunos obterem gráficos ou tabelas com extensas listas de valores preenchidos ou usarem a expressão algébrica de uma função para obterem um determinado ponto (x,y) do seu gráfico (Zbiek, Heid, Blume, & Dick, 2007).

Porém, não é expectável que os alunos adquiram de forma autónoma a competência de lidar com as diversas representações das funções. O professor tem um importante papel a desempenhar para ajudar o aluno a usar de forma fluente e eficaz estas representações, para o que muito contribuem as experiências de aprendizagem que proporciona aos alunos. Estas experiências, embora se substanciem no trabalho realizado na sala de aula, estão diretamente relacionadas com as tarefas matemáticas que o professor adota para trabalhar com os alunos (Ponte, 2005). A seleção de tarefas adequadas é um aspeto decisivo da prática do professor que deve ser balizado pelos seus objetivos e perspetivado em função da existência de *software* potente (Laborde, 2008). O uso deste software no ensino, como os ambientes de geometria dinâmica (AGDs), desafia não só a abordagem matemática aos conhecimentos, mas também a dinâmica com que podem ser abordados, permitindo aos alunos uma grande autonomia na aprendizagem.

Este capítulo foca-se precisamente na adaptação de tarefas matemáticas a adotar com vista a promover o uso de diversas representações das funções por parte dos alunos. O seu objetivo é discutir de que modo tarefas matemáticas intencionalmente adaptadas com determinadas características promovem o uso flexível e eficaz pelos alunos das representações matemáticas relativas às funções.

Representações múltiplas com tecnologia: A adaptação de tarefas

Uma das mais importantes decisões que o professor realiza regularmente na sua atividade de ensino incide sobre as tarefas que propõe na aula. É em torno das tarefas que as aulas se desenrolam; elas são o ponto de partida para as experiências de aprendizagem dos alunos. A centralidade das tarefas é reconhecida por inúmeros autores e o NCTM dedica-lhe especial atenção, defendendo que devem ser escolhidas em função do conteúdo matemático, dos alunos a quem se dirigem e do potencial de aprendizagem que contêm (NCTM, 1991/1994).

Para muitos professores, a escolha das propostas de trabalho que colocam aos alunos é diretamente influenciada pelos manuais escolares e outros mediadores curriculares acessíveis, em especial na Internet (APM, 1998; Laborde, 2008). No entanto, nem sempre estes recursos se adequam da melhor maneira aos alunos de uma dada turma e ao propósito de ensino dos professores. A seleção, adaptação ou criação de boas tarefas para a sala de aula constitui um desafio para muitos professores (Almiro, 2005).

Na escolha de uma tarefa, é importante que o professor tenha presente diversas dimensões que a definem. Ponte (2005) elege quatro dimensões importantes: o grau de estruturação, o grau de desafio matemático, a relação com a realidade e a duração da realização. A variação das duas primeiras dimensões dá origem a diferentes tipos de tarefa, entre as quais se evidenciam os problemas, os exercícios, as investigações, e as explorações (Ponte, 2005).

O contexto da tarefa pode ser diversificado e tem como pólos as tarefas enquadradas num contexto da realidade e as tarefas formuladas em termos puramente matemáticos. Quando são propostas tarefas cujo contexto é real, é importante que as situações sejam apresentadas de modo realista e sem artificialidade, e mobilizem o conhecimento prévio dos alunos (NCTM, 2007). No entanto, há que cuidar que o contexto não seja um fator que dificulte a realização da tarefa devido ao desconhecimento deste; nestas situações, o professor deve familiarizar os alunos com esse contexto (Ponte et al., 2007).

Um outro aspeto relevante na caracterização das tarefas tem a ver com a(s) representação(ões) matemáticas a que apelam (Goldin & Shteingold, 2001). Hoje em dia, e assumindo que os alunos têm acesso à tecnologia que facilita e potencia o que conseguem fazer em Matemática, muitas das questões relacionadas com representações normalmente incluídas em exercícios perdem a sua pertinência (Laborde, 2008). Isto é particularmente visível no trabalho com funções. Enquanto há uns anos a obtenção de um gráfico de uma função constituía um desafio que podia ocupar toda uma aula de 12.º ano, hoje em dia o mesmo gráfico é obtido automaticamente em reduzidos segundos.

O tema das funções é especialmente adequado a concretizar as atuais orientações internacionais e nacionais e a proporcionar aos alunos o contacto com a diversidade de representações matemáticas. As representações são elementos essenciais na compreensão de conceitos e das relações matemáticas; na comunicação de abordagens, de argumentos e de conhecimentos matemáticos; na explicitação de raciocínios; na identificação de conexões entre conceitos matemáticos inter-relacionados; e na aplicação da Matemática a problemas realistas ou modelação (Goldin & Shteigold, 2001). Há portanto a necessidade de criar oportunidades de os alunos contactarem com diversas formas de representação das ideias matemáticas, de passarem informação de uma forma de representação para outra e de estabelecerem relações entre diferentes ideias matemáticas (NCTM, 2007).

O professor deve procurar proporcionar aos seus alunos o trabalho com cada uma das representações e a sua análise e comparação, de modo a conhecerem os seus pontos fortes e fracos. Uma estratégia é trabalhar num ambiente que proporcione múltiplas representações, em que as desvantagens de umas possam facilmente ser colmatadas pela combinação com as outras (Kaput, 1992).

Friedland e Tabach (2001) apresentam quatro formas de representação essenciais ao ensino da Matemática, nomeadamente da Álgebra – representação verbal, representação numérica, representação gráfica e representação algébrica. Estes autores identificam as vantagens e desvantagens associadas a cada uma das formas de representação:

a) representação verbal – está normalmente associada à apresentação da situação e à interpretação final dos resultados obtidos, dando ênfase à conexão da Matemática com outras áreas do conhecimento e entre a Matemática e o quotidiano. Esta forma de representação pode tornar-se um obstáculo para a comunicação matemática, uma vez que não é universal e a sua utilização pode ser feita de forma ambígua ou conduzir a associações incorretas.

b) representação numérica – é uma representação natural para os alunos que se encontram a iniciar o estudo da Álgebra e, normalmente, precede qualquer outro tipo de representação. Este tipo de representação é importante na compreensão inicial de um problema e na investigação de casos particulares, no entanto, não é generalizável, sendo por isso uma ferramenta, em alguns casos, limitada.

c) representação gráfica – proporciona uma imagem clara de uma função de variável real. É uma forma de representação intuitiva e apelativa para os alunos que gostam de uma análise visual. No entanto, a representação gráfica é muito influenciada por fatores externos (por exemplo, escalas) e apresenta frequentemente só uma parte do domínio do problema. A sua utilidade como ferramenta matemática varia de acordo com a tarefa em causa.

d) representação algébrica – esta é concisa, geral e efetiva na apresentação de padrões e modelos matemáticos, e por vezes é a única ferramenta para justificar ou efetuar generalizações. Contudo, esta forma de representação que usa exclusivamente símbolos algébricos, pode ocultar o significado matemático e causar dificuldades de interpretação de resultados.

Brown e Mehilos (2010) fazem referência a uma outra forma de representação das funções, a tabular, concretizada por tabelas de duas colunas, nas quais se relacionam diretamente as variáveis independente x e a dependente y através da concretização numérica de pares x e y. Estas tabelas, quando preenchidas num número significativo de pares, auxiliam os alunos a identificar as relações entre as variáveis, encontrar regularidades e a expressá-las de forma mais abstrata. A tabela atua como uma ponte entre a Aritmética, onde os números são específicos, e a Álgebra, onde as variáveis não são concretizadas e expressam relações gerais.

Ao definir as tarefas para a aula, o professor tem a oportunidade de incentivar a utilização de várias representações. O uso de diferentes representações para apresentar e explorar a "situação-problema" em que se baseia uma tarefa, estimula a flexibilidade na escolha das representações para resolver essa tarefa e proporciona segurança para o seu uso posterior pelos alunos. Para além disso, quando os alunos têm presente as diferentes representações na compreensão da "situação-problema", a transição de uma representação para outra é encarada como uma necessidade natural em vez de uma exigência arbitrária (Friedland & Tabach, 2001).

Numa tarefa em que é apresentada a "situação-problema" seguida de questões que guiam o aluno na sua investigação, há incentivo, segundo Friedland e Tabach (2001), ao uso de múltiplas representações se as questões, sequenciais, tiverem os seguintes propósitos:

1. ***Familiarização com a representação inicial:*** questão pede aos alunos que analisem a representação inicial, podendo até realizar algumas extrapolações ou aventar estimativas de respostas;

2. ***Transição entre representações:*** questão pede aos alunos que trabalhem especificamente com representações diferentes da inicial;

3. ***Exploração de representações:*** questão mais complexa e aberta pede aos alunos que optem pela forma de representação que considerarem mais adequada para a obtenção de uma solução para o problema.

O professor pode e deve recorrer a ambientes tecnologicamente suportados como contexto de exploração das tarefas que exigem ou beneficiam do uso de múltiplas representações. O uso das tecnologias é particularmente importante na resolução de problemas e na exploração de situações, casos em que os cálculos e os procedimentos de rotina não constituem objetivo prioritário de aprendizagem, e a atenção se deve centrar nas condições da situação, nas estratégias de resolução e na interpretação e avaliação dos resultados (Ponte et al., 2007).

O recurso a computadores com *software* acessível que permite obter as diversas representações das funções é uma estratégia que o professor deve encarar, pois melhora as oportunidades de aprendizagem dos alunos que podem tirar o maior proveito do que a tecnologia permite fazer de forma correta e eficiente, como a construção de gráficos (NCTM, 2007). Os ambientes de geometria dinâmica facilitam a execução de ações relativas à resolução da tarefa, ampliam a sua exploração e análise, abrem novas oportunidades para produzir respostas e, ainda em alguns casos, revelam-se como a única estratégia de obter uma resposta (Laborde, 2008).

Entre estes destaca-se o Geogebra, acessível de forma livre às escolas e aos alunos, com interface em português, e com potencialidades na múltipla representação de funções, incluindo a gráfica (representação gráfica de função em referencial cartesiano), a algébrica (escrita ou visualização da expressão algébrica da função), a tabular (mais ou menos completa e sobre domínio delimitado), e a numérica (coordenadas de pontos ou cálculo através da tabela) (Gafanhoto, 2011).

Metodologia

O estudo relativo a este capítulo acontece no contexto de uma investigação mais alargada (Gafanhoto, 2011). Nessa investigação foi realizada uma intervenção didática na qual, de forma intencional, se adaptaram/criaram tarefas que foram implementadas na turma de uma professora, com vista a compreender o uso das representações matemáticas por alunos do 9.º ano, com o recurso do Geogebra. Essas tarefas, em número de seis, foram adaptadas segundo critérios discutidos pelas duas autoras deste capítulo, considerando as indicações da professora titular da turma no que respeita às necessidades dos alunos e à integração coerente na planificação global da turma. A primeira autora deste capítulo teve ainda um papel determinante na planificação das aulas de implementação das tarefas, feita em parceria com a professora titular. Nestas aulas foi adotado um modelo de breve apresentação da tarefa pela professora titular, seguida de um extenso período de trabalho autónomo dos alunos em pequeno grupo com recurso a um computador por grupo, e finalizado com uma breve discussão coletiva conduzida pela professora titular com a colaboração da investigadora primeira autora. Assim, durante a implementação das tarefas, a investigadora primeira autora assumiu uma postura de observadora participante, quer no apoio aos alunos durante o trabalho de grupo, quer na discussão coletiva das tarefas. A recolha de dados consistiu na observação e análise documental, tendo-se realizado o registo dos acontecimentos da aula e a análise dos documentos produzidos pelos alunos, quer as resoluções escritas das tarefas, quer os ficheiros Geogebra respetivos.

No estudo a que diz respeito este capítulo, recorremos essencialmente à análise documental. Começámos por realizar uma análise das seis tarefas então adotadas, segundo o contexto em que se inserem e segundo a sua estrutura e propósito das questões. De seguida, recorremos à análise das representações matemáticas produzidas pelos alunos em resposta às tarefas, sintetizada por Gafanhoto e Canavarro (2011). Numa fase seguinte, fizemos, para cada tarefa, uma análise da utilização das representações matemáticas pelos alunos. Concluímos com a análise transversal da utilização das representações matemáticas pelos alunos em resposta às questões das tarefas, com vista a identificar regularidades e aspetos de diferença ou detalhe que nos permitam responder ao objetivo deste capítulo, ou seja, de que modo tarefas matemáticas intencionalmente adaptadas com determinadas características promovem o uso flexível e eficaz pelos alunos das representações matemáticas relativas às funções.

Análise das tarefas

As tarefas utilizadas foram criteriosamente escolhidas. Considerámos importante escolher tarefas que fossem realizáveis numa aula, que fossem abertas e permitissem aos alunos a realização de um trabalho significativo (natureza problemática) e que diversificassem o seu contexto. Pareceu importante considerar tarefas com e sem contexto real por se ter a expectativa de que isso poderia influenciar o tipo de uso que os alunos fariam das representações. No quadro 1 apresentam-se as tarefas e sua classificação relativa ao contexto:

Quadro 1 – Tarefas e seu contexto

Tarefa	Contexto		Referência
	Matemática	Realidade	
1. Qual o tarifário melhor? Eis a questão...		X	Adaptado do Grupo de trabalho T3, 2002
2. As informações dadas por uma função do tipo $y = mx + b$	X		Adaptado de manuais escolares
3. Matemática por um canudo		X	Adaptado do Grupo de trabalho T3, 2002
4. As folhas de papel que usarmos		X	Criado pela primeira investigadora
5. estudo das funções $y = ax^2$	X		Adaptado de exercícios de manuais
6. O crescimento do meu cabelo é modelado por uma função		X	Adaptado do Grupo de trabalho T3, 2002

As tarefas que se contextualizam na realidade apresentam situações diversificadas: escolha de tarifários de telemóvel; relação entre o comprimento e a largura das folhas de papel A4; análise do crescimento do cabelo; e o espaço visualizado através de canudos de diferentes comprimentos. Nas tarefas de contexto matemático foram estudadas famílias de funções (afim e quadrática).

A adaptação das tarefas para o estudo envolveu a criação de uma estrutura comum e a adoção de questões com vista à utilização e à interação das diferentes representações das funções à exceção da verbal, considerada menos relevante para alunos do 3.º ciclo. Nestas tarefas pode identificar-se uma estruturação em três partes distintas, inspirada em Friedland e Tabach (2001):

1) Familiarização: constituída pelo enunciado escrito (ou ficheiro Geogebra) que apresenta a situação-problema recorrendo a uma dada representação e, eventualmente, alguma questão de interpretação;

2) Transição: constituída por questões que proporcionam a criação de todas representações possíveis. A ordem pela qual são solicitadas as diversas representações varia de modo a que alunos efetuem diferentes transições entre representações;

3) Exploração: constituída por questões mais abertas em que, para responder, os alunos podem optar pelas representações que considerem mais adequadas. Este tipo de questões envolve diferentes pedidos matemáticos, como identificar a imagem dado o objeto, identificar o objeto dada a imagem, estabelecer comparações entre funções ou, ainda, estudar a influência da variação dos parâmetros. Foi também pedido aos alunos que explicitassem as representações usadas para responder a este tipo de questões.

Na adaptação das tarefas foi também tido em conta o facto de se querer utilizar como recurso o Geogebra. Algumas das questões foram formuladas tendo em conta a sua presença, remetendo os alunos para a sua utilização.

Neste capítulo exemplificamos a análise recorrendo a duas das seis tarefas, “Qual o tarifário melhor? Eis a questão…” (tarefa 1) e “As informações dadas pelas funções do tipo y=mx+b” (tarefa 2), as quais se distinguem no que diz respeito ao contexto. A tarefa “Qual o tarifário melhor? Eis a questão” teve por base a tarefa “Tou xim?” que consta no livro *Funções no 3.º Ciclo com tecnologia* (Grupo T3, 2002). A tarefa original sofreu adaptações tendo sido alterada a situação-problema com a consideração de três tarifários reais de telemóvel, de operadoras distintas, com os quais os alunos lidam no seu quotidiano, tendo-se assim procurado criar uma situação mais próxima da realidade, minimizando artificialismos. A tarefa “As informações dadas pelas funções do tipo y=mx+b” é adaptada de manuais escolares e com ela pretendeu-se que os alunos estudassem as propriedades das funções afim, num contexto puramente matemático, recorrendo à variação dos parâmetros m e b e à observação do efeitos dessa variação para cada um dos parâmetros. Quanto à estruturação das tarefas, elas organizam-se como se ilustra nos quadros 2 e 3.

Análise das respostas dos grupos às tarefas

Apresentamos uma análise das resoluções das duas tarefas selecionadas que revela como os grupos de alunos usaram as representações das funções na resposta quer às questões de transição, quer às questões de exploração.

Quadro 2 – Apresentação e categorização das questões da tarefa.

TAREFA 1: Qual o tarifário melhor?...

Quest. familiarização

O Pedro possui três telemóveis, porque efectua chamadas para todas as redes móveis. Em cada um dos telemóveis tem um tarifário diferente, como apresentado em seguida:

Telemóvel	Operadora	Tarifário	Preço	
1	Telemóvel	Best Total Base	Mensalidade 15,27 €	Preço/min. 0,153
2	Telemóvel	+Perto	0,609 cênt /min	
3	Optimus	Total	0,00403 €/seg	

1. Cria um ficheiro no *Geogebra* com o nome Tarefa 1.

Questões de transição

2. Completa as seguintes tabelas, na folha de cálculo do *Geogebra*:
3. Para cada um dos tarifários escreve uma expressão algébrica que permita determinar o valor a pagar para qualquer duração de chamadas.
4. Num referencial cartesiano, faz um esboço dos gráficos que representam cada um dos tarifários.
5. Representa, na zona gráfica do *Geogebra*, os pontos referentes a cada um dos tarifários.

1 - Selecciona os dados referentes a cada um dos tarifários → 2 - Clica com o botão direito do rato → 3 - Seleciona a opção "Criar lista de pontos"

6. Usando o comando *RegressãoLinear* traça o gráfico que representa cada um dos tarifários (Exemplo: RegressãoLinear[lista1]). Compara cada uma das expressões algébricas associadas a cada um dos gráficos com as que tu definiste na pergunta 2.

Questões de exploração

7. Analisa cada um dos tarifários, apresentando sempre uma justificação para as tuas respostas e indicando também a qual ou a quais das representações (tabela, expressão algébrica ou gráfico) recorreste para dar resposta:
   a) Tendo em conta que o Pedro, mensalmente, fala cerca de 120 minutos, qual dos tarifários é que o Pedro deverá escolher de forma a pagar menos?
   b) Se o Pedro só quiser gastar 25 euros, mensalmente, de entre os tarifários da Vodafone e da TMN, qual deverá escolher?
   c) Existirá algum momento em que o tarifário da Vodafone seja o mais vantajoso?
   d) Se o Pedro pagasse não mensalmente, mas por chamada, qual dos tarifários seria o mais vantajoso?
   e) Se o Pedro quisesse ficar só com um telemóvel com qual dos telemóveis deveria ficar, na tua opinião?

Quadro 3 – Apresentação e categorização das questões da tarefa 2

<table>
<tr><th></th><th>TAREFA 2: Uma função do tipo y = mx + b...</th></tr>
<tr><td>Questões familiarização</td><td>1. Abre o ficheiro Parâmetro das funções.ggb.
(e movimenta os selectores de modo a observares a representação gráfica)</td></tr>
<tr><td>Questões de transição</td><td>2. Considera a função que tem como expressão algébrica: $y = 3x + 2$
a) Representa-a graficamente, através da manipulação dos seletores m e b
b) O seletor “AbcissaA” permite fazer o registo na folha de cálculo de vários pontos pertencentes à função, activando a opção “enviar traço para a folha de cálculo”.
c) Completa a seguinte tabela:
<table>
<tr><td>x</td><td></td><td>$-\frac{2}{3}$</td><td></td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>y</td><td>-4</td><td></td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Questões de exploração</td><td>3. Para cada uma das seguintes questões apresenta a resposta e a indicação de qual foi a(s) representação a que recorreste para dar a resposta.
a) Qual é a imagem do objeto 10? E de -6?
b) Qual é o objeto que tem com imagem -10? E 17?
c) Existe mais do que um objeto com a mesma imagem?
d) Em que valores é que a função intersecta o eixo das abcissas e o das ordenadas?
e) A função é crescente ou decrescente? Justifica a resposta.
f) Recorrendo ao seletor m, indica para que valores de m é que a função é crescente, decrescente e constante?
g) Qual a influência do parâmetro b numa função do tipo $y = mx + b$.</td></tr>
</table>

Tarefa 1: Qual o tarifário melhor?...

Esta tarefa requereu dos alunos bastante interpretação do enunciado, sendo a familiarização com a situação-problema resultado da discussão na turma entre os alunos e a professora. Não foi nesta fase utilizada nenhuma representação específica das funções, a não ser a representação verbal, de forma implícita, na exemplificação de como funcionava cada um dos tarifários.

Nas questões de transição, todos os grupos efetuaram a sua representação na forma de tabela e, posteriormente, efetuaram a transição entre a representação tabular e a algébrica e a tabular e a gráfica, como solicitado. Destaca-se aqui a transição entre a representação tabular e a algébrica, enfatizando a importância do uso do Geogebra. Para criarem a representação tabular, os alunos recorreram à folha de cálculo do Geogebra, usando as referências das células como se ilustra na figura 1. Este processo mostrou ser uma mais-valia para a posterior obtenção da expressão algébrica, pois quando comparadas as expressões que os alunos utilizaram para a obtenção da representação tabular e as expressões algébricas, verifica-se semelhanças entre elas, tendo os alunos procedido unicamente à substituição das referências das células pela variável *x* (fig. 2).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	tim							
3	duração	preço	duração	preço	duração	preço		
4	1	15.423	1	0.609	1	0.2418		
5	2	15.576	2	1.22	2	0.4836		
6	3	15.729	3	1.83	3	0.7		
7	4	15.882	4	2.44	4	0.9672		
8	5	16.035	5	3.05	5	1.209		
9	120	33.63	120	73.2	120	29.016		

Número F4: 0.00403 * 60 A4

Número D6: 0.61 A6

Número B8: 15.27 + 0.153 A8

Figura 1 – Processo utilizado pelo grupo 2 para preenchimento das tabelas

Tarifário da Vodafone						
Duração total de Chamadas (min.)	1	2	3	4	5	15,27 + 0,153 × x
Preço (€)	15,423	15,576	15,729	15,882	16,035	

Tabela 1

Tarifário da TMN						
Duração total de Chamadas (min.)	1	2	3	4	5	0,609 × x
Preço (€)	0,609	1,218	1,827	2,436	3,045	

Tabela 2

Tarifário da Optimus						
Duração total de Chamadas (min.)	1	2	3	4	5	0,00403 × 60 × x
Preço (€)	0,2418	0,4836	0,7254	0,9672	1,209	

Tabela 3

Figura 2 – Tabelas e expressões algébricas apresentadas pelo grupo 2

No que diz respeito às questões de exploração, o quadro 4 resume as representações utilizadas pelos grupos:

Quadro 4 – Representações usadas na resolução das questões de exploração da tarefa 1.

	QUESTÕES DE EXPLORAÇÃO		GRUPOS					Representação Predominante
			1	2	3	4	5	
Tarefa 1	7	a)	Algébrica	Algébrica	Algébrica	Algébrica	Algébrica	Algébrica
		b)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
		c)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
		d)	Tabular	Tabular	Gráfica	Tabular	Tabular	Tabular
		e)	Gráfica	Gráfica	Gráfica/ Tabular	Gráfica	Gráfica	Gráfica

Verifica-se que os grupos recorreram a múltiplas representações para a obtenção das suas respostas.

As resoluções apresentadas à pergunta 7 a) são exemplo da forma como os alunos responderam quando se pretendia que determinassem a imagem dado o objeto. Nesta situação, os grupos recorreram maioritariamente à representação algébrica (fig. 3) principalmente quando eram solicitadas as imagens de objetos fora da janela representada:

	A	B	C	D	E
1					
2	tlm 1				
3	Duração	preço			
4	0	15.27			
5	1	15.423			
6	2	15.576			
7	3	15.729			
8	4	15.882			
9	5	16.035			
10	120	33.63			
11	tlm 2				
12	duração	preço	Número B10: 15.27 + 0.153 A10		
13	0	0			
14	1	0.609			
15	2	1.218			
16	3	1.827			
17	4	2.436			
18	5	3.045			
19	120	73.08			
20	tlm 3				
21	Duração	preço	Número B19: 0.609 A19		
22	0	0			
23	1	0.2418			
24	2	0.4836			
25	3	0.7254			
26	4	0.9672			
27	5	1.209			
28	120	29.016			
29			Número B28: 0.2418 A28		
30					

Figura 3 – Processo usado pelos grupos para determinar o custo de 120 minutos em chamadas.

As resoluções apresentadas para a questão 7 b) são também ilustrativas da forma geral como os alunos resolveram as questões em que se pretendia determinar o objeto dada a imagem. Nesta situação, os grupos recorreram maioritariamente à representação gráfica. Esta opção pode ser justificada por ser a forma mais imediata e fácil, evitando assim cálculos e procedimentos de manipulação e substituição de variáveis em que os alunos, por norma, manifestam pouco à-vontade. Na discussão coletiva, os alunos referiram estratégias usadas (fig. 4):

Jorge (grupo 2): Procurámos os 25 euros no eixo dos yy.

Marta (grupo 5): Traçava uma reta horizontal.

Mafalda (grupo 3): Nós mexemos a zona gráfica até encontrarmos os 25 euros e depois a reta que ficava mais abaixo era o melhor tarifário, que neste caso era o da Optimus.

Figura 4 – Resposta apresentada por diferentes grupos.

Nesta tarefa foi também colocada uma questão em que se solicitava a comparação de funções, 7c), tendo os grupos respondido, preferencialmente, com recurso à representação gráfica. Esta opção pode ser justificada por esta forma de representação dar uma imagem geral e imediata das funções em estudo, como se pode ver no seguinte exemplo (fig. 5):

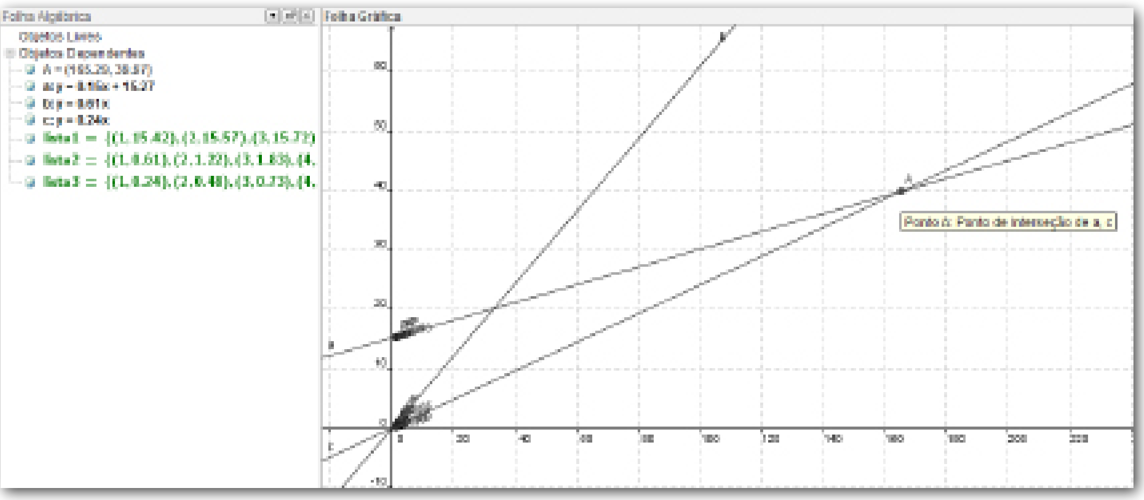


Figura 5 – Processo usado pelo grupo 3

Os alunos procederam à análise da representação gráfica, tendo incluído ainda o ponto de interseção para determinarem os valores para as variáveis em estudo, conseguindo desta forma obter uma resposta no contexto do problema (fig. 6):

Para o tarifário da vodafone ser mais vantajoso terá que falar 46 minutos. (recorremos ao gráfico)

Figura 6 – Resposta apresentada pelo grupo 3

Tarefa 2: Uma função do tipo y=mx+b…

Nesta tarefa é dada a expressão algébrica de uma função afim. A familiarização com esta representação faz-se pela identificação pelos alunos dos parâmetros m e b da função para que, com recurso a seletores relativos a esses parâmetros criados no Geogebra, os alunos construam a representação gráfica da função em estudo. Assim, os grupos efetuaram a transição entre a representação algébrica e a gráfica. Posteriormente, solicitou-se a representação tabular, tendo os alunos conciliado as duas formas de representação que já possuíam (fig. 7):

Para completarmos a tabela utilizamos o selector da Abcissa A*, e para determinarmos o valor de $\frac{2}{3}$ recorremos à folha de cálculo, fazendo $= 3\times(-2/3)+2$.

* depois movimentávamos e verificávamos na zona Algébrica.

Figura 7 – Resposta do grupo 1.

Esta estratégia permitiu-lhes então o preenchimento da seguinte tabela (fig. 8):

x	-2	$-\frac{2}{3}$	0	1	2
y	-4	0	2	5	8

Figura 8 – Tabela preenchida pelo grupo 1

Para determinar a imagem, os grupos sentiram a necessidade de conciliar a representação gráfica com a algébrica de forma a ultrapassar a limitação apresentada pela representação gráfica no que diz respeito ao rigor e exatidão.

Na resolução das questões de exploração, os alunos usaram múltiplas representações (quadro 5).

Quadro 5 - Representações usadas pelos grupos na resolução das questões de exploração da tarefa 2.

	QUESTÕES DE EXPLORAÇÃO		GRUPOS 1	2	3	4	5	Representação Predominante
Tarefa 2	3	a)	Algébrica/ Gráfica	Algébrica/ Gráfica	Gráfica	Algébrica/ Gráfica	Gráfica/ Tabular	Algébrica/ Gráfica
		b)	Algébrica/ Gráfica	Gráfica/ Tabular	Gráfica/ Tabular	Algébrica/ Gráfica	Gráfica/ Tabular	Gráfica/ Tabular
		c)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
		d)	Algébrica/ Gráfica	Gráfica/ Tabular	Gráfica	Algébrica/ Gráfica	Gráfica/ Tabular	Gráfica
		e)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
		f)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
		g)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica

O estudo da influência da variação dos parâmetros assumiu grande relevo. Na resolução das questões os alunos recorreram preferencialmente à representação gráfica, fazendo uso dos seletores definidos, como se pode confirmar nas respostas dos grupos (fig. 9 e fig. 10).

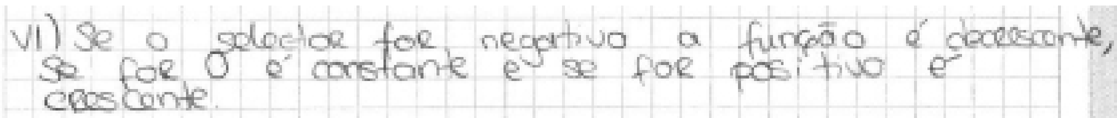

vi) Se o selector for negativo a função é decrescente, se for 0 é constante e se for positivo é crescente.

Figura 9 – Resposta apresentada pelo grupo 4 no estudo da influência do parâmetro m.

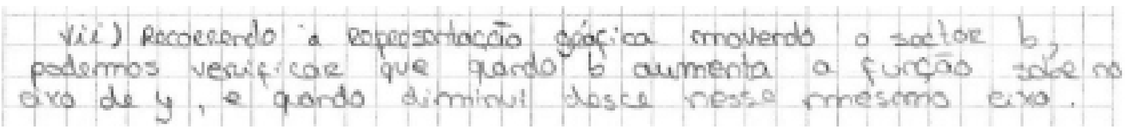

vii) Recorrendo à representação gráfica movendo o seletor b, podemos verificar que quando b aumenta a função sobe no eixo de y, e quando diminui desce nesse mesmo eixo.

Figura 10 – Resposta apresentada pelo grupo 5 no estudo da influência do parâmetro b.

No que diz respeito ao uso do Geogebra, os alunos assumem que o seu uso foi uma mais-valia, destacando a facilidade, rapidez e rigor que permite nas representações (fig. 11).

Rui (grupo 4): (…) porque é mais fácil e rápido do que se tivéssemos que fazer à mão.
Bárbara (grupo 3): É mais rápido porque não temos que estar a representar um a um e é mais rigoroso

Figura 11 – Resposta apresentada por diversos grupos.

Conclusão

As tarefas apresentadas neste capítulo foram adaptadas na expectativa de promoverem o uso flexível e eficaz de representações por parte dos alunos, tendo sido especialmente pensada a sua estrutura e os tipos de questões propostas aos alunos, bem como diversificado o seu contexto. Nas questões de transição, os alunos efetuaram a transição entre quaisquer representações recorrendo às que já tinham construído antes. As transições mais frequentes foram entre a representação tabular e a algébrica e entre a gráfica e a tabular. Nesta última, os alunos tiraram partido duma funcionalidade do Geogebra que consiste na definição de um ponto sobre o gráfico da função e a deslocação do mesmo para a construção automática da tabela.

Nas questões de exploração, os alunos fizeram uso maioritário da representação gráfica, mas todas as outras representações foram usadas em algumas situações. A representação tabular foi essencialmente usada na análise da relação entre as variáveis e no estudo das funções em determinados valores do seu domínio, estando estes representados nas tabelas. A representação gráfica foi usada para responder às questões em que era solicitado o estudo comparativo de funções ou no estudo da influência da variação dos parâmetros, uma vez que esta forma de representação dá uma imagem clara e global das funções, mas não pormenorizada. A representação algébrica foi usada quando era solicitada a determinação da imagem dado o objeto, dispondo já da expressão algébrica, criada pelos próprios alunos ou não. Os grupos conseguiram sempre apontar qual ou quais as representações que usaram e isso poderá ter contribuído para tomarem consciência das potencialidades de cada uma.

Assim, podemos afirmar que a estrutura adotada para estas tarefas foi bem sucedida na promoção da utilização flexível e eficaz de representações múltiplas de funções por parte dos alunos, que revelaram capacidade de adotar representações adequadas e de conciliá-las de forma pertinente, tirando partido das vantagens de umas para suprir desvantagens de outras (Friedland & Tabach, 2001). Esta constatação é comum a todas as tarefas analisadas, quer com contexto de realidade ou puramente matemático.

Por fim importa sublinhar a importância do recurso ao Geogebra que foi decisivo no trabalho autónomo dos grupos. Este foi considerado pelos alunos como uma mais-valia na obtenção das diferentes representações, que lhe reconheceram facilidade, rapidez e rigor. Além disso, o Geogebra permitiu-lhes a simultaneidade de visualização no mesmo ecrã das diferentes representações, tornando mais direto o estabelecimento de conexões entre estas. Possibilitou ainda aos alunos formas criativas de lidar com as representações, com a transição entre elas e com a sua conciliação. Isto revela o desafio do *software* para lidar de novas formas com os conceitos e procedimentos matemáticos (Laborde, 2008).

Assim, este estudo vem reforçar a importância do papel do professor na adoção de tarefas criteriosamente pensadas para o ensino da Matemática, apoiadas por recursos que potenciem o seu desenvolvimento pelos alunos. A escolha de uma tarefa para a sala de aula é um aspeto decisivo da prática do professor e deve merecer por parte deste uma grande atenção. A identificação de tarefas que parecem interessantes é um passo importante, mas é necessário perspetivar a sua utilização com os alunos em função dos propósitos matemáticos do ensino. Este estudo mostra como determinadas tarefas podem servir de inspiração ao professor, nomeadamente no que diz respeito à consideração do contexto e da situação-problema, mas beneficiam de um trabalho cuidadoso de adaptação das questões originais, na sua sequência e conteúdo.

Referências

Almiro, J. (2005). Materiais manipuláveis e tecnologia na aula de Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 275-316). Lisboa: APM.

APM (1998). *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática.* Lisboa: APM.

Brown, S. A., & Mehilos, M. (2010). Using tables to bridge arithmetic and algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15(9), 532-538.

Friendland, A., & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representation in algebra. In Cuoco (Ed), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 173-185). Reston, VA: NCTM.

Gafanhoto, A. (2011). *Integração das diferentes representações das funções no contexto de utilização de um ambiente de geometria dinâmica (Geogebra).* Lisboa: APM.

Gafanhoto, A., & Canavarro, A. P. (2011). Utilização e conciliação de diversas representações das funções em sala de aula. In C. Nunes, A. C. Henriques, A. Caseiro, A. I. Silvestre, H. Pinto, H. Jacinto, & J. P. Ponte (Eds.), *Atas do Seminário de Investigação em Educação Matemática.* Lisboa: APM.

Goldin, G. A., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and development of mathematical concepts. In J. Cuoco (Ed.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 1-22). Reston, VA: NCTM.

Kaput, J. (1992). Techonology and mathematics education. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 515-556). New York, NY: Macmillan.

Laborde, C. (2008). Multiple dimensions involved in de design of tasks full advantage of dynamic interactive geometry. In A. P. Canavarro, D. Moreira, & M. I. Rocha (Eds), *Tecnologias e educação matemática* (pp. 36-50). Lisboa: SEM-SPCE.

ME/DEB (2001). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais.* Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar.* Lisboa: APM e IIE.

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática.* Lisboa: APM e IIE.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar.* Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & A. P. Canavarro (Eds.), *Números e álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). Porto: SEM/SPCE.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E., & Oliveira, P. (2007). *Programa de matemática do ensino básico.* Lisboa: ME-DGIDC.

Zbiek, R. M., Heid, M. K., Blume, G. W., & Dick, T. P. (2007). Research on technology in mathematics education: A perspective of constructs. In Frank K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 2, pp. 1169-1207). Charlotte, NC: Information Age.

COMUNICAÇÃO

6. Comunicação nas práticas letivas dos professores de Matemática

por Luís Menezes, Rosa Tomás Ferreira, Maria HelenaMartinho, António Guerreiro

6. Comunicação nas práticas letivas dos professores de Matemática

Luís Menezes
Escola Superior de Educação de Viseu/CI&DETS
menezes@esev.ipv.pt

Rosa Tomás Ferreira
Faculdade de Ciências
da Universidade do Porto e CMUP
rferreir@fc.up.pt

Maria Helena Martinho
Centro de Investigação em Educação,
Universidade do Minho
mhm@ie.uminho.pt

António Guerreiro
Escola Superior de Educação e Comunicação,
Universidade do Algarve
aguerrei@ualg.pt

• **Resumo:** Este capítulo tem como objetivo discutir o papel da comunicação nas práticas letivas dos professores, no contexto do ensino exploratório de Matemática. Começando por situar as principais perspetivas sobre o papel da comunicação na aprendizagem da Matemática, caraterizamos, de um ponto de vista micro, as principais ações comunicativas do professor e, de um ponto de vista macro, as dinâmicas comunicativas da sala de aula. Neste enquadramento, defendemos que a atividade do professor de Matemática tem uma forte natureza discursiva e comunicacional. Numa aula de ensino exploratório de Matemática, o discurso do professor tem uma função de suporte e regulação do discurso dos alunos, promovendo o diálogo e a valorização do pensamento dos alunos. A comunicação surge, assim, como elemento estruturante do ensino e, portanto, das práticas letivas do professor, deixando de ser vista como um mero instrumento ou técnica do professor para ensinar Matemática, mas como algo inerente ao ensino e aos processos de construção e partilha do conhecimento matemático.

• **Palavras-Chave:** Professor de Matemática, Práticas comunicativas, Ensino exploratório de Matemática.

Introdução

A comunicação é um elemento essencial nas práticas letivas dos professores. Esta asserção não só não é nova no campo educativo como começa a ser largamente consensual. Desde há muito tempo que se reconhece o papel desempenhado pela comunicação nas aulas. Contudo, este reconhecimento pode traduzir-se em visões e práticas letivas muito díspares, que nem sempre estão suficientemente refletidas pelos professores e estudadas pela investigação. Em Portugal, o interesse da investigação em educação matemática pela comunicação nas práticas dos professores não tem sequer 20 anos, pelo que há muitos domínios ainda por explorar e outros insuficientemente explorados, que o aparecimento do programa de Matemática do ensino básico (ME, 2007) veio pôr em maior evidência. Neste quadro, este texto tem em vista a sistematização dos aspetos fundamentais das práticas comunicativas dos professores de Matemática, à luz do que a investigação apresenta, e igualmente o levantamento de questões que se encontram em aberto neste domínio.

O texto está organizado em quatro secções. Na primeira – *A comunicação na sala de aula de Matemática: a construção de um campo de estudo* – apresenta-se uma discussão da problemática da comunicação na sala de aula de Matemática, revendo-se os estudos principais que têm sido realizados em Portugal neste campo. Na secção seguinte – *Ações comunicativas de professores de Matemática* – discutem-se os aspetos fundamentais das práticas comunicativas dos professores de Matemática, a partir da discussão de um episódio de sala de aula. Na terceira secção – *Práticas de comunicação na sala de aula de Matemática* – aborda-se um conjunto de aspetos relativos à dinâmica da comunicação que ocorre numa sala de aula de Matemática, envolvendo professor, alunos e saber matemático. A secção final – *Considerações finais* – integra ideias que resultam da discussão das secções anteriores e questões que emergem na área da comunicação nas práticas letivas dos professores de Matemática.

A comunicação na sala de aula de Matemática: a construção de um campo de estudo

A comunicação pode ser concebida como transmissão e partilha de informações, conhecimentos e ideias, sustentada no conhecimento e nas formas de circulação desse conhecimento. As teorias de comunicação convergem na existência de relações comunicativas, divergindo na intencionalidade dos comunicantes. Comunica-se para quê? Comunica-se para influenciar o outro através da persuasão ou para negociar significados com o outro através da interpretação? A comunicação pode, pois, ser vista como *transmissão de informação* ou como *interação social*.

A comunicação como *transmissão de informação* caracteriza-se pela ação comunicativa em que um dado comunicador pretende que o destinatário reaja da forma por ele prevista, agindo em consonância com o que foi comunicado. As possíveis dificuldades nesta visão da comunicação são minimizadas pela existência de ações corretivas que tentam assegurar maior fidelidade dos recetores aos desejos dos emissores (Bitti & Zani, 1997) através do expurgar dos ruídos na emissão e receção de mensagens recorrendo a códigos partilhados culturalmente pelos intervenientes (interlocutores). A comunicação sustenta-se, essencialmente, na existência de comunicantes, de códigos comuns e de um ambiente que não perturbe a transmissão da mensagem. Nesta perspetiva, é perfeitamente indiferente comunicar para uma pessoa, para trinta ou para outro número qualquer, desde que sejam asseguradas as condições para a boa transmissão e descodificação da mensagem transmitida, minimizando a existência de ruído.

A comunicação como *interação social* é um processo social em que os sujeitos interagem, trocando informações, influenciando-se reciprocamente na construção de significados partilhados. A comunicação tem a função de criar e manter o consenso e o entendimento entre os indivíduos, através da interpretação do outro, numa ação de complementaridade e de reconhecimento mútuo, e de permitir que os mesmos indivíduos modifiquem o comportamento da sociedade através de um processo de influência recíproca entre os sujeitos. Na comunicação como interação social, a linguagem é orientada para o entendimento acerca do mundo objetivo, social e subjetivo (Habermas, 2004). A comunicação resulta da interação entre os sujeitos que procuram entre si entender-se. Nesta perspetiva, a qualidade do entendimento depende fortemente do número de interlocutores, pelo que grupos demasiado numerosos prejudicam ou tornam mesmo inviável esse entendimento, acentuando aquilo a que Luhmann (2001) chama de "improbabilidades de comunicação".

A comunicação no processo de ensino-aprendizagem da Matemática assenta no pressuposto da existência de conhecimentos, de códigos partilhados culturalmente e de relações de interação entre os sujeitos presentes na sala de aula (professor e alunos). Este processo é, na sua essência, um processo comunicativo (Sierpinska, 1998), registando-se posições divergentes entre os que assumem a comunicação como: (i) um instrumento para a circulação do conhecimento matemático, inscrito num código, ou (ii) um processo social de construção e partilha do conhecimento matemático entre os alunos e o professor.

A adoção da comunicação como *transmissão de informação* ao campo da educação matemática pressupõe a existência de um conhecimento matemático codificado pelo professor, transmissível aos alunos, numa linguagem culturalmente reconhecida, através de constantes minimizações do ruído. Nesta visão da comunicação, valoriza-se a estruturação do conhecimento matemático numa linguagem que é entendida como adequada aos alunos e uma avaliação baseada na reconstrução pelo aluno do conhecimento matemático transmitido pelo professor, anulando o significado do erro e a construção de conhecimentos singulares. A ênfase semiótica na linguagem assume o processo de ensino-aprendizagem da Matemática como um complexo sistema de tradução isomórfica entre representações semióticas de um mesmo conceito matemático (Duval, 2006). A adequação da linguagem matemática, assumida como codificadora do conhecimento matemático, resulta num instrumento comunicativo no ensino-aprendizagem da Matemática, limitando a identificação de discordâncias ou disparidades entre os significados matemáticos atribuídos por parte dos sujeitos intervenientes. A valorização da transmissão de um conhecimento matemático imutável numa linguagem matemática precisa insere-se numa visão da comunicação como transmissão de informação. Nesta visão da comunicação, as questões fundamentais estão quase exclusivamente centradas na linguagem. Por isso, até ao início da década de 90 do século XX, as questões da linguagem predominavam no campo da investigação em educação matemática comparativamente com as da comunicação (Ellerton & Clarkson, 1996; Menezes, 2004).

Na perspetiva da comunicação como *interação social*, o conhecimento matemático emerge de uma prática discursiva que se desenvolve na sala de aula, decorrente de processos coletivos de comunicação e interação entre os indivíduos e a cultura da aula (Menezes, 1997; Sierpinska, 1998), incluindo as interações do professor com os alunos na e acerca da Matemática. Nesta perspetiva, a ênfase do processo de ensino-aprendizagem da Matemática está nas interações sociais entre os alunos e entre estes e o professor e na interpretação e negociação de significados matemáticos e sociais (Bauersfeld, 1994). O conhecimento matemático dos alunos depende, de entre outros fatores, da natureza das situações de comunicação e interação que ocorrem na sala de aula. A valorização desta perspetiva pressupõe uma educação matemática caracterizada pelas relações dos sujeitos com o mundo, com os outros e consigo próprios, em processos de interação social. Os estudos em educação matemática têm focado as interações entre o professor e os alunos na sala de aula, o conhecimento matemático socialmente construído e a capacidade de alunos e professores entenderem, refletirem e negociarem significados e estabelecerem conexões matemáticas.

A valorização da comunicação na sala de aula de Matemática parece ser partilhada por todos. Realça-se o papel do professor e dos alunos, a adequação da linguagem matemática e a valorização das interações entre os alunos e entre estes e o professor. Como se perspetiva a natureza do conhecimento matemático? Como é que este é construído ou transmitido? Qual é o papel do erro na aprendizagem da Matemática? O professor reconhece a singularidade dos conhecimentos matemáticos dos alunos? As respostas a estas e outras questões podem produzir a diferenciação entre os posicionamentos relativamente à comunicação na aula de Matemática.

A comunicação na sala de aula de Matemática tem sido estudada nas últimas décadas, em Portugal. Num trabalho pioneiro em educação, Emília Pedro (1982) caracteriza o ensino da Matemática através do poder discursivo e do conhecimento do professor. Esta realidade, do início dos anos oitenta, de aulas centradas na oralidade do professor, numa lógica de comunicação como transmissão de informação, com alunos ouvintes ou espetadores, é depois descrita por outros autores (Almiro, 1998; Fonseca, 2000; Menezes, 1995; Ribeiro, 2005; Romão, 1998; Veia 1996), dando contudo, também conta da existência, nas salas de aula dos professores observados, de práticas, não sistemáticas, de valorização do diálogo, do papel ativo dos alunos e das tarefas. A promoção das interações comunicativas e de práticas inquiridoras é igualmente referida em dois estudos com futuros professores do 3.º ciclo do ensino básico e secundário (Almeida, 2007; Tomás Ferreira, 2005), revelando uma perspetiva da comunicação como interação na sala de aula. Investigações com uma matriz colaborativa (Guerreiro, 2011; Martinho, 2007; Menezes, 2004) realçam mudanças significativa das práticas de comunicação e de interação entre os alunos e entre estes e o professor, mostrando um descentrar do conhecimento do professor para focar o conhecimento da comunidade de sala de aula.

As perspetivas teóricas dos professores sobre a comunicação e sobre o seu papel na aprendizagem da Matemática enformam, em grande medida, as suas práticas de ensino na sala de aula. Na próxima secção analisa-se a atividade comunicativa do professor de Matemática, tendo como pano de fundo as orientações teóricas apresentadas para a comunicação na sala de aula de Matemática.

Ações comunicativas de professores de Matemática

A atividade do professor na aula de Matemática tem uma forte componente comunicativa dada a centralidade da comunicação no processo de ensino-aprendizagem (Krummheuer, 2009; Stubbs, 1987). Estas ações comunicativas do professor de Matemática materializam-se no seu discurso, ou seja, o discurso da sala de aula é a linguagem em ação tendo como protagonistas professor e alunos (Sierpinska, 1998). Mas, de que é feita a atividade discursiva do professor, ou seja, que ações comunicativas são estruturais nas práticas do professor no decorrer de uma aula de Matemática? Esta é uma questão à qual diversos autores, tanto portugueses como estrangeiros, têm procurado responder, utilizando para isso abordagens teóricas variadas e centrando-se em aspetos diferentes da atividade do professor na aula (Cengiz, Kline & Grant, 2011; Guerreiro, 2011; Menezes, 1995; Nicol, 1999; Tomás Ferreira, 2005). Estes autores destacam quatro ações discursivas fundamentais realizadas pelo professor de Matemática: (i) explicar; (ii) questionar; (iii) ouvir; e (iv) responder. Em seguida, analisamos em detalhe cada uma. Para apoiar a apresentação e análise destas ações comunicativas do professor de Matemática, apresenta-se um episódio, de uma aula do 4.º ano de uma escola portuguesa em que os alunos interagem com a professora, no momento da discussão coletiva, depois de terem resolvido, em pequeno grupo, a tarefa matemática *Cubos com autocolantes*, relativa a regularidades numéricas (esta tarefa é apresentada com mais detalhe no capítulo 9 deste livro).

Episódio: Cubos com autocolantes

[Os alunos estão à procura de uma regularidade no número de autocolantes que podem colar nas faces de um certo número de cubos, colocados em fila, justapostos por uma face. Os alunos compreendem que de cada vez que colocam um cubo, isso representa colar mais 4 autocolantes.]

Professora: Porque é que é sempre mais 4?
Aluno: Porque se faz ali sempre vezes 4...
Professora: Mas porquê?
Carolina: 9 vezes 4 dá 36, depois com o 2, 38, 10 vezes 4, 40, junta-se o 2, 42, é o 2 que está a fazer isto...
Professora: O 2 está a fazer isto. Mas porque é que tu dizes ali, vocês têm ali as setinhas, mais quatro, mas porquê mais quatro e não mais outra coisa qualquer?
Carolina: Porque a diferença é de 4...
Professora: Porquê?
Rita: Porque foi assim, eles fizeram 9 vezes 4, é 36 e o 36 faz parte da tabuada do 4, mas eles puseram mais 2, se eles no próximo metessem mais 3 já não seria mais 4... Porque é sempre o mesmo número.
Professora: Mas eles fizeram e fizeram corretamente, colocaram aquilo que lá está corretamente. A minha pergunta é: porque é que neste problema, nesta situação...
Rita: Porque há 4 lados nos cubos.
Professora: Porque há 4 lados dos cubos que... Se vão quê?
Aluno: Multiplicando.
Professora: Que se vão repetindo. Vocês conseguem explicar aquilo que estava a dizer a Rita? Usando se calhar mais cubos é mais fácil. Porque é que há aqui esta diferença. (Caso multimédia, *Cubos com autocolantes*)

Explicar

Ao longo das aulas de Matemática vários são os momentos em que o professor tem necessidade de explicar. Segundo Bishop e Goffree (1986) explicar é estabelecer conexões entre ideias, a que está a ser explicada e outras que se supõem partilhadas pelos intervenientes. Uma explicação parte de uma questão (no sentido amplo de aspeto que deve ser discutido ou examinado), seja ela explícita ou implícita. Leinhardt

(2001) distingue as explicações de acordo com a audiência e a característica da questão que lhe dá origem. Assim, apresenta quatro tipos de explicações, a que chama de comuns, disciplinares, instrucionais e autoexplicações.

As *explicações comuns* surgem como resposta a uma questão direta e geralmente simples. Estas explicações fazem parte da vida quotidiana, não estando associadas a um tipo particular de discurso. As *explicações disciplinares* são aquelas que se prendem diretamente com os conteúdos disciplinares. Assim, respondem a questões não contextualizadas, válidas em qualquer momento ou lugar, revestindo-se de algum formalismo. Estas explicações adotam as convenções da área de discurso em que são produzidas. Além disso, não requerem um processo de interação face-a-face, dirigindo-se muitas vezes a audiências anónimas. Leinhardt (2001) nota que apesar desta dimensão associal, as explicações disciplinares são socialmente reconhecidas por um grupo bem determinado e facilmente identificável. Exemplos destas explicações na sala de aula podem ser encontrados nos manuais escolares ou na formulação de uma definição apresentada pelo professor.

As *explicações instrucionais* são essencialmente orientadas para o ensino, tendo como objetivo comunicar um conteúdo a alguém. Apesar desse objetivo, estas explicações têm um carácter tendencialmente menos formal e mais redundante do que as disciplinares. Geralmente, procedem através de exemplos ou casos particulares, não pretendendo ter um carácter normativo. Segundo Leinhardt (2001), estas explicações visam apoiar a aprendizagem. Para que a explicação seja bem sucedida, é necessário que quem a produz conheça a audiência, suportando a explicação no seu conhecimento prévio. O uso que o professor faz das explicações instrucionais assume um papel relevante no processo comunicativo. A produção de explicações requer do professor um conhecimento profissional sólido que lhe permita a adequação aos conteúdos e ao conhecimento dos alunos, assim como a escolha de exemplos e representações que apoiem a compreensão dos alunos.

As explicações instrucionais podem ser emitidas por uma só pessoa ou podem ser construídas em conjunto, por exemplo, num momento de discussão coletiva. Num contexto de sala de aula, as explicações instrucionais produzidas pelos vários intervenientes formam a essência do discurso coletivo. Leinhardt e Steele (2005) designam estes momentos por *diálogos instrucionais*. Estes autores apontam em particular para a importância do professor convidar os alunos para discutirem, para repensarem as suas asserções e explicarem publicamente diversas formas de pensar. Revela-se assim importante o papel do professor no incentivo à produção e partilha de explicações por parte dos alunos, em particular nos momentos de discussão coletiva ou em contextos de trabalho de grupo. O episódio *Cubos com autocolantes* evidencia em abundância o desafio repetido que a professora lança aos alunos para explicarem as suas ideias:

> **Professora:** Que se vão repetindo. Vocês conseguem explicar aquilo que estava a dizer a Rita? Usando se calhar mais cubos é mais fácil.

As *autoexplicações*, não constituindo atos de comunicação típicos da sala de aula, assumem um papel não negligenciável neste contexto. Tratam-se de interrogações colocadas e respondidas pela própria pessoa, traduzindo uma procura individual de significado. Podem surgir num momento de reflexão individual em que o próprio procura exemplos, estabelece conexões com outros assuntos e procura conceptualizações parciais. Muitas vezes, na sala de aula, as autoexplicações traduzem-se, por exemplo, em desenhos, esquemas, cálculos parcelares que podem influenciar decisivamente o desenvolvimento da aula, nomeadamente quando o professor, "pensando alto", aponta possíveis caminhos para a superação de uma determinada dificuldade encontrada pelos alunos ou simplesmente modela processos de raciocínio matemático na resolução de tarefas desafiantes. Para o professor que pretenda uma compreensão mais vasta das condições que determinam a comunicação na sala de aula, poderá ser útil estar atento às autoexplicações produzidas pelos alunos nas suas diversas formas.

Outra área de intervenção do professor a este nível é o planeamento adequado das tarefas a propor, tendo em conta que estas constituem o lugar privilegiado para promover e encorajar a produção de explicações. Por exemplo, Leher e Schauble (2010) apresentam a modelação matemática como uma forma de explicação. Estes autores sustentam que cabe ao professor identificar normas, rotinas e tarefas que ajudem os alunos a construir conexões ao longo da cadeia de modelação, indo das questões para as conclusões e vice-versa, e a construírem critérios úteis para avaliarem o interesse das explicações que para elas encontram.

Questionar

Colocar perguntas é uma das ações comunicativas que tradicionalmente mais se associa ao professor e à escola. Na generalidade das aulas, e em particular nas de

Matemática, o discurso do professor é pautado pela existência de perguntas, que são entendidas como pedidos de informação dirigidos aos alunos, podendo corresponder ou não a enunciados interrogativos (Menezes, Guerreiro, Martinho & Tomás Ferreira, 2013). Contudo, as perguntas que são formuladas pelos professores durante as aulas têm, muitas vezes, um propósito diferente das do quotidiano. No dia a dia, na maioria dos casos, quando uma pessoa endereça uma pergunta a outra, isso corresponde a um pedido genuíno de informação, que a primeira não dispõe. Ora, na escola, os professores também formulam perguntas com outros propósitos, que alguns autores dividem em dois grupos. Perguntas que *visam testar o conhecimento dos alunos*, ou seja, perguntas em que se procura que o aluno forneça informação para que ela seja comparada com a informação que o professor transmitiu – estas perguntas são chamadas de *teste* ou de *verificação* (Ainley, 1988; Mason, 2000; Menezes, 1995). Há um outro grupo de perguntas que são formuladas pelo professor com o propósito de *desenvolver a compreensão e o conhecimento matemático dos alunos*. Nestas, alguns autores apresentam as perguntas de *focalização* (com as quais o professor foca a atenção dos alunos num aspeto por ele escolhido ou origina uma mudança de focalização) e as de *inquirição* (com as quais o professor convida os alunos a expressar as suas compreensões, com o propósito de conhecer o pensamento e as estratégias do aluno) (Mason, 2000). Outros autores (Menezes, 1995) distinguem estas perguntas tomando como critério o tipo de pensamento que é exigido aos alunos, nuns casos convergente e em outros divergente. Normalmente, são as perguntas de inquirição que mais se aproximam da utilização da pergunta com o sentido original deste ato comunicativo, ou seja, a formulação de um pedido genuíno de informação a outro sujeito, incluindo as perguntas sobre os processos de pensamento dos alunos. Os pedidos de justificação, como acontece no episódio anterior ("Porque é que é sempre mais 4?" e "Mas porquê?"), correspondem a perguntas de inquirição. Já a pergunta "Porque há 4 lados dos cubos que... se vão quê?" é de verificação, pois a professora formula a pergunta para testar o entendimento dos alunos a propósito da regularidade algébrica.

Ouvir

Um professor que dê oportunidade aos alunos de participarem no discurso da aula de Matemática coloca-se necessariamente na posição de ter que ouvir (e procurar entender) os seus alunos. Dependendo da natureza das propostas de trabalho colocadas aos alunos, o professor pode deparar-se com intervenções muito diversificadas. O que faz o professor ao ouvir os alunos? E depois de os ouvir? Ouvir não é simplesmente prestar atenção ao que os alunos dizem. Ouvir é um ato comunicativo de natureza interpretativa, fortemente contextualizado, dado que o significado do que se ouve só pode ser interpretado tendo em conta a situação em que ocorre (Tomás Ferreira, 2005).

Tal como o questionar, o ouvir do professor pode ser realizado com diversos propósitos. Davis (1996, 1997) propõe três modos de ouvir: avaliativo, interpretativo e hermenêutico. Para o autor, embora estes modos de ouvir sejam diferentes, não são mutuamente exclusivos mas complementares. Como as próprias designações sugerem, o ouvir *avaliativo* tem como objetivo avaliar o conhecimento dos alunos, enquanto o interpretativo visa compreender as suas ideias e o seu pensamento. Em geral, os professores com tendência para um ouvir avaliativo não valorizam as contribuições dos alunos para o discurso da aula, monopolizando-o eles mesmos. De facto, na sua perspetiva, a responsabilidade de ouvir é essencialmente dos alunos (Davis, 1996) que, por sua vez, acedem ao pensamento do professor se atentos (Coles, 2001).

Dado que pretendem interpretar o que os alunos dizem, os professores com um ouvir predominantemente *interpretativo* pedem frequentemente aos alunos que desenvolvam as suas ideias e que expliquem e justifiquem o que dizem, aumentando as oportunidades de interação na sala de aula entre todos. Contudo, o ouvir destes professores é condicionado pelas suas próprias perspetivas por, em particular, terem muitas respostas pré-estabelecidas em mente (Davis, 1997); além disso, apesar de pretenderem compreender o pensamento dos alunos, os professores, principalmente os que estão no início da carreira, sentem-se inseguros sobre o que fazer com as ideias e contribuições dos alunos para a construção do discurso da aula (Callahan, 2011).

Com o ouvir *hermenêutico*, o professor pretende conhecer e avaliar o pensamento dos alunos com a finalidade de apoiar o processo de instrução, na tomada de decisões (Davis, 1997), participando na exploração e negociação de significados *com* os alunos, pensando com eles e não *por* eles (Yackel, Stephan, Rasmussen & Underwood, 2003). Os professores que tendencialmente ouvem os alunos de modo hermenêutico frequentemente envolvem os alunos em discussões matemáticas desafiantes, nas quais os próprios alunos têm igualmente de ser bons ouvintes

(Davis, 1997; Tomás Ferreira, 2005). Deste modo, as ações dos professores visam apoiar e desenvolver o pensamento matemático dos alunos (Callahan, 2011) e as contribuições destes para o discurso da aula influenciam esse mesmo discurso de forma significativa (Davis, 1997).

O modelo de Davis (1997) tem sido usado em vários estudos embora com algumas alterações nas denominações. Por exemplo, Coles (2001) chama ao modo hermenêutico modo *transformativo* e Tomás Ferreira (2005) e Yackel e colegas (2003) usam a termo *globalizante* por entenderem que captam melhor a essência deste modo de ouvir e o impacto que tem no desenrolar do discurso da aula. Callahan (2011) utiliza os termos *ouvir diretivo*, *ouvir observacional* e *ouvir responsivo*, mas o paralelismo em relação ao modelo de Davis (1997) é claro.

É o modo de ouvir globalizante (ou hermenêutico, ou transformativo, ou responsivo) que melhor se adequa às orientações metodológicas atuais para o ensino da Matemática (ME, 2007; NCTM, 2000). Ouvir adequadamente os alunos na sala de aula é determinante para melhorar a sua compreensão matemática, proporcionando contextos favoráveis a uma avaliação das aprendizagens de natureza reguladora e permitindo apoiar e desenvolver as aprendizagens matemáticas dos alunos; além disso, melhora também o próprio conhecimento matemático dos professores, ao mesmo tempo que lhes dá ferramentas essenciais para tomar decisões que vão ao encontro das necessidades dos alunos (Callahan, 2011; Tomás Ferreira, 2005).

Não é, contudo, o modo de ouvir globalizante que é mais frequentemente encontrado nas salas de aula de Matemática (e.g., Davis, 1994; Pirie, 1998; Tomás Ferreira, 2005); na realidade, o ouvir os alunos deste modo não está livre de desafios (Even & Wallach, 2003; Wallach & Even, 2005). Por exemplo, o professor pode *ouvir* coisas que não foram efetivamente ditas pelos alunos ou pode ouvir menos do que os alunos disseram, isto é, o professor pode *sobreouvir* (muitas vezes redizendo o que os alunos disseram mas incorporando mais informação) ou *subouvir* (selecionando, do que ouviu, aquilo que lhe interessa ou convém para continuar a interação), respetivamente. Mas pode também *não ouvir* de todo as contribuições dos alunos, isto é, pode subouvir totalmente. O professor pode ainda ouvir os alunos de modo tendencioso, ou seja, ouve o que os alunos dizem de acordo com as expetativas que tem, por exemplo, acerca dos conhecimentos dos alunos ou das suas capacidades.

Davis (1997) reporta-se à forma predominante de um professor ouvir os seus alunos na sala de aula tendo, por isso, um carácter holístico. Por seu turno, o *framework* apresentado por Even e Wallach (Even & Wallach, 2003; Wallach & Even, 2005) tem um carácter mais pontual, menos holístico, permitindo fazer análises do ouvir do professor a um nível mais micro. No entanto, o ouvir dos professores é um ato comunicativo muito complexo e o acesso aos seus modos de ouvir (seja qual for a perspetiva teórica que guie esse acesso) permanece um desafio para os investigadores uma vez que este fenómeno não é diretamente *audível* ou *observável*, ao contrário do questionar dos professores. Assim, e porque também é escassa a investigação em torno do ouvir do professor, este campo continua a ser um terreno fértil de estudo, tanto ao nível das práticas de sala de aula como ao nível de aspetos relacionados com a formação (inicial e contínua) de professores. Que fatores condicionam o ouvir do professor? De que modo o conhecimento didático do professor – nas vertentes do conhecimento matemático, conhecimento do currículo, conhecimento dos alunos e dos seus processos de aprendizagem, conhecimento do processo instrucional (Ponte, 1999) – se associa à forma como ouve os alunos? Numa lógica mais relacionada com a formação, que ações podem promover uma crescente consciência dos modos de ouvir do professor e seus impactos nas aprendizagens matemáticas dos alunos?

Responder

Dar seguimento às intervenções dos alunos corresponde a um tipo de ato comunicativo, desempenhado pelo professor, que é designado por *responder*. Comparativamente com os outros atos comunicativos apresentados anteriormente, este acontece sempre depois e é motivado por uma intervenção prévia de um ou mais alunos. O *ouvir* acontece em simultâneo com a intervenção de um aluno, enquanto o *perguntar* ou *explicar* tanto podem ocorrer antes como depois.

A resposta do professor tanto pode encorajar a dependência dos alunos em relação ao próprio professor como pode favorecer o desenvolvimento matemático dos alunos. O que pode fazer o professor ao responder? Pode, por exemplo, dar uma resposta direta, fornecer uma explicação ou informação adicional, evitar a validação de respostas, confrontar respostas de alunos (Nicol, 1999). As respostas aos alunos dependem não só da forma como os professores os ouvem mas também das perguntas que lhes colocam antes. Por exemplo, a resposta do professor que vem na sequência de uma pergunta de verificação por ele colocada pode exigir apenas um julgamento acerca da correção da intervenção do aluno; contudo, esse julgamento pode ser feito de várias maneiras, através de expressões faciais ou de elogios ou sanções mais ou menos explícitas. As perguntas de inquirição (ou de focalização) geram intervenções dos alunos que exigem necessariamente um tipo de resposta diferente do professor, sob pena de perderem o seu propósito. Pedir reações a alunos em particular, ou à turma inteira, solicitar a explicação de ideias ou estratégias a terceiros, redirigir questões ou solicitar elaboração das ideias avançadas podem ser respostas adequadas do professor às contribuições dos alunos (Nicol, 1999; Tomás Ferreira, 2005). São vários os desafios que se colocam ao professor, tais como reagir às intervenções dos alunos sem lhes dar demasiada informação (mantendo o nível cognitivo (Stein & Smith, 1998) da tarefa/questão inicial), lidar com respostas incorretas ou incompletas tornando-as objeto de discussão (Nicol, 1999; Tomás Ferreira, 2005).

O estudo sobre as formas de responder do professor às contribuições dos alunos tem sido diminuto, talvez devido à forte ligação que tem com o ouvir e o perguntar do professor. Várias questões permanecem em aberto neste campo, por exemplo: que fatores condicionam o responder do professor? Que processos de tomada de decisão subjazem às respostas do professor às contribuições dos alunos? De que modo o conhecimento didático do professor se relaciona com a forma como responde aos alunos?

Perguntar, explicar, ouvir e responder são ações comunicativas do professor que têm uma natureza fortemente interdependente, apesar de elas, por facilidade de análise, terem sido abordadas separadamente neste texto. É possível conjeturar algumas relações entre elas. Por exemplo, as perguntas de verificação parecem estar normalmente associadas a um modo de ouvir avaliativo e a respostas diretas, envolvendo um julgamento mais ou menos explícito acerca da correção das intervenções dos alunos. As perguntas de inquirição já se parecem associar frequentemente a um modo de ouvir globalizante e a uma diversidade de respostas do professor às contribuições dos alunos, envolvendo sobretudo o redirigir de questões, o aprofundar ou desenvolver de ideias, o explicitar ou partilhar de estratégias; contudo, há também lugar para respostas diretas. As perguntas de focalização podem associar-se a um modo de ouvir interpretativo, predominando uma combinação de respostas do professor que tanto podem manter o nível cognitivo do desafio presente na pergunta ou tarefa inicial como o podem diminuir rapidamente, evidenciando assim algumas tensões entre uma abordagem ao ensino mais diretiva e uma abordagem mais exploratória (Tomás Ferreira, 2005).

No episódio *Cubos com autocolantes*, as intervenções da professora revelam a sua preocupação em ouvir para compreender o raciocínio dos alunos, o que a leva a decidir-se por colocar questões para os esclarecer ou por redizer o que os alunos disseram utilizando uma linguagem mais adequada (embora ancorada nas ideias expressas pelos alunos), focando a atenção da turma e desafiando-a a reexplicar o processo recorrendo a outros casos: ("Que se vão repetindo. Vocês conseguem explicar aquilo que estava a dizer a Rita? Usando se calhar mais cubos é mais fácil"). Há, portanto, uma predominância de perguntas de focalização e inquirição, um modo de ouvir de carácter globalizante e uma forma de responder aos alunos que os ajuda a desenvolver conhecimento matemático, evitando respostas diretas, promovendo a explicação e justificação das ideias dos alunos e deslocando o *locus* de autoridade matemática para o coletivo da turma, em vez de o centrar no professor como fonte de conhecimento, validação e explicação matemática.

Práticas de comunicação na sala de aula de Matemática

Depois de se ter focado as ações comunicativas do professor a um nível micro, analisam-se agora, numa visão macro, as dinâmicas comunicativas da sala de aula de Matemática, em que interagem professor, alunos e saber matemático. Para isso, abordam-se os seguintes aspetos: (i) estilos de comunicação e padrões de interação; (ii) negociação de significados e normas sociomatemáticas; e (iii) discussão coletiva.

Estilos de comunicação e padrões de interação

As práticas de comunicação em sala de aula assumem uma dinâmica coletiva caracterizada por diferentes estilos de comunicação e de interação social entre os alunos e entre estes e o professor. Os diferentes estilos de comunicação têm subjacentes conceções e práticas de ensino e de aprendizagem em Matemática, tendo em vista as finalidades curriculares da Matemática, associadas ao tipo de tarefas matemáticas e aos diversos papéis desempenhados pelo professor e pelos alunos na sala de aula.

Brendefur e Frykholm (2000) propõem quatro estilos de comunicação matemática: (i) *unidirecional*; (ii) *contributiva*; (iii) *reflexiva*; e (iv) *instrutiva*. Nos dois primeiros estilos, a comunicação na aula é fortemente dominada pelo professor, havendo na contributiva pequenas intervenções dos alunos, normalmente como resposta a perguntas de verificação colocadas pelo professor. A comunicação reflexiva inspira-se no conceito de discurso reflexivo desenvolvido por Cobb, Boufi, McClain e Whitenack (1997), caracterizado por interligar fortemente ação e reflexão, ou seja, aquilo que professor e alunos fazem na aula, a sua atividade matemática, em particular o discurso, "torna-se subsequentemente um objeto explícito de discussão" (p. 258).

No episódio de sala de aula apresentado anteriormente, a professora evidencia favorecer um estilo de comunicação reflexiva, focando os alunos nas ideias matemáticas destes, pedindo explicações e justificações, em simultâneo com uma comunicação de natureza metacognitiva, conjugando o pensamento dos alunos com o seu próprio pensamento na condução da aula:

> **Professora:** Que se vão repetindo. Vocês conseguem explicar aquilo que estava a dizer a Rita? Usando se calhar mais cubos é mais fácil. Por que é que há aqui esta diferença.

Por último, o estilo de comunicação instrutiva envolve a incorporação das ideias, estratégias e dificuldades dos alunos nas ações instrutivas do professor, originando um refazer constante do discurso da sala de aula (Brendefur & Frykholm, 2000). Nos estilos de comunicação reflexiva e instrutiva, os alunos aprendem a comunicar matematicamente e os professores assumem o propósito de levar os alunos a pensarem, a questionarem e a comunicarem as suas ideias matemáticas. A comunicação transforma-se num processo social em que os participantes interagem permutando informações e, sobretudo, influenciando-se mutuamente buscando entendimentos.

Estes estilos de comunicação revelam-se em "regularidades que são interactivamente constituídas pelo professor e pelos alunos" (Voigt, 1995, p. 178), caracterizando as rotinas de interação social entre o professor e os alunos como padrões de interação, observáveis na sala de aula. A investigação em educação matemática identificou diversos padrões de interação, entre os quais apontamos: *padrão de extração (elicitation pattern), padrão de discussão (discussion pattern), padrão de funil (funnel pattern)* e *padrão de focalização (focussing pattern)* (Bauersfeld, 1994; Voigt, 1985, 1995; Wood, 1994, 1999). Estes padrões refletem a natureza das interações e as características da prática em sala de aula e criam diferentes oportunidades de aprendizagem (Wood, 1994).

Nos dois primeiros padrões, o professor, através do questionamento, procura, a partir de uma dada situação, extrair conhecimento, clarificar ou publicitar as ideias e estratégias matemáticas das respostas dos alunos à comunidade de aprendizagem (coletivo turma), centrando-se nos conhecimentos dos alunos. No padrão de extração, o objetivo é validar o conhecimento do aluno (de uma forma personalizada e assente num tipo de interação em que o professor é questionador); no padrão de discussão, o professor procura publicitar e submeter à validação coletiva o conhecimento dos alunos (numa lógica de interação de rede, em que assume essencialmente o papel de gestor).

No episódio de sala de aula *Cubos com autocolantes*, a professora utiliza, no contexto da discussão coletiva, os padrões de extração e de discussão ao questionar os alunos individualmente a propósito da regularidade numérica:

> **Professora:** Porque é que é sempre mais 4?
>
> (...)
>
> **Professora:** O 2 está a fazer isto. Mas porque é que tu dizes ali, vocês têm ali as setinhas, mais quatro, mas porquê mais quatro e não mais outra coisa qualquer?

O padrão de discussão, focado no conhecimento dos alunos, tem na base as resoluções dos problemas efetuadas na fase anterior da aula, caracterizando-se por ciclos consecutivos de apresentação, justificação e debate de ideias (Wood, 1999). Em contraponto, os padrões de funil e de focalização resultam de respostas diferentes do professor face a dificuldades evidenciadas pelos alunos, direcionando-os para o seu próprio conhecimento. No padrão de funil, o professor conduz os alunos até à resposta desejada, enquanto no padrão de focalização, após a superação da dificuldade que impedia o avanço no trabalho, o professor incentiva os alunos a continuar autonomamente o seu processo de resolução.

Negociação de significados e normas sociais e sociomatemáticas

A negociação de significados apresenta uma vertente matemática, relacionada com os conceitos e processos matemáticos, e uma vertente acional e comportamental relacionada com a definição de normas sociais e sociomatemáticas na sala de aula. Estas normas sociais e sociomatemáticas codificam, por exemplo, o que é assumido na aula como sendo uma explicação, justificação ou argumentação matematicamente aceitável. Recorde-se que o que se torna matematicamente normativo numa aula é determinado pelos objetivos presentes, crenças, suposições e hipóteses dos diferentes participantes. De facto, as normas têm um caráter subjetivo e são sempre construídas em interação. Daí que, em salas de aula distintas, o significado de cada norma possa ser diverso, mesmo quando o professor é o mesmo. No episódio que tem vindo a ser analisado, os sucessivos «porquês» da professora ilustram a necessidade de justificação de uma afirmação matemática, originando implicitamente, ou explicitamente, a existência de uma norma social ou sociomatemática associada à justificação dos resultados matemáticos, em resultado de um processo de negociação de significados em sala de aula. Yackel e Cobb (1996) argumentam que, nesse processo, o professor apoia o aprofundamento da experiência matemática dos alunos e o desenvolvimento da sua autonomia intelectual, originando aprendentes cognitivamente ativos, capazes de propor e negociar ideias e estratégias matemáticas. As intervenções de Carolina e de Rita, no episódio *Cubos com autocolantes*, mostram uma tentativa de negociação de significados matemáticos, relativa a uma regularidade numérica:

> **Carolina:** 9 vezes 4 dá 36, depois com o 2, 38, 10 vezes 4, 40, junta-se o 2, 42, é o 2 que está a fazer isto...
>
> (...)
>
> **Rita:** Porque foi assim, eles fizeram 9 vezes 4, é 36 e o 36 faz parte da tabuada do 4, mas eles puseram mais 2, se eles no próximo metessem mais 3 já não seria mais 4... Porque é sempre o mesmo número.

Esta negociação de significados conjuga igualmente as normas sociais e sociomatemáticas da explicação e da justificação matemáticas, denotando a persistente existência de processos de negociação de significados na sala de aula, especialmente em momentos de significativa interação entre os alunos e entre estes e o professor.

Discussão coletiva

A construção de ambientes comunicativos ricos na sala de aula de Matemática requer que os professores conheçam e compreendam o pensamento dos alunos e sejam capazes de apoiar o desenvolvimento das suas aprendizagens matemáticas.

Numa aula de Matemática de natureza exploratória, que habitualmente tem estas características, após o trabalho autónomo dos alunos em torno de tarefas matemáticas desafiantes, realizado normalmente em pequeno grupo, surge uma fase importante da atividade matemática dos alunos: a discussão coletiva. Esta visão da aula de Matemática, muito diferente da de uma aula centrada na exposição do professor, pressupõe a construção, naturalmente lenta, daquilo a que Sherin (2002) chama de “comunidade matemática de discurso” (na qual a comunicação matemática, através da discussão, assume a natureza de partilha e interação social). Mas, afinal, em que consiste a discussão matemática e como se pode desenvolver?

Para Pirie e Schwarzenberg (1988), uma discussão matemática é uma conversa com propósito, sobre um assunto matemático, na qual os alunos dão contributos genuínos e interagem entre eles e o professor. Isto significa que a discussão matemática pressupõe diversos ingredientes, como sejam a definição de objetivos partilhados pelo grupo, o trabalho genuíno com ideias matemáticas e o envolvimento ativo, e não meramente reativo, por parte dos alunos, no ouvir crítico-reflexivo e na expressão do seu próprio pensamento.

As discussões coletivas na aula de Matemática sustentam a construção conjunta de ideias, através da partilha de pensamentos, do ouvir e responder às ideias dos outros e da negociação de significados (Staples, 2007). Numa discussão, para além de falar, ouvir é uma forma de participação importante, já que permite aos alunos acompanhar raciocínios, alargar estratégias de resolução de problemas, identificar e corrigir erros e ganhar confiança em si mesmos (Hintz, 2011).

A discussão coletiva não ocorre de forma espontânea nas aulas, necessitando de ser preparada (antes e durante a aula, através, por exemplo, da antecipação, da seleção e sequenciação de estratégias de resolução da tarefa proposta) e acompanhada pelo professor. Conseguir que esta discussão seja matematicamente fecunda é um empreendimento particularmente exigente para o professor (Canavarro, Oliveira & Menezes, 2012; Sherin, 2002). Neste sentido, Stein, Engle, Smith e Hughes (2008) propõem um modelo que distingue cinco práticas dos professores tendo em vista a condução de discussões matematicamente ricas. A primeira prática, *antecipar* possíveis estratégias de resolução das tarefas bem como dificuldades prováveis, decorre com maior antecedência, durante a planificação da própria aula. As práticas de *monitorizar* o trabalho dos alunos e *selecionar* e *sequenciar* as resoluções para apresentação e discussão decorrem durante a fase de realização da tarefa pelos alunos, imediatamente antes da discussão propriamente dita. Finalmente, a prática de estabelecer conexões entre as várias estratégias apresentadas, relacionando conceitos e procedimentos matemáticos e realçando as principais ideias matemáticas presentes, é a que decorre inteiramente durante a fase de discussão coletiva, estando o seu sucesso dependente significativamente das quatro práticas anteriores. Já Canavarro, Oliveira e Menezes (2012) identificam também práticas promotoras da discussão que estão organizadas em torno de objetivos ligados diretamente à promoção da aprendizagem matemática e à gestão da aula. Em relação à promoção da aprendizagem, as ações do professor visam promover a qualidade matemática das apresentações dos alunos, e regular as interações entre os alunos na discussão. As ações do professor que estão na esfera da gestão da aula têm em vista criar um ambiente propício à apresentação e discussão bem como gerir relações entre os alunos.

No episódio *Cubos com autocolantes*, a professora evidencia a dupla preocupação de promover a aprendizagem da Matemática e, igualmente, de gerir a aula no plano comunicativo:

> **Professora:** Porque é que é sempre mais 4?
> **Aluno:** Porque se faz ali sempre vezes 4...
> **Professora:** Mas porquê?

Por isso, a professora procura regular as interações entre os alunos e promover a qualidade matemática das ideias trocadas. Nesse sentido, não se satisfaz com todas as explicações e justificações, colocando questões e dando a palavra a outros colegas. A metáfora da condução da discussão por parte do professor como "orquestração" (Stein et al., 2008) é uma boa imagem para representar os esforços que o professor realiza para construir uma aula em que emergem, simultaneamente, a lógica individual (na intervenção dos alunos) e a lógica coletiva (na negociação de significados partilhados). Nesta metáfora, o professor surge como um maestro interventivo, ou seja, um interlocutor que participa ativamente no discurso da aula, ouvindo os alunos e respondendo, através do perguntar (ato comunicativo muito presente no episódio, com o qual a professora convida os alunos para o discurso da aula), do informar e do explicar. A forma como estes atos comunicativos do professor se combinam durante a discussão coletiva, de modo a resultar um produto matemático aceite pela comunidade de discurso, é ainda pouco refletida no campo da investigação em educação matemática e no campo profissional dos professores.

Considerações finais

Este texto evidencia um conjunto de caminhos promissores ao nível do desenvolvimento da comunicação nas práticas letivas dos professores de Matemática, mas mostra igualmente questões que estão em aberto, que representam desafios à investigação em educação matemática.

Ao nível dos caminhos promissores destaca-se a progressiva clarificação entre dois modelos comunicativos de ensino da Matemática, um que vê a prática letiva do professor como um processo ao serviço da transmissão de conhecimento matemático culturalmente aceite e uma outra visão que concebe essa prática como parte de uma prática mais global da sala de aula, em que os alunos estão fortemente implicados, de natureza interativa, através da qual o conhecimento matemático emerge de processos de negociação de significados. Este segundo modelo, em que a comunicação é concebida como um processo de interação social, implica necessariamente novos papéis para o professor e para os alunos, que estão associados à utilização de tarefas e materiais didáticos com potencial para provocarem a atividade comunicativa e o pensamento matemático dos alunos.

A atividade do professor é fortemente conversacional, ou seja, tem uma natureza discursiva servindo de suporte à comunicação dos alunos. O discurso do professor tem assim uma natureza reguladora do discurso da aula, o que lhe confere características próprias que o distinguem de outros discursos, dado que tem como objetivo sustentar e promover a comunicação matemática e a aprendizagem dos alunos. Numa aula de Matemática com características exploratórias, o discurso do professor caracteriza-se por estar fortemente focado no pensamento dos alunos, sendo o diálogo um facto central. Assim, o professor cria um ambiente comunicativo favorável, apresenta tarefas desafiantes aos alunos, associadas a materiais que têm boas condições de representar conceitos matemáticos, ouve os alunos para os compreender, coloca questões para clarificar, desafiar e avaliar, explica, introduz informação para reflexão dos alunos e favorece a interação, a discussão e a negociação de significados, recorrendo ao uso de linguagem e representações matemáticas. A figura 1 representa as dinâmicas comunicativas da aula de Matemática que temos vindo a apresentar, em que o discurso da aula, atravessado por um conjunto de linhas de força (que se cruzam entre si), inclui o discurso do professor (representado a azul) e o discurso dos alunos (representado a vermelho):

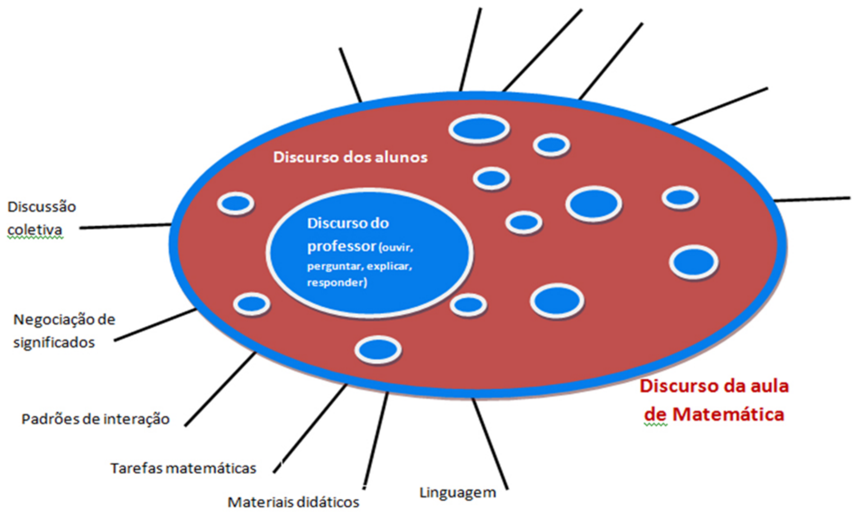


Figura 1. Dinâmicas comunicativas de uma aula de Matemática

A imagem procura ilustrar que numa aula em que a comunicação é concebida como interação social e inerente à aprendizagem da Matemática, o discurso do professor suporta o dos alunos, no sentido em que o professor ouve, pergunta, explica ou responde para favorecer o discurso dos alunos (os elementos azuis representam momentos em que a intervenção discursiva do professor é mais visível e emerge, ao interagir com os alunos, ao explicar, responder ou perguntar). As linhas de força são aspetos fundamentais da comunicação matemática que se gera na aula, através do discurso que é produzido, salientando-se a importância da discussão coletiva, que culmina muitas vezes em processos de negociação de significados matemáticos assentes em padrões de interação entre os alunos e o professor. Toda esta atividade matemática depende de tarefas matemáticas ricas, que desafiem os alunos, de materiais com capacidade para representar ideias matemáticas e potenciar o raciocínio dos alunos sobre essas ideias e da utilização da linguagem (um misto entre linguagem natural e linguagem matemática).

Focando a atenção nos desafios que se colocam neste campo, importa aprofundar a relação entre a comunicação instrutiva (que se traduz no discurso regulador do professor), a comunicação dos alunos e entre esta e a aprendizagem matemática. Nesta relação entre as práticas letivas de comunicação do professor e a aprendizagem dos alunos, há ainda campo para compreender a forma como os momentos de discussão coletiva contribuem para a aprendizagem, tanto dos tópicos matemáticos como das capacidades transversais.

Assumir a comunicação como elemento estruturante do ensino, e portanto das práticas letivas dos professores, e igualmente como fundacional da aprendizagem, obriga a repensar o modo como se ensina Matemática. As práticas de comunicação deixam de ser vistas como um mero instrumento ou técnica do professor para ensinar Matemática, mas como algo indissociável da própria aprendizagem da Matemática, inerente aos processos de construção e partilha do conhecimento matemático.

Referências

Ainley, J. (1988). Perceptions of teachers' questioning styles. In A. Borbás (Ed.), *Proceedings of the 12th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 92 – 99). Veszprém, Hungria.

Almeida, M. (2007). *A comunicação na aula de Matemática: Dois estudos de caso com futuros professores* (Tese de Mestrado, Universidade do Minho).

Almiro, J. (1998). *O discurso na aula de Matemática e o desenvolvimento profissional do professor* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Bauersfeld, H. (1994). Theoretical perspectives on interaction in the mathematics classroom. In R. Biehler, R. Scholz, R. Sträßer, & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 133-146). Dordrecht: Kluwer Academic Pub.

Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.

Bitti, P., & Zani, B. (1997). *A comunicação como processo social.* Lisboa: Editorial Estampa.

Brendefur, J., & Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: Two preservice teachers' conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3, 125-153.

Callahan, K. (2011). Listening responsively. *Teaching Children Mathematics*, 18(5), 296-305.

Canavarro, A. P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da Matemática: O caso de Célia. In L. Santos, A. P. Canavarro, A. M Boavida, H. Oliveira, L. Menezes, & S. Carreira (Ed.s.), *Investigação em educação matemática 2012: Práticas de ensino da matemática* (pp. 255-266). Portalegre: SPIEM.

Cengiz, N., Kline, K., & Grant, T. (2011). Extending students' mathematical thinking during whole-group discussions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14, 355–37.

Cobb, P., Boufi, A., McClain, K., & Whitenack, J. (1997). Reflective discourse and collective reflection. *Journal for Research in Mathematics Education,* 28(3), 258-277.

Coles, A. (2001). Listening: A case study of teacher change. In M. van den Heuzel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 281-288). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.

Davis, B. (1994). Mathematics teaching: Moving from telling to listening. *Journal of Curriculum and Supervision, 9*(3), 267-283. Davis, B. (1996). Teaching mathematics: Toward a sound alternative. New York: Garland.

Davis, B. (1997). Listening for differences: An evolving conception of mathematics teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(3), 355-376.

Duval, R. (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques? *Relime*, Número Especial, 45–81.

Ellerton, N., & Clarkson, P. (1996). Language factors in mathematics teaching and learning. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 987-1033). Dordrecht: Kluwer.

Even, R., & Wallach, T. (2003). Student assessment: Issues for teacher education. *Proceedings of CERME3 – Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CD-ROM) (TG 12, pp. 1-9). Bellari: Universitá di Pisa.

Fonseca, H. (2000). *Os processos matemáticos e o discurso em actividades de investigação na sala de aula* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Guerreiro, A. (2011). *Comunicação no ensino-aprendizagem da matemática: Práticas no 1.º ciclo do ensino básico* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa).

Habermas, J. (2004). *Pensamento pós-metafísico*. Coimbra: Almedina.

Hintz, A. B. (2011). Understanding students' experiences as listeners during mathematical discussions. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 11 (3), 261-272.

Krummheuer, G. (2009): Inscription, narration and diagrammatically based argumentation. The narrative accounting practices in the primary school mathematics lesson. In W. M. Roth (Ed.), *Mathematical representation at the interface of the body and culture* (pp. 219-243). Charlotte, NC: Information Age.

Leher, R., & Schauble, L. (2010). What kind of explanation is a model? In M. K. Stein & L. Kucan (eds.), *Instructional explanations in the disciplines* (pp. 9-22). New York, NY: Springer.

Leinhardt, G. (2001). Instructional explanations: A commonplace for teaching and location for contrast. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th edition, pp. 333-357). Washington DC, USA: American Educational Research Association.

Leinhardt, G., & Steele, M. D. (2005). Seeing the complexity of standing to the side: Instructional dialogues. *Cognition and Instruction*, 23(1), 87-163.

Luhmann, N. (2001). *A improbabilidade da comunicação.* Lisboa: Veja.

Martinho, M. H. (2007). *A comunicação na sala de aula de Matemática: Um projeto colaborativo com três professoras do ensino básico* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa).

Mason, J. (2000). Asking mathematical questions mathematically. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(1), 97-111.

Menezes, L. (1995). *Concepções e práticas de professores de Matemática: Contributos para o estudo da pergunta* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Menezes, L. (1997). O discurso do professor de Matemática. *Educação e Matemática*, 44, 5-11.

Menezes, L. (2004). *Investigar para ensinar Matemática: Contributos de um projeto de investigação colaborativa para o desenvolvimento profissional de professores* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Menezes, L., Guerreiro, A., Martinho, M. H., & Tomás Ferreira, R. (2013.) Essay on the role of teachers' questioning in inquiry-based mathematics teaching. *SISYPHUS Journal of Education*, 1(3), 44-75.

Ministério da Educação ME (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. Lisboa: DGIDC

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Nicol, C. (1999). Learning to teach mathematics: Questioning, listening, and responding. *Educational Studies in Mathematics*, 37(1), 45-66.

Pedro, E. (1982). *O discurso na aula: Uma análise sociolinguística da prática escolar em Portugal*. Lisboa: Edições Rolim.

Pirie, S. (1998). Crossing the gulf between thought and symbol: Language as (slip-pery) stepping-stones. In H. Steinbring, M. G. B. Bussi, & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 7-29). Reston, VA: NCTM.

Pirie, S., & Schwarzenberger, L. (1988). Mathematical discussion and mathematical understanding. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 459-470

Ponte, J. P. (1999). Didácticas específicas e construção do conhecimento profissional. In *Investigar e formar em educação: Actas do IV congresso da SPCE* (pp. 59-72). Porto: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Ribeiro, D. (2005). *A resolução de problemas e o desenvolvimento da comunicação matemática: Um estudo no 4.º ano de escolaridade* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa)

Romão, M. (1998). *O papel da comunicação na aprendizagem da Matemática: Um estudo realizado com quatro professores no contexto das aulas de apoio de Matemática* (Tese de Mestrado, Universidade do Algarve).

Sherin, M. (2002). A balancing act: Developing a discourse community in a mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5(3), 205-233.

Sierpinska, A. (1998). Three epistemologies, three views of classroom communication: Constructivism, sociocultural approaches, interactionism. In H. Steinbring, M. G. B. Bussi, & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 30-62). Reston, VA: NCTM.

Staples, M. (2007). Supporting whole-class collaborative inquiry in a secondary mathematics classroom. *Cognition and Instruction*, 25(2), 161–217

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(4), 268-275

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers moving beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10, 313 – 340.

Stubbs, M. (1987). *Linguagem, escolas e aulas*. Lisboa: Livros Horizonte.

Tomás Ferreira, R. A. (2005). *Portuguese mathematics student teachers' evolving teaching modes: A modified teacher development experiment* (Tese de Doutoramento, Illinois State University, EUA).

Veia, L. (1996) *A resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação no primeiro ciclo do ensino básico: Três estudos de caso* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Voigt, J. (1985). Patterns and routines in classroom interaction. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6(1), 69-118.

Voigt, J. (1995). Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms. In P. Cobb, & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 163-201). New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Pub.

Wallach, T., & Even, R. (2005). Hearing students: The complexity of understanding what they are saying, showing and doing. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8, 393-417.

Wood, T. (1994). Patterns of interaction and the culture of mathematics classrooms. In S. Lerman (Ed.), *Cultural perspectives on the mathematics classroom* (pp.149-168). Dordrecht: Kluwer Academic Pub.

Wood, T. (1999). Creating a context for argument in mathematics class. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 171-191.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477.

Yackel, E., Stephan, M., Rasmussen, C., & Underwood, D. (2003). Didactizing: Continuing the work of Leen Streefland. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 101-126.

COMUNICAÇÃO

7. A condução de discussões matemáticas como vertente da prática profissional do professor

por Marisa Quaresma, João Pedro da Ponte

7. A condução de discussões matemáticas como vertente da prática profissional do professor

Marisa Quaresma
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
mq@campus.ul.pt

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ulisboa.pt

• **Resumo:** Esta comunicação analisa a diversidade de ações que o professor empreende nos momentos de discussão coletiva, em aulas de natureza exploratória em que os alunos são chamados a usar estratégias próprias para resolver as tarefas propostas. A investigação é qualitativa e interpretativa, sendo os dados recolhidos por observação participante, com videogravação e transcrição das aulas observadas. Os participantes são uma professora do 6.º ano e os respetivos alunos. Os resultados mostram que a professora tem de tomar muitas decisões em relação às situações problemáticas que surgem, com especial atenção à interpretação dos enunciados e dos raciocínios e explicações dos alunos. Mostram ainda que a abordagem seguida nas aulas favorece o surgimento de desacordos e a formulação de generalizações e justificações por parte dos alunos, aspetos essenciais do raciocínio matemático.

• **Palavras-Chave:** Discussões matemáticas, Comunicação, Raciocínio, Prática profissional, Números racionais.

Introdução

No ensino da Matemática, a abordagem exploratória pretende proporcionar aos alunos a oportunidade de enfrentarem situações para as quais não possuem um método imediato de resolução, levando-os a construir ou aprofundar a sua compreensão de conceitos, representações, procedimentos e outras ideias matemáticas. Os alunos são chamados a desempenhar um papel ativo na interpretação das questões propostas, na representação da informação dada e na conceção e concretização de estratégias de resolução que devem depois saber apresentar e justificar. Este tipo de ensino encontra o seu fundamento na distinção fundamental teorizada por Christiansen e Walther (1986) entre tarefa (o objetivo a alcançar) e atividade (o trabalho a fazer para concretizar esse objetivo). Daqui decorre naturalmente a organização do trabalho na aula de Matemática em três grandes fases (ver Ponte, 2005): (i) apresentação e interpretação da tarefa; (ii) realização da tarefa; e (iii) apresentação e discussão dos resultados e síntese final.

Neste estudo, centramos a nossa atenção no momento de discussão, no qual os alunos apresentam e justificam as suas resoluções e questionam, de forma argumentada, as resoluções dos colegas. O nosso objetivo não é estabelecer um quadro normativo, dizendo o que o professor “deve” fazer, mas sim analisar os fenómenos que têm lugar neste momento da aula, de modo a compreender as situações que ocorrem e as ações que o professor pode desenvolver perante essas situações. Neste tipo de trabalho é muito grande a diversidade de situações que podem surgir em função do nível etário dos alunos, da sua capacidade matemática, da cultura da sala de aula, dos tópicos matemáticos em estudo. Para além disso é preciso ter ainda em atenção a influência de outros fatores como as preocupações com a avaliação (tanto de alunos como de professores), as determinações da escola e do coletivo de docentes sobre a gestão curricular, os manuais escolares e outros recursos disponíveis, as condições físicas da sala de aula, etc. Deste modo, não procuramos estabelecer normas gerais abstratas, supostamente válidas para todas as situações. O nosso estudo tem um cunho essencialmente analítico, tendo em vista construir um quadro conceptual que possa ser útil na análise de situações de discussão conduzidas no quadro de uma abordagem exploratória. Nesta comunicação, especificamente, procuramos analisar a diversidade de ações que o professor é chamado a empreender nos momentos de discussão coletiva.

A dinâmica dos momentos de discussão matemática na sala de aula

Na aula de Matemática, as tarefas propostas são um ponto de partida fundamental para a aprendizagem dos alunos. Numa tarefa em que apenas está em causa a seleção e aplicação de um método de resolução já conhecido dos alunos, as questões que se colocam são sobretudo a identificação e execução desse método. Em contrapartida, uma tarefa com caraterísticas desafiantes propicia uma diversidade de estratégias que podem ser comparadas e avaliadas, originando discussões interessantes. Outro aspeto que marca decisivamente as oportunidades de aprendizagem é a comunicação que se estabelece (Bishop & Goffree, 1986; Franke, Kazemi & Battey, 2007). Os momentos de discussão coletiva são uma forma particular dessa comunicação que vem merecendo o interesse crescente da investigação em Didática da Matemática.

Cabe ao professor preparar o momento de discussão, aproveitando o melhor possível o trabalho realizado pelos alunos e o tempo de aula disponível. Para o efeito, Stein, Engle, Smith e Hughes (2008) destacam a importância do professor antecipar o modo como os alunos podem pensar, monitorizar o seu trabalho, recolhendo a informação necessária, selecionar os aspetos a salientar durante a discussão e sequenciar as suas intervenções e, já durante a discussão, estabelecer conexões entre as diversas resoluções. Uma preparação feita nestas condições é um apoio importante à condução da discussão, mas esta envolve muitos aspetos para além do estabelecimento de conexões, que não podem ser previstos numa etapa prévia, que o professor tem de estar preparado para enfrentar e que, como mostra Sherin (2002), envolve a necessidade de equilibrar aspetos relativos aos conhecimentos matemáticos, o que requer a filtragem de ideias, focando a atenção dos alunos nas ideias fundamentais e, também, a atenção frequente a aspetos dos processos matemáticos.

Procurando identificar situações de discussão especialmente produtivas, tanto McCrone (2005) como Potari e Jaworski (2002) chamam a atenção para os momentos em que o professor desafia matematicamente os alunos. Wood (1999) sublinha as potencialidades da exploração de desacordos entre alunos, procurando que eles justifiquem as suas posições e encorajando os restantes alunos a associarem-se à discussão. Fraivillig, Murphy e Fuson (1999) e, posteriormente, Cengiz, Kline e Grant (2011) desenvolveram um quadro de análise para as ações do professor na condução de discussões matemáticas que distingue três tipos de ações fundamentais, visando levar os alunos a apresentar os seus métodos (*eliciting actions*), apoiar a sua compreensão concetual (*supporting actions*) e alargar ou aprofundar o seu pensamento (*extending actions*).

Pelo seu lado, Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (em publicação) desenvolveram um quadro de análise que pressupõe que o professor realiza ações diretamente relacionadas com os tópicos e processos matemáticos e ações que têm a ver com a gestão da aprendizagem (Figura 1). Centrando a sua atenção nas ações relacionadas com os aspetos matemáticos, assinalam que as ações de *convidar* servem para iniciar uma discussão e as ações de *apoiar/guiar* permitem conduzir os alunos na resolução de uma tarefa através de perguntas ou observações que apontam, de forma implícita, o caminho a seguir. Nas ações de *informar/sugerir* o professor introduz informação, apresenta argumentos ou valida respostas dos alunos. Finalmente, nas ações de *desafiar* procura que os alunos assumam esse papel, seja na produção de novas representações, na interpretação de um enunciado, no estabelecimento de conexões, ou no estabelecimento de um raciocínio ou de uma avaliação. Em qualquer destas ações reconhecem-se aspetos fundamentais de processos matemáticos como representar (na mesma linguagem ou noutra representação), interpretar (incluindo o estabelecimento de conexões), raciocinar (incluindo fazer conjeturas e apresentar justificações) e avaliar (fazendo julgamentos gerais sobre o valor de um conceito, uma representação, uma resolução de uma tarefa).

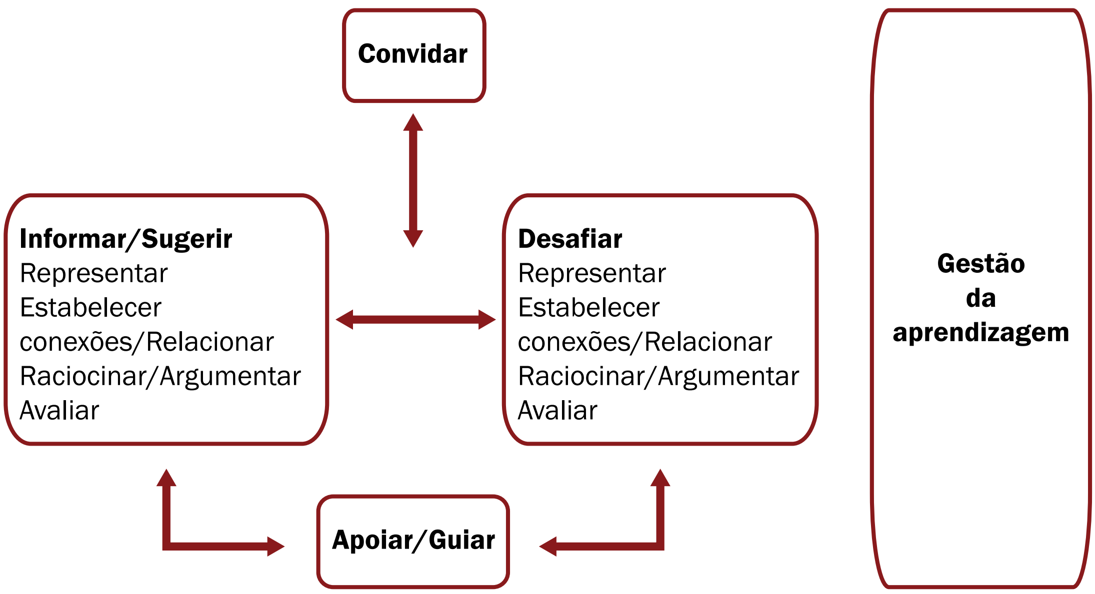


Figura 1 – Quadro de análise para as ações do professor.

Metodologia de investigação

Este estudo segue uma abordagem qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994) uma vez que pretendemos estudar as ações do professor tendo em conta o significado que este lhes atribui. Usámos observação participante (Jorgensen, 1989), metodologia que permite uma relação próxima do investigador com o objeto de estudo no seu contexto natural – os momentos de discussão coletiva das tarefas realizadas na aula.

O estudo decorreu nas aulas de uma professora do 2.º ciclo, com 6 anos de experiência, empenhada em pôr em prática aulas de natureza exploratória (primeira autora desta comunicação). Participam também os alunos de uma turma do 6.º ano de uma escola básica rural do ensino público (escola TEIP) a 50 km de Lisboa. Os pais dos alunos, em geral, são de classe baixa ou média-baixa com habilitações que não vão além do 2.º ou 3.º ciclo. A turma tem 19 alunos, dos quais 4 já reprovaram em anos anteriores, e revela reduzido empenho e poucos hábitos de trabalho.

O estudo envolve cinco aulas de 90 minutos, onde foram realizadas diversas tarefas apresentadas em três fichas de trabalho. A primeira ficha inclui questões de comparação, ordenação, adição e subtração de números racionais, a segunda visa introduzir a multiplicação de um número natural por uma fração e a multiplicação de duas frações e a terceira pretende desenvolver a noção de operador no contexto da resolução de problemas. Durante uma parte de cada uma das aulas os alunos trabalharam a pares e a professora acompanhou o trabalho dos alunos, tirando possíveis dúvidas ou desbloqueando alguns impasses. Na outra parte realizou-se uma discussão coletiva, num registo de comunicação dialógica (Ponte, 2005).

As aulas foram registadas em vídeo, sendo as discussões coletivas integralmente transcritas. A análise dos dados começou por identificar os segmentos na discussão da resolução de cada tarefa, codificando as ações do professor de acordo com as categorias apresentadas na Figura 1. De seguida, procurámos estabelecer relações entre estas ações e eventos marcantes no que respeita a interpretações, representações e raciocínio (generalizações e justificações) realizados pelos alunos. Para esta comunicação, selecionámos dois episódios onde se evidenciam vários aspetos destas relações.

Episódio 1 – Desigualdade verdadeira?

O primeiro episódio decorre durante a realização de uma tarefa (Figura 2) que solicita aos alunos que avaliem a validade de uma afirmação onde se comparam duas frações, sendo os dados apresentados e pedidos em forma de fração e o contexto puramente matemático. Destacamos neste episódio três segmentos.

> Tarefa. $\frac{2}{4}$ é maior do que $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{5}$ é maior do que $\frac{3}{4}$. Será que podemos fazer a seguinte afirmação: "Se quisermos comparar duas frações e verificarmos que uma delas tem o numerador e o denominador maiores do que a outra, podemos logo concluir que essa é a fração maior"? Justifica a tua resposta.

Figura 2 – Tarefa de comparação de frações.

Apresentada a tarefa, os alunos apresentam dificuldade em compreender o que se pretende, pelo que a professora sente necessidade de promover a interpretação coletiva do enunciado e de procurar ajudar os alunos a encontrar uma estratégia de resolução:

> **Professora:** Os dois casos são verdadeiros. E, a seguir o que eles, o que está aí é... OK, isto e isto [$\frac{2}{4} > \frac{1}{3}$ e $\frac{4}{5} > \frac{3}{4}$] é verdade. Eu posso dizer que sempre que o numerador e o denominador de uma fração forem maiores que o numerador e o denominador de outra fração, então esta ($\frac{4}{5}$), que tem o numerador e o denominador maiores, é sempre maior que a segunda [fração]? Isto acontece sempre?
>
> **Um aluno:** Não...
>
> **Professora:** Como é que vocês podem tentar perceber se acontece sempre ou não?
>
> **Daniel:** Fazendo mais frações...
>
> **Professora:** Encontrando outros exemplos, não é... Pode ser uma... Uma boa sugestão do Daniel, não sei (...).

A professora começa por recordar os aspetos principais do enunciado ("isto e isto é verdade"...) para depois fazer uma afirmação de natureza mais geral ("sempre que o numerador e o denominador de uma fração forem maiores..."). Os alunos conseguem perceber que $\frac{2}{4} > \frac{1}{3}$ e que $\frac{4}{5} > \frac{3}{4}$ mas têm dificuldade em saber o que podem fazer para saber se outras afirmações são corretas ou não. A pergunta de inquirição da professora ("Como é que vocês podem tentar perceber se acontece sempre ou não?") é bem-sucedida, levando Daniel a sugerir uma estratégia prometedora ("fazendo mais frações"), que a professora apoia, ao mesmo tempo que aproveita para a redizer em termos formalmente mais apropriados (verificando "outros exemplos").

Assim, neste segmento, a primeira intervenção da professora ajuda os alunos na interpretação do enunciado e é da esfera do guiar, a pergunta de inquirição do desafiar e a intervenção final do sugerir. A tónica da sua intervenção está no raciocinar, pois procura-se saber se uma dada afirmação é ou não matematicamente válida.

Um aluno, Guilherme, na sua resolução, identifica um contraexemplo para a afirmação em causa, identificando diversas frações que estão nas condições dadas (2/4, 3/5 e 3/16) mas para as quais não se verifica a desigualdade. Para comparar estas frações transforma-as em percentagem, a professora considera interessante pôr esta estratégia à consideração de toda a turma. Como vários alunos mostram dificuldade em perceber esta resolução, a professora leva-os a comparar a representação usada por Guilherme (percentagem) e a representação usada pelos restantes colegas (numeral decimal):

> **Professora:** Então o Guilherme encontrou lá em casa uma forma de transformar as frações em percentagens e... descobriu que $\frac{2}{4}$ é 50%, certo? E o que é que vocês descobriram sobre $\frac{2}{4}$, $\frac{2}{4}$ era quanto? Alguns de vocês descobriram... transformaram a fração em decimal...
>
> **Jaime:** Era 0,5.
>
> **Professora:** Ah... era 0,5. Então e 0,5 em percentagem é...
>
> **Guilherme:** É 50%.
>
> **Professora:** Ah, é 50%. Ah, então quer dizer que ele chegou à mesma conclusão do que vocês mas com uma representação diferente, e o que é que... vocês se calhar não pensaram no $\frac{3}{5}$ e no $\frac{3}{16}$, mas se pensarem vão perceber que é exatamente a mesma coisa. Portanto, o Guilherme gosta mais de trabalhar com as percentagens, sente-se melhor com as percentagens do que com os números decimais e

então fez este esquema, para comparar, não é? Ele fez estas, ele fez este esquema para comparar as várias frações. Então, descobriu que $\frac{2}{4}$ é 50%; $\frac{3}{5}$ é 60% e $\frac{3}{16}$ é 18,75%... Porque é que tu fizeste isto Guilherme?

A professora promove o estabelecimento da relação entre a representação usada por Guilherme e pelos restantes colegas, com a pergunta final e tenta guiar o aluno, apoiando-o na explicação da sua resolução.

Assim, neste segmento a professora pede a um aluno que apresente aos colegas a sua resolução, que se revestia de assinalável originalidade, mas confronta-se com o problema do aluno manifestar grande dificuldade em explicar o seu raciocínio. Ao longo do segmento a atuação da professora alterna entre o guiar e o sugerir. A tónica das suas intervenções está no interpretar, redizendo afirmações do aluno de modo mais compreensível e mais correto, de forma a proporcionar uma interpretação e compreensão por parte dos restantes alunos da turma.

Mais adiante, a professora convida dois alunos, Edgar e Juliana, a apresentarem à turma a sua resolução, onde mostram dois contraexemplos para a afirmação proposta na forma de fração e que considera bastante interessantes. Assim, começa por pedir a Edgar que explique oralmente a sua resolução, o que se revela insuficiente dada a dificuldade de comunicação evidenciada pelo aluno. De seguida pede-lhe que escreva os seus exemplos no quadro para que os restantes colegas possam perceber melhor (Figura 3).

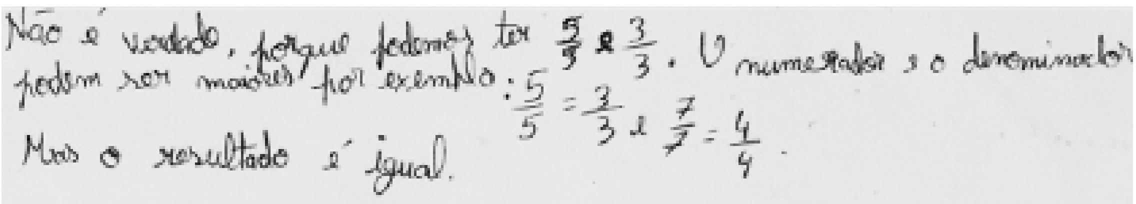

Não é verdade, porque podemos ter $\frac{5}{5}$ e $\frac{3}{3}$. O numerador e o denominador podem ser maiores por exemplo: $\frac{5}{5} = \frac{3}{3}$ e $\frac{7}{7} = \frac{4}{4}$.
Mas o resultado é igual.

Figura 3 – Resposta de Edgar e Juliana.

A professora pede então ao aluno que explique a sua resolução:

> **Professora:** ... Vá lá... Então? Edgar, o que é que isso significa?
>
> **Edgar:** São os dois (as duas frações) 1.

Edgar e Juliana encontraram dois casos de pares de frações que satisfazem a condição dada e para os quais a desigualdade não se verifica. Tal como Guilherme, estes alunos também recorrem a exemplos concretos para avaliar a afirmação. A professora desafia então Edgar a comparar a sua resolução com a do colega:

> **Professora:** Tu encontraste, fizeste mais ou menos a mesma coisa que o Guilherme, foi isso?
> **Edgar:** Foi mais ou menos isso. O numerador e o denominador $\left(\frac{5}{5}\right)$ são maiores do que aquele $\left(\frac{3}{3}\right)$.

Edgar indica que encontrou um par de frações nas condições do problema dando a entender que se trata de um contraexemplo para a afirmação. Parece considerar que a comparação pedida pela professora se limita a saber se a sua resposta coincide com a de Guilherme.

A professora desafia Edgar a comparar a sua resolução com a do colega mas a resposta do aluno não traz nenhum elemento novo para a discussão. A professora procura então apoiar o aluno na continuação da sua explicação:

> **Professora:** Explica lá Edgar, então como é que chegaste a essa conclusão? Que informação é que tens dos exemplos que foram dados? OK. Os exemplos que foram dados diziam... Sempre que o numerador e o denominador são maiores, então essa fração é maior que a outra e tu descobriste o quê? Que é verdade ou que não é verdade?
> **Edgar:** Não é verdade.

Como o aluno usa uma resposta muito breve e não a justifica, a professora desafia-o a apresentar uma justificação para a sua afirmação:

> **Professora:** Porquê?
> **Edgar:** Porque... O resultado desta é maior e o numerador e o denominador são maiores... Ai. Sim!
> **Professora:** O resultado não é maior, o resultado é igual. Apesar de ter...
> **Edgar:** Ah, entre estas duas...
> **Professora:** Entre essas duas, apesar de [serem] maiores os termos na primeira fração do que na segunda, o resultado é...
> **Edgar:** Igual.

Edgar mostra dificuldade em utilizar a linguagem matemática das frações e acaba por se confundir a si próprio. A professora procura apoiá-lo a interpretar a sua própria resolução verificando que apresentou frações nas condições do enunciado e que não verificam a condição de desigualdade (mas sim a igualdade).

Finalmente, perante a conclusão do aluno, a professora incentiva-o a refletir sobre o significado e o alcance da sua conclusão:

> **Professora:** Igual, pronto, então, é um exemplo que contraria aquilo que está escrito no, no enunciado. É suficiente para ti, para dizeres que então é mentira aquilo que lá está escrito?
> **Edgar:** Posso... Tenho outras aqui...
> **Professora:** Então faz... Tens outras?
> **Edgar:** Iguais...
> **Professora:** Ah, mas são iguais a essa?
> **Edgar:** É 7 e 7 é igual a...
> **Professora:** Pronto, então a ideia é a mesma... OK. Certo.

Ainda que não verbalize uma justificação matematicamente válida, Edgar manifesta compreender que basta um contraexemplo para refutar uma afirmação ao dizer que os outros exemplos atestam a mesma coisa ("são iguais") e, por isso, não é necessário escrevê-los também. Apesar de no enunciado surgir uma fração maior do que a outra, Juliana e Edgar apresentam um contraexemplo onde as frações são iguais, o que a professora considera surpreendente.

Neste segmento a professora desafia Edgar a apresentar uma justificação para a sua afirmação e, mais adiante, quando o incentiva a refletir sobre o significado da sua conclusão. Pelo meio, para levar o aluno a explicar oralmente o seu raciocínio, realiza diversas ações da esfera do guiar e do sugerir, procurando estabelecer as bases mínimas para a discussão e assim criar as condições para que os restantes alunos cheguem à conclusão pretendida. Embora incluindo aspetos de representar e interpretar, a tónica principal deste segmento está no raciocinar, nomeadamente quando mostra exemplos que invalidam a afirmação dada.

Episódio 2 – Frações equivalentes

Este episódio tem lugar durante a realização de uma tarefa (Figura 4) em que, dada uma certa grandeza, se pede o valor correspondente a sete repetições. A situação é contextualizada, os dados são apresentados em forma de fração e não são fornecidas indicações sobre a representação a usar na resposta. Embora os alunos não tenham aprendido ainda a multiplicar um número inteiro por uma fração, espera-se que possam resolver a tarefa através de adições sucessivas ou por outra estratégia.

Tarefa. Na turma do 6.º A da escola Vasto Horizonte, a professora colocou o seguinte problema: "Todos os dias de manhã, a Raquel bebe $\frac{1}{4}$ de litro de leite. Que quantidade de leite bebe ao fim de uma semana?" Resolve tu também o problema e justifica a tua resposta.

Figura 4 – Tarefa envolvendo frações equivalentes.

Duas alunas resolveram a tarefa encarando-a como uma adição sucessiva de sete frações iguais. No entanto, no decurso da sua resolução indicaram erradamente $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ como sendo $\frac{2}{8}$. A professora decidiu então lançar uma discussão sobre quanto seria $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$. Os alunos foram indicando diversas respostas, umas corretas, como $\frac{2}{4}$ e 0,50, outras incorretas como $\frac{1}{8}$ e $\frac{2}{8}$. Para distinguir as respostas corretas e incorretas, a professora recorre a uma representação pictórica (um retângulo dividido em partes iguais). A certa altura, Daniel, que já antes tinha apresentado uma resposta para a questão $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ como numeral decimal, (0,50), sugere agora uma nova resposta, usando uma fração, $\frac{8}{4}$, que logo emenda para $\frac{4}{8}$. A professora percebe que o aluno está a pensar em frações equivalentes a $\frac{2}{4}$ e pede-lhe uma justificação:

Daniel: Professora, eu tenho uma hipótese... Outra... $\frac{8}{4}$! Não sei como hei de dizer, é... $\frac{4}{8}$

Professora: É $\frac{4}{8}$... exatamente, $\frac{4}{8}$ seria, seria também uma resposta. Porquê? Porque $\frac{2}{4}$ é igual a $\frac{1}{2}$? (...)

Guilherme: Porque é 0,50.

Professora: $\frac{2}{4}$, se eu tiver $\frac{2}{4}$... $\frac{1}{4}$ e mais $\frac{1}{4}$, eu tenho $\frac{1}{2}$... ou não?

Guilherme: Sim!

Professora: Então... $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$, eu posso dizer $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ é igual a $\frac{2}{4}$ e é igual a $\frac{1}{2}$...?

Perante esta resposta de Daniel, a professora decide recordar as frações equivalentes sugerindo a relação existente entre $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{8}$ e $\frac{1}{2}$.

Impulsionado pela descoberta do colega e pela sugestão da professora, outro aluno, Edgar sugere uma outra fração equivalente, tendo por base uma generalização feita na aula anterior. Tem lugar o seguinte diálogo:

Edgar: Oh professora, eu sei outra...

Professora: Hum...

Edgar: 8 a dividir por 16 dá!

Professora: Também dá... (...) $\frac{8}{16}$ também dá... Sim senhor... Mais algum que também dá?

Neste ponto a professora recorda que dois alunos (Juliana e Edgar), na última aula, também tinham feito uma descoberta interessante relacionada com esta questão e incentiva-os a enunciá-la. Juliana corresponde, enunciando a generalização:

Juliana: Um número a dividir pelo seu dobro vai dar sempre a metade.

Professora: Um número a dividir pelo seu dobro vai dar sempre...

Guilherme: Vai dar sempre $\frac{1}{2}$.

Professora: Vai dar sempre a metade...

A professora desafia então os alunos a darem mais frações equivalentes a 1/2, ao que estes correspondem com entusiasmo:

Professora: Sim senhora... Não, mas isto assim está bem encaminhado... $\frac{2}{4}$ é igual a $\frac{1}{2}$ que é igual a $\frac{8}{16}$... E já agora quero mais uma!

Rui: Então e agora 16 a dividir por 32...

Professora: Dezasseis, trinta e dois avos. Eu já agora quero mais outra...

Alunos: 32 por 64.

Professora: Ah... sim senhor, trinta e dois, sessenta e quatro avos.

Mais outra...?

Alunos: 64 e 128...

Professora: 64 e...?

Alunos: 128.

Professora: 128... avos!

Os restantes alunos da turma juntam-se à discussão sugerindo também novas frações equivalentes a $\frac{1}{2}$. Por sua vez, a professora apoia este entusiamo dos alunos e vai redizendo as suas sugestões usando a linguagem correta das frações, ao mesmo tempo que os desafia a encontrarem outras frações que satisfaçam a condição em causa.

Neste episódio muitos alunos mostram não se recordar dos procedimentos para somar duas frações com o mesmo denominador. A professora desafia-os sistematicamente a apresentarem diversas respostas para as questões que coloca, fazendo com que surjam situações de desacordo, que procura usar para levar os alunos a argumentarem e justificarem as suas sugestões. Tendo compreendido que $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}$ e levado pelo incentivo a apresentar outras respostas, um aluno sugere $\frac{4}{8}$ como solução possível e logo de seguida outro indica $\frac{8}{16}$. Os alunos, motivados pelo sucessivo questionamento e desafio da professora, continuam a sugerir novas respostas, usando desta vez frações equivalentes, que relacionam com uma generalização formulada por dois alunos numa aula anterior. As ações da professora mais marcantes são as de desafiar, embora se reconheça ações de convidar, apoiar/guiar e até informar/sugerir. Num primeiro momento, a professora procura levar os alunos a compreender a regra para adicionar duas frações unitárias, usando para o efeito uma representação pictórica, após o que conduz um questionamento orientado para o raciocínio, com o estabelecimento e uso de uma generalização para produzir frações equivalentes.

Conclusão

Nestes dois episódios reconhece-se uma diversidade de ações por parte da professora em momentos de discussão coletiva em que passa em revista o trabalho realizado pelos alunos sobre o qual se documentou na fase em que estes resolviam a tarefa a pares (tal como, de resto sugerem Stein et al., 2008). No primeiro episódio a professora procura que os alunos que resolveram corretamente uma questão de raciocínio a expliquem aos colegas, o que se revela uma tarefa muito mais complicada que o previsto, dada a dificuldade dos alunos em explicar oralmente o seu raciocínio. Para isso a professora usa sobretudo ações de guiar e sugerir, embora sem revelar a resolução completa. Procura, assim, tornar presentes à generalidade dos alunos da turma os elementos necessários para que possam concluir da falsidade da afirmação, apoiando-se em contraexemplos. No segundo episódio, a professora desafia os alunos a apresentarem mais do que uma resposta para as diversas questões, procurando fazer emergir situações de desacordo. Este incentivo a encontrar mais de uma resposta leva os alunos a produzirem uma sequência de frações equivalentes, que relacionam com uma generalização já formulada por dois alunos numa aula anterior. As ações da professora que se salientam são as de desafiar, sustentadas por ações dos outros tipos. Estes episódios mostram também a interligação entre aspetos de representar e interpretar, bem como a possibilidade de fazer salientar aspetos relacionados com o raciocinar, nomeadamente promovendo a formulação de generalizações e de justificações para as afirmações feitas e as regras usadas.

Os episódios da discussão apresentados incluem muitos momentos em que a professora é chamada a tomar decisões relativamente a situações imprevistas, que se constituem como problemas que ela tem de resolver no decurso da ação. Alguns destes problemas têm a ver com dificuldades dos alunos em compreender o que podem fazer perante a tarefa proposta, ou, de modo mais circunscrito, com passagens específicas de uma ou outra resolução. Outros problemas decorrem de respostas inesperadas dos alunos, uma vezes corretas e outras incorretas. Existem ainda problemas que decorrem da dificuldade dos alunos em explicar o seu raciocínio. Finalmente, outros problemas decorrem da necessidade de gerir, do modo mais produtivo, a variedade das respostas dos alunos. Estes momentos proporcionam diversas oportunidades para interpretação de enunciados e a transformação de representações (Bishop & Goffree, 1986), para aperfeiçoar a linguagem dos alunos redizendo as suas afirmações (Franke, Kazemi & Battey, 2007) para o estabelecimento de desacordos (tal como sugere Wood, 1999), e formulação de generalizações e justificações, aspetos essenciais do raciocínio matemático (Lannin, Ellis & Elliot, 2011). São momentos produtivos de trabalho que decorrem da abordagem exploratória seguida nestas aulas, em que foram propostas tarefas aos alunos que estes não poderiam resolver de uma forma imediata, mas sim recorrendo aos seus conhecimentos anteriores, e onde a comunicação na sala de aula é marcada pelo incentivo à participação dos alunos, num registo essencialmente dialógico.

Referências

Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: Reidel.

Bogdan, R., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: Reidel.

Cengiz, N., Kline, K., & Grant, T. J. (2011). Extending students' mathematical thinking during whole-group discussions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14,* 355–374.

Fraivillig, J. L., Murphy, L. A., & Fuson, K. C. (1999). Advancing children's mathematical thinking in everyday mathematics classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 148-170.

Franke, M. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Understanding teaching and classroom practice in mathematics. In F. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 225-256). Greenwich, CT: Information Age.

Jorgensen, D. L. (1989). *Participant observation: A methodology for human studies*. Newbury Park, CA: Sage.

Lannin, J., Ellis, A.B., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning: Pre-K-Grade 8*. Reston, VA: NCTM.

McCrone, S. S. (2005). The development of mathematical discussions: An investigation in a fifth-grade classroom. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(2), 111–133.

Potari, D., & Jaworski, B. (2002). Tackling complexity in mathematics teaching development: Using the teaching triad as a tool for reflection and analysis. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*, 351-380.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante, 22*(2), 55-81.

Sherin, M. G. (2002). A balancing act: Developing a discourse community in the mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5,* 205-233.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10, 313-340.

Wood, T. (1999). Creating a context for argument in mathematics class. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 171-191.

COMUNICAÇÃO

8. Ações do professor na construção coletiva de um argumento genérico numa turma do 9.º ano

por Cláudia Domingues, Maria Helena Martinho

8. Ações do professor na construção coletiva de um argumento genérico numa turma do 9.º ano

Cláudia Domingues

Escola Secundária Carlos Amarante, Braga

cmadom@gmail.com

Maria Helena Martinho

Centro de Investigação em Educação, Universidade do Minho

mhm@ie.uminho.pt

• **Resumo:** O professor enfrenta um exigente desafio quando procura desenvolver o raciocínio matemático dos alunos em aulas exploratórias. A partir das resoluções dos alunos, após explorarem a tarefa em grupo, o professor tem a oportunidade de desenvolver o pensamento matemático dos alunos na fase de discussão coletiva. Neste capítulo são analisadas as ações de uma professora no desenvolvimento de uma aula exploratória cujo objetivo era o de construir coletivamente um argumento genérico. Os dados, utilizados nesta análise, foram recolhidos numa aula de 90 minutos, no ano letivo de 2009/2010, e fazem parte de uma investigação sobre o desenvolvimento do raciocínio matemático de alunos de uma turma de nono ano. As ações da professora de *incitar* a que os alunos exponham as suas ideias, de os *apoiar* no desenvolvimento dessas mesmas ideias, e de *ampliar* o seu pensamento matemático revelaram-se importantes na construção coletiva de um argumento genérico. Conclui-se que as ações da professora de *ampliar* surgiram, apenas, quando estabeleceu conexões entre os diferentes raciocínios matemáticos dos alunos na fase de discussão coletiva e que as ações de *apoiar* e de *incitar* foram fundamentais, durante toda a aula, para ampliar o pensamento dos alunos.

• **Palavras-Chave:** Raciocínio matemático, Argumento genérico, Ações do professor.

Introdução

A importância atribuída ao desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos prende-se com a preocupação de que compreendam a Matemática e desenvolvam a autonomia na resolução de situações-problema. Cabe ao professor propor tarefas desafiantes aos alunos e orientar os seus raciocínios de modo a fazê-los progredir para ideias matemáticas mais avançadas do que aquelas que têm à partida. Com o desafio, a orientação e o apoio do professor, os alunos podem ter oportunidade de formular conjeturas e de as discutir apresentando justificações matemáticas adequadas ao seu nível etário (Mason, Burton & Stacey, 1985). No entanto, as investigações realizadas sugerem que orquestrar a discussão coletiva com base nas resoluções dos alunos e de modo a que toda a turma progrida na sua aprendizagem é uma tarefa difícil para o professor (Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008).

Este capítulo, a partir dos dados recolhidos da aplicação de uma tarefa exploratória designada "A área de um retângulo especial" com uma turma do 9.º ano, identifica as ações de uma professora/investigadora, primeira autora deste capítulo, que contribuíram para construir um argumento genérico com toda a turma. Estes dados são parte integrante de uma experiência de ensino realizada pela professora/investigadora com o objetivo de desenvolver o raciocínio matemático dos seus alunos e que teve a duração de um ano letivo. Apresenta-se de seguida o quadro teórico que suporta este estudo, dividido em duas subsecções: "O raciocínio e a produção de argumentos genéricos na aula de matemática" e "As ações do professor que promovem o desenvolvimento do raciocínio matemático". Segue-se metodologia deste estudo, a apresentação dos resultados e as respetivas conclusões.

O raciocínio e a produção de argumentos genéricos na aula de matemática

A preocupação em desenvolver o raciocínio matemático dos alunos prende-se com a importância dada à autonomia matemática e ao desenvolvimento do espírito crítico, dotando-os de ferramentas essenciais para lidar com situações-problema. As propostas feitas pelo professor para a realização de tarefas exploratórias e investigativas desafiam os alunos a pensar matematicamente dando-lhes oportunidade de descobrir autonomamente a resposta ao desafio. Para chegar a essa resposta, os alunos terão de identificar a estrutura matemática envolvida na situação e de produzir uma conclusão geral matematicamente justificada, isto é, um argumento genérico (Balacheff, 1987; Mason et al., 1985). Esse argumento, para ser matematicamente válido, usa raciocínio dedutivo e pode ser apresentado nas seguintes formas: linguagem pictórica, linguagem verbal e linguagem algébrica (Stylianides & Stylianides, 2008). Lannin, Ellis e Elliot (2011) apontam, como componentes importantes de argumentos matemáticos válidos, duas caraterísticas: "(1) linguagem que estabeleça relações gerais e especifique um domínio; e (2) raciocínio que suporte a relação geral e mostre que se mantém para todas as instâncias do domínio" (p. 36).

Através da aplicação de tarefas desafiantes em que os alunos são levados a conjeturar, o professor tem a oportunidade de promover a aprendizagem de métodos de justificação matemática adequados à faixa etária dos alunos. No entanto, para orientar os alunos durante esse processo, o professor necessita de compreender os seus raciocínios para os fazer progredir ao nível da justificação. Como o tipo de raciocínio aplicado na fase de exploração condiciona o processo de justificação e consequentemente a produção do argumento genérico, descrevem-se de seguida os processos de exploração de acordo com o tipo de raciocínio utilizado. Contudo, só aqui são considerados os raciocínios indutivos e dedutivos por serem aqueles que, segundo Reid e Knipping (2010), ocorrem com maior frequência na aula de Matemática.

Quando o raciocínio é *indutivo* os alunos envolvem-se num processo complexo e não linear de formulação de conjeturas e tentativas de generalização das regularidades encontradas nos dados. As afirmações são conjeturas enquanto não estiverem matematicamente justificadas, sendo por isso necessário orientar os alunos para a compreensão de que as suas afirmações têm de ser testadas e que é necessário procurar argumentos que as justifiquem (Mason, 1998). Quando a justificação sobressai durante o processo de formulação de conjeturas a produção de um argumento genérico fica facilitada por ser mais fácil interligar os argumentos produzidos de forma coerente numa cadeia lógica (Mariotti, 2006). Quando tal não acontece, é necessário formular conjeturas sobre o "porquê" sendo que essa formulação, como referem Mason et al. (1985) segue, geralmente, o processo normal de conjeturar. Para estes autores, durante este processo, assumem particular importância a exteriorização das razões pelas quais se está convencido, a revisão de todo o processo e o questionamento das afirmações. Estes autores reforçam, ainda, relativamente ao processo de revisão, que este obriga a tomar consciência de todo o processo de exploração e que, caso seja acompanhado de reflexão, torna possível generalizar os métodos usados chegando à compreensão da questão. Assim, o ato de justificar está relacionado com o aumento progressivo de confiança na conjetura e com a identificação de uma estrutura ou relação subjacente que liga o que se sabe ao que se quer saber através do argumento (De Villiers, 1999; Mason et al., 1985; Pólya, 1968). Na senda de produzir um argumento genérico partindo de generalizações proferidas com base em raciocínio indutivo e uma vez que casos particulares não justificam afirmações gerais (a não ser que sejam testados todos os casos, o que só é possível num conjunto finito), o argumento deve ter por base um exemplo genérico, isto é, um exemplo que seja representativo de todos os casos (Stylianides & Ball, 2008; Stylianides & Stylianides, 2009). No entanto, os alunos podem revelar dificuldades nesta passagem do particular para o geral, pois esta passagem requer a capacidade de distanciamento do objeto matemático (Balacheff, 1987).

Quando na exploração da tarefa o raciocínio é *dedutivo*, raciocínio que vai do geral para o geral ou do geral para o particular, é natural que daí resulte diretamente uma conclusão geral válida produzida pelo processo de transformação de conhecimento implícito em explícito, através da sua exposição (De Villiers, 1999; Reid & Knipping, 2010). O processo dedutivo exige percorrer diferentes etapas: seleção da informação relevante, identificação das propriedades matemáticas conhecidas e que podem ser aplicadas na situação, identificação das propriedades que têm de ser deduzidas, e organização das transformações matemáticas necessárias para inferir um segundo conjunto de propriedades a partir do primeiro numa sequência completa e coerente (Healy & Hoyles, 1998). Segundo De Villiers (2012), durante o processo dedutivo os alunos podem encontrar justificações matemáticas e descobrir outros casos onde a conclusão é válida, generalizando os resultados. Este autor designa por *generalização dedutiva* a generalização da essência de um argumento dedutivo e a sua aplicação a casos mais gerais ou análogos.

Avaliar a validade dos argumentos proferidos pelos alunos, como alertam Lannin et al. (2011), não é uma tarefa fácil. Os alunos, por vezes, identificam a conjetura como verdadeira, mas só a justificam para um subconjunto de valores identificados no domínio. Os autores referem que, nestes casos, é necessário ampliar a justificação, para que englobe todos os aspetos ou para que sejam tomados em linha de conta todos os elementos do domínio. Outro aspeto importante é a identificação do uso de linguagem geral por poder revelar que a justificação se aplica a mais do que alguns casos particulares. Também se revela importante o cuidado a ter na avaliação dos exemplos utilizados, dado que, por vezes, são usados para mostrar a existência de uma relação geral – são exemplos genéricos.

Os níveis de justificação de Balacheff (1987) podem auxiliar o professor a compreender a natureza das justificações dos alunos, permitindo-lhe orientar a ação para promover níveis de justificação de desenvolvimento cognitivo mais elevado. O autor clarifica que o nível de justificação em que se encontra um aluno não pode ser identificado sem conhecer o processo de produção desta justificação e alerta para o facto das caraterísticas da linguagem não serem suficientes para fazer essa identificação. Balacheff (1987) sugere a existência de quatro níveis hierárquicos de desenvolvimento cognitivo da justificação, de acordo com a forma como os alunos se convencem da validade de uma afirmação ou solução que produzem: empirismo naïf, experiência crucial, exemplo genérico e experiência conceptual. O nível de *empirismo naïf* consiste em validar a veracidade de uma afirmação através da observação de um pequeno número de casos. O nível de *experiência crucial* é um procedimento de validação na qual o indivíduo coloca explicitamente o problema da generalização para todos os casos e conclui através de um caso que considera especial. Assim, a experiência crucial consiste em provocar um acontecimento que, se resultar para aquele caso, resulta para todos. Este procedimento é fundamentalmente empírico e distingue-se do empirismo *naïf* por nele se colocar o problema da generalização e por se ter definido outro modo de decidir. O nível de *exemplo genérico* torna explícitas as razões da sua validade através da realização de operações ou transformações sobre um objeto tomado como representante característico de uma classe de indivíduos. O nível de *experiência conceptual* invoca a ação por interiorização da mesma e distancia-se de qualquer representante particular. Requer que a justificação, a base de validação da afirmação, esteja incluída na análise das propriedades dos objetos em questão. Essas propriedades não são evidenciadas por casos particulares, mas de forma genérica.

Existem conexões, segundo Balacheff (1987), entre o nível de *empirismo naïf* e o nível de *experiência crucial* assim como entre o nível de *exemplo genérico* e a *experiência conceptual*. O autor concluiu que a *experiência crucial* é muitas vezes alcançada pela necessidade de assegurar a generalidade da conjetura validada por *empirismo naïf* e, também, que o nível de *experiência crucial* pode manter-se mesmo após a passagem para a *experiência conceptual*, sobretudo no caso de a justificação ter por base o exemplo genérico. Realça ainda que a passagem do *exemplo genérico* para a *experiência conceptual* exige uma construção cognitiva em que é necessário decidir qual o caráter genérico do exemplo utilizado.

Ações do professor que promovem o desenvolvimento do raciocínio matemático

Os alunos, ao interagirem uns com os outros na exploração de uma tarefa matemática, encontram-se num meio envolvente potencialmente mais confortável para falar e pensar em voz alta. Nesse processo de interação desenvolvem uma maior confiança em si próprios e estão mais aptos a acompanhar e a participar ativamente nas discussões que ocorrem em grande grupo. A aceitação de normas que propiciem a elaboração e refutação de conjeturas, designada por Mason (2010) como *atmosfera de conjetura*, proporciona o desenvolvimento do raciocínio nos alunos. Numa aula com essas caraterísticas, alunos e professor, sem necessitar de rotular de certo ou errado as diferentes afirmações formuladas, encaram-nas como pontos de partida para a discussão, questionando, duvidando e reformulando. Está aqui pressuposta uma visão de trabalho exploratório na aula de matemática, em que professor e alunos representam papéis ativos e mutuamente desafiantes (Canavarro, Oliveira & Menezes, 2012). A procura de uma construção coletiva do conhecimento é assumida por todos os intervenientes.

Stein et al. (2008) salientam a importância do papel do professor na orientação da discussão coletiva que se inicia a partir do trabalho desenvolvido pelos alunos e se desenvolve limando as ideias que produziram e fazendo-as avançar para um pensamento matemático mais poderoso, eficiente e rigoroso. No desempenho desse papel, os autores referem alguns dos desafios que se colocam ao professor: apoiar os alunos no desenvolvimento do discurso matemático, incentivar os alunos a expor publicamente os seus raciocínios e a construir e a avaliar as suas ideias matemáticas e as dos outros. O modelo de preparação e realização de discussões matemáticas apresentado por Stein et al. (2008) consiste em cinco práticas fundamentais: *antecipar* as respostas dos alunos às tarefas matemáticas de exigência cognitiva elevada; *monitorizar* o pensamento matemático dos alunos durante a fase de exploração das tarefas; *selecionar* os alunos que podem apresentar as suas respostas matemáticas durante as fases discussão e de síntese; sequenciar as respostas dos alunos a apresentar; e conectar entre as respostas dos alunos sendo para isso fundamental encadear as ideias matemáticas ao longo das apresentações de modo a desenvolvê-las.

Durante a fase de discussão, os professores necessitam de, simultaneamente, incitar os alunos a que explicitem os seus pensamentos e de assegurar o desenvolvimento das ideias matemáticas. Cengiz, Kline, e Grant (2011) identificaram três tipos de ações do professor presentes nos episódios de discussão coletiva em que há ampliação do pensamento matemático: apoiar (*supporting*), incitar (*eliciting*) e ampliar (*extending*). Esses episódios foram designados pelos autores por episódios de "ampliação", são caracterizados por envolverem reflexão ou raciocínio ou por ultrapassarem os métodos de resolução iniciais. As ações de *apoiar* visam apoiar os alunos a relembrar o que já sabiam ou a considerar nova informação. As ações de *incitar* permitem ao professor aceder ao pensamento matemático dos alunos e torná-lo público. As ações de *ampliar* encorajam os alunos a ir além dos métodos usados na atividade matemática inicial e foram identificadas em situações de convidar os alunos a: avaliar uma afirmação ou observação, sustentar uma afirmação, comparar métodos diferentes, usar os mesmos métodos para novos problemas ou contra argumentar uma afirmação.

Metodologia

Este capítulo baseia-se em dados empíricos recolhidos na investigação de um estudo de caso centrado no desenvolvimento do raciocínio matemático de alunos de uma turma de 9.º ano, durante o ano letivo de 2009/2010 (Domingues, 2011). A turma era constituída por dezanove alunos, quinze raparigas e quatro rapazes, com idade média de 14 anos. A professora/investigadora encontrava-se a lecionar pela primeira vez na escola onde decorreu o estudo, embora já contasse com treze anos de experiência no 3.º ciclo.

Os dados analisados neste capítulo dizem respeito a uma das tarefas aplicada na investigação acima referida, designada por "A área de um retângulo especial" e trabalhada numa aula de 90 minutos com duas fases: a fase exploratória em que os alunos trabalharam em pequenos grupos e a discussão coletiva. A atividade matemática dos alunos foi registada em áudio através de um gravador colocado em cada grupo. Paralelamente, foi colocada uma câmara de vídeo fixa no fundo da sala permitindo um registo mais completo da fase de discussão da tarefa. Foram ainda recolhidos os registos efetuados pelos alunos ao longo da realização da tarefa. Posteriormente os alunos entregaram relatórios individuais sobre a atividade realizada em grupo.

As autoras deste capítulo analisaram esses dados, procurando identificar, em primeiro lugar, os episódios da aula em que a ação da professora foi importante para que os alunos avançassem na exploração da tarefa e procurando, em segundo lugar, identificar nesses episódios as ações da professora de apoiar, de incitar e de ampliar que contribuíram para a construção coletiva de um argumento genérico (Cengiz et al., 2011).

A experiência de ensino e a aula exploratória

Os alunos tinham iniciado, naquele ano, a prática de explorações matemáticas na sala de aula. Ao longo de todo o ano letivo em que decorreu a experiência, a professora procurou promover normas de sala de aula coerentes com o objetivo de desenvolver o raciocínio dos alunos. Para isso, a professora discutiu e negociou com os alunos os aspetos essenciais a melhorar para garantir a partilha e a colaboração entre todos os elementos quer durante o trabalho de grupo quer durante a discussão coletiva. Um desses aspetos foi a necessidade de discutir previamente os objetivos da tarefa, em pequeno grupo, de modo a clarificar o respetivo entendimento antes de iniciarem a exploração. Um outro aspeto muito importante foi a responsabilização de cada aluno em colaborar e em pedir esclarecimentos sempre que não esteja de acordo ou não compreenda, quer no trabalho em pequeno grupo quer na fase de discussão.

A tarefa proposta (figura 1), "A área de um retângulo especial", traduz geometricamente o "caso notável" da diferença de quadrados e inclui a representação geométrica com as medidas representadas por letras. A tarefa tinha como objetivo de conteúdo a compreensão do *caso notável* da diferença de quadrados. Relativamente ao raciocínio tinha como objetivo promover a justificação chegando a um argumento genérico. As características da tarefa foram pensadas para facilitar um processo de conjetura acompanhado de justificação.

A inclusão do esquema pretendeu dar um suporte visual aos alunos, uma vez que estes tinham mostrado, em tarefas anteriores, relutância em fazer representações dos seus esquemas mentais prejudicando desse modo o processo de conjetura. Através do esquema podiam atribuir significado geométrico às suas conjeturas, testando-as mais facilmente e encontrando razões que as refutassem ou validassem. A representação das medidas por letras pretendia auxiliar os alunos na compreensão do enunciado e verificar se os alunos trabalhavam a esse nível de abstração ou se sentiam necessidade de as concretizar.

A área de um retângulo especial

Um quadrado transforma-se num rectângulo não quadrado quando o seu comprimento cresce e a sua largura decresce o mesmo número de unidades de medida.

Investiga qual é a relação entre a área desse novo rectângulo e a área do quadrado inicial.

Prova essa relação para qualquer quadrado que se transforme em rectângulo nas condições indicadas.

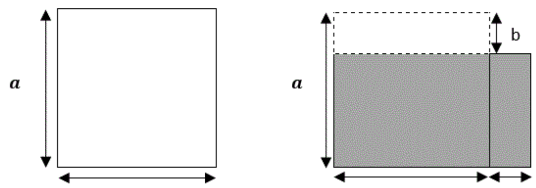


Figura 1 – Enunciado da tarefa.

As duas palavras a negrito no enunciado da tarefa dizem respeito às ações relativas a investigar e a provar. *Investigar* tinha para os alunos, devido às explorações recentes, uma conotação de explorar para descobrir, mas *provar* era uma ação ainda desconhecida. A introdução desta palavra foi escolhida para reforçar a necessidade de justificar matematicamente, tendo em conta que a ação de justificar era encarada pelos alunos de modo superficial. O objetivo era promover a prática da justificação, levando os alunos a estabelecerem a ligação entre as suas conjeturas e a estrutura matemática envolvida até produzirem um argumento genérico.

A professora programou a aula para que, na fase exploratória, os alunos trabalhassem em grupos de três ou quatro elementos. Na constituição dos grupos juntou alunos com nível aproximado de conhecimento e teve em consideração experiências anteriores. A professora pretendia que a fase de introdução fosse breve, pois os alunos já tinham sido confrontados com outras tarefas, e queria avaliar se tinham progredido relativamente à autonomia na exploração em grupo. Assim, após a entrega do enunciado, circulou entre os alunos para verificar se todos os grupos conseguiam iniciar o trabalho.

A fase de realização da tarefa estava prevista para cerca de meia hora, estando a professora atenta ao trabalho de cada grupo. A decisão sobre quando terminar o trabalho de grupo e iniciar a discussão não estava rigidamente definida, tendo ficado na planificação dependente dos acontecimentos da aula. No entanto, os indicadores de referência para a professora considerar que era o momento de passar à fase seguinte estavam previamente pensados: a existência de grupos com o trabalho terminado e a existência de outros grupos que não conseguiam avançar mais de forma autónoma.

A fase de trabalho seguinte, a discussão coletiva, consistia na comunicação à turma das descobertas realizadas com explicitação dos respetivos raciocínios dos grupos de acordo com os critérios da professora. Esta sabia ser fundamental valorizar a contribuição de todos numa partilha frutífera, pelo que estabeleceu uma ordem de possível solicitação da exposição de diferentes grupos de acordo com o grau crescente de nível de justificação dos resultados obtidos. De seguida apresentam-se os resultados relativos à análise da ação da professora na aula exploratória.

As ações da professora promotoras da construção de um argumento genérico

Nesta secção os resultados foram organizados de acordo com as cinco práticas de Stein et al. (2008): antecipar, monitorizar, selecionar, sequenciar e conectar. As práticas de antecipar e de selecionar não estão intrinsecamente ligadas a contextos de interação, razão pela qual apenas surgem episódios de aula na descrição das restantes práticas. Durante a apresentação desses episódios identificaram-se as ações da professora de *apoiar*, *incitar* e *ampliar* (Cengiz et al., 2011). Optou-se por apresentar as práticas de sequenciar e de conectar em conjunto para facilitar a compreensão do leitor.

Antecipar

Como o objetivo desta aula era construir um argumento genérico com toda a turma, a principal preocupação da professora era compreender os raciocínios dos diferentes grupos para depois, a partir deles, orientar a discussão coletiva de modo a que todos os grupos participassem na construção do argumento genérico. A professora tinha ainda pouca experiência relativamente à orientação de uma aula exploratória e encontrava-se, ela própria, num processo de descoberta sobre o seu próprio papel no desenvolvimento do raciocínio dos seus alunos. A bibliografia que consultou referia a importância de questionar os alunos, no sentido de não condicionar as respostas fomentando a justificação no seio dos grupos. Por exemplo, Mason et al. (1985) descrevem alguns obstáculos que podem surgir durante o processo de raciocinar e dão sugestões para os ultrapassar. A professora sabia, então, ser importante: ouvir os alunos; questioná-los sem indicar o caminho a seguir; ajudá-los a prosseguir para que não desistissem; orientá-los para testarem as suas conjeturas e para as justificarem. Se conseguisse agir dessa forma teria, no final da fase exploratória, elementos suficientes para tomar decisões para orientar a discussão coletiva. Podia, então, aproveitar as contribuições dos grupos para, progressivamente, chegar a uma generalização aceite por toda a turma e em que as dificuldades sentidas relativamente quer ao conteúdo quer aos processos de raciocínio fossem ultrapassadas.

Relativamente à introdução da tarefa a professora esperava que a dificuldade, anteriormente sentida, de iniciar uma exploração estivesse já ultrapassada e que os alunos fossem capazes de discutir o enunciado e colocar hipóteses para se irem apercebendo das condicionantes da situação. Quanto à exploração da tarefa, não previa que os seus alunos calculassem as áreas usando as medidas genéricas porque em aulas anteriores revelaram dificuldades algébricas e porque o processo de exploração realizado numa tarefa anterior tinha sido indutivo podendo-lhes sugerir processo semelhante. Parecia-lhe mais provável que os alunos atribuíssem valores a a e a b estabelecendo uma comparação entre as áreas concretas do quadrado inicial e do retângulo. Dessa comparação estabeleceriam conjeturas que podiam ser testadas por cálculos e com o apoio da representação geométrica. Desse processo de conjetura poderia surgir uma generalização da relação entre as duas áreas justificada com base na representação geométrica. Este percurso teria na base um raciocínio indutivo e seria, então, necessário estender o domínio da generalização passando dos casos concretos para o caso geral chegando a um argumento genérico apresentado em linguagem natural ou algébrica. No entanto, a professora não previa que os alunos chegassem a um argumento genérico na fase de exploração devido à sua falta de experiência matemática.

Monitorizar

Ao longo da fase de exploração, a professora tentou compreender o raciocínio dos alunos recolhendo elementos para tomar decisões sobre o modo como ia orquestrar posteriormente a discussão coletiva. Observou o trabalho dos grupos e interagiu com os alunos ajudando-os a avançar na exploração e incentivando-os a justificar as suas conjeturas. Sempre que um grupo bloqueava, isto é, não conseguia avançar, a professora ajudava-o, reduzindo assim o risco de desistirem e, ao mesmo tempo, aumentando a probabilidade de haver ideias para partilhar posteriormente com toda a turma.

São apresentados, primeiro, dois exemplos que ilustram situações de bloqueio que ocorreram no seio de dois grupos diferentes: um em que os alunos do grupo não confrontaram duas conjeturas contraditórias, o que implicava fazer uma revisão cuidadosa de cada uma delas; e outro em que os alunos tiveram dificuldades em decidir como proceder para provar matematicamente, optando por um tipo de raciocínio. Depois, é apresentada uma situação ilustrativa de convicção sem compreensão em que a professora incentiva a justificação da conjetura por saber que se as conjeturas a testar não estivessem compreendidas ao ponto de os alunos serem capazes de as sustentar, a discussão posterior ficaria empobrecida dificultando a possibilidade de chegar a um argumento genérico.

Situação de bloqueio 1. Num dos grupos, os alunos formularam a conjetura de as áreas das duas figuras (quadrado inicial e retângulo final) serem iguais baseando-se na sua perceção visual.

> Como diz aqui que o que cresce e o que decresce aqui é o mesmo número de unidades, podemos dizer que este bocado que está aqui passa para o lado direito, por isso dá a mesma área. (Manuel)

Os alunos testaram a conjetura calculando as áreas das duas figuras, atribuindo o valor 2 a *a* e 1 a *b* e o resultado deu diferente. Chamaram a professora e logo que esta chegou ao grupo, Manuel começou a explicar como chegaram à conjetura de as áreas serem iguais. Com base na informação fornecida a professora incentivou-os a testarem a conjetura. Nesse momento a professora apoia o grupo fornecendo a informação de que precisam de testar a conjetura. Paulo responde que já o haviam feito tendo obtido uma conclusão contraditória com a conjetura inicial e Miguel refere como o fizeram atribuindo valores a *a* e a *b*. Pelo facto de o grupo já ter testado a conjetura a ação de apoio da professora teve o efeito de os levar a expor o seu trabalho permitindo à professora compreender o processo de raciocínio do grupo:

> **Manuel:** Stora, nós estávamos a pensar assim… Achamos que este bocadinho que tirou aqui e meteu aqui é a mesma área.
> **Miguel:** Porque tirou aqui a unidade e meteu-a aqui e é a mesma unidade.
> **Prof:** E como é que vocês podem ver se é igual ou não?
> **Paulo:** Já estivemos a fazer mas não dá.

Miguel: Estivemos a dar medidas.

Prof: Então, experimentaram e não dá?

Paulo: Daqui [até] aqui é 3. Aqui pusemos 1. Vai ser 3-1. Depois (3-1)x(3+1). 2x4=8 e aqui dá 9.

Prof: Então, não é igual? Pensem melhor.

...

Prof: Vocês estão a achar que isto [branco] é igualzinho a isto [preto]? (Apontando para os retângulos correspondentes aos retângulos branco e preto da figura 2).

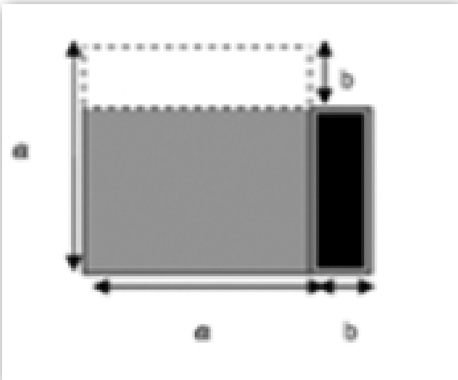


Figura 2 – Retângulo decomposto.

Na segunda fala do diálogo, a professora incita os alunos a fazerem uma revisão ao teste da conjetura no intuito de que prestem maior atenção às razões que possam justificar os valores diferentes das áreas. A ação da professora é simultaneamente de incitar e apoiar, uma vez que os orienta no processo de conjeturar nomeadamente na importância de rever e refletir sobre o que estão a fazer. Na terceira fala do diálogo, a professora repetiu o que os alunos disseram e pediu que refletissem no assunto. A ação da professora é de apoio pois está a orientá-los para que revejam a conjetura.

De seguida, há um tempo breve de espera que serve para os alunos pensarem e para a professora decidir como agir. Como os alunos já estavam naquele empasse há algum tempo decidiu dar uma pista (quarta fala) que lhes permitisse optar por uma das conjeturas. Esta ação da professora é uma ação de *apoiar*, uma vez que os incentivou a observar as dimensões dos retângulos. Ao apontar para os dois retângulos, levou os alunos a observar melhor e a rever os raciocínios. Estes concluíram, então, que os retângulos tinham dimensões diferentes:

Miguel: Não pode ser.

Manuel: Não, mas olha, mas esta largura daqui [até] aqui vai ser a mesma que daqui [até] aqui.

Paulo: Mas o comprimento aqui é que não é o mesmo.

Manuel: Pois não, o comprimento, mas a largura vai ser a mesma.

Paulo: Aqui é o comprimento e aqui é a altura.

Manuel: Pois não. Porque nós vamos tirar este daqui e era o mesmo que este daqui até aqui ao fundo, por isso a este vamos tirar 1. Acho que já estou a perceber.

Paulo: Não. Vamos ter que tirar este lado. Temos que tirar este quadrado.

Manuel: Não. Vamos tirar 1 unidade... ou o quadrado.

Paulo: É 1 porque 1x1 é 1.

...

Manuel: Daqui [até] aqui é 1. 3-1vai dar 2 e 3+1 vai dar 4 e 4x2 é 8, mas nós não vamos querer esta parte aqui, esta área. Vamos tirar 1. (figura 3)

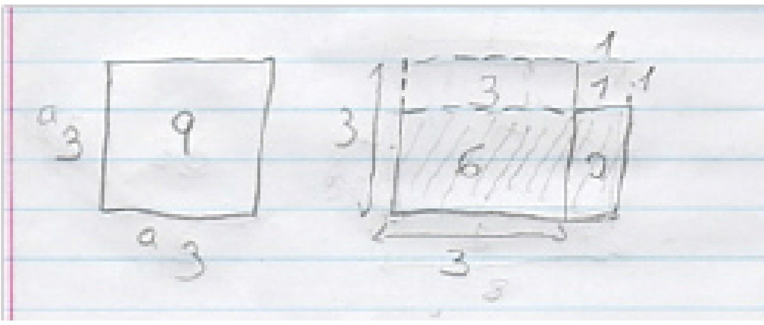


Figura 3 – Concretização do grupo.

Esta discussão sobre as medidas dos dois retângulos permitiu aos alunos iniciar o processo de justificação da conjetura abrindo caminho à generalização.

Situação de bloqueio 2. Uma outra situação de bloqueio aconteceu num outro grupo quando os alunos se mostraram confusos por desconhecer o significado da palavra “prova” escrita no enunciado. Rita leu o enunciado e ao ver a expressão “prova essa relação para qualquer quadrado” assumiu que se tratava de “uma coisa geral”:

> **Rita:** E agora prova essa relação para qualquer quadrado... Agora é uma coisa geral. Temos se calhar que pensar noutros quadrados e ver que vai ser sempre assim.
> **Maria:** Podemos fazer alguns e depois escrever uma conjetura. Então?

As alunas questionaram a professora sobre o processo de raciocínio que deviam escolher mostrando que a palavra prova lhes estava a causar alguma perturbação e que não sabiam se o caminho indutivo as levava à dita prova. A questão colocada por este grupo foi muito pertinente e colocou a professora numa situação difícil. Se por um lado a resposta era “Sim, podem seguir um raciocínio indutivo”, por outro lado a professora teve receio de transmitir a ideia de que esse era o único caminho:

> **Maria:** Stora? É para provarmos, como assim? Ou substituir os valores?
> **Prof:** Substituir os valores como? Por números? Isso é concretizar. Provar é mostrar que a conclusão a que chegaram dá para todos [os casos].
> ...
> **Prof:** Têm que explicar e conseguir provar que dá para todos [os casos]. Quando a gente usa valores estamos a dizer que dá para aquele caso. Isso é concretizar.

Na primeira fala da professora encontra-se de novo uma frase interrogativa de repetição das ideias dos alunos seguida de um esclarecimento. Mais uma vez, a professora (primeira e segunda falas) continua a exercer a ação de apoiar, fornecendo nova informação aos alunos para poderem tomar decisões. A professora reagiu afastando as alunas da concretização referindo as limitações do uso de casos particulares em contraste com o uso do caso genérico. Teve, no entanto, a consciência de que o modo como o fez poderia transmitir a ideia errada de que o raciocínio indutivo não permitia generalizar. Após este esclarecimento, as alunas continuaram a realizar a tarefa, abandonando a ideia de particularizar como se pode constatar no diálogo seguinte:

> **Maria:** Se desenharmos esta parte acrescentada fica até aqui e esta largura é *b* e aqui é *b* também.

Rita: Esta vai ser igual a esta daqui até ao fim.

Maria: Pronto. O outro quadrado é igual a este, mas não é este [todo]. Ele é até aqui (Maria aponta para o quadrado não preenchido): $b^2 . a^2 - b^2$ é a área dele todo.

...

Rita: A área o retângulo feito a partir do quadrado é igual à área do quadrado inicial menos uma porção.

Beatriz: Menos uma parte.

...

Maria: Isto foi a 1ª parte: esta parte deslocámos para aqui, a tentar construir o quadrado, e faltou um bocadinho então vimos que $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

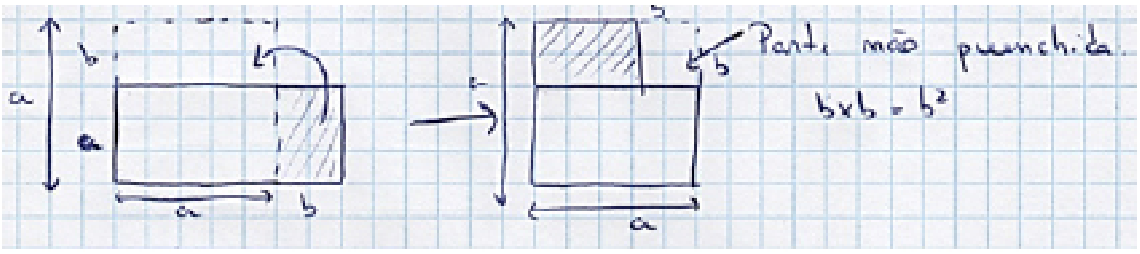


Figura 4 – Relação entre as áreas.

Os raciocínios desenvolvidos foram dedutivos e como argumento genérico foi apresentado um esquema dinâmico (figura 4), em que, partindo do retângulo se mostrou o que faltava no quadrado, acompanhado de um argumento algébrico que traduziu a relação entre as áreas por $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

Estes dois exemplos mostram que as ações da professora de *incitar* e, sobretudo, de *apoiar* conduziram os grupos mais além no seu raciocínio, ou seja, levaram os alunos a *ampliar* o pensamento matemático, nomeadamente desenvolvendo raciocínios de outra natureza. No primeiro exemplo, depois de a professora orientar o grupo para perceber que estava a assumir, erradamente, duas figuras como tendo dimensões iguais, os alunos foram capazes de rever a sua conjetura aprofundando a compreensão da situação. No segundo exemplo, a informação fornecida permitiu às alunas chegar a um nível de justificação cognitivamente superior, o nível da experiência conceptual.

Situação de convicção sem compreensão. As conjeturas formuladas durante o trabalho em grupo foram, por vezes, aceites sem serem matematicamente justificadas. Nessas situações, a professora questionou os alunos tentando provocar a procura de justificações. Por exemplo, quando os alunos de um grupo, após verificarem que a área do quadrado e do retângulo eram diferentes, apresentaram uma conclusão pouco clara com base numa única concretização, a professora mostrou-se reticente em aceitá-la. A atitude de dúvida da professora fez com que os alunos testassem outro caso proporcionando uma melhor compreensão da situação:

> **Manuel:** Eu acho que este quadrado tem a mesma área que este só que nós a este vamos tirar a área do b. Não é Stora?
> **Prof:** Estão convencidos? Só experimentaram num caso, não foi?
> **Manuel:** Foi.
> **Paulo:** Vamos experimentar outros.

Quando a professora pergunta aos alunos se estão convencidos, pretende realçar o seu fácil convencimento e dá-lhes indicação de que um só caso concreto é pouco para se convencerem. Nestas ações de *apoiar*, foi transmitida informação importante sobre métodos para se convencerem matematicamente de uma afirmação. Os alunos concretizaram mais uma vez e chamaram a professora para lhe mostrar que a conclusão se mantinha:

> **Manuel:** Oh Stora fizemos aqui outro quadrado e deu 25 e 24. (Bate uma palma). É outra vez menos 1.
> **Prof:** Fixaram o *b* como 1? Experimentem com outro *b*. Não devem ficar presos num caso, porque pode dar para um caso e não dar para outro.
> **Paulo:** Agora já não vai dar.
> **Manuel:** Vai vai.
> **Paulo:** Se fizeres com 2 vai ser menos 2. Não, vai ser 4. Vai ser 2x2, vai dar 4.
> **Manuel:** E prontos. É o mesmo raciocínio, ouve lá. Vamos estar sempre a tirar a área deste. Vamos tirar 4. Se for 2 vamos tirar 4.

Manuel: A área é a mesma mas só que vamos ter de tirar este quadrado.

Paulo: A área daquele quadradinho.

Neste episódio a professora apercebeu-se que o valor atribuído a *b* era novamente 1 o que podia levar à conclusão de que a diferença entre a área das duas figuras era sempre de 1 unidade. A atitude de insatisfação da professora e a sugestão dada aos alunos de atribuírem outros valores a *b* fez com que atribuíssem a *b* o valor 2 (figura 5). No entanto, Paulo mostra receio de que a conjetura não passasse no novo teste ao afirmar “Agora já não vai dar”. Após esse teste os alunos foram capazes de generalizar de forma mais clara mostrando compreender que à área do quadrado inicial é retirada a área do quadrado de lado *b* obtendo-se a área do retângulo final.

As ações da professora consistiram em *apoiar* os alunos em etapas essenciais da exploração matemática de uma situação informando-os, nomeadamente, de que é preciso variar um parâmetro, quando os outros estão fixos, para compreender as implicações na situação. A ação de *apoiar* foi fundamental para que os alunos avançassem para além da sua resolução inicial, ampliando assim o seu pensamento matemático. Através do novo teste à sua conjetura os alunos exploraram mais a situação e, desse modo, compreenderam melhor a relação entre as áreas das duas figuras.

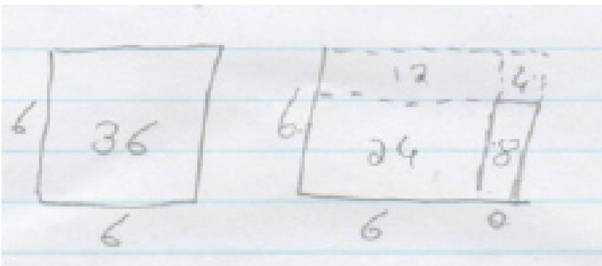


Figura 5 – Concretização com b=2.

Selecionar

Antes de dar por terminada a exploração em grupo, a professora aproveitou para, num curto espaço de tempo, ordenar os grupos por nível de justificação de Balacheff. A atribuição do nível de justificação teve por base o trabalho de cada grupo e a conclusão a que chegaram no momento imediatamente antes de dar por terminada a exploração. No quadro 1 apresentam-se as conclusões finais dos cinco grupos ordenados por ordem crescente de nível de justificação. Não foi atribuído um nível de justificação ao grupo A, pelo facto dos alunos não terem chegado a uma expressão algébrica que traduzisse a situação. Os grupos B e C raciocinaram de modo indutivo, mas enquanto o grupo B não generalizou, o grupo C fez uma afirmação geral e aceitou-a com nível de justificação de *empirismo naïf*. O grupo D usou medidas genéricas concretizando-as para verificar a relação o que corresponde ao nível de justificação de *experiência crucial*. O grupo E congregou um argumento genérico geométrico e algébrico: nível de justificação de *experiência conceptual*.

A seleção dos grupos para apresentar as resoluções da tarefa foi pensada para seguir a ordem que consta no quadro 1, visando encadear os raciocínios de todos os grupos envolvendo-os na construção de um argumento genérico. A ordem de seleção seria, então, a seguinte: (a) começar por convidar o grupo A que teve mais dificuldades e esclarecer as suas dúvidas permitia envolver os alunos com mais dificuldades na partilha de ideias; (b) depois chamar os grupos que raciocinaram de modo indutivo provocando-os a justificarem as suas afirmações de modo a que fossem explicitados os métodos de justificação matemática; (c) finalizar com os grupos que raciocinaram de modo dedutivo.

Sequenciar e conectar

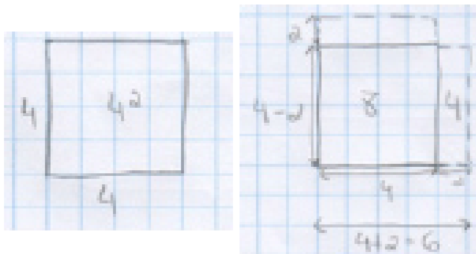
A sequência de apresentações dos grupos estava previamente pensada, mas essa ordem não era rígida podendo ser alterada a qualquer momento de modo a estabelecer as conexões necessárias entre os raciocínios dos alunos. Para iniciar a discussão, a professora convidou o grupo A a apresentar as suas conclusões. Como este grupo era constituído por alunas um pouco inseguras, procurou pô-las à vontade para explicarem os seus raciocínios, dizendo-lhes para apresentarem da forma que quisessem. As alunas desenharam um quadrado de lado a e o retângulo com dimensões $(a - b)(a + b)$ e escreveram, por baixo, a conclusão a que chegaram: $(a - b)(a + b) = a^2 - 2ab + b^2$. Registaram, ainda, ao lado as expressões das áreas parciais, do retângulo que designaram por x e do retângulo que designaram por y. A figura 6 é uma reconstituição do que estava no quadro preto, feita a partir dos relatórios escritos de Isa e de Antónia. Após esse registo no quadro, a professora interagiu com as alunas.

Quadro 1 – Nível de justificação e conclusões finais dos grupos

Grupo A:

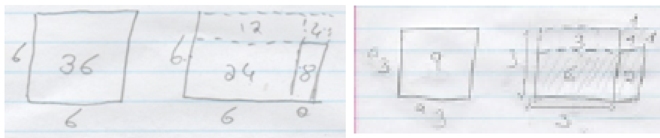
$(a - b)(a + b) = a^2 - 2ab + b^2$

Grupo B:



Empirismo naïf

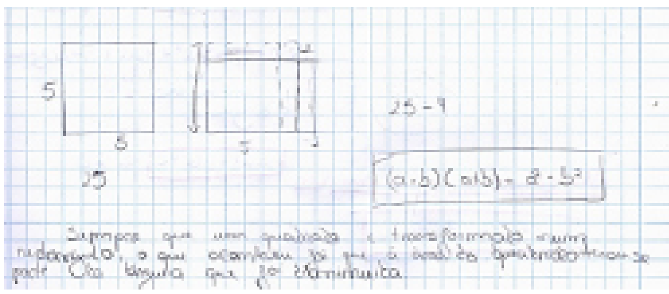
Grupo C:



A área é a mesma mas só que vamos ter de tirar a área daquele quadradinho.

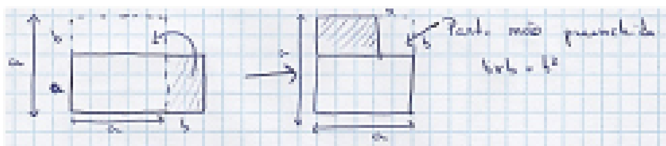
Experiência crucial

Grupo D:



Experiência conceptual

Grupo E:



$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

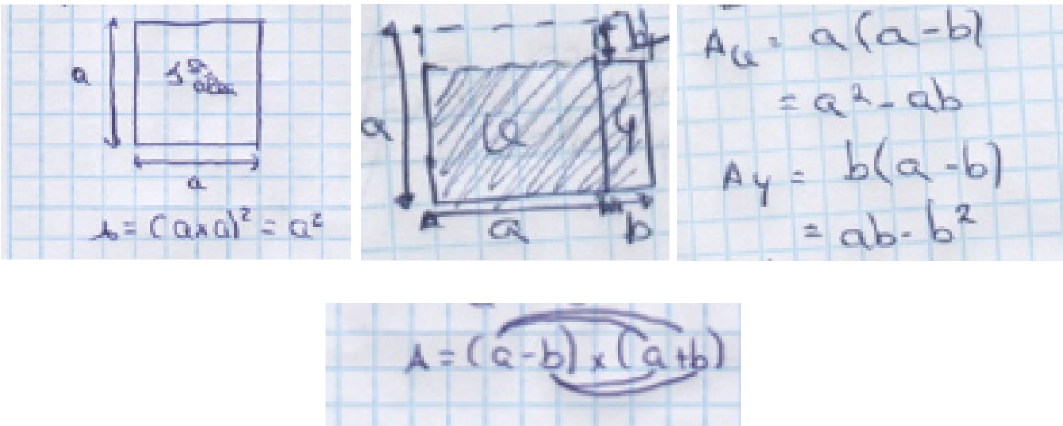


Figura 6 – Extratos dos relatórios de Isa e de Antónia (grupo A).

Prof: Qual foi a vossa maneira de pensar? … Pensaram com números, letras, desenhos, …?

Antónia: Começamos por calcular a área do primeiro quadrado.

Isa: Estivemos a calcular a área de cada um… deles.

Prof: De cada um quê?

Isa: …da divisão do quadrado. E vimos que a área deste era igual a esta.

Professora: Qual?

Isa: A área desta era igual a esta (aponta para os retângulos que estão ao lado e acima do retângulo designado por *x* na figura 6 desenhada no quadro).

Prof: É?

Paulo: Posso interferir?

Prof: Podes.

Paulo: Nós também tínhamos pensado nessa ideia, só que esta medida [aponta para a base do retângulo 1] é maior do que esta [aponta para a altura do retângulo 2].

Isa: Também nós. Até aí já chegámos.

(troca de ideias pouco claras entre as alunas e o Paulo).

Prof: Afinal são iguais ou não?

Antónia: São iguais se juntar este quadrado [de lado b] a esta [área retângulo *y*].

As intervenções da professora foram ações de *incitar* as alunas a exporem e explicarem os seus raciocínios à turma. Por exemplo, a questão colocada pela professora na segunda fala incitou as alunas a designar os objetos a que se referiam para tornar o discurso mais claro. Paulo, aluno do grupo C, pediu para intervir e a professora deixou, uma vez que o confronto de ideias é uma componente importante da discussão para promover o desenvolvimento do raciocínio dos alunos. No entanto, o diálogo que se estabeleceu não foi claro e a professora provocou as alunas a clarificarem a sua afirmação. Essa provocação levou-as a explicitar quais os retângulos que tinham áreas iguais e, ao fazê-lo, ficou mais claro que os dois retângulos, desenhados ao lado e acima do retângulo *x*, tinham dimensões diferentes.

Ainda durante a discussão dos raciocínios deste grupo a professora necessitava de compreender como é que as alunas chegaram à conclusão $(a - b)\ (a + b) = a^2 - 2ab + b^2$. Pediu-lhes para explicarem como obtiveram essa expressão que estava escrita no quadro por baixo do desenho na figura 6:

> **Prof:** E esses cálculos que aí estão? Importam-se de nos explicar o que aí está?
> **Isa:** Este é a área do quadrado que é $a \times a$. Este é $a - b$ que é: o *a*, nós só queremos esta parte. Se daqui [até] aqui mede *a* e daqui [até] aqui mede *b* é $a - b$ e $a + b$ que é este *a* mais este *b*, daqui [até] aqui que é $a + b$.

A explicação dada mostrou que a expressão $(a - b)\ (a + b)$ significava para elas a área do retângulo sombreado da figura 6. No entanto, a explicação não justificava a presença do monómio $-2ab$, sem significado naquela situação, pelo que a professora lhes perguntou como chegaram àquele monómio.

> **Prof:** Então de onde vem o $-2ab$? Como chegaram a essa expressão? Foi pelo desenho ou pelo desenvolvimento dessa expressão?
> **Isa:** Pelo desenvolvimento.

Estava então esclarecido que o monómio $-2ab$ tinha sido obtido pelo desenvolvimento algébrico do produto do comprimento pela largura sem atender ao seu significado geométrico de áreas de partes da figura. A professora fez, então, com toda a turma o desenvolvimento algébrico da expressão da área do retângulo corrigindo, assim, o erro cometido: $(a - b)\ (a + b) = a^2 - b^2$. Naquele momento sentiu-se tentada a continuar a explorar o trabalho das alunas, pois bastava interpretar geometricamente aquela expressão para se estabelecer uma relação. Optou, porém, por chamar o grupo B, respeitando assim a ordem prevista por considerar mais vantajosa a construção de um argumento genérico envolvendo todos os grupos.

A transição para a comunicação seguinte foi feita questionando as alunas sobre os objetivos da tarefa para tornar claro que o objetivo de relacionar a área das duas figuras ainda não tinha sido alcançado. As ações da professora através deste questionamento serviram para *apoiar* os alunos fazendo-os assumir publicamente que ainda não tinham respondido à questão colocada:

Prof: Pronto. E ficaram aí?

Isa: Sim.

Prof: E o que pedia a investigação? Para relacionar o quê?

Isa: As áreas.

Prof: Entre o quê?

Isa: Do quadrado com este.

Prof: Chegaram lá?

Isa: Não. Ainda estávamos a pensar.

Este episódio permitiu a transição espontânea para a comunicação do grupo C, pois Daniela, elemento do grupo B, pediu para ir ao quadro: "Podemos ir nós explicar?" As alunas foram ao quadro e desenharam os esquemas da figura 7 em silêncio e a professora pediu-lhes para explicarem: "Ide explicando. A que chegaram?"

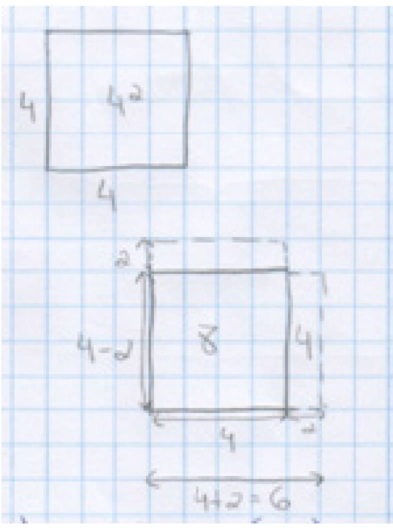


Figura 7 – Extrato do relatório de Francisca (grupo B).

Estas alunas iniciaram então a sua intervenção explicitando a semelhança dos seus raciocínios com os apresentados pelo grupo anterior no que dizia respeito às tentativas mal sucedidas de trabalhar com medidas genéricas:

> **Daniela:** Nós só tínhamos chegado mais ou menos aquela conclusão só que não conseguimos fazer mais nada. Então estabelecemos números para as letras. Por exemplo $a = 4$ e $b = 2$. A área daquele é 16. Concluímos que diminuiu 4.
>
> **Paulo:** E só puseste esses resultados?
>
> **Daniela:** Se fizéssemos outros números provavelmente…
>
> **Paulo e Miguel:** Provavelmente!? Devias ter feito.
>
> **Manuel:** Nós fizemos.
>
> **Daniela:** Conclusão a medida diminuiu.

Após a discussão as alunas concluiram que "a medida diminuiu". A professora optou por não chamar o grupo C ao quadro, uma vez que o seu raciocínio também foi indutivo e Paulo e Miguel, alunos desse grupo, já tinham contribuído para a discussão, informando da importância de verificar a conjetura para mais casos.

Os próximos grupos a apresentar os seus raciocínios, grupos D e E, tinham trabalhado com as medidas genéricas pelo que a professora achou necessário promover a transição do raciocínio indutivo para o dedutivo fazendo a conexão entre os raciocínios apresentados e os que se seguiriam. Assim, antes de chamar outro grupo iniciou um questionamento com enfoque na passagem dos casos concretos para o exemplo genérico como forma de promover a generalização:

> **Prof:** Quanto diminuiu, genericamente?
>
> **Daniela:** 4.
>
> **Prof:** Nesse caso 4 – apontando para o caso registado no quadro.
>
> **Paulo:** Depende, pode diminuir 2 ou 3 ou 5.
>
> **Prof:** Se quisermos falar genericamente quanto diminuiu?
>
> **Isabel:** Metade.
>
> **Paulo:** *b*.
>
> **Miguel:** Não, não sabes.
>
> **Prof:** Daquele para aquele Beatriz quanto diminui? (apontando para o caso geral representado no quadro).

Beatriz: b^2.

Prof: Nesse diminuiu 4, esse é um caso concreto. Mas no exemplo genérico quando temos um quadrado e aumentamos o comprimento *b* [unidades] e diminuímos a largura *b* [unidades] quanto diminui a área?

Beatriz: b^2.

Prof: E onde está?

Beatriz: É o quadrado que está por cima... Posso ir lá? (foi e apontou para o quadrado de lado *b*).

Em todo o questionamento presente neste episódio a ação da professora é de *ampliar* o pensamento dos alunos do concreto para o geral. A sua reformulação da questão de forma mais completa, na penúltima fala do episódio anterior, pretendeu realçar os aspetos genéricos da situação. O incentivo à identificação da representação geométrica da expressão algébrica b^2 tinha em vista levar os alunos a compreenderem o seu significado. No entanto, isso não garantia que os diferentes grupos tivessem compreendido a relação pelo que a professora aproveitou para dar voz ao grupo D: "Um grupo que queira mostrar genericamente quanto é que a área diminui! ... Liliana?" Entretanto esclareceu, falando para a Daniela, do grupo B, que apresentara antes: "Vocês só fizeram um caso. Um caso ... não chega para provar." Esta ação visou apoiar os alunos fornecendo-lhes informações sobre os processos de raciocínio. Continuou a dar suporte informativo aos alunos, como se pode ver nas falas que se seguiram, salientando a importância de usar letras como representação de valores arbitrários.

Prof: Como é que falamos de todos? O que tenho de usar para falar de todos os casos?

Vários: Letras.

Prof: Porque as letras podem tomar qualquer valor.

O grupo D (representado pelas alunas Liliana e Sofia) mostrou a área que faltava ao retângulo para formar o quadrado inicial rodando o retângulo acrescentado ao quadrado inicial de dimensões $a - b$ e b para a zona retirada do quadrado (figura 8). Liliana, na sua explicação, falou de medidas designando-as por letras como se fossem números concretos o que provocou confusão ao grupo C e gerou uma discussão em torno das inferências feitas com letras:

Liliana: Nós calculámos esta área que dava *a* ao quadrado e depois para vermos a diferença fizemos por letras: colocámos esta parte ali em cima e sobrava *b* [refere-se a quadrado lado *b*].

Miguel: Como sabias que sobrava aquele quadrado? Não tinhas medidas!

Liliana: Porque sabemos que aqui tem $a - b$.

Sofia: Porque nós basicamente passámos este para aqui (fez o mesmo esquema). Tirámos esta parte e passámos para aqui e ao desenhar vê-se que sobra este quadrado.

Manuel: Não percebo.

Prof: É que eles só conseguiram ver com casos concretos para verem a diferença.

Maria: Seria melhor… (apontando para o quadro sugerindo ir lá).

Prof: Ide lá [ao quadro].

Maria: Nós fizemos esquemas destes.

Prof: O vosso esquema tem mais fases…Tu [Liliana] estás a explicar bem mas eles não estão a perceber…

Quando Manuel, do grupo C, afirmou não compreender, a professora interveio tentando explicar a dúvida de Manuel e Maria (do grupo E) mostrou vontade de ajudar. A professora deixou Maria ir ao quadro mas teve o cuidado de dizer a Liliana por que interrompera a comunicação do seu grupo. Passou-se assim para o grupo E que, contrariamente ao grupo D, havia partido do retângulo para mostrar o que faltava no quadrado de modo a que as áreas fossem iguais (figura 8):

Maria: Este retângulo aqui, é o mesmo que este. Já toda a gente percebeu porque é que sobra esta parte, não já?

Paulo: Sim, porque é o *b*.

Manuel: Como é que sabes que é o *b*?

Prof: Acho que o Manuel não está a perceber porque é que dizes que os retângulos são iguais. O que é que vos convenceu que são iguais?

Isa: As medidas.

Rita: Lê o enunciado. Então cresceu *b* decresceu *b* e por isso o que tem para o lado é o mesmo.

Maria: Isto é *a*, isto é *b* e isto aqui é o quê? ... *a* – *b*. Se aqui é *a* – *b* aqui é? Quanto é?... *b*. Se pusermos isto aqui (girando) quanto é que vai ocupar? ... *a* – *b*. E isto é quanto? É *b*. Pronto.
O que vocês fizeram com números nós fizemos com letras. Conclusão o que podemos dizer? Conclusão final: A área do retângulo é igual a a^2-b^2.

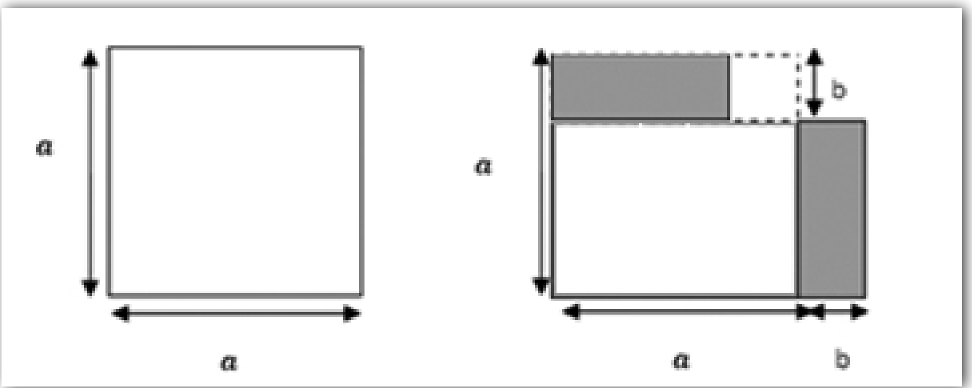


Figura 8 – Esquema do grupo de Liliana

A professora compreendeu que Manuel não estava a relacionar as medidas do retângulo rodado com as medidas da figura. Preocupada em que os raciocínios dedutivos fossem compreendidos por todos, questionou as alunas: "O que é que vos convenceu que são iguais?". Desse modo, orientou-as para focarem a sua explicação nas dimensões do retângulo, levando-as a justificarem a afirmação: "Os retângulos são iguais."

Maria explicou a transformação do retângulo no quadrado mostrando que compondo o quadrado com a parte acrescentada da área do retângulo faltava a área correspondente ao quadrado de lado *b*. A partir do diálogo que ocorreu no grupo C, enquanto Maria explicou, tornou-se claro que Manuel tinha dificuldades em aceitar a letra como uma representação de um número qualquer, isto é, uma variável:

Manuel: Como é que ela sabe que é aquilo e não mais um bocadinho?
Paulo: Foi por olho.
Manuel: Podia ser mais aqui.
Miguel: Ela não sabe as medidas. Como é que ela...
Paulo: Ela sabe que daqui [até] aqui é *a* – *b*...

Quando Maria terminou, Manuel pediu-lhe uma explicação particular. A professora apoiou esta iniciativa de Manuel na esperança de que houvesse um desenvolvimento do seu raciocínio, pois as dificuldades em trabalhar com medidas genéricas constituem um obstáculo à realização de raciocínios dedutivos:

> **Maria:** Sabes que isto é *a* e sabes que isto é *b*. Se deslocares isto para aqui, não é? Isto vai ser *b*.
> **Manuel:** Como é que sabes que é aí?
> **Maria:** Estou a fazer supostamente, se medisses, medias aqui e era *b*. Ok? Então aqui em cima vai ser *b* também. E isto aqui vai ser o quê?
> **Manuel:** *a* – *b*.
> **Maria:** Que é a medida desta, por isso é que é ali.
> **Manuel:** Ah OK.
> **Maria:** Queres que explique outra vez? Nós não medimos.
> **Manuel:** Pois, não tinhas medidas. Tipo: conseguimos perceber mais ou menos. Chegavas aqui com a régua e medias *b* medias até ali *b* então ali era *a* – *b*.

Na sua explicação a Manuel, Maria fez a adaptação do seu discurso, falando de medições concretas, em que obtinha o *b*, para ajudar o colega a compreender que essa medição podia ser um número qualquer, e depois mostrou-lhe como estabelecer relações entre as diferentes medidas. A discussão culminou com a apresentação do raciocínio dedutivo do grupo E completando-se, assim, a construção de um argumento genérico.

A sequenciação das intervenções em toda a discussão baseou-se na ordem pré-estabelecida, mas com a preocupação de fazer um encadeamento dos raciocínios dos grupos com grau de generalização crescente até construir um argumento genérico. Essa construção gradual foi feita pela partilha e compreensão dos raciocínios dos grupos o que permitiu que as transições entre as diferentes intervenções ocorresse de forma natural.

Durante a discussão a professora incitou os alunos a apresentarem os seus raciocínios, o que foi importante para a compreensão de todos e, também, para ela própria decidir no momento a sua ação, como se evidencia nos episódios da apresentação do grupo A. O apoio dado aos grupos e as tentativas de ampliação do pensamento dos alunos dependeu dessa mesma compreensão. A professora tentou manter os alunos motivados através da oportunidade de partilharem os seus raciocínios e de refletirem sobre eles o que lhe permitiu promover níveis de justificação mais avançados. Pode-se concluir que nas práticas de sequenciar e conectar, para além de ações de *apoiar* e *incitar*, houve ações de *ampliar* o pensamento matemático dos alunos.

Conclusão

A oportunidade criada pela professora foi relevante para a construção coletiva de um argumento genérico conseguido através de uma partilha de raciocínios em que os alunos se mostraram preocupados com a compreensão matemática dos colegas. O facto de os alunos explorarem a tarefa em grupo promoveu um maior envolvimento na discussão, motivados pela apresentação do que haviam pensado nos respetivos grupos.

A ação da professora foi fundamental em todo o desenvolvimento da aula e teve na base um trabalho prévio de planificação. Nessa planificação a professora preparou a tarefa a aplicar de acordo com os objetivos definidos e tendo em conta as caraterísticas da turma. As normas de sala de aula vinham a ser estabelecidas desde o início do ano letivo, condição importante para que os alunos trabalhassem efetivamente em grupo ouvindo os outros e aceitando as suas opiniões (Mason, 2010). A professora revelou-se mais cuidadosa em antecipar os processos de raciocínio do que as próprias resoluções dos alunos. Este aspeto foi ultrapassado devido à preocupação em compreender as resoluções trabalhadas ao longo da aula e integrar esse conhecimento na sua ação imediata. A professora sabia ser importante observar os alunos e ouvir as suas explicações e justificações para compreender como estavam a raciocinar. Estava também consciente da importância de orientar os alunos de modo a ultrapassarem os obstáculos encontrados (Mason et al., 1985).

Durante a prática de *monitorizar*, fase de exploração da tarefa em grupo, as ações de *incitar* e *apoiar* da professora foram fundamentais para fazer os alunos avançar no seu trabalho. No caso da exploração indutiva os alunos revelaram dificuldades em testar as conjeturas, tirar conclusões sobre os resultados do teste, rever os resultados, rever as conjeturas e reformulá-las quando necessário. Este processo é complexo e, como referem Mason et al. (1985), é a revisão acompanhada de reflexão que possibilita generalizar e ao mesmo tempo compreender. A ação da professora consistiu em *incitar* e, sobretudo, em *apoiar* os alunos nas diferentes fases do processo de conjetura conseguindo que eles prosseguissem a exploração. Pode-se, então, afirmar que estas ações ajudaram os alunos a compreender melhor o próprio processo de conjetura e a estrutura matemática da situação. Também a oportunidade, que a professora aproveitou, para promover o raciocínio dedutivo permitiu ampliar o pensamento dos alunos. Pode-se concluir, então, que, na fase de monitorização, as ações da professora foram de apoiar e de *incitar* e que ambas se revelaram fundamentais para que os alunos ampliassem o seu pensamento matemático.

Na discussão coletiva, a professora queria desenvolver, com todos os alunos, uma exploração em que a justificação emergisse, isso é, em que a estrutura matemática fosse bem compreendida, para facilitar a construção de um argumento genérico (Mariotti, 2006). Para além disso, necessitava de fazer um encadeamento do raciocínio dos alunos estabelecendo conexões entre eles. O conhecimento teórico dos níveis de justificação de Balacheff (1987) tornou possível graduar os níveis de justificação, o que foi crucial para encadear os raciocínios dos alunos. As ações da professora de *incitar* e *apoiar* foram importantes para promover a compreensão e a partilha dos raciocínios dos diferentes grupos assim como para incentivar a que continuassem a participar e a desenvolver os seus raciocínios para além do que tinham feito no grupo. As ações de ampliar foram identificadas, apenas, nas práticas de sequenciar/conectar, pois foi nessa fase que a professora usou todo o conhecimento adquirido até ali sobre os raciocínios dos alunos, para encadear as ideias matemáticas até produzir um argumento genérico.

Ao longo de toda a aula exploratória identificaram-se, então, ações de *incitar*, *apoiar* e *ampliar* verificando-se que todas contribuíram para, na fase de discussão coletiva, se chegar a um argumento genérico. As ações de *incitar* e *apoiar* permitiram compreender e ajudaram os alunos a continuar o seu trabalho, condição essencial para se manterem motivados e terem ideias para discutir com os outros. As ações de *ampliar* o pensamento matemático dos alunos surgiram pela necessidade de promover o raciocínio dedutivo.

Todos os episódios apresentados neste capítulo podem ser considerados *de ampliação* (Cengiz et al., 2011) por envolverem raciocínio e reflexão e ultrapassarem os métodos de resolução iniciais. No entanto, só foi possível *ampliar* o pensamento matemático por terem sido desenvolvidas muitas ações de *incitar* a explicitação dos raciocínios e de *apoiar* os raciocínios durante toda a aula. Pode-se concluir que as três ações referidas por Cengiz et al. (2011) são essenciais para ampliar o pensamento matemático dos alunos.

A preocupação com o desenvolvimento do raciocínio matemático parece ser uma condição favorável para que o professor promova a *ampliação* do pensamento matemático dos alunos e a preocupação específica com a produção de argumentos genéricos parece favorecer a ação, do professor, de *ampliar* o pensamento matemático dos alunos. A dificuldade referida por Balacheff (1987) na passagem do particular para o geral foi aqui ilustrada através do caso de Manuel. Segundo o autor essa passagem exige a capacidade de distanciamento do objeto matemático e levanta a questão de como pode o professor desenvolver essa capacidade nos alunos, problema que será interessante retomar em investigações futuras.

Referências

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*(2), 147-176.

Canavarro, A. P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da Matemática: O caso da Célia. In: L. Santos, A. P. Canavarro, A. M. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes, & S. Carreira (Eds.), *Investigação em educação matemática 2012: Práticas de ensino da matemática* (pp. 255-266). Portalegre: SPIEM.

Cengiz, N., Kline, K., & Grant, T. J. (2011). Extending students' mathematical thinking during whole-group discussions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*, 355-374.

De Villiers, M. (1999). The role and function of proof with Sketchpad. In D. Villiers, (Ed.), *Rethinking proof with Sketchpad* (pp. 1-16). San Rafael, CA: Key Curriculum Press.

De Villiers, M. (2012). An illustration of the explanatory and discovery functions of proof. *Pythagoras, 33(3), Art. #193, 8 pages.* (Acedido em 21 de abril de 2013 de http://dx.doi.org/10.4102/pythagoras.v33i3.193)

Domingues, C. (2011). *Desenvolvimento do Raciocínio Matemático: Uma experiência com uma turma de 9.º ano* (Dissertação de mestrado, Universidade do Minho).

Healy, L., & Hoyles, C. (1998). *Justifying and Proving in school mathematics. Summary of the results from a survey of the proof conceptions of students in the UK* (research report) (pp.601-613). London: London Institute of Education.

Lannin, J., Ellis, A., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning: Pre_K_Grade 8.* Reston, VA: NCTM.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and prooving in mathematics education. In A. G. (Eds), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 173-204). Rotterdam: Sense

Mason, J. (1998). Resolução de problemas no Reino Unido: Problemas abertos, fechados e exploratórios. Em P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender Matemática: Textos seleccionados* (pp. 107-115). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Mason, J. (2010). *Effective questioning and responding in the mathematics classroom*. (Acedido em 21 de abril de 2013 de http://mcs.open.ac.uk/jhm3/Selected%20Publications/Effective%20Questioning%20&%20Responding.pdf)

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1985). *Thinking mathematically*. London: Addison-Wesley.

Pólya, G. (1968). *Mathematics and plausible reasoning: Induction and analogy in mathematics* (Vol. I). Princeton, NJ: University Press.

Reid, D. A., & Knipping, C. (2010). *Proof in mathematics education: Research, learning and teaching*. Rotterdam: Sense.

Stein, M., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five pratices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10,* 313-340.

Stylianides, A. J., & Ball, D. L. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: Knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal Mathematics Teacher Education, 11,* 307-332.

Stylianides, G., & Stylianides, A. (2008). Proof in school mathematics: Insights from psychological research into students' ability for deductive reasoning. *Mathematics Thinking and Learning, 10*(2), 103-133.

Stylianides, G., & Stylianides, A. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal of Research in Mathematics Education, 40*(3), 314-352.

COMUNICAÇÃO

9. Práticas de ensino exploratório da Matemática: Ações e intenções de uma professora

por Ana Paula Canavarro, Hélia Oliveira, Luís Menezes

9. Práticas de ensino exploratório da Matemática: Ações e intenções de uma professora

Ana Paula Canavarro
Universidade de Évora e UIDEF,
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
apc@uevora.pt

Hélia Oliveira
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
hmoliveira@ie.ulisboa.pt

Luís Menezes
Escola Superior de Educação de Viseu/CI&DETS
menezes@esev.ipv.pt

• **Resumo:** Este estudo foca-se nas práticas de ensino exploratório da Matemática. É nosso propósito aprofundar a compreensão desta prática complexa do ponto de vista dos professores, considerando tanto as suas ações como as intenções que orientam essas ações. Analisamos neste artigo o caso de uma das professoras com que trabalhamos no quadro de um mais amplo projeto de *Design Research* em que a investigação sobre a prática de sala de aula e a formação de professores se desenvolvem de forma articulada. Identificamos as ações que a professora executou nas quatro fases em que organizou as aulas observadas (Introdução da tarefa; Desenvolvimento da tarefa; Discussão da tarefa, e Sistematização das aprendizagens matemáticas), bem como as intenções subjacentes às suas ações. Concluímos que a prática da professora é orientada por dois propósitos principais distintos mas interrelacionados: promover as aprendizagens matemáticas dos alunos e gerir o funcionamento dos alunos e da turma como um todo. A maioria das ações que executa com o propósito de gestão têm uma enorme importância no sucesso da promoção das aprendizagens matemáticas dos alunos. Sublinhamos também a importância da planificação cuidada da aula, da variedade de papéis que a professora desempenha, e do carácter multidimensional e relacional do ensino, reconhecidamente complexo no ensino exploratório.

• **Palavras-Chave:** Práticas de ensino, Ensino exploratório, Intenções e ações do professor, Estrutura e fases da aula.

Introdução

Em muitos países, as atuais orientações curriculares para o ensino da Matemática apresentam metas desafiantes para a aprendizagem dos alunos. No entanto, também colocam desafios significativos às práticas de sala de aula dos professores. A prática de ensinar Matemática centrada na exposição dos tópicos por parte do professor e seguida da realização de exercícios com vista à repetição de procedimentos por parte dos alunos, tem sido dominante um pouco por todo o lado (Franke, Kazemi, & Battey, 2007), mas não é a mais adequada para lidar com todas as atuais exigências curriculares. Hoje em dia, os alunos precisam de oportunidades de realizar tarefas matemáticas significativas que lhes permitam raciocinar matematicamente sobre ideias importantes e atribuir sentido ao conhecimento matemático que surge a partir da discussão coletiva dessas tarefas (NCTM, 2000; Ponte, 2005). Isso exige do professor uma abordagem exploratória do ensino, centrada no trabalho dos alunos quando se envolvem na exploração matemática de tarefas ricas e valiosas (Ponte, 2005; Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008). No entanto, esta prática é difícil de alcançar, uma vez que não se trata apenas de escolher uma tarefa interessante e de proporcionar tempo aos alunos para a resolverem em grupo e apresentarem soluções aos colegas (Boaler, 2003). Assim, o nosso objetivo é compreender a prática de ensino exploratório, identificando as principais intenções do professor em cada fase da aula e descrever com detalhe as ações que realiza enquanto ensina. É nossa expectativa que a elaboração de um quadro de referência para o ensino exploratório da Matemática possa constituir um recurso útil para usar em programas de formação de professores e um contributo para promover o desenvolvimento profissional do professor. Neste capítulo optamos por nos focar no caso de Célia, professora de 1.º ciclo, descrevendo e analisando a sua prática de ensino exploratório, o que constitui um contributo importante para o objetivo de elaboração do quadro de referência referido.

Perspetivas teóricas

A prática de ensino exploratório da Matemática exige do professor muito mais do que a identificação e seleção das tarefas para a sala de aula. A seleção de uma tarefa adequada e valiosa é muito importante pois ela tem implícita uma determinada oportunidade de aprendizagem mas, uma vez selecionada, é crucial que o professor equacione como explorar as suas potencialidades junto dos alunos e se prepare para lidar com a complexidade dessa exploração na sala de aula (Stein et al., 2008).

Uma aula exploratória típica é geralmente estruturada em três ou quatro fases: a fase de "lançamento" da tarefa, a fase de "exploração" pelos alunos, e a fase de "discussão e sintetização" (Canavarro, 2011; Stein et al., 2008). Na primeira fase, o professor apresenta uma tarefa matemática à turma. A tarefa é frequentemente um problema ou uma investigação, exigindo interpretação por parte dos alunos. O professor deve assegurar, em poucos minutos, que estes entendem o que se espera que façam e que se sintam desafiados a trabalhar na tarefa. O professor tem também de organizar o desenvolvimento do trabalho pela turma, estabelecendo o tempo a dedicar às diferentes fases, gerindo os recursos a usar e definindo os modos de trabalho dos alunos (Anghileri, 2006).

Na segunda fase, o professor apoia os alunos no respetivo trabalho autónomo sobre a tarefa, realizado individualmente ou em pequenos grupos, procurando garantir que todos participam e de forma produtiva. É importante que os comentários e as respostas do professor às eventuais dúvidas dos alunos não reduzam o nível de exigência cognitiva da tarefa (Stein & Smith, 1998) e não uniformizem as estratégias de resolução, a fim de não frustrar a hipótese de, em seguida, promover uma discussão matemática interessante e desafiante para cada aluno. O professor precisa também de garantir que os alunos se preparam para apresentar o seu trabalho à turma e que produzem os materiais adequados em tempo útil para a fase de discussão. Enquanto isso, o professor tem de selecionar, a partir da sua rápida observação e apreciação das produções dos alunos em resposta à tarefa, as soluções que avalia como contribuições positivas para a discussão coletiva e estabelecer a sequência da sua apresentação pelos alunos (Stein et al., 2008).

Depois desta fase, a turma retorna ao plenário para a discussão coletiva das resoluções selecionadas. O professor tem de orquestrar essa discussão, não apenas gerindo as intervenções e interações dos diferentes alunos, mas também promovendo a qualidade matemática das suas explicações e argumentações (Ruthven, Hofmann, & Mercer, 2011), e cuidando da comparação de distintas resoluções e da discussão da respetiva diferença e eficácia matemática (Yackel & Cobb, 1996).

O professor precisa também de manter um clima positivo e de genuíno interesse na discussão, tentando garantir a participação de todos os alunos. É importante que a discussão tenha como objetivo mais do que a comparação e o confronto das resoluções dos alunos, e contribua para que estes realizem novas aprendizagens relevantes, não só sobre os conceitos, procedimentos ou processos em presença, mas também sobre os modos legítimos de produção do conhecimento matemático (Boavida, 2005). O professor tem aqui um papel crucial na orientação dos alunos para o apurar das principais ideias matemáticas que surgem a partir da discussão (Anghileri, 2006). O final da discussão é um momento de institucionalização das aprendizagens, que toda a turma deve reconhecer e partilhar, no qual tanto podem surgir novos conceitos ou procedimentos emergentes da discussão da tarefa como serem revistos e aperfeiçoados conceitos e procedimentos já conhecidos e aplicados, estabelecidas conexões com situações anteriores, e/ou reforçados aspetos fundamentais dos processos matemáticos transversais como a representação, a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática (Canavarro, 2011; Stein et al., 2008).

O desenvolvimento do ensino exploratório constitui uma prática complexa para a maioria dos professores, nomeadamente no que diz respeito à orquestração das discussões matemáticas (Franke, Kazemi, & Battey, 2007; Stein et al., 2008). As práticas dos professores podem ser entendidas como as atividades que realizam regularmente, tendo em consideração o seu contexto de trabalho e os seus significados e intenções (Ponte & Chapman, 2006). Lampert (2004) sublinha que a "prática de ensino é aquilo que os professores fazem, mas é mais do que o modo como se comportam com os seus alunos ou do que as ações de cada professor individual; a ação é um comportamento com significado, e a prática é a ação informada por um contexto organizacional" (p. 2). Reconhece-se assim que o professor age intencionalmente, de acordo com as suas vontades e propósitos para transformar a realidade (Mezirow, 1991). Assim, para descrever e compreender a prática de ensino do professor é essencial não só identificar as suas ações, mas também as intenções que estão incorporados nessas ações, as razões que justificam que se comporte de determinada maneira, nomeadamente as que derivam do seu contexto de ensino.

É igualmente importante sublinhar que o ensino é uma atividade relacional e multidimensional (Franke, Kazemi, & Battey, 2007). A dimensão relacional advém das relações que se estabelecem entre o professor, os alunos e o conteúdo do ensino, que só podem ser entendidos uns em função dos outros: "O professor trabalha para orquestrar o conteúdo, as representações do conteúdo, e as pessoas na sala de aula em interação uns com os outros" (Franke, Kazemi, & Battey, 2007, p. 227). A dimensão multidimensional do ensino resulta da diversidade de cenários e exigências que a sala de aula coloca em simultâneo. O professor precisa de criar um ambiente de aprendizagem que acolha todos os alunos, de gerir as suas participações e interações de modo a que se relacionem produtivamente com o conteúdo matemático e as suas representações, de identificar e interpretar o que os alunos fazem e dizem de modo a orientá-los por trajetórias em que se possam desenvolver matematicamente. Isso exige do professor um processo contínuo de tomada de decisões que combina os seus conhecimentos, crenças e propósitos (Franke, Kazemi, & Battey, 2007).

Abordagem metodológica

Este estudo inscreve-se num projeto de investigação de *design research* (Ponte et al., 2012), em que a investigação sobre a prática de sala de aula e a formação de professores se desenvolvem em articulação, seguindo-se posteriormente uma fase de investigação sobre a formação realizada. Na primeira fase do projeto dedicamo-nos à construção de casos multimédia de professores que ilustram práticas de ensino exploratório da Matemática em diversos contextos (Oliveira, Menezes, & Canavarro, 2012). Para a elaboração dos casos focados nas práticas de professores, adotámos uma abordagem interpretativa para a investigação, considerando a importância de conhecer as perspetivas dos professores para compreender as suas ações enquanto ensinam (Sowder, 2007).

Escolhemos trabalhar com professores experientes que se sentem confortáveis com o ensino de natureza exploratória da Matemática, proporcionando um contexto favorável para a recolha dos dados. Optámos também por trabalhar com professores de diferentes níveis de ensino e focando aulas sobre diferentes temas matemáticos para termos uma panorâmica mais ampla da prática de ensino exploratório, independentemente do nível de ensino e do conteúdo matemático. Os professores, um por ciclo de escolaridade, são profissionais experientes, com mais de 15 anos de ensino.

Para cada um dos professores, observámos duas ou três aulas mas optámos por construir o caso multimédia respetivo considerando o trabalho realizado em torno de uma única tarefa, por uma questão de unidade e coerência. Os dados foram recolhidos em três momentos: antes, durante e depois da(s) aula(s). Uns dias antes da aula foi feita uma entrevista inicial para compreender a planificação dos professores, nomeadamente as principais opções sobre a tarefa e as orientações metodológicas pensadas para o seu desenvolvimento com a turma. Registou-se igualmente a antecipação de eventuais estratégias e dificuldades dos alunos. Esta entrevista foi acompanhada pela análise do plano da aula previamente preparado por cada professor.

A recolha de dados em sala de aula envolveu o uso de duas câmaras de vídeo para registrar tanto os momentos de trabalho com toda a turma, bem alguns episódios de interação entre o professor e os alunos enquanto trabalham de forma autónoma na realização da tarefa. A partir dessa recolha vídeo, foram selecionados pelo investigador segmentos específicos da aula que constituíram episódios de ensino a usar na entrevista posterior ao professor.

No final foi realizada uma entrevista de reflexão sobre a prática, a qual inclui a análise dos episódios de ensino selecionados, com o objetivo de registrar as explicações do professor sobre o desenvolvimento da aula e as justificações das suas ações, confrontando ainda o que foi planeado e o que foi implementado durante a aula. Nesta entrevista, a observação dos episódios vídeo de ensino selecionados ajudaram o professor a concentrar-se na realidade concreta da sua aula em análise, evitando referências apenas a ideias superficiais ou distorcidas ou a princípios gerais relativos ao ensino da Matemática.

A análise dos dados combinou dados de vídeos e dados das entrevistas, e foi complementada com a análise do plano e dos trabalhos escritos dos alunos relativos à resolução da tarefa. Para cada professor, identificou-se a estrutura da aula por ele conduzida e as características da tarefa proposta aos alunos. Para cada fase da aula, foram identificadas as diversas ações realizadas, as quais se organizaram de acordo com as principais intenções atribuídas pelo professor a cada uma das ações. Depois disso, construímos os três casos multimédia de aulas de professores do ensino básico que estão alojados no site do projeto (http://p3m.ie.ul.pt/).

A prática de ensino exploratório da professora Célia

Neste artigo centramo-nos no caso de Célia, uma professora experiente de 1.º ciclo, que ensina há 16 anos. Analisamos a sua prática de ensino correspondente à aula de exploração da tarefa “Cubos com autocolantes” (Anexo 1), numa turma do 4.º ano do ensino básico, a qual tinha como objetivo geral o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, em particular o reconhecimento de uma sequência e das variáveis nela implícitas, a identificação da relação entre elas, e a expressão da regra geral da relação entre as variáveis, em linguagem natural e em linguagem simbólica. A professora selecionou esta tarefa em continuidade com a realização de uma outra que também proporcionou aos alunos a oportunidade de generalizar uma regra através de uma expressão algébrica com letras.

A aula começou com a apresentação da tarefa para toda a turma, passou a um período de trabalho dos alunos em pares, seguiu-se uma discussão coletiva de algumas resoluções propostas pelos alunos que incluiu uma comparação e confronto das estratégias usadas e, finalmente, encerrou com uma sistematização acerca da forma, significado e valor da regra geral encontrada para resolver a tarefa. As quatro fases foram planeadas por Célia: o plano de aula foi organizado por "introdução da tarefa", "trabalhar em pares", "discussão coletiva" e "sistematização". O plano também revelou, para cada fase, um conjunto de ações que previu executar, a maioria diretamente dedicadas a promover a aprendizagem matemática dos alunos (por exemplo, colocar algumas questões específicas para os alunos, comparar diferentes soluções específicas…) e algumas outras relativas à gestão da turma e do seu trabalho (por exemplo, organizar os alunos em pares, selecionar as resoluções dos alunos a serem discutidas, fornecer transparências e canetas para preparar as apresentações, …). Célia registou também no plano a previsão do tempo, em minutos, que pretendia dedicar a cada fase da aula.

A observação e análise da aula de Célia permitiram identificar as ações que realiza e as respetivas intenções foram identificados a partir das entrevistas, em especial da de reflexão final. De seguida, selecionamos alguns trechos desta entrevista de reflexão final realizada a Célia, em que a professora explica as suas opções e as suas principais intenções, o que nos permite interpretar as ações observadas em cada fase da aula.

Introdução da tarefa. Célia explica muito claramente as suas intenções na apresentação da tarefa à turma. Considera que esse momento é decisivo para o desenvolvimento do trabalho matemático dos alunos, pelo que deve requerer bastante cuidado por parte do professor. Esta preocupação de Célia é justificada pela natureza das tarefas que escolhe quando desenvolve uma abordagem exploratória na sala de aula: tarefas desafiadoras, frequentemente problemas ou investigações que exigem um esforço de interpretação. Célia tenta assegurar que os alunos compreendam bem o contexto e os objetivos da tarefa, ouvindo atentamente os seus comentários e perguntas:

> portanto, eu acho que deve ser uma apresentação de um desafio e deve ser uma interpretação e uma compreensão do que é que aquele desafio pretende... Penso que sim, que serão esses os dois objetivos, o interpretar, o compreender o que se pretende. (...) Eu tenho a preocupação de dedicar o tempo suficiente para eles perceberem e dar também tempo para eles colocarem as questões e as dúvidas... O estar a questioná-los e o estar à espera que perguntem ou que tenham dúvidas é também para que eu própria perceber se eles perceberam.

Na perspetiva de Célia, se os alunos não entendem a tarefa "eles vão criar confusões e então... às vezes é tarde demais na aula para esclarecer e para os recuperar". Além de garantir a compreensão da tarefa pelos alunos, Célia também quer que eles se envolvam com esta e assumam o desafio de a resolver:

> É impeli-los para a tarefa, predispô-los para a tarefa. Não é só compreender, mas assumir a tarefa como sua... no fundo aqui entra também um bocado a parte do desafio, assumir como uma questão minha que eu quero resolver.

Desenvolvimento da tarefa. Célia centra a sua reflexão sobre esta fase da aula no seu apoio aos alunos para a resolução autónoma da tarefa. Confessa as suas dificuldades em monitorar o progresso do trabalho dos alunos. Isto exige, na sua opinião, "um equilíbrio" entre deixá-los por conta própria e dar-lhes alguma orientação. Mas, acima de tudo, quer dar-lhes a oportunidade de resolver a tarefa pelas suas próprias estratégias, ainda que isso requeira de si esforço para tentar compreender o pensamento dos alunos:

> Quando eu procuro ir de par em par ou de grupo em grupo, procuro perceber como é que eles estão, o que é que eles perceberam, como é que eles estão a trabalhar – e procuro fazer isto com perguntas e às vezes não é fácil. (...) Tenho um bocado esta preocupação de

> tentar seguir os raciocínios deles, que não é fácil, porque às vezes há situações em que a gente está muito longe e estamos a ver que é correto… mas "como é que ele pensou?".

Outra preocupação de Célia é não validar a correção das estratégias ou respostas dos alunos, nem quando estão certos, nem quando estão enganados, embora saiba que às vezes a sua expressão facial revela mais do que gostaria. Quando identifica algum grupo cujo trabalho não evolui de forma produtiva, coloca-lhe perguntas com a intenção de que reflitam sobre a abordagem à tarefa e os seus erros e adotem uma outra estratégia de resolução ou corrijam os erros:

> Se eu estou a ver que eles estão a ir por um caminho completamente errado, tento não dizer "isto não está bem"… Tento dizer "mas como é que começaste? Então volta lá atrás… Será que isto se verifica?". Por exemplo, se eles pensaram mal para os dez cubos, pergunto "essa forma de pensar verifica-se da forma como pensaste para os três cubos?"… Tentar fazer com que eles cheguem ao caminho correto.

Célia também se refere à difícil função que tem de desempenhar enquanto acompanha o trabalho dos grupos, relativa à organização da discussão da tarefa. A professora escolhe cuidadosamente as resoluções dos grupos que identifica como relevantes para a discussão matemática coletiva que quer promover com o objetivo de cumprir o seu propósito matemático específico da aula:

> escolher quais daquelas resoluções são importantes para a discussão coletiva – e isso é muito difícil porque… às tantas, é quase um distanciamento que é complicado gerir na aula (…) com todas aquelas solicitações. (…) Destas oito resoluções diferentes, porque não podem ser todas, qual aquela que me interessa discutir nesta aula em particular?

Célia estabelece também a ordem de discussão das resoluções que seleciona em função do potencial que lhe reconhece, com vista a promover uma maior clarificação e compreensão da tarefa, e também para explorar representações matemáticas produtivas e esclarecedoras:

> Ter escolhido esta primeiro tem a ver com a tal questão da visualização... era a mais clara para eles entenderem as construções e a regra. Esta (outra) era mesmo por causa da imagem e da forma como eles representaram, eles foram aqui muito claros, 1+1+1... portanto eram os oito cubos a representar as diferentes faces (...) Esta [outra] era das representações mais claras desta questão da visualização, como eles visualizavam as construções – eu achei que se ainda havia dúvidas ou se ainda havia problemas, esta era mais uma tentativa de resolver.

Discussão da tarefa. Célia explicitamente valoriza esta fase da aula, pois para si constitui uma importante oportunidade de aprendizagem matemática para todos os alunos em sala de aula:

> é extremamente importante porque não é só eles terem estado a pares a trabalhar, mas é... Depois o que é que isso é em termos da aula de Matemática, o que é que fica no coletivo, o que é que é discutido?

A professora pede aos autores das resoluções selecionadas que exponham as suas estratégias e expliquem o seu raciocínio aos colegas, bem como que respondam às questões uns dos outros. Evita interferir na discussão, pois pretende que os alunos sejam protagonistas e eles parecem aceitar bem esse papel:

> a tentativa é que o momento seja deles, a apresentação seja deles, que as questões sejam colocadas ao grupo que apresenta (...) E eles estão constantemente a questionar os colegas e estão interessados...

Nesta fase, as principais preocupações da professora centram-se na orquestração das intervenções dos alunos, de modo a promover o esclarecimento das ideias matemáticas emergentes. Para esta professora, a discussão vai muito além da correção da tarefa, e o confronto de diferentes estratégias e resoluções constitui um enriquecimento que quer proporcionar aos alunos, mesmo quando eles discutem resoluções com erros:

> Eu acho que se apresentar diferentes [resoluções], se eles tiverem capacidade de apresentar diferentes representações e eu, depois, puder ligá-las e estabelecer as conexões entre elas, é muito mais rico do que apresentar uma só (...). A ideia também é deixar surgir aquilo que sai deles (...) e, às vezes, até pegar em situações que não estão certas.

Apesar de na aula observada manter nesta fase um papel discreto de orientação, a professora conduziu uma discussão específica por ela proposta, confrontando três das diferentes resoluções já apresentadas pelos alunos, que expôs em simultâneo no retroprojetor, recorrendo aos acetatos dos grupos. A sua explicação para esta ação aparentemente contraditória baseia-se na sua visão do papel da discussão da tarefa:

> Há uma altura em que eu confronto três resoluções. A ideia é essa, de haver o confronto. [A discussão] é um momento de aprendizagem, portanto... Não pode ser uma apresentação, nem é uma correção, porque não é isso... o momento é de pôr em confronto, pensarmos em conjunto nas diferentes resoluções, nas diferentes representações, isso tem de sair dali, da apresentação... é um objetivo. (...) É colocá-los a eles a ter esse sentido crítico: "nesta situação, qual é aquela representação, aquela resolução... qual é a forma de pensar que, de facto, me ajuda mais? Porque posso ter duzentas mas, se calhar, há ali uma que eu posso escolher...."

Sistematização da aprendizagem matemática. Após a discussão, que concluiu sobre uma regra que permite determinar quantos autocolantes são utilizados numa construção com um determinado número de cubos, Célia adotou um papel mais diretivo para realizar um "momento de sistematização". Ela mostra aos alunos uma tabela incompleta, projetada numa transparência que previamente preparou, que relaciona o número de cubos e o número de autocolantes, e desafia-os a uma outra questão que estende a tarefa anterior. A professora quer tirar proveito da discussão da tarefa para reforçar a importância e o poder das regras com letras ao explorar situações em que se lida com uma variável. Recorda também as operações inversas, procurando que a regra seja lida "ao contrário", estabelecendo assim conexões com conhecimentos e procedimentos já abordados com os alunos em situações anteriores.

> Depois deles trabalharem em pares e de discutir coletivamente o que fizeram, há uma parte de sistematização onde eu confronto... Começo por esta tabela – este número de cubos [52] até foi uma coisa que eles trabalharam – [e pergunto]: "Como é que descobrimos o número de autocolantes?". Então, fizemos e escrevemos a regra... "E agora, sabendo o número de autocolantes, como é que sabemos o número de cubos?". E depois há o confronto das regras no sentido de se ver as operações inversas que foram trabalhadas. E isso foi feito na sistematização, no momento de sistematização.

Considerações finais

O quadro 1 apresenta, de forma sintética, o conjunto de ações e intenções de Célia identificadas na prática relativa à tarefa Cubos com autocolantes. Como se pode observar, Célia realizou um vasto conjunto de ações específicas, associadas a cada fase da aula. Estas ações concretizam intenções que a professora consegue explicar muito claramente e revelam dois propósitos fundamentais que estão presentes em todas as fases da aula: a promoção das aprendizagens matemáticas dos alunos e a gestão dos alunos e da turma como um todo.

A maioria das ações realizadas sobre a gestão de classe têm a intenção de criar melhores condições para a aprendizagem matemática pelos alunos. Na verdade, Célia revela um grande sentido do seu impacto na dinâmica da sala de aula e na matemática que os alunos podem aprender. Por exemplo, ela sabe que se não prestar atenção à ordem das apresentações das resoluções por parte dos alunos, pode comprometer a qualidade da discussão coletiva matemática e restringir as possibilidades de aprendizagem dos alunos. Os aspetos relacionados com a gestão da aula são muitas vezes apenas referidos de modo superficial ou implícito mas têm um impacto significativo nas aprendizagens dos alunos (Anghileri, 2006).

A professora também revelou um forte entendimento do papel das ações realizadas em cada fase da aula e de sua influência no sucesso. Por exemplo, Célia valoriza que os alunos trabalhem realmente de forma autónoma porque na fase de discussão pretende ter um confronto e comparação de diferentes resoluções e não apenas um desfilar de respostas iguais e corretas. Agir de forma a não comprometer o sucesso de uma abordagem exploratória da Matemática é certamente difícil e exige contrariar modos de fazer decorrentes do ensino mais tradicional (Canavarro, 2011; Stein et al., 2008).

Quadro 1 – Ações e intenções de Célia na sua prática de ensino exploratório da Matemática.

	Promoção da aprendizagem matemática	Gestão dos alunos e da turma
Introdução da tarefa	*Garantir a apropriação da tarefa pelos alunos:* - Familiarizar com o contexto da tarefa (material cubos e autocolantes para apresentação) - Esclarecer a interpretação da tarefa (como?) - Estabelecer objetivos (o que se quer saber?) *Promover a adesão dos alunos à tarefa:* - Estabelecer conexões com experiência anterior - Desafiar para o trabalho	*Organizar o trabalho dos alunos:* - Definir formas de organização do trabalho (grupos de dois alunos para o trabalho autónomo e turma toda para a discussão coletiva) - Organizar materiais da aula (folhas com enunciado da tarefa e cubos e autocolantes para todos os grupos)
Realização da tarefa	*Garantir o desenvolvimento da tarefa pelos alunos:* - Colocar questões e dar pistas - Sugerir representações - Focar ideias produtivas - Pedir clarificações e justificações *Manter o desafio cognitivo e autonomia dos alunos:* - Cuidar de promover o raciocínio dos alunos - Cuidar de não validar a correção matemática das respostas dos alunos (nem respostas, nem expressões faciais)	*Promover o trabalho de pares/grupos:* - Regular as interações entre alunos - Providenciar materiais para o grupo *Garantir a produção de materiais para a apresentação pelos alunos:* - Pedir registos escritos - Fornecer materiais a usar (acetatos e canetas) *Organizar a discussão a fazer:* - Identificar e selecionar resoluções variadas (clarificadoras, com erro a explorar, e com representações relevantes) - Sequenciar as resoluções selecionadas
Discussão da tarefa	*Promover a qualidade matemática das apresentações dos alunos:* - Pedir explicações claras das resoluções (Porquê?) - Pedir justificações sobre os resultados e as formas de representação utilizadas - Discutir a diferença e eficácia matemática das resoluções apresentadas (tabelas e regras escritas como expressões com letras) *Regular as interações entre os alunos na discussão:* - Incentivar o questionamento para clarificação de ideias apresentadas ou esclarecimento de dúvidas - Incentivar a resposta às questões colocadas	*Criar ambiente propício à apresentação e discussão:* - Dar por terminado o tempo de resolução da tarefa pelos alunos - Providenciar a reorganização dos lugares/ espaço para a discussão - Promover atitude de respeito e interesse genuíno pelos diferentes trabalhos apresentados *Gerir relações entre os alunos:* - Definir a ordem das apresentações - Promover e gerir as participações dos alunos na discussão
Sistematização das aprendizagens matemáticas	*Institucionalizar ideias ou procedimentos relativos ao desenvolvimento do pensamento algébrico suscitado pela exploração da tarefa:* - Identificar representações produtivas para obter generalizações (tabela) - Reconhecer o valor de uma regra com letras *Estabelecer conexões com aprendizagens anteriores:* - Evidenciar ligações com conceitos matemáticos e procedimentos anteriormente trabalhados (ideia de regra com letras; ideia de operação inversa).	*Criar ambiente adequado à sistematização:* - Focar os alunos no momento de sistematização coletiva - Promover o reconhecimento da importância de apurar conhecimento matemático a partir da tarefa realizada *Garantir o registo escrito das ideias resultantes da sistematização:* - Registo pela professora em acetato que previamente estruturou

Ainda no que diz respeito à estrutura da aula, Célia adotou quatro fases: Introdução da tarefa pela professora em interação com os alunos; Realização da tarefa pelos alunos e acompanhada pela professora; Discussão da tarefa pelos alunos, orquestrada pela professora; Sistematização das aprendizagens matemáticas, conduzida pela professora com a colaboração dos alunos. Esta opção permite distinguir dois fins diferentes do trabalho coletivo da turma posterior à resolução da tarefa, identificados nas práticas de Célia: a discussão da tarefa, com base na comparação e confronto de estratégias dos alunos, e o colocar em evidência e institucionalizar da aprendizagem matemática (um conceito, uma ideia, um procedimento, ...) pretendida pela professora como um propósito matemático da aula, ancorada na exploração da tarefa e sua discussão. A identificação destes dois propósitos distintos, correspondentes também a momentos distintos da aula, reforça a possibilidade de o ensino exploratório ser adequado não apenas ao desenvolvimento de capacidades transversais dos alunos como, por exemplo, a resolução de problemas e a comunicação matemática, mas também como contexto de aprendizagem de conceitos e procedimentos que anteriormente não foram ainda trabalhados pelo professor com os alunos e que assim surgem com significado e relevância perante estes (Canavarro, 2011; Stein et al., 2008).

Outro aspeto interessante que se evidenciou da prática de Célia foi a diversidade de papéis que a professora e os alunos assumiram. A prática de um ensino exploratório da Matemática não implica necessariamente que os alunos estão no comando da aula a cada momento. É muito claro que Célia assume uma atitude de condução da aula mais centrada em si mesma na fase final de sistematização das aprendizagens dos alunos, enquanto nas fases em que os alunos trabalham autonomamente e discutem a tarefa, tenta ser, ainda que de formas diferentes, o mais discreta possível. O papel do professor e dos alunos na sala de aula é certamente um aspeto marcante da experiência matemática dos alunos (NCTM, 2000; Ponte, 2005).

A elaboração deste quadro evidenciou-nos a dimensão relacional que está muito presente nas práticas de ensino exploratório. Na realidade, esta caracterização das práticas de Célia deve ser vista no contexto das suas relações com os alunos: a esmagadora maioria das ações da professora surge como resposta à sua interpretação do que são as necessidades da turma ou de alguns alunos particulares tendo em vista os propósitos matemáticos para a aula. Ela interpreta ouvindo e observando os alunos, e decide a sua ação seguinte em função da apreciação do que ouve e observa, ancorada no que foi a sua preparação da aula (Franke, Kazemi, & Battey, 2007; Stein et al., 2008).

O quadro da prática de Célia também reforça a ideia da complexidade do desenvolvimento das práticas de ensino exploratório da Matemática (Franke, Kazemi, & Battey, 2007). Durante a aula, a professora precisou de prestar atenção a vários aspetos e em simultâneo, e precisou de tomar decisões que afetaram as oportunidades de aprendizagem matemática dos alunos.

É nossa expectativa de que uma análise transversal de casos de diferentes professores nos permita a elaboração um quadro geral que constitua uma referência real e detalhada da prática de ensino exploratório dos professores de Matemática, e que este possa servir como um recurso para o desenvolvimento do professor que pretende experimentar e consolidar este tipo de ensino a fim de proporcionar aos seus alunos oportunidades de aprendizagem da Matemática mais significativas. Como Boaler (2003) aponta, entender e capturar as práticas de ensino pode contribuir para preencher a lacuna entre a investigação e a prática. Descrições da prática de sala de aula podem não só ampliar o conhecimento sobre esta prática tão complexa, mas também constituem um recurso útil para a formação de professores.

Referências

Anghileri, J. (2006). Scaffolding practices that enhance mathematics learning. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9,* 33–52.

Boaler, J. (2003). Studying and capturing the complexity of practice: The case of the 'dance of agency'. In N. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3-16). Honolulu, Hawaii.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática, 115,* 11-17.

Franke, K. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 225-356). Charlotte, NC: Information Age.

Lampert, M. (2004). Response to teaching practice/Teacher learning practice group. In J. Spillane, P. Cobb, & A. Sfard (Org.), *Investigating the practice of school improvement: Theory, methodology and relevance*. Bellagio, Italy.

Mezirow, J. (1991). *Transformative dimensions of adult learning*. San Francisco: Jossey-Bass.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, P. (2012). The use of classroom videos as a context for research on teachers' practice and teacher education. In *Proceedings of ICME 12* (pp. 4280-4289). Seoul: ICME.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutierrez, & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Roterdham: Sense.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Canavarro, A. P., Moreira, D., Martinho, H., Menezes, L., & Ferreira, R. (2012). Projeto P3M – Práticas profissionais dos professores de Matemática. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Eds.), *Investigação em Matemática: Práticas de ensino da Matemática*, Castelo de Vide: SEM.

Ruthven, K., Hofmann, R., & Mercer, N. (2011). A dialogic approach to plenary problem synthesis. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 81-88). Ankara, Turkey: PME.

Sowder, J. T. (2007). The Mathematical Education and Development of Teachers. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 157-223). Charlotte, NC: Information Age.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Helping teachers learn to better incorporate student thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313-340.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3,* 268–275.

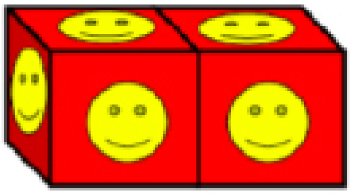
Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27,* 458-477.

Anexo 1*

Tarefas "Cubos com autocolantes"

A Joana está a construir um jogo com cubos e autocolantes. Ela une os cubos por uma das faces e forma filas de cubos. Depois cola um autocolante em cada uma das faces.

A imagem mostra a construção que a Joana fez com 2 cubos. Nessa construção ela usou 10 autocolantes.



1. Descobre quantos autocolantes a Joana usa numa construção com:

    1.1. Três cubos.

    1.2. Quatro cubos.

    1.3. Dez cubos.

    1.4. Cinquenta e dois cubos.

2. Consegues descobrir qual é a regra que permite saber quantos autocolantes a Joana usa numa construção com um qualquer número de cubos? Explica como pensaste.

* Tarefa adaptada de Moss, J., Beaty, R., McNab, S. L., & Eisenband, J. (2005). *The potential of geometric sequences to foster young students' ability to generalize in Mathematics*. http://www.brookings.edu/gs/brown/algebraicreasoning.htm

COMUNICAÇÃO

10. Comunicação matemática na sala de aula: Conexões entre questionamento, padrões de interação, negociação de significados e normas sociais e sociomatemáticas

por António Guerreiro

10. Comunicação matemática na sala de aula: Conexões entre questionamento, padrões de interação, negociação de significados e normas sociais e sociomatemáticas

António Guerreiro

Escola Superior de Educação e Comunicação,

Universidade do Algarve

aguerrei@ualg.pt

• **Resumo:** O presente capítulo tem como principal objetivo relacionar o questionamento, os padrões de interação, a negociação de significados matemáticos e as normas sociais e sociomatemáticas, com suporte em dados empíricos referentes à comunicação matemática na sala de aula. Os dados empíricos constam de casos referentes a uma investigação com três professoras do 1.º ciclo, sobre a evolução das conceções e práticas de comunicação matemática, no decorrer de um trabalho colaborativo focado na reflexão sobre as práticas de comunicação em sala de aula. Os dados evidenciam um acréscimo significativo das interações comunicativas entre os alunos e entre estes e as professoras, no decorrer do trabalho colaborativo, em resultado de um questionamento inquiridor, pautado por padrões de extração e de discussão, e de uma negociação de significados regulada pelo reconhecimento dos conhecimentos matemáticos singulares dos alunos e por normas sociais e sociomatemáticas promotora da aprendizagem matemática.

• **Palavras-Chave:** Comunicação matemática, Questionamento, Padrões de interação, Negociação de significados, Normas sociais, Normas sociomatemáticas.

Introdução

A comunicação matemática abrange um amplo conjunto de processos de interação entre os alunos e entre estes e o professor, os quais configuram óticas distintas em relação à valoração das ideias matemáticas dos alunos. A valorização pelo professor das ideias matemáticas pessoais e singulares dos alunos, mesmo que imperfeitas ou erradas, prossegue um significativo questionamento em sala de aula de Matemática, espelhado em padrões de interação, alicerçados em normas sociais e sociomatemáticas e em processos de negociação de significados, emergentes das conexões entre as ideias matemáticas em discussão e os conhecimentos pessoais dos alunos.

As novas ideias assumem significado à medida que o aluno é capaz de fazer conexões com outras ideias matemáticas e com outros aspetos do seu conhecimento pessoal (Bishop & Goffree, 1986), decorrente da negociação de significados em que o professor e os alunos evidenciam e partilham os seus próprios significados matemáticos no processo de ensino-aprendizagem (Ponte & Serrazina, 2000). As ideias e significados matemáticos na sala de aula transformam-se em conhecimento matemático quando são partilhados e assumidos como válidos pela comunidade de interlocutores (Bishop & Goffree, 1986; Fidalgo & Ponte, 2004). Esta negociação de significados matemáticos resulta da identificação de conflitos entre o professor e os alunos (e entre os alunos) (Voigt, 1994), podendo ser declarada, na argumentação de diferentes pontos de vista, ou tácita, na adequação das ações em acordo com a avaliação das expectativas ou reações dos outros (Rodrigues, 2000), o que nos remete para a importância da autonomia crítica de todos os indivíduos e do respeito e reconhecimento das ideias singulares de cada um.

Nesta perspetiva, os significados matemáticos não existem por si mas são gerados durante o processo de comunicação e interação social, caracterizado pelos padrões de interação existentes entre os alunos e entre estes e o professor, justificados no questionamento e nas rotinas de ação, caracterizadas por normas sociais e sociomatemáticas na sala de aula. Torna-se assim essencial que o professor se guie pela capacidade de ouvir com atenção o que dizem os alunos quando lhe explicam as suas ideias, estratégias e soluções, ainda que imprecisas ou incorretas, e os encoraje a partilharem-nas com os outros na sala de aula.

Este capítulo analisa as conexões entre o questionamento, os padrões de interação, a negociação de significados e as normas sociais e sociomatemáticas na sala de aula de Matemática, num contexto da valorização das interações sociais entre os alunos e entre estes e o professor, tendo por suporte episódios de comunicação matemática em salas de aula do 1.º ciclo. Pretendo destacar o reconhecimento da singularidade dos conhecimentos matemáticos dos alunos no desenvolvimento das interações comunicativas entre estes e o professor, através de um questionamento inquiridor, de padrões de interação centrados nos conhecimentos dos alunos, do estímulo do confronto na negociação de significados e na argumentação matemática entre os alunos, pautada por normas sociais e sociomatemáticas.

Questionamento, padrões de interação, negociação de significados e normas sociais e sociomatemáticas

As características das interações sociais entre o professor e os alunos resultam de práticas de sala de aula distintas, que oscilam, com concretizações intermédias, entre um questionar pergunta-resposta do professor e uma prática de diálogo em que os alunos desempenham um papel significativo na explicitação do seu pensamento acerca dos assuntos matemáticos, contribuindo com as suas ideias, estratégias e soluções nas discussões em sala de aula (Wood, 1994). Assume-se que os alunos aprendem melhor em situações de interação e partilha comunicativa das suas ideias individuais acerca da Matemática (Wood, Merkel & Uerkwitz, 1996) e que o encadeamento entre o conhecimento matemático e a negociação de significados através da comunicação alicerça-se em contextos de interação social, caracterizados pela intencionalidade comunicativa na valorização das ideias, estratégias e soluções de todos os alunos e do professor no processo de ensino-aprendizagem da matemática.

Questionamento. O papel comunicativo do professor é decisivo no desenvolvimento das interações sociais entre os alunos e entre estes e o professor, nomeadamente através da formulação de questões aos alunos. Todavia, a existência por si só de questões não é condição suficiente para uma expressiva prática de ensino-aprendizagem da Matemática, é fundamental o envolvimento do professor e dos alunos numa prática de questionamento e de reflexão permanente na sala de aula (Menezes, 1995). O professor tem uma função capital na condução do discurso oral e no questionamento que ocorre na sala de aula, apesar da tradição predominante das questões incidirem na regulação das aprendizagens dos alunos, na tentativa de testar o seu conhecimento e a sua memória (Matos & Serrazina, 1996), as questões do professor também auxiliam a compreensão da Matemática por parte dos alunos.

Mason (1998, 2000) distingue três tipos principais de questões: de verificação ou teste, de focalização e de inquirição. Para o autor, segundo a perspetiva dos alunos, todas as questões do professor têm em vista a certificação de conhecimentos, ocasionando uma interpretação extensiva das questões de focalização e inquirição à testagem ou verificação de conhecimentos, traduzindo o questionamento num processo sistemático de avaliação. Nesta ótica, quando o professor questiona os alunos, estes tentam adivinhar a resposta esperada pelo docente, resultando na assunção do pensamento do docente em prejuízo do pensamento próprio dos alunos.

As questões de verificação ou teste pretendem aferir os conhecimentos dos alunos através de perguntas diretas que exortam respostas curtas e imediatas, conhecendo o professor exatamente a resposta exigida. As questões de verificação ou teste são frequentes na sala de aula e assumem o papel de certificação de conhecimentos, de articulação ou conexão entre diferentes ideias matemáticas e de regulação da atenção e comportamento dos alunos na sala de aula (Guerreiro, 2012; Mason, 1998, 2000). As questões de focalização têm por objetivo direcionar a atenção do aluno para um aspeto específico, que o professor visualiza, assumindo a valorização do questionamento em detrimento da declaração. As questões de focalização podem determinar uma mudança de foco, de tema ou de interação, ao descentrar a visão do aluno, assumindo uma dimensão metacognitiva (Guerreiro, 2012; Mason, 1998, 2000).

As questões de inquirição são consideradas as genuínas perguntas que o professor coloca quando está à procura de informação por parte do aluno ou que os indivíduos questionam em situações de busca de informação. Para o professor, a inquirição sobre respostas conhecidas de problemas ou tarefas matemáticas é difícil, se não impossível (Mason, 2000), limitando a inquirição ao propósito de conhecer o pensamento e as estratégias dos alunos, a par do estímulo na busca de novas relações e conexões matemáticas. A quase ausência de questões de inquirição na sala de aula pode indiciar a existência de um professor omnisciente e omnipresente e de alunos pouco ou nada questionadores, inábeis na construção do seu próprio conhecimento matemático através da análise, conjetura e justificação de relações (Guerreiro, 2012; Mason, 1998, 2000).

Padrões de interação. A natureza das interações entre o professor e os alunos é caracterizada por padrões de interação social que se traduzem em rotinas de interação entre os alunos e entre estes e o professor (Bauersfeld, 1988). Estes padrões de interação refletem a natureza das interações e as características da prática em sala de aula (Wood, 1994), adotando distintas denominações conforme as suas particularidades e os seus autores.

Para Tanner e Jones (2007), a quase ausência de interação do professor com a turma é a leitura, em que não se verbalizam as interações entre o ensino e o pensamento dos alunos. Um outro padrão de reduzida interação, referido por vários autores, é o padrão de recitação ou tradicional (Menezes, 2004; Wood, 1998) ou sanduíche (Arlo & Skovsmose, 2006), caracterizado por uma prática repetitiva e rotineira de evidenciação do conhecimento de factos e procedimentos matemáticos. Nestes dois modos de interação, o professor assume um papel de transmissor ou regulador dos conhecimentos perante alunos, ouvintes ou respondentes, que assumem a condição de não se considerarem fontes de conhecimento (Frid & Malone, 1994).

A investigação em educação matemática identificou uma variedade de outros padrões de interação entre o professor e os alunos, com especial relevância para os de funil, de focalização, de extração e de discussão (Godino & Llinares, 2000; Guerreiro, 2011; Menezes, 2004; Wood, 1998). Estes padrões de interação entre o professor e os alunos resultam de dificuldades pelos alunos na resolução de uma tarefa matemática ou na explicitação das estratégias usadas na sua resolução. Perante a deteção da dificuldade ou impasse, o professor interage com os alunos como forma de os auxiliar na resolução do problema proposto ou na apresentação e explicitação do seu raciocínio matemático.

Os padrões de funil e de focalização caracterizam-se pela formulação de um conjunto sucessivo de questões, direcionadas com o intuito de controlar os processos de tomada de decisão dos alunos, conduzindo-os num trajeto predeterminado para uma solução fixa (funil) ou interagindo com os alunos na construção do conhecimento matemático, incentivando e integrando diferentes perspetivas e contribuições, validadas pelo pensamento do professor (focalização). Os padrões de extração e discussão caracterizam-se pela importância da contribuição individual dos alunos na interação social na sala de aula, sustentados pelo diálogo entre o professor e os alunos no reconhecimento e avaliação dos conhecimentos dos alunos (extração) ou na discussão reflexiva em torno dos conhecimentos adquiridos e do próprio processo de construção do conhecimento matemático (discussão) (Godino & Llinares, 2000; Guerreiro, 2011; Menezes, 2004; Wood, 1994, 1998).

Negociação de significados. A disponibilidade para a partilha subentende que a construção do conhecimento na sala de aula se alicerça na negociação de significados, num processo em que os intervenientes se encontram, se influenciam e sofrem mudanças. Nesta relação com o outro, idealmente todos os participantes têm as mesmas possibilidades de emitir ideias críticas sobre as questões em discussão e de construir novos significados a partir de experiências individuais ou coletivas de interação com os objetos matemáticos ou com outros indivíduos.

A comunicação e a negociação de significados tornam-se um importante processo de aprendizagem, mas também um elemento fundamental de interação entre os alunos, o professor e o conhecimento matemático (Bishop & Goffree, 1986), na busca de um entendimento comum acerca dos significados matemáticos partilhados num determinado grupo e, em simultâneo, modificados, consolidados e aprofundados por cada indivíduo (Ponte & Serrazina, 2000). O significado do conhecimento matemático é partilhado e assumido pelos intervenientes quando estes anuem com a validade dos referentes, dos exemplos, das analogias e das conexões anunciadas pelos interlocutores (Bishop & Goffree, 1986; Fidalgo & Ponte, 2004).

A negociação de significados matemáticos constitui um processo dinâmico de construção de significados durante a atividade matemática na sala de aula (Meira, 1996), em consequência da construção interativa da intersubjetividade (Godino & Llinares, 2000), em que se confrontam distintas interpretações e soluções na busca de consensos (Jiménez, Suárez & Galindo, 2010). As ambiguidades resultantes entre os significados matemáticos do professor e os significados atribuídos pelos alunos, progressivamente resolvidas através de um processo de negociação de significados (Meira, 1996), são geradas pela significativa diferença entre os conhecimentos do professor e dos alunos, especialmente na introdução de conceitos matemáticos (Voigt, 1994).

A negociação de significados matemáticos na sala de aula manifesta-se na produção de significados de conceitos e processos matemáticos (Guerreiro, 2013; Jiménez, Suárez & Galindo, 2010) e de normas sociais e sociomatemáticas (Guerreiro, 2011), em resultado das relações sociais entre os alunos e o professor (Voigt, 1994), emergindo do confronto interpretativo em múltiplas práticas sociais e culturais (Meira, 1996), cada uma delas em constante transformação, com especial relevo da cultura escolar matemática (Pinto & Fiorentini, 1997), sustentada por premissas comunicativas na sala de aula que suportam e determinam limites à atividade do professor e dos alunos.

Normas sociais e sociomatemáticas. As normas sociais e sociomatemáticas guiam o comportamento dos alunos, e do professor, nas interações sociais e nas especificamente matemáticas (Franke, Kazemi & Battey, 2007; Yackel & Cobb, 1996). Assumem-se como convenções estabelecidas na sala de aula sobre como comunicar e reagir perante as intervenções dos outros (D'Amore, Font & Godino, 2007; Planas & Iranzo, 2009). Não devem ser entendidas como imposições normativas do professor, mas como normas sujeitas a uma negociação de significados entre o professor e os alunos (Garcia Cruz & Martinón, 1998). A norma não é uma regra que determina a ação individual, é uma noção coletiva de ação (Yackel, 2000), traduzida na adequação e no valor das intervenções dos alunos e do professor, quando interagem uns com os outros na sala de aula.

Existem normas sociais independentemente da matéria em estudo relacionadas com a participação, explicação, justificação e argumentação (Cruz & Martinón, 1998; Yackel & Cobb, 1996) que se dirigem a toda a turma e não se restringem ao papel do professor. Estas normas sociais incluem as expetativas sobre o trabalho do aluno, idealizando os estudantes como sujeitos aprendentes, capazes de desafiar as explicações e justificações dos outros alunos, a par da justificação dos seus próprios argumentos (D'Amore, Font & Godino, 2007). As normas sociais na sala de aula de Matemática relacionam-se com os aspetos sociais da aprendizagem da Matemática, nomeadamente com a valorização das estratégias e ideias dos alunos na resolução de problemas, com o papel do erro como um meio de aprendizagem e com o valor da argumentação na validação matemática (Franke, Kazemi & Battey, 2007).

As normas sociais correspondem aos normativos de qualquer sala de aula, as normas sociomatemáticas, correspondem aos normativos específicos da sala de aula de Matemática (Yackel & Cobb, 1996) e inferem-se na identificação de regularidades ou ruturas nos padrões de interação social entre o professor e os alunos (D'Amore, Font & Godino, 2007; Planas & Iranzo, 2009). As normas sociomatemáticas são específicas da atividade matemática dos alunos e regulam as argumentações matemáticas destes, na valorização de soluções matemáticas inteligentes ou inventivas, numa explicação e argumentação matemática correta e na adequação dos procedimentos matemáticos. A compreensão normativa de matematicamente diferente, matematicamente sofisticado, matematicamente eficaz e matematicamente elegante na sala de aula constitui normas sociomatemáticas (Yackel & Cobb, 1996).

Design de investigação, participantes e trabalho colaborativo

Os dados empíricos referentes às práticas de sala de aula, que suportam este capítulo, conjugam a ação e a significação dos participantes, por adoção da modalidade de estudo de caso (Stake, 1994), apoiada na observação participante e na inquirição, com o desenvolvimento de um trabalho colaborativo, apoiado na reflexão e no questionamento sobre as práticas de comunicação matemática em sala de aula. Nesta investigação participaram três professoras do 1.º ciclo – Alexandra, Carolina e Laura –, ao longo de mais de dois anos (dezembro de 2006 a fevereiro de 2009). Durante o referido período ocorreram doze encontros de trabalho colaborativo (encontros colaborativos), catorze observações de aulas por cada uma das professoras (observação participante) e duas entrevistas e dois encontros individuais por cada uma das professoras (inquirição). A análise de dados interpretativa sustentou-se na redução de dados (Goetz & LeCompte, 1984), retratando a complexidade dos fenómenos e dos contextos na escrita dos casos (mais pormenores em Guerreiro, 2011).

As professoras apresentavam uma significativa experiência profissional, com um mínimo de doze anos de serviço docente neste ciclo de ensino, formações no âmbito do ensino da Matemática no 1.º ciclo, e uma significativa vontade de trabalhar em colaboração com vista ao reforço do seu conhecimento profissional sobre a comunicação matemática em sala de aula. A definição de interesses e objetivos comuns resultou da necessidade de assegurar um nível de intencionalidade do trabalho colaborativo em relação ao desenvolvimento profissional (Boavida & Ponte, 2002) e a um fazer e refazer de práticas de sala de aula, gerando permanências refletidas e mudanças conseguidas (Ruthven & Goodchild, 2008). O trabalho colaborativo apresentou como eixos fundamentais a confiança, sublinhada por Boavida e Ponte (2002), e a valorização da minha análise crítica (como investigador) e da das outras professoras, como observadores exteriores. O autoconhecimento das práticas letivas, através do visionamento das aulas e da reflexão crítica, gerou mudanças reconhecidas, pelas docentes, no âmbito do trabalho de grupo dos alunos, na apresentação das tarefas matemáticas, no reconhecimento do erro como um recurso educativo, na promoção das interações comunicativas entre os alunos e entre estes e as professoras e no reconhecimento das ideias e estratégias matemáticas pessoais e individuais dos alunos.

Trabalho colaborativo e práticas de comunicação matemática na sala de aula

A análise das práticas de comunicação das professoras e a discussão das estratégias educacionais, tendo em vista uma maior interação comunicativa na sala de aula entre os alunos e entre estes e a professora, resultou do assumir da relevância dos conhecimentos pessoais e individuais dos alunos na construção do conhecimento matemático. Com este propósito, o tempo destinado ao trabalho autónomo dos alunos em grupo diminuiu substancialmente, valorizando-se o espaço de apresentação e discussão das atividades matemáticas dos alunos em coletivo e a integração dos raciocínios e das ideias e estratégias matemáticas pessoais dos alunos no discurso de sala de aula.

No início do trabalho colaborativo, a comunicação matemática surgia associada à linguagem, à utilização dos termos e conceitos específicos desta área de conhecimento, complementada com a verbalização dos processos e resultados matemáticos. As professoras avocavam uma prática reguladora das atividades dos seus alunos, particularmente na abordagem de novos conteúdos – "Se é a introdução de um novo conceito ou de um novo conteúdo, tenho sempre muita tendência para ser eu a falar e puxar pouco por eles" [2007 outubro _ encontro colaborativo _ Alexandra] –, sem descurar a integração do discurso dos alunos nas intervenções da docente, como modo complementar, em relação aos resultados e aos processos matemáticos.

A assunção da dificuldade comunicativa dos alunos na justificação dos processos matemáticos – "[Os alunos] têm muita dificuldade em explicar, comunicar, quer comigo quer com os colegas, os passos... Explicar exatamente por onde passaram e porque é que fizeram daquela maneira e não de outra" [2007 fevereiro _ encontro colaborativo _ Alexandra] –, desencadeou uma insistência, por parte das professoras, na justificação dos processos matemáticos, diversificando os modos de questionamento e incentivando a explicação do pensamento matemático do aluno à professora e aos colegas.

O questionamento existente nas salas de aula organizava-se em torno da compreensão, por parte das professoras, do entendimento dos alunos sobre os enunciados das tarefas e os procedimentos matemáticos realizados. As questões, independentemente da sua formulação, apresentavam como objetivo final confirmar e validar entendimentos e conhecimentos dos alunos – "Eu faço mais os porquês para ver se realmente eles perceberam o enunciado" [2007 fevereiro _ encontro colaborativo _ Carolina].

A reformulação do questionamento, através da introdução de questões descentradas da solução das tarefas matemáticas, como por exemplo «És capaz de explicar de outra maneira?», foi um dos aspetos bastante debatidos nos primeiros encontros colaborativos. A diversificação do tipo de questionamento gerou uma maior participação dos alunos e um tipo de respostas, por parte destes, mais estruturadas e com uma maior profundidade justificativa.

O debate entre uma excessiva orientação e condicionamento do trabalho dos alunos e a valorização das suas estratégias matemáticas individuais tornou-se no cerne da discussão em torno da mudança das práticas de comunicação matemática com vista a uma maior interação entre os alunos e entre estes e a professora. A minimização da validação dos trabalhos autónomos dos alunos gerou um acréscimo nas interações entre os alunos e a professora, aquando da apresentação e discussão da atividade matemática em coletivo, ainda que inicialmente muito caracterizadas pelo padrão de pergunta do professor e resposta do aluno.

O reconhecimento das características dos padrões de interação originou uma reflexão sobre as atitudes das professoras nas interações com os alunos. Os padrões de funil e de focalização são reconhecidos como uma prática recorrente para encaminhar os alunos para uma dada estratégia e solução matemática – "Não é só para aquela solução, é para a estratégia que está na cabeça" [2008 janeiro _ encontro colaborativo _ Alexandra]. Ao debatermos as características dos padrões de *discussão* e de *extração*, as professoras salientaram algumas semelhanças na sua atuação quando os alunos "apresentam estratégias diferentes" [2008 janeiro _ encontro colaborativo _ Alexandra] com o objetivo de as fazer entender aos restantes alunos "os passos que [aqueles] seguiram" [2008 janeiro _ encontro colaborativo _ Alexandra] na resolução da tarefa matemática.

O progressivo incremento das interações entre os alunos foi constantemente referenciado pelas professoras, valorizando o autoquestionamento e a autonomia na aprendizagem. As professoras passaram a descrever momentos em que o discurso de sala de aula era assumido pelos alunos: "Hoje, estando à frente ou estando atrás [em relação aos alunos], é igual. Eles levam ali a discutir entre eles, que eu não existo. E estão sempre a fazer perguntas [uns aos outros]" [2009 fevereiro _ encontro colaborativo _ Carolina].

O debate em torno da importância do erro na aprendizagem e da participação dos alunos no discurso e nas atividades escolares originou momentos de reflexão que descreviam a existência de negociação de significados entre o professor e os alunos sobre conceitos e processos matemáticos e normas sociais e sociomatemáticas em sala de aula. Carolina relatou uma ocorrência de desacordo entre si e uma das suas alunas sobre o conceito de par (de calças). A tarefa matemática aludida envolve o produto cartesiano de duas variáveis – combinações de três blusas e três pares de calças:

> Era um palhaço, tinha três blusas e três pares de calças. A moça faz aquilo, foram dois ou três que fizeram isto, não mais. A moça foi logo a primeira que mostrou e eu: «O quê? Dezoito maneiras? Má atão [Mas então] onde é que tu foste buscar isto? Onde é que tu foste buscar isto? Dezoito maneiras?». [A aluna negociou com a docente o seu significado de par]: «Então, professora, três pares de calças. A professora já disse que um par são dois». Depois fiquei a pensar, se a miúda não tivesse explicado aquilo...
> [2007 outubro _ encontro colaborativo _ Carolina]

Para além da confrontação entre o significado social de um par de calças e o significado matemático de par, debateu-se uma outra situação, ocorrida numa aula observada, resultante da representação matemática do conceito social de pisca-pisca num instante com medida nula. A professora jamais imaginou que para os alunos o significado matemático de "piscar de três em três segundos era acender e estar [aceso] três segundos" [2008 junho _ encontro colaborativo _ Alexandra].

O acréscimo da participação dos alunos na comunicação matemática em sala de aula originou uma maior disponibilidade das professoras para a construção matemática de conceitos e processos matemáticos. Carolina exemplifica a negociação dos processos matemáticos com o cálculo do tempo decorrido entre dois registos horários, argumentando, por absurdo, com o contexto escolar: "Vocês entram às nove, saem às doze, estão aqui doze horas?" [2007 novembro _ encontro colaborativo].

As mudanças foram acontecendo ao longo do trabalho colaborativo a partir das estratégias educacionais definidas entre todos (professoras e investigador). Assumiu-se sempre uma atitude laboratorial e de tentativa e erro, resultando alguma indefinição na caracterização do caminho percorrido. Esta forma de trabalhar tendo por base a valorização do conhecimento dos alunos não gerou nenhuma lista de atitudes ou procedimentos, mas fez emergir uma atitude investigativa sobre a comunicação matemática em resultado de mudanças nas práticas letivas das professoras em função das análises reflexivas ocorridas nos encontros colaborativos.

Comunicação matemática nos conhecimentos da sala de aula

A centralidade das ideias, estratégias e resoluções de todos, e de cada um dos alunos, na busca de entendimento sobre a construção do conhecimento matemático valoriza as questões de inquirição, baseadas na partilha dos conhecimentos pessoais manifestados pelos alunos, caracterizada pelos padrões de extração e de discussão. O respeito pela identidade e valorização dos conhecimentos individuais dos alunos pode originar uma autêntica vontade de recolher informações, por parte do professor, através de questões de inquirição e de padrões de extração e discussão sobre os conhecimentos matemáticos dos alunos, e negociar os significados matemáticos na sala de aula, a par de normas sociais e sociomatemáticas reguladoras da identidade dos conhecimentos dos alunos e da argumentação matemática.

Inquirição, padrão de extração, negociação de conceitos, normas sociais. O reforço das interações entre os alunos e entre estes e as professoras proporcionou uma maior atenção, por parte das docentes, às ideias e estratégias matemáticas pessoais dos alunos, originando um crescente questionamento sobre as estratégias matemáticas utilizadas na resolução das tarefas matemáticas em sala de aula. Os alunos do 1.º ano da professora Alexandra são questionados sobre o número de combinações possíveis entre uma blusa e duas saias:

> **Professora:** Quantas combinações é que encontraram?
> **Alunos (Maria e Guilherme):** Duas.
> **Professora:** Duas. Então diz lá, Maria, porque é que fizeste assim?
> **Maria:** Porque só havia uma blusa e havia duas saias.
> **Professora:** E?
> **Maria:** E como não havia mais blusas, meti uma blusa azul e uma blusa vermelha...
> **Professora:** Uma saia.
> **Maria:** Uma saia vermelha num conjunto e uma saia verde e uma blusa azul num conjunto.
> [2008 novembro _ aula _ 1.º ano _ Alexandra]

Alexandra inicia o discurso com uma questão de verificação, complementada com uma questão de inquirição sobre o pensamento matemático da aluna («Então diz lá, Maria, porque é que fizeste assim?»). A questão de inquirição induz a existência do padrão de extração em que a professora envolve os alunos na explicitação matemática da resolução do problema:

> **Professora:** Ora bem, quer dizer que a menina, no teu caso, pode vestir a blusa azul com as duas saias. E o Guilherme também pensou o mesmo?
> (...)
> **Guilherme:** Pensei o mesmo que ela.
> **Professora:** E o que foi?
> **Guilherme:** Não percebi nada do que ela disse.
> **Professora:** Então, e pensaste o mesmo?
> **Guilherme:** Porque ela foi dizendo no lugar.
> **Professora:** Ah, então fizeste porque ela pensou? Não pensaste?
> [2008 novembro _ aula _ 1.º ano _ Alexandra]

Perante a inconsistência da resposta do Guilherme, Alexandra confronta-o o com uma questão de inquirição sobre a sua atitude («Ah, então fizeste porque ela pensou? Não pensaste?»), revelando uma negociação sobre a expetativa da professora em relação ao trabalho dos alunos na sala de aula. A negociação de significados de conceitos matemáticos é retratada no conceito de número singular ou plural, associado aos artigos definidos e indefinidos, através de uma questão de inquirição que nos remete para uma dicotomia entre a singularidade e a pluralidade:

> **Guilherme:** Uma blusa azul com uma saia vermelha e uma blusa azul com uma saia verde.
> **Professora:** Uma blusa ou a blusa?
> **Guilherme:** Uma blusa...
> **Professora:** A blusa era só uma, não era?
> [2008 novembro _ aula _ 1.º ano _ Alexandra]

Neste episódio a negociação de significados assume uma vertente matemática, de negociação do conceito de singularidade e de pluralidade, e uma vertente social, revelando a importância da autonomia dos alunos como sujeitos aprendentes, pautada pelo padrão de interação de extração dos conhecimentos dos alunos e pelas normas sociais de participação dos alunos na sala de aula. Este episódio revela a relação das questões de inquirição com os padrões de extração e a promoção de negociação de significados e de normas sociais potenciadoras da construção do conhecimento matemático.

Inquirição, padrão de discussão, negociação de processos, normas sociomatemáticas. A assunção da partilha de conhecimentos e estratégias singulares foi extensiva às interações entre os alunos, revelando uma crescente autonomia na aprendizagem e a existência de padrões de discussão entre os alunos. Na determinação da medida do lado de um quadrado conhecida a medida do seu perímetro, os alunos de Carolina confrontam matematicamente duas estratégias de resolução tentando negociar processos matemáticos através do conflito de procedimentos matemáticos, à luz da norma sociomatemática matematicamente eficaz («Porque é que não fizeste logo setenta e seis a dividir por quatro?»):

> **Jessica (lendo o enunciado):** O senhor António precisou de setenta e seis metros de rede para vedar o seu quintal (não concluiu a leitura) [quadrangular].
> **Dennis:** Nós fizemos uma conta de dividir por dois. (Registando no quadro o algoritmo tradicional da divisão) Setenta e seis a dividir por dois, para ver quanto é que dá metade (O aluno efetua os cálculos com recurso aos seus apontamentos). E depois fizemos trinta e oito a dividir por dois para saber a metade de trinta e oito, para que nos diga a resposta (O aluno efetua os novos cálculos). E depois para ver se dá correto, se nos dá dezanove, fizemos (consulta apontamentos) dezanove vezes quatro (regista uma adição com parcelas iguais). E deu-nos setenta e seis. Logo, vimos que deu a conta certa.
> **Beatriz:** Porque é que não fizeste logo setenta e seis a dividir por quatro?
> **Professora:** A tua colega está a colocar uma questão!
> [2008 março _ aula _ 3.º ano _ Carolina]

Carolina intervém facilitando a existência de um confronto entre duas estratégias corretas de resolução do problema, tentando extrair e explicitar o conhecimento do aluno, pautado pelo padrão de discussão («A tua colega está a colocar uma questão!»). A aluna tenta entender o pensamento do colega sobre o processo de construção do conhecimento matemático, utilizando questões de inquirição («A metade?»), justificando a validade matemática de um processo alternativo («Tu fizeste por partes, não foi?»), assumindo a norma sociomatemática matematicamente diferente:

> **Dennis:** Queria... queria a metade disto.
> **Beatriz:** A metade? Mas, se o quadrado tem quatro lados, eu acho que em vez de estares a fazer setenta e seis a dividir por dois... Pronto, podias logo fazer setenta e seis a dividir por quatro, porque o quadrado tem quatro lados.
> **Dennis:** Nós fizemos assim...
> **Beatriz:** Fizeram por parte?
> **Dennis:** Dividimos por dois, depois daqueles dois descobríamos os outros.
> **Beatriz:** Sim, eu sei. Tu fizeste por partes, não foi?
> **Dennis:** Sim.
> **Beatriz:** Só que podias ter feito tudo junto. Em vez de trinta e oito a dividir por dois, podias ter logo feito setenta e seis a dividir por quatro. Mas, pronto, fizeste por partes, está bem na mesma.
> **Dennis:** Mais perguntas?
> [2008 março _ aula _ 3.º ano _ Carolina]

A aluna Beatriz ao retomar a discussão tenta negociar o processo matemático de divisão direta por quatro, revelando a veracidade matemática da resolução do aluno, explicitando a norma sociomatemática matematicamente diferente. Este episódio assume uma outra vertente entre a professora e o aluno, segundo o padrão de extração («Eu quero saber porque é que vocês se lembraram de dividir setenta e seis por dois»), em que Carolina tenta negociar o processo de determinação da medida dos lados e o conceito de metade do perímetro de um quadrado:

> **Dennis:** Mais alguém quer alguma pergunta? Diga.
> **Professora:** Eu. Eu ouvi o que explicaste à Bia [Beatriz]. A Bia

acabou por explicar, acabou por dizer, colocar a tua explicação, mas eu quero saber porque é que vocês se lembraram de dividir setenta e seis por dois.

Dennis: Para descobrir a metade.

Professora: Uma pergunta: metade do quê?

Dennis: Metade de setenta e seis.

Professora: Porquê?

Dennis: Para depois saber a metade…

Professora: E essa metade de setenta e seis é o quê? É metade do quê?

Dennis: Aonde, professora?

Professora: Eu não estou a dizer que está mal, toma atenção, Dennis. A professora disse que estava mal?

Dennis: Não.

Professora: Não. Eu só quero saber é… Tentar perceber o que é que vocês pensaram. Não estou a dizer que está errado. Está bem? Estou a tentar perceber como é que vocês pensaram.

[2008 março _ aula _ 3.º ano _ Carolina]

O aluno Dennis explicita a sua estratégia associando a divisão sucessiva por dois à divisão por quatro, como um processo normal e indiscutível («Para depois saber a metade….»). A existência da negociação de processos matemáticos entre a professora e o aluno vai além do cálculo algorítmico, assumindo a docente uma vontade expressa de conhecer o pensamento do aluno («Estou a tentar perceber como é que vocês pensaram»). Este episódio termina com uma explicitação da medida dos lados do quadrado, sem uma justificação matemática explicita (apesar de implícita) da estratégia do aluno:

Dennis: Metros.

Professora: Estamos a falar de metros. Trinta e oito é metade de setenta e seis metros. É verdade. Mas o que é isso?

Dennis: É rede.

Professora: É metade da rede, é isso? Trinta e oito metros é metade da rede.

Dennis: Depois fizemos metade de trinta e oito para fazermos a outra metade.

Professora: A outra metade do trinta e oito?

Dennis: Sim.

Professora: E chegaram ao...

Dennis: Dezanove.

Professora: E esse dezanove é o quê?

Dennis: É dezanove metros de cada lado.

[2008 março _ aula _ 3.º ano _ Carolina]

A negociação de significados de processos matemáticos surge entre os alunos e entre estes e a professora em consequência da necessidade de conhecer o pensamento do outro, revelando uma vontade expressa de inquirição e de evidência de padrões de extração e de discussão. Este episódio remete também para a existência de normas sociomatemática de matematicamente eficaz e matematicamente diferente emergentes na negociação de procedimentos matemáticos entre os alunos.

Considerações finais

O trabalho colaborativo apresentou como eixos fundamentais a confiança (sublinhada por Boavida & Ponte, 2002) e a valorização da análise crítica do investigador e das colegas, como observadores exteriores (referida em Saraiva & Ponte, 2003). Esta prática de análise crítica foi assumida como um modelo de formação adequado ao desenvolvimento profissional dos professores, por se centrar nas práticas e resultar numa reflexão partilhada entre todos, questionadora das práticas de sala de aula, como defende Hargreaves (1998). O dispositivo metodológico de trabalho colaborativo exerceu um papel central na análise e alteração de práticas de comunicação em sala de aula, baseadas na interação comunicativa entre os alunos e entre estes e as professoras e no reconhecimento dos conhecimentos singulares dos alunos.

O autoconhecimento e autoquestionamento das práticas profissionais em sala de aula geraram mudanças reconhecidas, pelas docentes, no âmbito do trabalho de grupo dos alunos, na apresentação das tarefas matemáticas, no reconhecimento do erro como um recurso educativo, na promoção das interações comunicativas entre os alunos e entre estes e as professoras e no reconhecimento das singularidades dos conhecimentos matemáticos dos alunos. A transformação do erro em recurso de aprendizagem resultou numa significativa mudança no entendimento da aprendizagem da Matemática e no reconhecimento das ideias e estratégias matemáticas pessoais e individuais dos alunos.

O reforço das interações entre os alunos e entre estes e as professoras sustentou a existência de questões de inquirição, em que as docentes procuraram genuína informação sobre o pensamento e as estratégias matemáticas dos alunos (Mason, 2000), através de padrões de extração (Godino & Llinares, 2000), em que tenta compreender os conhecimentos e processos matemáticos dos alunos, e de discussão (Godino & Llinares, 2000), gerados na reflexão do professor e dos alunos sobre o processo de construção do conhecimento matemático na sala de aula. A negociação de significados reportou-se aos conceitos e processos matemáticos e às rotinas diárias sociais e matemáticas (Jiménez, Suárez & Galindo, 2010; Meira, 1996), as quais constituem normas sociais e sociomatemáticas construídas na interação social entre os alunos e entre estes e o professor, constituindo progressivamente uma noção coletiva de ação (Yackel, 2000).

A compreensão mútua das ideias e estratégias matemáticas dos alunos decorreu da sustentação dos conhecimentos e da erudição de cada um dos intervenientes da comunidade educativa, através de uma negociação de significados matemáticos, pautada por normas sociais e sociomatemáticas que adotam a existência de ideias e estratégias matemáticas originais (D'Amore, Font & Godino, 2007), em consequência das ações dos participantes em sala de aula, e de processos de confrontação de saberes, alimentados por questões de inquirição, por padrões de extração e de discussão, centrados nos conhecimentos dos alunos e do professor.

Referências

Arlo, H., & Skovsmose, O. (2006). *Diálogo e aprendizagem em educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.

Bauersfeld, H. (1988). Interaction, construction, and knowledge: Alternative perspectives for mathematics education. In D. Grouws, T. Cooney, & D. Jones (Eds) *Perspectives on research on effective mathematics teaching* (Vol. 1, pp. 27-46). Reston, VA: NCTM.

Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: Reidel.

Boavida, A. & Ponte, J. (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In GTI–Grupo de Trabalho de Investigação (Ed.) *Refletir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 43-55). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

D'Amore, B., Font, V., & Godino. J. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradigma, 28*(2), 49-77

Fidalgo, A., & Ponte, J. (2004). Conceções, práticas e reflexão de futuros professores do 1º ciclo do ensino básico sobre o ensino da Matemática. *Quadrante, 13*(1), 5-29.

Franke, M., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. In F. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 225 - 256). Reston, VA: NCTM.

Frid, S. & Malone, J. (1995). Negotiation of meaning in mathematics classrooms: a study of two year 5 classes. *Mathematics Education Research Journal, 7*(2), 132-147.

García-Cruz, J. A., & Martinón, A. (1998). Interacción y construcción significativa del conocimiento: Notas teóricas y una práctica educativa. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 16,* 85-100.

Godino, J., & Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Revista Educación Matemática, 12*(1), 70-92.

Goetz, J., & LeCompte, M (1984). *Ethnography and qualitative design in educational research* (pp. 164-207). Orlando, FL: Academic Press.

Guerreiro, A. (2011). *Comunicação no ensino-aprendizagem da Matemática: Práticas no 1.º ciclo do ensino básico* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa).

Guerreiro, A. (2012). O que é que a Maria quer saber? In L. Santos et al. (Ed.), *Investigação em educação matemática 2012: Práticas de ensino da Matemática* (pp. 296-306). Portalegre: SPIEM.

Guerreiro, A. (2013). Negociação de significados no 1.º ano de escolaridade: Conceitos e processos matemáticos. In J. A. Fernandes, M. H. Martinho, J. Tinoco, & F. Viseu (Eds.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 451-465). Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

Hargreaves, A. (1998). *Os professores em tempos de mudança.* Lisboa: McGraw-Hill.

Jiménez, A., Suárez, N., & Galindo, S. (2010). La comunicación: Eje en la clase de matemáticas. *Práxis & Saber,* 1(2), 173-202.

Mason, J. (1998). Asking mathematical questions mathematically. *Actes du Colloque DIDIREM, Réussites et/ou apprentissages Nouvelles technologies; Les mathématiques en premier cycle universitaire, où en est-on?* Université de Versailles. (Acedido em 1 de junho de 2013 de http://www.math.jussieu.fr/~jarraud/colloque/mason.pdf)

Mason, J. (2000). Asking mathematical questions mathematically. *International journal of mathematical Education in Science and Technology, 31*(1), 97-111.

Matos, J. M., & Serrazina, M. (1996). *Didáctica da Matemática.* Lisboa: Universidade Aberta.

Meira, L. L. (1996): Aprendizagem, ensino e negociação de significados na sala de aula. In M. Mira & M. Brito (Eds.) *Psicologia na educação: Articulação entre pesquisa, formação e prática pedagógica* (Vol. 5, pp. 95-112). Rio de Janeiro: ANPEPP.

Menezes, L. (1995). *Conceções e práticas de professores de matemática: Contributos para o estudo da pergunta* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Menezes, L. (2004). *Investigar para ensinar Matemática: Contributos de um projecto de investigação colaborativa para o desenvolvimento profissional de professores* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa).

Planas, N., & Iranzo, N. (2009). Consideraciones metodológicas para la interpretación de procesos de interacción en el aula de matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 12*(2), 179-213.

Ponte, J. P., & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.º Ciclo.* Lisboa: Universidade Aberta.

Rodrigues, M. (2000). Interações sociais na aprendizagem da Matemática. *Quadrante, 9*(1), 3-47.

Ruthven, K., & Goodchild, S. (2008). Linking researching with teaching: Towards synergy of scholarly and craft knowledge. In L. English (Ed.) *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 565-592) New York, NY: Routledge.

Stake, R. (1994). Case studies. In N. Dezin & Y. Lincoln (Eds.) *Handbook of qualitative research* (pp. 236-247). London: Sage.

Tanner, H., & Jones, S. (2007). How interactive is your whiteboard? *Mathematics Teaching Incorporating Micromath, 200,* 37-41

Voigt, J. (1994). Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 26, 275-298.

Wood, T. (1994). Patterns of interaction and the culture of mathematics classrooms. In S. Lerman (Ed.). *Cultural perspectives on the mathematics classroom* (pp. 149-168). Dordrecht: Kluwer.

Wood, T. (1998). Alternative patterns of communication in mathematics classes: funneling or focusing? In H. Steinbring, M. Bussi, & A. Sierpinska (Eds.). *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 167-178). Reston, VA: NCTM.

Wood, T., Merkel, G., & Uerkwitz, J. (1996). Criar um ambiente na aula para falar sobre a Matemática. *Educação e Matemática, 40,* 39-43.

Yackel, E. (2000). *Creating a mathematics classroom environment that fosters the development of mathematical argumentation.* (Acedido em 1 de junho de 2013 de http://www.nku.edu/~sheffield/eyackel.html).

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27,* 458-477.

COMUNICAÇÃO

11. A comunicação na sala de aula numa abordagem exploratória no ensino dos números racionais no 5.º ano

por Marisa Quaresma, João Pedro da Ponte

11. A comunicação na sala de aula numa abordagem exploratória no ensino dos números racionais no 5.º ano

Marisa Quaresma

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

mq@campus.ul.pt

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

jpponte@ie.ulisboa.pt

• **Resumo:** Esta comunicação descreve e analisa a prática profissional em duas aulas de uma unidade de ensino de cunho exploratório que pretendia levar os alunos do 5.º ano a desenvolver a sua compreensão da noção de número racional e as capacidades de comparação e ordenação e de resolução de problemas com racionais, dando especial atenção à comunicação que se desenvolve na sala de aula. Trata-se de uma experiência de ensino (*design research*) em que os dados foram recolhidos por observação participante, com gravação vídeo e áudio, e recolha dos trabalhos dos alunos analisados com análise de discurso. Dos episódios apresentados ressalta uma prática profissional de cunho exploratório na sala de aula, a partir de tarefas de natureza diversificada, marcada por um discurso de cunho dialógico, pontuado por questões de inquirição e momentos de negociação de significados.

• **Palavras-Chave:** Abordagem Exploratória, Comunicação, Tarefa, Números Racionais, Prática Profissional.

Introdução

Os números racionais constituem um dos tópicos que mais dificuldades colocam aos alunos do 2.º ciclo. Particularmente problemático é o trabalho na representação em fração que, até há pouco tempo só era introduzida neste ciclo. Deste modo, o seu ensino coloca um desafio acrescido aos professores, constituindo um terreno interessante para o estudo da sua prática profissional.

O presente trabalho tem por base uma unidade de ensino onde esta representação desempenha um papel central e que pretende levar os alunos a desenvolver a sua compreensão da noção de número racional, da sua comparação e ordenação e a sua capacidade de resolução de problemas com números racionais. Para isso trabalha-se simultaneamente com as várias representações dos números racionais, nos diferentes significados, em diferentes contextos e tipos de grandezas, em tarefas de natureza diversificada e usando comunicação dialógica que valoriza as questões de inquirição. O objetivo deste capítulo é descrever e analisar as práticas letivas usadas em duas aulas desta unidade de ensino de cunho exploratório, com especial atenção à comunicação que ocorre na sala de aula.

Começamos por situar diversos aspetos centrais no trabalho com as diversas representações de números racionais, após o que discutimos o papel das tarefas e da comunicação na prática profissional do professor. De seguida, apresentamos a unidade de ensino e a metodologia de investigação utilizada. Passamos então a apresentar dois exemplos de situações na sala de aula, envolvendo trabalho exploratório na aprendizagem dos números racionais, em que procuramos evidenciar as principais caraterísticas das práticas profissionais do professor. Terminamos com uma síntese dos principais aspetos relativos a uma prática profissional de cunho exploratório.

Ensino-aprendizagem dos números racionais

As representações desempenham um papel fundamental no trabalho com números racionais. Uma representação é uma configuração de sinais, caracteres, ícones ou objetos que podem, de alguma forma, designar ou substituir alguma coisa (Goldin, 2003) e representar um número significa atribuir-lhe uma designação, sendo de notar que um número pode ter várias designações. Por exemplo, um número racional pode ser representado por um numeral decimal, uma fração, uma percentagem, um ponto na reta numérica ou em linguagens natural ou pictórica. Os alunos precisam de saber trabalhar com cada uma destas representações e estabelecer relações entre elas. Segundo o NCTM (2007):

> Os alunos necessitam de desenvolver e utilizar uma variedade de representações de ideias matemáticas para modelar situações problemáticas, para investigar relações matemáticas, e justificar ou refutar conjeturas. [...] Estas representações funcionam como ferramentas para raciocinar e resolver problemas ajudando, igualmente, os alunos a comunicarem o seu raciocínio a terceiros (p. 240).

Para McIntosh, Reys e Reys (1992), o sentido de número racional inclui o reconhecimento que estes números podem ser representados de muitas formas, e que, para resolver certos problemas, algumas representações são mais úteis do que outras. Post, Cramer, Behr, Lesh e Harel (1993) sugerem que a compreensão de número racional está relacionada com flexibilidade na conversão entre diferentes representações, nas transformações dentro de cada representação e na independência em relação às representações concretas. Defendem, ainda, que os alunos com pouca experiência na utilização e na conversão entre diferentes representações têm grandes dificuldades na abstração de informações das representações concretas, na realização de conversões e nas operações com símbolos matemáticos.

No Programa de Matemática anteriormente em vigor em Portugal a primeira representação de número racional trabalhada é o numeral decimal. No entanto, os alunos apresentam diversas dificuldades na compreensão desta representação que, segundo Owens (1993), se devem ao facto de se ensinar a trabalhar com numerais decimais antes de estes compreenderem o próprio sistema de numeração decimal. Este autor defende que a representação em numeral decimal e em fração devem ser trabalhadas concomitantemente, para que o aluno perceba que as duas traduzem a mesma situação e pertencem ao mesmo conjunto numérico.

A representação em percentagem de número racional, faz parte do quotidiano dos alunos, o que, como referem Parker e Leinhardt (1995), constitui um aspeto importante a ter em conta. Segundo estes autores, embora seja um conceito difícil de aprender, a percentagem constitui uma representação universal que faz a ligação entre situações do "mundo real" e os conceitos matemáticos ligados às estruturas multiplicativas. Pelo seu lado, Cox (1999) argumenta que as representações pictóricas são instrumentos úteis para o raciocínio, pois podem representar a informação de um problema e facilitar a mudança de estratégias de resolução. No seu estudo sobre as representações usadas na resolução de problemas, concluiu que os alunos têm diferentes formas de exteriorizar o seu raciocínio. Alguns produzem representações parciais, que parecem funcionar apenas como ajuda de memória, enquanto outros constroem representações que parecem ter um papel central no seu raciocínio. No que diz respeito à representação verbal, Streefland (1991) menciona que é importante que as frações sejam trabalhadas a partir dos seus nomes (metade, um terço, um quarto, etc.). Geralmente, os alunos começam por resolver questões usando uma mistura de representações verbais e pictóricas, nomeadamente desenhos ou esquemas, que servem de base a estratégias que permitem a ligação entre a interpretação da informação do enunciado e a respetiva solução.

Tarefas e comunicação como elementos das práticas letivas

Consideramos ainda que a prática profissional do professor na sala de aula de Matemática tem dois elementos estruturantes fundamentais: (i) as tarefas propostas aos alunos, com as representações e materiais que lhes estão associados, e (ii) a comunicação que ocorre na sala de aula, associada aos papéis assumidos por alunos e professor.

Tarefas. Em muitas salas de aula a tarefa que predomina é o exercício, ou seja, uma questão de dificuldade reduzida, em que os alunos são chamados a aplicar um método de resolução já aprendido, e que se resolve habitualmente em poucos minutos. Num balanço de vários estudos realizados no fim dos anos de 1970 nos EUA, Fey (1981) indica que se trata da tarefa, de longe, mais frequente nas aulas de Matemática. Nos últimos anos tem-se procurado caracterizar outros tipos de tarefa que possam ser usados na aula de Matemática. Assim, tem-se considerado o valor dos problemas (Pólya, 1945), dos projetos (Abrantes, 1995) e, mais recentemente das tarefas de exploração e investigação (Ponte, 2005). Na verdade, faz toda a diferença propor aos alunos a resolução de tarefas de aplicação de conhecimentos já aprendidos ou tarefas que requerem um esforço especial de interpretação e simulação de diferentes possibilidades, de elaboração e teste de conjeturas, e de formalização e justificação de resultados. Deste modo, a importância decisiva da escolha das tarefas para a aprendizagem dos alunos é uma ideia central da educação matemática (NCTM, 2007; Stein, Remillard & Smith, 2007).

As tarefas podem distinguir-se em muitos aspetos, incluindo o contexto, que pode ser matemático ou não matemático e familiar ou não familiar, o modo de apresentação, que pode ser oral, escrito e com e sem recurso a materiais e o tempo previsível para a sua realização. Stein, Remillard e Smith (2007) categorizam as tarefas em dois grandes grupos: com nível cognitivo elevado e reduzido. Chamam a atenção que, por vezes, uma tarefa é proposta a um nível cognitivo elevado mas uma sugestão ou esclarecimento do professor pode levar o nível cognitivo a decair bruscamente. A remoção das dificuldades para os alunos pode deste modo mudar a natureza da tarefa e o seu valor para a aprendizagem. Ponte (2005), pelo seu lado, propõe duas dimensões fundamentais para a análise das tarefas, a estrutura (aberta/fechada) e o grau de complexidade, argumentando que tarefas de diferentes tipos têm um papel próprio a desempenhar no processo de ensino-aprendizagem.

Comunicação. A comunicação que se desenvolve na sala de aula é outro elemento estruturante das práticas profissionais dos professores. Numa comunicação unívoca existe uma voz que prevalece sobre todas as demais. Em contrapartida, na comunicação dialógica participam diversos interlocutores num nível de relativa igualdade. Em muitas aulas predomina claramente a comunicação unívoca. No entanto, Ruthven, Hofmann e Mercer (2011) consideram que a comunicação dialógica é possível em situações de ensino desde que o professor assuma "de modo sério diferentes pontos de vista (...), encorajando os alunos a falar de modo exploratório, o que apoia o desenvolvimento da compreensão" (p. 4-81).

A investigação educacional há muito assinalou um padrão de comunicação muito frequente nos contextos de ensino, a sequência triádica conhecida por IRA (Iniciação-Resposta-Avaliação) (Franke, Kazemi & Battey, 2007). O professor começa por fazer uma pergunta (Iniciação), a que se segue uma Resposta de um aluno, que, por sua vez, dá origem a uma Avaliação do professor. Este tipo de comunicação deixa pouca margem para a participação criativa dos alunos. No entanto, Ruthven, Hofmann e Mercer (2011) sugerem que ele não é necessariamente incompatível com a fala dialógica, considerando que "promover o discurso interativo, multívoco e dialógico depende de se usar a estrutura triádica de formas particulares, tais como mudando da avaliação autoritária [no passo 3] para a promoção de mais reflexão e argumentação" (p. 4-82).

As orientações curriculares atuais sublinham a importância dos alunos desenvolverem a sua capacidade de comunicação matemática, tanto oralmente como por escrito (ME, 2007). Para que isso aconteça, é necessário que nas salas de aula lhes seja dada ampla oportunidade de participar nos processos de comunicação, apresentando as suas ideias, discutindo e argumentando as suas posições e questionando as posições dos outros. Especialmente importante é o modo como o consegue criar situações onde se explorem desacordos e se criem situações de argumentação (Wood, 1999).

Um dos aspetos fundamentais da comunicação que ocorre na sala de aula são as questões formuladas pelo professor. Entre estas, Ponte e Serrazina (2000) referenciam as questões de confirmação (para as quais se sabe de antemão a resposta), focalização (para captar a atenção de todos os alunos) destacando em especial o papel das questões de inquirição (que admitem uma variedade de respostas legítimas). Para além das questões do professor, devem destacar-se outros aspetos muito importantes no modo como este conduz a comunicação, como a negociação de significados matemáticos (Bishop & Goffree, 1986) e os processos de redizer (*revoicing*), apoiando o desenvolvimento da linguagem dos alunos (Franke, Kazemi, & Battey, 2011).

As tarefas e a comunicação são dois importantes elementos das práticas profissionais dos professores que, segundo Ponte, Quaresma e Branco (2012) podem ser analisadas tanto numa perspetiva sociocultural como cognitivista. Numa perspetiva sociocultural procuramos identificar a natureza da atividade (ou seja, os motivos do professor, o modo como estes originam os objetivos que pretendem alcançar e como são concretizados através de diversas ações profissionais) e a estrutura da atividade (observando as ações e operações envolvidas). De um ponto de vista cognitivista, damos atenção igualmente às tarefas e à comunicação nos planos de ação do professor e nas decisões que toma.

A unidade de ensino e a metodologia de investigação

Este trabalho foi realizado no âmbito de uma experiência de ensino, uma modalidade de *design research* (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer, & Schaube, 2003). Na base da experiência está uma unidade de ensino concebida a partir da conjetura geral de ensino aprendizagem segundo a qual os alunos desenvolvem a sua compreensão da noção de número racional e da sua comparação e ordenação, e a sua capacidade de resolução de problemas com números racionais (i) ao trabalharem simultaneamente as várias representações, (ii) nos diferentes significados, (iii) com diferentes contextos e tipos de grandezas, (iv) em tarefas sobretudo de natureza exploratória e (v) numa comunicação dialógica que valoriza as questões de inquirição. Sendo o propósito desta comunicação descrever e analisar as práticas letivas usadas em duas aulas desta unidade de ensino, damos especial atenção ao discurso desenvolvido na sala de aula.

A elaboração da unidade de ensino tem por base as orientações curriculares do programa de Matemática (ME, 2007) e a literatura de investigação sobre os números racionais. Assim, procuramos: (i) promover a flexibilidade na conversão entre e dentro das várias representações de número racional, com destaque para a decimal, fração e pictórica, mas incluindo também as representações percentagem e verbal; (ii) trabalhar com os vários significados de número racional, com destaque para os significados parte-todo e medida, mas incluindo também o quociente, operador e razão; e, muito especialmente, (iii) usar tarefas sobretudo de natureza exploratória, formuladas em contextos do quotidiano dos alunos, mas também tarefas em contexto matemático, envolvendo diferentes tipos de grandezas (contínuas e discretas) e dando atenção à construção não só das partes mas também das unidades.

Antes da planificação da unidade realizámos uma aula de diagnóstico para identificar os conhecimentos e dificuldades dos alunos. Os alunos, apoiando-se na ideia de divisão, mostraram bom desempenho na utilização de frações unitárias como operadores. No entanto, mostraram dificuldade na linguagem própria das frações, dizendo por exemplo “segunda parte” para se referirem a um meio e evidenciaram algumas dificuldades na compreensão dos numerais decimais. Considerámos por isso, necessário trabalhar aspetos do sistema de numeração decimal e da ordenação dos numerais decimais, como base para uma compreensão mais profunda das noções a estudar.

A unidade de ensino realizou-se a partir de sete fichas (ver Quaresma, 2010). Valorizámos as estratégias intuitivas e informais dos alunos, bem como os seus conhecimentos anteriores. Assim, partimos das representações de número racional que eles já conhecem – a representação pictórica e em numeral decimal – para depois introduzir, gradualmente, o trabalho com a representação em fração. A introdução de novas representações não implicava deixar de usar as anteriores, mas sim adquirir flexibilidade para escolher a representação mais eficaz em cada contexto ou situação problemática. Além disso, procurámos que os problemas propostos envolvessem, tanto quanto possível, contextos significativos para os alunos (Gravemeijer, 2005).

A realização das tarefas na sala de aula envolvia três fases: (i) apresentação da tarefa pelo professor e interpretação coletiva da tarefa; (ii) exploração pelos alunos, e (iii) discussão coletiva que se encerra com uma síntese final (Ponte, Oliveira, Cunha & Segurado, 1998). Na exploração das tarefas predominava o trabalho em grupo ou em pares. Nos momentos de apresentação e interpretação e de discussão coletiva procurava-se criar oportunidades para negociação de significados matemáticos e para construção de novo conhecimento (Ponte, 2005).

Dada a natureza do estudo, centrado na compreensão das práticas letivas usadas numa unidade de ensino sobre números racionais, a metodologia de investigação adotada seguiu uma abordagem qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994), numa lógica de observação participante (Jorgensen, 1989). Tratou-se de uma investigação realizada na prática profissional da primeira autora, que atuou simultaneamente como professora e como investigadora.

A turma do 5.º ano é composta por 22 alunos, 13 rapazes e 9 raparigas, a maioria com 10 anos mas alguns com 11 ou 12 anos, que no 1.º ciclo seguiu o programa de Matemática de 1991. Os alunos revelavam poucos hábitos de trabalho, nomeadamente em pares ou em grupo e apresentam um nível de empenho bastante heterogéneo, sendo recetivos a novos tipos de tarefa e mantendo um ritmo de trabalho equilibrado. Todas as aulas da unidade de ensino foram registadas em vídeo e áudio. Foram também recolhidos e analisados os trabalhos escritos realizados na aula pelos alunos nas diversas tarefas. Além disso, como registo de observação foram feitas anotações num diário de bordo sobre o modo como decorreram as aulas. Devido à natureza do estudo, a análise de dados assumiu um carácter essencialmente descritivo e interpretativo, através de análise de discurso (Fiorentini

& Lorenzato, 2006). Tendo em conta os objetivos do capítulo foram considerados como indicadores para análise (i) a natureza das tarefas e (ii) o tipo de comunicação com especial atenção ao questionamento e à negociação de significados.

Momentos de trabalho na sala de aula

Neste ponto apresentamos dois episódios da sala de aula, um do início e outro do final da unidade de ensino, analisando a prática profissional que lhe está associada, através dos seus elementos estruturantes – tarefas e comunicação.

Tarefa 1. A tarefa "Dobras e mais dobras" (figura 1) foi proposta na primeira aula da unidade de ensino[1]. Com a realização desta tarefa pretendíamos introduzir a linguagem associada aos números racionais em diferentes representações (fração, numeral decimal e percentagem) e significados (parte-todo e medida) e comparar números racionais representados de diferentes formas. Estes foram os motivos que nos levaram a escolher esta tarefa.

1. Encontra três tiras de papel geometricamente iguais. Dobra-as em partes iguais:
- a primeira em duas;
- a segunda em quatro;
- a terceira em oito.

Depois de dobrares cada uma das tiras, representa de diferentes formas as partes obtidas.

2. Compara as partes das três tiras obtidas por dobragem. Regista as tuas conclusões.

Figura 1 – Tarefa Dobras e mais Dobras (Menezes, Rodrigues, Tavares & Gomes, 2008).

A questão 1 pede explicitamente para fazer diversas dobragens, mas o pedido para representar as partes das tiras "de diferentes formas" permite aos alunos uma multiplicidade de interpretações. A questão 2 é também muito aberta ao pedir para comparar as partes obtidas e para "tirar conclusões". Deste modo, a necessidade de interpretação e de transformação das questões propostas em questões explícitas proporciona uma atividade exploratória por parte dos alunos.

1 Apresentamos aqui apenas parte da tarefa. Para mais detalhes, ver Quaresma (2010).

Os alunos, que trabalham em grupos de quatro ou cinco elementos, mostram de imediato dificuldade na interpretação da questão 1, tornando necessário um momento de discussão para se negociar o que significa "representar de diferentes formas". Assim, a professora recorre a um exemplo. Representa a tira dividida ao meio no quadro e pede aos alunos que digam que parte da tira está pintada. Usando a representação verbal, todos dizem que está pintada "metade da tira". A professora insiste noutra forma de representar aquela parte e, a partir da representação verbal "metade", alguns alunos sugerem a representação decimal 0,5. A professora pede ainda outras formas de representação e dois alunos indicam a fração "um de dois", que a professora rediz como "um meio". Finalmente, como os alunos não se lembram de mais nenhuma representação, a professora pergunta: "e se eu quisesse representar em percentagem? Também podia?" Aqui a maior parte diz de imediato que é 50%.

Também na questão 2 há necessidade de negociação do significado do enunciado pois os alunos não compreendem o que é "comparar as três partes obtidas". Neste caso, a professora começa por mostrar as duas primeiras tiras $\left(\frac{1}{2} \text{ e } \frac{1}{4}\right)$ e pede aos alunos que as comparem e alguns concluem logo que $\frac{1}{4}$ "é metade" de $\frac{1}{2}$". A realização de negociações deste tipo é uma condição fundamental da aprendizagem dos alunos. O plano de ação previsto para a aula já previa que os alunos pudessem ter dificuldade em interpretar a tarefa e que, se isso acontecesse, a professora faria um momento de discussão coletiva.

No início da discussão coletiva da questão 1 a professora pede a cada grupo que afixe o seu trabalho no quadro e pede ao primeiro grupo que o apresente à turma (Figura 2):

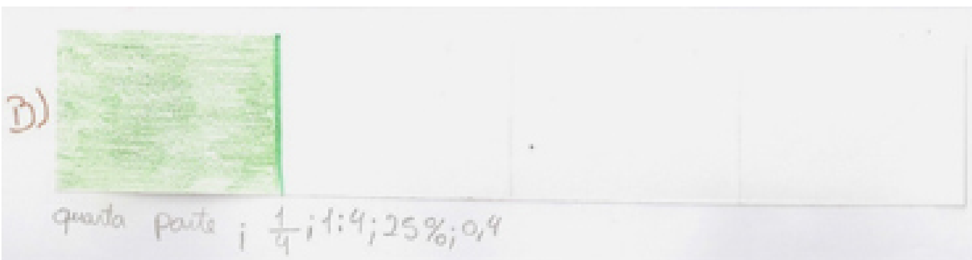


Figura 2 – Resposta do grupo de Diana, Questão 1b).

Os alunos não se apercebem do erro na representação decimal (0,4 em vez de 0,25) e a professora decide esperar pela resposta dos grupos seguintes, prosseguindo com a apresentação do grupo de Tiago (Figura 3):

Figura 3 – Resposta do grupo de Tiago, Questão 1b).

Rapidamente há alunos que se apercebem do erro da resposta do primeiro grupo e exclamam: "Não! Está mal..."

> **Professora:** O que é que está mal?
> **Rui:** É o 0,25...
> **Professora:** Porquê?
> **Rui:** Porque é a quarta-parte.
> **Daniel:** É 0,25 porque é a metade do primeiro. O primeiro era 50, se fizermos a metade é 25.
> **André:** Oh professora! Eu acho que é o 0,25 porque é a quarta-parte do 100. Porque 25 vezes 4 dá 100.

Note-se como, a seguir à pergunta de inquirição ("porquê?") da professora, diversos alunos apresentam explicações sucessivamente mais refinadas.

Na questão 2, nos seus registos escritos, todos os grupos estabelecem diversas relações entre as partes mas só alguns conseguem comparar todas as tiras. Todos os grupos usam a linguagem verbal para exprimir essas relações (figura 4):

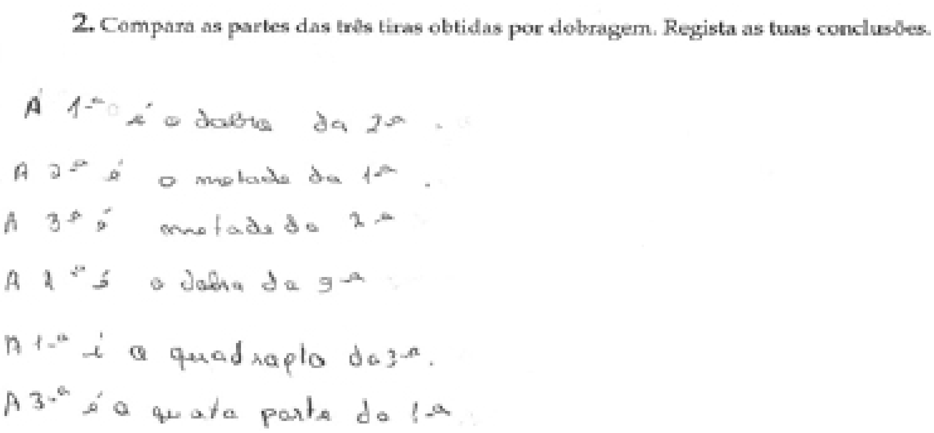


Figura 4 – Resposta do grupo de Mariana, Questão 2.

André e os colegas, para além das relações simples, "metade" e "dobro", estabeleceram relações mais complexas de "quádruplo" (tendo por base "dobro" do "dobro") e "quarta parte" ("quarta metade" no dizer de um deles, para significar "metade de metade"). Na discussão desta questão a professora pede a cada grupo que indique uma das relações que encontrou. Como os alunos só usam a representação verbal, durante a discussão, a professora pede-lhes que usem também a linguagem matemática:

> **Daniel:** A relação entre o primeiro e o segundo, é que o segundo é metade do primeiro.
> **Professora:** Como é que eu posso escrever isso utilizando números? Como é que eu faço a metade?
> **André:** Dividir por 2.
> **Rui:** Um de quatro é igual a metade a dividir por 2.
> **André:** A *b* é o dobro da *c.*
> **Professora:** Como é que eu escrevo isso?
> **André:** Um de quatro é o dobro.

Apesar das dificuldades apresentadas, os alunos indicam diversas relações entre $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{8}$ usando, essencialmente, a representação pictórica das tiras. Comparam as três frações apresentadas, evoluindo na compreensão dos números racionais, particularmente no que respeita ao significado parte-todo e à compreensão da grandeza de um número racional. Conseguem comparar as três frações utilizando a linguagem verbal mas mostram dificuldades na utilização da linguagem própria das frações, o que é natural dado ter sido a primeira aula de ensino formal deste tópico.

Note-se que o padrão de interação tende a desviar-se do modelo IRA, havendo vários alunos que intervêm depois de uma fala da professora. Note-se também o estilo de questionamento da professora, pontuado por questões de inquirição ("vens explicar…", "o que é que está mal?", "porquê?", "como é que eu escrevo isso?"…). Assinale-se, também o seu cuidado em ajudar os alunos a desenvolver a sua linguagem matemática, redizendo as suas intervenções ("um meio" como outra forma de dizer "um de dois" e "um oitavo" como "um traço oito"). Finalmente, registe-se como a cultura da sala de aula já integrou a noção que os alunos podem contribuir com diferentes respostas e discordar e argumentar uns com os outros. No decurso deste episódio foi negociado o significado de "representar", os alunos puderam trabalhar com diferentes representações de um mesmo número racional, foi ajustada a sua linguagem e foram recordados conhecimentos dos quais estavam esquecidos (representações decimal e percentagem).

Estamos então em condições de caraterizar a prática profissional da professora em termos da sua atividade. Esta pretendia que os alunos desenvolvessem o seu domínio da linguagem associada aos números racionais em diferentes representações e significados e perceber como comparar números racionais. Para isso, procurou criar condições para o trabalho exploratório dos alunos, tendo por base a tarefa proposta, marcadamente aberta, e o estilo de comunicação usado, de cunho dialógico e com frequentes questões de inquirição. Em termos cognitivos, o plano de ação da professora previa segmentos alternados de trabalho em coletivo e em pequeno grupo e as principais decisões dizem respeito ao momento de transitar de um segmento para outro, bem como ao modo de conduzir a comunicação.

Tarefa 2. A tarefa "Colecionando" (figura 5) foi proposta na sexta aula. Com a sua realização visávamos (motivos) introduzir a equivalência de frações, nos significados parte-todo e operador, reconstruir a unidade e as partes e comparar uma grandeza com outra tomada como unidade. É uma situação contextualizada, em que a informação é dada na representação verbal e a resposta é pedida em fração. Na questão 1 pede para utilizar a fração como operador para construir a parte. A questão 2 pede para representar $\frac{9}{12}$ por uma fração, possibilitando o surgimento de frações equivalentes. A questão 3 pede para reconstruir a unidade a partir de uma parte. Esta é a primeira tarefa proposta aos alunos que apresenta uma situação de operador com grandezas discretas representando assim uma situação nova para eles.

Q1. O Carlos coleciona tampinhas de garrafas de água. Quando tinha 6 tampinhas perdeu dois sextos das tampinhas. Quantas tampinhas perdeu? Podes resolver utilizando palavras, desenhos, material, esquemas ou cálculos.
Q2. O amigo do Carlos tinha 12 tampinhas e deu 9 ao Carlos. Que fração das suas 12 tampinhas deu ao Carlos? Podes resolver utilizando palavras, desenhos, material, esquemas ou cálculos.
Q3. O Carlos continuou a colecionar tampinhas de garrafas de água. Passado algum tempo, três tampinhas correspondiam a um quarto do número total de tampinhas da sua coleção. Quantas tampinhas já tinha o Carlos? Podes resolver utilizando palavras, desenhos, material, esquemas ou cálculos

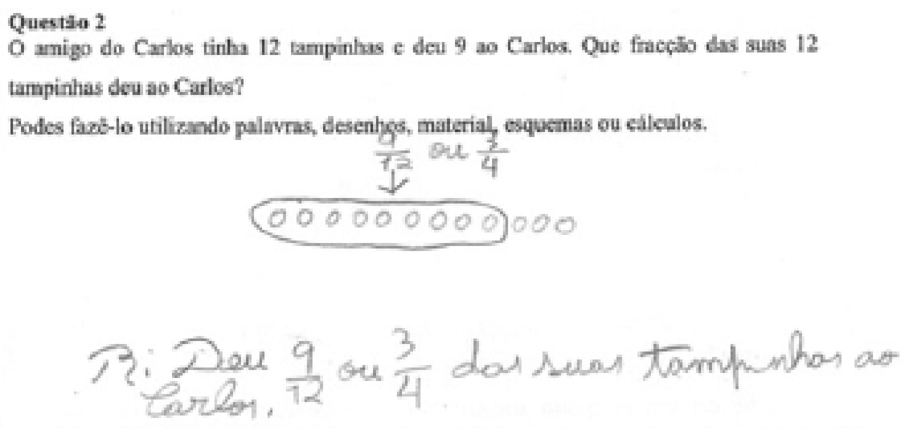
Figura 5 – Tarefa Colecionando (Monteiro & Pinto, 2007).

Os alunos não manifestam dificuldades na realização da questão 1, estabelecendo a correspondência entre o denominador da fração e o total de tampinhas existentes:

> **Nuno:** Se ele tinha seis tampinhas e perdeu $\frac{2}{6}$, então perdeu duas tampinhas.
>
> **Professora:** Explica lá como é que pensaste?
>
> **Nuno:** Então $\frac{2}{6}$ são dois de seis. Se ele tinha seis, perdeu duas das seis.

Como o denominador do operador corresponde à totalidade de tampinhas, os alunos resolvem esta questão no significado parte-todo e não no significado operador. Note-se a questão de inquirição da professora ("Explica lá..."), formulada com o objetivo de levar Nuno a explicitar a sua estratégia.

Na questão 2 a maioria dos alunos opta pela fração mais simples partindo do enunciado da questão, indicando "nove de doze" o que a professora rediz como "nove doze avos". Miguel é único aluno da turma que consegue ir um pouco mais além, percebendo que $\frac{9}{12}$ também pode ser representado pela fração equivalente $\frac{3}{4}$ (figura 6):


Questão 2
O amigo do Carlos tinha 12 tampinhas e deu 9 ao Carlos. Que fracção das suas 12 tampinhas deu ao Carlos?
Podes fazê-lo utilizando palavras, desenhos, material, esquemas ou cálculos.

$\frac{9}{12}$ ou $\frac{3}{4}$

R: Deu $\frac{9}{12}$ ou $\frac{3}{4}$ das suas tampinhas ao Carlos.

Figura 6 – Resposta de Miguel à Questão 2.

> **Miguel:** Ou então podia ser 3 de 4. É o mesmo.
>
> **Professora:** Então explica lá isso a quem não está a perceber.
>
> [...]
>
> **Miguel:** Isso ai é como se fizéssemos 3 + 3 + 3 + 3. É 12... (...). Se nós fizéssemos assim, ele deu 9 daquilo... São 3 dos 4 conjuntos de 3. Nós tirávamos 9 mas depois ainda sobraram mais 3 tampas. É como se fosse 3 de 4.

Professora: Então isto (3 tampinhas) representa que parte do todo?

Turma: A quarta parte.

Leonor: Sim, é como se fosse 3 tampinhas $\frac{1}{4}$, 6 tampinhas $\frac{2}{4}$...

Professora: Isto tudo (6 tampinhas) $\frac{2}{4}$

Leonor: O que ele deu, as nove tampinhas, representam $\frac{3}{4}$.

Professora: E tudo $\frac{3}{4}$ ...

Leonor: Os 9 que ele deu são $\frac{3}{4}$ das 12 tampinhas.

Miguel reconheceu que a fração $\frac{9}{12}$ era equivalente à fração mais simples $\frac{3}{4}$. No entanto, mostra dificuldade em explicar à turma a forma como pensou, muitos colegas não compreendem o que ele lhes está a tentar explicar, mostrando dificuldade na compreensão das unidades compostas. A professora apercebe-se que se trata de uma oportunidade para salientar a noção de equivalência de frações e toma a decisão de explorar a situação em profundidade. Assim, tenta que o aluno explicite melhor a sua ideia usando a linguagem dos números racionais até que Leonor compreende a descoberta do colega e começa também a explicar "é como se 3 tampinhas fossem $\frac{1}{4}$".

Em contrapartida os alunos não apresentaram dificuldades na realização da questão 3. Na sua discussão, a professora tomou a decisão de começar por pedir a Luís para explicar à turma como resolveu a tarefa uma vez que este aluno tinha efetuado uma representação pictórica interessante que fazia a ligação com a discussão anterior (figura 7):

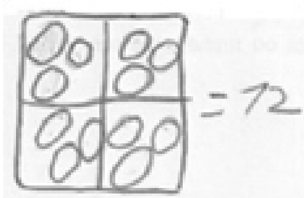


Figura 7 – Resposta de Luís à Questão 3.

Luís: Ou seja, se o número três é a quarta parte da quantidade que ele tinha, tínhamos que fazer quatro vezes três.

Professora: Porquê?

Luís: Porque as 3 tampinhas eram a quarta parte da quantidade que o Carlos tinha.

Professora: Quanto é que era o todo? Quantos quartos eram o todo?

Luís: Quatro.

> **Professora:** Muito bem, então em cada quarto tínhamos 3 tampinhas...
>
> **Luís:** E era 4 vezes 3.
>
> **Rui:** Eu fiz só a conta 4 x 3.

Esta tarefa, ao contrário da anterior, tem um caráter fechado. A professora procurava que, através de questões explicitadas com clareza, os alunos lidassem com a reconstrução da unidade e pudessem, eventualmente, confrontar-se com ideias novas, como de facto veio a acontecer com a noção de equivalência de frações. Tal como no episódio anterior, o padrão de interação devia-se com frequência do modelo IRA, com intervenções sucessivas de diversos alunos.

Em termos de prática profissional, a atividade da professora é marcada por pretender desenvolver nos alunos diversas noções relacionadas com números racionais (equivalência de frações, reconstrução da unidade e das partes e comparação de uma grandeza com uma dada unidade). Esta atividade da professora é marcada pela condução de uma comunicação que é também aqui pautada por questões de inquirição, ao mesmo tempo que, quando apropriado, vai redizendo as afirmações dos alunos no sentido de os levar à apropriação da linguagem matemática. O plano de ação da professora, mais uma vez, previa segmentos alternados de trabalho em coletivo e em pequeno grupo, sendo as principais decisões relativas à transição de segmentos e ao modo de conduzir a comunicação, nomeadamente na interpelação a Luís e no questionamento da ideia de Miguel.

Conclusão

Em ambos os casos, a atividade da professora procurou favorecer o trabalho exploratório dos alunos, tendo por base as tarefas propostas e usando um estilo de comunicação de cunho dialógico pontuado por questões de inquirição e pelo redizer da fala dos alunos para os apoiar na apropriação da linguagem matemática. Também em ambos os casos, o plano de ação incluía segmentos alternados de trabalho em coletivo e em pequeno grupo, reportando-se as principais decisões aos momentos de transição e ao modo de conduzir a comunicação.

Os episódios apresentados evidenciam a possibilidade de uma prática profissional na sala de aula de cunho exploratório (Ponte, 2005), em que os alunos se envolvem em atividade matemática, procurando elaborar estratégias para resolver as tarefas propostas e chegando, por vezes, à construção de conceitos, como foi o caso da noção de equivalência de frações, na tarefa 2. Neste tipo de ensino, o trabalho do professor é fundamental, primeiro na seleção das tarefas, tendo em atenção que os diferentes tipos de tarefa devem coexistir na sala de aula e que cada um tem um papel específico na aprendizagem dos alunos. As tarefas de natureza aberta, como as explorações (como na tarefa 1), proporcionam oportunidades importantes de aprendizagem, favorecendo a negociação de significados, a construção de conceitos e a aprendizagem de representações. No entanto, mesmo tarefas de natureza fechada (como a tarefa2) podem proporcionar oportunidades de aprendizagem interessantes e de construção de conceitos. Cabe ao professor saber quando e como usar uma e outras. Depois, durante a realização das tarefas, é importante que o professor identifique momentos em que é necessário negociar significados para que os alunos compreendam os conceitos matemáticos e se mantenham envolvidos na realização das tarefas. Evidenciamos que uma comunicação de tipo dialógico, pontuada por questões de inquirição do professor, uma vez instituída na sala de aula, permite aos alunos exprimir os seus raciocínios, argumentando uns com os outros. Verifica-se, também, ser fundamental, que o professor ajude, permanentemente, os alunos a evoluir na sua linguagem matemática (Franke et al., 2007). Deste modo, a natureza das tarefas e da comunicação na sala de aula revelam-se aspetos marcantes deste tipo de práticas letivas, cujo alcance será interessante investigar noutros temas, noutros níveis de ensino e com alunos com diversos tipos de características. Muito especialmente, será importante perceber de que modo e com que estratégias pode o professor construir uma cultura deste tipo na sala de aula.

Referências

Abrantes, P. (1995). Trabalho de projecto e aprendizagem da Matemática. In *Anais do II CIBEM* (pp. 13-31), Blumenau.

Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: Reidel.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13.

Cox, R. (1999). Representation construction, externalised cognition and individual differences. *Learning and Instruction, 9,* 343- 363.

Fey, J. T. (1981). *Mathematics teaching today: Perspectives from three national surveys.* Reston, VA: NCTM.

Fiorentini, D., & Lorenzato, S. (2006). *Investigação em educação matemática: Percursos teóricos e metodológicos.* Campinas: Autores Associados.

Franke, M. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Understanding teaching and classroom practice in mathematics. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 225-256). Greenwich, CT: Information Age.

Goldin, G. A. (2003). Representation in school mathematics: A unifying research perspective. In J. Kilpatrick, W. G Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 275-285). Reston, VA: NCTM.

Gravemeijer, K. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In L. Santos, A. P. Canavarro, & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 83-101). Lisboa: APM.

Jorgensen, D. L. (1989). *Participant observation: A methodology for human studies.* Newbury Park, NJ: Sage.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12*(3), 2-8 & 44.

Menezes, L., Rodrigues, C., Tavares, F., & Gomes, H. (2008). *Números racionais não negativos: Tarefas para 5.º ano.* Lisboa: DGIDC.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do ensino básico.* Lisboa: DGIDC. (Acedido em 1 de junho de 2009 de http://sitio.dgidc.minedu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf)

Monteiro, C., & Pinto, H. (2007). *Desenvolvendo o sentido do número racional.* Lisboa: APM.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar.* Lisboa: APM.

Parker, M., & Leinhardt, G. (1995). Percent: A privileged proportion. *Review of Educational Research,* 65(4), 421-481.

Pólya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Owens, D. T. (1993). Teaching and learning decimal fractions. In D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (pp. 159-178). Reston, VA: NCTM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Cunha, H., & Segurado, I. (1998). *Histórias de investigações matemáticas.* Lisboa: IIE.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Branco, N. (2012). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Avances en Investigación en Educación Matemática, 1,* 65-86.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da Matemática para o 1.º ciclo do ensino básico.* Lisboa: Universidade Aberta.

Post, T., Cramer, K., Behr, M., Lesh, R., & Harel, G. (1993). Curriculum implications of research on the Learning, teaching, and assessing of rational number concepts. In T. Carpenter & E. Fennema (Eds.), *Research on the learning, teaching, and assessing of rational number concepts* (pp. 327-362). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Quaresma, M. (2010). *Ordenação e comparação de números racionais em diferentes representações: uma experiência de ensino* (Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa. Acedido em 25 de fevereiro de 2012 de em http://repositorio.ul.pt/)

Ruthven, K., Hofmann, R., & Mercer, N. (2011). A dialogic approach to plenary problem synthesis. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 81-88). Ankara, Turkey: PME.

Streefland, L. (1991). Fractions, an integrated perspective. In L. Streefland (Ed.), *Realistic mathematics education in primary school* (pp. 93-118). Utrecht: Freudenthal Institute.

Stein, M. K., Remillard, J., & Smith, M. (2007). How curriculum influences student learning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 319-369). Greenwich, CT: Information Age.

Wood, T. (1999). Creating a context for argument in mathematics class. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 171-191.

COMUNICAÇÃO

12. A construção coletiva da generalização num contexto de ensino exploratório com alunos do 4.º ano

por Célia Mestre, Hélia Oliveira

12. A construção coletiva da generalização num contexto de ensino exploratório com alunos do 4.º ano

Célia Mestre

Agrupamento de Escolas Romeu Correia, Almada

e UIDEF, Instituto de Educação,

Universidade de Lisboa

celiamestre@hotmail.com

Hélia Oliveira

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

hmoliveira@ie.ul.pt

• **Resumo:** Este capítulo pretende contribuir para dar a conhecer práticas de ensino que promovem os processos de generalização matemática de alunos nos primeiros anos de escolaridade, encarando-os como uma construção coletiva, numa perspetiva dialógica de aprendizagem. O estudo decorre de uma experiência de ensino, assente numa prática de ensino exploratório, realizada ao longo de um ano letivo, numa turma de 4.º ano, visando promover o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. Em particular, procura-se identificar as ações da professora/investigadora que contribuíram para a construção coletiva da generalização, a partir da realização de uma tarefa matemática, centrando-se nos momentos de discussão coletiva e de sistematização das aprendizagens. Identificam-se seis ações principais da professora: 1) promover a discussão pública das ideias dos alunos; 2) encorajar a clarificação e justificação das ideias; 3) encorajar a procura de relações; 4) encorajar a extensão de uma ideia para além do caso apresentado; 5) encorajar o sentido crítico, promovendo a validação ou rejeição das ideias apresentadas; 6) refocar a atenção nas relações matemáticas. Observa-se, paralelamente, que algumas destas ações não são exclusivas da professora, sendo adotadas por vários alunos. Conclui-se, refletindo sobre a relação entre essas ações e a construção progressiva da representação da generalização assumida coletivamente pela turma.

• **Palavras-Chave:** Ensino exploratório, Generalização, Discussão coletiva, Comunicação matemática, Construção dialógica do conhecimento.

Introdução

A prática de ensino exploratório é encarada como um constante desafio para o professor que a procura implementar. O *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007) pode proporcionar o enquadramento para uma mudança nas práticas profissionais e, consequentemente, nas aprendizagens matemáticas dos alunos (Ponte & Serrazina, 2009). O programa apresenta diversas orientações metodológicas gerais, destacando a necessidade de propor aos alunos diversos tipos de experiências matemáticas. Refere que "ouvir e praticar são atividades importantes na aprendizagem matemática mas, ao seu lado, o fazer, o argumentar e o discutir surgem com importância crescente nessa aprendizagem" (ME, 2007, p. 8). Nesta perspetiva, este documento curricular acrescenta como objetivos de aprendizagem centrais, e consequentemente como importantes orientações metodológicas, o desenvolvimento das capacidades transversais de comunicação, resolução de problemas e raciocínio.

Este capítulo incide sobre a prática da professora/investigadora (primeira autora) em torno da realização de uma tarefa matemática, num quadro de ensino exploratório, que pretende promover o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano. Em particular, e assumindo uma perspetiva dialógica de construção do conhecimento matemático (Wells, 2000), pretende-se identificar as ações da professora/investigadora que permitiram a construção coletiva da generalização (Ellis, 2011), nos momentos de discussão coletiva e de sistematização das aprendizagens, na exploração em aula de uma tarefa.

Ensino exploratório

A aprendizagem que os alunos fazem está dependente da atividade que realizam e da reflexão que fazem sobre a mesma (Ponte, 2005) e, deste modo, a seleção das tarefas que são trabalhadas em sala de aula deve ter em conta o tipo de atividade que podem proporcionar aos alunos. Assim, tarefas que conduzem a procedimentos rotineiros são diferentes de tarefas que exigem aos alunos pensar conceptualmente e que os estimulam a estabelecer conexões (Stein & Smith, 1998). De acordo com *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 1994), as tarefas matematicamente válidas devem respeitar as seguintes características: apelar à inteligência dos alunos, desenvolver a compreensão e a aptidão matemática, estimular os alunos a estabelecer conexões e a desenvolver um enquadramento coerente para as ideias matemáticas, apelar à formulação e resolução de problemas e ao raciocínio matemático, promover a comunicação sobre a Matemática, mostrar a Matemática como uma atividade humana permanente, ter em atenção diferentes experiências e predisposições dos alunos e promover o desenvolvimento da predisposição de todos os alunos para fazer Matemática. As tarefas são "um elemento fundamental na caracterização de qualquer currículo, pois elas determinam em grande medida as oportunidades de aprendizagem oferecidas aos alunos" (Ponte, 2005, p. 23).

A principal característica do ensino exploratório é que promove nos alunos a descoberta e a construção do conhecimento (Ponte, 2005). Para tal, a exploração de tarefas abertas e a sua gestão na aula proporcionando aos alunos momentos de discussão coletiva e entre pares são oportunidades fundamentais para a construção do conhecimento.

Baxter e Williams (1996, cit. Baxter & Williams, 2010) propõem a designação de "ensino orientado pelo discurso" (*discourse-oriented teaching*, no original) para descrever as ações do professor que promovem a construção do conhecimento matemático através da comunicação entre os alunos. Os mesmos autores descrevem o ambiente de sala de aula que promove este tipo de ensino de acordo com a estrutura seguinte: (1) as tarefas matemáticas são apresentadas aos alunos; (2) os alunos trabalham na tarefa a pares ou em pequenos grupos, enquanto o professor circula pelos grupos encorajando-os, desafiando-os, questionando-os e dando-lhes sugestões, se necessário; (3) os alunos apresentam as suas resoluções à turma; (4) o professor sistematiza as apresentações. Conscientes da dificuldade inerente à implementação desta estrutura de sala de aula, os autores referem que o professor deverá promover suportes sociais que ajudem os alunos a trabalhar em conjunto. Por exemplo, os alunos devem ser encorajados a explicar as suas formas de pensamento e a esforçarem-se a compreender as explicações dos colegas. As regras que conduzem a esta forma de comunicação devem ser explicitamente identificadas e postas em prática até fazerem parte da cultura de sala de aula. À medida que os alunos interiorizam essas regras, assumem um papel de maior responsabilidade no discurso matemática de sala de aula. Baxter e Williams (2010) concluem que, em salas de aula onde existe esta prática de ensino, os professores falam menos e os alunos mais do que o que seria esperado numa sala de aula de ensino mais tradicional, pois o tempo de aula é organizado de forma que sejam dadas mais oportunidades de comunicação aos alunos, tanto em pequeno grupo como durante a discussão coletiva com toda a turma.

Também Sherin (2002) se refere à dificuldade de criação e manutenção deste tipo de ambiente de aprendizagem, ou seja, um ambiente que promova *fazer e falar* sobre matemática. Para esta autora, num ambiente de aprendizagem desta natureza convivem duas tensões principais. Por um lado, é esperado dos professores que encorajem os alunos a partilhar as suas ideias e a usarem essas ideias como base de discussão. Por outro lado, é esperado que assegurem que essas discussões sejam matematicamente produtivas. Ou seja, uma tensão que surge na tentativa de encontrar um equilíbrio entre ter um ambiente de sala de aula que é aberto às ideias dos alunos e que, simultaneamente, sirva os propósitos de aprendizagem dos conteúdos matemáticos. Esse desafio pode ser caracterizado como uma tensão entre suportar o *processo do discurso matemático* por um lado, e o *conteúdo do discurso matemático*, por outro. O termo processo refere-se a como professor e alunos interagem na discussão - quem fala com quem, de que formas. O conteúdo do discurso, pelo contrário, refere-se à substância matemática subjacente nas ideias, à sua profundidade e complexidade em termos dos conceitos matemáticos em consideração, ou seja, em relação com os objetivos curriculares que o professor estabelece para a aula.

Neste sentido e tendo em conta o complexo desafio de orientar uma turma em torno de uma discussão coletiva que promova aprendizagens matemáticas significativas, Stein, Engle, Smith e Holmes (2008) apresentam um modelo composto por cinco práticas para a orquestração de discussões coletivas: (1) antecipação das prováveis repostas dos alunos a tarefas matemáticas cognitivamente exigentes, (2) monitorização do trabalho autónomo dos alunos, (3) seleção das resoluções particulares dos alunos para apresentação durante a discussão coletiva, (4) sequenciar adequadamente as resoluções dos alunos a serem apresentadas, e (5) ajudar a turma a estabelecer conexões matemáticas entre as diferentes resoluções dos alunos e entre ideias chave. Os autores consideram que as discussões coletivas devem ser impulsionadas por tarefas matemáticas cognitivamente exigentes e que o papel que o professor assume deverá permitir a construção de um sentido pessoal e coletivo das ideias matemáticas exploradas na aula. Para isso, as discussões coletivas devem suportar a aprendizagem matemática dos alunos, ajudando-os a aprender o discurso matemático, tornando o seu pensamento público para que possam construir e avaliar as suas ideias matemáticas e as dos outros (Stein et al., 2008).

Na perspetiva de Wells (2000) as salas de aula devem assumir-se como comunidades de investigação, onde a turma trabalha colaborativamente em torno de um mesmo objetivo, construindo de forma dialógica o conhecimento e onde também o professor deve assumir-se como investigador integrante dessa comunidade.

A promoção do desenvolvimento do pensamento algébrico na sala de aula

O pensamento algébrico pode ser encarado como "um processo em que os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de exemplos particulares, estabelecem essa generalização através do discurso da argumentação, e expressam-na gradualmente de uma forma simbólica apropriada à sua idade" (Blanton & Kaput, 2005, p. 413). Tendo em conta a definição mais recente de pensamento algébrico apresentada por Kaput (2008), Blanton (2008) salienta as duas vertentes que considera essenciais para uma compreensão mais abrangente desse conceito: a aritmética generalizada e o pensamento funcional. Enquanto a primeira se prende com a utilização da aritmética para desenvolver e expressar generalizações, a segunda consiste na identificação de padrões numéricos e geométricos para descrever relações funcionais.

A introdução do pensamento algébrico na escola elementar constitui uma oportunidade de construir o desenvolvimento conceptual dos conceitos matemáticos mais profundos e complexos desde os primeiros anos de escolaridade (Blanton & Kaput, 2005). A algebrização do currículo matemático na escola elementar depende da capacidade dos professores transformarem os materiais de ensino com que trabalham usualmente a aritmética, possibilitando a exploração de regularidades, a formulação de conjeturas, a generalização e a justificação matemática de factos e relações. Neste sentido, Blanton e Kaput (2005) sugerem as seguintes práticas de ensino para a construção do pensamento algébrico nos alunos: (1) integração natural e espontânea de conversas algébricas na sala de aula; (2) exploração gradual dos temas algébricos durante um significativo período de tempo; (3) integração de múltiplos e independentes processos algébricos válidos; e (4) adaptação e desenvolvimento de tarefas matemáticas para promover o pensamento algébrico. Estes autores acrescentam ainda que a construção de uma prática de ensino que promova o desenvolvimento do pensamento algébrico nos alunos requer um significativo processo de mudança nos professores, os quais, muitas vezes, estão habituados a trabalhar a aritmética de uma forma enclausurada em si mesma. Ou seja, os professores devem desenvolver *olhos e ouvidos algébricos*: olhar a matemática que ensinam de uma nova perspetiva e estar atentos ao raciocínio que os alunos expressam, ouvindo-os. Desta forma, os professores serão capazes de identificar, modificar e adaptar materiais e conversações de sala de aula, explorando-os algebricamente.

Também Murray (2010) considera, como ingrediente essencial no ensino do pensamento algébrico, a focalização por parte do professor no raciocínio dos alunos e no seu discurso, permitindo a identificação de conexões entre conceitos e, a partir daí, a construção de generalizações. No entanto, o autor alerta para o facto de esse discurso não acontecer de forma espontânea, sendo resultado do planeamento cuidadoso por parte do professor, onde ele próprio entende os aspetos algébricos subjacentes aos conteúdos matemáticos de forma a promovê-los junto dos alunos.

A generalização enquanto prática coletiva

Como elemento central do pensamento algébrico, a generalização matemática envolve "uma afirmação de que uma propriedade ou técnica é válida para um conjunto de objetos matemáticos" (Carraher, Martinez & Schliemann, 2008, p. 3). Para Mason (1996) uma das formas de desenvolver a generalização é sensibilizar para a distinção entre *olhar para* e *olhar através*, conjugando-se esta última com a capacidade de ver a generalização a partir do particular. A generalização pode ser expressa de diversas formas: inicialmente, os alunos podem expressar as generalizações que observam no mundo com palavras e, gradualmente, usar formas mais simbólicas (Blanton, 2008).

Ellis (2011) caracteriza a generalização como um processo dinâmico, socialmente situado, que se desenvolve através de ações colaborativas. Esta perspetiva da generalização atende às interações sociais, às ferramentas, à história pessoal e ao ambiente partilhado por quem se envolve em ações de generalização. Esta autora define a generalização como uma atividade onde as pessoas dentro de um contexto sociomatemático específico se envolvem em pelo menos uma das três ações seguintes: a) identificam o que é comum entre os casos; b) estendem o raciocínio para além do caso original; c) derivam resultados mais amplos a partir dos casos particulares. Neste sentido, a generalização surge de uma representação coletiva que tem raiz na comunidade, ocorrendo através de experiências mediadas pela interação, linguagem e outras ferramentas próprias. As interações dos alunos suportam e moldam as atividades de generalização, sendo eles que tomam decisões sobre o que tem interesse e o que querem validar. Naturalmente que o papel do professor é também crucial para a promoção de uma cultura de sala de aula que incentive a partilha de generalizações e o encorajamento de justificações e clarificações.

Nesta perspetiva, a autora identifica sete categorias principais de ações promotoras da generalização. Assumindo o contexto sociomatemático onde ocorrem, estas ações podem ser preconizadas tanto pelo professor como pelos alunos ao cocontribuírem para o desenvolvimento do significado através do seu discurso, da atividade partilhada e do seu envolvimento com artefactos. Esta perspetiva interacionista privilegia tanto as interações professor-aluno como as interações aluno-aluno, tendo em consideração a forma como o professor e os alunos desenvolvem modos partilhados de interagir para promover generalizações. Cada categoria de ação identificada por Ellis (2011) descreve o tipo de ação que precede ou aparece para impulsionar o desenvolvimento ou o refinamento da generalização. Segundo a autora, as categorias não são mutuamente exclusivas, podendo algumas ações ser codificadas em mais de uma categoria. De acordo com a autora, as sete categorias de ações promotoras da generalização são as seguintes:

(1) *Tornar pública a generalização*: um elemento da turma envolve-se, publicamente, na ação de generalizar. Essa ação pode desenvolver-se através de: a) criação de uma associação entre dois ou mais problemas, objetos, situações ou representações; b) identificação de um elemento de similaridade entre os casos; ou, c) expansão de um padrão, ideia, ou relação para além do caso inicial.

(2) *Encorajar a generalização:* encorajar outros a envolverem-se no ato de generalizar. Esta ação pode desenvolver-se através de: a) encorajar o relacionar, b) encorajar a procura de um padrão ou relação, c) encorajar a extensão para além do caso inicial, d) encorajar a reflexão.

(3) *Encorajar a partilha da generalização ou de uma ideia:* questionando ou encorajando outro elemento da turma a partilhar publicamente uma generalização, representação, solução ou ideia. Isto pode ocorrer através de pedidos formais ou informais para tornar publica a generalização ou ideia com mais elementos da turma, para que estes possam agir sobre a mesma.

(4) *Tornar pública a partilha de uma generalização ou ideia:* partilha da generalização, ideia, estratégia ou representação feita por um elemento com toda a turma. Pode tomar a forma de reafirmar, validar ou rejeitar uma generalização feita por um elemento da turma.

(5) *Encorajar a justificação ou clarificação:* solicitar a um elemento que explique ou clarifique uma solução ou a provar uma generalização, encorajando-o a refletir mais profundamente sobre isso. Isto pode incluir o pedido para clarificar a generalização, descrever a sua origem ou explicar porque faz sentido.

(6) *Construir a partir de uma ideia ou generalização:* usar uma ideia, conclusão ou generalização de outro, podendo ocorrer através do refinamento de uma ideia ou da sua utilização para criar uma nova ideia, regra ou representação.

(7) *Focar a atenção nas relações matemáticas:* direcionar a atenção para aspetos particulares do problema, ideia ou da representação.

Ellis (2011) identifica ainda a existência de padrões na criação e redefinição da generalização que assumem a forma de interações cíclicas. Nesses ciclos de interação uma generalização inicial pode revestir-se de novas formas, passando pela interação e reflexão coletivas, sendo a versão final da generalização não o produto de um só aluno, mas resultante do desenvolvimento ocorrido na interação do grupo. Tendo em conta a análise conjunta das ações promotoras de generalização e dos ciclos de interação, no estudo realizado, a autora salienta a importância de o professor desenvolver as capacidades de: a) encorajar a justificação e clarificação; b) tornar pública a partilha das contribuições dos alunos, c) encorajar explicitamente a generalização, e d) refocar a atenção dos alunos nas relações matemáticas.

Também Jurrow (2004) considera a generalização como uma prática matemática central que resulta de um processo entre alunos, tarefas, atividade envolvente e ferramentas de modelação. Esta autora salienta que o simples facto de os alunos se envolverem em atividades significativas não é suficiente para começarem a formular generalizações. Para tal, os alunos necessitam ser guiados na reflexão e terem oportunidades para falar, escrever e representar o que é geral numa situação constituindo as discussões coletivas um bom contexto para se envolverem neste tipo de atividades. Ao professor cabe a responsabilidade de tornar essas práticas rotineiras na sala de aula, orientando a reflexão, pedindo aos alunos para discutirem e criticarem as abordagens uns dos outros, fazerem conexões entre as abordagens aos diferentes problemas e tentarem identificar padrões gerais que surjam da comparação dessas abordagens e soluções.

Metodologia do estudo

Opções metodológicas. Os resultados apresentados inserem-se num estudo mais amplo, de implementação de uma experiência de ensino (Gravemeijer & Cobb, 2006), onde se exploraram tarefas para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos de uma turma de 4.º ano, ao longo de um ano letivo.

Este capítulo foca-se no processo coletivo de construção da generalização de uma relação entre as variáveis de uma sequência pictórica crescente, ancorada na exploração em aula de uma tarefa, analisando as ações que a professora desenvolve durante os momentos de discussão coletiva e de sistematização das aprendizagens. Para recolha dos dados, foi feita uma gravação em formato vídeo da aula. A aula foi dinamizada pela investigadora deste estudo (primeira autora deste capítulo), tendo a professora titular de turma assumido um papel de coadjuvante e a segunda autora participado na recolha de dados. A partir do visionamento e transcrição das intervenções nos momentos de aula referidos, a análise dos dados procurou identificar as ações da professora/investigadora que contribuíram para a construção coletiva da generalização.

A experiência de ensino. A experiência de ensino decorreu durante o ano letivo de 2010/11 a partir da realização de 42 tarefas, organizadas em cinco sequências de acordo com os temas e tópicos matemáticos da planificação anual definida pela professora titular de turma, respeitando a perspetiva de conceber o pensamento algébrico como um *fio condutor curricular* (NCTM, 2000), numa lógica de integração curricular. As tarefas surgiram na turma com uma média de duas por semana e com a duração de cerca de duas horas cada uma e tinham como objetivos a identificação de regularidades e expressão da generalização através da linguagem natural, e a iniciação de um percurso em direção à simbolização através da passagem da linguagem natural para a linguagem matemática.

A turma onde decorreu a experiência de ensino era constituída por 19 alunos, 7 raparigas e 12 rapazes, com uma média de nove anos de idade. Embora a turma estivesse a trabalhar de acordo com o PMEB (ME, 2007) desde o 3.º ano, no início da experiência de ensino, os alunos revelavam algumas dificuldades na exploração de questões que envolviam o sentido de número, privilegiando quase exclusivamente a utilização dos algoritmos na resolução de qualquer situação.

O modelo de aula desenvolvido desde o início da experiência de ensino procurou respeitar os princípios do ensino exploratório (Canavarro, Oliveira, Menezes, 2012), organizando a aula em quatro fases distintas: apresentação da tarefa, trabalho autónomo dos alunos, discussão coletiva e sistematização das aprendizagens. A tarefa apresentada neste capítulo pertence à última sequência da experiência de ensino e está enquadrada no tópico "Regularidades", tendo sido realizada no final do ano letivo. Tinha como objetivo principal a expressão e representação da generalização das relações envolvidas numa sequência pictórica crescente.

Apresentação dos resultados

Em seguida, é apresentada a exploração da tarefa "Os colares" (em anexo) nos momentos de discussão coletiva e de sistematização das aprendizagens, organizada em quatro episódios, de acordo com a ordem pela qual ocorreram na aula.

Episódio I – Clarificação da expressão de uma relação recursiva. O primeiro par a apresentar a sua forma de resolução na discussão coletiva é o par Carolina e Daniel que foi o único par que se centrou na diferença entre o número de contas azuis e o número de contas vermelhas, não chegando a uma relação de proporcionalidade direta (fig. 1). A professora escolhe este par para iniciar a discussão coletiva pelo facto de terem procurado expressar uma generalização da relação que encontraram de um modo recursivo. Estes dois alunos visualizaram a sequência de uma forma diferente dos restantes alunos ao centrarem-se na diferença entre o número de contas azuis e o número de contas vermelhas. Carolina começa por explicar como descobriram uma relação entre o número de contas azuis e o número de contas vermelhas:

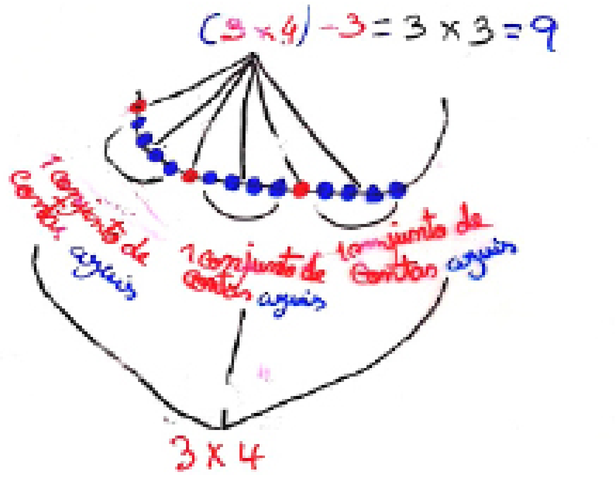


Figura 1 – Resolução do par Carolina e Daniel.

> **Carolina:** Então, nós primeiro fizemos o terceiro colar, que a Maria fez. Fizemos esse exemplo e descobrimos que há três conjuntos: há o conjunto das contas azuis, que é este aqui... É um conjunto de contas azuis, um conjunto de contas azuis e um conjunto de contas azuis. Depois nós juntámos aqui e fizemos 3 vezes 4 porque cada conjunto de contas azuis tem 4 contas e fizemos 3 vezes 4. E depois em cima fizemos 3 vezes 4 menos 3 igual a 3 vezes 3, igual a 9.

No momento em que partilha a sua forma de resolução, identificando uma relação entre o número de contas azuis e o número de contas vermelhas do terceiro colar da sequência, Carolina é interpelada pelos colegas para que explique melhor as suas ideias. Habituados ao contexto de aula exploratória e assumindo um papel ativo no momento da discussão coletiva, os alunos procuram entender a forma de resolução do par que apresenta, colocando diversas questões que contribuem para que aqueles clarifiquem o conteúdo da sua apresentação. Essa ação é também assumida pela professora que pede a Carolina que seja mais clara na sua explicação.

> **Professora:** O que é que fizeste ali em cima? Por que é que fizeste aquilo?
>
> **Carolina:** Então porque azuis vem de azul e, por isso, escrevemos a azul. Então nós fizemos 3 vezes 4, é um 3 e um 4, 3 vezes 4. Menos 3 que é dos 3 vermelhos e depois igual a 3 vezes 3 porque 3 vezes 4 menos 3 é igual a 3 vezes 3. Igual a 9.
>
> **Rita:** Carolina, o 9 é do quê?

Carolina: É do 3 vezes 3…

Rita: Sim, mas o 9 vem de onde? O 9 serve para quê?

Carolina: É a relação entre as contas vermelhas e as azuis.

Professora: Porque é que tiraste dali aquele 3? 3 vezes 4 é o quê? O que é que significa?

Carolina: 3 vezes 4 é o conjunto de contas azuis mais um conjunto de contas azuis mais um conjunto de contas azuis…

Gonçalo: Porque é que é o 4?

Carolina: O 4 são as 4 bolas azuis…

Daniel: São 3 conjuntos de 4 contas.

Professora: De que cor?

Daniel: Azuis.

Carolina: Então 3 vezes 4 menos os 3 vermelhos que é igual a 3 vezes 3 que é igual a 9.

João: Ah, então 3 vezes 4 menos 3 é 9.

Podemos perceber, neste excerto, que os alunos procuram compreender o que o grupo pretende com as relações numéricas que estabelece: "… mas o 9 vem de onde? O 9 serve para quê?". É, assim, possível identificar ações de alunos que impelem à clarificação e justificação da ideia apresentada por Carolina, como por exemplo, "Carolina, o 9 é o quê?" e "Porque é que é o 4?" e também por parte da professora "Porque é que tiraste dali o 3? 3 vezes 4 é o quê? O que significa?".

Aproveitando o contexto da tarefa, a professora solicita ainda uma maior clarificação na explicação da ideia apresentada, sugerindo à aluna que exemplifique o seu raciocínio com outros colares da sequência.

Professora: É a diferença… Explica lá com os outros colares… se isso acontece com os outros colares… a ver se nós entendemos aquilo que tu dizes da diferença. O que é que acontece no primeiro colar, nessa diferença?

Carolina: Então é 4 vezes 1, que dá 4 menos 1 dá 3, a diferença é de 3.

Professora: Então explica lá isso no segundo colar.

Carolina: O primeiro é 3, se for o segundo é 6, se for o terceiro é 9, se for o quarto é 12, se for o quinto é 16…

Vários alunos: Não, é 15.

Professora: É 15. Aquilo que este par esteve a pensar é que a diferença vai ser sempre o quê?

Vários alunos: Três.

Professora: De três em três, é isso?

Vários alunos: Sim.

Desta forma, a professora procura promover a extensão da ideia para outros colares da sequência, procurando também que mais alunos compreendam a ideia apresentada pelos colegas. E, apesar de a resolução deste grupo ser muito diferente da dos outros grupos, os colegas procuram interpretar e dar sentido à abordagem, interpelando os colegas que apresentam na tentativa de compreenderem as suas ideias.

Posteriormente, quando se discute a forma como o par seguinte (António e Diogo) entendeu a relação entre variáveis usando uma tabela, alguns alunos estabelecem uma conexão entre essa resolução e a que foi apresentada pelo par Carolina e Daniel.

Número de contas azuis	Número de contas vermelhas	
4	1	3
8	2	6
12	3	9
16	4	
20	5	
24	6	

Figura 2 – Tabela construída a partir da discussão da resolução do par António e Diogo.

A tabela permitiu aos alunos perceberem melhor a resolução daquele par, entendendo a questão da "diferença" referida por Carolina e também facilitou uma reflexão sobre a validade desse método recursivo para obter generalizações mais distantes. De facto, André, perante a observação da tabela, intervém fazendo uma associação com a resolução anterior.

André: Eu e o meu par descobrimos que 4 menos 3 vai dar o resultado do número de contas vermelhas...

Rita: Mas isso é só porque tu sabes o resultado. Ali no outro é menos 6, no 12 é menos 9 e depois isso é porque sabes o resultado, senão não sabias isso...

Vários alunos intervêm e a professora fica por um momento sem conseguir perceber em que direção a discussão se está a encaminhar, pedindo de seguida uma clarificação à turma.

> **Professora:** Alguém pode explicar ...
> **Fábio:** Como aquele grupo disse, que a diferença era sempre 3. Mas, para isso ele tinha de saber o resultado, porque senão ele estava a fazer menos 3 que vai dar 2.
> **Gonçalo:** Ya. Precisam de saber o resultado das duas colunas.
> **Professora:** Para utilizar sempre esse pensamento teria de saber a diferença entre cada colar...
> **Gonçalo:** E precisava de saber as duas colunas primeiro.
> **Fábio :** Ya. Porque se não faziam menos 3 que não ia dar o número de contas vermelhas.
> **Professora:** Ok, mas é verdade que aquela diferença entre as contas vermelhas e as contas azuis se mantém?
> (...)
> **Fábio:** É a tabuada do três.
> **Carolina:** Oh, Fábio, mas isso já nós tínhamos dito.

A intervenção de Fábio revela que o aluno usa a ideia apresentada pelo par anterior, mas consegue decidir sobre a sua razoabilidade para encontrar a generalização. Assim, tanto ele como os outros alunos rejeitam essa ideia como expressão mais apropriada para a generalização da relação entre as variáveis da sequência, devido ao seu caráter recursivo e, por isso, limitador para a construção de uma expressão geral de uma relação entre o número de contas azuis e vermelhas.

Episódio II - Exploração e redefinição de uma tabela. Como foi referido acima, o par António e Diogo apresenta a sua resolução com base numa tabela que surgia no enunciado da tarefa. A figura seguinte mostra a tabela apresentada por este par de alunos.

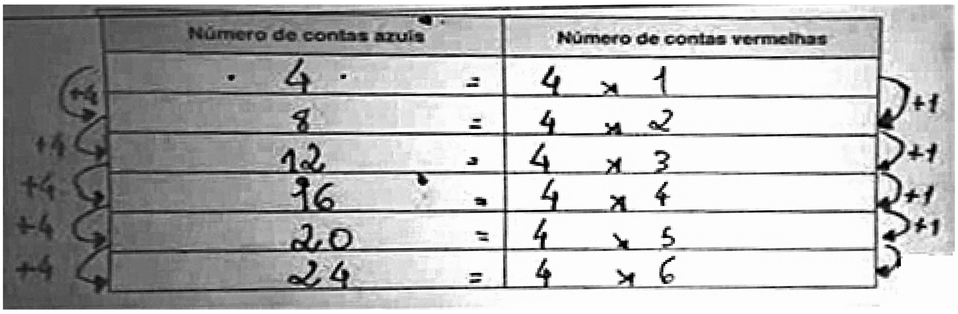


Figura 3 – Resolução original do par António e Diogo.

Na apresentação da tabela, alguns alunos consideram que esta está “confusa” porque “assim o número de contas azuis é igual ao número de contas vermelhas”. O excerto seguinte mostra algumas reações dos alunos.

Carolina: Para saber o número de contas vermelhas, eles fizeram 4 vezes 1 dá 4, 4 vezes 2 é 8…
António: Então, 4 vezes 2 é 8…
Carolina: O número de contas azuis é 8…
Professora: Desculpa, eu não percebi…
Carolina: Se 4 vezes 1 é 4, então o número de contas vermelhas é 4 e o número de contas azuis é 4.
Alguns alunos: Hã?
Professora: É interessante, bastante interessante o que está a dizer a Carolina. Diz lá isso outra vez que eu não sei se os teus colegas todos ouviram.
Carolina: Se o número de contas vermelhas… eles fizeram 4 vezes 1, que dá 4 então o número de contas vermelhas é 4 e o número de contas azuis é 4!
João: É 1!
Vários alunos: Não, não…
João: O número de contas vermelhas é 1.
Rita: Pois, mas é que eles estão ali a dizer 4 vezes 1…
Fábio: Não, 4 é igual a 4 vezes 1…
Rita: Não, mas eles ali estão a dizer que o número de contas azuis e o número de contas vermelhas é tudo igual…
Fábio: E 4 vezes 1 é quanto? 4! O número de contas vermelhas é 4.

Embora, inicialmente, a professora não consiga perceber o que pretende Carolina, posteriormente intervém solicitando à aluna a repetição da sua explicação para que outros alunos a possam compreender. Nesse momento, alguns alunos mostram não compreender o que a colega pretende e Rita consegue explicar a ideia da colega aos outros alunos.

Posteriormente, alguns alunos sugerem alterações na tabela de forma que as relações indicadas pelo par fiquem redigidas de forma correta. Por exemplo, João propõe que “4x”, na segunda coluna, seja escrito entre parêntesis para que não se confunda com o número de contas vermelhas de cada colar. Tendo em conta a importância da representação das relações matemáticas envolvidas na sequência, a professora conduz a discussão com o objetivo de levar os alunos a focarem-se nesse aspeto.

> **Professora:** Ok, mas o que eu estou a dizer, vamos lá ver se os colegas conseguem ajudar, eu interessa-me na minha tabela ler o número de contas azuis e o número de contas vermelhas também, o 4 vezes aqui está a mais, mas eu interessa-me este 4 vezes ou não?
>
> **Rita**: Eu sei uma maneira, metemos assim um risco, assim... depois fazia-se assim uma seta e depois metia-se assim um 4 vezes.
>
> **Fábio:** E nos outros todos também.

Por fim, os alunos concluem que as relações encontradas deveriam estar expressas fora da tabela, para que a leitura fique mais inteligível. Assim, os alunos redefinem a tabela inicial, clarificando a representação apresentada pelos colegas, de forma a construir a partir da sua ideia uma nova tabela como representação mais explícita das relações entre as variáveis.

Número de contas azuis	Número de contas vermelhas	
4	x4 1	3
8	:4 2	6
12	3	9
16	4	
20	5	
24	6	

x 4

: 4

Figura 4 - Reconstrução coletiva da tabela.

Neste momento, Matilde exprime a relação por palavras estabelecendo ligação com aquilo que tinha feito com o seu par, referindo que "o número de contas azuis a dividir por 4 é igual ao número de contas vermelhas. Depois o número de contas vermelhas vezes 4 é igual ao número de contas azuis". Matilde acrescenta que usaram esse raciocínio porque "a divisão é o oposto da multiplicação", identificando, assim, a utilização das operações inversas.

Episódio III - A expressão da generalização em linguagem simbólica. O par seguinte, Gonçalo e Henrique, mostra e explica a forma como expressou a relação entre as contas vermelhas e as contas azuis. Estes alunos apresentam uma representação simbólica dessa relação e explicam-na pormenorizadamente.

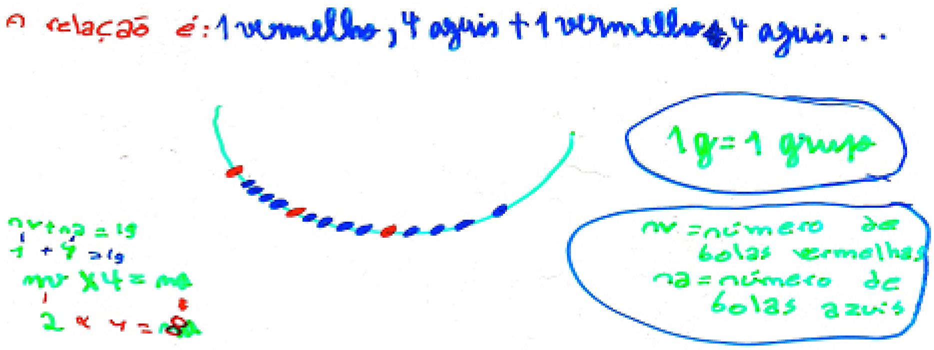


Figura 5 - Resolução do par Gonçalo e Henrique.

Gonçalo: Primeiro vimos que... a relação era sempre 1 vermelho, 4 azuis, mais 1 vermelho e 4 azuis, mais 1 vermelho e 4 azuis e sempre assim. Depois, só para explicar primeiro antes disso, "1g" é 1 grupo, "nv" é número de bolas vermelhas e "na" é o número de bolas azuis. Aqui fizemos só um exemplo de um colar e aqui fizemos "nv + na = 1g".

Alguns alunos: Ah? Não percebo.

Gonçalo: É assim, "nv" o número de bolas vermelhas dando o exemplo do 1, tinha de ser o 1, depois o "na" que é o número de bolas azuis que era o 4, era igual a um grupo, por exemplo, deste vermelho até este azul era um grupo, deste vermelho até este azul era outro grupo, deste vermelho até este azul era outro grupo, depois ia haver muitos mais grupos.

Carolina: Sim, mas como é que 1 mais 4 igual a 1 grupo?

Gonçalo: 1 mais 4 [aponta para o desenho do colar], o grupo era este pedaço.

Carolina: Ah, já percebi.

Gonçalo: E depois aqui há o "nv x 4 = na", por exemplo, era como tinham na tabela, eles disseram que era 2 vezes 4 o 8, que era o 8.

Neste excerto pode observar-se como os alunos, mais uma vez, interpelam o grupo que apresenta para ser mais claro quando não compreendem o seu raciocínio. Desta forma, referem não perceber ou questionam diretamente os colegas sobre aquilo que não conseguem entender. Também é evidente a forma como os alunos que apresentam a sua resolução procuram tornar mais explícito o seu discurso, apoiando-se na imagem de um colar particular ou estabelecendo a conexão com a tabela já apresentada por outro grupo, como faz Gonçalo.

Finalmente, a professora solicita ao par Marco e Fábio que mostre a sua resolução. Estes alunos também representam simbolicamente a relação entre as contas vermelhas e as contas azuis, mas utilizam uma simbologia diferente da do par anterior.

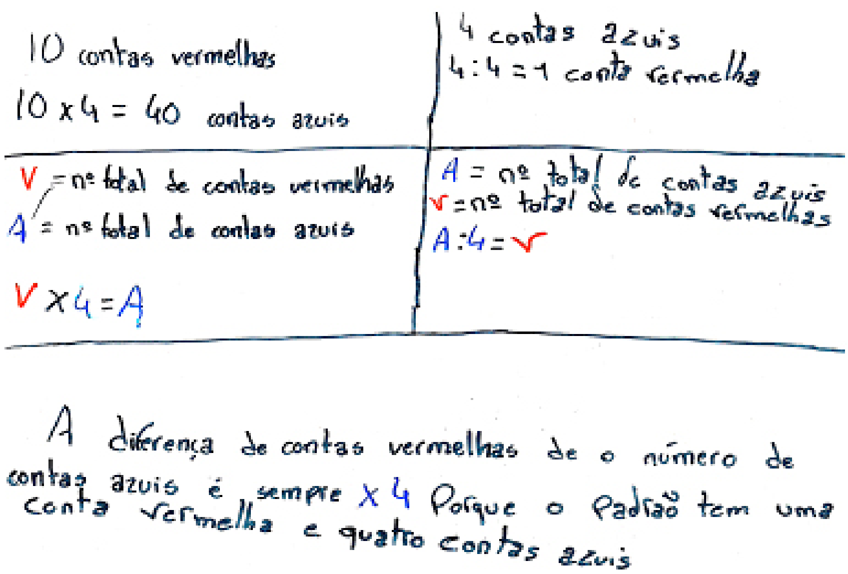


Figura 6 - Resolução do par Marco e Fábio.

Após a apresentação destes dois pares, a professora propõe a comparação entre as duas representações usadas. Desta forma, pretende que os alunos estabeleçam uma conexão entre as duas resoluções e que isso contribua para o desenvolvimento do seu sentido de símbolo. Os alunos comparam as duas resoluções, referindo as suas diferenças.

> **Gonçalo**: É a mesma coisa. O “v” se não fosse um número qualquer eles punham lá um número. O “v” significa qualquer número, mas têm de ser vermelhas e o “a” qualquer número de azuis e é a mesma coisa.
> **Carolina**: Está ali escrito “v igual a número total de contas vermelhas”.
> **Gonçalo**: Então, mas pode ser um número qualquer... ali o “a” pode ser o 20, o 40, pode ser um qualquer.
> **João**: O Gonçalo disse que é um número qualquer, mas não pode ser um número qualquer...
> **Fábio**: Não podem ser números ímpares. (...)
> **Professora**: Pronto, isso é verdade na relação, mas entre esta forma de escrever a relação e esta forma de escrever há grandes diferenças? (...) mesmo assim qual será aquela que é mais fácil de usar?
> **Lawry**: A do Fábio.
> **Professora**: Porquê? O que é que a do Fábio e do Marco mostra que possa parecer mais fácil?
> **Daniel**: É mais simples.
> **Rita**: Professora, eu acho que a do Gonçalo é mais fácil...

Enquanto os alunos se dividem sobre a opção que tomariam para representar a expressão da generalização da relação, a professora aproveita para clarificar um aspeto que considera importante na utilização da representação simbólica, através da intervenção do Gonçalo.

> **Gonçalo:** É a mesma coisa, mas só que o meu grupo acrescentou os “n’s”.
> **Professora:** É importante o que está a dizer o Gonçalo porque nós temos de saber que aquele “a” ali não é conta azul, é o número de contas azuis e aquele “v” ali representa o número de contas vermelhas.

Nestes dois últimos excertos podemos identificar ações dos alunos no sentido de se focarem nas relações matemáticas inerentes à estrutura da sequência e ainda na identificação da melhor representação simbólica para expressar as referidas relações. O primeiro fato é evidente quando João refere que "não pode ser um número qualquer" e Fábio acrescenta que não poderia ser um número ímpar. A preocupação pela escolha da melhor representação simbólica para expressar a relação é reforçada pela professora quando aproveita a intervenção de Gonçalo para evidenciar a diferença entre as representações simbólicas usadas pelos dois pares.

Episódio IV - A sistematização da atividade de generalização. No momento de sistematização das aprendizagens, a professora propõe a exploração coletiva de uma tabela:

Número de contas azuis	Número de contas vermelhas
?	15
68	?

Figura 7- Tabela explorada no momento de sistematização.

Em seguida, a professora solicita a alguns alunos que completem as linhas que têm o ponto de interrogação, começando pela descoberta do número de contas azuis. Depois, a professora pede aos alunos que expressem essa relação para qualquer número de contas azuis. Desta forma, retoma o que tinha sido trabalhado pelos pares e procura que os alunos cheguem a acordo sobre uma forma de representar simbolicamente essa relação.

Professora: Então como é que eu posso expressar essa relação? Vocês já disseram várias formas, uma forma fácil, rápida de eu dizer essa relação entre o número de contas azuis e o número de contas vermelhas, ou melhor, se eu souber o número de contas vermelhas, como é que eu sei o número de contas azuis?

João: Fazemos vezes 4.

Professora: Como é que eu posso representar aqui? Quem é capaz de dizer? Escrever uma forma que dê para saber para qualquer número de contas azuis, sabendo o número de contas vermelhas?

Fábio: N vezes 4

Gonçalo: "nv" vezes 4 é igual a "na".

Através do mesmo processo, os alunos descobrem o número de contas vermelhas sabendo o número de contas azuis. Nesta altura, identificam também a utilização das operações inversas, referindo que fazem "o contrário" para descobrir o número de contas vermelhas que fizeram para descobrir o número de contas azuis.

O preenchimento completo da tabela revela a expressão da generalização das relações entre as variáveis, em linguagem simbólica, da forma que foi aceite coletivamente pela turma. Nesse momento, os alunos acordam que a representação simbólica para designar qualquer número de contas vermelhas seria "nv" e que "na" representaria qualquer número de contas azuis.

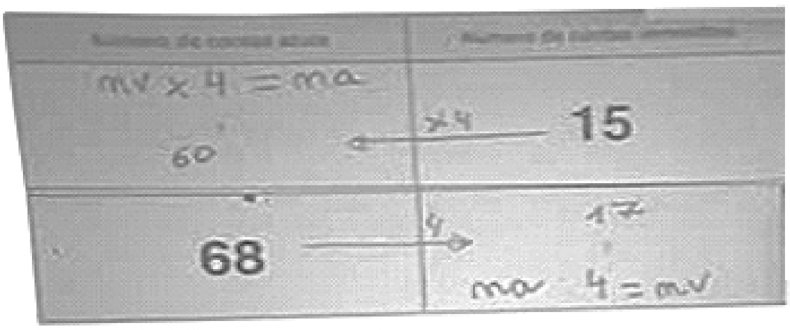


Figura 8 - Resolução coletiva da tabela no momento de sistematização.

Considerações finais e conclusões

Através deste estudo, é possível identificar práticas de ensino que promovem os processos de generalização matemática de alunos no 1.º ciclo, encarando-os como uma construção coletiva. Tendo em conta que a tarefa matemática apresentada foi realizada pelos alunos na fase final da experiência de ensino, verifica-se que a cultura de sala de aula, construída durante o percurso de um ano letivo, se caracteriza pelo envolvimento conjunto da professora e dos alunos enquanto comunidade de investigação, que tem um mesmo objetivo numa perspetiva dialógica de construção do conhecimento (Wells, 2000).

Usando como referência as categorias de ação promotoras da generalização identificadas por Ellis (2011), a análise dos dados apresentados neste capítulo permitiu identificar seis ações principais desenvolvidas pela professora nos momentos de discussão coletiva e de sistematização das aprendizagens descritos: 1) promover a discussão pública das ideias dos alunos; 2) encorajar a clarificação e justificação das ideias; 3) encorajar a procura de relações; 4) encorajar a extensão da ideia para além do caso apresentado; 5) encorajar o "sentido crítico", promovendo a validação ou rejeição das ideias apresentadas; 6) refocar a atenção nas relações matemáticas. Em seguida, descreve-se cada uma das ações referidas.

A primeira ação da professora que importa relevar pela sua transversalidade aos momentos de aula descritos neste capítulo, diz respeito à ação de "tornar públicas as ideias dos alunos". De facto, o momento de discussão coletiva alimenta-se da apresentação que os diferentes pares fazem das suas resoluções, permitindo que os restantes alunos compreendam e se apropriem dessas ideias. Desta forma, e tendo em conta o modelo de orquestração das discussões coletivas defendido por Stein et al. (2008), as ações que a professora desenvolve neste momento foram intencionalmente preparadas durante a planificação da tarefa (quando decidiu selecionar resoluções dos alunos que expressassem diferentes níveis e representações da generalização) e durante o momento de trabalho autónomo dos alunos (quando selecionou e sequenciou as diferentes resoluções). Assim, na fase da discussão coletiva, a professora desenvolve ações no sentido de promover a partilha pública dessas ideias. Para isso, conduz esse momento de forma a respeitar dois objetivos, um relativo ao par que apresenta, cuidando das condições para que essa apresentação seja clara e percetível, e outro relativo aos alunos que assistem, assegurando-se que têm as condições necessárias para se apropriarem das ideias apresentadas.

A segunda ação da professora identificada pode ser descrita como "encorajar a clarificação e justificação". Durante as diferentes apresentações dos alunos, a professora faz diversas intervenções para incentivá-los a serem mais claros e precisos no seu discurso. Utiliza ainda o questionamento direto, solicitando a justificação de procedimentos. A ação da professora de encorajar a clarificação e a justificação não se dirige apenas aos pares que apresentam, mas de forma geral à turma, envolvendo os alunos quer na explicitação quer na compreensão das ideias partilhadas.

A ação de "encorajar a procura de relações" também é evidente em diferentes momentos de exploração da sequência. Como exemplo pode referir-se o momento do primeiro episódio em que a professora conduz a turma a identificar a relação entre o número de contas azuis e o número de contas vermelhas na sequência questionando "Aquilo que este par esteve a pensar é que a diferença vai ser sempre o quê?... De três em três, é isso?". Nesses momentos, procura que os alunos percecionem e descubram as relações matemáticas envolvidas na sequência.

A ação de “encorajar a extensão das ideias para além do caso apresentado” é evidente quando a professora solicita a Carolina a extensão da sua ideia, pedindo-lhe que a aplique nos outros colares da sequência (primeiro episódio). Esta ação, para além de incentivar uma maior profundidade de reflexão na aluna, também procura envolver mais alunos na compreensão das suas ideias, promovendo um papel ativo de todos tendo em vista a construção da generalização.

Outra ação identificada no seu papel na construção da generalização é relativa ao “encorajar o sentido crítico, validando ou rejeitando as ideias apresentadas”. Esta ação é bastante evidente no terceiro episódio quando a professora põe em discussão as duas representações simbólicas da generalização e propõe a sua comparação, promovendo o estabelecimento de conexões e suscitando o sentido crítico dos alunos para que, após a comparação, optem pela representação que consideram mais apropriada.

Finalmente, a ação de “refocar a atenção nas relações matemáticas” é evidente em diversas ocasiões quando a professora procura centrar a atenção dos alunos nas relações matemáticas encontradas. Como exemplo pode referir-se a situação do último episódio em que a professora solicita a expressão mais adequada da representação da generalização das relações entre as variáveis envolvidas na sequência e promove a utilização das operações inversas na expressão dessa generalização. Esta ação diz respeito a um momento diferente do apresentado na ação descrita como “encorajar a procura de relações” porque pressupõe que os alunos já descobriram as relações e a intenção da professora centra-se agora em refocar a atenção dos alunos na importância das relações encontradas, sistematizando-as.

Paralelamente, e de forma bastante evidente, muitas das ações da professora identificadas são também adotadas pelos alunos da turma. Estes envolveram-se de forma ativa, procurando compreender o raciocínio dos colegas, desenvolvendo ações para promover a clarificação e justificação da ideia do par que apresenta, questionando-o diretamente sobre o que não entendem. Os alunos conseguiram ainda estabelecer conexões entre diferentes formas de representação, como aconteceu quando reconheceram a ideia do par Carolina e Daniel na exploração da tabela apresentada pelo par seguinte ou como se observou quando estabeleceram conexões entre as duas representações simbólicas e, focando-se nas relações matemáticas inerentes à estrutura da sequência, conseguiram optar por aquela que consideraram ser a mais apropriada. Ainda no que concerne à apresentação do primeiro par, os alunos conseguiram também refletir sobre a validade de um método recursivo para obter generalizações mais distantes. Podemos ainda observar, no que concerne às ações dos alunos, que estes conseguiram redefinir a estrutura da tabela apresentada por um dos pares, reconstruindo-a coletivamente. De facto, pelos excertos apresentados, pode constatar-se a forma como o coletivo da turma integra a discussão, e os diferentes alunos assumem um papel ativo tanto na explicação das suas formas de pensamento como na compreensão das explicações dos colegas (Baxter & Williams, 2010), inclusivamente reconstruindo os produtos apresentados de modo a fazer-lhes sentido a nível individual e na comunidade que integram.

Considerado como fundamental o processo de seleção das tarefas que são exploradas em sala de aula, a tarefa aqui apresentada revela-se muito significativa para a promoção do pensamento algébrico dos alunos, nomeadamente na vertente do pensamento funcional. No entanto, é pela sua exploração em sala de aula e pela atividade que os alunos realizam e a reflexão que produzem que se gera a aprendizagens (Ponte, 2005). Para tal, e no respeitante ao desenvolvimento do pensamento algébrico, é importante que os professores desenvolvam olhos e ouvidos algébricos (Blanton & Kaput, 2005) para integrarem natural e espontaneamente a abordagem dos conteúdos e procedimentos algébricos na sala de aula, durante um período de tempo significativo que permita a sua maturação gradual.

Relativamente à forma como foi desenvolvida a expressão da generalização na aula apresentada, poderá reforçar-se a importância dos momentos de discussão coletiva que proporcionam a partilha de ideias, seu confronto, clarificação e justificação, promovendo momentos de reflexão conjuntos que conduziram a ciclos de interação onde a generalização inicial pode revestir-se de novas formas, até à construção da sua versão final (Ellis, 2011). Assim, e como refere esta autora, a generalização surge de uma representação coletiva, onde o produto final não é resultante do trabalho de um aluno, mas da turma enquanto comunidade. Para esse resultado, é importante evidenciar as diferentes ações desenvolvidas pela professora e pelos alunos para a construção progressiva da representação da generalização assumida coletivamente pela turma.

Por último, há a referir a importância do trabalho de continuidade de promoção do pensamento algébrico que foi desenvolvido. A condução da experiência de ensino intencionalmente pensada para desenvolver a capacidade de generalização e sua representação dentro de um contexto de ensino exploratório, inserida numa perspetiva dialógica de construção de conhecimento (Wells, 2000), permitiu não só o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, como o desenvolvimento das capacidades transversais de comunicação e raciocínio matemáticos.

Referências

Baxter, J. A. & Williams, S. (2010). Social and analytic scaffolding in middle school mathematics: managing the dilemma of telling. *Journal Mathematics Teacher Education, 13,* 7-26.

Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice.* Heinemann: Portsmouth, NH.

Blanton, M., & Kaput, J., (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Canavarro, A. P., Oliveira, H., Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da matemática: o caso de Célia. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. M. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes, & S. Carreira (Eds.), *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática: Práticas de ensino de Matemática* (pp. 255-265). Castelo de Vide: EIEM.

Ellis, A. B. (2011). Generalizing-promoting actions: How classroom collaborations can support students' mathematical generalizations. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(4), p. 308-345.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.). *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York, NY: Lawrence Erlbaum.

ME (2007). *Programa de matemática do ensino básico.* Lisboa: DGIDC.

Murray, M. K. (2010). Early algebra and mathematics specialists. *The Journal of Mathematics and Science: Collaborative Explorations, 12,* 73 – 81.

National Council of Teachers of Mathematics (1994). *Normas profissionais para o ensino da matemática.* Lisboa: IIE e APM.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards of school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Eds.), *Educational design research* (pp. 45-85). London: Routledge.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2009). O novo programa de Matemática: uma oportunidade de mudança. *Educação e Matemática, 105,* 2-6.

Ponte, J. P., Silvestre, A. I., Garcia, C., & Costa, S. (2010). *O desenvolvimento do conceito de proporcionalidade direta pela exploração de regularidades. Tarefas para o 1.º e o 2.º ciclos do Ensino Básico. Materiais de apoio ao professor.* Projeto IMLNA - Promover a aprendizagem matemática em números e álgebra. Lisboa: IE e UBI. (Acedido em 01 de junho de 2013 de http://www.apm.pt/files/_Materiais_Proporcionalidade__(IMLNA)_4cfc0dcb29b46.pdf)

Sherin, M. G. (2002). A balancing act: developing a discourse community in a mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5,* 205-233.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Helping teachers learn to better incorporate student thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313-340.

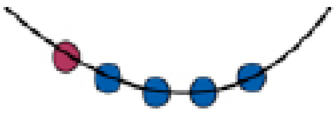
Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3,* 268–275.

Wells, G. (2000). Dialogic inquiry in education: Building on the legacy of Vygotsky. In C. D. Lee & P. Smagorinsky (Eds.), *Vygotskian perspectives on literacy research* (pp. 51-85). New York, NY: Cambridge University Press. (Acedido em 01 de junho de 2013 de https://www.csun.edu/~SB4310/601%20files/dialogicinquiry.pdf)

Anexo

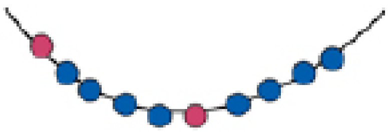
Tarefa "Os colares"

A Maria está a fazer colares para oferecer às suas amigas. Só tem contas de duas cores - azuis e vermelhas. Começou por construir o primeiro colar:

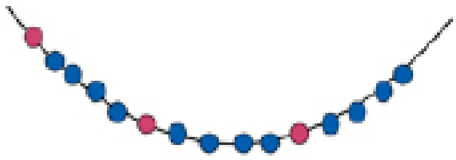


1.º colar

Depois, fez o segundo e o terceiro colares:



2.º colar



3.º colar

1. Desenha o quarto colar construído pela Maria.

2. Preenche a tabela:

Número de contas azuis	Número de contas vermelhas

3. Como podes escrever a relação entre o número de contas azuis e o número de contas vermelhas? Mostra como pensaste.

COMUNICAÇÃO

13. O professor e o desenvolvimento da capacidade de argumentação: Equações do 2.º grau na Antiga Babilónia

por Maria Helena Martinho, Paulo Duarte Bastos Gil

13. O professor e o desenvolvimento da capacidade de argumentação: Equações do 2.º grau na Antiga Babilónia com alunos do 9.º ano

Maria Helena Martinho

Centro de Investigação em Educação,

Universidade do Minho

mhm@ie.uminho.pt

Paulo Duarte Bastos Gil

Escola Básica e Secundária de Pinheiro,

Penafiel

pbastosgil@gmail.com

• **Resumo:** O presente capítulo tem como principal objetivo mostrar como é possível, através de uma sequência de aulas cujas tarefas estão alicerçadas na História da Matemática, criar um contexto de argumentação. Assim, identificam-se os argumentos produzidos pelos alunos e os papéis do professor na construção desse contexto que os potencia. Ao longo do capítulo é apresentada uma sequência de ensino proposta a uma turma do 9.º ano para a introdução da fórmula resolvente das equações do 2.º grau. Através da experiência preparada e acompanhada pelo professor, foi possível identificar que os alunos recorreram a diferentes tipos de argumentos que evidenciam diferentes graus de formalidade e tipo de raciocínio. O professor desempenhou ao longo da experiência diferentes papéis – na construção da aula como comunidade, na garantia do discurso produzido na aula, em que se destaca o foco na argumentação, na seleção e uso das tarefas, e no próprio conhecimento — que o ajudaram a concretizar a experiência.

• **Palavras-Chave:** Argumentação matemática, Papel do professor, Equações do 2.º grau, História da Matemática.

Introdução

A argumentação matemática é intrínseca à atividade matemática. Genericamente, a problemática da argumentação surge associada ao reconhecimento do papel da comunicação e da interação social na aquisição de conhecimento (Duval, 1999). Este reconhecimento permite realçar a importância da linguagem natural, do estreito vínculo existente entre a prova e a convicção, e o interesse do confronto de diferentes pontos de vista. Sabendo-se que em Matemática o motivo e o objetivo da argumentação são específicos do problema que se pretende resolver (Duval, 1999), a motivação para estudar a argumentação nesta disciplina deriva da necessidade de caracterizar os processos utilizados durante a resolução de um problema, isto é, os processos de descoberta, construção e exploração de conjeturas (Pedemonte, 2002).

A argumentação é uma dimensão da aprendizagem da Matemática. De facto, uma cultura de aula em que se promove a argumentação suscita a participação dos alunos na sua própria aprendizagem (Boavida, 2005; Douek, 2000; Krummheuer, 1998). Essa cultura traduz-se na constituição e manutenção de uma comunidade de discurso matemático, tal como preconizada por Sherin (2002), na qual os alunos possam expressar não só as suas ideias, mas também interpretar e compreender as opiniões dos outros, participando de forma construtiva em discussões sobre ideias, processos e resultados matemáticos. Contudo, apesar da existência de vários estudos que realçam o valor da argumentação em Matemática (Balacheff, 1999; Duval, 1999; Knipping, 2008; Pedemonte, 2002), bem como de referências precisas nas orientações curriculares, nacional e internacionalmente (Ministério da Educação, 2007; National Council of Teachers of Mathematics, 2007), as atividades argumentativas em contexto de sala de aula são, por vezes, pouco expressivas (Boavida, 2005).

Por isso mesmo, o papel do professor na construção de contextos potenciadores de argumentação revela-se essencial e merece ser mais estudado. Desenvolver e discutir argumentos matemáticos implica criar condições para que os alunos aprendam a raciocinar matematicamente. É precisamente esse papel do professor, nas suas diversas dimensões, que este capítulo ilustra e discute. O segundo autor, enquanto professor de uma turma do 9.º ano, preparou uma sequência de tarefas com o objetivo de desenvolver e aprofundar contextos de argumentação na aula de Matemática. A sequência de tarefas foi construída a partir de dados da História da Matemática[1]. O contacto com os diferentes pontos de vista que emergiram ao longo da história constitui uma oportunidade para os alunos defenderem e argumentarem sobre as ideias matemáticas, em particular, desenvolverem a arte de discutir, de justificar as suas opiniões e de apresentar os seus raciocínios aos seus pares (Fasanelli, 2000). A comparação de estratégias de resolução, promove o confronto de ideias e raciocínios matemáticos (Lakoma, 2000), o que permite não só o desenvolvimento de situações de argumentação, mas também o estabelecimento de conexões com outros conhecimentos já adquiridos ou de outras áreas do saber, fomentando, a prazo, nos alunos o gosto pela Matemática (Fauvel & Maanen, 2000; Grugnetti, 2000; Tzanakis & Arcavi, 2000).

Assim, com este capítulo pretendemos identificar quais as dimensões do papel desempenhado por um professor na construção de um contexto favorável à argumentação bem como identificar os argumentos que esse contexto potencia. O capítulo encontra-se dividido em cinco partes, iniciando-se com a discussão da argumentação na aula de Matemática e dos papéis do professor na construção do contexto favorável à produção de argumentos. Na secção seguinte, abordamos o modelo de argumentação de Toulmin bem como a classificação de argumentos proposta por Reid e Knipping (2010) que permitem identificar na experiência de ensino quais os argumentos produzidos. Segue-se a apresentação da metodologia, o contexto do estudo e a descrição da própria experiência. Apresentamos, de seguida, alguns extratos da experiência que permitem identificar argumentos produzidos pelos alunos e o papel do professor. Finalmente, apresentamos as conclusões do estudo.

A argumentação na aula de Matemática e o papel do professor

A argumentação faz parte da vida quotidiana uma vez que é um ato específico de interação social. Nesta secção procura-se caracterizar as noções de argumento e argumentação, sublinhar a sua centralidade na educação matemática e recolher um conjunto de papéis desempenhados pelo professor que a promove ou a facilita. Este percurso é depois focado, na secção seguinte, na análise dos modelos de argumentação que permitirão guiar a leitura dos episódios apresentados ao longo do capítulo.

1 Sequência baseada numa proposta apresentada por Luis Radford e Georges Guérette (2000).

Noção de argumentação. Por *argumentação* entende-se uma técnica ou método de discurso para estabelecer uma afirmação (Banegas, 1998), ou seja, um processo que produz um discurso lógico (não necessariamente dedutivo) sobre um dado assunto (Douek, 1999). Nesse sentido, numa discussão, a argumentação pode ser caracterizada como o esforço de transformar algo discutível em algo aceite por todos os participantes. Contudo, não é necessário que a discussão, à volta da qual se desenvolve a argumentação, proceda de forma harmoniosa, pois "há argumentação quando algo não é admitido como evidente, mas suscita discussão, tomadas de posição (decisões, escolhas), necessidade de defesa ou de crítica" (Grácio, 1993, p. 73). De facto, durante uma argumentação podem ocorrer desacordos, o que permite a mudança e a correção das diferentes afirmações que vão sendo estabelecidas. O conjunto dessas afirmações, que surgem durante uma argumentação, e que vão sendo aceites por consenso, irá, portanto, passo a passo tomando forma, sendo o desacordo superado. O resultado deste processo, que pode ser reconstruído, designa-se por *argumento* (Banegas, 1998). Trata-se de um intercâmbio discursivo com o propósito de convencer os outros, podendo a argumentação ser vista como um processo interativo de saber como e quando participar nesse intercâmbio (Wood, 1999). Argumento é, assim, caracterizado como a razão ou razões apresentadas a favor ou contra uma proposição, opinião ou parecer, sob diferentes formas de expressão, verbais ou não verbais, podendo, em particular, invocar desenhos, esquemas ou dados numéricos.

O interesse da educação matemática pelo estudo da argumentação e, consequentemente, o aumento de trabalhos de investigação nesta área, está relacionado não só com o facto de a linguagem natural, mais do que a linguagem formal, ser a base de pensamento e comunicação humana, mas também com o reconhecimento na própria educação matemática da importância do processo social na aprendizagem (Duval, 1999).

O valor da argumentação, nas aulas de Matemática, surge não só associado à ideia de explicação e justificação – convencer o outro – mas também à própria discussão e avaliação das diferentes ideias expressas na sala, mediante a realização de uma determinada tarefa. De facto, o raciocínio matemático envolve a construção de cadeias argumentativas que podem requerer apenas a justificação de passos e operações na resolução de uma tarefa ou argumentações mais complexas com recurso à linguagem dos números, da álgebra e da geometria.

Papel do professor. Diferentes autores apontam a importância do papel do professor na criação de um contexto favorável à argumentação. Hufferd-Ackler, Fuson e Sherin (2004) apresentam quatro papéis que o professor desempenha numa aula que pretende que seja de discussão: questionamento, explicitação do pensamento matemático, fonte de ideias matemáticas e responsabilidade pela aprendizagem. Apresentam estes papéis como cumulativos, sendo progressivamente inclusivos, intitulando-os de “níveis”. Wachira, Pourdavood e Skitzki (2013), recorrendo aos níveis apresentados por Hufferd-Ackler et al (2004), adotam novas designações, apresentando quatro estratégias para a promoção do discurso e comunicação na sala de aula, mas assumindo-as como não sendo necessariamente sequenciais: o estabelecer expectativas de como falam e escrevem em Matemática, a linguagem utilizada para que seja adequada e progressivamente mais formal, a comunidade matemática em que os alunos falam e se ouvem mutuamente, e, por fim, estabelecer o discurso formal em que o professor tende a ser quase apenas assistente.

Neste capítulo adotamos quatro dimensões do papel do professor apresentadas por Anthony e Walshaw (2009): construção da comunidade matemática, garantia do discurso na sala de aula, cuidado com as tarefas e sustentação do conhecimento. O professor ao assumir a aula como uma *comunidade*, foca as discussões em objetivos precisos e procura atribuir sentido às diferentes ideias que vão sendo produzidas pelos alunos. A preocupação com o envolvimento dos diferentes alunos nas aulas e em particular nas discussões, fazendo com que todos se sintam membros da comunidade, apesar de poderem assumir papéis diferentes, está patente nesta dimensão. O conhecimento dessas diferentes necessidades, capacidades e mesmo expectativas ajuda o professor a saber como atuar na construção dessa comunidade em que cada um tem o seu lugar. Segundo Anthony e Walshaw (2009), o professor, para além de convidar os alunos a participar, deve dar indicações das suas expectativas em termos dessa participação relativamente ao como, quando e de que forma. Nos momentos de discussão coletiva os alunos podem clarificar as suas ideias e o professor tem oportunidade de focar a atenção nos aspetos essenciais. O professor é, então, confrontado com a necessidade de não só dar sentido à multiplicidade de ideias desenvolvidas pelos alunos, mas também de decidir como usá-las ao longo da aula. Cabe-lhe a orquestração dos momentos de discussão e a criação de um registo quer das ideias em discussão quer do caminho percorrido pela turma. O seu desempenho na orquestração é destacado por Lampert (2001) em diferentes aspetos: decidir a quem dar a palavra, incluindo aos alunos que não estão a requerer atenção; ensinar e apoiar alunos particulares, mas mantendo toda a turma envolvida na discussão; manter a trajetória da discussão; e monitorizar a discussão de acordo com o horário da aula.

Para que o *discurso* na sala de aula seja mantido a um bom nível, é necessário que todo o diálogo seja essencialmente focado na argumentação e que o cuidado com a linguagem matemática esteja presente. É importante que o professor encoraje o uso de representações quer sejam orais, escritas ou com recurso a materiais. Os conflitos e desacordos são importantes para o desenvolvimento da argumentação, cabe ao professor identificá-los e dar-lhes destaque para provocar a sua discussão. Relativamente à linguagem é relevante que o aluno compreenda o que se diz na aula, nesse sentido, precisa de ser acessível aos diferentes alunos. No entanto, o uso de uma linguagem matemática progressivamente mais elaborada deve ser garantida pelo uso que dela faz o professor, levando a que de forma natural os alunos se vão envolvendo e apoderando dela também.

Relativamente às *tarefas*, a forma como são preparadas e concretizadas pelo professor é determinante para a construção do contexto de argumentação (Doerr, 2006). Na escolha das tarefas o professor deve estar confiante que elas vão ajudar os alunos a progredir e envolver-se num bom nível de pensamento matemático (Anthony & Walshaw, 2009; Stein & Smith, 1998). As tarefas devem ser poderosas para que permitam a discussão, o confronto e o estabelecimento de conexões entre diferentes processos de resolução, representações e temas da Matemática (Ponte, 2005; Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008). Para a concretização deste papel o professor pode desempenhar diferentes ações como, por exemplo, questionar os alunos e confrontar resoluções diferentes.

A sustentação do *conhecimento* matemático por parte do professor é um dos seus papéis fundamentais. O conhecimento matemático sólido permite não só concretizar o seu desempenho na seleção das tarefas, na formulação clara dos seus objetivos e na capacidade de explorar e ajudar os alunos a ultrapassar dúvidas e a explicitar as suas ideias (Rowland, 2008). A forma como o professor organiza as atividades de ensino está intimamente ligado ao seu domínio dos conteúdos, às suas conceções acerca da Matemática e ao que sabe acerca do processo de ensino e aprendizagem no pressuposto que o professor necessita de ter um substancial conhecimento pedagógico do conteúdo e uma forte compreensão sobre como os alunos aprendem (Anthony & Walshaw, 2009; Ponte & Chapman, 2006).

Modelo de argumentação de Toulmin

O aparecimento da obra *The Uses of Argument*, de Stephen Toulmin, em 1958 (edição de 2008), é um marco decisivo no estudo da argumentação. Nela sobressai a importância do contexto em que se desenvolve a argumentação, construindo-se um esquema geral que identifica os elementos presentes numa argumentação. A obra de Toulmin, bem como a de Perelman e Olbrechts-Tyteca (1958), cujo livro *Traité de l'Argumentation: La Nouvelle Rhétorique* teve igual importância no renascimento contemporâneo da retórica, influenciaram fortemente a investigação sobre argumentação no âmbito da educação matemática. Em particular, estas obras tornaram possível caraterizar a argumentação matemática ao nível das suas características funcionais e estruturais. Enquanto as primeiras determinam a finalidade da argumentação, sua utilidade e papel no interior de um discurso, as segundas permitem definir a sua estrutura.

O modelo de argumentação proposto por Toulmin permite proceder a uma análise local dos argumentos presentes numa argumentação em Matemática, isto é, a análise da microestrutura de um argumento. Por isso tem sido bastante difundido em trabalhos da educação matemática focados na argumentação e na prova (Balacheff, 1999; Duval, 1999; Forman, Larreamendy-Joerns, Stein, & Brown, 1998; Knipping, 2008; Krummheuer, 1998; Pedemonte, 2002).

Toulmin (2008) descreve a estrutura básica de argumentos racionais como o par *dado/conclusão*. A passagem do(s) dado(s) à conclusão pode ser colocada em causa, sendo, com frequência, explicitamente justificada através de uma garantia (figura 1). Embora, por vezes, a distinção entre dados e garantias não seja clara, as suas funções são distintas. Enquanto os dados transmitem um conjunto de informações, as garantias autorizam o passo de inferência. Esta distinção entre dados, garantias e conclusão, possibilita a Toulmin fornecer os elementos do esqueleto de um padrão que designamos por "forma simples de argumentação", que permite analisar argumentos, em particular argumentos matemáticos. De facto, esta estrutura ternária de um argumento também foi considerada na análise dos silogismos por Aristóteles, o primeiro a fornecer uma estrutura da argumentação composta por três termos: duas premissas e uma conclusão.

O modelo de argumentação proposto por Toulmin tem, acima de tudo, o objetivo de captar a "forma lógica" de um discurso racional (Pedemonte, 2002). No entanto, este esquema elementar pode não ser suficiente para analisar determinados discursos argumentativos. Acrescenta, assim, três elementos auxiliares de análise do discurso: os qualificadores modais, as condições de refutação e o fundamento. Em particular, na argumentação em Matemática estes elementos auxiliares surgem, respetivamente, como indicadores de força do argumento, como condições de exceção e como suporte à permissão de inferência, a garantia, como representado na figura 2.

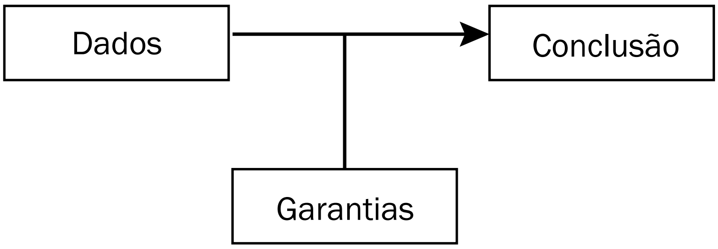


Figura 1 – Representação da forma elementar de argumentação proposta por Toulmin.

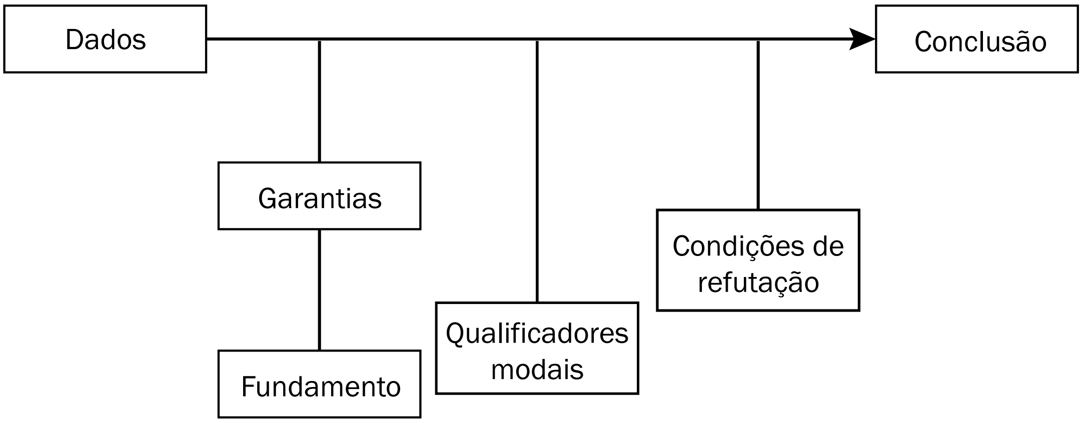


Figura 2 – Modelo de análise da microestrutura de um argumento proposto por Toulmin.

Para Toulmin, as unidades anatómicas representam as fases gerais de um argumento. Em Matemática, essas fases são, a fase inicial da leitura do problema, a fase da formulação, análise e eventual eliminação de soluções potenciais e a fase da apresentação final de uma conclusão. O seu modelo é, assim, útil para reconstruir um passo de argumento, permitindo selecionar argumentos distintos, nomeadamente em processos de prova. Permite ainda fazer um corte da argumentação nos seus elementos e, ao mesmo tempo, ver os seus encadeamentos.

Ao longo de uma argumentação é ainda possível proceder a uma classificação dos diferentes argumentos produzidos. Reid e Knipping (2010) apresentam uma forma de classificar e descrever argumentos tendo em consideração as diferentes classificações existentes na literatura. Estes investigadores estabelecem quatro categorias de argumentos que designam por *empírica*, *genérica*, *simbólica* e *formal*, referindo que no seu interior podem ser encontradas subcategorias, admitindo também a existência de argumentos que se situam nas suas fronteiras. A Tabela 1 fornece uma visão global das categorias e subcategorias, tendo em consideração o trabalho desenvolvido por aqueles investigadores.

Tabela 1 – Classificação de argumentos (Gil, 2012)

Categoria	Subcategoria
Argumentos empíricos (exemplos não representativos)	Simples enumeração Extensão de um padrão Experiência crucial Género ou espécie Esquema percetual
Entre o empírico e o genérico (entre exemplos não representativos e exemplos representativos)	Exaustão Contraexemplo
Argumentos genéricos (exemplos como representações)	Exemplos numéricos Exemplos concretos Exemplos pictóricos Exemplos situacionais
Entre o genérico e o simbólico	Argumentos geométricos
Argumentos simbólicos (palavras e símbolos como representações)	Narrativa Simbólica
Entre o simbólico e o formal (entre símbolos representativos e não representativos)	Manipulativa
Argumentos formais (símbolos não representativos)	

Metodologia e contexto

Este estudo seguiu uma metodologia qualitativa, com foco no professor, com uma turma do 9.º ano, em torno do desenvolvimento de um contexto potenciador de argumentação na sala de aula. A turma era constituída por 27 alunos com idades compreendidas entre os treze e os quinze anos. O professor acompanhava a turma desde o 7.º ano e encontrava-se há mais de 15 anos a lecionar na mesma escola.

O estudo teve várias fases: organização da experiência de ensino; concretização e recolha de dados; análise dos argumentos produzidos pelos alunos e análise dos papéis desempenhados pelo professor para potenciar as produções escritas dos alunos. Para a recolha de dados recorreu-se à observação das aulas e às produções dos alunos. Um gravador alocado a cada grupo permitiu ter acesso aos diferentes argumentos produzidos pelos alunos em grupo e uma câmara de vídeo colocada num local estratégico captou o ambiente da aula e os momentos de orquestração da discussão coletiva pelo professor. A análise dos argumentos produzidos pelos alunos foi feita recorrendo ao modelo de análise local dos argumentos proposto por Toulmin e à classificação de argumentos proposta por Reid e Knipping (2010). A análise do papel do professor foi realizada percorrendo as quatro dimensões apresentadas por Anthony e Walshaw (2009).

Com o objetivo de fomentar o desenvolvimento da argumentação matemática em sala de aula, o professor preparou uma sequência de ensino (segundo o itinerário na Tabela 2) sobre a introdução da fórmula resolvente das equações do 2.º grau, contextualizada na História da Matemática. Sendo o objetivo, para além obviamente da aprendizagem das equações do 2.º grau, o desenvolvimento da capacidade de argumentação matemática dos alunos, o professor procurou dar um forte relevo aos momentos de trabalho de grupo e de discussão com toda a turma, interagindo com os alunos sempre que considerou necessário. As primeiras cinco tarefas foram realizadas em pequenos grupos e discutidas em grande grupo no final da realização de cada uma. As duas últimas foram realizadas em grupo turma.

A experiência em sala de aula

A partir de alguns fragmentos da experiência realizada na sala de aula foi possível identificar alguns dos papéis desempenhados pelo professor no desenvolvimento de contextos argumentativos bem como os argumentos produzidos pelos alunos ao longo dos diferentes momentos de discussão da aula.

Na aula

Apresentamos, de seguida, alguns exemplos do trabalho desenvolvido pelos alunos durante a aplicação da sequência de ensino, sublinhando o tipo de argumentos e de

Tabela 2 – Planificação da sequência de ensino

Tarefa	Descrição	Tempo* (90 minutos)
I	Resolução do problema: determinar as dimensões de um retângulo cujo semiperímetro é 20 e cuja área é 96;	
II	Leitura e análise da resolução do mesmo problema, apresentada por Diofanto em *Aritmética*, I, 27;	1
III**	Interpretação, com recurso a material manipulável, em termos de *geometria do corta e cola*, geometria intuitiva;	1
IV	Resolução de um novo problema: dado um retângulo com comprimento 10 e largura desconhecida; desenha-se um quadrado de lado igual à largura desconhecida do retângulo dado; sabendo que a soma da área do retângulo com a área do quadrado é 39, determinar a largura do retângulo inicial.	
V	Utilização de uma diferente técnica de geometria intuitiva, baseada na interpretação geométrica, para o problema proposto na tarefa IV, realizada pelo historiador Jens Høyrup;	1
VI	Generalização do procedimento presente na tarefa V, isto é, considerando que o retângulo dado tem comprimento b e que a soma da área do retângulo com a área do quadrado de lado igual à largura do retângulo inicial é c, determinar a largura do retângulo inicial;	2
VII	Determinação das fórmulas das equações $ax^2 + bx = c$ e $ax^2 + bx + c = 0$, tendo em consideração a resolução da tarefa anterior e a resolução do exercício: sem resolver a equação verificar quais dos seguintes números 1, 2 e 3 são soluções da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$. Seguidamente, aplicando a fórmula que obtiveram anteriormente, determinar a solução da equação. Por fim, e tendo em conta este último exercício e a última fórmula obtida, determinar a fórmula resolvente das equações do 2.º grau.	

* O tempo sugerido para a realização de cada uma destas partes constitui apenas uma indicação, uma vez que a duração desta sequência pode variar, pontualmente, consoante o desempenho matemático dos alunos.

** A interpretação em termos de geometria intuitiva presente na parte III desta sequência constitui uma introdução às técnicas presentes na geometria do corta e cola, uma vez que a interpretação apresentada pelo historiador Jens Høyrup, a partir de uma análise filológica do contexto matemático da Antiga Babilónia, surge apenas na parte V.

formas de argumentação presentes nos discursos argumentativos efetuados. Para cada situação apresentada são identificados também os papéis desempenhados pelo professor para proporcionar esses argumentos. O *conhecimento* do professor é revelado ao longo de toda a experiência, desde a preparação das tarefas e organização da sequência de ensino, passando pela forma como geriu os momentos das aulas, em particular as discussões coletivas.

Ao longo da resolução das tarefas propostas, os alunos produziram vários argumentos, que foram categorizados de acordo com o modelo proposto por Reid e Knipping (2010). A partir da análise dos diferentes discursos argumentativos produzidos pelos alunos, foi possível identificar não só formas simples de argumentação, mas também formas mais complexas em que os elementos funcionais presentes contemplam, nomeadamente, refutações. Na procura das soluções dos problemas propostos, os alunos recorreram a argumentos empíricos, genéricos e simbólicos. No entanto, é possível identificar argumentos que se situam na fronteira dessas categorias. Percorrendo alguns desses exemplos, é possível identificar esses argumentos.

Episódio 1. Observe-se o diálogo estabelecido entre o professor e o grupo G1, durante a realização da tarefa I.

> **Professor:** Como é que escolheste o 15?
> **Nuno:** Eu escolhi o 15 porque era para começar a meio logo.
> **Professor:** A meio de quê?
> **Nuno:** Este (apontando para a base do retângulo) era maior que este (apontando para a altura do retângulo).
> **Ana:** Só podia dar 40 (referindo-se ao perímetro total da figura).
> **Nuno:** Certo, só podia dar 40. Eu vi logo 15 [com] 15 dava 30, este aqui tinha de ser 5 (apontando para a altura do retângulo), mas não dava porque 15 vezes 5 não dava 96. Depois tentei 17 [para medida da base do retângulo]. Quanto maior fosse este (apontando para a base) mais pequeno era este (apontando para a altura). E não dava, porque a área dava cada vez mais pequena [do que 96]. Tentei para baixo de 15. Lembrei-me do 12. 12 mais 12 [dá] 24, o resto dá 16 [pois o perímetro do retângulo é 40] que a dividir por 2 dá 8. 12 vezes 8 dá 96 que é a área e isto tudo somado (apontando para o desenho) dá o perímetro.

O excerto mostra que este grupo iniciou a resolução do problema escolhendo 15 para medida da base do retângulo; logo a largura seria 5, uma vez que o perímetro do retângulo era 40, pois, pelo enunciado, o semiperímetro do retângulo era 20. É de observar que esta última afirmação não surge de forma explícita na justificação apresentada. Contudo, implicitamente, percebe-se que os alunos têm em consideração este dado do problema. Seguidamente observam que a área de um retângulo com essas dimensões não era 96, pelo que resolvem escolher outro número.

Neste episódio, o professor colocou algumas questões ("como é que escolheste o 15?", "a meio de quê?") que lhe permitiram perceber o modo como os alunos estavam a pensar e identificar os argumentos envolvidos. Segundo o modelo de Toulmin (figura 3), apesar dos alunos terem seguido um processo de resolução de tentativa e erro, o discurso argumentativo detetado corresponde a uma *forma complexa de argumentação*, em que a refutação a uma conclusão, permite, posteriormente, obter a solução do problema.

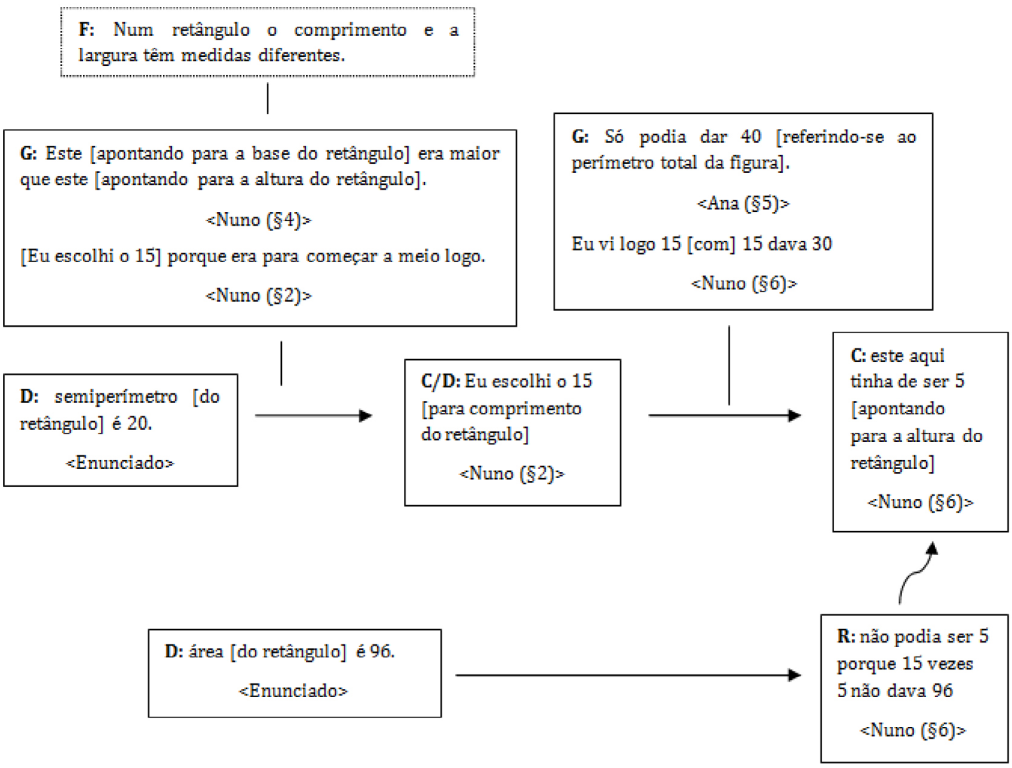


Figura 3 – Representação esquemática da reconstrução funcional dos argumentos presentes no raciocínio apresentado pelo grupo G12

2 Neste tipo de diagramas a linha que se encontra a tracejado, contém uma afirmação que não foi explicitamente referida, mas estava implícita nas garantias apresentadas pelos alunos.

A intervenção do professor na procura da compreensão do processo seguido, através da questão "como é que escolheste o 15?" e no retomar a questão revelando insatisfação com a resposta obtida "para começar no meio logo", estimulou os alunos na procura de uma adequada explicitação do raciocínio. Neste episódio está patente o desempenho do professor no estabelecimento de uma *comunidade* na sala de aula, de forma explícita procurou, através de questões, dar sentido às ideias dos alunos.

Episódio 2. Na aula seguinte, aquando da realização da tarefa IV, foi possível identificar argumentos *entre o empírico e o genérico*. Embora os alunos tenham tentado resolver a tarefa proposta quer por processos algébricos quer por processos geométricos, apenas conseguiram determinar a largura do retângulo inicial de forma aritmética, por tentativa e erro. Observe-se a forma como o grupo G1 encontrou a solução do problema através de um excerto do diálogo que surgiu durante a apresentação da sua resolução em grande grupo e da figura que construíram (figura 4). Observe-se igualmente os papéis desempenhados pelo professor nas breves intervenções que estabeleceu na orquestração da discussão.

> **Professor:** Nuno, como é que o vosso grupo pensou?
>
> **Nuno:** Por tentativa e erro.
>
> **Professor:** Explica lá.
>
> **Nuno *(virando-se para Ana)*:** Explica tu!
>
> **Professor:** Sim Ana, podes explicar tu.
>
> **Ana:** Se a área total do quadrado e do retângulo tinha que ser 39...
>
> **Professor:** Sim.
>
> **Ana:** Aqui *(apontando para o x desenhado na figura 4)* tinha que ser 3. Porque se fosse 4, era 10 vezes 4 que já ia ultrapassar o 39. Então 10 vezes 3, 30, ainda faltam 9. Como isto é um quadrado tem de ser 3. 3 para [ao quadrado] dar o 9 de área.
>
> **Miguel:** Não percebi!
>
> **Professor:** O que é que não percebeste?
>
> **Miguel:** Como é que eles descobriram o 3?
>
> **Professor:** Explica de novo, Ana.
>
> **Ana:** Aqui é 10 de certeza por causa do enunciado (apontando para a figura). Se aqui fosse um 4 *(apontando para o x)*, 10 vezes 4 dava 40 e ultrapassava os 39. Então para baixo, tinha de ser o 3. 10

vezes 3 dá 30. Se isto é um quadrado, ainda faltam 9 para chegar aos 39. Então aqui fica 3 *(apontando para o x)* e aqui 3 *(apontando para o x)* para dar 9. A soma de 9 mais 30 dá 39.

Miguel: E se o 3 não fosse solução do problema?

Ana: Tentávamos outro até dar! Mas já sabíamos que tinha de ser menor do que 4.

Miguel: Ora, mas podia demorar muito tempo!

Ana: Pois...

Nuno: Mas a gente ia vendo o que ia dando e diminuía as possibilidades.

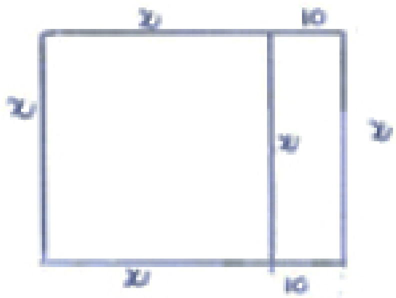


Figura 4 – Figura geométrica construída pelo grupo G1.

Este excerto mostra que os alunos não procederam a uma simples enumeração dos valores de *x*, nem, inicialmente, a uma simples verificação de todos os valores possíveis. Ao serem questionados por Miguel ("Como é que eles descobriram o 3?"), este grupo de alunos apresenta um *contraexemplo* para o facto de não ser possível escolher um número maior ou igual a 4, como refere Ana ("Se aqui fosse um 4 . . . tinha de ser o 3"). Concluem, assim, que se fosse possível escolher 4, não era possível satisfazer os dados do problema, pois a área do retângulo inicial seria maior do que 39. Portanto, concluem que o número teria de ser inferior a 4, daí a escolha de 3. No entanto, o grupo refere, através de Ana na fala seguinte, que caso o 3 não fosse solução iria testar outros números, o que revela a sua disposição para recorrerem, posteriormente, a um processo de carácter exaustivo.

Neste diálogo, o professor revelou, tal como no episódio anterior, a preocupação com a construção da *comunidade* na sala de aula. Não só se preocupou com a compreensão dos argumentos apresentados pelo grupo como também com o esclarecimento das dúvidas dos outros alunos. Perante a dúvida de Miguel começou por esclarecer onde esta residia e só depois solicitou uma nova explicação. Na explicação é possível identificar uma reconstrução funcional dos argumentos presentes neste excerto bem como identificar os argumentos segundo o modelo de Toulmin (figura 5). De facto, a justificação apresentada pelo grupo G1 para a escolha do número 3 resulta de uma refutação de um dado escolhido: "se aqui fosse 4 . . . ultrapassava os 39". Assim, os alunos concluíram que *x* terá de ser menor do que 4. Esta conclusão será um novo dado no processo argumentativo, o que os leva a escolherem 3 para medida da largura do retângulo inicial. Seguidamente, este grupo verifica a possibilidade de 3 poder ser a medida procurada, garantindo, assim, que o número procurado para a largura do quadrado é, de facto, 3.

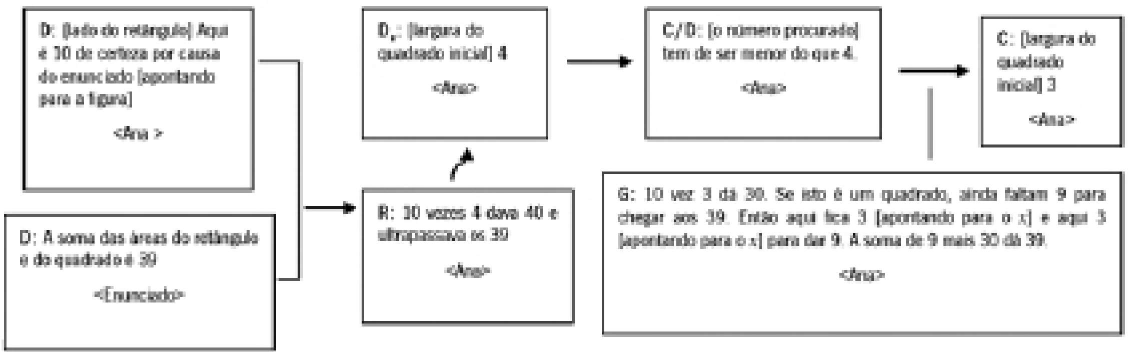


Figura 5 – Representação esquemática da reconstrução funcional dos argumentos presentes no raciocínio apresentado pelo grupo G1.

Episódio 3. Este mesmo problema foi proposto aos alunos na tarefa V, na terceira aula da sequência de ensino, na qual foi apresentada uma interpretação de uma outra técnica de geometria intuitiva realizada pelo historiador Jens Høyrup. Usando essa técnica os alunos determinaram geometricamente a largura desconhecida, evidenciando a presença de argumentos *genéricos*. Observe-se o diálogo estabelecido entre o professor e a aluna Diana do grupo G4:

> **Diana:** Já percebemos que a área do quadradinho pequenino (porção em falta) é 25.
>
> . . .
>
> **Diana:** Sabemos que a soma das áreas [do retângulo e do quadrado] é 39.
>
> . . .

A Diana sombreia o quadrado de lado x + 5 .

Diana: 39 mais 25 *(fazendo as contas)*... 64.

Professor: Então 64...

Diana: É a área disto tudo.

Professor: Disto o quê?

Diana: Do quadrado *(apontando para o quadrado de lado x + 5).*

Professor: Se 64 é a área do quadrado, cada lado mede...

Diana: 8. Se aqui já tenho 5, aqui *(apontando para o x)* vai ser 3. Chegamos à mesma conclusão que a Ana Isabel, mas por um processo geométrico.

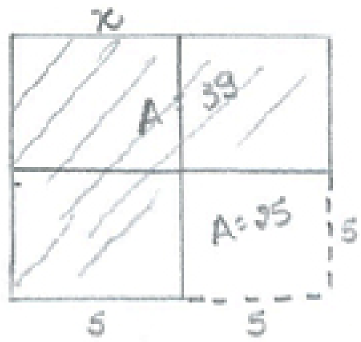


Figura 6 – Figura geométrica construída pelo grupo G4.

Este excerto mostra que o grupo descreve aritmeticamente os argumentos *pictóricos* produzidos através da construção geométrica realizada (figura 6). Repare-se que o professor mantém uma postura inquiridora, à semelhança dos casos anteriores. Com esta atitude inquiridora constrói uma *comunidade* na aula de Matemática focada em objetivos e dando sentido às ideias que vão surgindo. Além disso, através dessa mesma atitude questionadora, o professor desenvolve um *discurso* na sala de aula procurando que a linguagem matemática vá melhorando. Exemplo disso é a questão que coloca a Diana: "disto o quê?" A procura da centralidade na argumentação contribui também para o estabelecimento de um discurso na sala de aula onde nem tudo é aceite como válido e se vai progredindo.

Este episódio revela ainda que nesta fase os alunos já adquiriram um sentido de continuidade do trabalho proposto. Por exemplo, Diana, na última fala do episódio, com recurso à técnica de Jens Høyrup, compara o processo seguido pelo seu grupo e pelo grupo de Ana Isabel. Esta oportunidade de comparação das estratégias e de interpretação e compreensão de processos utilizados por matemáticos da antiguidade, esteve presente na seleção das *tarefas* realizada previamente pelo professor. A tarefa V, em particular, permitiu o estabelecimento de conexões entre processos de resolução.

A resolução deste conjunto de tarefas permite, ainda, identificar a presença de argumentos entre o *genérico e o simbólico*. Por exemplo, na tarefa VI, que tem por objetivo que os alunos procedam à generalização do procedimento realizado na tarefa V, os argumentos apresentados, embora expressos com recurso a palavras e símbolos algébricos, são de carácter geométrico, uma vez que resultam da observação das representações geométricas construídas. Na resolução das tarefas, os argumentos *simbólicos* surgem não só como representações dos procedimentos geométricos efetuados, mas também associados à manipulação algébrica de expressões.

Na tarefa VII, e uma vez que os alunos conhecem uma fórmula que permite determinar uma das soluções das equações do tipo $x2 + bx = c$, o professor questiona a turma sobre qual será a fórmula que permite determinar uma solução para o caso $ax2 + bx = c$. Neste momento, a parte geométrica é substituída pela parte algébrica. Após alguma discussão em grande grupo, os alunos observam que se dividirem ambos os membros da equação por *a* (considerando $a \neq 0$) obtêm uma equação equivalente à primeira (figura 7).

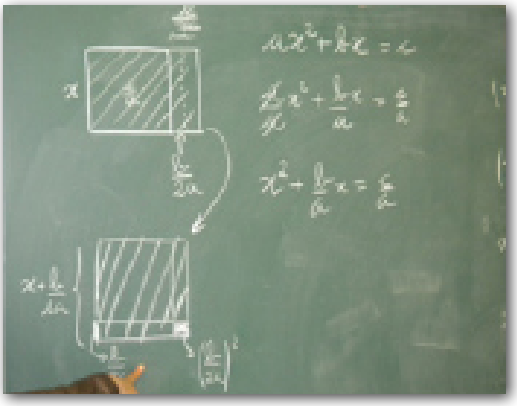


Figura 7 – Simplificação algébrica e respetiva identificação geométrica realizada no quadro por Daniel, grupo G1.

Seguidamente, os alunos procedem às respetivas correspondências geométricas, isto é, identificam geometricamente os diferentes elementos presentes na equação simplificada. De seguida traduzem algebricamente os diferentes procedimentos, registando que uma solução da equação $ax2 + bx = c$ pode ser obtida através da expressão algébrica $\sqrt{\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2} - \frac{b}{2a}$ (figura 8).

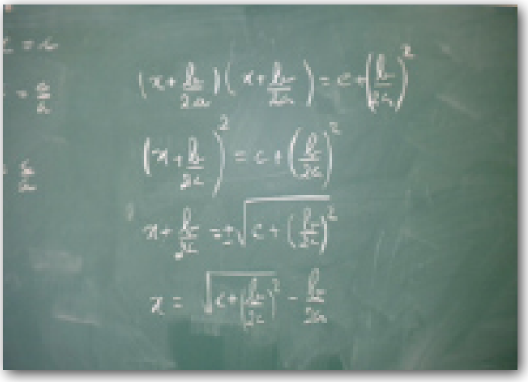


Figura 8 – Simplificação algébrica efetuada no quadro por Daniel, grupo G1, tendo em conta a identificação geométrica realizada anteriormente.

É de reparar que os argumentos apresentados pelos alunos para determinar esta fórmula resultam da observação geométrica da figura construída. Recorrem, portanto, a símbolos, argumentos simbólicos, como representações dos procedimentos geométricos efetuados.

Episódio 4. Já no final desta tarefa, o professor apresenta aos alunos a equação geral $ax^2 + bx + c = 0$, pedindo-lhes que determinem a fórmula que permite obter a sua solução. A maioria dos alunos entende que existe uma relação entre esta equação e a equação $ax^2 + bx = c$ anteriormente resolvida. O professor sugere, então, que escrevam todos os termos no primeiro membro da equação:

> **Ana:** Ó professor ficamos com isto [$ax^2 + bx - c = 0$].
>
> **Professor:** E como é que posso ter uma equação desta forma? *(apontando para* $ax^2 + bx + c = 0$*)*
>
> **Daniel:** Conseguimos por o mais, mas o c fica menos.
>
> **Professor:** Não percebi.
>
> **Emanuel:** Ele está a dizer que podemos escrever assim *(apontando para o papel).*
>
> **Professor:** Por favor, vem ao quadro.
>
> *Emanuel escreve no quadro* $ax^2 + bx = c \Leftrightarrow ax^2 + bx - c = 0 \Leftrightarrow$
> $\Leftrightarrow ax^2 + bx + (-c) = 0$
>
> **Emanuel:** Agora é igual à outra... Temos de fazer assim, no lugar de c pomos $-c$.

O professor provoca a comparação entre as duas equações e, perante a resposta de Daniel, diz claramente "não percebi", solicitando desse modo um esclarecimento. Este é dado por Emanuel, que vai ao quadro explicar, também por sugestão do professor. Neste diálogo fica claro o papel do professor na orquestração, na solicitação de esclarecimentos, na clarificação e na explicação a toda a turma. Por vezes, solicita a ida de um aluno ao quadro para que todos acompanhem o raciocínio.

Os alunos observam que a equação dada, $ax^2 + bx = c$, é equivalente à equação $ax^2 + bx + (-c) = 0$ e que, portanto, basta substituir na fórmula anterior o "c" por "$-c$" para obter a fórmula procurada $\sqrt{-\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2} - \frac{b}{2a}$.

Depois de ser proposta aos alunos a resolução de algumas equações aplicando a fórmula obtida, o professor pede que simplificando a expressão $\sqrt{-\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2} - \frac{b}{2a}$ obtenham a fórmula $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Embora a expressão inicial seja identificada com a largura procurada, a expressão final e as expressões intermédias apresentadas pelos alunos incluem termos resultantes de simplificações algébricas, *manipulação algébrica*, o que caracteriza o tipo de *argumentos entre o simbólico e o formal*. Observe-se a simplificação realizada pelo grupo G2 na figura 9.

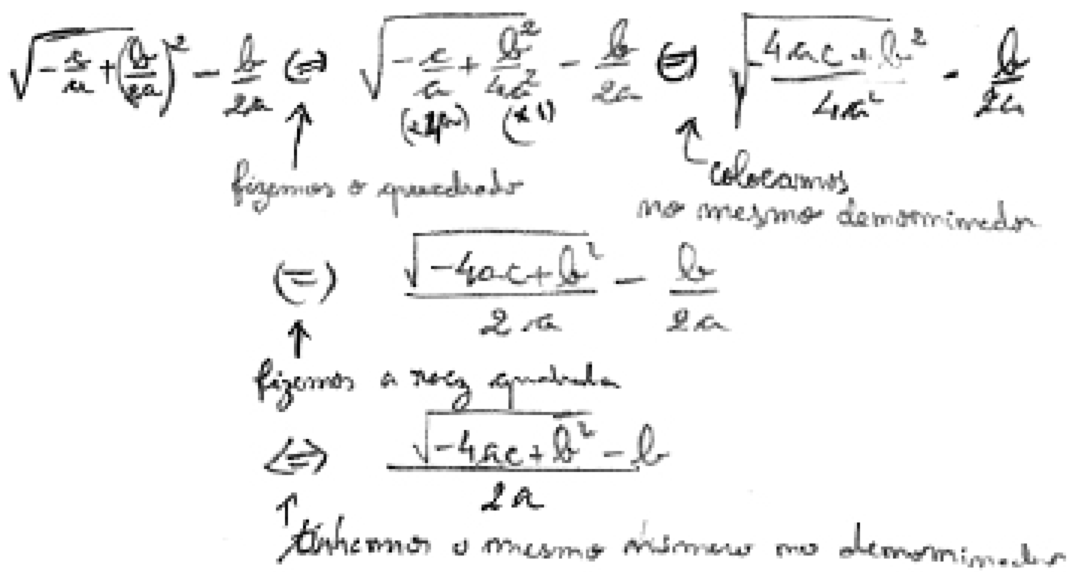


Figura 9 – Simplificação algébrica efetuada pelo grupo G2.

Ao longo deste processo o papel do professor foi determinante para fazer evoluir a argumentação utilizada para níveis cada vez mais formais, aproveitando, nomeadamente, as oportunidades surgidas nos diálogos para introduzir brechas no discurso argumentativo. As diferentes dimensões apresentadas por Anthony e Walshaw (2009) ficaram patentes ao longo desta experiência.

Nas produções escritas dos alunos

Uma das tarefas da sequência de ensino, a tarefa II, consistiu na leitura e na análise da resolução do problema da tarefa anterior apresentado por Diofanto. O professor desafiou os alunos a interpretar a estratégia apresentada e a justificar o método de resolução do matemático. O problema, tal como vem apresentado em *Aritmética*, I, 27 refere: "Encontrar dois números tal que a sua soma e o seu produto formem números dados . . . Proponhamos então que a soma dos números forme 20 unidades e que o produto forme 96 unidades".

Através das diferentes produções escritas dos alunos, foi possível proceder a uma reconstrução funcional dos argumentos presentes na resolução de Diofanto. Os alunos, recorrendo à notação simbólica atual, para interpretar a informação presente no enunciado, designaram o aritmo por *x*, observando que, na notação atual, Diofanto representou por *x* + 10 o maior número e por 10 – *x* o menor. Contudo, o grupo G2 realça a garantia dada por Diofanto "10 unidades, que são metade da soma dos números" que justifica o porquê de ter representado da forma referida os números procurados (figura 10).

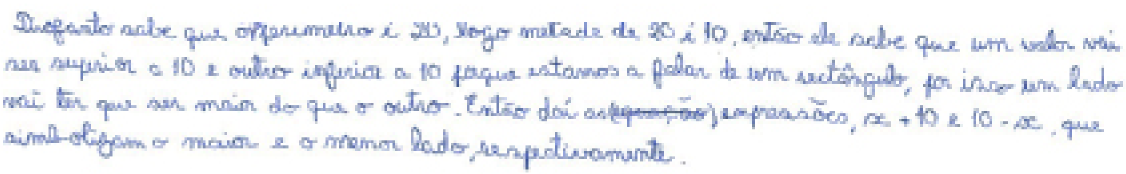

Diofanto sabe que o perímetro é 20, logo metade de 20 é 10, então ele sabe que um valor vai ser superior a 10 e outro inferior a 10 porque estamos a falar de um rectângulo, por isso um lado vai ter que ser maior do que o outro. Então daí as ~~equações~~ expressões, x + 10 e 10 - x, que simbolizam o maior e o menor lado, respectivamente.

Figura 10 – Interpretação da resolução apresentada por Diofanto realizada pelo grupo G2.

Observe-se, no entanto, como este grupo fundamenta esta garantia: "porque estamos a falar de um retângulo, por isso um lado vai ter de ser maior do que o outro" e assim pode-se concluir que "um lado vai ser superior a 10 e outro inferior a 10". Esta conclusão serve de novo dado, permitindo concluir que os números procurados podem ser representados pelas expressões *x* + 10 e 10 – *x*.

Os restantes grupos confirmaram apenas a afirmação em linguagem atual, ou seja, que a soma dos números procurados dava de facto 20 (um dos dados do problema) e que a diferença era 2*x* (observação de Diofanto). Isto pode ser exemplificado pela descrição apresentada pelo grupo G1 (figura 11).

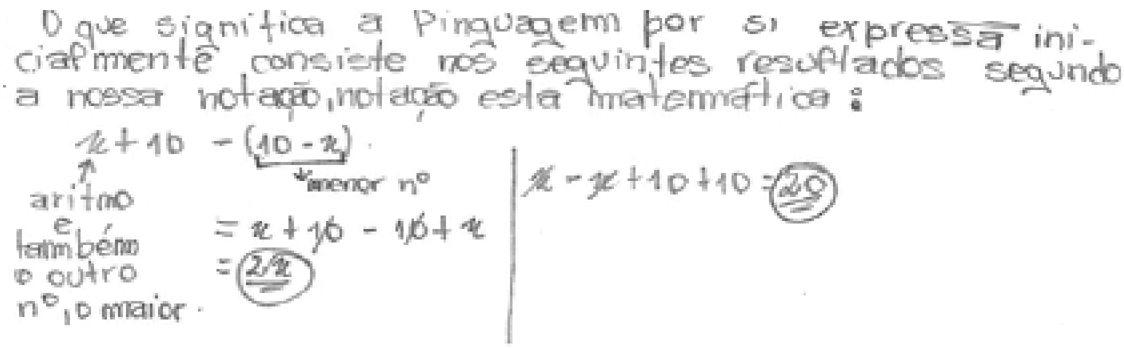


Figura 11 – Interpretação da resolução apresentada por Diofanto realizada pelo grupo G1.

Perante a afirmação presente na resolução de Diofanto, "é preciso também que o produto dos números forme 96", a maioria dos grupos procedeu à multiplicação de *x* + 10 por 10 – *x*, como se pode identificar na continuação da resolução do grupo G1 (figura 12).

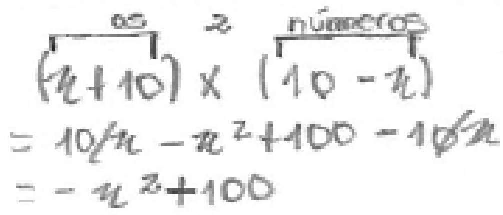


Figura 12 – Interpretação da resolução apresentada por Diofanto realizada pelo grupo G1 (cont.).

Contudo, o grupo G2 observa que se pode recorrer à diferença de quadrados para simplificar a expressão (figura 13).

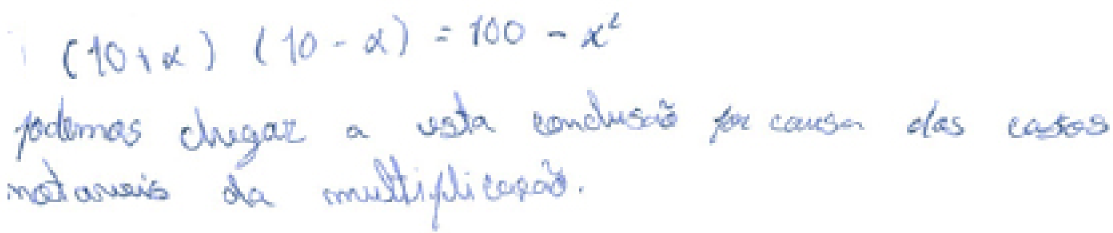


Figura 13 – Interpretação da resolução apresentada por Diofanto realizada pelo grupo G2 (cont.).

Embora Diofanto não apresente qualquer cálculo para obter o valor do aritmo, garanta apenas que este resulta de igualar o produto dos números procurados a 96, os alunos resolvem a equação $-x^2 + 100 = 96$, fundamentando assim a garantia dada no enunciado (figura 14). Posteriormente, concluem que o menor número é 8 e o maior é 12.

$$
\begin{aligned}
& -x^2 + 100 = 96 \\
\Leftrightarrow\ & -x^2 = 96 - 100 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 = -96 + 100 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 = 4 \\
\Leftrightarrow\ & x = \pm\sqrt{4} \\
\Leftrightarrow\ & x = 2
\end{aligned}
$$

Figura 14 – Interpretação da resolução apresentada por Diofanto realizada pelo grupo G1 (cont.).

Os argumentos presentes na análise efetuada pelos diferentes grupos ao raciocínio de Diofanto, pode ser esquematizada segundo o modelo de Toulmin (figura 15).

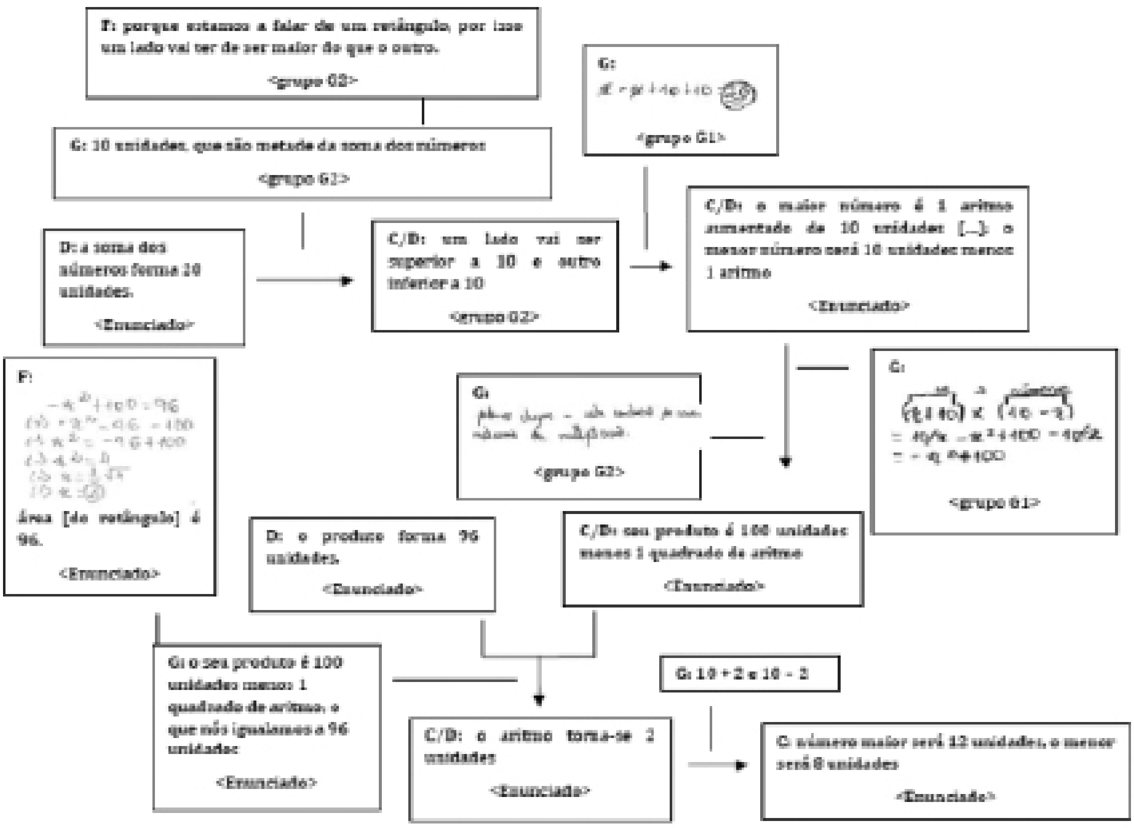


Figura 15 – Representação esquemática da reconstrução funcional dos argumentos presentes na resolução de Diofanto a partir da análise efetuada pelos diferentes grupos.

O professor criou nesta tarefa uma oportunidade para que os alunos interpretassem o raciocínio e os argumentos presentes numa resolução que não a desenvolvida por eles. O facto da resolução estar presente num texto de um matemático grego, que se supõe do século III d.C., revelou-se para os alunos um estímulo diferente do habitual, como se pode ver no excerto retirado da avaliação do grupo G4, realizada no final da sequência de ensino: "O que achamos mais interessante foi a parte em que lemos e analisámos a resolução dada por Diofanto e gostámos muito também da interpretação geométrica de uma equação do 2.º grau . . . Ao ser-nos dado as várias folhas com os vários métodos também aprendemos como os grandes matemáticos da Antiguidade resolviam os problemas".

Esta oportunidade criada para que os alunos comparassem estratégias de resolução entre eles e, nesta tarefa em particular, com um matemático da Antiguidade, revela que o professor desempenha um importante papel na forma como utiliza as tarefas estabelecendo conexões entre processos de resolução diversos, entre temas da Matemática (álgebra e geometria por exemplo), e mesmo entre diferentes representações que suportam o pensamento dos alunos.

A interpretação dos argumentos de outros é um aspeto ao qual o professor deu muita importância, quer explicitamente em tarefas sugeridas, como a II e a V, quer nos momentos de discussão que ocorreram durante as aulas. A importância do seu trabalho reside não só na compreensão das formas de argumentação expressas pelos alunos, mas também no facto desse conhecimento o tornar mais atento aos argumentos produzidos e, consequentemente, permitir-lhe, de forma mais desafiante, desenvolver, junto dos alunos, novas oportunidades de argumentação.

Considerações finais

Ao longo da sequência de ensino, de onde foram extraídos os exemplos discutidos na secção anterior, constatou-se que, na realização das diferentes tarefas propostas, foram diversos os tipos de argumentos produzidos pelos vários grupos de alunos. O professor acompanhou e estimulou essa evolução. Desde a elaboração das tarefas à sua concretização e discussão, revelou uma clara noção do seu papel na produção desses argumentos por parte dos alunos.

No desempenho do professor é possível identificar as quatro dimensões apresentadas por Anthony e Walshaw (2009). Assim, assumiu a aula como uma *comunidade* procurando que todo o trabalho estivesse focado na Matemática, dando sempre sentido às ideias explicitadas. De igual modo, garantiu o nível de *discurso* procurando que os alunos clarificassem e argumentassem as suas ideias e que utilizassem uma linguagem clara e apropriada. O professor assegurou a preparação cuidada de um conjunto de tarefas no contexto da História da Matemática de forma a desenvolver nos alunos a capacidade de argumentação (Grugnetti, 2000). Colocou os alunos a trabalhar em grupo durante a realização das *tarefas* e na apresentação e discussão que foi realizada de forma coletiva, estabelecendo conexões entre as diferentes resoluções e as dos matemáticos da Antiguidade. Por último, revelou um sólido *conhecimento* de Matemática na elaboração e concretização das tarefas como também um conhecimento didático e dos próprios alunos, o que lhe permitiu estimular a produção de argumentos, acreditando sempre nas suas capacidades.

Paralelamente, a partir da análise dos diferentes discursos argumentativos produzidos pelos alunos é possível observar que muitos dos argumentos apresentados não são desenvolvidos sequencialmente, ou seja, de forma dedutiva, durante a argumentação. O facto de a argumentação envolver a partilha de ideias e a troca de opiniões entre os alunos e o professor, e algumas das tarefas integrarem a construção e análise de figuras geométricas permitiu o aparecimento não só de argumentos paralelos, como de novos dados ou conclusões que iam sendo inseridos na cadeia argumentativa. Nas formas simples de argumentação, observou-se também a existência de passos de inferência em que as garantias ou fundamentos não se encontravam presentes de um modo explícito.

A análise das formas de argumentação utilizadas mostra que os alunos não só foram capazes de expressar as suas ideias, mas também de interpretar e compreender as ideias que lhes foram apresentadas, participando de forma construtiva em discussões sobre conceitos, processos e resultados matemáticos. Na avaliação da experiência, os alunos sublinharam que a realização destas tarefas contribuiu para a sua aprendizagem matemática, influenciando a predisposição para esta disciplina e proporcionando uma visão mais ampla da sua natureza. A experiência mostrou a centralidade do papel do professor na criação de um contexto propício ao desenvolvimento da argumentação na sala de aula.

Referências

Anthony, G., & Walshaw, M. (2009). Characteristics of effective teaching of Mathematics: A view from the West. *Journal of Mathematics Education, 2*(2), 147-164.

Balacheff, N. (1999). *Is argumentation an obstacle? Invitation to a debate.* (Acedido em 23 de abril de 2010 de http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/Newsletter/990506Theme/990506ThemeUK.html)

Banegas, J. (1998). L'argumentació en matemàtiques. *XIIè Congrés Valencià de Filosofia* (Trad. De Miguel Gimenez & Andrew Aberdein). Valencià.

Boavida, A. (2005). *A argumentação em Matemática: Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração.* Tese de doutoramento. Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Douek, N. (1999). *Argumentative aspects of proving of some undergraduate mathematics students'performances.* (Acedido em 18 de junho de 2009 de http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/Resumes/Douek/Douek99/Douek99.html)

Douek, N. (2000). *Comparing argumentation and proof in a mathematics education perspective.* (Acedido em 18 de junho de 2009 de 2009 de http://www.didactique.imag.fr/prevue/ICME9TG12/ICME9TG12Contributions/DouekICME00html)

Doerr, H. (2006). Examinig the tasks of teaching when using students' mathematical thinking. *Educational Studies in Mathematics, 62,* 3-24.

Duval, R. (1999). *Questioning argumentation.* (Acedido em 18 de junho de 2009 de http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/Newsletter/991112Theme/991112ThemeUK.html)

Fasanelli, F. (2000). The political context. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study* (pp. 1-38). Dordrecht: Kluwer.

Fauvel, J., & van Maanen, J. (Eds). (2000). *History in mathematics education: An ICMI study.* Dordrecht: Kluwer.

Forman, E., Larreamendy-Joerns, J., Stein, M. K., & Brown, C. (1998). You're going to want to find out which and prove it: Collective argumentation in mathematics classroom. *Learning and Instruction, 8,* 527–548.

Gil, P. (2012). *A história da Matemática no fomento de uma cultura de argumentação em sala de aula.* Tese de doutoramento. Universidade do Minho.

Grácio, R. (1993). *Racionalidade argumentativa.* Porto: Edições ASA.

Grugnetti, L. (2000). Ancient problems for development of strategic thinking. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: An ICMI study* (pp. 78-81). Dordrecht: Kluwer.

Hufferd-Ackles, K., K. Fuson, & M. Sherin (2004). Describing levels and components of a math-talk learning community. *Journal for Research in Mathematics Education, 35,* 81–116.

Knipping, C. (2008). A method for revealing structures of argumentations in classroom proving processes. *ZDM Mathematics Education, 40,* 427-441.

Krummheuer, G. (1998). Formats of argumentation in the mathematics classroom. In H. Steinbring, M. G. Bartolini Bussi & A. Sierpinska (Eds.). *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 223-234). Reston, VA: NCTM.

Lakoma, E. (2000). History of mathematics in curricula and schoolbooks: A case of study of Poland. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: an ICMI study,* (pp. 19-29). Dordrecht: Kluwer.

Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching.* New Haven, CT: Yale University Press.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação, Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

National Council of Teaching Mathematics (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar.* Lisboa: APM.

Pedemonte, B. (2002). *Étude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de da démonstration dans l'apprentissage des mathématiques.* Tese de doutoramento. Genova: Université Joseph Fourier-Grenoble I/Université de Genova, Itália.

Perelman, C., & Olbrechts-Tyteca, L. (1958). *Traité de l'argumentation: La nouvelle rhétorique.* Press Universitaire de France.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds), *Handbook of research on the psychology of Mathematics Education: Past, present and future* (pp. 461-494). Rotterdam: Sense.

Radford, L., & Guérette, G. (2000). Second degree equations in the classroom: A Babylonian approach. In V. Katz (Ed.), *Using history to teach mathematics: An international perspective* (pp. 61-75). New York, NY: Cambridge University Press

Reid, A., & Knipping, C. (2010). *Proof in mathematics education: Research, learning and teaching.* Rotterdam: Sense.

Rowland, T. (2008). Researching teachers' mathematics disciplinary knowledge.In P. Sullivan & T. Wood (Eds.), *International handbook of mathematics teacher education: Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development* (pp. 273-298). Rotterdam: Sense.

Sherin, M. (2002). A balancing act: Developing a discourse in mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*(3), 205-233.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(4), 268-275.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10,* 313-340.

Toulmin, S. (2008). *The uses of argument.* New York, NY: Cambridge University Press.

Tzanakis, C., & Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study* (pp. 201-240). Dordrecht: Kluwer.

Wachira, P., Pourdavood, R. G., & Skitzki, R. (2013). Mathematics teacher's role in promoting classroom discourse. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning,* 664-707.

Wood, T. (1999). Creating a context for argument in mathematics class. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 171-191.

FORMAÇÃO

14. Formação do professor de Matemática: Perspetivas atuais

por João Pedro da Ponte

14. Formação do professor de Matemática: Perspetivas atuais

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ulisboa.pt

• **Resumo:** A formação dos professores com responsabilidade no ensino da Matemática constitui campo de trabalho muito ativo, baseado em conceitos como conhecimento profissional e desenvolvimento profissional. Tal como em relação à aprendizagem dos alunos, também relativamente aos professores tem vindo a afirmar-se uma perspetiva de formação de cunho experiencial, que valoriza a atividade do aprendente em contextos tanto quanto possível autênticos, em termos que é a missão e a identidade do professor. Daí, a valorização da prática como ponto de partida da formação e o foco na aprendizagem do aluno. A necessidade de balizar com elementos teóricos essenciais e de dotar o processo formativo de meios poderosos de construção do conhecimento leva a valorizar a integração entre conteúdo e pedagogia, a investigação sobre a própria prática profissional. E as tecnologias e o uso de recursos. Finalmente, a assunção do carácter eminentemente social do processo formativo leva a valorizar os contextos colaborativos e a mudança na cultura profissional. Todos estes aspetos têm de ser combinados em dispositivos de formação, tendo em conta os objetivos definidos, e tendo em conta o interesses, o ponto de partida, e a disponibilidade para o envolvimento dor formandos.

• **Palavras-Chave:** Conhecimento profissional, Desenvolvimento profissional, Formação, Prática profissional, Colaboração, Tecnologias, Dispositivos de formação.

Introdução

Ao lado do ensino da Matemática, a formação de professores que ensinam Matemática constitui uma área fundamental de interesse da Didática da Matemática. Por isso, faz todo o sentido refletir sobre o caminho percorrido e os problemas atuais a enfrentar. Assim, esta introdução aos trabalhos sobre formação de professores aponta os momentos principais que estruturam o desenvolvimento deste campo no nosso país, discute os aspetos-chave que a investigação tem apontado como fundamentais na conceção e concretização de ofertas formativas para professores e futuros professores desta disciplina e conclui com a problematização de diversas questões que se afiguram importantes para reflexão e aprofundamento. O objetivo não é assinalar todos os desenvolvimentos que se têm assinalado neste campo mas sim identificar as grandes questões que se colocam hoje em dia e perspetivar caminhos de desenvolvimento.

Conhecimento e desenvolvimento profissional

É hoje um lugar-comum dizer que o professor constitui um elemento decisivo no processo de ensino-aprendizagem. Para um ensino de Matemática de qualidade é necessário que o professor tenha uma formação matemática apropriada bem como competências reconhecidas no campo didático. Além disso são necessárias qualidades humanas e profissionais como um bom relacionamento com os alunos e capacidade para lidar com os problemas com que se depara no seu dia-a-dia. Tudo isso depende, naturalmente, da capacidade do professor se atualizar profissionalmente. Para que o professor possa ter todas estas caraterísticas, é necessário dispor de uma formação adequada e, para isso, é requerido o concurso de diversas áreas do saber, desde a Matemática à Educação em geral, incluindo, naturalmente, a Didática da Matemática. Esta tem a responsabilidade de analisar os fenómenos educativos que ocorrem no ensino-aprendizagem desta disciplina e de proporcionar as ferramentas fundamentais que o professor usa na sua prática profissional, cabendo-lhe integrar os contributos e os recursos disponibilizados pelas restantes áreas.

Em Portugal, com a expansão do sistema educativo no pós-25 de Abril, viveu-se um momento importante de afirmação da formação de professores. A formação contínua resumia-se a ofertas de "cursos de reciclagem" e a formação inicial pouco ou nada integrava da investigação em Didática da Matemática (Abrantes & Ponte, 1982). Sentia-se a necessidade de reconhecimento e estabilização da formação nesta área por parte do futuro professor e também do professor já em serviço. Nessa altura, o debate foi sobretudo marcado pela noção de "conhecimento" do professor, legitimado, por exemplo, pelo trabalho de Shulman (1986), que afirmava a importância decisiva do "*pedagogical content knowledge*", que podemos designar por "conhecimento didático", embora a natureza e conteúdo deste conhecimento sejam objeto de interpretações bastante diversas. Assumia-se, naturalmente com toda a lógica, que os professores necessitam de uma ampla base de conhecimento sobre Matemática e sobre muitos outros assuntos: História da Matemática, Resolução de problemas, Aplicações da Matemática, Interdisciplinaridade, Aprendizagem, Avaliação, Dinâmica de Grupos, Metacognição, Interculturalidade, Etnomatemática, Gestão Curricular, Comunicação, Indisciplina, Tecnologias de Informação e Comunicação, etc. Daqui decorre desde logo um primeiro problema para a formação inicial e contínua de professores, pois é necessário decidir quais os conteúdos prioritários dessa formação e qual o melhor modo de os articular, tendo em conta o tempo e os recursos disponíveis, necessariamente limitados.

Neste debate, a Didática da Matemática obteve um espaço próprio, assumindo como campos de atuação as questões curriculares (programas, finalidades do ensino e orientações metodológicas), os materiais de ensino (com destaque para os materiais manipuláveis, manuais e tecnologias), os processos de aprendizagem (em especial nas suas implicações cognitivas e sociais), o trabalho na sala de aula (onde se destacam as noções centrais de tarefa e comunicação), a avaliação, bem como as questões específicas do ensino e da aprendizagem de temas curriculares como Geometria, Números e Operações, Álgebra e Probabilidades e Estatística e do desenvolvimento de capacidades transversais como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática.

Passada a fase inicial de afirmação e desenvolvimento, entrou-se, naturalmente, numa fase de reflexão. Muitos dos programas de formação, disciplinas e cursos oferecidos na formação inicial e contínua constituíram experiências bem sucedidas (algumas das quais documentadas em trabalhos como os de Almiro, 1998; Oliveira, 2004; Rocha, 1995). No entanto, a maior parte da formação assumia um caráter "escolar", procurando transmitir um conhecimento organizado e sistematizado exteriormente à profissão – e isto aplica-se tanto à formação inicial como à formação contínua e a processos de formação especiais como a “profissionalização em serviço”. O impacto na prática profissional deste tipo de formação tende a ser reduzido, o que levou os educadores matemáticos a interrogar-se sobre a natureza dos processos de formação (Ponte & Santos, 2004). Um dos conceitos que serviu de base a essa reflexão é o conceito de “desenvolvimento profissional”, com o qual se desloca o centro de atenção do conteúdo do conhecimento a apropriar pelo professor para os processos de desenvolvimento do próprio professor (Nóvoa, 1991). Quando se olha para o professor em termos do seu desenvolvimento profissional, percebe-se que este tem necessidades e potencialidades que importa descobrir, valorizar e promover. Os cursos e as oportunidades de formação oferecidos terão certamente o seu papel, mas é o professor que é o principal protagonista do seu processo de crescimento.

Os conceitos de formação e desenvolvimento profissional podem ser vistos como traduzindo movimentos opostos (Ponte 1998). Assim, a formação representa um movimento de “fora para dentro”, do curso e do formador para o formando, enquanto o desenvolvimento profissional constitui um movimento de “dentro para fora”, do professor em formação para o ambiente onde está inserido. A formação atende sobretudo ao que o professor não tem e “deveria ter” e o desenvolvimento profissional dá especial atenção às realizações do professor e ao que ele se revela capaz de fazer. A formação é vista de modo compartimentado, por assuntos ou por disciplinas, enquanto o desenvolvimento profissional implica o professor como um todo nos seus aspetos cognitivos, afetivos e relacionais e contribui para o desenvolvimento da sua identidade profissional. De modo simplificado, podemos dizer que a formação tende a partir da teoria e frequentemente não chega a sair da teoria e o desenvolvimento profissional tende a considerar a teoria e a prática de forma integrada. Na perspetiva da formação o professor surge como *objeto*, enquanto no desenvolvimento profissional assume o papel de *sujeito*.

No entanto, mais do que opor formação e desenvolvimento profissional, o importante é saber como combinar ambos os processos. Reconhece-se que o desenvolvimento profissional pode envolver uma combinação de processos formais e informais e, por isso, a formação pode ser encarada de modo a favorecer este desenvolvimento, sem se subordinar a uma lógica de transmissão de conhecimento. Resta saber de que modos e em que condições isso pode ser concretizado, pelo que, surge então um novo problema: como articular a perspetiva do desenvolvimento profissional com os contributos decorrentes da investigação em Didática da Matemática e de muitos outros campos da investigação educacional, cada vez mais numerosos e consistentes? (Ponte, 1999).

Na verdade, a noção de que o professor é o principal agente da sua formação não implica que os educadores matemáticos deixem de ter responsabilidades como formadores de professores. Pelo contrário, cabe-lhes encontrar formas apropriadas para favorecer os processos naturais de desenvolvimento profissional do professor. É o que procurarei discutir de seguida.

Elementos-chave dos processos de formação de professores

Várias perspetivas teóricas sobre a aprendizagem e a formação, que sublinham a importância dos processos sociais e dos contextos de trabalho e que se foram afirmando desde o final do século XX, ajudam a encontrar respostas para o problema acima indicado. Assim, o desenvolvimento do professor poderá ser promovido pela sua participação em processos formativos que proporcionem oportunidades de reflexão, participando em práticas sociais, com um forte envolvimento pessoal e um suporte dado pelos grupos sociais em que participa. Nestes contextos de formação, é essencial uma forte presença da prática, mas também um significativo contributo por parte da teoria. É necessário um enquadramento coletivo, mas também uma assunção de um projeto pessoal por parte do professor. Com base nestas perspetivas, sete ideias fundamentais têm vindo a emergir: colaboração; prática como ponto de partida da formação; foco na aprendizagem do aluno; integração entre conteúdo e pedagogia; investigação profissional; mudança nos contextos profissionais; e tecnologias e uso de recursos.

Colaboração. Desde há muito presente em Portugal no contexto de projetos de investigação envolvendo equipas, por vezes numerosas, com investigadores e professores de diversos níveis de ensino, este conceito só recebeu uma atenção especial a partir do trabalho do Grupo de Estudos do GTI (Grupo de Trabalho de Investigação da Associação de Professores de Matemática), um grupo de professores, formadores e investigadores que se propôs estudar as relações entre investigação e ensino. Tendo presentes os trabalhos de Hargreaves (1998), entre outros autores, este grupo assumiu desde o seu início uma vivência colaborativa, ao mesmo tempo que procurou teorizar o alcance formativo do processo de colaboração. Assim, Boavida e Ponte (2002) apresentam este processo como envolvendo uma adesão voluntária e uma relação próxima entre os participantes. Nesta perspetiva, a colaboração pode prosseguir propósitos diversos e assumir formas diferenciadas. Envolve assumir objetivos comuns e uma divisão de trabalho racional, num quadro de confiança pessoal, onde todos têm algo a ensinar e a aprender uns com os outros. Deste modo, a colaboração não constitui um valor moral, que deve ser prosseguido de uma "dada maneira", mas, pelo contrário, é encarada como uma solução encontrada por um grupo para resolver problemas comuns, que seriam difíceis de resolver de forma puramente individual. Nos trabalhos realizados em Portugal, a colaboração decorre muitas vezes de um desafio lançado por um investigador, que promove a constituição de uma equipa colaborativa alargada, envolvendo atores com diferentes tipos de saberes e atividades profissionais no estudo de um problema complexo. Noutros casos, a colaboração surge como uma prática espontânea e natural dos professores, nomeadamente quando enfrentam uma situação nova, como a introdução de um novo programa (e.g., Santos & Ponte, 2002). Alguns trabalhos mostram também como ela pode ser um elemento importante de certos dispositivos de formação contínua (e.g., Almiro, 1998; Ponte, 2012; Rocha, 1995). A formação inicial, dada a sua dinâmica própria organizada em unidades curriculares, com mudanças frequentes de intervenientes e contextos de trabalho, dificulta o estabelecimento de processos duradoiros e aprofundados de colaboração entre os participantes. No entanto, apesar disso, é possível criar relações colaborativas entre supervisores e formandos, entre professores cooperantes e formandos e, muito especialmente, dos formandos entre si (Lin & Ponte, 2008).

Suporte na prática. A segunda ideia forte é o papel da prática profissional como elemento importante da formação. Atualmente, a prática assume um lugar de crescente proeminência nos estudos na Didática da Matemática (Ponte & Chapman, 2006). Além disso, tem vindo a afirmar-se como um elemento fundamental no processo formativo, seja como ponto de partida para a conceção das experiências de formação, seja através de registos e artefactos com ela relacionados, que são mobilizados como recursos. Contudo, a forma mais poderosa e mais autêntica de fazer intervir a prática no processo formativo passa pela inserção deste processo num contexto real de prática profissional (Smith, 2001). Isso pode acontecer, por exemplo, com professores em serviço, que tomam um conjunto de aspetos da sua prática letiva como eixo do processo formativo. Este aspeto teve um papel importante no Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º ciclos - PFCM (Serrazina et al., 2010), em que existiu uma relação permanente entre o que se realizava nas sessões de formação e o que os participantes punham em prática nas suas aulas, complementado por momentos de reflexão. Um processo semelhante tem igualmente lugar na formação inicial, através de experiências formativas, realizadas em diversos contextos (sobretudo em contextos escolares), devidamente enquadradas por experiências de reflexão e concetualização. A investigação mostra que as experiências orientadas numa perspetiva exploratória e investigativa podem dar um contributo fundamental ao desenvolvimento do conhecimento matemático, conhecimento didático e à identidade profissional dos futuros professores (Ponte & Chapman, 2008). Esta ênfase na prática não significa de modo algum uma desvalorização da teoria. Significa, isso sim, que teoria e prática devem surgir fortemente interligadas – a teoria só ganha todo o seu sentido quando é interpretada e aplicada a situações de prática e esta só se compreende verdadeiramente à luz da teoria.

Devemos ter em atenção que reconhecer a importância do papel da prática não significa que se conheçam bem os fatores que condicionam essa mesma prática. Daí a pertinência de se estudar a prática profissional dos professores – em particular as práticas letivas nos diversos níveis de ensino – de modo a conhecer os elementos principais que estruturam essas práticas, os elementos que as condicionam e os contextos e recursos que podem apoiar a sua mudança, tendo em conta o desenvolvimento curricular.

Foco na aprendizagem dos alunos. Na sua atividade, os professores têm a responsabilidade de trabalhar no quadro de um programa de Matemática e de respeitar a integridade da Matemática como campo científico de conhecimento, trabalhando de forma adequada os conceitos matemáticos, procedimentos e representações, e fornecendo uma perspetiva abrangente da Matemática e do seu papel na sociedade moderna. Devem fazê-lo tendo em atenção a aprendizagem dos alunos, diagnosticando o seu conhecimento prévio, especialmente no que diz respeito a conceitos, termos e representações matemáticas, indispensáveis ao trabalho a realizar. Necessitam de conhecer as dificuldades dos alunos na aprendizagem de novas ideias e representações, identificando a sua ocorrência no que dizem ou escrevem e criando momentos apropriados de negociação de significados. Deste modo, cabe aos professores articular o seu conhecimento matemático com a aprendizagem dos alunos (Murata, 2011), de modo a organizarem a sua prática a partir das ideias informais dos alunos, criando tarefas que levam em conta o que eles efetivamente sabem e o que são capazes de compreender. Esta capacidade de integrar o conhecimento da Matemática com o conhecimento dos alunos, tendo em conta uma perspetiva geral sobre os processos de aprendizagem, e o conhecimento específico sobre a cultura e as preferências dos alunos não se aprende de um dia para o outro, requerendo uma atenção especial, tanto na formação contínua como na formação inicial de professores de Matemática (Ponte, 2012). Trata-se, na verdade, de um ponto central que distingue o professor de Matemática tanto do matemático como do educador generalista: o matemático sabe muito da sua ciência mas frequentemente tem ideias muito superficiais sobre o que sabem, como pensam e como aprendem os alunos; o educador generalista sabe muito sobre a criança e sobre a aprendizagem, mas em geral não tem os conhecimentos matemáticos suficientes para saber que tarefas selecionar, como conduzir a sua realização na sala de aula e que apoio prestar em cada momento aos alunos.

Integração de conteúdo e pedagogia. Durante a formação inicial, disciplinas de Matemática e disciplinas de Educação geral são evidentemente necessárias. Para certos propósitos, trata-se da forma mais eficaz de proporcionar certas aprendizagens ao futuro professor. Tais disciplinas dão contributos, mais ou menos importantes, para aspetos parcelares do trabalho do professor enquanto professor desta disciplina. Mas, para aprender o seu ofício de ensinar Matemática a crianças, jovens ou adultos não basta aprender conhecimentos previamente sistematizados em disciplinas isoladas, é necessário integrá-los tendo em atenção as necessidades decorrentes das situações de prática que o professor é chamado a desempenhar.

Na verdade, tanto na formação inicial como na formação contínua, a articulação entre pedagogia e conteúdo assume uma importância fundamental (Ponte & Chapman, 1998). A Matemática, como ciência e como domínio do saber com aplicações em todos os campos, como já referi, constituiu a razão de ser da disciplina na escola. A pedagogia ajuda a compreender o aluno, os seus processos de aprendizagem e os contextos que os favorecem. Tratar estas duas vertentes completamente desligadas uma da outra corresponde a assumir que o professor facilmente estabelecerá a ligação entre elas. A existência de um espaço próprio para a Didática da Matemática, dada a sua natureza educacional, mas ao mesmo tempo muito próxima do conteúdo, é uma ajuda no estabelecimento dessa relação entre conteúdo e pedagogia, mas está muito longe de resolver o problema.

Por vezes, fala-se da necessidade de ensinar os futuros professores do mesmo modo que se pretende que eles venham a ensinar aos seus alunos (o que muitas vezes se designa como “princípio do isomorfismo”). Trata-se de uma articulação entre pedagogia e conteúdo importante, mas insuficiente. É preciso dar uma atenção especial ao estabelecimento desta ligação, analisando em cada caso os aspetos matemáticos, didáticos e pedagógicos das situações. O professor e o futuro professor compreendem melhor um conceito ou representação matemática, olhando para o seu papel nos programas de diversos níveis de ensino, pensando nas tarefas que podem usar para o ensinar, analisando resoluções diferentes dos alunos e observando as suas dificuldades em compreender esse conceito, do que aprendendo esse conceito de forma totalmente abstrata, tal como ele surge num livro de Matemática. Aprendem melhor tanto a Matemática como as problemáticas da Educação se estas estiverem interligadas, orientando a realização de situações de prática profissional e proporcionando momentos de reflexão em que se aprofundam os conceitos matemáticos envolvidos e os processos de aprendizagem, à luz do trabalho realizado pelo próprio professor. Um aspeto importante de uma agenda de investigação nesta área é compreender como inserir esta preocupação de articulação entre pedagogia e conteúdo nas tarefas e nos modos de trabalho da formação.

Investigação de cunho profissional. Uma forma poderosa de combinar colaboração, prática, foco na aprendizagem dos alunos e processos formativos envolve a investigação sobre problemas específicos da própria prática profissional. A investigação, constituindo uma forma por excelência de construção do conhecimento, se orientada para os problemas da prática profissional, pode ajudar a identificar estratégias de resolução desses problemas e, ao mesmo tempo, assumir um efeito formativo de grande alcance sobre os respetivos intervenientes (Ponte, 2002). Esta valorização da investigação sobre a própria prática constitui, de resto, uma tendência internacional marcante, tanto no interior da Didática da Matemática (Llinares &

Krainer, 2006) como no campo da Educação em geral (Zeichner & Noffke, 2001) e até noutros grupos profissionais (Ponte, 2004).

Na verdade, para os profissionais com experiência de investigação, nada mais natural do que investigar nos seus contextos de trabalho. Para os profissionais que não têm tal experiência, a realização de projetos, assentes num diagnóstico aprofundado dos problemas da prática, devidamente planeados e cuidadosamente monitorizados, no quadro de uma atitude reflexiva (Schön, 1983), permite intervenções significativas nos seus contextos de trabalho. Estas intervenções conduzem muitas vezes à produção de conhecimento relevante, pelo menos para os próprios e até para outros atores sociais, a começar pelos seus próprios colegas. Mesmo na formação inicial de professores, a realização de pequenas investigações sobre a prática de ensino, a própria e a de outros professores (observada naturalmente ou através de tecnologias digitais) pode constituir uma experiência formativa de largo alcance (Lampert & Ball, 1998). O quadro legal português sobre a formação inicial, ao requerer a realização de um relatório de estágio onde é possível valorizar uma dimensão investigativa, coloca um interessante desafio aos educadores matemáticos.

Mudança na cultura profissional. Existem muitos professores que valorizam perspetivas curriculares inovadoras (como as atividades exploratórias na sala de aula) e a colaboração com outros professores. No entanto, para se tornarem parte da cultura profissional, essas ideias precisam de constituir uma marca dos modos de trabalho e dos modos de estar institucionais vividos nas escolas onde os professores exercem a sua atividade profissional. Em Portugal, existe alguma tradição de projetos inovadores realizados por grupos colaborativos de professores e de partilha de experiências em contextos associativos. No entanto, no nosso país, como em muitos outros, sente-se a falta de uma atividade contínua reflexiva e transformadora ao nível da escola (Sztajn, 2004). A cultura profissional dominante das escolas é muitas vezes conservadora, tendo mais apetência para manter as situações existentes, num quadro de complexas hierarquias informais, do que para questionar e transformar. Em contrapartida, a cultura profissional de inovação tende a ser marginal, manifestandose sobretudo em espaços informais ou associativos.

Na verdade, há ainda um longo caminho a percorrer até que a maioria dos professores de Matemática se envolva na realização dos seus projetos curriculares dentro das escolas, preparando tarefas e materiais em parceria com outros professores, discutindo com eles os resultados da aprendizagem dos seus alunos, refletindo em conjunto e desenvolvendo a necessidade de saber mais através de diferentes iniciativas. Tanto a formação contínua como a formação inicial de professores devem, por isso, ser perspetivadas em termos de mudança na cultura profissional. Ou seja, em vez de assumir uma cultura de adaptação e de seguimento passivo dos manuais, o futuro professor e o professor em serviço devem ser estimulados a assumir uma cultura profissional de empenhamento na produção e crítica de materiais. Em vez de assumir que o seu papel na escola é apenas dar as suas aulas, os professores devem ser encorajados a trocar experiências com outros colegas e a envolver-se na realização de projetos coletivos, na participação e na transformação das condições do ensino-aprendizagem.

Tecnologias e uso de recursos. Finalmente, é de referir o papel das tecnologias e uso de recursos na formação do futuro professor e do professor em serviço. As tecnologias de informação e comunicação têm vindo a revolucionar os modos de trabalho de todas as áreas profissionais e até o nosso dia-a-dia. Elas constituem uma ferramenta poderosíssima hoje em dia à disposição da escola e dos professores, proporcionando um manancial de possibilidades para a prática profissional do professor na sala de aula, permitindo-lhe definir novos objetivos para a aprendizagem dos alunos e novos modos de trabalho na sala de aula. Constituem, igualmente, uma importante ferramenta de produtividade pessoal, para processar informação sobre os seus alunos, para pesquisar tarefas e materiais, para comunicar com os seus colegas, membros da mesma comunidade profissional.

Na verdade, o grande desenvolvimento destas tecnologias põe à disposição dos professores (e dos formadores) um manancial inesgotável de recursos, incluindo tarefas para usar na sala de aula, relatos de experiências, clips de vídeo com situações de trabalho dos alunos, artigos com propostas didáticas, planificações de unidades de ensino, materiais educativos, fóruns de discussão, etc. O problema não é a falta de recursos mas a capacidade para identificar e selecionar os recursos pretendidos. Estas tecnologias proporcionam ainda ferramentas de autor que permitem ao professor construir os seus próprios recursos, sejam simulações, *applets*, ou outros artefactos para servirem de base a situações de aprendizagem dos seus alunos. Sem perder de vista que os recursos didáticos convencionais (régua, compasso e transferidor, geoplano, material Cuisenaire, blocos multibásico, etc.) e os materiais do dia-a-dia (jornais, talão de comprar no supermercado, faturas da água, etc.) continuam a ter um papel fundamental no ensino-aprendizagem, há que saber como tirar partido das novas tecnologias.

Para além disso, tal como é valorizado no projeto P3M, estas tecnologias constituem um oportunidade para o desenvolvimento de novos contextos formativos, onde se combinam as possibilidades de apresentar informação de natureza diversa (texto, imagem, som, vídeo), interpelando o professor e o futuro professor, e proporcionando-lhe oportunidades de trabalho e de reflexão impossíveis de obter noutros contextos. As tecnologias adaptam-se aos mais diversos modos de trabalho, presencial e à distância, individual e coletivo, constituindo um recurso incontornável, que há que aprender a usar criticamente. Perceber quais as potencialidades das tecnologias que podem ser mobilizadas para contextos formativos e identificar modos de as usar de forma produtiva na formação inicial e contínua, tanto com professores que já usam com muita destreza estas tecnologias, como com professores que mantêm com elas uma relação incipiente, constituem aspetos importantes de uma agenda atual de investigação neste campo.

A construção de dispositivos de formação

O problema-chave da formação de professores de Matemática é a construção e regulação de dispositivos de formação que proporcionem um efetivo desenvolvimento dos professores envolvidos, tendo em conta os seus interesses e o seu ponto de partida, e os objetivos formativos definidos. Com muita frequência, a formação faz economia do conhecimento e da problematização sobre quem são os formandos e como é que estes aprendem, para se centrar no modo de transmitir os conteúdos formativos de modo que sejam atrativos e simples de entender. Ao fazer isso, acaba por replicar a lógica do ensino transmissivo, que pretende que o aluno aprenda um certo conteúdo, por um processo de estruturação desse mesmo conteúdo e sem tomar em consideração a atividade que o aluno tem de ser chamado a desenvolver.

As ideias-chave acima indicadas proporcionam orientações que podem ajudar à construção de dispositivos de formação ajustados aos mais diversos contextos. No entanto, na construção desses dispositivos é igualmente necessário conhecer bem os participantes – saber o que os preocupa, o que lhes interessa, até que ponto estão dispostos a questionar-se e a expor-se perante os outros e até que ponto estão dispostos a investir na formação enquanto processo de aprendizagem. Também aqui se aplica a ideia de “foco na aprendizagem dos alunos”, reformulada como “foco na aprendizagem dos formandos”. Para cada situação concreta, há que procurar dispositivos de formação apropriados, o que é tanto mais difícil quanto maior for a escala visada, quanto mais limitados forem os recursos disponíveis e quanto menor for o interesse e a disponibilidade para o envolvimento na formação por parte dos potenciais participantes. Por isso, a criação de contextos de formação e desenvolvimento profissional do professor apropriados às condições existentes constitui um campo de trabalho inesgotável para os educadores matemáticos.

A construção de dispositivos formativos apropriados implica articular de modo apropriado dois aspetos aparentemente contraditórios. Por um lado há que respeitar os processos de desenvolvimento profissional do professor que seguem a sua lógica e ritmos próprios. Ignorar estes processos leva facilmente a conceber programas de formação de tipo escolar, procurando impor conceitos, práticas e teorias de que o professor não sente necessidade ou para os quais o seu interesse não está desperto. É o que faz muita da formação (inicial e contínua) que continuamos a praticar no nosso país. Por outro lado há que valorizar os contributos da Didática, que presidem à definição dos objetivos do processo formativo. Ignorar estes contributos significa pôr de parte um conjunto de perspetivas poderosas para o ensino de cada disciplina e um conjunto de conceitos fundamentais para analisar e intervir nas situações de prática. É desbaratar um importante capital de experiência e de investigação que poderia ser desde já investido na formação e na prática profissional. O problema consiste, então, no modo de articular a Didática com o desenvolvimento profissional, tirando partido da primeira de modo a não contrariar a natureza dos processos próprios do segundo.

Este problema, aparentemente, impossível, na verdade tem sempre muitas soluções, desde que haja capacidade de compreender as escalas de tempo em que pode ser abordado. Por outras palavras, é necessário identificar em cada situação o que pode ser o contributo específico do processo formativo para o desenvolvimento do professor. Ele pode ser abordado por exemplo do ponto de vista de que as pessoas aprendem a partir da sua atividade e da reflexão sobre a sua atividade (Christiansen & Walther, 1986), através da participação nas práticas educacionais (Crawford & Adler, 1996). De acordo com esta perspetiva, um aluno aprende Matemática trabalhando em tarefas matemáticas que define para si próprio ou que lhe são propostas pelo professor e argumentando sobre elas com os seus colegas ou refletindo sobre os seus raciocínios e os seus resultados. Também os professores e os futuros professores aprendem sobretudo a partir da sua atividade e da reflexão sobre a sua atividade realizada num contexto de prática enquadrada numa cultura profissional bem definida. Ou seja, os professores (e os futuros professores) aprendem por processos basicamente análogos aos processos usados pelos alunos. O que é diferente é o objeto fundamental da sua atividade – num caso a Matemática, no outro o ensino-aprendizagem da Matemática pelos seus alunos.

Deste modo, no desenvolvimento de dispositivos e suportes de formação é necessária uma perspetiva muito clara sobre qual é efetivamente o poder da formação – isto é, o que está e o que não está ao seu alcance. Há aprendizagens que se podem fazer num dia, outras que requerem meses ou anos de trabalho. Uma noção clara desta questão será fundamental para se poderem conceber e realizar programas mais ajustados às efetivas necessidades de diferentes grupos de professores em formação inicial e em serviço.

A concluir

O trabalho na formação de professores requer a capacidade de fazer numerosas articulações entre elementos diversos, muitas vezes envolvendo movimentos contraditórios, a articulação entre teoria educacional e a prática profissional, a articulação entre a Matemática já sistematizada e a aprendizagem do aluno, a articulação entre os objetivos formativos e os processos de desenvolvimento profissional dos professores. A experiência e a investigação de mais de 30 anos na formação de professores de Matemática em Portugal gerou um património de conhecimento relevante para todos os que se interessam pela formação inicial e contínua dos professores de Matemática. Mas as condições sociais mudam constantemente e cada situação formativa é única e irrepetível, colocando novos problemas para resolver, e para os quais é necessário mobilizar o melhor da nossa experiência e do nosso conhecimento

Referências

Abrantes, P., & Ponte, J. P. (1982). Professores de Matemática: Que formação? In *Actas do Colóquio sobre o Ensino da Matemática: Anos 80* (pp. 269-292). Lisboa: SPM.

Almiro, J. (1998). *O discurso na aula de matemática e o desenvolvimento profissional* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Boavida, A. M., & Ponte, J. P. (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 43-55). Lisboa: APM.

Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel.

Crawford, K., & Adler, J. (1996). Teachers as researchers in mathematics education. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds), *International handbook of mathematics education* (pp. 1187-1205). Dordrecht: Kluwer.

Hargreaves, A. (1998). *Os professores em tempos de mudança: O trabalho e a cultura dos professores na idade pós-moderna.* Lisboa: McGraw Hill.

Lampert, M., & Ball, D. L. (1998). *Teaching, multimedia, and mathematics.* New York, NY: Teachers College Press.

Lin, F. L., & Ponte, J. P. (2008). Face-to-face learning communities of prospective mathematics teachers: Studies on their professional growth. In K. Krainer & T. Wood (Eds.), *Participants in mathematics teacher education: Individuals, teams, communities and networks* (pp. 111-129). Rotterdam/taipei: Sense.

Llinares, S., & Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of reaserch on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 429-460). Rotherdam: Sense.

Murata, A. (2011). Introduction: Conceptual overview of lesson study. In L. C. Hart, A. Alston & A. Murata (Eds.), *Lessoan study research and practice in mathematics education: Learning together* (pp. 1-12). New York, NY: Springer.

Nóvoa, A. (1991). Concepções e práticas de formação contínua de professores. In *Formação de Professores: Realidades e Perspectivas* (pp. 15-38). Universidade de Aveiro.

Oliveira, H. M. (2004). *A construção da identidade profissional de professores de Matemática em início de carreira* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa.

Ponte, J. P. (1998). Da formação ao desenvolvimento profissional. In *Actas do ProfMat 98* (pp. 27-44). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (1999). Didácticas específicas e construção do conhecimento profissional. In *Investigar e formar em educação: Actas do IV congresso da SPCE* (pp. 59-72). Porto: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2004). Investigar a nossa própria prática: Uma estratégia de formação e de construção do conhecimento profissional. In E. Castro & E. Torre (Eds.), *Investigación en educación matematica* (pp. 61-84). Coruña: Universidad da Coruña. (Republicado em *PNA – Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática,* 2(4), 153-180).

Ponte, J. P. (2012). A practice-oriented professional development program to support the introduction of a new mathematics curriculum. *Journal of Mathematics Teacher Education 15(4), 317-327*.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Roterdham: Sense.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 225-263). New York, NY: Routledge.

Ponte, J. P., & Santos, L. (2004). Reflectir sobre as práticas de formação. *Educação e Matemática, 78,* 2-4.

Rocha, I. (1995). *A didáctica da matemática no desenvolvimento profissional dos professores do 1º ciclo* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Santos, L., & Ponte, J. P. (2002). A prática lectiva como actividade de resolução de problemas: Um estudo com três professoras do ensino secundário. *Quadrante, 11*(2), 29-54.

Schön, D. A. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action.* New York, NY: Basic Books.

Serrazina, M. L., Canavarro, A. P., Guerreiro, A., Rocha, I., & Portela, J. (2010). *Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico.* Documento não publicado.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Smith, M. S. (2001). *Practice-based professional development for teachers of mathematics. Reston,* VA: NCTM.

Zeichner, K., & Noffke, S. (2001). Practitioner research. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 298-330). Washington, DC: AERA.

Sztajn, P. (2004). School-based community of teachers and outcomes for students. In M. J. HØines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of 28th PME Conference* (Vol. 4, pp. 273-280). Bergen.

FORMAÇÃO

15. Formação de professores do 1.º e 2.º ciclos: Articulando contextos de formação e de prática

*por João Pedro da Ponte, Joana Mata-Pereira,
Marisa Quaresma, Isabel Velez*

15. Formação de professores do 1.º e 2.º ciclos: Articulando contextos de formação e de prática

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ulisboa.pt

Joana Mata-Pereira
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
joanamatapereira@campus.ul.pt

Marisa Quaresma
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
mq@campus.ul.pt

Isabel Velez
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
velez@campus.ul.pt

• **Resumo:** Esta comunicação incide sobre um processo de formação, conduzido numa perspetiva curricular de ensino exploratório, que valorizou a orientação para a prática e a reflexão coletiva entre os formandos, professores do 1.º e 2.º ciclos. O seu objetivo é analisar as mudanças que os professores referem ter sentido nas suas perspetivas e práticas de ensino e o modo como avaliam a formação realizada. O estudo constitui uma (auto)avaliação tendo por base registos em diário de bordo, um questionário de resposta aberta e entrevistas. Os resultados mostram que, como consequência do trabalho realizado, os professores passaram a valorizar o ensino exploratório, as discussões coletivas e a assumir uma expectativa elevada sobre as capacidades dos alunos. Relativamente à formação destacam a ligação com a sua prática e os momentos de partilha de experiências.

• **Palavras-Chave:** Formação contínua, Números e Álgebra, Tarefas, Discussão coletiva, Teoria-Prática.

Introdução

As orientações curriculares internacionais para o ensino da Matemática colocam um sério desafio aos professores. Em particular, tem vindo a afirmar-se cada vez mais o valor de uma abordagem exploratória no ensino da Matemática (Ponte, 2005) que representa um corte com a tradição em que o professor apresenta tarefas para as quais os alunos já dispõem de um método de resolução, anteriormente ensinado. Neste caso, o professor primeiro apresenta o método e depois dá tarefas que proporcionam aos alunos oportunidades para o praticar. No caso das tarefas de cunho exploratório, os alunos têm de construir os seus próprios métodos para resolver as questões propostas, usando os seus conhecimentos prévios. O trabalho de cunho exploratório cria oportunidades para os alunos construírem e aprofundarem a sua compreensão de conceitos, procedimentos, representações e ideias matemáticas. Os alunos são assim chamados a desempenhar um papel ativo na interpretação das questões propostas, na representação das informações dadas e na conceção e concretização de estratégias de resolução, que devem ser capazes de apresentar e justificar aos colegas e ao professor.

As perspetivas atuais sobre a formação de professores, nomeadamente dos professores em serviço, enfatizam o valor da investigação pelo próprio professor (Llinares & Krainer, 2006) e salientam a importância da mobilização de situações de prática, tanto quanto possível situações autênticas (Smith, 2001). Esta comunicação debruça-se sobre uma oficina de formação com estas caraterísticas, que envolveu professores dos 1.º e 2.º ciclos sobre o ensino dos temas de números e álgebra, numa perspetiva exploratória. O nosso objetivo é analisar as mudanças que os professores referem ter sentido nas suas perspetivas e práticas de ensino destes temas bem como o modo como avaliam o trabalho de formação realizado.

Prática profissional e processos de formação

A prática profissional do professor pode ser caraterizada por dois aspetos fundamentais: as tarefas propostas aos alunos e a comunicação que se estabelece na sala de aula (Ponte, Branco, Quaresma, Velez & Mata-Pereira, 2012). No que respeita às tarefas, o professor pode propor exercícios onde os alunos tenham de empregar os métodos de resolução anteriormente aprendidos ou tarefas mais desafiantes como problemas, explorações e investigações, nas quais os alunos têm que conceber e concretizar estratégias de resolução a partir dos seus conhecimentos prévios (Ponte, 2005). Pelo seu lado, a comunicação que se estabelece na sala de aula pode assumir um caráter sobretudo unívoco, que se processa essencialmente num só sentido, com uma voz (a do professor) dominando todas as outras, ou um caráter dialógico, se existe um relativo equilíbrio de vozes, tendo os alunos possibilidade de participar de modo significativo na aula e ter iniciativas de intervenção no discurso (Brendefur & Frykholm, 2000).

Sobretudo a partir da introdução do *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007), as discussões coletivas têm vindo a ganhar um interesse crescente no nosso país como momento de trabalho particularmente produtivo na sala de aula. Relativamente à atuação do professor na preparação destas discussões, Stein, Engle, Smith e Hughes (2008) salientam a importância de uma boa preparação, propondo quatro "práticas" para o efeito: antecipar, monitorizar, selecionar e sequenciar. No que respeita à condução das discussões propriamente ditas estes autores sublinham a importância do estabelecimento de conexões. Pelo seu lado, na condução das discussões, Wood (1999) destaca sobretudo a importância da exploração de desacordos entre os alunos, enquanto Sherin (2002) aponta a necessidade do professor manter o equilíbrio entre promover a participação dos alunos no discurso matemático e promover a abordagem de assuntos matemáticos importantes.

Na formação de professores predominam os processos centrados nos conteúdos de formação, aquilo que Lesne (1984) considera o modo de trabalho pedagógico de "tipo transmissivo". Isso acontece, sobretudo, quando não se presta a necessária atenção ao modo como os formandos aprendem. Em alternativa, outras perspetivas em relação à formação de professores sugerem que esta deve proporcionar a oportunidade para estes desenvolverem o seu conhecimento por processos mais próximos do trabalho de cunho exploratório ou investigativo. Para isso, na formação, os professores devem trabalhar com artefactos próprios da prática de ensino da Matemática – tarefas, materiais didáticos, representações de situações na sala de aula em transcrições de diálogos ou em registos vídeo, resoluções de problemas realizadas por alunos, etc. (Smith, 2001).

Como mostram Loucks-Horsley, Hewson, Love & Stiles (1998), a conceção de um processo de formação de professores é essencialmente uma questão de design. É preciso saber quem são os participantes, quais os objetivos definidos para a formação, quais os processos formativos que se irão privilegiar, que recursos e materiais se podem mobilizar, que obstáculos é provável encontrar e como se irão ultrapassar. É também fundamental saber que necessidades de formação sentem os participantes e que investimento estão dispostos a fazer. Entre todos estes aspetos, a questão da relação dos processos formativos com os conhecimentos prévios, as necessidades e a disponibilidade dos participantes sobressai como essencial. Na verdade, faz uma grande diferença proporcionar aos professores a possibilidade de aprenderem através da experimentação, reflexão e discussão sobre as suas próprias experiências de trabalho com alunos em sala de aula ou por processos distanciados das suas práticas. No entanto, é preciso ter em atenção que os processos formativos mais significativos são também os que requerem maior disponibilidade e investimento pessoal por parte do professor. Por isso, para cada condição concreta é preciso construir processos formativos adequados.

A oficina

A oficina decorreu de janeiro a maio de 2013 em 8 sessões de cerca de três horas (a última sessão teve quatro horas) em horário pós-laboral, com uma frequência aproximadamente quinzenal. Os participantes eram 19 professores, dos quais 16 do 1.º ciclo e 3 do 2.º ciclo. Um número significativo destes professores tinha participado anteriormente no Programa de Formação Contínua para professores do 1.º e 2. Ciclo do Ensino Básico (Serrazina, 2013), que decorreu de 2006 a 2011.

Em cada sessão alternaram-se momentos de apresentação de ideias e informações relevantes por parte da equipa de formadores, com trabalho prático por parte dos professores na sequência dessas apresentações (em pares ou trios) e, finalmente momentos de discussão coletiva. No final das sessões 1, 3, 5 e 7 foram propostas tarefas relacionadas com o tema nelas trabalhado que os professores adaptaram aos seus alunos (que iam do 1.º ao 6.º ano de escolaridade) e propuseram nas suas aulas. Nas sessões 2, 4, 6 e 8, num momento de discussão coletiva, os professores relataram os aspetos que consideraram mais salientes do trabalho que teve lugar nas suas turmas, interpelando-se uns aos outros e respondendo a questões colocadas pelos formadores. Em quase todas as sessões (sessões 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8) os professores realizaram explorações matemáticas, tendo oportunidade de trabalhar em pares ou trios em tarefas semelhantes às que poderiam propor aos alunos, e de apresentar depois as suas estratégias e soluções, durante a discussão coletiva. Em quatro sessões os formandos analisaram respostas dadas pelos alunos a tarefas matemáticas (3, 4, 5, 7) e em três tiveram oportunidade de observar em vídeo e discutir a condução por parte do professor da atividade na sala de aula (1, 6, 8), alternando o trabalho em pares ou trios com a discussão coletiva. Algumas sessões (em especial a 2) deram bastante atenção à discussão de documentos curriculares, materiais de apoio e manuais escolares. Houve um forte paralelismo entre as situações de trabalho nas sessões de formação e as propostas feitas para a prática profissional: em ambos os casos se propunham tarefas para trabalhar, havia momentos de trabalho autónomo e momentos de discussão coletiva, procurava-se valorizar as estratégias e soluções dos alunos, prestando atenção aos conceitos e representações matemáticas e também à comunicação e ao raciocínio. Um resumo dos assuntos trabalhados na oficina encontra-se na Tabela 1.

Neste conjunto de atividades é de destacar: (i) a análise das orientações curriculares atuais no que respeita ao ensino dos números e da álgebra no 1.º e 2.º ciclo e recursos para o professor; (ii) a organização da aula de Matemática em 3 fases, tendo por base tarefas de natureza exploratória; e (iii) a abordagem dos temas sequências, números naturais e algoritmos, números racionais e proporcionalidade. As atividades de formação estiveram a cargo de três formadores (três dos autores desta comunicação), que alternavam papéis durante as sessões de formação.

Durante a formação chegou a notícia da revogação do Programa de Matemática de 2007, o que constituiu um fator de perplexidade e incerteza para os professores. Para os formadores este acontecimento obrigou a uma atenção especial em tudo o que respeita ao enquadramento curricular.

Metodologia de investigação

Este estudo tem caraterísticas de (auto)avaliação (Patton, 1987), numa abordagem de observação participante, uma vez que uma equipa de formação procura fazer uma avaliação de um processo formativo por si realizado. Para isso, a equipa identificou à partida um conjunto de questões que pretendia ver respondidas, estabeleceu diversos procedimentos de recolha de dados e empreendeu uma análise e reflexão final sobre os dados recolhidos.

Tabela 1. Temas e atividades da formação

Sessão	Assuntos trabalhados	Principais atividades realizadas
1	• Apresentação da Oficina e modo de trabalho; • Orientações curriculares atuais; • Organização da aula a partir de tarefas.	• Resolução de uma tarefa (sequência crescente) e sua discussão. • Observação de vídeo e momento de discussão. • Proposta de tarefa a realizar com os alunos.
2	• Documentos curriculares e recursos para o professor.	• Análise de documentos curriculares portugueses e internacionais sobre os tópicos (Adição e divisão de números naturais, Sequências, Números racionais e adição de números racionais). • Análise dos documentos de apoio (brochuras, etc.). • Discussão da Tarefa realizada nas aulas.
3	• Sequências	• Análise do Programa, das Metas, e da Brochura da Álgebra sobre Sequências. • Realização de uma tarefa sobre sequências (Exploração com números). • Análise do trabalho dos alunos em duas tarefas de sequências. • Proposta de tarefa a realizar com os alunos.
4	• Números naturais e algoritmos.	• Pesquisa de materiais na Internet. • Realização de uma tarefa matemática – Cálculo mental (com discussão de estratégias [decomposição, compensação, algoritmo], abordagem da reta vazia, sentido de número). • Análise de resoluções de alunos numa tarefa (Caracol). • Discussão da tarefa realizada nas aulas.
5	• Números naturais e algoritmos.	• Sentido de Número e Pensamento Relacional. • Tarefa matemática (sobre pensamento relacional – exploração matemática, análise de respostas de alunos, discussão coletiva). • Análise do significado das operações a partir de exemplos (adição, subtração, multiplicação, divisão). • Algoritmos nos documentos curriculares. • Análise do Programa e das Metas sobre Aprendizagem dos Números Naturais e Operações. • Proposta de tarefa a realizar com os alunos.

6	• Números racionais.	• Análise do Programa sobre Aprendizagem dos Números Racionais. • Tarefa matemática (Os combustíveis – exploração matemática). • Análise da prática profissional (Os combustíveis, fase de preparação, trabalho de grupo, discussão – reflexão sobre a organização da aula em 3 fases usando aulas em vídeo). • Discussão da tarefa realizada nas aulas.
7	• Números racionais.	• Análise de manuais sobre a introdução dos algoritmos da adição e da multiplicação (Que preparação fazem? Que oportunidades dão para a compreensão dos algoritmos?). • Apresentação e discussão de ideias fundamentais sobre o Ensino e a Aprendizagem da Proporcionalidade. • Tarefa matemática (IMLNA-Quadrados, 1.ª e 2.ª partes). • Análise de resoluções de alunos na resolução de tarefas sobre proporcionalidade direta (IMLNA-Quadrados, 1.ª e 2.ª partes, colares). • Proposta de tarefa a realizar com os alunos.
8	• Proporcionalidade; • Balanço final.	• Discussão da tarefa realizada nas aulas. • A aula em três fases (revisão sobre as aulas em vídeo do 1.º e 2.º ciclo e discussão sobre as potencialidades e problemas na realização deste tipo de aula). • Realização e discussão das tarefas de números do TIMSS. • Resultados dos alunos portugueses no TIMSS. • Balanço final.

Um dos processos de recolha de dados foi um diário de bordo escrito por um dos membros da equipa e completado com contribuições de todos os restantes. Também entrevistámos três formandas, selecionadas entre aquelas que tinham tido maior envolvimento nas sessões de formação. Além disso, como parte do processo de avaliação da formação, todos os professores responderam a um questionário com cinco questões de resposta aberta sobre o modo como encaravam diversos aspetos da formação a as aprendizagens por si realizadas. Como pontos principais de análise, em primeiro lugar, procuramos perceber as perspetivas dos formandos quanto aos aspetos de ordem didática, nomeadamente em relação (i) às tarefas exploratórias, (ii) à discussão coletiva e (iii) às suas expectativas em relação aos alunos. Em segundo lugar, relativamente à formação, procuramos também saber o modo como encaram (i) os momentos de partilha de experiências e (ii) a relação entre a formação e a prática. Os registos em diário de bordo proporcionam uma informação valiosa sobre os aspetos mais marcantes da oficina, tal como foram sendo percebidos pelos formadores. Por outro lado, os questionários e as entrevistas mostram como a formação foi percebida pelos professores participantes.

Perspetivas e práticas dos professores

Tarefas exploratórias

Logo no início da formação foi possível verificar que a proposta de tarefas exploratórias na sala de aula aos seus alunos não fazia parte da prática profissional da maioria dos professores. Durante a formação foram vários os momentos em que os professores trabalharam em tarefas desta natureza e diversas as situações em que as realizaram na sua sala de aula. Os registos realizados no diário de bordo dos formadores mostram que, no decurso da oficina, os formandos valorizaram a realização de tarefas nas suas aulas, com os seus alunos e o seu relato posterior nas sessões de formação. Como eles próprios indicaram, apesar de muitos deles terem frequentado anteriormente outras ações de formação, nunca tinham apresentado aos alunos tarefas como as que lhes foram aqui propostas e muito menos discutido com os colegas as resoluções dos alunos. Inicialmente, quando a proposta foi feita, a maioria dos professores sentiu indisfarçável incomodidade e alguns ensaiaram propostas para anular este trabalho. No entanto, no final da formação vários professores identificam estas tarefas como potencialmente interessantes para promover a aprendizagem dos alunos.

Catarina é uma das formandas que valoriza a introdução de propostas de trabalho exploratório:

> [A formação] fez-me abrir mais um bocadinho e pensar assim, não Catarina, tens que começar também… A deixar que os meninos descubram. Mas estar a dar a matéria diretamente, eles se calhar

> não apreendem tanto aquilo que eu estou a dizer ou a fazer, eles aprendem muito mais, se forem eles a descobrir. *(Catarina E)*[1]

Também Paula refere a influência da formação na proposta de tarefas de exploração na sala de aula, destacando ainda as potencialidades destas tarefas no desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos:

> [A formação] também me permitiu promover e pensar em atividades de exploração e de investigação que posso realizar em contexto sala de aula, ou seja [levar os alunos a] "pensar matematicamente". *(Paula Q)*

Esta professora apresenta ainda um exemplo de sala de aula em que usa tarefas de exploração para que os alunos passem de uma fase mais concreta para situações mais abstratas:

> Num grupo de quarto ano e depois de os alunos já terem passado por inúmeras etapas experimentais e de manipulação concreta pretende-se já que estes consigam resolver situações um pouco abstratas desenvolvendo estratégias e explorando-as com os seus pares. *(Paula Q)*

Apesar de valorizarem as potencialidades das tarefas de exploração na aprendizagem dos alunos, alguns dos professores refletem sobre algumas dificuldades e desafios que estas tarefas podem trazer às suas práticas profissionais:

> No trabalho de natureza exploratória, em turmas demasiado grandes e com dificuldades de aprendizagem, o acompanhamento de todos os alunos na fase de exploração é complicado porque é preciso tempo para ajudar todos os alunos através da reformulação de questões a compreender o problema e a resolvê-lo. *(Teresa Q)*

Nesta reflexão, Teresa destaca o tempo necessário ao acompanhamento dos

1 As afirmações dos professores retiradas das entrevistas são marcadas com (E) e as afirmações retiradas dos questionário com (Q).

alunos como um desafio para o professor, mas evidencia uma compreensão da importância do questionamento no trabalho de natureza exploratória. Pelas intervenções apresentadas, a formação parece ter contribuído para uma compreensão mais aprofundada, por parte dos formandos, do conceito de tarefas de natureza exploratória e também das suas potencialidades para a aprendizagem dos alunos.

Discussão coletiva

Um momento de trabalho muito significativo das sessões de formação foram as discussões coletivas. Estas discussões eram realizadas após a concretização das mais diversas atividades – após a exploração matemática de tarefas, a análise de trabalho dos alunos, a análise de sítios web, a análise de manuais, a análise do trabalho do professor. Com o decorrer do tempo, estas discussões passaram a ser um modo de trabalho valorizado como forma de construir coletivamente conhecimento na sequência de um trabalho preparatório adequado. Nas suas reflexões, os professores destacam também os momentos de discussão coletiva em sala de aula como uma das alterações metodológicas às suas práticas profissionais. Assim, Ana valoriza as tarefas de exploração propostas na formação como um ponto de partida para a realização de discussões coletivas, no contexto particular da sua turma:

> A realização e adaptação destas tarefas permitiu uma diversificação de metodologia ao nível da minha sala de aula, já que foi possível a sua aplicação aos dois níveis de ensino que integram a minha turma (1.º e 2.º anos), possibilitando a discussão coletiva e a aquisição de conceitos. *(Ana Q)*

Num registo idêntico, Paula refere que os momentos de discussão coletiva podem ser motivadores para os alunos quando estes desenvolveram previamente tarefas de natureza exploratória:

> Deixar os alunos inventarem as suas próprias estratégias e procedimentos é uma opção pedagógica que pode ser de extrema importância. E solicitar-lhes que as partilhem, surpreendentemente enriquecedor! *(Paula Q)*

Teresa, além de mostrar uma boa apropriação do conceito de discussão coletiva, salienta o papel da formação na compreensão de que a discussão coletiva pode ser produtiva independente do desempenho dos alunos: "Aprendi nesta formação que pode ser aplicado a todos os alunos desde que o acompanhamento do professor seja mais minucioso em todas as fases" *(Q).*

Os momentos de discussão mais interessantes tiveram por base a realização de tarefas matemáticas e a análise de resoluções dos alunos. A discussão de documentos curriculares (em especial as Metas e o Programa de Matemática de 2007) também foi valorizada pelos professores, mas não proporcionou situações de debate e de participação semelhantes aos de outras atividades.

Expectativas quanto aos alunos

Na primeira apresentação das resoluções dos alunos (sessão 2), os professores referiam apenas erros e dificuldades, dando uma imagem negativa das capacidades dos alunos. Isto foi contrariado pelos formadores, que, conhecedores das resoluções dos alunos através de digitalizações previamente enviadas pelos formandos por e-mail, destacavam aquilo que os alunos conseguiam fazer, ressaltando as suas estratégias e resoluções. Com o decorrer do tempo, passou a prevalecer a valorização do trabalho dos alunos e todos os professores procuravam enfatizar nas resoluções que apresentavam os aspetos mais originais e mais interessantes. E a verdade é que um aspeto particularmente interessante destacado pelos professores nas suas reflexões relaciona-se com as mudanças que se registaram nas suas expectativas sobre o que os alunos são capazes de realizar em sala de aula:

> [A formação promoveu] a autoconfiança nas minhas capacidades como professora, que incluiu sem dúvida, a criação de expetativas elevadas acerca do que os alunos podem aprender em Matemática. *(Paula Q)*

Também Catarina destaca que a formação a leva a olhar de um modo diferente para o trabalho dos alunos. Refere ainda que as tarefas propostas na formação influenciam a sua visão sobre o que os alunos são ou não capazes de concretizar em sala de aula, pois apesar das suas expectativas iniciais, pôde verificar que as tarefas propostas se adequam aos seus alunos:

> Eu cheguei a levar daqui... Propostas para nós fazermos com os meninos, pensava assim, isto não vai dar certo... Eles não vão achar isto interessante, e foram essas as atividades que, pelo menos uma delas que eu fiquei bastante até... Feliz e fiquei motivada e foi aí que me deu o tal clique... Que eles realizaram... Eles fizeram um trabalho em grupo, foi espetacular... E aí vi... Dá mesmo, vale a pena... *(Catarina E)*

Deste modo, a formação parece ter contribuído para algumas mudanças nos professores, no sentido da valorização da natureza exploratória do trabalho em sala de aula e das potencialidades das discussões coletivas e ainda sobre as suas expetativas relativamente ao desempenho dos alunos.

Perspetiva sobre a estrutura da formação

Partilha de experiências

Um dos aspetos mais destacados pelos formandos é a possibilidade de partilharem experiências durante toda a formação. Um dos momentos de partilha mais valorizado é promovido a cada duas sessões de formação e consiste na discussão de situações de sala de aula vividas pelos professores durante a realização de tarefas de exploração sobre Números e Álgebra.

Jorge é um dos participantes que destaca estes momentos: "Esta partilha foi tão mais enriquecedora na medida da diversidade dos contextos de origem: anos diferentes do mesmo ciclo e diferentes ciclos (1.º e 2.º)" *(Q)*. Estas situações de partilha de experiências são também realçadas por Paula, que enfatiza ainda a relação desta partilha com a sua própria prática:

> Através da partilha de situações práticas dos formandos e da nossa própria experimentação em sala de aula, conseguimos obter uma visão abrangente, reflexiva e crítica de cada situação. *(Paula Q)*

Pelo seu lado, Luísa evidencia que a partilha de experiências a surpreende, particularmente pelas alterações que os colegas propõem para as tarefas apresentadas na formação:

> É a troca de experiências, o ouvir, a forma como eles abordavam as tarefas ou como as completavam mesmo em casa, as arranjavam para os anos… eu nunca fiz grandes arranjos às minhas tarefas, foram muito idênticas às que eram propostas mas vi colegas que faziam grandes… Algumas mudanças e adaptavam àquilo que eles achavam. *(Luísa E)*

Por outro lado, para Paula, "há ainda a salientar a participação, a partilha, a troca de experiências entre os formandos e formadores que, favoreceu o trabalho cooperativo, trabalho de grupo e trabalho de sala de aula" *(Q).* Na sua perspetiva, a importância da troca de experiências na formação não se cinge aos formandos, valorizando igualmente a partilha entre formandos e formadores.

Assim, a partilha de experiências revela-se uma mais-valia nesta formação, onde os professores podem conhecer situações algo semelhantes às vivenciadas nas suas salas de aula, mas que enriquecem o seu conhecimento sobre as potencialidades dessas situações. Destacam particularmente a importância de conhecerem situações vivenciadas em anos diferentes do ano que lecionam e possibilidades de adequação das tarefas.

Relação entre a formação e a prática

Outra questão largamente valorizada pelos professores é a ligação estabelecida entre a formação e a prática, ou seja, o paralelismo entre atividades desenvolvidas na formação e atividades equivalentes em sala de aula ou também entre a formação e outros aspetos da sua prática profissional. Um dos aspetos destacados é a realização de tarefas tanto por parte dos formandos como por parte dos seus alunos. Como refere Luísa "esta oficina proporcionou que trabalhássemos com os nossos alunos durante a aplicação das tarefas e que trabalhássemos nós próprios durante as sessões" (Q). Pelo seu lado, Jorge salienta que a resolução de tarefas matemáticas durante a formação não corresponde linearmente à resolução realizada na sala de aula:

> Era realizada a tarefa que seria apresentada em sala de aula por cada um dos formandos. Este trabalho era feito em grupo, tal como

> seria com os alunos . . . Esta adequação ambiental permitia refletir sobre as possíveis dificuldades das crianças na execução da tarefa e conduzir para uma adaptação à especificidade dos alunos. *(Jorge Q)*

Deste modo, ainda que os professores se envolvam ativamente na resolução das tarefas matemáticas propostas na formação, veem esta resolução como um ponto de partida para aprofundarem o seu conhecimento sobre a tarefa de modo a poderem usá-la na sala de aula.

Conclusão

Esta formação teve momentos mais conseguidos e momentos menos conseguidos. No entanto, em termos gerais, o design de formação adotado (Loucks-Horsley et al., 1998), a ênfase na abordagem de ensino exploratório (Ponte, 2005), a forte ligação com situações de prática profissional (Smith, 2001), nomeadamente considerando tarefas matemáticas, resoluções de alunos e momentos de trabalho em sala de aula, revelaram se apropriados para os objetivos de formação propostos para este grupo de professores. Especial relevo merecem os momentos de discussão coletiva (Ponte, 2005; Sherin, 2002; Stein et al, 2008) nas sessões de formação, que proporcionaram amplo espaço de participação aos formandos, valorizaram os seus saberes e as suas práticas, e proporcionaram um modelo vivo como poderia ser o trabalho da sua sala de aula.

São diversos os professores que indicam que, como consequência da formação, as suas práticas se alteraram tendo modificado as tarefas que propõem, a forma como as introduzem e modo como as discutem no fim com toda a turma. Como formadores, não podemos garantir que os participantes tenham mudado de modo significativo as suas práticas. No entanto, é de salientar que a valorização do ensino exploratório, das discussões coletivas e das capacidades dos alunos foram conclusões a que eles próprios chegaram como consequência do trabalho realizado na formação. Em que medida estas perspetivas irão informar as suas práticas futuras dependerá muito do trabalho de coordenação ao nível dos seus agrupamentos e da política nacional para o ensino da Matemática, pois só através da conjugação de diferentes níveis de atuação – formação, trabalho nas organizações escolares e política central – se podem conseguir mudanças profundas e duradoiras para o ensino da Matemática.

Referências

Brendefur, J., & Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: Two preservice teachers' conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3*(2), 125-153.

Lesne, M. (1984). *Trabalho pedagógico e formação de adultos*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Llinares, S., & Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 429-460). Roterdão: Sense.

Loucks-Horsley, S., Hewson, P. W., Love, N., & Stiles, K. E. (1998). *Designing professional development for teachers of science and mathematics.* Thousand Oaks, CA: Corwin.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Autor.

Patton, M. Q. (1987). *How to use qualitative methods in evaluation*. Newbury Park, CA: Sage.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Branco, N., Quaresma, M., Velez, I., & Mata-Pereira, J. (2012). Perspetivas teóricas no estudo das práticas profissionais dos professores de matemática. In *Práticas de ensino da Matemática: Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 267-279). Lisboa: SPIEM.

Serrazina, L. (2013). O programa de formação contínua em matemática para professores do 1.º ciclo e a melhoria do ensino da Matemática. *Da Investigação às Práticas, 3*(2), 75-97.

Sherin, M. G. (2002). A balancing act: Developing a discourse community in the mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5,* 205-233.

Smith, M. S. (2001). *Practice-based professional development for teachers of mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*, 313-340.

Wood, T. (1999). Creating a context for argument in mathematics class. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 171-191.

FORMAÇÃO

16. Articulação entre pedagogia e conteúdo na formação inicial de professores dos primeiros anos: Uma experiência em Álgebra

por Neusa Branco, João Pedro da Ponte

16. Articulação entre pedagogia e conteúdo na formação inicial de professores dos primeiros anos: Uma experiência em Álgebra

Neusa Branco
Escola Superior de Educação,
Instituto Politécnico de Santarém e UIDEF,
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
neusa.branco@ese.ipsantarem.pt

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ulisboa.pt

• **Resumo:** Este capítulo apresenta o trabalho realizado com sequências pictóricas numa experiência numa experiência de formação em Álgebra na formação inicial. Esta experiência de formação segue uma abordagem exploratória e visa a articulação entre conteúdo e pedagogia com vista ao desenvolvimento do pensamento algébrico dos formandos, do seu conhecimento didático e da sua identidade profissional. Os resultados revelam uma melhoria na capacidade de generalização e simbolização dos formandos no trabalho com sequências pictóricas, assim como o desenvolvimento do seu conhecimento sobre o ensino-aprendizagem desta temática nos primeiros anos e consequente contributo para o desenvolvimento da sua identidade profissional.

• **Palavras-Chave:** Experiência de formação, Formação inicial, Professores dos primeiros anos, Pensamento algébrico, Sequências pictóricas.

Introdução

A formação inicial de professores e de educadores de infância constitui uma base fundamental para o seu futuro desempenho da atividade profissional. Esta formação deve contemplar experiências que proporcionem o desenvolvimento do conhecimento necessário para esse desempenho. Em Portugal a formação inicial dos educadores e professores do 1.º e 2.º ciclo requer uma licenciatura em educação básica e um mestrado que habilite para a docência. A licenciatura, assumindo um carácter predominantemente científico, deve atender à especificidade de formação que confere e às orientações curriculares para estes níveis de escolaridade.

ME (2007) e NCTM (2000) dão uma significativa visibilidade à Álgebra, indicando a importância de promover o pensamento algébrico desde os primeiros anos de modo a fomentar o desenvolvimento da compreensão dos alunos e da sua capacidade de generalização. Para que os futuros professores possam promover esta abordagem no seu ensino é fundamental que a sua formação inicial os ajude a desenvolver esta perspetiva da Álgebra, valorizando a generalização, as relações e o uso de símbolos. A formação inicial deve ter ainda em conta que estes formandos, quando forem lecionar, serão colocados perante desafios relativos ao pensamento algébrico que, na sua maioria, nunca experimentaram enquanto alunos.

Este capítulo foca o modo de promover o ensino da Álgebra na formação inicial, proporcionando aos formandos o desenvolvimento do conhecimento matemático para ensinar e também do conhecimento didático para o ensino deste tema. De um modo particular, abordamos o trabalho realizado em situações que envolvem a generalização de sequências pictóricas e a sua representação.

Pensamento algébrico e formação inicial de professores

Formação inicial dos professores dos primeiros anos

O conhecimento matemático para ensinar Matemática assume um caráter específico, envolvendo saber usar a Matemática e também compreender os significados e fundamentos do conhecimento mobilizado (Albuquerque et al., 2006). Ponte e Chapman (2008) referem três vertentes a considerar na formação inicial de professores: (i) conhecimento da Matemática para ensinar, (ii) conhecimento do ensino da Matemática ou didática, e (iii) identidade profissional, que se apoia tanto no conhecimento da Matemática e como do ensino da Matemática. Esta articulação visa promover o desenvolvimento da capacidade dos futuros professores de integrarem o conhecimento dos conteúdos e processos matemáticos e o conhecimento dos alunos a ensinar, de acordo com a sua escolaridade e as orientações curriculares (Ponte & Chapman, 2008). Os futuros professores precisam de desenvolver o seu conhecimento sobre o ensino da Matemática, nomeadamente, sobre as tarefas a propor, o trabalho de sala de aula, os processos de aprendizagem dos alunos e as orientações curriculares.

Ponte e Chapman (2008) identificam, então, que a formação de professores tem o desafio de conseguir combinar conteúdo, assim como "ensinar os futuros professores do mesmo modo que se espera que eles ensinem os seus alunos" (p. 256). A Didática da Matemática tem um papel importante a desempenhar na formação inicial de professores pois o facto de saber mais Matemática não assegura que o professor ou futuro professor consiga ensinar de modo que "os estudantes desenvolvam o poder matemático e uma compreensão conceptual profunda" (Mewborn, 2001, p. 28) proporcionando-lhes o desenvolvimento dos seus conhecimentos e das suas capacidades, relativamente a cada tema matemático e a compreensão da sua articulação como é sugerido pelas orientações curriculares (ME, 2007; NCTM, 2000). Mewborn (2001) refere estudos que sugerem que muitos professores dos primeiros anos não têm desenvolvida uma compreensão conceptual da Matemática necessária para ensinar. Por isso, a formação de professores deve proporcionar-lhes experiências que visem a componente do conhecimento matemático e do ensino, fomentando uma aprendizagem da Matemática com compreensão que contribua para o desenvolvimento da sua capacidade de proporcionar essa compreensão aos seus alunos. Esta articulação entre conteúdo e pedagogia visa proporcionar o desenvolvimento do conhecimento dos futuros professores relativamente aos alunos, aos seus processos de aprendizagem e à prática do professor que favorece essa aprendizagem, bem como fomentar a compreensão de conceitos, procedimentos, representações e conexões no âmbito da análise de situações de aula, das estratégias e dificuldades dos alunos e de tarefas para os alunos.

A identidade profissional começa a construir-se quando se faz a escolha da profissão, ou seja, quando se decide que se quer ser professor, e se escolhe o curso de formação inicial (Oliveira & Cyrino, 2011). A formação inicial de professores deve contribuir para esse desenvolvimento. A formação da identidade profissional é "um processo de construção do conhecimento prático caracterizado por uma integração contínua do que é individual e coletivo visto como relevante para o ensino" (Beijaard, Meijer & Verloop, 2004, p. 123). Este desenvolvimento inclui a apropriação dos valores e normas da profissão, a ideia sobre o ensino num nível de escolaridade e sobre o professor que quer ser, bem como o entendimento sobre a sua aprendizagem e a capacidade de refletir na experiência (Ponte & Chapman, 2008). As experiências passadas enquanto alunos podem influenciar a identidade do futuro professor, trazendo essas memórias para o seu papel como professor (Brady, 2007).

Desenvolvimento profissional e pensamento algébrico

Diversos documentos curriculares (ME, 2007; NCTM, 2000) e diversos investigadores (Carraher & Schliemann, 2007; Kieran, 2004) identificam a importância de fomentar o desenvolvimento do pensamento algébrico desde os primeiros anos da escola. Isto não significa abordar mais cedo os tópicos que são apresentados no estudo formal da Álgebra nos anos mais avançados do ensino básico e no ensino secundário (Carraher & Schliemann, 2007), uma vez que o pensamento algébrico não se foca no uso de letras e da sua manipulação (Cooper & Warren, 2011; Radford, 2006; 2011) mas sim no modo de pensar (Blanton & Kaput, 2011; Radford, 2011).

Habitualmente, os formandos que pretendem vir a ser professores ou educadores têm percursos escolares em Matemática bastante distintos, com diferentes experiências de aprendizagem em Álgebra, e revelam diferentes conhecimentos e expectativas em relação ao trabalho neste tema. Para que, como professores, possam promover o desenvolvimento dos diferentes aspetos do pensamento algébrico nos seus alunos, os formandos devem ter experiências de aprendizagem na formação inicial que lhes proporcionem o seu próprio desenvolvimento neste domínio (Branco & Ponte, 2011; Magiera, van den Kieboom, & Moyer, 2011). Enquanto alunos, muitos destes futuros professores tiveram poucas experiências com atividades de generalização e formalização, o que, dado o processo de mudança no ensino-aprendizagem da Álgebra (Kaput & Blanton, 2001), coloca um grande desafio à sua formação inicial. Os professores precisam de saber Álgebra e o que o seu ensino envolve nos primeiros anos para conseguirem mobilizar esse conhecimento na sua prática futura. Assim, procuramos proporcionar-lhes experiências de aprendizagem que contribuam para o desenvolvimento do seu conhecimento algébrico e para sustentar as suas decisões sobre a aprendizagem dos seus alunos no que respeita à promoção do pensamento algébrico.

Billings (2008) sugere que antes de promover o pensamento algébrico nas suas salas de aula, os professores têm de desenvolver uma compreensão pessoal sobre o que significa pensar algebricamente. Para tal, esta autora indica que "eles precisam de múltiplas experiências de análise da variação, de identificação, representação e generalização de relações entre variáveis" (p. 279), referindo que situações com sequências pictóricas crescentes são propícias para promover esta compreensão nos professores, desafiando-os a pensar algebricamente.

Sequências pictóricas

A generalização é central no pensamento algébrico assim como a sua expressão simbólica (Kaput, 2008; Mason, Graham, & Johnston-Wilder, 2005). A generalização e a simbolização estão ligadas. A simbolização possibilita a representação por meio de uma única declaração do que se aplica a múltiplos casos e, por isso, serve a generalização (Kaput, Blanton & Moreno, 2008).

A generalização pode ser expressa de diferentes modos e, nos primeiros anos, os alunos podem expressar essa generalização pelas suas próprias palavras, baseando-se no que observam e, gradualmente, expressá-la simbolicamente (Blanton, 2008). Álgebra envolve ainda "ações sintaticamente guiadas sobre raciocínios e generalizações expressos no sistema de símbolos convencional" (Kaput, 2008, p. 11).

Nos primeiros anos, as sequências pictóricas oferecem diversas oportunidades de generalização. Neste trabalho os alunos devem ser encorajados a pensar nas relações entre variáveis, deixando o foco do seu pensamento de ser sobre as operações com números específicos (Carraher, Martinez & Schliemann, 2008). Como indica Radford (2006), nestas sequências, a generalização pode ter uma natureza aritmética ou algébrica, e esta última pode ser factual, contextual ou simbólica. Segundo este autor, a generalização envolve duas componentes, o que é generalizado (a "afirmação geral") e o objeto generalizado (a informação de que se parte). Para que uma generalização da sequência possa ser considerada algébrica, o objeto generalizado precisa de se concretizar numa regra que expressa qualquer termo dessa sequência. Em contrapartida, a generalização aritmética é centrada em alguns termos da sequência e refere-se a um aspeto local comum, e o aluno não a usa para expressar qualquer termo da sequência.

Para Radford (2006), o aluno apresenta uma generalização factual quando se refere a termos de ordens distantes mas sempre atribuindo um valor à ordem.

Na generalização contextual e na generalização simbólica o objeto generalizado é identificado. Contudo, na generalização contextual, a generalização para uma ordem qualquer refere “o número da figura”, assumindo o objeto generalizado a descrição relativa ao contexto. Na generalização simbólica, o objeto generalizado e as operações feitas são expressas em linguagem algébrica simbólica. Note-se ainda que o trabalho com sequências pictóricas permite o surgimento de diferentes expressões algébricas para generalizar uma mesma sequência pictórica, possibilitando a análise de expressões algébricas equivalentes (English & Warren, 1999).

Metodologia do estudo

O estudo, de natureza qualitativa e interpretativa, segue um *design* de experiência de ensino. Esta metodologia envolve uma intervenção planeada na sala de aula que decorre durante um período significativo de tempo e que tem por base uma sequência de episódios de ensino, permitindo analisar a atividade dos participantes (Steffe & Thompson, 2000), tendo em conta o que conseguem fazer antes dessa intervenção e no seu final. Tem subjacente uma conjetura de formação que respeita à promoção da articulação entre o conhecimento matemático e didático para o desenvolvimento profissional dos futuros professores e educadores no âmbito de uma abordagem de ensino exploratória.

Participam os 20 formandos que frequentam a experiência de formação, sendo 3 deles – Alice, Beatriz e Diana – objeto de estudo mais detalhado. Tal como os restantes formandos, têm experiências muito diversificadas antes da entrada no ensino superior e manifestam pretender frequentar mestrados que habilitam para a docência desde a educação pré-escolar ao 2.º ciclo (Quadro 1):

Quadro 1 – Caracterização quanto à frequência na disciplina de Matemática e ao mestrado em que pretende ingressar

Alice	9.º ano	Educação Pré-Escolar
Beatriz	10.º ano	Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º CEB
Diana	12.º ano	Ensino do 1.º e do 2.º CEB

A experiência de formação é concretizada pela primeira autora. Os dados apresentados neste capítulo foram recolhidos por: (i) dois questionários que envolvem tarefas de natureza algébrica e questões didáticas (um antes da experiência, Qi, e outro após a sua conclusão, Qf); (ii) três entrevistas individuais aos três formandos vídeo gravadas (duas entrevistas, E1 e E3, com base nos questionários inicial e final respetivamente, e outra entrevista, E2, realizada durante a experiência); (iii) observação participante pela docente, complementada pelo registo vídeo e áudio das aulas; e (iv) documentos produzidos pelas três formandas durante as entrevistas, produzidos na realização das tarefas durante a experiência de formação pelos 20 formandos e no âmbito da elaboração de um portefólio reflexivo sobre o trabalho desenvolvido no semestre que inclui pelo menos duas tarefas das sete alvo de recolha de dados. Os dados permitem descrever com pormenor as situações vividas pelos participantes. A sua análise assume um cunho essencialmente interpretativo de modo a identificar o contributo da experiência de formação para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos participantes, do seu conhecimento sobre o ensino da Álgebra nos primeiros anos e da sua identidade profissional.

A experiência de formação

O estudo decorre no âmbito de uma unidade curricular do 3.º ano da licenciatura em Educação Básica não tendo os formandos experiência de prática letiva. Esta licenciatura dá acesso aos mestrados que habilitam para a docência desde a educação pré-escolar ao ensino do 2.º ciclo permitindo seguir percursos profissionais bastante distintos. A experiência de formação tem por base a perspetiva do ensino da Álgebra preconizada pelas orientações curriculares atuais (ME, 2007) relativa ao desenvolvimento do pensamento algébrico desde os primeiros anos de escolaridade. Segue uma abordagem exploratória, envolvendo os formandos no trabalho a desenvolver e dando relevo aos momentos de discussão e sistematização de conceitos, proporcionando o desenvolvimento do seu conhecimento sobre Álgebra e o seu ensino. Esta abordagem atende às principais indicações na formação de professores, quer em geral, quer em Álgebra, procurando integrar o conhecimento do conteúdo e o conhecimento didático de modo a proporcionar aos formandos experiências de aprendizagem que fomentem o desenvolvimento do seu conhecimento matemático e didático, revelando aspetos que deverão atender no ensino da Matemática (Albuquerque et al., 2006; Ponte & Chapman, 2008).

O trabalho na experiência de formação contempla diversos tópicos como o estudo de relações, regularidades e sequências, funções e modelação Matemática que surgem em sete tarefas que são alvo de estudo e que têm o intuito de promover o desenvolvimento do pensamento algébrico dos formandos e a sua reflexão sobre situações concretas de ensino-aprendizagem. O trabalho na experiência de formação envolve, nomeadamente: (i) analisar estratégias usadas por alunos; (ii) observar, explorar e relacionar diferentes representações; (iii) compreender que conhecimento os alunos revelam; (iv) identificar eventuais dificuldades dos alunos; e (v) refletir sobre hipóteses de trabalho com os alunos. Esta abordagem visa o desenvolvimento da capacidade de integrar o conhecimento da Matemática e o conhecimento dos alunos por parte dos futuros professores, possibilitando a análise do processo de aprendizagem dos alunos e da prática do professor.

Neste capítulo abordamos o trabalho relativo à análise e generalização de sequências pictóricas e numéricas e o visionamento de um vídeo de uma aula do 2.º ano de escolaridade, em que os alunos trabalham numa tarefa com uma sequência pictórica, bem como o seu contributo para o desenvolvimento da identidade dos futuros professores. Aqui a tecnologia proporciona uma oportunidade de formação significativa. Estes formandos têm a possibilidade de analisar a prática do professor e a aprendizagem que decorre dessa prática. Neste vídeo observam diversos momentos da aula, a apresentação da tarefa, o trabalho autónomo dos alunos e o momento de discussão do trabalho realizado e de novas questões. Observam as estratégias dos alunos e as interações que se estabelecem entre os alunos e entre alunos e professor, em particular, o que respeita ao questionamento da parte do professor e o modo como os alunos apresentam aos outros as suas conclusões.

A experiência de formação e o desenvolvimento profissional

Trabalho com sequências pictóricas crescentes antes da experiência

A tabela 1 relaciona o cálculo de um termo distante com a indicação de um termo geral da sequência por parte dos 20 participantes na sequência pictórica do questionário inicial (Figura 1):

A maioria dos formandos não apresenta um termo geral correto, sendo que uma grande parte também não apresenta uma estratégia adequada para determinar um termo da sequência de ordem distante. Dos nove formandos que respondem corretamente na alínea b), apenas quatro indicam uma expressão algébrica correta que representa a relação direta.

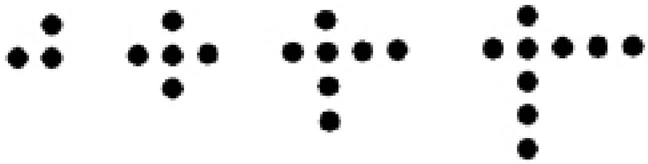


Figura 1 – Sequência pictórica, Qi-6.

Tabela 1 – Relação entre as respostas na determinação do termo distante e do termo geral no questionário inicial

		Determinação do termo distante		
		Não responde	**Resposta incorreta**	**Resposta correta**
Termo geral	Não responde	1	1	2
	Sem expressão algébrica ou com expressão algébrica incorreta	2	7	3
	Expressão algébrica correta	0	0	4

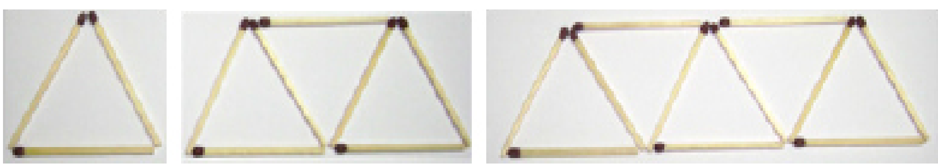
Nesta questão, Alice determina incorretamente o termo da ordem distante e um termo geral. Para determinar o 60.º termo da sequência numérica adiciona dois à ordem do termo, obtendo como resultado 62 pintas, raciocínio que repete para indicar o termo geral, indicando a expressão algébrica $n + 2$. A generalização que estabelece tem por base um raciocínio recursivo em que n representa o termo anterior e não a ordem do termo. Beatriz analisa os termos numéricos e relaciona-os com a sua ordem. Da análise dos primeiros termos indica em linguagem natural a generalização: “tenho sempre o dobro da… Tenho sempre o dobro da… Do termo. Tenho o dobro do termo, mais um” (E1). Nesta situação revela alguma confusão no que respeita à utilização do vocabulário “termo” e “ordem”. Representa algebricamente esta generalização indicando a expressão algébrica $n \times 2 + 1$. Diana, pelo seu lado, analisa a constituição dos termos pictóricos. Contudo, estabelece uma relação entre o total de pintas e o número de pintas na vertical e na horizontal e não com a ordem de um modo direto. Representa por x o número de pintas que tem cada uma das filas e por $2x - 1$ o número total de pintas reconhecendo que as duas filas têm uma pinta comum. Usa corretamente este raciocínio para a determinação do termo distante relacionando o número de pintas na horizontal e na vertical com a ordem dada. Na primeira entrevista clarifica a sua análise e representação da generalização indicando que $x = n + 1$.

Trabalho com sequência pictóricas crescentes durante a experiência

Apresentamos com algum detalhe o trabalho realizado em torno da tarefa 4, constituída por três questões, que trata a generalização algébrica de sequências pictóricas crescentes e promove a discussão dos diferentes modos como os termos pictóricos podem ser observados com o intuito de estabelecer relações entre a sua constituição e a sua ordem. Deste modo, promove a representação algébrica da generalização e raciocínios e ações sintaticamente guiados sobre essas generalizações. Assim, tem em vista promover a análise de sequências pictóricas e a determinação de termos gerais das sequências numéricas associadas com base na constituição dos termos pictóricos e de relações entre as suas partes e a respetiva ordem. Fomenta, ainda, uma análise e reflexão sobre o trabalho a desenvolver em sala de aula, em particular com os primeiros anos, no âmbito da generalização. Esta tarefa é realizada em pequenos grupos e no final da resolução de cada uma das questões há um momento de discussão coletiva onde os formandos partilham as suas estratégias e refletem sobre o trabalho realizado.

Generalização de uma sequência pictórica e sua representação. Na primeira questão (T4-1) os formandos devem procurar indicar dois modos diferentes para obter um termo geral da sequência numérica relativa ao número de fósforos usados em cada termo, explicitando a relação que observam entre a ordem e a constituição do termo.

T4-1. Considere os três primeiros termos da sequência pictórica seguinte:



Todos os grupos determinam um termo geral fazendo a decomposição dos termos pictóricos em partes que relacionam com a sua ordem. Realizam uma generalização algébrica contextualizada que os conduz em seguida a uma generalização algébrica simbólica. Surgem, assim, diferentes decomposições dos termos pictóricos que fazem surgir expressões algébricas equivalentes, $4n - 1$ e $2n + (2n - 1)$.

Por exemplo, o grupo do qual Alice faz parte decompõe cada termo de modo a relacionar cada parte com a sua ordem (Figura 2):

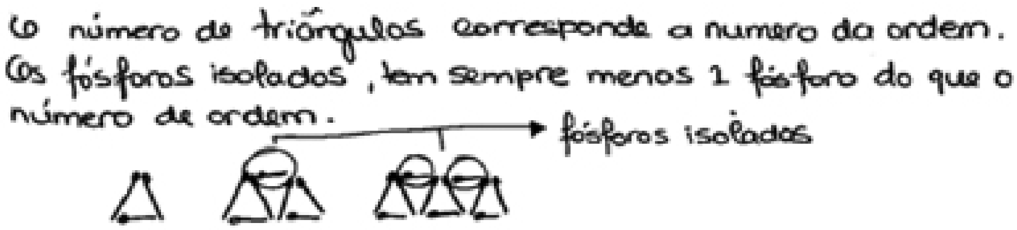


Figura 2 – Análise dos termos pictóricos da sequência da questão 1 (Grupo de Alice).

Fazendo uma outra análise dos termos pictóricos da sequência, o grupo que Beatriz integra identifica que é necessário o dobro da ordem de fósforos para formar a parte central, n na parte inferior e $n - 1$ na parte superior (Figura 3):

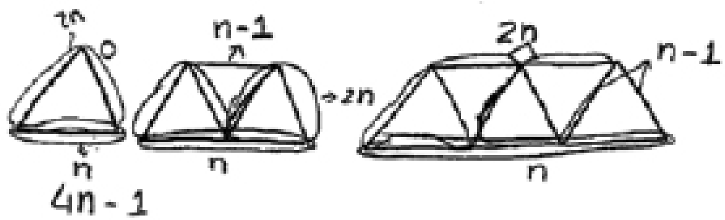


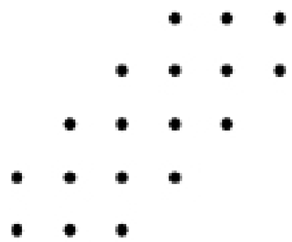
Figura 3 – Análise dos termos pictóricos da sequência da questão 1 (Grupo de Beatriz).

O grupo de Beatriz identifica também um termo geral pelo método dos coeficientes indeterminados, após verificar que a primeira diferença é constante e que o termo geral é por isso do tipo $an + b$, com a e b inteiros e a diferente de zero.

Depois dos grupos discutirem o modo como obtiveram um termo geral e analisarem a equivalência das expressões algébricas, discutem outros modos de analisar os termos pictóricos, propostos pela docente, obtendo expressões algébricas para o termo geral equivalentes às anteriormente apresentadas. Isto possibilita a realização de ações sintaticamente guiadas sobre as expressões algébricas, reforçando o conhecimento dos formandos sobre os aspetos específicos da linguagem algébrica simbólica e da sua manipulação. Além disso, a partilha de diferentes análises dos termos pictóricos promove o desenvolvimento das suas capacidades de generalizar e de analisar se uma expressão algébrica pode ou não ser termo geral de uma sequência, quando essa expressão é diferente da que estabeleceram.

Descoberta de uma sequência dado um termo pictórico e sua generalização. Na questão 2 é apenas dado o 4.º termo de uma sequência pictórica. Com base na análise da estrutura deste termo os formandos devem desenhar os três primeiros termos e o quinto termo de uma sequência pictórica a que pertença este termo e indicar um termo geral para essa sequência.

T4-2. A figura seguinte representa o quarto termo de uma sequência pictórica:



Os vários grupos de formandos analisam este 4.º termo sob diferentes perspetivas. Dentro de um mesmo grupo surgem mesmo diferentes sequências pictóricas às quais este termo pertence. Discutem entre si os diferentes termos pictóricos que representam e a generalização das sequências que constroem. Em seguida exemplificam-se as três sequências apresentadas e discutidas na turma e as diferentes expressões algébricas que expressam a generalização e que refletem a análise dos termos pictóricos. A Figura 4 apresenta uma dessas sequências:

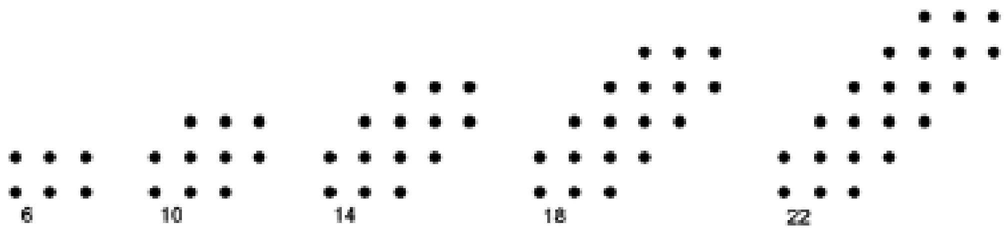


Figura 4 – Sequência A.

Os diversos grupos analisam a constituição dos termos pictóricos de modos distintos o que permite obter diferentes expressões algébricas e simplificar termos semelhantes, analisando-se a sua equivalência. A análise do número de pintas na diagonal evidencia relações entre o número de pintas em cada linha e a ordem do termo, como exemplificam aos dois esquemas (Figura 5 e Figura 6). Desta análise surgem três expressões algébricas equivalentes, $2n + 2(n +1)$, $n + n + 1 + n + 1 + n$, $4n + 2$.

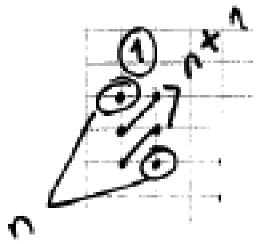


Figura 5 – Representação da análise do 1.º termo da sequência A.

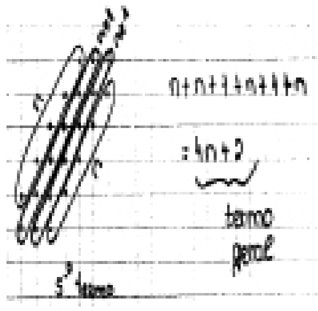


Figura 6 – Representação da análise do 5.º termo da sequência A.

A identificação de um conjunto de 6 pintas que existe em todos termos e do que se altera de termo para termo permite duas abordagens para determinar de um termo geral. Numa identificam-se 3 pintas na primeira linha e 3 pintas na última linha que não se alteram em cada termo. A estas pintas juntam-se tantos conjuntos de 4 pintas como o número anterior à ordem do termo. Assim, o primeiro termo tem apenas as 6 pintas. Desta análise surge a expressão algébrica $4(n - 1) + 3 \times 2$. É, também, possível identificar que em cada termo, às 6 pintas do primeiro termo se acrescentam conjuntos de 4 pintas, como mostra a Figura 7. Deste modo identifica-se a diferença entre termos consecutivos, que permite associar a sequência numérica e múltiplos de 4 e realiza-se o acerto necessário, adicionando-se 2.

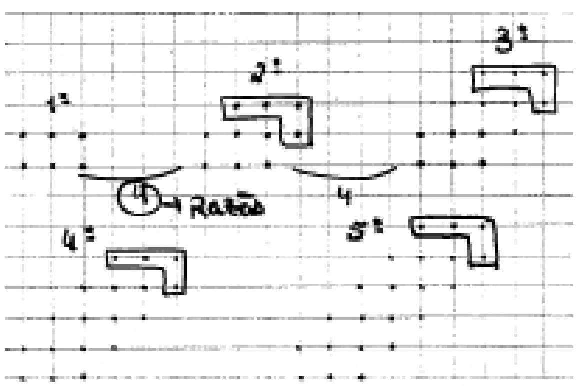


Figura 7 – Representação da análise dos 5 primeiros termos da sequência A.

A Figura 8 apresenta uma outra sequência sendo os termos pictóricos, assim como os termos numéricos diferentes dos da sequência A.

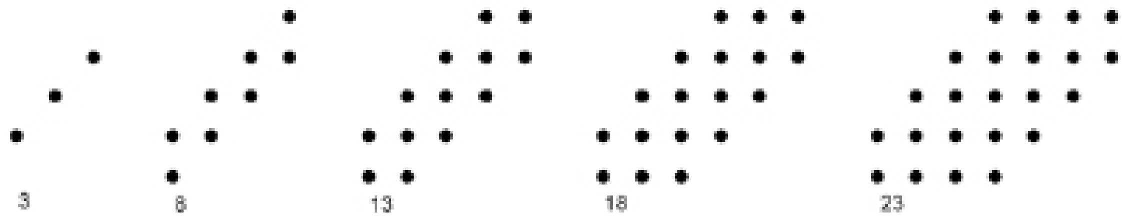


Figura 8 – Sequência B.

Na análise desta sequência, os formandos relacionam o número de pintas existente em todas as linhas com a ordem do termo. Obtêm, assim, a expressão algébrica $3n + 2(n – 1)$ que surge da análise evidenciada na Figura 9. Verificam que esta expressão é equivalente à expressão algébrica $5n + 2$.

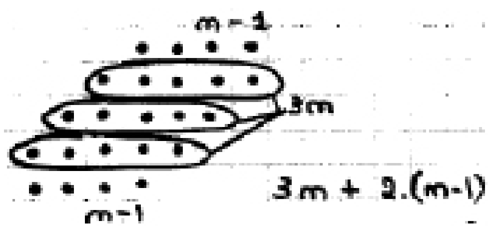


Figura 9 – Representação da análise do 4.º termo da sequência B.

Uma outra sequência possível a que pertence o 4.º termo apresentado que surge na turma é a sequência C (Figura 10).

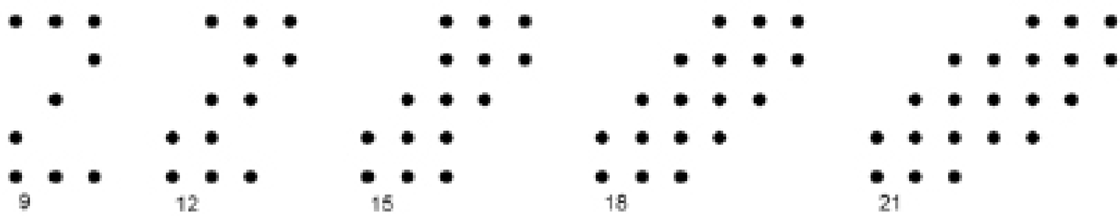


Figura 10 – Sequência C.

Os formandos determinam um termo geral quer pela análise dos termos pictóricos quer pela análise da sequência numérica. Pela identificação da diferença entre termos consecutivos, verificam que para obter o termo de ordem n adicionam $n - 1$ conjuntos de 3 pintas às 9 pintas do 1.º termo. Obtêm a expressão algébrica que verificam ser equivalente à expressão $3n + 6$. Esta última surge também da análise dos termos pictóricos exemplificada na Figura 11. Identificam o conjunto de pintas que se mantém invariante em cada termo e o número de pintas que depende da ordem do termo:

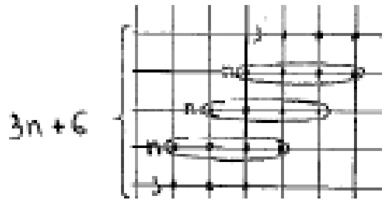


Figura 11 – Representação da análise do 4.º termo da sequência C.

Os vários grupos apresentam à turma estas sequências e coletivamente discutem os aspetos comuns e aspetos em que diferem, nomeadamente que respeitam todas a sequências numéricas lineares em que a diferença entre termos consecutivos é diferente em todas. Assim, os diferentes modos de visualizar o 4.º termo dão origem a sequências pictóricas diferentes e a sequências numéricas diferentes que originam termos gerais distintos. Analisa-se ainda a relação entre a diferença do número de pintas de termos consecutivos e o coeficiente do monómio em n, relacionando-se diferentes abordagem para a determinação do termo geral. Com este trabalho surge a oportunidade dos formandos analisarem expressões algébricas equivalentes e de reverem a sintaxe da linguagem algébrica, reforçando o seu conhecimento das propriedades das operações e do significado dos símbolos no contexto algébrico.

O trabalho numa sala de aula dos primeiros anos. A questão 3 respeita ao visionamento e análise de um episódio de sala de aula relativo ao trabalho de uma turma de 2.º ano na realização da seguinte tarefa (o trabalho da aula apresentado em Faria, Silvestre, Sousa & Cristo, 2009 e em Silvestre et al., 2010):

Com base no vídeo aos formandos identificam aspetos significativos no que respeita à dinâmica e organização do trabalho na sala de aula no caso particular do trabalho com sequências pictóricas. Alguns formandos referem que esta experiência foi importante para a sua formação. É o caso de um deles que indica ter permitido “conhecer o ambiente que ocorre na sala de aula, analisar as metodologias seguidas pela professora (...)” (Portefólio-T4, F3).

Observa a sequência de blocos.

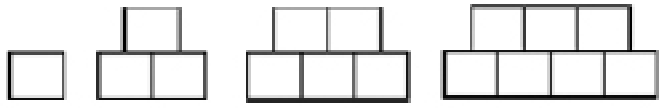


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

a) Continua a sequência e desenha as figuras 5 e 6.

b) Quantos peças foram utilizadas para construir cada uma das figuras? Escreve a tua resposta na tabela seguinte.

c) Sem usar desenhos, és capaz de descobrir quantos blocos tem a figura 20 da sequência? Explica como pensaste.

Esta experiência proporciona também aos formandos uma oportunidade de identificar dificuldades concretas dos alunos no trabalho com sequências pictóricas, as diferentes estratégias e representações que usam, bem como o modo como a professora atua perante as situações que os alunos apresentam: "[Permite-nos] identificar diferentes estratégias apresentadas pelos alunos e tomar consciência de algumas das suas dificuldades. A análise das estratégias apresentadas pelos alunos preparam-nos enquanto futuros professores para a variedade de respostas que podemos encontrar por parte destes" (Portefólio-T4, F3).

Diana salienta a importância dos alunos analisem termos próximos e termos distantes para "verem a relação que a ordem tem com os termos. Acho que é mesmo isso, a relação, compararem... Eles compararem qual é a relação que têm e se compreenderem os primeiros casos também vão conseguir compreender mais [distantes]" (E2). Na sua perspetiva, a procura de termos de ordens mais distantes promove o estabelecimento dessa relação mais que a indicação de termos muito próximos porque "por exemplo, aqui na quarta, o que provavelmente eles iriam fazer era fazer o desenho e contarem e não perceberem qual era mesmo a relação que tinha, o que é que havia a mais, a menos" (E2). Identifica que, para ordens próximas, os alunos podem privilegiar uma estratégia de representação e contagem e não chegar a estabelecer a generalização. Com a determinação de termos distantes a primeira estratégia não se torna eficaz, sendo, por isso, mais fácil que proporcionar a generalização.

Com o visionamento do vídeo de uma aula de 2.º ano, Beatriz fica com expectativas elevadas relativamente ao que os alunos podem fazer, já que estes conseguem expressar verbalmente uma regra que permite determinar o termo da sequência numérica para qualquer ordem, o que lhe sugere que estes podem utilizar, já nesse ano de escolaridade, a simbologia algébrica para expressar a generalização. Com base no seu conhecimento matemático, interpreta a resposta dos alunos e dá-lhe um significado algébrico, não atendendo ainda aos conhecimentos e capacidades dos alunos num dado nível de escolaridade. Com a experiência de formação desenvolve a sua compreensão do trabalho realizar em sala de aula e o seu conhecimento dos alunos. A experiência permite-lhe identificar aspetos do conhecimento do professor e como mobilizá-lo para proporcionar situações de aprendizagem adequadas ao ano de escolaridade. No final da experiência de formação salienta que “os alunos olharam e interpretaram a sequência” (Portefólio-T4) de diferentes modos e identifica algumas das estratégias que podem ser utilizadas pelos alunos nos anos iniciais na generalização proporcionada pelas sequências pictóricas. Na análise de termos próximos e a com a utilização da tabela destaca que a sua observação possibilita a identificação de regularidades: “observou que as peças aumentavam de 2 em 2 de cada vez que mudávamos para a figura seguinte; outra das crianças somou o número da figura que era pedida, com o número da figura precisamente anterior a essa” (Portefólio-T4). Na determinação de termos distantes salienta também duas situações. Uma delas envolve a adição do número da ordem com o número natural que o antecede. Esta generalização dos alunos é contextualizada pois estes recorrem sempre a um exemplo para a expressar, como é o caso da figura 20: “o 19 que está por baixo na figura anterior, passa para cima na figura seguinte e por baixo deste 19, fica o 20, se somarmos o 19 com o 20, obtemos o número de blocos da figura 20” (Portefólio-T4). Também para Alice é importante a observação da sala de aula, do modo de trabalho dos alunos, das estratégias que usam para determinar termos distantes e do modo como conseguem expressar uma generalização. Indica ter ficado surpreendida por os alunos do 2.º ano conseguirem generalizar. Tal como Beatriz, também recorda a estratégia de um aluno que usa o seu conhecimento dos números para encontrar uma regra geral para determinar um termo da sequência numérica.

Beatriz e Alice destacam o que respeita à indicação de um termo geral da sequência em linguagem natural por parte de um aluno. Beatriz recorda que ele se refere ao “segredo”: “Esta criança sugeriu que o segredo «não é o dobro, é o menos um que o dobro»” (Portefólio-T4, aspas no original). Verifica que o aluno concretiza esta regra para diversos valores do número da figura. A generalização que este aluno estabelece é algébrica. Contudo, tratando-se de um 2.º ano, não usa a linguagem algébrica para a expressar mas sim a linguagem natural, como Beatriz identifica no final da experiência de formação. A análise desta situação de ensino-aprendizagem contribui para o desenvolvimento da compreensão de Alice do trabalho que os alunos podem desenvolver e as potencialidades de estabelecer generalizações a partir das sequências pictóricas. Refere que os alunos "podem relacionar conceitos, como é o caso acho que era do Bruno que era o dobro, punha o dobro e tirava um. Eles adquirem conceitos e relacionam, vão por tentativa e erro, raciocinam... São tudo capacidades que eles vão adquirindo" (E2).

A experiência proporcionada aos formandos pela análise de situações de ensino aprendizagem na aula permite-lhes reconhecer a importância do papel do professor na gestão e condução da aula de modo a proporcionar experiências aos seus alunos que contribuam para o desenvolvimento do seu pensamento algébrico. Os formandos verificam que a professora que leciona esta aula de 2.º ano solicita a determinação de diferentes termos distantes para que os alunos possam usar as duas estratégias que se evidenciam e são discutidas na aula, a maioria dos alunos adiciona à ordem a ordem anterior (tendo por base a representação pictórica) e um aluno verifica que se trata da subtração entre o dobro da ordem e um. No final, a professora sugere que todos usem esta última estratégia na determinação de alguns termos distantes. De um modo geral, no final da análise deste episódio, todos os formandos salientam o facto dos alunos terem generalizado usando a linguagem natural, mesmo não sabendo que se trata do termo geral da sequência numérica.

Trabalho com sequências pictóricas crescentes depois da experiência

A tabela 2 relaciona o cálculo de um termo distante com a indicação de um termo geral da sequência pelos 20 participantes na sequência pictórica do questionário final (Figura 12):

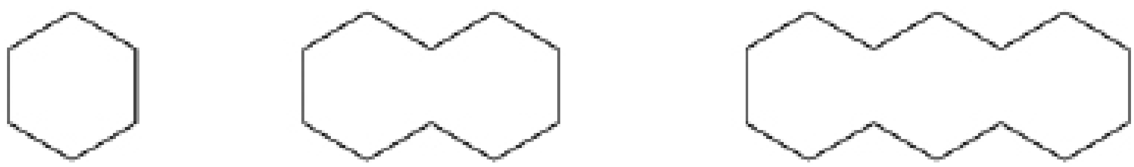


Figura 12 – Sequência pictórica, Qf-6.

A maioria dos formandos escreve uma expressão algébrica correta e usa uma estratégia adequada para a determinação de um termo distante. Três formandos, apesar de aplicarem uma estratégia adequada à determinação de um termo distante, não respondem ou não indicam um termo geral correto e dois formandos não determinam o termo distante e também não indicam um termo geral correto.

Tabela 2 – Relação entre as respostas na determinação do termo distante e do termo geral no questionário inicial

		Determinação do termo distante		
		Não responde	**Estratégia desadequada**	**Estratégia adequada**
Termo geral	Não responde	3	0	2
	Sem expressão algébrica ou com expressão algébrica incorreta	2	0	1
	Expressão algébrica correta	0	1	11

Alice, Beatriz e Diana indicam uma expressão algébrica correta, que usam para determinar o termo distante. Alice determina o termo geral, $4n + 2$, da sequência numérica usando a diferença como fator multiplicativo e ajustando o resultado. Confirma a sua validade para os três termos dados e para os dois termos seguintes que desenha. Beatriz relacionando a ordem com o termo numérico. Confirma, tal como a colega que a expressão está correta com base nos primeiros termos: “4 vezes 1, 4. Mais 2, 6… 4 vezes 2, 8. Mais 2, 10” (E3). Pelo seu lado, Diana encontra um termo geral da sequência numérica com base na análise da constituição dos termos pictóricos, relacionado o número de segmentos de cada termo com a sua ordem. Considera que tem a ordem *x* e que nessa ordem tem *x* vértices em cima e *x* vértices em baixo, sendo que para cada vértice tem dois segmentos: “2*x*, porque eram os dois de cima. Ou seja era 2 vezes *x* mais 2*x*, porque eram os de baixo… Mais 2, porque são os das pontas” (E3).

Balanço do trabalho com sequência pictóricas

Antes desta experiência, Alice desconhecia o trabalho com sequências pictóricas. Na segunda entrevista, que ocorre após a realização da tarefa 4, identifica esse trabalho como sendo o que promoveu nela uma maior aprendizagem: “Eu gostei muito, eu gostei muito da generalização. (...) É engraçado ver como a partir de uma imagem conseguimos descobrir a imagem número não sei quantos" (E2). Realça a realização de generalizações no âmbito das sequências pictóricas que permitem determinar termos de ordem distante, o que a surpreendeu, mesmo reconhecendo ter sentido dificuldades em algumas situações.

Também Diana refere não ter anteriormente trabalhado com sequências pictóricas. Considera que o trabalho realizado contribui para o desenvolvimento da sua compreensão da Matemática, confrontando-o com a sua aprendizagem anterior:

> Era explicar o porquê, nós muitas vezes fazíamos [antes da experiência de formação], chegávamos à fórmula e muitas vezes não percebíamos o porquê, chegávamos lá e estava feito. Era aquilo que era preciso e estava feito. Agora é perceber o porquê e perceber através da fórmula que já temos que se dividirmos a expressão poderemos chegar e explicar a imagem de outra maneira... Há diferentes maneiras de ver a imagem [termo da sequência] (...) E chegamos a várias expressões que, depois no fim, dão o mesmo, mas podemos trabalhar a imagem de diferentes maneiras, e isso ainda eu não tinha feito. (E2)

Beatriz destaca o visionamento do vídeo de sala de aula com os alunos de 2.º ano por lhe permitir a identificação de aspetos algébricos a trabalhar nos primeiros anos, numa perspetiva informal: "pudemos observar a forma como as crianças pensam, e apesar de ainda não lhes ter sido ensinada a Álgebra, esta já lhes está interiorizada inconscientemente, daí uma das crianças ter referido o «segredo» [refere-se a um termo geral]" (Portefólio-T4). Verifica que os alunos conseguem generalizar e expressar essa generalização em linguagem verbal logo nos primeiros anos do ensino básico. Além disso, salienta que o professor deve estar preparado para apoiar os alunos caso coloquem alguma questão ou tenham alguma dificuldade em dar continuidade ao trabalho. Por exemplo, em relação ao trabalho com sequências, sugere que:

> Primeiro, ou primeiro não dizer nada e deixar que eles explorem, e consigam fazer, mas se eles não conseguirem dar uma chamada de atenção, e dizer, olha experimenta a olhar para, para o número. (...). E dizer-lhes, por exemplo, olha, experimenta a olhar para o número

> da ordem, e para o número de elementos das várias ordens, vê lá o que é que encontras em comum em cada uma delas, de quanto em quanto é que aumenta, por exemplo. (E2)

Também Diana reconhece a importância do trabalho que se propõe dos alunos de modo a proporcionar situações de sala de aula em que se fomenta a generalização. Considera que o bom desempenho que se verifica e o seu envolvimento deve advir de um trabalho regular com situações de exploração por parte dos alunos.

Desenvolvimento da identidade profissional

Os diversos formandos da turma têm conhecimentos iniciais muito diversos, e distintas atitudes face à Matemática. Além disso, os seus motivos de ingresso no curso são também bastante diferentes. De um modo geral, quando ingressam no curso de formação inicial de professores, a licenciatura, têm já definido o seu objetivo de formação, qual o mestrado em que pretendem ingressar para poderem ser educadores de infância ou professores de 1.º ciclo ou 2.º ciclo.

Alice pretende ser educadora de infância. A ideia do educador que quer ser é bastante forte e muitas vezes condiciona a sua compreensão do ensino-aprendizagem da Álgebra ao longo da escolaridade e o modo como perspetiva este processo e desenvolve o seu conhecimento matemático e didático. Ainda assim, identifica o contributo da experiência de formação para o desenvolvimento de um conhecimento alargado que lhe permitirá mais tarde preparar situações de aprendizagem, embora considere este não é diretamente necessário para a sua prática letiva na educação pré-escolar:

> Algumas coisas dá para transportar para o pré-escolar, mesmo que não tenhamos estado a falar especificamente mas já dá para ver algumas situações em que dá para aplicar, no pré-escolar, que é mais o meu objetivo. E depois saber também um bocadinho das coisas, mesmo que não vá aplicar no dia-a-dia podem sempre ser úteis. (E3)

Alguns dos aspetos trabalhados na experiência de formação proporcionam a Alice um aprofundamento significativo do seu conhecimento matemático. No início da experiência reconhece fragilidade no seu conhecimento da Matemática e relativamente ao modo de trabalhar com os alunos no 1.º ciclo, o que não acontece quando se refere ao jardim-de-infância. O trabalho realizado em Álgebra proporciona-lhe alguma segurança no seu conhecimento. Durante a experiência realiza um estágio de duas semanas numa sala de aula de 1.º e 2.º anos. Esta situação permite-lhe observar algum trabalho próximo do desenvolvido na experiência de formação: "É engraçado porque usaram uma técnica, a professora usava uma técnica idêntica àquela que nós usamos na aula. E então lembrei-me logo, mas foi engraçado, os miúdos gostam muito de Matemática, pelo menos no 1.º e no 2.º ano gostam" (E3).

A capacidade que agora revela de reconhecimento do trabalho que se faz na sala de aula no 1.º ciclo, a partir do conhecimento que desenvolve na experiência de formação em Álgebra, contribui para aumentar a sua confiança nos seus conhecimentos e capacidades, o que a leva a colocar a hipótese de contemplar também esta vertente na sua formação: "nunca foi, nem é, minha intenção ir para 1.º ciclo. Mas, mas ainda fiquei assim um bocado... Vou, não vou... Mas não, não vou, mas a experiência levou-me a pensar por exemplo se poderia, se queria ir ou não" (E3).

Beatriz pretende integrar o mestrado que habilita para a educação pré-escolar e para o ensino do 1.º ciclo. Considera que o trabalho na experiência de formação no âmbito da análise de respostas de alunos lhe deu um contributo importante. Identifica a importância da compreensão do trabalho que os alunos podem desenvolver numa tarefa. Para si, a antecipação das questões que os alunos podem colocar é importante para a segurança do professor na gestão da aula.

Contudo, apesar de estar ciente da sua necessidade de fazer esta preparação, tem algum receio que em alguma situação as crianças coloquem questões que não previu. Esta preocupação não está relacionada com o seu conhecimento científico geral, em Matemática, mas antes com o conhecimento matemático para ensinar pois verifica ter alguma dificuldade em adaptar o seu conhecimento para promover a aprendizagem dos alunos, reconhecer o seu conhecimento e capacidades: "como eu já sei o que é que as coisas são também, é um bocado difícil pensar o que é que as crianças possam pensar" (E3). Salienta que as situações analisadas na experiência de formação lhe permitiram ter uma melhor compreensão da realidade de sala de aula e do que os alunos conseguem fazer: "Eu jamais iria pensar daquela forma, porque já sei. O complicado para mim que já sei, é pensar o que as crianças não sabem" (E3). Este trabalho fez com que tomasse consciência dos desafios do trabalho do professor em sala de aula, em particular no 1.º ciclo, nível de ensino em que revela menos segurança no trabalho com os alunos.

Pelo seu lado, Diana pretende ser professora de 2.º ciclo, manifestando alguma preferência pelas áreas de Matemática e Ciências da Natureza. O trabalho que desenvolve na experiência de formação permite-lhe confrontar o que envolve o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos e a importância de este se promover nos primeiros anos e a sua experiência enquanto aluna:

> Por exemplo aqui nestas, nas regularidades, eles em pequenos começarem logo a ver, interligar, por exemplo a relacionar os números uns com os outros. (…) Acho que é importante porque eles começam logo a conhecer as relações que os números têm e logo desde cedo a preparar… Dantes não tínhamos e nós começámo-nos a aperceber de algumas relações que existiam mais tarde. No 8.º, 7.º [anos] é que começávamos a aperceber de algumas coisas que, se na primária foram trabalhadas e tiverem outro tipo de trabalho, eles conseguem perceber muito mais cedo. (E2)

Diana identifica que o trabalho com relações desde cedo pode fazer com que os alunos compreendam diversas relações que considera ter compreendido já tarde. A experiência de formação contribui, assim, para a sua reflexão sobre o trabalho do professor e para a definição do professor que quer ser no ensino da Matemática.

Conclusão

O estudo revela como a experiência de formação contribuiu de modo decisivo para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos formandos, no que respeita à generalização de sequência e à sua representação simbólica. Este trabalho contribui ainda para a realização de ações sintaticamente guiadas de modo a identificar expressões algébricas equivalentes (English & Warren, 1999). A análise de sequências pictórica fomenta o estabelecimento de relações diretas entre o termo e a ordem e a compreensão da sua representação simbólica, bem como a identificação de relações entre os termos numéricos e a sua ordem. Com a realização da experiência, aumenta o número de formandos que estabelece uma generalização simbólica (Radford, 2006) de uma sequência pictórica. Disso é exemplo Alice que passa a ter uma interpretação adequada da diferença entre dois termos consecutivos e a usá-la para determinar um termo geral. Diana revela também uma melhor compreensão da utilização da simbologia algébrica e do significado da variável, determinando um termo geral com base no estabelecimento de relações entre a ordem e a constituição dos termos pictóricos.

A experiência de formação proporcionou aos formandos um contacto com o trabalho de sala de aula, focado no desenvolvimento do pensamento algébrico nos primeiros anos, permitindo analisar o papel do professor, nomeadamente na promoção da aprendizagem, pela tarefas que propõe e comunicação que estabelece, e na gestão e condução da aula e o papel do aluno, o trabalho que realiza, os seus conhecimentos, estratégias e dificuldades, representações que utiliza e conexões que estabelece. O estudo revela, então, o contributo da articulação entre conteúdo e pedagogia para o desenvolvimento do conhecimento dos formandos (Ponte & Chapman, 2008).

A natureza das tarefas tem um papel importante na experiência de formação, assim como a dinâmica da aula. Para o desenvolvimento do conhecimento dos formandos contribui a natureza exploratória do trabalho na experiência de formação, com o envolvimento dos formandos na realização das tarefas, com a partilha de estratégias que fomentam dado os seu carácter aberto, visando a exploração de relações, a generalização e a sua representação simbólica e a análise do ensino-aprendizagem nos primeiros anos, com momentos de trabalho diversificados, de trabalho autónomo e de discussão coletiva. Na tarefa 4, a partilha e discussão de análises de sequência pictóricas analisadas de diferentes modos permitem diferentes olhares sobre a constituição dos seus termos e a análise de expressões algébricas equivalentes. O facto das tarefas realizadas envolverem questões que visam o aprofundamento do conhecimento matemático para ensinar, articulando conteúdo e didática, permite aos formandos identificarem os aspetos do conhecimento matemático inerentes ao trabalho que os alunos podem desenvolver nos primeiros anos no âmbito do desenvolvimento do pensamento algébrico e identificar o papel do professor nesse desenvolvimento, conhecendo as suas capacidades e dificuldades. No caso particular do trabalho com sequências pictóricas é visível o reconhecimento por parte dos formandos do seu contributo para a generalização e o desenvolvimento da sua compreensão da expressão dessa generalização por parte dos alunos dos primeiros anos. A utilização do vídeo possibilitou uma análise conjunta da prática do professor e do trabalho dos alunos, das suas estratégias e do modo como as comunicam que de outro modo seria difícil de levar até à formação de um grupo alargado de formandos. Este trabalho contribui ainda para fomentar a reflexão dos formandos sobre as suas experiências em sala de aula, quer anteriores, quer proporcionadas pelo curso levando-os a considerar que as experiências de aprendizagem proporcionadas pelo trabalho em sala de aula e analisadas no vídeo, são significativamente diferente das experiências de que se recordam enquanto alunos do ensino básico. Deste modo, a experiência de formação contribui também para o desenvolvimento da sua identidade profissional, no que respeita à ideia sobre o ensino da Álgebra nos primeiros anos, sobre o professor/educador que quer ser e à sua capacidade de refletir sobre a sua experiência e entendimento sobre o próprio desenvolvimento (Ponte & Chapman, 2008). A articulação entre conteúdo e pedagogia na formação inicial revela-se possível e com contributos significativos para o desenvolvimento do conhecimento profissional e da identidade profissional dos formandos desde a licenciatura. No estudo da Álgebra este aspeto revela-se particularmente importante pelas mudanças nas orientações curriculares e da prática do professor dos primeiros anos que estão a ocorrer e pela diferente abordagem que os formandos experienciaram enquanto alunos mais focada no cálculo que no desenvolvimento do pensamento algébrico.

Referências

Albuquerque, C., Veloso, E., Rocha, I., Santos, L., Serrazina, L., & Nápoles, S. (2006). *A Matemática na formação inicial de professores.* Lisboa: APM e SPCE.

Beijaard, D., Meijer, P., & Verloop, N. (2004). Reconsidering research on teachers' professional identity, *Teaching and Teacher Education, 20,* 107–128.

Billings, E. (2008). Exploring generalization through pictorial growth patterns. In C. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (pp. 279-293). Reston, VA: The National Council of Teacher of Mathematics.

Blanton, M. (2008). *Algebra and the elementary classroom.* Portsmouth, NA: Heinemann.

Blanton, M., & Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 5-23). Berlin: Springer.

Brady, K. (2007). Imagined classrooms: Prospective primary teachers visualise their ideal mathematics classroom. In J. Watson & K. Beswick (Eds.), *Proceedings of the 30th Annual conference of MERGA* (vol 1, pp. 143-152). Tasmania, Australia: MERGA.

Branco, N., & Ponte, J. P. (2011). Situações de modelação na formação inicial de professores. In M. H. Martinho, R. A. Tomás Ferreira, I. Vale & J. P. Ponte (Orgs.), *Ensino e aprendizagem da Álgebra: Actas do EIEM 2011* (pp. 383-403). Póvoa do Varzim: Universidade do Porto (Digital)

Carraher, D., Martinez, M., & Schliemann, A. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education, 40,* 3-22.

Carraher, D., & Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (vol. 2, pp. 669-705). Charlotte, FN: Information Age.

Cooper, T. J., & Warren, E. (2011). Years 2 to 6 students' ability to generalize: Models, representations and theory for teaching and learning. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 187-214). Berlin: Springer.

English, L., & Warren, E. (1999). Introducing the variable through patterns exploration. In B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking, grades K-12* (pp. 141-145). Reston, VA: NCTM.

Faria, A., Silvestre, A., Sousa, H., & Cristo, I. (2009). *"Eu já descobri o segredo": Análise das estratégias de um aluno do 2.º ano numa tarefa sobre padrões e regularidades.* Comunicação apresentada em ProfMat 2009.

Kaput, J. (2008). What is Algebra? What is algebraic reasoning?. In J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J., & Blanton, M. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience. Part 1: Transforming task structures. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI: The future of the teaching and learning of algebra* (Vol. 1, pp. 344–351). Melbourne: University of Melbourne.

Kaput, J., Blanton, M., & Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 19-55). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator, 8*(1), 139-151.

Magiera, M., van den Kieboom, L., & Moyer, J. (2011). Relationships among features of preservice teachers' algebraic thinking. In Ubuz, B. (Ed.), *Proceedings of the PME35* (vol. 3, pp. 169-176). Ankara, Turkey: PME.

Mason, J., Graham A., & Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing thinking in algebra.* London: Sage.

ME (2007). *Programa de Matemática do ensino básico.* Lisboa: ME-DGIDC.

Mewborn, D. (2001). Teachers content knowledge, teacher education, and their effects on the preparation of elementary teachers in the United States. *Mathematics Education Research Journal, 3,* 28-36.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Oliveira, H., & Cyrino, M. (2011). A formação inicial de professores de Matemática em Portugal e no Brasil: Narrativas de vulnerabilidade e agência. *Interacções, 7*(18), 104-130.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 225-263). New York, NY: Routledge.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of PME-NA.* (Vol. 1, pp. 2-21). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Radford, L. (2011). Grade 2 students' no-symbolic algebraic thinking. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 303-320). Berlin: Springer.

Silvestre, A., Faria, A., Sousa, H., Cristo, I., Santos, I., Molarinho, M. J., Veladas, M. (2010). Sequências pictóricas: estratégias de generalização dos alunos de 2.º, 3.º e 5.º anos. In GTI (Org.), *O professor e o programa de Matemática* (pp. 89-119). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching Experiment Methodology: Underlying Principles and Essential Elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

FORMAÇÃO

17. O estudo de aula como processo de desenvolvimento profissional

por Marisa Quaresma, João Pedro da Ponte,
Mónica Baptista, Joana Mata-Pereira

17. O estudo de aula como processo de desenvolvimento profissional

Marisa Quaresma
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
mq@campus.ul.pt

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ulisboa.pt

Mónica Baptista
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
mbaptista@ie.ulisboa.pt

Joana Mata-Pereira
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
joanamatapereira@campus.ul.pt

• **Resumo:** Este capítulo tem por base um estudo de aula, um processo de formação e desenvolvimento profissional de professores de cunho colaborativo e centrado na prática letiva. Analisamos as aprendizagens dos professores sobre as dificuldades dos alunos e os processos de raciocínio (generalização e justificação) bem como o modo de os promover na sala de aula. A metodologia de investigação é qualitativa, com dados recolhidos através de um diário de bordo e gravação áudio das sessões. Os resultados mostram que os professores desenvolveram a sua capacidade de analisar dificuldades dos alunos e começaram a valorizar aspetos interessantes do trabalho destes. Os professores mostraram também começar a compreender como se pode analisar e promover o raciocínio dos alunos, nomeadamente durante as discussões coletivas.

• **Palavras-Chave:** Desenvolvimento profissional; Formação de professores; Estudo de aula; Números racionais.

Introdução

O estudo de aula é um processo de desenvolvimento profissional de professores de cunho colaborativo e centrado na prática letiva. Teve a sua origem no Japão, difundiu-se através dos EUA (Stigler & Hiebert, 1999) e, nos últimos anos, tem vindo a ser amplamente usado em muitos países. Uma marca fundamental dos estudos de aula é a sua natureza reflexiva e colaborativa (Fernández, Cannon, & Chokshi, 2003; Perry & Lewis, 2009). Nesta atividade formativa, os professores trabalham em conjunto identificando dificuldades dos alunos, documentando-se sobre alternativas curriculares e preparando o que esperam vir a ser uma aula bem sucedida. Observam, depois, essa aula e analisam em que medida atinge os objetivos pretendidos e as dificuldades que se manifestam. Trata-se, portanto, de um processo muito próximo de uma pequena investigação sobre a própria prática profissional, realizado em contexto colaborativo, e que é usualmente informado pelas orientações curriculares e pelos resultados de investigações relativas a um dado tema dos programas escolares.

Um estudo de aula pode proporcionar oportunidades para os professores participantes refletirem sobre as possibilidades de uma abordagem exploratória no ensino da Matemática. Esta abordagem procura levar os alunos a enfrentarem situações para as quais não possuem um método imediato de resolução, permitindo-lhes construir ou aprofundar a sua compreensão de conceitos, representações, procedimentos e outras ideias matemáticas. Na abordagem exploratória, os alunos são chamados a desempenhar um papel ativo na interpretação das questões propostas, na representação da informação dada e na conceção e concretização de estratégias de resolução que devem depois saber apresentar e justificar. Assim, a seleção das tarefas, a identificação dos aspetos do raciocínio a valorizar e o tipo de comunicação a desenvolver na sala de aula são desafios que se colocam na prática profissional dos professores que procuram concretizar esta abordagem e que podem ser objeto de reflexão num estudo de aula. Esta comunicação centra-se nas aprendizagens que os professores fazem num estudo de aula sobre as dificuldades dos alunos e os processos de raciocínio (generalização e justificação), bem como o modo de promover a aprendizagem e o raciocínio dos alunos na sala de aula durante a realização de discussões coletivas.

Aprendizagens dos professores em estudos de aula

O desenvolvimento profissional do professor refere-se aos processos de aprendizagem relacionadas com o exercício da docência, envolve múltiplas etapas e, de algum modo, está sempre incompleto (Day, 2001; Ponte, 1998). Este processo decorre ao longo da vida profissional do professor e pressupõe investimento da sua parte em questões das mais diversas, incluindo as que se prendem diretamente com o ensino das disciplinas que lhe cabe ensinar. Marcelo (2009) refere-se ao desenvolvimento profissional do professor como "um processo individual e coletivo que se deve concretizar no local de trabalho do docente: a escola; e que contribui para o desenvolvimento das suas competências profissionais, através de experiências de índole diferente, tanto formais como informais" (p. 7).

Atendendo às suas fortes potencialidades como processo de desenvolvimento profissional de professores, as experiências de estudo de aula têm-se difundido em vários países, como o Brasil, EUA, Indonésia, Irlanda, Israel e Reino Unido, sofrendo, naturalmente, várias adaptações. Um exemplo é o trabalho desenvolvido por Perry e Lewis (2009) que apresenta um estudo de caso realizado num distrito dos EUA, onde desenvolve estudos de aula há mais de quatro anos e meio, contando com a participação de 63 professores. No final dos quatro anos, os participantes concluíram que os estudos de aula favoreciam (i) o uso de tarefas que promovem o raciocínio dos alunos; (ii) a antecipação de dificuldades dos alunos; (iii) a discussão e comparação de respostas dadas pelos alunos às tarefas, incluindo análise de respostas incorretas; e (iv) e o uso de recolha de dados dos alunos para tomar decisões. Num outro estudo realizado nos EUA, Puchner e Taylor (2006) referem que a realização de estudos de aula levou os professores a reconhecerem que depende de si o envolvimento dos alunos na aula e a melhoraria da sua aprendizagem.

Muitos estudos têm sido feitos noutros países. Por exemplo, na Indonésia, Saito, Harun, Kubokic e Tachibanad (2006) destacam a importância da colaboração, durante a realização de estudos de aula, entre professores e equipas do ensino superior. Indicam que, como resultado desta colaboração, os planos de aula dos professores passaram a ter em consideração os resultados da investigação e as aulas passaram a assumir um cariz mais exploratório, com a realização de discussão e trabalho em pequeno grupo. A partir desta experiência, os autores concluem que é possível mudar as tarefas que os professores propõem na sala de aula, a partir de estudos de aula colaborativos. Outra investigação realizada em Israel de Robinson e Leikin (2012) centra-se numa professora que participou em três ciclos de estudo de aula, com mais quatro professores de Matemática. Esta investigação teve como foco duas aulas lecionadas pela professora, durante um dos ciclos de estudo de aula. Comparando as duas aulas lecionadas pela professora, as autoras consideram que a participação num ciclo de estudo de aula levou a importantes alterações na sala de aula, sobretudo na discussão e nas questões introduzidas pela professora. Consideram ainda que as fases de reflexão e replaneamento deram um forte contributo para a alteração das práticas da professora.

Estudos de aula realizados em Portugal (Baptista, Ponte, Costa, Velez, & Belchior, 2012; Ponte, Baptista, Velez, & Costa, 2012), com professores do 3.º e do 7.º ano, mostram que os professores podem realizar aprendizagens profissionais relativamente à seleção de tarefas a propor, à atenção a dar aos processos de raciocínio dos alunos e às suas dificuldades, bem como à comunicação na sala de aula, em especial à condução de discussões coletivas. Além disso, os resultados evidenciam possibilidades formativas dos estudos de aula no que se refere à sua visão da colaboração e reflexão profissional. O trabalho realizado mostra também que as aprendizagens que os professores realizam se relacionam estreitamente com a abordagem seguida na respetiva realização, nomeadamente durante fase de preparação.

Metodologia de investigação

Esta investigação é de natureza qualitativa com cunho interpretativo (Erickson, 1986), dado que se pretende conhecer os significados que os participantes de um processo formativo atribuem à experiência vivida. Resulta da realização de um estudo de aula em que os autores desta comunicação estão envolvidos no decorrer deste ano letivo, num agrupamento de escolas de Lisboa. Este estudo de aula tem origem num projeto desenvolvido pelo próprio agrupamento e para o qual a respetiva direção solicitou a colaboração do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa (IE) com o intuito de promover a formação dos professores de Matemática. A nossa proposta de realização de diversos estudos de aula foi prontamente aceite, tendo sido definido que um desses estudos seria realizado com professores do 5.º e do 6.º ano do agrupamento (Inês, Francisca, Luísa, Maria e Tânia). As professoras participantes foram selecionadas pela direção do agrupamento por lecionarem a disciplina de Matemática no 2.º ciclo, que também designou uma delas (Maria) como coordenadora do grupo. Em reunião prévia decidiu-se incidir sobre um tópico do 5.º ano, tendo em conta que a realização do estudo de aula, num ano em que está ser aplicado o programa de 2013, permitiria ajudar os professores a perceber melhor como lidar com este programa, em relação ao qual manifestavam bastantes receios. Assim, o estudo de aula envolve cinco professoras do 2.º ciclo, três das quais lecionam turmas de 5.º ano, sendo a dinamização das sessões habitualmente realizada por dois membros da equipa do IE (Joana e Marisa).

Tendo em vista ilustrar o trabalho realizado no estudo de aula e as aprendizagens dos professores, decorrentes desta atividade formativa, no que respeita às dificuldades dos alunos e aos seus processos de raciocínio (generalizações e justificações), bem como ao modo de os promover na sala de aula durante a realização de discussões coletivas, analisamos as sessões 2, 4 e 5, três das oito sessões previstas (Tabela 1). As sessões têm uma periodicidade aproximadamente quinzenal. A sessão 1 teve por objetivo conhecer o estudo de aula, as sessões 2 a 6 aprofundar o conhecimento sobre um tópico e preparar uma aula sobre esse tópico, a sessão 7 observar uma aula, e a sessão 8 refletir sobre a aula observada e sobre todo o processo do estudo de aula. Os dados aqui analisados foram recolhidos por observação participante e recolha documental através da elaboração de um diário de bordo (realizado por um membro da equipa) e de gravação áudio das sessões.

Momentos de trabalho num estudo de aula

Identificação e análise de dificuldades dos alunos na aprendizagem dos racionais

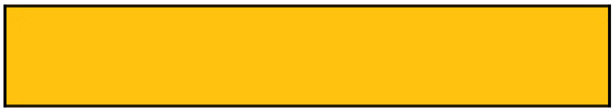
Na sessão 2, a resolução de diversas tarefas matemáticas e a discussão das dificuldades dos alunos proporcionou uma viva discussão e envolveu bastante as professoras. Na verdade, este foi o ponto da sessão que demorou mais tempo e permitiu às professoras refletir em profundidade sobre as dificuldades dos alunos no trabalho com os números racionais. Maria assumiu um papel de coordenadora e impulsionadora do grupo, tentando levantar questões e convidar as restantes colegas a participar na discussão. Isso foi notório no caso da tarefa indicada na figura 1, em que começou por perguntar:

> **Maria:** Como é que abordavam isto? Isto é $\frac{3}{4}$ e agora como é que lhes pediam $\frac{1}{2}$? Como é que eles vão...?

Tabela 1 – A primeiras sessões do Estudo de Aula (marcadas a cinzento as sessões aqui analisadas)

Sessão	Pontos tratados	Propostas de trabalho para os professores
1	**a)** Apresentação do estudo de aula às professoras participantes; **b)** Planeamento e calendarização das sessões; **c)** Decisão do tópico específico a trabalhar durante o estudo de aula – Números racionais não negativos no 5.º ano.	
2	Reconhecimento geral do tópico.	**a)** Análise de documentos curriculares – programa, metas e planificação da escola; **b)** Resolução de tarefas sobre o tópico; **c)** Identificação de dificuldades dos alunos no tópico; **d)** Discussão de um artigo de investigação sobre o ensino-aprendizagem dos números racionais – discussão sobre os vários significados dos números racionais; **e)** Decisão sobre o conteúdo específico a trabalhar (comparação e ordenação de números racionais).
3	Elaboração de um diagnóstico dos conhecimentos dos alunos.	**a)** Definição dos objetivos para o diagnóstico – análise do programa de 2007 e do programa e metas de 2013; **b)** Elaboração e seleção de tarefas para o diagnóstico; **c)** Definição da forma de aplicação do diagnóstico.
4	**1)** Análise dos resultados do diagnóstico; **2)** Reflexão sobre a natureza das tarefas; **3)** Reflexão sobre o raciocínio dos alunos.	**a)** Partilha entre os professores dos resultados dos diagnósticos realizados em cada turma – cada professor indica: o que mais o surpreendeu na resolução dos alunos; as maiores dificuldades dos alunos e aquilo que os alunos já sabem e que pode ser usado como base para desenvolver novas aprendizagens; **b)** Análise de um conjunto de tarefas – identificação da natureza das tarefas, em que momentos podiam ser aplicadas e quais as suas vantagens; **c)** Análise de resoluções de alunos para identificar generalizações e justificações.
5	**1)** Conclusão da reflexão sobre o raciocínio; **2)** Segmentos da aula – aula em 3 fases; **3)** Seleção da tarefa a aplicar na aula observada; **4)** Reflexão sobre a observação da aula.	**a)** Definição de casos possíveis de generalização na comparação e ordenação de números racionais; **b)** Análise de episódios de sala de aula e reflexão sobre o papel do professor na introdução da tarefa, no trabalho autónomo dos alunos e na discussão coletiva; **c)** Análise das propostas de tarefas apresentadas pelos professores.

A figura seguinte representa $\frac{3}{4}$ de uma tira de papel.



Representa agora, $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}$ e $\frac{3}{2}$ dessa tira.

Explica o teu raciocínio.

Figura 1 – Tarefa analisada pelas professoras na sessão 2.

Notou-se que era uma tarefa que as professoras não costumavam propor aos alunos e que tiveram que pensar elas próprias como resolver:

Tânia: Primeiro tentar acrescentar...

Inês: Divide-se esta parte...

Marisa: Primeiro eles perceberem o que é que é então a...

Professoras: [ao mesmo tempo] A unidade!

Tânia: Que isto não é uma unidade.

As professoras reconheceram que esta tarefa é difícil, requerendo aos alunos uma resolução com vários passos, o primeiro dos quais é a reconstrução da unidade. Depois de resolverem a tarefa, imaginando o que poderia ser uma resolução dos seus alunos, discutiram as suas possíveis dificuldades, indicando o que consideravam ser o erro mais comum:

Maria: Dividem logo em quatro.

Professoras: Pois, exatamente!

Tânia: E aí é porque ainda não sabem... Eles ainda não sabem a noção de... eles não têm a noção da fração como parte do todo.

Joana: É que muitas vezes eles trabalham ao contrário, ou seja, eles têm o todo e é para indicar uma parte, agora terem uma parte...

Marisa: E indicar o todo é um salto conceptual importante.

Luísa: Pois, pois.

Maria: Muito grande!

Maria referiu que os alunos teriam dificuldade em perceber que a tira apresentada não é a unidade e que, por isso, iriam começar por dividi-la em quatro partes iguais ao invés de a dividir em três e acrescentar $\frac{1}{4}$. Por sua vez, Tânia interpretou a sugestão de Maria à luz dos significados que as frações podem ter, referindo que os alunos ainda não têm consolidada a noção de fração no significado parte-todo e, por isso, têm grande dificuldade em reconstruir a unidade.

No final da sessão, as professoras conseguiram fazer um apanhado bastante completo das dificuldades na aprendizagem deste tópico, destacando: (1) marcação na reta numérica de frações com denominador diferente do número de divisões da reta, (2) compreensão de uma fração como representando um quociente, (3) compreensão do conceito de unidade – construção do todo e das partes, e (4) compreensão da relação entre uma parte e uma quantidade. Tendo por base este conjunto de dificuldades identificadas durante a resolução das tarefas, as professoras decidiram que o conteúdo específico da aula a observar seria a comparação e ordenação de números racionais, precisamente por ser um dos aspetos que mais dificuldades levanta aos alunos e por constituir um tópico que serve de base à compreensão de número racional.

Análise do raciocínio dos alunos: Identificação de justificações e generalizações

Na sessão 4 foram discutidos processos de raciocínio e analisados alguns exemplos de resoluções de alunos. A equipa do IE começou por fazer uma breve apresentação dos conceitos de generalização e justificação, dos quais as professoras se apropriaram com facilidade. Ao observar as resoluções dos alunos, Tânia e Inês identificam com facilidade generalizações e justificações. Assim, no caso da figura 2, Tânia identifica rapidamente que o aluno usou um contraexemplo para refutar uma afirmação e, por isso, está a fazer uma justificação:

Tânia: É mais uma justificação, ele vai arranjar um exemplo.

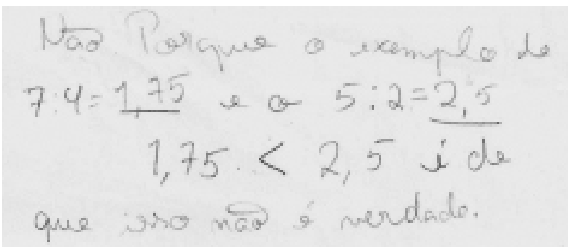


Figura 2 – Justificação por contraexemplo.

Ao analisar a resolução apresentada na figura 3 Inês identifica a justificação na alínea a):

Inês: Isto aqui é uma justificação.

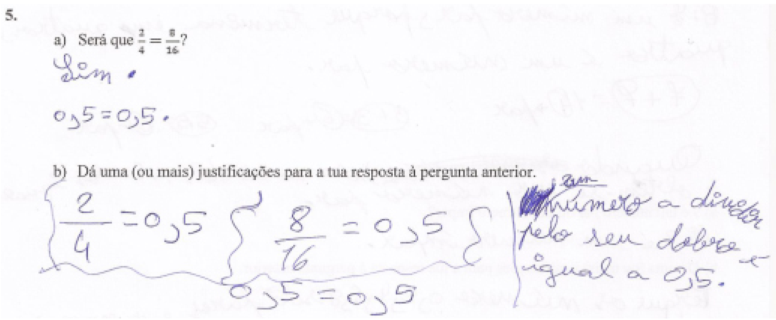


Figura 3 – Justificação por mudança de representação e generalização.

Inês reconhece que o aluno usou uma justificação válida ao mudar para outra representação para verificar a igualdade. Rapidamente Tânia passa à alínea b) e identifica a generalização:

Tânia: Mas depois na outra já têm aqui uma generalizaçãozinha.

Joana: Na outra tem uma generalizaçãozinha, sim. Que não é "zinha".

Tânia: Já não é para todos.

Joana: Exatamente.

Perante esta descoberta e a forma como Tânia a enuncia, a equipa do IE decide valorizar, não só a sua descoberta, mas também o trabalho dos alunos para salientar a dimensão deste trabalho e a importância de o analisarem nas suas salas de aula.

De seguida, Marisa desafia as professoras a refletirem sobre generalizações que se podem esperar na comparação e ordenação de números racionais:

Luísa: Por acaso houve uma tarefa que eu encontrei num livro que tinha uma generalização. Eles ao longo das várias questões que iam fazendo depois encontravam a generalização da comparação.

Marisa: A generalização da...?

Luísa: Por exemplo, entre frações com o mesmo denominador em que aquela que representa o número maior é aquela que tem maior

> numerador. Portanto era uma questão em que eles começavam por ter várias frações…
>
> **Marisa:** Então uma das coisas que podemos fazer com que eles generalizem é a regra para…
>
> **Tânia:** Para comparar frações com denominadores iguais e com numeradores iguais já são logo duas das que eles têm, e depois as frações unitárias eles também (Luísa: dão)
>
> . . .
>
> **Luísa:** Em que eles vão observando uma situação que se vai passando sempre e eles começam a perceber que aquilo é assim para todos os casos, não é?

Perante este desafio, Luísa recordou uma tarefa que tinha encontrado quando pesquisava tarefas para a aula que viria a ser observada, onde se pretendia que os alunos concluíssem a regra para a comparação de frações com o mesmo denominador. Tânia interveio de seguida para acrescentar que também é possível generalizar a regra para comparar frações com o mesmo numerador. Por fim, Luísa, usando a sua própria terminologia, reconheceu que se trata de uma generalização de carater indutivo ao referir que os alunos observam vários casos particulares para fazerem a generalização.

Identificação de aspetos positivos nas resoluções dos alunos

Na sessão 3 foi elaborada uma tarefa de diagnóstico a aplicar pelas professoras a todos os alunos do 5.º ano. Assim, uma das propostas de trabalho da sessão 4 foi analisar os resultados desse diagnóstico. Procurando contrariar a tendência dos professores de se centrarem apenas nas dificuldades dos alunos, a equipa do IE começou por pedir às professoras que indicassem situações em que tinham ficado positivamente surpreendidas com o desempenho destes. Um dos membros da equipa do IE – Marisa – tinha ido assistir à aplicação do diagnóstico nas duas turmas de Maria e feito a análise dos resultados e, por isso, ofereceu-se para iniciar a discussão com a sua própria experiência:

> Achei muito interessante. Reconhecem as várias representações dos números racionais… surpreendeu-me que eles também

> conseguissem fazer muito bem a parte do 1/10. Não sei... Possivelmente já foi trabalhado . . . Como tinham a imagem iam perceber que era um pintado em 10 no total mas, depois, a conversão para decimal e para percentagem é que fiquei surpreendida que conseguissem fazer porque os outros são frações de referência que eles às vezes, mesmo sem perceberem, estão habituados e fazem. Portanto, 1/4 é 0,25. Eles às vezes já têm esta coisa decorada. Mas no 1/10 era um bocadinho diferente e achei bastante interessante. Então agora falem-me dos vossos. Francisca?

Em resposta ao desafio lançado por Marisa, Francisca começa por referir um aspeto positivo, mas salienta logo de seguida diversas dificuldades no trabalho dos alunos:

> Em relação ao 5.º C os meninos pintaram com facilidade as frações, mas a representação em fração muitas vezes não a fizeram. Só leem metade, pronto. Depois, nesta da ligação [questão 3], onde eles tiveram mais dificuldade foi exatamente no 1/4 e no 1/8. Foi muito difícil para eles.

Desta forma, Marisa fez uma nova intervenção no sentido de reorientar a discussão para as surpresas positivas, o que leva Francisca a referir os aspetos que considerou muito significativos do trabalho dos alunos:

> **Marisa:** Se calhar fazíamos as surpresas primeiro e depois as dificuldades.
> **Francisca:** Surpresa, surpresa, foi no exercício 4, eles conseguiram facilmente chegar a 1/4 do chocolate. Eu achei giríssimo, porque já sabem fazer a conta [4/4 – 3/4 = 1/4]. Não estava à espera.

Tânia foi a última professora a apresentar as surpresas que teve no desempenho dos alunos. Teve mais facilidade em centrar-se apenas nestes aspetos e fez ainda uma interessante reflexão sobre as alterações introduzidas pelo programa de Matemática de 2007 e as consequências que isso trouxe para a prática dos professores:

> E é o facto de eles já representarem as frações equivalentes. Por exemplo, antigamente [antes do programa de 2007], quando eles

> chegavam aqui nós tínhamos de começar por toda esta fase, porque eles sabiam o que era 1/4, 1/2, mas não passavam daí. Não, eles agora já sabem o que é 3/8, 3/5, portanto...esta primeira fase eu acho que temos de passar isto à frente porque temos de dar como adquirido, porque isto vê-se que já foi trabalhado.

Nesta intervenção Tânia fez mesmo sugestões para o trabalho a realizar pelos professores pelo facto dos alunos já conhecerem frações equivalentes.

Verificamos que o discurso das professoras sobre os alunos tende a centrar-se de modo recorrente sobretudo nas suas dificuldades. No entanto, percebe-se como, com algum apoio, as professoras começam a identificar elementos interessantes do trabalho dos alunos.

Preparação da discussão coletiva

Um dos momentos mais importantes na sala de aula é a discussão coletiva das tarefas e, por isso, é importante que seja bem planeado. Com o objetivo de promover uma reflexão sobre este momento e de discutir elementos a ter em conta na preparação da aula a observar, na sessão 5, a equipa do IE desafiou as professoras a analisarem algumas resoluções de alunos e a sugerirem, de forma justificada, uma ordem pela qual podiam ser discutidas coletivamente. Após uma breve observação, Inês salienta o aspeto "atrativo" de uma das resoluções: "A figura A (figura 4) é a que está mais atrativa e, depois, a legenda delas é parecida em todas..." Por sua vez, Luísa refere que escolhia a mesma resolução para começar, mas justifica a sua escolha com a existência de erros na resolução: "Eu acho que aquela que apresenta mais erros seria a figura A, e essa é aquela que eu escolhia . . ., não sei, digo eu". Francisca manifesta uma opinião idêntica. Depois de ouvirem estes argumentos, Inês e Tânia mudam de opinião e escolhem a figura B (figura 5) porque era a que tinha menos erros.

Depois das professoras terem escolhido as resoluções por onde começavam a discussão coletiva e de terem dado alguns argumentos, Marisa desafiou-as a discutirem as escolhas feitas, uma vez que tinham fundamentos completamente opostos:

Figura 4 – Resoluções dos alunos ("figura A") escolhida inicialmente por várias professoras.

Figura 5 – Resoluções dos alunos ("figura B") escolhida por Inês e Tânia.

> **Tânia:** Ah! Porque é que escolheria o 3? Para já escolheríamos o 3 porque é o que está mais correto, matematicamente é o que está mais correto.
> **Inês:** Portanto é o que está melhor a nível de apresentação e a nível da escrita também.

Por sua vez, Francisca e Luísa alertaram para a necessidade de dar atenção às resoluções que têm erros. Diz Francisca:

> Mas depois também se tem de chamar à atenção destas. Pegar pelos erros, na minha perspetiva, não é dizer que isto está errado, não é inferiorizar as crianças, não é nada disso. É tentar ver os erros e tentar esclarecer o maior número de alunos para aqueles erros, porque não são só estes que vão fazer este tipo de leitura, há muitos mais na turma que vão fazer exatamente o mesmo tipo de coisa. Se eu pegar logo no que está certo quase que padronizo aquilo tudo e não tiro a ideia, a conceção, que lá está por detrás da tal metade, não é? Metade, metade, metade aparece sempre a palavra metade em vez de aparecer parte. E nesse sentido é tentar melhorar, não é dizer que aquilo está errado…

Na sequência, Tânia mostrou compreender os argumentos dados pelas colegas e destacou a importância das discussões coletivas. Referiu que também se podem apresentar várias resoluções, incluindo as totalmente corretas sem as avaliar. Desta forma, dá espaço aos alunos para avaliarem as resoluções dos colegas e assim proporcionar momentos de discussão entre os próprios alunos, onde não tem de ser o professor a autoridade:

> Colocamos isso no quadro (. . . faço isso muitas vezes) e se não dissermos nem que está correto, ou está, e perguntarmos quem é que tem igual e quem é que fez de maneira diferente então vamos ver… Então agora estamos nas percentagens, há imensas formas de eles fazerem com a proporcionalidade e chegam a um valor e eles começam: “Ah! Mas eu não fiz assim. Então como é que fizeste?” Então vamos dividir o quadro e vamos pôr as maneiras de cada aluno, de cada aluno não, duas ou três, depende muito.

As professoras envolvem-se de uma forma muito ativa nesta discussão sobre a forma mais produtiva de discutir o trabalho dos alunos. Parecem convergir no reconhecimento do valor de haver uma verdadeira discussão do trabalho dos alunos e não apenas uma “correção” através de um exemplo. Luísa e Francisca referem que essa discussão deve ter origem nos erros dos alunos enquanto Tânia indica que essa discussão também pode surgir da necessidade de comparar várias resoluções. No final, o grupo aceitou as duas possibilidades, assumindo o interesse da discussão das várias resoluções e de os alunos compreenderem porque é que uma dada resolução está correta ou errada.

A concluir

Os momentos da formação aqui analisados indiciam diversas aprendizagens dos professores em vários momentos do estudo de aula. Assim, os professores dão indicações de ter desenvolvido a sua capacidade de analisar dificuldades dos alunos e perceberam a necessidade de propor tarefas que ponham à prova a compreensão de aspetos importantes da noção de número racional, como a reconstrução do todo a partir de uma parte. Nas primeiras sessões, o seu discurso sobre as resoluções dos alunos centrava se essencialmente sobre as suas dificuldades, mas a partir de certa altura mostraram ser capazes de identificar e valorizar igualmente aspetos interessantes do trabalho dos alunos. Perceberam, também, como se pode analisar o raciocínio dos alunos, prestando especial atenção à realização de generalizações e justificações, e como se podem propor tarefas que criem oportunidade para a realização destes processos. Mostraram, ainda, começar a perceber o interesse de analisar coletivamente soluções erradas e como se pode tirar partido da comparação de diferentes estratégias de resolução usadas pelos alunos. Estes resultados estão na linha do que foi observado em estudos anteriores (e.g., Baptista et al., 2012; Perry & Lewis, 2009; Ponte et al., 2012) e sugerem que este processo de desenvolvimento profissional é particularmente adequado para promover a aprendizagem dos professores sobre os processos de pensamento dos seus alunos.

O estudo de aula, permitindo combinar momentos de trabalho estruturado e trabalho exploratório dos professores, permitindo conjugar o conhecimento proveniente da investigação com o conhecimento experiencial dos professores, mostra constituir um promissor contexto para o desenvolvimento profissional dos professores sobre as questões relativas à aprendizagem dos alunos, e, indiretamente, também as questões relativas ao seu ensino. No entanto, a sua concretização requer um conjunto de condições bastante exigente, seja em contexto de formação contínua (Puchner & Taylor, 2006; Stigler & Hiebert, 1999), seja em contexto de formação inicial (Burroughs & Luebeck, 2010; Fernández, 2005). O conhecimento destas condições e da sua relação com os processos de trabalho usados nos estudos de aula e com as aprendizagens realizadas pelos professores constituem, portanto, matérias a aprofundar em futuras investigações.

Referências

Baptista, M., Ponte, J. P., Costa, E., Velez, I., & Belchior, M. (2012). Lesson study na formação de professores do 1.º ciclo do ensino básico. In *Actas do Seminário de Investigação em Educação Matemática XXIII* (pp. 11-30). Coimbra: APM.

Burroughs, E., & Luebeck, J. (2010). Pre-service teachers in mathematics lesson study. *The Montana Mathematics Enthusiast, 7*(2/3), 391-400.

Day, C. (2001). *Desenvolvimento profissional de professores: Os desafios da aprendizagem permanente* (edição original em inglês, 1999). Porto: Porto Editora.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (pp. 119-161). New York, NY: Macmillan.

Fernández, M. L. (2005). Exploring "lesson study" in teacher preparation. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th PME Conference* (Vol. 2, pp. 305-310). Melbourne.

Fernández, C., Cannon, J., & Chokshi, S. (2003). A US-Japan lesson study collaboration reveals critical lenses for examining practice. *Teaching and Teacher Education, 19,* 171-185.

Marcelo, C. (2009). Desenvolvimento profissional docente: Passado e futuro. *Sísifo: Revista de Ciências da Educação, 8,* 7-22.

Perry, R., & Lewis, C. (2009). What is successful adaptation of lesson study in the US? *Journal Educational Change, 10,* 365-391.

Ponte, J. P. (1998). Da formação ao desenvolvimento profissional. In *Actas do ProfMat98* (pp. 27-44). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Baptista, M., Velez, I., & Costa, E. (2012). Aprendizagens profissionais dos professores de Matemática através dos estudos de aula. *Pesquisas em Formação de Professores na Educação Matemática, 5,* 7-24.

Puchner, L., & Taylor, A. (2006). Lesson study, collaboration and teacher efficacy: Stories from two school-based math lesson groups. *Teacher and Teaching Education, 22,* 922-934.

Robinson, N., & Leikin, R. (2012). One teacher, two lessons: The lesson study process. *International Journal of Science and Mathematics Education, 10,* 139-161.

Saito, E., Harun, I., Kubokic, I., & Tachibanad, H. (2006). Indonesian lesson study in practice: Case study of Indonesian mathematics and science teacher education project. *Journal of In-service Education, 32*(2), 171–184.

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom.* New York, NY: Free Press.

FORMAÇÃO

18. Casos multimédia na formação de professores que ensinam Matemática

por Hélia Oliveira, Ana P. Canavarro, Luís Menezes

18. Casos multimédia na formação de professores que ensinam Matemática

Hélia Oliveira
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
hmoliveira@ie.ulisboa.pt

Ana Paula Canavarro
Universidade de Évora
e UIDEF, Instituto de Educação,
Universidade de Lisboa
apc@uevora.pt

Luís Menezes
Escola Superior de Educação de Viseu e CI&DETS
menezes@esev.ipv.pt

• **Resumo:** Este capítulo apresenta um dispositivo de formação assente na utilização de casos multimédia com professores e futuros professores que ensinam Matemática nos diversos níveis e ciclos de ensino, que foi desenvolvido no âmbito do projeto P3M. Procura discutir o conceito de recurso multimédia que foi adotado e destaca as linhas orientadoras que presidiram à sua conceção e as opções que foram tomadas na sua construção. Para explicitar a natureza dos casos multimédia construídos, apresenta-se um deles, ilustrando o seu conteúdo com comentários e produções escritas de um grupo de futuros professores que o analisou. O capítulo procura também enquadrar as experiências de formação com os casos multimédia, que se encontram descritas nos capítulos seguintes deste livro, e discutir as potencialidades que os casos revelam assim como as questões que se levantaram quanto à sua utilização em diferentes contextos formativos.

• **Palavras-Chave:** Casos multimédia, formação de professores, ensino exploratório da Matemática.

Introdução

Uma das vertentes do projeto P3M consistiu na construção de casos multimédia para a formação em contextos diversificados, incluindo a formação inicial e contínua de professores, assente numa perspetiva de desenvolvimento de conhecimento didático sobre o ensino exploratório (Canavarro, Oliveira, & Menezes, 2014). Reconhecendo o desafio da introdução de metodologias de trabalho inovadoras na sala de aula, como é o ensino exploratório, os casos multimédia pretendem retratar práticas de professores experientes que partem da exploração de tarefas matemáticas desafiantes e desenrolam a aula valorizando a atividade dos alunos em torno da tarefa, conferindo um papel de destaque à comunicação matemática em sala de aula, em particular, criando momentos de discussão e sistematização das aprendizagens realizadas pelos alunos.

Os casos multimédia concebidos incidem nos diferentes ciclos do ensino básico e o ensino secundário e congregam uma variedade de recursos, em que os vídeos de sala de aula representam uma dimensão importante, complementada com artefactos ligados tanto à preparação da aula, como à reflexão do professor após a aula. Designar estes recursos por "casos" remete-nos para a sua particularidade – um caso de uma aula de ensino exploratório da Matemática – mas simultaneamente conduz, através da sua análise, à representação de ideias mais gerais sobre este tipo de ensino, permitindo múltiplas leituras e interpretações (McGraw, Lynch, Koc, Budak, & Brown, 2007).

Este capítulo enquadra o trabalho que foi feito no projeto em torno da elaboração e uso de casos multimédia na formação inicial e contínua de professores, estando organizado em cinco partes. Após esta introdução, fazemos um breve enquadramento relativo ao uso de recursos multimédia na formação de professores, em particular do vídeo. De seguida apresentamos as linhas orientadoras e o processo de construção dos casos multimédia. Exemplificamos depois a estrutura e conteúdo dos casos multimédia, com o caso referente ao 3.º ciclo. Por último, ilustramos e discutimos as principais ideias que sustentam a formação inicial e contínua de professores de Matemática recorrendo aos casos multimédia do projeto P3M, e colocamos questões para aprofundamento.

Recursos multimédia na formação de professores

Nesta secção apresentamos um breve estado da arte relativo à investigação sobre o uso de recursos multimédia na formação de professores, começando por discutir as suas potencialidades enquanto representação privilegiada da aula e concluímos com a discussão do seu uso na formação de professores.

Importa começar por referir que assumimos os recursos multimédia como recursos em que os vídeos são uma componente essencial, não obstante possam existir outros elementos que os constituam – como artefactos da aula, produções matemáticas dos alunos, etc. A proliferação do uso dos vídeos na formação de professores é um facto nos últimos anos, resultante do acesso muito facilitado a dispositivos simples de uso corrente que captam som e imagem com qualidade suficiente, sem complicações logísticas e em tempo real – e dos quais os professores, os formadores e as instituições de formação dispõem (Brunvand, 2010). Contudo, o uso dos vídeos na formação ultrapassa o deslumbramento pela novidade tecnológica; a possibilidade de aceder a imagem e som da aula tal como ela é, permite proporcionar uma representação real de um objeto multifacetado e complexo, ampliando a oportunidade de o conhecer e de o estudar.

Na realidade, os vídeos proporcionam de forma única descrições da sala de aula. Quando comparados com casos em suporte escrito, reconhece-se-lhes facilmente a possibilidade de fornecerem um quadro mais completo, rico e realista da sala de aula, a partir do qual se tem acesso às vozes, à linguagem corporal e ao ambiente da aula (Alsawaie & Alghazo, 2010; Koc, Peker, & Osmanoglu, 2009; McGraw et al., 2007). Pela grande riqueza de elementos que conseguem capturar, os vídeos de sala de aula permitem uma reflexão sustentada sobre aspetos específicos da aula. Um caso particularmente interessante diz respeito às interações diversas que ocorrem em sala de aula, entre professor e alunos e entre alunos (Koc, Peker, & Osmanoglu, 2009; van Es & Sherin, 2008).

A possibilidade de aceder a esta representação da aula e, por conseguinte, da prática do professor que a conduz, é tanto mais relevante quanto mais complexa é a prática de ensino. Tal é o caso das práticas de ensino exploratório da Matemática (Canavarro, Oliveira, & Menezes, 2014). O contacto com estas práticas de ensino nem sempre é fácil, oportuno ou mesmo possível no dia-a-dia dos professores ou futuros professores. O recurso a vídeos que retratem aulas de ensino exploratório permite tornar acessível esta prática de ensino, dando a conhecer a realidade de salas de aula que a adotam numa pluralidade de aspetos, nomeadamente no que diz respeito aos aspetos estruturais e organizacionais da aula atendidos pelos professores (Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008), ou a aspetos decorrentes da dinâmica da aula, como a experiência matemática desenvolvida pelos alunos ou a comunicação matemática em que se envolvem (Menezes, Guerreiro, Martinho, & Tomás Ferreira, 2014).

O recurso aos vídeos tem vindo a ser adotado, nos anos recentes, em contextos variados, existindo um corpo crescente de investigação sobre as implicações da sua utilização na formação de professores de Matemática (Llinares & Valls, 2010; Santagata & Guarino, 2011). No entanto, em Portugal, a investigação sobre esta utilização está ainda a dar os primeiros passos e não tem dado conta de trabalhos continuados com o uso desta tecnologia e, nomeadamente, com o foco sobre o ensino exploratório da Matemática.

São diversas as potencialidades que se atribuem aos vídeos no contexto da formação, fazendo deles recursos produtivos. Por se constituírem como uma possibilidade de representação da prática, facultam aos formandos que a visionam a descrição e análise dessa prática. Esta situação convida a que cada formando possa imaginar-se protagonista da situação, e que ative e mobilize os conhecimentos que colocaria em ação numa situação real de ensino semelhante (Kersting, Givvin, Thompson, Santagata, & Stigler, 2012). Destaca-se assim a ideia do vídeo como um recurso para a promoção da reflexão do próprio formando, eventualmente entre pares e com o apoio do formador, sobre a sua própria prática, suscitada pelo confronto com a prática de terceiros.

A ideia de promoção da capacidade de os professores refletirem sobre o que é essencial na prática é especialmente assinalada por van Es e Sherin (2008), que se referem ao uso de vídeos como promotores do desenvolvimento da capacidade de "reparar" (*noticing skill*). Apontam-lhe três componentes essenciais: a) identificar o que é importante ou relevante numa situação de ensino; b) relacionar o que se conhece do contexto da situação com a situação de ensino em si; c) estabelecer conexões entre os diversos aspetos da situação e princípios gerais de ensino e aprendizagem que a poderão explicar ou justificar (van Es & Sherin, 2008). Outros autores sublinham que a procura de coerência ou razoabilidade das práticas profissionais analisadas por professores permite-lhes estabelecer uma ligação entre a prática e o conhecimento teórico sobre o ensino (Koc, Peker, & Osmanoglu, 2009) que, muitas vezes, em outros cenários, pode parecer artificial ou difícil de se concretizar.

Os vídeos têm também sido utilizados na formação de professores com propósitos mais focalizados, com são exemplos observar os raciocínios dos alunos, analisar o papel do professor, caracterizar o discurso de sala de aula ou contactar com práticas inovadoras (Koc, Peker, & Osmanoglu, 2009; McGraw et al., 2007; Santagata & Guarino, 2011). Destacamos este último aspeto reportando-nos ao ensino exploratório da Matemática, foco do nosso interesse. Por se tratar de práticas complexas e muito exigentes que colocam desafios diversos ao professor (Canavarro, Oliveira, & Menezes, 2014), e por se distinguirem significativamente das práticas mais usuais de ensino da Matemática (Franke, Kazemi, & Battey, 2007), é importante que os professores tenham oportunidade de contactar com elas e de desenvolver competências de as planear e conduzir, bem como de refletir sobre elas e sobre a sua integração no ensino da Matemática, desenvolvendo o seu conhecimento didático (Canavarro, 2003; Ponte, 2012). O contributo dos vídeos de aula no desenvolvimento do conhecimento didático dos professores, da sua prática profissional e da capacidade de refletir e dar sentido a situações de sala de aula, são aspetos sublinhados por Koc et al. (2009) e Llinares e Valls (2010).

Sumariando a investigação referida, parece ser evidente o valor do uso dos vídeos na formação de professores dos diversos níveis, sendo estes um recurso com muitas potencialidades para o desenvolvimento profissional. Por um lado, proporcionam um contacto facilitado com práticas de ensino reais, de forma bastante completa, dando a conhecer abordagens ao ensino que podem ser novas e desafiantes para quem assim lhes acede (Alsawaie & Alghazo, 2010; Koc, Peker, & Osmanoglu, 2009). Por outro lado, permitem a criação de contextos formativos focados na análise das evidências da prática videogravada, que pode ser visualizada as vezes necessárias, individualmente ou no coletivo, para aprofundar a reflexão e o conhecimento didático associado a essa prática, com vista a capacitação do formando para a concretizar (Koc, Peker, & Osmanoglu, 2009; Llinares & Valls, 2010).

Conceção de casos multimédia para a formação

Neste ponto abordamos as linhas orientadoras gerais subjacentes à conceção dos casos multimédia do projeto P3M, os passos dados para a sua construção e os casos desenvolvidos[1].

Linhas de orientação

Os casos multimédia, inspirados na investigação apresentada anteriormente sobre vídeos na formação de professores de Matemática, têm características próprias que assentam numa determinada conceção sobre o uso destes recursos, tendo em vista criar condições para o desenvolvimento da prática letiva, do conhecimento didático e da capacidade refletir e dar sentido a situações de sala de aula, ligando intenções e ações (Alsawaie & Alghazo, 2010; Koc et al., 2009; Llinares & Valls, 2010). A prática letiva do professor que se procura promover com estes casos multimédia, focada no ensino exploratório da Matemática, é entendida como as suas ações regulares e as intenções que lhe estão subjacentes (Canavarro, Oliveira, & Menezes, 2014).

As linhas gerais para a construção dos casos multimédia têm paralelo nas estratégias que Brunvand (2010) propõe. Estes materiais devem desafiar os professores para diversas perspetivas e tarefas, colocar desafios explícitos, confrontar os professores com o processo de gestão curricular, disponibilizar comentários do professor e perspetivas alternativas e facultar ferramentas de reflexão (Brunvand, 2010).

No projeto P3M, assumimos, desde início, que o conteúdo dos casos deveria ir para além dos vídeos de sala de aula, incorporando também outros elementos que contribuíssem para uma visão mais completa e integrada da prática, como as planificações de aula feitas pelos professores, excertos de entrevistas aos professores sobre as aulas que iriam lecionar (captando as suas intenções) e sobre as suas

1 A criação deste dispositivo de formação assente nos casos multimédia teve a contribuição de várias pessoas. O nosso sincero agradecimento vai em primeiro lugar, para os professores Célia Mestre, Cláudia Torres, Fernanda Tavares e Paulo Oliveira pela disponibilidade e generosidade em partilharem connosco a sua sala de aula, sem os quais este trabalho não teria sido possível. Assinalamos a dedicação e o profissionalismo da Ana Paula Gil, bolseira do projeto P3M, no seu trabalho de recolha e edição de materiais para os casos multimédia. Agradecemos, ainda, à equipa do projeto que connosco discutiu os casos e, em particular, aos colegas que também os usaram em diferentes contextos de formação, proporcionando uma reflexão mais aprofundada sobre este dispositivo.

reflexões pós-aula, resoluções das tarefas pelos alunos no decurso da aula. Alem disso, e vocacionados para o desenvolvimento profissional do professor, incluímos desafios para passar à prática e também textos de natureza teórica. A Figura 1 procura representar a forma como estes elementos se relacionam nos casos multimédia.

Figura 1 – Elementos dos casos multimédia do projeto P3M.

Os casos multimédia têm subjacente uma estrutura narrativa, propondo-se uma análise que acompanha o desenrolar da "história da aula", incluindo a sua preparação, condução e reflexão. Assim, propõe-se como ponto de partida uma tarefa matemática que os professores resolvem e discutem enquanto potenciadora de aprendizagens matemáticas (num determinado contexto, antecipadamente conhecido: escola, alunos, professor). A partir daí, e apoiados em questões orientadoras, os formandos têm oportunidade de conhecer as intenções do professor para a aula (através do plano e do próprio discurso do professor sobre a aula). Um elemento importante dos casos são os vídeos de segmentos da aula que, de um modo geral, são curtos (em média entre três e quatro minutos), mas com grande poder ilustrativo do tipo de ensino praticado. Estes vídeos referem-se a todos os momentos do ensino exploratório da aula de Matemática (Canavarro, Oliveira, & Menezes, 2014): a) Introdução da tarefa, b) Realização da tarefa pelos alunos, c) Discussão da tarefa, e d) Sistematização das aprendizagens.

Dada a especificidade de cada um desses momentos, a tipologia de recursos complementares varia um pouco. Por exemplo, para a fase de discussão, são apresentadas as produções matemáticas efetivamente realizadas pelos alunos. Um outro traço comum é o questionamento proposto em cada uma das partes do caso, com a proposta de questões que visam a análise da prática do professor e que se centram nas ações que dizem respeito à promoção da aprendizagem dos alunos e à gestão da aula.

A análise que é proposta da aula convoca diversos domínios do conhecimento didático do professor, nomeadamente o currículo, a Matemática, os alunos e a sua aprendizagem e o processo instrucional (Canavarro, 2003; Ponte, 2012) e contribui para o seu desenvolvimento e aprofundamento (Figura 2).

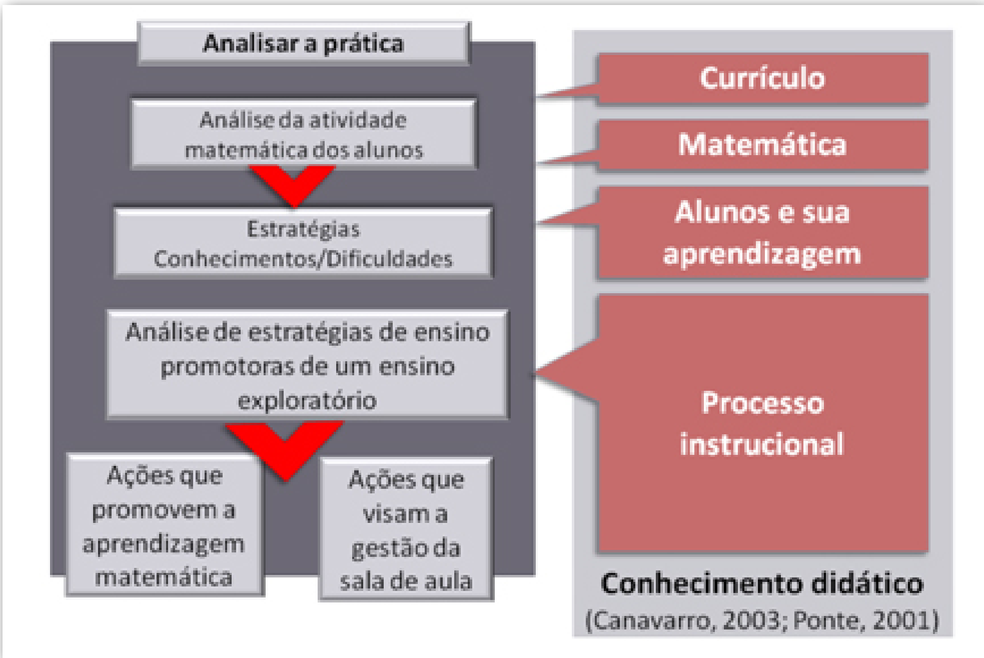


Figura 2 – Análise da prática e domínios do conhecimento didático.

Neste processo, a análise conflui para as ações que promovem a aprendizagem da Matemática pelos alunos e para as que visam a gestão da sala de aula, em cada fase da aula. A partir deste trabalho, complementado com as leituras sugeridas e o texto síntese designado por *Sintetizando*, propõe-se que os professores planifiquem e reflitam sobre aulas de Matemática de cariz exploratório, evidenciando os diversos tipos de ações e o conhecimento didático subjacente.

Construção dos casos multimédia

Os casos têm por base aulas de ensino exploratório da Matemática de professores experientes que se mostraram disponíveis para colaborar connosco. As aulas observadas foram antecipadamente discutidas entre o professor e investigadores da equipa do projeto, no âmbito de uma entrevista, com o objetivo de conhecer as intenções e a planificação do professor para as aulas.

De cada professor foram observadas duas a três aulas (da mesma turma), com a duração de aproximadamente 90 minutos, tendo sido gravadas por duas câmaras de vídeo (uma fixa, no fundo da sala, com plano geral, e outra móvel, que acompanhou os movimentos e as falas do professor no contato com os grupos). As primeiras aulas observadas de cada professor serviram para nos familiarizarmos com a sua prática de ensino e com a turma, e igualmente para que alunos se habituassem à presença das câmaras e dos investigadores na sala aula.

Os dados recolhidos antes e durante a aula foram analisados e serviram de base à realização de uma segunda entrevista ao professor. Esta entrevista, que visou obter a explicação e justificação sobre o desenvolvimento da aula e das ações do professor, incluiu o visionamento conjunto de curtos vídeos da aula. Do material recolhido de cada professor, selecionou-se uma aula e construiu-se um caso multimédia. Os casos foram alojados numa plataforma *online* para serem mais acessíveis, permitirem o trabalho em rede e beneficiarem das funcionalidades da internet.

Os casos multimédia estão organizados em cinco secções principais: Apresentação do caso; A tarefa, A aula, Reflexão pós-aula e Passar à prática (Figura 3).

Figura 3 – Aspeto geral de um caso multimédia.

Na primeira secção apresenta-se o contexto em que decorre a aula e dão-se indicações sobre o uso do caso. Na segunda revela-se a tarefa que serve de ponto de partida para a aula, aula essa que é apresentada a seguir nas suas várias fases. A reflexão pós-aula dá a conhecer a perspetiva do professor sobre acontecimentos das diversas fases da aula. Por fim, a secção Passar à prática desafia os formandos a planearem, conduzirem e refletirem sobre uma aula de Matemática no quadro do ensino exploratório.

Casos multimédia desenvolvidos no projeto P3M

Como se observa na Figura 4, foram desenvolvidos quatro casos multimédia, dos quais três para o ensino básico e um para o ensino secundário.

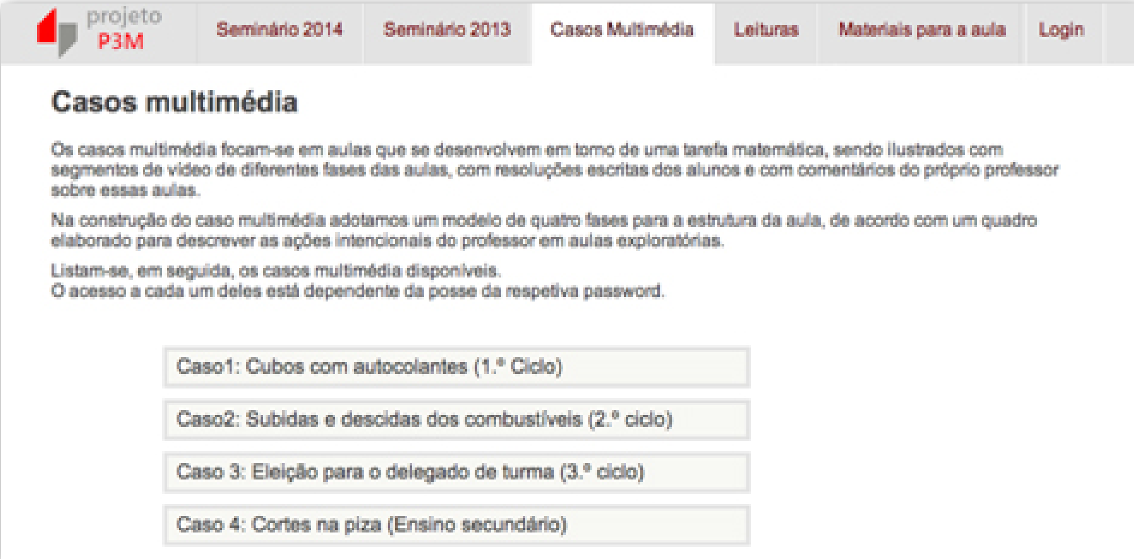


Figura 4 – Casos multimédia do projeto P3M.

O caso multimédia “Cubos com autocolantes” é relativo a uma turma do 4.º ano (1.º ciclo) de uma escola da região da Grande Lisboa. Na aula, a professora Célia aborda o tema *Números e operações*, tendo em vista o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. O caso multimédia “Subidas e descidas dos combustíveis" respeita a uma aula de uma turma do 6.º ano (2.º ciclo) de uma escola da região de Viseu. Na aula, a professora Fernanda trabalha o tema Números e operações, visando o desenvolvimento pelos alunos do conceito de percentagem. O caso multimédia do 3.º ciclo, com uma turma do 7.º ano de escola de Lisboa, chama-se “Eleição para o delegado de turma” e nele a professora Cláudia explora a *noção de equação*. Por fim, "Cortes na piza" é o nome do caso multimédia do ensino secundário. A tarefa é desenvolvida por uma turma do 11.º ano de uma escola do distrito de Lisboa. Na aula, o professor Paulo, trabalha o tema *Sucessões*.

O caso multimédia "Eleição do delegado de turma": Uma narrativa contextualizada

Procuramos nesta secção explicitar como se estruturam e são constituídos os casos multimédia, exemplificando com o caso do 3.º ciclo. Com o intuito de ilustrar como o conteúdo do caso é apropriado pelos formandos, apresentamos comentários e produções escritas de um grupo de futuros professores que analisou o caso numa disciplina de Didática da Matemática, na Universidade de Lisboa (Oliveira & Cyrino, 2013).

Como referimos na secção anterior, todos os casos multimédia elaborados no âmbito do projeto P3M adotam uma estrutura semelhante, organizando-se em cinco secções principais: Apresentação do caso; A tarefa; A aula; Reflexão pós-aula e Passar à prática. Dado que a primeira e a última secções são genéricas, iremos debruçar-nos somente sobre as três restantes, o que nos permite evidenciar a narrativa que foi construída neste caso e que é proposta aos formandos para análise.

Embora o caso multimédia receba o nome da tarefa matemática proposta, os seus verdadeiros protagonistas são a professora e os alunos, isto é, o caso diz respeito à prática da professora e à atividade matemática dos alunos nessa aula. A escolha da tarefa que, neste caso se intitula "Eleição para o delegado de turma" (Figura 5), tem subjacente um conjunto de intenções da professora Cláudia que atendem aos alunos a que se dirige.

Tarefa - "Eleição para o delegado de turma"

A diretora de turma que coordenou o processo de eleição do delegado de turma, informou no final que:

1. Os 30 alunos da turma votaram e não houve votos brancos ou nulos;
2. Apenas três alunos receberam votos: a Francisca, o Lucas e a Sandra
3. O Lucas recebeu menos dois votos que a Francisca;
4. A Sandra recebeu o dobro dos votos que recebeu o Lucas.

Quem ganhou as eleições? Com quantos votos?

Não te esqueças de apresentar e explicar o teu processo de resolução.

Figura 5 – Tarefa "Eleição para o delegado de turma".

A tarefa matemática

Neste caso, a professora escolheu uma tarefa que considerou ajustar-se aos seus objetivos para uma turma do 7.º ano, no contexto do programa de Matemática de 2007 (ME, 2007), na altura em que estava a terminar a unidade didática dedicada às Equações do 1.º grau. Embora o enunciado da tarefa e o momento em que esta tarefa é proposta pudesse indiciar que se tratava de um problema "para equacionar", remetendo para uma resolução baseada em procedimentos que tinham sido trabalhados previamente, na realidade a perspetiva da professora sobre esta situação é mais abrangente. A escolha da tarefa decorre da possibilidade de esta ser resolvida por diversas estratégias, com diferentes níveis de sofisticação matemática (tentativa e erro, recurso a tabelas e à noção de sequência e resolução de uma equação). Esta variedade de estratégias, plausível para a professora dado o conhecimento que tem dos alunos, contribuirá, na sua opinião, para:

- reforçar a eficácia que caracteriza a resolução do problema através de uma equação, face a outras possíveis;
- promover conexões entre vários diferentes tópicos no tema da Álgebra daquele ano, de acordo com o programa de matemática então em vigor;
- promover as capacidades de resolução de problemas e comunicação matemática dos alunos.

Para além desses aspetos, segundo a professora, a exploração da tarefa também contribui para clarificar e reforçar noções importantes trabalhadas ao longo da unidade didática, constituindo-se como síntese de conceitos importantes. Como refere:

> Vai ser possível discutir os vários tópicos e noções que foram trabalhadas nas equações, nomeadamente a noção de equação, de membro, termo, de redução de termos semelhantes, os princípios de equivalência, o que é uma solução de uma equação, equações equivalentes, portanto, há aqui uma hipótese muito alargada de podermos fazer uma síntese destes conceitos, que também é um objetivo desta aula (excerto da entrevista das Intenções)

Este caso multimédia assenta, assim, numa tarefa com características compatíveis com uma prática de ensino exploratório, de acordo com o quadro adotado em Canavarro, Oliveira e Menezes (2014). O problema selecionado não só permite a resolução através de estratégias diversas, de acordo com o nível de conhecimentos dos alunos, como tem também potencial para promover a reflexão da turma sobre diversos conhecimentos e processos matemáticos e contribuir para o aprofundamento da compreensão matemática dos alunos.

Os comentários dos futuros professores acerca da tarefa matemática "Eleição para o delegado de turma", após a exploração do caso multimédia, evidenciam que se apropriaram das suas principais características, conseguindo enquadrá-la numa perspetiva mais global relativamente às tarefas que são adequadas no quadro do ensino exploratório.

> Este é, portanto, um exemplo de uma aula onde se praticou a ideia de ensino exploratório da matemática, onde se preconiza que os alunos possam trabalhar tarefas interessantes, criando as suas próprias estratégias e construindo conhecimento de uma forma que evidencia a necessidade ou a vantagem de uma determinada ideia, conceito ou procedimento matemático. (Simone)
>
> Verifica-se neste vídeo que existem alunos que para a resolução do problema ainda utilizam uma estratégia aritmética, enquanto outros já utilizam uma estratégia algébrica. A professora refere que estes alunos "já exploraram situações envolvendo regularidades" o que me parece lhes terá permitido fazer uma "ponte" para as equações, nomeadamente através da mobilização dos conhecimentos sobre a generalização simbólica de uma sequência. (Vânia)

Na exploração de cada caso multimédia, os formandos começam por resolver a tarefa para se familiarizarem com a situação de partida. Em seguida, devem responder a um conjunto de questões que visa a perspetivação de como e com que objetivos a tarefa pode ser introduzida numa aula do ensino básico. Os formandos são assim levados a raciocinar sobre as potencialidades da tarefa e também a antecipar possíveis estratégias de resolução dos alunos e dificuldades que estes venham a enfrentar. A inclusão destes dois últimos aspetos de difícil concretização, em particular para os futuros professores – e que por isso recebem uma atenção particular no caso multimédia – pretende justamente levar os formandos a tomar consciência da exigência desta vertente da prática letiva, antes de a observarem na situação da professora visada no caso.

A aula

Esta constitui a secção principal do caso multimédia, onde se encontra a maior parte dos recursos que suportam a análise a ser realizada pelos formandos e onde é despendida a maior parte do tempo dedicado à exploração do caso. A exploração do caso multimédia é feita de modo sequencial, percorrendo as várias fases da aula, de modo a permitir, por um lado, uma análise centrada na especificidade de cada um desses momentos e, por outro, construir uma narrativa sobre a aula retratada. Para cada uma das quatro fases da aula, apresentam-se três subsecções: Preparação da aula, Concretização da aula e Sintetizando. Debruçamo-nos aqui apenas sobre as duas primeiras dado que o conteúdo da terceira, um texto, é comum a todos os casos, como já referimos, e não envolve um trabalho específico de análise.

A preparação da aula. Esta subsecção, presente nas quatro fases da aula, inclui o plano de aula elaborado e excertos da entrevista com a professora que antecedeu a realização da aula (Intenções). O plano de aula elaborado pela professora está estruturado segundo o modelo da aula em quatro fases mas não é apresentado no caso na sua totalidade, logo de início. O plano é disponibilizado gradualmente ao longo das quatro secções respeitantes às fases da aula; no que diz respeito à primeira fase, são apresentados apenas os aspetos gerais da aula (tópicos, objetivos específicos e recursos) e a forma como a professora pensa introduzir a tarefa (Figura 6).

Com esta opção pretende-se levar os formandos a focarem a sua atenção na especificidade das ações e intenções da professora em cada uma destas fases da aula, contribuindo para uma análise mais aprofundada da prática de ensino exploratório da Matemática. Deste modo, por exemplo, no que diz respeito à fase de *introdução da tarefa*, pretende-se que compreendam que o sucesso da aula não passa só pela qualidade e adequabilidade da tarefa mas que o professor tem de garantir que os alunos se apropriam da tarefa e se sentem desafiados para a sua resolução. Neste caso, a professora, para além de mostrar preocupação com a clarificação da situação de partida, manifesta a intenção de salientar e valorizar a diversidade de estratégias que os alunos podem vir a adotar, o que vai ao encontro do seu propósito para esta aula. Deste modo, promove também a adesão à tarefa, embora não estabelecendo conexões com experiências anteriores, para não condicionar a escolha da estratégia pelos alunos. A professora salienta ainda aspetos ligados com a organização do trabalho, procurando garantir as condições para a realização da tarefa e, em particular, da discussão das resoluções dos alunos.

Sumário (no final da aula)

Exploração da tarefa "Eleição para o delegado de turma" com recurso ao materiais: "Hands-on-equations". Síntese e conclusão da unidade das equações.

Tópicos/Subtópicos

Noção de equação – Demonstração e utilização dos materiais hands-on-equations.

Objetivos específicos

- Noção de equação.
- Significado de membro e termo.
- Significado de incógnita e solução da equação.

. Noção de equações equivalentes

Recursos

Papel e lápis
Materiais hands-on-equations
Ficha de trabalho
Manual

Capacidades transversais

• Resolução de problemas; • Raciocínio matemático; • Comunicação matemática.

Desenvolvimento da aula

Apresentação da tarefa e definição da metodologia de trabalho: (5 min)

A aula terá inicio com a proposta de realização da tarefa "Eleição do delegado de turma". Depois de distribuído o documento da tarefa, será feita a leitura do enunciado por um dos alunos da turma, com o objetivo de garantir se há alguma dúvida na linguagem, nomeadamente o significado de voto nulo e voto branco, e é explicado aos alunos que o objetivo da tarefa é encontrar o vencedor das eleições e com quantos votos ficou cada um dos candidatos. Para isso os alunos podem recorrer às estratégias de resolução do problema que acharem pertinente e deve ficar claro que têm que apresentar o seu raciocínio e conjeturas, assim como a estratégia que usaram, não esquecendo a resposta ao problema. Valorizar a apresentação de diferentes estratégias de resolução do problema. A tarefa pode ser realizada a pares e os alunos têm que estar preparados para apresentar a sua resolução à turma. Finalmente, fica definido 10 minutos de trabalho autónomo para realização do problema.

Figura 6 – Primeira parte do plano de aula elaborado pela professora.

Uma das futuras professoras que analisou este caso multimédia salienta, na sua reflexão, a necessidade de o professor contemplar, na sua prática, o planeamento desta fase da aula, relacionando-a com o que observou na aula em análise:

> O professor deverá, então, contemplar no seu plano de aula, um momento de esclarecimento de dúvidas de interpretação e de explicitação da metodologia de trabalho a desenvolver. No episódio analisado, a professora planeou e realizou na sua aula, um momento de leitura do enunciado em grande grupo, destinado à discussão do significado dos conceitos que poderiam suscitar algumas dúvidas. Houve espaço para que os alunos se apropriassem da tarefa, clarificando as questões a que teriam de responder, assim como o tipo de trabalho que iriam desenvolver, neste caso, a pares. (Matilde)

No que diz respeito à fase de *realização da tarefa*, destacam-se no plano de aula a antecipação das estratégias dos alunos e da forma como a professora pensa poder apoiá-los nas eventuais dificuldades que manifestem. No caso da primeira estratégia que antecipa, de tentativa e erro (Figura 7), a professora Cláudia explicita como esta pode emergir no trabalho dos alunos, através da tradução linear dos dados do problema, e as dificuldades que estes podem ter para conjugar as várias condições. Indica diversas questões que poderá colocar aos alunos para garantir o desenvolvimento da tarefa, evidenciando cuidado para não comprometer o nível de desafio cognitivo da tarefa e preservar a autonomia dos alunos.

Possíveis resoluções:

Hipótese 1:

Começam por dividir os 30 votos pelos três alunos, ficando cada um com 10 votos. Porém, como o Lucas tem metade dos votos da Sandra, os alunos percebem que não podem ter 10 votos cada um. Igualmente como o Lucas tem menos dois votos do que a Francisca por tentativa-erro os alunos vão procurar descobrir que a hipótese válida é o Lucas ter sete votos, a Sandra 14 votos e a Francisca ter 9.

Dificuldades na utilização desta tarefa: A utilização desta estratégia tem origem no delinear de um raciocínio "colado" à evolução do enunciado, ou seja temos total de 30 votos e 3 candidatos. Porém quando obtêm 10 votos para cada alunos, não é imediato trabalhar em simultâneo com as restantes condições do problema, o Lucas ter menos 2 votos que a Francisca e ao mesmo tempo interpretar que a Sandra ter o dobro dos votos do Lucas, significa o Lucas ter metade dos votos da Sandra. Para ajudar os alunos poderei colocar:

O que significa o Lucas ter menos dois votos que a Francisca? Objetivo os alunos perceberem que tem o mesmo significado de a Francisca Ter mais dois votos que o Lucas.

O que significa a Sandra ter o dobro dos votos do Lucas? Objetivo os alunos chegarem à relação que o Lucas tem metade dos votos da Sandra.

Caso os alunos não estejam a conseguir organizar as suas hipóteses sugerir que arranjem uma representação que permita organizar e visualizar os votos dos 3 candidatos em simultâneo. Neste sentido estou a orientar para a construção de uma tabela, sem explicitamente mencionar a tabela, pois podem fazer um esquema ou outra representação.

Figura 7 – Parte do plano de aula referente à fase de Realização da tarefa.

Para cada uma das fases da aula são também disponibilizados excertos da entrevista inicial à professora, onde esta explicita as suas intenções. Neste caso, Cláudia expõe de forma pormenorizada as dificuldades que prevê que alguns alunos tenham na interpretação do enunciado do problema e no desenvolvimento de uma estratégia de tentativa e erro e o que pode estar na sua origem pelo que conhece da turma. A professora denota assim que tenciona estar atenta a estes aspetos quando acompanhar o trabalho autónomo dos alunos:

> Alguns alunos acho que têm, de facto, ainda bastantes fragilidades do ponto de vista da resolução de problemas, ou seja, "por onde é que vou começar?", "Por onde é que vou começar e como é que eu traduzo a informação que vem do enunciado para linguagem matemática?", ou seja, "que informação é que daqui é útil para eu

> conseguir delinear uma estratégia e conseguir alcançar a resposta ao problema?" (excerto da entrevista das Intenções)
> Outra dificuldade tem muito a ver com os alunos que vão por tentativa erro que usam muitas vezes o cálculo mental e têm depois muita dificuldade em fazer registos ou mesmo explicar aos colegas que tentativas é que experimentaram antes de chegar aquela que lhes permitiu dar a resposta ao problema. (excerto da entrevista das Intenções)

Estes são aspetos a que os futuros professores são sensíveis na leitura que fazem do plano de aula e das intenções da professora, quando salientam, por exemplo, a importância de antecipar as dificuldades dos alunos, reconhecendo a utilidade do conhecimento que esta tem da turma:

> Consideramos este aspeto importante, porque é fundamental o professor refletir sobre as possíveis dificuldades dos alunos, para poder ajudar os alunos a ultrapassar essas dificuldades e também para poder gerir o tempo de uma forma eficaz. É também importante conhecer a turma, porque turmas diferentes poderão ter dificuldades diferentes. (Antónia e Simone)

Um dos aspetos destacados no que diz respeito a esta atividade de planeamento da aula é a forma como a professora tenciona dinamizar a fase de *discussão da tarefa*. A professora Cláudia explicita no plano (Figura 8) o seu principal critério para selecionar e sequenciar as resoluções dos grupos e refere algumas questões que colocará para dinamizar a discussão.

A apresentação das várias estratégias de resolução vai decorrer de acordo com o nível crescente de complexidade. De acordo com a listagem anteriormente feita com as hipóteses de estratégias usadas pelos alunos, Será dada prioridade à estratégia por tentativa-erro (hipótese 1), seguida da representação em tabela (hipótese 2), e finalizando com a resolução da equação (hipótese 3).
A discussão será gerida pela professora, mas vão ser os pares a apresentar a sua estratégia e espera-se que sejam os restantes alunos da turma a questionar o par que apresenta a resolução. Porém, caso seja necessário, a professora pode colocar questões como:
Concordam com a estratégia dos vossos colegas? Como é que eles pensaram? Qual foi o ponto de partida? Como chegaram à resposta ao problema?

Figura 8 – Excerto do plano de aula referente à fase de Discussão da tarefa.

Aos formandos é solicitado que, tal como em relação às fases anteriores da aula, identifiquem os aspetos que a professora refere no plano e que destaquem dois desses que lhe pareçam particularmente importantes, justificando a sua opção. Um grupo de formandos destacou a referência que a professora faz a questões orientadoras que promovam o estabelecimento de conexões entre estratégias, explicitando que na sua perspetiva: “Estas questões visam uma maior e melhor interação entre os alunos, obriga-os a organizar e justificar raciocínios e a tirar conclusões. Pensadas antecipadamente, estas questões podem enriquecer ainda mais o momento de discussão das tarefas”.

Os formandos têm, mais uma vez, acesso à explicitação das intenções da professora, permitindo clarificar um pouco mais os seus critérios para a seleção e sequenciação que irá fazer das resoluções dos alunos, sendo-lhes então pedido que identifiquem esses critérios e como se relacionam com os objetivos da professora para esta fase da aula. As respostas dos futuros professores evidenciam que não só estabelecem essa relação, como reconhecem que esta fase da aula é importante para o propósito matemático da aula delineado pela professora e que apresentámos na secção sobre a tarefa:

> • Abrangendo as várias estratégias de resolução, promove-se a capacidade de resolução de problemas dos alunos, que vêem um mesmo problema resolvido de formas distintas;
> • Apresentando um grau de complexidade crescente nas resoluções, os alunos têm contacto com estratégias possivelmente mais eficientes em termos de rapidez. (Matilde e Sandra)

Finalmente, no que diz respeito à última fase da aula, *sistematização das aprendizagens*, dado que a professora não pretendia introduzir novos conceitos ou procedimentos, pois já tinham sido formalizados em aulas anteriores, este momento tinha como objetivo a realização de uma síntese (nas palavras da professora) sobre algumas noções importantes do tema em estudo. Os formandos são convidados a explicitar como interpretam as intenções da professora para este momento, evidenciando, no caso dos futuros professores, compreenderem o propósito que ele pode cumprir:

> A professora tem o cuidado de ir elaborando uma *checklist* (escrita no quadro ou mental), que no fim irá servir para alimentar o momento da sistematização. Este momento permite revisitar conceitos, abordados e formalizados em aulas anteriores ou/e nesta

> aula. Isto ajuda os alunos a organizarem as ideias e a consolidar conhecimentos adquiridos. (Lourenço, Sílvio, Vânia)

Em síntese, os recursos que são disponibilizados no caso multimédia relativamente à preparação da aula, em conjunto com o questionamento que é feito pela professora, contribuem para que os formandos compreendam a importância da planificação cuidadosa da atividade letiva e que antecipem o que vão encontrar no visionamento da aula (concretização da aula).

A concretização da aula. Esta subsecção do caso multimédia surge transversalmente para as quatro fases da aula, permitindo aos formandos uma visão global de como a aula se concretizou, assim como analisar, em particular, as ações da professora em cada uma dessas fases. Dada a especificidade de cada um desses momentos, a tipologia de recursos e questionamento varia um pouco, embora mantendo diversas características comuns, como sejam os vídeos de segmentos da aula e as questões que visam a análise da prática da professora e que se centram nas ações que dizem respeito à promoção da aprendizagem dos alunos e à gestão da aula, de acordo com o quadro de ensino exploratório adotado (Canavarro, Oliveira, & Menezes, 2014).

Para a primeira fase da aula – *introdução da tarefa* – é apresentado o vídeo completo, em que é possível visualizar como a professora dinamizou este momento, e são colocadas três questões para análise: 1) Como foi organizada esta primeira parte da aula? 2) Quais pensa serem as intenções da professora quanto ao modo como dinamizou esta parte da aula, tendo em conta o que tinha previsto no plano de aula?;3) Como reagiram os alunos a esta apresentação pela professora? Com a primeira e a terceira questões pretende-se que os formandos se apercebam de como a professora conduz este momento e da sua importância para o sucesso da aula, o que é visível nos seguintes comentários de dois futuros professores:

> Penso que esta fase ajudou a que os alunos entendessem o que era pedido, que estivessem familiarizados com o contexto do problema e houve ainda a preocupação por parte da professora de ver se não existiam dúvidas quanto à interpretação do enunciado. (Bárbara)
> . . . É importante apelar ao desafio, fazendo com que os alunos se apropriem da tarefa com entusiasmo e curiosidade, para que se

> empenhem em resolvê-la. É também o momento de organização do trabalho pela turma, definição dos tempos, gestão dos recursos e dos modos de trabalho. (Lourenço)

A segunda questão pretende levá-los a detetar se há desvios relativamente ao que foi planificado pela professora e a procurar o que pode estar na sua origem. Um grupo de futuros professores apresenta algumas hipóteses explicativas para as diferenças que observou:

> A grande diferença entre o que tinha sido planeado e o que foi, realmente, concretizado na aula foi o facto de todo o momento de introdução à tarefa ter sido centrado na professora e não nos alunos - a leitura de enunciado foi feita pela professora. A nosso ver, esta alteração pode ter sido motivada por: (1) Necessidade de focar a atenção dos alunos (a turma poderia estar agitada e dispersa); (2) Necessidade de abreviar o tempo de introdução à tarefa. (Matilde e Sandra)

Relativamente à fase de *realização da tarefa*, são apresentados vídeos de quatro episódios da aula em que a professora apoia o trabalho autónomo dos alunos e sobre os quais se procura que os formandos se apercebam das ações que visam promover as aprendizagens dos alunos e gerir as interações entre estes. Nos episódios selecionados é visível que a professora procura equilibrar a manutenção do desafio cognitivo da tarefa com o apoio aos alunos de forma que não desistam do trabalho, incentivando a partilha e a entreajuda entre os elementos dos pares. Estes aspetos são identificados e destacados pelos futuros professores:

> Neste momento, penso que a ação da professora foi crucial na medida em que conseguiu manter o nível cognitivo elevado da tarefa de acordo com o que é referido no texto de Stein e Smith (1998), uma vez que, por meio do questionamento sucessivo conseguiu fazer com que os alunos desenvolvessem o seu raciocínio e pensamento algébricos . . . considero importante o modo como a professora interagiu com os alunos motivando-os constantemente para o seu envolvimento na tarefa, revelando o cuidado de não validar as suas respostas, pedindo a opinião dos alunos sobre a

> resolução dos colegas e ainda por tentar não fornecer demasiadas pistas. (Bárbara)

A importância de os alunos efetuarem registos como forma de organizar o seu raciocínio, está igualmente presente em alguns dos episódios. Este aspeto é sublinhado pelos futuros professores após analisarem a intervenção da professora numa das situações visionadas:

> Primeiro a professora pede aos alunos que justifiquem como pensaram (solicitando aos alunos que registem na folha) indicando todas as hipóteses por eles formuladas. Nesta altura, a professora já tinha detetado que a estratégia seguida pelos alunos era por tentativa/erro. O raciocínio estava correto . . . mas o que faltava era os alunos registarem as tentativas de forma a poder confirmar e testar os resultados. A intervenção da professora permitiu que o aluno, ao verbalizar o seu raciocínio, tivesse conseguido perceber o erro no seu raciocínio ([referindo], “ah, já sei o que é que estava mal”). (Lourenço, Sílvio e Vânia)

Como forma de levar os formandos a pensar em como estruturar a fase seguinte de *discussão da tarefa*, estes são convidados a analisar as resoluções da tarefa de todos os grupos de alunos e a explicitar quais as que escolheriam para serem apresentadas nesta fase da aula. Em seguida, é dada a conhecer a escolha das resoluções que a professora fez, que ocorre ainda na fase de realização da tarefa, e é-lhes pedido que a relacionem com os critérios que ela tinha referido e que foram por eles analisados na secção de *Preparação da aula*.

Esta análise é proposta antes do visionamento do vídeo sobre esta fase da aula, de forma a levar os formandos a colocarem-se na posição da professora quando faz a seleção das resoluções a serem apresentadas na discussão coletiva. As explicações que a professora apresenta para a escolha das resoluções e para a sequência que lhes dá são também disponibilizadas para que os formandos façam um confronto entre as opções da professora e as suas próprias.

Através deste trabalho de análise em torno da seleção e sequenciação das resoluções dos alunos, os formandos têm oportunidade de refletir mais aprofundadamente sobre o objetivo desta fase da aula e como este se relaciona com o propósito matemático mais global da aula. No comentário seguinte, de uma futura professora, é evidente o seu reconhecimento da importância da seleção de estratégias diversas e da sequenciação de acordo com a sua complexidade. Simultaneamente, é reconhecido o papel da professora em garantir o envolvimento da turma nesta fase da aula:

> Cabe ao professor orientar os alunos para que estes consigam distinguir quais são as resoluções mais ricas e que tipo de conceitos/procedimentos matemáticos lhes estão associados. Para tal, deverá o próprio ter claro qual a ordem de apresentação de tarefas que favorecerá a aprendizagem matemática dos seus alunos, tendo em conta a diversidade de estratégias e o seu grau de complexidade. (...) o professor deverá garantir que este momento está separado dos restantes e que os alunos estão receptíveis à análise dos trabalhos dos colegas, assim como predispostos a argumentar as suas próprias escolhas. (Matilde)

O caso multimédia apresenta quatro episódios vídeo que mostram como se desenrolou a apresentação e discussão das resoluções de cada um dos quatro pares escolhidos pela professora Cláudia. Indo ao encontro do que tinha previsto no plano de aula, surgiram na turma apenas três estratégias distintas de resolução mas, uma vez que um dos seus objetivos para esta fase da aula era justamente o confronto das estratégias, no caso da estratégia que recorria à resolução de uma equação, a professora selecionou dois pares de alunos que equacionaram de formas distintas o problema (figuras 9 e 10). Um dos episódios incluídos nesta secção do caso multimédia apresenta a discussão que a professora promoveu com a turma, levando ao confronto destas duas resoluções.

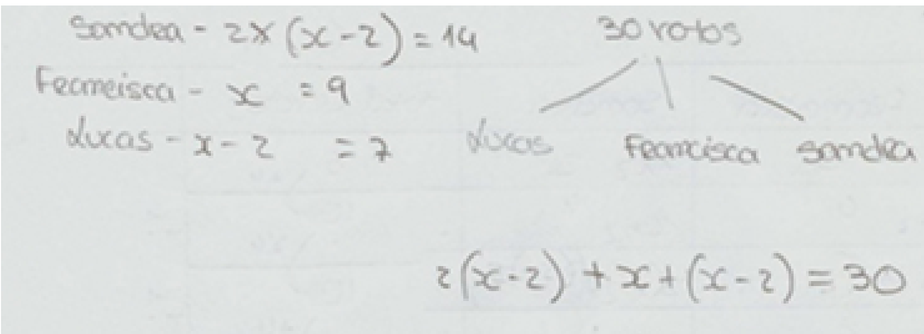


Figura 9 – A resolução do par Leonor e Margarida.

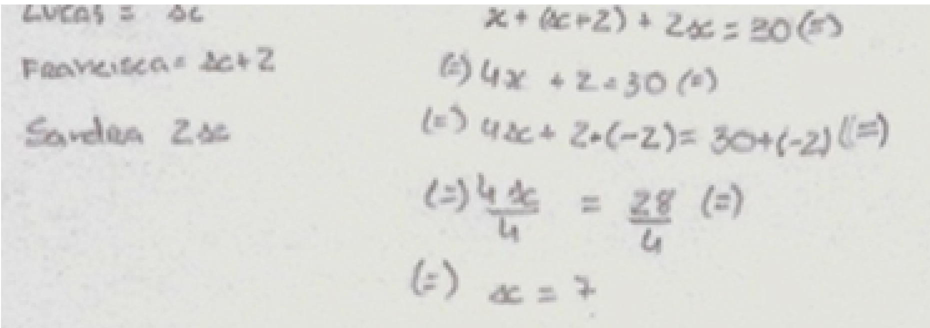


Figura 10 – A resolução do par David e Mariana.

A análise das situações de vídeo desta fase da aula foca-se, tal como na fase anterior de realização da tarefa, nas ações da professora que visam a promoção das aprendizagens e as que visam a gestão das interações. Os futuros professores reconhecem os objetivos de aprendizagem que a professora prosseguiu com a discussão das duas resoluções acima referidas e de como geriu este momento da aula de forma a conseguir extrair as ideias fundamentais:

> Promoção das aprendizagens: Esta opção foi interessante porque permitiu através de representação algébrica, comparar 2 processos distintos, que resultaram em soluções distintas, mas permitiram chegar ambos à resposta (o primeiro processo fez depender os votos do Lucas e da Sandra, dos votos da Francisca e o segundo fez depender os votos do Lucas, dos da Francisca e da Sandra). Foi interessante, no princípio, a discussão que se gerou em torno da incógnita (porque assumia valores diferentes nas duas estratégias) e em torno da equivalência entre equações e em torno da solução.
> Gestão das interações: Questionamento (pedir para comparar incógnitas, equações, soluções, resultados), promoção do debate, procura de justificações por parte dos alunos dos seus pensamento/raciocínio, técnicas de desbloqueio de impasses, validação das respostas dadas pelos alunos e balanço final. (Lourenço, Sílvio, Vânia)

Finalmente, relativamente à fase de *sistematização das aprendizagens*, apresentam-se dois vídeos correspondendo a momentos diferentes da aula. De facto, ao contrário do que tinha pensado inicialmente, a professora sentiu necessidade de realizar dois momentos de síntese das aprendizagens, principalmente devido ao facto de, na fase anterior da aula, as estratégias não terem sido apresentadas segundo a ordem que tinha previsto. Assim, o caso multimédia mostra um vídeo de um primeiro momento, após a apresentação dos primeiros grupos, em que se centra na comparação do método de tentativa e erro e da resolução algébrica, salientando a possibilidade de a última constituir um método mais geral para resolver uma situação daquele tipo e no revisitar de alguns aspetos importantes relativos ao conceito e à resolução de uma equação. Apresenta-se no caso um segundo vídeo, num segundo momento, a terminar a última apresentação das resoluções dos alunos (através de uma tabela com sequências numéricas) que revela o propósito de estabelecer conexões com aprendizagens anteriores, no tema da álgebra. Dado que os alunos tinham iniciado o estudo deste tema através do tópico das sequências, a professora aproveitou para relacionar as equações e aquele tópico matemático com o intuito de promover uma perspetiva mais integrada das aprendizagens matemáticas. Como refere um par de futuras professoras, este momento é mais centrado na professora mas é essencial para destacar o que há a reter de mais relevante da aula:

> Após a discussão da tarefa – momento centrado nos alunos – em que cada aluno tem oportunidade de expor as ideias que trabalhou e de ouvir as ideias trabalhadas pelos colegas, é importante que haja um momento mais centrado na professora, de forma a organizar e destacar o que de mais importante foi dito e feito em todas as intervenções . . . Apesar de ser um momento centrado na professora, é enriquecido com a solicitação da intervenção dos alunos, estratégia que permite que os mesmos vejam as suas ideias concretizadas e que, ao mesmo tempo, mantém-nos focados na sistematização. (Matilde e Sandra)

Reflexão pós-aula

Esta secção do caso multimédia tem o duplo propósito de levar os formandos a analisar a reflexão que a professora faz sobre a aula realizada e de conduzir a uma sistematização das suas ações e intenções de acordo com o quadro de ensino exploratório adotado. Tal como na secção anterior *A aula*, esta secção está estruturada de acordo com as quatro fases da aula de ensino exploratório da Matemática.

Para cada uma das fases da aula, o quadro de *Ações intencionais do professor* (Canavarro, Oliveira, & Menezes, 2014) é usado pelos formandos para identificar aspetos chave que a professora refere na sua reflexão sobre a respectiva fase. A integração de elementos da entrevista pós-aula com a professora possibilita que os formandos acedam ao balanço que esta faz da aula e percebam as dificuldades com que se confrontou, nomeadamente aquelas que Cláudia refere a propósito do acompanhamento do trabalho autónomo dos alunos na fase de realização da tarefa:

> Uma grande dificuldade . . . é que eu não consegui chegar a todos os alunos e tenho consciência que há ali meia dúzia deles que, de facto, precisavam que me tivesse sentado com eles, estado ali mais tempo nesse grupo durante o trabalho autónomo de modo a que eles pudessem compreender de algum modo. Porque houve ali alunos que ficaram num impasse, principalmente os que foram por tentativa-erro . . . e que eu tentei, por questionamento, ajudá-los a pensar como é que iriam introduzir estas três condições de relação entre os votos dos três candidatos... (excerto da entrevista de Reflexão pós aula)

O reconhecimento das dificuldades que a professora enfrentou, assim como de objetivos que, do seu ponto de vista, não foram, total ou parcialmente, atingidos e dos desvios às suas previsões, vem reforçar a intenção de conferir autenticidade ao material apresentado para análise, e da identificação desta como uma aula real. É importante também para reforçar junto dos formandos a necessidade de flexibilidade por parte do professor na condução da aula em função do que pensa serem as necessidades dos alunos.

Em seguida, é solicitado aos formandos que retomem a análise que efetuaram sobre as ações da professora e procurem relacioná-la com os elementos presentes no *Quadro*. Nesta fase é possível que identifiquem aspetos da prática da professora que lhes pareçam não estar presentes no quadro decorrentes da interpretação que fizeram das situações analisadas. Assim, procura-se que os formandos, a partir da análise de uma situação particular da preparação e concretização de uma aula, o caso multimédia, consigam construir uma perspetiva mais global sobre o ensino exploratório da Matemática.

Utilização dos casos multimédia do projeto P3M na formação de professores

Os casos multimédia foram concebidos de modo a se dirigirem tanto à formação inicial, como à formação contínua de professores que ensinam Matemática, assumindo que a prática de ensino retratada nos casos – o ensino exploratório –, sendo ainda pouco comum, representa um desafio, quer para os futuros professores, quer para os professores em serviço. Naturalmente que a exploração do caso que o formador promove nas sessões tem em conta a existência ou não de experiência profissional e procura tirar partido dos conhecimentos que os formandos possuem. Nesta secção pretendemos ilustrar e fundamentar algumas das opções concretas tomadas quanto à exploração dos casos multimédia nas sessões de formação e ao trabalho autónomo dos formandos e, a concluir, discutir alguns aspetos suscitados pelo uso deste material em diversos contextos de formação.

A exploração do caso multimédia nas sessões de formação

Os casos multimédia do ensino básico têm sido usados com professores e futuros professores dos vários níveis de escolaridade em sessões presenciais de dimensão e número variados, consoante o tempo disponível da formação para dedicar a esta atividade e os objetivos perseguidos. Uma das características do caso é a flexibilidade que permite na sua exploração, dado que é possível percorrer com maior ou menor aprofundamento o seu conteúdo. De facto, o formador pode fazer uma seleção do material do caso que vai propor para os formandos analisarem e discutirem, desde que respeite a sua estrutura narrativa e percorra as etapas essenciais da aula.

Nas ações de formação já realizadas, começa-se pela análise da tarefa matemática do caso, percorrendo as questões que são ali colocadas levando o formando a pensar uma aula em torno dessa tarefa. No que diz respeito às várias fases da aula, o formador poderá optar por propor a análise de apenas alguns dos episódios para cada uma das fases, de acordo com os aspetos que pretende aprofundar do caso, dado que todas as situações propostas permitem aceder a importantes características do ensino exploratório. Também é possível optar por analisar apenas alguns excertos das intenções da professora em articulação com a análise que é feita do plano de aula. Desta forma, procura-se garantir que não se perde coerência na análise e não são desconsiderados elementos fundamentais à compreensão da prática em análise.

A duração do trabalho presencial de análise dos casos multimédias oscilou entre as 10 e as 25 horas, embora em diversos casos tenha sido complementada com a realização de trabalho de análise para além dessas sessões. O trabalho de análise do caso multimédia em formação é habitualmente concentrado em poucas semanas, embora nas situações em que a dimensão de Passar à prática é concretizada, o calendário se estenda por mais algum tempo.

Uma orientação comum às formações realizadas é a de que a exploração dos casos multimédia seja realizada a pares ou pequenos grupos, de forma a permitir a discussão entre os formandos, favorecendo-se a negociação de significados, tal como é preconizado para o ensino exploratório (Bishop & Goffree, 1986; Canavarro, Oliveira, & Menezes, 2014). Os formandos têm oportunidade de confrontar a sua análise das situações observadas com um colega, contribuindo para o enriquecimento das suas perspetivas sobre o ensino.

A análise que é realizada pelos formandos, suscitada pelas questões que são colocadas ao longo do caso, é passada à escrita, a qual é encarada, neste contexto, como um importante processo de construção de conhecimento. Ocorre pelo diálogo com o outro mas dirige-se também a outros – neste caso, o formador, que recebe o produto para ele próprio analisar. Esta é uma atividade exigente para a generalidade dos (futuros) professores, de um modo geral facilitada pelo trabalho a pares, mas que impulsiona a negociação de significados e a reflexão (Llinares & Krainer, 2006; Mewborn, 2003).

As questões colocadas ao longo do caso são tendencialmente abertas, esperando-se que o formador adote também uma prática compatível com o ensino exploratório. Verificámos, ao longo das formações realizadas que, por vezes, é necessário apoiar os formandos na interpretação das situações recordando informação contextual, e interpelá-los para o aprofundamento da análise das situações apresentadas, o que importa realizar sem condicionar as suas respostas. O incentivo ao interrogar das práticas instituídas e a ajuda à sistematização de ideias sobre um novo conhecimento acerca do ensino da Matemática, num processo de co-construção com os professores, é uma competência essencial por parte do formador (Ruthven & Goodchild, 2008).

Os momentos de discussão e síntese do trabalho realizado pelos formandos, tendencialmente após o término da análise de cada secção do caso, podem contribuir também para um aprofundamento do conhecimento sobre as situações analisadas, retomando hipóteses levantadas em sessões anteriores; podem também considerar elementos teóricos que ajudam a interpretar as situações e dar unidade às observações realizadas. A leitura do texto incluído na secção Sintetizando para cada fase da aula, que os formandos podem fazer em trabalho autónomo, assim como de outros textos disponíveis no sítio virtual do projeto, contribui também para uma sistematização de elementos chave relativos à prática de ensino exploratório que é finalmente objetivada no quadro de ações intencionais do professor (Canavarro, Oliveira, & Menezes, 2014).

O trabalho autónomo decorrente do caso multimédia

O acesso ao caso multimédia não se restringe às sessões de formação presenciais. Estando disponível *online*, ao longo de toda a formação, é sempre possível aos formandos reverem episódios e outros materiais analisados nas sessões. Esta facilidade de acesso permite, por vezes, que estes completem e melhorem algumas das análises que iniciaram na sessão presencial, o que tem acontecido, habitualmente, por iniciativa dos próprios.

O elemento essencial do trabalho autónomo dos formandos a partir do caso multimédia é o Passar à prática, pensado como uma oportunidade importante para o desenvolvimento do conhecimento didático do (futuro) professor, ao planificar e, em algumas situações, lecionar uma aula no quadro deste tipo de ensino. Ao tomar esta opção, valorizamos a prática como conteúdo de formação e também como contexto para o desenvolvimento do conhecimento didático dos (futuros) professores (Sowder, 2007), proporcionando a oportunidade não só de contactarem com a prática de ensino exploratório mas também de eles próprios serem atores dessa prática, realizando as diferentes fases do desenvolvimento curricular, desde a planificação à condução da aula e posterior reflexão sobre a mesma (Franke, Kazemi, & Battey, 2007).

Nos contextos de formação com os casos multimédia, sugere-se habitualmente que o Passar à prática seja desenvolvido a pares ou em pequeno grupo, de modo que os formandos possam apoiar-se mutuamente no exigente trabalho de planificação e, na parte final, na reflexão sobre as aulas realizadas, que encaramos como uma estratégia essencial para o aprofundamento do conhecimento dos (futuros) professores (Llinares & Krainer, 2006). Além disso, conta com o feedback do formador na discussão da natureza das tarefas a adoptar e do plano de aula, o qual pode ter de ser ajustado e reformulado em sucessivas etapas até à versão final (Oliveira & Carvalho, 2014).

No caso da formação contínua, o Passar à prática concretiza-se nas turmas do próprio professor ou de um professor do grupo com que trabalha, embora os professores gostem usualmente de experimentar o ensino exploratório com os próprios alunos. Observar como os seus alunos reagem às tarefas propostas e à metodologia adoptada constitui um motivo de grande curiosidade e expectativa para os professores e que tem um efeito importante no valor que estes atribuem a uma nova prática de ensino, reconhecendo-lhe tendencialmente tanto maior valor quanto maior for a boa adesão e correspondência dos alunos (Oliveira & Carvalho, 2013). O Passar à prática, quer pela natureza da atividade que exige, quer pela modo colaborativo como é desenvolvido, potencia a oportunidade de reflexão sobre a prática de ensino exploratório mas também sobre a prática de ensino regularmente realizada pelos professores, ao favorecer o confronto entre as duas. É uma componente da formação que tem vindo a ser valorizada pelos professores (Canavarro, 2014).

No caso da formação inicial tem-se procurado também criar contextos que permitam que os futuros professores possam experimentar protagonizar ensino exploratório em turmas reais, nomeadamente recorrendo à prática de ensino supervisionada que realizam no cursos. No entanto, quando isso não é possível, os formandos realizam todo o processo de preparação de aula, existindo casos em que lecionam essa aula no contexto da unidade curricular do curso (Canavarro, 2013).

Salienta-se, ainda, a importância do momento de reflexão global sobre o trabalho em torno do caso multimédia que pode decorrer da atividade de planificação já referida ou de uma reflexão sobre a forma de ensaio escrito sobre o ensino exploratório. Estes momentos contribuem também para que os (futuros) professores antecipem desafios com que se podem confrontar na sua prática e compreendam o impacto das ações do professor na dinâmica e na aprendizagem dos alunos (Oliveira & Carvalho, 2013; Oliveira & Cyrino, 2013), favorecendo o desenvolvimento de uma perspectiva realista sobre este tipo de ensino.

A concluir

As ações de formação realizadas com recurso aos casos multimédia, algumas das quais discutidas nos capítulos seguintes deste livro, têm permitindo perceber as potencialidades do dispositivo criado e também refletir sobre algumas das importantes questões que se foram levantando ao longo do percurso de construção e experimentação dos casos.

Uma das questões principais que se levantam relaciona-se com *o papel da teoria* no processo de construção de conhecimento dos formandos em torno dos casos multimédia. Assim, por exemplo, no caso da formação inicial, embora se verifique que os formandos são capazes de identificar e explicar aspetos centrais do ensino exploratório, é pouco evidente a mobilização de quadros teóricos mais gerais na sua análise das situações observadas, o que permitiria um maior aprofundamento das ideias e sustentação do conhecimento dos (futuros) professores (Tomás Ferreira, Oliveira, & Cyrino, 2014). Esta será uma vertente a aprofundar em futuras experimentações dos casos multimédia.

Outra questão que se foi levantando no decurso do processo prende-se com a adesão ou possível resistência dos formandos, principalmente dos professores em serviço, à *atividade continuada de escrita* que é solicitada ao longo do caso multimédia. Alguns futuros professores revelaram um certo cansaço relativamente à escrita, considerando que esta atividade poderia ser aligeirada (Branco & Ponte, 2014); no entanto, esta foi também considerada como um processo de construção de conhecimento importante em outros contextos de formação (Oliveira & Cyrino, 2013). Deste modo, haverá também que ponderar sobre quais os formatos mais adequados, de modo que o reiterado apelo à escrita não constitua um factor de desmotivação na exploração do caso, limitando as suas potencialidades formativas.

Finalmente, levanta-se a questão do *tempo requerido* para a exploração do caso multimédia, no quadro da formação inicial, compatibilizando-a com outros tópicos a desenvolver nas unidades curriculares presente no curso (Branco & Ponte, 2014). Neste caso, a flexibilidade que os casos encerram quanto aos possíveis focos de análise e ao material a ser analisado, parece-nos ser um factor que facilita a sua articulação com diversas ideias importantes no quadro de unidades curriculares de didática da matemática, permitindo uma boa gestão do tempo.

Em síntese, o contacto com práticas de ensino reais através da análise dos casos multimédia é um aspeto que se revela muito positivo e que é apontado inclusivamente por professores que à partida, evidenciam uma forte identificação com a prática de ensino exploratório da Matemática (Oliveira & Carvalho, 2013) e que emerge igualmente noutros estudos (Koc, Peker, & Osmanoglu, 2009). No entanto, as oportunidades de aprendizagem profissional são potenciadas pela possibilidade de levar à prática uma aula com estas características (Branco & Ponte, 2014; Canavarro, 2014), contribuindo para o desenvolvimento do conhecimento didático do (futuro) professor nomeadamente no domínio da planificação de aulas em que é dada uma atenção particular à antecipação do papel do professor, às características da tarefa e à sua intencionalidade, numa lógica muito distinta de práticas de ensino tradicionais. Assim, os casos, sendo protótipos que revelam potencialidades no incentivo à experimentação de novas práticas exigentes de ensino da Matemática e na aquisição e aprofundamento de conhecimento didático de professores, em serviço e em formação inicial, podem considerar-se como uma referência para inspirar e orientar a construção de casos eventualmente semelhantes a usar na formação inicial e contínua de professores. Para além disso, o dispositivo criado deixa um campo fértil para a investigação sobre formação e desenvolvimento profissional de professores de Matemática.

Referências

Alsawaie, O., & Alghazo, I. (2010). The effect of video-based approach on prospective teachers' ability to analyze mathematics teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*(3), 223-241.

Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.

Branco, N., & Ponte, J. P. (2014). Um estudo de integração de recursos multimédia na formação inicial de professores do 2.º ciclo do ensino básico (neste livro).

Brunvand, S. (2010). Best practices for producing video content for teacher education. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education, 10*(2), 247-256.

Canavarro, A. P. (2013). Um caso multimédia na formação inicial: contributos para o conhecimento sobre o ensino exploratório da Matemática. *Da Investigação às Práticas, 3*(2), 125–149.

Canavarro, A. P. (2013, janeiro). Casos multimédia na formação contínua sobre ensino exploratório da Matemática: Uma experiência com um grupo de professores. *Comunicação apresentada no Seminário Práticas Profissionais de Professores de Matemática,* Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa.

Canavarro, A. P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2014). Práticas de ensino exploratório da Matemática: Ações e intenções de uma professora (neste livro).

Canavarro, A. P. (2003). *Práticas de ensino da Matemática: Duas professoras, dois currículos* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Franke, K. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 225-356). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Kersting, N. B., Givvin, K. B., Thompson, B. J., Santagata, R., & Stigler, J. W. (2012). Measuring usable knowledge: Teachers' analyses of mathematics classroom videos predict teaching quality and student learning. *American Educational Research Journal, 49,* 568-589.

Koc, Y., Peker, D., & Osmanoglu, A. (2009). Supporting teacher professional development through online video case study discussions: An assemblage of preservice and inservice teachers and the case teacher. *Teacher and Teacher Education, 25,* 1158-1168.

Llinares, S. & Krainer, K. (2006). Mathematics (Student) Teachers and Teacher Educators as Learners. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 429 – 459). Rotherdam: Sense Publishers.

Llinares, S., & Valls, J. (2010). Prospective primary mathematics teachers' learning from on-line discussions in a virtual video-based environment. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*(2), 177-196.

McGraw, R., Lynch, K., Koc, Y., Budak, A., & Brown, C. (2007). The multimedia case as a tool for professional development: An analysis of online and face-to-face interaction among mathematics pre-service teachers, in-service teachers, mathematicians, and mathematics teacher educators. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10,* 95-121.

Menezes, L., Guerreiro, A., Martinho, M. H., & Tomás Ferreira, R. A. (2013). Essay on the role of teachers' questioning in inquiry-based mathematics teaching. *Sysiphus, 1*(3), 44-75.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: DGIDC.

Mewborn, D. S. (2003). Teaching, teachers' knowledge, and their professional development. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to the Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 45-52). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Oliveira, H., & Carvalho, R. (2014). Uma experiência de formação em torno do ensino exploratório: do plano à aula (neste livro).

Oliveira, H. & Carvalho, R. (2013). Uma experiência de formação, com casos multimédia, em torno do ensino exploratório. In Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 413-426). Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

Oliveira, H., & Cyrino, M. (2013). Developing the knowledge of inquiry-based teaching through analysis of a multimedia case: A study with prospective mathematics teachers. *Sysiphus, 1*(3), 214-245.

Oliveira, H., Canavarro, A. P., & Menezes, L. (2012). Eleição para o delegado de turma (3.º ciclo) – caso multimédia. In *Site do Projeto P3M, Práticas Profissionais de Professores de Matemática.* (Acessível em http://p3m.ie.ul.pt/caso-3-eleicao-para-o-delegado-de-turma-3-ciclo).

Ponte, J. P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarollo profesional del professorado de matemáticas. In N. Planas (Ed.), *Teoria, critica y prática de la educación matemática* (pp. 83-98). Barcelona: Graó.

Ruthven, K., & Goodchild, S. (2008). Linking researching with teaching: Towards synergy of scholarly and craft knowledge. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 561-588). New York: Routledge.

Santagata, R., & Guarino, J. (2011). Using video to teach future teachers to learn from teaching. *ZDM Mathematics Education, 43,* 133–145.

Sowder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 157-223). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Helping teachers learn to better incorporate student thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313–340.

Tomás Ferreira, R., Oliveira, H., & Cyrino, M. (2014). A discussão na aula de Matemática a partir da análise de um caso multimédia na formação inicial de professores (neste livro).

van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2008). Mathematics teachers "learning to notice" in the context of a video club. *Teaching and Teacher Education, 24,* 244-276.

FORMAÇÃO

19. Uma experiência de formação, com casos multimédia, em torno do ensino exploratório

por Hélia Oliveira, Renata Carvalho

19. Uma experiência de formação em torno do ensino exploratório: do plano à aula

Hélia Oliveira
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
hmoliveira@ie.ulisboa.pt

Renata Carvalho
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
renatacarvalho@campus.ulisboa.pt

• **Resumo:** Partindo do contexto de uma oficina de formação em que foi explorado um caso multimédia centrado no ensino exploratório numa aula do 2.º ciclo, analisamos, neste estudo, a forma como duas professoras concebem uma aula de ensino exploratório ao longo do processo de formação, desde a planificação à sua concretização na sala de aula. O estudo segue uma abordagem qualitativa, assente, principalmente, na análise do plano de aula e de reflexões escritas das professoras e na observação de uma aula de cada professora realizada no âmbito da formação. A análise de dados evidencia que, na conceção do plano de uma aula de ensino exploratório, a par da seleção e adaptação da tarefa, a antecipação de estratégias dos alunos e a forma de sistematizar aprendizagens são os aspetos mais difíceis de concretizar para as professoras. Na concretização da aula não se evidenciaram dificuldades, tendo as professoras ajustado as suas ações à especificidade e dificuldades manifestadas pelas turmas, observando-se o papel de suporte conferido pelo plano de aula elaborado.

• **Palavras-Chave:** Ensino exploratório, Planificação, Formação de professores, Prática letiva, Casos multimédia

Introdução

Este capítulo centra-se num estudo desenvolvido no contexto de uma oficina de formação com professoras que lecionam no 2.º ciclo a partir da exploração de um caso multimédia sobre a prática de ensino exploratório (Menezes, Oliveira & Canavarro, 2012). Atendendo, por um lado, a que este tipo de ensino é uma prática profissional exigente e pouco familiar à generalidade dos professores e, por outro, que a elaboração de planos de aula detalhados não constitui uma prática habitual dos professores, através deste estudo pretendemos compreender como duas professoras que participaram na formação concebem e concretizam a planificação de uma aula de ensino exploratório ao longo do processo formativo. Em particular procuramos responder às seguintes questões: Que aspetos se destacam na planificação de duas professoras com o objetivo de levar à prática o ensino exploratório?; Como se concretizam nas aulas de cada professora aspetos centrais do plano elaborado?

O ensino exploratório

A conceção de ensino exploratório adotada neste estudo, e de acordo com Canavarro, Oliveira e Menezes (2012), surge em oposição a práticas letivas de carácter diretivo. Enquanto práticas de ensino de carácter diretivo seguem uma lógica de transmissão de conhecimentos do professor para o aluno, o ensino exploratório, adota uma perspetiva dialógica de construção de conhecimento (Wells, 2004), em que no processo de ensino e aprendizagem a ênfase deve ser colocada no aluno e nas condições que favoreçam a participação, individual e coletiva, numa atividade de inquirição. Nesta perspetiva o conhecimento matemático é construído a partir de situações práticas específicas, em que os alunos levantam questões, formulam conjeturas e exploram possíveis caminhos, apoiando-se nas suas experiências anteriores. Deste modo, no âmbito do ensino exploratório, as tarefas matemáticas assumem particular relevância, dado que é a partir delas que a atividade matemática do aluno se desenvolve. Estas devem favorecer o "raciocinar matematicamente sobre ideias importantes e atribuir sentido ao conhecimento matemático que surge a partir da discussão coletiva dessas tarefas" (Canavarro, Oliveira & Menezes, 2012, p. 256).

O presente estudo teve como referência de uma prática de ensino exploratório um quadro síntese de ações e intenções do professor relativo à prática de ensino exploratório (Canavarro, Oliveira e Menezes, 2012) e tem subjacente uma estrutura de aula em quatro fases (introdução da tarefa, realização da tarefa, discussão da tarefa e sistematização das aprendizagens), nas quais se identificam ações específicas do professor em cada uma das fases com dois objetivos distintos mas interrelacionados: promover as aprendizagens matemáticas dos alunos; e gerir a aula.

No quadro 1 incluem-se aspetos importantes que podem orientar a ação do professor, numa lógica de ensino exploratório. Como por exemplo, no que diz respeito à promoção das aprendizagens dos alunos, na fase de introdução, a ação do professor deve ser no sentido de garantir a apropriação da tarefa pelos alunos, ou no que diz respeito à gestão da aula, por exemplo, na fase de discussão da tarefa, a ação do professor deve ser no sentido de gerir relações entre alunos, estando assim associado a qualquer um desses aspetos um conjunto de possíveis ações do professor[1].

Planificar o ensino exploratório

A atividade de planificação constitui uma vertente importante da prática letiva do professor que tem sido pouco estudada em anos mais recentes, em particular, no que diz respeito à elaboração de planos de aula pelos professores mais experientes (Superfine, 2008). Diversos estudos têm procurado compreender como os professores se apropriam do currículo oficial ou de programas inovadores (Lloyd, 2008; Remillard, 2005), centrando-se nas suas práticas de desenvolvimento do currículo. No entanto, habitualmente esses estudos incidem sobre o modo como os professores utilizam materiais curriculares que são propostos e que já integram orientações que assumem, de certa forma, as características de um plano de aula. Não se encontram, nesses estudos, referências explícitas a um plano detalhado elaborado pelo próprio professor.

O sucesso de uma abordagem centrada no ensino exploratório depende da seleção de tarefas com potencial para desencadear uma atividade matemática rica, assim como de antecipar as situações com que o professor se pode confrontar e de como

1 Para mais pormenores sobre estas ações consultar Canavarro, Oliveira e Menezes (2012).

Quadro 1 – Quadro simplificado das ações e intenções do professor relativo à prática de ensino exploratório adaptado de Canavarro, Oliveira e Menezes (2012).

	Promoção da aprendizagem matemática	Gestão da aula
Introdução da tarefa	Garantir a apropriação da tarefa pelos alunos; Promover a adesão dos alunos à tarefa.	Organizar o trabalho dos alunos.
Realização da tarefa	Garantir o desenvolvimento da tarefa pelos alunos; Manter o desafio cognitivo e autonomia dos alunos.	Promover o trabalho de pares/grupos; Garantir a produção de materiais para a apresentação pelos alunos; Organizar a discussão a fazer
Discussão da Tarefa	Promover a qualidade matemática das apresentações dos alunos; Regular as interações entre os alunos na discussão:	Criar ambiente propício à apresentação e discussão; Gerir relações entre os alunos.
Sistematização das aprendizagens matemáticas	Institucionalizar ideias ou procedimentos relativos a tópicos matemáticos suscitados pela exploração da tarefa; Institucionalizar ideias ou procedimentos relativos ao desenvolvimento das capacidades transversais suscitado pela exploração da tarefa; Estabelecer conexões com aprendizagens anteriores.	Criar ambiente adequado à sistematização; Garantir o registo escrito das ideias resultantes da sistematização.

poderá atuar com o objetivo de não fazer diminuir o nível de exigência cognitiva das tarefas (Stein et al., 2008). Esta prática de ensino requer, pois, uma planificação cuidadosa por parte do professor.

No que diz respeito à seleção de tarefas para a sala de aula, Ainley, Pratt e Hansen (2006) referem-se ao paradoxo da planificação que os professores podem experimentar: quando pretendem que as tarefas que propõem contribuam para atingir determinados objetivos de aprendizagem, estas podem ser pouco estimulantes para os alunos; ao invés, quando procuram que os alunos explorem tarefas que sejam desafiadoras, estas podem ser menos focadas do ponto de vista dos objetivos de aprendizagem visados. A planificação, num quadro de ensino exploratório, pode ajudar a contornar este paradoxo uma vez que, a partir da atividade dos alunos em tarefas desafiadoras, é feita uma sistematização das aprendizagens que visa a institucionalização de ideias e procedimentos relativos a conceitos ou capacidades e a conexão com aprendizagens anteriores, como é referido no Quadro 1. Para tal o professor precisa planear cuidadosamente a forma como vai organizar essa fase, conciliando o propósito matemático previsto para a aula e as produções matemáticas dos alunos (Canavarro, Oliveira & Menezes, 2012).

A relevância que é atribuída à fase de discussão das resoluções dos alunos, no quadro do ensino exploratório, reforça também a importância da atividade de planificação por parte do professor. Defendendo que existem etapas que são imprescindíveis para preparar essa fase, Stein et al. (2008) identificam cinco práticas a considerar: antecipar as resoluções dos alunos; monitorar o trabalho dos alunos durante a fase de exploração da tarefa; selecionar os alunos que vão apresentar as suas resoluções na fase de discussão; e apoiar a turma no estabelecimento de conexões matemáticas entre as diferentes resoluções apresentadas e entre estas e ideias matemáticas importantes. Os autores defendem a importância da planificação do professor não só na antecipação das resoluções dos alunos como na sua preparação para responder aos alunos ou como estruturar as suas apresentações.

No entanto, essas são práticas particularmente difíceis no caso do ensino exploratório, dada a natureza tendencialmente mais aberta das tarefas e do grau de autonomia que é concedido ao aluno na sua atividade. Salienta-se a importância de ter um quadro de referência heurístico que ajude o professor a desenhar o seu ensino, tal como relatam Henning et al. (2012), a propósito da planificação das discussões matemáticas em sala de aula.

Neste contexto, a planificação do professor não pode ser vista como um modelo linear, em que se definem objetivos sequenciais, selecionam tarefas de aprendizagem, organizam as atividades de aprendizagem e especificam procedimentos de avaliação (Superfine, 2008). Trata-se, pelo contrário, de uma prática complexa que coloca o aluno no centro do processo de ensino, compelindo o professor a preparar-se da melhor forma para fazer emergir e aprofundar o conhecimento matemático dos alunos a partir da sua atividade.

A oficina de formação

A oficina de formação que deu origem a este estudo desenvolveu-se a partir da exploração de um dos casos multimédia criados pelo projeto P3M, intitulado "Subidas e descidas de combustíveis" (Menezes, Oliveira & Canavarro, 2012), referente a uma aula de Matemática do 2.º ciclo, possibilitando a análise da prática da professora, em cada fase da aula, e também do trabalho de preparação que lhe está associado. O caso multimédia está organizado de acordo com o quadro de ensino exploratório (Quadro 1), a partir de uma aula assente na realização de uma tarefa matemática (Anexo 1), sobre percentagens, ancorada no programa de Matemática do ensino básico (ME, 2007). O plano desta aula surge de forma faseada ao longo da formação e apresenta o tema e tópico a trabalhar, os objetivos de aprendizagem e material necessário e uma descrição das intenções do professor para cada uma das quatro fases da aula onde se inclui a antecipação de estratégias e erros dos alunos e os aspetos que o professor pretende sistematizar em termos de aprendizagens.

A oficina de formação foi concebida[2], desenvolvida e avaliada tendo por base um trabalho de colaboração entre as duas autoras deste artigo, desenrolando-se em 25 horas de trabalho presencial e 25 de trabalho autónomo. Esta teve como objetivos promover: o reconhecimento do papel da planificação do professor na promoção das aprendizagens; o conhecimento de estratégias promotoras de um ensino exploratório; o reconhecimento das características de tarefas matematicamente significativas e articuladas; a capacidade de análise de situações de ensino; e o desenvolvimento da capacidade de reflexão sobre a prática profissional. Para além da análise e discussão

2 Neusa Branco, membro do Projeto P3M, participou na conceção da oficina de formação com as autoras.

do caso multimédia, as formandas realizaram, a pares, um plano para uma aula que lecionaram e que foi posteriormente objeto de análise e reflexão.

Ao longo da formação, as atividades foram desenvolvidas colaborativamente pelas formandas em sessões presenciais e em momentos de trabalho autónomo. Em cada sessão da formação, as formandas analisaram e discutiram o caso multimédia a pares e participaram em discussões mais alargadas e em sínteses coletivas do trabalho realizado. Houve ainda discussão dos planos de aula realizados e a apresentação e discussão coletiva das aulas lecionadas, como se explica em seguida.

Cada uma das sessões da oficina de formação teve um objetivo bem definido (Anexo 2), embora fosse sendo reajustado em função do trabalho desenvolvido em cada sessão. O trabalho desenvolvido nas primeiras cinco sessões pretendeu promover a reflexão acerca das várias fases de uma aula de ensino exploratório e preparar as professoras para a realização de uma aula com estas características. A primeira sessão centrou-se na resolução e análise da tarefa do caso multimédia, sendo recomendada para trabalho autónomo a leitura de bibliografia acerca do enino exploratório em Matemática. Na segunda sessão as professoras analisaram a fase de introdução da tarefa (intenções e ações da professora) e respetivo plano de aula. Na terceira sessão analisou-se a parte respeitante à fase de realização da tarefa e respetiva parte do plano de aula. Como trabalho autónomo nesta sessão, as professoras iniciaram a preparação da aula de ensino exploratório que iriam lecionar através da seleção da tarefa e definição dos objetivos pretendidos e da elaboração de uma primeira versão do plano de aula. Este foi enviado às formadoras, sendo alvo de discussão e análise personalizada por estas. Na quarta sessão analisou-se a fase de discussão da tarefa do caso, o respetivo plano de aula e discutiram-se as primeiras versões dos planos de aula das formandas. Na quinta sessão analisou-se a fase de sistematização das aprendizagens e foi discutida uma segunda versão dos seus planos de aula.

Entre a quinta e sexta sessão as formandas realizaram uma aula de ensino exploratório concretizando o seu plano de aula. Apesar de toda a preparação da aula ser feita a pares, cada formanda desenvolveu a aula com os seus alunos ficando a outra encarregue de a coadjuvar. A última sessão da formação foi dedicada na íntegra à apresentação oral sobre as aulas realizadas por cada um das formandas, ao balanço de todo trabalho desenvolvido e preenchimento de um questionário de avaliação da formação e do dispositivo.

Metodologia do estudo

Este estudo segue uma abordagem qualitativa (Denzin & Lincoln, 2005) visando a interpretação da forma como duas professoras concebem e concretizam a planificação de uma aula de ensino exploratório ao longo da formação. A investigação foi realizada com um grupo de 10 professoras de Matemática do 2.º ciclo, no entanto, o presente estudo centra-se apenas num par de professoras, Cátia com cerca de dez anos de experiência e Iara, com mais de trinta anos de carreira, ambas revelando forte afinidade com os conteúdos e metodologias presentes no programa de Matemática do ensino básico (ME, 2007). A seleção deste par de professoras prende-se com o facto de as suas aulas terem sido as únicas que foram videogravadas[3].

A recolha de dados coincidiu com a realização da oficina de formação, com recurso a observação direta das sessões de formação, onde se explorou o caso multimédia, registos escritos produzidos pelas formandas durante a exploração do caso, gravação vídeo das aulas em que a planificação foi concretizada (aula da Iara e aula da Cátia), notas de campo das formadoras/investigadoras, a planificação inicial e final de uma aula de ensino exploratório e o relatório escrito das formandas. Este último consistiu numa reflexão individual acerca das aprendizagens mais relevantes realizadas a partir da análise do caso multimédia e suas implicações para a prática letiva, dificuldades vivenciadas ou antecipadas relativamente ao ensino exploratório e aspetos valorizados no caso multimédia e no processo de formação.

A análise de dados foi realizada de forma indutiva, principalmente, a partir dos registos escritos (RS), do plano de aula inicial (PI) e do plano da aula final (PF) elaborado pelo par de formandas, os seus relatórios escritos individuais (R), e a transcrição da aula realizada (A).

Do plano à aula

Na análise de dados começamos por descrever, as opções metodológicas gerais para uma aula de ensino exploratório consideradas pelas professoras, no início da formação, e gradualmente vamos descrevendo e confrontando especificidades da

3 Não querendo colocar constrangimentos às formandas, a gravação de aulas em vídeo foi opcional.

planificação que se foram evidenciando em diversos momentos ao longo da formação, incluindo nas aulas lecionadas.

Planear uma aula de ensino exploratório: ponto de partida

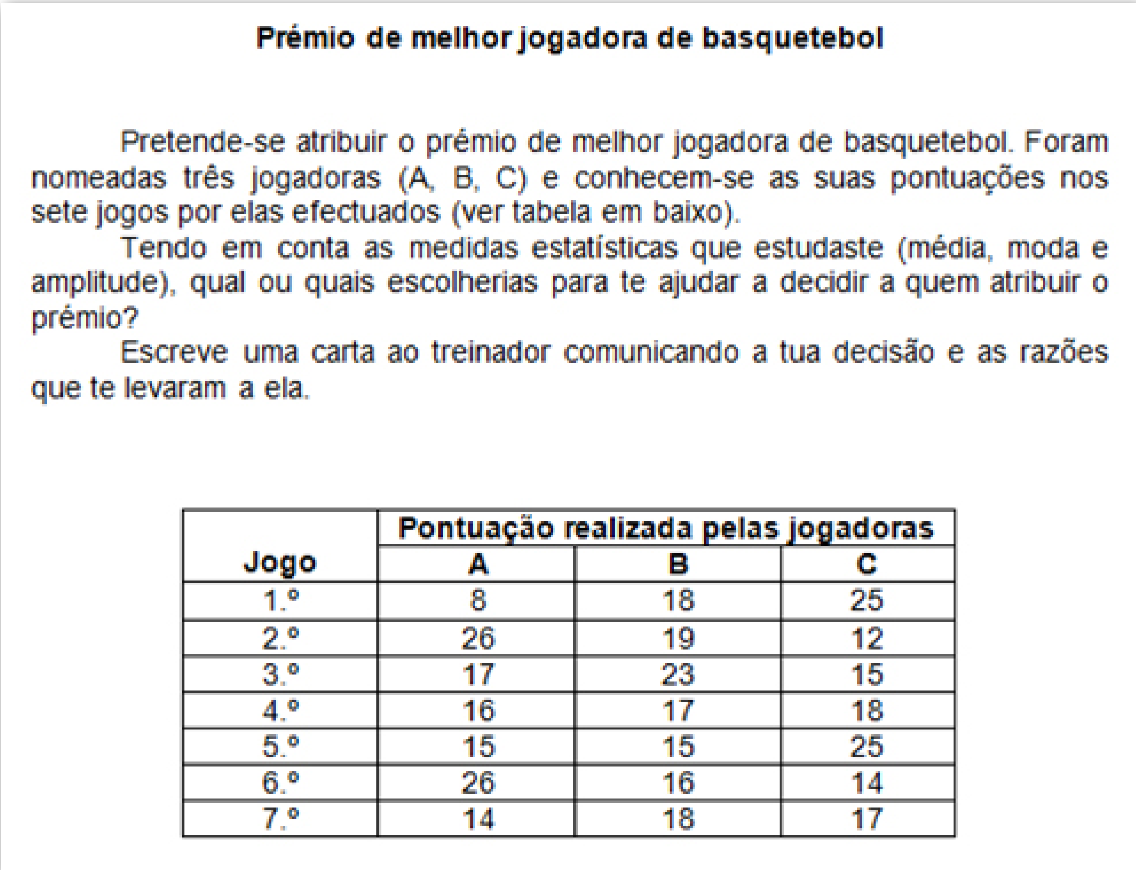
Na primeira sessão de trabalho e após terem resolvido a tarefa apresentada no caso multimédia (Anexo 1), Iara e Cátia foram questionadas acerca das suas possíveis opções metodológicas caso fossem realizar essa tarefa com os seus alunos. Nesta fase inicial da formação, as duas professoras fazem afirmações, principalmente de natureza geral, em que mostram alguma preocupação com a gestão de sala de aula e a aprendizagem dos alunos, referindo aspetos relacionados com a organização da turma e com a aplicação de percentagens a novas situações realçando a importância dos valores de referência:

> • A tarefa seria desenvolvida a pares/pequenos grupos, certificando-se o professor que todos os grupos justificam a resposta
> • Apresentação dos resultados seguida de discussão em grande grupo, confrontando as diferentes justificações, de forma a concluir que a gasolina ficaria mais barata.
> • Despertar a atenção para a importância do saber aplicar corretamente no dia-a-dia as percentagens, com esse fim posteriormente iriam ser colocadas outras situações "reais" em que se tem de ter atenção à sua aplicação e aos valores de referência. (RS1)

A tarefa

Iara e Cátia iniciaram a sua planificação da aula de ensino exploratório que iriam lecionar pela seleção e adaptação de uma tarefa para explorar o subtópico representação e interpretação de dados (Figura 1) e pela definição de objetivos de aprendizagem a atingir pelos alunos e os recursos a utilizar.

Este foi talvez o momento mais complexo e demorado na elaboração do plano de aula pelas duas professoras, tendo existindo muitas dúvidas e hesitações. Um dos objetivos que definiram no plano para esta aula ("utilizar informação estatística para resolver problemas e tomar decisões . . ."), exprime a intenção de que a tarefa constituísse um verdadeiro problema para os alunos, ao qual teriam que dar resposta mobilizando os seus conhecimentos estatísticos, mas que não teria uma resposta única. O propósito de adaptar a tarefa selecionada ao contexto das turmas e à exploração dos subtópicos desejados que suscitasse a análise e discussão de "algumas das fragilidades das medidas, nomeadamente a média aritmética" (PF), exigiu por parte das professoras, com o apoio das formadoras, a testagem de diversos valores tanto a nível de pontos como do número de jogadas e a análise de resultados possíveis em termos de moda, média e amplitude. Deste modo, a tarefa foi tendo várias versões que foram sendo discutidas durante a formação, até chegar à versão que foi apresentada aos alunos (Figura 1).



Prémio de melhor jogadora de basquetebol

Pretende-se atribuir o prémio de melhor jogadora de basquetebol. Foram nomeadas três jogadoras (A, B, C) e conhecem-se as suas pontuações nos sete jogos por elas efectuados (ver tabela em baixo).

Tendo em conta as medidas estatísticas que estudaste (média, moda e amplitude), qual ou quais escolherias para te ajudar a decidir a quem atribuir o prémio?

Escreve uma carta ao treinador comunicando a tua decisão e as razões que te levaram a ela.

Jogo	Pontuação realizada pelas jogadoras		
	A	B	C
1.º	8	18	25
2.º	26	19	12
3.º	17	23	15
4.º	16	17	18
5.º	15	15	25
6.º	26	16	14
7.º	14	18	17

Figura 1 – Tarefa usada por Iara e Cátia adaptada de *Looking Behind The Number* http://showmecenter.missouri.edu/

Um dos aspetos mais destacados pelas professoras nos relatórios escritos individuais, relativamente ao ensino exploratório, é a importância da seleção da tarefa matemática a propor aos alunos, possivelmente pela experiência de análise da tarefa do caso e da dificuldade que sentiram em adaptar a tarefa à realidade dos alunos e aos tópicos que pretendiam abordar. Iara e Cátia referem a dificuldade em selecionar e adaptar tarefas que preencham os requisitos referidos e, como consequência, reconhecem que esta atividade carece de ser contemplada na preparação da aula. Iara, por exemplo, considera-a uma atividade exigente ao procurar atender à diversidade existente na turma: "Um contexto que achamos interessante para uns, não é interessante para todos, mesmo dentro da própria turma" (R). Acrescenta ainda que este é um "processo moroso", considerando que "as tarefas que tínhamos ou que fomos encontrando nas nossas pesquisas não nos agradavam pois não promoviam a dinâmica de aula pretendida" (R).

A par desta reflexão de Iara, Cátia assume que esta foi uma das aprendizagens realizadas com a análise do caso multimédia: "Nesta ação aprendi, a partir da análise do caso multimédia, que a escolha da tarefa é muito importante para todo o desenvolvimento da aula e otimização do processo ensino-aprendizagem" (R). Contudo, as professoras reconhecem, nas reflexões individuais, que o sucesso da aula de ensino exploratório não depende somente da tarefa escolhida mas da forma como esta é desenvolvida em aula e que este tipo de ensino requer uma persistência no tempo para que os alunos assumam essa forma de trabalho na aula.

Os diferentes momentos da aula

Introdução da tarefa. No plano de aula (inicial e final) Iara e Cátia, enumeram um conjunto de intenções para a fase de introdução da tarefa que posteriormente concretizaram na sala de aula. Pretendem essencialmente distribuir o enunciado da tarefa e solicitar uma leitura silenciosa por parte dos alunos, informá-los acerca do tempo disponível para a sua realização, do material disponível para a apresentação das conclusões e da organização dos registos e dos grupos de trabalho. Antecipam ainda, por parte dos alunos, possíveis dificuldades na compreensão da pontuação do jogo que serve de contexto à tarefa.

No plano de aula, Iara e Cátia manifestam intenção de informar os alunos de questões relacionadas com a gestão de sala de aula: "A tarefa irá ser realizada em grupo [durante] 40 minutos"; "Terão de gerir bem o tempo pois é fundamental que escrevam a carta ao treinador"; "Têm de saber defender a opção aí tomada [e] a carta não pode ser muito extensa mas tem de ser redigida de modo claro" (PF). Evidenciam também alguma preocupação em esclarecer os alunos quanto ao que se pretende com a tarefa, antecipando algumas dificuldades ("Uma dúvida que pode aparecer e para a qual a professora deve estar preparada é referente ao modo de pontuação do jogo de basquetebol"), e que conteúdos matemáticos são importantes mobilizar ("As medidas estatísticas que estivemos a estudar nas aulas anteriores podem ser auxiliares importantes na tomada da vossa decisão").

Na aula, as ações das duas professoras centram-se essencialmente na interpretação da tarefa e do contexto em que esta é apresentada. O que previram inicialmente no plano foi, de um modo geral, concretizado, embora a ênfase dada por cada uma das professoras aos aspetos ali contemplados tivesse sido diferente nesta fase. Iara centra o seu discurso no esclarecimento dos alunos relativamente ao que se pretende com a tarefa, alertando para a importância do uso das medidas estatísticas e para o tempo disponível para a resolução da tarefa:

> [É] com base nas medidas estatísticas que temos estado a estudar nas últimas aulas, que vos irão, provavelmente, ajudar a tomar a decisão . . . Já sabem, a carta não pode ser longa, é uma carta de 4 a 5 linhas, mas que tem de ser justificada, porque é que tomam essa opção. (A)

Cátia, por sua vez, opta por discutir com os alunos o contexto em que a tarefa é apresentada (jogo de basquetebol) tendo presente uma dificuldade antecipada no plano de aula – "Sabem como é que se joga? Que há pontuações no jogo de basquete?" (A) –, embora se certifique que os alunos compreenderam o objetivo da tarefa. O tempo que os alunos têm disponível para resolver a tarefa, a forma de registo e a ênfase numa justificação clara para a escolha da jogadora, é referido por Cátia já na fase de realização, no início do trabalho autónomo dos alunos.

Realização da tarefa. Nesta fase da aula as intenções de Iara e Cátia centram-se no acompanhamento do trabalho dos alunos como forma de assegurarem um trabalho produtivo e devidamente justificado e na antecipação de questões, erros e dificuldades. No plano de aula final referem que pretendem "circular pela sala de aula observando o trabalho dos alunos [e] estar atenta[s] a bloqueios existentes no desenvolvimento do trabalho", nomeadamente no que diz respeito à "determinação das medidas estatísticas" por parte dos alunos, "à diversidade no trabalho realizado pelos alunos pois esse facto irá determinar a riqueza da discussão final", "ao ritmo do trabalho dos alunos não deixando que existam momentos de trabalho não produtivo que levem a que o grupo não tenha a carta escrita no momento da discussão" (PF).

No que se refere à antecipação do que esperam encontrar e de como vão agir, Iara e Cátia referem um conjunto de questões a colocar aos alunos com o objetivo de os fazer pensar ("Será que a jogadora que tem a maior pontuação num dos jogos deverá ser a vencedora?"; "A jogadora que tem nos seus jogos uma pontuação muito baixa deverá ser logo eliminada?";"Será que deve ser escolhida a jogadora que tiver um total maior de pontos?"), possíveis erros e dificuldades dos alunos e o modo como pretendem agir ("Se o erro tiver por base a utilização de um conceito ou procedimento rever junto do grupo o conceito ou procedimento"; "Se o erro conduziu a um valor não plausível o grupo deverá ser levado a criticar o resultado"; "É esperado que alguns grupos se centrem apenas nos dados e não achem importante utilizar as medidas estatísticas, o que não é o pretendido").

Relativamente ao acompanhamento, que desenvolveram em aula, do trabalho dos alunos as ações de Iara e Cátia caracterizaram-se essencialmente pelo questionamento dos alunos como forma de os ajudar a compreenderem e a usar as medidas estatísticas, a tomar decisões e a apresentar justificações claras tal como tinham referido no plano de aula. Na aula de Cátia um dos grupos de trabalho calculou a moda e a amplitude usando os dados das três jogadoras. Ao passar pelo grupo, Iara (que estava a participar na aula de Cátia) apercebeu-se do erro e questionou o grupo no sentido de perceber que conceito tinham de moda ("O que é a moda, digam-me lá? . . . O que é que é isso dos números iguais?") e de amplitude ("A amplitude mas de quem? A amplitude geral destes dados?"). Apesar de terem antecipado que os erros dos alunos poderiam surgir a partir do uso incorreto de procedimentos ou incompreensão do conceito, o uso incorreto da moda não era esperado, uma vez que este é um conceito que já tinha sido abordado também no 1.º ciclo. Iara e Cátia esperavam sim, dificuldades dos alunos no cálculo da média tal como o indicaram no plano de aula: "Por exemplo uma média que é superior ao maior valor dos dados (erro geralmente cometido pelos alunos que adicionam apenas os dados e não realizam a divisão final)". Foi uma situação inesperada mas que mereceu uma intervenção de Iara no sentido de ajudar os alunos a clarificarem conceitos erróneos.

Esta fase da aula foi, pois, marcada por um forte questionamento aos alunos não no sentido de lhes dar respostas mas sim de os confrontar e de os ajudar a tomar decisões e a apresentarem justificações. No caso da aula de Iara, um questionamento muito centrado na apresentação de justificações claras por parte dos alunos:

> O que é isso de ter uma menor amplitude? Estejam preparados para explicar aos colegas o que é isso . . . Vê lá se o arredondamento fica bem feito. Se fossem até às centésimas quanto era? . . . Dizem: "o que tem uma amplitude muito alta ou o que tem uma amplitude

> muito baixa ou tem uma moda muito alta…" Isto pode não dizer grande coisa ao treinador, que não sabe nada de matemática, está bem? Perceberam? A minha ideia é serem claros. (A)

No caso da aula de Cátia e, pelas dificuldades manifestadas pelos alunos, um questionamento mais centrado no apoio à clarificação de conceitos e procedimentos relativamente ao cálculo das medidas estatísticas:

> E achas que as medidas estatísticas que vos mandam aí calcular não são necessárias? . . . Ou usarem algumas…se calhar mudam de posição. Só assim [com] a soma de pontos é difícil . . . A amplitude mas de quem? A amplitude geral destes dados?. . . O que é a moda, digam-me lá? . . . O que é que é isso dos números iguais?(A)

Tendo em conta a realidade de cada turma, Iara e Cátia usaram o questionamento com o duplo papel que identificaram no vídeo do caso multimédia – para promover a aprendizagem dos alunos levando-os a pensarem sobre o que realizaram e a serem claros nas suas justificações e para percecionarem as aprendizagens dos alunos interpelando-os diretamente relativamente aos conceitos de moda e amplitude.

Para Iara, a fase de realização da tarefa, aparentemente, não se revela difícil de conceber e gerir uma vez que na sua reflexão não a refere. Já Cátia menciona-a fazendo uma síntese do que considera dever ser a ação do professor nesta fase:

> Deve acompanhar os alunos procurando o tipo de abordagem que estes estão a fazer à situação proposta, fazer questões de desbloqueio, se existir necessidade, ou de manter o desafio (algumas destas questões fazem parte das antecipações de situações que o professor deve ter em conta no plano de aula), incentivar os alunos a registarem as suas conclusões, explicando e justificando as respostas. (R)

Esta descrição de Cátia vai ao encontro de algumas das ações que esta e Iara protagonizaram na sala de aula durante a realização da tarefa, nomeadamente no que se refere às "questões de desbloqueio", evidenciando também valorizar o que foi antecipado no seu plano de aula.

Discussão da tarefa. Um dos momentos importantes na preparação da discussão na sala de aula é a organização das resoluções dos alunos a serem apresentadas, de forma a promoverem um debate interessante, esclarecedor e promotor de aprendizagem. Este é um aspeto que Cátia refere no seu relatório escrito: "Na fase da apresentação o professor deve selecionar os grupos que irão apresentar as suas conclusões, de preferência com diferentes formas de abordagem e de níveis de profundidade/completude/rigor de registo" (R).

No entanto, na aula que realizaram, Iara e Cátia optam por não selecionar resoluções dos alunos e dar a oportunidade a todos os grupos de lerem as cartas que redigiram para convencer o treinador acerca da escolha da melhor jogadora, como referem no seu plano de aula: "Todos os grupos leem as suas cartas e a professora vai registando no computador e projetando as ideias fundamentais das suas opções" (PF). Esta opção prede-se com o facto de não existirem muitos grupos de trabalho em cada uma das turmas (cerca de 5 grupos de 4 alunos cada) não se tornando demorada a apresentação de trabalhos no momento de discussão. As suas intenções passam pela gestão da discussão numa perspetiva dialógica, confrontando e questionando os alunos mas sempre com a preocupação de corrigir e melhorar a comunicação oral dos alunos: "A linguagem utilizada pelos alunos irá sendo corrigida sempre que necessário" (PF).

A dificuldade em antecipar estratégias dos alunos fez com que, para esta fase da aula, tivessem de refletir e melhorar o plano. Estas dificuldades são assumidas por Iara no seu relatório escrito, bem como a forma como se prepararam para ultrapassar essas dificuldades. Iara refere igualmente que o realizar uma tarefa de ensino exploratório no tema Estatística, desafiou as metodologias que por norma adotavam na abordagem deste tema:

> Habituadas que estávamos a dar estes conceitos de forma direta e a treiná-los com os exercícios típicos de qualquer manual escolar tivemos dificuldade em prever como os alunos iriam reagir à tarefa e antever possíveis estratégias e dificuldades. Várias leituras foram feitas, quer do ponto de vista científico quer didático, antes da elaboração do plano de aula. Foi fundamental neste processo o apoio das formadoras. (R)

No primeiro plano de aula, Iara e Cátia não anteciparam possíveis estratégias dos alunos referindo de forma muito vaga o que esperavam do trabalho dos alunos: "É esperado que haja para diferentes opções de escolha de premiada ou a escolha da mesma premiada mas baseada em prossupostos diferentes" (PI). Na discussão do plano de aula e quando questionadas acerca de possíveis resoluções/respostas dos alunos as professoras fazem este exercício de antecipação e na versão final do plano de aula referem diversas hipóteses de respostas dos alunos:

> É esperado que alguns grupos façam a sua escolha baseada apenas na média ou na moda, não calculando a amplitude dos dados. Podem existir grupos que escolham a jogadora A (moda), grupos que escolham as jogadoras B e C (média) e grupos que escolham a jogadora C (média e moda). A discussão assente nestas hipóteses levará os alunos a escolher atribuir o prémio à jogadora C. (PF)

O momento de discussão na sala de aula começa (para ambas as professoras) com o registo numa tabela das medidas calculadas pelos alunos e respetiva opção relativamente à jogadora que deve ganhar o prémio. Estes resultados são projetados na sala de aula e alvo de uma discussão mais alargada em que cada grupo terá de justificar a sua opção.

As ações de Iara e Cátia centram-se numa fase inicial, no registo das respostas dos alunos e posteriormente no questionamento levando-os a justificarem as suas opções. Iara confronta diversos alunos face a opções e justificações divergentes, proporcionando-lhes um momento de aprendizagem onde a certeza e convicção dos argumentos apresentados fazem toda a diferença na aceitação da resposta por parte de outros colegas:

> Este grupo aposta na jogadora B, principalmente por causa da pouca variação dos dados. Só para clarificar: onde é que vocês viram que havia pouca variação de dados? ... E só a amplitude servia-me para alguma coisa? ... Vamos pôr aqui o David e o Pedro a entrar aqui... O David defende mesmo que é o C e o Pedro está neste momento a defender que é o B. Eu gostava de vos ouvir...o resto da turma vai ouvir com muita calma ... Porquê Beatriz? Porque é que o argumento do Pedro não é válido? (A)

Cátia também questiona os alunos e tenta que estes mostrem certeza nos argumentos que apresentam:

> Portanto, vocês dizem que é a C, certo? Então calcularam a moda, a média, a amplitude e dizem que é a melhor, mas porque é que é a melhor? … E como é que tu provas isso? Melhores resultados como? O que é que é isso dos melhores resultados? … Somaram os pontos de cada uma das jogadoras e fizeram a amplitude … ok. E acham que isso chegava para me convencer que era essa? … Tu continuavas com a C … alguém mudava? (A)

Sistematização das aprendizagens. A planificação da fase de sistematização das aprendizagens foi outro aspeto difícil de concretizar por parte de Iara e Cátia. No plano de aula inicial, as professoras mostram intenção de levar os alunos "a concluir que não há uma única resposta correta, mas que há argumentos mais fortes que outros e que as medidas estatísticas ajudam à tomada de decisões", não referindo que tipo de ações pretendem realizar na sala de aula de forma a concretizarem esta intenção. Após discussão do plano de aula inicial com as formadoras, Iara e Cátia optam por apresentar de forma mais clara como pretendem concretizar esta fase da aula e apresentam na versão final do plano a intenção de, com o apoio de uma folha de cálculo (Figura 2), manipular valores e discutir "algumas das fragilidades das medidas, nomeadamente a média aritmética que é uma medida pouco resistente a valores muito distantes dos restantes" (PF) e abandonam a ideia inicial de apenas registar "as opções que assentem nos critérios mais fortes e a determinação das medidas estatísticas para todas as atletas" (PI).

A antecipação do que poderia ser a sistematização das aprendizagens na tarefa que realizaram foi outra das dificuldades referidas por Iara no relatório escrito individual, que as ultrapassou fazendo opções diferentes das que inicialmente tinha pensado com a sua colega:

> Outra dificuldade sentida foi em que modos se deveria fazer a sistematização. A sistematização desta tarefa não podia incidir sobre os procedimentos de determinação das medidas estatísticas mas no que elas nos dão a conhecer, neste sentido optámos por uma sistematização assente na variação de dados. (R)

Quadro resumo (excel)

7 JOGOS				6 JOGOS		
A	B	C				
8	18	25				
26	19	12		26	18	25
17	23	15		17	19	14
16	17	18		16	23	18
15	15	25		15	17	25
26	16	14		26	16	15
14	18	17		14	18	17
122	126	126		114	111	114
17,42857	18	18		19	18,5	19
26	18	25		26	18	25
18	8	13		12	7	11

Figura 2 – Folha de cálculo de apoio à sistematização de aprendizagens.

Na aula, Iara e Cátia iniciam a sistematização de aprendizagens de forma semelhante. Recorrem a uma folha de cálculo com os dados iniciais das três jogadoras e retiram-lhe alguns valores (principalmente os valores extremos). Apresentamos um excerto da aula de Iara para se perceber melhor como foi iniciada esta discussão:

> Eu resolvi tirar o valor mais baixo a todas as jogadoras. Eliminei... pensei assim "aquela jogadora A fica ali um bocado...sem saber" então, vou tirar e vamos ver o que é que acontece. Tirei o valor mais baixo a todas, como podem ver, tirei aqui o 8, isto foi feito numa folha excel . . . tirei o 8 e isto aqui é calculado automaticamente, a média. Aqui tirei o 15...e aqui tirei o 12. Olhem logo as alterações que isto dá...(A)

Através de confronto de ideias e do questionamento, Iara ("A média é sensível a quê?"; "E média varia muito com o quê?"; "Com a mesma soma de pontos têm sempre a mesma média?"(A)) e Cátia ("O total de pontos desceu. Mas o que é que aconteceu?"; "O que é que tu verificas nesta jogadora?", "Qual foi o valor que se alterou mais?" (A)) pretendiam assim, levar os alunos a refletirem acerca da fragilidade das medidas estatísticas, nomeadamente da média. Face às dificuldades manifestadas pela turma de Cátia durante a resolução da tarefa, Iara reforça a discussão à volta da média pedindo aos alunos que reflitam acerca da relação entre a soma dos dados e a média: "Com a mesma soma de pontos têm sempre a mesma média?" Esta foi uma discussão curta apoiada na resposta de uma aluna e que, segundo a professora, poderia ser assunto para uma nova aula.

A concluir

Um primeiro aspeto a salientar da planificação de uma aula de ensino exploratório diz respeito à escolha da tarefa que, como vimos, teve uma atenção particular das professoras uma vez que pretendiam que esta fosse desafiante para os alunos, constituindo um problema em que poderiam mobilizar os seus conhecimentos do tópico que estavam a estudar. No entanto, procuravam também que a tarefa tivesse características que suscitassem uma dinâmica de discussão entre os alunos, nomeadamente, pela diversidade de estratégias e respostas possíveis, e que permitisse, no final, conduzi-los a uma reflexão mais aprofundada sobre as medidas estatísticas. Estas ideias que orientaram as professoras na escolha e adaptação da tarefa vão ao encontro de um aspeto destacado no ensino exploratório: a opção por tarefas que apoiem os alunos a raciocinar matematicamente e, através da discussão coletiva, a atribuir sentido ao conhecimento matemático (Canavarro, Oliveira & Menezes, 2012). A forte intencionalidade na escolha da tarefa, a qual foi sendo aperfeiçoada em interação com as formadoras, denota uma gradual apropriação de características importantes de tarefas matemáticas no quadro de ensino exploratório. A seleção e adaptação de tarefas é considerada, pelas professoras, como uma atividade muito exigente, porque requer um grande investimento, mas de enorme importância neste quadro de ensino.

As professoras organizam o plano de aula de acordo com as quatro fases de uma aula de ensino exploratório, adotando como modelo o plano de aula que foi discutido e trabalhado ao longo da formação. O plano de aula inicialmente elaborado não sofreu alterações profundas mas foi sendo progressivamente detalhado e enriquecido. As professoras não evidenciaram dificuldades na planificação e concretização da fase de introdução, de realização da tarefa incluindo a antecipação de erros dos alunos, nem na dinamização da fase de discussão que assumiu uma perspetiva dialógica

(Wells, 2004) pautada pelo confronto e questionamento aos alunos. Contudo, quando pensam na fase de discussão das resoluções dos alunos, as professoras manifestam alguma dificuldade em antecipar possíveis estratégias dos alunos, possivelmente, não só pelo facto de a tarefa não lhes ser familiar mas também por esta não ser uma prática comum para si próprias. Ao serem questionadas e incentivadas pelas formadoras a refletir sobre esta antecipação, dada a sua importância para a dinamização desta fase da aula, as professoras reformulam o plano de aula e preparam-se para a discussão adicionando à antecipação dos erros dos alunos a antecipação das suas possíveis estratégias, o que representa um suporte importante no momento em que têm de lidar com situações inesperadas na sala de aula, quer na fase de realização quer de discussão e sistematização. Procurar colocar-se no papel do aluno e pensar como ele é um exercício de antecipação difícil, assim como o é conseguir integrar esta atividade de planificação na rotina profissional. No que se refere à seleção das resoluções dos alunos para o momento de discussão, as professoras optam por não escolher algumas resoluções mas dar oportunidade a todos os grupos de apresentarem a sua resolução uma vez que o número de grupos de trabalho assim o permitia.

É de salientar a importância da planificação da fase de sistematização das aprendizagens como um aspeto que fez as professoras repensarem a tarefa e todo propósito do trabalho de planificação realizado. A necessidade de explicitarem como se desenrolaria esta da aula, contribuiu para que as professoras pensassem detalhadamente na tarefa, reformulando-a de forma a ir ao encontro do que constituía o propósito matemático desta aula, não deixando que esta fase se confinasse à escrita de um par de conclusões, mas se tornasse num momento rico de discussão matemática acerca das medidas estatísticas. Deste modo, evidencia-se como o quadro de ensino exploratório que orientou a formação, contribuiu para que as professoras não vivenciassem o paradoxo da planificação referido por Ainley, Pratt e Hansen (2006).

Como as professoras reconhecem, foi através da interação com as formadoras que foram aperfeiçoando o plano, uma prática que não é habitual, em particular com o nível de detalhe com que foi efetuado. Não é um documento ao qual as professoras ficam totalmente vinculadas, verificando-se que o implementam enfatizando aspetos diferentes em cada uma das turmas, de acordo com as características dos alunos, mas constitui um suporte importante para a reflexão acerca do que e como se pretende ensinar. Assim, por exemplo, verifica-se que apesar de as duas professoras terem apoiado o trabalho autónomo dos alunos principalmente através do questionamento, tal como tinham previsto no plano elaborado, o foco é distinto em cada uma das turmas, tendo em conta a forma como os alunos foram realizando a tarefa e as dificuldades que evidenciavam.

A análise do plano que as duas professoras elaboraram para a aula, a forma como o levaram à prática e refletiram sobre esta experiência, permite perceber que o foco da formação na atividade de planificação foi pertinente. Por um lado, permitiu que as professoras aprofundassem o seu conhecimento sobre o ensino exploratório, nomeadamente quanto às características das tarefas a propor aos alunos e como explorá-las na sala de aula, por outro, contribuiu para que tomassem consciência da importância da elaboração de um plano detalhado que as ajudasse a prepararem-se de uma forma cuidadosa para uma prática de ensino exigente.

O ato de planificar, principalmente com um certo nível detalhe, reveste-se de alguma complexidade como é assumido pelas professoras. As cinco práticas referidas por Stein et al. (2008), a que estão associadas diversas ações, encontram eco no trabalho de planificação das professoras participantes e tiveram uma expressão significativa na sua prática de sala de aula. É de salientar relativamente a uma das duas professoras que apesar ter estado envolvida em diversos projetos de investigação e desenvolvimento curricular, ao longo de muitos anos de carreira, esta constituiu para si uma experiência nova no que diz respeito a alguns aspetos que procurou contemplar na planificação e na sua aula, como sejam a antecipação de estratégias dos alunos e a sistematização das aprendizagens visadas.

Observa-se em muitos contextos de reforma curricular, em que se procura que os professores adotem novas práticas, que estes são acompanhados por materiais que apoiam o professor (Lloyd, 2008) mas que se podem tornar demasiado prescritivos. No caso da formação que deu origem a este estudo, todas as professoras participantes tiveram total liberdade para escolher o tópico e as tarefas que iriam propor na aula, o que constituiu um desafio adicional. O quadro de referência sobre o ensino exploratório que estrutura o caso multimédia e o apoio das formadoras constituíram um suporte importante para a planificação e concretização da aula, parecendo ter contribuído para a coerência que observámos na prática das duas professoras que analisámos.

Referências

Ainley, J., Pratt, D, & Hansen, A. Connecting engagement and focus in pedagogic task design. *British Educational Research Journal*, 32(1), 23–38.

Canavarro, A. P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da Matemática: O caso de Célia. In L. Santos, A. P. Canavarro, A. M. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Eds.), *Investigação em educação matemática 2012: Práticas de ensino da matemática* (pp. 255-266). Portalegre: SPIEM.

Denzin, N. & Lincoln, Y. S. (2005). Introduction: The discipline and practice of qualitative research. In N. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.) *The Sage Handbook of Qualitative Research.* Thousand Oaks: SAGE.

Henning, J., McKeny, T., Foley, G., & Balong, M. (2012). Mathematics discussions by design: Creating opportunities for purposeful participation. *Journal of Mathematics Teacher Education, 15*(6), 453-479.

Lloyd, G. (2008). Teaching mathematics with a new curriculum: Changes to classroom organization and interactions. *Mathematical Thinking and Learning, 10,* 163–195.

ME (2007). *Programa de Matemática do ensino básico.* Lisboa: DGIDC.

Menezes, L., Oliveira, H., & Canavarro, A. P. (2012). Subidas e descidas dos combustíveis (2.º ciclo) – caso multimédia. In *Site do Projeto P3M, Práticas Profissionais de Professores de Matemática.* (Acedido em http://p3m.ie.ul.pt/caso2-subidas-e-descidas-dos-combustiveis-2-ciclo)

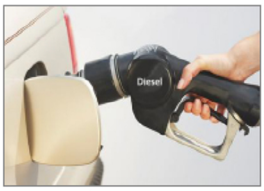
Remillard, J. (2005). Examining key concepts in research on teachers' use of mathematics curricula. *Review of Educational Research, 75*(2), 211–246.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practice for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10,* 313-340.

Superfine, A. (2008). Planning for mathematics instruction: A model of experienced teachers' planning processes in the context of a reform mathematics curriculum. *The Mathematics Educator, 18*(2), 11-22.

Wells, G. (2004). *Dialogic inquiry: Towards a sociocultural practice and theory of education.* Cambridge: Cambridge University Press.

Anexo 1 – Tarefa “Petrolex, Lda.”



Como já deves ter dado conta, os preços dos combustíveis variam, com muita frequência, consoante o preço do barril de petróleo.

As bombas de combustível Petrolex Lda aumentaram o preço da gasolina em 10%, o que fez com que os automobilistas protestassem imenso. Perante isto, o Director da Petrolex Lda mandou voltar a baixar o preço da gasolina em 10%.

Será que a gasolina voltou ao preço anterior? Justifica a tua resposta.

Anexo 2 – Quadro síntese da formação

<table>
<tr><th></th><th></th><th>Sessão 1 (23.02.13)</th><th>Sessão 2 (09.03.13)</th><th>Sessão 3 (16.03.13)</th><th>Sessão 4 (06.04.13)</th><th>Sessão 5 (13.04.13)</th><th>Sessão 6 (01.05.13)</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Trabalho presencial</td><td rowspan="2">Discussão inicial</td><td rowspan="2">Apresentação:
- dos formandos
- do dispositivo de formação</td><td>Síntese coletiva</td><td colspan="3" rowspan="2">Síntese coletiva do trabalho realizado, focando o sintetizando</td><td rowspan="3">Apresentação do trabalho final</td></tr>
<tr><td>Discussão do e bibliografia recomendada</td></tr>
<tr><td>Trabalho de pares</td><td>A tarefa</td><td>Introdução da tarefa</td><td>Realização da tarefa</td><td>Discussão da tarefa</td><td>Sistematização das aprendizagens</td></tr>
<tr><td>Discussão final</td><td colspan="5">Discussão do trabalho realizado na sessão</td><td>Balanço final da formação</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Trabalho não presencial</td><td rowspan="4">Trabalho autónomo</td><td rowspan="4">Leitura de texto recomendado</td><td rowspan="4">Ler o Sintetizando</td><td rowspan="3">Ler o Sintetizando</td><td rowspan="2">Ler o Sintetizando</td><td>Ler o Sintetizando</td><td rowspan="4">Realização do relatório de reflexão individual</td></tr>
<tr><td>Concluir o plano de aula</td></tr>
<tr><td>Aceder à parte final do plano de aula</td><td>Implementação do plano de aula</td></tr>
<tr><td>Análise das resoluções dos alunos</td><td>Iniciar a preparação do plano de aula</td><td>Reflexão pós-aula</td></tr>
</table>

FORMAÇÃO

20. A discussão na aula de Matemática a partir da análise de um caso multimédia na formação inicial de professores

por Rosa Tomás Ferreira, Hélia Oliveira, Márcia Cyrino

20. A discussão na aula de matemática a partir da análise de um caso multimédia na formação inicial de professores

Rosa Tomás Ferreira

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto & CMUP

rferreir@fc.up.pt

Hélia Oliveira

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

hmoliveira@ie.ulisboa.pt

Márcia Cyrino

Universidade Estadual de Londrina

marciacyrino@uel.br

• **Resumo:** Este capítulo assenta num estudo que se desenrolou no contexto da utilização de um caso multimédia na formação inicial de professores. Com foco na fase de discussão coletiva de uma aula exploratória de Matemática do 7.º ano, procuramos compreender como os futuros professores analisam dois episódios dessa fase da aula no que respeita às ações e papel da professora protagonista do caso multimédia. Seguimos uma abordagem qualitativa, baseada na análise das produções escritas dos participantes resultantes da sua exploração do caso multimédia. A análise de dados evidencia a capacidade de os futuros professores identificarem diversas ações centrais da professora protagonista do caso, tanto na promoção de aprendizagens matemáticas dos alunos como na gestão da aula, destacando-se as primeiras. Revela também a sua compreensão do papel do questionamento do professor na interpretação dessas ações. Os resultados apontam alguns caminhos para investigação futura bem como aspetos a considerar na exploração do caso multimédia em contextos de formação.

• **Palavras-Chave:** Ensino exploratório; Discussões coletivas; Formação inicial; Recursos multimédia.

Introdução

A abordagem exploratória ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática tem recebido cada vez mais atenção, tanto por parte da investigação como dos professores, que procuram integrar na sua prática aspetos vários desta forma de encarar o que significa ensinar e aprender Matemática (Chapman & Heather, 2010). Sem deixar de reconhecer a importância dos restantes momentos de trabalho com os alunos, a investigação tem evidenciado o complexo papel do professor nos momentos de discussão coletiva e sistematização de ideias matemáticas, em aulas de Matemática de cunho exploratório (Oliveira, Menezes, & Canavarro, 2013; Cengiz, Kline & Grant, 2011; Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008). Este capítulo baseia-se numa experiência, levada a cabo em duas turmas de formação inicial de professores de Matemática, de duas instituições de ensino superior, centrada no uso de um caso multimédia sobre a prática de ensino exploratório numa turma do 3.º ciclo. Em particular, debruçamo-nos sobre o modo como os futuros professores analisam dois episódios do momento de discussão coletiva de uma aula exploratória de Matemática no que respeita às ações e papel da professora protagonista do caso multimédia. Pretendemos assim compreender como estes futuros professores identificam e interpretam os aspetos significativos que marcam a prática da professora, tendo em conta o seu propósito matemático para esta aula, e se conseguem relacioná-los com princípios mais gerais, ou seja, se estão a desenvolver uma compreensão aprofundada sobre a prática de ensino exploratório nesta fase da aula.

A discussão coletiva no ensino exploratório

O ensino exploratório diz respeito a um certo tipo de prática do professor que se afasta de uma perspetiva transmissiva do processo de ensino-aprendizagem e em que se assume que "a aprendizagem é um processo simultaneamente individual e coletivo, resultado da interação dos alunos com o conhecimento matemático, no contexto de uma certa atividade matemática, e também da interação com os outros (colegas e professor), sobrevindo processos de negociação de significados" (Oliveira et al., 2013, p. 31). Neste quadro, as tarefas matemáticas a propor assumem particular importância porque é a partir destas que a atividade matemática dos alunos se desenvolve. Essas tarefas podem ser problemas, investigações ou explorações (Ponte, 2005) mas devem possuir certas características: partirem de uma situação desafiadora; permitirem que o aluno se apoie na sua experiência para as resolver, assumindo assim a possibilidade do uso de diferentes estratégias de resolução e com diferentes níveis de sofisticação matemática; visarem uma compreensão aprofundada dos conceitos matemáticos que se ligam com o conhecimento que os alunos constroem nas aulas.

De acordo com Oliveira, Menezes e Canavarro (2013), uma aula de natureza exploratória engloba quatro momentos essenciais. Na fase de *introdução da tarefa*, o professor apresenta uma tarefa matemática aos alunos e procura que a compreendam. Na fase de *realização da tarefa*, o professor monitoriza o trabalho autónomo dos alunos, procurando que as suas intervenções mantenham elevado o nível de exigência cognitiva da tarefa (Stein & Smith, 2009).

A fase de *discussão da tarefa* coloca inúmeros desafios ao professor. A seleção e sequenciação das resoluções que serão as protagonistas desta fase da aula, fruto do trabalho do professor na preparação da aula e na fase anterior, são ações essenciais para que exista, de facto, discussão de ideias matemáticas, mas o inesperado tem um lugar de destaque. Assim, a gestão das interações entre alunos e entre estes e o professor, com vista à promoção da qualidade matemática das explicações e justificações que vão sendo apresentadas, à compreensão, comparação e contraste das diferentes estratégias de resolução, e à discussão da respetiva eficácia mostram-se como principais desafios do professor (e.g., Cengiz et al., 2011; Stein et al., 2008). O questionamento do professor, fortemente ancorado em questões de focalização e de inquirição (Mason, 2000, 2010), desempenha um papel fundamental nesta fase da aula exploratória, em que os pedidos de explicação e justificação, o centrar da atenção dos alunos em processos mais complexos ou imprecisões ou erros matemáticos, e a gestão de acordos e desacordos entre os alunos são centrais em todo o discurso da sala de aula (Menezes, Guerreiro, Martinho & Tomás Ferreira, 2013).

A fase de *sistematização das aprendizagens* pode decorrer em simultâneo com a fase de discussão da tarefa, no entanto, neste texto distinguimo-las pelos seus objetivos: com base nas ideias avançadas na fase anterior, o professor ajuda agora os alunos a “reconhecer os conceitos e procedimentos matemáticos envolvidos, estabelecer conexões com aprendizagens anteriores, e/ou reforçar os aspetos fundamentais dos processos matemáticos transversais como a representação, a resolução de problemas e o raciocínio matemático" (Oliveira et al., 2013, p. 34). Estes autores procuraram descrever práticas de ensino exploratório da Matemática, identificando ações instrucionais do professor e respetivas intenções subjacentes em cada uma das fases consideradas de uma aula exploratória. Esta descrição assenta em dois aspetos essenciais da prática do professor: promover as aprendizagens matemáticas dos alunos e gerir as interações e a aula. O quadro 1 apresenta a descrição dessas práticas relativamente à fase de discussão da tarefa. Os aspetos destacados neste quadro ajudam a orientar não só a ação do professor na fase de discussão da tarefa mas também a reflexão sobre o papel do professor nesta fase crucial de uma aula de natureza exploratória.

Quadro 1 – Intenções e ações do professor na fase de discussão da tarefa (Oliveira, Menezes, & Canavarro, 2013, p. 33).

DISCUSSÃO DA TAREFA	**Promover a qualidade matemática das apresentações dos alunos:** - Pedir explicações claras das resoluções - Pedir justificações sobre os resultados e as formas de representação utilizadas - Discutir a diferença e eficácia matemática das resoluções apresentadas. **Regular as interações entre os alunos na discussão** - Incentivar o questionamento para clarificação de ideias apresentadas ou esclarecimento de dúvidas - Incentivar análise, confronto e comparação entre resoluções - Identificar e colocar à discussão erros matemáticos das resoluções	**Criar ambiente propício à apresentação e discussão:** - Dar por terminado o tempo de resolução da tarefa pelos alunos - Providenciar a reorganização dos lugares/espaço para a discussão - Promover atitude de respeito e interesse genuíno pelos diferentes trabalhos apresentados. **Gerir relações entre os alunos:** - Definir a ordem das apresentações - Cuidar de justificar as razões da não apresentação de algumas resoluções - Promover e gerir as participações dos alunos na discussão

Uma experiência de formação com um caso multimédia

O ensino exploratório não é uma prática amplamente difundida, mas sendo uma abordagem de ensino promissora em termos do desenvolvimento do poder matemático dos alunos (NCTM, 2000), é importante que os futuros professores tenham contacto com este tipo de ensino na sua formação. Para tal pode-se recorrer à exploração de diversos recursos multimédia, utilizando as suas várias componentes para visualizar situações de prática de ensino e refletir sobre elas (e.g., Alsawaie & Alghazo, 2010; van Es & Sherin, 2008). A análise de situações de ensino-aprendizagem pode constituir um meio privilegiado para direcionar a atenção dos futuros professores para aspetos diversos, tais como o pensamento matemático dos alunos ou o papel do professor na condução do discurso da aula (Oliveira & Cyrino, 2013) e detendo-se tanto em aspetos particulares (como a aprendizagem de certos tópicos curriculares) como em princípios mais abrangentes (como aspetos do conhecimento pedagógico do conteúdo).

Reconhecendo as potencialidades deste tipo de recursos, realizámos uma experiência de formação assente na exploração de um dos casos multimédia construídos no âmbito do projeto P3M – *Práticas profissionais de professores de matemática*. Esta experiência decorreu nas aulas das unidades curriculares de Metodologia do Ensino da Matemática e Didática da Matemática II, nas Universidades de Lisboa e do Porto, respetivamente. As unidades curriculares têm propósitos similares, essencialmente vocacionados para o desenvolvimento do conhecimento didático do professor de Matemática, nas suas vertentes do conhecimento do currículo, dos alunos e suas formas de aprendizagem, e dos processos de ensino (Ponte, 2012). A experiência realizada na Universidade de Lisboa teve a duração de dez horas, repartidas por quatro aulas de 2,5 horas cada. No Porto, esta experiência prolongou-se mais no tempo, num total de 25 horas (aulas de 2,5 horas), ao longo de cinco semanas. A diferença observada deve-se ao facto de, na Universidade do Porto, ter sido possível dedicar mais tempo à discussão em coletivo com os futuros professores em torno das várias fases da aula analisada.

O caso multimédia analisado diz respeito ao 3.º ciclo (Oliveira, Canavarro & Menezes, 2012) e parte de uma aula assente na realização da tarefa “Eleição para o delegado de turma"[1]. Esta aula do 7.º ano enquadrada no programa de Matemática do ensino básico de 2007 (ME, 2007), tem como objetivo a revisão e consolidação dos principais conceitos e procedimentos respeitantes à unidade curricular de equações e o estabelecimento de conexões com outros tópicos do tema Álgebra abordados anteriormente (Oliveira et al., 2013). A tarefa pode ser considerada um problema

1 Para mais detalhes sobre o conteúdo deste caso multimédia, ver capítulo 18, página 427.

e ser abordada de várias formas, tal como previsto no plano de aula elaborado pela professora. A diversidade de resoluções possíveis favorece a discussão e a consecução dos objetivos de aprendizagem pretendidos com o trabalho em torno desta tarefa. Na experiência realizada, os futuros professores analisaram todo o caso multimédia mas neste capítulo apenas focamos a fase de discussão da tarefa. Os futuros professores observaram dois episódios, retratados em pequenos excertos em vídeo acompanhados da respetiva transcrição, e analisaram vários aspetos desta fase da aula, desde a preparação feita pela professora (explicitados no plano de aula e em entrevistas quanto: à escolha e sequenciação de resoluções para discussão, às questões antecipadas e dificuldades previstas) à sua concretização em sala de aula.

Metodologia do estudo

Seguindo uma abordagem qualitativa (Denzin & Lincoln, 2005), a investigação foi realizada com dois grupos de dez e 11 futuros professores de Matemática, das universidades de Lisboa e do Porto, respetivamente. As autoras desempenharam o papel de formadoras e investigadoras, a primeira na Universidade do Porto (UP) e a segunda e a terceira na Universidade de Lisboa (UL). Nas duas instituições, o trabalho em torno do caso multimédia visado foi realizado em pares ou grupos de três elementos.

Foram recolhidos dados provenientes de várias fontes mas neste texto, contudo, centramo-nos apenas nas respostas que os futuros professores deram às questões colocadas relativas à análise dos dois episódios da fase de discussão da tarefa considerados. A análise destas produções escritas assentou num quadro proposto por Alsawaie e Alghazo (2010), com base no trabalho desenvolvido por van Es e Sherin (2008), que contempla três dimensões: (1) identificar o que é importante na situação de ensino; (2) interpretar a situação de ensino com base no conhecimento do contexto; e (3) estabelecer conexões entre os aspetos observados e princípios mais abrangentes de ensino e aprendizagem. Procurámos compreender como é que estas três dimensões, que explicitamos a seguir em relação com os elementos chave do quadro 1, estão presentes no trabalho que os futuros professores realizaram tendo em conta as ações e o papel da professora protagonista do caso multimédia.

Na primeira dimensão – *identificar o que é importante na situação de ensino* – considerámos os aspetos que se ligam com a promoção da aprendizagem matemática dos alunos (promover a qualidade matemática das apresentações dos alunos e regular as interações entre os alunos na discussão) e a gestão das interações e da aula (criar um ambiente propício à apresentação e discussão e gerir relações entre os alunos), de acordo com o quadro 1 apresentado. Nesta dimensão pretendemos perceber em que medida os futuros professores conseguem elencar um conjunto de aspetos significativos que marcam a ação da professora nesta fase da aula exploratória.

Na segunda dimensão – *interpretar a situação de ensino com base no conhecimento do contexto* – procurámos perceber em que medida os comentários dos futuros professores são apenas descritivos, ou se procuram também interpretar o que observaram à luz do conhecimento que desenvolveram sobre o ensino exploratório até ao momento. Tendo em conta os objetivos da fase de discussão da tarefa de uma aula exploratória, com esta dimensão pretendemos ainda averiguar como os futuros professores interpretam as ações da professora que visam a participação dos alunos na discussão e se têm em conta o propósito matemático da professora para a aula.

Finalmente, na terceira dimensão – *estabelecer conexões entre os aspetos observados e princípios mais abrangentes de ensino e aprendizagem* – assumimos que a análise das situações de ensino-aprendizagem é aprofundada pela capacidade de relacionar os aspetos observados com princípios gerais ou teorias. No nosso caso, considerámos aspetos de natureza teórica que enquadram o ensino exploratório e que foram discutidos com os alunos nas unidades curriculares em causa nas duas instituições de ensino superior; em particular, referimo-nos ao papel central das tarefas e da comunicação na sala de aula na construção do conhecimento matemático (e.g., Canavarro, 2011; Ponte, 2005; Stein & Smith, 2009; Stein et al., 2008). Contemplámos também orientações gerais contidas no programa de Matemática do ensino básico (ME, 2007) e em alguns materiais de apoio (e.g., Ponte, Branco, & Matos, 2009) e, no caso da unidade curricular da UP, foram ainda considerados elementos teóricos relacionados com o questionamento do professor (e.g., Ainley, 1988; Mason, 2000, 2010). Consideramos ainda importante compreender se os futuros professores desenvolveram uma compreensão mais holística da atividade matemática da aula, relacionando a sua análise das ações da professora com o pensamento e as aprendizagens realizadas pelos alunos (Scherrer & Stein, 2013). Por último, tivemos também em conta que os dois episódios têm uma certa especificidade relativamente aos objetivos da fase de discussão, uma vez que, segundo Oliveira, Menezes e Canavarro (2013), visam o aprofundamento e extensão do pensamento dos alunos. Assim, cruzámos as três dimensões anteriores para analisar como os futuros professores enquadram as ações e o papel da professora na especificidade de cada situação observada.

Análise de dados

Começamos por descrever que aspetos foram destacados pelos futuros professores em cada um dos dois excertos em vídeo da fase de discussão da aula (episódios A e B) que serviu de base ao caso multimédia que exploraram. De notar que, em relação a cada episódio, era pedido aos futuros professores, no próprio caso multimédia, que identificassem as ações da professora que tinham como objetivo: 1) a promoção das aprendizagens dos alunos; e 2) a gestão das interações (e da aula) – são estas ações que entendemos aqui serem os aspetos importantes da situação de ensino a considerar (em linha com o quadro de análise adotado neste texto, com base no trabalho de Alsawaie e Alghazo (2010) e no quadro 1 atrás apresentado). De seguida procuramos ilustrar como os futuros professores interpretaram a situação de ensino retratada nos dois episódios considerados e, finalmente, que ligações fizeram com aspetos de natureza teórica que foram tratados nas respetivas unidades curriculares.

Os episódios analisados

O primeiro episódio analisado (episódio A) encerra uma parte do momento de discussão da aula em que a professora, mantendo no quadro a resolução que um grupo acabara de apresentar à turma, pede a um outro grupo que partilhe a sua, tendo como objetivo comparar e contrastar ambas as resoluções e usar este confronto para relembrar conceitos chave do tópico curricular que estava prestes a terminar (de notar que esta aula procurava proporcionar uma oportunidade para rever os principais conceitos e procedimentos relativos ao tema, enfatizando simultaneamente aspetos centrais da resolução de problemas como a diversidade de estratégias e representações possíveis e igualmente válidas e a importância da explicitação do processo de resolução). Os dois grupos de alunos visados no episódio recorreram a equações para resolver o problema, tendo, contudo, atribuído a incógnita a objetos diferentes.

O episódio B diz respeito à parte final da fase de discussão da tarefa em que a professora, tendo já tido a oportunidade de relacionar a estratégia de tentativa-erro (a primeira a ir a discussão) com a estratégia de equacionar o problema, tirou partido de uma outra estratégia que surgiu na aula – o recurso a uma tabela como apoio para a generalização de um padrão – para continuar a estabelecer relações entre as estratégias que os alunos usaram.

Aspetos importantes da situação de ensino

Os futuros professores deram mais destaque às ações da professora do que a aspetos relacionados com as aprendizagens dos alunos. No entanto, estes surgem nas análises do episódio B. A seguir, apresentamos os principais aspetos das situações de ensino considerados importantes pelos futuros professores.

Foco nas conexões entre estratégias e representações*.* Uma das ações da professora, com vista à promoção das aprendizagens dos alunos, que os futuros professores mais destacam no episódio A é a sua estratégia de *manter duas resoluções algébricas no quadro, em paralelo*, para que mais facilmente os alunos as possam visualizar, comparar e contrastar: "[A professora] confronta os alunos com as duas resoluções em simultâneo, comparando semelhanças e diferenças entre ambas (ex: significado da incógnita em cada uma das resoluções)" (Andreia e Amélia, UL).

A valorização explícita da *organização da informação numa tabela*, facilitando a visualização e o processo de generalização, é outra ação da professora com vista à promoção das aprendizagens dos alunos que os futuros professores mais destacam no episódio B. Neste episódio, um aluno, André, tinha iniciado uma abordagem promissora que, contudo, não se encontrava completamente organizada.

> A professora começa por induzir os alunos à organização dos dados numa tabela no quadro, para facilitar a visualização e proporcionar a posterior generalização dos termos. Introduz esta estratégia dando seguimento à apresentada em primeiro lugar, realçando a sua melhor organização e referindo a presença das sequências no método adotado. (Rosa e Dilma, UP)

O foco na organização da informação, o que conduz a uma certa sofisticação da estratégia de tentativa-erro, surge associado à intenção da professora em *relacionar estratégias*, realçando como uma (a que recorre à tabela e generalização de sequências) complementa outra (tentativa-erro) e a faz avançar no sentido de uma maior eficiência.

O cerne dos comentários dos futuros professores está alocado no que a professora faz e diz. São mencionados os alunos dela apenas no contexto da descrição das ações da professora.

Foco na compreensão dos alunos. Alguns futuros professores referem-se explicitamente às ações da professora de *questionar* e *pedir explicações*, realçando o papel dessas ações na promoção das aprendizagens dos alunos no episódio A:

> Ao questionar os alunos sobre as diferentes estratégias apresentadas pelos grupos [a professora] promoveu a sua aprendizagem, levando-os a pensar sobre as diferenças entre estas duas formas e sobre o significado das variáveis. (Sónia, José e Ilda, UL) Outros destacam o esforço que a professora faz para que os alunos compreendam que *a incógnita* usada por cada um dos dois grupos, protagonistas do episódio A, *representa objetos diferentes*, dando origem a duas equações distintas mas que "produzem a mesma solução para o problema" (Carla e Clara, UL).

A reação dos alunos às duas equações que estavam em confronto torna evidentes as suas dificuldades na compreensão da noção de equações equivalentes. Vários são os futuros professores que se referem a essas dificuldades, relacionando-as com as ações da professora que têm a intenção de ajudá-los a *ultrapassar* as suas *confusões*.

No episódio B, e estando a aula a terminar, uma das preocupações da professora é que o André compreenda o que começou a fazer, já que a sua resolução se encontrava incompleta. Assim, apesar de focar insistentemente a atenção da turma nesta estratégia (que foi seguida apenas pelo André), a professora também se quis assegurar que o próprio aluno mostrava progressos nas suas aprendizagens. Este aspeto, relacionado com a promoção das aprendizagens matemáticas dos alunos (e do André, em particular), não passa despercebido aos futuros professores.

> Quando é consensual que se têm de encontrar os termos gerais, na sua procura, a professora garante que o aluno que está no quadro compreende o que está a ser feito. Se repararmos, as respostas que vão pairando no ar vão sendo ignoradas pela docente e só é dado seguimento quando é o André que responde e quando ela se certifica que este não está apenas a repetir o que ouve, mas a refletir nas suas respostas. (Rosa e Dilma, UP)

Foco na gestão das interações entre os alunos. Vários são os futuros professores que se referem a ações da professora com vista a gerir as interações entre os alunos, nomeadamente *promovendo* a sua *participação* na discussão coletiva:

> [No episódio A, a professora] promove a participação de todos, pedindo a uma aluna distraída que responda e perguntando constantemente a um aluno diferente do que respondeu se concorda com a resposta dada; (...)
> – gere as intervenções, pedindo aos alunos que falem um de cada vez;
> – um aluno dá uma sugestão sobre a solução, dizendo que vai ser diferente da estratégia anterior. A professora tenta suscitar a curiosidade dos alunos, dizendo: "Quem quer apostar que sim, quem quer apostar que não?";
> – um aluno faz uma pergunta e a professora abre-a para a turma, perguntando "Quem responde?". (Carla e Clara, UL)

O questionamento da professora surgiu já como um aspeto estruturante das suas ações promotoras de aprendizagens dos alunos. Mas ele aparece agora também como veículo de promoção da participação dos alunos na discussão coletiva, centrando a atenção dos alunos na discussão em si, solicitando justificações a terceiros para as afirmações que vão sendo feitas, redirigindo questões de alunos à turma.

Interpretação da situação de ensino

A dimensão de interpretação da situação de ensino incide sobretudo em aspetos relacionados com as intenções e ações da professora, tanto na promoção das aprendizagens dos alunos como na gestão das interações entre eles, contemplando frequentemente elementos avaliativos das ações da professora.

Foco nas intenções e ações da professora ao promover aprendizagem. Em várias instâncias, os futuros professores procuram interpretar as intenções e ações da professora, no quadro do que sabem ser um objetivo central da fase de discussão de uma aula exploratória. No excerto seguinte, relativo ao episódio B, os futuros professores reconhecem explicitamente a intenção da professora em *relacionar estratégias* e procuram explicitar a interpretação que fazem dessas ações e intenções:

> Para criar uma ponte de ligação entre as hipóteses [estratégias], a professora explica as semelhanças entre a hipótese 1 e 2 [resolução por tentativa-erro e por recurso a uma equação]. Deste modo, os alunos perceberão que todas as estratégias são possíveis, quais os raciocínios que fazem saltar de uma para a outra, as vantagens a nível de eficácia e rapidez de cada estratégia e a própria estratégia em si mesma. (Edgar, Francisca e Lara, UP)

Em ambos os episódios, os futuros professores destacam aspetos das situações de ensino relacionados com o estabelecimento de conexões entre estratégias, representações e noções transversais do programa de Matemática do ensino básico. No extrato seguinte, relativo ao episódio B, ilustramos a interpretação oferecida por um grupo acerca de *aspetos relacionados com tópicos do programa de Matemática* e da importância das conexões entre temas matemáticos que a professora explicita enquanto objetivo desta aula:

> Neste episódio, a professora aproveita a resolução do André para organizar e distribuir, através de uma tabela, os 30 votos pelos 3 candidatos. Ao fazer isto, a professora aproveita as sequências de valores para estabelecer conexões com sequências e regularidades, abordando os conceitos de termo geral e ordem. (Noé, Emanuel e Zélia, UL)

Foco nas intenções e ações da professora ao gerir interações. De um modo generalizado, os futuros professores destacam o *cuidado* da professora *em envolver o maior número possível de alunos na discussão.* Por exemplo, acerca do episódio A, os futuros professores referem que:

> [A professora] pede aos alunos que justifiquem tudo o que vai sendo escrito pela aluna que está no quadro. (...) Quando estão alunos no quadro, a professora descola-se para a parte de trás da sala, o que impede que se foque na aluna em questão, envolvendo a turma toda no que se está a fazer. (Andreia e Amélia, UL)

A *responsabilização* dos próprios *alunos pela validação das ideias matemáticas* que vão surgindo na discussão é outro aspeto da gestão das interações que os futuros professores procuram interpretar. A este respeito, e ainda acerca do episódio A, o questionamento da professora evidencia-se, mais uma vez, como um dos principais motores das suas ações de gestão das interações:

> Quando os alunos não sabem responder às suas questões, a professora refaz a pergunta a outro aluno. Por outro lado, quando as respostas estão erradas ou incompletas, ela confronta-a com outros alunos de forma a levar que toda a turma participe na discussão. (Edgar, Francisca e Lara, UP)

A criação de um *ambiente* de sala de aula *convidativo à participação dos alunos e valorizador da pluralidade de estratégias ou representações* mostra-se igualmente relevante na gestão das interações. O questionamento da professora é um elemento chave na criação desse ambiente.

Foco em elementos avaliativos das ações da professora. Em algumas produções, ficam evidentes elementos avaliativos das ações da professora. Por exemplo, os futuros professores fazem alguns *julgamentos* acerca da opção da professora, no episódio A, ter mantido no quadro, visíveis e lado a lado, duas resoluções algébricas diferentes: "Esta opção foi interessante porque permitiu através de representação algébrica, comparar 2 processos distintos, que resultaram em soluções distintas, mas permitiram chegar ambos à resposta" (Noé, Emanuel e Zélia, UL). No entanto, nestes julgamentos, procuram justificar as suas opiniões.

No extrato seguinte, e ainda relativamente ao episódio A, os futuros professores tomam uma postura crítica, refletindo sobre se a *decisão* da professora para lidar com as confusões dos alunos relativas à noção de equações equivalentes terá sido a mais *correta* e justificando os motivos subjacentes:

> Ao verificar que existe uma certa confusão com a atribuição de dois valores a uma incógnita com o mesmo nome, a professora aprofunda a discussão sobre a classificação das equações, envolvendo vários alunos, para que estes compreendam que cada equação só tem uma solução. No entanto, não sabemos até que ponto esta troca de ideias será produtiva para a turma, a nível da compreensão da diferença entre os valores obtidos. A dificuldade dos alunos, neste caso, prendia-se mais com a interpretação de cada solução e com a sua adequação ao problema colocado, do que com dúvidas sobre a validade dos conjuntos-solução. (Rosa e Dilma, UP) Estes futuros professores, embora de modo implícito, acabam por *oferecer uma alternativa* à decisão da professora. Na continuação, já se mostram mais explícitos nas sugestões que dão, que continuam a ser ancoradas numa análise crítica da situação em causa:
>
> A primeira resposta mais esclarecedora a esse respeito foi a da Mariana, a qual a professora optou por ignorar. Pensamos que é possível que esta atitude tenha sido intencional, por se tratar de uma boa aluna. Provavelmente a professora pretendia dar a oportunidade a outros alunos de também refletirem sobre o significado das incógnitas. No entanto, não nos parece a postura mais adequada, já que tinha questionado anteriormente a aluna, talvez fosse melhor aproveitar a sua resposta sem a validar e avaliar a opinião dos restantes alunos, questionando-os acerca da concordância com a mesma, para que se gerasse um momento de reflexão sem excluir o parecer de nenhum aluno. (Rosa e Dilma, UP)

Relativamente ao episódio B, para alguns futuros professores, o questionamento da professora caracteriza uma fase de discussão centrada na docente: "Consideramos [que] a professora seguiu uma estratégia semelhante ao caso anterior. No entanto, detetámos que neste caso a discussão centrou-se mais na professora, eventualmente por causa das conexões que estava a estabelecer" (Noé, Emanuel e Zélia, UL). Para outros, o questionamento da professora deixa de estar completamente concentrado nela para passar a ser considerado também como uma prática dos próprios alunos que é importante para o sucesso desta fase da aula. Como refere um grupo, "... a professora modera e estimula a discussão mas são os alunos que têm o papel ativo na explicação e questionamento dos resultados do seu colega [André]" (Diana e Júlia, UP).

Relação da situação de ensino com ideias mais gerais

O questionamento da professora e o impacto das suas ações nas aprendizagens e interações dos alunos são ponto de enfoque dos futuros professores ao relacionar as situações de ensino analisadas com ideias mais gerais. No entanto, este tipo de conexão raramente é estabelecido pelos futuros professores, sendo que, no conjunto das duas turmas, apenas se encontra nos trabalhos de três pares/grupos e, mesmo assim, com uma abordagem de forma algo superficial, recorrendo essencialmente a generalidades sobre esses elementos teóricos.

Foco no questionamento da professora e propósito das perguntas. O questionamento da professora é um aspeto da sua prática que os futuros professores realçam nesta fase de discussão da tarefa. Alguns deles relacionam esse *questionamento* com *quadros teóricos* abordados na respetiva unidade curricular. No extrato seguinte, relativo ao episódio A, os futuros professores tipificam as perguntas usadas pela professora recorrendo à classificação de Ainley (1988), estabelecendo também uma ponte entre as ações, as perguntas e os objetivos de aprendizagem que ela tinha para esta aula, e voltam a fazê-lo no episódio B.

> Coloca perguntas provocadoras de modo a estimular os alunos a pensar sobre o assunto. Com estas questões e condução da discussão, a professora consegue relembrar os subtópicos do tema das equações. Assim, os alunos falam, revêem os conceitos incógnita, equação, equação equivalente, conjunto de solução, equação possível e determinada e equação possível e indeterminada (...) este exercício de revisão é de extrema importância, uma vez que, esta tarefa foi realizada no final do tema das equações, pois ajuda a rever e consolidar conceitos já aprendidos e importantes. (Edgar, Francisca e Lara, UP)

Foco no impacto das ações da professora nas aprendizagens e interações dos alunos. É possível encontrar algumas instâncias das produções escritas analisadas em que os futuros professores se referem ao impacto que certas ações da professora têm nas aprendizagens dos alunos e também nas interações. Por exemplo, no extrato seguinte, relativo ao episódio A, o *questionamento* surge como uma ação da professora em destaque. O direcionar da atenção dos alunos para a discussão coletiva, tendo como consequência a promoção da sua participação no discurso, é assinalado pelos futuros professores e é realçado o impacto que o questionamento da professora tem na *compreensão de um conceito* chave do tópico das equações – incógnita, ou seja, como contribui para a consecução de alguns objetivos centrais desta aula.

> Desta forma [questionamento constante], a professora, mais do que gerir, acaba por criar as interações na sala de aula, envolvendo vários alunos nesta fase de discussão, evitando também que eles se dispersem e desviem do essencial. A professora faz perguntas que se relacionam com o significado das diferenças apontadas por eles, para que explorem o conceito de incógnita… (Rosa e Dilma, UP)

O *questionamento* da professora, além de veículo promotor da participação dos alunos na discussão coletiva, é perspetivado como um meio de ajudar os alunos a envolver-se em atividades matemáticas centrais numa aula de natureza exploratória: a *compreensão dos processos e procedimentos* usados pelos colegas, e a sua justificação. Ainda acerca do episódio A, é referido que:

> A docente questiona muitas vezes os alunos relativamente à sua opinião sobre uma resposta dada e se concordam ou não com as opiniões dadas pelos colegas. Esta estratégia usada pela professora promove as interações entre os alunos, levando-os a estarem atentos à discussão, percebendo os passos e a estratégia usados pelo par que está a apresentar e refletindo sobre os argumentos dos alunos que estão a participar na discussão. (Edgar, Francisca e Lara, UP)

Considerações finais

Os futuros professores analisaram a prática da professora protagonista do caso multimédia, refletida em dois episódios, considerando as suas ações na promoção das aprendizagens matemáticas dos alunos e na gestão das interações, tal como lhes era solicitado no caso multimédia. Neste estudo, procurámos perceber o que os futuros professores destacam nas suas análises destes dois episódios da fase de discussão no caso multimédia, bem como os aspetos do papel do professor na condução de discussões coletivas a que dão atenção.

Todos os futuros professores identificam aspetos de cada situação de ensino retratada nos dois episódios analisados que realçam de forma particular. Na grande maioria das produções escritas dos futuros professores essa identificação é apresentada numa lógica de descrição cronológica dos eventos de cada episódio, lógica essa que estrutura os textos elaborados.

Recebem particular destaque as ações da professora enquanto aspetos relevantes das situações de ensino, havendo maior ênfase nas ações destinadas a promover as aprendizagens matemáticas dos alunos do que a gerir as interações entre eles. No que se refere à promoção das aprendizagens dos alunos, os futuros professores destacam ações da professora que visam a compreensão de estratégias diferentes (ou de estratégias semelhantes mas com pontos de partida distintos) e sua comparação e contraste, enfatizando o grau de eficiência de cada uma. Salientam também o questionamento da professora, traduzido essencialmente em pedidos de clarificação e de justificação das ideias que vão sendo apresentadas pelos alunos. No episódio B, os futuros professores realçam, para além da importância da organização da informação fornecida para o sucesso da estratégia de recurso às sequências, a preocupação da professora em se assegurar que esta estratégia é compreendida pelo maior número possível de alunos, em particular o aluno protagonista do episódio.

No que toca às ações da professora com vista à gestão das interações entre os alunos, os futuros professores assinalam, sobretudo no episódio A, a promoção da participação de todos os alunos no momento de discussão. Os dois episódios espelham situações de ensino que, de facto, ilustram interações, com características diferentes, entre os alunos. Se no episódio A há o centrar da atenção da turma nas resoluções apresentadas por dois grupos de alunos, em paralelo, envolvendo-se toda a turma na comparação e contraste entre elas e na discussão de aspetos que estavam esquecidos (como a noção de equações equivalentes), no episódio B há um aluno que é protagonista, sendo o único que segue a estratégia em causa; além disso, no episódio B, o discurso da aula centra-se mais na professora e no aluno do que no episódio A (em que o discurso está mais espalhado pela turma inteira). Estas diferenças podem explicar por que houve mais aspetos relacionados com as ações da professora na gestão de interações identificados no episódio A do que no episódio B. Apenas um número muito limitado de futuros professores inclui também, como aspetos salientes das situações retratadas nos episódios, aspetos relacionados com os próprios alunos, em particular como reagem às ações da professora e que aprendizagens vão manifestando realizar.

De acordo com os futuros professores, o questionamento da professora revela-se uma peça fundamental na promoção da qualidade matemática das apresentações dos alunos, sobretudo ao pedir explicações e justificações para procedimentos e representações, promovendo a clarificação de ideias e discutindo a eficácia das resoluções. Mas o questionamento da professora mostra-se também relevante na regulação das interações entre os alunos nesta fase da aula, incentivando-os a colocar questões uns aos outros, a analisar e contrastar as várias resoluções e a identificar erros que depois sirvam de trampolim à discussão.

Em mais de metade das produções escritas dos futuros professores pudemos encontrar tentativas de interpretar as ações da professora (promotoras das aprendizagens dos alunos) identificadas em cada situação de ensino considerada. São frequentes alguns julgamentos das ações da professora mas nota-se a preocupação por parte dos futuros professores em procurar justificar as suas opiniões. No episódio B, existe falta de consenso entre os futuros professores quanto ao papel da professora na discussão da estratégia em causa, sendo alguns deles defensores de que a discussão está mais centrada nela enquanto outros entendem que a discussão se centra no aluno que protagoniza a situação retratada.

No que toca às instâncias das produções escritas dos futuros professores em que é possível encontrar interpretações das situações de ensino, e relativamente às ações da professora com vista à gestão das interações entre os alunos, encontram-se referências, em ambos os episódios analisados, ao cuidado particular da professora no envolvimento de todos os alunos na discussão e na responsabilização destes pela validação das ideias que são postas a discussão. Os futuros professores referem, ainda, a importância da valorização, por parte da professora, de um ambiente convidativo à participação *sem medo de errar* e promotor da pluralidade de estratégias e representações para resolver a tarefa. Estes aspetos refletem a interpretação das ações da professora com base em características centrais de uma aula exploratória (Oliveira et al., 2013). Alguns futuros professores oferecem alternativas às ações da professora, justificando o seu ponto de vista – estas alternativas dizem respeito apenas a ações da professora com vista à promoção das aprendizagens dos alunos.

São poucos os casos em que os futuros professores avançam com conexões entre os aspetos que identificam ou interpretam das situações de ensino analisadas e quadros teóricos trabalhados nas unidades curriculares que frequentavam. A ligação entre o questionamento da professora e o modelo de Ainley (1988) para a classificação das perguntas é a mais frequente, revelando que esses futuros professores procuram mobilizar os conhecimentos adquiridos nas unidades curriculares para a análise de uma situação (prática) de ensino e que compreendem que as questões da professora têm propósitos diferentes. É de realçar que, na sua exploração do caso multimédia, não era pedido aos futuros professores que relacionassem os aspetos destacados nas situações de ensino, retratadas nos episódios, com elementos teóricos sobre ensino e aprendizagem da Matemática. No entanto, essas conexões são importantes para melhor compreender as situações de ensino com que os futuros professores se deparam, no sentido de aprofundar a análise que delas fazem. Esta poderá ser uma vertente a aperfeiçoar em futuras utilizações do caso multimédia na formação inicial de professores, sendo que o papel da teoria neste contexto terá que ser ponderado, de acordo com os objetivos principais da formação.

Globalmente, verifica-se que os futuros professores são capazes de identificar aspetos centrais relativos às ações da professora no sentido de promover a aprendizagem matemática dos alunos e gerir as interações e a aula, embora de uma forma menos desenvolvida neste último aspeto. A sua atenção na observação destes dois episódios foca-se em aspetos chave da fase de discussão da tarefa, evidenciando que compreendem o papel que é atribuído pela professora a esse momento num quadro de ensino exploratório. Assim, manifestam compreender que o objetivo deste momento não é o de fazer uma correção das resoluções dos alunos, mas de incentivar e apoiar o confronto de estratégias que permite acrescentar ou consolidar conhecimentos, ao mesmo tempo que é promovida a reflexão e o raciocínio dos alunos tal como é referido por Oliveira, Menezes e Canavarro (2013). Ao salientarem, na sua interpretação da aula, o questionamento que a professora vai fazendo ao longo deste segmento, os futuros professores dão mostras de compreender que, numa perspetiva de ensino exploratório, a professora está a encorajar os alunos a ir para além de um método de resolução (por exemplo, ao promover o uso de métodos de resolução mais eficientes), a refletir matematicamente (por levá-los a comparar e estabelecer ligações entre conceitos) e a raciocinar matematicamente (por exemplo, ao incentivá-los a justificar as suas afirmações e resoluções assim como as dos colegas), aspetos também referidos por Cengiz et al. (2011).

A análise de dados permite concluir que os futuros professores conseguem identificar aspetos centrais da fase de discussão de uma aula exploratória e interpretar as ações da professora nesse contexto mas raramente relacionam essa análise com o pensamento e as aprendizagens realizadas pelos alunos (Scherrer & Stein, 2013). Ora, a própria forma como são colocadas as questões de análise dos episódios no caso multimédia pode ter condicionado o foco das respostas dos futuros professores. De facto, estas questões focam as ações da professora na promoção das aprendizagens (e na gestão das interações) mas não enfatizam de forma explícita como essas ações se refletem nas ações dos alunos e, por sua vez, estas evidenciam aprendizagens alcançadas ou dificuldades que têm ainda de superar. Uma maior explicitação deste aspeto nas questões que constam do caso multimédia pode contribuir para que os utilizadores do caso alarguem um pouco mais o espetro das suas análises e considerem outras vertentes das situações de ensino retratadas nos episódios.

Este estudo foca-se somente em dois episódios da fase de discussão da tarefa de um caso multimédia relativo ao 3.º ciclo mas permite perceber que os futuros professores estão a desenvolver uma compreensão acerca das ações e do papel da professora nesta fase da aula, no quadro de ensino exploratório. A experiência de formação realizada evidencia que o trabalho em torno dos casos multimédia tem potencialidades para desenvolver, nos futuros professores, a capacidade de análise e reflexão sobre uma prática de ensino que se reveste de grande complexidade e que não lhes era familiar.

Referências

Ainley, J. (1988). Perceptions of teachers' questioning styles. *Proceedings of PME XII* (Vol. I, pp. 92-99). Veszprém, Hungary.

Alsawaie, O., & Alghazo, I. (2010). The effect of video-based approach on prospective teachers' ability to analyze mathematics teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*(3), 223-241.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática, 115,* 11-17.

Cengiz, N., Kline, K., & Grant, T. J. (2011). Extending students' mathematical thinking during whole-group discussions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14,* 355–374.

Chapman, O., & Heater, B. (2010). Understanding change through a high school mathematics teacher's journey to inquiry-based teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13,* 445–458.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (2005). Introduction: The discipline and practice of qualitative research. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (3rd ed., pp. 1-32). Thousand Oaks, CA: Sage.

Mason, K. (2010). *Effective questioning and responding in the mathematics classroom*. (Acedido em http://mcs.open.ac.uk/jhm3/Selected%20Publications/Effective%20 Questioning%20&%20Responding.pdf a 15/11/2012).

Mason, J. (2000). Asking mathematical questions mathematically. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*(1), 97-111

Menezes, L., Guerreiro, A., Martinho, M. H., & Tomás Ferreira, R. A. (2013). Essay on the role of teachers' questioning in inquiry-based mathematics teaching. *Sysiphus, 1*(3), 44-75.

ME (Ministério da Educação) (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: DGIDC.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics). (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Oliveira, H., Canavarro, A. P., & Menezes, L. (2012). Eleição para o delegado de turma (3.º ciclo) – caso multimédia. In *Site do Projeto P3M, Práticas Profissionais de Professores de Matemática.* (Acedido em http://p3m.ie.ul.pt/caso-3-eleicao-para-o-delegado-de-turma-3-ciclo).

Oliveira, H., & Cyrino, M. (2013). Developing the knowledge of inquiry-based teaching through analysis of a multimedia case: A study with prospective mathematics teachers. *Sysiphus, 1*(3), 214-245.

Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante, 12*(2), 29-53.

Ponte, J. P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarollo profesional del professorado de matemáticas. In N. Planas (Ed.), *Teoria, critica y prática de la educación matemática* (pp. 83-98). Barcelona: Graó.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico*. Lisboa: DGIDC.

Scherrer, J., & Stein, M. K. (2013). Effects of a coding intervention on what teachers learn to notice during whole-group discussion. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(2), 105-124.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Helping teachers learn to better incorporate student thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313–340.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (2009). Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: Da investigação à prática (Artigo original publicado em 1998). *Educação e Matemática, 105,* 22-28.

van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2008). Mathematics teachers "learning to notice" in the context of a video club. *Teaching and Teacher Education, 24,* 244-276.

Anexo

projeto
P3M

Caso "Eleição para o Delegado de Turma" (7.º Ano)

Unidade de Equações **Ano Letivo 2011/2012**

Aluno: ______________________________ **n.º:** ___ **Turma:** ___ **Data:** ____/____/______

Tarefa - "Eleição para o delegado de turma"

A diretora de turma que coordenou o processo de eleição do delegado de turma, informou no final que:

- ✓ Os 30 alunos da turma votaram e não houve votos brancos ou nulos;
- ✓ Apenas três alunos receberam votos: a Francisca, o Lucas e a Sandra;
- ✓ O Lucas recebeu menos dois votos que a Francisca;
- ✓ A Sandra recebeu o dobro dos votos que recebeu o Lucas.

Quem ganhou as eleições? Com quantos votos?

Não te esqueças de apresentar e explicar o teu processo de resolução.

FORMAÇÃO

21. Um estudo de integração de recursos multimédia na formação inicial de professores do 2.º ciclo do ensino básico

por Neusa Branco, João Pedro da Ponte

21. Um estudo de integração de recursos multimédia na formação inicial de professores do 2.º ciclo do ensino básico

Neusa Branco
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Santarém e UIDEF,
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
neusa.branco@ese.ipsantarem.pt

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ulisboa.pt

• **Resumo:** Esta comunicação apresenta um estudo desenvolvido no âmbito de uma experiência de formação com recursos multimédia integrada na formação inicial de professores do 2.º ciclo no âmbito da Didática da Matemática e da Prática de Ensino Supervisionada nesta disciplina. O estudo visa identificar de que modo os formandos integram na sua experiência os diversos momentos da prática letiva caraterísticos do ensino exploratório, bem como encaram o papel do trabalho realizado no desenvolvimento do seu conhecimento sobre esta abordagem de ensino. O estudo segue uma abordagem qualitativa e tem por base as reflexões escritas de cinco formandas sobre as aulas de ensino exploratório que lecionaram. Os dados mostram que as formandas integraram na sua prática letiva aspetos centrais do ensino exploratório, iniciando o seu trabalho com a seleção das tarefas e com a planificação das aulas e evidenciando a existência dos diferentes momentos na sala de aula. Reconhecem o momento de discussão coletiva como fundamental para a aprendizagem dos alunos. A integração dos casos multimédia na formação contribuiu para o desenvolvimento da sua compreensão do ensino exploratório, principalmente pela análise da prática da professora e do trabalho dos alunos que proporciona. Contudo, a integração dos casos multimédia nas aulas da formação inicial precisa de continuar a ser pensada, tendo em conta o conhecimento e as experiências que os formandos já têm e outros aspetos essenciais para a sua formação em Didática da Matemática.

• **Palavras-Chave:** Formação inicial, Recurso multimédia, Prática letiva, Ensino exploratório.

Introdução

Na formação inicial de professores, a experiência de situações de prática profissional, devidamente enquadradas por outras atividades, constitui um aspeto essencial do desenvolvimento do futuro professor em todas as suas dimensões. Estas situações podem decorrer em diferentes contextos e envolver diversos suportes, tanto na instituição de ensino superior como nos estabelecimentos de ensino onde realizam estágios. Esta comunicação centra-se na formação de futuros professores que frequentam o 2.º ano do Mestrado em Ensino do 1.º e do 2.º ciclo do ensino básico. A estes formandos é proporcionada uma experiência de formação que integra recursos multimédia que envolvem a análise da prática de uma professora de Matemática do 2.º ciclo e procura promover o desenvolvimento do seu conhecimento sobre a prática letiva, em particular, sobre a prática de ensino exploratório (Canavarro, Oliveira & Menezes, 2012; Ponte, 2005). Neste tipo de ensino propõem-se tarefas para as quais os alunos não têm um método imediato de resolução, mas em que eles são capazes de interpretar as questões propostas, representar a situação em causa e conceber estratégias para chegar a uma solução. Estas situações criam oportunidades para os alunos construírem ou aprofundarem a sua compreensão de conceitos, representações, procedimentos e ideias matemáticas.

Esta experiência de formação articula-se com a sua prática pedagógica no âmbito do estágio que realizam, tendo assim oportunidade de experienciar esta abordagem de ensino. Neste contexto, o presente estudo visa caracterizar os diversos momentos da prática letiva que os formandos identificam na sua experiência de ensino exploratório e identificar o modo como encaram o papel do trabalho realizado com o caso multimédia para o desenvolvimento do seu conhecimento sobre o ensino exploratório.

Desenvolvimento do conhecimento sobre a prática na formação inicial

A Didática da Matemática tem um papel importante a desempenhar na formação inicial de professores pois o simples facto de saber mais Matemática não assegura que o professor ou futuro professor consiga ensinar de modo que “os estudantes desenvolvam o poder matemático e uma compreensão conceptual profunda”

(Mewborn, 2001, p. 28). Assim, cabe à Didática da Matemática proporcionar-lhes o desenvolvimento dos seus conhecimentos e das suas capacidades, relativamente a cada tema matemático e a compreensão da sua articulação tal como é sugerido pelas orientações curriculares (ME, 2007; NCTM, 2000).

Numerosos estudos sugerem que muitos professores dos primeiros anos não chegam a desenvolver uma compreensão conceptual da Matemática necessária para ensinar (Mewborn, 2001). Por isso, a formação de professores deve proporcionar a estes professores experiências que visem tanto o desenvolvimento do conhecimento matemático como do conhecimento do ensino, fomentando uma aprendizagem da Matemática com compreensão que contribua para o desenvolvimento da sua capacidade de proporcionar essa compreensão aos seus alunos. Também Sanchéz, Llinares, García e Escudero (2000) propõem que se envolvam os futuros professores em situações problemáticas relevantes para a prática de ensino da Matemática. Deste modo, é importante fomentar a articulação entre conteúdo e pedagogia visando proporcionar o desenvolvimento do conhecimento dos futuros professores relativamente aos alunos, aos seus processos de aprendizagem e à prática do professor que favorece essa aprendizagem, bem como fomentar a compreensão de conceitos, procedimentos, representações e conexões no âmbito da análise de situações de aula, das estratégias e dificuldades dos alunos e de tarefas para os alunos relativas a esses aspetos.

No ensino exploratório a estrutura da aula centra-se em habitualmente em três fases: (i) Introdução da tarefa; (ii) Desenvolvimento da tarefa; e (iii) Discussão da tarefa (Ponte, 2005; Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008). Canavarro, Oliveira & Menezes (2012) dividem a terceira fase em duas, diferenciando uma quarta fase de Sistematização das aprendizagens. No ensino exploratório, a natureza das tarefas e a dinâmica de sala de aula assumem um papel decisivo, visando um forte envolvimento dos alunos na sua realização e discussão. Nesta abordagem, o ensino-aprendizagem não se centra no professor, cujo papel deixa de ser expor e explicar todos os conceitos e procedimentos, mas sim promover o envolvimento dos alunos na descoberta e construção do conhecimento (Ponte, 2005). O trabalho na aula apresenta-se em dois modos, o trabalho autónomo, acompanhado e orientado pelo professor e o trabalho coletivo que envolve a apresentação da tarefa numa fase inicial e a discussão de várias resoluções e a sistematização dos conceitos evidenciados na fase final.

Neste tipo de ensino, as tarefas assumem um caráter essencialmente problemático ou exploratório/investigativo. Visando a exploração de conceitos e ideias matemáticas, "mais do que contexto para aplicar conceitos já aprendidos, estas tarefas servem principalmente para promover o desenvolvimento de novos conceitos e para aprender novas representações e procedimentos matemáticos" (Ponte, Quaresma & Branco, 2012, p. 10). Assim, nesta abordagem de ensino as tarefas propostas proporcionam aos alunos a exploração de situações de carácter aberto (Ruthven, 1989). Pelo seu lado, o professor fomenta e apoia essa exploração, "recolhe e analisa informação sobre as estratégias e teorias que são empregues pelos estudantes" (p. 451). Nesta abordagem é importante que o professor dê tempo aos alunos para que eles possam pensar por si próprios. Isto envolve também que o professor esteja atento e identifique quando é necessário incentivar ou apoiar os alunos no seu trabalho.

Ruthven (1989) aponta que a seguir a este momento de exploração tem lugar um momento que designa de "codificação". O professor deve, durante o trabalho de exploração dos alunos, identificar as ideias principais em que estão envolvidos que é importante evidenciar no momento posterior, de codificação. Neste momento de codificação o professor recorre ao trabalho desenvolvido pelos alunos para promover o desenvolvimento de ideias e estratégias matemáticas. Este momento de discussão coletiva envolve a interação entre o professor e os alunos, tendo o professor um papel fundamental, dando forma à experiência dos alunos e relacionando as suas ideias e estratégias com as ideias matemáticas socialmente aceites.

Ponte (2005) atribui igualmente um papel importante ao aluno no momento de discussão coletiva, que se segue ao trabalho autónomo, onde se reflete sobre o trabalho desenvolvido. Na sua perspetiva, além do envolvimento dos alunos que se verifica na realização das tarefas propostas, estes envolvem-se também na discussão e clarificação do que aprenderam. Na discussão coletiva, Ruthven, Hofmann e Mercer (2011) sugerem o desenvolvimento de uma abordagem dialógica que incentiva uma ampla participação dos alunos, apoiando o desenvolvimento da compreensão. Numa perspetiva semelhante, Ponte (2011) destaca que o professor deve possibilitar a participação de todos os alunos, fomentar momentos de debate e de argumentação e momentos de sistematização e formalização das ideias matemáticas envolvidas na realização da tarefa. Assim, estes momentos devem proporcionar "a sistematização de conceitos, a formalização e o estabelecimento de conexões matemáticas" (Ponte, 2005, p. 24).

No momento de discussão os alunos devem apresentar o seu trabalho, clarificar as suas ideias e discutir as suas conclusões, pelo que, para orquestrar essa discussão, o professor precisa de conhecer suas respostas. Canavarro (2011) sublinha que:

> O propósito das discussões não é realizar um desfile de apresentações separadas de diferentes respostas ou estratégias de resolver uma dada tarefa; o propósito das discussões é relacionar as apresentações com vista ao desenvolvimento coletivo de ideias matemáticas poderosas que sintetizam as aprendizagens matemáticas dos alunos. (p. 16)

Estas discussões coletivas devem, portanto, proporcionar a partilha e discussão de estratégias e ideias matemáticas, cabendo ao professor selecioná-las de modo a evidenciar conexões entre elas (Ruthven, 1989; Stein et al., 2008). Stein et al. (2008) apresentam cinco práticas que visam a orquestração da discussão matemática. Na sua perspetiva, para a gestão deste momento é importante que o professor: (i) antecipe as estratégias que os alunos podem usar, relacionando-as com as aprendizagens previstas, referentes a conceitos, representações e procedimentos, e as capacidades a desenvolver; (ii) monitorize as resoluções dos alunos durante o trabalho autónomo de exploração; (iii) selecione, com base nesta monitorização, as resoluções a partilhar e discutir com toda a turma, evidenciando a diversidade de ideias e estratégias; (iv) sequencie a apresentação e discussão das resoluções identificadas, atendendo à exploração de ideias matemáticas que considera essenciais para as aprendizagens visadas; e (v) estabeleça conexões que surgem das estratégias apresentadas e dos objetivos que pretende alcançar. Para as autoras, a utilização destas cinco práticas por parte do professor pode contribuir para melhorar as discussões ao longo do tempo. Estes são aspetos que se podem igualmente contemplar na formação inicial de professores, tornando-os visíveis para os formandos para que compreendam o que envolve a orquestração da discussão, com particular atenção para o que decorre na sala de aula, o papel do professor na monotorização, seleção, sequenciação e exploração de conexões. Este último ponto visa o aprofundamento do seu conhecimento matemático, com a clarificação de conceitos, a exploração de representações e a relação entre a informação que cada uma permite obter e a perceção de aspetos essenciais a que o professor deve atender para promover a compreensão dos seus alunos. Deste modo, ao longo da experiência de formação aqui relatada, após o momento de trabalho autónomo por parte dos formandos, decorre sempre um momento de apresentação e discussão do trabalho por eles realizado.

A experiência de formação com recursos multimédia

A utilização de recursos multimédia na formação de professores, em particular o vídeo, tem assumido uma grande importância. Llinares e Valls (2009) identificam que o uso de gravações vídeo de aulas fomenta nos futuros professores a capacidade de analisar e identificar aspetos fundamentais do ensino. Estes autores verificam que este uso cria oportunidades interessantes para relacionar teoria e prática. Além disso, a análise do que acontece na aula de Matemática contribui para a compreensão do seu ensino, por parte dos futuros professores. Llinares e Valls (2010) destacam ainda que a observação de vídeos na sala de aula pode evidenciar práticas que contrastem com as suas conceções sobre o ensino da Matemática e chamar a atenção para determinados aspetos dessas práticas. A análise de situações reais de ensino da Matemática pode fornecer modelos bem-sucedidos do ensino desta disciplina (Ponte, 2011), ajudando os futuros professores a compreender o modo como se podem concretizar as orientações curriculares na prática na sala de aula.

A formação com recursos multimédia concretiza-se no 2.º ano do Mestrado em Ensino do 1.º e do 2.º ciclo do ensino básico em duas unidades curriculares, a unidade curricular de Didática da Matemática e a unidade curricular de Prática de Ensino Supervisionada no 2.º ciclo – Matemática e Ciências da Natureza, na sua componente de seminário, num total de 25 horas. As sessões de formação têm por base o caso multimédia "Caso 2: Subidas e descidas dos combustíveis (2.º ciclo)" desenvolvido no âmbito do projeto P3M[1].

Este caso multimédia decorre de uma aula que tem por base a tarefa "Subidas e descidas dos combustíveis"[2] realizada por uma professora de 2.º ciclo com a sua turma com alunos. O caso integra, nomeadamente a descrição do contexto, a tarefa matemática, o plano da aula, a descrição dos principais momentos da aula (introdução da tarefa, realização da tarefa, discussão da tarefa e sistematização das

1 Em http://p3m.ie.ul.pt/pages/pages/listCases.

2 Disponível em http://p3m.ie.ul.pt/caso2-subidas-e-descidas-dos-combustiveis-2-ciclo2.

aprendizagens), a reflexão da professora após a aula e a proposta para os formandos de passar à prática, proporcionando-lhes a análise da prática letiva do professor e da sua reflexão, a análise das resoluções dos alunos e a planificação e concretização de uma aula exploratória.

As sessões foram preparadas pela primeira autora em colaboração com Hélia Oliveira e Renata Carvalho[3]. Neste grupo de trabalho foram discutidos aspetos relativos à organização das sessões, aos tópicos a abordar e episódios a visualizar e discutir em cada sessão e a dinâmica de trabalho autónomo e colaborativo a desenvolver. O caso foi explorado pelas três formadoras no sentido de perspetivar possíveis respostas dos formandos e tópicos essenciais que podiam emergir da análise dos formandos dos materiais disponibilizados pela plataforma e das discussões coletivas decorrentes do trabalho proposto. Identificámos logo no início do nosso trabalho de preparação das sessões que no número de horas disponível para a formação não era possível analisar todo o material que o caso multimédia de 2.º ciclo integra. Em cada tópico existem diversas subseções e em cada uma vários episódios da aula ou relatos da professora pelo que é possível definir percursos de formação, mantendo o foco do trabalho na exploração do que envolve esta abordagem de ensino. Deste modo, fizemos uma seleção do material a discutir nas sessões de formação de modo a manter o essencial da aula e do trabalho de preparação e de reflexão da professora. Além disso, foram feitos alguns ajustes às propostas das sessões de acordo com o feedback dos formandos e o trabalho em sessões anteriores. Por exemplo, entre sessões revíamos os aspetos a retomar da sessão anterior, decidíamos sobre o trabalho a propor, nomeadamente os vídeos a analisar e as questões a responder pelos formandos, podendo estes não responder a todas, e discutíamos o foco da discussão final com base nas alterações realizadas.

A 1.ª sessão envolve apresentação geral do recurso multimédia e a análise da tarefa em que os formandos apresentam e discutem os diferentes modos que encontram para a resolver. Os formandos analisam essa resoluções evidenciando as diferentes representações utilizadas, estabelecem conexões e identificam que resoluções os alunos podem também apresentar. Nas sessões seguintes são abordados os tópicos presentes na tabela 1.

3 Membros do Projeto P3M que concretizaram uma oficina de formação contínua tendo por base este caso (ver Oliveira & Carvalho, 2013).

Tabela 1 - Tópicos trabalhados nas sessões

1.ª sessão	2.ª sessão	3.ª sessão	4.ª sessão	5.ª sessão	6.ª sessão
Apresentação do recurso multimédia	Introdução da tarefa	Realização da tarefa	Discussão da tarefa	Sistematização da tarefa	Apresentação de trabalhos
Análise da tarefa				Passar à prática	

A maioria das sessões tem uma dinâmica muito semelhante, existindo três grandes momentos (Figura 1). O primeiro momento de discussão inicial retoma o tópico trabalhado na sessão anterior e integra o contributo dos textos lidos pelos formandos. No segundo momento os formandos realizam trabalho autónomo em pares relativo a cada um dos tópicos. Este trabalho envolve o visionamento do material multimédia, vídeos em que a professora partilha as suas expetativas, justifica as suas decisões ou realiza a sua reflexão da aula ou vídeos que apresentam episódios do trabalho em sala de aula. Relativamente a cada episódio observado, os formandos respondem por escrito a algumas questões específicas sobre esse momento da aula. A sessão termina com uma discussão final em partilham os principais aspetos que destacam do ensino exploratório, quer no que respeita à prática da professora, quer relativamente ao papel e à aprendizagem dos alunos.

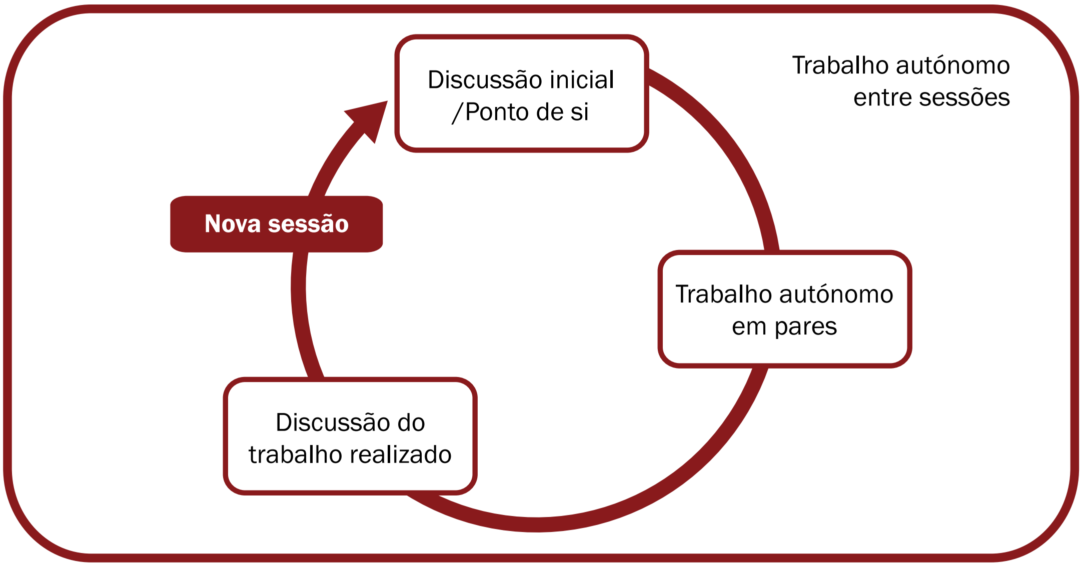


Figura 1 – Dinâmica principal das sessões.

Entre cada sessão os formandos realizam algum trabalho autónomo que envolve a leitura de textos sugeridos ou a leitura do texto “Sintetizando” que acompanha cada tópico discutido na sessão. Esse texto serve de base à discussão inicial na sessão seguinte. Além disso, entre as 4.ª e 5.ª sessões, iniciam a preparação do plano da aula que é analisado na 5.ª sessão. Por sua vez, entre as 5.ª e 6.ª sessões os formandos concluem o plano de aula que enviam à formadora, que por sua vez lhes dá o último *feedback*, e concretizam essa aula que será finalmente alvo de reflexão. Nessa altura elaboram, ainda, a apresentação para a 6.ª sessão. Estas duas últimas sessões são as que mais se distanciam no tempo de modo a permitir que todo esse trabalho seja desenvolvido. Nesta comunicação abordamos o trabalho realizado pelos formandos no âmbito do tópico Passar à prática, em que concretizam o plano de aula por eles elaborado.

Metodologia do estudo

O estudo assume uma natureza qualitativa, visando uma abordagem interpretativa dos formandos relativamente ao trabalho proporcionado pela formação. Participam nas sessões de formação com o recurso multimédia 11 formandos que frequentam o curso e estão a realizar estágio. O trabalho de planificação é desenvolvido por quatro pares e por um grupo de três formandos, de acordo com os grupos de estágio. Cada formando leciona uma aula, podendo cada um deles concretizar uma tarefa diferente. Cada grupo faz um relatório onde apresenta a planificação e o seu enquadramento curricular e didático, uma vez que as aulas lecionadas fazem parte de uma mesma unidade didática. Além disso, cada formando faz uma reflexão individual sobre o trabalho que realiza, desde a planificação à concretização de uma aula. Esta comunicação centra-se num formando de cada grupo de trabalho, ou seja, em cinco formandas, Andreia, Catarina, Daniela, Gabriela e Laura.

Neste estudo constituem fonte de dados: as reflexões individuais escritas, a gravação áudio da sessão de apresentação dos trabalhos finais, a observação participante na última sessão e as questões de resposta aberta do questionário anónimo realizado online (ao qual responderam apenas cinco dos onze formandos). As questões de resposta aberta aqui consideradas são três: O que mais gostou no contacto com o caso multimédia? Que características tem o caso multimédia que reconhece como importantes para a sua aprendizagem sobre a aula exploratória?

O que recomendaria que fosse alterado no caso “Subidas e descidas dos combustíveis”? Nesta comunicação consideramos os trabalhos de um elemento de cada grupo, no total de cinco formandos, e as respostas dos cinco formandos que responderam ao questionário online.

Os dados apresentam o modo como as formandas descrevem o seu trabalho no âmbito de um ensino exploratório, permitindo identificar os aspetos que destacam em cada momento da sua prática letiva. A análise assume um cunho descritivo de modo a permitir caracterizar esses diferentes momentos e evidenciar o contributo do caso multimédia para o desenvolvimento do seu conhecimento da prática de ensino, nomeadamente numa abordagem exploratória.

A prática letiva das formandas

Planificação

Na sua reflexão as formandas evidenciam alguns aspetos que consideram quando planificam. As cinco formandas destacam os objetivos de aprendizagem, evidenciando os conhecimentos e capacidades que pretendem que os alunos desenvolvam naquela aula e a tarefa que propõe para concretizar esses objetivos. Além disso, algumas formandas referem outros aspetos que têm em conta na seleção da tarefa e na preparação da aula. Por exemplo, Laura refere considerar “os conhecimentos prévios dos alunos ... as suas experiências diárias, os seus interesses ... e se estas [tarefas] me proporcionavam oportunidades para conhecer melhor o seu pensamento, compreensão, raciocínio e conhecimento sobre determinado tema”.

Ao elaborar o seu plano, Gabriela refere preparar os diversos momentos da aula, “os momentos de introdução, realização e discussão da tarefa e um momento final de sistematização das aprendizagens”. Pelo seu lado, Catarina reflete sobre a seleção da tarefa, tendo escolhido uma tarefa de exploração de modo a permitir que “os alunos realizassem uma aprendizagem significativa uma vez que exploraram as características do paralelepípedo e tiveram oportunidade de concluir que as dimensões do mesmo, influenciam o seu volume”.

A concretização da aula

Introdução da tarefa. Neste momento da aula, as formandas identificam como essencial a leitura da tarefa, podendo essa leitura ser individual ou coletiva, a organização dos alunos e a definição do tempo para o seu trabalho autónomo. Gabriela destaca a realização dessa leitura e o esclarecimento de vocabulário: "os alunos realizaram a leitura silenciosa do enunciado e foram esclarecidas dúvidas de vocabulário, como foi o caso de o que é um ascensorista". Quanto à organização dos alunos, esta passa, essencialmente, pelo trabalho a pares.

A maioria das formandas salienta a necessidade do professor estar atento à interpretação que os alunos fazem da tarefa, à identificação dos dados essenciais e à compreensão do trabalho que devem desenvolver. Para Catarina, tal não se revela necessário pois os alunos tinham já trabalhado com uma situação semelhante numa aula anterior, com outro contexto. Pelo seu lado, Gabriela revela a sua preocupação com a compreensão da tarefa por parte dos alunos, considerando que "esta pode comprometer [o trabalho a realizar nos] restantes momentos". Contudo, salienta a importância do professor não dar demasiadas sugestões pois isso "poderia ter tido implicações nas estratégias utilizadas pelos alunos, tornando-se as estratégias semelhantes, não tendo existido uma amostra rica de várias estratégias de resolução, como aconteceu".

As formandas identificam aspetos que estão diretamente relacionados com as características da tarefa que propõem. Por exemplo, Laura identifica a necessidade que tem de dar exemplos de uma situação mais simples para que os alunos percebessem algumas das condições da situação apresentada. A sua tarefa envolve a descoberta dos doze pentaminós em que os alunos usam cinco quadrados de papel na sua construção. Dá exemplos de "formas corretas e incorretas de agrupar duas ou três mesas, de modo a não dar logo exemplos de pentaminós". Pelo seu lado, Daniela destaca o esclarecimento de algumas questões fundamentais para o momento posterior:

> Considero que esta introdução foi crucial para o sucesso da tarefa. Neste momento os alunos foram esclarecendo as questões relativas aos vários passos da construção do gráfico circular o que fez com que durante a construção do mesmo os alunos fossem relativamente mais autónomos.

Neste momento de introdução as formandas chamam também a atenção dos alunos para o registo das suas resoluções ou construções, como acontece com Laura: "expliquei o que deviam registar e como o fazer na folha de registo". Além disso, Gabriela identifica que é neste momento que promove a adesão dos alunos à tarefa: "tendo-a apresentado como um desafio, além de ter sido estabelecida a conexão com os conteúdos já lecionados, pois a introdução aos números inteiros também foi realizada através do exemplo do funcionamento de um elevador, tal como a tarefa apresentada". O mesmo acontece com Catarina, apesar da introdução ter sido breve:

> Apesar de não ter sentido necessidade de dedicar muito tempo a este momento de introdução da tarefa, consegui promover a apropriação da tarefa pelos alunos, tendo em conta que fui clara quanto ao que tinham que fazer e consegui ainda promover a sua adesão à tarefa uma vez que a mesma foi lançada como um desafio.

Realização da tarefa. Relativamente a este momento, todas as formandas referem a monitorização do trabalho dos alunos. Durante essa monitorização observam o que os alunos estão a fazer e colocam questões sobre o trabalho já realizado com o objetivo de os ajudar a avançar ou para que identifiquem algum aspeto incorreto. Por exemplo, Laura explica porque lhes pede que justifiquem os agrupamentos de mesas que têm registados: "para que os alunos verificassem que algumas figuras que tinham representadas eram geometricamente iguais mas alguns alunos consideravam serem diferentes por estas estarem em posições diferentes ou transformadas por meio de uma reflexão, por exemplo". Nesta situação, esta formanda incentivou os alunos a "manipular as folhas quadradas para poderem encontrar novas formas de agrupar as mesas". Também Gabriela destaca a colocação de questões para promover o raciocínio e a comunicação. Questiona, nomeadamente: "«porque decidiram utilizar essa estratégia?» e «o que significa esse resultado?»". Para Catarina, a colocação de questões pode ser também fundamental para que o professor compreenda a resolução dos alunos: "fui colocando questões, pedindo clarificações e justificações sempre que as respostas dos alunos não eram claras e não me permitiam perceber como chegaram à resposta".

Daniela refere também a necessidade de clarificação de algumas situações específicas: "por exemplo, diversos alunos questionaram se poderiam apresentar mais do que uma legenda no seu gráfico circular". O mesmo acontece com Catarina que identifica a necessidade de esclarecer um aspeto para toda a turma: “ao verificar que esta dúvida era frequente, pedi a atenção dos alunos e expliquei a toda a turma”.

Neste momento, as formandas procuram manter o desafio da tarefa, como faz Laura: “Para que os alunos continuassem motivados e interessados na tarefa, desafiei-os a procurar novas formas de agrupar as mesas e fomentei a interação e a troca de ideias entre os membros do grupo”. Esta formanda indica fomentar a interação entre os alunos, o que também acontece com as outras formandas, como é exemplo Gabriela: “promover a participação de ambos os elementos do par, questionando-os se concordavam com o que o outro colega dizia e pedindo clarificações sobre o que ia sendo efetuado, não validando as respostas dos alunos”.

É também neste momento que começam a preparar o momento seguinte de discussão da tarefa. Gabriela diz ter em conta o que tinha já antecipado na planificação da aula, identificando assim “as resoluções que iriam ser apresentadas: por esquema, representação na reta numérica e por expressão numérica, sendo esta a ordem de apresentação”. Também Catarina destaca este aspeto neste momento: “aproveitei ainda para organizar a correção da tarefa/partilha de ideias, uma vez que à medida que fui acompanhando os grupos, fui selecionando os alunos que deveriam apresentar a sua resposta e explicar o seu raciocínio”. Ao mesmo tempo, há também lugar ao reforço da importância dos registos escritos, como descreve Gabriela que solicita “aos alunos o registo escrito das suas respostas e respetiva justificação”.

Discussão da tarefa. A seleção das resoluções e a organização da discussão pode ser iniciada no momento de realização da tarefa, enquanto o docente monitoriza o trabalho dos alunos, como é referido por algumas formandas ou, quando o trabalho dos diversos pares pode estar muito próximo ou ser complementar, essa gestão pode surgir mais neste momento de discussão. É o que acontece na aula de Laura. Esta formanda solicita a um elemento de cada par que apresente apenas um dos pentaminós que descobriram. Deste modo, todos os pares participam na análise das figuras apresentadas:

> Pedi a um elemento de cada grupo para ir ao quadro registar uma forma de agrupar as mesas sendo que cada aluno devia registar uma forma diferente das já registadas pelos colegas. Enquanto os alunos faziam os registos no quadro eu pedi aos colegas para

> estarem com atenção e para verificarem se realmente a figura registada era diferente e para passarem para a folha de registo as formas que não tinham encontrado.

Na turma apenas surgem onze pentaminós diferentes pelo que a formanda apresenta uma outra disposição dos cinco quadrados que os alunos analisam coletivamente.

Gabriela tinha já antecipado as estratégias que os alunos poderiam usar e o modo como as organizaria caso surgissem na turma. Deste modo, à medida que encontra alguma dessas estratégias começa a estruturar a discussão e integra estratégias que não tinha previsto surgirem, como acontece com a resolução de um par de alunos que recorre a uma expressão numérica: "estratégia não prevista, que apenas foi selecionada durante o momento de realização da tarefa". Na sua reflexão justifica porque seleciona um par de alunos para apresentar quando vários pares resolvem o problema de modo semelhante.

Várias formandas explicam como decorre essa discussão, destacando a apresentação das suas resoluções por parte dos alunos e a sua análise por parte da turma, surgindo a explicação por parte dos alunos no quadro e o questionamento do professor ou dos colegas, que confrontam a sua resolução com a que é apresentada. Destacam a importância dos alunos explicarem aos colegas a sua estratégia. Andreia refere que na sua aula relativamente a uma questão específica "o aluno teve de explicar aos seus colegas, oralmente, como o par tinha pensado para chegar à resposta". Pelo seu lado, Gabriela destaca que durante a sua apresentação, "os alunos registaram no quadro a sua estratégia de resolução e de seguida explicaram-na aos restantes colegas". Sempre que um par termina a sua apresentação, esta formanda solicita aos restantes alunos que indiquem se a sua estratégia é semelhante e se concordam com o modo como os colegas resolveram. Andreia solicita que cada par confronte a sua resolução com a que é apresentada e indique se concorda com o que foi dito, havendo lugar a que outros alunos indiquem o que a sua estratégia tem de diferente ou de semelhante com a que está a ser. Gabriela disponibiliza após a apresentação de cada par "um momento para a troca de opiniões e o esclarecimento de dúvidas, sendo que os restantes alunos foram estimulados a participar ativamente neste momento". Tendo em conta a natureza do trabalho que os alunos estão a realizar, Daniela dá sugestões sobre alguns aspetos que podem ser questionados pela turma aos colegas que apresentam o seu trabalho:

> Foi solicitado aos alunos que apresentassem e justificassem as suas respostas relativas à análise e interpretação do gráfico, assim como foi pedido aos restantes alunos da turma que levantassem questões acerca dos gráficos realizados bem como do tipo de legendas escolhidas.

Este momento de discussão permite que os alunos percebam há várias estratégias possíveis para resolver um mesmo problema, segundo descreve Gabriela: "os alunos perceberam que todas as estratégias estão válidas e são corretas". Além disso, esta formanda procura neste momento promover a aprendizagem matemática dos alunos e o desenvolvimento das suas capacidades "pedindo explicações das resoluções, justificações sobre os resultados e representações utilizadas".

Um outro aspeto fundamental neste momento é a regulação das interações entre os alunos durante a discussão, cabendo ao professor essa regulação, por exemplo incentivando o questionamento e a análise, o confronto e a comparação de resoluções, como refere Gabriela. Isto pode também constituir um desafio como Catarina reconhece, já que nem sempre todos os alunos participam de modo autónomo: "muitos dos alunos não participam ativamente e de forma autónoma neste momento da aula. Foi necessário que os questionasse para que os mesmos participassem". No seu caso, "apenas uma pequena parte da turma, participou ativa e autonomamente, pedindo esclarecimento relativamente à estratégia quando não a compreenderam, comparando as suas resoluções com a dos colegas". Também quanto tal acontece é importante o trabalho de monitorização do professor durante a resolução da tarefa já que tal acompanhamento permite a Catarina "solicitar a participação de alguns alunos, selecionados criteriosamente, permitindo assim que o momento de partilha se tornasse mais rico".

Sistematização das aprendizagens. As formandas procuram contemplar este momento na sua aula mas referem que ele nem sempre tem a duração desejável por outros momentos terem necessidade de mais tempo do que o previsto no plano de aula. Catarina não teve oportunidade de realizar essa sistematização e indica a necessidade que teve de retomar a tarefa e realizar a sistematização do cálculo do volume do paralelepípedo na aula seguinte.

A sistematização está relacionada com os objetivos de aprendizagem visados. Na sua aula, Laura concluí com os alunos que existem apenas 12 pentaminós e verificam o perímetro de todas as figuras, explorando este conceito que era também objeto de trabalho por parte dos alunos. Também Gabriela identifica a relação com os objetivos de aprendizagem: "como era um dos objetivos introduzir as operações com números inteiros através desta situação problemática, no término da aula, de modo a sistematizar as aprendizagens matemáticas questionei os alunos sobre se a possibilidade de realizar operações com números inteiros". Tendo a situação surgido para introduzir as operações com números inteiros no 6.º ano, Gabriela recorda as resoluções de alguns pares que contribuíram para a compreensão dos restantes colegas da representação das operações e da realização de alguns cálculos: "alguns pares recorreram às expressões numéricas para resolver a tarefa e estas foram discutidas e compreendidas por toda a turma".

Esta sistematização envolve em alguns casos o estabelecimento de conexões com outros conceitos não abordados diretamente mas que emergem da tarefa ou das resoluções apresentadas. Por exemplo, Andreia relaciona o trabalho desenvolvido de interpretação de dados com a natureza dos dados e Daniela retoma as percentagens e a relação entre a frequência relativa de cada modalidade e o respetivo setor no gráfico circular.

Em algumas aulas este momento decorre num período de tempo reduzido. Algumas formandas, quando realizam a reflexão da aula, identificam aspetos que poderiam ter explorado de um outro modo ou que poderiam ter valorizado mais. Por exemplo, Laura identifica este aspeto na sua prática: "Caso tivesse mais tempo gostaria de ter explorado, ainda mais a tarefa do ponto de vista da visualização espacial pois foi onde os alunos manifestaram mais dificuldade".

Síntese da prática das formandas

A prática letiva das formandas inicia-se com a preparação das aulas tendo em vista esta abordagem. Os aspetos principais referidos relativamente à planificação são a seleção da tarefa tendo em conta os objetivos e aprendizagem, os conhecimentos e as características dos alunos, bem como o facto de pretenderem que os alunos se envolvam na resolução da tarefa. Contemplam, assim, o trabalho autónomo e perspetivam as conclusões a que os alunos podem chegar com essa resolução.

Quanto à concretização das aulas, as formandas identificam os quatro momentos do ensino exploratório assinalados nos casos multimédia e destacam diversas características essenciais de cada momento que identificam na sua prática. Na introdução da tarefa, as formandas identificam várias situações que ocorreram nas suas aulas. Surgem assim, como ideias principais a leitura da tarefa e esclarecimento de vocabulário, a organização dos alunos, a definição do tempo de trabalho autónomo, a interpretação e compreensão da tarefa (sem que isso envolva sugestões diretas para a sua resolução), a indicação dos registos a realizar pelos alunos, a apresentação de exemplos de situações mais simples, a análise de alguns passos específicos e o estabelecimento de conexões com outras tarefas ou com situações anteriormente abordadas, que podem ser fundamentais para a adesão dos alunos à tarefa.

Durante o momento de trabalho autónomo dos alunos as formandas destacam o seu papel de monitorização, como apontam Canavarro (2011) e Stein et al. (2008). Este momento envolve colocar questões ou clarificar algum aspeto, manter do desafio da tarefa e promover a interação entre os alunos. Além disso, selecionam as resoluções que são apresentadas e discutidas no momento seguinte e a ordem pela qual essa apresentação é feita, tal como é referido por Ruthven (1989) e Stein et al. (2008).

Para o momento de discussão, consideram importante a antecipação das estratégias que os alunos podem usar e a sua identificação durante a realização da tarefa para selecionar e organizar as resoluções a apresentar ou para selecionar a participação de alguns alunos quando estes não intervêm de modo autónomo. Este momento de discussão está relacionado com a natureza da tarefa e o tipo de resolução a que dá origem. Podem vários alunos contribuir para uma resolução conjunta, descobrindo todas as respostas possíveis, ou podem vários alunos mostrar diferentes modos de resolução que são analisados e discutidos coletivamente. Neste momento os alunos precisam de algum tempo para explicar a sua resolução e é importante que o professor disponibilize também tempo para que os restantes alunos questionem os colegas e confrontem as suas resoluções, gerindo a discussão entre os alunos e regulando as diversas participações. Assim, este momento pode permitir a análise de diferentes estratégias e a sua validade por parte de toda a turma, bem como constituir-se como um momento de aprendizagem matemática significativa, com ênfase nas justificações, nas representações utilizadas e no estabelecimento de conexões (Canavarro, 2011; Ponte, 2005; Ponte, 2011).

O momento final de sistematização revela-se problemático em algumas aulas, dependendo da gestão do tempo que as formandas conseguem fazer dos momentos anteriores. Quando concretizado permite às formandas focar os aspetos principais do trabalho dos alunos, centrando-se nos objetivos de aprendizagem ou estabelecendo conexões com outros tópicos tratados, bem como salientar aspetos das resoluções dos alunos relativos aos conceitos que pretendem introduzir.

A integração dos casos multimédia no processo formativo

No momento de apresentação dos trabalhos, os formandos fazem um balanço da sua experiência de formação com o caso multimédia. Identificam que o trabalho foi bastante intenso e que as sessões em torno do caso multimédia ocuparam um número significativo de horas das aulas de Didática da Matemática e de Seminário que consideraram demasiado apesar de fazerem um balanço positivo da aprendizagem que proporcionou. Todos os formandos identificam que o visionamento dos episódios e as discussões coletivas foram o mais pertinente por permitirem a análise de situações reais de sala de aula e pela troca de ideias proporcionada. Contudo, a sua maioria indica que a resposta escrita às várias questões referentes a cada situação de análise tornou-se exaustiva e, em alguns pontos, repetitiva. Andreia, à semelhança de outros colegas, revela algum cansaço, embora reconheça a pertinência deste trabalho para a sua prática: “Acho que acabou por ser muito, já estávamos exaustos de fazer aquele trabalho mas ajudou-nos a refletir sobre a nossa prática”.

Em resposta ao questionário online, os cinco formandos que respondem identificam diversos aspetos centrais do trabalho com o caso multimédia e a dinâmica das sessões. Na questão “Que características tem o caso multimédia que reconhece como importantes para a sua aprendizagem sobre a aula exploratória?” destacam como aspetos importantes, nomeadamente, a funcionalidade da sua organização e o facto de contemplar “os diversos ‘passos’ a ter em conta no decorrer da aula” e de episódios relativos aos diversos momentos. Um formando realça a importância da observação da aula e o seu contributo para a sua capacidade de planificar e de refletir sobre aulas de ensino exploratório: “Observação da implementação da atividade em vários passos distintos, que ajudam a construir melhor uma reflexão e a planificar melhor uma atividade de carácter exploratório”. Um outro formando destaca a ênfase dada ao momento de introdução da tarefa, neste caso particular, pois como "a tarefa em questão não era de fácil compreensão por parte dos alunos considero que a etapa da introdução da tarefa era essencial para todo o envolvimento da mesma". Um formando salienta, ainda, a ênfase dada às "intenções e ações do professor (na introdução, realização e discussão da tarefa e na sistematização)". Tal análise permite-lhe "constatar que na dinamização de uma aula exploratória tudo deve ser previamente planificado pois apenas desta forma se irá conseguir gerir a aula eficazmente e promover aprendizagens matemáticas significativas". Assim, reflete sobre a importância da planificação de uma aula desta natureza de modo a "organizar a turma de forma adequada visando maximizar as interações entre os alunos e as aprendizagens".

Os formandos identificam que o que mais gostaram no contacto com o caso multimédia foi o conhecimento que este lhes proporcionou relativamente à prática letiva, identificando diversos aspetos do ensino exploratório, enfatizando em particular, o plano da aula, a sua concretização ou as resoluções dos alunos: "os importantes momentos de introdução da tarefa, desenvolvimento e conclusão" e "ter contacto com o plano de aula, com a aula em si e com as resoluções dos alunos". Um formando destaca ainda o realismo da situação: "Do facto de se tratar de um caso real e atual. As temáticas abordadas foram importantes e úteis, permitiram refletir sobre a importância da discussão, da análise das resoluções dos alunos, da gestão das interações, etc.".

Na questão "O que recomendaria que fosse alterado no caso "Subidas e descidas dos combustíveis"?", três dos cinco formandos indicam que não identificam necessidade de fazer alterações. Os outros dois formandos identificam aspetos relacionados com a sua exploração nas sessões. Um identifica que alteraria o tempo de exploração que lhe foi dedicado e o outro a dinâmica de exploração das situações, abdicando da análise escrita que é feita autonomamente pelos grupos de formandos: "Em vez de visualizar os vídeos e efetuar uma análise escrita acho que teria sido mais produtivo e menos exaustivo visualizar os vídeos e fazermos uma análise oral em grande grupo com o registo das conclusões no quadro". Em cada sessão era feita uma síntese dos principais aspetos identificados pelos formandos em resposta às diversas questões que são colocadas relativamente aos diferentes episódios explorados nas sessões. Este formando considera que não é necessário escrever a sua análise dos episódios uma vez que as sessões são presenciais e seria possível fazer essa análise oralmente, com o contributo de todos os elementos da turma.

Conclusão

Na sua prática letiva, as formandas revelam reconhecer a importância dos diferentes momentos para a aprendizagem dos alunos, em particular, do momento de discussão coletiva. Neste momento procuram que os alunos justifiquem as suas resoluções e fomentam a discussão entre os alunos, incentivando-os a colocarem questões aos colegas que apresentam. O momento de sistematização nem sempre surge de um modo autónomo, dependendo da natureza das tarefas propostas e da exploração de conceitos ou procedimentos que as formandas fazem logo no momento da discussão.

A integração dos casos multimédia na formação inicial no âmbito da Didática da Matemática é pertinente, no contexto em que foi concretizada, uma vez que esta unidade curricular se articula com a prática letiva dos formandos. O visionamento de episódios da sala de aula que envolvem as diversas fases do ensino exploratório, a análise das respostas dos alunos e a discussão da orquestração da discussão coletiva foram os aspetos mais significativos para os formandos. Verifica-se que o visionamento e análise da sala de aula tem um papel importante na formação inicial de professores, como sugerem os estudos de Llinares e Valls (2009, 2010). Em particular, nesta situação de formação a ênfase na prática da professora e no trabalho dos alunos contribuíram para desenvolvimento da compreensão do ensino exploratório em Matemática por parte dos formandos e da sua capacidade de concretizar e refletir sobre a prática

Os formandos têm oportunidade de realizar um ensino exploratório no seu estágio, integrando as tarefas propostas na planificação anual de modo a cumprir os objetivos previstos. Este aspeto torna-se importante pois, dada a diversidade de tópicos em que as suas aulas se concretizaram, verificam que essa seleção de tarefas é possível e que o ensino exploratório não é uma prática pontual. Além disso, identificam aspetos essenciais dos diversos momentos da aula, refletindo sobre a sua prática e sobre a aprendizagem dos alunos. Contudo, vários formandos sugerem uma dinâmica diferente para a utilização dos casos multimédia na formação inicial de modo que a sua análise não se torne tão detalhada e permita que sejam contemplados outros aspetos essenciais da sua formação em Didática da Matemática. É importante ter em conta o conhecimento que os formandos já têm desta abordagem de ensino proporcionado por outras unidades curriculares anteriores, tanto da licenciatura como do mestrado, e a sua experiência de prática profissional anterior, no 1.º ciclo ou noutras disciplinas do 2.º ciclo. Com a articulação feita entre os seminários da prática e as aulas de Didática foi possível abordar, nomeadamente o ensino-aprendizagem de diversos temas matemáticos, a utilização de diferentes recursos didáticos na sala de aula e a avaliação. Este trabalho exigiu algum trabalho particularmente intenso à formadora na articulação entre os temas tratados e a prática dos formandos no 2.º ciclo, quer de preparação do docente, e também aos formandos durante toda a formação, que será necessário ajustar. Assim, é preciso repensar as situações do caso a analisar e a ênfase que se dá, integrando quer a componente de análise escrita, que permite uma análise mais detalhada por parte dos formando, quer a discussão coletiva, que se revela muito importante para a troca de ideias e de experiências.

Referências

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, 115, 11-17.

Canavarro, A. P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da Matemática: O caso de Célia. In L. Santos, A. P. Canavarro, A. M. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Eds.), *Atas do EIEM2012: Práticas de ensino da Matemática* (pp. 255-266). Portalegre: SPIEM.

Llinares, S., & Valls, J. (2009). The building of preservice primary teachers' knowledge of mathematics teaching: interaction and online video case studies. *Instructional Science, 37,* 247-271.

Llinares, S., & Valls, J. (2010). Prospective primary mathematics teachers' learning from online discussions in a virtual videobased environment. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13,* 177-196.

ME (2007). *Programa de Matemática do ensino básico.* Lisboa: ME-DGIDC.

Mewborn, D. (2001). Teachers Content Knowledge, Teacher Education, and their Effects on the Preparation of Elementary Teachers in the United States. *Mathematics Education Research Journal, 3,* 28-36.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Oliveira, H., & Carvalho, R. (2013). Uma experiência de formação, com casos multimedia, em torno do ensino exploratório. In Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Eds.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga:

APM & CIEd da Universidade do Minho. Disponível em http://www.apm.pt/files/_S4-C6-Oliveira_529d2adac18ce.pdf.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2011). Using video episodes to reflect on the role of the teacher in mathematical discussions. In O. Zaslavsky & P. Sullivan (Eds.), *Constructing knowledge for teaching secondary mathematics: Tasks to enhance prospective and practicing teacher learning* (pp. 249-261). New York, NY: Springer.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Branco, N. (2012). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Avances en Investigación en Educación Matemática, 1,* 65-86.

Ruthven, K. (1989). An exploratory approach to advanced mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 20,* 449-467.

Ruthven, K., Hofmann, R., & Mercer, N. (2011). A dialogic approach to plenary problem synthesis. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 81-88). Ankara, Turkey.

Sánchez, V., Llinares, S., García, M., & Escudero, I. (2000). La formación de profesores de primaria desde la didáctica de las matemáticas. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 43-44,* 143-146.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10,* 313-340.

NOTAS BIOGRÁFICAS

Ana Patrícia Gafanhoto é doutoranda em Ciências da Educação da Universidade de Évora, mestre em Matemática para o Ensino e licenciada em Matemática e Ciências da Computação (especialização principal de Matemática e especialização secundária de Ensino) pela mesma Universidade. Atualmente é professora de Matemática do 3.º ciclo do ensino básico e secundário em estabelecimentos de ensino público.

Ana Paula Canavarro é professora auxiliar na Universidade de Évora e investigadora da UIDEF do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. É autora de estudos sobre práticas curriculares em Matemática de professores de diversos níveis de escolaridade, tendo como área de investigação específica o uso de tecnologias no ensino da Matemática. É vice-presidente da Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática e sócia fundadora da Associação de Professores de Matemática, na qual dirigiu a revista Educação e Matemática.

António Guerreiro é professor-adjunto e diretor da Escola Superior de Educação e Comunicação da Universidade do Algarve. Integrou a comissão de acompanhamento do Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico (2005-2010). É licenciado em Matemática (Universidade de Coimbra), mestre em Supervisão (Universidade do Algarve) e doutor em Educação na especialidade de Didática da Matemática (Universidade de Lisboa). Investiga as práticas profissionais dos professores de Matemática nos primeiros anos de escolaridade. É colaborador da UIDEF do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Célia Mestre é professora do 1.º ciclo do ensino básico desde 1997. É mestre em Ciências da Educação, com tese sobre o ensino e aprendizagem da Matemática no 1.º ciclo e doutoranda em Educação, na especialidade de Didática da Matemática, no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, com tese sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico no 1.º ciclo. Foi professora experimentadora do Programa de Matemática de 2007. É colaboradora da UIDEF do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Cláudia Domingues é licenciada em Engenharia de Produção pela Universidade do Minho com profissionalização na Escola Superior de Educação de Portalegre e mestre em Supervisão Pedagógica em Educação Matemática pela Universidade do Minho. É professora de Matemática do ensino básico e secundário do quadro da Escola Secundária de Caldas das Taipas do concelho de Guimarães. Tem vindo a investigar sobre a sua prática profissional e sobre o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos.

Cláudia Oliveira é docente na Escola Profissional de Loures, IPTrans. É licenciada em Ensino da Matemática pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e mestre em Educação, na especialidade de Didática da Matemática, pelo Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. Colabora com a Escola Superior de Educação de Lisboa como docente de várias unidades curriculares. É autora de várias comunicações sob a temática da construção e exploração de tarefas de modelação matemática num contexto de ensino profissional de nível secundário.

Hélia Oliveira é professora auxiliar no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. Tem participado em diversos projetos de investigação financiados pela FCT, nas áreas da formação inicial de professores e das práticas profissionais do professor de Matemática e coordena um projeto ligado à educação estatística. Tem trabalhado na criação de materiais multimédia para a formação de professores que ensinam Matemática no âmbito do projeto P3M e na Universidade Estadual de Londrina, Brasil.

Hélia Ventura é doutora em Educação, na especialidade de Didática da Matemática, pelo Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, com uma tese sobre o ensino-aprendizagem dos números racionais. É docente contratada do 2.º ciclo do ensino básico e colaboradora no grupo de investigação da Didática da Matemática do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Isabel Velez é mestre em Educação, na especialidade de Didática da Matemática, pela Universidade de Lisboa e doutoranda em Educação, na mesma especialidade, no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa (bolseira da FCT). Além do projeto P3M, integra o projeto DSL-Developing Statistical Literacy e faz parte da UIDEF do Instituto da Educação da Universidade de Lisboa. As suas áreas de interesse são a prática profissional, as representações matemáticas e o raciocínio matemático.

Joana Mata-Pereira é doutoranda em Educação, na especialidade de Didática da Matemática, no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, sendo bolseira da FCT. É colaboradora da UIDEF do Instituto da Educação da Universidade de Lisboa, sendo as suas principais áreas de interesse o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos e as ações do professor. Tem lecionado, no Instituto da Educação disciplinas de Educação na formação inicial de professores de diversas áreas.

João Pedro da Ponte é doutor em Educação Matemática pela Universidade da Georgia (EUA), sendo professor catedrático no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. Foi professor visitante em Universidades no Brasil, Espanha e EUA. Coordenou diversos projetos de investigação, dirigiu mais de vinte teses de doutoramento, publicou numerosos artigos, livros e capítulos científicos e de cunho profissional e é editor associado do *Journal of Mathematics Teacher Education*. A sua investigação atual incide sobre a prática profissional do professor, com atenção especial ao ensino dos números, álgebra e raciocínio matemático.

Luís Menezes é professor adjunto da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viseu. É investigador no CI&DETS e especialista em Didática da Matemática, trabalhando as áreas do desenvolvimento profissional de professores e da comunicação matemática. É autor e coautor de um conjunto de estudos publicados em livros e em revistas nacionais e estrangeiras. É ainda coautor do Programa de Matemática do ensino básico (2007), bem como de materiais de apoio a este programa.

Márcia Cyrino é professora associada do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina (Brasil). Tem coordenado vários projetos de investigação financiados pelo CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico e pela CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de

Pessoal de Nível Superior. Investiga formação de professores que ensinam Matemática e práticas profissionais de professores de Matemática. É bolseira de produtividade em pesquisa do CNPq.

Maria Helena Martinho é professora auxiliar do Instituto de Educação da Universidade do Minho e membro do Centro de Investigação em Educação (CIEd). Foi membro da Comissão de Acompanhamento do Plano da Matemática II e Gestão do Novo Programa do Ensino Básico (2009-2012) e co-autora do programa de Matemática do 3.º ciclo ensino básico de Timor-Leste. Os seus principais interesses de investigação são as práticas dos professores, comunicação matemática, raciocínio e literacia. Participa em projetos nacionais e internacionais, sendo investigadora responsável de um projeto em literacia e diretora-adjunta da Quadrante.

Marisa Quaresma é doutoranda em Educação, na especialidade de Didática da Matemática, no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa (bolseira da FCT) e assistente convidada na mesma instituição. Nos últimos anos, tem participado em projetos de investigação em educação matemática e colaborado em programas de formação contínua de professores. É (co)autora de diversos artigos publicados em revistas, capítulos de livros e comunicações em encontros científicos, tanto a nível nacional como internacional.

Mónica Baptista é doutora em Educação, na especialidade de Didática das Ciências, pelo Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, onde é professora auxiliar e investigadora. Coordena o Mestrado em Ensino de Física e Química e do Mestrado em Educação – área de especialidade Didática das Ciências. Tem trabalhos publicados em Portugal e no estrangeiro. As suas áreas de interesse são educação em ciências, tarefas de investigação, prática profissional, estudos de aula e desenvolvimento profissional dos professores.

Neusa Branco é docente na Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Santarém, na formação inicial de professores dos primeiros anos. É licenciada em Ensino da Matemática e mestre em Educação, na especialidade de Didática da Matemática, pela Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, e doutorada em Educação, na mesma especialidade, pelo Instituto de Educação, Universidade de Lisboa. Tem integrado projetos de investigação em educação matemática, estudando a aprendizagem dos alunos e as práticas letivas dos professores. É membro da UIDEF do Instituto da Educação da Universidade de Lisboa

Paulo Gil é professor e adjunto da direção da Escola Básica e Secundária de Pinheiro. É licenciado em Matemática e mestre em Matemática – Fundamentos e Aplicações (Universidade do Porto), e doutor em Ciências da Educação, na especialidade de Educação Matemática (Universidade do Minho). Frequentou a parte curricular do mestrado em Supervisão Pedagógica em Ensino da Matemática, (Universidade do Minho), e possui formação especializada em Administração e Organização Escolar (Universidade Católica). Integrou uma equipa de Avaliação e Certificação de manuais de Matemática do 3.º ciclo.

Renata Carvalho é professora de Matemática e Ciências da Natureza no 2.º ciclo do ensino básico e mestre em Educação, na especialidade de Didática da Matemática. É colaboradora da UIDEF do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, encontrando-se a concluir o doutoramento em Educação, especialidade de Didática da Matemática, sobre o desenvolvimento da capacidade de cálculo mental com números racionais (bolseira da FCT). Tem feito formação contínua de professores desde 2005. Publicou um artigo na *Quadrante* e apresentou diversas comunicações em encontros científicos e profissionais, tanto nacionais como internacionais.

Rosa Tomás Ferreira é professora auxiliar na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto e investigadora integrada do Centro de Matemática da Universidade do Porto. Tem colaborado em vários projetos de investigação, alguns dos quais financiados pela FCT. Recentemente, tem-se debruçado sobre dimensões afetivas da participação em competições inclusivas de resolução de problemas, ensino e aprendizagem da Estatística e práticas profissionais de professores de Matemática, privilegiando questões relacionadas com a formação inicial de professores e com a comunicação professor-aluno.

Práticas Profissionais dos Professores de Matemática

Na Matemática como nas outras disciplinas escolares, a aprendizagem dos alunos depende em grande medida do que acontece na sala de aula. E isso, como não poderia deixar de ser, tem muito a ver com o modo como o professor ensina. Esta constatação tem promovido um grande interesse pelo estudo da prática profissional do professor e das condições da sua transformação, tendo em conta as necessidades de uma sociedade em mudança. Este livro, realizado no âmbito do projeto P3M - Práticas Profissionais dos Professores de Matemática, é dedicado a este tema, apresentando trabalhos empíricos que estudam diversos aspetos da prática profissional do professor de Matemática e da sua transformação e regulação, bem como revisões teóricas que procuram sistematizar o estado da arte das investigações nacionais e internacionais neste campo.

projeto P3M
LISBOA UNIVERSIDADE DE LISBOA
Instituto de Educação
FCT Fundação para a Ciência e a Tecnologia
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA