UNIVERSIDADE DE ÉVORA

# GRADIENTES GENERALIZADOS, A INCLUSÃO DIFERENCIAL DE DUBOIS-REYMOND E APLICAÇÕES À EXISTÊNCIA DE MÍNIMO PARA INTEGRAIS SIMPLES NÃO CONVEXOS.

Por ROGÉRIO P. CARDOSO

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE ÉVORA PARA ATRIBUIÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM MATEMÁTICA APLICADA

ORIENTADOR : PROF. DOUTOR ANTÓNIO ORNELAS

ABRIL, 1998

# PREFÁCIO

Como o título indica,este trabalho tem como objectivo estabelecer a noção de gradiente generalizado de uma função localmente lipschitziana assim como as regras operatórias principais do cálculo com estes gradientes,o que é feito no Capítulo II,e aplicar este conhecimento para demonstrar que um funcional integral do tipo

$$I(x) = \int_{\Omega} \{g[t, x(t)] + h[t, x'(t)]\}\, dt$$

tem mínimo no espaço de Sobolev $W^{1,p}([0,T], \mathbb{R}^n)$ ,sendo $g, h,$ funções de Carathéodory, $g$ côncava e $h$ não convexa.

A demonstração,efectuada no Capítulo V,obriga a estudar a existência de soluções do correspondente problema relaxado assim como de uma representação adequada da função bipolar $h^{**}$ de $h$ ,o que é feito no Capítulo III.

No Capítulo IV estuda-se a regularidade lipschitziana de funcionais integrais não contínuos ,na classe dos integrandos convexos,e prova-se a condição necessária conhecida por inclusão diferencial de DuBois-Reymond.

Com o objectivo de facilitar a leitura do texto foi elaborado um Apêndice no qual são recolhidas definições,enunciados,demonstrações e justificações de afirmações que ocorrem no texto.

Finalmente quero aqui deixar expressos os meus agradecimentos ao Professor Doutor António Ornelas,Director do Mestrado e meu Orientador, por ter sugerido o tema e por ter amavelmente disponibilizado os livros fundamentais para a necessária pesquisa e estudo.

Uma palavra de agradecimento ainda para a minha mulher e a minha filha ,as quais nestes três últimos anos quase não puderam contar com o meu apoio familiar.

# ÍNDICE

# I INTRODUÇÃO

## 1. - O PROBLEMA TÍPICO. A EQUAÇÃO DE EULER

O problema típico mais simples do cálculo de variações consiste em determinar uma função desconhecida $x(t)$ para a qual o integral de $t, x(t)$ e de uma ou mais derivadas de $x(t)$ tem um mínimo ( ou um máximo ).

Seja então dada uma função de três variáveis,$f(t,x,x')$ ,e suponha-se que $f$ é duas vezes diferenciável.

Fixemos dois pontos $A = (a,\alpha)$ , $B = (b,\beta)$ , no plano $xy$ . Se quisermos ligar $A$ e $B$ por uma curva $C$ que é o gráfico de uma função $x = h(t)$ , $h$ diferenciável , terá de ser : $\alpha = h(a)$ , $\beta = h(b)$ .

Em cada ponto $Q$ de $C$ teremos $x' = \dfrac{dx}{dt} = h'(t)$ .Nestas condições a curva $C$ determina um valor do integral

$$I[x] = \int_a^b f(t,x,x')dt = \int_a^b f[t,h(t),h'(t)]\,dt$$

Como $I$ depende da curva $C$ , o valor de $I$ alterar-se-á se substituirmos $C$ por outra qualquer curva que ligue $A$ e $B$ . É esta variação de $I$ com $C$ que se deseja estudar de modo a determinar propriedades de alguma curva que eventualmente exista e minimize o valor de $I$ .

Consideremos uma família de curvas $C_u$ tais que :

i) Para qualquer valor real do parâmetro $u$, $C_u$ é definida a partir de $C$ :

$$C_u : Y_u(t) = h(t) + u\varphi(t).$$

ii) $x = \varphi(t)$ é uma função arbitrária diferenciável com $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

Observe-se que :

$$Y_u(a) = h(a) + u\varphi(a) = h(a) = \alpha$$

$$Y_u(b) = h(b) + u\varphi(b) = h(b) = \beta$$

Para qualquer ponto de $C_u$ teremos :

$$\frac{dY_u}{dt} = h'(t) + u\varphi'(t)$$

Para qualquer valor do parâmetro $u$ podemos escrever :

$$I[u] = \int_a^b f(t, Y_u, Y_u')dt$$

$$\frac{dI}{du} = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial u}dt \qquad \text{com } g(t,u) = f(t, Y_u, Y_u')$$

Este último resultado é correcto desde que $a, b$ sejam finitos e $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ seja contínua nas diversas variáveis, ( Apêndice A.2, [1] ,ver final da dissertação).

Podemos considerar $f(t, Y_u, Y_u')$ como a composição de $f$ com $Y_u$ e $Y_u'$ que são, por sua vez, funções de $u$ .

Então :

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial Y_u} \cdot \frac{\partial Y_u}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial Y_u'} \cdot \frac{\partial Y_u'}{\partial u}$$

Mas :

$$\frac{\partial Y_u}{\partial u} = \frac{\partial\left[h(t) + u\varphi(t)\right]}{\partial u} = \varphi(t)$$
$$\frac{\partial Y_u'}{\partial u} = \frac{\partial\left[h'(t) + u\varphi'(t)\right]}{\partial u} = \varphi'(t)$$

pelo que ,

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \varphi(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial Y_u} + \varphi'(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial Y_u'}$$

e portanto ,

$$\frac{dI}{du} = \int_a^b \left[\varphi(t)\frac{\partial f}{\partial Y_u} + \varphi'(t)\frac{\partial f}{\partial Y_u'}\right] dt \ .$$

Integramos o segundo termo do integrando por partes :

$$\int_a^b \varphi'(t)\frac{\partial f}{\partial Y'_u}dt = \left[\varphi(t)\cdot\frac{\partial f}{\partial Y'_u}\right]_a^b - \int_a^b \varphi(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial Y'_u}\right)dt$$

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0 \Rightarrow \left[\varphi(t)\frac{\partial f}{\partial Y'_u}\right]_a^b = 0$$

$$\frac{dI}{du} = \int_a^b \varphi(t)\left[\frac{\partial f}{\partial Y_u} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial Y'_u}\right)\right]dt$$

Vamos supor, nesta altura, a existência de uma curva, descrita por uma função $h(t)$ para a qual o valor $I$ é mínimo.Veremos um pouco adiante que expandindo a expressão

$$\frac{\partial f}{\partial Y_u} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial Y'_u}\right)$$

obtemos uma expressão com derivadas parciais de $f$ , de segunda ordem. Tomemos esta curva como C.

Então o valor de $I[u]$ terá um mínimo quando $u = 0$ , mais precisamente :

$$I[0] \leq I[u] \text{ , } \forall u \in \mathbb{R} \text{ .}$$

Como as nossas hipóteses de continuidade asseguram a continuidade de $\frac{dI}{du}$, teremos $\frac{dI[u]}{du} = 0$ quando $u = 0$.

Mas quando $u = 0$ resulta que :

$$Y_u(t) = h(t) = x$$
$$Y'_u(t) = h'(t) = x'$$

Então para $u = 0$ e $I'[0] = 0$ podemos escrever :

$$\int_a^b \varphi(t)\left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right)\right]dt = 0$$

Como a função $\varphi(t)$ é arbitrária, excepto quanto à restrição em $a$ e $b$ e a expressão entre parêntesis no integrando é contínua, concluímos que :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right) = 0\text{, para todo o } t \in [a,b].$$

De facto, se fosse $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right) > 0$ nalgum ponto $t = \xi \in [a, b]$, existiria uma vizinhança de $\xi$ ,$p < \xi < q$ , na qual a expressão permaneceria positiva,(Apêndice A.2, [2]).

Usando então $\varphi(t) \begin{cases} > 0, t \in ]p, q[ \\ = 0, t \in [a, b] \setminus ]p, q[ \end{cases}$ .

o integrando $\varphi(t)\left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right)\right]$ seria nulo em $[a, p] \cup [q, b]$ e positivo em $]p, q[$ .Então $I[u]$ seria positivo em $]p, q[$ e não nulo como exigido.

Analogamente se supusermos $\left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right)\right] < 0$ num ponto do intervalo $]p, q[$ .

Podemos então enunciar o seguinte resultado :

se $I[x] = \int_a^b f[t, h(t), h'(t)]\, dt$ tiver um mínimo para uma curva $C : x = h(t)$ suficientemente regular que ligue $A$ e $B$, então $x = h(t)$ será solução da equação diferencial $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right) = 0$ .

É a famosa equação diferencial de *Euler* ( ou de *Euler-Lagrange*) e constitui uma condição necessária do extremo de $I[x]$ .

Ao calcularmos $\frac{d(\cdot)}{dt}$ não podemos esquecer que $x = h(t)$ , $x' = h'(t)$. Diferenciando em relação a $x$ obtemos a forma expandida da equação :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x'} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x'} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{\partial^2 f}{\partial x'^{\,2}} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}\right] = 0.$$

Trata-se de uma equação diferencial de segunda ordem. Portanto a sua solução conterá duas constantes arbitrárias, as quais serão determinadas pela restrição inicial que obriga $C$ a passar por $A$ e $B$ .

Vejamos algumas características gerais do problema exposto.

No problema que estamos a tratar os objectos investigados são curvas descritas por funções; analiticamente isto significa que temos de determinar uma função que conduza ao extremo do funcional integral, satisfazendo determinadas condições de fronteira.

Ao considerarmos incógnitas que são funções em vez de números reais, deparamos com um número infinito de graus de liberdade característico dos espaços funcionais.

Surge, portanto, o problema de definição da classe de funções na qual procuramos o minimizador do funcional. Os espaços funcionais são, nos casos mais comuns, espaços lineares normados de dimensão infinita, completos, os chamados espaços de Banach.

Portanto, ao estudarmos os problemas de minimização ( ou maximização) de funcionais, devemos ter sempre presente o espaço funcional utilizado.É importante determinar o espaço funcional porque a solução do problema altera-se conforme o espaço utilizado.

A condição a que se chegou na análise do problema típico é uma condição necessária; não assegura a existência de solução ( que foi assumida), não é condição suficiente.

Mas se o problema tiver realmente solução esta existirá no conjunto de soluções da condição necessária. Existem numerosas condições necessárias.

Admitimos anteriormente que $f$ era duas vezes diferenciável. Mas $f$ pode não ser diferenciável; haverá ainda solução para o problema?Utilizar-se-á a expressão "não suave"para referir situações em que a diferenciabilidade não está assegurada.

Neste trabalho pretende-se rever alguns resultados que respondem às interrogações aqui formuladas.

## 2. -PARADIGMAS

No cálculo das variações e na teoria do controlo óptimo podemos identificar três problemas considerados paradigmáticos.

### 2.1 O PROBLEMA DE LAGRANGE ( $P_L$)

Este problema consiste em extremar um funcional da forma

$$I[x] = \int_{t_1}^{t_2} f[t, x(t), x'(t)]\, dt$$

$$x : \mathbb{R} \supset [t_1, t_2] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \ ,$$

com eventuais restrições do tipo,

$$(t, x(t)) \in A \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

e condições de fronteira,

$$x(t_1) = x_1, x(t_2) = x_2.$$

Exigências relacionadas com os teoremas de existência de solução levam a procurar as soluções óptimas na classe $AC$ das funções absolutamente contínuas ( Apêndice A2 ,[3]).

Observe-se desde já que a classe $AC$ é a maior classe de funções contínuas que possuem derivada quase sempre e às quais ainda é aplicável o teorema fundamental do cálculo :

$$x(b) - x(a) = \int_a^b x'(t)dt.$$

O integral é um integral de Lebesgue em cada componente.
Tem-se ainda $AC\,[a,b] \equiv W^{1,1}\,(a,b)$ , ([6] , pág.45).

Reciprocamente se $g$ for integrável segundo Lebesgue ter-se-á

$$G(t) = \int_{t_1}^{t} g(s)ds \quad \text{e} \quad G \in AC.$$

Por vezes o problema de Lagrange apresenta restrições nas derivadas Para cada $(t, x\,(t)) \in A \subset \mathbb{R}^{n+1}$impõe-se um conjunto $Q(t, x\,(t)) \subset \mathbb{R}^n$ e considera-se apenas as funções $AC$ que satisfazem a inclusão diferencial

$$x'(t) \in Q\,[t, x(t)] \subset \mathbb{R}^n, t \in [t_1, t_2]\, q.s..$$

## 2.2 O PROBLEMA DE BOLZA ($P_B$)

Neste tipo de problema procuramos extremos do funcional

$$I\,[x] = g\,[t_1,x(t_1), t_2,x(t_2)] + \int_{t_1}^{t_2} f\,[t, x(t), x'(t)]\,dt$$

$$g : \mathbb{R}^{2n+2} \supset B \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f : \mathbb{R}^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x : [t_1, t_2] \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad x \in AC\,[t_1, t_2]\,,$$

com restrições :

$$(t, x(t)) \in A \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

$$[t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)] \in B \subset \mathbb{R}^{2n+2}$$

Tal como antes, a cada par $(t, x(t)) \in A$ podemos fazer corresponder um conjunto $Q[t, x(t)] \subset \mathbb{R}^n$ e exigir que $x'(t) \in Q[t, x(t)], t \in [t_1, t_2]$ *q.s.*.

## 2.3. O PROBLEMA DE MAYER OU DO CONTROLO ÓPTIMO $(P_M)$

Trata-se de procurar os extremos de um funcional, chamado funcional de custo.A notação $I[x, u]$ para o funcional de custo é proposta por CESARI ([4] ,pág. 9 ).

$$
\begin{gathered}
I[x, u] = g[t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)] \\
x : [t_1, t_2] \longrightarrow \mathbb{R}^n, x \in AC[t_1, t_2] \\
u : [t_1, t_2] \longrightarrow \mathbb{R}^m, u \text{ mensurável },
\end{gathered}
$$

onde $x$ representa uma variável de estado e $u$ representa uma variável de controlo. Estas funções devem verificar um sistema de equações diferenciais :

$$
\begin{gathered}
\frac{dx}{dt} = f[t, x(t), u(t)] \\
f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n
\end{gathered}
$$

e para cada componente ter-se-á :

$$
\frac{dx^i}{dt} = f_i[t, x(t), u(t)], t \in [t_1, t_2], i = 1, 2, ..., n.
$$

Neste problema, para um certo controlo $u(t)$ pensamos em $x(t)$como solução do sistema diferencial $\frac{dx}{dt} = f[t, x(t), u(t)]$ e podemos impor restrições do tipo $(t, x(t)) \in A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e do tipo $u(t) \in U \subseteq \mathbb{R}^m$. A $U$ chamamos espaço de controlo.

A função $x$ pode ainda satisfazer condições de fronteira do tipo

$$
[t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)] \in B \subset \mathbb{R}^{2n+2}
$$

Por vezes o problema de Mayer pode surgir na forma

$$
\begin{gathered}
I[x, u] = \int_{t_1}^{t_2} f\,[t, x(t), u(t)]\,dt \\
f : M \longrightarrow \mathbb{R}, \\
M = [(t, x(t), u(t)) : (t, x(t)) \in A, u \in U] \subset \mathbb{R}^{m+n+1},
\end{gathered}
$$

com $x \in AC[t_1, t_2]$ e $u$ mensurável de modo que $f(\cdot, x(\cdot), u(\cdot))$ seja mensurável e satisfazendo ainda o sistema de equações diferenciais, as condições de fronteira e as restrições anteriormente indicadas.

Estamos então perante um problema de Lagrange de controlo óptimo.

Analogamente estaremos perante um problema de Bolza de controlo óptimo se o funcional for do tipo,

$$I[x, u] = g[t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)] + \int_{t_1}^{t_2} f[t, x(t), u(t)]\, dt$$

Os três tipos de problema , $P_L, P_B, P_M$,são teoricamente equivalentes entre si, no sentido em que é possível reduzir qualquer um deles a um dos outros ([4], pág.11).

Mantém-se, todavia, a distinção entre os problemas porque cada forma tem vantagens específicas. Assim, $P_L$ é o problema clássico do cálculo das variações, $P_B$ permite unificar o cálculo das variações e a teoria do controlo óptimo, $P_M$ é o problema clássico do controlo óptimo.

## 3. ORGANIZAÇÃO

Qualquer problema de optimização pressupõe o estudo de duas questões fundamentais

**i)**- a existência de soluções ( condições suficientes )

**ii)**-as condições necessárias das soluções.

Atendendo a esta observação, organizaremos este trabalho do seguinte modo.No capítulo II generaliza-se a noção de derivada direccional e no capítulo III examina-se alguns teoremas de existência essenciais ao estudo de condições necessárias e suficientes, estudo que será feito no capítulo IV. No capítulo V far-se-á uma aplicação a integrais simples não convexos.

Relega-se para o Apêndice A1 a demonstração do teorema **3.3** do capítulo III, em virtude da grande extensão deste teorema.

No Apêndice A2 recolhemos definições, enunciados, demonstrações e justificações de noções que ocorrem no texto, com o intuito de facilitar a leitura do mesmo.

# II. GRADIENTES GENERALIZADOS

## 1 - FUNÇÕES LIPSCHITZIANAS

DEFIN. 1.1 : Seja $X$ um espaço de Banach, (Apêndice A2, [4]) .
Seja $\overline{x} \in S \subset X$, e seja uma função $f : S \to \mathbb{R}$.

$f$ diz-se localmente lipschitziana em $\overline{x}$ se existir uma constante $K \geq 0$ e algum $\varepsilon > 0$ tais que :

$$|f(x) - f(y)|_{\mathbb{R}} \leq K \|x - y\|_S, \forall x, y \in S \cap B(\overline{x}, \varepsilon)$$

$$B(\overline{x}, \varepsilon) = \{x \in X : \|x - \overline{x}\| \leq \varepsilon\}.$$

$f$ diz-se lipschitziana se existir $K \geq 0$ tal que :

$$|f(x) - f(y)| \leq K \|x - y\|, \forall x, y \in S$$

$K$ diz-se uma constante de Lipschitz de $f$.

Para funções de uma variável real, uma condição de Lipschitz pode interpretar-se geometricamente como uma condição para que o gráfico de $f$ não tenha declives muito pronunciados

Uma função localmente lipschitziana não tem que ser diferenciável em $x$ , nem precisa de admitir derivadas direccionais no sentido clássico.

O conjunto das funções lipschitzianas pode indicar-se por $C^{0,1}$.

## 2 - A DERIVADA DE CLARKE

DEFIN.- 2.1 :

Seja $f$ localmente lipschitziana em $x$ , e seja um vector arbitrário $v \in X$, $v \neq x$,$X$ espaço de Banach.

A derivada de Clarke ou derivada direccional generalizada de $f$ em $x$ na direcção de $v$ é definida por :

$$f^o(x; v) = \limsup_{\substack{y \to x \\ t \to 0^+}} \frac{f(y + tv) - f(y)}{t},$$

$$\text{com} \quad f : X \to \mathbb{R}$$

$$y, x, v \in X$$

$$t > 0 \text{ ( escalar )}.$$

Esta definição não pressupõe a existência de qualquer limite ( pois envolve apenas um limite superior ( Apêndice A2,[7]), refere-se apenas ao comportamento de $f$ perto de $x$ , e difere das definições tradicionais de derivada direccional no facto de o ponto base $y$ do quociente incremental variar.

Vamos ver as propriedades que tornam útil esta derivada.

TEOREMA 2.2

Seja $f$ localmente lipschitziana em $x$, com constante $K$, $f : X \to \mathbb{R}$.

Então :

**a)-** A função $v \mapsto f^o(x;v)$ , $f^o(x,\cdot)$ , é finita, positivamente homogénea, subaditiva, majorada (Apêndice A2, [5])e

$$|f^o(x;v)|_{\mathbb{R}} \leq K \cdot \|v\|_X$$

**b)-** $f^o(x;v)$ é $SCS$ (Apêndice A2, [6])como função de $(x,v)$ ,e como função apenas de $v$ ,$f^o(x,\cdot)$ , é lipschitziana com constante $K$ em $X$.

**c)-** $f^o(x;-v) = (-f)^o(x;v)$

**dem.** a) para $y$ suficientemente próximo de $x$ e $t$ suficientemente próximo de 0 , o quociente incremental é majorado por $K \cdot \|v\|$ devido à condição de Lipschitz perto de $x$ aplicável a $f$ :

$$f(y+tv) - f(y) \leq K \|y+tv-y\| = K \|tv\| = Kt \|v\|$$

$$\frac{|f(y+tv) - f(y)|}{t} \leq K \|v\| \Rightarrow |f^o(x;v)| \leq K \|v\| .$$

Homogeneidade positiva :

Para um elemento arbitrário $v \in X$ e $\alpha \geq 0$ poderemos escrever ,

$$f^o(x;\alpha v) = \limsup_{\substack{y \to x \\ t \to 0^+}} \frac{1}{t} [f(y+t\alpha v) - f(y)] =$$

$$= \alpha \limsup_{\substack{y \to x \\ t \to 0^+}} \frac{1}{t\alpha} [f(y+t\alpha v) - f(y)] = \alpha f^o(x;v).$$

Subaditividade :

Todos os limites superiores se entendem para $y \to x$ e $t \to 0^+$.

$$f^o(x; v+w) = \limsup_{\substack{y \to x \\ t \to 0^+}} \frac{f(y+tv+tw) - f(y)}{t} =$$

$$= \limsup_{\substack{y \to x \\ t \to 0^+}} \frac{f(y+tv+tw) - f(y+tw) + f(y+tw) - f(y)}{t} =$$

$$= \limsup_{\substack{y \to x \\ t \to 0^+}} \frac{[f(y+tv+tw) - f(y+tw)] + [f(y+tw) - f(y)]}{t} \leq$$

$$\leq \limsup_{\substack{y \to x \\ t \to 0^+}} \frac{f(y+tw+tv) - f(y+tw)}{t} + \limsup_{\substack{y \to x \\ t \to 0^+}} \frac{f(y+tw) - f(y)}{t}.$$

Repare-se que no primeiro termo pode escrever-se

$$\begin{cases} z = y + tw \Rightarrow & \dfrac{f(z+tv) - f(z)}{t} \to f^o(x; v) \\ z \to x & \end{cases} .$$

No segundo termo $\dfrac{f(y+tw) - f(y)}{t} \to f^o(x; w)$.

Então,

$$f^o(x; v+w) \leq f^o(x; v) + f^o(x; w).$$

**b)** **1)-** Semicontinuidade superior de $f^o(x; v)$ : sejam $\{x_i\}$ , $\{v_i\}$ duas sucessões arbitrárias convergentes para $x$ e $v$, $x_i, v_i \in X$ .

Para cada $i$ ,por definição de limite superior ,(Apêndice A2, [7]),existem $y_i \in X$ e $t_i \geq 0$ tais que

$$\|y_i - x_i\|_X + t_i \leq \frac{1}{i}$$

$$f^o(x_i, v_i) - \frac{f(y_i + t_i v_i) - f(y_i)}{t_i} \leq \frac{1}{i}$$

$$\Rightarrow f^o(x_i, v_i) - \frac{1}{i} \leq \frac{f(y_i + t_i v_i) - f(y_i)}{t_i} =$$

$$= \frac{f(y_i + t_i v) - f(y_i + t_i v) + f(y_i + t_i v_i) - f(y_i)}{t_i} =$$

$$= \frac{f(y_i + t_i v) - f(y_i)}{t_i} + \frac{f(y_i + t_i v_i) - f(y_i + t_i v)}{t_i}.$$

Aplicando o facto de $f$ ser localmente lipschitziana vamos ver que o último termo é majorado .

$$|f(y_i + t_i v_i) - f(y_i + t_i v)| \leq K \|y_i + t_i v_i - y_i - t_i v\| = K t_i \|v_i - v\|,$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(y_i + t_i v_i) - f(y_i + t_i v)}{t_i} \right| \leq K \|v_i - v\|_X .$$

Então ,tomando limites superiores quando $i \to \infty$ ,vem que :

$$f^o(x_i; v_i) - \frac{1}{i} \leq \frac{f(y_i + t_i v) - f(y_i)}{t_i} + K \|v_i - v\|$$

$$\limsup_{i \to \infty} \left[ f^\circ (x_i, v_i) - \frac{1}{i} \right] \leq \limsup_{i \to \infty} \left[ \frac{f (y_i + t_i v) - f (y_i)}{t_i} + K \|v_i - v\| \right] \leq$$

$$\leq \limsup_{i \to \infty} \frac{f (y_i + t_i v) - f (y_i)}{t_i} + \limsup_{i \to \infty} K \|v_i - v\| \leq$$

$$\leq \inf_i \left[ \sup \left\{ \frac{f (y_i + t_i v) - f (y_i)}{t_i} : \|y_i - x\| < \frac{1}{i}, y_i \in X \right\} \right] + 0 = f^\circ (x; v) .$$

Portanto,$\limsup_{i \to \infty} f^\circ (x_i; v_i) \leq f^\circ (x; v)$ o que estabelece a semicontinuidade superior ( $SCS$ ) de $f^o(x, v)$ .

**b)** **2)-** Queremos provar que $f^o(x; \cdot)$ é lipschitziana com constante $K$ .

Sejam $v, w \in X$ . Podemos escrever :

$$f(y + tv) - f(y) \leq f(y + tw) - f(y) + K \|v - w\|_X \cdot t$$

De facto, pela condição de Lipschitz, aplicável a $f$ temos para $y$ perto de $x$ e $t$ perto de $0$ :

$$f(y + tv) - f(y + tw) \leq K \|y + tv - y - tw\| = Kt \|v - w\|_X$$

$$f(y + tv) - f(y + tw) + f(y) - f(y) \leq Kt \|v - w\|_X$$

$$f(y + tv) - f(y) \leq f(y + tw) - f(y) + K \|v - w\|_X \cdot t$$

Dividindo por $t$ :

$$\frac{f(y+tv)-f(y)}{t} \leq \frac{f(y+tw)-f(y)}{t} + K\|v-w\|_X$$

Tomando limites superiores quando $y \to x$ e $t \to 0^+$, vem :

$$f^o(x;v) \leq f^o(x;w) + K\|v-w\|$$
$$f^o(x;v) - f^o(x;w) \leq K\|v-w\| .$$

Isto ainda é válido se trocarmos $v$ com $w$
Logo

$$|f^o(x;v) - f^o(x;w)| \leq K\|v-w\| ,$$

e $f^o(x;\cdot)$ é lipschitziana ( na segunda variável $v$ ) com constante $K$.

**c)-** Calculemos :

$$f^o(x;-v) = \limsup_{\substack{x' \to x \\ t \to 0^+}} \frac{f(x'-tv)-f(x')}{t} =$$

Fazendo $u := x' - tv$ , $x' = u + tv$ temos :

$$\frac{f(x'-tv)-f(x')}{t} = \frac{f(u)-f(u+tv)}{t} = \frac{-f(u+tv)-(-f(u))}{t}$$

Portanto :

$$f^o(x;-v) = \limsup_{\substack{x' \to x \\ t \to 0^+}} \frac{(-f)(u+tv)-(-f)(u)}{t} = (-f)^0(x;v)$$

■

## 3 - O GRADIENTE GENERALIZADO

### 3.1 - *DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES*

O teorema de Hahn-Banach,na sua versão básica, afirma que qualquer funcional subaditivo e positivamente homogéneo em $X$ majora algum funcional linear em $X$ ,(Apêndice A2, [8]) .

Recordando o teorema **2.2** que estabelece para $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, localmente lipschitziana, que $f^o(x;v)$ é finita, positivamente homogénea e subaditiva, em $v$ , deduz-se que $f^o(x;v)$ majora pelo menos um funcional linear $\xi(v) \leq f^o(x;v)$ , $\forall v \in X$ .

Como $f^o(x;\cdot)$ é majorada, $\xi(\cdot)$ também o é.

Como $\xi$ e majorado, pertence ao espaço dual $X^*$ dos funcionais lineares contínuos sobre $X$ .

Em $X^*$ , em vez de $\xi(v)$ usa-se a notação $\langle \xi, v\rangle$ ou $\langle v, \xi\rangle$ .

Estas observações conduzem-nos à definição de gradiente generalizado :

<u>DEFIN. **3.1-1**</u>:

O gradiente generalizado de $f$ localmente lipschitziana em $x$,que se escreve $\partial f(x)$ , é o subconjunto de $X^*$ definido por :

$$\partial f(x) = \{\xi \in X^* : f^o(x;v) \geq \langle \xi, v\rangle, \forall v \in X\}.$$

Observe-se, portanto , que $\partial f(x)$ é um conjunto de funcionais lineares contínuos e que $\partial f(\cdot)$ é uma multifunção $x \longmapsto \partial f(x) \subset X^*$ .

A norma do funcional linear contínuo em $X^*$ será :

$$\|\xi\|_* := \sup_v \{\langle \xi, v\rangle : v \in X, \|v\|_X \leq 1\},$$

e é afinal o supremo na bola unitária de $X$ .

A bola unitária aberta em $X^*$ escreve-se $B_*$

O seguinte teorema sumariza algumas propriedades básicas do gradiente generalizado.

<u>TEOREMA **3.1-2 :**</u>

Seja $f$ localmente lipschitziano em $x$ , e $K$ a constante de Lipschitz.Então :

**a)**-$\partial f(x)$ é um subconjunto não vazio de $X^*$,convexo, fracamente $-*$ compacto , e

$$\|\xi\|_* \leq K, \ \forall \xi \in \partial f(x).$$

**b)** $\forall v \in X$ , $f^o(x;v) = \max\{\langle \xi, v\rangle : \xi \in \partial f(x)\}$ .

**dem.**

**a)**- <u>Convexidade de $\partial f$</u>

Sejam $\xi_1, \xi_2 \in \partial f$ e $\lambda\xi_1(v)+(1-\lambda)\xi_2(v)$ com $\lambda \in (0,1)$ , $\forall v \in X$. Então ,

$$\lambda\xi_1(v) + (1-\lambda)\xi_2(v) = \xi_1(\lambda v) + \xi_2\left[(1-\lambda)v\right] \leq$$
$$\leq f^o(x;\lambda v) + f^o\left(x;(1-\lambda)v\right) = \lambda f^o(x;v) + (1-\lambda)f^o(x;v) = f^o(x;v).$$

Portanto $\lambda\xi_1(v) + (1-\lambda)\xi_2(v) \in \partial f(x)$ e $\partial f(x)$ é convexo.

Majoração da norma

$$\xi(v) \leq |f^o(x;v)| \leq K \cdot \|v\| \quad , \quad \forall v \in X$$
$$\xi(v) \leq K \cdot \|v\|$$
$$\|\xi\|_* = \sup_v \{\xi(v) : v \in X, \|v\|_X \leq 1\}$$
$$\Rightarrow \|\xi\|_* \leq K.$$

A compacidade fraca $*$ decorre do Teorema de Alaoglu ([12] ,pág.149): se $X$ é um espaço normado, então a bola unitária fechada em $X^*$ $\overline{B}_* = \{\xi \in X^* : \|\xi\| \leq 1\}$ é um espaço compacto de Hausdorff na topologia fraca $-*$ .

Este teorema põe em relevo o interesse das topologias fracas. Se $X^*$ for de dimensão infinita, isto é, se $X$ for de dimensão infinita, a bola unitária de $X^*$ nunca é compacta na topologia forte, mas é compacta na topologia fraca. Por translacção e homotetia, toda a bola fechada de $X_F^*$ (dual na topologia forte) é fracamente compacta na topologia fraca. Portanto toda a parte limitada do dual forte é fracamente relativamente compacta, (Apêndice A2, [9]) .

**b)-** Suponha-se que para algum $v \in X$ , $f^o(x;v)$ excedia o máximo indicado :

$$f^o(x;v) \geq \max\left\{\langle\xi, v\rangle : \xi \in \partial f(x)\right\}.$$

Pela definição de $\partial f(x)$ vê-se que $f^o(x,v)$ não pode ser menor que este máximo.

De acordo com uma versão do teorema de Hahn-Banach,

(Apêndice A2, [8])existiria um funcional linear $\xi'$ majorado pelo funcional subaditivo e positivamente homogéneo $f^o(x;\cdot)$ e coincidindo com $f^o(x;\cdot)$ em $v$ .

Então $\xi'$ pertence a $\partial f(x)$ ( pela definição de $\partial f(x)$) pelo que $f^o(x,v) \geq \langle\xi', v\rangle = f^o(x;v)$.

Então $f^o(x,v) \geq f^o(x,v)$ contradição que estabelece **(b)**. Mais precisamente se $f^o(x,v)$ não pode ser maior que o máximo nem menor que o máximo só pode ser igual ao máximo.

∎

## 3.2 - FUNÇÕES DE SUPORTE

De acordo com o teorema **3.1-2** conhecer o conjunto convexo , fracamente $-*$ compacto $\partial f(x) \subset X^*$ é equivalente a conhecer a função $f^o(x;\cdot)$ . Um é obtido do outro.

É um exemplo de um facto geral : os conjuntos convexos fechados são caracterizados pelas suas funções de suporte.

DEFIN.**3.2 - 1 :**

A função de suporte de um conjunto $C \subset X$ , $C \neq \emptyset$ , é a função

$$\sigma_C : X^* \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

definida por

$$\sigma_C(\xi) := \sup\{\langle \xi, x\rangle : x \in C\}.$$

Por outras palavras, para cada operador linear contínuo $\xi \in X^*$, $\sigma_C(\xi)$ indica o supremo dos valores $\xi(x)$ quando $x \in C$ .

Para um conjunto $S \subset X^*$ , a função de suporte será definida em $X^{**}$ .

Se considerarmos que $X \subset X^{**}$ ( se $X$ for reflexivo será $X = X^{**}$ ) então para $x \in X \subset X^{**}$ter-se-á :

$$\sigma_S(x) = \sup\{\langle \xi, x\rangle : \xi \in S\}$$

$$\sigma_S : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Consequentemente $f^o(x;v)$ é a função de suporte do gradiente generalizado $\partial f(x)$.

O seguinte teorema será muito útil em demonstrações posteriores :

TEOREMA **3.2 - 2** (Apêndice A2, [10])

Sejam $C, D \neq \emptyset$, $C, D \subset X$, $C, D$ convexos ,fechados ; sejam $\sum, \Delta \neq \emptyset$, $\sum, \Delta \subset X^*, \sum, \Delta$ convexos, fracamente $-*$ fechados.

Então :

**a)** $C \subset D \Leftrightarrow \sigma_C(\xi) \leq \sigma_D(\xi),\ \forall \xi \in X^*.$

**b)** $\sum \subset \Delta \Leftrightarrow \sigma_{\sum}(x) \leq \sigma_\Delta(x),\ \forall x \in X.$

**c)** $\sum$ é fracamente $-*$ compacto $\Leftrightarrow \sigma_{\sum}(\cdot)$ tem valores finitos, $\forall x \in X$ .

**d)** Dar uma dada função $\sigma : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ positivamente homogénea, subaditiva, $SCI$ ( fraca ou forte ) e não identicamente igual a $+\infty$ equivale a dar um conjunto $\sum \neq \emptyset$ , convexo, fracamente $-*$ compacto, $\sum \subset X^*$ tal que $\sigma = \sigma_{\sum}$ , onde $\sigma_{\sum}$ é a função de suporte do conjunto $\sum$ . Este conjunto é único.

## 3.3 - *MULTIFUNÇÕES*

DEFIN. **3.3 - 1 :**

Uma multifunção $F : X \to Y$ é uma aplicação de $X$ nos subconjuntos de $Y$ .

**Obs.** Função. $F : X \to Y$ , $F(x) \in Y$

Multifunção $F : X \to Y,$ $F(x) \subset Y$

O gráfico da multifunção é definido por :

$$graf\ F = \{(x, y) : x \in X, y \in F(x)\}.$$

Diz-se que $F$ é fechada ou tem gráfico fechado se $graf\ F$ for fechado em $X \times Y$ (relativamente a uma dada topologia).

DEFIN. **3.3 -2 :**

Quando $X, Y$ são espaços de BANACH, define-se a semicontinuidade superior de $F$ em $x$ do seguinte modo :

$$\forall \varepsilon \geq 0, \exists \delta \geq 0 : F(x') \subset F(x) + \varepsilon B_Y,\ \forall x' \in x + \delta B_X$$

Vamos continuar a supor que $f$ é localmente lipschitziana em $x$ .

A primeira afirmação do próximo teorema indica de novo que $f^o(x; \cdot)$ é a função de suporte de $\partial f(x)$ .

TEOREMA **3.3 - 3 :**

Seja $X$ é um espaço de Banach , um subconjunto $Y \subset X$ e uma função $f : Y \to \mathbb{R}$ , localmente lipschitziana em $x$ .Então :

**a)** $\xi \in \partial f(x) \Leftrightarrow f^o(x; v) \geq \langle \xi, v \rangle,\ \forall v \in X$

**b)** sejam $\{x_i\}$ , $\{\xi_i\}$ sucessões em $X$ e $X^* t.q.$ $\xi_i \in \partial f(x_i)$ .

Suponha-se que $x_i \to x$ e que $\xi$ é ponto de acumulação de $\xi_i$ na topologia fraca $-*$ .

Então $\xi \in \partial f(x)$, e portanto a multifunção $\partial f(\cdot)$ tem gráfico fracamente $-*$ fechado.

**c)** $\partial f(x) = \bigcap_{\delta > 0} \bigcup_{y \in x + \delta B} \partial f(y)$

**d)** Se $X$ tiver dimensão finita, $\partial f(\cdot)$ é $SCS$ em $x$ .

<u>dem</u>. **a)** Pelo teorema **3.1 - 2 (a)** temos que $\partial f\,(x)$ é um subconjunto não vazio de $X^*$, convexo e fracamente $-*$ compacto.

Pelo teorema **3.2 -2 (d)** existe uma função de suporte $\sigma : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ positivamente homogénea, subaditiva, SCI, não identicamente igual a $+\infty$ ,que é função de suporte de $\partial f(x)$,

$\sigma\,(x) = \sup\{\langle \xi, v\rangle : \xi \in \partial f(x)\}$ .

De novo pelo teorema **3.1 -2 (b)** :

$$f^o(x; v) = \max\{\langle \xi, v\rangle : \xi \in \partial f(x)\}\,, \qquad \forall v \in X.$$

Portanto :

$$\xi \in \partial f(x) \Leftrightarrow f^o(x; v) \geq \langle \xi, v\rangle, \ \forall v \in X.$$

**b)** Seja $v$ arbitrário, $v \in X$ .

Seja a sucessão numérica $\langle \xi_i, v\rangle$ e uma sua subsucessão que converge para $\langle \xi, v\rangle$, (toda a sucessão limitada tem uma subsucessão convergente).

Quer dizer :$\xi_i(v) \to \xi(v)$

Pela alínea **(a)** temos que $f^o(x_i; v) \geq \langle \xi_i; v\rangle$, atendendo a que a hipótese diz que $\xi_i \in \partial f(x_i)$.

Pela $SCS$ de $f^o(x; v)$ ( teorema **2.2 (b)** ) deduz-se de $f^o(x_i; v) \geq \langle \xi_i, v\rangle$ que $f^o(x; v) \geq \langle \xi, v\rangle$ .

E como $v$ é arbitrário, tem-se por **(a)** que $\xi \in \partial f(x)$ , sendo $\xi$ ponto de acumulação de $\xi$ .

Então a multifunção $\partial f(\cdot) : x \longmapsto \partial f(x)$ tem gráfico fracamente $-*$ fechado.

**c)** É consequência imediata de **(b)**.

**d)** Supondo que $\partial f$ não é $SCS$ em $x$ , podemos construir uma sucessão $x_i$ convergente para $x$ e uma sucessão $\xi_i$ convergente para $\xi$ tais que $\xi_i \in \partial f(x_i)$ para cada $i$ , mas $\xi$ não pertence a $\partial f(x)$ . Então isto contradiz **(b)** que afirma, nas condições indicadas, que $\partial f$ é fechado. Logo $\partial f$ deve ser $SCS$ .

■

## 3.4. <u>*RELAÇÕES ENTRE O GRADIENTE GENERALIZADO E AS DERIVADAS DIRECCIONAIS*</u>

Vamos ver que $\partial f$ é igual à derivada se $f \in C^1$ e é igual ao subdiferencial $\partial f$ da análise convexa se $f$ for convexa.

DEFIN.3. 4 - 1 : Seja uma aplicação $f : X \to Y$, onde $X, Y$ são espaços de Banach.

A derivada direccional ( lateral ) usual em $x$ e na direcção de $v$ é :

$$f'(x;v) := \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$$

quando o limite existe.

Note-se que ao contrário da definição de $f^o(x;v)$ , agora o ponto $x$ não varia.

DEFIN. 3.4 -2

Seja $L(X,Y)$ o espaço das aplicações lineares contínuas de $X$ para $Y$ .

A função $f : X \to Y$ admite uma derivada de GÂTEAUX, $Df(x)$ em $x \in X$ sendo $Df(x) \in L(X,Y)$ , desde que , $\forall v \in X$ :

$$1) \quad f'(x,v) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} \quad \text{existe}$$

$$2) \quad f'(x,v) = \langle Df(x), v \rangle$$

Portanto, a derivada de Gâteaux existe, se existir o limite $f'(x,v)$ e se este for igual ao valor de uma aplicação linear contínua calculada em $v$, $\forall v \in X$ . Esta aplicação linear contínua é a derivada de Gâteaux , $Df(x)$.

Tudo isto é equivalente a dizer que :

**1)** o quociente dos acréscimos é convergente, para cada $v$ ( existência de $f'(x,v)$), .

**2)** que $\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} = \langle Df(x), v \rangle$

para todo o $v \in X$ ,

**3)** que a convergência é uniforme em relação a $v$ em conjuntos finitos ; mais precisamente, se $A \subset X$ , $A$ finito, a convergência ocorre igualmente para todo o $v \in A$.

DEFIN.3. 4 - 3 :

Se a convergência de $\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$ for uniforme em relação a $v$ , pertencendo $v$ a um subconjunto compacto de $X$ , a derivada diz-se derivada de HADAMARD.

DEFIN.3. 4 - 4 :

Se a convergência de $\lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{f(x+tv) - f(x)}{t}$ for uniforme em relação a $v$ , pertencendo $v$ a um subconjunto limitado de $X$ , a derivada diz-se de FRÉCHET.

São requisitos progressivamente mais exigentes. Quando $X = \mathbb{R}^n$ as diferenciabilidades de Hadamard e Fréchet são equivalentes ( pois o compacto é limitado ).

Quando $f$ é localmente lipschitziana em $x$ , mais precisamente, se $\exists K$ =constante: $\left\|f(x') - f(x'')\right\|_Y \leq K \cdot \left\|x' - x''\right\|_X$ , $\forall x, x'$ numa vizinhança de $x$ , as diferenciabilidades de Gâteaux e Hadamard são equivalentes ( pois localmente lipschitziana implica uniformemente convergente num compacto ).

DEFIN.3. 4 - 5 :

Seja uma aplicação $f : X \to Y$ , $X, Y$ espaços de Banach.

Diz-se que $f$ admite derivada estrita $D_S f(x)$ em $x$ , $D_S f(x) \in L(X,Y)$ , desde que :

**1)** Para cada $v \in X$ ,

$$\lim_{\substack{x' \to x \\ t \to 0^+}} \frac{f(x' + tv) - f(x')}{t} = \langle D_S f(x), v \rangle.$$

**2)** A convergência é uniforme para $v$ pertencente a um subconjunto compacto de $X$.

**Obs.** : **a)** - Se $f$ for localmente lipschitziana em $x$ , a condição **(2)** realiza-se automaticamente .

**b)** - Na realidade estamos a definir uma derivada estrita tipo Hadamard.

TEOREMA 3. 4 - 6 :

Suponha-se que $f$ aplica uma vizinhança de $x \in X$ em $Y$ e que $\xi \in L(X,Y)$.Então as seguintes afirmações são equivalentes :

**a)** $f$ é estritamente diferenciável em $x$ e $D_S f(x) = \xi \in L(X,Y)$.

**b)** $f$ é localmente lipschitziana em $x$ e para cada $v \in X$ tem-se

$$\lim_{\substack{x' \to x \\ t \to 0^+}} \frac{f(x' + tv) - f(x')}{t} = \langle \xi, v \rangle.$$

<u>**dem**</u> ( $a \Rightarrow b$ )

Admita-se que $f$ é estritamente diferenciável em $x$ e $D_S f(x) = \xi$.
Mas se $f$ é estritamente diferenciável cumpre-se logo

$$\lim_{\substack{x' \to x \\ t \to 0^+}} \frac{f(x' + tv) - f(x')}{t} = \langle D_S f(x), v \rangle \quad , v \in X,$$

$$D_S f(x) = \xi \in L(X, Y).$$

Então resta provar que $f$ é localmente lipschitziana em $x$.

Se não fosse localmente lipschitziana em $x$ , existiriam sucessões $\{x_i\}$ e $\left\{x_i'\right\}$convergentes para $x$ e tais que

$$x_i\, ,\, x_i' \in x + \frac{1}{i} B$$

$$\text{e} \quad \left\| f(x_i') - f(x_i) \right\|_Y \geq i \left\| x_i' - x_i \right\|_X \, .$$

Definamos $t_i > 0$ por meio de

$$x_i' = x_i + t_i v_i$$

$$\text{e} \qquad \|v_i\| = i^{-\frac{1}{2}} = (\frac{1}{i})^{\frac{1}{2}} \qquad \Rightarrow v_i \neq 0.$$

Como $x_i' \to x \wedge x_i \to x$ temos que $x_i' - x_i \to 0$. Mas $x_i' - x_i = t_i v_i$ pelo que terá de ser $t_i \to 0$ .

Seja $V$ o conjunto dos pontos da sucessão $\{v_i\}$ reunido com 0 : $V = \{v_i\} \cup \{0\}$.

Note-se que $V$ é sequencialmente compacto : $\|v_i - 0\| = \|v_i\| = \dfrac{1}{\sqrt{i}} \to 0 \in V$ , quando $i \to \infty$ .

Então pela definição de $D_S f(x)$ podemos escrever :

$$\forall \varepsilon \geq 0, \exists n_\varepsilon : i \geq n_\varepsilon, \forall v \in V \Rightarrow$$

$$\left\| \frac{f(x_i + t_i v) - (f(x_i)}{t_i} - \langle D_S f(x), v \rangle \right\|_Y \leq \varepsilon$$

Mas isto é impossível pois quando $v = v_i$ , o termo
$\dfrac{f(x_i + t_i v) - f(x_i)}{t_i}$ tem norma maior que $i^{\frac{1}{2}}$ por construção.

De facto começámos por escrever :

$$\left\|f(x_i') - f(x_i)\right\|_Y > i\left\|x_i' - x_i\right\|_X$$

$$\|f(x_i + t_i v_i) - f(x_i)\|_Y > i\left\|x_i' - x_i\right\|_X$$

$$\left\|x_i' - x_i\right\| = \|t_i v_i\| = t_i\|v_i\| = t_i \cdot i^{-\frac{1}{2}}$$

$$\|f(x_i + t_i v_i) - f(x_i)\|_Y > i t_i i^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\|f(x_i + t_i v_i) - f(x_i)\|}{t_i} > i^{\frac{1}{2}} \quad \text{para todo o } v_i \in V \text{ ,logo,}$$

$$\frac{\|f(x_i + t_i v) - f(x_i)\|}{t_i} = \left\|\frac{f(x_i + t_i v) - f(x_i)}{t_i}\right\| > i^{\frac{1}{2}}.$$

Então, contrariamente ao que se supôs, $f$ deve ser localmente lipschitziana em $x$ .

**(b $\Rightarrow$ a)**

Seja $V \subset X$ um compacto arbitrário e $\varepsilon > 0$ arbitrário.

Atendendo à hipótese **(b)**, para cada $v \in X$ existe um número $\delta(v) > 0$ , tal que :

$$\textbf{(1)} \qquad \left\|\frac{f(x' + tv) - f(x')}{t} - \langle \xi, v\rangle\right\|_Y < \varepsilon \ , \ \forall x' \in x + \delta B, \ t \in (0, \delta).$$

A norma de $\dfrac{f(x' + tv') - f(x')}{t} - \dfrac{f(x' + tv) - f(x')}{t}$ é majorada pois podemos escrever esta expressão na forma $\varphi(v') - \varphi(v)$, com $x', t$ fixos,sendo $\varphi$ lipschitziana por ser $f$ lipschitziana.Tem-se então,

$$\|\varphi(v') - \varphi(v)\| \leq K\|v' - v\|,$$

onde $K$ é a constante de Lipschitz de $f$ e $x', t$ estão suficientemente próximos de $x$ e 0 respectivamente.Então deduz-se de **(1)** que por adequada restrição de $\delta(v)$ se tem

$$\textbf{(2)} \qquad \left\|\frac{f(x' + tv') - f(x')}{t} - \langle \xi, v'\rangle\right\| \leq 2\varepsilon$$

$$\forall x' \in x + \delta B, \ \forall v' \in v + \delta B, \ t \in (0, \delta).$$

Um número finito dos conjuntos abertos $\{v + \delta(v)B : v \in V\}$ cobrirá $V$ ( isto é possível por $V$ ser compacto ) , por exemplo os conjuntos relativos a $v_1, v_2, \cdots, v_n$ .

Se fizermos $\delta' = \min_{1 \leq i \leq n} \delta(v_i)$ segue-se que **(1)** é válida ( com $2\varepsilon$ em vez de $\varepsilon$ ) para qualquer $v \in V$ , para todo o $x' \in x + \delta' B$ e $t \in (0, \delta')$ .

Então como trabalhámos com $V$ compacto ( cf. HADAMARD) deduz-se que $\xi$ é a derivada estrita de $f, \xi = D_S f(x)$ em $x$ .

■

<u>DEFIN.3. 4- 7 :</u>

Seja $f : X \to Y$ , como antes.

Diz-se que $f$ é continuamente diferenciável em $x$ segundo Gâteaux, desde que numa vizinhança de $x$ exista a derivada de Gâteaux, $Df$ , e seja contínua como aplicação de $X$ em $L(X,Y)$ ( com a topologia da norma do operador ) :

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} = Df(x) \text{ em } x + \delta B$$

$$Df : X \longrightarrow L(X,Y) \text{ , } Df(\cdot) \text{ contínua , } Df(x) \in L(X,Y).$$

Vamos enunciar um resultado útil que é um corolário do Teorema **3. 4 - 6 :**

<u>COROLÁRIO 3. 4 - 8 :</u>

Se $f$ é continuamente diferenciável em $x$ , então $f$ é estritamente diferenciável em $x$ e, portanto, $f$ é localmente lipschitziana em $x$ .

**<u>dem.</u>** ( Apêndice A2, [11]) .

Podemos agora investigar a relação entre as várias derivadas já definidas e o gradiente generalizado $\partial f(x)$.

<u>TEOREMA 3. 4 - 9</u>

Seja $f$ localmente lipschitziana em $x$ e admitindo uma derivada qualquer $Df(x)$ (Gâteaux, Hadamard, Fréchet, estrita).

Então $Df(x) \in \partial f(x)$.

**<u>dem</u>** por definição e pelo teorema **3 . 4 - 6 (b)** existe $f'(x,v)$ para cada $v$ cumprindo a condição $f'(x,v) = \langle Df(x), v \rangle$ , $Df \in L(X,Y)$ .

Pela definição de $f^o$ ,

$$f^o(x,v) = \limsup_{\substack{y \to x \\ t \to 0^+}} \frac{f(y+tv) - f(y)}{t}$$

tem-se $f' \leq f^o$ e portanto $\langle Df(x), v\rangle \leq f^o(x,v), \forall v \in X$

Pelo teorema **3. 3 - 3 (a)** conclui-se imediatamente que $Df(x) \in \partial f(x)$.

■

TEOREMA 3. 4 - 10 :

Se $f$ é estritamente diferenciável em $x \in X$ então $\partial f(x)$ contém unicamente a derivada estrita $D_S f(x)$ e $f$ é localmente lipschitziana em $x$ .

Reciprocamente, se $f$ é localmente lipschitziana em $x$ e $\partial f(x) = \{\xi\}$ então $f$ é estritamente diferenciável em $x$ e $\xi = D_S f(x)$.

**dem.** Suponha-se primeiramente que existe $D_S f(x)$ . Então pelo teorema **3 . 4 - 6** - $f$ será localmente lipschitziana em $x$ .

Pela definição de $f^o$ tem-se que :

$$f^o(x,v) = \limsup_{\substack{y \to x \\ t \to 0^+}} \frac{f(y+tv) - f(y)}{t}, \forall v \in X$$

e também pela definição de derivada estrita :

$$\lim_{\substack{y \to x \\ t \to 0^+}} \frac{f(y+tv) - f(y)}{t} = \langle D_S f(x), v\rangle$$ para cada $v$ pertencente a um compacto.

A convergência é uniforme num compacto o que é automático por ser $f$ localmente lipschitziana em $x$ .

Então $f^o(x,v) = \langle D_S f(x), v\rangle$, $\forall v \in X$ e pelo teorema **3. 3 - 3 (a)** resulta $\partial f(x) = \{D_S f(x)\}$

Vamos provar o recíproco.

Recorde-se a condição **(b)** do teorema **3. 4 - 6 :**

$f$ é localmente lipschitziana em $x$ e para cada $v \in X$ tem-se

$$\lim_{\substack{y \to x \\ t \to 0^+}} \frac{f(y+tv) - f(y)}{t} = \langle \xi, v\rangle$$

Se isto for verdade então $f$ é estritamente diferenciável em $x$ e $\xi = D_s f(x)$ pelo mesmo teorema.

Começamos por mostrar que $f^o(x;v) = \langle \xi, v\rangle$ para cada $v \in X$.

Note-se que $f^o(x;v) \geq \langle \xi, v\rangle$ pelo teorema **3. 1 - 2 (b)**

Pelo teorema de Hahn-Banach existe $\xi' \in X^*$ majorado por $f^o(x;\cdot)$ e concordando com $f^o(x,\cdot)$ em $v$ .Segue-se que $\xi' \in \partial f(x)$ e $f^o(x,v) = \langle \xi', v\rangle \geq \langle \xi, v\rangle$ .

Se $\langle \xi, v\rangle$ fosse menor que $f^o(x;v)$ então $\xi, \xi'$seriam elementos distintos de $\partial f(x)$ contrariamente à hipótese que afirma que $\partial f(x) = \{\xi\}$.

Terá de ser portanto $f^o(x;v) = \langle \xi, v\rangle,\ \forall v \in X$

Calculamos agora :

$$\liminf_{\substack{y \to x \\ t \to 0^+}} \frac{f(y+tv) - f(y)}{t} = - \limsup_{\substack{y \to x \\ t \to 0^+}} \frac{f(y) - f(y+tv)}{t} =$$

$$= - \limsup_{\substack{y \to x \\ t \to 0^+}} \frac{f(y+tv-tv) - f(y+tv)}{t} =$$

$$= -f^o(x;-v) = -\langle \xi, -v\rangle = \langle \xi, v\rangle = f^o(x;v) =$$

$$= \limsup_{\substack{y \to x \\ t \to 0^+}} \frac{f(y+tv) - f(y)}{t}$$

o que estabelece a condição de limite enunciada pelo teorema **3. 4 - 6** $\limsup = \liminf = \lim)$ . Então pela implicação **b** $\Rightarrow$ **a** do mesmo teorema $f$ é estritamente diferenciável em $x$ e $\xi = D_S f(x)$.

■

<u>COROLÁRIO **3. 4 -11**</u> :

Seja $f$ localmente lipschitziana em $x \in X$ e $X$ de dimensão finita.Então $f$ é contínuamente diferenciável em $x \in \varepsilon B$ se e só se $\partial f(x')$ for um singletão para todo o $x' \in x + \varepsilon B$ .

**<u>dem.</u>** Vamos demonstrar uma das implicações.

Se $X$ tem dimensão finita então pelo teorema **3. 3 - 3(d)** , $\partial f(\cdot)$ é $SCS$ em $x$ , mais precisamente :

$$\forall \varepsilon \geq 0, \exists \delta \geq 0 : \partial f\left(x'\right) \subset \partial f\left(x\right) + \varepsilon B_Y,\ \forall x' \in x + \delta B_X.$$

Se $f$ é contínuamente diferenciável então é estritamente diferenciável, pelo corolário **3.4 -8.**Podemos então afirmar que existe

$$\lim_{\substack{y\to x\\ t\to 0^+}} \frac{f(y+tv)-f(y)}{t} = \langle D_S f(x), v\rangle$$

e pelo teorema **3.4-10** temos $\partial f(x) = \{D_S f(x)\}$ ; então .

$$\partial f(x') \subset \{D_S f(x)\} + \varepsilon B_Y \ , \ \forall x' \in x + \delta B_X$$

e como $\varepsilon$ é arbitrário resulta :

$$\partial f(x') \to \{D_S f(x)\} \text{ quando } \varepsilon \to 0.$$

■

## 3.5 FUNÇÕES CONVEXAS

DEFIN. **3.5 -1 :**

Seja $X$ um espaço de Banach e $S$ um subconjunto aberto e convexo, $S \subset X$.

Uma função $f : S \to \mathbb{R}$ diz-se convexa se

$\forall x, x' \in S : f\left[\lambda x + (1-\lambda)x'\right] \le \lambda f(x) + (1-\lambda)f(x')$, para todo o $\lambda \in [0,1]$ .

Vamos ver que as funções convexas são , em geral ,lipschitzianas.

TEOREMA **3 5 -2** :

Seja $f : S \to \mathbb{R}$ , convexa , majorada numa vizinhança de algum ponto de $S$ .Então $f$ é localmente lipschitziana em todo o $x \in S$.

**dem.** Começamos por provar que $f$ é limitada numa vizinhança de $x \in S$ .

Sem perda de generalidade podemos supor para a hipótese que $f$ é majorada por $M$ em $\varepsilon B \subset S$ : $x \in \varepsilon B \Rightarrow f(x) \le M$.

Escolha-se $\rho \ge 1$ $t.q.$ $\rho x \in S$ e faça-se $y = \rho x$.

Se $\lambda = \dfrac{1}{\rho} \le 1$ então o conjunto

$$V = \left\{v : v = (1-\lambda)x' + \lambda y, x' \in \varepsilon B\right\}$$

é uma vizinhança de $x = \lambda y$ com raio (1-$\lambda$)$\varepsilon$.

De facto :

$$\|v-\lambda y\| = \left\|(1-\lambda)x' + \lambda y - \lambda y\right\| = (1-\lambda)\left\|x'\right\| \leq (1-\lambda)\varepsilon \text{ pois}$$

$$x' \in \varepsilon B \Rightarrow \left\|x'\right\| \leq \varepsilon.$$

Para todo o $v \in V$ tem-se, por convexidade :

$$f(v) = f\left[(1-\lambda)\,x' + \lambda y\right] \leq (1-\lambda)f(x') + \lambda f(y) \quad \leq M + \lambda f(y)$$

e portanto $f$ é majorada numa vizinhança de $x = \lambda y$ .
Seja um ponto qualquer $z \in x + (1-\lambda)\varepsilon B$ , $x = \lambda y$.
Então existe outro ponto $z'$ *t.q.* $x = \dfrac{z+z'}{2} = \dfrac{1}{2}z + \dfrac{1}{2}z'$
e portanto

$$f(x) = f\left(\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z'\right) \leq \frac{1}{2}f(z) + \frac{1}{2}f(z')$$

$$2f(x) \leq f(z) + f(z')$$

$$f(z) \geq 2f(x) - f(z') = 2f(x) + \left[-f(z')\right]$$

Mas $z' \in V$ pelo que

$$f(z') \leq M + \lambda f(y)$$
$$-f(z') \geq -M - \lambda f(y)$$
$$\Rightarrow f(z) \geq 2f(x) - M - \lambda f(y)$$

e portanto $f$ também é minorada perto de $x$.
Logo $f$ é limitada perto de $x$ .
Seja então , por exemplo , $|f(x)| \leq N$ em $x + 2\delta B$, $\delta \geq 0$
Para $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in x + \delta B$ , faça-se

$$x_3 = x_2 + \frac{\delta}{\alpha}(x_2 - x_1) \ , \ \alpha = \|x_2 - x_1\|$$

Resolvendo em ordem a $x_2$ :

$$x_3 = x_2 + \frac{\delta}{\alpha}x_2 - \frac{\delta}{\alpha}x_1$$
$$x_3 + \frac{\delta}{\alpha}x_1 = x_2\left(1 + \frac{\delta}{\alpha}\right)$$
$$x_3 + \frac{\delta}{\alpha}x_1 = x_2\left(\frac{\alpha+\delta}{\alpha}\right)$$

$$x_2 = \frac{x_3}{\left(\dfrac{\alpha+\delta}{\alpha}\right)} + \frac{\dfrac{\delta}{\alpha} x_1}{\left(\dfrac{\alpha+\delta}{\alpha}\right)}$$

$$x_2 = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\delta}\right) x_3 + \left(\frac{\delta}{\alpha+\delta}\right) x_1 \quad \text{e} \quad \frac{\alpha}{\alpha+\delta} + \frac{\delta}{\alpha+\delta} = 1.$$

Por convexidade :

$$f(x_2) = f\left[\frac{\alpha}{\alpha+\delta} x_3 + \frac{\delta}{\alpha+\delta} x_1\right] \leq \frac{\alpha}{\alpha+\delta} f(x_3) + \frac{\delta}{\alpha+\delta} f(x_1).$$

$$\text{Mas:} \quad \frac{\delta}{\alpha+\delta} = 1 - \frac{\alpha}{\alpha+\delta}$$

Então $f(x_2) \leq \dfrac{\alpha}{\alpha+\delta} f(x_3) + \left[1 - \dfrac{\alpha}{\alpha+\delta}\right] f(x_1) =$

$$= \frac{\alpha}{\alpha+\delta} \left[f(x_3) - f(x_1)\right] + f(x_1)$$

$$f(x_2) - f(x_1) \leq \frac{\alpha}{\alpha+\delta} \left[f(x_3) - f(x_1)\right]$$

Como $\dfrac{\alpha}{\alpha+\delta} \leq \dfrac{\alpha}{\delta}$ e $f(x_3) - f(x_1) \leq |f(x_3) - f(x_1)|$

resulta $f(x_2) - f(x_1) \leq \dfrac{\alpha}{\delta} |f(x_3) - f(x_1)|$.

Mas sabemos que para $p, q \in \mathbb{R}$ se tem

$$|p - q| \leq |p| + |q|$$

pelo que,

$$f(x_2) - f(x_1) \leq \frac{\alpha}{\delta} \left[|f(x_3)| + |f(x_1)|\right].$$

Mas $\quad |f(x_3)| < N \quad , |f(x_1)| < N \quad , \alpha = \|x_2 - x_1\|$

$$f(x_2) - f(x_1) \leq \frac{2N}{\delta} \|x_2 - x_1\|, \quad x_1, x_2 \in x + \delta B$$

e como $x_1, x_2$ podem ser permutados conclui-se que

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq \frac{2N}{\delta} \|x_2 - x_1\|$$

e $f$ é localmente lipschitziana em $x$ .

■

A demonstração provou ainda o seguinte corolário, útil nas aplicações:

COROLÁRIO **3.5-3** :

Seja $f$ convexa , $|f(x)| \leq N$ , num convexo aberto $S \subset X$ e $f : S \to \mathbb{R}$, contendo $S$ uma vizinhança $\delta B$ , $\delta > 0$ , de um subconjunto $T \subset S$ .

Então $f$ é lipschitziana em $T$ , com constante de Lipschitz igual a $\frac{2N}{\delta}$.

Vamos agora verificar se o gradiente generalizado que definimos coincide com o subdiferencial da análise convexa.

Recorde-se que o subdiferencial da função convexa $f$ em $x$ é definido por :

$$\partial f(x) = \{\xi \in X^* : f(u) - f(x) \geq \langle \xi, u - x \rangle, \forall u \in S\}$$

para $f : X \supset S \to \mathbb{R}$ e $\xi : X \to \mathbb{R}$.

TEOREMA **3.5-4** :

Se $f$ é convexa em $S \subset X$ e localmente lipschitziana em $x \in S$ ,o gradiente generalizado $\partial f(x)$ coincide com o subdiferencial $\partial f$ em $x$ e a derivada direccional generalizada $f^o(x; v)$ coincide com a derivada direccional $f'(x; v)$ em cada $v \in X$ .

**dem.** da análise convexa sabe-se que $f'(x; v)$ existe para cada $v$ e que $f'(x; \cdot)$ é a função de suporte do subdiferencial em $x$ .Mais precisamente, o subdiferencial da análise convexa é o conjunto

$$\partial f(x) = \{\xi \in X^* : f(u) - f(x) \geq \langle \xi, u - x \rangle, \forall u \in S\},$$

e $f'(x; \cdot)$ é a função de suporte de $\partial f(x)$.

Então é suficiente provar que para todo o $v \in X$ se verifica a igualdade das funções de suporte, traduzida por :

$$f^o(x; v) = f'(x; v)$$

Podemos escrever ( Apêndice A2, [12])

$$f^o(x;v) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup_{\|x'-x\|<\varepsilon\delta} \sup_{0<t<\varepsilon} \frac{f(x'+tv)-f(x')}{t}$$

onde $\delta > 0$ é um número qualquer fixo.
Observe-se que

$$\varepsilon \to 0^+ \Rightarrow t \to 0^+ \wedge x' \to x\,.$$

A função $\varphi(t) = \dfrac{f(x'+tv)-f(x')}{t}$ é crescente ([10] ,pág.35)

Então :

$$t < \varepsilon \Rightarrow \frac{f(x'+tv)-f(x')}{t} \leq \frac{f(x'+\varepsilon v)-f(x')}{\varepsilon}$$

e

$$f^o(x;v) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup_{\|x'-x\|<\varepsilon\delta} \frac{f(x'+\varepsilon v)-f(x')}{\varepsilon}\,.$$

Pela condição de Lipschitz tem-se para qualquer $x' \in x+\varepsilon\delta B$ :

$$\left|\frac{f(x'+\varepsilon v)-f(x')}{\varepsilon} - \frac{f(x+\varepsilon v)-f(x)}{\varepsilon}\right| \leq K\left\|x'-x\right\| <$$

$< K \cdot \varepsilon\delta \leq 2\delta K$ para $x'$suficientemente próximo de $x$.Então :

$$\frac{f(x'+\varepsilon v)-f(x')}{\varepsilon} \leq \frac{f(x+\varepsilon v)-f(x)}{\varepsilon} + 2\delta K$$

$$f^o(x;v) \leq \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{f(x+\varepsilon v)-f(x)}{\varepsilon} + 2\delta K$$

$$f^o(x;v) \leq f'(x;v) + 2\delta K \quad , \quad \delta \text{ arbitrário.}$$

Por outro lado, o Teorema **3.4- 8** diz que se $f$ é localmente lipschitziana em $x$ e admite numa derivada de qualquer tipo ( Gâteaux, Hadamard, Fréchet, estrita ) $Df(x)$ então $Df(x) \in \partial f(x)$ , e $f^o(x;v) \geq \langle Df(x), v\rangle$ , $\forall v \in X$ ( por definição de $f^o$ ) .Da dupla desigualdade

$$f^o(x;v) \leq f'(x;v) + 2\delta K$$

$$f^o(x;v) \geq f'(x;v)$$

e da arbitrariedade de $\delta$ resulta que deve ser

$$f^o(x;v) = f'(x;v)$$

■

Para terminar esta secção enunciamos um critério de convexidade de $f$ em termos da monotonia de $\partial f$ .

O gradiente generalizado diz-se monótono se para um subconjunto convexo e aberto $S \subset X$ tivermos :

$$\forall x, x' \in S \ , \ \xi \in \partial f(x) \ , \xi' \in \partial f(x') : \langle x - x', \xi - \xi' \rangle \geq 0.$$

De facto,

$$\begin{gathered} \langle x - x', \xi - \xi' \rangle \geq 0 \\ \langle x - x', \xi \rangle - \langle x - x', \xi' \rangle \geq 0 \\ \langle x - x', \xi \rangle \geq \langle x - x', \xi' \rangle. \end{gathered}$$

<u>TEOREMA 3.5- 5</u> ([5] ,pág.37)

Se $f$ é localmente lipschitziana em cada ponto de um aberto convexo $S \subset X$, então $f$ é convexa em $S$ se e só se a multifunção $\partial f$ é monótona em $S$ .

## 4. <u>ELEMENTOS DE ANÁLISE NÃO SUAVE</u>

Vamos derivar um conjunto de fórmulas que facilitam grandemente o cálculo de $\partial f$ quando $f$ é construída a partir de funcionais através de combinação linear, maximização , composição, etc.

Supõe-se que $f$ é dada e é localmente lipschitziana em $x$ .

### 4. 1 -<u>*MÚLTIPLOS ESCALARES, EXTREMOS LOCAIS, SOMAS FINITAS*</u>

<u>TEOREMA 4.1-1 ( *MÚLTIPLOS ESCALARES* )</u> :

Para qualquer escalar $s \in \mathbb{R}$ tem-se $\partial(sf)(x) = s\partial f\,(x)$ .

**dem.**

Note-se que $s \cdot f$ também é localmente liptschitziana em $x$ .
Para s $\geq 0$ sabemos que $(sf)^o = s \cdot f\ ^o$.Então como

$$\partial f(x) = \{\xi \in X^* : f^o(x;v) \geq \langle \xi, v \rangle, \forall v \in X\}$$

ter-se-á :

$$\partial(sf)(x) = \{\xi \in X^* : (sf)^\circ (x,v) \geq \langle \xi, v \rangle, \forall v \in X\} =$$
$$= \{\xi \in X^* : sf^o(x;v) \geq \langle \xi, v \rangle, \forall v \in X\} =$$
$$= s\{\xi \in X^* : f^o(x;v) \geq \langle \xi, v \rangle, \forall v \in X\} = s\partial f\,(x)\,.$$

É suficiente agora provar a fórmula para $s = -1$ .
Um elemento $\xi \in X^*$ pertence a $\partial(-f)(x)$ se e só se $(-f)^o(x,v) \geq \langle \xi, v \rangle, \forall v \in X$.

Recorde-se ainda que pelo teorema **2 . 2(c)** se tem,

$$(f)^o(x,-v) = (-f)^o(x,v).$$

Queremos provar que $\partial(-f)(x) = -\partial f\,(x)$ ,ou seja,que $\xi \in \partial(-f)(x)$ se e só se $\xi \in -\partial f\,(x)$.
Seja $\xi \in \partial(-f)(x)$.
Então podemos escrever $(-f)^\circ (x;-v) \geq \langle \xi, -v \rangle$ e pelo teorema **2.2** **(c)** vem que $f^\circ (x;v) \geq \langle \xi, -v \rangle$ ou ainda que $f^\circ (x;v) \geq \langle -\xi, v \rangle$ . Mas isto significa que $-\xi \in \partial f\,(x)$.
A implicação inversa é imediata.

■

<u>TEOREMA **4.1- 2** ( *EXTREMOS LOCAIS* )</u>:

Se $f$ tiver um mínimo local ou um máximo local em $x$ , então $0 \in \partial f(x)$ .

**dem.**

Como para $s = -1$ se tem $\partial(-f) = -\partial f$ será suficiente provar a proposição quando $x$ é mínimo local. Neste caso :

$$\forall v \in X, \quad f^o(x;v) \geq 0$$

De facto tem-se

$$\limsup_{\substack{x' \to x \\ t \to 0^+}} \frac{f(x' + tv) - f(x')}{t} \geq \limsup_{t \to 0^+} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}, \text{ pelo que}$$

o limite será $\geq 0$ .

Então pelo teorema **3.3- 3 (a)** , $\xi = 0 \in \partial f(x)$.

■

Observemos, antes de prosseguir, que se $f_i, i = 1, 2, \ldots, n$,for uma família finita de funções, cada uma das quais é localmente lipschitziana em $x$, então $f = \sum_i f_i$ é também localmente lipschitziana em $x$ .

TEOREMA **4. 1 - 3** *(SOMAS FINITAS)*:

$$\partial\left(\sum_i f_i\right)(x) \subset \sum_i \partial f_i(x).$$

**dem.** $\sum_i \partial f_i x$ indica o conjunto ( fracamente -* compacto ) de todos os pontos $\xi$ obtíveis como soma $\sum_1^n \xi_i$ em que cada $\xi_i$ pertence a $\partial f_i(x)$ :

$$\partial f_1(x) = \{\xi_1 : \ldots\}$$
$$\partial f_2(x) = \{\xi_2 : \ldots\}$$
$$\sum_1^n \partial f_i(x) = \{(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = \xi : \ldots\}$$

Vamos provar para $n = 2$ ; o caso geral deduz-se por indução matemática.

As funções de suporte ( sobre $X$ ) dos dois membros, calculadas em $v$ ,são respectivamente,pelo teorema **3.1- 2 (b)** :

$$(f_1 + f_2)^o(x; v)$$

$$f_1^o(x, v) + f_2^o(x, v)$$

A nossa tese é :

$$\partial(f_1 + f_2)(x) \subset \partial f_1(x) + \partial f_2(x)$$

Utilizando o teorema **3. 2 - 2 (b)** :

$$\sum \subset \Delta \Leftrightarrow \sigma_{\sum}(x) \leq \sigma_{\Delta}(x) \ , \ \forall x \in X$$

vê-se que é suficiente provar a desigualdade

$$(f_1 + f_2)^o(x,v) \leq f_1^o(x,v) + f_2^o(x,v)$$

Mas :

$$f_1^o(x,v) \geq \langle \xi_1, v \rangle, \ \forall v \in X$$

$$f_2^o(x,v) \geq \langle \xi_2, v \rangle, \ \forall v \in X$$

$$f_1^o(x,v) + f_2^o(x,v) \geq \langle \xi_1, v \rangle + \langle \xi_2, v \rangle = \langle \xi_1 + \xi_2, v \rangle, \quad \forall v \in X.$$

Como $f_1, f_2$ são localmente lipschitzianas em $x$ , $(f_1 + f_2)$ também o é. Então pelo teorema **3.1-2(b)** , temos que :

$$\forall v \in X, (f_1 + f_2)^o(x,v) = \max\{\langle \xi_1 + \xi_2, v \rangle : (\xi_1 + \xi_2) \in \partial(f_1 + f_2)(x)\}$$

e, portanto,

$$f_1^o(x,v) + f_2^o(x,v) \geq (f_1 + f_2)^o(x,v)$$

■

<u>COROLÁRIO **4.1- 4**</u> :

Se as funções $f_i$ forem estritamente diferenciáveis em $x$ ( com excepção,no máximo,de uma delas) então

$$\partial(\sum f_i)(x) = \sum \partial f_i(x)$$

**<u>dem.</u>** Somando as funções estritamente diferenciáveis para se obter uma única função estritamente diferenciável, podemos reduzir a demonstração ao caso de duas funções $f_1, f_2$ sendo $f_1$ estritamente diferenciável.

Então :

$$(f_1 + f_2)^o(x,v) = f_1'(x,v) + f_2^o(x,v)$$

Pelo teorema **3.4- 9** , se $f_1$ é estritamente diferenciável em $x$ então:

$$\partial f_1(x) = \left\{ D_S f_1(x) = f_1'(x,v) \right\}$$

e como $f_1^o(x,v) = \max\{\langle \xi, v\rangle, \xi \in \partial(x)\}$ resulta que $f_1^o(x,v) = f_1'(x,v)$.

Então :

$$(f_1 + f_2)^o(x,v) = f_1^o(x,v) + f_2^o(x,v)$$

e portanto os dois conjuntos da tese têm a mesma função de suporte. Logo :

$$\partial(f_1 + f_2)(x) = \partial f_1(x) + \partial f_2(x)$$

■

<u>COROLÁRIO 4.1-5 :</u>

Para quaisquer escalares $s_i \in \mathbb{R}$ tem-se :

$$\partial\left(\sum_{i=1}^{n} s_i f_i\right)(x) \subset \sum_{i=1}^{n} s_i \partial f_i(x)$$

Se todas as funções $f_i$ forem estritamente diferenciáveis ( com excepção no máximo de uma ) ocorre a igualdade.

**<u>dem.</u>** é suficiente recordar o Teorema **4.1-1** ,

$\partial(sf)(x) = s\partial f(x)$ , e o teorema **4.1.-3**, $\partial(\sum f_i)(x) \subset \sum \partial f_i(x)$

■

## 4. 2 - <u>*CLASSE DAS FUNÇÕES REGULARES*</u>

Muitas vezes nas fórmulas de cálculo de gradientes generalizados ocorrem inclusões, como no Teorema **4.1- 3**.

Com hipóteses adicionais as inclusões podem transformar-se em igualdades.

Por exemplo, naquele teorema ter-se-ia a igualdade

$$\partial(\sum_i f_i)(x) = \sum \partial f_i(x)$$

se todas as funções fossem continuamente diferenciáveis,pois neste caso o gradiente generalizado é essencialmente a derivada, que é um operador linear.

Podemos querer uma condição mais fraca que cubra , por exemplo, o caso convexo não diferenciável.

Uma classe de funções útil neste caso é a seguinte :

DEFIN. **4.2- 1 :** Uma função $f$ diz-se regular em $x$ se :

**i)** a derivada lateral direccional usual $f'(x,v)$ existe , $\forall v \in X$.

**ii)** $f'(x,v) = f^{o}(x,v), \quad \forall v \in X$.

Para exemplificarmos o contributo da regularidade de $f$ , vamos examinar aqui um outro corolário do Teorema **4.1- 3** .

COROLÁRIO **4.2- 2 :**

**a)** Se cada $f_i$ for regular em $x$ então :

$$\partial(\sum f_i)(x) = \sum \partial f_i(x)$$

**b)** Se cada $f_i$ for regular em $x$ e $s_i \geq 0$ então :

$$\partial\left(\sum_1^n s_i f_i\right)(x) = \sum s_i \partial f_i(x)$$

**dem.**

**a)** Como se verá adiante uma combinação linear positiva de funções regulares é regular. Então será suficiente em **(a)** e **(b)** considerar $n = 2$ .

A demonstração do Teorema **4. 1- 3** deixou claro que se terá a igualdade se os dois conjuntos da tese tiverem a mesma função de suporte.

A função de suporte do conjunto do primeiro membro de **(a)** é :

$$\begin{aligned}(f_1 + f_2)^{o}(x;\cdot) &= (f_1 + f_2)'(x;\cdot) = f_1'(x;\cdot) + f_2'(x;\cdot) = \\ &= f_1^{o}(x;\cdot) + f_2^{o}(x;\cdot)\end{aligned}$$

Obtivemos, portanto, a função de suporte do segundo membro de **(a)**.

**b)** demonstração análoga, utilizando o Teorema **4.1 1.**

■

Vamos caracterizar as funções regulares.

TEOREMA **4.2 3** - *( FUNÇÕES REGULARES )*

Seja $f$ localmente lipschitziana em $x$ .Então :

**a)**-$f$ estritamente diferenciável $\Rightarrow$ $f$ regular em $x$ .

b)-$f$ convexa $\Rightarrow f$ regular em $x$.

c)-uma combinação linear finita, com escalares não negativos, de funções regulares em $x$ é regular em $x$.

d)-Se $f$ admite uma derivada de Gâteaux $Df$ e é regular em $x$ então $\partial f(x) = \{Df(x)\}$.

<u>**dem.**.</u> a)-recorde-se o Teorema **3.3-3 (a)** :

$$\xi \in \partial(x) \Leftrightarrow f^o(x,v) \geq \langle \xi, v \rangle, \quad \forall v \in X$$

e o teorema **3.4- 10** :

$f$ estritamente diferenciável $\Rightarrow f$ lipschitziana em $x$ e $\partial f(x) = \{D_s f(x)\}$ .

Como $f$ é estritamente diferenciável em $x$ ,pela hipótese, tem-se $\partial f(x) = \{D_s f(x)\}$ .

Seja $f'(x,v)$ a derivada direccional usual. $f$ é regular se $f'(x,v)$ existir e $f'(x,v) = f^o(x,v), \quad \forall v \in X$.

Sabemos ainda que $f^o(x;v)$ é a função de suporte de $\partial f(x)$.

Mas , Teorema **3.4-9** ,sendo $f$ localmente lipschitziana em $x$ , se $f$ admite uma derivada $Df$ de qualquer tipo, então $Df \in \partial f(x)$.

De facto :

$$f'(x,v) := \langle Df(x), v \rangle \text{ para cada } v \text{ e } f' \leq f^o \text{ ou } f^o(x,v) \geq \langle Df(x), v \rangle , \quad \forall v \in X$$

$$\Rightarrow Df(x) \in \partial f(x) \text{ pelo teorema } \mathbf{3.3\text{-}\ 3\ (a)}.$$

Como $\partial f(x)$ é um singleton, $\partial f(x) = \{D_s f(x)\}$ resulta que

$$\langle D_s f(x), v \rangle = \langle Df(x), v \rangle = f'(x,v) = f^o(x;v), \forall v \in X.$$

b)-Em análise convexa prova-se a existência de $f'(x,\cdot)$ e ainda que $f'(x,\cdot)$ é a função de suporte do subdiferencial $\partial f(x)$.

Recorde-se o enunciado do Teorema **3.5-4** :

se $f$ é convexa em $S \subset X$ e localmente lipschitziana em $x$ , então $\partial f(x)$ coincide em $x$ com o subdiferencial da análise convexa e $f^o(x,v)$ coincide com a derivada direccional $f'(x,v)$ em cada $v$ .

Como $f^o(x,v)$ é a função de suporte de $\partial f(x)$ resulta imediatamente que $f'(x,\cdot) = f^o(x,\cdot)$ . Portanto, $f$ é regular.

c)-De novo basta tratar o caso de duas funções $f_1, f_2$ e como $sf$ é obviamente regular quando $f$ é regular e $s \geq 0$ , será suficiente provar que $(f_1 + f_2)' = (f_1 + f_2)^o$ quando $f_1, f_2$ são regulares em $x$ .

Tem-se então :

$$(f_1 + f_2)' = f_1' + f_2') = f_1^o + f_2^o \geq (f_1 + f_2)^{\circ}$$

desigualdade que foi provada no Teorema **4.1-3** .

Mas como é sempre verdade que $(f_1 + f_2)^{\circ} \geq (f_1 + f_2)'$ , deduz-se que $(f_1 + f_2)^{\circ} = (f_1 + f_2)'$ e a combinação $f_1 + f_2$ é regular.

**d)-** pela hipótese, $f$ tem derivada de Gâteaux , $Df(x)$ , e $f$ é regular em $x$, significando que $f^o(x) = Df(x)$ .

Pelo teorema **3.3-3 (a)** , aplicado ao caso da igualdade $f^o(x,v) = \langle Df(x), v\rangle$ , resulta que $\partial f(x) = \{Df(x)\}$ .

■

## 4.3 -<u>O TEOREMA DO VALOR MÉDIO</u>

Para demonstrarmos um teorema a que chamaremos Teorema do Valor Médio , aplicável a funções lipschitzianas, precisamos inicialmente de demonstrar o seguinte lema.

<u>LEMA **4.3-1** :</u>

Seja $x_t = x + t(y - x)$ , $x, y \in X$ , $X$ espaço de Banach.

Seja $f$ lipschitziana num aberto $S \subset X$.
Seja o segmento$[x, y] = \{x_t : x_t = tx + (1 - t)y, t \in [0,1]\} \subset S$.
Seja ainda a função $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(t) = f(x_t)$
Então $g$ é lipschitziana em $(0,1)$ e

$$\partial g(t) \subset \langle \partial f(x_t), y - x\rangle$$

<u>**dem.**</u>

Como $f$ é lipschitziana num aberto $S$ que contém $[x, y]$ e $t \in [0,1]$ implica que $x_t \in [x, y]$ , então $g(t)$ é lipschitziana em $(0,1)$.

Na expressão da tese os dois conjuntos convexos fechados $\partial g(t)$, $\partial f(x_t)$ (teorema **3.1- 2 (a)**) são de facto intervalos em $\mathbb{R}$ pelo que é suficiente provar que para $v = \pm 1$ se tem

$$\max\{\partial g(t)v\} \leq \max\{\langle \partial f(x_t), y - x\rangle v\}$$

Pelo Teorema **3.1-2 (b)** :

$$\forall v \in X, \quad f^o(x,v) = \max\{\langle \xi, v\rangle : \xi \in \partial f(x)\}$$

tem-se que,

$$\max\{\partial g(t)v\} = g^o(t,v).$$

Então, por definição :

$$g^o(t,v) := \limsup_{\substack{s \to t \\ \lambda \to 0^+}} \frac{g(s+\lambda v) - g(s)}{\lambda}.$$

Como $g(t) = f(x_t)$ e $x_t = x + t(y-x)$ , vem

$$g(s) = f\left[x + s(y-x)\right]$$

$$g(s+\lambda v) = f\left[x + (s+\lambda v)(y-x)\right]$$

pelo que :

$$g^o(t,v) = \limsup_{\substack{s \to t \\ \lambda \to 0^+}} \frac{f\left[x + (s+\lambda v)(y-x)\right] - f\left[x+s(y-x)\right]}{\lambda}.$$

Escrevendo $y' = x + s(y-x)$ tem-se ainda que :

$$x + (s+\lambda v)(y-x) = x + s(y-x) + \lambda v(y-x) = y' + \lambda v(y-x)$$

e $s \to t \Rightarrow y' \to x_t$

Então :

$$g^o(t,v) = \limsup_{\substack{s \to t \\ \lambda \to 0^+}} \frac{f\left[x + (s+\lambda v)(y-x)\right] - f\left[x+s(y-x)\right]}{\lambda} \leq$$

$$\leq \limsup_{\substack{y' \to x_t \\ \lambda \to 0^+}} \frac{f\left[y' + \lambda \cdot v(y-x)\right] - f(y')}{\lambda} = f^o(x_t; v(y-x)) =$$

$$= \max\langle \partial f(x_t), v(y-x)\rangle.$$

■

<u>TEOREMA 4.3-2 -*TEOREMA DO VALOR MÉDIO*</u>

Sejam $x, y \in X$, $X$ espaço de Banach, e seja $f$ lipschitziana num aberto $S \subset X$ e $[x,y] \subset S$.

Então existe um ponto $u$ em $(x,y)$ tal que $[f(y) - f(x)] \in \langle \partial f(u), y - x\rangle$.

**<u>dem.</u>** Considere-se a função auxiliar $\theta : [0,1] \to \mathbb{R}$, definida por $\theta(t) = f(x_t) + t\left[f(x) - f(y)\right]$, $x_t = x + t(y-x)$.

$$\text{Tem-se:} \qquad \theta(0) = f(x_0) = f\left[x + 0 \cdot (y-x)\right] = f(x)$$

$$\theta(1) = f(x_1) = f\left[x + 1 \cdot (y-x)\right] + \left[f(x) - f(y)\right] =$$

$$= f(y) + f(x) - f(y) = f(x)$$

Por continuidade deverá existir um ponto $t \in (0,1)$ no qual $\theta$ atinge um mínimo local ou um máximo local.

Pelo teorema **4.1-2** se $f$ atinge um mínimo ou um máximo local em $x$ então $0 \in \partial f(x)$ . Então $0 \in \partial\theta(t)$ .

Utilizando o teorema **4.1-1** ( múltiplos escalares ) ,

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad \partial(sf)(x) = s\partial f(x)$$

e o teorema **4.1-3** ( somas finitas ) ,

$$\partial(\sum f_i)(x) \subset \sum \partial f_i(x)$$

e o Lema **4.3-1**

$$\partial g(t) \subset \langle \partial f(x_t), y - x \rangle$$

deduzimos que,

$$0 \in [f(x) - f(y)] + \langle \partial f(x_t), y - x \rangle.$$

De facto, calculemos $\partial\theta(t)$ :

$$\theta(t) = f(x_t) + t\left[f(x) - f(y)\right]$$

$$\theta(t) = g(t) + t\left[f(x) - f(y)\right]$$

$$\partial\theta(t) \subset \partial g(t) + \left[f(x) - f(y)\right]\partial t(t)$$

$$\partial\theta(t) \subset \langle \partial f(x_t), y - x \rangle + \left[f(x) - f(y)\right]$$

$$0 \in \partial\theta(t) \Rightarrow 0 \in \langle \partial f(x_t), y - x \rangle + \left[f(x) - f(y)\right].$$

Fazendo $u = x_t \in (x, y), t \in (0,1)$ vem finalmente

$$[f(y) - f(x)] \in \langle \partial f(u), y - x \rangle.$$

■

## 4.4- <u>OS TEOREMAS DA DERIVAÇÃO COMPOSTA</u>

Considere-se o seguinte sistema :

$$h : X \to \mathbb{R}^n, h(x) \in \mathbb{R}^n, h(x) = (h_{1,\dots,}h_n)(x)$$

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, g\left[h(x)\right] \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = (g \circ h)(x) \in \mathbb{R}.$$

Supomos que cada função coordenada $h_i$ é localmente lipschitziana em $x$ e que $g$ é localmente lipschitziana em $h(x)$ .Portanto $f$ é localmente lipschitziana em $x$ .Vamos identificar $(\mathbb{R}^n)^*$ com $\mathbb{R}^n$.

Então :

$\partial g(\cdot) = \{\xi \in (\mathbb{R}^n)^* : \dots\}$ ficará $\partial g(\cdot) = \{\xi \in \mathbb{R}^{n*} : \dots\}$

e portanto um elemento $\alpha \in \partial g\left(\cdot\right)$ pode identificar-se com um vector de $n$ dimensões:

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad \text{ou} \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$$

TEOREMA 4.4-1 -(*PRIMEIRA REGRA DA DERIVAÇÃO COMPOSTA*)

$$\partial\left(g \circ h\right)(x) = \partial f(x) \subset \overline{co}S$$

$$S = \left\{\sum_1^n \alpha_i\xi_i : \xi_i \in \partial h_i\left(x\right), \alpha \in \partial g\left[h\left(x\right)\right]\right\}$$

$\overline{co}S =$ convexificado fracamente $-*$ fechado de $S$ ,( Apêndice A2, [13]).

A igualdade ( em vez da inclusão) ocorre para qualquer das seguintes hipóteses adicionais :

**i)** $g$ é regular em $h(x)$ , cada $h_i$ é regular em $x$ , todo o $\alpha \in \partial g\left[h\left(x\right)\right]$ tem componentes $\alpha_i$ não negativas.Neste caso $f$ é regular em $x$ .

**ii)** $g$ é estritamente diferenciável em $h(x)$ e $n = 1$.

**iii)** $g$ é regular em $h(x)$ e $h$ é estritamente diferenciável em $x$ . Neste caso $f$ é regular em $x$ .

**dem.**- O conjunto $S$ cujo convexificado aparece na fórmula é fracamente $-*$ compacto ( teorema **3.1-2 (a)**) e portanto o seu convexificado ( afinal o menor conjunto convexo que contém $S$ ) tem fecho compacto ( e é de facto fechado se $X$ for de dimensão finita, podendo neste caso escrever-se *co* em vez de $\overline{co}$ ).

A função de suporte ( de $S$ ou de $\overline{co}S$) num ponto $v \in X$ é :

$$q_o := \max\left\{\sum\langle\alpha_i\xi_i, v\rangle : \xi_i \in \partial h_i(x), \alpha \in \partial g\left[h\left(x\right)\right]\right\} =$$
$$= \max\left\{\sum \alpha_i\langle\xi_i, v\rangle : \xi_i \in \partial h_i(x), \alpha \in \partial g\left[h\left(x\right)\right]\right\}$$

Pelo Teorema **3.2-2(b)** :

$\sum \subset \Delta \Leftrightarrow \sigma_{\sum}(x) \leq \sigma_{\Delta}(x)$ , para todo o $x$ , vê-se que é suficiente provar que :

$(g \circ h)^o(x,v) = f^o(x,v) \leq q_o(x)$ para todo o $v \in X$ .

Vamos ver que para se conseguir este resultado é suficiente mostrar que $\forall\varepsilon > 0$ a quantidade $q_\varepsilon$ definida a seguir, majora $f^o(x,v) - \varepsilon$ :

$$q_\varepsilon = \max\left\{\sum_1^n \alpha_i\langle\xi_i, v\rangle : \xi_i \in \partial h_i(x_i), \alpha \in \partial g(u),\right.$$
$$\left. x_i \in x + \varepsilon B, u \in h(x) + \varepsilon B \right\}$$

$q_o$ refere-se a $x, h(x)$ e $q_\varepsilon$ refere-se a $x_i, u$ contidos respectivamente nas bolas $x + \varepsilon B$ e $h(x) + \varepsilon B$.

A razão para se usar $q_\varepsilon$ é que por um lema que se prova a seguir, $q_\varepsilon$ decresce para $q_o$ quando $\varepsilon \to 0^+$ .

Por definição de $f^o(x,v)$ segue-se que podemos encontrar $x'$perto de $x$ e $t > 0$ *t.q.*

$$f^o(x,v) \leq \frac{f(x'+tv) - f(x')}{t} + \varepsilon.$$
$$(x' \to x, t \to 0^+ \text{ no limite })$$

O grau de proximidade é escolhido de modo a garantir que

$$\begin{gathered} x' \in x + \varepsilon B \\ x' + tv \in x + \varepsilon B \\ h(x') \in h(x) + \varepsilon B \\ h(x' + tv) \in h(x) + \varepsilon B. \end{gathered}$$

Pelo teorema do valor médio, teorema **4.3-2** :
se $f$ é lipschitziana em $S$ ,$[x,y] \subset S, u \in (x,y)$
então $f(y) - f(x) \in \langle\partial f(u), y - x\rangle$
podemos escrever :

$$f(x'+tv) - f(x') = g\left[h(x'+tv)\right] - g\left[h(x')\right] \in$$
$$\in \langle\partial g(u), h(x'+tv) - h(x')\rangle$$

e para algum $\alpha \in \partial g(u)$ :

$$g\left[h(x'+tv)\right]-g\left[h(x')\right]=\sum\alpha_i\left[h_i(x'+tv)-h_i(x')\right]$$

onde $u$ é um ponto no segmento $\left[h(x'+tv),h(x')\right]$e portanto em $h(x)+\varepsilon B$.

Fazendo nova aplicação do mesmo teorema

$$h_i(x'+tv)-h_i(x')\in\langle\partial h(v),(x'+tv)-x'\rangle$$

e portanto

$$h_i(x'+tv)-h_i(x')=\langle\xi_i,tv\rangle$$
$$\Rightarrow\sum\alpha_i\left[h_i(x'+tv)-h_i(x')\right]=\sum\alpha_i\langle\xi_i,tv\rangle.$$

com $\xi_i\in\partial h_i(x_i)$ e $x_i$ um ponto do segmento $\left[x'+tv,x'\right]$ e portanto de $x+\varepsilon B$.

Então :

$$f^o(x,v)\leq\frac{f(x'+tv)-f(x')}{t}+\varepsilon=\frac{\sum\alpha_i\langle\xi_i,tv\rangle}{t}+\varepsilon=$$
$$=\sum\alpha_i\langle\xi_i,v\rangle+\varepsilon$$

ou seja $f^o(x,v)\leq\sum\alpha_i\langle\xi_i,v\rangle+\varepsilon$

e como $q_\varepsilon=\max\left\{\sum\alpha_i\langle\xi_i,v\rangle\right\}$ vem que,

$$f^o(x,v)\leq q_\varepsilon+\varepsilon.$$

Provamos nesta altura o Lema a que aludimos anteriormente :

**Lema 4.4-2**

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}q_\varepsilon=q_o$$

**dem.**

Seja $\delta>0$ , $\delta$ qualquer e seja $K$ uma constante de Lipschitz comum às funções $h_i$ .Vamos ver que $q_\varepsilon$ é majorado por $q_o+n\delta\,(1+k\,|v|)$ para $\varepsilon$ suficientemente pequeno, o que nos dará o resultado desejado ,pois fica,

$$q_o\leq q_\varepsilon\leq q_o+n\delta\,(1+k\,|v|)\text{ , }\delta\text{ arbitrário.}$$

Escolha-se $\varepsilon$ tal que $h_i$ seja lipschitziana de constante $K$ em $x+\varepsilon B$ e de modo que para cada índice $i$ e para qualquer $x_i\in x+\varepsilon B$ se tenha

$$h_i^o(x_i;\pm v) \leq h_i^o(x_i;\pm v) + \frac{\delta}{K}.$$

Multiplicando ambos os membros por $|\xi_i|$onde $\xi_i$ é qualquer elemento de $\partial h_i(x_i)$obtemos :

$$|\xi_i|\, h_i^o(x_i;\pm v) \leq |\xi_i|\, h_i^o(x_i;\pm v) + \frac{\delta}{K}\, |\xi_i| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_i^o(x_i;\xi_i v) \leq h_i^o(x_i;\xi_i v) + \frac{\delta}{K}\, |\xi_i|\,.$$

Mas $\|\xi\|_*$ em $X^*$ ( recordar que $h: X \to \mathbb{R}^n$ ) é

$$\|\xi\|_* := \sup\{\langle \xi, v\rangle : v \in X, \|v\| \leq 1\}$$

e o teorema **3.1-2(a)** afirma que para uma função localmente lipschitziana em $x$ com constante $K$ temos $\|\xi\|_* \leq K$.

Então, $h_i^o(x_i;\xi_i v) \leq h_i^o(x_i;\xi_i v) + \delta.$

Pelo teorema **3.3-3(d)** se $X$ é de dimensão finita então $\partial f$ é $SCS$ em $x$ , e pela definição de $SCS$ de uma multifunção $F: X \to Y$ , $F$ é $SCS \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\ t.q. F(x') \subset F(x) + \varepsilon B_Y, \forall x' \in x + \delta B_X$ ,podemos escolher $\varepsilon$ suficientemente pequeno de modo a garantir que

$$\partial g\left[h\left(x\right) + \varepsilon B\right] \subset \partial g\left[h\left(x\right)\right] + \delta B$$

Então :

$q_\varepsilon \leq \max\left\{\sum \max\left[\alpha_i \langle \xi_i, v\rangle : \xi_i \in \partial h_i\left(x_i\right), x_i \in x + \varepsilon B\right] :\right.$

$$\left. : \alpha \in \partial g\left[h\left(x\right)\right] + \delta B\right\} \qquad \textbf{(A)}$$

Mas,

$\max\left[\alpha_i\langle \xi_i, v\rangle\right] = \max\langle \xi_i, \alpha_i v\rangle = h_i^o(x;\alpha v)$ pelo que a expressão **(A)** fica majorada por:

$$\max\left\{\sum_1^n \left[h_i^o\left(x, \alpha_i v\right) + \delta\right] : \alpha \in \partial g\left[h\left(x\right)\right] + \delta B\right\} \qquad \textbf{(B)}$$

e de novo pela definição e propriedades de $h_i^o(x,\cdot)$ :

$$h_i^o\left(x;\alpha_i v\right) = \alpha_i h_i^o\left(x;v\right) = \alpha_i \max\langle \xi_i, v\rangle = \max \alpha_i \langle \xi_i, v\rangle$$

pelo que a expressão **(B)** fica majorada por :

$$\max\left\{\sum_1^n \max\left[\alpha_i\langle \xi_i, v\rangle : \xi_i \in \partial h_i\left(x\right)\right] : \alpha \in \partial g\left[h\left(x\right)\right] + \delta B\right\} +$$

$$+n\delta \quad \leq q_o + n\left[\delta K\left|v\right|\right] + n\delta = q_o + n\delta\left[K\left|v\right| + 1\right]$$

pois

$$\langle \xi_i, v\rangle \leq h_i^o(x;v) \leq K \cdot |v| \qquad (\text{ teorema } \mathbf{2.2(a)})$$

e $$|\alpha_i| \leq \delta.$$
Então :

$$q_o \leq q_\varepsilon \leq q_o + n\delta\left[K \cdot |v| + 1\right]$$

e quando $\delta \to 0$ , $\varepsilon \to 0^+$ vem $q_\varepsilon \to q_o$.

■

Regressando à demonstração do teorema **4.4-1** tem-se então que $f^o(x,v) \leq q_\varepsilon + \varepsilon$ pelo que $f^o(x,v) \leq q_o$ para todo o $v \in X$ .
Finalmente, pelo teorema **3.2-2(b)** ,

$$\partial f(x) \subset \overline{co}S.$$

■

<u>*HIPÓTESES ADICIONAIS PARA SE TER A IGUALDADE*</u>

$$\partial f(x) = \overline{co}S$$

**i)** Considere-se $g$ regular em $h(x)$ ,$h_i$ regular em $x, \alpha \in \partial g\left[h(x)\right]$ , $\alpha_i \geq 0$.
Então $f$ é regular em $x$ e $\partial f(x) = \overline{co}S.$

<u>**dem.**</u> definimos anteriormente

$$q_o := \max\left\{\sum \alpha_i \langle \xi_i, v\rangle : \xi_i \in \partial h_i(x), \alpha \in \partial g\left[h(x)\right]\right\}.$$

Como $\alpha_i \geq 0$ podemos escrever :

$$q_o := \max\left\{\sum \alpha_i \max\left[\langle \xi_i, v\rangle : \xi_i \in \partial h_i(x)\right] : \alpha \in \partial g\left[h(x)\right]\right\} =$$
$$= \max\left\{\sum \alpha_i h_i'(x,v) : \alpha \in \partial g\left[h(x)\right]\right\}.$$

Recordemos as hipóteses iniciais :
$g$ é regular em $h(x) \Leftrightarrow$ existe $g'\left[h(x);v\right] \wedge g'\left[h(x);v\right] = g^o\left[h(x);v\right]$
$h_i$ é regular em $x \Leftrightarrow$ existe $h_i'(x;v) \wedge h_i'(x;v) = h_i^o(x,v)$.
Então $\max\langle \xi_i, v\rangle = h_i^o(x,v) = h_i'(x;v)$.
Repare-se ainda que por ser $g$ regular em $h(x)$, se pode escrever :

$$g'\left[h(x), w\right] = g^o\left[h(x), w\right] = \max\left\{\langle \alpha, w\rangle : \alpha \in \partial g\left[h(x)\right]\right\}$$
Mas $\langle \alpha, w\rangle = \sum \alpha_i w_i$
$$g'\left[h(x), w\right] = \max\left\{\sum \alpha_i w_i : \alpha \in \partial g\left[h(x)\right]\right\}.$$

Então, se $\quad w_i := h_i'(x,v)$ resulta :

$$g'[h(x), w] = \max\left\{\sum \alpha_i h_i'(x,v) : \alpha \in \partial g[h(x)]\right\}$$

que é a última expressão escrita anteriormente para $q_o$.
Portanto :

$$q_o = g'[h(x); w] = \lim_{t\to 0^+} \frac{g[h(x)+tw] - g[h(x)]}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\left\{\frac{g[h(x+tv)] - g[h(x)]}{t} + \frac{g[h(x+tw)] - g[h(x+tv)]}{t}\right\}.$$

Como $g$ é localmente lipschitziana em $h(x)$ :

$$|g[h(x)+tw] - g[h(x+tv)]| \leq K\,\|h(x)+tw-h(x+tv)\| =$$

$$= K\,\|tw - [h(x+tv)-h(x)]\| = Kt\left\|w - \frac{h(x+tv)-h(x)}{t}\right\|$$

$$t \to 0^+ \Rightarrow \frac{h(x+tv)-h(x)}{t} \to h'(x,v) = w.$$

Portanto o segundo termo $\dfrac{g[h(x)+tw] - g[h(x+tv)]}{t}$
anula-se quando $t \to 0^+$.
Resulta :

$$q_o = \lim_{t\to 0^+} \frac{g[h(x+tv)] - g[h(x)]}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} = f'(x,v) \leq f^o(x,v).$$

Provámos aqui que $q_o \leq f^o(x,v)$ e provámos antes ( LEMA) que $q_o \geq f^o(x,v) \geq f'(x,v)$ .

Resulta que $q_o = f^o(x,v) = f'(x,v)$ e portanto $f$ é regular. Como $q_o$ é a função de suporte ( calculada em $v$ ) de $\overline{co}S$ e $f^o(x,v)$ é a função de suporte de $\partial f(x)$, resulta finalmente que
$\partial f(x) = \overline{co}S$ .

$\blacksquare$

**iii)-** Seja $g$ regular em $h(x)$ e $h$ estritamente diferenciável em $x$. Então $f$ é regular em $x$ e $\partial f(x) = \overline{co}S$ .

**<u>dem.</u>** a demonstração é idêntica à anterior, utilizando o mesmo argumento.

**ii)**-Seja $g$ estritamente diferenciável em $h(x), n = 1$.
Então $\partial f(x) = \overline{co}S$.

<u>**dem.**</u> Neste caso $D_s g\left[h\left(x\right)\right]$ é um escalar $\alpha$ , pois $n = 1$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h : X \to \mathbb{R}, f = g \circ h : X \to \mathbb{R}$.

Supomos $\alpha \geq 0$ .

Como $g$ é estritamente diferenciável em $h(x)$ temos pelo Teorema **3.4-9,**

$$\partial g\left[h\left(x\right)\right] = \left\{D_s g\left[h\left(x\right)\right]\right\}.$$

Então:

$$q_o = \max\left\{\alpha\langle\xi, v\rangle : \xi \in \partial h\left(x\right), \alpha = D_s g\left[h\left(x\right)\right]\right\} =$$

$$= \alpha h^o(x,v) = q_o \limsup_{\substack{x' \to x \\ t \to 0^+}} \frac{\alpha\left[h\left(x' + tv\right) - h\left(x'\right)\right]}{t}.$$

Aplicando o teorema do valor médio **4.3-2 :**

$$\begin{aligned} f(x' + tv) - f(x') &= g\left[h\left(x' + tv\right)\right] - g\left[h\left(x'\right)\right] = \\ &= \alpha\left[h\left(x' + tv\right) - h\left(x'\right)\right] \end{aligned}$$

pelo que

$$q_o = \alpha h^o(x,v) = \limsup_{\substack{x' \to x \\ t \to 0^+}} \frac{\alpha\left[h\left(x' + tv\right) - h\left(x\right)\right]}{t} =$$

$$= \limsup_{\substack{x' \to x \\ t \to 0^+}} \frac{g\left[h\left(x' + tv\right)\right] - g\left[h\left(x'\right)\right]}{t} = f^o\left(x,v\right)$$

$$q_o = f^o\left(x,v\right) \Rightarrow \quad \partial f(x) = \overline{co}S.$$

■

<u>TEOREMA **4.4-3**-*SEGUNDA REGRA DA DERIVAÇÃO COMPOSTA*</u>

Sejam $X, Y$ espaços de Banach.

Sejam as aplicações $F : X \to Y$ , estritamente diferenciável em $x \in X$; $g : Y \to \mathbb{R}$,localmente lipschitziana em $F(x)$ ; $f = g \circ F : X \to \mathbb{R}$.

Então $f$ é localmente lipschitziana em $x$ e

$$\partial f(x) \subset \partial g\,[F(x)] \circ D_S F(x).$$

A igualdade em vez da inclusão verifica-se se :

**i)** $g$ ou $(-g)$ é regular em $F(x)$, o que implica que $f$ ou $(-f)$ é regular em $x$.

**ii)** $F$ aplica qualquer vizinhança $V_1(x)$ num conjunto que é denso numa vizinhança $V_2\,[F\,(x)]$

<u>**Obs.**</u>:A tese $\partial f(x) \subset \partial g\,[F(x)] \circ D_S F(x)$ significa que qualquer elemento $z \in \partial f(x)$ pode ser representado como composição de uma aplicação $\xi \in \partial g\,[F\,(x)]$ e de $D_S F(x)$ :

$$\langle z, v\rangle = \langle \xi, D_S F(x)\,(v)\rangle, \quad \forall v \in X.$$

<u>**dem.**</u> Como $F$ é estritamente diferenciável em $x$ então $F$ é localmente lipschitziana em $x$ pelo Teorema **3.4-9.**

Como $g$ é localmente lipschitziana em $F(x)$ resulta que $f = g \circ F$ é localmente lipschitziana em $x$ .

A expressão da tese é uma inclusão entre conjuntos convexos, fracamente $-*$ compactos.

Então, em termos de funções de suporte e escrevendo $A = D_S F(x)$, a inclusão é equivalente, pelo teorema **3.2-2** à desigualdade

$f^o(x; v) \leq \max\{\langle z, Av\rangle : z \in \partial g\,[F\,(x)]\} = g^o\,[F\,(x)\,; Av]$

A demonstração é idêntica à do teorema **4.4-1**

■

Quanto às hipóteses adicionais :

**(i)** Suponha-se $g$ regular.

<u>**Obs.**</u>:O caso em que $(-g)$ é regular trata-se trabalhando com $(-f)$ e recordando que $\partial\,(-f) = -\partial f$

Então como $g$ é regular podemos escrever

$$g^o\,[F\,(x)\,; Av] = g'\,[F\,(x)\,; Av]$$

e

$$g'\,[F\,(x)\,; Av] = \lim_{t\to 0^+} \frac{g\,[F(x) + tAv] - g\,[F(x)]}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \left\{ \frac{g\,[F(x) + tv] - g\,[F(x)]}{t} + \frac{g\,[F(x) + tAv] - g\,[F(x + tv)]}{t} \right\}.$$

Como $g$ é localmente lipschitziana em $F(x)$ :

$|g\,[F\,(x) + tAv] - g\,[F\,(x + tv)]| \leq K\,\|F\,(x) + tAv - F(x + tv)\| =$

$$= K\,\|tAv - [F(x+tv) - F(x)]\| = Kt\left\|Av - \frac{F(x+tv)-F(x)}{t}\right\|$$

$$t \to 0^+ \Rightarrow \frac{F(x+tv)-F(x)}{t} \to F'(x,v) = Av$$

e portanto :

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{g\,[F(x)+tAv] - g\,[F(x)]}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{g\,[F(x)+tv] - g\,[F(x)]}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+tv)-f(x)}{t} = f'(x,v) \leq f^o(x;v).$$

Portanto $f'$ existe e estabeleceu-se a desigualdade oposta à estabelecida no teorema,$f^o(x;v) \leq g^o\,[F(x), Av] = f'(x;v)$

Então a igualdade verifica-se entre $f^o(x;v)$ e $f'(x,v)$ , pelo que $f$ é regular e

$$\partial f(x) = \partial g\,[F\,(x)] \circ D_S F(x).$$

**ii)-** Suponha-se agora que $F$ aplica qualquer vizinhança de $x$ em um conjunto que é denso numa vizinhança de $F(x)$. Isto permite escrever :

$$g^o\,[F(x); Av] = \limsup_{\substack{y \to F(x) \\ t \to 0^+}} \frac{g(y+tAv) - g(y)}{t} =$$

$$= \limsup_{\substack{x' \to x \\ t \to 0^+}} \frac{g\left[F(x') + tAv\right] - g\left[F(x')\right]}{t}$$

$$= \limsup_{\substack{x' \to x \\ t \to 0^+}} \left\{ \frac{g\left[F(x') + tv\right] - g\left[F(x')\right]}{t} + \right.$$

$$\left. + \frac{g\left[F(x') + tAv\right] - g\left[F(x'+tv)\right]}{t} \right\}.$$

Como $g$ é localmente lipschitziana em $F(x)$ vem que :

$$\left|g\left[F(x') + tAv\right] - g\left[F(x') + tv\right]\right| \leq K\left\|F(x') + tAv - F(x'+tv)\right\| =$$

$$K\left\|tAv - \left[F(x'+tv) - F(x')\right]\right\| = Kt\left\|Av - \frac{F(x'+tv)-F(x')}{t}\right\|$$

$$t \to 0^+ \Rightarrow \frac{F(x' + tv) - F(x')}{t} \to F(x'; v) = Av.$$

Portanto :

$$\limsup_{\substack{x' \to x \\ t \to 0^+}} \frac{g\left[F(x' + tv) - g\left[\, F(x')\right]\right.}{t} =$$

$$= \limsup_{\substack{x' \to x \\ t \to 0^+}} \frac{f(x' + tv) - f(x')}{t} = f^o(x; v).$$

Portanto, $g^o\,[F(x); Av] = f^o(x; v)$

Portanto estabelecemos a igualdade desejada das funções de suporte, embora agora $f$ não seja regular.

■

# III EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES

## 1. MENSURABILIDADE

Historicamente,quando se iniciou o estudo da Teoria da Medida já tinha sido feito o estudo das funções em espaços abstractos, os espaços topológicos. Nos espaços topológicos interessa-nos uma determinada classe de conjuntos chamada topologia.

Uma topologia serve, por exemplo, para estudar funções contínuas, mas não é adequada para que se possa medir convenientemente.

Não é possível definir uma medida sobre todos os subconjuntos do espaço inicial dado.Pretende-se, analogamente à topologia, estabelecer uma classe adequada de conjuntos na qual a medida exista.

DEFIN.1.1 Seja um espaço dado $X$ .Uma topologia sobre $X$ é uma família $T$ de subconjuntos $A_i$ de $X$ tal que :

$T_1)$ $\emptyset \in T, \quad X \in T$

$T_2)$ $\bigcap\limits_1^n A_i \in T$ se $A_i \in T$ ( intersecção finita )

$T_3)$ $\bigcup\limits_\alpha A_i \in T$ se $A_i \in T$ ( reunião qualquer )

Suponhamos que queremos definir uma função de medida apenas na classe $T$ .Seja $m$ essa função e suponha-se que $m(X) < +\infty$ .

Dado um conjunto $A \in T$ a medida $m(A)$ pode definir-se sem problemas, mas a medida $m(X \setminus A)$ não fica bem definida porque $(X \setminus A) \notin T$. No entanto é desejável que possamos atribuir uma medida a $X \setminus A$ e seria interessante até que fosse igual a $m(X) - m(A)$.

Estas observações levam-nos a considerar que a classe de conjuntos na qual a medida deve ser definida, deverá ser fechada para a complementação.

Chega-se à conclusão que a família de subconjuntos de $X$ não pode ser apenas $T$ , mas deve satisfazer os axiomas de definição de uma tribo ( ou álgebra $\sigma$ ).

DEFIN.1.2 Uma família $\mathcal{A}$ de subconjuntos $A_i$ de $X$ chama-se uma tribo se satisfizer :

TR1) $\emptyset \in \mathcal{A}$

TR2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow (X - A) \in \mathcal{A}$

TR3) $A_i \in \mathcal{A},\ i = 1, 2, 3, \ldots \Rightarrow \bigcup\limits_{i \geq 1} \in \mathcal{A}$ ( reunião numerável )

Portanto $X = (X \setminus \emptyset) \in \mathcal{A}$ e $\bigcap\limits_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{A}$

O par $(X, \mathcal{A})$ chama-se um espaço mensurável e os elementos de $\mathcal{A}$ chamam-se conjuntos mensuráveis.

DEFIN. 1.3 A menor tribo que contém a topologia $T$ sobre $X$ chama-se tribo boreliana de $X$

DEFIN. 1.4 Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável.
Uma aplicação $m : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ chama-se medida positiva se :

M.1) não for identicamente igual a $+\infty$;

M.2) se para qualquer sucessão de conjuntos disjuntos dois a dois $\{A_i\} \subset \mathcal{A}$ se verificar a aditividade numerável, mais precisamente

$$\text{se } A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{para } i \neq j \text{ ,então } m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i).$$

OBSERVAÇÕES :

Se $m(X) < +\infty$ a medida diz-se finita.

Se $X = \bigcup_{i \geq 1} A_i$ ( reunião numerável ) e $m(A_i) < +\infty, A_i \in \mathcal{A}$, diz-se que a medida é $\sigma$ - finita.

Ao terno $(X, \mathcal{A}, m)$ chama-se um espaço de medida.

A tribo $\mathcal{A}$ diz-se completa em relação à medida $m$ se para cada conjunto $A \in \mathcal{A}$ tal que $m(A) = 0$ , qualquer subconjunto $A' \subset A$ é ainda elemento de $\mathcal{A}$ .

Pode então dizer-se que $(X, \mathcal{A}, m)$ é um espaço de medida, completo, $\sigma$-finito, se $m$ for uma medida $\sigma$-finita tal que $\mathcal{A}$ é completa.

DEFIN. 1.5 Uma aplicação $m_e$ definida numa classe de subconjuntos de $X$ e com valores em $[0, +\infty]$ diz-se uma medida exterior se :

ME 1) $m_e(\emptyset) = 0$.

ME 2) se para qualquer sucessão de conjuntos disjuntos dois a dois $\{A_i\} \subset \mathcal{A}$ se verificar a subaditividade numerável, mais precisamente

$$\text{se } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ para } i \neq j \text{ , então } m_e\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m_e(A_i).$$

Prova-se em Teoria da Medida que se partirmos de uma função de conjunto aditiva numa estrutura algébrica simples ( por exemplo, um semi-anel, ( Apêndice A2, [14])) é sempre possível chegar à definição de uma medida sobre uma tribo.

Pela sua utilidade deixamos aqui o enunciado de um teorema que reune algumas propriedades úteis da medida.

TEOREMA 1.6

Seja $(X, \mathcal{A}, m)$ um espaço de medida.
Então :

**1)** $m(\emptyset) = 0$

**2)**-Se $A \subset B$ , $A, B \in \mathcal{A}$, então $m(A) \leq m(B)$.

**3)**-Para uma sucessão qualquer $\{A_n\} \subset \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$, tem-se que

$$m(\underset{n}{\cup} A_n) \leq \sum_n m(A_n).$$

**4)**- Se $A_n \to A$ então $\lim_{n\to\infty} m(A_n) = m(A)$ .

**OBS.**:Define-se

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad , \quad \liminf_{n\to\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Se estes limites forem iguais entre si e iguais a $A$ então define-se $A = \lim_{n\to\infty} A_n$.

Nos problemas de optimização trabalha-se normalmente com a medida de Lebesgue,que é uma medida exterior. Esta medida está na base da definição do integral de Lebesgue.

DEFIN. 1.7 : A medida de Lebesgue de um intervalo $(a, b)$ em $\mathbb{R}$ ,$b > a$ , é o seu comprimento :

$$m(a, b) = b - a.$$

A medida de Lebesgue de um conjunto elementar $E$ ( igual à reunião finita de intervalos disjuntos dois a dois ) é :

$$E = \overset{n}{\underset{K=1}{\cup}} I_K \quad , \quad m(E) = \sum_{K=1}^{K.} m(I_K).$$

A medida de Lebesgue de um conjunto arbitrário $A \subset \mathbb{R}$ é

$$m(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i), I_i \in \mathcal{F} \right\}$$

onde o ínfimo é tomado em $\mathcal{F}$ , família finita ou numerável de intervalos $I_i$ que cobrem $A : A \subset \cup I_i$ .

DEFIN. 1.8- Um conjunto $A$ de medida exterior finita diz-se mensurável segundo Lebesgue se para todo o $\varepsilon > 0$ existir um conjunto elementar $B$ tal que

$$m(\{A \setminus B\} \cup \{B \setminus A\}) < \varepsilon.$$

Um conjunto $A$ de medida exterior infinita diz-se mensurável segundo Lebesgue se $A$ for a reunião de uma infinidade numerável de conjuntos mensuráveis segundo Lebesgue, cada um de medida exterior finita e disjuntos dois a dois.

A extensão das definições **1.7** e **1.8** a $\mathbb{R}^n$ é válida e segue os mesmos raciocínios que para $n = 1$.

Consideremos agora que $Y$ é um espaço métrico completo e separável, classe que contém os espaços de Banach separáveis,os espaços de Lebesgue $L^p$ e os espaços de Sobolev $W^{m,p}$ com $p \in [1, +\infty[$, (Apêndice A2, [15]).

DEFIN. **1.9** Seja um espaço de medida $(X, \mathcal{A}, m)$ . Uma aplicação $f : X \to Y$ diz-se mensurável ( mais precisamente, $\mathcal{A}$ - mensurável ) se para todo o aberto $O \subset Y$ for verdade que $f^{-1}(O) \in \mathcal{A}$. De modo equivalente se pode dizer que $f$ é mensurável se para todo o fechado $F \subset Y$ for verdade que $f^{-1}(F) \in \mathcal{A}$.

Uma aplicação diz-se simples se assumir apenas um número finito de valores. Uma aplicação simples é mensurável se e só se para todo o $y \in Y$ for verdade que $f^{-1}(y) \in A$ e $A \in \mathcal{A}$ .

Para a verificação da mensurabilidade de uma aplicação é útil o seguinte Teorema.

TEOREMA **1.10** ([2] ,pág.307)

São equivalentes as seguintes condições :

**1)** $f$ é $\mathcal{A}-$ mensurável

**2)** $f$ é o limite pontual de aplicações mensuráveis simples.

**3)** $f$ é o limite uniforme de aplicações mensuráveis que assumem um número contável de valores.

**OBS**.Como o limite uniforme implica o limite pontual, pode dizer-se que o limite pontual de aplicações mensuráveis é mensurável.

Neste trabalho indicaremos por $\mathcal{B}$ a tribo de Borel de um espaço topológico ( DEFIN. **1.3** ).

Pode pensar-se nesta tribo como sendo gerada pelos subconjuntos fechados : intervalos compactos em $\mathbb{R}$ , conjuntos topologicamente fechados em $\mathbb{R}^n$. Se $B \in \mathcal{B}$ , $B$ diz-se um subconjunto de Borel ou boreliano.

DEFIN. **1.11**

Uma aplicação $f$ com valores em $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ diz-se uma função de Borel se $f^{-1}(F)$ for subconjunto de Borel, $f^{-1}(F) \in \mathcal{B}$ ,para todo o fechado $F \subset \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

As funções contínuas são funções de Borel e as funções de Borel são mensuráveis.

Portanto, as funções contínuas são mensuráveis.

Outro critério útil de mensurabilidade de uma aplicação é-nos fornecido pelo teorema de Lusin.

TEOREMA **1.12** (LUSIN)

Uma função $f : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ é mensurável se e só se para todo o compacto $K \subset \Omega$ e todo o $\varepsilon > 0$ , existir um compacto $K_\varepsilon \subset K$ t.q.

$$m(K \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon \quad \text{e} \quad f\,|_{K\varepsilon} \quad \text{é contínua.}$$

## 2. INTEGRANDOS NORMAIS

Os integrandos do cálculo das variações são funções de várias variáveis com papéis diferentes ; estes integrandos são, na maior parte dos casos, mensuráveis em relação a algumas variáveis e $SCI$ em relação a outras.

DEFIN. **2.1** :

Seja $B \subset \mathbb{R}^p, B \in \mathcal{B}; \Omega \subset \mathbb{R}^n$ , $\Omega$ mensurável.

Uma aplicação $f : \Omega \times B \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ chama-se um integrando normal se :

**i)** $f(x, \cdot)$ é $SCI$ em $B$ , para quase todo o $x \in \Omega$,

**ii)** existe uma função de Borel ( mensurável )
$\tilde{f}: \Omega \times B \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ t.q.
$\tilde{f}\,(x, \cdot) = f(x, \cdot)$ , para quase todo o $x \in \Omega$.

**OBS.** Recorde-se que $F : V \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ é $SCI$ se para todo o $u \in V$ for fechado o conjunto

$$\{u \in V : F(u) \leq a\} \text{ , para todo o } a \in \mathbb{R}$$

Uma primeira consequência da definição é que $\forall a \in B, f(\cdot, a)$ é mensurável em $\Omega$ . De facto existe $\tilde{f}\,(\cdot, a) = f(\cdot, a), \tilde{f}$ função de Borel para quase todo o $x \in \Omega$ e $\tilde{f}$ é mensurável.

Se $u$ for uma aplicação mensurável $u : \Omega \to B$ , a função $x \longmapsto f\,[x, u\,(x)]$ ou seja $f(\cdot, u\,(\cdot))$ é mensurável em $\Omega$ . De facto, será igual quase sempre à função $x \longmapsto \tilde{f}\,[x, u\,(x)]$ que é mensurável .

Note-se que esta propriedade não seria satisfeita se em vez de supormos que $f$ é integrando normal apenas aceitássemos que $f$ era mensurável em $x$ e $SCI$ em $a$ .

Porém, veremos adiante que as funções mensuráveis em $x$ e contínuas em $a$ são integrandos normais.

São consequências da DEFIN. **2.1** as seguintes propriedades :

TEOREMA **2.2** ([8] ,pág.232)

**i)** se $f$ é integrando normal então $\lambda f$ é integrando normal, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

**ii)** se $f, g$ são integrandos normais, então $(f+g)$ e $\inf(f,g)$ são integrandos normais.

**iii)** se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma família numerável de integrandos normais então $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ é um integrando normal.

O estudo dos integrandos normais apoia-se na seguinte caracterização que é um teorema de LUSIN , "uniforme" na segunda variável.

TEOREMA **2.3** :

Seja $B \subset \mathbb{R}^p$ , $B \in \mathcal{B}$ e seja uma função $f : \Omega \times B \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ , $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Então $f$ é integrando normal se e só se para todo o compacto $K \subset \Omega$ e todo o $\varepsilon > 0$ existir um compacto $K_\varepsilon \subset K$ t.q.

$$m(K \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon \qquad \text{e} \qquad f|_{K_\varepsilon \times B} \text{ é } SCI.$$

**OBS.** em relação ao Teorema de Lusin que caracteriza a mensurabilidade de $F : \Omega \to \mathbb{R}$ , aqui $f$ é $SCI$ em vez de contínua e a "uniformidade" advém de a $SCI$ se verificar em todo o $B$ .

**dem.**

a) **Condição suficiente**

Seja $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ , $K' = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} K_{\frac{1}{n}}$ , $K' \subset K \subset \Omega$ , $K$ compacto.

Então $m(K \setminus K') = 0$ , $K' \in \mathcal{B}$, $f$ é de Borel em $K' \times B$ e $f(x,\cdot)$ é $SCI$ , $\forall x \in K'$ .

Então $f$ é um integrando normal..

$K' \in \mathcal{B}$ por ser a reunião numerável de fechados.

$f$ é de Borel em $K' \times B$ pois $K' \in \mathcal{B}$ , $B \subset \mathbb{R}^p$e $f^{-1}(F) \in \mathcal{B}$ para todo o fechado $F \subset \mathbb{R}$.

$f(x,\cdot)$ é $SCI$ pois para todo o $a \in \mathbb{R}$ é fechado o conjunto $\{b \in B : f(x,b) \leq a\}$ .Portanto $f$ é um integrando normal.

b) Condição necessária

Admitamos que $f$ é integrando normal. Começamos por modificar $f$ num boreliano de $\Omega$ , com medida nula, de modo que $f(x,\cdot)$ seja $SCI$ para todo o $x \in \Omega$ e $f$ seja de Borel em todo o $\Omega \times B$.

Usando, se necessário, um isomorfismo de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ sobre $[0,1]$ podemos supor que $f$ tem os seus valores em $[0,1]$.

Sendo $B$ um subespaço de $\mathbb{R}^p$, $B$ possui uma base numerável $\mathcal{U}$ de subconjuntos abertos,( Apêndice A2, [16]) .

Seja $\Phi$ a família de funções $SCI$ $\varphi : B \to [0,1]$ definida por :

$$\Phi = \{\varphi = k \cdot \mathbf{1}_U \quad U \in \mathcal{U} \quad , k \in \mathbb{Q}, \quad 0 \leq k \leq 1\},$$

onde $\mathbf{1}_U\ (x)$ é a função característica de $U$ (Apêndice A2, [17]) .

Claramente a família $\Phi$ é numerável e para todas as funções $SCI$ $h : B \to [0,1]$ , tem-se

$h = \sup\{\varphi : \varphi \in \Phi \text{ e } \varphi \leq h\}$ .

Fazendo $\Phi = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ podemos definir :

$$E_n = \{x \in \Omega : f(x,\cdot) \geq \varphi_n(\cdot)\}$$
$$G_n = \{(x,a) \in \Omega \times B : f(x,a) < \varphi_n(a)\}.$$

Como $f$ é de Borel e $\varphi_n$ é $SCI$ ,$G_n$ é um boreliano de $\Omega \times B$ .

A projecção de $G_n$ sobre $\Omega$ que é o complementar de $E_n$ ,é assim mensurável. Logo $E_n$ é mensurável em $\Omega$ .

Agora, para todo o $x \in \Omega$ , $f(x,\cdot)$ é aplicação $SCI$, $B \to [0,1]$ ,

$$f(x,a) = \sup_{n \in \mathbb{N}} [\varphi_n(a)\mathbf{1}_{E_n}(x)].$$

De facto , se $x \in E_n$ , $\mathbf{1}_{E_n} = 1$ e $f(x,\cdot) \geq \varphi_n(\cdot)$ ; se $x \notin E_n$, $\mathbf{1}_{E_n} = 0$ ( elimina-se a possibilidade de ser $f(x,a) < \varphi_n(a)$) .

Se forem dados o compacto $K \subset \Omega$ e o número $\varepsilon > 0$ , escolhemos, para todo o $n \in \mathbb{N}$ e pelo teorema de LUSIN , um compacto $K_n \subset K$ tal que $m(K \setminus K_n) \leq \varepsilon \frac{1}{2^{n+1}}$ e a restrição $\mathbf{1}_{E_n}|_{K_n}$ é contínua.

Seja $K_\varepsilon = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Kn$ . Então $m(K \setminus K_\varepsilon) \leq \varepsilon$ e a restrição $\varphi_n \mathbf{1}_{E_n}|_{K_\varepsilon \times B}$ é $SCI$ para todo o $n$ .

Como $f$ é o supremo dos $\varphi_n \mathbf{1}_{E_n}$ , a sua restrição a $K_\varepsilon \times B$ é $SCI$ .

∎

DEFIN. 2.4 : Seja $C \subset \Omega \times B$, $C$ de Borel.
A função indicatriz $f$ de $C$ é :

$$f(x,a) = \begin{cases} 0, & (x,a) \in C \\ +\infty, & (x,a) \notin C \end{cases}$$

A função indicatriz $f$ de $C$ é um integrando positivo normal.

De facto $f$ é de Borel pois qualquer que seja o fechado $F \subset \overline{\mathbb{R}}$ teremos $f^{-1}(F) \in \mathcal{B}$.

Para se ver que $f$ é $SCI$ considere-se a sucessão $(u_n)$ em $B$ tal que $u_n \to a \in C$ e $a \geq 0$.

Então :

$$0 = f(x,a) \leq \lim_{u_n \to a} u_n$$

Para $b < 0$, $b \in C$, tem-se :

$$\{a \in B : f(x,a) \leq b\} = \emptyset$$

e $\emptyset$ é fechado.

Definindo, para quase todo o $x \in \Omega$ ,

$$C_x := \{a \in B : (x,a) \in C\}$$

e admitindo que $C_x$ é fechado em $C$ podemos afirmar, para todas as aplicações mensuráveis $u : \Omega \to B$, a equivalência das seguintes condições :

**2.1)** $(x, u(x)) \in C \quad q.s.$

**2.2)** $u(x) \in C_x \quad q.s.$

**2.3)** $\int_\Omega f\,[x, u(x)]\,dx < +\infty$ , $f$ indicatriz de $C$

DEFIN. 2.5

Seja $B \subset \mathbb{R}^p$, $B$ subconjunto de Borel.

Uma aplicação $f : \Omega \times B \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ diz-se uma função de Carathéodory se :

**i)** $f(x, \cdot)$ é contínua em $B$, para quase todo o $x \in \Omega$

**ii)** $f(\cdot, a)$ é mensurável em $\Omega$, para todo o $a \in B$.

<u>TEOREMA **2.6**</u> :

Toda a função de Carathéodory é um integrando normal.

<u>**dem**</u> Modificando $f$ num boreliano de $\Omega$ com medida nula e usando um isomorfismo de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ sobre $[0,1]$ , podemos supor que $f$

- é mensurável em $x$ , para todo o $a$
- é contínua em $a$ , para todo o $x$
- toma valores em $[0,1]$ .

Introduzimos de novo uma base numerável $\mathcal{U}$ de $B$ constituída por abertos e também a família $\Phi$ de funções $SCI$ $\varphi : B \to [0,1]$ definida por

$$\Phi = \{k\mathbf{1}_U : U \in \mathcal{U}, k \in \mathbb{Q}, 0 \leq k \leq 1\}$$

Para todas as funções $SCI$ , $h : B \to [0,1]$ , temos

$$h = \sup\{\varphi \in \Phi : \varphi \leq h\}.$$

Agora introduzimos um conjunto $\mathcal{F}$ numerável e denso em $B$ .

Numerando $\Phi = \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ , escrevemos para todo o $n \in \mathbb{N}$ e todo o $a \in \mathcal{F}$ :

$$E_{n,a} = \{x \in \Omega : f(x,a) \geq \varphi_n(a)\}.$$

Como $f(\cdot, a)$ é mensurável, $E_{n,a}$ é mensurável e portanto

$$E_n = \bigcap_{a\in\mathcal{F}} E_{n,a}$$
$$E_n = \{x \in \Omega : f(x,a) \geq \varphi_n(a), \forall a \in \mathcal{F}\}.$$

Por outro lado $f(x,\cdot)$ é contínua ,$\varphi_n$ é $SCI$ e $\mathcal{F}$ é denso por toda a parte em $B$ . Então :

$$E_n = \{x \in \Omega : f(x,a) \geq \varphi_n(a), \forall a \in B\}.$$

Pela definição da família $\Phi$ :

$$f(x,a) = \sup_{n\in\mathbb{N}} [\varphi_n(a) \cdot \mathbf{1}_{En}(x)].$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um boreliano $C_n \subset \Omega$ , tal que $\mathbf{1}_{En} = \mathbf{1}_{Cn}$ , *q.s.*.

Seja

$$\tilde{f}(x,a) = \sup_{n\in\mathbb{N}} [\varphi_n(a) \cdot \mathbf{1}_{Cn}(x)] .$$

A função $\tilde{f}$ é de Borel em $\Omega \times B$ por ser o supremo de funções de Borel e $f(x,\cdot) = \tilde{f}(x,\cdot)$ para quase todo o $x$ .A $SCI$ de $f$ em $B$ é assegurada por $(i)$ da Definição **2.5.**

■

A caracterização das funções de Carathéodory é feita pelo teorema que se segue

TEOREMA **2.7** :*(SCORZA-DRAGONI)* ([8],pág.235)

Uma aplicação $f : \Omega \times B \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ é uma função de Carathéodory se e só se para todo o compacto $K$ e todo o $\varepsilon > 0$ existir um compacto $K_\varepsilon \subset K$ *t.q.*

$$m(K \setminus K_\varepsilon) \leq \varepsilon \quad \text{e} \quad f|_{K_\varepsilon \times B} \text{é contínua.}$$

Façamos agora $B = \mathbb{R}^p$ e consideremos um integrando normal

$$f : \Omega \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} .$$

DEFIN. **2.8**

Para todo o $x$ fixo, $x \in \Omega$ , chama-se polar ou função polar de $f(x,\cdot)$ a uma aplicação $f^*$ definida por

$$f^* : (\mathbb{R}^p)^* \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$
$$f^*(x,\xi^*) = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^p} \{\langle \xi, \xi^* \rangle - f(x,\xi)\}$$
$$\xi^* : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R} \quad .$$

Chama-se bipolar de $f(x,\cdot)$ à aplicação $f^{**} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$

$$f^{**}(x,\xi) = \sup_{\xi^*\in(\mathbb{R}^p)^*} \{\langle \xi, \xi^* \rangle - f^*(x,\xi^*)\} .$$

É útil o seguinte resultado :

TEOREMA **2.9** :([8] , pág 237)

Seja um integrando normal $f : \Omega \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$
Então $f^*$ e $f^{**}$ são integrandos normais em $\Omega \times \mathbb{R}^p$.

## 3. SEMICONTINUIDADE INFERIOR DE INTEGRAIS

Começamos por uma consequência do Lema de Fatou, que será muito útil mais adiante.

TEOREMA **3.1** :

Seja $f : \Omega \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ um integrando positivo normal ,$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de aplicações mensuráveis $u_n : \Omega \to \mathbb{R}^p$ , $u_n \to \overline{u}$ $q.s.$ em $\Omega$. Então :

$$\int_\Omega f[x, \overline{u}(x)]\, dx = \int_\Omega f\left[x, \lim_{n\to\infty} u_n(x)\right] dx \leq$$
$$\leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f[x, u_n(x)]\, dx.$$

**dem.** Temos uma sucessão de funções mensuráveis positivas às quais podemos aplicar o Lema de FATOU, nomeadamente :

$$\int_\Omega \lim_{n\to\infty} f[x, u_n(x)]\, dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f[x, u_n(x)]\, dx.$$

Mas $f(x.\cdot)$ é $SCI$ para quase todo o $x \in \Omega$ por ser integrando normal :

$$f[x, \overline{u}(x)] \leq \liminf_{n\to\infty} f[x, u_n(x)] \text{ q.s. em } \Omega.$$

Substituíndo no lema de Fatou :

$$\int_\Omega f[x, \overline{u}(x)]\, dx \leq \int_\Omega f\left[x, \lim_{n\to\infty} u_n(x)\right] dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f[x, u_n(x)]\, dx.$$

■

COROLÁRIO **3.2** :

Seja $f : \Omega \times \mathbb{R}^p \to [0, +\infty]$ um integrando normal positivo e

$$F(u) = \int_\Omega f[x, u(x)]\, dx \quad , \quad F : L^\alpha(\Omega) \to \mathbb{R}.$$

Então $F$ é positivo e $SCI$ para todo o $\alpha \in [1, +\infty[$.

**dem**

$$F(\overline{u}) = \int_\Omega f[x, \overline{u}(x)]\, dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f[x, u_n(x)]\, dx = \liminf_{n\to\infty} F(u_n)$$

■

Faremos aqui o enunciado de um teorema importante relativo à $SCI$ de $F(u)$, com hipóteses específicas. Pela sua extensão, assente em onze lemas auxiliares, a demonstração será apresentada no apêndice A.1.

TEOREMA **3.3** :([7])

Seja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função tal que :

**a)** $\forall s \in \mathbb{R},\ \forall p \in \mathbb{R}^n\ :\ f(s,p) \geq 0.$

**b)** $\forall p \in \mathbb{R}^n,\quad f(\cdot,p)$ é mensurável em $\mathbb{R}$.

**c)** $\forall s \in \mathbb{R},\quad f(s,\cdot)$ é convexa em $\mathbb{R}^n$.

**d)** $\forall s \in \mathbb{R},\quad f(s,0)$ é $SCI$.

**e)** $\alpha_f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

$$\alpha_f(s) = \limsup_{p \to 0} \frac{[f(s,0) - f(s,p)]^+}{|p|}.$$

Então, para todo o $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ a função $x \mapsto f\left[u(x), Du(x)\right]$ é mensurável e o funcional $F(u) = \int f(u, Du)dx$ é $SCI$ em $W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ relativamente à topologia induzida por $L^1_{loc}(\Omega)$ .

**OBS.**:A notação $[f(s,0) - f(s,p)]^+$ significa o máximo de $\{0, f(s,0) - f(s,p)\}$

## 4. COMPACIDADE FRACA EM $L^1(\Omega)$

Começamos por enunciar o teorema que caracteriza os subconjuntos compactos de $L^1(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}^n$.

TEOREMA **4.1** :([8], pág 239 )

Seja o subconjunto $\mathcal{F} \subset L^1(\Omega)$.Então as seguintes condições são equivalentes entre si :

**a)**-de qualquer sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ podemos extrair uma subsucessão fracamente convergente em $L^1$ : $u_{n_k} \rightharpoonup \overline{u} \in L^1$.

**b)**-para todo o $\varepsilon > 0$ existe $\lambda > 0$ *t.q.*

$$\forall u \in \mathcal{F} \quad , \quad \int_{\{|u| \geq \lambda\}} |u(x)|\, dx \leq \varepsilon$$

c)-para todo o $\varepsilon > 0$ existe um $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\int_B |u(x)| \leq \varepsilon$, para todo o $u \in \mathcal{F}$ e para todo o conjunto mensurável tal que $m(B) \leq \delta$.

d)-Existe uma função de BOREL ( mensurável) positiva $\Phi$ : $[0, +\infty[ \to [0, +\infty]$ $t.q.$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = +\infty$$

$$\text{e} \quad \sup_{u \in \mathcal{F}} \int \Phi\left[|u(x)|\right] < +\infty.$$

<u>**Obs**</u> A condição **(b)**.define a chamada EQUIINTEGRABILIDADE. A equivalência $(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c)$ constitui o critério de compacidade de DUNFORD-PETTIS.

A equivalência $(b) \Leftrightarrow (d)$ deve-se a VALLÉE-POUSSIN.

<u>LEMA **4.2**</u> : A função $\Phi$ da alínea **(d)** pode supor-se convexa, crescente, $SCI$ .

<u>**dem**</u>. dizer que $\lim_{t \to +\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = +\infty$ significa que para todo o $m \in \mathbb{R}$ $\Phi$ admite um minorante afim de declive $m$ .

Então como o bipolar $\Phi^{**}$é o maior minorante convexo de $\Phi$ , também $\Phi^{**}$admite, para qualquer $m \in \mathbb{R}$, um minorante afim de declive $m$ . Portanto :

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\Phi^{**}(t)}{t} = +\infty.$$

A função $\Phi^{**}$ é convexa e $SCI$ e terá o seu mínimo $\overline{a}$ em $\overline{t}$ . Por ser $\Phi^{**} \leq \Phi$ teremos :

$$\overline{a} = \inf \Phi = \min \Phi^{**} = \Phi^{**}(\overline{t}).$$

Por ser convexa, $\Phi^{**}$ decresce em $[0, \overline{t}\ ]$ e cresce em $[\ \overline{t}, +\infty[$

Vamos definir uma função $\widetilde{\Phi}$ convexa crescente e $SCI$ em $[0, +\infty[$ :

$$\widetilde{\Phi}\ (t) = \begin{cases} \overline{a}, \ t \in [0, \overline{t}\ ] \\ \Phi^{**}(t), \ t \in [\ \overline{t}, +\infty[ \end{cases}.$$

Então $\quad \widetilde{\Phi}\ (t) \leq \Phi\ (t) \quad$ e também :

$$\sup_{u \in \mathcal{F}} \int \tilde{\Phi}\left[|u(x)|\right] dx \leq \sup_{u \in \mathcal{F}} \int \Phi\left[|u(x)|\right] dx < +\infty.$$

O último passo da desigualdade é justificado pelo Teorema **4.1(d)**.
Então :

$$\sup_{u \in \mathcal{F}} \int \widetilde{\Phi}\,[|u(x)|]\,dx < +\infty.$$

Portanto $\widetilde{\Phi}$ convexa, crescente, $SCI$ ,cumpre as condições da alínea **(d)** do Teorema **4.1.**

■

O teorema **4.1** vai servir para provar que uma sucessão de funções de $L^1(\Omega)$ ,equiintegrável e convergente, tem como limite uma função integrável de $L^1(\Omega)$ .

<u>TEOREMA **4.3**</u>

Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão equiintegrável de $L^1(\Omega)$ t.q. $u_n(x) \longrightarrow u(x)$ $q.s.$ em $\Omega$

Então $u \in L^1(\Omega)$ e $u_n \to u$ em $L^1(\Omega)$.

**<u>dem.</u>**

Começamos por mostrar que $u_n$ converge fracamente em $L^1(\Omega)$ : $u_n \rightharpoonup u$ $L^1(\Omega)$.

Para tal é suficiente mostrar que podemos extrair de $(u_n)$ uma subsucessão que converge fracamente para $u$ em $L^1(\Omega)$ . Isto é possível pelo Teorema **4.1**, $(b) \Leftrightarrow (a)$ . Podemos extrair uma subsucessão $(u_{n'})$ fracamente convergente para uma função $v$ em $L^1(\Omega)$ : $u_{n'} \rightharpoonup v$.

Pelo Lema de MAZUR , ([8] ,pág, 6), se uma sucessão converge fracamente para $v$ num espaço normado então existe uma sucessão de combinações convexas que converge para $v$ em norma.(Apêndice A2, [18]) .

Podemos, por este lema, determinar uma sucessão de combinações convexas,

$$v_{n'} \in \overline{co} \bigcup_{p' > n'} \left\{u_{p'}\right\}$$

que converge para $v$ em $L^1(\Omega)$ : $v_{n'} \to v$. Podemos agora extrair uma subsucessão $v_{n''}$ que converge para $v$ quase sempre : $v_{n''}(x) \to v(x)$ $q.s.$. **(A)**

Mas , por hipótese :

$$v_{n'}(x) \in \overline{co} \bigcup_{p' > n'} \left\{u_{p'}(x)\right\} \to u(x) \ q.s.. \quad \textbf{(B)}$$

Comparando **(A)** e **(B)** resulta que $v = u$ $q.s.$ e portanto $u_n \rightharpoonup u$.

Daqui vamos deduzir que $u_n$ converge em norma. É suficiente aplicar o resultado anterior à sucessão $\{|u_n - u|\}$ .

De facto, esta sucessão é equiintegrável e converge $q.s.$ para zero. Pelo resultado anterior convergirá fracamente para zero.

Em particular :

$$\int_{\Omega} |u_n(x) - u(x)|\, dx \to 0 \Leftrightarrow \|u_n - u\|_{L_1} \to 0$$

e portanto $u_n \to u$ em norma.

■

**Obs**: Se existir uma função $a \in L^1(\Omega)$ tal que, para todo o $n \in \mathbb{N}$ se tenha $u_n(x) \leq a(x)$ $q.s$ em $\Omega$ a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será equiintegrável.

De facto, se $a \in L^1(\Omega)$ teremos sucessivamente :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : m(E) < \delta \Rightarrow \int_E |a(x)|\, dx \leq \varepsilon$$

$$\int_E |u_n(x)|\, dx \leq \int_E |a(x)|\, dx \leq \varepsilon$$

$$\int_E |u_n(x)|\, dx \leq \varepsilon.$$

Portanto $u_n$ satisfaz **(c)** do Teorema **4.1** e portanto **(c)** implica a equiintegrabilidade **(b)**.

## 5. PROPRIEDADE DA SCI DO INTEGRAL

Vamos ver o primeiro dos quatro teoremas deste capítulo que são essenciais para ademonstração de alguns resultados nos capítulos IV e V.

TEOREMA **5.1** :

Seja $f$ um integrando normal, $f : \Omega\times(\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$ e admita-se uma função
$\Phi(|\xi|) \leq f(x, s, \xi)$ ( integrando não negativo ),$\Phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ , convexa, crescente, $SCI$ tal que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\Phi(t)}{t} + \infty.$$

Admita-se ainda que $\forall (x, s) \in \Omega \times \mathbb{R}^l : f(x, s, \cdot)$ é convexa em $\mathbb{R}^m$.
Seja $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão fracamente convergente para $\overline{p}$ em $[L^1(\Omega)]^m$, $(p_n = (p_n^1, p_n^2 \ldots, p_n^m))$.
Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções mensuráveis convergente para $\overline{u}$ $q.s.$.

Então o integral $\int\limits_{\Omega} f\left[x, \overline{u}\left(x\right), \overline{p}\left(x\right)\right] dx$ é $SCI$ :

$$\int\limits_{\Omega} f\left[x, \overline{u}\left(x\right), \overline{p}\left(x\right)\right] dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} f\left[x, u_n\left(x\right), p_n\left(x\right)\right] dx \quad .(\mathbf{A})$$

**dem.** Pela hipótese $f$ é um integrando normal não negativo. Então todos os integrais terão o mesmo sinal.

Se o membro direito de $(\mathbf{A})$ assumir o valor $+\infty$ , a desigualdade é trivial. Se isto não acontecer, podemos extrair uma subsucessão e admitir que :

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} f\left[x, u_n\left(x\right), p_n\left(x\right)\right] dx = c < +\infty.$$

Vamos aplicar o Lema de MAZUR à sucessão $p_n$ a qual é fracamente convergente em $L^1$.Existe então uma sucessão de combinações convexas $\sum\limits_{k=n'}^{N} \alpha_k p_k, \alpha_k > 0,\ \sum\limits_{k=n'}^{N} \alpha_k = 1$ convergente para $\overline{p}$ em $L^1$.

Podemos então extrair uma subsucessão que converge $q, s.$ para $\overline{p}$ :
$\sum\limits_{k=n'}^{N} \alpha_k p_k(x) \to \overline{p}(x)\ q.s.$ quando $n' \to \infty.$

Fixemos um ponto $x \in \Omega$ no qual a convergência anterior ocorre e no qual $u_n\left(x\right) \to \overline{u}\left(x\right)$ quando $n \to \infty$ . Obviamente também se verifica $u_{n'}(x) \to \overline{u}(x)$ quando $n' \to +\infty$.

Em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ e para todo o $n'$ temos que :

$$\left(\sum_{k=n'}^{N} \alpha_k p_k(x),\ \sum_{k=n'}^{N} \alpha_k f\left[x, u_k(x), p_k\left(x\right)\right]\right) \in$$
$$\in co \bigcup_{k=n'}^{N} epi\ f\left[x, u_k(x), p_k(x)\right]$$

Portanto também é verdade que :

$$\left(\sum_{k=n'}^{N} \alpha_k p_k(x),\ \sum_{k=n'}^{N} \alpha_k f\left[x, u_k(x), p_k\left(x\right)\right]\right) \in$$
$$\in co \bigcup_{q\geq n'} epi\ f\left[x, u_q(x), p_q(x)\right]$$

Seja $n'_o$ suficientemente grande para que se tenha $|u_q(x) - \overline{u}(x)| \leq \varepsilon$ para todo o $q \geq n'_o, \varepsilon > 0$.

Então para todo o $n' \geq n'_o$ virá :

$$\left(\sum_{k=n'}^{N} \alpha_k p_k(x), \sum_{k=n'}^{N} \alpha_k f\left[x, u_k(x), p_k(x)\right]\right) \in$$
$$\in co \bigcup_{|s-\overline{u}(x)|\leq\varepsilon} epi\ f\left[x, s, p_k(x)\right]$$

Fazendo $n' \to \infty$ e utilizando o resultado anterior ,

$$\sum_{k=n'}^{N} \alpha_k p_k(x) \to \overline{p}(x) \qquad q.s. \text{ quando } n' \to \infty$$

vem que :

$$\left(\overline{p}(x), \liminf_{n'\to\infty} \sum_{K=n'}^{N} \alpha_k f\left[x, u_k(x), p_k(x)\right]\right) \in$$
$$\in \overline{co} \bigcup_{|s-\overline{u}(x)|\leq\varepsilon} epi\ f\left[x, s, p_k(x)\right]$$

e como isto é válido para todo o $\varepsilon > 0$ :

$$\left(\overline{p}(x), \liminf_{n'\to\infty} \sum_{k=n'}^{N} \alpha_k f\left[x, u_k(x), p_k(x)\right]\right) \in$$
$$\in \bigcap_{\varepsilon>o} \overline{co} \bigcup_{|s-\overline{u}(x)|\leq\varepsilon} epi\ f\left[x, s, p_k(x)\right] \qquad \textbf{(B)}$$

Mas, ([8] , pág.243) :

$$\bigcap_{\varepsilon>o} \overline{co} \bigcup_{|s-\overline{s}|\leq\varepsilon} epi\ f\left(x, s, \cdot\right) = \overline{co}\ epi\ f(x, \overline{s}, \cdot)$$

pelo que podemos escrever :

$$\bigcap_{\varepsilon>o} \overline{co} \bigcup_{|s-\overline{u}(x)|\leq\varepsilon} epi\ f\left(x, s, \cdot\right) = \overline{co}\ epi\ f\left[x, \overline{u}(x), \cdot\right].$$

Mas $f\left[x, \overline{u}(x), \cdot\right]$ é convexa na última variável e $SCI$ , pela hipótese, e portanto o seu epigráfico é convexo e fechado, o que dispensa a escrita $\overline{co}$.

Reescrevendo **(B)** :

$$\left(\overline{p}(x), \liminf_{n'\to\infty} \sum_{k=n'}^{N} \alpha_k f\left[x, u_k(x), p_k(x)\right]\right) \in$$
$$\in epi\ f\left[x, \overline{u}(x), \cdot\right].$$

e isto significa, por definição :

$$f\left[x,\overline{u}(x),\overline{p}(x)\right] \leq \liminf_{n'\to\infty} \sum_{k=n'}^{N} \alpha_k f\left[x,u_k(x),p_k\left(x\right)\right].$$

Agora integramos ambos os membros da desigualdade, em $\Omega$ :

$$\int_\Omega f\left[x,\overline{u}(x),\overline{p}(x)\right]dx \leq$$

$$\int_\Omega \liminf_{n'\to\infty} \sum_{k=n'}^{N} \alpha_k f\left[x,u_k(x),p_k\left(x\right)\right]dx.$$

Como todos os integrandos são positivos podemos aplicar o lema de FATOU :

$$\int_\Omega \liminf_{n'\to\infty} \sum_{k=n'}^{N} \alpha_k f\left[x,u_k(x),p_k\left(x\right)\right]dx \leq$$

$$\leq \liminf_{n'\to\infty} \sum_{k=n'}^{N} \alpha_k \int_\Omega f\left[x,u_k(x),p_k\left(x\right)\right]dx.$$

Portanto :

$$\int_\Omega f\left[x,\overline{u}(x),\overline{p}(x)\right]dx \leq$$

$$\leq \liminf_{n'\to\infty} \sum_{k=n'}^{N} \alpha_k \int_\Omega f\left[x,u_k(x),p_k\left(x\right)\right]dx.$$

Admitimos anteriormente que :

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f\left[x,u_n(x),p_n\left(x\right)\right]dx = c < +\infty.$$

Então, para todo o $\varepsilon > o$ e $n'$ adequado :

$$c-\varepsilon \leq \sum_{k=n'}^{N} \alpha_K \int_\Omega \left[x,u_k(x),p_k\left(x\right)\right]dx \leq c+\varepsilon$$

$$\liminf_{n'\to\infty} \sum_{k=n'}^{N} \alpha_k \int_\Omega f\left[x,u_k(x),p_k\left(x\right)\right]dx = c$$

$$\int_\Omega f\left[x,\overline{u}(x),\overline{p}\left(x\right)\right]dx \leq c = \liminf_{n'\to\infty} \int_\Omega f\left[x,u_k(x),p_k\left(x\right)\right]dx.$$

■

## 6. TEOREMA DO BIPOLAR

Se $f$ for um integrando normal que satisfaz a condição $\Phi(|\xi|) \leq f(x,s,\xi)$, mas não satisfaz a condição $\forall (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}^p, f(x,s,\cdot)$ convexa em $\mathbb{R}^m$, não podemos aplicar o teorema **5.1** de $SCI$ do integral.

Neste caso temos de recorrer a $f^{**}(x,s,\cdot)$ que é o maior minorante de $f(x,s,\cdot)$ no conjunto $\Gamma(\mathbb{R}^m)$ das funções que são supremo pontual de uma família de funções afins contínuas(Apêndice A2, [19]).

Já sabemos que $f^{**}(x,s,\cdot)$ é um integrando normal de $(\Omega \times \mathbb{R}^l) \times \mathbb{R}^m$ (teorema **2.9**) , mas não sabemos se será um integrando normal de $\Omega \times \left(\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m\right)$.

Já sabemos que $f^{**}(x,s,\cdot)$ é $SCI$ em $\xi$ , mas ainda não sabemos se $f^{**}(x,\cdot,\cdot)$ é $SCI$ em $(s,\xi)$.

<u>TEOREMA **6.1**</u> :

Seja $f : \Omega \times \left(\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m\right) \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ um integrando normal , mais precisamente $f(x,\cdot,\cdot)$ é $SCI$ para quase todo o $x \in \Omega$ e existe $\tilde{f}\,(x,\cdot,\cdot) = f(x,\cdot,\cdot)$ , $\tilde{f}$ de Borel para quase todo o $x \in \Omega$ .Além disso tem-se

$$\Phi(|\xi|) \leq f(x,s,\xi).$$

Então $f^{**}$ é um integrando normal de $\Omega \times \left(\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m\right)$ e $\Phi(|\xi|) \leq f^{**}(x,s,\xi)$.

<u>**dem.**</u> Atendendo a $\Phi(|\xi|) \leq f(x,s,\xi)$, a função convexa , $SCI$ , $\Phi(|\cdot|)$ é sempre inferior a $f(x,s,\cdot)$ .

Tomando o maior minorante em $\Gamma(\mathbb{R}^m)$ de ambos os lados da desigualdade obtemos :

$$\Phi(|\xi|) \leq f^{**}(x,s,\xi).$$

Seja um compacto arbitrário $K \subset \Omega$ e $\varepsilon > 0$.

Como $f$ é um integrando normal podemos aplicar o teorema **2.3** de caracterização dos integrandos normais para determinarmos um compacto $K_\varepsilon$ *t.q.* $K_\varepsilon \subset K \subset \Omega$ ,

$$m(K - K_\varepsilon) \leq \varepsilon \quad \text{e} \quad f_{K_\varepsilon \times \left(\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m\right)} \quad \text{é} \quad SCI$$

Sabemos ainda que

$$epi\ f^{**}(\overline{x},\overline{s}) = \overline{co}\ epi\ f(\overline{x},\overline{s})$$

Utilizando um lema conhecido ([8], pág. 241) aplicado a $f$ em $\left(K_\varepsilon \times \mathbb{R}^l\right) \times \mathbb{R}^m$ , podemos escrever :

$$\bigcap_{\varepsilon>0}\left(\overline{co}\bigcup_{\substack{|x-\overline{x}|\leq\varepsilon\\|s-\overline{s}|\leq\varepsilon}} epi\ f(x,s)\right)=\overline{co}\ epi\ f(\overline{x},\overline{s})=epi\ f^{**}(\overline{x},\overline{s})$$

Mas:

$$\overline{co}\bigcup_{\substack{|x-\overline{x}|\leq\varepsilon\\|s-\overline{s}|\leq\varepsilon}} epi\ f(x,s)\supset\overline{\bigcup_{\substack{|x-\overline{x}|\leq\varepsilon\\|s-\overline{s}|\leq\varepsilon}} epi\ f(x,s)}$$

e portanto

$$epi\ f^{**}(\overline{x},\overline{s})\supset\bigcap_{\varepsilon>0}\left(\overline{\bigcup_{\substack{|x-\overline{x}|\leq\varepsilon\\|s-\overline{s}|\leq\varepsilon}} \overline{co}\ epi\ f(x,s)}\right)$$

ou ainda , substituindo $\overline{co}\ epi\ f(x,s)$ por $epi\ f^{**}(x,s)$ ,

$$epi\ f^{**}(\overline{x},\overline{s})\supset\bigcap_{\varepsilon>0}\left(\overline{\bigcup_{\substack{|x-\overline{x}|\leq\varepsilon\\|s-\overline{s}|\leq\varepsilon}} epi^{**}\ f(x,s)}\right)$$

Seja agora uma sucessão $(x_n,s_n,\xi_n)$ , $n\in\mathbb{N}$ , convergente para $(\overline{x},\overline{s},\overline{\xi})$ em $K_\varepsilon\times\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}^m$.
Então :

$$\left((\overline{x},\overline{s},\overline{\xi}),\liminf f^{**}(x_n,s_n,\xi_n)\right)\in\bigcap_{\varepsilon>0}\left(\overline{\bigcup_{\substack{|x-\overline{x}|\leq\varepsilon\\|s-\overline{s}|\leq\varepsilon}} epi\ f^{**}(x,s)}\right)$$

$\left((\overline{x},\overline{s},\overline{\xi}),\liminf f^{**}(x_n,s_n,\xi_n)\right)\in\ epi\ \ f^{**}(\overline{x},\overline{s})$
o que significa que,

$$f^{**}(\overline{x},\overline{s},\overline{\xi})\leq\liminf f^{**}(x_n,s_n,\xi_n).$$

Mostrámos que para qualquer compacto $K\subset\Omega$ e para todo o $\varepsilon>0$ podemos determinar $K_\varepsilon\subset K$ *t.q.* $m(K-K\varepsilon)\leq\varepsilon$ e $f^{**}|_{K_\varepsilon\times\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}^m}$ é $SCI$ . Então, pelo teorema **2.3** , $f^{**}$ é um integrando normal de $\Omega\times(\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}^m)$.

■

Estamos agora em condições de enunciar uma importante extensão do teorema **5.1** ao caso não convexo.

TEOREMA 6.2 : (TEOREMA DO BIPOLAR )

Seja $f : \Omega \times (\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ integrando normal tal que

$$\Phi(|\xi|) \leq f(x, s, \xi).$$

Seja $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão fracamente convergente para $\overline{p}$ em $[L^1(\Omega)]^m$ e $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções mensuráveis convergindo $q.s.$ para $\overline{u}$ .

Então,

$$\int_\Omega f^{**}[x, \overline{u}(x), \overline{p}(x)]\, dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f[x, u_n(x), p_n(x)]\, dx$$

**dem** .
Basta aplicar o teorema **5.1** a $f^{**}$ e recordar que $f^{**} \leq f$ . Virá :

$$\int_\Omega f^{**}[x, \overline{u}(x), \overline{p}(x)]\, dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f^{**}[x, u_n(x), p_n(x)]\, dx \leq$$

$$\leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f[x, u_n(x), p_n(x)]\, dx.$$

■

## 7. A CONVEXIDADE E A EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES

Vamos formular um problema de optimização que engloba uma grande classe de problemas do cálculo das variações e vamos aplicar os resultados anteriores.

Temos como dada uma função $SCI$ , convexa, crescente, $\Phi : [0, +\infty[ \to [0, +\infty]$ $t.q$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = +\infty.$$

As classes de funções mensuráveis $p : \Omega \to \mathbb{R}^m$ ( igualdade q.s.) para as quais

$$\int_\Omega \Phi[\|p\|] < +\infty ,$$

serão indicadas por : $L^\Phi_m$.

Tem-se que $L^\Phi_m \subset [L^1(\Omega)]^m$ , $p = (p^1, \dots, p^m)$

Considera-se dado um integrando normal $f : \Omega \times (\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R} \cup +\infty$ tal que existe uma função $a \in L^1(\Omega)$ que verifica

$$a(x) + \Phi(|\xi|) \leq f(x, s, \xi).$$

Também é dado um conjunto de funções vectoriais $U \subset [L^1(\Omega)]^m$ , $U$ fracamente fechado, e uma aplicação $T : L^\Phi_m \cap U \to \left[L^\beta(\Omega)\right]^l$ , $1 \leq \beta \leq \infty, T = (T^1, \dots, T^l)$ , que satisfaz a seguinte propriedade :

<u>PROPRIEDADE 7.1:</u>

Se uma sucessão $(p_n) \subset U$ convergir fracamente para $\overline{p}$ em $[L^1(\Omega)]^m$ e se $\sup \int_\Omega \Phi \circ |p_n| < +\infty$ então podemos extrair da sucessão $(T(p_n))$ uma subsucessão que converge quase sempre para $T(\overline{p})$ .

<u>DEFIN. 7.2</u> : A aplicação $T$ chama-se um compactificador $(\Phi, \beta)$ se transformar as sucessões $(p_n)$ que convergem fracamente para $\overline{p}$ em $L^1_m$ e tais que $\int \Phi \circ p_n \leq$ constante, em sucessões $(T(p_n))$ que convergem fortemente para $T(\overline{p})$ em $L^\beta_l$ .

Um compactificador $(\Phi, \beta)$ satisfaz a propriedade **7.1.**

**<u>OBS</u>.** Se definirmos, por exemplo, $\Phi$ por $t \longmapsto t^\alpha, \alpha \in ]1, +\infty[$ então $L^\Phi_m \equiv [L^\alpha(\Omega)]^m$, que também se escreve $L^\alpha_m$.Neste caso $T$ aplica as sucessões limitadas e fracamente convergentes de $L^\alpha_m$ em sucessões fortemente, convergentes de $L^\beta_l$ . $T$ diz-se então um compactificador $(\alpha, \beta)$.

<u>TEOREMA 7.3</u> :

Seja $\alpha \in ]l, +\infty[$.

Se $T$ for uma aplicação injectiva linear contínua compacta de $L^\alpha_m$ em $L^\beta_l$ , $\beta \in [l, +\infty]$, então $T$ é um compactificador $(\alpha, \beta)$.

**<u>dem</u>.** Por definição uma aplicação injectiva linear contínua $L^\alpha_m \to L^\beta_l$ diz-se compacta se aplicar subconjuntos limitados de $L^\alpha_m$ em subconjuntos relativamente compactos de $L^\beta_l$ . A tese resulta directamente.

$\blacksquare$

<u>TEOREMA 7.4</u> :

Se $T$ for uma aplicação injectiva linear contínua $L^1_m \to L^\beta_l$ , $\beta \in ]1, +\infty]$ , então $T$ satisfaz a Propriedade **7.1.**

dem .Como $\Omega$ é limitado tem-se que $L_l^\beta(\Omega) \subset L_l^1(\Omega)$ e os conjuntos limitados de $L_l^\beta(\Omega)$ são fracamente relativamente compactos em $L_l^1(\Omega)$ .

A aplicação $T$ aplica então os conjuntos limitados de $L_m^1$ em conjuntos fracamente relativamente compactos de $L_l^1$ .

Atendendo a um teorema de GROTHENDIECK,(Apêndice A2, [20]) , $T$ aplica subconjuntos fracamente compactos de $L_m^1$ em subconjuntos compactos de $L_l^1$

Se os integrais $\int \Phi \circ |p_n|$forem uniformemente limitados então, pela equivalência $(a) \Leftrightarrow (d)$ do teorema **4.1** , de qualquer sucessão $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L_m^1$ podemos extrair uma subsucessão fracamente convergente em $L_m^1$ ou seja, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constitui um subconjunto fracamente relativamente compacto de $L_m^1$ .

Então, $T\left((p_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ constitui um subconjunto relativamente compacto de $L_l^1$ e podemos extrair uma subsucessão $T\left((p_{n_K})\right)_{k\in\mathbb{N}}$ convergente em $L_l^1$ .

Como $p_n$ converge fracamente para $\overline{p}$, $T(p_n)$ converge fracamente para $T(\overline{p})$ .

O limite da sucessão $T\left((p_{n_K})\right)_{k\in\mathbb{N}}$ em $L_l^1$ só pode ser portanto $T(\overline{p})$

Finalmente podemos extrair de $T\left((p_{n_K})\right)_{k\in\mathbb{N}}$ uma subsucessão que converge q.s.para $T(\overline{p})$.

■

Enunciamos então o problema de optimização do seguinte modo

$$\text{(P)} \qquad \inf_{p\in U\cap L_m^\Phi} \int_\Omega f\left[x, T\left[p(x)\right], p(x)\right] dx$$

que se pode escrever, com $u = T(p)$ :

$$\text{(P)} \qquad \inf_{\substack{u,p \\ p\in U\cap L_m^\Phi \\ u=T(p)}} \int_\Omega f\left[x, u(x), p(x)\right] dx$$

A partir do Teorema **5.1** vamos deduzir um critério de existência de solução para o problema (P).

<u>TEOREMA 7.5</u> :

Seja $f : \Omega \times (\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ um integrando normal t.q.

$$a(x) + \Phi\left(|\xi|\right) \leq f(x,s,\xi) \ , \ a \in L^1(\Omega),$$
$$\text{e } \forall (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}^l \ , \ f(x,s,\cdot) \text{ é convexa em } \mathbb{R}^m.$$

A aplicação $T : L_m^{\Phi} \to L_l^{\beta}$ e $U \subset \left[L^1(\Omega)\right]^m$ , $U$ fracamente fechado, satisfazem a propriedade **7.1**.

Então o problema (P) admite pelo menos uma solução $\overline{u} = T(p)$.

<u>**Dem.**</u>

Escreva-se $g(x,s,\xi) = f(x,s,\xi) - a(x)$.

$g$ é um integrando normal e satisfaz

$$\Phi(|\xi|) \leq g(x,s,\xi).$$

Para todo o par $(x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}^l$ , $g(x,s,\cdot)$ é convexa em $\mathbb{R}^m$.

Podemos então escrever :

$$\int_\Omega f\left[x,u(x),p(x)\right]dx = \int_\Omega g\left[x,u(x),p(x)\right]dx + \int_\Omega a(x)dx.$$

Observe-se que $\int_\Omega a(x)dx =$ constante.

Vamos admitir uma sucessão minimizante $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para o problema (P) e vamos escrever $u_n = T(p_n)$.

Por definição, $p_n \in U, \forall n$ e:

$$\int_\Omega g\left[x,u_n(x),p_n(x)\right]dx \to \inf(P) - \int_\Omega a(x)dx$$

De $\Phi(|\xi|) \leq g(x,s,\xi)$ deduzimos que

$$\int_\Omega \Phi \circ |p_n| \leq \text{constante}.$$

Então pelo Teorema **4.1** $((d) \Leftrightarrow (a))$podemos extrair de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma subsucessão $(p_{n'})_{n'\in\mathbb{N}}$ fracamente convergente para $\overline{p}$ em $L_m^1$ .

Como $T$ satisfaz a propriedade **7.1**.podemos extrair uma subsucessão $(p_{n''})_{n''\in\mathbb{N}}$ que converge fracamente para $\overline{p}$ em $L_m^1$ e tal que $T(p_{n''})$ converge quase sempre para $T(\overline{p})$ .

Aplicando agora o Teorema **5.1** da *SCI* :

$$\int_\Omega g\left[x,\overline{u}(x),\overline{p}(x)\right]dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega g\left[x,u_n(x),p_n(x)\right]dx,$$

com $u_n = T(p_{n''})$.

Adicionando a constante $\int_\Omega a(x)dx$ a ambos os lados da desigualdade :

$$\int_\Omega f\left[x, \overline{u}(x), \overline{p}(x)\right] dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f\left[x, u_n(x), p_n(x)\right] dx$$

e como a sucessão $(p_n)$ é, por hipótese, minimizante, vem :

$$\int_\Omega f\left[x, \overline{u}(x), \overline{p}(x)\right] dx \leq \inf(P).$$

Mas $\overline{p} \in U$ e $\overline{p}$ é o limite fraco de $p_{n''} \in U$ .
Concluimos portanto que $\overline{u} = T(\overline{p})$ é a solução do problema (P).

■

## 8. RELAXAÇÃO

Pelo que vimos na secção **7** , se $f(x, s, \cdot)$ não for convexa, não ficará garantido que o problema (P) tenha solução. Quando isto acontece associamos a (P) o chamado problema relaxado (PR).

$$\text{(PR)} \qquad \inf_{p\in U\cap L^\Phi_m} \int_\Omega f^{**}\left[x, T(p(x)), p(x)\right] dx$$

ou ainda :

$$\inf_{\substack{u,p \\ p\in U\cap L^\Phi_m \\ u=T(p)}} \int_\Omega f^{**}\left[x, u(x), p(x)\right] dx$$

Do Teorema **7.5** obtemos o seguinte resultado, atendendo a que $f^{**}$ é um integral normal e $f^{**}(x, s, \cdot)$ é convexa .

<u>TEOREMA **8.1**</u> :([8] , pág. 251)

Se $f : \Omega \times (\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ é um integrando normal t.q.

$$a(x) + \Phi\left(|\xi|\right) \leq f(x, s, \xi) \ , \ a \in L^1(\Omega)$$

e $\quad T : L^\Phi_m \to L^\beta_l, \beta \in [1, +\infty]$ é um compactificador $(\Phi, \beta)$,

$U \subset L^1$ , fracamente fechado,então o problema $(PR)$ tem pelo menos uma solução.

<u>**Obs.**</u> Como $f^{**} \leq f$ teremos sempre que $\min(PR) \leq \inf(P)$ . Ocorre imediatamente investigar em que condições se verifica a igualdade. Veremos adiante que as soluções de (PR) são os pontos de acumulação das soluções minimizantes de (P). Assim, as soluções de (PR) são soluções generalizadas de (P).

Interessa-nos estudar, em particular, o caso em que $u, p$ ocorrem separadamente no integrando, o qual será então da forma

$$g\,[x,u(x)] + f\,[x,p(x)]$$

Vamos procurar a solução do problema,

$$(\mathrm{P}') \qquad \inf_{\substack{u,p \\ p\in L_m^\alpha}} \int_\Omega \{g\,[x,u(x)] + f\,[x,p(x)]\}\,dx$$

relacionando-o com o problema relaxado.

$$(\mathrm{PR}') \qquad \inf_{\substack{u,p \\ p\in L_m^\alpha \\ u=T(p)}} \int_\Omega \{g\,[x,u(x)] + f^{**}\,[x,p(x)]\}\,dx$$

e considerando as aplicações

$$p:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$u:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^l.$$

Consideramos um aberto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .

Consideramos ainda uma aplicação contínua $T : L_m^\alpha \longrightarrow L_l^\beta$ , $\beta \in [1,+\infty]$ , sendo $T$ linear e um compactificador - $(\alpha,\beta)$.A restrição de $T$ às bolas de $L_m^\alpha$ é contínua para as topologias $\sigma\left(L^\alpha, L^{\alpha'}\right)$ e $\|.\|_\beta$.

Vamos supor que $g$ é uma função de Carathéodory em $\Omega\times\mathbb{R}^l$ e que $f$ é um integrando normal em $\Omega\times\mathbb{R}^m$.

$g$ e $f$ satisfazem ainda, por hipótese, as seguintes condições :

$\mathbf{C_1}$ $g(x,\cdot)$é convexa para quase todo o $x\in\Omega$.

$\mathbf{C_2}$ Se $\beta\in[1,+\infty[$ , existe $a_1\in L^1(\Omega)$ e $b_1\geq 0$
*t.q.* $\quad 0\leq g(x,s)\leq a_1(x)+b_1\,|s|^\beta$.

$\mathbf{C_3}$ Se $\beta=\infty$, para todo o $k>0$ existe $a_1\in L^1(\Omega)$
*t.q.* $\quad 0\leq g(x,s)\leq a_1(x)$ para $|s|\leq k$.

$\mathbf{C_4}$ Se $\alpha\in\,]1,+\infty[$ existe $a_2\in L^1(\Omega)$ e $b_2\geq 0$
*t.q.* $\quad f(x,\xi)\geq a_2(x)+b_2\,|\xi|^\alpha$.

$\mathbf{C_5}$ Se $\alpha=\infty$ , existe $a_2\in L^1(\Omega)$ e uma bola $B(0,r)\subset\mathbb{R}^m$
*t.q* $\quad .f(x,\xi)\geq a_2(x)+\delta\left(\xi\,|B\right))$.

$\mathbf{C_6}$ Existe $p_o\in[L^\infty(\Omega)]^m$ *t.q.* $\int_\Omega f\,[x,p_o(x)]<+\infty$.

Começamos pelo teorema fundamental que relaciona $(P')$ com $(PR')$.

<u>TEOREMA 8.2</u> :

Com as hipóteses $\mathbf{C_1}$ a $\mathbf{C_6}$ o problema $(P')$ tem solução e verifica-se

$$\min(PR') = \inf(P').$$

**Obs.** Precisemos o significado da tese :

Se $(\overline{u}, \overline{p}), \overline{u} = T(\overline{p})$ for uma solução de $(PR')$ , então existe uma sucessão minimizante $(u_n, p_n)$, $u_n = T(p_n)$ ,de $(P')$ tal que $u_n \to \overline{u}$ em $L_l^\beta$ e $p_n \to \overline{p}$ na topologia $\sigma(L^\alpha, L^{\alpha'})$.

Se $(u_n, p_n), u_n = T(p_n)$ , for uma sucessão minimizante de $(P')$ , então existe uma solução $(\overline{u}, \overline{p}), \overline{u} = T(\overline{p})$ de $(PR')$ e uma subsucessão $(u_{n_K})_{k\in \mathbb{N}}$ que converge para $\overline{u}$ em $L_l^\beta$ e uma subsucessão $(p_{n_K})_{k\in \mathbb{N}}$ que converge para $\overline{p}$ na topologia $\sigma(L^\alpha, L^{\alpha'})$, (Apêndice A2, [21]) .

Teremos de começar por demonstrar um resultado auxiliar.

LEMA **8.3**

Seja $g : \Omega \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory que satisfaz as condições $\mathbf{C_2}$ e $\mathbf{C_3}$ e defina-se

$$G(u) = \int_\Omega g\left[x, u(x)\right] dx$$

$$G : L_l^\beta \to \mathbb{R}$$

$$u : \Omega \to \mathbb{R}^l \quad , u = (u_1, \dots u_l), \quad u \in L_l^\beta.$$

Então $G$ é contínuo.

**dem.** aplicando o Teorema **3.1** e observando que $g$ é um integrando normal positivo,deduzimos imediatamente que $G$ é $SCI$ .Então será suficiente provar que $G$ é $SCS$ .

Seja uma sucessão $u_n$ que converge para $\overline{u}$ em $L_l^\beta$ .

Se $\beta = \infty$ tomamos $K = \sup \|u_n\|_{L^\infty}$ na expressão

$$(\mathbf{C_3}) \quad 0 \leq g(x, s) \leq a_1(x), \ |s| \leq K, \ a_1 \in L^1(\Omega).$$

Definimos um integrando normal positivo por :

$$\beta < \infty, \ h(x, s) = a_1(x) + b_1 |s|^\beta - g(x, s) \geq 0$$

$$\text{com} \qquad b_1 \geq 0, a_1 \in L^1(\Omega).$$

$$\beta = \infty, \ h(x, s) = a_1(x) - g(x, s) \geq 0.$$

Aplicando, de novo, o Teorema **3.1** a $h$ :

$$\int_\Omega h\left[x, \overline{u}(x)\right] dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega h\left[x, u_n(x)\right] dx.$$

Observando $\int\limits_{\Omega} |u_n(x)|^{\beta}\, dx \to \int\limits_{\Omega} |\overline{u}(x)|^{\beta}\, dx$ , $\beta < \infty$ e substituíndo $h$ na desigualdade :

$$\int\limits_{\Omega} \Big[a_1(x) + b_1 |\overline{u}(x)|^{\beta} - g\left[x, \overline{u}(x)\right]\Big]\, dx \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} \Big[a_1(x) + b_1 |u_n(x)|^{\beta} - g\left[x, u_n(x)\right]\Big]\, dx$$

$$\int\limits_{\Omega} a_1(x)dx + b_1 \int\limits_{\Omega} |\overline{u}(x)|^{\beta}\, dx - \int\limits_{\Omega} g\left[x, \overline{u}(x)\right] dx \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \left\{ \int\limits_{\Omega} a_1(x)dx + b_1 \int\limits_{\Omega} |u_n(x)|^{\beta}\, dx - \int\limits_{\Omega} g\left[x, u_n(x)\right] dx \right\}$$

$$b_1 \int\limits_{\Omega} |\overline{u}(x)|^{\beta}\, dx - \int\limits_{\Omega} g\left[x, \overline{u}(x)\right] dx \leq \lim_{n\to\infty} \Bigg\{ b_1 \int\limits_{\Omega} |u_n(x)|^{\beta}\, dx -$$

$$- \int\limits_{\Omega} g\left[x, u_n(x)\right] dx \ \Bigg\} .$$

Resulta :

$$- \int\limits_{\Omega} g\left[x, \overline{u}(x)\right] dx \leq \liminf_{n\to\infty} \left\{ - \int\limits_{\Omega} g\left[x, u_n(x)\right] dx \right\}$$

$$\int\limits_{\Omega} -g\left[x, \overline{u}(x)\right] dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} -g\left[x, u_n(x)\right] dx.$$

Mas uma função $G$ é $SCS$ se - $G$ for $SCI$

Portanto : $\int\limits_{\Omega} g\left[x, \overline{u}(x)\right] dx \geq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} g\left[x, u_n(x)\right] dx.$

$G$ é $SCS$ e $SCI$ , logo $G$ é contínua.

Analogamente para $\beta = +\infty$.

■

Voltamos agora à demonstração do Teorema **8.2** .

**<u>dem.</u>**

**a)** Podemos começar por admitir que existe solução de $(PR')$. De facto, pelo Teorema **7.5** e pelo Teorema **8.1** o problema $(PR')$ tem uma solução $\overline{u} = T(\overline{p})$ .

Temos então de provar que min $(PR') =$ inf $(P')$.

Pelo lema **8.3** a aplicação $u \mapsto \int\limits_{\Omega} g\left[x, u(x)\right] dx$ é contínua em $L_l^{\beta}$ .

Vamos definir uma função $G$ em $L_m^{\alpha}$ por :

$$G(p) = \begin{cases} \int\limits_{\Omega} g\left[x, Tp(x)\right] dx \ , \ \alpha \in ]1, +\infty[ \\ \int\limits_{\Omega} g\left[x, Tp(x)\right] dx + \begin{cases} 0, \text{ se } \|p\|_{L^\infty} \leq r \ , \alpha = +\infty \\ +\infty \text{ se } \|p\|_{L^\infty} > r \ , \alpha = +\infty \end{cases} \end{cases}$$

Pela hipótese $\mathbf{C_1}$ ,$g(x,\cdot)$ é convexa para quase todo o $x \in \Omega$ e por $\mathbf{C_2}$ ,$\mathbf{C_3}$ temos $g(x,s) \geq 0$.

Então $G$ é convexa.

Como admitimos, na hipótese,que $T : L^\alpha_m \to L^\beta_l$ é um compactificador $(\alpha, \beta)$, a restrição de $G$ às bolas de $L^\alpha_m$ é contínua na topologia $\sigma(L^\alpha, L^{\alpha'})$.

Se $\alpha = \infty$ o domínio de $G$ está contido numa bola, visto que $\|p\|_{L^\infty} \leq r$, e portanto $G$ é contínua na topologia $\sigma(L^\infty, L^1)$ .Portanto $G$ pertence ao conjunto das funções próprias que são supremo pontual de uma família de funções afins contínuas $G \in \Gamma_\circ\ (L^\infty_m)$ .

Se $\alpha \in ]1, +\infty[$ a restrição de $G$ a bolas de $L^\alpha_m$ é contínua na topologia $\sigma(L^\alpha, L^{\alpha'})$ e portanto é contínua na topologia da norma.

Portanto $G$ é convexa e contínua em todo o espaço $L^\alpha_m$ e portanto $G \in \Gamma\ (L^\alpha_m)$ ([8], pág. 14 ).

Substituíndo $f(x,\xi)$ por $f(x,\xi) - a_2(x)$ se necessário, podemos supor $a_2(x) = 0$ na hipótese $\mathbf{C_4}$ e admitir que $f$ é não negativa.

Definamos então uma função não negativa $F$ em $L^\alpha_m$:

$$F(p) = \int\limits_{\Omega} f\left[x, p(x)\right] dx.$$

Para todo o $\lambda \in \mathbb{R}$, o conjunto

$$S_\lambda = \{p \in L^\alpha_m : F(p) \leq \lambda\} \subset L^\alpha_m$$

é .limitado atendendo às hipóteses $\mathbf{C_4}$ e $\mathbf{C_5}$e ao facto de $f$ ser positiva.

A restrição de $G$ aos conjuntos $S_\lambda$ é contínua na topologia $\sigma(L^\alpha, L^{\alpha'})$ visto $G$ ser contínua em $L^\alpha_m$ .

A existência de $p^*_o \in L^\alpha_m$ t.q. $\int\limits_{\Omega} f^*\left[x, p^*_o(x)\right] dx < +\infty$ resulta das desigualdades $\mathbf{C_4}$ e $\mathbf{C_5}$.

Aplicando um teorema da análise convexa (Apêndice A2, [22])é possível então escrever :

$\min(PR') = G(\overline{p}) + F^{**}(\overline{p}) = \inf\limits_{p \in L^\alpha_m} [G(p) + F(p)] = \inf(P')$.

Portanto $\min(PR') = \inf(P')$.

Se for $\overline{u} = T(\overline{p})$ uma solução de $(PR')$ o mesmo teorema permite ainda escrever :

$$G(\overline{p}) + F^{**}(\overline{p}) = \liminf_{p \to \overline{p}} \{G(\overline{p}) + F(p)\}.$$

Para $\lambda$ suficientemente grande podemos restringir-nos ao limite inferior fraco com $p \in S_\lambda$. Mas $S_\lambda$ é limitado em $L_m^\alpha$ e portanto é metrizável na topologia $\sigma(L^\alpha, L^{\alpha'})$ .Resulta então que existe uma sucessão $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente para $\overline{p}$ em $\sigma(L^\alpha, L^{\alpha'})$ e tal que :

$$G(\overline{p}) + F^{**}(\overline{p}) = \liminf_{p_n \to \overline{p}} \{G(p_n) + F(p_n)\}. \qquad \textbf{(A)}$$

O primeiro membro é igual a $\inf(P')$ ;então a expressão **(A)** significa que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão minimizante.

Pela hipótese inicial do Teorema no respeitante a $T$ ,tem-se imediatamente que $Tp_n \to T\overline{p}$ na norma de $L_l^\beta$ .

**b)** Admita-se que existe uma sucessão minimizante $u_n = Tp_n$ ,$n \in \mathbb{N}$ ,do problema .$(P')$.

A sucessão $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L_m^\alpha$ devido a $\mathbf{C_4}$ e $\mathbf{C_5}$. Podemos então extrair uma subsucessão $p_{n'}$ convergente para $\overline{p}$ em $\sigma(L^\alpha, L^{\alpha'})$ e a sucessão $Tp_{n'}$ converge para $T\overline{p}$ na norma , pela hipótese inicial sobre $T$.

Recordando que $F^{**}$ é $SCI$ :

$$G(\overline{p}) + F^{**}(\overline{p}) \leq \liminf_{n' \to +\infty} \{G(p_{n'}) + F(p_{n'})\}.$$

Mas o lado direito da desigualdade é igual a $\inf(P')$ visto a sucessão ser minimizante e portanto igual ao $\min(PR')$. Portanto $\overline{u} = T\overline{p}$ é solução de $(PR')$ .

■

É possível dar ao problema relaxado uma formulação diferente. Vamos estudar aqui esta formulação, pois precisaremos dela no capítulo V.

<u>DEFIN.8.4</u> . Um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ diz-se um conjunto afim se

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in M, \ \forall x, y \in M, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

<u>DEFIN.8.5</u> : Dado um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$chama-se envólucro afim de $S$ ,$af\,(S)$ ao conjunto mínimo afim que contém $S$ .

**<u>Obs.</u>** Para se ver que $af\,(S)$ existe e é único é suficiente pensar na intersecção de todos os conjuntos $M$ afins que contêm $S$ .

DEFIN. 8.6 : Seja um conjunto de $m+1$ pontos $b_o, \dots, b_m$. Os pontos dizem-se independentes afins se $af\{b_o, \dots, b_m\}$ for de dimensão $m$ ,mais precisamente se $af\{b_o, \dots, b_m\} \subset \mathbb{R}^m$ .

DEFIN. 8.7 : Chama-se simplex de dimensão $m$ ao conjunto

$$co\{b_o, \dots, b_m\} \text{ se } af\{b_o, \dots, b_m\} \subset \mathbb{R}^m .$$

Vamos indicar por ,$E_m, m \in \mathbb{N}$ , o seguinte simplex de $\mathbb{R}^m$ e por $\tilde{\lambda}$ os seus elementos :

$$E_m = \left[\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, \ \lambda_i \geq 0, \ \forall i\right],$$

$$\tilde{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$$

LEMA 8.8 :

Para todo o $x \in \Omega$ e todo o $\xi \in \mathbb{R}^m$ é verdade que

$$f^{**}(x;\xi) = \min \left[\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i \ f(x;\xi_i) : \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i \xi_i = \xi, \tilde{\lambda} \in E_{m+1}\right]$$

$$f^{**}(x;\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}.$$

**dem.** Recorde-se o teorema de Carathéodory : num espaço vectorial de dimensão $n$ qualquer ponto do convexificado de um conjunto $B$ pode ser escrito como combinação convexa de no máximo $n+1$ pontos de $B$ Mais precisamente :

se $u \in coB \subset \mathbb{R}^n$ então

$$u = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \ u_i = \lambda_1 \ u_1 + \dots + \lambda_{n+1} \cdot u_{n+1}, \text{ sendo}$$

$$u_1, u_2, \dots, u_{n+1} \in B,$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1, \ \lambda_i \geq 0,$$

$$coB = \left[\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \ u_i : u_i \in B, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1, \ \lambda_i \geq 0\right].$$

Então, recordando que *epi* $f(x,\cdot) \subset \mathbb{R}^{m+1}$, podemos aplicar o teorema de Carathéodory para escrever :

$$co\ epi\ f(x,\cdot) = \left[\sum_{i=1}^{m+2} \lambda_i(\xi_i, a_i) : \tilde{\lambda} \in E_{m+2}, (\xi_i, a_i) \in epi\ f(x,\cdot)\right] \quad \text{(A)}$$

Vamos verificar que se trata de um conjunto fechado.

Seja um ponto $(\xi, a) \in \mathbb{R}^{m+1}$ o limite de uma sucessão $(\xi^n, a^n) \subset$ *co epi* $f(x,\cdot)$, $n \in \mathbb{N}$ .

Observe-se que $f(x, \xi_i) \leq a_i$

Escrevendo cada ponto $(\xi^n, a^n)$ da sucessão na forma **(A)** obtemos

$$(\xi^n, a^n) = \sum_{i=1}^{m+2} \lambda_i^n(\xi_i^n, a_i^n) \ , \ (\xi_i^n, a_i^n) \in co\ epi\ f(x,\cdot).$$

Extraindo subsucessões podemos supor quando $n \to \infty$ , que :

$$\tilde{\lambda}^n \to \overline{\lambda} \in E_{m+2} \quad (\lambda_i^n \to \overline{\lambda}_i),$$
$$\xi_i^n \to \overline{\xi}_i \ , \ i \in I,$$

e ainda a possibilidade :

$$|\xi_i^n| \to \infty \ , i \in J,$$
$$\text{com } I \cup J = \{1, 2, \ldots, m+2\} .$$

Ainda pela hipótese :

$$\sum_{i=1}^{m+2} \lambda_i^n \xi_i^n \to \xi \ , \ \sum_{i=1}^{m+2} \lambda_i^n a_i^n \to a.$$

De facto :

$$(\xi^n, a^n) = \sum_{i=1}^{m+2} \lambda_i^n(\xi_i^n, a_i^n) = \sum_{i=1}^{m+2} (\lambda_i^n \xi_i^n, \lambda_i^n a_i^n) \to (\xi, a).$$

Por outro lado , recordando que o ponto $(\xi^n, a^n)$ pertence a *co epi* $f(x,\cdot)$ e portanto $f(x, \xi_i^n) \leq a_i^n$, tem-se que :

$$\sum_{i=1}^{m+2} \lambda_i^n \ f(x, \xi_i^n) \leq \sum_{i=1}^{m+2} \lambda_i^n a_i^n \to a.$$

Utilizando as desigualdades $\mathbf{C_4}$ e $\mathbf{C_5}$ da hipótese do Teorema **8.2.**:

$\alpha \in ]1, +\infty[\, f(x, \xi) \geq a_2(x) + b_2 |\xi|^\alpha \, , a_2 \in L^1(\Omega)$

$\alpha = +\infty, \ f(x, \xi) \geq a_2(x) + \delta(\xi \,|B) \ , B\,(0, r) \subset \mathbb{R}^m, a_2 \in L^1(\Omega),$

tem-se, para $\alpha = \infty$ e utilizando $|\xi_i^n| \to \infty$ , $i \in J$, que deve ser $J = \emptyset$.

Se $\alpha \in ]1, +\infty[$ podemos deduzir que $\lambda_i^n |\xi_i^n|^\alpha$ é majorado por alguma constante quando $n \to +\infty$.

De facto :

$$a_2(x) + b_2 |\xi_i^n|^\alpha \leq f(x, \xi_i^n)$$

$$\sum \lambda_i^n a_2(x) + \sum b_2 \lambda_i^n |\xi_i^n|^\alpha \leq \sum \lambda_i^n \; f(x, \xi_i^n) \leq \sum \lambda_i^n a_i^n \to a$$

$$a_2(x) \sum \lambda_i^n + b_2 \sum \lambda_i^n |\xi_i^n|^\alpha \leq \sum \lambda_i^n \; f(x, \xi_i^n) \leq \sum \lambda_i^n a_i^n \to a$$

$\sum \lambda_i^n |\xi_i^n|^\alpha$ é convergente pelo que $\lambda_i^n |\xi_i^n|^\alpha$ é limitado.

Então , $\forall i \in J, \quad \lambda_i^n |\xi_i^n|^\alpha \to 0.$

Recorrendo a $\sum_{i=1}^{m+2} \lambda_i^n \xi_i^n \to \xi$ e atendendo a que

$I \cup J = \{1, 2, \ldots, m+2\}$ :

$$\sum_{i \in J} \lambda_i^n \xi_i^n + \sum_{i \in I} \lambda_i^n \xi_i^n \to \xi$$

$$\sum_{i \in I} \lambda_i^n \xi_i^n \to \xi$$

$$\sum_{i \in I} \lambda_i^n \to 1$$

Utilizando,

$$\begin{cases} \tilde{\lambda}^n \to \overline{\lambda} \in E_{m+2} \\ \xi_i^n \to \overline{\xi}_i \; , \; i \in I \end{cases},$$

tem-se que :

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i \in I} \lambda_i^n \xi_i^n = \sum_{i \in I} \left( \lim_{n \to \infty} \lambda_i^n \right) \left( \lim_{n \to \infty} \xi_i^n \right) = \sum_{i \in I} \overline{\lambda}_i \overline{\xi}_i = \xi.$$

Portanto :

$$\sum_{i \in I} \overline{\lambda}_i \overline{\xi}_i = \xi,$$

$$\sum_{i \in I} \overline{\lambda}_i = 1.$$

Para dispormos de termos não negativos, subtraimos $a_2(x)$ de ambos os lados da expressão :

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{m+2} \lambda_i^n f(x, \xi_i^n) \leq a$$

e observamos que é sempre $f(x, \xi) \geq a_2(x)$ :

$$a - a_2(x) \geq \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{m+2} \lambda_i^n \left[f(x,\xi_i^n)\right] - a_2(x) \right\}$$

$$a - a_2(x) \geq \liminf_{n\to\infty} \left\{ \sum_{i\in I} \lambda_i^n \left[f(x,\xi_i^n) - a_2(x)\right] \right\}.$$

Mas $$\sum_{i\in I} \lambda_i^n a_2(x) = a_2(x) \sum_{i\in I} \lambda_i^n \to a_2(x)$$

Logo : $$a - a_2(x) \geq \liminf_{n\to\infty} \left\{ \sum_{i\in I} \lambda_i^n \left[f(x,\xi_i^n)\right] \right\} - a_2(x)$$

$$a \geq \sum_{i\in I} \lambda_i^n \liminf_{n\to\infty} f(x,\xi_i^n).$$

Como $f(x,\cdot)$ é $SCI$, $\liminf\limits_{n\to\infty} f(x,\xi_i^n) \geq f(x,\overline{\xi}_i)$ e atendendo de novo a $\lambda^n \to \widetilde{\lambda} \in E_{m+2}$ e $\lambda_i^n \to \overline{\lambda}_i$ :

$$a \geq \sum_{i\in I} \overline{\lambda}_i \cdot f(x,\overline{\xi}_i).$$

Escreva-se agora $b = a - \sum\limits_{i\in I} \overline{\lambda}_i \cdot f(x,\overline{\xi}_i) \geq 0.$

Toma-se $i_o \in I$ de modo que $\overline{\lambda}_{i_o} \neq 0$, o que é possível pois $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i^n \to 1$.

Faça-se

$$\overline{a}_i = f(x,\overline{\xi}_i), i \in I, i \neq i_o$$

$$\overline{a}_{io} = f(x,\overline{\xi}_{i_o}) + \frac{b}{\overline{\lambda}_{i_o}} \quad \left(\overline{a}_{io} > f(x,\overline{\xi}_{i_o}\right).$$

Resulta :

$$\left(\overline{\xi}_i, \overline{a}_i\right) \in epi\ f(x,\cdot) \text{ para todo o } i \in I \text{ e para}$$

$$\xi = \sum_{i\in I} \overline{\lambda}_i \overline{\xi}_i$$

$$a = \sum_{i\in I} \overline{\lambda}_i \overline{a}_i.$$

Então $(\xi, a) \in co\ epi\ f(x,\cdot)$ e este conjunto é fechado.

Como $epi\ F^{**} = \overline{co}\ epi\ F$ ([8] ,pág. 267) podemos agora escrever :

$$epi\ f^{**}(x,\cdot) = \overline{co}\ epi\ f(x,\cdot) = co\ epi\ f(x,\cdot)$$

Em particular, para todo o $\xi \in \mathbb{R}^m$ :

$$(\xi, f^{**}(x,\xi)) \in co\ epi\ f(x,\xi)$$
$$\forall \varepsilon > 0, (\xi, f^{**}(x,\xi) - \varepsilon) \notin co\ epi\ f(x,\xi)$$

Utilizando de novo o Teorema de Carathéodory :

$$f^{**}(x,\xi) = \min \left[ \sum_{i=1}^{m+2} \lambda_i f(x,\xi_i) : \sum_{i=1}^{m+2} \lambda_i \xi_i = \xi, \tilde{\lambda} \in E_{m+2} \right] \quad .(\mathrm{B})$$

Se particularizarmos os valores para o mínimo podemos determinar $\tilde{\bar{\lambda}} \in E_{m+2}$, $\bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_{m+2}$ tais que

$$f^{**}(x,\xi) = \sum_{i=1}^{m+2} \lambda_i f(x,\bar{\xi}_i), \text{ com } \sum_{i=1}^{m+2} \bar{\lambda}_i \bar{\xi}_i = \xi.$$

Se nesta equação todos os $\lambda_i$ forem não nulos e todos os pontos $\left(\bar{\xi}_i, f(x,\bar{\xi}_i)\right)$ forem independentes afins em $\mathbb{R}^{m+1}$, então $(\xi, f^{**}(x,\xi))$ será um ponto interno de *co epi* $f(x,\cdot)$ , contradizendo a condição

$$\forall \varepsilon > 0, (\xi, f^{**}(x,\xi) - \varepsilon) \notin co\ epi\ f(x,\xi)$$

Podemos então admitir que $(\xi, f^{**}(x,\xi))$ é uma combinação convexa de no máximo $(m+1)$ pontos de *co epi* $f(x,\cdot)$

Tomando $\lambda \in E_{m+1}$ em **(B)** obtemos a tese.

∎

Permitindo a variação de $x$ e de $\xi$ na tese do Lema **8.8.** obtemos o seguinte teorema .

TEOREMA 8.9 : Para toda a aplicação mensurável $p : \Omega \to \mathbb{R}^m$ existe uma aplicação mensurável $\tilde{l} : \Omega \to \mathbb{E}_{m+1}$ e $(m+1)$ aplicações mensuráveis $q_i : \Omega \to \mathbb{R}^m$ tais que para todo o $x \in \Omega$ se tem :

$$f^{**}[x, p(x)] = \sum_{i=1}^{m+1} l_i(x) \cdot f[x, q_i(x)]$$
$$\sum_{i=1}^{m+1} l_i(x) q_i(x) = p(x).$$

**dem.** os integrandos $f$ e $f^{**}$ são normais e $p$ é mensurável , pela hipótese. Modificando-os num conjunto $N \subset \Omega$ , $m(N) = 0$ , podemos supor que $f$ e $f^{**}$ são funções de Borel em $\Omega \times \mathbb{R}^m$ e $p$ é função de Borel em $\Omega$ .

Vamos considerar o subconjunto $C$

$$C \subset \Omega \times \left[E_{m+1} \times (\mathbb{R}^m)^{m+1}\right]$$

$$C = \left[\left(x, \widetilde{\lambda}, \xi_1 \ldots, \xi_{m+1}\right) : \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i \xi_i = p(x), \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i f(x, \xi_i) = \right.$$
$$\left. = f^{**}\left[x, p(x)\right]\right.$$

que podemos escrever atendendo à condição

$$f^{**}(x, \xi) = \sum_{i=1}^{m+2} \lambda_i f(x, \overline{\xi}_i), \sum_{i=1}^{m+2} \overline{\lambda}_i \overline{\xi}_i = \xi,$$

estabelecida no Lema **8.8.**

$C$ é um conjunto de Borel, pelo que a secção

$$C_x = \left[(\widetilde{a}, b_1, \ldots, b_{m+1}) \in E_{m+1} \times (\mathbb{R}^m)^{m+1} : (x, \widetilde{a}, b_1, \ldots, b_{m+1}) \in C\right]$$

é fechada para todo o $x \in \Omega$, (Apêndice A2, [23]).

Recorde-se que nestas condições a função indicatriz de $C$ é um integrando normal.

Através de um homeomorfismo (Apêndice A2, [24])de $\mathbb{R}^m$ sobre o interior da sua bola unitária $B_m$ , podemos obter

$$C \subset \Omega \times \left[E_{m+1} \times (B_m)^{m+1}\right].$$

Mas se $C$ é de Borel e tem secções $C_x$ fechadas para quase todo o $x$ , então ([8],pág.237) existe uma aplicação mensurável $\overline{u} : \Omega \to E_{m+1} \times (\mathbb{R}^m)^{m+1}$ tal que $\overline{u}(x) \in C_x$ para quase todo o $x \in \Omega$ mais precisamente $(x, \overline{u}(x)) \in C$ para todo o $x \in \Omega$ .As diversas componentes de $\overline{u}$ permitem-nos determinar $\widetilde{l}$ e $q_i$ , $1 \leq i \leq m+1$.

■

Podemos agora reescrever o problema relaxado

$$(PR'') \begin{cases} \inf \int_\Omega \left[g\left[x, u(x)\right] + \sum_{i=1}^{m+1} l_i(x) f\left[x, q_i(x)\right]\right] dx \\ l_i : \Omega \to \mathbb{R}, \text{ mensuráveis, } 1 \leq i \leq m+1 \\ q_i : \Omega \to \mathbb{R}^m, \text{ mensuráveis, } 1 \leq i \leq m+1 \\ \sum_{i=1}^{m+1} l_i(x) = 1 \text{ , } l_i(x) \geq 0 \text{ q.s. } , 1 \leq i \leq m+1 \\ p = \sum_{i=1}^{m+1} l_i q_i \in L_m^\alpha \\ u = T(p) \end{cases}$$

<u>TEOREMA 8.10</u> :

Os problemas $(PR')$ e $(PR'')$ têm o mesmo valor e $\min(PR') = \min(PR'')$ . Além disso a aplicação

$$(\overline{l_1}, \ldots \overline{l}_{m+1}, \overline{q}_1, \ldots, \overline{q}_{m+1}) \to \overline{p} = \sum_{i=1}^{m+1} \overline{l}_i \overline{q}_i$$

aplica o conjunto de soluções de $(PR'')$ sobre o conjunto de soluções de $(PR')$ .

**dem.** Se $\overline{l} : \Omega \to E_{m+1}$ e $q_i : \Omega \to \mathbb{R}^m, 1 \le i \le m+1$ , são aplicações mensuráveis e se $p = \sum_{i=1}^{m+1} l_i q_i$ , deduzimos pelo Lema **8.8.** que para todo o $x \in \Omega$ se tem

$$f^{**}[x, p(x)] = \min \left[ \sum_{i=1}^{m+1} l_i(x) f[x, q_i(x)] : \sum_{i=1}^{m+1} l_i q_i = p \right]$$

ou ainda :

$$f^{**}[x, p(x)] \le \sum_{i=1}^{m+1} l_i(x) f[x, q_i(x)], \quad 1 \le i \le m+1$$

o que implica :

$$\int_\Omega [g[x, u(x)] + f^{**}[x, p(x)]]\, dx \le \int_\Omega \left[ g[x, u(x)] + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=1}^{m+1} l_i(x) f[x, q_i(x)] \right] dx$$

ou seja

$$\min(PR') \le \inf(PR'') \qquad \text{(A)}$$

Mas se $\overline{p}$ for uma solução de $(PR')$ podemos afirmar ([8] , pág. 283) que existe uma aplicação mensurável $\overline{l} : \Omega \to E_{m+1}$ e $(m+1)$ aplicações mensuráveis $q_i : \Omega \to \mathbb{R}^m$ tais que para quase todo o $x \in \Omega$ se verifica :

$$f^{**}[x, \overline{p}(x)] = \sum_{i=1}^{m+1} \overline{l}_i(x) f[x, \overline{q_i}(x)]$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} \overline{l}_i(x) \overline{q}_i(x) = \overline{p}(x).$$

Fazendo $\overline{u} = T(\overline{p})$ obtemos :

$$\min(PR') = \int_{\Omega} [g[\overline{x}, \overline{u}(x)] + f^{**}[\overline{x}, \overline{p}(x)]]\, dx =$$

$$= \int_{\Omega} \left[ g[x, \overline{u}(x)] + \sum_{i=1}^{m+1} \overline{l}_i(x) f[x, \overline{q_i}(x)] \right] dx \geq \inf(PR'') \qquad .\mathbf{(B)}$$

Por **(A)** e **(B)** resulta que $\min(PR') = \inf(PR'')$ , e

$$(l_1, \ldots l_{m+1}, \overline{q}_1, \ldots, \overline{q}_{m+1})$$

é uma solução de $(PR'')$ .
Portanto $\min(PR') = \min(PR'')$ e a aplicação

$$(\overline{l}_1, \ldots \overline{l}_{m+1}, \overline{q}_1, \ldots, \overline{q}_{m+1}) \rightarrow \overline{p} = \sum_{i=1}^{m+1} \overline{l}_i \overline{q}_i$$

é sobrejectiva.

Reciprocamente, se $(\overline{l}_1, \ldots \overline{l}_{m+1}, \overline{q}_1, \ldots, \overline{q}_{m+1})$ for uma solução de $(PR'')$ se $\overline{p} = \sum_{i=1}^{m+1} \overline{l}_i \overline{q}_i$ e $\overline{u} = T(\overline{p})$ deduz-se de $\sum_{i=1}^{m+1} l_i(x) f[x, q_i(x)] \geq f^{**}[x, p(x)]$ que

$$\min(PR'') = \int_{\Omega} \left[ g[x, \overline{u}(x)] + \sum_{i=1}^{m+1} \overline{l}_i(x) f[x, \overline{q_i}(x)] \right] dx \geq$$

$$\geq \int_{\Omega} [g[x, \overline{u}(x)] + f^{**}x, \overline{p}(x)]\, dx.$$

Como $\min(PR'') = \min(PR')$ , $\overline{p}$ é uma solução de $(PR')$ e $(\overline{l_1}, \ldots \overline{l}_{m+1}, \overline{q}_1, \ldots, \overline{q}_{m+1}) \rightarrow \overline{p} = \sum_{i=1}^{m+1} \overline{l}_i \overline{q_i}$ aplica injectivamente as soluções de $(PR'')$ nas soluções de $(PR')$.

■

# IV REGULARIDADE LIPSCHITZIANA DE MINIMIZADORES

## 1. INTRODUÇÃO. DEFINIÇÕES PRELIMINARES

Consideremos o seguinte problema :

$$(\mathrm{P})\quad \inf\left\{ I(u)=\int_{\Omega} f\left[x,u(x),\nabla u(x)\right]dx : u-u_o\in W_o^{1,p}(\Omega)\right\}=m$$

$\Omega\subset\mathbb{R}^n, \Omega$ aberto e limitado,
$u:\Omega\to\mathbb{R}$
$f:\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ , $f$ contínua
$W_o^{1,p}(\Omega)$ é o fecho de $C_o^\infty$ em $W^{1,p}$ , $p\in[1,+\infty[$
$C_o^\infty(\Omega)=C^\infty(\Omega)\cap C_o(\Omega)$
$u-u_o\in W_o^{1,p}(\Omega)\Leftrightarrow u=u_o$ em $\partial\,\Omega$.

Prova-se com hipóteses adequadas relativamente a $f$ ([6],pág.87), que o problema (P) admite uma solução $\overline{u}$ , a que chamaremos minimizador, $\overline{u}\in W^{1,p}$, $\overline{u}-u_o\in W_o^{1,p}$ , tal que :

$$I(\overline{u})=m\leq I(u)\ ,\ \forall u: u-u_o\in W_o^{1,p}.$$

Mas é possível igualmente demonstrar que $\overline{u}$ não pertence apenas a um espaço de Sobolev e que $\overline{u}\in C^1(\overline{\Omega})$ .É um problema de regularidade do minimizador.

Outro problema de regularidade pode ser formulado do seguinte modo : se $f,\Omega,u_o$ forem suficientemente regulares, por exemplo $f,u_o\in C^\infty$ será que se tem $\overline{u}\in C^\infty$ ?

Trata-se , na opinião de matemáticos reputados ([6],pág.113), de problemas muito difíceis, especialmente se $n>1$ .

Neste capítulo vamos ver alguns resultados com minimizadores lipschitzianos de funcionais integrais com integrandos não contínuos.

Começamos por algumas definições preliminares.Admitiremos sempre que $\Omega$ é um intervalo aberto e limitado, $\Omega\subset\mathbb{R}$ .

<u>DEFIN. 1.1</u> :Seja uma função $f:\Omega\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ que se escreverá $f\left[t,x(t)\right]$ tal que :

$t\in\Omega\subset\mathbb{R}$
$x:\Omega\to\mathbb{R}^n \qquad ,x=(x^1,\ldots,x^n).$

Sejam $\mathcal{B}_n$ a tribo de Borel em $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{L}$ a tribo de Lebesgue em $\Omega$ .
Diz-se que $f$ é um integrando convexo se :

**i)** $f$ é mensurável em relação a $\mathcal{L}\times\mathcal{B}_n$.

**ii)** $f(t,\cdot)$ é $SCI$ e convexa para quase todo o $t\in\Omega$.

<u>DEFIN 1.2</u> :Seja uma multifunção $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ , que aplica $\Omega$ em subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ : $F(t) \subset \mathbb{R}^n$.

A multifunção $F$ diz-se mensurável se $\{(t,z) : z \in F(t)\} \in \mathcal{L} \times \mathcal{B}_n$.

<u>DEFIN 1.3</u> :Seja $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0,+\infty]$ uma função mensurável em $\mathcal{L} \times \mathcal{B}_n \times \mathcal{B}_n$ e sejam $\Omega = ]0,1[$ , $p \in [1,+\infty]$ .

Dir-se-á que $\overline{u} \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ é um mínimo local do funcional

$$F(v) = \int_\Omega f(t,v,v')dt, \quad v(0) = a, \; v(1) = b$$

se $\overline{u}(0) = a$ , $\overline{u}(1) = b$ e se existir $\delta > 0$ tal que as condições,

$$\|\varphi\|_p + \left\|\varphi'\right\|_p = \|\varphi\|_{1,p} < \delta$$
$$\varphi(0) = 0 \, , \varphi(1) = 0 \, , \varphi \in W_o^{1,p}$$

implicam

$$F(\overline{u} + \varphi) \geq F(\overline{u}).$$

<u>**OBS.**</u> $\|\varphi\|_{1,p}$ é a norma em $W^{1,p}$.

Finalmente, considere-se $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ . A multifunção

$$\partial\left[f(t,\cdot)\right]\left[\varphi(t)\right] \; , \; \varphi(t) \in \mathbb{R}^n$$

indicar-se-á apenas por $\partial f\left[t,\varphi(t)\right]$ .

## **2** . <u>INTEGRANDO DO TIPO $f(t,u')$</u>

<u>TEOREMA **2.1**</u> - <u>*CONDIÇÃO NECESSÁRIA*</u>

Seja $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \to [0,+\infty]$ ,um integrando convexo.
Seja uma função $u \in W^{1,1}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ tal que :

**i)** $\int_\Omega f(t,u')dt \leq \int_\Omega f(t,u'+v')dt \quad , \forall v \in W_o^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^n).$

**ii)** $u'(t) \in int\left[dom\; f(t,\cdot)\right]$ , $t \in \Omega$ $q.s.$.

Então existe $c \in \mathbb{R}^n$ , $c \in \partial f\left[t,u'(t)\right]$ ,$t \in \Omega$, $q.s.$.

<u>**OBS.**</u>: **1)** Para toda a função $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ define-se,

$$dom\ g = \{z \in \mathbb{R}^n : g(z) < +\infty\}.$$

2) Antes de se demonstrar o teorema **2.1** , vamos supor que é verdadeiro e utilizá-lo para provar que os minimizadores do seguinte problema são lipschitzianos :

$$(\mathrm{P}_1)\quad \min\left\{\int_\Omega f(t,u')dt : u \in W^{1,1}(\Omega;\mathbb{R}^n), u(0)=a, u(1)=b\right\}.$$

<u>TEOREMA 2.2</u> - <u>*MINIMIZADORES LIPSCHITZIANOS*</u>

Seja $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \to [0,+\infty]$ ,um integrando convexo tal que :

**(i)** existe uma função $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *t.q.*

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\theta(r)}{r} = +\infty \quad \text{e } f(t,z) \geq \theta\left(|z|\right)\ ,\ \forall z \in \mathbb{R}^n,$$

$t \in \Omega$ *q.s.*

**(ii)** existe $z_o \in L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)$ *t.q.* a função $t \mapsto f\left[t, z_o(t)\right]$ é essencialmente limitada.

Então o problema

$$(\mathrm{P}_1)\quad \min\left\{\int_\Omega f(t,u')dt : u \in W^{1,1}(\Omega;\mathbb{R}^n), u(0)=a, u(1)=b\right\}$$

tem pelo menos uma solução e toda a solução é lipschitziana em $[0,1]$, $u \in C^{0,1}[0,1]$.

<u>**dem.**</u> a existência de solução para o problema $(\mathrm{P}_1)$ fica garantida pelo Teorema **7.5** do capítulo **III.**

Seja então $\overline{u}$ uma solução ( minimizador ) de $(\mathrm{P}_1)$.

Pelo teorema **2.1** tem-se então que existe

$$c \in R^n : c \in \partial f\left[t,\overline{u}(t)\right]\ , t \in \Omega \quad q.s..$$

A definição de $\partial f$ implica :

$$f\left[t, z_o(t)\right] \geq f\left[t,\overline{u}'(t)\right] + \langle c, z_o(t) - \overline{u}'(t)\rangle\ ,\ t \in \Omega\ q.s..$$

Por **(i)** e **(ii)** da hipótese:

$$\theta\left(\left|\overline{u}'(t)\right|\right) \leq f\left[t,\overline{u}'(t)\right] \leq f\left[z_o(t)\right] - \langle c, z_o(t) - \overline{u}'(t)\rangle =$$
$$= -\langle c, z_o(t) - \overline{u}'(t)\rangle, +f\left[t, z_o(t)\right]\ ,\ t \in \Omega,\ q.s..$$

Mas :

$$\langle c, z_o(t) - \overline{u}'(t)\rangle = \langle c, z_o(t)\rangle - \langle c, \overline{u}'(t)\rangle$$
$$-\langle c, z_o(t) - \overline{u}'(t)\rangle = -\langle c, z_o(t)\rangle + \langle c, \overline{u}'(t)\rangle$$
$$\Rightarrow \theta\left(\left|\overline{u}'(t)\right|\right) \leq \langle c, \overline{u}'(t)\rangle - \langle c, z_o(t)\rangle + f\left[t, z_o(t)\right].$$

Por outro lado,

$$-\langle c, z_o(t)\rangle \leq |\langle c, z_o(t)\rangle| \leq \|c\| \cdot \|z_o(t)\|$$

e portanto :

$$\theta\left(\left|\overline{u}'(t)\right|\right) \leq \langle c, \overline{u}'(t)\rangle + \|c\| \cdot \|z_o(t)\| + f\left[t, z_o(t)\right] \quad , \; t \in \Omega \; q.s.$$

ou ainda :

$$\theta\left(\left|\overline{u}'(t)\right|\right) \leq f\left[t, \overline{u}'(t)\right] \leq \langle c, \overline{u}'(t)\rangle + \|c\| \cdot \|z_o(t)\| + f\left[t, z_o(t)\right] = A(t).$$

Por **(i)** existe $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *t.q.*

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\theta(r)}{r} = +\infty$$

Façamos $\theta(r) = \alpha\left[|r|^p - 1\right] \quad , \alpha > 0, \; p > 1$
De facto tem-se :

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\theta(r)}{r} = \lim_{r \to +\infty} \alpha \left[\frac{|r|^p - 1}{r}\right] = \lim_{r \to +\infty} \left[\alpha\, |r|^{p-1} - \frac{\alpha}{r}\right] = +\infty$$

Então :

$$\int_\Omega \theta\left(\left|\overline{u}'(t)\right|\right) dt \leq \int_\Omega f\left[t, \overline{u}'(t)\right] dt$$

$$\int_\Omega \alpha\left(\left|\overline{u}'\right|^p - 1\right) dt \leq \int_\Omega f\left[t, \overline{u}'(t)\right] dt$$

$$\alpha \int_\Omega \left|\overline{u}'\right|^p dt - \int_\Omega \alpha \; dt \leq \int_\Omega f\left[t, \overline{u}'(t)\right] dt$$

$$\alpha \left\|\overline{u}'\right\|_{L^p}^p - \alpha \leq \int_\Omega f\left[t, \overline{u}'(t)\right] dt \leq \int_\Omega A(t) dt$$

$$\left\|\overline{u}'\right\|_{L^p}^p \leq \left(\frac{1}{\alpha} \int_\Omega A(t) dt\right) + 1$$

$$\left\|\overline{u}'\right\|_{L^p} \leq \left[1 + \frac{1}{\alpha} \int_\Omega A(t) dt\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Observe-se que com $\Omega = ]0,1[$ se tem

$$L^\infty \subset \ldots \subset L^2 \subset L^1.$$

Como $c \in \partial f\left[t, \overline{u}'(t)\right]$ , $t \in \Omega$ $q.s$ consideremos o conjunto,

$$\mathrm{E}=\left\{t \in \Omega : c \notin \partial f\left[t, \overline{u}'(t)\right]\right\}.$$

Observe-se ainda que $\langle c, \overline{u}'(t)\rangle \leq \left|\langle c, \overline{u}'(t)\rangle\right| \leq \|c\| \cdot \left\|\overline{u}'(t)\right\|.$
Mas

$$\overline{u}' \in W^{1,1} \Leftrightarrow \overline{u} \in L^1 \quad \text{e}\, \overline{u}' \in L^1$$
$$\overline{u}' \in L^1 \Leftrightarrow \left\|\overline{u}'\right\|_{L^1} < +\infty.$$

Então

$$\left\|\overline{u}'\right\|_{L^p} \leq \left[1 + \frac{1}{\alpha}\int_\Omega A(t)dt\right]^{\frac{1}{p}}, \; t \in \Omega \backslash E$$

e $\overline{u}'$ é essencialmente limitada.
Vamos aplicar o teorema do valor médio ,(Apêndice A2, [25]) :

$\overline{u} : \mathbb{R} \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , $\Omega = (0,1)$ aberto, convexo
$\overline{u}(0) = a$ , $\overline{u}(1) = b$
$\left\|\overline{u}'(t)\right\| \leq M$

$\overline{u}'$ é diferenciável por ser $\overline{u} \in W^{1,1}$ e é contínua pelo teorema de Sobolev : $W^{1,p}(0,1) \subset C([0,1])$.
Então :
$\forall t, t' \in (0,1), \exists\; s \in (0,1) : \left\|\overline{u}(t') - \overline{u}(t)\right\| \leq \sup\limits_{s\in[0,1]} \left\|\overline{u}'(s)\right\| \|t' - t\|.$
Então :

$$\left\|\overline{u}(t') - \overline{u}(t)\right\| \leq \sup_{s\in[0,1]} \left|t' - t\right| \cdot \left\|\overline{u}'(s)\right\| \leq M \cdot \left|t' - t\right|$$

Portanto $\overline{u} \in C^{0,1}([0,1])$.

■

<u>**OBS.**</u> **1)** O teorema **2.2** é válido para integrandos $f(t,z)$ que tomem o valor $+\infty$ desde que o minimizador $\overline{u}$ de $(P_1)$ satisfaça a condição $\overline{u}(t) \in int\,[dom\; f(t,\cdot)]$ .Isto acontece se $\int_\Omega f(t,\overline{u}')dt < \infty$ e *dom* $f(t,\cdot)$ for aberto para quase todo o $t \in \Omega$ .Mais precisamente tem-se :

$$int\,[dom\ f(t,\cdot)] = dom\ f(t,\cdot).$$

**2)** A condição **(i)** no teorema **2.2**

$$\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad t.q.$$

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\theta(r)}{r} = +\infty \quad \text{e} \quad f(t,z) \geq \theta\left(|z|\right),\ \forall z \in \mathbb{R}^n \ \text{e} \ t \in \Omega \quad q.s.$$

não pode ser eliminada. De facto ,a função $f(t,z) = 0$ satisfaz todas as hipóteses do teorema **2.1** mas as soluções do problema $(P_1)$ não são lipschitzianas.

**3)** Recordamos um caso particular do teorema **2.1** , cujo enunciado se deve a F.H.Clarke.

<u>TEOREMA **2.3**</u>

Seja $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ , um integrando convexo, com $u \in W^{1,1}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ e

**(i)** $\int_\Omega f(t,u')dt < +\infty$

**(ii)** $\exists \delta > 0, \exists M > 0, \exists N \subset \Omega$, $N$ de medida nula, t.q.

$$|f(t,z) - f(t,w)| \leq M \cdot |z - w|$$

sempre que $t \in \Omega \setminus N$ , $\left|z - u'(t)\right| < \delta$, $\left|w - u'(t)\right| < \delta$.
Então $\exists\ c \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$c \in \partial f\left[t, u'(t)\right] \ , \ q.s. \text{ em } \Omega.$$

Vamos então proceder à demonstração do Teorema **2.1.**

**<u>dem.</u>**
pela hipótese ,

$$u'(t) \in \ int(\ dom\ f(t,\cdot))\ ,\ q.s \text{ em } \Omega$$

e pelas propriedades das funções convexas vamos determinar funções mensuráveis.

$$\delta : \Omega \to ]0, +\infty[$$
$$M : \Omega \to ]0, +\infty[$$

e um conjunto adequado de medida nula $N \subset \Omega$ , tais que :

$$|f(t,z) - f(t,w)| \leq M(t) \cdot |z-w| \quad \textbf{(A)}$$

sempre que $t \in \Omega \setminus N$ e $\left|z - u'(t)\right| < \delta(t), \left|w - u'(t)\right| < \delta(t)$.
Para se provar **(A)** começamos por considerar a multifunção

$$\Gamma(t) = \left\{\delta > 0 : \left|z - u'(t)\right| \leq 2\delta \Rightarrow f(t,z) \leq 1 + f\left[t, u'(t)\right]\right\}.$$

Como $f(t,\cdot)$ é $SCI$ e convexa e,

$$graf\ \Gamma(t) = \{(t,\delta) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ : \delta \in \Gamma(t)\} \subset \mathcal{L} \times \mathcal{B}_n$$

temos que $\Gamma(t)$ é uma multifunção mensurável.

Como, por hipótese, $u'(t) \in int\ (dom\ f(t,\cdot)$ tem-se que $\Gamma(t) \neq \emptyset$, para $t \in \Omega$, $q.s.$.

O teorema de KURATOWSKY (Apêndice A2, [26])assegura então a existência de uma selecção mensurável $\delta$, $t.q.$:

$$\begin{gathered}\delta : \Omega \to ]0, +\infty[ \\ t \in \Omega\ ,\ q.s. \\ \delta(t) \in \Gamma(t).\end{gathered}$$

Façamos $\quad M(t) = \dfrac{1}{\delta(t)}\left[1 + f\left(t, u'(t)\right)\right].$

Admita-se que **(A)** é válido. Então :

$$|f(t,z) - f(t,w)| \leq M(t)\,|z-w| \Rightarrow M(t) \geq \frac{|f(t,z) - f(t,w)|}{|z-w|} \geq$$
$$\geq \frac{|f(t,z) - f(t,w)|}{4\delta} \qquad \textbf{(B)}$$

Mas:

$$M(t) = \frac{1}{\delta(t)}\left|1 + f(t,u')\right| \geq \frac{1}{\delta(t)}\,|f(t,z)| \text{ se } \left|z - u'\right| \leq 2\delta$$
$$M(t) \geq \frac{1}{\delta(t)}\,|f(t,w)| \text{ se } \left|w - u'\right| \leq 2\delta.$$

Adicionando ordenadamente :

$$2M(t) \geq \frac{1}{\delta(t)}\,|f(t,z)| + \frac{1}{\delta(t)}\,|f(t,w)| = \frac{|f(t,z)| + |f(t,w)|}{\delta(t)}$$
$$M(t) \geq \frac{|f(t,z)| + |f(t,w)|}{2\delta(t)} \geq \frac{|f(t,z) + f(t,w)|}{2\delta(t)} \geq$$
$$\geq \frac{|f(t,z) - f(t,w)|}{2\delta(t)} \geq \frac{|f(t,z) - f(t,w)|}{4\delta(t)} \qquad .\textbf{(C)}$$

<u>OBS.</u>:

$$|z-w| = \left|z-u'+u'-w\right| = \left|\left(z-u'\right)+\left(u'-w\right)\right| \leq$$
$$\leq \left|z-u'\right| + \left|w-u'\right| \leq 4\delta.$$

Portanto da igualdade de **(B)** e **(C)** deduz-se que **(A)** é verdadeira.
Façamos agora, para todo $h \in \mathbb{N}$ :

$$E_h = \left\{t \in \Omega : \left|u'(t)\right| \leq h \ \ , \delta(t) > \frac{1}{h} \ , f(t, u'(t) < h\right\}$$
$$E = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} E_h$$

$$u_h(t) = a + \int\limits_{[0,t] \cap E_h} u'(s)ds \qquad \left(\Rightarrow u_h'(t) = u'(t), t \in [0,t] \cap E_h\right)$$

$$f_h(t,z) = \begin{cases} f(t,z), & \text{se } t \in E_h \\ 0 & \text{se } t \notin E_h \end{cases} .$$

Seja $\quad \Omega \backslash E = \{t \in \Omega : t \notin E_h \ , \forall h \in \mathbb{N}\}$

$$t \notin E_h \Leftrightarrow f\left(t, u'(t)\right) \geq h \ , \ \forall h \in \mathbb{N} \Leftrightarrow f\left(t, u'(t)\right) = +\infty .$$

Mas $\int\limits_{\Omega} f(t, u'(t)dt < +\infty$ pelo que o valor $+\infty$ só pode ocorrer num conjunto de medida nula. Então $m(\Omega \backslash E) = 0$.

As funções $u_h(t)$, $f_h(t,z)$ satisfazem as condições do Teorema **2.3.**, nomeadamente :

**1)** $f_h : \Omega \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ é um integrando convexo.

**2)** $u_h \in W^{1,1}(\Omega; \mathbb{R}^n)$.

**3)** $\int\limits_{\Omega} f_h(t, u_h'(t)dt \leq \int\limits_{\Omega} f_h(t, u_h' + v)dt \ , \ \forall v \in W_o^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^n)$.

**4)** $u_h'(t) \in int \ (dom \ f_h(t, \cdot))$ , $q.s$ em $\Omega$.

**5)** $\int\limits_{\Omega} f_h(t, u_h'(t)dt < +\infty$.

**6)** $\exists \delta > 0, \exists \ M > 0, \ \exists N \subset \Omega, \ m(N) = 0, \quad t.q..$

$$t \in \Omega \backslash N \ , \ \left|z - u_h'\right| < \delta, \left|w - u_h'\right| < \delta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |f_h(t,z) - f_h(t,w)| \leq M \cdot |z-w| .$$

Pode afirmar-se por aquele teorema **2.3** que existe $N \subset \Omega$, $m(N) = 0$ , e existe uma sucessão

$$\{c_h\} \subset \mathbb{R}^n \quad t.q.$$
$$c_h \in \partial f_h\left(t, u_h'(t)\right), \quad \forall t \in \Omega \backslash N \quad (q.s. \text{ em } \Omega)$$
$$u_h'(t) = u'(t), \quad \forall t \in E_h \backslash N \, .$$

Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $t \in E_k \cap (\Omega \backslash N)$. Então :

$$c_h \in \partial f_h\left(t, u'(t)\right) = \partial f\left(t, u'(t)\right) \text{ para todo o } h \geq k$$

recordando que $f_h(t,z) = f(t,z)$ se $t \in E_h$.

Como $t \in E_h$ tem-se $u'(t) \in int(dom\ f(t,\cdot))$ e a sucessão $\{c_h\}$ é compacta em $\mathbb{R}^n$.

Recorde-se que :

$$\partial f\left(t, u'(t)\right) = \partial\left[f(t,\cdot)\right]\left(u'(t)\right) = \{\ \xi \in \mathbb{R}^n : f(t,w) \geq f(t,u') + \\ +\langle \xi, w - u' \rangle\ \}.$$

$c_h$ é algum $\xi$ , e $\partial f(t,\cdot)$ é um conjunto convexo, fracamente $-*$ compacto ( Teorema **3.1-2(a)**, capítulo III ). Portanto $\{c_h\}$ é compacta em $\mathbb{R}^n$ , e se for $c$ um ponto limite de $\{c_h\}$ ter-se-á $c \in \partial f(t, u'(t))$ .Como $t, k$ são arbitrários a tese fica provada em $E \backslash N$ , conjunto de medida plena em $\Omega$ .

$\blacksquare$

<u>TEOREMA **2.4**</u> - <u>*INTEGRANDO NÃO CONVEXO.CONDIÇÃO NECESSÁRIA*</u>

Seja $p \in ]1, +\infty[$ e seja $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty[$ uma função mensurável em $\mathcal{L} \times \mathcal{B}_n$, tal que :

$$|z|^p \leq f(t,z) \leq K\left(1 + |z|^p\right) \text{ , } \forall z \in \mathbb{R}^n \text{ e para um dado } K \geq 1.$$

Admite-se que $\overline{u} \in W^{1,1}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ e que $\overline{u}$ é solução do problema

$$\min\left\{\int_\Omega f(t,u')dt : u \in W^{1,1}(\Omega;\mathbb{R}^n), u(0) = a, u(1) = b\right\}.$$

Então se $f^{**}(t,\cdot)$ for a maior função convexa não superior a $f(t,.)$ ,existe uma constante $c \in \mathbb{R}^n$ tal que $c \in \partial f^{**}(t, u'(t))$ , $q.s.$ em $\Omega$,e $u$ é lipschitziana em $[0,1]$.

<u>**dem.**</u>

Uma vez provada a existência de $c \in \partial f^{**}(t, u'(t))$ , a regularidade lipschitziana de $\overline{u}$ deduz-se da mesma maneira que no Teorema **2.2** .

Para se provar a tese a partir do Teorema **2.1** é suficiente mostrar que $\overline{u}$ é solução do problema ,

$$\min\left\{\int_\Omega f^{**}(t, v')dt : v \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^n), v(0) = a, v(1) = b\right\}.$$

Recorde-se que $f^{**}(t, z)$ é um integrando convexo.
Seja $v \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ uma função tal que $v(0) = a$ ,$v(1) = b$.
Para se provar a desigualdade que traduz que $\overline{u}$ é minimizador do problema dado, nomeadamente

$$\int_\Omega f^{**}(t, \overline{u}')dt \leq \int_\Omega f^{**}(t, v')dt \ . \ \forall v \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^n)$$

é suficiente encontrar uma sucessão $\{v_h\} \subset W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ $t.q.$ $v_h(0) = a$, $v_h(1) = b$ e

$$\limsup_{h \to +\infty} \int_\Omega f(t, v_h')dt \leq \int_\Omega f^{**}(t, v')dt. \qquad \textbf{(A)}$$

Vamos aplicar um teorema ( teorema 3H, Rockafellar, Lecture Notes in Math, vol.543,pág.157, Springer, 1975 ) que afirma a existência de uma sucessão $\{w_h\}$ fracamente convergente em $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ para $v$, tal que $w_h(0) = a$ e $w_h' \rightharpoonup v'$ ,e tal que

$$\lim_{h \to +\infty} \int_\Omega f(t, w_h')dt = \int_\Omega f^{**}(t, v')dt. \qquad \textbf{(B)}$$

Afirmamos que

$$\lim_{\substack{(\tau - \sigma) \to 0 \\ 0 \leq \sigma \leq \tau \leq 1}} \ \limsup_{h \to +\infty} \int_\sigma^\tau |w_h'|^p \, dt = 0. \qquad \textbf{(C)}$$

De facto, se esta condição for falsa, será possível determinar um número $\gamma > 0$ e subsucessões$\left\{w_{h(k)}\right\}$ , $\sigma_k, \tau_k$ tais que $0 \leq \sigma_k \leq \tau_k \leq$ $\leq 1$ , $(\tau_k - \sigma_k) \to 0$ e

$$\int_{\sigma_k}^{\tau_k} \left|w_{h(k)}'\right|^p dt \geq \gamma > 0 \text{ ,para todo o } k \in \mathbb{N}.$$

Escrevendo para cada $k \in \mathbb{N}$ :

$$u_k(t) = a + \int\limits_{[0,t]\setminus[\sigma_K,\tau_K]} w'_{h(k)}(s)ds \quad , \; u_k(0) = a$$

e recordando que se $w_h \in W^{1,p}(\Omega)$ então $w_h \in C(\overline{\Omega})$ e $w_h(x) - w_h(y) = \int\limits_y^x w_h'(t)dt$ ,resulta :

$$u_k(t) = a + \int\limits_0^{\sigma_k} w'_{h(k)}(s)ds + \int\limits_{\tau_k}^{t} w'_{h(k)}(s)ds = a + \left[w_{h(k)}(s)\right]_0^{\sigma_k} +$$
$$+ \left[w_{h(k)}(s)\right]_{\tau_k}^{t} = a + w_{h(k)}(\sigma_k) - w_{h(k)}(0) + w_{h(k)}(t) - w_{h(k)}(\tau_k) =$$
$$= w_{h(k)}(t) + w_{h(k)}(\sigma_k) - w_{h(k)}(\tau_k).$$

Mas, $k \to +\infty \Rightarrow (\tau_k - \sigma_k) \to 0 \Rightarrow \tau_k \to \sigma_k$.
Portanto :

$$\lim_{k\to\infty} u_k(t) = \lim_{k\to\infty} w_{h_{(k)}}(t).$$

Como $w_{h(k)} \rightharpoonup v$ vem que $u_k(t) \rightharpoonup v$ fracamente em $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ , o que também significa que $u_k' \rightharpoonup v'$ .

Pelo corolário **3.2** do capítulo III podemos afirmar que o funcional $\int\limits_\Omega f^{**}(t,v')dt$ é $SCI$.

Escrevemos então :

$$\int\limits_\Omega f^{**}(t,v')dt \leq \liminf_{\substack{k\to\infty \\ u_k' \rightharpoonup v'}} \int\limits_\Omega f^{**}(t,u_k') \leq \liminf_{\substack{k\to\infty \\ u_k' \rightharpoonup v'}} \int\limits_\Omega f(t,u_k')dt \leq$$
$$\leq \lim_{k\to\infty} \int\limits_\Omega f(t,w_h')dt - \gamma,$$

o que contradiz **(B)** .Então **(C)** não é falso.
Faça-se agora :

$$\varepsilon_h = \|w_h - v\|_\infty = \inf\{\alpha : |w_h(t) - v(t)| \leq \alpha \;, t \in \Omega \; q.s.\} =$$
$$= \sup_{t\in\Omega \; q.s.} |w_h(t) - v(t)|$$

$$b_h = a + \int\limits_0^{1-\epsilon_h} w_h'(s)ds$$

$$v_h(t) = \begin{cases} a + \int\limits_0^t w_h'(s)ds \ , \ 0 \leq t \leq 1 - \varepsilon_h \\ b_h + (b - b_h)\dfrac{(t - 1 + \varepsilon_h)}{\varepsilon_h}, \ 1 - \varepsilon_h < t \leq 1 \ . \end{cases} .$$

Tem-se que $v_h(0) = a, \ v_h(1) = b$ e $v_h \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^n)$.

A partir de **(C)** obtém-se :

$$\limsup_{h \to +\infty} \int\limits_\Omega f(t, v_h')dt \leq \lim_{h \to +\infty} \int\limits_\Omega f(t, w_h')dt \ .$$

Então :
$$\limsup_{h \to +\infty} \int\limits_\Omega f(t, v_h')dt \leq \lim_{h \to +\infty} \int\limits_\Omega f(t, w_h')dt = \int\limits_\Omega f^{**}(t, v')dt \Rightarrow$$

$$\limsup_{h \to +\infty} \int\limits_\Omega f(t, v_h')dt \leq \int\limits_\Omega f^{**}(t, v')dt.$$

Portanto provámos **(A)** e podemos dizer que existe minimizador do problema,

$$\min \left\{ \int\limits_\Omega f^{**}(t, v')dt : v \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^n), \ v(0) = a, \ v(1) = b \right\} .$$

Aplicando o argumento com $v = \overline{u}$ tem-se que

$$\int\limits_\Omega f(t, \overline{u}')dt = \int\limits_\Omega f^{**}(t, \overline{u}')dt$$

e portanto $f(t, \cdot)$ é convexa em $\overline{u}'(t)$ para $t \in \Omega$ *q.s.*.
Pelo Teorema **2.1** resulta então que existe

$$c \in \mathbb{R}^n \ , \ c \in \partial f^{**}(t, u'(t)) \ q.s \text{ em } \Omega.$$

■

**OBS.** Neste teorema não se supõe à partida que $f$ é integrando convexo, pelo que o método directo não é aplicável e pode não existir solução do problema

$$\min \left\{ \int\limits_\Omega f(t, u')dt : u \in W^{1,1}(\Omega; \mathbb{R}^n), \ \ u(0) = a, u(1) = b \right\} .$$

Portanto incluiu-se na hipótese a existência de solução.

## 3. *INTEGRANDO DO TIPO $f(u,u')$.A INCLUSÃO DIFERENCIAL DE DUBOIS-REYMOND.*

Nesta secção vamos provar os teoremas **3.1** e **3.2** .A tese do primeiro teorema é uma condição necessária relativa aos minimizadores do funcional $F(v) = \int_\Omega f(v,v')dt$ conhecida por inclusão diferencial de DUBOIS-REYMOND.

O segundo teorema afirma que aqueles minimizadores são lipschitzianos. Começamos por enunciar os dois teoremas :

TEOREMA 3.1 - *INCLUSÃO DIFERENCIAL DE DUBOIS - -REYMOND*

Seja uma função de Borel $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0,+\infty]$ tal que para todo o $s \in \mathbb{R}^n$ $f(s,z)$ é convexa e $SCI$ em $\mathbb{R}^n$.

Conhece-se um mínimo local $u \in W^{1,1}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ do funcional,

$$F(v) = \int_\Omega f(v,v')dt \ , \ v \in W^{1,1}(\Omega;\mathbb{R}^n) \ , v(0) = a \ v(1) = b.$$

Supõe-se ainda que ,

$$u'(t) \in int\,(dom\ f\,[u(t),\cdot]) \ ,q.s \text{ em } \Omega.$$

Então existe um número real $c$ e existe uma aplicação mensurável $p(t)$ tais que :

$$p(t) \in \partial f\left[u(t)\,,u'(t)\right] \ ,t \in \Omega\ q.s.$$
$$c = \langle\ p(t), u'(t)\ \rangle - f\left[u(t)\,,u'(t)\right] \ ,t \in \Omega\ q.s.. \qquad \textbf{(A)}$$

**OBS.** A expressão **(A)** é a inclusão diferencial de DUBOIS-REYMOND,se for escrita na forma

$$c \in \langle u'(t)\,,\partial f\,[u(t)\,,u'(t)]\rangle - f\,[u(t)\,,u'(t)]\,.$$

TEOREMA 3.2 -*MINIMIZADORES LIPSCHITZIANOS*

Seja uma função de Borel $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0,+\infty]$ tal que para todo o $s \in \mathbb{R}^n$ $f(s,z)$ é convexa e $SCI$ em $\mathbb{R}^n$.

Supõe-se ainda que :

**i)** Existe uma função $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{r\to+\infty} \dfrac{\theta(r)}{r} = +\infty$ e $f(s,z) \geq \theta(|z|)$ para todo o $s \in \mathbb{R}^n$ e todo o $z \in \mathbb{R}^n$.

**ii)** Para todo o $r > 0$ existe $\alpha_r > 0$ e $\mathrm{M}_r > 0$ tais que

$$|s| \leq r \ , |z| \leq \alpha_r \Rightarrow f(s,z) \leq M_r.$$

Então todo o mínimo local em $W^{1,1}$ do funcional $F(v) = \int_\Omega f(v,v')dt$ é lipschitziano em $[0,1]$.

**OBS.** Se $f(s,z)$ satisfizer as hipóteses do Teorema **3.2** e se for, $n = 1$ a existência de soluções para o problema,

$$\min\left\{F(v) = \int_\Omega f(v,v')dt : v \in W^{1,1}(\Omega;\mathbb{R}) \ , v(0) = a, \ v(1) = b\right\}$$

fica garantida com a hipótese adicional de a função $s \longmapsto f(s,0)$ ser $SCI$ em $\mathbb{R}$ .

De facto, nestas condições, o Teorema **3.3** do capítulo III assegura que o funcional $F$ é $SCI$ em $W^{1,1}(\Omega)$ relativamente à topologia de $L^1(\Omega)$ e a existência de solução fica assegurada pelo método directo.

No caso vectorial, $n > 1$ , o problema anterior tem solução se $f(s,z)$ for $SCI$ em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ,pelo Teorema **5.1** do capítulo III.

Para provar os Teoremas **3.1** e **3.2** vamos precisar de quatro lemas auxiliares.

**LEMA 3.3** :

Seja uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0,+\infty]$ , convexa e $SCI$ e seja $w \in int\,(dom\ f)$.

Admita-se que $\lim_{|z|\to+\infty} \frac{f(z)}{|z|} = +\infty$ e defina- se

$$\emptyset_w(t) := \begin{cases} f\left(\frac{w}{t}\right)t & , \ t > 0 \\ \liminf_{s\to 0^+} f\left(\frac{w}{s}\right)s, & t \leq 0 \end{cases}.$$

Então $\emptyset_w$ é uma função convexa e $SCI$ tal que

$1 \in int(dom\ \emptyset_w)$

$\partial\ \emptyset_w(1) = f(w) - \langle w, \partial f(w)\rangle.$

**dem.** A $SCI$ e a convexidade de $\emptyset_w$ derivam da $SCI$ e da convexidade de $f$ e da hipótese

$$\lim_{|z|\to+\infty} \frac{f(z)}{|z|} = +\infty.$$

SEMICONTINUIDADE DE $\emptyset_w$ :

Sabemos que $f$ é $SCI$ :

$f\ SCI \Leftrightarrow$ existe $\{s_n\} \subset \mathbb{R}^n$, $s_n \rightarrow \overline{s}$ e

$$f(\overline{s}) \leq \liminf_{s_n \to \overline{s}} f(s_n).$$

Seja $|z|$ suficientemente grande para que $|z| \leq f(z)$.
Então

$$|\overline{s}| \leq f(\overline{s}) \leq \liminf_{s_n \to \overline{s}} f(s_n).$$

Para $t > 0$ :

$$\emptyset_w(t) = f\left(\frac{w}{t}\right)t \quad , w \in int(dom\ f).$$

Seja então $\overline{s} = \dfrac{w}{t}$ e uma sucessão $\left\{\dfrac{w}{t_n}\right\}$ tal que $\dfrac{w}{t_n} \to \dfrac{w}{t}$ e $\dfrac{w}{t_n} \in int(dom\ f)$.

Escrevemos :

$$\left|\frac{w}{t}\right| \leq f\left(\frac{w}{t}\right) \leq \liminf_{\frac{w}{t_n} \to \frac{w}{t}} f\left(\frac{w}{t_n}\right).$$

Mas $\left|\dfrac{w}{t}\right| = \dfrac{|w|}{t}$ , $t > 0$

$$\Rightarrow |w| \leq f\left(\frac{w}{t}\right)t \leq \liminf_{\frac{w}{t_n} \to \frac{w}{t}} f\left(\frac{w}{t_n}\right) \cdot t.$$

Mas $t_n \to t \Leftrightarrow t = \lim\limits_{n \to \infty} t_n = \limsup\limits_{n \to \infty} t_n = \liminf\limits_{n \to \infty} t_n$
pelo que,

$$|w| \leq f\left(\frac{w}{t}\right)t \leq \liminf_{\frac{w}{t_n} \to \frac{w}{t}} f\left(\frac{w}{t_n}\right) \liminf_{n \to \infty} \cdot t_n$$

$$|w| \leq f\left(\frac{w}{t}\right)t \leq \liminf_{\frac{w}{t_n} \to \frac{w}{t}} \left[f\left(\frac{w}{t_n}\right)t_n\right]$$

$$\Leftrightarrow \emptyset_w(t) \leq \liminf_{t_n \to t} \emptyset_w(t_n)$$

$$\Rightarrow \emptyset_w(t) \text{ é } SCI.$$

Também :

$t = 1 > 0$

$\emptyset_w(1) = f(w)$ e como $w \in int(dom\ f)$ segue-se que $1 \in int(dom\ \emptyset_w)$.

Seja $t \leq 0$.

Quero mostrar que $\emptyset_w(t) = \liminf_{s\to 0^+} f\left(\frac{w}{s}\right) s \leq \liminf_{\frac{w}{s_n}\to\frac{w}{s}} \left[\lim_{s\to o^+} f\left(\frac{w}{s_n}\right) s_n\right]$.

Para $z = \frac{w}{s}$ suficientemente grande tem-se $\left|\frac{w}{s}\right| \leq f\left(\frac{w}{s}\right)$
e pela $SCI$ de $f$ e atendendo a que $s \to 0^+ \Rightarrow s > 0$ :

$$\left|\frac{w}{s}\right| \leq f\left(\frac{w}{s}\right) \leq \liminf_{s_n\to s} f\left(\frac{w}{s_n}\right)$$
$$|w| \leq f\left(\frac{w}{s}\right) s \leq \liminf_{s_n\to s} f\left(\frac{w}{s_n}\right) s.$$

Mas :

$$f\left(\frac{w}{s}\right) s \leq \liminf_{s_n\to s} f\left(\frac{w}{s_n}\right) s \Rightarrow \liminf_{s\to 0^+} f\left(\frac{w}{s}\right) s \leq$$

$$\leq \liminf_{s\to 0^+}\left[\liminf_{\frac{w}{s_n}\to\frac{w}{s}} f\left(\frac{w}{s_n}\right) s\right] = \liminf_{s\to 0^+}\left[\liminf_{\frac{w}{s_n}\to\frac{w}{s}} f\left(\frac{w}{s_n}\right)\right]\cdot \liminf_{s_n\to s} s_n =$$

$$= \liminf_{s\to 0^+}\left[\liminf_{\frac{w}{s_n}\to\frac{w}{s}} f\left(\frac{w}{s_n}\right) s_n\right] = \liminf_{\frac{w}{s_n}\to\frac{w}{s}}\left[\liminf_{s\to 0^+} f\left(\frac{w}{s_n}\right) s_n\right].$$

Portanto $\emptyset_w(t) \leq \liminf_{t_n\to t} \emptyset_w(t_n)$ e $\emptyset_w(t)$ é $SCI$ se $t \leq 0$.

<u>CONVEXIDADE</u>

Seja $t > 0$.

Faça-se $\lambda = \dfrac{\alpha\, t_1}{\alpha\, t_1 + \beta t_2}$ , $1-\lambda = \dfrac{\beta\, t_2}{\alpha\, t_1 + \beta t_2}$ , $\alpha, \beta > 0, \alpha+\beta = 1$.

Tem-se $\dfrac{\alpha\, t_1}{\alpha\, t_1 + \beta t_2} + \dfrac{\beta\, t_2}{\alpha\, t_1 + \beta t_2} = 1$ , $0 < \lambda < 1, 0 < 1-\lambda < 1$.

Então pela convexidade de $f$ :

$$f\left[\lambda\left(\frac{w}{t_1}\right) + (1-\lambda)\left(\frac{w}{t_2}\right)\right] \leq \lambda\, f\left(\frac{w}{t_1}\right) + (1-\lambda) f\left(\frac{w}{t_2}\right)$$

$$f\left[\frac{\alpha\, t_1}{\alpha\, t_1 + \beta t_2}\left(\frac{w}{t_1}\right) + \frac{\beta\, t_2}{\alpha\, t_1 + \beta t_2}\left(\frac{w}{t_2}\right)\right] \leq \frac{\alpha\, t_1}{\alpha\, t_1 + \beta t_2} f\left(\frac{w}{t_1}\right) +$$

$$+ \frac{\beta\, t_2}{\alpha\, t_1 + \beta t_2} f\left(\frac{w}{t_2}\right).$$

Mas :

$$\frac{\alpha\, t_1}{\alpha\, t_1+\beta t_2}\left(\frac{w}{t_1}\right)+\frac{\beta\, t_2}{\alpha\, t_1+\beta t_2}\left(\frac{w}{t_2}\right)=\frac{w}{\alpha\, t_1+\beta t_2}$$

pelo que ,

$$f\left(\frac{w}{\alpha\, t_1+\beta t_2}\right)\leq\frac{\alpha}{\alpha\, t_1+\beta t_2}f\left(\frac{w}{t_1}\right)t_1+\frac{\beta}{\alpha\, t_1+\beta t_2}f\left(\frac{w}{t_2}\right)t_2$$

$$f\left(\frac{w}{\alpha\, t_1+\beta t_2}\right)(\alpha t_1+\beta t_2)\leq\alpha f\left(\frac{w}{t_1}\right)t_1+\beta f\left(\frac{w}{t_2}\right)t_2$$

$\Leftrightarrow$ $\emptyset_w(\alpha t_1+\beta t_2)\leq\alpha\emptyset_w(t_1)+\beta\emptyset_w(t_2)$ e $\emptyset_w(t)$ é convexa para $t>0$.

Seja $t\leq 0$.

Como $s\to 0^+$ ter-se-á $s>0$ e $f\left(\frac{w}{s}\right)$ é convexa pela primeira parte $(t>0)$. Então :

$$f\left(\frac{w}{\alpha\, s_1+\beta s_2}\right)(\alpha s_1+\beta s_2)\leq\alpha f\left(\frac{w}{s_1}\right)s_1+\beta f\left(\frac{w}{s_2}\right)s_2$$

e

$$\liminf_{\substack{\alpha\, s_1+\beta s_2\to 0^+\\ s_1\to 0^+\\ s_2\to 0^+}} f\left(\frac{w}{\alpha\, s_1+\beta s_2}\right)(\alpha s_1+\beta s_2)\leq\liminf_{s_1\to 0^+} f\left(\frac{w}{s_1}\right)s_1+$$

$$+\beta\liminf_{s_2\to 0^+} f\left(\frac{w}{s_2}\right)s$$

pelo que

$$\emptyset_w(\alpha t_1+\beta t_2)\leq\alpha\emptyset_w(t_1)+\beta\emptyset_w(t_2)$$

e $\emptyset_w(t)$ é convexa para $t\leq 0$.
Para se provar,

$$\partial\emptyset_w(1)=f(w)-\langle w,\partial f(w)\rangle \qquad \textbf{(A)}$$

vamos aplicar as regras de derivação da análise não suave.
Como queremos provar **(A)** para $t=1>0$ , escrevemos

$$\emptyset_w(t)=f\left(\frac{w}{t}\right)\cdot t$$

e fazemos $f\left(\frac{w}{t}\right) = f_1$ , $t = f_2$.

Como $f_1 \geq 0, f_2 \geq 0, f_1$ e $f_2$ regulares ( mais precisamente existe a derivada lateral direccional $f_1'(x;v)$ , $f_2'(x;v)$ , $\forall v$ e $f'(x;v) = f^o(x;v)$ ,$\forall v$ ) aplicamos a Proposição **2.3. 13** ([5], pág.48 ). A aplicação desta proposição requer que $f$ seja localmente lipschitziana em $\mathbb{R}^n$, o que é verdade por ser $f$ convexa pela hipótese.

A proposição afirma que :

$$\partial(f_1 \cdot f_2)(x) = f_2(x)\partial f_1(x) + f_1(x)\partial f_2(x).$$

Então :

$$\begin{aligned}\partial\emptyset_w(t) &= \partial(f_1 \cdot f_2)(t) = f_2(t)\partial f_1(t) + f_1(t)\partial f_2(t) = \\ &= t\,\partial f\left(\frac{w}{t}\right)(t) + f\left(\frac{w}{t}\right)\partial t(t) = \\ &= t\partial f\left(\frac{w}{t}\right)(t) + f\left(\frac{w}{t}\right).\end{aligned}$$

Para calcularmos $\partial f\left(\frac{w}{t}\right)(t)$ consideramos :

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \quad &, g(t) = \frac{w}{t} \\ f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \quad &, (f \circ g)(t) = f\left(\frac{w}{t}\right).\end{aligned}$$

Pelo Teorema **4.4-3(i)** do capítulo III :

$$\partial\,(f \circ g)\,(t) = \partial f\left(\frac{w}{t}\right) \circ D_s g(t)$$

onde $D_s$é a derivada estrita,

$$D_s g(t) = \lim_{\substack{t' \to t \\ s \to 0^+}} \frac{g(t' + sT) - g(t')}{s} = \langle D_s g(t),\ T\rangle$$

$$D_s g(t) = \lim_{\substack{t' \to t \\ s \to 0^+}} \frac{\frac{w}{(t' + sT)} - \frac{w}{t'}}{s} =$$

$$= \lim_{\substack{t' \to t \\ s \to 0^+}} \frac{\frac{wt' - wt' - wsT}{t'(t' + sT)}}{s} = \lim_{\substack{t' \to t \\ s \to 0^+}} \frac{-wsT}{st'(t' + sT)} = \lim_{\substack{t' \to t \\ s \to 0^+}} \frac{-wT}{t'(t' + sT)} =$$

$$= -\frac{w}{t^2} \cdot T = \langle D_s g(t),\ T\rangle.$$

A expressão $\partial (f \circ g)(t) \subset \partial f [g(t)] \circ D_s g(t)$ significa que para qualquer elemento $z \in \partial(f \circ g)(t)$existe um elemento $\xi \in \partial f [g(t)]$ tal que:

$$\langle z, T\rangle = \langle \xi, D_s g(t)(T)\rangle \ , \ \forall T \in \mathbb{R}.$$

Então :

$$\begin{aligned} \partial\emptyset_w(t) &= t\partial f\left(\frac{w}{t}\right)(t) + f\left(\frac{w}{t}\right) = \\ &= f\left(\frac{w}{t}\right) + t\langle -\frac{w}{t^2}, \partial f\left(\frac{w}{t}\right)\rangle \\ &= f\left(\frac{w}{t}\right) - \langle \frac{w}{t}, \partial f\left(\frac{w}{t}\right)\rangle \end{aligned}$$

e para $t = 1$ obtemos finalmente :

$$\partial\emptyset_w(1) = f(w) - \langle w, \partial f(w)\rangle.$$

■

<u>LEMA 3.4</u> .

Seja $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ uma função convexa e $SCI$ e
seja $w \in int(dom\ f)$ , $w \neq 0$.
Existe $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.q. $f(z) \geq \theta(|z|)$ , $\forall z \in \mathbb{R}^n$.
Então para todo o $\varepsilon \in ]0, |w|[$ e todo o $p \in \partial f(w)$,tem-se que :

$$\langle p, w\rangle - f(w) \geq \frac{\varepsilon\theta(|w|)}{|w| - \varepsilon} - f\left(\frac{\varepsilon w}{|w|}\right) \cdot \frac{|w|}{|w| - \varepsilon}.$$

**<u>dem.</u>**
Seja $\varepsilon \in ]0, |w|[$ , $p \in \partial f(w)$.
Por definição de $\partial f$ :

$$\partial f(w) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : f(z) \geq f(w) + \langle \xi, z - w\rangle, \forall z \in \mathbb{R}^n\}$$

e para $p \in \partial f(w)$ :

$$f(z) \geq f(w) + \langle p, z - w\rangle.$$

Fazendo $z = \dfrac{\varepsilon w}{|w|}$ :

$$f\left(\frac{\varepsilon w}{|w|}\right) \geq f(w) + \langle p, \frac{\varepsilon w}{|w|} - w\rangle$$
$$f\left(\frac{\varepsilon w}{|w|}\right) \geq f(w) + \langle p, w\left(\frac{\varepsilon - |w|}{|w|}\right)$$
$$f\left(\frac{\varepsilon w}{|w|}\right) \geq f(w) + \langle p, w\rangle \cdot \frac{\varepsilon - |w|}{|w|}.$$

Vamos transformar esta desigualdade :

$$f\left(\frac{\varepsilon w}{|w|}\right) \geq \frac{\varepsilon\langle p, w\rangle - |w|\,\langle p, w\rangle + |w|\, f(w)}{|w|}$$

$$f\left(\frac{\varepsilon w}{|w|}\right) \geq \frac{\varepsilon\langle p, w\rangle - \varepsilon f\,(w) + \varepsilon f\,(w) - \frac{\varepsilon}{\varepsilon}\,|w|\,\langle p, w\rangle + \frac{\varepsilon}{\varepsilon}\,|w|\, f(w)}{|w|}$$
$$f\left(\frac{\varepsilon w}{|w|}\right) \geq \frac{[\varepsilon\langle p, w\rangle - \varepsilon f\,(w)] - \left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon}\,|w|\,\langle p, w\rangle - \frac{\varepsilon}{\varepsilon}\,|w|\, f(w)\right] + \varepsilon f\,(w)}{|w|}$$

$$f\left(\frac{\varepsilon w}{|w|}\right) \geq \frac{\varepsilon\,[\langle p, w\rangle - f\,(w)] \cdot \left[1 - \frac{|w|}{\varepsilon}\right] + \varepsilon f(w)}{|w|}$$
$$\frac{|w|}{\varepsilon} f\left(\frac{\varepsilon w}{|w|}\right) \geq [\langle p, w\rangle - f\,(w)] \cdot \left[1 - \frac{|w|}{\varepsilon}\right] + f(w)$$

e finalmente :

$$[\langle p, w\rangle - f\,(w)] \cdot \left[1 - \frac{|w|}{\varepsilon}\right] \leq \frac{|w|}{\varepsilon} f\left(\frac{\varepsilon w}{|w|}\right) - f(w).$$

Vamos dividir por $1 - \dfrac{|w|}{\varepsilon}$ , observando que :

$$0 < \varepsilon < |w| \Rightarrow \frac{|w|}{\varepsilon} > 1 \Rightarrow 1 - \frac{|w|}{\varepsilon} < 0.$$

Então :

$$\langle p, w\rangle - f(w) \geq \frac{\frac{|w|}{\varepsilon} . f\left(\frac{\varepsilon w}{|w|}\right) - f(w)}{1 - \frac{|w|}{\varepsilon}}.$$

Mas , $1 - \dfrac{|w|}{\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon - |w|}{\varepsilon}$ implica que

$$\langle p, w\rangle - f(w) \geq \frac{|w|}{\varepsilon - |w|} \cdot f\left(\frac{\varepsilon w}{|w|}\right) - \frac{\varepsilon}{\varepsilon - |w|} \cdot f(w)$$

e como, pela hipótese ,é $f(z) \geq \theta(|z|)$ , $\forall z \in \mathbb{R}^n$ vem

$$\langle p, w\rangle - f(w) \geq \frac{\varepsilon}{|w| - \varepsilon} f(w) - f\left(\frac{\varepsilon w}{|w|}\right) \frac{|w|}{|w| - \varepsilon}$$

$$\langle p, w\rangle - f(w) \geq \frac{\varepsilon}{|w| - \varepsilon} \theta(|w|) - f\left(\frac{\varepsilon w}{|w|}\right) \frac{|w|}{|w| - \varepsilon}.$$

■

LEMA 3.5 :

Se as aplicações $u : \Omega \to \mathbb{R}$ , $\varphi : \Omega \to \Omega$ forem absolutamente contínuas,então :

**i)** $v = u \circ \varphi$ é absolutamente contínua e

$$v'(t) = u' \circ \varphi(t) \varphi'(t) \quad q.s \text{ em } \Omega;$$

**ii)** se ,além de **(i)**,$\varphi$ for não decrescente e $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1$ então

$$\int_\Omega |u'|\, dt = \int_\Omega |v'|\, dt.$$

**dem**

Como $u$ é $AC$ podemos escrever :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ e para } T_k, T_k + H_k \in \Omega$$
$$\sum_{k=1}^n |H_k| < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^n |u(T_k + H_k) - u(T_k)| < \varepsilon.$$

Observe-se que $(T_k + H_k) - T_k = H_k$.

Escrevendo $\varphi(t_k) = T_k$ ,$\varphi(t_k + h_k) = T_k + H_k$,vem pela continuidade absoluta de $\varphi$ :

$$\forall \delta > 0, \ \exists \gamma > 0 \text{ e para } t_k, t_k + h_k \in \Omega ,$$
$$\sum_{k=1}^n |h_k| < \gamma \Rightarrow \sum_{k=1}^n |\varphi(t_k + h_k) - \varphi(t_k)| = \sum_{k=1}^n |(T_k + H_k) - T_k| < \delta$$

Então :

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \gamma > 0 :$

$$\sum_{k=1}^{n} |h_k| < \gamma \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |u[\varphi(t_k + h_k)] - u[\varphi(t_k)]| < \varepsilon$$

e $v = u \circ \varphi$ é $AC$.

Se $v$ é $AC$ então $v$ é diferenciável q.s. em $\Omega$ . Para ver isto recordemos os seguintes resultados da análise real :

**1)** se uma função é de variação limitada então tem derivada q.s..

**2)** uma função $AC$ é de variação limitada.

Então :

$$v' = (u \circ \varphi)' = u'[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) = \left[u' \circ \varphi(t)\right] \cdot \varphi'(t)$$

para todo o $t$ que garanta que $\varphi$ é diferenciável em $t$ e $u$ é diferenciável em $\varphi(t)$.

Resta provar ( condição q.s ) que para todo o boreliano $N \subset \Omega$ t.q. $med(N) = 0$ se tem

$$v'(t) = \left[u' \circ \varphi(t)\right] \varphi'(t) \text{ q.s em } \varphi^{-1}(N)$$

Mas sabe-se que (Apêndice A2, [27])

$$\varphi'(t) = 0 \text{ q.s. em } \varphi^{-1}(N)$$
$$\text{e } m[u(N)] = 0.$$

Então, $v'(t) = 0$ q.s. em $v^{-1}[u(N)]$ . Como $v^{-1}[u(N)] \supset \varphi^{-1}(N)$, **(i)** fica provado.

Para provar **(ii)** vamos enunciar e demonstrar o seguinte resultado clássico da teoria do integral de Lebesgue.

<u>TEOREMA **3.6**</u> :

Seja $f$ uma função integrável segundo Lebesgue em $[a,b]$ e $F(x)$ o seu integral indefinido.

Além disso,

$x = \varphi(t)$ é $AC$ em $[\alpha, \beta]$

$\Phi(t) = F[\varphi(t)]$ e $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ , $a \leq \varphi(t) \leq b$.

Então $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

**<u>dem.</u>**

**a)** Seja $F(x)$ o integral indefinido de $f$ ,$F'(x) = f(x)$.

A função $\Phi(t) = F[\varphi(t)]$, $\varphi(t) = x$ está definida em $[\alpha, \beta]$.
Vamos provar que $\Phi(t)$ é $AC$.

Seja um número finito de intervalos mutuamente disjuntos $[\alpha_k, \beta_k]$ contidos em $[\alpha, \beta]$.

Se $|f| \leq M$ então dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon)$ tal que :

$$\sum_k |\Phi(\beta_k) - \Phi(\alpha_k)| = \sum_k \left| \int_{\varphi(\alpha_k)}^{\varphi(\beta_k)} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

sempre que $\sum_k (\beta_k - \alpha_k) < \delta(\varepsilon)$.

De facto :

$$\int_{\varphi(\alpha_k)}^{\varphi(\beta_k)} f(x)dx = [F(x)]_{\varphi(\alpha_k)}^{\varphi(\beta_k)} = F[\varphi(\beta_k)] - F[\varphi(\alpha_k)] =$$

$$= \Phi(\beta_k) - \Phi(\alpha_k).$$

Como $|f| \leq M$ , teremos :

$$\sum_k \left| \int_{\varphi(\alpha_k)}^{\varphi(\beta_k)} f(x)dx \right| \leq M \sum_k |\varphi(\beta_k) - \varphi(\alpha_k)|.$$

E como $\varphi(t)$ é $AC$ :

$$M \sum_k |\varphi(\beta_k) - \varphi(\alpha_k)| < \varepsilon \text{ sempre que } \sum_k (\beta_k - \alpha_k) < \delta(\varepsilon).$$

Portanto $\Phi(t) = F(x) = F[\varphi(t)]$ é $AC$ em $[\alpha, \beta]$.

**b)** Suponha-se que $f$ é contínua.

Seja $h > 0$ e $t, t+h \in [\alpha, \beta]$.
Para $k \neq 0$ tem-se :

$$\frac{\Phi(t+h) - \Phi(t)}{h} = \frac{F(x+k) - F(x)}{h}$$

Mas :

$$x = \varphi(t)$$
$$x + k = \varphi(t+h)$$
$$h \to 0 \Rightarrow k \to 0$$
$$\varphi(t+h) - \varphi(t) = k$$

pelo que :

$$\frac{F(x+k)-F(x)}{h}=\frac{F(x+k)-F(x)}{k}\cdot\frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h}.$$

Como $\Phi(t)$ é $AC$ e $\varphi(t)$ é $AC$ as suas derivadas $\Phi'(t)$e $\varphi'(t)$ existem e são finitas q.s. em $[\alpha,\beta]$.Também, $F'(x)=f(x)$ para quase todo o x.

Então :

$$\begin{aligned}\Phi'(t)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+k)-F(x)}{h}&=\lim_{k\to 0}\frac{F(x+k)-F(x)}{k}\cdot\\ &\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h}\\ &\Rightarrow \Phi'(t)=F'(x)\varphi'(t)\\ &\Phi'(t)=f(x)\cdot\varphi'(t)\\ &\Phi'(t)=f\left[\varphi(t)\right]\cdot\varphi'(t).\end{aligned}$$

Mas como $f$ é integrável :

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx=\left[F(x)\right]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}=$$

$$=\left[\Phi(t)\right]_\alpha^\beta=\int_a^b \Phi'(t)dt=\int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt.$$

■

Voltando ao Lema **3.5** **(ii)** temos então :

$u$ é $AC$

$\varphi$ é $AC$ , $\varphi(0)=0$ , $\varphi(1)=1$

$\varphi$ não decrescente

$v'(t)=u'\left[\varphi(t)\right]\cdot\varphi'(t)$

$\left|v'(t)\right|=\left|u'\left[\varphi(t)\right]\cdot\varphi'(t)\right|$

e pelo teorema **3.6.**:

$$\int_\Omega\left|v'\right|dt=\int_\Omega\left|u'\left[\varphi(t)\right]\cdot\varphi'(t)\right|=\int_\Omega\left|u'\right|dt.$$

■

<u>LEMA 3.7</u> :

Seja a sucessão de funções $\{\varphi_h\}\subset W^{1,\infty}(\Omega)$ convergente em $W^{1,\infty}(\Omega)$ para $\varphi(t)\equiv t$ de tal modo que:

$$\forall h \in \mathbb{N} : \varphi_h(0) = 0 \ , \ \varphi_h(1) = 1.$$

Então para toda a função $u \in W^{1,1}(\Omega)$ a sucessão $u \circ \varphi_h^{-1}$ converge para $u$ em $W^{1,1}(\Omega)$.

**dem.**

Escreva-se $\Psi_h = \varphi_h^{-1}$.

Para $h$ suficientemente grande , $\Psi_h \in W^{1,\infty}(\Omega)$ e $\{\Psi_h\}$ converge para $\varphi$ em $W^{1,\infty}(\Omega)$.

Os operadores lineares contínuos $T_h : W^{1,1}(\Omega) \to W^{1,1}(\Omega), T_h(u) = u \circ \Psi_h$ são equilimitados (Apêndice A2, [28])pelo Lema **3.5** e $T_h(u) \to u$ em $W^{1,1}(\Omega)$ para toda a função $u \in C^2\left([0,1]\right)$ .

Observe-se que ([6] ,Pág.42) :

$$C_o^\infty(\Omega) \subset \ldots \subset C^2(\Omega) \subset W^{2,p}(\Omega) \subset C^1(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$$

Como $C^2\left([0,1]\right)$ é denso em $W^{1,1}(\Omega)$ tem-se que $T_h(u) \to u$ para toda a função $u \in W^{1,1}(\Omega)$.

■

Regressamos então ao Teorema **3.1** , que vamos demonstrar.

Seja $u \in W^{1,1}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ um mínimo local do funcional

$$F(v) = \int_\Omega f(v,v')dt \ , \qquad v \in W^{1,1}(\Omega;\mathbb{R}^n),$$

$v(0) = a, \ v(1) = b$ , $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0,+\infty]$ , $f(s,z)$ convexa e $SCI$ para todo o $s \in \mathbb{R}^n$.

Defina-se uma função $g : \Omega \times \mathbb{R} \to [0,+\infty]$

$$g(s,p) := \begin{cases} f\left[u(s), \dfrac{u'(s)}{p}\right] \cdot p \ , \ p > 0 \\ \liminf\limits_{t \to 0^+} f\left[u(s), \dfrac{u'(s)}{t}\right] t \ , \ p \leq 0 \end{cases} .$$

Pelo Lema **3.3** , $g(s,p)$ é convexa e $SCI$ em $p$ : é um integrando convexo.

Seja $\varphi(t) \equiv t$ a aplicação identidade.

Defina-se:

$$B = \left\{\Psi \in W^{1,\infty}(\Omega) : \|\Psi - \varphi\|_{1,\infty} < 1 \ , \ \Psi(0) = 0, \ \Psi(1) = 1\right\}$$

Queremos provar que :

$$\int_\Omega g(s,\Psi')ds = \int_\Omega f\left[(u \ \circ \Psi^{-1}), (u \ \circ \Psi^{-1})'\right] dt \qquad \textbf{(A)}$$

para toda a função $\Psi \in B, \Psi : \Omega \to \Omega$.

Façamos a mudança de variável

$$t = \Psi(s)\ ,\ s = \Psi^{-1}(t) \quad (\Psi(s))' = (t)' = 1$$
$$g(s, \Psi') = f\left[u(s), \frac{u'(s)}{\Psi'(s)}\right].$$

Pelo Lema **3.5** :
$(u \circ \Psi^{-1})'(t) = u'\left[\Psi^{-1}(t)\right]\cdot(\Psi^{-1})'(t) = (u' \circ \Psi^{-1})(t)\cdot\frac{1}{\Psi'\left[\Psi^{-1}(t)\right]} =$

$$= \frac{\left(u' \circ \Psi^{-1}\right)(t)}{\Psi'\left[\Psi^{-1}(t)\right]} = \frac{u'(s)}{\Psi'(s)}\ q.s. \text{ em } \Omega.$$

Portanto : $f\left[(u \circ \Psi^{-1}), (u \circ \Psi^{-1})'\right] = f\left[u(s), \frac{u'(s)}{\Psi'(s)}\right]$.

A igualdade dos integrandos assegura **(A)**.

Considere-se o funcional $G(\varphi) = \int_\Omega g(s, \varphi')ds$ ,com $\varphi(0) = 0,\ \varphi(1) = 1$.

Por **(A)** tem-se :

$$G(\varphi) = \int_\Omega g(s, \varphi')ds = \int_\Omega f\left[(u \circ \varphi^{-1}), (u \circ \varphi^{-1})'\right]dt =$$
$$= \int_\Omega f\left[u(t), u'(t)\right]dt.$$

Vimos pelo Lema **3.7** que se tivermos uma sucessão $\{\varphi_h\} \subset W^{1,\infty}(\Omega)$ tal que $\varphi_h \to \varphi(t) \equiv t$ em $W^{1,\infty}$, com $\varphi_h(0) = 0,\ \varphi_h(1) = 1$ para todo o $h \in \mathbb{N}$ , então para $u \in W^{1,1}(\Omega)$ , $u \circ \varphi_h^{-1} \rightharpoonup u$ em $W^{1,1}(\Omega)$ .

$\varphi \in W^{1,\infty}$ é um mínimo local do funcional $G(\varphi)$ visto que $u \in W^{1,1}(\Omega)$ é, por hipótese, um mínimo local do funcional $\int_\Omega f(v, v')dt$.

Como $G$ é um funcional convexo, a função $\varphi$ satisfaz a condição **(i)** da hipótese do Teorema **2.1** ,nomeadamente :

$$\int_\Omega f\left(t, u'\right)dt \leq \int_\Omega f\left(t, u' + v'\right)dt,\ \forall v \in W_o^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n).$$

Por outro lado, a condição **(ii)** da hipótese do mesmo teorema,

$$u'(t) \in int(dom\ f(t, \cdot))\ ,\ q.s \text{ em } \Omega$$

é uma consequência imediata da hipótese do teorema que estamos a provar, nomeadamente,

$$u'(t) \in int\,(dom\ f\,[u(t),\cdot]) \ , \ q.s \text{ em } \Omega.$$

Então pelo Teorema **2.1** existe uma constante $-c \in \mathbb{R}$ $t.q$

$$-c \in \partial g(s,1) \ , \ q.s \text{ em } \Omega.$$

Considere-se agora a seguinte multifunção:

$$\Gamma(t) = \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi \in \partial f\left[u(t), u'(t)\right] \wedge f\left[u(t), u'(t)\right] - \langle \xi, u'(t)\rangle = -c\right\}$$

Pelo Lema **3.3** , $\Gamma(t)$ é não vazia para quase todo o $t \in \Omega$.

Pelo teorema da selecção mensurável poderemos completar a prova do teorema **3.1** se $\Gamma(t)$ for mensurável. Para verificar a mensurabilidade de $\Gamma(t)$ escreva-se :

$$\Gamma(t) = \Theta(t) \cap \partial f\left[u(t), u'(t)\right] \qquad \textbf{(B)}$$
$$\Theta(t) = \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : f\left[u(t), u'(t)\right] + c = \langle \xi, u'(t)\rangle\right\}.$$

$\Theta(t)$ é mensurável porque $f$ é de Borel e

$$\{(t,\xi) : \xi \in \Theta(t)\} \in \mathcal{L} \times \mathcal{B}_n.$$

Indique-se por $f^*(t,\cdot)$ a função conjugada de $f(u,\cdot)$ ,

$$f^*(t,\cdot) = \sup\left\{\langle \xi, \cdot\rangle - f(u,u')\right\}.$$

A função conjugada é convexa e $SCI$ ,([8] , pág.17 ).

Vamos ainda utilizar o seguinte resultado:

se $F : V \to \overline{\mathbb{R}}$ então $u^* \in \partial F(u) \Leftrightarrow F(u)+F^*(u^*) = \langle u, u^*\rangle$ ,([8],pág.21),e também o Teorema **2.9** do capítulo III..

Temos então que $f^*$ é um integrando convexo e,

$$\partial f\left[u(t), u'(t)\right] = \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : f\left[u(t), u'(t)\right] + f^*(t,\xi) = \langle \xi, u'(t)\rangle\right\}.$$

Então $\partial f\left[u(t), u'(t)\right]$ é mensurável e por **(B)** conclui-se que $\Gamma(t)$ é mensurável.

Então, pelo teorema da selecção mensurável de AUMANN ([5] , pág. 166), existe uma função mensurável $p$ tal que :

$$p(t) \in \partial f\left[u(t), u'(t)\right] \ , \ t \in \Omega \ \ q.s.$$
$$f\left[u(t), u'(t)\right] - \langle p(t), u'(t)\rangle = -c$$

ou finalmente, $c = \langle p(t), u'(t)\rangle - f\left[u(t)f, u'(t)\right].$

■

Passamos agora à demonstração do teorema **3.2.**

<u>**dem.**</u>
Seja $u \in W^{1,1}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ um mínimo local em $W^{1,1}$ do funcional

$$F(v) = \int_\Omega f(v, v')d.t.$$

Sejam $c, p(t)$ uma constante e uma função mensurável cuja existência é assegurada pelo Teorema **3.1.**
Fazendo

$$r = \|u\|_\infty = \inf\{\gamma : |u(t)| \leq \gamma,\ t \in \Omega\ , q.s\}$$

podemos escrever pelo Lema **3.4** com

$$\alpha_r \in \left]0, \left|u'\right|\right[\ ,\ t \in \Omega\ q.s \quad :$$

$$c = \langle p, u'\rangle - f(u, u') \geq \frac{\alpha_r \theta\left(\left|u'\right|\right)}{|u'| - \alpha_r} - f\left(u, \frac{\alpha_r u'}{|u'|}\right) \cdot \frac{\left|u'\right|}{|u'| - \alpha_r}$$

$$\Rightarrow c \geq \frac{\alpha_r \theta\left(\left|u'\right|\right)}{|u'| - \alpha_r} - M_r \frac{\left|u'\right|}{|u'| - \alpha_r},$$

com $|u'(t)| > \alpha_r$ e pela condição **(i)** da hipótese conclui-se que $u'$ é essencialmente limitada. Pelo mesmo argumento da demonstração do Teorema **2.2** conclui-se que $u$ é lipschitziana em $[0, 1]$.

■

# V. APLICAÇÃO A INTEGRAIS SIMPLES NÃO CONVEXOS

## 1. INTRODUÇÃO. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

No capítulo III considerámos o problema

$$(\mathrm{P}') \qquad \inf_{\substack{u,p \\ p\in L^{\alpha}_{m} \\ u=Tp}} \int_{\Omega} \{g\,[x,u(x)] + f\,[x,p\,(x)]\}\,dx$$

sendo $g$ uma função de Carathéodory e $f$ um integrando normal, portanto não necessariamente convexo, em $\Omega \times \mathbb{R}^m$ , $p : \Omega \to \mathbb{R}^m$ , $u : \Omega \to \mathbb{R}^l$ , $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Com algumas condições adicionais sobre $g$ e $f$ , o Teorema **8.2.**mostrou que associando a $(P')$ o problema relaxado

$$(\mathrm{PR}') \qquad \inf_{\substack{u,p \\ p\in L^{\alpha}_{m} \\ u=Tp}} \int_{\Omega} \{g\,[x,u(x)] + f^{**}\,[x,p\,(x)]\}\,dx$$

se tem o resultado inf(P')= min(PR').

Os problemas de minimização de integrais do tipo

$$F(x) = \int_a^b \left\{ \, g\,[t,x(t)] + h\left[t,x'\,(t)\right] \right\} dt$$

$$x : [a,b] \to \mathbb{R}\ ,\ x \in W^{1,1}(a,b) \equiv AC\,([a,b])\,,[a,b] \subset \mathbb{R},$$

têm recebido grande atenção da parte dos investigadores, pois são problemas que ocorrem frequentemente nas aplicações em Engenharia e Física. O problema pode exigir ainda que seja $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$.

Se $h(t,\cdot)$ for convexa, assegurando a $SCI$ de $F$, e se estiver garantida a coercividade de $h$ , $\displaystyle\lim_{|\xi|\to+\infty} \frac{h(t,\xi)}{|\xi|} = +\infty$ , que por sua vez garante a compacidade de uma sucessão minimizante, então é aplicável o método directo desenvolvido por TONELLI.

Quando $h\left[t,x'(t)\right]$ não é convexa, é ainda possível estudar cada caso atendendo à natureza de $g\,[t,\cdot]$ . Isto foi feito por OLECH (1970) para $g$ linear, por AUBERT e TAHRAOUI (1979) para $g$ estritamente monótona, por MARCELLINI (1980) para $g$ monótona, por CELLINA e MARICONDA (1994) para $g$ pertencente a um subconjunto denso de $C^o$.

Neste capítulo vamos examinar o caso em que $g\,(t,\cdot)$ é côncava, caso originalmente estudado por CELLINA e COLOMBO em 1990,[3].

Portanto iremos investigar a existência de mínimo para funcionais integrais do tipo

$$I(x)=\int_0^T \left\{\, g\,[t,x(t)]+h\left[t,x'(t)\right]\right\}dt$$

sendo $g,h$ funções de Carathéodory e $g\,[t,\cdot]$ côncava para quase todo o $t$.

Procurar-se-á o mínimo de $I(x)$ no espaço das funções $x\in W^{1,p}\left([0,T],\mathbb{R}^n\right)$ $,p\geq 1$, mais precisamente :

$$x:[0,T]\rightarrow\mathbb{R}^n$$
$$x(0)=a\ ,\ x(T)=b$$
$$x'(t)\in\Phi(t)\quad q.s.\text{ em }[0,T]\,.$$

A multifunção $\Phi:[0,T]\rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ é mensurável com valores ( que são conjuntos ) não vazios, fechados ( não necessariamente limitados, nem convexos ).

O objectivo é mostrar que, para a existência do mínimo, a hipótese de Tonelli de convexidade de $h$ em relação a $x'$ ,isto é, $h\,(t,\cdot)$ convexa, pode ser substituída pela condição de concavidade de $g\,(t,\cdot)$ mantendo-se todos os outros requisitos ( por ex., as condições de crescimento).

Em particular, não se impõe qualquer regularidade a $g$ ,$h$ ,$h^{**}$.

O subconjunto de $W^{1,p}$ no qual o mínimo é procurado não é fracamente fechado devido à ausência de convexidade dos valores de $\Phi$.

Recorde-se que se $C$ for um subconjunto convexo de um espaço de Banach, os fechos forte e fraco de $C$ coincidem.

## 2. RESULTADO PRELIMINAR

**LEMA 2.1 :**

Seja $f:[0,T]\times\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}$ que satisfaz :

**i)** $f(t,x)\leq K\,|x|^p+b(t)$ , $k>0,\ b\in L^1$;

**ii)** $t\longmapsto f(t,x)$ mensurável para todo o $x$;

**iii)** $x\longmapsto f(t,x)$ convexa e contínua para quase todo o $t$.

Então para qualquer aplicação contínua $x:[0,T]\rightarrow\mathbb{R}^n$ , a multifunção $t\mapsto\partial_x f\,[t,x(t)]$ admite uma selecção $\delta(\cdot)\in L^1$ .

**dem.**

**a)** Afirmamos que a aplicação $t\mapsto\partial_x f\,[t,x(t)]$ é mensurável.

Para demonstrar esta afirmação fixamos $\beta > 0$.
Atenda-se a :

$$f(t,x) \leq K\,|x|^p + b(t), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$
$$\beta\overline{B} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq \beta\} \ , \ \beta > 0,$$
$$\overline{B} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}.$$

Recorde-se o Teorema **3.5.-2** do capítulo II :
se $f$ for convexa e majorada na vizinhança de um ponto do seu domínio, então $f$ é localmente lipschitziana em $x$, para todo o $x$ do domínio.

Esta condição é essencial para a definição do gradiente generalizado a partir da derivada de Clarke.

A demonstração do Teorema **3.5-2** foi feita em quatro passos, que recordamos :

**1**)- admite-se que $f \leq M$ em $\varepsilon B$;

**2**)- deduz-se que $f$ é limitada numa vizinhança de $x$;

**3**)- admite-se $|f| \leq N$ em $x + 2\delta B$;

**4**)- deduz-se que

$$f(x_2) - f(x_1) \leq \frac{2N}{\delta} \cdot \|x_2 - x_1\| \ , \ \forall x_1, x_2 \in x + \delta B.$$

No nosso caso, como $f(t,\cdot)$ é convexa e majorada escreveremos, para utilizarmos o Teorema **3.5-2** referido :

$$|f(t,x)| \leq N = K(2\beta)^p + b(t) \ \text{ em } [0,T] \times 2\beta\overline{B}.$$

Então:

$$f(t,x_2) - f(t,x_1) \leq \frac{2}{\beta}\left[K\,(2\beta)^p + b(t)\right] \cdot \|x_2 - x_1\| \leq \frac{2}{\beta}\left[K\,(2\beta)^p + b(t)\right]$$

com $x_1, x_2 \in \beta\overline{B}$ para quase todo o $t \in [0,T]$ .

O gradiente generalizado de uma função $f : X \to \mathbb{R}$ , localmente lipschitziana, é caracterizado por :

$$\partial f(x) = \{\xi^* \in X^* : f(y) - f(x) \geq \langle \xi^*, y - x\rangle, \forall y \in X\}.$$

Então ,

$$\langle \xi^*, x_2 - x_1 \rangle \leq f(t,x_2) - f(t,x_1) \leq \frac{2}{\beta}\left[K\,(2\beta)^p + b(t)\right]$$

para todo o $x_1, x_2 \in \beta\overline{B}$ e quase todo o $t \in [0,T]$ .
Utilizando a definição de norma de uma multifunção $F$ :

$$\|F(x)\| = máx\,\{|y| : y \in F(x)\}$$

obtemos,

$$\|\partial_x f(t,x)\| = máx\,\{|\xi^*| : \xi^* \in \partial_x f(t,x)\}$$

e portanto, para quase todo o $t \in [0,T]$ e todo o $x \in \beta\overline{B}$ teremos

$$\|\partial_x f(t,x)\| \leq \frac{2}{\beta}\left[K\,(2\beta)^p + b(t)\right].$$

Fixemos agora $\varepsilon > 0$. Pelo Teorema **2.7** ( Scorza-Dragoni )do capítulo III existe um conjunto $E_\varepsilon \subseteq [0,T]$ fechado, tal que :

$$m\left([0,T]\backslash E_\varepsilon\right) < \varepsilon$$
$$f\,\Big|_{E_\varepsilon \times \beta\bar{B}} \text{ é contínua}$$
$$b\,|_{E_\varepsilon} \text{ é contínua.}$$

Para se ver que a restrição de $b(\cdot)$ é contínua observe-se que $b(t) \in L^1$ , portanto é mensurável e $\|b\|_{L^1} < \infty$ . Aplicando então o Teorema **1.12** (LUSIN) do capítulo III vê-se que para $\varepsilon > 0$ existe um compacto $E_\varepsilon \subset [0,T]$ tal que $m([0,T]\backslash E_\varepsilon) < \varepsilon$ e $b\,|_{E_\varepsilon}$ é contínua.

Recorde-se que uma multifunção $F$ é $SCS$ se o seu gráfico for fechado e os seus valores pertencerem a um compacto. Vamos então provar que a aplicação

$$(t,x) \longmapsto \partial_x f(t,x)$$

tem gráfico fechado em $E_\varepsilon \times \beta\overline{B}$ .
Observe-se ainda que :

$$graf\ \partial f(t,x) = \Big\{\left((t,x)\,,\xi^*\right) : (t,x) \in E_\varepsilon \times \beta\overline{B}, \xi^* \in \partial f(t,x)\Big\}.$$

Considere-se uma sucessão $(t_n, x_n)$ em $E_\varepsilon \times \beta\overline{B}$,$(t_n, x_n) \to (t,x)$ e seja $v_n \in \partial_x f((t_n, x_n)$, $v_n \to v$.
Então,

$$f(t_n, x_n) - f(t_n, y) \geq \langle v_n, x_n - y\rangle,\ \forall y \in \mathbb{R}^n$$

e pela continuidade da restrição de $f$ vem

$$f(t,x) - f(t,y) \geq \langle v, x-y \rangle \Rightarrow v \in \partial_x f(t,x).$$

Portanto o gráfico de $(t,x) \longmapsto \partial_x f(t,x)$ é fechado em $E_\varepsilon \times \beta\overline{B}$. Atendendo à expressão anterior

$$\|\partial_x f(t,x)\| \leq \frac{2}{\beta}\left[K(2\beta)^P + b(t)\right], \forall x \in \beta\overline{B},\ q.s. \text{ em } E_\varepsilon$$

e à limitação de $b(t)$ em $E_\varepsilon$ , vê-se que existe um compacto que contém os valores de $\partial_x f(t,x)$e portanto a multifunção

$$(t,x) \longmapsto \partial_x f(t,x) \text{ é } SCS \text{ em } E_\varepsilon \times \beta\overline{B}.$$

Fazendo $|x(t)| \leq \beta$ para $t \in I$ tem-se que a aplicação

$$t \longmapsto \partial_x f[t, x(t)] \text{ é } SCS \text{ em } E_\varepsilon.$$

Aplicando uma forma do Teorema de LUSIN adequada a multifunções ([2], pág. 311),deduz-se finalmente que a aplicação

$$t \longmapsto \partial_x f[t, x(t)] \text{ é mensurável.}$$

b) Recorde-se o enunciado do Teorema de KURATOWSKI-RYLL-NARDZEWASKI ([4], pág. 283) :

Seja $Y$ um espaço métrico completo separável e $x \mapsto F(x) \subset Y$ uma multifunção cujos valores são subconjuntos fechados de $Y$.

Então existe uma selecção mensurável $f : X \to Y,\ f(x) \in F(x)$, $\forall x \in X$.

Ora vimos que $t \longmapsto \partial_x f(t, x(t))$ é mensurável e que $(t,x) \longmapsto \partial_x f(t, x(t))$ tem gráfico fechado pelo que os seus valores são subconjuntos fechados.

Então existe uma selecção mensurável $\delta(t) \in \partial_x f(t, x(t))$ a qual, atendendo à definição de norma de uma multifunção

$$\|\partial_x f(t,x)\| = \text{máx}\{|\xi^*| : \xi^* \in \partial_x f(t,x)\}$$

cumpre a relação

$$\delta(t) \leq \|\partial_x f(t,x)\| \leq \frac{2}{\beta}\left|K(2\beta)^p + b(t)\right|$$

para quase todo o $t \in [0,T]$ e todo o $x \in \beta\overline{B}$.
Portanto $\delta \in L^1$ .

■

## 3. RESULTADO PRINCIPAL

Estamos em condições de formular o Teorema que constitui o resultado principal deste capítulo.

TEOREMA 3.1 :

Consideramos as seguintes hipóteses :

**1)**- $I(x) = \int_0^T \left\{ g\left[t, x(t)\right] + h\left[t, x'(t)\right] \right\} dt,$

$x \in W^{1,p}([0,T], \mathbb{R}^n), p \geq 1, \ [0,T] \subset \mathbb{R},$
$x(0) = a \ , \ x(T) = b,$
$x'(t) \in \Phi(t) \ q.s.$ em $[0,T]$.

A multifunção $\Phi : [0,T] \to 2^{\mathbb{R}^n}$ é mensurável, com valores fechados, não vazios e
$\exists v \in L^p([0,T], \mathbb{R}^n) \ t.q. \ v(t) \in \Phi(t) \ q.s.$ e

$$\int_0^T v(t)dt = b - a.$$

**2)** A aplicação $g : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é tal que :

**g₁)** $t \longmapsto g(t,x)$ é mensurável para cada $x$;

**g₂)** $x \longmapsto g(t,x)$ é contínua para quase todo o $t$;

**g₃)** $x \longmapsto g(t,x)$ é côncava para quase todo o $t$.

**g₄)** Existe uma constante $\gamma_1$ e uma função $\gamma_2 \in L^1$ tais que

$$g(t,x) \geq -\gamma_1 |x|^p - \gamma_2(t).$$

**3)** A aplicação $h : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é tal que :

**h₁)** $t \longmapsto h(t,x')$ é mensurável para cada $x'$;

**h₂)** $x' \longmapsto h(t,x')$ é contínua para quase todo o $t$.

**h₃)** Se p=1 existe uma função convexa, monótona, $SCI$, $\Psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ e uma função $\xi_1(\cdot) \in L^1$ tais que :

$$h(t,x') \geq \Psi\left(\left|x'\right|\right) - \xi_1(t)$$
$$\text{e} \quad \lim_{r \to +\infty} \frac{\Psi(r)}{r} = +\infty.$$

Se $p > 1$ existe uma constante $\xi_2 > 0$ e uma função $\xi_3(\cdot) \in L^1$ tais que

$$h(t, x') \geq \xi_2 \left|x'\right|^p - \xi_3(t),$$

e $\dfrac{\gamma_1}{\xi_2}$ é estritamente inferior à melhor constante de Sobolev ( Apêndice A2, [29])em $W_0^{1,p}\left([0,T]\right)$.

Com estas hipóteses o problema

$$\text{(M)} \qquad \min \int_0^T \left\{g\left[t, x(t)\right] + h\left[t, x'(t)\right]\right\} dt$$

admite pelo menos uma solução.

<u>**dem.**</u>

Em primeiro lugar demonstra-se que o problema relaxado tem uma solução $\tilde{x}$ .A partir de $\tilde{x}$ constrói-se uma solução do problema original.

**a)** Seja

$$h_\Phi(t, x') = \begin{cases} +\infty \ , \ x' \notin \Phi(t) \\ h(t, x') \ , \ x' \in \Phi(t) \end{cases}.$$

O problema (M) é equivalente a minimizar o funcional $I$ com $h$ substituída por $h_\Phi$ , com $x \in W^{1,p}$ e $x(0) = a$ , $x(T) = b$.

Considere-se o problema relaxado :

$$\text{(MR)} \quad \min \int_0^T g\left[t, x(t)\right] dt + \int_0^T h_\Phi^{**}\left[t, x'(t)\right] dt,$$

$$x \in W^{1,p} \ , \ x(T) = b \ , \ x(0) = a.$$

Como sabemos $h_\Phi^{**}(t, x')$ é a maior função convexa em $x'$,não maior que $h(t, x')$ ,isto é, $h(t, x') \geq h_\Phi^{**}(t, x')$.

Pelo Lema **8.8** e pelo Teorema **8.9** do capítulo III e atendendo à convexidade das funções que figuram na hipótese $(\mathbf{h_3})$,conclui-se que $h_\Phi^{**}(t, x')$ satisfaz $(\mathbf{h_3})$.

Então pelo Teorema **8.2** do capítulo III sabe-se que (MR) tem uma solução $\tilde{x}$ , e

$$h_\Phi^{**}\left[t, \tilde{x}'(t)\right] < +\infty \text{ , q.s..}$$

Pelo Lema **8.8** do capítulo III podemos então escrever, atendendo a que $h_\Phi^{**}\left[t, \tilde{x}'(t)\right]$ respeita $(\mathbf{h_3})$ :

$$h_{\Phi}^{**}(t,\tilde{x}') = \min\left\{\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i h_{\Phi}(t,\xi_i) : \tilde{x}' = \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i\xi_i,\ \lambda_i \geq 0,\right.$$
$$\left. ,\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i = 1, \xi_i \in \mathbb{R}^n\right\}.$$

Mas,

$$epi\ h_{\Phi}^{**}(t,\cdot) = coepi\ h_{\Phi}(t,\cdot)$$

isto é
$$(\cdot,\ h_{\Phi}^{**}(t,\cdot)) \in coepi\ h_{\Phi}(t,\cdot)$$

e pela definição de $h_{\Phi}$ resulta que

$$\tilde{x}'(t) \in co\ \Phi(t)\ ,\ \text{q.s..}$$

Pela hipótese do Teorema $\Phi$ é mensurável ,o que permite utilizar o Teorema **8.9** do capítulo III. Este teorema afirma que existem funções mensuráveis $p_i : I \to [0,1]$ e $v_i : .I \to \mathbb{R}^n$ ,com $i = 1,2,\ldots,n+1$ e tais que :

$$\sum_i p_i(t) = 1\ ,\ \tilde{x}'(t) = \sum_i^{n+1} p_i(t)v_i(t),$$
$$h_{\Phi}^{**}[t,\tilde{x}'(t)] = \sum_i^{n+1} p_i(t)\cdot h_{\Phi}[t,v_i(t)]. \qquad \text{(A)}$$

Observe-se que qualquer $v_i(t)$ pode pertencer ao complementar de $\Phi(t)$ , $v_i(t)$ definida num conjunto $E$ de medida positiva, apenas se $p_i \equiv 0$ em $E$ . Neste caso pode modificar-se $v_i$ em $E$ por uma selecção integrável arbitrária de $\Phi$ sem afectar (A).

Portanto, podemos supor que $v_i(t) \in \Phi(t)$ q.s. de modo que,

$$h_{\Phi}[t,v_i(t)] = h[t,v_i(t)]\ ,\ \text{q.s.}$$

e podemos então escrever :

$$h_{\Phi}^{**}[t,\tilde{x}'(t)] = \sum_{i=1}^{n+1} p_i(t)h[t,v_i(t)]. \qquad \text{(B)}$$

**b)** Vamos ver a integrabilidade de uma função que será usada no resto da demonstração.

Pelo Teorema **1.12** (LUSIN) do capítulo III podemos afirmar que existe uma sucessão $(K_j)$ de subconjuntos compactos disjuntos de $I$ e um conjunto de medida nula $N$ , tais que

$I = N \cup \left( \bigcup_j K_j \right)$ e a restrição a cada $K_j$ de cada uma das aplicações $t \longmapsto h\left[t, v_i(t)\right]$ é contínua.

Faça-se $S_m = \bigcup_{j \leq m} K_j = K_1 \cup \ldots \cup K_m.$

Vamos provar o seguinte Lema :

<u>LEMA **3.2**</u>

Seja $\left(E_j^i\right)_i$ , $i = 1, \ldots, n+1$ uma partição mensurável de $K_j$ com a propriedade, para cada $j$,

$$\int_{K_j} \left[\sum_{i=1}^{n+1} p_i(t) h\left[t, v_i(t)\right]\right] dt = \int_{K_j} \left[\sum_{i=1}^{n+1} \chi_{E_j^i}(t) \cdot h\left[t, v_i(t)\right]\right] dt.$$

Então :**i)** a aplicação

$$t \longmapsto \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n+1} \chi_{E_j^i} h\left[t, v_i\left(t\right)\right] ,$$

pertence a $L^1$

**ii)** Para $p \geq 1$ a função $\sum_{i,j} \chi_{E_j^i}\ v_i(t)$ , pertence a $L^p$.

**<u>dem.</u>**

**i)** A aplicação $t \longmapsto \sum_{i=1}^{n+1} p_i(t) h\left[t, v_i(t)\right]$ é integrável ,pois por(B) igual à aplicação

$$t \longmapsto h_{\Phi}^{**}\left[t, \tilde{x}'(t)\right] .$$

Por outro lado, a sucessão de funções

$$s_m(t) = \sum_{j \leq m} \left[\sum_{i=1}^{n+1} \chi_{E_j^i}(t) \cdot h\left[t, v_i(t)\right] + \xi_3(t)\right], \ \xi_3 \in L^1$$

é monótona não decrescente.

De facto :

$$m = 1\ ,\ s_1(t) = \sum_i \chi_{E_1^i}(t) h\left[t, v_i(t)\right] + \xi_3(t)$$

$$m = 2\ ,\ s_2(t) = \sum_i \chi_{E_1^i}(t) h\left[t, v_i(t)\right] + \xi_3(t) +$$
$$+ \sum_i \chi_{E_2^i}(t) h\left[t, v_i(t)\right] + \xi_3(t)$$

$$m = 3\ ,\ s_3(t) = \sum_i \chi_{E_1^i}(t) h\left[t, v_i(t)\right] + \xi_3(t) +$$

$$+\sum_i \chi_{E_2^i}(t)h\left[t,v_i(t)\right]+\xi_3(t)+\sum_i \chi_{E_3^i}(t)h\left[t,v_i(t)\right]+\xi_3(t).$$

A sucessão será não decrescente se

$$h\left[t,v_i(t)\right]+\xi_3(t)\geq 0.$$

Mas para $p>1$ ,atendendo à hipótese $(\mathbf{h}_3)$ do Teorema **3.1** e porque $v_i(t)\in\Phi$ ,podemos escrever :

$$h\left[t,v_i(t)\right]+\xi_3\geq \xi_2\left|v_i(t)\right|^p>0\ ,\ \xi_2>0.$$

Então ,

$$\int_0^T s_m(t)dt=\sum_{j\leq m}\int_{K_j}\left[\sum_{i=1}^{n+1}\chi_{E_j^i}(t)h\left[t,v_i(t)\right]+\xi_3(t)\right]dt$$

e pela propriedade enunciada na hipótese do Lema teremos :

$$\sum_{j\leq m}\int_{K_j}\left[\sum_{i=1}^{n+1}\chi_{E_j^i}(t)h\left[t,v_i(t)\right]+\xi_3(t)\right]dt=$$

$$=\sum_{j\leq m}\int_{K_j}\left[\sum_{i=1}^{n+1}p_i(t)h\left[t,v_i(t)\right]+\xi_3(t)\right]dt=$$

$$=\sum_{j\leq m}\int_{K_j}\left[h_\Phi^{**}\left[t,\tilde{x}'(t)\right]+\xi_3(t)\right]dt=$$

$$=\int_0^T\left[\chi_{S_m}(t)\cdot h_\Phi^{**}\left[t,\tilde{x}'(t)\right]+\xi_3(t)\right]dt\leq$$

$$\leq\int_0^T\left[h_\Phi^{**}\left[t,\tilde{x}'(t)\right]+\xi_3(t)\right]dt<+\infty.$$

Então :

$$\int_0^T\left[\sum_{i,j}\chi_{E_j^i}(t)\cdot h\left[t,v_i(t)\right]+\xi_3(t)\right]dt=\int_0^T\lim_{m\to\infty}s_m(t)dt=$$

$$=\lim_{m\to\infty}\int_0^T s_m(t)dt=\int_0^T\left[h_\Phi^{**}\left[t,\tilde{x}'(t)\right]+\xi_3(t)\right]dt.$$

Fica provado **(i)**.

**ii)** Seja $p>1$ . Então

$$\left|\sum_{i,j} \chi_{E_j^i}(t) v_i(t)\right|^p = \sum_{i,j} \chi_{E_j^i}(t) \cdot |v_i(t)|^p$$

$$v_i(t) \in \Phi(t)\ .$$

Mas $h(t,x') \geq \xi_2 \left|x'\right|^p - \xi_3(t)$ por $(\mathbf{h_3})$

e $h\left[t,v_i(t)\right] \geq \xi_2 \left|v_i(t)\right|^p - \xi_3(t)$ , $\xi_2 = CONST. > 0.$

Então $|v_i(t)|^p \leq \dfrac{1}{\xi_2}\left[h\left[t,v_i(t)\right] + \xi_3(t)\right]$

$$\Rightarrow \left|\sum_{i,j} \chi_{E_j^i}(t) v_i(t)\right|^p = \sum_{i,j} \chi_{E_j^i}(t)\, |v_i(t)|^p \leq$$

$$\leq \frac{1}{\xi_2} \sum_{i,j} \chi_{E_j^i}(t) \cdot \left[h\left[t,v_i(t)\right] + \xi_3(t)\right]$$

$$\Rightarrow \sum_{i,j} \chi_{E_j^i}(t) v_i(t) \in L^p \quad , p > 1.$$

Seja $p = 1$.
Por $(\mathbf{h_3})$, $h\left[t,v_i(t)\right] \geq \Psi\left(|v_i|\right) - \xi_1(t)$ , $\xi_1(\cdot) \in L^1$,

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\Psi\left(|r|\right)}{|r|} = +\infty \quad \text{,com} \quad |r| = r \quad \text{pois}$$

$\Psi$ é definida por $\Psi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$.

Então dado $M > 0$ existe $L > 0$ tais que

$$|v_i| \geq L \Rightarrow \Psi\left(|v_i|\right) \geq M \cdot |v_i|\,.$$

Por $(\mathbf{h_3})$ para $p = 1$ virá

$$h\left(t,v_i\right) + \xi_1(t) \geq \Psi\left(|v_i|\right) \geq M\,|v_i|$$

$$\Rightarrow |v_i| \leq \frac{1}{M}\left[h\left(t,v_i\right) + \xi_1(t)\right]$$

$$\Rightarrow \left|\sum_{i,j} \chi_{E_j^i}(t) v_i(t)\right| \leq \frac{1}{M} \sum_{i,j} \chi_{E_j^i}\left[h\left(t,v_i\right) + \xi_1(t)\right]$$

$$\Rightarrow \sum_{i,j} \chi_{E_j^i}(t) v_i(t) \in L^1.$$

Portanto

$$\sum_{i,j} \chi_{E_j^i}(t) v_i(t) \in L^p\ ,\ p \geq 1.$$

**c)** Defina-se $\partial^x g(t,x) := -\partial_x\left[-g\,(t,x)\right]$ e considere-se a aplicação $t \longmapsto \partial^x g\left[t,\tilde{x}(t)\right]$.

O Lema **2.1** permite afirmar que existe uma selecção integrável $\delta(\cdot) \in L^1$ de $\partial^x g\left[t,\tilde{x}(t)\right]$.

Consideremos agora a medida vectorial $\nu_i$ e as medidas escalares $\eta_i, \beta_i$ definidas para $i = 1,\ldots,n+1$ por :

$$\nu_i(E) := \int_E v_i(t)dt \ , \ v_i : [0,T] \to \mathbb{R}^n,$$

$$\eta_i(E) := \int_E h\left[t, v_i(t)\right] dt \ , h : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

$$\beta_i(E) := \int_E \langle v_i(t), B(T) - B(t)\rangle dt,$$

com $B(t) = \int_0^t \delta(s)ds$ , sendo $\delta(\cdot) \in L^1$ uma selecção integrável de $\partial^x g\left[t,\tilde{x}(t)\right]$.

Cada uma destas medidas é uma medida não atómica definida em $[0,T]$ e, portanto, em cada $K_j$, (Apêndice A2, [30]).

Utilizando uma extensão do Teorema de LIAPUNOV(Apêndice A2, [31]) podemos afirmar que existe uma partição mensurável de cada $K_j$, $(E_j^i)$ , $i = 1,\ldots,n+1$, tal que :

$$\nu_i(K_j) = \nu_i\left(E_j^1,\ldots,E_j^{n+1}\right) = \int_{E_j^1} v_1(t)dt + \ldots + \int_{E_j^{n+1}} v_{n+1}(t)dt.$$

Mas pela definição de medida,

$$\nu_i(E) = \int_E v_i(t)dt$$

resulta :

$$\int_{E_j^1} v_1(t)dt + \ldots + \int_{E_j^{n+1}} v_{n+1}(t)dt = \nu_1\left(E_j^1\right) + \ldots + \nu_{n+1}\left(E_j^{n+1}\right).$$

Por outro lado :

$$\int_{K_j} \chi_{E_j^1}(t)d\nu_1(t) = \int_{E_j^1} d\nu_1(t) = \nu_1\left(E_j^1\right)$$

$$\int_{K_j} \chi_{E_j^2}(t)d\nu_2(t) = \int_{E_j^2} d\nu_2(t) = \nu_2\left(E_j^2\right)$$

Então :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \int_{K_j} \chi_{E_j^i}(t) d\nu_i(t) = \nu_1\left(E_j^1\right) + \ldots + \nu_{n+1}\left(E_j^{n+1}\right).$$

Também :

$$\int_{K_j} p_1 v_1(t)dt + \ldots + \int_{K_j} p_{n+1} v_{n+1}(t)dt = \int_{K_j} p_1 d\nu_1(t) +$$

$$+ \int_{K_j} p_{n+1d}\nu_{n+1}(t) = \sum_{i=1}^{n+1} \int_{K_j} p_i(t) d\nu_i(t) \; .$$

Pela mesma extensão do teorema de Liapunov tem-se,

$$\sum_i \int_{K_j} \chi_{E_j^i}(t) d\nu_i(t) = \sum_i \int_{K_j} p_i(t) d\nu_i(t) \, . \qquad \textbf{(C)}.$$

Analogamente :

$$\sum_i \int_{K_j} \chi_{E_j^i}(t) d\eta_i(t) = \sum_i \int_{K_j} p_i(t) d\eta_i(t), \qquad \textbf{(D)}$$

$$\sum_i \int_{K_j} \chi_{E_j^i}(t) d\beta_i(t) = \sum_i \int_{K_j} p_i(t) d\beta_i(t). \qquad \textbf{(E)}$$

**d)** Afirmamos que a função $x : I \to \mathbb{R}^n$ tal que ,

$$x'(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n+1} \chi_{E_j^i}(t) v_i(t) \; , \; x(0) = \tilde{x}(0)$$

é uma solução do problema (M).

Observe-se em primeiro lugar que quase todo o $t \in [0, T]$ pertence a exactamente um e um só dos conjuntos $E_j^i$, de modo que para quase todo o $t, x'(t)$ é igual a uma das funções $v_i(t)$ e portanto $x'(t) \in \Phi(t)$.

Além disso temos que :

$$h\left[t, x'(t)\right] = h\left[t, \sum_{i,j} \chi_{E_j^i}(t) v_i(t)\right] = \sum_{i,j} \chi_{E_j^i}(t) h\left[t, v_i(t)\right].$$

Então pelo Lema **3.2** conclui-se que $h\left[t, x'(t)\right] \in L^1$ sempre que se verifique a propriedade da hipótese daquele Lema, nomeadamente :

$$\int_{K_j} \left[ \sum_i p_i(t) h\left[t, v_i(t)\right] \right] dt = \int_{K_j} \left[ \sum_i \chi_{E_j^i}(t) h\left[t, v_i(t)\right] \right] dt.$$

Mas a propriedade verifica-se ,bastando recordar a expressão (D),

$$\sum_i \int_{K_j} \chi_{E_j^i}(t) d\eta_i(t) = \sum_i \int_{K_j} p_i(t) d\eta_i(t)$$

e atender à definição da medida $\eta_i$ :

$$\eta_i(E) = \int_E h\left[t, v_i(t)\right] dt$$

$$d\eta_i(t) = h\left[t, v_i(t)\right] dt \ , \ t \in E.$$

Ainda pelo Lema **3.2 (ii)** , $x'(\cdot) \in L^p$ , pelo que $x \in W^{1,p}$.
Temos ainda que ;

$$\int_0^T x'(t) dt = x(T) - x(0) = x(T) - \tilde{x}(0) =$$

$$= \int_0^T \sum_{i,j} \chi_{E_j^i}(t) v_i(t) dt$$

$$\Rightarrow x(T) = \tilde{x}(0) + \sum_j \int_{K_j} \sum_i \chi_{E_j^i}(t) v_i(t) dt,$$

e por (C) vem finalmente, atendendo a $d\nu_i(t) = v_i(t)dt$

$$\sum_j \int_{K_j} \sum_i \chi_{E_j^i}(t) v_i(t) dt = \sum_j \int_{K_j} \sum_i p_i(t) v_i(t) dt = \int_0^T \sum_i p_i(t) v_i(t) dt.$$

Portanto,

$$x(T) = \tilde{x}(0) + \int_0^T \sum_i p_i(t) v_i(t) dt.$$

Vimos antes a expressão $\sum_i p_i(t) v_i(t) = \tilde{x}'(t)$ , atendendo à qual podemos escrever :

$$x(T) - \tilde{x}(0) = \int_0^T \tilde{x}'(t)dt = \tilde{x}(T) - \tilde{x}(0)$$

$$\Rightarrow x(T) = \tilde{x}(T).$$

Faremos sob a forma de Lema mais duas afirmações.

LEMA 3.3

Com as hipóteses e resultados anteriores tem-se que :

i) $\int_0^T h_\Phi^{**}\left[t, \tilde{x}'(t)\right] dt = \int_0^T h\left[t, x'(t)\right] dt$

ii) $\int_0^T g\left[t, \tilde{x}(t)\right] dt = \int_0^T g\left[t, x(t)\right] dt.$

**dem.**

i) Da definição de $\eta_i$ , $\eta_i(E) = \int_E h\left[t, v_i(t)\right] dt$ ,

do resultado estabelecido anteriormente em (i) do Lema 3.2 ,

$$\int_0^T \left[\sum_{i,j} \chi_{E_j^i}(t) \cdot h\left[t, v_i(t)\right] + \xi_3(t)\right] dt = \int_0^T \left[h_\Phi^{**}\left[t, \tilde{x}'(t)\right] + \xi_3(t)\right] dt$$

e de (D) ,

$$\sum_i \int_{K_j} \chi_{E_j^i}(t) d\eta_i(t) = \sum_i \int_{K_j} p_i(t) d\eta_i(t)$$

vem por substituição que

$$\int_0^T h_\Phi^{**}\left[t, \tilde{x}'(t)\right] dt = \sum_j \int_{K_j} \sum_i p_i(t) h\left[t, v_i(t)\right] dt.$$

Então ,

$$\int_0^T h_\Phi^{**}\left[t, \tilde{x}'(t)\right] dt = \sum_j \int_{K_j} \sum_i p_i(t) h\left[t, v_i(t)\right] dt =$$

$$= \sum_j \sum_i \int_{K_j} \chi_{E_j^i} h\left[t, v_i(t)\right] dt = \sum_j \int_{K_j} h\left[t, \sum_i \chi_{E_j^i} v_i(t)\right] dt =$$

$$= \int_0^T h\left[t, x'(t)\right] dt$$

A última igualdade foi estabelecida por recurso à expressão anterior,

$$h\left[t, x'(t)\right] = h\left[t, \sum_{i,j} \chi_{E_j^i} v_i(t)\right].$$

**ii)** Recorde-se a definição de $\delta(\cdot)$ em (c) e ainda,

$$\partial^x g(t,x) = -\partial_x\left[-g(t,x)\right],$$

$$t \longmapsto \partial^x g(t, \tilde{x}(t)),$$

$$\text{existindo } \delta(\cdot) \in \partial^x g(t, \tilde{x}(t)),$$

$$\text{e ainda } B(t) = \int_0^t \delta(s) ds.$$

Pela caracterização do subdiferencial da análise convexa ([8] , pág.21 ) :

" $u^* \in \partial F(u)$ *sse* $F(u)$ é finita e

$\langle v - u, u^* \rangle + F(u) \leq F(v), \forall v \in V, u^* \in V^*, F : V \to \overline{\mathbb{R}}$ "

e atendendo a que sendo $g$ côncava,então $(-g)$é convexa e podemos escrever,

$$g(t,y) \leq g\left[t, \tilde{x}(t)\right] + \langle \delta(t), y - \tilde{x}(t) \rangle$$

para todo o $t \in [0,T]$ e todo o $y \in \mathbb{R}^n$.

Afirma-se que :

$$\int_0^T \langle \delta(t), x(t) - \tilde{x}(t) \rangle dt = 0.$$

Recordando que $B(t) = \int_0^t \delta(s)ds$ e denotando por $u_l$ a componente de ordem $l$ de um vector $u \in \mathbb{R}^n$ , este integral pode ser escrito do seguinte modo :

$$\int_0^T \sum_{l=1}^n \delta_l(t)\left[x_l(t) - \tilde{x}_l(t)\right] dt = \sum_l \int_0^T \delta_l(t)\left[x_l(t) - \tilde{x}_l(t)\right] dt.$$

Mas $x_l(t) - \tilde{x}_l(t) = \int\limits_0^t \left[x_l'(s) - \tilde{x}_l'(s)\right] ds$ se recordarmos que se tem $x(0) = \tilde{x}(0)$ , relação definida no início de (d).

Então ;

$$\sum_l \int\limits_0^T \delta_l(t) \left[x_l(t) - \tilde{x}_l(t)\right] dt = \sum_l \int\limits_0^T \delta_l(t) \left[\int\limits_0^t x_l'(s) - \tilde{x}_l'(s) ds\right] dt =$$

$$= \sum_l \int\limits_0^T \left[x_l'(s) - \tilde{x}_l'(s)\right] \int\limits_s^T \delta_l(t) dt \, ds =$$

$$= \sum_l \int\limits_0^T \left[x_l'(s) - \tilde{x}_l'(s)\right] \cdot \left[B_l(T) - B_l(s)\right] ds =$$

$$= \int\limits_0^T \langle x'(s) - \tilde{x}'(s), B(T) - B(s)\rangle ds =$$

$$= \int\limits_0^T \langle \sum_{i,j} \chi_{E_j^i}(s) v_i(s) - \sum_i p_i(s) v_i(s),\ B(T) - B(s)\rangle ds =$$

$$= \sum_j \int\limits_{K_j} \sum_i \left[\chi_{E_j^i}(s) - p_i(s)\right] \langle v_i(s),\ B(T) - B(s)\rangle ds.$$

Mas por (E),

$$\sum_i \int\limits_{K_j} \chi_{E_j^i}(t) d\beta_i(t) = \sum_i \int\limits_{K_j} p_i(t) d\beta_i(t)$$

e por,

$$d\beta_i(t) = \langle v_i(t),\ B(T) - B(t)\rangle \quad , t \in K_j$$

obtemos a igualdade ,

$$\sum_i \int\limits_{K_j} \chi_{E_j^i}(s) \langle v_i(s),\ B(T) - B(s)\rangle ds =$$

$$= \sum_i \int\limits_{K_j} p_i(s) \langle v_i(s),\ B(T) - B(s)\rangle ds$$

e portanto,

$$\sum_j \int_{K_j} \sum_i \left[\chi_{E_j^i}(s) - p_i(s)\right] \langle v_i(s),\ B(T) - B(s)\rangle ds = 0.$$

Voltando à expressão,

$$g(t,y) \le g\left[t,\tilde{x}(t)\right] + \langle \delta(t), y - \tilde{x}(t)\rangle$$

fazendo $y = x(t)$ e integrando resulta então :

$$\int_0^T g\left[t,x(t)\right] dt \le \int_0^T g\left[t,\tilde{x}(t)\right] dt \qquad \text{(F)}$$

visto que $\int_0^T \langle \delta(t), x(t) - \tilde{x}(t)\rangle dt = 0.$

Porque $\tilde{x}$ é solução do problema (MR) e porque $h_\Phi^{**}(t,x')$ é a maior função convexa não superior a $h(t,x')$ é lícito escrever :

$$\int_0^T g\left[t,\tilde{x}(t)\right] dt + \int_0^T h_\Phi^{**}\left[t,\tilde{x}'(t)\right] dt \le \int_0^T g\left[t,x(t)\right] dt + \int_0^T h\left[t,x'(t)\right] dt.$$

Aplicando **(i)** do Lema **3.3** que estamos a provar, resulta:

$$\int_0^T g\left[t,\tilde{x}(t)\right] dt \le \int_0^T g\left[t,x(t)\right] dt. \qquad \text{(G)}$$

(F) e (G) implicam a igualdade,

$$\int_0^T g\left[t,\tilde{x}(t)\right] dt = \int_0^T g\left[t,x(t)\right] dt$$

e fica provado **(ii)** do Lema **3.3** .

Pelo Lema **3.3**.acabado de provar resulta imediatamente que $x$ é solução do problema (M) e o Teorema **3.1** fica provado.

∎

## APÊNDICE A.1

Neste apêndice demonstra-se o Teorema **3.3** do capítulo III, cujo enunciado foi feito na página 61.

TEOREMA **3.3** :

Seja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função tal que :

**a)** $\forall s \in \mathbb{R},\ \forall p \in \mathbb{R}^n \ :\ f(s,p) \geq 0;$

**b)** $\forall p \in \mathbb{R}^n, \quad f(\cdot,p)$ é mensurável em $\mathbb{R}$;

**c)** $\forall s \in \mathbb{R}, \quad f(s,\cdot)$ é convexa em $\mathbb{R}^n$;

**d)** $\forall s \in \mathbb{R}, \quad f(s,0)$ é $SCI$.

**e)** $\alpha_f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$,

$$\alpha_f(s) = \limsup_{p \to 0} \frac{[f(s,0) - f(s,p)]^+}{|p|}$$

Então para todo o $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ a função $x \mapsto f[u(x), Du(x)]$ é mensurável e o funcional $F(u) = \int_\Omega f(u, Du)dx$ é $SCI$ em $W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ relativamente à topologia induzida por $L^1_{loc}(\Omega)$ .

**OBS.**

**1)** Observe-se em primeiro lugar que estamos a considerar $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ tal que :

$$u : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}$$
$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$
$$Du = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) \in \mathbb{R}^n.$$

**2)** Tem-se ainda que $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $Du \in L^1_{loc}(\Omega)$ . Diz-se que $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ se $u \in L^1(\Omega')$ para todo o $\Omega' \subset \Omega$ tal que $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ e $\overline{\Omega'}$ é compacto.

Para $p \in [1, +\infty]$ tem-se que $L^p(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega)$.

**3)** Este teorema difere de outros relativos à semicontinuidade principalmente porque não supomos que a função $f(\cdot,p)$ é contínua ou $SCI$ ,excepto para $p = 0$ (hipótese (d)). Apenas se supõe que $f(\cdot,p)$ é mensurável.

4) A hipótese (e) não pode ser eliminada, como se vê pelo seguinte exemplo :

$$\text{seja } n = 1, \quad \Omega = ]0,1[ \text{ e}$$
$$f(s,p) = \begin{cases} \left[1+\frac{p}{s}\right]^{+} & , \ s \neq 0 \\ 1 & , \ s = 0 . \end{cases}$$

Para todo o $\varepsilon > 0$ faça-se $u_\varepsilon(x) = \varepsilon - \varepsilon x$.
Então $\{u_\varepsilon\}$ converge para zero quando $\varepsilon \to 0$.
Mas :

$$F(u_\varepsilon) = \int_0^1 f\left(u_\varepsilon, Du_\varepsilon\right) dx = \int_0^1 \left[1 + \frac{Du_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right]^{+} dx = \int_0^1 \left[1 + \frac{-\varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon x}\right]^{+} dx$$

Porém;

$$\left[1 + \frac{-\varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon x}\right]^{+} = \left[\frac{\varepsilon - \varepsilon x - \varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon x}\right]^{+} = \left[\frac{-\varepsilon x}{\varepsilon - \varepsilon x}\right]^{+}$$
$$= \left[\frac{-\varepsilon x}{-\varepsilon\left(-1+x\right)}\right]^{+} = \left[\frac{x}{x-1}\right]^{+}.$$

Observe-se ainda que

$$0 < x < 1,$$
$$-1 + 0 < -1 + x < -1 + 1,$$
$$-1 < -1 + x < 0,$$
$$\Rightarrow \left[\frac{x}{x-1}\right]^{+} = 0 \quad \text{e portanto } F(u_\varepsilon) = 0.$$

Mas

$$F(0) = \int_0^1 f\left(0,p\right) dx = \int_0^1 1 \cdot dx = 1.$$

Se $F(u)$ fosse $SCI$ ter-se-ia $F(0) \leq \liminf\limits_{u_\varepsilon \to 0} F(u_\varepsilon)$ , o que não acontece.

Observe-se que $f$ satisfaz todas as hipóteses do teorema excepto (e).

Retome-se, para ver isto :

$$f(s,p) = \begin{cases} \left[1+\frac{p}{s}\right]^{+} & , \ s \neq 0 \\ 1 & , \ s = 0. \end{cases}$$

$$\alpha_f(s) = \limsup_{p\to 0} \frac{[f(s,0)-f(s,p)]^+}{|p|} = \begin{cases} \limsup_{p\to 0} \dfrac{\left[1-\left(1+\frac{p}{s}\right)^+\right]^+}{|p|} & , s \neq 0 \\ \limsup_{p\to 0} \dfrac{[1-1]^+}{|p|} = 0, s = 0 & . \end{cases}$$

Também,

$$s \neq 0,\ 1+\frac{p}{s} > 0 \Rightarrow \left[1-1-\frac{p}{s}\right]^+ = \left[-\frac{p}{s}\right]^+$$
$$s \neq 0,\ 1+\frac{p}{s} < 0 \Rightarrow [1-0]^+ = 1.$$

Então o primeiro ramo desdobra-se :

$$\limsup_{p\to 0} \frac{\left[1-\left(1+\frac{p}{s}\right)^+\right]^+}{|p|} = \begin{cases} \limsup_{p\to 0} \dfrac{\left[-\frac{p}{s}\right]^+}{|p|} = \begin{cases} \limsup_{p\to 0} \dfrac{-\frac{p}{s}}{|p|} & \text{se } -\frac{p}{s} > 0 \\ 0 & \text{, se } -\frac{p}{s} < 0 \end{cases} \\ \limsup_{p\to 0} \dfrac{1}{|p|} = +\infty \end{cases}$$

Tem-se ainda :

$$\limsup_{p\to 0} \frac{-\frac{p}{s}}{|p|} = \limsup_{p\to 0} \left(-\frac{p}{s\,|p|}\right) = \limsup_{p\to 0} \left(\pm\frac{1}{s}\right) = \pm\frac{1}{s}.$$

Finalmente,

$$\alpha_f(s) = \begin{cases} \pm\frac{1}{s}\ ,\ s \neq 0,\ -\frac{p}{s} > 0 \\ +\infty\ ,\ s \neq 0,\ -\frac{p}{s} < 0 \\ 0\ ,\ s = 0\ . \end{cases}$$

Para satisfazer a hipótese (e) teria de ser $\alpha_f(s) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ , o que significa que para todo o compacto $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}$ deve ser $\|\alpha_f(s)\|_{L^1} < +\infty$ , $s \in \overline{\Omega}$ .

O segundo ramo de $\alpha_f$ não permite que (e) se verifique. Além disso, para o primeiro ramo tem-se :

$$\int_0^1 |\alpha_f(s)|\, ds = \int_0^1 \left|\frac{1}{s}\right| ds = [\log\ |s|]_0^1 = +\infty.$$

Antes de podermos efectuar a demonstração do Teorema **3.3** ,vamos precisar de onze lemas auxiliares.

LEMA 1 :

Seja uma função $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ e seja $E$ um boreliano de $\mathbb{R}$ t.q. $m(E) = 0$ .

Então $Du = 0$ q.s. em $u^{-1}(E)$.

**dem.** Vamos demonstrar o Lema para:

$n = 1$,
$u : [a, b] \to \mathbb{R}$ , $u \in W^{1,1}_{loc}(a, b)$ ,
$F = u^{-1}(E) \subset [a, b]$ ,
$Du = u'$ .

**1)** Vamos supor inicialmente $u \in C^1([a, b])$ .

Recorde-se que $C^1(\overline{\Omega}) \subset W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ , $n = 1$.

Escreva-se

$$A_0 = \left\{x \in ]a, b[ : u'(x) = 0\right\} ,$$
$$A = ]a, b[ \setminus A_0 .$$

Como $A$ é aberto, pode ser decomposto numa sucessão de intervalos abertos mutuamente disjuntos $]a_j, b_j[$. Em cada um destes intervalos $u'$ tem sinal constante.

Então $u$ é um difeomorfismo em $]a_j, b_j[$ ,(Apêndice A2, [32]) .

Sendo $u$ um difeomorfismo em $]a_j, b_j[$ podemos escrever pela fórmula de mudança de variável e pela hipótese, em cada $]a_j, b_j[$ :

$$\int_{a_j}^{b_j} \chi_F(x) \left|u'(x)\right| dx = m\left(u\left[\,]a_j, b_j[\, \cap F\right]\right) = 0$$

para $j = 1, 2, \ldots$

Então :

$$\int_F \left|u'\right| dx = \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{a_j}^{b_j} \chi_F(x) \left|u'\right| dx + \int_{A_0 \cap F} \left|u'\right| dx = 0$$

e portanto $u'(x) = 0$ q.s. em $F$ , para

$$u \in C^1([a, b]) .$$

**2)** Afirmamos que para todo o $\varepsilon > 0$ existe uma função $v_\varepsilon \in C^1([a,b])$ e existe um compacto $K_\varepsilon \subset [a,b]$ tais que $m([a,b] \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$ e $v_\varepsilon(x) = u(x)$ , $v_\varepsilon'(x) = u'(x)$ , para todo o $x \in K_\varepsilon$ .

Fixemos $\varepsilon > 0$.

Aplicando o Teorema de LUSIN a $u'(x)$ podemos determinar um compacto $K_0 \subset [a,b]$ t.q. $u$ é diferenciável em $K_0$ e $u'|_{K_0}$ é contínua e $m([a,b] \setminus K_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Para $x, y \in K_0$ , $x \neq y$ , definimos :

$$R(x,y) = \left| \frac{u(y) - u(x)}{y - x} - u'(x) \right| \geq 0.$$

Definimos ainda para qualquer $x \in K_0$ e qualquer $j = 1, 2 \ldots$ :

$$\rho_j(x) = \sup \left\{ R(x,y) : y \in K_0 \ , \ 0 < |x - y| < \frac{1}{j} \right\}.$$

Quando $j \to +\infty$ resulta $\rho_j(x) \to 0$ , $\forall x \in K_0$. Então pelo Teorema de EGOROV(Apêndice A2, [33]) existirá um compacto $K_\varepsilon \subset K_0$ com $m(K_\varepsilon \setminus K_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ tal que $\rho_j(\cdot) \to 0$ uniformemente em $K_\varepsilon$ .

Como $u'$ é contínua em $K_\varepsilon$ ( por ser contínua em $K_0$ ) podemos concluir que existe uma função crescente $w : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ com $\lim_{t \to 0^+} w(t) = 0$ , tal que :

$$\forall x, y \in K_\varepsilon : R(x,y) + \left| u'(y) - u'(x) \right| \leq w(|y - x|) \qquad \textbf{(A)}$$

Para construirmos a função $v_\varepsilon$ observamos que $]a,b[ \setminus K_\varepsilon$ é um aberto,

$$]a,b[ \setminus K_\varepsilon = ]a,b[ \cap K_\varepsilon^C$$

e pode ser decomposto numa sucessão de intervalos disjuntos $]a_j, b_j[$.
Para qualquer $j = 1, 2, 3, \ldots$ definimos $u_j$ por un polinómio do terceiro grau tal que

$$\begin{array}{ll} u_j(a_j) = u(a_j) & \qquad u_j(b_j) = u(b_j) \\ u_j'(a_j) = u'(a_j) & \qquad u_j'(b_j) = u'(b_j). \end{array}$$

Escrevendo o polinómio em potências de $(x - a_j)$ ter-se á :

$$u_j(x) = u_j(a_j) + \frac{u_j'(a_j)}{1!}(x - a) + \frac{u_j''(a_j)}{2!}(x - a_j)^2 + \frac{u_j'''(a_j)}{3!}(x - a_j)^3 =$$

$$u(a_j) + u'(a_j)(x - a_j) + \frac{u_j''(a_j)}{2!}(x - a_j)^2 + \frac{u_j'''(a_j)}{3!}(x - a_j)^3$$

e como

$$u''(a_j) = \frac{6R(a_j, b_j) + 2[u'(a_j) - u'(b_j)]}{b_j - a_j}$$

$$u''(a_j) = \frac{6[u'(b_j) - u'(a_j)] - 12R(a_j,b_j)}{(b_j - a_j)^2}$$

resulta :

$$u_j(x) = u(a_j) + u'(a_j)(x - a_j) +$$

$$+ [3R(a_j, b_j) + u'(a_j) - u'(b_j)] \cdot \frac{(x - a_j)^2}{b_j - a_j} +$$

$$+ [u'(b_j) - u'(a_j) - 2R(a_j, b_j)] \cdot \frac{(x - a_j)^3}{(b_j - a_j)^2}.$$

Então

$$\max_{a_j \le x, y \le b_j} \left|u_j'(x) - u_j'(y)\right| \le c\left[R(a_j, b_j) + \left|u_j'(b_j) - u_j'(a_j)\right|\right]$$

e utilizando a relação **(A)** obtemos :

$$\max_{a_j \le x, y \le b_j} \left|u_j'(x) - u_j'(y)\right| \le c\, w(|b_j - a_j|)\,. \qquad \textbf{(B)}$$

Definimos agora para qualquer $x \in [a, b]$ :

$$v_\varepsilon(x) = \begin{cases} u(x), \ x \in K_\varepsilon \\ u_j(x), \ x \in [a_j, b_j] \text{ , para algum } j. \end{cases}$$

Então :

$$v_\varepsilon'(x) = \begin{cases} u'(x), \ x \in K_\varepsilon \\ u_j'(x), \ x \in [a_j, b_j] \text{ , para algum } j \end{cases}$$

e portanto $v_\varepsilon'(x)$ existe para qualquer $x \in [a, b]$ , $v_\varepsilon'(x)$ é contínua em $[a, b]$ e $v_\varepsilon'(x) = u'(x)$ em $K_\varepsilon$ .

**3)** Pelo passo **(2)** deduzimos que para qualquer $j = 1, 2, \ldots$existe a função $v_j \in C^1([a, b])$ e um compacto $K_j \subset [a, b]$ t.q. $v_j(x) = u(x)$ , $v_j'(x) = u'(x)$ em $K_j$ e

$$m\left([a,b]\setminus K_j\right) < \frac{1}{j}\ .$$

Então pelo passo **(1)** :

$$\int\limits_{K_j\cap F} |u'|\, dx = \int\limits_{K_j\cap F} \left|v_j'\right| dx = 0$$

pois $\qquad m\left[v_j\left(K_j \cap F\right)\right] = m\left[u\left(K_j \cap F\right)\right] = 0\ .$

Portanto $u' = 0$ q.s. em $K_j \cap F$ para qualquer $j$ pelo que $u' = 0$ em $F$ .

Para generalizarmos a $n > 1$,recorremos à norma das derivadas.

Seja,por exemplo,$n = 2, \Omega \subset \mathbb{R}^2, u : \Omega \to \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}$ , com $m(E) = 0$, $F = u^{-1}(E) \subset \Omega, u \in C^1(\Omega)$ .

Então,

$$\iint\limits_F |Du|\, dxdy = \iint\limits_F \left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\right) dxdy.$$

Escrevendo,

$$\Omega_{x_0} = \{(x,y) \in F : x = x_0\}\,,$$

vem,

$$u\left(x_0, y\right) = v\left(y\right),$$

e pelo resultado já provado tem-se $v'(y) = 0$ q.s. em $v^{-1}(E)$ .

Analogamente,

$$\begin{gathered}\Omega_{y_0} = \{(x,y) \in F : y = y_0\}\,,\\ u\left(x{,}y_0\right) = w\left(x\right),\\ w'\left(x\right) = 0 \text{ q.s. em } w^{-1}\left(E\right).\end{gathered}$$

Então,

$$\iint\limits_F |Du|\, dxdy = \iint\limits_F \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| dxdy + \iint\limits_F \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| dxdy =$$

$$= \int\limits_{\Omega_{y_0}\cap F} \left|w'\right| dx + \int\limits_{\Omega_{x_0}\cap F} \left|v'\right| dy = 0.$$

Portanto, $Du = 0$, q.s. em $F$.

■

Antes de passarmos ao Lema **2** precisamos de definir o que aqui se entende por integrando e integrandos equivalentes.

DEFIN. A :

Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é um integrando se :

**a)** - $\forall p \in \mathbb{R}^n$ , $s \longmapsto f(s,p)$ é mensurável em $\mathbb{R}$ .

**b)** - $\forall s \in \mathbb{R}$ , $p \longmapsto f(s,p)$ é contínua em $\mathbb{R}^n$.

**c)** - $s \longmapsto f(s,0)$ é função de BOREL.

DEFIN. B :

Diz-se que dois integrandos $f$ ,$g$ são equivalentes se existir um conjunto de Borel, $N \subseteq \mathbb{R}$ , com $med(N) = 0$, t.q.

**a)**- $\forall s \in \mathbb{R} \backslash N$, $\forall p \in \mathbb{R}^n$ : $f(s,p) = g(s,p)$ ;

**b)**- $\forall s \in \mathbb{R}$ ; $f(s,0) = g(s,0)$.

LEMA **2** :

Se $f, g$ são integrandos equivalentes e $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ então

$$f\left[u(x), Du(x)\right] = g\left[u(x), Du(x)\right] \quad \text{q.s. em } \Omega.$$

**dem**.

Observe-se que :

$$u : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R} \quad , \quad u(x) \in \mathbb{R} \quad , \quad Du \in \mathbb{R}^n.$$

Então, $\forall u(x) \in \mathbb{R} \backslash N$ ,$\forall Du \in \mathbb{R}^n$ tem-se por (a) da DEFIN.B que,

$$f\left[u(x), Du(x)\right] = g\left[u(x), Du(x)\right].$$

Por outro lado tem-se $Du = 0$ em $u^{-1}(N)$ pelo Lema (1) e por (b) da DEFIN. B tem-se :

$$\forall u(x) \in \mathbb{R} \quad : f\left[u(x), 0\right] = g\left[u(x), 0\right].$$

Então,

$$f[u(x), Du(x)] = g[u(x), Du(x)] \quad \text{q.s em } \Omega.$$

■

LEMA 3 :

Se $f$ for um integrando e $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ , $x \mapsto f[u(x), Du(x)]$ é função mensurável em $\Omega$.

**dem.**

Por **(a)** e **(b)** da DEFIN A $f$ é de Carathéodory e portanto é um integrando normal pelo Teorema **2.6.** do capítulo III. Então pela definição de integrando normal existe uma função de Borel , $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ , tal que $g(s, \cdot) = f(s, \cdot)$ , q.s.em $\Omega$ .

Então $g, f$ são integrandos equivalentes e pelo Lema 2 ,

$$f[u(x), Du(x)] = g[u(x), Du(x)] \quad \text{q.s em } \Omega.$$

Como $g$ é de Borel e, portanto, mensurável, $f[u(\cdot), Du(\cdot)]$ é mensurável.

■

LEMA 4 :

Seja $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ,uma função lipschitziana e seja $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função mensurável, limitada,tal que $a'(s) = b(s)$ *q.s.* em $\mathbb{R}$.

Seja $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ e $v = a \circ u$ .

Então $v \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ e $Dv = b(u).Du$ *q.s.* em $\Omega$ .

**dem.**

Como $u \in W^{1,1}_{loc}$,um teorema conhecido (Apêndice A2, [34])garante que $u$ é $AC$ em todos os segmentos contidos em $\Omega$ e paralelos aos eixos coordenados.

Escolhemos um eixo coordenado,digamos $i$ ,e consideramos o operador de derivação parcial $D_i$ .

Como $a$ é lipschitziana tem-se que $a \circ u$ é $AC$ em quase todos os segmentos $\lambda$ paralelos ao eixo $i$ .Além disso ,

$$D_i(a \circ u)(x) = a'[u(x)] . D_i u(x), \qquad \textbf{(A)}$$

para todo o $x \in \lambda$ t.q. $D_i u(x)$ e $a'[u(x)]$ existam.

Observe-se que se $D_i u(x) = 0$ , então $D_i(a \circ u)(x) = 0$.

De facto:

$$\frac{|a[u(x+he_i)-a[u(x)]]|}{|h|} \leq M.\frac{|u(x+he_i)-u(x)|}{|h|} \qquad (\mathbf{A}')$$

onde $M$ é a constante de Lipschitz de $a$ e $e_i$ é o vector do eixo $i$ .
Se escrevermos,

$$N = \lambda \cap \{x : D_i u(x) = 0\},$$

podemos então afirmar que a condição (**A**) é válida em $N$ .Seja ainda,

$$P = (\lambda \setminus N) \cap \{x \in \Omega : D_i u(x) \text{ existe e } D_i u(x) \neq 0\}.$$

Observe-se que $P \cup N$ tem a medida de Hausdorff (Apêndice A2, [35]) ,

$$H^1 \,(\text{quase todo o } \lambda).$$

Sabemos ainda que se $S \subset P$ e $H^1[u(S)] = 0$ então $H^1(S) = 0$.
Em particular,se definirmos

$$E = \left\{ y : a'(y) \text{ não existe} \right\}$$

então,

$$H^1[u^{-1}(E) \cap P] = 0.$$

Como a expressão (**A**) ,

$$D_i(a \circ u)(x) = a'[u(x)].D_i u(x),$$

é válida se $x \in \lambda \setminus (u^{-1}(E) \cap P)$ segue-se que (**A**) é válida para $H^1(\lambda, \text{q.s.})$ .
Para $x \in \lambda \setminus (u^{-1}(E) \cap P)$ segue-se por $(\mathbf{A}')$ que,

$$|D_i(a \circ u)(x)| \leq M\,|D_i u(x)|. \qquad (\mathbf{B})$$

Se soubermos que o conjunto $\Omega_0$ dos $x \in \Omega$ para os quais (**A**) é válida,é mensurável,podemos aplicar o teorema de Fubini, (Apêndice A2, [36]) :

$$\int_{\Omega_0} |D(a \circ u)(x)|\,dx \leq M \int_{\Omega_0} |D_i u(x)|\,dx < \infty,$$

o que implica que $D(a \circ u)(x) \in L^1(\Omega_0)$.

Pelo teorema já referido, (Apêndice A2, [34]) ,resulta que $a \circ u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ e,

$$D(a \circ u)(x) = a'[u(x)]\, Du, \quad \text{q.s. em } \Omega .$$

■

<u>LEMA 5</u> :

Seja uma função $b \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ e uma função $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$a(t) = \int_0^t b(s)ds.$$

Seja $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ tal que $\int_\Omega \langle b(u), Du\rangle^+ dx < +\infty$.

Então para toda a função $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ , $\varphi \geq 0$ ,a função $\langle b(u), Du\rangle\varphi$ pertence a $L^1(\Omega)$,

e,

$$\int_\Omega \langle b(u), Du\rangle\varphi \, dx = -\int_\Omega \langle a(u), \; D\varphi\rangle dx.$$

**<u>dem.</u>**

Se $b$ for limitada, o resultado é consequência do Lema 4 .No caso geral é suficiente aproximar $b$ por uma sucessão $(b_h)$ definida por

$$b_h(s) = \begin{cases} b(s) \ , \text{ se } |b(s)| \leq h \\ 0, \qquad \text{se } |b(s)| > h \ . \end{cases}$$

■

<u>LEMA 6</u> :

Seja $(f_n)$ uma sucessão de funções mensuráveis não negativas, $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, e seja $f_\infty = \sup_h f_h$.

Então para todo o aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ tem-se ,

$$\int_A f_\infty(x)\, dx = \sup_{k \in \mathbb{N}} \sup \left\{ \sum_{i=1}^k \int_{A_i} f_i(x)dx : A_1, \ldots, A_k \right\}$$

onde $A_1, \ldots, A_k$ são subconjuntos abertos de $A$ , disjuntos dois a dois.

<u>**dem.**</u>
Para todo o $k \in \mathbb{N}$ faça-se,

$$g_k = \sup\{f_i : i = 1, \ldots, k\}.$$

Pelo Teorema de BEPPO-LEVI(Apêndice A2, [37]) vem que ,

$$\int_A f_\infty(x)dx = \sup_{k\in\mathbb{N}} \int_A g_k(x)dx.$$

Fixe-se $k \in \mathbb{N}$ ; existem subconjuntos mensuráveis disjuntos dois a dois $B_1, \ldots, B_k$ de $A$ tais que $g_k = f_i$ em $B_i$ .
Então :

$$\int_A g_k(x)dx = \sum_{i=1}^{k} \int_{B_i} f_i(x)dx =$$

$$= \sup\left\{\sum_{i=1}^{k} \int_{K_i} f_i(x)dx : K_i \subseteq B_i \ , \ K_i \text{ compactos}\right\} =$$

$$= \sup\left\{\sum_{i=1}^{k} \int_{A_i} f_i(x)dx : A_1, \ldots, A_k \subset A \ , \text{ abertos disjuntos dois a dois}\right\}.$$

Finalmente ,

$$\int_A f_\infty(x)dx = \sup_{k\in\mathbb{N}} \int_A g_k(x)dx =$$

$$= \sup_{k\in\mathbb{N}} \ \sup\left\{\sum_{i=1}^{k} \int_{A_i} f_i(x)dx : A_1, \ldots, A_k \subset A\right\} \ , \text{ com}$$

$A_1, \ldots, A_k$ , abertos e disjuntos dois a dois.

■

<u>LEMA 7</u> :

Seja $(f_h)$ uma sucessão de integrandos não negativos e seja

$$f_\infty = \sup_h f_h.$$

Seja ainda

$$F_h(u,A) = \int_A f_h(u,Du)dx \ ,$$

para todo o aberto $A \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ , para toda a função $u \in W^{1,1}_{loc}$ (A), e para todo o $h \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Admita-se que $F_h(\cdot, A)$ é um funcional $SCI$ em $L^1_{loc}(A)$ para todo o $h \in \mathbb{N}$ e todo o aberto $A \subset \Omega$.

Então o funcional $F_\infty(\cdot, A)$ é $SCI$ em $L^1_{loc}$(A) para todo o aberto $A \subset \Omega$.

<u>dem.</u>
É consequência do Lema **6.**

<u>LEMA 8</u> :

Seja $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ , $b$ uma função mensurável e seja

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ , \ g \ SCI \ , \ g \leq 0.$$

Então o funcional $\quad F(u) = \int_\Omega [g(u) + \langle b(u), Du\rangle]^+ \, dx \quad$ é $SCI$.

<u>dem.</u>
Suponha-se inicialmente que $b$ e $g$ são limitadas. Para toda a função $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ temos que:

$$F(u) = \sup \left\{ \int_\Omega [g(u) + \langle b(u), Du\rangle] \, \varphi \, dx : \varphi \in C^\infty_0(\Omega), 0 \leq \varphi \leq 1 \right\}.$$

Portanto é suficiente provar que para todo o $\varphi \in C^\infty_0(\Omega)$ , $\varphi \geq 0$ ,são $SCI$ os funcionais,

$$G(u) = \int_\Omega g(u) \, \varphi \, dx$$

$$H(u) = \int_\Omega \langle b(u), Du\rangle \varphi \, dx.$$

Para $G$ é suficiente aplicar o Lema de FATOU.
Pelo Lema **4** tem-se,

$$H(u) = \int_\Omega div(a \circ u)\varphi dx = -\int_\Omega \langle a(u), D\varphi\rangle dx,$$

com $a(t) = \int\limits_0^t b(s)ds.$

Isto implica que $H$ é contínua em $W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ relativamente à topologia induzida por $L^1_{loc}(\Omega)$.

Se $b$ ou $g$ forem não limitadas, define-se a sucessão de funções $(b_h)$,

$$b_h(s) = \begin{cases} b(s) \ , & \text{se } |b(s)| \leq h \\ 0 \ , & \text{se } |b(s)| > h \end{cases}$$

e define-se uma sucessão crescente de funções em $C_0^\infty(\mathbb{R})$ , $(\sigma_h)$ ,com $\sigma_h \geq 0$ e $\lim\limits_h \sigma_h(s) = 1$ para todo o $s \in \mathbb{R}$ .Como $g$ é $SCI$ e $g \leq 0$ , toda a função $\sigma_h(s) \cdot g(s)$ é limitada.

Pelo Teorema de Beppo Levi :

$$F(u) = \sup_{h\in\mathbb{N}} \int\limits_\Omega [\sigma_h(u)g(u) + \langle\sigma_h(u)b_h(u), Du\rangle]^+ \, dx$$

e portanto a $SCI$ de $F$ deriva do resultado obtido no caso de $b, g$ serem limitadas.

■

<u>LEMA **9**</u> :

Seja $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ , uma função mensurável e seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função mensurável tal que $g \leq 0$.

Então o funcional $F(u) = \int\limits_\Omega [g(u) + \langle b(u), Du\rangle]^+ \, dx$ é $SCI$.

**<u>dem</u>.**

Pelo Teorema de LUSIN existe uma sucessão crescente $(K_h)$ de subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ e uma sucessão $(g_h)$ de funções contínuas $g_h \leq 0$ , tais que $g_h(s) = g(s)$ para todo o $s \in K_h$ e $m(\mathbb{R}\backslash E) = 0$ com $E = \bigcup\limits_h K_h$.

Como $g \leq 0$, usando o Lema **2** e o Teorema de Beppo Levi obtemos

$$F(u) = \int\limits_\Omega 1_E(u) \, [g(u) + \langle b(u), Du\rangle]^+ \, dx =$$

$$= \sup_{h\in\mathbb{N}} \int\limits_\Omega [1_{K_h}(u)g_h(u) + \langle 1_{K_h}(u) \, b(u), Du\rangle]^+ \, dx$$

para todo o $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$.

Como $g_h \leq 0$ , as funções $1_{K_h}(s)g_h(s)$ são $SCI$ e a $SCI$ de $F$ é garantida pelo Lema **8.**

∎

LEMA 10 :

Admita-se que $f$ satisfaz **(a)**,**(b)**,**(c)** da hipótese do Teorema **3.3** e que $f(s,0) = 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

Então o funcional $F(u) = \int_\Omega f(u, Du)\, dx$ é $SCI$.

**dem.**

Para todo o $s \in \mathbb{R}$ escreva-se :

$$K(s) = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : f(s,p) \geq a + \langle b,p\rangle \ , \forall p \in \mathbb{R}^n\}.$$

Pelo teorema da selecção mensurável existe uma sucessão $(a_h)$ de funções mensuráveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e uma sucessão $(b_h)$ de funções mensuráveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^n$ tais que, para todo o $s \in \mathbb{R}$ o conjunto

$$\{(a_h(s), b_h(s)) : h \in \mathbb{N}\}$$

é denso em $K(s)$.

Então para todo o $s \in \mathbb{R}$ e todo o $p \in \mathbb{R}^n$,

$$f(s,p) = \sup\left\{[a + \langle b,p\rangle]^+ : (a,b) \in K(s)\right\} =$$

$$= \sup_{h \in \mathbb{N}} [a_h(s) + \langle b_h(s),p\rangle]^+ . \qquad \textbf{(1)}$$

Como $f(s,0) = 0$ , então por **(1)** temos que $a_h(s) \leq 0$. A $SCI$ de $F$ deriva então do Lema **9** e do Lema **7.**

∎

LEMA 11 :

Seja $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ , $\varphi \geq 0$.

Admita-se que $f$ satisfaz **(a)**,**(b)**,**(c)** da hipótese do teorema **3.3** e que $f(s,0) = 0$ para todo o $s \in \mathbb{R}$.

Então o funcional $F(u) = \int_\Omega f(u, Du)\varphi\, dx$ é $SCI$.

<u>dem.</u>
Para todo o $h, k \in \mathbb{N}$ seja :

$$\Omega_{h,k} = \left\{x \in \Omega : \varphi(x) > k \cdot 2^{-h}\right\}$$

e ainda,

$$\varphi(x) = 2^{-h} \sum_{k=1}^{4^h} 1_{\Omega_{h,k}}(x).$$

A sucessão $(\varphi_h)$ é crescente e $\varphi = \sup_{h \in \mathbb{N}} \varphi_h$.
Então :

$$F(u) = \sup_{h \in \mathbb{N}} \int_\Omega f(u, Du)\varphi_h \, dx = \sup_{h \in \mathbb{N}} 2^{-h} \sum_{k=1}^{4^h} \int_{\Omega_{h,k}} f(u, Du) dx.$$

A $SCI$ de $F(\cdot)$ deriva então do Lema **10**.

■

Vamos finalmente iniciar a demonstração do Teorema **3.3** .

<u>dem.</u>
Suponha-se inicialmente que $\alpha_f \in L^1(\mathbb{R})$.
Para todo o $s \in \mathbb{R}$ seja $\partial f(s, 0)$ o gradiente generalizado, no ponto $p = 0$ ,da função convexa $p \longmapsto f(s,p)$ e seja $b(s)$ o elemento $b(s) \in \partial f(s, 0)$ tal que,

$$|b(s)| = \min\{|q| : q \in \partial f(s,0\}.$$

Recordemos aqui o seguinte teorema, ([8] , pág.236):

Seja $B \subset \mathbb{R}^P$ , $B$ compacto e seja $g$ um integrando normal em $\Omega \times B$.
Então existe uma aplicação mensurável $\overline{u} : \Omega \to B$ tal que, para todo o $x \in \Omega$ se tem:

$$g\left[x, \overline{u}(x)\right] = \min_{a \in B} \{g(x, a)\}.$$

Então $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ é mensurável e $|b(s)| = \alpha_f(s)$ para todo o $s \in \mathbb{R}$.

Como,

$$f(s,p) \geq f(s,0) + \langle b(s), p\rangle \qquad \textbf{(2)}$$

para todo o $s \in \mathbb{R}$ e todo o $p \in \mathbb{R}^n$ a função

$$g(s,p) = f(s,p) - f(s,0) - \langle b(s), p\rangle \qquad \mathbf{(3)}$$

satisfaz as hipóteses do Lema **10.**

Seja $(u_h)$ uma sucessão de funções em $W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ convergente em $L^1_{loc}(\Omega)$ para uma função $u_\infty \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$.

Temos de provar que

$$F(u_\infty) \leq \liminf_h F(u_h) \quad . \quad \mathbf{(4)}$$

Se o segundo membro da desigualdade for igual a $+\infty$ a desigualdade é trivial.

Vamos supor que $\lim_h F(u_h) < +\infty$ e que $F(u_h) < +\infty$ para todo o $h \in \mathbb{N}$.

Como $f(s,p) \geq 0$ obtemos de **(2)** que

$$\int_\Omega \langle b(u_h), Du\rangle^+ dx \leq F(u_h) < +\infty.$$

Como a função $\langle b(s), p\rangle^+$ satisfaz as hipóteses do Lema **10** ,podemos escrever :

$$\int_\Omega \langle b(u_\infty), Du_\infty\rangle^+ dx \leq \liminf_h \int_\Omega \langle b(u_h), Du_h\rangle^+ dx \leq$$

$$\leq \liminf_h F(u_h) < +\infty.$$

Seja agora $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ com $0 \leq \varphi \leq 1$.

Para todo o $s \in \mathbb{R}$ escrevemos

$$a(t) = \int_0^t b(s)ds,$$

e pelo Lema **5** :

$$\int_\Omega \langle b(u_h), Du_h\rangle \varphi dx = -\int_\Omega \langle a(u_h), D\varphi\rangle dx \qquad \mathbf{(5)}$$

para todo o $h \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Pelo Lema **11** :

$$\int_{\Omega} g(u_\infty, Du_\infty)\,\varphi dx \leq \liminf_h \int_{\Omega} g(u_h, Du_h)\,\varphi dx. \qquad \textbf{(6)}$$

Como a função $s \longmapsto f(s,0)$ é $SCI$ , podemos aplicar o Lema de FATOU e obter :

$$\int_{\Omega} f(u_\infty, 0)\,\varphi dx \leq \liminf_h \int_{\Omega} f(u_h, 0)\,\varphi dx. \qquad \textbf{(7)}$$

Como $a$ é contínua e limitada obtemos de **(5)** que :

$$\int_{\Omega} \langle b(u_\infty), Du_\infty\rangle \varphi dx = \lim_h \int_{\Omega} \langle b(u_h), Du_h\rangle \varphi dx. \qquad \textbf{(8)}$$

De **(3)**,**(6)**,**(7)**,**(8)** vem então que,

$$\int_{\Omega} f(u_\infty, Du_\infty)\,\varphi dx \leq \liminf_h \int_{\Omega} f(u_h, Du_h)\,\varphi dx \leq \liminf_h \int_{\Omega} F(u_h).$$

Como,

$$F(u_\infty) = \sup\left\{\int_{\Omega} f(u_\infty, Du_\infty)\,\varphi dx : \varphi \in C_0^\infty(\Omega), 0 \leq \varphi \leq 1\right\}$$

obtemos,

$$F(u_\infty) \leq \liminf_h F(u_h)$$

e o teorema fica provado no caso de $\alpha_f \in L^1(\mathbb{R})$ .

No caso geral de $\alpha_f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ , admita-se uma sucessão crescente $(\sigma_h)$ de funções pertencentes a $C_0^\infty(\mathbb{R})$ , com $\sigma_h \geq 0$ e $\lim_h \sigma_h(s) = 1$ para todo o $s \in \mathbb{R}$ .

Faça-se,

$$f_h(s,p) = \sigma_h(s) \cdot f(s,p) \text{ , para todo o } s \in \mathbb{R} \text{ e } p \in \mathbb{R}^n \text{ e}$$

$$F_h(u) = \int_{\Omega} f_h(u, Du)dx.$$

Para todo o $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ tem-se então ,

$$F(u) = \sup_h F_h(u).$$

Como $\alpha_{f_h} \in L^1(\mathbb{R})$ , os funcionais $F_h$ são $SCI$ pelo que $F$ é $SCI$ .

■

## APÊNDICE A.2

[1] Seja $g(x,u)$ uma função integrável de $x$ para cada valor de $u$ . Admita-se que $\dfrac{\partial g(x,u)}{\partial u}$ existe e é uma função contínua de $x$ e de $u$ no rectângulo $a \le x \le b$, $c \le u \le d$ .

Seja $\quad I(u) = \int\limits_a^b g(x,u)\,dx.$

Então, $\quad \dfrac{dI}{du} = \int\limits_a^b \dfrac{\partial g(x,u)}{\partial u} dx.$

**dem.**

A expressão da tese equivale a escrever,

$$\lim_{h\to 0}\left\{\frac{I(u+h)-I(u)}{h} - \int\limits_a^b \frac{\partial g}{\partial u}dx\right\} = 0.$$

Mas,

$$I(u+h)-I(u) = \int\limits_a^b [g(x,u+h)-g(x,u)]\,dx.$$

Aplicando o teorema do valor médio a $u \mapsto g(x,u)$ obtemos :

$$g(x,u+h)-g(x,u) = h\cdot\frac{\partial g(x,u+\theta h)}{\partial u},\ \ \theta(x,u,h)\in\, ]0,1[$$

$$I(u+h)-I(u) = \int\limits_a^b [g(x,u+h)-g(x,u)]\,dx = \int\limits_a^b h\frac{\partial g(x,u+\theta h)}{\partial u}dx$$

$$\frac{I(u+h)-I(u)}{h} = \int\limits_a^b \frac{\partial g(x,u+\theta h)}{\partial u}dx$$

$$\left\{\frac{I(u+h)-I(u)}{h} - \int\limits_a^b \frac{\partial g(x,u)}{\partial u}dx\right\} = \int\limits_a^b \frac{\partial g(x,u+\theta h)}{\partial u}dx - \int\limits_a^b \frac{\partial g(x,u)}{\partial u}dx =$$

$$= \int_a^b \left[ \frac{\partial g\,(x, u + \theta h)}{\partial u} - \frac{\partial g\,(x,u)}{\partial u} \right] dx. \qquad \textbf{(A)}$$

Da análise elementar sabemos que se uma função $\varphi$ for definida e contínua num conjunto fechado e limitado então é uniformemente contínua nesse conjunto.

Como admitimos que $\dfrac{\partial g\,(x,u)}{\partial u}$ é contínua num rectângulo fechado e limitado resulta que é uniformemente contínua nesse rectângulo.

Fixe-se $\varepsilon > 0$ e escolha-se $\delta$ de modo que os valores de $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ em dois pontos diferentes do rectângulo difiram de uma quantidade inferior a $\varepsilon$ quando a distância entre os dois pontos escolhidos é inferior a $\delta$ .

Então :

$$0 < |h| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\partial g(x, u + \theta h)}{\partial u} - \frac{\partial g\,(x,u)}{\partial u} \right| < \varepsilon.$$

Atendendo à expressão **(A)** vem então :

$$\int_a^b \left[ \frac{\partial g\,(x, u + \theta h)}{\partial u} - \frac{\partial g\,(x,u)}{\partial u} \right] dx < \varepsilon \int_a^b dx = \varepsilon(b-a)$$

e
$$\left| \frac{I(u+h) - I(u)}{h} - \int_a^b \frac{\partial g\,(x,u)}{\partial u} dx \right| < \varepsilon(b-a).$$

Como $\varepsilon$ é arbitrário,

$$\lim_{h \to 0} \left\{ \frac{I(u+h) - I(u)}{h} - \int_a^b \frac{\partial g\,(x,u)}{\partial u} dx \right\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dI}{du} = \int_a^b \frac{\partial g\,(x,u)}{\partial u} dx.$$

$\blacksquare$

[2] Queremos provar que se $\dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y'}\right)$ é contínua num ponto $x_0$ e nesse ponto se tem

$$\frac{\partial f(x_0,y)}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial f(x_0,y)}{\partial y'}\right]>0$$

então existe uma vizinhança$]x_0-\eta,x_0+\eta[$ na qual a expressão permanece positiva.

**dem.**

Fixe-se $\varepsilon>0$ tal que,

$$0<\varepsilon<\frac{\partial f(x_0,y)}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f(x_0,y)}{\partial y'}\right).$$

Pela continuidade da expressão existe $\eta>0$ tal que para $x\neq x_0$ :

$$|x-x_0|<\eta\Rightarrow\quad \begin{array}{l}\left|\left[\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y'}\right)\right]-\right.\\ \left.-\left[\dfrac{\partial f(x_0,y)}{\partial y}-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f(x_0,y)}{\partial y'}\right)\right]\right|<\varepsilon.\end{array}$$

Mas isto significa que :

$$-\varepsilon<\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y'}\right)\right]-\left[\frac{\partial f(x_0,y)}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f(x_0,y)}{\partial y'}\right)\right]<\varepsilon$$

pelo que,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y'}\right)>\frac{\partial f(x_0,y)}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f(x_0,y)}{\partial y'}\right)-\varepsilon\ .$$

Mas pela escolha inicial de $\varepsilon$ ainda se tem

$$\frac{\partial f(x_0,y)}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f(x_0,y)}{\partial y'}\right)>\varepsilon$$

pelo que,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y'}\right)>0$$

para todo o $x \in \left]x_0 - \eta, x_0 + \eta\right[$.

■

[3]
**DEFIN.**
Seja uma função complexa ( ou real ) $f$ definida num intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

A função $f$ diz-se absolutamente contínua em $[a, b]$ se dado qualquer $\varepsilon > 0$ existir um número $\delta > 0$ tal que, para toda a família finita de subintervalos disjuntos $(a_k, b_k)$ de $[a, b]$ , $k = 1, 2, ..., n$ , que satisfaça

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$$

for válida a desigualdade,

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

[4] Um espaço linear (ou vectorial) munido de uma norma denomina-se espaço normado.

Se um espaço normado $L$ for completo, mais precisamente, se todas as sucessões de Cauchy em $L$ forem convergentes em $L$, na métrica definida pela norma, $L$ designa-se por espaço de Banach.

[5]
**DEFIN.**
Um funcional é uma função $f : X \to K$ , onde $X$ é um espaço linear e $K$ é um corpo de escalares ( or exemplo, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ).Um funcional diz-se linear se

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Um funcional diz-se finito se tiver apenas valores $f(x)$ finitos.

Um funcional diz-se subaditivo se, $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$, para todo o $x, y \in X$.

Um funcional diz-se positivamente homogéneo se,

$$f(\alpha x) = \alpha f(x) \quad ,$$

para todo o $\alpha \in [0, +\infty[$ e todo o $x \in X$.

Um funcional linear diz-se limitado se existir um número $c \in \mathbb{R}$ tal que,

$$|f(x)| \leq c \cdot \|x\|_X$$

para todo o $x$ pertencente ao domínio de $f$ .

[6]
**DEFIN.**
Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função definida num espaço topológico $X$.
Se para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$ for aberto o conjunto

$$\{x \in X : f(x) < \alpha\}$$

$f$ diz-se semicontínua superior (SCS).

Diz-se que $f$ é SCS num ponto $\overline{x} \in X$, se para toda a sucessão $\{x_k\} \subset X$, convergente para $\overline{x}$ , se verificar

$$\limsup_{k\to\infty} \ f(x_k) \leq f(\overline{x}).$$

[7]
**DEFIN.**
**1)** Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ , $\Omega \subset X$, $X$ espaço métrico, uma função limitada numa vizinhança de $c$, sendo $c$ um ponto de acumulação de $\Omega$.

Para $\varepsilon > 0$ define-se :

$$\varphi(\varepsilon) := \sup\{f(x) : \|x - c\| < \varepsilon, \ x \in \Omega\}.$$

Então o limite superior de $f$ em $c$ é

$$\limsup_{x\to c} \ f := \inf \ \{\varphi(\varepsilon) : \varepsilon > 0\}.$$

**2)** Suponha-se que $\{f_n\}$ é uma sucessão de funções reais definidas em $X, f_n : X \to \mathbb{R}$.
Se a sucessão for pontualmente majorada, definimos a função supremo da sucessão por

$$\left(\sup_n f_n\right)(x) := \sup_n \{f_n(x)\}.$$

Se a sucessão for pontualmente limitada,definimos a função limite superior da sucessão por

$$\left(\limsup_{n\to+\infty} f_n\right)(x) := \lim_{p\to+\infty} \sup_{n>p} f_n(x) = \inf_p \sup_{n>p} f_n(x)\,.$$

[8] Um funcional $f : X \to \mathbb{R}$ diz-se sublinear se cumprir as condições :

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y)$$
$$f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

para todo o $x \in X$ e todo o $\alpha \in [0, +\infty[$ .

*TEOREMA DE HAHN-BANACH*

Sejam $X$ um espaço linear sobre $\mathbb{R}$ e $p$ um funcional sublinear sobre $X$ . Seja ainda $f$ um funcional linear definido num subespaço $Z$ de $X$ e tal que $f(x) \leq p(x)$ para todo o $x \in Z$.

Então existe um prolongamento linear $\tilde{f}$ de $f$ satisfazendo $\tilde{f}(x) \leq p(x)$ , para todo o $x \in X$, ([11] , pág.129) .

**OBS.** O teorema de HAHN-BANACH admite generalização a espaços lineares complexos e a espaços normados. O enunciado é então o seguinte :

Seja $f$ um funcional linear limitado num subespaço $Z$ de um espaço normado $X$ .

Então existe um funcional linear limitado $\tilde{f}$ em $X$ que é um prolongamento de $f$ a $X$ e tem a mesma norma

$$\|\tilde{f}\|_X = \|f\|_Z$$
$$\|\tilde{f}\|_X = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} |\tilde{f}(x)|$$
$$\|f\|_Z = \sup_{\substack{x\in Z\\ \|x\|=1}} |f(x)|$$

[9] Seja $X$ um espaço normado.

Um subconjunto não vazio $S \subset X$ diz-se fracamente relativamente compacto se toda a sucessão em $S$ contiver uma subsucessão fracamente convergente cujo limite fraco pode, ou não, pertencer a $S$ . Se este limite pertencer a $S$ , $S$ diz-se fracamente compacto.

[10] Demonstração do Teorema **3.2-2**, do Capítulo II.

Para se efectuar esta demonstração recorre-se ao seguinte Lema da teoria dos espaços vectoriais topológicos,(Ver BOURBAKI,ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES,PARIS 1953,pág.73)

<u>LEMA</u> : num espaço localmente convexo $X$ , todo o conjunto convexo e fechado $A \subset X$ é a intersecção dos semi-espaços fechados que o contêm..

Um semi-espaço fechado é definido por $\{x \in X : \langle x, \xi \rangle \leq \alpha\}$ , $\alpha \in \mathbb{R}$ , $\xi \in X^*$.

**a)** <u>$1^0$ caso</u> : $\sigma_C(\xi) = \sigma_D(\xi) \Leftrightarrow C = D$ , $\forall \xi \in X^*$

A igualdade $\sigma_c(\xi) = \sigma_D(\xi)$ significa que se $\langle x, \xi \rangle \leq \alpha$ para $x \in C$ então $\langle x, \xi \rangle \leq \alpha$ para $x \in D$ e reciprocamente.

Então, um semi-espaço fechado que contém $C$ também contém $D$ e reciprocamente. Pelo Lema resulta que $C = D$.

A recíproca é imediata.

<u>$2^0$ caso</u> : $C \subset D \Rightarrow \sigma_C(\xi) \leq \sigma_C(\xi)$

$$C \subset D \Rightarrow \sup_{x \in C} \langle x, \xi \rangle \leq \sup_{x \in D} \langle x, \xi \rangle \Rightarrow \sigma_C(\xi) \leq \sigma_D(\xi),$$

para todo o $\xi \in X^*$.

<u>$3^0$ caso</u> : $\sigma_C(\xi) \leq \sigma_D(\xi) \Rightarrow C \subset D$

Podemos escrever $\langle x, \xi \rangle \leq \alpha_1$ para $x \in C$ , $\langle x, \xi \rangle \leq \alpha_2$ para $x \in D$ e $\alpha_1 \leq \alpha_2$.

A intersecção dos semi-espaços fechados que contêm $D$ também contém $C$ ; o recíproco não é válido. Logo $C \subset D$.

**b)** A demonstração é análoga à anterior, considerando subconjuntos de $X^*$ e $X \subset (X^*)^*$.

**c)** Se $A \subset X$ , diz-se que $A$ é fracamente limitado se $\langle x, \xi \rangle$ for limitado para $x \in A$ e $\xi \in X^*$.

Como $\sigma_A(\xi) = \sup_{x \in A} \langle x, \xi \rangle$ , deduz-se que um conjunto $A$ convexo e fechado será fracamente limitado e portanto compacto se e só se $\sigma_A(\xi)$ tiver valores finitos para cada $\xi \in X^*$.

**d)** **A.** Começamos por demonstrar o seguinte resultado :

Seja $E$ um espaço de Banach.

Uma função $\sigma$ definida em $E^*$ , $-\infty < \sigma(\xi) \leq +\infty$ , é função de suporte de um conjunto convexo fechado em $E$ se e só se $\sigma$ for $SCI$ na topologia fraca $-*$ , subaditiva e positivamente homogénea.

1º caso: as condições indicadas são necessárias.

De facto, fixando $x \in E$ , tem-se que $\langle x, \cdot \rangle$ é uma função linear, homogénea e contínua na topologia fraca $- *$ .

Como $\sigma(\cdot)$ é o supremo de uma família de funções do tipo indicado, $\sigma(\cdot)$ será subaditiva, positivamente homogénea e $SCI$ na topologia fraca.

2º caso: as condições indicadas são suficientes.

Seja $F = E + \mathbb{R}$ .

Os elementos de $F$ são da forma $(x, r)$ com $x \in E$ , $r \in \mathbb{R}$ e a topologia de $F$ é a topologia produto.

O espaço dual $F^*$ é $F^* = E^* + \mathbb{R}$ e para $(x, r) \in F$ e $(\xi, r') \in F^*$ podemos escrever

$$\langle (x, r), (\xi, r') \rangle = \langle x, \xi \rangle - rr'.$$

A um conjunto convexo fechado $K \subset E$ fazemos corresponder o cone convexo $C \subset F$ definido por :

$$C = \overline{\{(tx, t) : x \in K, t \geq 0\}}.$$

Todos os pontos $(x, r)$ de $C$ são da forma $(tx, t)$ excepto os que se situam no plano $r = 0$. Concluímos que existe uma correspondência biunívoca entre os conjuntos convexos fechados $K \subset E$ e os cones convexos fechados $C \subset F$. Estes cones têm o vértice na origem e estão contidos no semi-espaço $r \geq 0$, mas não no plano $r = 0$.

Seja em $F^*$ o cone dual $C^*$ definido por

$$C^* = \{(\xi, r') : \langle (x, r), (\xi, r') \rangle \leq 0 \text{ para } (x, r) \in C\}.$$

Esta definição pode escrever-se,

$$\langle x, \xi \rangle - r' \leq 0 \quad \text{para } x \in K$$

ou

$$\sigma_K(\xi) \leq r'.$$

Portanto $C^*$ é a imagem geométrica da função de suporte de $K$ , $\sigma_K$.

**B.** Escolhamos finalmente uma função $\sigma$ que satisfaz as condições da hipótese e defina-se

$$D = \{(\xi, r') : \sigma(\xi) \leq r'\}.$$

Pela subaditividade e homogeneidade positiva de $\sigma$ , $D$ é um cone convexo e como $\sigma$ é fracamente $SCI$ resulta que $D$ é fechado na topologia fraca.

Como $\sigma(0) = 0$ segue-se que $(0, r') \in D$ se e só se $r' \geq 0$.

Seja $C$ o cone dual de $D$ :

$$C = \{(x, r) : \langle (x, r), (\xi, r') \rangle \leq 0 \text{ para } (\xi, r') \in D\}$$

Como $C$ é a intersecção de semi-espaços fechados, $C$ é um cone convexo fechado e situa-se no semi-espaço $r \geq 0$ pois $(0, r') \in D$ se $r' \geq 0$.

Portanto, $D \subset C^*$.

Resta mostrar que $C^* \subset D$ , para se concluir que $C^* = D$.

Mas $C^* \subset D$ equivale a dizer que dado $(\xi_0, r') \notin D$ existe $(x, r) \in C$ t.q. $\langle (x, r), (\xi_0, r') \rangle > 0$.

Dito de outro modo, é preciso demonstrar que se $(\xi_0, r') \notin D$ então existe $(x, r) \in F$ t.q. $\langle (x, r), (\xi_0, r') \rangle > 0$ e $\langle (x, r), (\xi, r') \rangle \leq 0$ para todo o $(\xi, r') \in D$.

Se$F^*$ estiver munido da topologia fraca, os funcionais lineares sobre $F^*$ podem escrever-se $\langle (x, r), (\xi, r') \rangle$ com $(x, r) \in F$ . Então pelo Lema inicial existe um elemento $(x, r) \in F$ e um real $\alpha$ t.q. $\langle (x, r), (\xi_0, r') \rangle > \alpha$ , $(\xi_0, r') \notin D$ , e $\langle (x, r), (\xi, r') \rangle \leq \alpha$ para $(\xi, r') \in D$.

Como $0 \in D$ segue-se que $\alpha \geq 0$ e portanto $\langle (x, r), (\xi_0, r') \rangle > 0$. Como $D$ é um cone tem-se igualmente que $\left\langle (x, r), t\left(\xi, r'\right) \right\rangle \leq \alpha$ para todo o $t > 0$ e resulta daqui que,

$$\left\langle (x, r), \left(\xi, r'\right) \right\rangle \leq 0.$$

Portanto, $C^* \subset D$ e $D \subset C^*$ implicam a igualdade.Conclui-se que o conjunto convexo fechado $K \subset E$ que corresponde a $C$ ,cujo dual $C^*$ é a imagem geométrica da função de suporte de $K$,tem $\sigma$ como função de suporte.

**C.** Finalmente,o teorema 3.2-2 fica provado fazendo $X = E^*, X^* = E, K = \Sigma$.

■

**[11]** Demonstração do Corolário 3.4-8,Capítulo II.

Para fazer a demonstração vamos recorrer ao Teorema do Valor Médio em espaços lineares normados,cujo enunciado é o seguinte.

TEOREMA DO VALOR MÉDIO:

Sejam $X, Y$ dois espaços lineares normados e um aberto $O \subset X$, o qual contém o segmento $[a, b]$. Se a aplicação $f : O \to Y$ for diferenciável segundo Gâteaux em cada ponto $x \in [a, b]$ ,então

$$\|f(b) - f(a)\|_Y \leq \sup_{c \in [a,b]} \left\|f'(c)\right\| \|b - a\|_X$$

com $c = a + \theta(b - a)$, $\theta \in ]0, 1[$.
Aplicando o teorema à função,

$$g(x) = f(x) - Tx,$$

onde $T \in L(X, Y)$ ,obtemos como corolário que,

$$\|f(b) - f(a) - T(b - a)\| \leq \sup_{c \in [a,b]} \left\|f'(c) - T\right\| \|b - a\|.$$

Vamos então demonstrar que se $f$ é continuamente diferenciável em $x$ , então $f$ é estritamente diferenciável em $x$ e,portanto,$f$ é localmente lipschitziana em $x$ .

**dem**
Seja uma vizinhança $O$ de $\hat{x}, O \subset X$.
A aplicação $f : X \to Y$ é,por hipótese,continuamente diferenciável,o que significa que é diferenciável segundo Gâteaux em cada $x \in O$ e que a aplicação $x \mapsto Df(x)$ é contínua de $X$ em $L(X, Y)$.
Fixemos $\varepsilon > 0$ e determine-se $\delta > 0$ tal que:

$$\|x - \hat{x}\| < \delta \Rightarrow \|Df(x) - Df(\hat{x})\| < \varepsilon.$$

Observe-se que se escolhermos $x_1, x_2$ tais que,

$$\|x_1 - \hat{x}\| < \delta \qquad \text{e} \qquad \|x_2 - \hat{x}\| < \delta,$$

então para todo o $x = x_1 + t(x_2 - x_1)$, $t \in [0, 1]$ ,tem-se $x \in [x_1, x_2]$ .Tem-se ainda:

$$\|x - \hat{x}\| = \|x_1 + t(x_2 - x_1) - \hat{x}\| = \|x_1 + tx_2 - tx_1 - \hat{x}\| =$$

$$= \|x_1 + tx_2 - tx_1 - \hat{x} + t\hat{x} - t\hat{x}\| = \|t(x_2 - \hat{x}) + (1-t)(x_1 - \hat{x})\| \leq$$
$$\leq t\|x_2 - \hat{x}\| + (1-t)\|x_1 - \hat{x}\| \leq t\delta + (1-t)\delta = \delta,$$

e portanto,

$$\|Df(x) - Df(\hat{x})\| < \varepsilon.$$

Aplicando o corolário do Teorema do Valor Médio.com $T = Df(\hat{x})$, obtemos:

$$\|f(x_2) - f(x_1) - Df(\hat{x})(x_2 - x_1)\| \leq$$
$$\leq \sup_{x \in [x_1, x_2]} \|Df(x) - Df(\hat{x})\| \, \|x_2 - x_1\| \leq \varepsilon \|x_2 - x_1\|.$$

Mas este resultado implica a diferenciabilidade estrita de $f$ em $\hat{x}$.De facto, $f$ pode definir-se como estritamente diferenciável em $\hat{x}$ se existir um operador $T \in L(X, Y)$ tal que para todo o $\varepsilon > 0$ existe um número $\delta > 0$, de modo que se verifique,

$$\|x_1 - \hat{x}\| < \delta, \ \|x_2 - \hat{x}\| < \delta \Rightarrow \|(f(x_2) - f(x_1) - T(x_2 - x_1)\| \leq$$

$$\leq \varepsilon \|x_2 - x_1\|$$

para todo o $x_1, x_2 \in O \subset X$ , com $T = D_S f(\hat{x})$.

Finalmente pelo Teorema **3.4-6** do capítulo II, $f$ é localmente lipschitziana em $\hat{x}$.

■

**[12]** Temos que ,

$$f^{\circ}(x; v) = \limsup_{\substack{x' \to x \\ t \to 0^+}} \frac{f(x' + tv) - f(x')}{t}.$$

Vamos aplicar a definição de limite superior ao quociente anterior. Como $f$ é localmente lipschitziana em $x$ , é limitada numa vizinhança $\varepsilon\delta$ de $x$ , $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$.

Para $x' \in x + \varepsilon\delta$ tem-se :

$$\varphi_1(x',\varepsilon) = \sup\left\{\frac{f(x'+tv)-f(x')}{t} : 0<t<\varepsilon\right\}$$

$$\varphi_2(\varepsilon\delta) = \sup\{\varphi_1(x',\varepsilon) : \|x'-x\| < \varepsilon\delta\} =$$

$$= \sup\left\{\sup\left\{\frac{f(x'+tv)-f(x')}{t} : 0<t<\varepsilon\right\} : \|x'-x\| < \varepsilon\delta\right\}.$$

Então

$$f^{\circ}(x;v) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \sup_{\|x'-x\|<\varepsilon\delta} \sup_{0<t<\varepsilon} \frac{f(x'+tv)-f(x')}{t}.$$

**[13]** Seja $X$ um espaço linear sobre $\mathbb{R}$ e e seja um subconjunto qualquer $S \subset X$.

A intersecção de todos os conjuntos convexos que contêm $S$ é um conjunto convexo e é o menor conjunto convexo que contém $S$ . Esta intersecção denomina-se convexificado de $S$ e simboliza-se por $coS$.

A intersecção de todos os conjuntos convexos e fechados que contêm $S$ é o menor conjunto convexo fechado que contém $S$ . Esta intersecção é o convexificado fechado de $S$ e escreve-se $\overline{co}S$ .

Num espaço de Hausdorff localmente convexo os conjuntos convexos fracamente fechados são idênticos aos conjuntos convexos fechados.

A expressão fracamente $-*$ ,fechado refere-se à topologia fraca $-*$, que é a mais fraca topologia em relação à qual é contínuo o funcional $F_x$ definido em $X^*$ por $F_x(f) = f(x)$ para cada $f \in X^*$ e cada $x \in X$.

**[14]** Uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos de $X$ chama-se anel se for fechada para as operações de reunião finita e complementação.

$\mathcal{F}$ chama-se semi-anel se for fechada para a intersecção finita e se a diferença de dois conjuntos de $\mathcal{F}$ puder ser escrita como reunião disjunta de elementos de $\mathcal{F}$ .

**[15]** **a)** Um espaço topológico $X$ diz-se separável se contiver uma parte $A$ numerável e densa em $X$, mais precisamente, se $\overline{A} = X$ .

**b)** O espaço de Lebesgue $L^p(\Omega)$ é o conjunto das classes de equivalência das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ definidas num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , mensuráveis, com norma finita. A norma é

$$\|u\|_{L^p} = \left[\int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx\right]^{1/p} < \infty \ , \ p \in [1,+\infty[ .$$

c) Seja o espaço $C^m(\Omega)$ das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ , contínuas e com derivadas até à ordem $m$.

Em $C^m(\Omega)$ pode definir-se a norma,

$$\|u\|_{m,p} = \left[ \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u|^p \, dx \right]^{1/p} < \infty \ , \ p \in [1, +\infty[ ,$$

onde $\alpha$ é um multiíndice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n), \alpha_j \in \mathbb{N}_0$ e,

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$$

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}} \quad , \quad D^{(0,0,...,0)} u = u.$$

O espaço $C^m(\Omega)$ não é completo com esta norma. O fecho de $C^m(\Omega)$ em relação à norma $\|\cdot\|_{m,p}$ denomina-se espaço de Sobolev, $W^{m,p}(\Omega)$. Este espaço, com a norma indicada é um espaço de Banach.

Pode escrever-se ainda :

$$W^{m,p}(\Omega) = L^p(\Omega) \cap \{u : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \, , |\alpha| \leq m\}$$

e a norma $\|u\|_{m,p}$ é equivalente a

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}.$$

**[16]** Uma família numerável $\mathcal{F}$ de conjuntos abertos chama-se base numerável de um espaço topológico $X$ se cada parte aberta de $X$ for representável como a reunião de uma colecção qualquer de conjuntos de $\mathcal{F}$ .

**[17]** Seja um conjunto $E$ . Chama-se função característica de uma parte $P \subset E$ à aplicação $1_P : E \to \{0, 1\}$ tal que

$$1_P = \begin{cases} 1, \text{ se } x \in P \\ 0, \text{ se } x \in E \backslash P \end{cases} .$$

**[18]** **a)**- Seja $X$ um espaço linear real e $x_1, x_2, ..., x_n \in X$.

O elemento $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ chama-se combinação convexa dos elementos $x_{1,...,}x_n$ se $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ e $\lambda_k \geq 0$.

**b)**- LEMA DE MAZUR :

Seja $X$ um espaço normado e $\{u_n\}, n \in \mathbb{N}$ , uma sucessão fracamente convergente para $\overline{u}$.

Então existe uma sucessão de combinações convexas $\{v_n\}, n \in \mathbb{N}$ ,

$$v_n = \sum_{k=n}^{N_n} \lambda_k u_k \quad , \sum_{k=n}^{N_n} \lambda_k = 1 \ , \ \lambda_k \geq 0 \ , \ n \leq k \leq N_n$$

a qual converge em norma para $\overline{u}$ .

**[19]** **1)**-Sejam $X, Y$ espaços lineares normados. Uma aplicação $a : X \to Y$ diz-se afim se existir uma aplicação linear $l : X \to Y$ e uma constante $\alpha \in Y$ tais que :

$$a(x) = l(x) + \alpha \text{ , para todo o } x \in X.$$

Sendo $l$ linear tem-se $l(0) = 0$ e $a(0) = \alpha$.

**2)**-Seja $X$ um espaço real localmente convexo. Indica-se por $\Gamma(X)$ o conjunto das funções $g : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ que são supremo pontual de uma família de funções afins contínuas ..

O subconjunto das funções $g \in \Gamma(X)$ diferentes das constantes $-\infty$ e $+\infty$ representa-se por $\Gamma_0(X)$ .

Temos os seguintes resultados :

<u>TEOREMA</u> : ([8] ,pág.14)

São propriedades equivalentes :

**1)** $g \in \Gamma(X)$.

**2)** $g$ é convexa e $SCI$ e se $g$ assumir o valor $-\infty$ então $g(x) \equiv -\infty$ .

<u>TEOREMA</u> : ([8] ,pág.15)

Sejam $f, g$ funções de $X$ em $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ . As seguintes definições são equivalentes.

**1)** $g$ é o supremo pontual das funções afins contínuas em toda a parte inferiores a $f$ (minorantes de $f$).

**2)** $g$ é o maior minorante de $f$ em $\Gamma(X)$.

TEOREMA : ([8] ,pág.18)

Seja $f : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Então $f^{**}$ é o maior minorante de $f$ em $\Gamma(X)$ e se $f \in \Gamma(X)$ então $f^{**} = f$.

**[20]** Referência bibliográfica :
Espaces vectoriels topologiques
A.Grothendieck
Sociedade de Matemática de São Paulo-Brasil
Teorema V. 4.2.

**[21]** Seja $X$ um espaço linear topológico .
O espaço $X^*$ dos funcionais lineares contínuos definidos em $X$ , x$^*$ : $X \to \mathbb{R}$ , chama-se dual topológico de $X$ .
Os elementos de $X^*$ podem escrever-se na forma $\langle x, x^* \rangle$ com o significado $x^*(x)$ .
A notação $\langle x, x^* \rangle$ chama a atenção para o facto de $X$ e $X^*$ desempenharem papéis simétricos.
Se escrevermos,

$$X \times X^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, x^*) \longrightarrow \langle x, x^* \rangle$$

estamos perante uma forma bilinear que pode ser encarada de duas maneiras :

**1)** como uma família de formas lineares sobre $X$ dependentes do parâmetro $x^* \in X^*$;

**2)** como uma família de formas lineares sobre $X^*$dependentes do parâmetro $x \in X$.

Assim, $X^*$ é um espaço vectorial de formas lineares sobre $X$ e $X$ é um espaço vectorial de formas lineares sobre $X^*$ ; identifica-se $x^* \in X^*$ com a função $x \mapsto \langle x, x^* \rangle$ e identifica-se o ponto $x \in X$ com a função $x^* \mapsto \langle x, x^* \rangle$ .
É assim possível introduzir em $X^*$ a topologia da convergência fraca de $X$ , que se chamará topologia fraca de $X^*$.Diz-se que a sucessão $x_n^*$ converge fracamente * para $x^*$ se

$$x_n^* (x) \to x^* (x) \ , \ n \to \infty \ , \forall x \in X.$$

Indica-se esta topologia por $\sigma (X^*, X)$.

Podemos, analogamente, introduzir em $X$ a topologia da convergência fraca de $X^*$,que se chamará topologia fraca de $X$ .Diz-se que a sucessão $x_n$ converge fracamente para $x$ se

$$x^*(x_n) \to x^*(x), \ n \to \infty, \quad \forall x^* \in X^*.$$

Indica-se esta topologia por $\sigma (X, X^*)$.

Trata-se de topologias dos espaços de Hausdorff localmente convexos e $\sigma (X, X^*)$ é a menos fina destas topologias sobre $X$ com dual $X^*$. Em particular $\sigma (X, X^*)$ é menos fina que a topologia original de $X$.

Os subconjuntos fracamente fechados de $X$ serão fechados, mas o recíproco não é geralmente válido.

Prova-se que todo o conjunto convexo fechado é fracamente fechado. Num espaço de Hausdorff localmente convexo os conjuntos convexos fracamente fechados coincidem com os conjuntos convexos fechados.

No contexto dos espaços normados esta última afirmação é concretizada no Lema de Mazur.

**[22]** O enunciado do teorema a que se alude é o seguinte :

<u>TEOREMA</u> :([8] , pág. 276) .

Seja $f$ um integrando normal não negativo.
Supõe-se que existe $p_0 \in L_m^\alpha$ tal que

$$\int_\Omega f\left[x, p_0 (x)\right] dx < +\infty \ ,$$

e, se $\alpha = +\infty$ ,

$$\Phi (|\xi|) \leq f (x, \xi)$$
$$\lim_{t \to \infty} \frac{\Phi (t)}{t} = +\infty.$$

Seja $G \in \Gamma_0 (L_m^\alpha)$ cuja restrição a $S_\lambda$,

$$S_\lambda = \left[ p \in L_m^\alpha : \int_\Omega f\left[x, p (x)\right] dx \leq \lambda \right] \ ,$$

é contínua em $\sigma\left(L^{\alpha}, L^{\alpha'}\right)$ para todo o $\lambda$ .

Então :

$$\inf_{p\in L_m^{\alpha}}\left[G(p)+\int_{\Omega} f[x,p(x)]\,dx\right]=\inf_{p\in L_m^{\alpha}}\left[G(p)+\int_{\Omega} f^{**}[x,p(x)]\,dx\right]$$

$$G(p)+\int_{\Omega} f^{**}[x,p(x)]\,dx=\liminf_{v\to p}\left[G(v)+\int_{\Omega} f[x,v(x)]\,dx\right].$$

**[23]** Seja $C$ um subconjunto de Borel de $\Omega\times B$ , onde $\Omega$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $B$ é um subconjunto de Borel de $\mathbb{R}^p$.

A secção $C_x$ de $C$ é definida por,

$$C_x=\{a\in B:(x,a)\in C\}.$$

A função indicatriz $f$ de $C$ é definida por .

$$f(x,a)=0 \quad \text{se } (x,a)\in C$$

$$f(x,a)=+\infty \quad \text{se}(x,a)\notin C.$$

$f$ é um integrando normal positivo.

**[24]** Se considerarmos dois espaços métricos $X,Y$ e uma aplicação biunívoca $f:X\to Y$,então existe a aplicação inversa $f^{-1}:Y\to X$.

Uma aplicação $f$ biunívoca e bicontínua ($f$ e$f^{-1}$ contínuas) denomina-se homeomorfismo e os espaços $X,Y$ dizem-se homeomorfos.

A noção de homeomorfismo estende-se aos espaços topológicos . Os espaços topológicos homeomorfos possuem as mesmas propriedades topológicas. A topologia de um espaço obtém-se como a imagem ou a imagem inversa da topologia do outro.

A relação de homeomorfismo é uma relação de equivalência, pelo que a totalidade dos espaços topológicos pode ser decomposta em classes de espaços homeomorfos disjuntas duas a duas.

Observe-se ainda, neste contexto, que a métrica de um espaço métrico define univocamente a sua topologia, mas que uma dada topologia sobre $(X,\rho)$ pode ser deduzida de diferentes métricas em $X$.

**[25]** <u>TEOREMA DO VALOR MÉDIO</u> :

Sejam $X,Y$ espaços lineares normados e seja um aberto $U\subseteq X$ o qual contém o segmento $[a,b]$.

Se a função $f:U\to Y$ for diferenciável segundo Gâteaux em cada ponto $x\in[a,b]$ então,

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{c\in[a,b]} \|f'(c)\| \cdot \|b - a\|$$

[**26**] 1) DEFIN.

Seja uma multifunção $F : X \to Y$ com imagens não vazias. Uma aplicação $f : X \to Y$ chama-se uma selecção de $F$ se para todo o $x \in X$ se verificar $f(x) \in F(x)$.

**2)** TEOREMA DE KURATOWSKI E RYLL-NARDZEWSKI ([4], pág. 283)

Seja $Y$ um espaço métrico completo e separável e seja $x \mapsto F(x) \subset Y$ uma multifunção cujos valores são subconjuntos fechados de $Y$.

Se $F$ for mensurável, então existe uma selecção mensurável $f : X \to Y$ t.q. $f(x) \in F(x)$ para todo o $x \in X$.

**3)**-Se $Y$ for um espaço topológico diz-se que uma aplicação $f : X \to Y$ é mensurável (medida de Lebesgue ) se para todo o aberto $G \subset Y$ o conjunto $[x \in X : f(x) \in G]$ pertencer à tribo de Lebesgue, $\mathcal{L}$.

No caso de uma multifunção $x \mapsto F(x) \subset Y$, diz-se que $F$ é mensurável se para todo o aberto $G \subset Y$ o conjunto $[x \in X : F(x) \cap G \neq 0]$ pertencer a $\mathcal{L}$.

[**27**] Para a demonstração do resultado enunciado ver as referências:

C.J.DE LA VALÉE POUSSIN - Sur l'intégrale de Lebesgue, Trans.Amer.Math.Soc.,16(1915), 435-501

J.SERRIN+D.E.VARBERG - A general chain rule for derivatives and the change of variables formula for the Lebesgue integral - Amer.Math.Monthly 76 (1969),514-520.

M-MARCUS+V.J.MIZEL - Absolute continuity on tracks and mappings of Sobolev spaces Arch.Rational Mech.Anal. 45 (1972), 294-320.

[**28**] Seja um operador $T$ entre dois espaços normados $X, Y$.
$T$ será um operador contínuo se existir um real positivo $M$ tal que,

$$\|Tx_1 - Tx_2\|_Y \leq M \|x_1 - x_2\|_X$$

para todo o $x_1, x_2 \in X$.
$T$ será um operador limitado se existir um real positivo $N$ tal que,

$$\|Tx\|_Y \leq N\,\|x\|_X .$$

Sabe-se que se $T$ for linear, então $T$ é limitada se e só se for contínua.

Uma família de operadores lineares contínua $\{T_h\}$ dir-se-á equilimitada se existir um real positivo $M$ tal que

$$\|T_h x\|_Y \leq M \cdot \|x\|_X$$

para todo o operador $T_h$.

**[29]** Existem diversas desigualdades que permitem fazer uma estimativa da norma $\|\cdot\|_{L^p}$ de uma função a partir da norma das suas derivadas parciais. Conhece-se, por exemplo, o seguinte resultado :

Seja um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , $n > 1$ . Existe uma constante $C = C(n,p)$ tal que, se $n > p$ e $p \geq 1$ e $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , então,

$$\|u\|_{L^{p*}} \leq C\,\|Du\|_{L^p} \;,\; p^* = \frac{np}{n-p} .$$

$C = C(n,p)$ é a constante de Sobolev e a desigualdade indicada é, também conhecida por desigualdade de Sobolev.Prova-se que o melhor valor de $C$ é dado por

$$C(n,p) = \pi^{-\frac{1}{2}} \cdot n^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{1-\frac{1}{p}} \cdot \left[\frac{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)\cdot\Gamma(n)}{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right)\cdot\Gamma\left(1+n-\frac{n}{p}\right)}\right]^{\frac{1}{n}} .$$

onde $\Gamma(\cdot)$ é a função gama.

**[30]** Seja um espaço de medida $(X, \mathcal{A}, m)$.
Um elemento $A$ de $\mathcal{A}$ diz-se um átomo para a medida $m$ se e só se :

$$m(A) > 0 \text{ e para todo o } B \in \mathcal{A} \text{ tem-se}$$
$$m(A \cap B) = 0 \text{ ou } m(A \backslash B) = 0.$$

Se não existirem átomos para a medida $m$ , esta diz-se difusa.

Se existir uma família $(A_j)_{j \in J}$ , no máximo numerável, de átomos para a medida $m$ , tal que $m\left(X \backslash \bigcup_{j\in J} A_j\right) = 0$ , a medida $m$ chama-se medida atómica.

Os átomos são elementos minimais para a relação de inclusão numa tribo. Se $A_1$ e $A_2$ forem dois átomos distintos, então $A_1 \cap A_2 = \phi$.

[31]

TEOREMA : ([4] ,pág.455)

Sejam $f^{(j)}(t) = \left(f_1^{(j)}, ..., f_n^{(j)}\right)$, $t \in A$ , $j = 1, ..., h$ , funções vectoriais com todas as componentes integráveis em $A$.

Considerem-se partições $E_1, ..., E_h$ de $A$ , onde os $E_i$ são disjuntos mensuráveis.

Sejam ainda funções de ponderação arbitrárias,

$$p_j(t), t \in A \ , 0 \leq p_j(t) \leq 1 \ , j = 1, ..., h, \quad \sum_{j=1}^{h} p_j(t) = 1.$$

Designamos por $H \subset \mathbb{R}^n$ o conjunto descrito pelos valores da função,

$$\mu(E_1, ..., E_h) = \int_{E_1} f^{(1)} dt + ... + \int_{E_h} f^{(h)} dt$$

quando $(E_1, ..., E_h)$ descreve todas as possíveis partições de $A$ em subconjuntos mensuráveis disjuntos $E_j$ de $A$, j= $1, ..., h$.

Finalmente, designe-se por $K \subset \mathbb{R}^n$ o conjunto descrito pelos valores de função

$$v(p_1, ..., p_h) = \int_A p_1 f^{(1)} dt + ...... + \int_A p_h f^{(h)} dt$$

quando $p_1, ..., p_h$ descrevem todos os possíveis sistemas de funções mensuráveis $p_j(t), t \in A$, $0 \leq p_j(t) \leq 1$, $j = 1, ..., h$, $\sum_1^h p_j(t) = 1$.

Então os subconjuntos $H, K \subset \mathbb{R}^n$ são convexos e compactos e $H = K$.

[32]

Um difeomorfismo é uma aplicação $f : U \to V$ ,sendo $U, V$ abertos contidos em espaços normados reais ou complexos,e tal que $f$ e $f^{-1}$ são bijectivas e continuamente diferenciáveis.

[33]

TEOREMA DE EGOROV:

Seja um conjunto mensurável $M \subset \mathbb{R}^n$,com medida finita.
Seja ainda uma sucessão de funções mensuráveis $\{f_k\}$ ,
$f_k : M \to \mathbb{R}^n$,convergente para $f(x)$ para quase todo o $x \in M$.

Então,para quase todo o $\varepsilon > 0$ existe um conjunto mensurável $M_\varepsilon, M_\varepsilon \subset M, m(M \setminus M_\varepsilon) \leq \varepsilon$ tal que a sucessão $\{f_k(\cdot)\}$ converge uniformemente para $f(\cdot)$ em $M_\varepsilon$.

**[34]**
TEOREMA:
Seja uma função $u \in L^p(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}^n$.
Então $u \in W^{1,p}(\Omega), p \geq 1$,se e só se:
a) $u$ possuir um representante $\bar{u}$ que é $AC$ em quase todos os segmentos $\lambda \subset \Omega$ paralelos aos eixos coordenados ;
b) as derivadas parciais de $\bar{u}$ pertencerem a $L^p(\Omega)$.

**[35]** A medida de Hausdorff surge com o objectivo de se definir uma medida em $\mathbb{R}^n$ à qual corresponda uma noção razoável de "comprimento","área",etc. dos conjuntos.
DEFIN.

Para cada $\gamma \geq 0, \varepsilon > 0$ e $E \subset \mathbb{R}^n$ seja,

$$H_\varepsilon^\gamma(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha(\gamma)\left(\frac{\text{diam } A_i}{2}\right)^\gamma : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \text{diam } A_i < \varepsilon\right\}$$

Como $H_\varepsilon^\gamma(E)$ é não decrescente em $\varepsilon$ ,define-se a medida de Hausdorff de dimensão $\gamma$ do conjunto $E$ por,

$$H^\gamma(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} H_\varepsilon^\gamma(E) = \sup_{\varepsilon > 0} H_\varepsilon^\gamma(E).$$

Se $\gamma \in \mathbb{N}$, $\alpha(\gamma)$ indica o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^n$.
Se $\gamma \notin \mathbb{N}$,$\alpha(\gamma)$ tem o significado de uma constante positiva arbitrária.

Prova-se ainda que para todo o conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ existe um número $d(E) \geq 0$ tal que:

$$H^\gamma(E) = 0 \text{ se } \gamma > d,$$
$$H^\gamma(E) = \infty \text{ se } \gamma < d.$$

O número $d(E)$ chama-se dimensão de Hausdorff do conjunto $E$ .

**[36]**
TEOREMA DE FUBINI:

Seja $f$ uma função mensurável definida em $\mathbb{R}^{n+m}$ e suponha-se que pelo menos um dos seguintes integrais existe e é finito:

$$I_1 = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}} |f(x,y)|\, dxdy$$

$$I_2 = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left[ \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x,y)|\, dx \right] dy$$

$$I_3 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left[ \int\limits_{\mathbb{R}^m} |f(x,y)|\, dy \right] dx$$

Então:

a) $f(\cdot, y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ,para quase todo o $y \in \mathbb{R}^m$;
b) $f(x, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^m)$ ,para quase todo o $x \in \mathbb{R}^n$;
c) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x, \cdot)\, dx \in L^1(\mathbb{R}^m)$;
d) $\int\limits_{\mathbb{R}^m} f(\cdot, y)\, dy \in L^1(\mathbb{R}^n)$;
e) $I_1 = I_2 = I_3$.

**[37]**
<u>TEOREMA DE BEPPO-LEVI:</u>

Seja uma sucessão não decrescente $\{f_n\}$ de funções integráveis,definidas em $A$ .

Suponha-se que a sucessão dos integrais destas funções é majorada:

$$\int\limits_A f_n(x)\, dm \leq K$$

Então existe o limite $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ para quase todo o $x \in A$, $f$ é integrável sobre $A$ e

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_A f_n(x)\, dm = \int\limits_A \lim_{n \to \infty} f_n(x)\, dm = \int\limits_A f(x)\, dm\ .$$

## BIBLIOGRAFIA:

[1] L. AMBROSIO, O.ASCENZI, G.BUTTAZZO, *LIPSCHITZ REGULARITY FOR MINIMIZERS OF INTEGRAL FUNCTIONALS WITH HIGHLY DISCONTINUOUS INTEGRANDS*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 142, 301-316, 1989

[2] J.-P.AUBIN, H.FRANKOWSKA, " *SET-VALUED ANALYSIS* " ,BIRKHÄUSER, BOSTON, 1990

[3] A.CELLINA, G.COLOMBO, *ON A CLASSICAL PROBLEM OF THE CALCULUS OF VARIATIONS WITHOUT CONVEXITY ASSUMPTIONS*, Ann. Inst. Henri Poincaré, (7), 2,1990

[4] L.CESARI, *"OPTIMIZATION-THEORY AND APPLICATIONS"*, SPRINGER-VERLAG, NEW YORK, 1983

[5] F.H.CLARKE, " *OPTIMIZATION AND NONSMOOTH ANALYSIS* " , WILEY-INTERSCIENCE, NEW YORK, 1983

[6] B.DACOROGNA, " *INTRODUCTION AU CALCUL DES VARIATIONS*" , PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIVERSITAIRES ROMANDES, LAUSANNE, 1992

[7] E.DE GIORGI, G.BUTTAZZO, G.DAL MASO, *ON THE LOWER SEMICONTINUITY OF CERTAIN INTEGRAL FUNCTIONALS* , Accad. Naz.Lincei Rend.Cl.Sci.Fis. Mat. Natur. (8), 74, 1983

[8] I.EKELAND, R.TEMAN, " *CONVEX ANALYSIS AND VARIATONAL PROBLEMS*",NORTH-HOLLAND, AMSTERDAM, 1976

[9] H.G.HEUSER, " *FUNCTIONAL ANALYSIS*" , WILEY, CHICHESTER,1982

[10] J.JAHN, " *INTROD.TO THE THEORY OF NONLINEAR OPTIMIZATION*", SPRINGER, BERLIN, 1996

[11] A.N.KOLMOGOROV,S.V.FOMIN, *"ELEMENTOS DA TEORIA DAS FUNÇÕES E DE ANÁLISE FUNCIONAL"*, MIR,MOSCOVO,1982

[12] I.J. MADDOX, " *ELEMENTS OF FUNCTIONAL ANALYSIS,*" CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. CAMBRIDGE. 1994

**[13]** J.N.REDDY, *"APPLIED FUNCTIONAL ANALYSIS AND VARIATIONAL PROBLEMS IN ENGINEERING "* ,MCGRAW-HILL, NEW YORK, 1986

**[14]** A.W. ROBERTS, D.E. VARBERG, *" CONVEX FUNCTIONS "* ,ACADEMIC PRESS, NEW YORK, 1973

**[15]** R.T.ROCKAFELLAR, *" CONVEX ANALYSIS "* , PRINCETON UNIV.PRESS, PRINCETON, 1992

**[16]** W.W.ROGOSINSKI, *" VOLUME AND INTEGRAL "*, OLIVER AND BOYD, EDINBURGH, 1952

**[17]** G.C.SHEPHARD, *" VECTOR SPACES OF FINITE DIMENSION"*, OLIVER AND BOYD, EDINBURGH, 1966